

TENSOR ANALYSIS OF NETWORKS

By
GABRIEL KRON

Engineering General Department,
General Electric co.
Schenectady, N. Y., U. S. A.

*One of a Series written in the interest of
Advanced Cours in Engineering of the
General Electric Company*

NEW YORK
JOHN WILEY AND SONS, INC.
LONDON: CHAPMAN AND HALL, LIMITED
1965

ГАБРИЭЛЬ КРОН

ТЕНЗОРНЫЙ
АНАЛИЗ
СЕТЕЙ

Перевод с английского

Под редакцией

Л. Т. Кузина и П. Г. Кузнецова

ББК 369

К83

УДК 512.972

Крон Г. Тензорный анализ сетей: Пер. с англ./Под ред. Л. Т. Кузина, П. Г. Кузнецова.— М.: Сов. радио, 1978.—720 с.

Книга представляет собой классический труд, в котором заложен фундамент системотехники, автоматизации проектирования, кибернетики и др. Термин «сеть» используется автором для обозначения технических систем любой природы.

Подлинное назначение книги не было понято до возникновения вычислительных машин.

Книга будет необходима как рабочий инструмент проектирования больших систем и автоматизации проектирования.

Без изучения настоящей книги недоступен более сильный инструмент конструирования, известный как диакоптика.

Книга предназначена для широкого круга научных работников и инженеров.

Рис. 251, табл. 21, библиограф. 142 назв.

Редакция кибернетической литературы

К $\frac{30501-069}{046(01)-78}$ 78—78

© Перевод на русский язык, издательство «Советское радио», 1978 г.

ПРЕДИСЛОВИЕ РЕДАКТОРОВ ПЕРЕВОДА

С именем известного американского инженера и ученого Габриэля Крона связаны едва ли не самые острые научные споры и дискуссии нашего века. Результаты последовательно развертывавшихся работ этого ученого, опубликованные на протяжении почти 40 лет, постепенно принесли ему широкое признание и выдвинули в ряды классиков науки, однако до сих пор многие идеи Крона остаются до конца непонятными, а его методы не имеют достаточно широкого применения.

Причина такого положения, как объективно объясняет сам Крон, заключается в том, что к построению своих математических концепций он подходит с инженерных позиций, неизбежно допуская определенные неточности и нестрогие утверждения, тем самым навлекая на себя нарекания математиков. С другой стороны, математический аппарат, развиваемый Кроном, достаточно сложный и может быть понят только инженером, имеющим специальную математическую подготовку. Поэтому при его жизни, да и в наши дни инженеры в большинстве своем также не приняли на вооружение теорию Крона, очень часто обвиняя его в математических излишествах.

Однако, как это стало понятно в последнее десятилетие, Крон заложил определенные научно-технические основы нового специалиста, называемого в наши дни инженером-математиком, который способен смело вмешиваться в абстрактные математические теории, деформируя и развивая их применительно к конкретным потребностям инженерной практики.

Начав с построения единой для всех типов электрических машин теории, основанной на введении тензоров, понятия обобщенной машины и неримановой геометрии, Крон в дальнейшем дал обстоятельный анализ использования тензора преобразования при исследовании неподвижных электрических сетей. В предлагаемой вниманию читателя книге подробно излагаются основы синтеза теоретико-множественной и алгебраической (комбинаторной) топологий. Этот синтез представляет собой объединение аналитического исследования процессов, происходящих в системах, с изучением топологической структуры систем, представленных электрическими моделями.

Затем была создана методика представления самых различных систем, а также фундаментальных уравнений теоретической физики (Максвелла, Шредингера и т. д.) с помощью моделей электрических цепей. На этой основе был разработан метод исследования сложных систем по частям (диакоптика) разделением на части модели исследуемой системы, решения этих частей отдельно с последующим объединением решений отдельных частей в решение всей системы.

Обобщением и объединением всех предыдущих работ явилась разработка Кроном теории полиэдральных сетей и основанных на этих сетях «самоорганизующихся автоматов», которой он занимался в последние годы жизни. Полиэдр, погруженный в магнитогидродинамическую плазму, проявляет свойства самоорганизации и, по мнению Крона, может служить теоретической основой для создания «искусственного мозга». Такие системы, как электрические машины, представляют собой полиэдры 3-го порядка или совокупности 0-, 1-, и 2-сетей. Хотя большая часть исследований, проведенных Кроном, относится к электротехническим и электромеханическим системам, общность введенных им тензорных и топологических методов позволяет говорить также о большом вкладе в единую теорию динамических систем.

В СССР интерес к работам Крона проявился еще в конце 40-х годов, когда в Гробрковском госуниверситете под руководством академика А. А. Андропова разбирались и обсуждались идеи Крона в связи с исследованиями возможности создания общей теории динамических систем; А. В. Гапоновым, ныне академиком, проводились исследования по применению его методов. После смерти А. А. Андропова интерес к работам Крона несколько снизился.

В 1965 г. была переведена монография Крона «Применение тензорного анализа в электротехнике» [9], в послесловии к которой редактор, отдавая должное изложенному в книге методу, поставил, однако, под сомнение необходимость применения слишком, по его мнению, сложных тензорных методов.

Новый повышенный интерес к работам Крона возник в конце 60-х годов в связи с развитием вычислительной техники и проблемами создания автоматизированных систем проектирования и автоматизированных систем управления организационными системами и технологическими процессами. В 1968 г. в некрологе, посвященном Крому, в журнале «Электричество» [10] ученый характеризуется как «основоположник тензорного и матричного анализа электрических цепей и машин, создатель обобщенной теории электрических машин». Его идеи и методы получили развитие в трудах В. В. Хрущева, И. П. Копылова и др. В 1972 г. вышел перевод одной из основных монографий Крона «Диакоптика» [1], а в 1975 г. появилось учебное пособие для вузов, в котором единая теория электрических машин излагается с позиции американского ученого [16].

За рубежом работы Крона всегда привлекали большое внимание ученых и инженеров. Начиная со статьи, опубликованной в 1930 г. [2], с последующей дискуссией, результаты его исследований, представленные в пяти монографиях и более ста статьях, были предметом горячих споров и обсуждений.

Профессор Б. Хоффман, один из сотрудников А. Эйнштейна, посвятил целый ряд обстоятельных статей разбору наиболее тонких понятий теории преобразований Крона. Рассмотрению работ Крона был посвящен специальный выпуск журнала института Франклина [18], его теория развивается в многочисленных статьях и монографиях [11—14]; памяти Крона посвящен сборник статей «Габриэль Крон и теория систем» [3]. Существуют два общества, которые с начала 50-х годов занимаются разработкой и применением в науке и технике идей Крона. В Японии под руководством профессора К. Кондо с 1954 г. действует «Исследовательская ассоциация прикладной геометрии», выпустившая уже четыре тома мемуаров [5], в которых работы Крона характеризуются как

«эпохальные», являющиеся основой для создания в дальнейшем единой теории конструирования инженерных систем. В Англии с 1950 г. действует «Тензорное общество Великобритании» (Tensor Society of Great Britain), выпускающее журнал «Matrix and Tensor Quarterly».

Книга «Тензорный анализ сетей» [15], перевод которой предлагается советскому читателю, вышла в свет в 1939 г., а спустя четверть века, в 1965 г., вышло второе издание, точная копия предыдущего. В книге подробно излагается метод определения структурных свойств сети, заложенных в диаграмме соединения ее элементов и представляемых тензором преобразования, с функциональными свойствами сети, заложенными в уравнениях ее поведения, в единый аппарат исследования сетей. «Тензорный анализ сетей» — ключ к изучению других работ Крона, в частности, метода диакоптики. По существу эта книга является подробным изложением содержания первых двух глав книги Крона «Применение тензоров к анализу вращающихся электрических машин» [17], относящихся к неподвижным электрическим сетям.

Обстоятельное изложение этих вопросов потребовалось потому, что такие понятия, как тензор преобразования, инвариантность мощности, примитивная и ортогональная сеть были (да и сейчас еще остаются) необычными и весьма трудными для восприятия. Даже очень образованные инженеры мало знакомы с тензорным анализом и неримановой геометрией, в свою очередь физики и математики редко интересуются теорией электрических машин. Вот, например, как описывает Б. Хоффман свое первое знакомство с классической статьей Крона «Нериманова динамика вращающихся электрических машин»: «Я собирался не только разобраться в рассуждениях Крона, но и высказать компетентное мнение относительно их справедливости. К моему удивлению я обнаружил, что не понимаю статью. Я мог проследить за вводными рассуждениями, но они вскоре кончались, а приложения относились к вращающимся электрическим машинам, в которых я ни в коей мере не мог считать себя экспертом. В то время я даже ничего не знал о продольных и поперечных осях. Это может шокировать тех, для кого эти понятия стали второй натурой» ([3], с. 20). К сожалению, описанная ситуация, как правило, возможна при изучении практически большинства оригинальных методов Крона. Определенная незаконченность и нестрогость рассмотрения, которая характерна для инженер-математика, явилась причиной критики работ Крона как со стороны математиков (за недостаточную, по их мнению, строгость), так и со стороны инженеров, считавших излишним привлечение абстрактных математических дисциплин к исследованиям конкретных технических систем. Делались, например, неоднократные попытки заменить его тензорные методы матричными, а электрические модели — графами.

Приняв во внимание многочисленные неудачные попытки «исправить» Крона, мы при переводе постарались максимально бережно отнестись к понятиям и терминологии этой классической работы, вплоть до сохранения обозначений. Это было достаточно трудно, поскольку большинство вводимых Кроном понятий не имеют аналогов в русской научной терминологии. Некоторые пояснения к тексту приведены в подстрочных примечаниях. Более подробные комментарии даны в послесловии. Нельзя считать эти комментарии исчерпывающими, поскольку подробный анализ работы Крона потребовал бы специального исследования.

В данной работе помещены два введения автора, в одном, написанном в 1939 г., даны исходные предпосылки подхода и рекомендации для читателей, а в другом (1965 г.) — ретроспектива и перспектива дальнейшего развития теории. Эти введения избавляют редакторов перевода от необходимости написания более пространныго введения. В заключение редакторы перевода благодарят всех, кто способствовал появлению этой книги.

Перевод выполнен Б. И. Калужным, В. М. Капустяном, И. В. Кузиной, В. П. Мазуриком, А. Е. Петровым, В. И. Хрипуновым.

ВВЕДЕНИЕ (1939 г.)

В течение последнего столетия было установлено, что геометрия Евклида, правившая 2000 лет, не является единственной правильной геометрией и что можно математически ввести неевклидовы пространства, имеющие большое число измерений и обладающие свойствами, которые существенно отличаются от свойств нашего трехмерного физического пространства. В процессе изучения этих новых типов пространств медленно возникала новая математическая дисциплина, которая оформилась в действенный аппарат благодаря Риччи и Леви-Чивитта. Этот новый аппарат теперь принято называть «тензорным анализом».

Ощутимым толчком к применению нового математического инструмента в изучении физических проблем послужило создание теории относительности, в которой Эйнштейн показал, что наш физический мир сам по себе не является ни трехмерным, ни евклидовым. Как только тензорный анализ стал хорошо известен физикам, он с возрастающей частотой стал применяться при изучении проблем классической динамики — в гидродинамике, теории электромагнетизма, теории упругости и, наконец, в квантовой механике. Так как инженерные проблемы по самой природе используемых переменных не являются по существу трехмерными и евклидовыми, возникла необходимость в создании инженерного аппарата, ориентированного на любое число переменных наиболее систематическим способом. Эта необходимость и вызвала применение тензорных методов к решению инженерных проблем.

Содержанием этой книги является новый метод подхода к анализу и синтезу сетей, которые особенно часто встречаются в повседневной работе инженера-электрика. Метод подхода формулируется так, что может служить первым шагом к систематическому анализу и синтезу вращающихся электрических машин, с одной стороны, и передающих сетей — с другой. Последнее, в свою очередь, будет служить вторым шагом в изучении излучения и электронных явлений с точки зрения инженера-электрика.

Аналитические исследования обычно строятся по-разному, при этом используется высоко специализированный метод рассуждения для каждой частной области электротехники, которая случайно вызвала интерес. Результаты такой работы обычно являются закрытой книгой для инженеров, специализирующихся в

другой области. Едва ли необходимо указывать, что язык, терминология и методы рассуждения инженеров — специалистов по синхронным машинам, отличны от языка и методов рассуждения специалистов по многообмоточным трансформаторам или по электронным лампам. Любая информация, получаемая при изучении индукционных двигателей, слабо используется инженером при его попытке, скажем, изучить движение электрического заряда в магнитном поле.

Для выработки единой точки зрения, охватывающей широкую область интересов инженера — от сетей до теории поля, от прямолинейных до криволинейных осей координат, от неподвижных систем до систем, движущихся с ускорением, такой, чтобы знания, полученные в одной области техники, могли быть использованы в совершенно другой области техники, автор не пошел по избитому пути, по которому идут другие, как в используемом *аналитическом аппарате*, так и в *методе рассуждения*. (Окончательные результаты, естественно, получаются такие же, что и у других авторов, если исследуемая проблема базируется на одинаковых исходных допущениях.)

Аналитический аппарат, используемый при установлении общей точки зрения на все разнообразие инженерных структур, такой же, как и применяемый физиками в их поисках единой точки зрения на классическую, релятивистскую и квантовую физику, а именно, *тензорный и спинорный анализ* (известный также как абсолютное дифференциальное исчисление). *Метод рассуждения*, применяемый автором в инженерных задачах, очень близок методу, используемому современной теоретической физикой, а именно геометрическому методу рассмотрения одного из разделов геометрии, называемого *дифференциальной геометрией*.

Однако для решения инженерных проблем оказалось необходимым расширить понятия дифференциальной геометрии и объединить их с понятиями другого раздела геометрии, называемого *топологией*. Этот раздел до настоящего времени не имел существенного значения для изучения физических явлений. Для решения инженерных проблем пришлось объединить с помощью тензорных методов понятия, заимствованные из этих совершенно различных разделов, превратив их в единый инженерный метод.

Отличительной чертой данной книги является то, что она написана не математиком и не для математиков. Она создана инженером для инженеров, интересующихся изучением организованного подхода к анализу и синтезу электрических сетей. Метод тензорного анализа — это еще быстро развивающаяся структура, поэтому среди представителей данного направления до сих пор не достигнуто согласие как в системе обозначений, так и в терминологии. В силу этого изучающему трудно решить вопрос, что ему нужно и что не нужно для его специальной области. Определения и физическая интерпретация всех понятий даны здесь на языке, который, как мне кажется, наилучшим образом отвечает

требованиям инженера, впервые знакомящегося с таким подходом. Книга не претендует на абсолютную математическую строгость. Все, кто интересуется точными математическими и геометрическими определениями, могут обратиться к книгам, перечисленным в списке литературы, написанным специалистами по математике и математической физике.

Ключевой идеей настоящей книги является «организация». Книга организует очень разнообразные сети в соответствии с их фундаментальными свойствами и ожидаемым назначением. При организации они становятся послушными командам инженера, как армия хорошо дисциплинированных солдат командующему генералу. *Эта организация реализуется введением «групп преобразований», которые управляют развертыванием анализа подобно тому, как офицеры различного ранга направляют движение своих подчиненных.*

Некоторые аспекты вводимой здесь организации уже известны инженерам-электрикам. Стенографическая процедура обозначения групп членов с помощью одного символа используется инженерами в процессе решения систем линейных уравнений с помощью детерминантов или при манипуляциях с ними при помощи матриц. Обозначение комплексных чисел $r + jx$ с помощью одного символа z является подобной организацией. Такой стенографический способ обозначения использовался в электротехнике еще со времен Кирхгофа. Позднее Штрекер и Фельдкеллер и их последователи систематически использовали матрицы с двумя строками и двумя столбцами в анализе сетей из четырехполюсников; Кауэр и его последователи использовали такие же матрицы для синтеза сетей.

Дальнейший шаг в совершенствовании организации — обозначение одним символом не набора чисел, а *физического объекта*, действительно существующего в природе. *Векторный анализ*, используемый инженерами-электриками со времен Максвелла, является примером организации этого типа. Поскольку один и тот же физический объект можно измерить по отношению к бесконечному числу систем отсчета (координат) и каждое измерение дает набор чисел, то теперь *один символ представляет бесконечное количество таких наборов чисел вместо одного.* Векторный анализ, однако, является весьма ограниченным типом организации, поскольку он представляет только физические объекты, существующие в *трехмерном евклидовом пространстве*. Понятие «группа преобразований» уже присутствует в векторном анализе, связывая значения компонент физического объекта в различных системах координат трехмерного евклидова пространства.

Более совершенный тип организации, используемый в физических проблемах, требует ввести обобщенные координаты и использовать новые типы пространств, имеющих более трех измерений и более сложную структуру, чем евклидово пространство.

Эти новые типы пространств наполнены новыми типами физических (или геометрических) объектов, каждый из которых обозначается своим символом. Эти пространства и объекты, существующие в них, порождаются «группой преобразований» так, что имеется столько различных пространств, сколько соответствующих им «групп преобразований». Структура этих основных пространств зависит от типа объектов.

Тензорный анализ занимается систематическим изучением этих обобщенных пространств и объектов в них. С этой точки зрения тензорный анализ можно рассматривать как расширение и обобщение векторного анализа от трех- до n -мерных пространств и от евклидовых до неевклидовых пространств. Конечно, можно совсем отказаться от геометрической картины и рассматривать тензорный анализ как изучение новых типов математических объектов.

Эти новые типы пространств радикально отличаются от обычного евклидова пространства, следовательно, для их изучения необходимо отказаться от обычных интуитивных понятий пространства. Простейшие определения векторного анализа такие, как, например, «вектор есть объект, имеющий величину и направление», следует отбросить, так же как и другие установившиеся понятия и определения типа «величина», «направление», «параллельность». При изучении тензорного анализа необходим с самого начала новый подход к определению геометрических или физических объектов и манипулированию ими.

Организация этим не ограничивается. n -мерные пространства можно обобщать до бесконечно-мерных пространств. Кроме того, вместо использования только четырех-, пяти- и вообще целочисленно-размерных пространств можно использовать $2/3$ -, $4,375$ - или π -мерные пространства, включающие все типы сложных структур. Эти пространства используются в исследовании более фундаментальных электродинамических явлений.

АНАЛИТИЧЕСКИЙ АППАРАТ

I. Подобно любому мощному аппарату тензоры могут быть использованы в самых различных направлениях в зависимости от индивидуальных взглядов и устремлений людей. Приведенные ниже соображения могут пояснить некоторые стороны применения тензоров в анализе и синтезе возникающих перед инженером весьма различных взаимосвязанных проблем.

Использование тензорного анализа в решении инженерных проблем можно сравнить с использованием стального каркаса¹⁾ при возведении небоскребов. Теперь стало возможно, по крайней мере теоретически, построить небоскреб высотой в сто этажей

¹⁾ В 30-е годы в США уже использовались стальные конструкции в строительстве. (Прим пер)

простым укладыванием кирпичей. История зафиксировала такую попытку при строительстве Вавилонской башни, но оставила в тайне возможность успешного завершения этого предприятия¹⁾.

Преимущества, открываемые использованием стального каркаса при возведении зданий, аналогичны преимуществам, открываемым использованием тензоров и спиноров в решении инженерных проблем. Фундаменты занимают мало места, строительство здания ускоряется, и само здание становится более устойчивым относительно изменения его элементов. Инженер отваживается проектировать и строить новые типы структур не только для старых, но и для новых применений; он бы даже не пытался делать это, не имея стального каркаса. Когда установлен стальной каркас, можно укладывать кирпичи сразу на шестидесятом этаже, не затрагивая пятьдесят девять лежащих ниже, и оставить этот этаж единственным построенным — возможность, которой не было без стального каркаса. Подобные незавершенные этапы могут быть в анализе инженерных проблем, где можно исследовать подробно только требуемую часть. Нет никакой необходимости последовательно в каждой частной проблеме переписывать системы уравнений с одной страницы на другую, удерживая в памяти их физическое содержание. Все это можно оставить в необработанном виде, в форме нескольких символов, действующих, как каркас, поддерживающий части, представленные детально. В любое время можно добавить новые «этажи» к уже законченному «зданию» или убрать одну часть и изменить ее в соответствии с новыми требованиями, не разрушая оставшегося.

Использование стального каркаса позволяет инженеру не только строить небоскребы, но и сделать строительное производство массовым. Один и тот же стальной каркас можно использовать для изготовления самых разнообразных зданий, изменяя кирпичную кладку и располагая перегородки в соответствии с требованиями и нуждами различных потребителей. Обнаружено, что на языке тензорного анализа можно получить уравнения, подобные стальному каркасу, которые представляют поведение (performance)²⁾ и характеристики самых разнообразных сетей или вращающихся машин, или передающих систем. Будучи однажды установлены³⁾, эти тензорные уравнения позволяют находить уравнения поведения или характеристик любой *частной*

¹⁾ Как известно, строительство Вавилонской башни не было закончено, так как строители, говорящие на разных языках, не смогли договориться. Действительно осталось неизвестным, можно ли обойтись без каркаса при постройке столь высокого сооружения. (*Прим. пер*)

²⁾ Здесь и далее слово «performance» (действие, выполнение) переведено как поведение. Крон подчеркивал этим, что поведение сети носит характер процесса, а не, скажем, состояния. (*Прим. пер*)

³⁾ Крон везде использует слово Set up — устанавливать (уравнение, сеть, систему). Мы сохранили этот термин, хотя чаще принято писать в этом значении *составлять* (*Прим пер*)

сети или машины, или передающей системы *рутинной* подстановкой частных констант.

II. Эта гибкость тензоров позволяет инженеру при изучении, скажем, разнообразнейших вращающихся машин выделить одну, которая имеет наиболее простую структуру, и изучать свойства и уравнения только этой частной простой машины. Если инженер изучает метод анализа и физические явления, свойственные этой частной машине, используя тензорные понятия, *он изучает в то же время физику, метод анализа и решения сразу множества машин вместо того, чтобы изучать новые приемы для каждой частной машины*, как это необходимо при других методах атаки ¹⁾, которые даются во всех учебниках по машинам.

Эти две характеристики тензорных методов — возможность возводить аналитические «небоскребы» и возможность вводить массовое производство в анализ и синтез инженерных задач — особо выделяются в книге. Первая характеристика тензорных методов дает возможность инженеру атаковать и решать такие проблемы, к которым он не может приблизиться либо из-за механических вычислительных трудностей, либо из-за трудности в наглядном представлении физической сущности проблемы. Вторая характеристика дает возможность использовать рассуждения и результаты одной решенной проблемы в решении многих других проблем, сохраняя на будущее все или часть результатов одного исследования в тензорной форме и расширяя или комбинируя их разными способами при разнообразных новых исследованиях.

Это сохранение и повторное использование результатов предыдущих исследований аналогично хранению стандартных узлов, таких как рамы, листы сердечников, валы и подшипники вращающихся машин; их немедленно можно превратить в сложные механизмы различного назначения сразу при получении заказа вместо того, чтобы при необходимости создавать каждый раз новую конструкцию. Метод тензорного анализа, имеющийся в распоряжении инженера, позволяет ему комбинировать свои тензоры, которые он создал раньше, и преобразовывать их в новые, необходимые ему тензоры, не повторяя весь анализ всякий раз, когда возникает новая проблема.

III. Архитекторы, использующие стальной каркас, и инженеры, применяющие тензоры, должны помнить, что после того, как возведен стальной каркас, надо уложить кирпичи и обеспечить окончание строительства. С использованием стального каркаса и без него следует установить определенное число окон, дверей, перегородок и лестничных маршей. Для обеспечения строительства этими деталями можно использовать принцип массового

¹⁾ В оригинале: method of attack. Крон часто употребляет несколько необычное в технике слово «атака», очевидно, чтобы подчеркнуть активный, наступательный характер действий инженера по отношению к решаемым задачам. (Прим. пер.)

производства. Во всякой инженерной проблеме существует абсолютный минимум обязательного количества сложений, умножений, делений, нахождения корней, без вычисления которых нельзя обойтись при любой организации подхода. Стальной каркас создает удобства для более систематического использования вычислительных машин, и это позволяет инженеру передать большую часть своей работы вычислительной машине.

В то же время необходимо помнить, что использование стального каркаса при строительстве гаража для одного автомобиля вряд ли будет хорошим инженерным решением. Нет общего правила, которое давало бы возможность определить минимальный уровень сложности как для использования стального каркаса, так и для использования тензоров.

IV. Очень важное преимущество «стального каркаса», которое было достигнуто впервые при изучении физических явлений, заключается в том, что один и тот же «стальной каркас» (те же тензорные уравнения) справедлив для нескольких типов различных физических явлений. Большинство тензорных уравнений гидродинамики, электродинамики, оптики и теории упругости имеют одну и ту же форму. Они отличаются друг от друга только «кирпичной кладкой» и «отделкой». Тензорное уравнение ускоренно раскручивающейся электрической машины идентично тензорному уравнению ускоренного движения электрического заряда, рассматриваемого в криволинейной системе координат; переход от одной вращающейся машины к другой или от одной системы координат к другой включает только формальные преобразования.

Количество типов балок, используемых в стальном каркасе природы, крайне ограничено. Открытие нового типа тензора или спинора, существующего в физических явлениях, аналогично открытию нового строительного элемента в структуре атома.

Эта книга является введением в теорию и практику применения аналитического «стального каркаса» в технике. В ней говорится о простейшем типе координатных систем, использующих только «прямые балки» и ориентированных на организацию систем линейных и алгебраических уравнений, встречающихся при изучении асимметричных активных сетей с сосредоточенными параметрами. В качестве «кирпичей» используются только сложение, умножение и деление. Дифференцирование (с его криволинейными «стальными балками») вводится только эпизодически для установления точек соприкосновения с дифференциальными уравнениями, организация которых изложена в другой книге; эти части могут быть опущены без ущерба для изложения.

МЕТОД РАССУЖДЕНИЯ

I. Для тех, кто интересуется, как метод рассуждения, используемый в двух расходящихся ветвях абстрактной геометрии (топологии и дифференциальной геометрии), может использоваться

в анализе практических инженерных проблем, полезны следующие замечания.

Дифференциальная геометрия изучает, грубо говоря, некоторые специфические свойства кривых и других конфигураций, вложенных в плоские или кривые пространства двух, трех и более измерений. Наибольший интерес представляет изучение таких свойств кривых, которые не зависят от выбора той или иной системы координат в пространстве. Тензорный анализ служит мощным аналитическим инструментом в изучении таких инвариантных свойств, когда системы координат изменяются.

Топология имеет дело с еще более общими свойствами кривых, расположенных на множестве взаимосвязанных n -мерных пространств. Такой взаимосвязанной структурой является, например, куб, в котором 6 двумерных плоскостей, 12 одномерных линий и 8 нульмерных точек связаны в одну систему. В общем случае каждое из этих пространств может быть как угодно искривлено или растянуто. Здесь также можно вводить различные системы координат на той же самой структуре для изучения кривых, расположенных, скажем, на кубе.

II. Итак, *проблемы, которые допустимо рассматривать с помощью произвольного выбора системы координат на той же самой структуре пространства (что и содержится в большинстве учебников и публикаций), оказываются недостаточно общими, чтобы представлять реальную ценность для инженера.* В этом, возможно, и состоит главная причина того, что методы этих наук до сих пор не применяются в технике. Этот недостаток общности можно увидеть из следующих рассуждений.

Инженер имеет дело с набором нуль-, одно-, двух- и трехмерных структур, взаимосвязанных всеми возможными способами. Например, передающая система содержит двух-, одно- и нульмерные структуры в виде вращающихся машин, передающих линий и узлов между линиями и машинами, подобно тому, как мост представляет собой набор быков, настила, балок и их соединений. Поршневой двигатель, кроме прочего, состоит из коленчатого вала, шатунов и подшипников. Наложение электромагнитных явлений на всю передающую систему (наложение давлений на мост или усилий, приводящих машину в движение) аналогично наложению кривых на совокупность взаимосвязанных пространств различного числа измерений. Следовательно, свойства и уравнения накладываемых кривых можно отождествить со свойствами и уравнениями электрических или механических явлений, накладываемых на подлежащую структуру; результаты одного исследования могут прилагаться к другим исследованиям простой переинтерпретацией символов.

Однако инженер весьма редко меняет систему координат на одной и той же структуре. Но он особенно часто комбинирует одно-, двух- и трехмерные структуры всеми мыслимыми способами и строит очень разнообразные новые структуры, к которым он

снова прикладывает те же самые типы сил. *Инженер интересуется выбором из широкого набора этих новых структур такой структуры, которая реагирует желаемым образом на приложенные силы и является наиболее соответствующей нужной цели, но оч мало интересуется тем, как одна и та же структура выглядит с различных точек зрения.*

III. Эта наиболее общая проблема техники является главным предметом настоящей книги; с геометрической точки зрения она может быть сформулирована следующим образом.

Пусть мы имеем набор нуль-, одно-, двух- и трехмерных пространств. Эти пространства могут быть плоскими, криволинейными, с кручением и т. д. *Пусть этот набор пространств связан друг с другом самым различным образом подобно тому, как связаны и взаимосоединены самым различным образом компоненты технических систем, и пусть на каждую из таких структур наложены некоторые типы конфигураций* (такие, скажем, как кратчайшие линии между двумя точками), подобно тому, как физические явления накладываются на инженерные структуры.

Конечно, каждая конфигурация может быть выражена уравнением, если на каждой структуре вводится та или иная система координат. *Одной из проблем, которая должна быть исследована, является нахождение простого пути для установления уравнения на всех различных типах структур, при условии, что уравнение данной конфигурации на одной частной структуре уже известно.* Говоря геометрическим языком, проблема состоит в установлении соответствия между конфигурациями, которые расположены на различных типах структур (или в нахождении группы преобразований). На языке инженера проблема состоит в нахождении *формальной процедуры*, позволяющей получить уравнение поведения системы на всех возможных типах структур при условии, что это уравнение известно для одной структуры. *Структуры могут содержать различное число и разные типы пространств.*

Формальная процедура изменяет значение компонент уравнения поведения с помощью группы преобразований (называемой «тензором соединения»), представляющей способ взаимосоединения различных пространств. При использовании этого метода инженеру надо установить (из чисто физических соображений) уравнение только одной системы (так называемой «примитивной системы»), в то время как уравнения всех других систем получаются автоматически, без изучения этих систем каждый раз сначала.

С этим процессом перехода от системы координат на одной структуре к некоторой произвольной системе координат на другой структуре связан также обычный процесс перехода от одной системы координат к другой на той же самой структуре, встречающийся очень часто как частный случай процесса первого типа. Конечно, на каждой структуре можно вводить многочисленные действительные или гипотетические системы координат.

IV. Книга включает изучение структур, в которых взаимодействуют только нуль- и одномерные пространства. Из-за простоты соединяемых пространств не требовались понятия из области дифференциальной геометрии, и большинство понятий было заимствовано из топологии.

Интересно отметить, что основания топологии были заложены Кирхгофом в его исследованиях потоков электричества через сети. Однако наука об электричестве и топология скоро разошлись; через 100 лет это расхождение стало настолько явным, что только слабые следы одной науки удастся заметить в другой. Представляет интерес и тот факт, что основы современного тензорного анализа и современной дифференциальной геометрии также происходят в своей основе от изучения движения электрического заряда в электромагнитном поле, требовавшего четырех- или пятимерных пространств со сложной структурой для установления геометрических аналогий. Неудивительно, что понятия и методы тензорного анализа, топологии, дифференциальной геометрии и теории электричества, при всем кажущемся различии их природы, тесно связаны и оказывают взаимное влияние друг на друга.

ТОЧКА ЗРЕНИЯ

Хотя в основном тензорный анализ применяется в теоретической физике к проблемам непрерывных полей, настоящая книга посвящена новому типу применений — к проблемам цепей. (Различие между проблемами полей и цепей более или менее подобно различию между проблемами дифференциальной геометрии и топологии.)

Особая точка зрения, выраженная в книге, должна быть подчеркнута специально. Главная цель тензорного анализа и его приложений к другим наукам обычно состоит в установлении *всеохватывающих уравнений, широких выводов, справедливых* для возможно большего количества случаев. Однако для технических приложений эта точка зрения недостаточна. В инженерной работе необходимо также получать *конкретные ответы на конкретные проблемы* за минимальное время. В данной книге сделана попытка развить эту сторону тензорного подхода, содержащегося, конечно, в самом тензорном анализе, но которым пренебрегали другие авторы из-за отсутствия интереса к решению конкретных проблем. Среди многочисленной литературы по тензорному анализу, указанной в библиографии, имеется очень мало книг, где решение одной конкретной проблемы с помощью уравнений доведено до конца, поэтому книги лишь случайно содержат множество функций, расположенных в строку, в квадрат или в куб, которыми заполнена настоящая работа.

Для облегчения решения *конкретных* проблем введено не-

сколько новых понятий и точек зрения; к ним относятся: «примитивные» системы, формулы редукции, «компаунд»-сети, правила быстрого манипулирования с множествами чисел и постулаты обобщения.

Содержащиеся в книге примеры достаточно элементарны и не охватывают все типы сетевых проблем, которые могут быть атакованы тензорными методами. Книга едва касается обширных возможностей, пригодных для реализации при использовании свойств «организации», вводящей во множество методов решения инженерных проблем. Сети фильтров, которые не рассматриваются в книге, прекрасно рассчитываются организованными методами и представляют собой широкое поле деятельности для нового метода атаки с помощью тензорных понятий.

Сейчас еще не окончательно установлены обозначения, терминология и определения, встречающиеся в данной работе. Они будут служить только стартовыми точками для нового продвижения. Автор отчетливо видит, что за пределами протоптанных тропинок лежит обширная, еще не нанесенная на карту территория, которая ожидает своих первооткрывателей.

УКАЗАНИЕ ДЛЯ ЧИТАТЕЛЕЙ

Большую часть книги смогут прочитать все, кто знаком с элементарной математикой и до некоторой степени с законами Ома и Кирхгофа. Книга написана для самых различных читателей. Инженеры, заинтересованные в получении быстрых и организованных ответов на свои вопросы, могут пропускать некоторые главы и многие параграфы, разбросанные по разным главам, где излагаются геометрические или другие не совсем инженерные точки зрения (гл. 7, 8, 17 и 18). Многие главы, в которых описаны специальные инженерные объекты (обмотки, электронные лампы — гл. 12, 15, 20, 21 и 23), могут быть опущены теми, кого не интересует эта область. Те, кто интересуется не инженерными проблемами, а только способом применения тензорных понятий, могут читать гл. 1—11, 13, 14, 16—18 и первую часть глав 19 и 21. Многие параграфы, которые можно опустить при первом чтении (они необходимы для более глубокой работы), помечены звездочкой.

Книга полностью включает содержание первых двух частей серии статей, печатающихся в настоящее время в «General Electric Review»¹⁾. Серия, в которой до настоящего времени появилось 17 частей, начала выходить в апреле 1935 г. под назва-

¹⁾ В 1942 г. эта серия в расширенном виде вышла отдельной книгой: «The application of tensors to the analysis of rotating electrical machinery». New York, «General Electric Review».

нием «Применение тензорного анализа к вращающимся электрическим машинам». Некоторый материал вводного характера из других частей также включен в книгу в расширенном виде. Надемся, что и другие части серии «General Electric Review» будут со временем опубликованы.

БЛАГОДАРНОСТИ

Автор с благодарностью отмечает неутомимую поддержку П. Эджера, который рано признал возможность использования тензоров как нового инструмента техники, помогал его развитию и применению в инженерной работе и способствовал публикации некоторых результатов.

Автор весьма обязан д-ру С. Рамо за бесчисленные советы относительно рукописи и Дж. Муру за внимательный ее просмотр.

ТЕНЗОРНЫЙ АНАЛИЗ СЕТЕЙ

ВВЕДЕНИЕ КО ВТОРОМУ ИЗДАНИЮ 1965 ГОДА

Книга является перепечаткой без изменений работы, вышедшей в 1939 г. Она включает тензорную и топологическую организацию и анализ по частям электрических сетей, описываемых уравнениями состояния $e_\alpha = z_{\alpha\beta} i^\beta$ или $I^\alpha = Y^{\alpha\beta} E_\beta$. Топологическая организация использует только ветви, но не полюса или плоскости над контурами. Матрица импеданса z рассматривается только как оператор без разложения на компоненты $R - L - C$.

Одно из логических продолжений настоящей книги — решение электрических сетей по частям — содержится в книге по диакоптической («Исследование сложных систем по частям — диакоптика». М., «Наука», 1972 г.). Другим логическим продолжением является разложение оператора импеданса z на $R - L - C$ -компоненты. Упрощенные уравнения Лагранжа, даваемые здесь, представляют только динамическое разложение в отдельные электрические, магнитные и диэлектрические¹⁾ I-сети, обладающие подобными структурами. Топологическое разложение z на $R - L - C$ -компоненты диктуется уравнениями электромагнитного поля

¹⁾ Наряду с электрическими и магнитными сетями и потоками в них Крон рассматривает диэлектрические потоки и образуемые ими сети (см., например, гл. 17), которые соответствуют понятию тока смещения, введенному Максвеллом. (Прим. пер.)

Максвелла, а не уравнениями Лагранжа. Эта более общая — двухфазная — топологическая структура обычной электрической сети, которая включает не только два параметра (e и i), но и *все* параметры динамического электромагнитного поля, окружающего $R-L-C$ -сеть ($e, b, h, d, \rho^e, \rho_m, j^e, j_m$), будет развита в готовящемся к печати втором томе «Тензорного анализа сетей»¹⁾.

Иначе говоря, в этом томе не рассматриваются ни временные, ни пространственные изменения электрических параметров. Рассматриваются только возможные *открытые* (ламинарные) и *замкнутые* (соленоидальные) топологические конфигурации, которые могут принимать *мгновенные* тубуски тока и напряжения в присутствии ветвей. Также подчеркивается взаимозаменяемость «открытых» и «замкнутых» путей, образуемых *ветвями*.

Организация употребляет *геометрические понятия* «алгебраической топологии», а также недавно развитой «топологии дифференцируемых многообразий» — они еще не существовали в то время, когда писалась настоящая книга. Организация употребляет *математические* понятия из «тензорного анализа в малом» и из «тензорного анализа в целом», который возник после того, как была написана книга. Даже теперь эти новые геометрические и математические научные направления скрыты в труднодоступных журналах и учебниках, написаны языком, который мало кому понятен, кроме посвященных. Фактически автор, не являясь математиком, сам «изобрел» много новых геометрических и математических понятий, приведенных здесь, опираясь на физическую и инженерную интуицию, так как испытывал потребность в новых понятиях по мере развития изложения. В последнее время он стал отдавать себе отчет в существовании связи между этими научными направлениями, относящимися к его инженерной деятельности, и с тех пор старался приводить в соответствие эту новейшую математическую литературу с результатами своих ранних исследований. Совершенно естественно, что математики и инженеры преследуют различные цели — это делает установление соответствия весьма трудным.

Во введении автор пытается интерпретировать новые инженерные понятия текста в свете этих новых, более развитых геометрических и математических дисциплин. В то же время он показывает, как правильная тензорная и топологическая организация *обычных электрических сетей*, данная здесь, может служить фундаментом для организации и применения многомерных *полидральных сетей*, возбуждаемых электромагнитными, магнито-гидродинамическими и еще более обобщенными типами волн. Эти последние служат поворотным пунктом к естественному введе-

¹⁾ По неизвестным нам причинам Крон не опубликовал второй том книги «Тензорный анализ сетей». (Прим. пер.)

нию *обобщенной кристаллооптики* с возможной физической реализацией полиэдральных волн на базе кристаллов и их внутренних электромагнитных, дипольных и более общих волн.

ОСУЖДЕНИЕ И ОДОБРЕНИЕ

Когда автор в начале 30-х годов выступил с тензорной и топологической организацией *вращающихся* электрических сетей и через несколько лет с организацией неподвижных электрических сетей, он столкнулся с очень неприятной неожиданностью. В большинстве технических журналов совершенно непредвиденно новые понятия, введенные автором, были решительно объявлены ненужными или ошибочными, $+1$, -1 и 0 -компоненты его «тензора соединения» C были осмеяны как «неработоспособные» или как «приносящие тензорам дурную славу» и т. д.

С другой стороны, сотрудники института перспективных исследований в Принстоне (Освальд Веблен, Герман Вейль, Джон фон Нейман) и несколько бывших сотрудников этого института (Бенеш Хоффман, Поль Ланжевен и др.) настойчиво советовали автору продолжать дальнейшие исследования. Даже Эйнштейн говорил автору, что он знает от своих сотрудников о его работах (поскольку последний использовал в *практических* задачах эйнштейновскую нериманову динамику общей теории электрического и гравитационного полей). В многочисленных обсуждениях с авторитетными учеными никогда не упоминались намеки на *крайне вздорные нападки* этой группы инженеров.

«МНОГОЯЗЫЧНЫЙ ПАРАД С ФАЛЬШИВЫМ ОПЕРЕНИЕМ»

В течение нескольких лет понятия, введенные автором, постепенно были распространены в нескольких странах и на нескольких языках. Однако, чтобы прикрыть голый плагиат («парад с фальшивым оперением»), все тензорные и топологические понятия в этих перепечатках были завуалированы множеством новых обозначений и терминов. Например, $C_{iz}C$ представляли в виде $\alpha'z\alpha$ или заменяли слово «тензор» словом «матрица», или называли прямоугольную четырехугольную матрицу «соединений» матрицей «редуцированной инциденции» или матрицей «множества разрезов» и т. д.

Заинтересованный читатель найдет в литературе по электротехнике начала 30-х годов неисчерпаемый источник материала для исторического исследования этой ситуации, при которой каждая последующая перепечатка в искаженной форме устанавливала другое *научное* (а не политическое или экономическое) представление. Это старая история, которая бесчисленное количество раз встречалась и раньше. Единственный пострадавший от этого — человек — введенный в заблуждение в процессе серьезного изучения теории электрических сетей.

На протяжении последующих лет инженеры-электрики начали проявлять интерес к большому количеству разнообразных типов *неэлектрических* сетей: логических и сетей связи, транспортных и релейных сетей, схем и графов распространения сигналов. Понятие «граф» или «линейный граф» с его полюсами (вершинами) и ветвями (ребрами) оказалось полезным при изучении таких типов *неэлектрических* сетей; действительные числа в этих сетях могут быть ассоциированы с вершинами, так же как и с ветвями.

Как результат внешнего сходства «мертвой» электрической сети с линейным графом, а также применимости теории графов к некоторым исследованиям неэлектрических сетей появились в большом количестве различные школы «теории электрических сетей», каждая из которых использует неэлектрические применения теории *графов* в изучении электрических сетей. Одной из школ удалось заметить нарушение симметрии, связанной с наличием вершин (полюсов), но вместо того, чтобы исключить понятие «вершина», были добавлены плоскости над контурами, чтобы сбалансировать структуру теории. Однако введение второй ошибки не делает теорию правильной. В решении практических задач эта школа фактически использует только ветви, так же как и тензоры ¹⁾.

ПРОЯВЛЕНИЯ МАССОВОЙ ИСТЕРИИ

Главным связующим звеном между всеми этими школами была и остается их гипнотическая привязанность к слову «полюс» или их неприязнь к слову «тензор», или и то и другое вместе. Игнорируя публикации книг и статей, посвященных электрическим сетям, которые не соответствуют их собственной графовой и матричной терминологии, представители этих школ и их последователи в течение последующих десятилетий постепенно заменяли (и успешно) корректно-организованную тензорную и топологическую структуру теории электрических сетей, используемую в настоящей книге, самыми неправдоподобными теориями.

На основании своей терминологии и представлений эта группа инженеров предполагает, что электричество действительно переносится через сеть так, как будто оно находится в товарной упаковке, или что электричество может накладываться на сеть подобно многоцветной краске, наносимой на географическую карту. Ни один из этих авторов, использующих теорию графов в сетях, не задал себе ключевой вопрос: в чем состоит основное отличие электрической сети от всех возможных неэлектрических сетей? Даже не специалист инстинктивно чувствует, что транспортировка *электрического тока* через сеть требует другого механизма, чем транспортировка *пакета масла* через ту же самую сеть

¹⁾ Неизвестно, о какой школе идет речь. (Прим пер).

ЧТО ТАКОЕ ЭЛЕКТРИЧЕСКАЯ СЕТЬ?

Электрическая сеть отличается от всех других типов неэлектрических сетей тем, что она всегда окружена динамическим электромагнитным полем, создаваемым ею самой и простирающимся до бесконечности во всех направлениях. Никакие другие типы сетей, используемые в технике, не имеют такого невидимого, самопорожденного динамического поля.

Электричество существует не только в видимых проводах, но и в невидимом пространстве, окружающем провода. Граф и его прямоугольная «матрица инцидентий» может использовать только вершины (полюса) для образования соединений ветвей. С другой стороны, «ортогональная» теория сетей-ветвей, представленная в настоящей книге, может рассматривать объемлющее n -мерное пространство как сферу операций с помощью взаимозависимых ортогональных сетей, а именно: *видимой* «первичной» 1-сети и *невидимой* «двойственной» $(n-1)$ -сети. Обе сети определяются одновременно посредством одной несингулярной (квадратной) «матрицы соединений» C (или ее обратной матрицы $A = C^{-1}$), устанавливаемой только при помощи ветвей.

ЭЛЕКТРИЧЕСКАЯ СЕТЬ КАК ПАРА «МЕРТВОЙ» И «ЖИВОЙ» СТРУКТУР

Рассматриваемая электрическая сеть состоит из *двух* структур, а не из одной. Здесь всегда присутствует *одновременно* «мертвая» подлежащая материальная сеть ¹⁾, определяемая тензором импеданса $z_{\alpha\beta}$ или обратным тензором адмиттанса $y^{\alpha\beta}$, на которую накладываются два вида «живых» электрических параметров: i^α и e_α . Обе структуры присутствуют одновременно. Свойства «мертвых» сущностей зависят полностью от этих живых сущностей и наоборот. Если одна из этих структур отсутствует, другая может иметь радикально отличные характеристики. Это положение — ключ ко всей книге.

Действительно, полная и корректная топологическая теория электрической сети должна включать все параметры, следующие из уравнений электромагнитного поля Максвелла. В книге устанавливаются минимальные контуры топологической структуры, имеющей только два параметра: i и e . Более развитая теория будет дана в планируемом томе 2 «Тензорного анализа сетей» ²⁾.

¹⁾ Имеется в виду сеть, состоящая из проводников, емкостей, индуктивных элементов, источников и соединяющих их проводов; она рассматривается до того, как пущены токи и приложены напряжения. (Прим. пер.).

²⁾ См. прим. на с. 21.

КВАДРАТНЫЙ «ТЕНЗОР СОЕДИНЕНИЯ» И ЕГО РОЛЬ КАК «ТЕНЗОРА ПРЕОБРАЗОВАНИЯ»

Уже несколькими годами ранее, в связи с изучением *вращающихся* электрических сетей ¹⁾, автор сформулировал абстрактные понятия «разрывания» (tearing) и «взаимосоединения» как для «мертвых» материальных проводов, так и для «живых» электрических нитей (трубок) в форме квадратного (несингулярного) «тензора соединения» $S_{\alpha'}^{\alpha}$ и обратного ему $A_{\alpha}^{\alpha'}$ (оба содержат только +1, -1 и 0-компоненты). Это абстрактное понятие не было известно в литературе по электрическим сетям до того времени, и автор сомневается, сформулировано ли явно такое понятие в каком-либо учебнике по алгебраической топологии. Последняя не имеет дела с электрическими сетями.

Поскольку это радикально новое понятие электротехники может также играть роль «тензора преобразования», который появляется в тензорном анализе, автор увидел удобный случай для того, чтобы ввести и использовать весь аппарат тензорного анализа и дифференциальной геометрии в полном объеме для изучения неподвижных и вращающихся электрических сетей.

Подобным образом тензор импеданса $z_{\alpha\beta}$ (или $y^{\alpha\beta}$), содержащий подлежащие «мертвые» материальные параметры сопротивления, индуктивности и емкости, может играть роль симметричного «метрического тензора» $g_{\alpha\beta}$. Контравариантный вектор тока $i^{\alpha} = dq^{\alpha}/dt$ и ковариантный вектор напряжения $e_{\alpha} = d\varphi_{\alpha}/dt$ (оба тензоры 1-го ранга), представляющие наложенные «живые» электрические параметры, могут играть роль «векторов в касательном (тангенциальном) пространстве», скрепленном с подлежащим *неримановым пространством* q^{α} и φ_{α} . Последние играют фундаментальную роль как в неподвижных сетях переменного тока, так и во вращающихся сетях.

ДВОЙСТВЕННЫЕ ПОНЯТИЯ «ОТКРЫТОГО» И «ЗАМКНУТОГО» КОНТУРА

Классические теории сетей, как и их толкование «граф-теорией», анализируют электрическую сеть в терминах одного из двух множеств — независимых токов «замкнутых контуров» или независимых *узловых* токов. Эта асимметрия обусловлена тем, что в литературе, появившейся до 1930 г., все узловые токи уходили из сети к единственному узлу — заземлению.

Чтобы убрать эту асимметрию, автор заменил понятие «узловой ток» понятием «открытая нитка (трубка) тока», проходящего через ветвь между узлом и землей. Затем он заменил общее заземление другими произвольными узлами. Таким образом, каж-

¹⁾ «Tensor analysis of electrical machinery. Winter issue». AIEE, Jan., 1933. (Прим. ред.).

дая независимая открытая нить (трубка) тока, проходя через несколько незамкнутых ветвей, образует свой собственный «открытый контур». С помощью такого представления мы устанавливаем корректное двойственное понятие множеству *замкнутых контуров*, которое на первое время принимает форму множества *открытых контуров*. Граф-теоретики все еще сохраняют асимметричные недвойственные понятия контурных и узловых токов.

НЕУДАЧНОЕ ВЫРАЖЕНИЕ «УЗЛОВАЯ ПАРА», ИЛИ «ПОЛЮСНАЯ ПАРА»

Автору не понравилось выражение «открытый контур», так как оно абсурдно. Он ввел в качестве альтернативы более наглядное понятие «узловая пара», чтобы подчеркнуть наличие *двух* различных узловых точек и отсутствие обычного для того времени *единственного* заземления. С течением времени оказалось, что выражение «узловая пара» неудачно, поскольку понятие «узел» относится к 0-сети, а не к 1-сети.

Чтобы избежать недоразумения, читатель должен заменить выражение «узловая пара», встречающееся время от времени в книге, либо первоначальным — «открытый контур», либо более современным — «открытый путь». Соответственно двойственное понятие «замкнутый контур» должно быть заменено понятием «замкнутый путь», а неудачное выражение «узловая пара» — более подходящим — «сеть открытых путей» (это то же самое, что сеть — дерево).

«ГРУППА» СЕТЕЙ С n ВЕТВЯМИ И ИНВАРИАНТНОСТЬ МОЩНОСТИ

Для подготовки к использованию понятий тензорного анализа в более общем смысле предполагается, что все сети, встречающиеся в тексте, образованы одними и теми же n ветвями, а их $n \times n$ матрицы соединений C или A , посредством которых можно переходить от любой сети с n ветвями к любой другой сети с n ветвями, образуют «группу». Это означает, что можно получить уравнения любой сети с n ветвями из уравнений другой сети с n ветвями с помощью $n \times n$ -матрицы соединения C (или $A = C_t^{-1}$). Также предполагается, что мощность e_i , рассеиваемая любой ветвью, как и рассеиваемая всей полной сетью, остается инвариантной (неизменной) при всех различных разрывах и взаимосоединениях.

«ПРИМИТИВНАЯ» СЕТЬ

Отправной точкой анализа любой частной сети является «примитивная» (простейшая) сеть, в которой все ветви изолированы и образуют открытые или замкнутые пути, каждый из которых состоит только из одной ветви. Поскольку уравнения такой сети

установить очень легко, они преобразуются рутинными шагами, предписываемыми тензорным анализом, в уравнения требуемой сети с помощью матриц C или A , которые также легко устанавливаются.

ИЗБЫТОЧНОСТЬ ПОНЯТИЯ «УЗЕЛ» В «ЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ» СЕТИ

Классическая теория сетей, как и теория графов, предполагает, что понятием, двойственным *замкнутому контуру*, является *узел*; отсюда двойственным замкнутому току является узловой ток. Однако организация в настоящей книге устанавливает, что правильными двойственными понятиями являются *замкнутый контур и открытый контур*. Эта двойственность представляет дополнительный аргумент для установления того, что *понятие «узел» или «вершина» является избыточным в электрической сети*. Токи и напряжения признают существование только одномерных ветвей (1-симплексы), а не узлов (0-симплексы) и не плоскостей над контурами (2-симплексы). Не существует такого понятия электрической сети, как «ток, приложенный к узлу», или «абсолютный потенциал узла».

Следует подчеркнуть, что в случае *отсутствия* тока «мертвая» сеть может обладать и узлами, и треугольниками, и тетраэдрами. (Число узлов может использоваться для определения числа открытых и замкнутых контуров.) Однако в присутствии токов все эти симплексы исчезают, кроме ветвей или 1-симплексов ¹⁾.

ПОНЯТИЕ «ОРТОГОНАЛЬНАЯ» СЕТЬ

В классическом анализе сетей применяются уравнения замкнутых путей $e=zi$ или только уравнения открытых путей $I=YE$ (граф-теоретики называют последние «узловыми» уравнениями). В настоящей книге они объединяются (в «ортогональную» сеть) в форме $e+E=z(i+I)$, порождая для каждой сети *равно столько независимых уравнений, сколько имеется ветвей*. Взаимные импедансы соединяют уравнения открытых и замкнутых путей, и они теперь не являются независимыми друг от друга.

Использование расширенного числа уравнений открывает возможность не только анализировать, но и решать большие сети по частям, малыми составляющими (диакоптика). Расширенное число ортогональных уравнений дает возможность вводить «полиэдральные сети», которые объединяют в одной структуре иерархию 0-, 1-, 2- до n -сетей, возбуждаемую совместно с электромагнитными, магнитогидродинамическими волнами вместо обычного электрического тока.

¹⁾ Ни узел, ни плоскости, разумеется, не исчезают в присутствии токов, просто их наличие несущественно при определении токов, протекающих в ветвях. (Прим. пер.).

Автор убежден, что все аспекты применения электрических сетей, такие как синтез, регулирование, микроволновая техника и другие, могут и в конце концов будут получать огромный выигрыш от использования большего числа «ортогональных» систем уравнений.

Ограниченность теории графов только контурными или только узловыми уравнениями вынуждает инженеров-электриков оставаться в узкой, вытоптанной колее без всякой возможности вырваться на широкий путь.

ФИЗИЧЕСКАЯ ИНТЕРПРЕТАЦИЯ «КВАДРАТНОГО» ТЕНЗОРА СОЕДИНЕНИЯ C

Ветви электровозбужденной сети можно рассматривать как «систему координат», охватывающую трех- или n -мерное пространство. Как показано в книге, квадратную матрицу соединения C можно разбить вертикальной чертой на две *прямоугольные* матрицы $C = C_c + C_o$ (или $C_m + C_j$). Рассматривая формулу преобразования $i + I = C(i' + I')$, можно установить, что:

- 1) столбцы C_c перечисляют ветви, которые образуют *замкнутые* пути 1-сети; в этих путях текут «соленоидальные» токи i ;
- 2) столбцы C_o перечисляют ветви, которые образуют *открытые* пути 1-сети; в этих путях текут «ламинарные» токи I .

«ДВОЙСТВЕННАЯ» $(n - 1)$ -СЕТЬ НЕВИДИМОГО ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ

Когда ветви сети электровозбуждаются, то окружающее n -мерное пространство заполняется многочисленными параметрами электромагнитного поля, такими как $b, h, d, e, \rho^e, \rho_m, j^e, j_m$ и т. д. Чтобы представить невидимое поле, необходимо вообразить *плоскость* (или $(n-1)$ -гиперплоскость), ортогональную к каждой ветви. Эти $(n-1)$ -гиперплоскости также образуют открытые и замкнутые пути¹⁾. Сумма последних дает « $(n-1)$ -сеть», двойственную видимой или первичной 1-сети.

Подобно тому как над каждой ветвью 1-сети возникает линейный интеграл тока i (функционал), так и над каждой гиперплоскостью $(n-1)$ -сети возникает поверхностный интеграл напряженности поля или напряжения e .

Когда обычная 1-сеть является неплоской ($n=3$), тогда $n-1=3-1=2$ и двойственная сеть есть 2-сеть из плоскостей. Электротехники до сих пор незнакомы с такими сетями. Однако если 1-сеть плоская, то $n=2$ и $n-1=2-1=1$. В этом случае двойственная сеть есть обычная 1-сеть, состоящая из одномерных вет-

¹⁾ «Открытый гиперпуть» и «замкнутый гиперпуть». (Прим ред).

вей. Электротехники применяют такие двойственные 1-сети только как диковинку, но не как представление (модель) для электромагнитного поля, которое окружает первичную плоскую сеть.

«ДВУХФАЗНАЯ» СТРУКТУРА ОБЫЧНЫХ СЕТЕЙ

Таким образом, из-за наличия видимой *первичной* 1-сети и невидимой *двойственной* ($n-1$)-сети в каждой электровозбужденной (переменным током) сети *всегда* имеется двухфазная пространственная структура, в которой две фазы ортогональны друг другу. (Каждая фаза сама состоит из двух множеств ортогональных путей.)

В двойственной сети все понятия, базовые векторы и индексы снабжены звездочкой.

ФИЗИЧЕСКАЯ ИНТЕРПРЕТАЦИЯ «ОБРАТНОГО» ТЕНЗОРА СОЕДИНЕНИЯ $A = C_i^{-1}$

Настоящая книга не дает никакой физической интерпретации для столбцов A , поскольку во время ее написания понятие ($n-1$)-сети, ортогональной 1-сети, еще не было известно автору¹⁾. Благодаря экспериментам с «полиэдральными» сетями, он теперь в состоянии дать следующую интерпретацию формулы преобразования $e + E = A(e' + E')$:

1) столбцы A^e перечисляют те ($n-1$)-гиперплоскости, которые образуют *открытые* пути в ($n-1$)-сети. По этим путям текут «ламинарные» напряжения e_α ;

2) столбцы A^o перечисляют те ($n-1$)-гиперплоскости, которые образуют замкнутые пути в ($n-1$)-сети. По этим путям текут «соленоидальные» напряжения E_α .

Общепринятое обозначение приложенного напряжения e_α или E_α в ветви *маленьким кружком* является попыткой имитации ($n-1$)-пути e_α или E_α , окружающего ветвь. *Стрелка*, обозначающая ток i^α или I^α , имитирует 1-путь.

СПЕЦИАЛЬНЫЕ ФОРМЫ C ИЛИ A

Компоненты квадратной матрицы соединения C и A , содержащие только $+1$, -1 и 0 (и подчиняющиеся только правилу независимости различных путей), можно рассматривать в виде самых разнообразных *частных* форм. Они могут осуществлять преобразование одного множества путей в другое при сохранении того же способа соединения ветвей. Прямоугольные матрицы C_o или C_c могут содержать *единичную матрицу*. Даже обе прямоугольные матрицы C_o и C_c могут сохранять эти единичные матрицы одно-

¹⁾ Однако в гл. 8 напряжение уже представляется в виде плоскости, ортогональной протекающему в ветви вектору тока. (*Прим. пер.*)

временно, так что C имеет треугольную форму. Однако было бы ошибочно выделять из бесчисленного количества одну частную матрицу и применять ее как отправную точку для основания теории электрических сетей, как это обычно делают граф-теоретики. Все частные случаи должны вести только к частной или искаженной теории.

«ТРИЖДЫ-ОРТОГОНАЛЬНАЯ» ОРГАНИЗАЦИЯ

Общие формы C и A предполагают существование не только двух, но и большего числа видимых и невидимых сетей, так же как и большего числа электрических параметров, а не только двух (e и i). Фактически настоящая книга вводит уже «трижды-ортогональную» организацию 1-сетей, в которой присутствует восемь ($2^3=8$) электрических параметров: $i, I, e, E, i^*, I^*, e^*, E^*$ (на с. 484 i^1 и i^2 вместо i и i^* и т. д.). В т. 2 (см. сноску на с. 21) будет показано, что любая неподвижная однофазная электрическая сеть может быть рассмотрена не как «двухцилиндровая» машина (с двумя системами связанных уравнений), как это сделано в настоящей книге, а как «восьмицилиндровая» машина. Электрическая сеть фактически обладает в восемь раз большим числом независимых систем уравнений и параметров, чем это принято использовать в обычных сетях из открытых и замкнутых контуров («одноцилиндровая» машина). Общие формы C и A могут использовать все параметры окружающего электромагнитного поля, а не только два из них (i^α и e_α).

В итоге трижды-ортогональная (или трижды-двойственная) организация 1-сетей предполагает различие между следующими ортогональными (или двойственными) понятиями:

1) ковариантные и контравариантные понятия (с нижними и верхними индексами) такие, как e_α, i^α (или i_α и i^α , или e_α и e^α);

2) открытые и замкнутые понятия (обозначаемые заглавными и маленькими буквами) такие, как I и i (или I^α и i^α);

3) первичные и двойственные понятия (без звездочки и со звездочкой) такие, как i и i^* (или i^α и $i^{*\alpha}$).

ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ПОНЯТИЯ 1-СЕТИ

Из-за недостатка места отсылаем читателя к более ранней статье автора «Замаскированные электрические 1-сети как графы» («Journal of Applied Mathematics», v. XX, № 2, July 1962, pp. 161—174) для обсуждения других понятий электрической 1-сети и их всевозможных искажений граф-теоретиками. Эти понятия упоминались в лекциях и опубликованы впервые в 1964 г. ¹⁾

¹⁾ «Invisible Sattelites of Electrical Networks» (Correspondence). Matrix and Tensor Quarterly, v. 14, № 3 (March 1964), pp. 90—94.

Теперь обратим внимание читателя на безграничные возможности, открываемые расширением тензорных понятий 1-сети, которые даются в этой книге, для конструирования *самоорганизующихся полиэдральных сетей*.

«СТАРЫЙ ТИП» ТЕНЗОРНОГО АНАЛИЗА И АЛГЕБРАИЧЕСКАЯ ТОПОЛОГИЯ

Сам факт, что автор не дал забыть понятия, введенные в этой книге (а это старались сделать в течение десятилетий граф-теоретики), и смог продолжить их развитие до высокого уровня, красноречиво свидетельствует об их фундаментальной значимости и правильности. Развитие основных понятий было результатом многолетнего и мучительного процесса *проб и ошибок*, поскольку во время написания книги не было всех ключей от корректной топологической и тензорной организации обычной электрической сети. Фактически две наиболее относящиеся к делу науки — тензорный анализ и алгебраическая топология — 30 или 40 лет назад как бы нарочно вводили в заблуждение электротехника в его исследованиях по фундаментальной научной теории *электрических сетей*.

В 30-х годах тензорный анализ использовался в учебниках по дифференциальной геометрии только для решения непрерывных проблем теории *поля* (применялись *локальные* тензоры «в малом»). Для электрических сетей требуется *дискретный* подход (использующий *глобальные* тензоры «в целом»). В 30-х годах алгебраическая топология накладывала на свои подлежащие структуры не специальные типы алгебр, которые могут представлять интегралы *физических* сущностей (функционалы), а только алгебры обобщенных произвольных чисел, которые (как автор инстинктивно чувствовал) не могли представлять *сильно связанные* явления, имеющие место в электрической сети (или даже в механической сети). В результате этого вывода он должен был в течение нескольких десятилетий полагаться на собственную изобретательность.

«НОВЫЙ ТИП» ТЕНЗОРНОГО АНАЛИЗА И АЛГЕБРАИЧЕСКОЙ ТОПОЛОГИИ

Только в течение последних нескольких лет автор случайно обнаружил, что он больше не является одиноким путником в джунглях. Оказалось, что с 30-х годов, пока он брел с таинственными «тензорами в целом» и потоками электричества через сеть, большая группа математиков-теоретиков открыла обширный лабиринт путей в тех же джунглях. Благодаря наложению множества «внешних» дифференциальных *p*-форм (и их интегралов по *p*-мерным объемам) на подлежащие структуры алгебраической топологии возникла новая наука — *«топология дифференци-*

руемых многообразий». Картан, де Рам, Ходж, Лихнерович, Уитни, Стинрод, Эйленберг, Кодаира, Шевалле, Черн и другие математики уже опубликовали много книг и статей под такими абстрактными названиями, как «Гармонические интегралы», «Дифференциальные формы», «Пучки волокон», «Алгебра Грассмана», «Дифференцируемые многообразия», «Теория геометрического интегрирования» и других, включающих различные аспекты центрального предмета дифференцируемого многообразия.

В то время как в алгебраической топологии старого типа не подчеркивалась тензорная (инвариантная) точка зрения, в этих новых типах топологий (алгебраической и дифференциальной) понятие «тензор» оказалось в центре основания. Они исследуют как *локальные*, так и *глобальные* (непрерывные и дискретные) свойства многосвязных пространств интегрированием и дифференцированием функций, накладываемых (вложенных) на такие пространства. Интересно, что в этих *геометрических* приложениях упоминаются только «матрица инцидентий» и «теорема Стокса». В них не упоминается «матрица соединений» или «законы Кирхгофа» или их эквиваленты, поскольку последние понятия требуются только для *физических* проблем ограниченного класса, которыми занимаются инженеры. Геометры преследуют другие, более общие цели.

МОДЕЛИ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

Пытаясь понять различные работы по топологии дифференцируемых многообразий, автор с приятным удивлением обнаружил, что его многочисленные публикации по *моделирующим электрическим сетям для дифференциальных уравнений в частных производных математической физики* (представляющую теорию упругости, гидродинамику, уравнения Максвелла, уравнение Шредингера и т. д.) полностью отвечают этим современным топологическим понятиям. Следует особо подчеркнуть, что вопреки мнению отдельных лиц электрические модели автора *никогда* не соответствовали уравнениям в «конечных разностях», которые используют узловые сети (0-сети). Он всегда старался реализовать с помощью сетей из ветвей (1-сети) линейные, поверхностные и объемные интегралы физических сущностей, ведущие к тензорным понятиям градиента, дивергенции, ротора и другим, так же как и теорема Стокса. *Топология дифференцируемых многообразий имеет дело с этими же тензорными понятиями (интегральными инвариантами)*, но, конечно, на более высоком геометрическом (но не физическом) уровне.

Приведенные рассуждения являются основанием того, что многочисленные типы электрических моделей, созданных автором для уравнений математической физики, образуют твердый фундамент для понимания возбуждаемых полиэдральных сетей.

Настоящую книгу с ее понятиями видимой 1-сети (квадратная C) и невидимой $(n-1)$ -сети (квадратная $A=C_{i-1}$) следует рассматривать как знакомство с одним из четырех опорных столбов, на котором в настоящее время автором воздвигнут небоскреб возбуждаемых полиэдральных сетей. Этот небоскреб состоит из иерархии 0-, 1-, 2- и т. д. до n -сетей и двойственных им n -, $(n-1)$ - $(n-2)$ - до 0-сетей, взаимосвязанных в единственную структуру, через которую распространяются электромагнитные, магнитогидродинамические и еще более сложные ионные, химические и другие волны.

«ТРИЖДЫ-ОРТОГОНАЛЬНАЯ» ПРИРОДА ВСЕХ p -СЕТЕЙ

Корректность всех «трижды-ортогональных» понятий обычных 1-сетей, развитых в настоящей книге, подтверждается также тем, что каждая 0-, 2- или вообще p -сеть возбужденного полиэдра обладает такими же трижды-ортогональной структурой и уравнениями, какими наделены в этой книге 1-сети. Таким образом, *нет никакой необходимости развивать новую теорию каждой p -сети. Двойственная $(n-p)$ -сеть имеет такие же структуру и уравнения, как и первичная p -сеть, что уже отмечалось для частного случая ($p=1$).*

Читатель должен сам поработать с выражениями p -сетей высокого ранга по мере изучения 1-сетей настоящей книги.

ЧЕТЫРЕ ОПОРНЫХ СТОЛБА ПОЛИЭДРАЛЬНЫХ СЕТЕЙ

В то время как настоящая книга (а также и том 2) по однофазным неподвижным 1-сетям представляет собой первый «опорный столб» изучения полиэдральных сетей, второй «опорный столб» — это двухфазные *движущиеся* сети («Применение тензоров к анализу вращающихся машин» — «Дженерал электрик», 1938). Третий «опорный столб» представляет собой дискретную сеть таких понятий *непрерывного* поля, как «градиент», «дивергенция», «ротор»¹⁾. Четвертый «опорный столб» — это внутренняя организация «тиринга» (разрывания) 1-сетей²⁾. Даже простейшие полиэдральные структуры включают разнообразные понятия из всех четырех опорных столбов.

¹⁾ См. «Tensors for Circuits» (и обширную библиографию в ней), London, Dover, 1959. На русский язык переведено (довольно небрежно и с искажением) 1-е издание этой книги, имевшей название «A short course in tensor analysis for electrical engineers» (N. Y. Wiley; London, Chapman Hall, 1942), как «Применение тензорного анализа в электротехнике». М., Госэнергоиздат, 1955. (Прим. пер.)

²⁾ Diakoptics: The Piecewise Solution of Lagre Scale Systems (London, Mc Donald, 1963). На русский язык переведена как «Исследование сложных систем по частям — диакоптика», М., «Наука», 1972. (Прим. пер.)

«НЕПОДВИЖНЫЕ» ПОЛИЭДРАЛЬНЫЕ СЕТИ

Возбужденные полиэдральные структуры прежде всего можно использовать во всех целях, для которых в настоящее время используются обычные электрические сети, но в гораздо более общем смысле. Например, при построении моделей (скажем, для дифференциальных уравнений в частных производных) иерархия p -сетей может представлять не только множество функций n -переменных, принимающих значение в вершинах полиэдра, но также их первые, вторые, третьи и до n -х производных (или, скорее, их конечные разности), принимающие значение на соответствующих p -симплексах, причем все одновременно. Сами функции могут быть скалярными, векторными или тензорными, любого ранга в n -мерном пространстве. Важно заметить, что полиэдральная модель имеет встроенный механизм *интерполирования* значений функции и ее высших производных между вершинами, ребрами (1-симплексы), треугольниками (2-симплексы), тетраэдрами (3-симплексы) и так далее, до p -симплексов полиэдра. Для уравнений Пуассона $\nabla^2\varphi = (d\delta + \delta d)\varphi = \rho$ и Максвелла уже были получены численные решения для множества различных случаев.

В отличие от обычных электрических моделей полиэдральные сети могут моделировать распределения физических сущностей не просто в отдельных *дискретных* точках, а *непрерывно*. Каждый p -симплекс может представлять в деталях аналитическую функцию p переменных с помощью «внешней дифференциальной p -формы», ассоциированной с p -симплексом. Только после интегрирования по p -мерному объему p -форма дает конкретное число — интеграл по p -объему. (Например, каждая ветвь 1-сети фактически представляет линейный интеграл дифференциальной 1-формы.) Топология дифференцируемых многообразий преимущественно имеет дело только с непрерывными функциями. Именно автор, благодаря его инженерным интересам и потребностям, подчеркнул эту дискретную (на p -объемный интеграл) точку зрения, по крайней мере в настоящий момент.

«ДИНАМИЧЕСКИЕ» ПОЛИЭДРАЛЬНЫЕ СЕТИ

Погружением двухфазной (первичной и двойственной) полиэдральной структуры в n -мерную область, наполненную неподвижной или движущейся плазмой, можно распространять через полиэдр магнитогидродинамические, ионные, химические и еще более общие волны. Каждый p -симплекс и его двойственная ($n-p$)-ячейка вместе становятся единой, двухфазной, «обобщенной» вращающейся электрической машиной. Так, можно добавить к электромагнитным параметрам большое число механических, термодинамических и других параметров, которые удовлетворяют как *уравнениям Лагранжа*, так и *уравнениям термодинамики необратимых процессов*. Все они образуют само-

согласованную структуру, которая, как доказывается уже фактически найденными численными примерами, обладает способностью к *самоорганизации*.

Результирующая структура как более совершенный тип модели применяется для решения динамических проблем теории поля и транспортных явлений, таких, какие имеют место в плазме. Она может также служить для оптимизации многомерных нелинейных задач и для решения современных теоретико-информационных проблем, поскольку и детерминистская, и вероятностная интерпретации могут быть извлечены из модели. Фактически все тензоры, которые появляются в полиэдре, являются статистическими сущностями.

ОБОБЩЕННАЯ КРИСТАЛЛИЧЕСКАЯ ОПТИКА

Нерегулярно расположенные вершины полиэдра можно рассматривать как атомы в многоатомной молекуле. Самоорганизующиеся электромагнитные волны, падающие и распространяющиеся через полиэдр, удивительно похожи на самоподдерживающиеся электромагнитные и дипольные волны, перемещающиеся через молекулы кристалла, когда колеблющиеся атомы кристалла возбуждаются рентгеновскими или оптическими волнами.

И в полиэдральных, и в кристаллических исследованиях можно использовать понятия волновой или геометрической оптики. Таким образом, возбужденный полиэдр может служить моделью многоатомной молекулы или кристалла при соответствующих ограничениях.

Наоборот, вполне возможно, что многоатомные молекулы или кристаллы будут использоваться для моделирования полиэдральных структур. Возможность создания и использования «кристаллических компьютеров» для решения очень сложных проблем является одним из стимулов для исследования полиэдральных волн.

ЭЛЕКТРОВОЗБУЖДЕННЫЙ ПОЛИЭДР КАК РЕЛЯТИВИСТСКАЯ МОДЕЛЬ

Абсолютная необходимость использования тензорных понятий следует также из того весьма удивительного факта, что уравнения Максвелла должны быть сначала выражены в их четырехмерной тензорной форме для того, чтобы волны могли распространяться через полиэдр. Это значит, что восемь параметров классической волны (e , b , h , d , ρ^e , ρ_m , j^e , j_m) должны быть выражены восемью параметрами релятивистской волны ($F_{\alpha\beta}$, $F^{\alpha\beta}$, $S_{\alpha\beta\gamma}$, $S^{\alpha\beta\gamma}$) и их двойственными формами ($F_{\alpha\beta}^*$, $F_*^{\alpha\beta}$, $S_{\alpha\beta\gamma}^*$, $S_*^{\alpha\beta\gamma}$), прежде чем эти параметры смогут удовлетворять теореме Стокса. Независимые n пространственных переменных должны быть также дополнены добавочной внешней

переменной, представляющей время, что позволяет толковать пространственные и временные переменные как равноправные.

Однако наиболее важным различием между этими переменными является то, что пространство входит как множество «замкнутых путей» переменных x , в то время как время t входит как переменная «открытого пути». Таким образом, ортогональные соотношения между временной и пространственными переменными полностью сохраняются в полиэдральной модели.

ЭНЕРГОВОЗБУЖДАЕМЫЙ ПОЛИЭДР КАК КВАНТОВО-МЕХАНИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ

Импедансоподобные и адмиттансоподобные матрицы оживленной двухфазной полиэдральной модели демонстрируют некоторые характеристики матричных операторов Гейзенберга. Эти квантовые операторы, являющиеся смещением x , импульсом p , энергией E и временем t , одновременно представляют операторы, используемые квантовой механикой. Это открывает область множества применений полиэдра для моделирования квантовых и квантово-механических явлений.

НЕФИЗИЧЕСКИЕ ПРИЛОЖЕНИЯ МНОГОМЕРНЫХ АППРОКСИМИРУЮЩИХ КРИВЫХ

Самым первым нефизическим применением возбужденной полиэдральной сети было применение к многомерным функциям распределения, аппроксимирующим экспериментальные данные. Численные примеры двухмерных четырехтактных функций распределения в различных задачах уже опубликованы. Поразительным следствием осцилляторной природы полиэдральных волн является то, что один и тот же полиэдр с высоким качеством приближения может представлять не только одну произвольную функцию в n -мерном пространстве (и ее высшие частные производные), но и несколько функций, так же как и их высшие производные, все одновременно, без корректировки модели. Она также может описывать случайное множество чисел. Более того, та же самая модель может одинаково приближать любое число скалярных, векторных или тензорных функций любого ранга, заданных в n -мерном пространстве.

ВЗВЕШЕННЫЕ ФУНКЦИИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

Многообещающие возможности для системного анализа открываются потому, что динамический полиэдр, погруженный в плазму, также демонстрирует способность к самоорганизации. Когда функция оценивается с приписанным ей определенным весом, то скорости в плазме могут играть роль веса, приписываемого аппроксимирующей функции. В многочисленных уже

решенных численно примерах полиэдр продолжает оценивать с той же удовлетворительной точностью, что и в незавершенном случае, любое число взвешенных функций (и их высших производных) без всякой корректировки модели. Аппроксимирующие функции и приписываемые им веса были скалярными, векторными и тензорными функциями в n -мерном пространстве в различных комбинациях. (Например, вектор-функция пространства обладала в качестве веса скалярной функцией пространства (пространства Вейля), где метрический тензор является взвешенной скалярной функцией точки.) Другие типы весов могут быть представлены другими параметрами плазмы.

Самоорганизующиеся характеристики возбужденного полиэдра, как доказано в многочисленных публикациях, дают нам новую более развитую картину физических явлений, чем колебания, которые могут существовать в обычной 1-сети. Только колеблющиеся в молекуле атомы и сопровождающие эти колебания резонансные волны могут предполагать подобные динамические равновесия.

ДАЛЬНЕЙШЕЕ РАЗВИТИЕ

Во время написания этого введения автор проводил эксперименты, вводя гидро- и термодинамические параметры как дополнение к электромагнитным и механическим параметрам. Он вводил также «обратные» (или «волново-числовые») пространства с фурье-преобразованиями, спектральной плотностью, авто- и взаимокорреляционными функциями так же, как и с другими статистическими понятиями. Картины отражения, преломления и дифракции (Фраунгофера и Френеля) полиэдральных волн и лучей должны следовать параллельно, но в более обобщенном виде по сравнению с картинами обычной кристаллической оптики.

Появление термодинамических параметров должно облегчить развитие многомерной теории информации. Поскольку каждый «мертвый» p -симплекс и каждый «живой» параметр в полиэдральных сетях является либо открытым, либо замкнутым путем, то все компоненты многозначной *да* и *нет* логики имеются в наличии. Вероятностная структура также обладает встроенной мерой вероятности или не вероятности. Таким образом, окончательное конструирование аналогового или цифрового «кристаллического компьютера» и «искусственного мозга», который использует иерархию полиэдральных волн, теперь стало реальной возможностью.

ПРЕДПОЛАГАЕМЫЕ ИЗМЕНЕНИЯ В ТЕРМИНОЛОГИИ

Так как предполагается ввести электровозбужденные полиэдральные сети, необходимо использовать в исследовании электровозбужденных 1-сетей только такие понятия, которые в равной

мере приложимы к каждой p -сети высшей размерности. Уже упоминалось, что выражения «узловая пара» и «узловая сеть», которые встречаются в этой книге, следует заменить их первоначальными — «открытый контур» (или «открытый путь») и «сеть открытых контуров». Таким образом, в 2-сети существуют «открытые 2-пути» и «замкнутые 2-пути».

В прямом обозначении мощность $e_{\alpha i^{\alpha}}$ следует записывать как $e_i * i$, а не $e^* i$, чтобы различать строчные и столбцовые векторы.

В последнее время слово «спинор» обозначает используемые теорией относительности специальные виды тензоров с комплексными компонентами. Следовательно, в тексте слово «спинор» следует заменить выражением «тензор с комплексными компонентами» или просто словом «тензор», поскольку теперь тензор понимается как объект, обладающий и действительными и комплексными компонентами. Слово «катушка» должно выражать понятие «ветвь с импедансом». Возможно, его следует заменить этим более длинным, но более точным описанием.

НЕОБХОДИМОСТЬ В ТРИЖДЫ-ОРТОГОНАЛЬНОЙ РЕОРГАНИЗАЦИИ

Полиэдральная сеть — это ненасытный исполин, который должен питаться понятиями из всех физических (технических) наук. Однако многие эти понятия должны будут пройти через мельницу организации 1-сети, прежде чем смогут быть переварены полиэдральной организацией.

Электротехники уже создали огромный завал 1-мерных наук с помощью 1-сетей. Все эти дисциплины ожидают многомерного обобщения с помощью полиэдральных сетей. Когда это обобщение для цепей управления (детерминированных и стохастических), сетей связи и фильтров, электрических 1-сетей дифференциальных и интегральных уравнений, нейроноподобных сетевых моделей и многих других детерминистских, стохастических и адаптивных применений 1-сетей будет сделано, использование их в полиэдральной модели окажется только вопросом времени.

Автор убежден в том, что все электрические дисциплины 1-сетей должны быть сначала *реорганизованы* трижды-ортогональным и восьмисложным способом настоящей книги, прежде чем 1-сетевые дисциплины смогут быть расширены систематическим, естественным (а не «силовым») приемом до многомерных полиэдральных приложений. Каждая из этих наук должна сконструировать дополнительный 1-сетевой опорный столб к полиэдральному небоскребу. Такая трижды-ортогональная организация уже сама существенно расширит имеющиеся 1-мерные возможности этих наук.

Но даже переформулировку 1-сети следует осуществлять на основе умышленного «невежества» относительно теоретизирования граф-теоретиков, включая их «теорию графов линейных электрических сетей».

Скеннектеди, Нью-Йорк, США

Габриэль Крон

Июнь, 1964 г.

Глава 1

АЛГЕБРА n -МАТРИЦ

1. НЕОБХОДИМОСТЬ «ОРГАНИЗАЦИИ» В ПОДХОДЕ К ТЕХНИЧЕСКИМ ЗАДАЧАМ

I. В работе инженера символ, подобный A , может представлять величины различного типа. Например, он может обозначать:

1) постоянную величину, например $A=5$ или $A=3,14159$, или $A=3+4j$;

2) переменную величину, например $A=x$, или функцию переменных $A=\cos x$, или $A=x^2+3x+4$;

3) линейный оператор, например $A=d/dt=p$ или $A=p^2+p$, или $A=1$ — единичная функция Хевисайда и т. д.

Во всех этих случаях единственный символ A обозначает одну и ту же величину и поэтому во всех технических проблемах в общем случае используется столько различных символов, сколько имеется различных величин в рассматриваемой задаче. Так как для описания даже простых технических структур требуется много различных символов и необходима уместная дисциплина для запоминания роли каждого символа на протяжении всего анализа, возникает потребность в таком аналитическом аппарате, который не требует большого числа различных символов и сохраняет в ходе решения технической задачи абсолютный минимум символов.

II. Перед инженером по существу стоят те же задачи, что и перед физиком: оба они выражают физические явления с помощью математических символов. Вообще говоря, физик старается свести природное явление к его простейшей форме, обычно выражаемой малым числом уравнений, а чаще всего — одним уравнением; при этом он вводит столько математических символов, сколько используется соответствующих делу физических понятий. Иначе говоря, физик выводит уравнения прохождения электрических зарядов между *двумя* электродами или для электромагнитной волны, распространяющейся вдоль *одного* проводника, или для электродвижущей силы, возникающей в *одном* проводнике, движущемся в магнитном поле, или для прохождения света через одну линзу и т. д. Как только уравнение данного явления установлено, функция физика заканчивается.

Затем открывается поле деятельности инженера. Он берет двухэлектродную лампу и добавляет несколько дополнительных электродов; для создания лучших измерительных приборов он соединяет эти многоэлектродные лампы в различные сети или строит передающие сети, покрывающие целые континенты, или он берет *множество* движущихся проводников и конструирует разнообразные сложные вращающиеся электрические машины, или из *нескольких* линз конструирует оптический прибор и т. д.

Таким образом, инженер обобщает одно-, двух- и трехмерные задачи физика до k -мерных. Именно здесь у него и возникают трудности. Признано, что инженер в своих конструкциях не создает дополнительных физических сущностей, а только вводит дополнительные *взаимосвязи* между различными элементами: сложность конструкции резко возрастает с увеличением числа элементов и связей между ними. Большинство инженерных задач требует не открытия новых законов, а изобретательности в организации взаимосвязанных явлений, для которых по каждой составной части системы, рассматриваемой отдельно, законы уже известны. Например, закон движения проводника в магнитном поле известен, и объединение *множества* проводников во вращающуюся электрическую машину требует только организованного *метода анализа*, а не открытия новых законов. Закон, справедливый для одного проводника, с необходимостью должен выполняться и для движения любой сложной сети, состоящей из любого числа проводников. Действительная проблема состоит в том, как использовать этот факт при выполнении практических расчетов.

Для организации множества инженерных задач в минимальное число стандартных типов, подобных тем, которыми оперирует физик, необходимо ввести новые точки зрения, новые символы, новые абстрактные и физические понятия. *То, что нужно для унифицированного подхода и соответствующей точки зрения, — это не дополнительная математика, а «организация» уже используемой математики.*

2. «ОРГАНИЗОВАННЫЕ» МНОЖЕСТВА

Будем производить действия с большим числом величин, встречающихся в инженерных задачах. *Первый логический шаг «организации» заключается в том, что символ A может представлять не одну величину (число, функцию, линейный оператор и т. п., как показано выше), а целое множество величин, имеющих один и тот же физический смысл.* Например, A может представлять все токи $i^a, i^b, i^c, i^d, \dots$, протекающие во всех контурах сети, а не только один из токов.

Соответственно единственный символ A может представлять следующие организованные «множества» величин:

1) множество из k величин a, b, c, \dots , расположенных в строку, называемую «одномерным множеством», или «1-множеством»:

$$A = \left[\begin{array}{|c|c|c|c|c|c|} \hline a & b & c & d & e & f \\ \hline \end{array} \right] \quad (1.1)$$

2) множество из k^2 величин, организованное в квадрат и называемое «двухмерным множеством», или «2-множеством»:

$$A = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline a & b & c & d \\ \hline e & f & g & h \\ \hline i & j & k & l \\ \hline m & n & p & q \\ \hline \end{array} \quad (1.2)$$

3) множество из k^3 величин, организованное в куб и называемое «трехмерным множеством», или «3-множеством» (рис. 1.1). В общем случае эти множества называются « n -множествами».

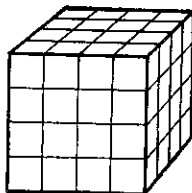


Рис. 1.1. 3-множество.

3. n -МАТРИЦЫ

I. Чтобы окончательный ответ не зависел от того, использовалось ли в анализе исходное большое число величин или малое число представляющих их символов, с этими множествами различной размерности необходимо производить математические операции, т. е. их суммировать, умножать, дифференцировать, интегрировать и т. д.

Можно создать различные правила действия с этими множествами в зависимости от решаемой задачи. Однако найдено, что в физических и геометрических проблемах полезен конкретный вид действий, описываемый ниже. Когда множество величин подчиняется конкретным правилам действий, которые вскоре будут показаны, то множество называется « n -мерной матрицей», или кратко « n -матрицей».

II. Чтобы можно было легко складывать, перемножать и выполнять другие действия с n -матрицами разной размерности, в этой книге каждой строке, столбцу и слою n -матрицы будут приписаны определенные отметки или индексы:

1) примеры одномерных или 1-матриц:

$$\begin{aligned}
 A &= \begin{array}{c} a \quad b \quad c \quad d \quad e \quad f \quad g \quad h \quad i \\ \hline z \quad | \quad 1 \quad | \quad -9 \quad | \quad 0 \quad | \quad 0 \quad | \quad 2 \quad | \quad 7 \quad | \quad 8 \quad | \quad -3 \end{array} \\
 B &= \begin{array}{c} a \quad b \quad c \quad d \quad e \quad f \\ \hline 2+3j \quad | \quad 0 \quad | \quad 4-7j \quad | \quad 8j \quad | \quad 3 \quad | \quad +2j \end{array} \\
 C &= \begin{array}{c} a \quad b \quad c \quad d \quad e \quad f \quad g \quad h \quad i \quad j \quad k \\ \hline A_1 \quad | \quad A_2 \quad | \quad A_3 \quad | \quad A_4 \quad | \quad A_5 \quad | \quad A_6 \quad | \quad A_7 \quad | \quad A_8 \quad | \quad A_9 \quad | \quad A_{10} \quad | \quad A_{11} \end{array} \\
 D &= \begin{array}{c} a \quad b \\ \hline xy + 3x^2 \cos y \quad | \quad 1 - y(2x - 3\sqrt{y}) \end{array} \\
 E &= \begin{array}{c} a \quad b \quad c \quad d \quad e \quad f \\ \hline 3+4j \quad | \quad 0 \quad | \quad \sin \theta \quad | \quad -\operatorname{tg} \theta \quad | \quad 5 \quad | \quad \cos \theta \end{array} \quad (1.3)
 \end{aligned}$$

Такие 1-матрицы называют «линейными матрицами». Компонентами матрицы могут быть действительные или комплексные числа или величины другого типа. Число компонент k может быть любым — от двух до бесконечности. Когда число компонент бесконечно, необходимы специальные методы, поэтому в данной книге мы их не касаемся;

2) примеры двумерных или 2-матриц:

$$\begin{aligned}
 A &= \begin{array}{c} a \quad b \quad c \quad d \quad e \\ \hline 2 \quad | \quad 3 \quad | \quad 7 \quad | \quad -8 \quad | \quad -5 \\ b \quad \hline 0 \quad | \quad 1 \quad | \quad 5 \quad | \quad 4 \quad | \quad 1 \\ c \quad \hline 5 \quad | \quad -7 \quad | \quad 8 \quad | \quad -9 \quad | \quad 0 \\ d \quad \hline 3 \quad | \quad 6 \quad | \quad 4 \quad | \quad 2 \quad | \quad 7 \\ e \quad \hline 4 \quad | \quad 8 \quad | \quad 2 \quad | \quad 9 \quad | \quad 5 \end{array} \\
 B &= \begin{array}{c} a \quad b \quad c \\ \hline 3+7j \quad | \quad 0 \quad | \quad -2j \\ b \quad \hline 9 \quad | \quad 5-j \quad | \quad 8 \\ c \quad \hline -15 \quad | \quad 0 \quad | \quad j \end{array} \\
 C &= \begin{array}{c} a \quad b \quad c \quad d \\ \hline 1 \quad | \quad 0 \quad | \quad 0 \quad | \quad 0 \\ b \quad \hline 0 \quad | \quad \sin \theta \quad | \quad \cos \theta \quad | \quad 0 \\ c \quad \hline 0 \quad | \quad -\cos \theta \quad | \quad \sin \theta \quad | \quad 0 \\ d \quad \hline 0 \quad | \quad 0 \quad | \quad 0 \quad | \quad 1 \end{array} \\
 D &= \begin{array}{c} a \quad b \quad c \\ \hline x^2 \quad | \quad y \quad | \quad 3xa \\ b \quad \hline zy \quad | \quad 0 \quad | \quad z \\ c \quad \hline -5 \quad | \quad x^2y^2 \quad | \quad x^2y \\ d \quad \hline xyz \quad | \quad x \quad | \quad 0 \end{array} \quad (1.4)
 \end{aligned}$$

Двухмерную матрицу для краткости называют «матрица». Встречаются 2-матрицы, в которых компоненты располагаются в прямоугольнике, а не в квадрате (например, матрица D , приведенная выше).

Имеются две важные матрицы:

1) единичная матрица, имеющая единицы на своей главной диагонали и нули на остальных местах:

$$I = \begin{array}{c} a \\ b \\ c \\ d \\ e \end{array} \begin{array}{c} a \\ b \\ c \\ d \\ e \end{array} \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline \end{array} \quad (1.5)$$

Иногда она называется «дельтой Кронекера» и обозначается δ :

2) нуль-матрица, все члены которой — нули:

$$0 = \begin{array}{c} a \\ b \\ c \\ d \\ e \end{array} \begin{array}{c} a \\ b \\ c \\ d \\ e \end{array} \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline \end{array} \quad (1.6)$$

3) пример трехмерной матрицы или 3-матрицы с $4^3=64$ компонентами — куб (рис. 1.2, а).

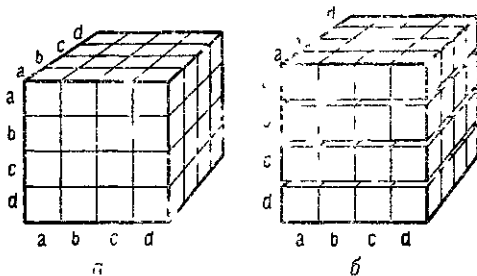


Рис. 1.2. Расчленение 3-матрицы на k 2-матриц.

На листе бумаги компоненты 3-матрицы можно представить расчленением ее на k 2-матриц, каждая из которых содержит

k^2 величин, так как $k^3 = k \times k^2$ (рис. 1.2, б). Существует три способа расчленения 3-матрицы на 2-матрицы.

Изображение n -матриц размерностью более трех показано ниже. Отдельную величину, например 5, можно назвать «нулевой матрицей» или «0-матрицей».

Следует подчеркнуть, что индексы или отметки, показанные вне жирных линий, не принадлежат n -матрицам. Строго говоря, они не рассматриваются в этом месте и будут введены лишь в гл. 3.

4. ФИЗИЧЕСКИЙ ПРИМЕР ПОЯВЛЕНИЯ n -МАТРИЦ

1. Пусть, например, даны четыре неподвижные катушки с взаимной индуктивностью между ними.

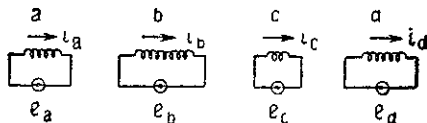


Рис. 1.3. Сеть с четырьмя катушками.

Собственный импеданс обмотки a — z_{aa} , взаимная индуктивность между обмотками b и c — z_{bc} и т. д.

Мгновенные напряжения, приложенные к каждой из них, можно расположить в строку, образующую 1-матрицу:

$$e = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} a & b & c & d \end{array} \\ \left[\begin{array}{c|c|c|c} e_a & e_b & e_c & e_d \end{array} \right] \end{array} \quad (1.7)$$

Мгновенный ток, протекающий в каждой из обмоток, также можно расположить в строку, образующую другую 1-матрицу:

$$i = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} a & b & c & d \end{array} \\ \left[\begin{array}{c|c|c|c} i^a & i^b & i^c & i^d \end{array} \right] \end{array} \quad (1.8)$$

Собственные и взаимные импедансы между катушками могут быть размещены в квадрате, образующем 2-матрицу:

$$z = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} a & b & c & d \end{array} \\ \left[\begin{array}{c|c|c|c} a & z_{aa} & z_{ab} & z_{ac} & z_{ad} \\ b & z_{ba} & z_{bb} & z_{bc} & z_{bd} \\ c & z_{ca} & z_{cb} & z_{cc} & z_{cd} \\ d & z_{da} & z_{db} & z_{dc} & z_{dd} \end{array} \right] \end{array} \quad (1.9)$$

Диагональные компоненты есть собственные импедансы, а остальные — взаимные импедансы.

II. Вместо того чтобы говорить, что четыре напряжения e_a, e_b, e_c, e_d приложены к сети, имеющей 16 импедансов, в которой протекают четыре тока, с этого момента мы будем говорить, что только одно напряжение e приложено к сети, имеющей импеданс z , в которой протекает ток i .

Таким образом, с любой неподвижной сетью, содержащей любое число импедансов, может быть связано по крайней мере три понятия, которые определяют ее поведение:

1) матрица напряжения e , представляющая все приложенные напряжения;

2) матрица тока i , представляющая все токи, протекающие в различных катушках;

3) матрица импеданса z , представляющая все собственные и взаимные импедансы различных катушек.

Эти же три понятия (e, i и z) связаны с простейшей цепью постоянного тока, содержащей только одно сопротивление.

Если катушки движутся или вводится другая точка зрения, то этих трех понятий оказывается недостаточно для представления поведения сети и нужно определить дополнительные n -матрицы.

5. СИСТЕМА ОБОЗНАЧЕНИЙ

I. В книге для представления n -матриц используются два типа обозначений.

«Прямое обозначение», в котором каждая n -матрица независимо от ее размерности представляется одним символом, называемым базовой буквой. Обычно эти символы печатаются жирным шрифтом, например e, i, z , чтобы отличить их от обычных букв e, i, z , представляющих одну величину. При написании над базовыми буквами можно ставить черточку: $\bar{e}, \bar{i}, \bar{z}$. Конечно, если есть уверенность, что недоразумений не возникает, то можно обойтись и без жирного шрифта или черточек ¹⁾.

«Индексное обозначение», в котором каждая n -матрица также обозначается одним символом A — базовой буквой, но к ней, кроме того, приписываются еще индексы, представляющие направления, по которым расположены компоненты матрицы. В частности, 1-матрица имеет один индекс — A_α ; 2-матрица имеет два индекса — $A_{\alpha\beta}$; 3-матрица — три индекса — $A_{\alpha\beta\gamma}$; 0-матрица не имеет индексов — A .

Базовая буква A , представляющая n -матрицу, в общем случае имеет число индексов, соответствующее числу направлений, по которым расположены ее компоненты.

¹⁾ Хотя, как отмечает и сам Крон, прямое обозначение практически не применяется, оно, однако, сохранено при переводе, поскольку в противном случае погреловалась бы значительная переработка книги. (Прим. пер).

II. Будем придерживаться правила, что при представлении n -матрицы с помощью нескольких индексов, скажем $A_{\alpha\beta\gamma}$, в общем случае (рис. 1.4) первый индекс обозначает строки; второй индекс обозначает столбцы; третий индекс обозначает слои, параллельные плоскости листа.

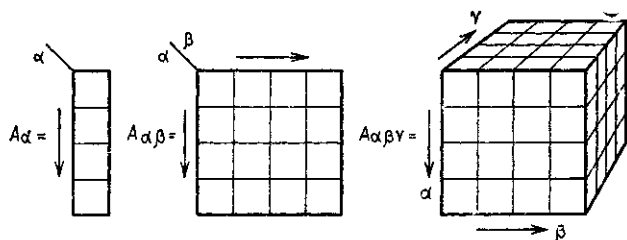


Рис. 1.4. Расположение индексов.

Однако, поскольку индексы прочно связаны со стрелками, то порядок представления при наличии стрелки не имеет особого значения. Она показывает, относится ли первый индекс к строке или столбцу.

6. «ФИКСИРОВАННЫЕ» И «СКОЛЬЗЯЩИЕ» ИНДЕКСЫ

I. Каждая катушка на рис. 1.3 имеет определенное обозначение (a, b, c, d), чтобы с ней можно было работать отдельно. Аналогично каждая строка, столбец и слой n -матрицы, как показано, имеют присвоенные им отличительные наименования. Эти индивидуальные наименования называются «фиксированными» индексами и пишутся рядом со строкой, столбцом или слоем.

Чтобы обращаться ко всем катушкам вместе, в дополнение к «фиксированным» индексам a, b, c, d, \dots в индексные обозначения вводится другой набор индексов, который представляет все фиксированные индексы. Такие коллективные индексы называются «скользящими» (или «текущими») и обозначаются греческими буквами ($\alpha, \beta, \gamma, \dots$). Таким образом, скользящий индекс обозначает все фиксированные значения a, b, c, d, \dots ; этим же свойством обладают β и γ . Например, A_α представляет все компоненты 1-матрицы A , тогда как A_b — один компонент, а именно второй в строке.

Как показано на рис. 1.4, для 2-матрицы в верхнем левом углу, рядом с наклонной чертой¹⁾, в соответствующем месте помещаются два скользящих индекса. Для 3-матрицы вдоль ребер

¹⁾ По условиям полиграфического производства у матриц в некоторых других случаях наклонная черта заменена вертикальной. (Прим. пер.).

куба изображаются три стрелки, а затем рядом с каждой стрелкой помещается скользящий индекс

II. Если все индексы скользящие, например для $A_{\alpha\beta}$, то они представляют сразу все компоненты n -матрицы. Если же один или более индексов фиксированные, как в $A_{c\beta}$ или $A_{ad\gamma}$, то это означает, что из n -матрицы выделены отдельные строка, столбец или слой (рис. 15)

Например, $A_{ad\gamma}$ представляет 2-матрицу, вырезанную из 3-матрицы. Наличие трех индексов свидетельствует о том, что исходная матрица A — это 3-матрица. Два переменных индекса a и γ показывают, что вырезана 2-матрица и что она перпендикулярна плоскости листа (скользящие индексы — 1- и 3-й). Постоянный

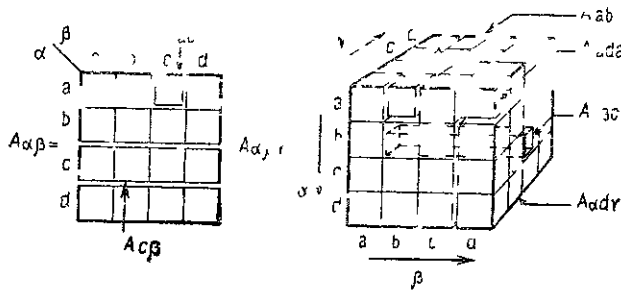


Рис. 15 Представление различных частей n -матрицы

индекс d показывает, что 2-матрица — последняя из четырех 2-матриц

Отдельные компоненты представляются присвоенными им фиксированными индексами, например $A_b=5$ или $A_{bd}=7$, при этом показано, что число 7 принадлежит строке b и столбцу d .

Если используется прямое обозначение, то скользящие индексы не указываются. Однако фиксированные индексы a, b, c, d еще сохраняются и выделяются жирным шрифтом ($\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}$) рядом с компонентами. Следовательно, 1-матрицу и 2-матрицу запишем соответственно так

$$e = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline \mathbf{a} & \mathbf{b} & \mathbf{c} & \mathbf{d} \\ \hline 2 & 3 & 4 & 5 \\ \hline \end{array}, \quad (1.10)$$

$$Z = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline \mathbf{a} & \mathbf{b} & \mathbf{c} & \mathbf{d} \\ \hline 4 & 1 & 3 & 2 \\ \hline \mathbf{b} & 5 & 7 & 6 & 8 \\ \hline \mathbf{c} & 9 & 8 & 5 & 6 \\ \hline \mathbf{d} & 5 & 4 & 3 & 2 \\ \hline \end{array}, \quad (1.11)$$

причем постоянные индексы выделены жирным шрифтом, а скользящие опущены. Частичные (неполные) n -матрицы (рис.

1 5) можно изображать в прямом обозначении только с помощью обозначений, специально вводимых для каждого конкретного случая

Таким образом, различие между прямым и индексным обозначением состоит в том, что скользящие индексы опускаются при использовании прямых обозначений. Для отличия их от обычных величин вместо скользящих индексов используется выделение жирным шрифтом

7. ПРЕДСТАВЛЕНИЕ n -МАТРИЦ БОЛЕЕ ВЫСОКИХ РАЗМЕРНОСТЕЙ ¹⁾

1 С помощью фиксированных и скользящих индексов 4-матрицу $A_{\alpha\beta\gamma\delta}$, представляющую k^4 величин, можно представить графически посредством k кубов (так как $k^4 = k \times k^3$), если последний скользящий индекс заменить рядом постоянных индексов a, b, c, d (рис. 1 6)

Поскольку каждый куб можно изобразить на листе в виде k 2-матриц, то $A_{\alpha\beta\gamma\delta}$ может быть изображена на листе в виде k^2 2-матриц ($k^4 = k^2 \times k^2$) (рис 1 7)

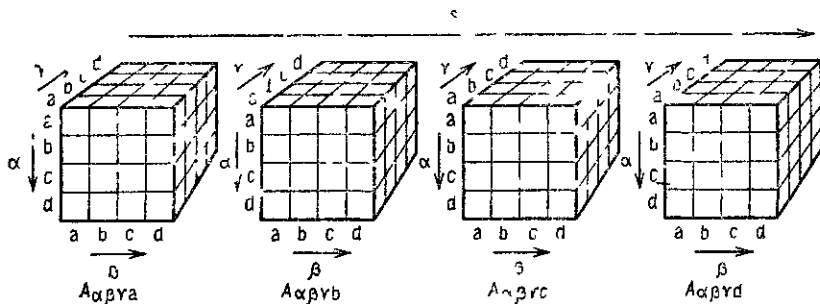


Рис. 1.6. Представление 4-матрицы $A_{\alpha\beta\gamma\delta}$ как строки из k 3-матриц.

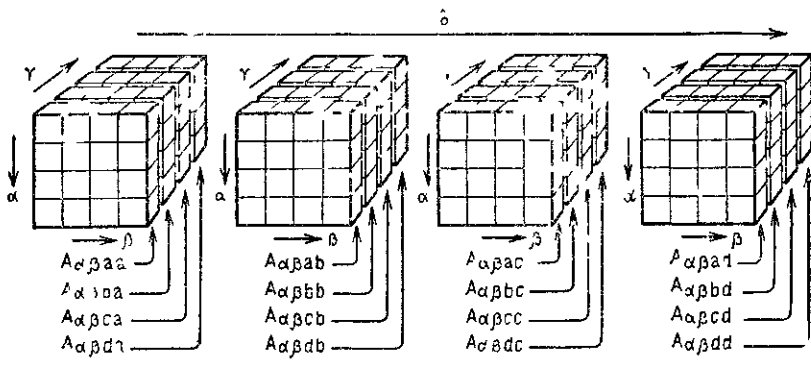


Рис 17. Представление 4-матрицы $A_{\alpha\beta\gamma\delta}$ в виде множества k^2 2-матриц

¹⁾ Этот параграф может быть опущен при первом чтении

Подобным образом 5-матрицу $A_{\alpha\beta\gamma\delta\epsilon}$ можно представить графически с помощью k^2 кубов (так как $k^5 = k^2 \times k^3$) (рис. 1.8).

Кроме того, ее можно представить в виде k^3 2-матриц, расчленив каждый куб на k 2-матриц.

В этой книге все n -матрицы при $n > 2$ изображены на листе в виде множества 2-матриц, т. е. $A_{\alpha\beta\gamma}$ будем представлять как k 2-матриц, $A_{\alpha\beta\gamma\delta}$ — как k^2 2-матриц и т. д.

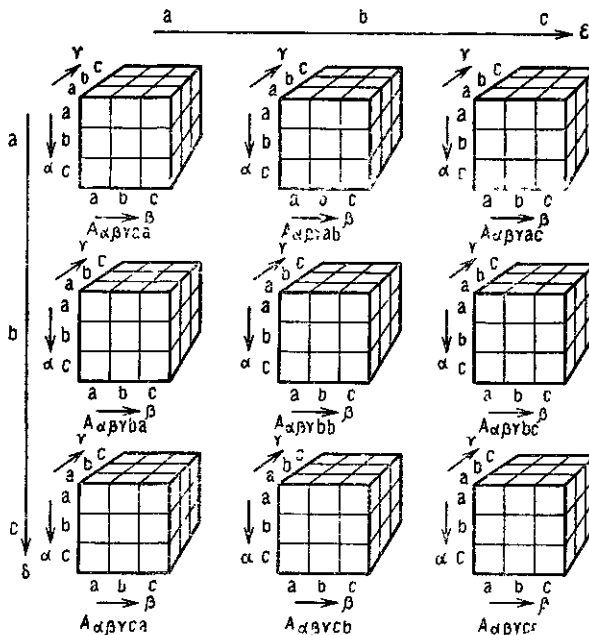


Рис. 1.8. Представление 5-матрицы $A_{\alpha\beta\gamma\delta\epsilon}$ в виде множества k^2 3-матриц.

II. Конечно, n -матрицу, подобную $A_{\alpha\beta\gamma}$, можно представить на бумаге не только в виде k 2-матриц, но и в виде k^2 1-матриц или k^3 0-матриц простым выписыванием различных компонент до тех пор, пока все компоненты не будут исчерпаны.

Так, 3-матрицу $A_{\alpha\beta\gamma}$ можно представить двумя 2-матрицами: $A_{\alpha\beta\alpha}$ и $A_{\alpha\beta\beta}$ (рис. 1.9) или как $k^3 =$ восемь 0-матриц:

$$\begin{array}{c|c|c|c} A_{aaa}=3 & A_{aba}=2 & A_{aab}=8 & A_{abb}=6 \\ A_{baa}=5 & A_{bba}=7 & A_{bab}=0 & A_{bbb}=1 \end{array}$$

1-матрица A_{α}

$$A_{\alpha} = \begin{array}{c|cccc} \alpha & a & b & c & d \\ \hline \cos \theta & \sin \theta & 0 & 1 \end{array}$$

может быть представлена как $k=4$ величины (0-матрицы)

$$A_a = \cos \theta; A_b = \sin \theta; A_c = 0; A_d = 1.$$

Часто каждая компонента 1- или 2-матрицы и так далее содержит такие длинные выражения, что они сами должны быть представлены в виде множеств из k или k^2 величин. В литературе по тензорному анализу каждая n -матрица представляется выписыванием каждой компоненты отдельно, т. е. как множество 0-матриц. Цель или назначение этих книг заключается не в решении конкретных задач в численном виде, а в доказательстве некоторых геометрических или физических теорем; поэтому в них удобное для практики представление n -матриц не столь существенно. Однако в инженерной практике решение задачи в числен-

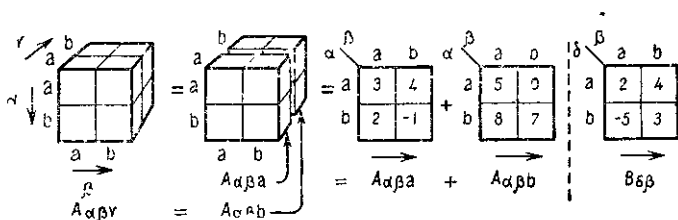


Рис. 1.9. Представление 3-матрицы $A_{\alpha\beta\gamma}$ как множества k 2-матриц.

ном виде является чрезвычайно важным, а обычное представление неудобно.

Метод представления n -матриц, подобных $A_{\alpha\beta\gamma}$, в виде куба, в виде k 2-матриц или в виде k^3 чисел является делом вкуса. Опыт показал, что расчленение n -матриц на 2-матрицы и такое их представление на бумаге, найденное экспериментально, наиболее удобно для быстрого и формализованного решения технических задач. Могут быть использованы и другие способы представления матриц. Предложенный здесь метод представления n -матриц совершенно независим от изложенных ниже понятий и методологии.

8. МАТРИЧНОЕ ОБОЗНАЧЕНИЕ

1. Главная цель книги состоит в том, чтобы выразить множество величин, соотношенных некоторым целям или координатным осям, так, чтобы эти величины могли изменяться от задачи к задаче. Поэтому совершенно необходимо идентифицировать каждую цель или координатную ось с помощью определенного знака или наименования, называемого «фиксированным» индексом. Однако n -матрицы интенсивно используются в задачах, где они совсем не связаны с физическими системами координат. В таких случаях фиксированные индексы становятся лишними и могут быть опущены. Например, компоненты 2-матрицы можно записать в виде

$$Z = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline A & B & C & D \\ \hline E & F & G & H \\ \hline I & J & K & L \\ \hline M & N & O & P \\ \hline \end{array} \quad \text{или} \quad Z = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline A & B & C & D \\ \hline E & F & G & H \\ \hline I & J & K & L \\ \hline M & N & O & P \\ \hline \end{array}, \quad (1.12)$$

не приписывая имен ни строкам, ни столбцам. Поскольку такие обозначения используются в матричном анализе, будем называть их здесь «матричными обозначениями».

Во избежание путаницы фиксированные индексы, представляющие различные координатные оси, всегда указываются, но, если это не приведет к недоразумению, они могут быть опущены.

Итак, n -матрицы могут быть представлены: 1) в индексном обозначении как $Z_{\alpha\beta}$; 2) в прямом обозначении как z ; 3) в матричном обозначении как z или $\{z\}$ и т. д.

Компоненты n -матриц представляются: 1) в индексном обозначении указанием как скользящих, так и фиксированных индексов; 2) в прямом обозначении указанием только фиксированных индексов; 3) в матричном обозначении ни фиксированные, ни скользящие индексы не указываются.

В книге матричное обозначение используется лишь изредка.

II. Следует предостеречь читателя от возможной путаницы из-за смешения понятий «способ обозначения» и «метод рассуждения»¹⁾. Простой факт записи множества чисел в квадрате и обозначение этого квадрата чисел одним символом не делает этот квадрат «тензором», так же как не превращает метод анализа в тот, который используется в тензорном анализе.

Как будет показано ниже, выражение «тензорный анализ» используется для указания «методологии», специальной «точки зрения» при анализе решаемых проблем, и оно не имеет никакого отношения к используемым обозначениям. Авторы выдающихся работ по тензорному анализу находят, что индексные обозначения наиболее подходят для их целей, но отсюда не следует, что запрещается использовать какие-либо другие обозначения, которые могут быть подсказаны воображением. Отсюда также не следует, что если кто-то использует индексное обозначение, то это превращает его рассмотрение в «тензорный анализ».

9. ДЕЙСТВИЯ С n -МАТРИЦАМИ

I. Правила действий с n -матрицами, а именно: их сложение, умножение и другие действия, с самого начала определены так, что результат действий будет тот же самый, как если бы эти

¹⁾ «Метод рассуждения» здесь используется в смысле «методология системного подхода» в современном значении. (*Прим. ред.*).

действия были произведены непосредственно над самими величинами (образующими компоненты n -матриц).

Приведенные правила действий с n -матрицами, которые указаны ниже, не порождают никаких новых понятий; это эмпирические правила, которые ускоряют работу при механическом выполнении вычислений. Можно изобрести еще более эффективные правила, ускоряющие вычисления, и даже создать технические средства для механического выполнения указанных действий. Эти правила приведены для того, чтобы отделить механическую вычислительную работу и сдвинуть ее на задний план, освободив место для тех понятий, которые будут введены.

II. Рассмотрим следующие действия: сложение, умножение, деление, дифференцирование, интегрирование.

При каждом действии между двумя n -матрицами появляется знак равенства.

Две n -матрицы размерности n равны, если равны их соответствующие компоненты. Например:

$$A = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline a & b & c & d \\ \hline 2 & 4 & -3 & 0 \\ \hline \end{array} \quad \text{и} \quad B = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline a & b & c & d \\ \hline 2 & 4 & -3 & 0 \\ \hline \end{array}$$

равны, т. е. $A=B$, поскольку каждый компонент первой матрицы равен соответствующему компоненту второй.

10. СЛОЖЕНИЕ

I. Две n -матрицы одной размерности складываются суммированием их соответствующих компонент.

Сумма двух 1-матриц определяется так:

$$A = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline a & b & c & d \\ \hline 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline \end{array} \quad B = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline a & b & c & d \\ \hline -2 & 3 & 0 & 5 \\ \hline \end{array} \quad (1.13)$$

$$A + B = C = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline a & b & c & d \\ \hline 1-2 & 2+3 & 3+0 & 4+5 \\ \hline \end{array} \quad C = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline a & b & c & d \\ \hline -1 & 5 & 3 & 9 \\ \hline \end{array} \quad (1.14)$$

Другой пример:

$$A = \begin{array}{|c|c|c|} \hline a & b & c \\ \hline x^2 & 2+3j & 0 \\ \hline \end{array} \quad B = \begin{array}{|c|c|c|} \hline a & b & c \\ \hline x & 4-7j & 3 \\ \hline \end{array} \quad (1.15)$$

$$A - B = C = \begin{array}{|c|c|c|} \hline a & b & c \\ \hline x^2 - x & -2 + 10j & -3 \\ \hline \end{array} \quad (1.16)$$

Сумма двух 2-матриц равна

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{c}
 \text{a} \quad \text{b} \quad \text{c} \quad \text{d} \\
 \text{a} \\
 \text{b} \\
 \text{c} \\
 \text{d}
 \end{array}
 \begin{array}{|c|c|c|c|}
 \hline
 6 & 5 & -7 & 4 \\
 \hline
 -8 & 1 & -9 & 5 \\
 \hline
 -4 & 7 & 8 & 3 \\
 \hline
 2 & 0 & 6 & 9 \\
 \hline
 \end{array}
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{c}
 \begin{array}{c}
 \text{a} \quad \text{b} \quad \text{c} \quad \text{d} \\
 \text{a} \\
 \text{b} \\
 \text{c} \\
 \text{d}
 \end{array}
 \begin{array}{|c|c|c|c|}
 \hline
 6 & -4 & 9 & 2 \\
 \hline
 1 & 8 & 7 & 3 \\
 \hline
 5 & -2 & 4 & -5 \\
 \hline
 7 & 3 & 6 & 1 \\
 \hline
 \end{array}
 \end{array}
 \quad (1.17)$$

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{c}
 \text{a} \quad \text{b} \quad \text{c} \quad \text{d} \\
 \text{a} \\
 \text{b} \\
 \text{c} \\
 \text{d}
 \end{array}
 \begin{array}{|c|c|c|c|}
 \hline
 6+6 & 5-4 & -7+9 & 4+2 \\
 \hline
 -8+1 & 1+8 & -9+7 & 5+3 \\
 \hline
 -4+5 & 7-2 & 8+4 & 3-5 \\
 \hline
 2+7 & 0+3 & 6+6 & 9+1 \\
 \hline
 \end{array}
 \end{array}
 =
 \begin{array}{c}
 \begin{array}{c}
 \text{a} \quad \text{b} \quad \text{c} \quad \text{d} \\
 \text{a} \\
 \text{b} \\
 \text{c} \\
 \text{d}
 \end{array}
 \begin{array}{|c|c|c|c|}
 \hline
 12 & 1 & 2 & 6 \\
 \hline
 -7 & 9 & -2 & 8 \\
 \hline
 1 & 5 & 12 & -2 \\
 \hline
 9 & 3 & 12 & 10 \\
 \hline
 \end{array}
 \end{array}
 \quad (1.18)$$

II. Две n -матрицы разной размерности складывать нельзя.

III. Часто встречается случай сложения двух 1-матриц или двух 2-матриц и других, которые имеют, однако, различные фиксированные индексы. Например:

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{c}
 \text{a} \quad \text{b} \quad \text{c} \quad \text{d} \\
 \text{a} \\
 \text{b} \\
 \text{c} \\
 \text{d}
 \end{array}
 \begin{array}{|c|c|c|c|}
 \hline
 2 & -3 & 5 & 1 \\
 \hline
 \end{array}
 \end{array}
 \quad (1.19)$$

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{c}
 \text{e} \quad \text{f} \quad \text{g} \\
 \text{a} \\
 \text{b} \\
 \text{c} \\
 \text{d}
 \end{array}
 \begin{array}{|c|c|c|}
 \hline
 -7 & 4 & 3 \\
 \hline
 \end{array}
 \end{array}
 \quad (1.20)$$

Вопрос состоит в том, какова их сумма.

В этой книге принято, что в таких случаях каждая из 1-матриц A и B имеет 7 компонент и 7 фиксированных индексов: a, b, c, d, e, f и g . Однако те компоненты, которые не показаны, равны нулю. Таким образом, предполагается, что полные выражения для матриц, приведенных выше, имеют вид

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{c}
 \text{a} \quad \text{b} \quad \text{c} \quad \text{d} \quad \text{e} \quad \text{f} \quad \text{g} \\
 \text{a} \\
 \text{b} \\
 \text{c} \\
 \text{d}
 \end{array}
 \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|}
 \hline
 2 & -3 & 5 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
 \hline
 \end{array}
 \end{array}
 \quad (1.21)$$

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{c}
 \text{a} \quad \text{b} \quad \text{c} \quad \text{d} \quad \text{e} \quad \text{f} \quad \text{g} \\
 \text{a} \\
 \text{b} \\
 \text{c} \\
 \text{d}
 \end{array}
 \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|}
 \hline
 0 & 0 & 0 & 0 & -7 & 4 & 3 \\
 \hline
 \end{array}
 \end{array}$$

Следовательно, их сумма равна

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{c}
 \text{a} \quad \text{b} \quad \text{c} \quad \text{d} \quad \text{e} \quad \text{f} \quad \text{g} \\
 \text{a} \\
 \text{b} \\
 \text{c} \\
 \text{d}
 \end{array}
 \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|}
 \hline
 2 & -3 & 5 & 1 & -7 & 4 & 3 \\
 \hline
 \end{array}
 \end{array}
 \quad (1.22)$$

В случае сложения двух 2-матриц с различными фиксированными индексами

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{c}
 \text{a} \quad \text{b} \quad \text{c} \\
 \text{a} \\
 \text{A} = \text{b} \\
 \text{c}
 \end{array}
 \begin{array}{|c|c|c|}
 \hline
 8 & 9 & 2 \\
 \hline
 1 & 3 & -7 \\
 \hline
 -5 & 6 & 4 \\
 \hline
 \end{array}
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{c}
 \begin{array}{c}
 \text{b} \quad \text{e} \\
 \text{d} \\
 \text{B} = \text{e}
 \end{array}
 \begin{array}{|c|c|}
 \hline
 3 & -2 \\
 \hline
 1 & 5 \\
 \hline
 \end{array}
 \end{array}
 \quad (1.23)$$

предполагается, что они означают 2-матрицы, каждая из которых в настоящем примере имеет 5 строк и столбцов с осями **a**, **b**, **c**, **d** и **e**:

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{c}
 \text{a} \quad \text{b} \quad \text{c} \quad \text{d} \quad \text{e} \\
 \text{a} \\
 \text{b} \\
 \text{A} = \text{c} \\
 \text{d} \\
 \text{e}
 \end{array}
 \begin{array}{|c|c|c|c|c|}
 \hline
 8 & 9 & 2 & 0 & 0 \\
 \hline
 1 & 3 & -7 & 0 & 0 \\
 \hline
 -5 & 6 & 4 & 0 & 0 \\
 \hline
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 \hline
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 \hline
 \end{array}
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{c}
 \begin{array}{c}
 \text{a} \quad \text{b} \quad \text{c} \quad \text{d} \quad \text{e} \\
 \text{a} \\
 \text{b} \\
 \text{B} = \text{c} \\
 \text{d} \\
 \text{e}
 \end{array}
 \begin{array}{|c|c|c|c|c|}
 \hline
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 \hline
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 \hline
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 \hline
 0 & 3 & 0 & 0 & -2 \\
 \hline
 0 & 1 & 0 & 0 & 5 \\
 \hline
 \end{array}
 \end{array}
 \quad (1.24)$$

Тогда их сумма есть матрица

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{c}
 \text{a} \quad \text{b} \quad \text{c} \quad \text{d} \quad \text{e} \\
 \text{a} \\
 \text{b} \\
 \text{A} + \text{B} = \text{C} = \text{c} \\
 \text{d} \\
 \text{e}
 \end{array}
 \begin{array}{|c|c|c|c|c|}
 \hline
 8 & 9 & 2 & 0 & 0 \\
 \hline
 1 & 3 & -7 & 0 & 0 \\
 \hline
 -5 & 6 & 4 & 0 & 0 \\
 \hline
 0 & 3 & 0 & 0 & -2 \\
 \hline
 0 & 1 & 0 & 0 & 5 \\
 \hline
 \end{array}
 \end{array}
 \quad (1.25)$$

Такое соглашение вводится в данной книге из-за специального характера анализируемых задач.

IV. Может оказаться, что у двух данных матриц одни фиксированные индексы одинаковые, а другие различные. В таких случаях снова применяется процедура, приведенная выше; предполагается, что по отсутствующим индексам компоненты равны нулю и поэтому они вписываются до операции. Например, пусть складываются две 2-матрицы

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{cccc}
 & a & b & c & e \\
 a & 8 & -5 & 3 & 4 \\
 b & 6 & 2 & -7 & 6 \\
 c & -2 & 4 & 5 & 1 \\
 e & 3 & 1 & 8 & 9
 \end{array} \\
 A =
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{c}
 \begin{array}{cccc}
 & c & d & e & f \\
 c & 4 & 6 & 3 & -7 \\
 d & 1 & 2 & 7 & 2 \\
 e & 3 & -4 & 9 & 5 \\
 f & 8 & 5 & 6 & -4
 \end{array} \\
 B =
 \end{array}
 \quad (1.26)$$

Фактически они представляют две 2-матрицы, каждая из которых имеет шесть фиксированных индексов: **a, b, c, d, e, f**:

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{cccccc}
 & a & b & c & d & e & f \\
 a & 8 & -5 & 3 & 0 & 4 & 0 \\
 b & 6 & 2 & -7 & 0 & 6 & 0 \\
 c & -2 & 4 & 5 & 0 & 1 & 0 \\
 d & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 e & 3 & 1 & 8 & 0 & 9 & 0 \\
 f & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
 \end{array} \\
 A =
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{c}
 \begin{array}{cccccc}
 & a & b & c & d & e & f \\
 a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 b & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 c & 0 & 0 & 4 & 6 & 3 & -7 \\
 d & 0 & 0 & 1 & 2 & 7 & 2 \\
 e & 0 & 0 & 3 & -4 & 9 & 5 \\
 f & 0 & 0 & 8 & 5 & 6 & -4
 \end{array} \\
 B =
 \end{array}
 \quad (1.27)$$

Следовательно, их сумма равна

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{cccccc}
 & a & b & c & d & e & f \\
 a & 8 & -5 & 3 & 0 & 4 & 0 \\
 b & 6 & 2 & -7 & 0 & 6 & 0 \\
 c & -2 & 4 & 9 & 6 & 4 & -7 \\
 d & 0 & 0 & 1 & 2 & 7 & 2 \\
 e & 3 & 1 & 11 & -4 & 18 & 5 \\
 f & 0 & 0 & 8 & 5 & 6 & -4
 \end{array} \\
 A + B = C =
 \end{array}
 \quad (1.28)$$

Каждый раз, когда компоненты n -матриц представляются в записи на бумаге, рекомендуем *фиксированные индексы писать около соответствующих строк, столбцов или слоев*, опускать их нельзя. Только в случаях, исключающих всякие недоразумения, их можно опустить. Однако необходимо помнить, что *индексы не являются составной частью n -матрицы*.

V. В индексном обозначении сложение (или вычитание) двух n -матриц представляется следующим образом:

$$A_{\alpha} - B_{\alpha} = C_{\alpha}; \quad (1.29)$$

$$A_{\alpha\beta\gamma} + B_{\alpha\beta\gamma} = C_{\alpha\beta\gamma}. \quad (1.30)$$

Таким образом, скользящие индексы остаются неизменными (это указывает на то, что фиксированные индексы также не изменяются); меняются только базовые буквы.

11. УМНОЖЕНИЕ 1-МАТРИЦ

I. Чтобы научиться умножать n -матрицы различных размерностей, достаточно запомнить, как перемножаются две 1-матрицы. Они умножаются перемножением соответствующих друг другу компонент и последующего сложения полученных произведений. Результатом этой операции является 0-матрица или скаляр.

Например, если

$$e = \begin{array}{c|c|c|c} a & b & c & d \\ \hline 2 & 3 & 4 & 5 \end{array} \quad (1.31)$$

$$i = \begin{array}{c|c|c|c} a & b & c & d \\ \hline 1 & 4 & 2 & 3 \end{array}, \quad (1.32)$$

то их произведение равно

$$e \cdot i = (2 \times 1) + (3 \times 4) + (4 \times 2) + (5 \times 3) = 2 + 12 + 8 + 15 = 37 \quad (1.33)$$

Если e представляет мгновенное значение напряжения, приложенного к четырем катушкам (см. рис. 1.3), а i — четыре мгновенных тока, протекающих в них, то их произведение дает мгновенную входную мощность всей системы, причем мощность выражается одним числом (скаляр).

II. В индексном обозначении произведение двух 1-матриц e_{α} и i_{α} представляется как сумма

$$e \cdot i = \sum_{\alpha=a}^d e_{\alpha} \cdot i_{\alpha} = P, \quad (1.34)$$

где скользящий индекс α пробегает подряд значения всех фиксированных индексов. Это суммирование эквивалентно приведенному выше правилу. Таким образом, если

$$e_{\alpha} = \begin{array}{c|c|c|c} a & b & c & d \\ \hline 2 & 3 & 4 & 5 \end{array}, \quad (1.35)$$

$$i_{\alpha} = \begin{array}{c|c|c|c} a & b & c & d \\ \hline 1 & 4 & 2 & 3 \end{array}, \quad (1.36)$$

то

$$\sum_{\alpha=a}^d e_{\alpha} i_{\alpha} = e_a i_a + e_b i_b + e_c i_c + e_d i_d = (2 \times 1) + (3 \times 4) + (4 \times 2) + (5 \times 3) = 2 + 12 + 8 + 15 = 37. \quad (1.37)$$

Необходимо подчеркнуть, что справа от знака суммы оба скользящих индекса должны обозначаться одной и той же буквой — α или β , которая появляется под знаком суммы, т. е.

$$\mathbf{e} \cdot \mathbf{i} = \sum_{\alpha} e_{\alpha} i_{\alpha} = \sum_{\beta} e_{\beta} i_{\beta} = \sum_{\alpha} i_{\alpha} e_{\alpha} = P. \quad (1.38)$$

12. УМНОЖЕНИЕ 2-МАТРИЦ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ «ПРАВИЛА СТРЕЛКИ»

1. 2-матрица умножается на 1-матрицу расчленением 2-матрицы на 1-матрицы и последующим умножением каждой из полученных 1-матриц поочередно на данную 1-матрицу.

Поскольку 2-матрица может быть расчленена на 1-матрицы двумя различными способами, то вводится «правило стрелки», согласно которому стрелка будет указывать направление, по которому 2-матрица «разрезается» на 1-матрицы. Например, пусть дана 2-матрица \mathbf{z} и 1-матрица \mathbf{i}

$$\mathbf{z} = \begin{array}{c} \mathbf{a} \quad \mathbf{b} \quad \mathbf{c} \\ \begin{array}{|c|c|c|} \hline 3 & 4 & 2 \\ \hline 9 & 1 & 5 \\ \hline 6 & 7 & 8 \\ \hline \end{array} \\ \hline \end{array} \quad \mathbf{i} = \begin{array}{c} \mathbf{a} \quad \mathbf{b} \quad \mathbf{c} \\ \begin{array}{|c|c|c|} \hline 2 & 3 & 4 \\ \hline \end{array} \\ \hline \end{array} \quad (1.39)$$

Их произведение $\mathbf{z} \cdot \mathbf{i}$ находится после членения \mathbf{z} на горизонтальные строки.

$$\mathbf{z} = \begin{array}{c} \mathbf{a} \quad \mathbf{b} \quad \mathbf{c} \\ \begin{array}{|c|c|c|} \hline 3 & 4 & 2 \\ \hline 9 & 1 & 5 \\ \hline 6 & 7 & 8 \\ \hline \end{array} \\ \hline \end{array} \quad \mathbf{i} = \begin{array}{c} \mathbf{a} \quad \mathbf{b} \quad \mathbf{c} \\ \begin{array}{|c|c|c|} \hline 2 & 3 & 4 \\ \hline \end{array} \\ \hline \end{array} \quad (1.40)$$

и затем каждая строка умножается на данную 1-матрицу:

$$\begin{aligned} (3 \times 2) + (4 \times 3) + (2 \times 4) &= 6 + 12 + 8 = 26 \\ \mathbf{z} \cdot \mathbf{i} &= (9 \times 2) + (1 \times 3) + (5 \times 4) = 18 + 3 + 20 = 41 \\ (6 \times 2) + (7 \times 3) + (8 \times 4) &= 12 + 21 + 32 = 65 \end{aligned} \quad (1.41)$$

Каждое произведение дает обычное число, а всего три числа, которые могут быть расположены в первоначальном порядке, что дает 1-матрицу:

$$z \cdot i = e = \begin{array}{|c|c|c|} \hline a & b & c \\ \hline 26 & 41 & 65 \\ \hline \end{array} \quad (1.42)$$

Таким образом, произведение 2-матрицы на 1-матрицу есть 1-матрица.

Конечно, в фактических вычислениях нет необходимости переписывать 2-матрицу в виде набора 1-матриц. Достаточно нарисовать стрелку в направлении, в котором предполагается «разрезание» 2-матрицы.

II. Две 2-матрицы умножаются «разрезанием» каждой из них на 1-матрицы, а затем каждая матрица первого набора перемножается последовательно на каждую 1-матрицу второго набора. Направление «разрезания» вновь указывается направлением стрелки. Например, пусть перемножаются две 2-матрицы **A** и **B**:

$$A = \begin{array}{|c|c|c|} \hline a & a & b & c \\ \hline 3 & 4 & 7 \\ \hline b & 1 & 6 & 8 \\ \hline c & 9 & 2 & 5 \\ \hline \end{array} \quad B = \begin{array}{|c|c|c|} \hline a & a & b & c \\ \hline 7 & 5 & 2 \\ \hline b & 1 & 3 & 4 \\ \hline c & 9 & 8 & 6 \\ \hline \end{array} \quad (1.43)$$

Их разрезание по стрелкам дает

$$A = \begin{array}{|c|c|c|} \hline a & a & b & c \\ \hline 3 & 4 & 7 \\ \hline b & 1 & 6 & 8 \\ \hline c & 9 & 2 & 5 \\ \hline \end{array} \quad B = \begin{array}{|c|c|c|} \hline a & a & b & c \\ \hline 7 & 5 & 2 \\ \hline b & 1 & 3 & 4 \\ \hline c & 9 & 8 & 6 \\ \hline \end{array} \quad (1.44)$$

Теперь пусть каждая горизонтальная строка матрицы **A** последовательно умножается на каждый вертикальный столбец матрицы **B**, причем каждое произведение дает одно число. Всего получим $3 \times 3 = 9$ чисел, которые нужно расположить в 2-матрицу в том порядке, в котором они перемножаются.

Например, произведение второй горизонтальной строки на третий вертикальный столбец помещается во вторую строку и в третий столбец результирующей 2-матрицы:

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline & & \\ \hline 1 & 6 & 8 \\ \hline & & \\ \hline \end{array} \cdot \begin{array}{|c|c|c|} \hline & & 2 \\ \hline & & 4 \\ \hline & & 6 \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|c|} \hline & & \\ \hline & & 74 \\ \hline & & \\ \hline \end{array}, \quad (1.45)$$

ибо $1 \times 2 + 6 \times 4 + 8 \times 6 = 2 + 24 + 48 = 74$.

Следовательно, после перемножения всех 1-матриц по порядку и после размещения их произведений в нужном порядке результирующая матрица произведения равна

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 3 & 4 & 7 \\ \hline 1 & 6 & 8 \\ \hline 9 & 2 & 5 \\ \hline \end{array} \cdot \begin{array}{|c|c|c|} \hline 7 & 5 & 2 \\ \hline 1 & 3 & 4 \\ \hline 9 & 8 & 6 \\ \hline \end{array} = \mathbf{C} = \begin{array}{c} \mathbf{a} \quad \mathbf{b} \quad \mathbf{c} \\ \hline 88 & 83 & 64 \\ \hline 85 & 87 & 74 \\ \hline 110 & 91 & 56 \\ \hline \end{array} \quad (1.46)$$

Например, произведение 3-й строки и 2-го столбца равно $(9 \times 5) + (2 \times 3) + (5 \times 8) = 45 + 6 + 40 = 91$, и это число помещается в 3-й строке и 2-м столбце результирующей 2-матрицы \mathbf{C} .

Другой пример:

$$\begin{array}{|c|c|} \hline 2+3j & 3 \\ \hline 2j & 0 \\ \hline \end{array} \cdot \begin{array}{|c|c|} \hline -4 & 1+j \\ \hline 0 & -j \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|} \hline -8-12j & -1+2j \\ \hline -8j & -2+2j \\ \hline \end{array} \quad (1.47)$$

Например, произведение 1-й строки и 1-го столбца равно

$$(2+3j)(-4) + (3)(0) = -8 - 12j + 0 = -8 - 12j.$$

III. Если произведение 1- или 2-матрицы записывается в прямом обозначении в виде $\mathbf{Z} \cdot \mathbf{i}$ или $\mathbf{i} \cdot \mathbf{Z}$, или $\mathbf{Z}_1 \cdot \mathbf{Z}_2$ и так далее, что требует правильного расположения двух стрелок около матриц, то 1-я стрелка всегда горизонтальная, а 2-я — всегда вертикальная. Конечно, матрицы размещаются на бумаге или предполагаются размещенными в том же порядке, в каком они входят в данное выражение. Этот порядок следования изменить нельзя. Например,

$$\mathbf{e} \cdot \mathbf{Y} = \begin{array}{|c|c|} \hline a & b \\ \hline \end{array} \cdot \begin{array}{|c|c|} \hline c & d \\ \hline e & f \\ \hline \end{array} = \mathbf{i} = \begin{array}{|c|c|} \hline ac+be & ad+bf \\ \hline \end{array} \quad (1.48)$$

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \begin{array}{|c|c|} \hline a & b \\ \hline c & d \\ \hline \end{array} \cdot \begin{array}{|c|c|} \hline e & f \\ \hline g & h \\ \hline \end{array} = \mathbf{C} = \begin{array}{|c|c|} \hline ae+bg & af+bh \\ \hline ce+dg & cf+dh \\ \hline \end{array} \quad (1.49)$$

$$Z \cdot i = \overrightarrow{\begin{array}{|c|c|} \hline a & b \\ \hline c & d \\ \hline \end{array}} \cdot \begin{array}{|c|} \hline e \\ \hline f \\ \hline \end{array} = C = \begin{array}{|c|c|} \hline ae + bf & \\ \hline ce + df & \\ \hline \end{array} \quad (1.50)$$

Для 1-матрицы несущественно, размещаются ли ее компоненты в строку или в столбец.

IV. Поскольку в произведении двух n -матриц $A \cdot B$ их порядок изменять на $B \cdot A$ нельзя, т. е.

$$A \cdot B \neq B \cdot A, \quad (1.51)$$

то алгебра n -матриц называется «некоммутативной алгеброй».

Например, если в приведенном выше произведении двух матриц $A \cdot B$ их порядок изменить на $B \cdot A$, то результирующая 2-матрица C' отличается от матрицы \bar{C} , задаваемой уравнением (1.49):

$$B \cdot A = \overrightarrow{\begin{array}{|c|c|} \hline e & f \\ \hline g & h \\ \hline \end{array}} \cdot \begin{array}{|c|c|} \hline a & b \\ \hline c & d \\ \hline \end{array} = C' = \begin{array}{|c|c|} \hline ea + fc & eb + fd \\ \hline ga + hc & gb + hd \\ \hline \end{array} \quad (1.52)$$

13. УМНОЖЕНИЕ 2-МАТРИЦ ПО ПРАВИЛУ СУММИРОВАНИЯ

I. В индексном обозначении произведение матриц представляется суммированием

$$A \cdot B = \sum_{\beta} A_{\alpha\beta} \cdot B_{\beta\gamma} = C_{\alpha\gamma} = C, \quad (1.53)$$

причем суммирование эквивалентно правилу стрелки для умножения, описанному выше.

В индексном обозначении правило суммирования применяется (в соответствии с расположением индексов суммирования) точно таким же образом, как расслаиваются отдельные матрицы по направлению стрелок.

Чтобы показать, что описанное суммирование дает тот же результат, что и приведенное ранее правило стрелки, рассмотрим подробно следующий пример.

Пусть

$$A_{\alpha\beta} = \overrightarrow{\begin{array}{c|cc} \alpha & 1 & 2 \\ \hline 1 & a & b \\ \hline 2 & c & d \\ \hline \end{array}} \quad B_{\beta\gamma} = \begin{array}{c|cc} \beta & 1 & 2 \\ \hline 1 & e & f \\ \hline 2 & g & h \\ \hline \end{array} \quad (1.54)$$

Тогда в произведении $\sum_{\beta} A_{\alpha\beta} \cdot B_{\beta\gamma} = C_{\alpha\gamma}$ индексам α и γ , которые суммируются, можно придавать последовательно $2 \times 2 = 4$ различных значения:

$$1. \alpha = 1, \gamma = 1$$

$$\sum_{\beta} A_{1\beta} B_{\beta 1} = A_{11} \cdot B_{11} + A_{12} \cdot B_{21} = ae + bg = C_{11};$$

$$2. \alpha = 1, \gamma = 2$$

$$\sum_{\beta} A_{1\beta} \cdot B_{\beta 2} = A_{11} B_{12} + A_{12} B_{22} = af + bh = C_{12};$$

$$3. \alpha = 2, \gamma = 1$$

$$\sum_{\beta} A_{2\beta} \cdot B_{\beta 1} = A_{21} \cdot B_{11} + A_{22} B_{21} = ce + dg = C_{21};$$

$$4. \alpha = 2, \gamma = 2$$

$$\sum_{\beta} A_{2\beta} B_{\beta 2} = A_{21} \cdot B_{12} + A_{22} \cdot B_{22} = cf + dh = C_{22}.$$

Таким образом, записаны две суммы. В результате получаем

$$C_{\alpha\gamma} = \begin{array}{c|cc} & \gamma & \\ \hline \alpha & 1 & 2 \\ \hline 1 & \begin{array}{|c|c|} \hline c_{11} & c_{12} \\ \hline \end{array} & \\ \hline 2 & \begin{array}{|c|c|} \hline c_{21} & c_{22} \\ \hline \end{array} & \\ \hline \end{array} = \begin{array}{c|cc} & \gamma & \\ \hline \alpha & 1 & 2 \\ \hline 1 & \begin{array}{|c|c|} \hline ae + bg & af + bh \\ \hline \end{array} & \\ \hline 2 & \begin{array}{|c|c|} \hline ce + dg & cf + dh \\ \hline \end{array} & \\ \hline \end{array} \quad (1.55)$$

Процесс суммирования дает точно такой же результат, как и приведенное ранее правило стрелки. Но процедура суммирования неудобная и «медленная» и поэтому должна применяться лишь для проверки.

II. Из последних примеров следует, что правило суммирования эквивалентно изображению стрелок по направлению двух индексов, по которым ведется суммирование. Два остающихся индекса вновь появляются в конечной матрице.

Два одинаковых индекса β называются «немыми», а остальные индексы α и γ — «свободными».

Поскольку в каждом члене выражения немые индексы появляются дважды, а свободные встречаются только один раз, то излишне указывать знак суммы Σ и в третий раз писать под ним немой индекс.

Общепринято соглашение, по которому знак суммы опускают и пишут

$$\sum_{\beta} A_{\alpha\beta} \cdot B_{\beta\gamma} = A_{\alpha\beta} \cdot B_{\beta\gamma}, \quad (1.56)$$

ибо нет сомнения в том, что знак суммы (который опущен) относится к β , а не к α или γ . Например,

$$\sum_{\alpha} A_{\alpha\beta} \cdot B_{\gamma} = A_{\alpha\beta} \cdot B_{\gamma} \quad \text{и} \quad \sum_{\beta} A_{\alpha\beta} \cdot B_{\beta} = A_{\alpha\beta} \cdot B_{\beta}. \quad (1.57)$$

Правило опускания знака суммы известно также как «правило Эйнштейна», поскольку он ввел его первым. В теории n -матриц это правило суммирования не используется. Оно приведено здесь для использования в будущем.

Следует подчеркнуть, что сохранение или опускание знака суммы — дело вкуса и никак не влияет на те понятия и идеи, которые будут вводиться далее. То же можно сказать о процедуре умножения либо постановкой стрелок и перемножением 1-матриц, либо суммированием компонент согласно обозначению. В любом случае получаем один и тот же конечный результат.

III. Необходимо отметить, что в индексном обозначении существуют четыре различных способа перемножения двух матриц в соответствии с положением немых индексов, а именно:

$$A_{\alpha\beta} \cdot B_{\beta\gamma}; A_{\alpha\beta} \cdot B_{\gamma\beta}; A_{\alpha\beta} \cdot B_{\alpha\gamma}; A_{\alpha\beta} \cdot B_{\gamma\alpha}.$$

В прямом обозначении можно представить только первое и последнее произведения как $A \cdot B$ и $B \cdot A$. Позднее будет введено обозначение и для двух других произведений.

Какие индексы должны суммироваться (или в каком порядке записываются матрицы), зависит от решаемой задачи.

IV. Позднее нам встретятся 2-матрицы со специальными компонентами (содержащие главным образом нулевые компоненты). Умножать такие матрицы можно значительно быстрее, если в каждом отдельном случае вместо правила стрелки использовать особое правило. Конечно, эти специальные правила действительны только в частных случаях, в то время как правило стрелки всегда дает правильный ответ.

14. ПРОИЗВЕДЕНИЕ ЛЮБЫХ ДВУХ n -МАТРИЦ ¹⁾

I. Согласно выводам предыдущих разделов две n -матрицы различной размерности умножаются расслоением на 1-матрицы с последующим умножением каждой 1-матрицы первого набора на каждую 1-матрицу второго, причем каждое произведение дает просто число (скаляр). Результирующие величины после расстановки в нужном порядке образуют новую n -матрицу. Немые индексы дают направления, по которым расслаиваются исходные n -матрицы на 1-матрицы.

Прежде чем расслаивать n -матрицы на 1-матрицы, необходимо сначала расслоить их на 2-матрицы, чтобы можно было изобразить их на бумаге. Затем каждую 2-матрицу мысленно расслаивают на 1-матрицы, изображая стрелки по направлению немых индексов, и, наконец, перемножают 1-матрицы. Таким образом, перемножение n -матриц любой размерности сводится к перемножению 2-матриц, из которых они состоят.

¹⁾ Этот параграф может быть опущен при первом чтении.

II. Например, пусть дано произведение

$$\sum_{\beta} A_{\alpha\beta\gamma} \cdot B_{\delta\beta} = A_{\alpha\beta\gamma} \cdot B_{\delta\beta} = C_{\alpha\gamma\delta}, \quad (1.58)$$

где $A_{\alpha\beta\gamma}$ — 3-матрица, а $B_{\delta\beta}$ — 2-матрица. Индекс β — немой, следовательно, $A_{\alpha\beta\gamma}$ и $B_{\delta\beta}$ нужно расложить на 1-матрицы по направлению индекса β (рис. 1.10).

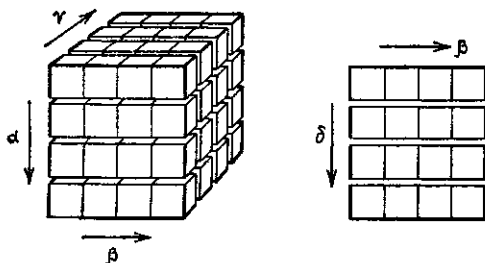


Рис. 1.10. Расслоение 3- и 2-матрицы на 1-матрицу по направлению немой индекса β .

Поскольку индексы α , γ и δ — свободные, в результате получим 3-матрицу $C_{\alpha\gamma\delta}$.

Для быстрого выполнения умножения на бумаге удобно сначала расложить 3-матрицу по свободному индексу, например,

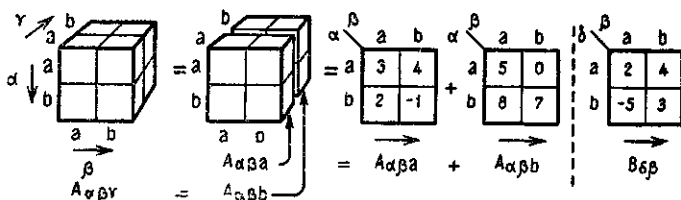


Рис. 1.11. Умножение 3-матрицы на 3-матрицу.

в направлении индекса γ , параллельном плоскости листа бумаги. Затем каждую из k -матриц $A_{\alpha\beta a}$, $A_{\alpha\beta b}$, $A_{\alpha\beta c}, \dots$ нужно умножить на данную матрицу $B_{\delta\beta}$, расчленив сомножители на 1-матрицы по направлению немой индекса β , что и дает n -матриц произведений $C_{\alpha a \delta}$, $C_{\alpha b \delta}$, $C_{\alpha c \delta}, \dots$. Последние матрицы эквивалентны матрицам, полученным при раслоении результирующей 3-матрицы $C_{\alpha\gamma\delta}$ по γ .

Пусть, например, имеется только два фиксированных индекса a и b . Три перемноженные матрицы показаны на рис. 1.11.

Пусть в каждой матрице по направлению β изображена стрелка, которая показывает, что матрицы раслаиваются на 1-матрицы по этому направлению.

1. Произведение первой матрицы $A_{\alpha\beta a}$ на $B_{\delta\beta}$ дает $C_{\alpha a\delta}$:

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{c|cc}
 \alpha & \beta & \\
 \hline
 a & a & b \\
 \hline
 a & 3 & 4 \\
 \hline
 b & 2 & -1 \\
 \hline
 \end{array} & \cdot & \begin{array}{c|cc}
 \delta & \beta & \\
 \hline
 a & a & b \\
 \hline
 a & 2 & 4 \\
 \hline
 b & -5 & 3 \\
 \hline
 \end{array} = \\
 \underbrace{\hspace{10em}}_{A_{\alpha\beta a}} & & \underbrace{\hspace{10em}}_{B_{\delta\beta}} \\
 \\
 = & \begin{array}{c|cc}
 & \delta & \\
 \hline
 \alpha & a & b \\
 \hline
 a & 22 & -3 \\
 \hline
 b & 0 & -13 \\
 \hline
 \end{array} = C_{\alpha a\delta}. \quad (1.59)
 \end{array}$$

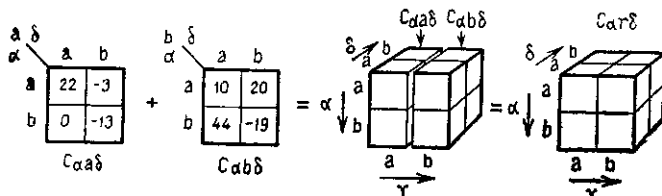


Рис. 1.12. «Сборка» результирующей 3-матрицы $C_{\alpha\gamma\delta}$.

2. Произведение второй матрицы $A_{\alpha\beta b}$ на $B_{\delta\beta}$ дает $C_{\alpha b\delta}$:

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{c|cc}
 \alpha & \beta & \\
 \hline
 a & a & b \\
 \hline
 a & 5 & 0 \\
 \hline
 b & 8 & 7 \\
 \hline
 \end{array} & \cdot & \begin{array}{c|cc}
 \delta & \beta & \\
 \hline
 a & a & b \\
 \hline
 a & 2 & 4 \\
 \hline
 b & -5 & 3 \\
 \hline
 \end{array} = \\
 \underbrace{\hspace{10em}}_{A_{\alpha\beta b}} & & \underbrace{\hspace{10em}}_{B_{\delta\beta}} \\
 \\
 = & \begin{array}{c|cc}
 & \delta & \\
 \hline
 \alpha & a & b \\
 \hline
 a & 10 & -25 \\
 \hline
 b & 44 & -19 \\
 \hline
 \end{array} = C_{\alpha b\delta}. \quad (1.60)
 \end{array}$$

Две матрицы $C_{\alpha a\delta}$ и $C_{\alpha b\delta}$ образуют 3-матрицу $C_{\alpha\gamma\delta}$ (рис.1.12).

III. Подобная процедура применяется при умножении, скажем, $A_{\alpha\beta\gamma\delta}$ на $B_{\epsilon\gamma\sigma}$ по некому индексу γ . В этом случае $A_{\alpha\beta\gamma\delta}$ расщепляется на k^2 матриц, а $B_{\epsilon\gamma\sigma}$ — на k матриц. Потом матрицы умножают друг на друга, расщипывая по направлению γ .

Следует подчеркнуть, что можно предложить некоторое число конкретных процедур для выполнения умножения в зависимости от специфики решаемой задачи. Во многих задачах большая часть компонент равна нулю и удобно представлять каждую матрицу как совокупность отдельных чисел, проводя суммирование в соответствии с немymi индексами.

Свободными индексами являются все индексы, за исключением двух немых индексов. Следовательно, размерность n -матрицы — произведения — равна сумме размерностей исходных матриц минус два. Например, произведение 3-матрицы на 2-матрицу дает $(3+2)-2=3$, т. е. 3-матрицу; произведение 2-матрицы на 1-матрицу дает $(2+1)-2=1$, т. е. 1-матрицу; произведение двух 1-матриц дает $(1+1)-2=0$, т. е. 0-матрицу.

IV. Любая n -матрица умножается на отдельное число умножением каждой ее компоненты на это число. Размерность матрицы не меняется.

Это видно из примера

$$3A_{\alpha\beta} = 3 \times \begin{array}{c|cc} & \beta & & \\ \hline \alpha & a & b & \\ \hline a & 1 & -2 & \\ \hline b & 4 & 5 & \end{array} = \begin{array}{c|cc} & \beta & & \\ \hline \alpha & a & b & \\ \hline a & 3 & -6 & \\ \hline b & 12 & 15 & \end{array} \quad (1.61)$$

V. В прямом обозначении произведение 3-матрицы на n -матрицу более высокой размерности требует введения специальных символов, которые здесь не рассматриваются. Вообще говоря, прямого обозначения избегают все авторы работ по тензорному анализу. Оно используется здесь только для простых задач и даже в этом случае является вспомогательной ступенью до тех пор, пока читатель не привыкнет к индексным обозначениям¹⁾.

Немых индексов может быть и более одного, например, в произведении $A_{\alpha\beta\gamma} \cdot B_{\beta\gamma}$. Такой общий случай умножения рассматривается ниже.

Если компоненты n -матриц-сомножителей не содержат линейных операторов, таких как $p = d/dt$, то порядок записи сомножителей при индексном обозначении можно изменять. Например, $A_{\beta} \cdot B_{\beta\gamma}$ можно записать как $B_{\beta\gamma} \cdot A_{\beta}$.

15. ОПРЕДЕЛИТЕЛИ

I. Чтобы изучать деление на 2-матрицу, надо знать, что такое определитель 2-матрицы.

Каждой 2-матрице (множеству из k^2 чисел) ставится в соответствие единственное число, называемое «определителем» (или «детерминантом») 2-матрицы. Определитель образуется из ком-

¹⁾ См. примечание на с. 46.

понент 2-матрицы посредством операций умножения и сложения, выполненных в определенном порядке. Никакие другие n -матрицы не имеют определителя.

Когда матрица имеет только две строки и два столбца, ее определитель находят следующим образом:

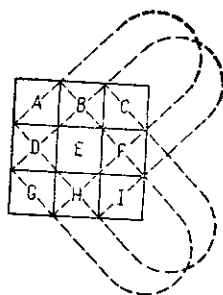
$$Z = \begin{array}{|c|c|} \hline A & B \\ \hline C & D \\ \hline \end{array}. \text{ Определитель } Z = |Z| = AD - CB. \quad (1.62)$$

Например,

$$Z = \begin{array}{|c|c|} \hline 2 & -3 \\ \hline 4 & 5 \\ \hline \end{array}. \text{ Определитель } Z = |Z| = 2 \times 5 - 4 \times (-3) = 10 + 12 = 22. \quad (1.63)$$

Когда матрица имеет три строки и столбца, ее определитель находится по следующей схеме:

$$Z = \begin{array}{|c|c|c|} \hline A & B & C \\ \hline D & E & F \\ \hline G & H & I \\ \hline \end{array}. \text{ Определитель} =$$



$$\text{Определитель} = AEI + BFG + CDH - GEC - DBI - AFH. \quad (1.64)$$

Например,

$$Z = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 3 \\ \hline 4 & 5 & 6 \\ \hline 2 & 8 & 4 \\ \hline \end{array}. \text{ Определитель} = 1 \times 5 \times 4 + 2 \times 6 \times 2 + 3 \times 8 \times 4 - 2 \times 5 \times 3 - 4 \times 2 \times 4 - 1 \times 6 \times 8 = 20 + 24 + 96 - 30 - 32 - 48 = 140 - 110 = 30. \quad (1.65)$$

В гл. 10 дан упрощенный метод, который в большинстве задач устраняет необходимость вычисления определителей матриц, имеющих более трех строк.

II. С каждой компонентой матрицы связывается число, называемое «минором» компоненты. Минор любой компоненты определяется после вычеркивания строки и столбца, которым принадлежит данная компонента, вычислением определителя оставшейся матрицы.

Например, минор компоненты 3 в следующей матрице равен 22:

$$\mathbf{Z} = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 3 \\ \hline 4 & 5 & 6 \\ \hline 2 & 8 & 4 \\ \hline \end{array} \cdot \text{Минор } 3 = \begin{array}{|c|c|c|} \hline \dots & \dots & \dots \\ \hline 4 & 5 & \dots \\ \hline 2 & 8 & \dots \\ \hline \end{array} = 4 \times 8 - 2 \times 5 = 22. \quad (1.66)$$

Минор компоненты 5 равен -2 , т. е.

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline \dots & \dots & \dots \\ \hline 1 & \dots & 3 \\ \hline \dots & \dots & \dots \\ \hline 2 & \dots & 4 \\ \hline \end{array} = 1 \times 4 - 2 \times 3 = -2. \quad (1.67)$$

III. Когда матрица имеет более трех столбцов и строк, ее определитель можно найти различными способами. Один из них состоит в следующем:

1) находят миноры каждой компоненты, принадлежащей первой строке (или столбцу);

2) каждый четный (2-й, 4-й ...) минор умножается на -1 ; результат умножения миноров на -1 (нечетные умножаются на $+1$, четные на -1) называется «алгебраическое дополнение»;

3) каждое алгебраическое дополнение умножается на компоненту первой строки (или столбца), от которой оно получено;

4) полученные произведения суммируются.

Результатом этих действий и будет искомый определитель. Этот метод требует вычисления нескольких определителей, каждый из которых имеет число строк и столбцов на единицу меньше, чем исходный определитель.

Опубликована обширная литература по теории и вычислению определителей, к которой можно обратиться за дальнейшей информацией.

16. ДЕЛЕНИЕ НА 2-МАТРИЦЫ

I. Только 2-матрицу (или простой скаляр) можно использовать как делитель. Деление на другие n -матрицы не определено. Деление на 2-матрицу $\mathbf{Z} = Z_{\alpha\beta}$ представляется как умножение на «обратную» ей матрицу $\mathbf{Z}^{-1} = (Z_{\alpha\beta})^{-1}$, следовательно, вообще говоря, в алгебре n -матриц деления не существует. Единственным его следом является «обратная» 2-матрица при условии, что определитель 2-матрицы не равен нулю.

Вычисление «обратной» 2-матрицы эквивалентно решению системы n линейных уравнений с n неизвестными. Следовательно, эти две задачи решаются одновременно.

II. Обратная матрица находится с помощью следующих шагов:

- 1) перестановки строк и столбцов (транспонирование);
- 2) замены каждой компоненты ее минором;
- 3) умножения, как показано на схеме, каждого минора на -1 , начиная с $+1$ в верхнем левом углу:

| | | | | |
|-----|-----|-----|-----|-----|
| + | - | + | ... | - |
| - | + | - | ... | + |
| + | - | + | ... | - |
| ... | ... | ... | ... | ... |
| - | + | - | ... | + |

(1.68)

Результатом этих преобразований является «алгебраическое дополнение»;

4) деления каждой результирующей компоненты на определитель исходной матрицы.

Вычисление обратной матрицы требует значительного времени, и вообще говоря, когда матрица имеет более четырех строк и столбцов, то ее обращение должно производиться только в том случае, если компоненты являются известными числами. Если компоненты матрицы Z — алгебраические символы, то ее обращение должно быть обозначено чисто символически в виде Z^{-1} , а каждый численный пример обращения должен выполняться отдельно. Тем не менее во многих задачах большинство компонент матрицы, равно нулю, а в этом случае практически выгодно вычислять обратную матрицу в алгебраических символах.

Ниже показан эффективный способ нахождения обратной матрицы для матриц с большим числом строк и столбцов.

III. В качестве примера найдем обратную следующей матрице:

$$Z = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 3 \\ \hline 4 & 5 & 6 \\ \hline 2 & 8 & 4 \\ \hline \end{array} \quad (1.69)$$

Ее определитель (1.65) равен 30.

1. Переставив строки и столбцы, получим

| | | |
|---|---|---|
| 1 | 4 | 2 |
| 2 | 5 | 8 |
| 3 | 6 | 4 |

2. Заменяв каждую компоненту ее минором, получим

| | | |
|-----|-----|----|
| -28 | -16 | -3 |
| 4 | -2 | -6 |
| 22 | 4 | -3 |

3. Изменив знаки у соответствующих компонент, имеем

| | | |
|-----|----|----|
| -28 | 16 | -3 |
| -4 | -2 | 6 |
| 22 | -4 | -3 |

4. Поделив каждую компоненту на 30 (значение определителя), имеем

$$Z^{-1} = \begin{array}{|c|c|c|} \hline -14/15 & 8/15 & -1/10 \\ \hline -2/15 & -1/15 & 3/15 \\ \hline 11/15 & -2/15 & -1/10 \\ \hline \end{array} \quad (1.70)$$

IV. Произведение 2-матрицы Z на обратную ей Z^{-1} всегда дает «единичную» матрицу. Таким образом,

$$\boxed{Z \cdot Z^{-1} = I} \quad \text{или} \quad \boxed{Z^{-1} \cdot Z = I}. \quad (1.71)$$

Этот факт помогает контролировать правильность вычислений при обращении матрицы. Для приведенного примера

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 3 \\ \hline 4 & 5 & 6 \\ \hline 2 & 8 & 4 \\ \hline \end{array} \cdot \begin{array}{|c|c|c|} \hline -14/15 & 8/15 & -1/10 \\ \hline -2/15 & -1/15 & 3/15 \\ \hline 11/15 & -2/15 & -1/10 \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \\ \hline \end{array}. \quad (1.72)$$

V. Матрица, содержащая только диагональные элементы, называется диагональной. Обратная ей матрица находится обращением каждой из ее компонент. Например:

$$Z = \begin{array}{|c|c|c|} \hline A & 0 & 0 \\ \hline 0 & B & 0 \\ \hline 0 & 0 & C \\ \hline \end{array}, \quad Z^{-1} = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1/A & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1/B & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1/C \\ \hline \end{array}. \quad (1.73)$$

Матрица, обратная диагональной, также диагональна.

В индексном обозначении матрица, обратная $A_{\alpha\beta}$, обозначается другой основной буквой ($-B_{\beta\alpha}$), а порядок индексов заменяется обратным.

17. ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ ¹⁾

I. n -матрица считается продифференцированной по одной переменной, если продифференцирована каждая ее компонента в отдельности. Размерность n -матрицы при этом не изменяется.

Пусть, например, дана 2-матрица, компоненты которой есть функции от θ :

$$Z_{\alpha\beta} = \begin{array}{c|ccc} & \beta & a & b & c \\ \hline \alpha & & & & \\ \hline a & & 1 & 0 & 0 \\ \hline b & & 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ \hline c & & 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{array} \quad (1.74)$$

Дифференцируя каждую компоненту по θ , получаем

$$\frac{\partial Z_{\alpha\beta}}{\partial \theta} = \begin{array}{c|ccc} & \beta & a & b & c \\ \hline \alpha & & & & \\ \hline a & & 0 & 0 & 0 \\ \hline b & & 0 & -\sin \theta & -\cos \theta \\ \hline c & & 0 & \cos \theta & -\sin \theta \end{array} \quad (1.75)$$

II. n -матрица продифференцирована по 1-матрице, если каждая компонента n -матрицы продифференцирована по каждой компоненте 1-матрицы.

Так как после дифференцирования каждая компонента n -матрицы становится 1-матрицей, то *размерность результирующей матрицы увеличивается на единицу*. Таким образом, 2-матрица становится 3-матрицей и т. д.

Пусть, например, дана n -матрица, которую нужно продифференцировать:

$$e_{\alpha} = \begin{array}{c|ccc} & a & b & c \\ \hline \alpha & & & \\ \hline & \cos x_m & 3 & \sin x_k \end{array} \quad (1.76)$$

и 1-матрица:

$$x_{\beta} = \begin{array}{c|ccc} & m & n & k \\ \hline \beta & & & \\ \hline & x_m & x_n & x_k \end{array} \quad (1.77)$$

Найдем $\partial e_{\alpha} / \partial x_{\beta} = A_{\alpha\beta}$.

¹⁾ Следующие два параграфа могут быть опущены при первом чтении.

Дифференцируем каждую компоненту матрицы:

1) по

$$x_m = m \begin{array}{c|ccc} a & a & b & c \\ \hline -\sin x_m & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

2) по

$$x_n = n \begin{array}{c|ccc} a & b & c \\ \hline 0 & 0 & 0 \end{array}$$

3) по

$$x_k = k \begin{array}{c|cc|c} a & b & c \\ \hline 0 & 0 & \cos x_k \end{array}$$

Следовательно, результирующая n -матрица равна

$$\frac{\partial e_\alpha}{\partial x_\beta} = A_{\alpha\beta} = n \begin{array}{c|ccc} \beta & a & b & c \\ \hline m & -\sin x_m & 0 & 0 \\ \hline n & 0 & 0 & 0 \\ \hline k & 0 & 0 & \cos x_k \end{array} \quad (1.78)$$

III. В общем случае любая n -матрица дифференцируется по любой другой n -матрице дифференцированием каждой 1-й компоненты по каждой 2-й компоненте. Размерность результирующей n -матрицы есть сумма размерностей исходных матриц.

Например,

$$\frac{\partial A_{\alpha\beta\gamma}}{\partial B_{\delta\epsilon}} = C_{\alpha\beta\gamma\delta\epsilon} \quad \text{или} \quad \frac{\partial A}{\partial x_\alpha} = B_\alpha. \quad (1.79)$$

В прямом обозначении дифференцирование записывается в виде $\partial e/\partial x = A$. Однако это обозначение не дает сведений о размерностях e , x и A .

18. ИНТЕГРИРОВАНИЕ

n -матрица считается проинтегрированной по одной переменной, если каждая из ее компонент проинтегрирована по этой переменной. Например, если

$$A_\alpha = \begin{array}{c|cc|c} \alpha & a & b & c \\ \hline 2 & \sin \theta & \sin \theta & \end{array}, \quad (1.80)$$

то

$$\int A_\alpha d\theta = B_\alpha = \frac{\alpha \left| \begin{array}{ccc} a & b & c \\ 2\theta + A & -\cos \theta + B & \sin \theta + C \end{array} \right|}{} \quad (1.81)$$

1-матрица считается проинтегрированной по другой 1-матрице, если каждая компонента первой проинтегрирована по соответствующей компоненте второй и затем проведено *суммирование* по немым индексам. Например, если

$$A_\alpha = \frac{\alpha \left| \begin{array}{ccc} a & b & c \\ \cos x_a & 3 & \sin x_c \end{array} \right|}{} \quad (1.82)$$

$$dx_\alpha = \frac{\alpha \left| \begin{array}{ccc} a & b & c \\ dx_a & dx_b & dx_c \end{array} \right|}{}, \quad (1.83)$$

то

$$\int [A_\alpha dx_\alpha = \int A_a dx_a + \int A_b dx_b + \int A_c dx_c = \int \cos x_a dx_a + \int 3 dx_b + \int \sin x_c dx_c = (\sin x_a + A) + (3x_b + B) - (\cos x_c + C). \quad (1.84)$$

Детальный анализ этого и других случаев приведен ниже.

Глава 2

ПОСТУЛАТ ПЕРВОГО ОБОБЩЕНИЯ

1. ПОЯВЛЕНИЕ n -МАТРИЦ

I. n -матрицы встречаются во многих математических исследованиях, могут встретиться в алгебраических, дифференциальных и интегральных уравнениях, в частности, когда имеется несколько уравнений с несколькими переменными; одно уравнение с несколькими переменными; одно уравнение с одной переменной, в котором переменная или ее коэффициент имеет специальную форму.

Существует обширная доступная литература по использованию n -матриц, особенно при *решении* дифференциальных и интегральных уравнений.

II. Одна из целей введения n -матриц — сокращение в процессе анализа числа уравнений и числа употребляемых символов до допустимого минимума, обычно до одного. Это существенно облегчает организацию, математические преобразования и решение задач, поскольку все несущественные детали (конкретные значения различных компонент n -матриц) исчезают из поля зрения, когда на протяжении всего анализа один символ, например Z , используется вместо n^2 или n^3 компонент.

После того как окончательный ответ выражен в n -матрицах, в большинстве инженерных задач необходимо заменить n -матрицы их компонентами и тем самым развернуть символические выражения до обычной формы записи, а затем произвести указанные числовые расчеты на логарифмической линейке, вычислительной машине (анализаторе сетей, дифференциальном анализаторе) или другим рутинным способом.

При использовании n -матриц экономится труд не за счет количества завершающих сложений, умножений, дифференцирований или интегрирований, которые выполняются для получения ответа в численном виде, а за счет уменьшения количества промежуточных этапов, необходимых для получения решения. *Другими словами, употребление n -матриц эффективно в творческой и интеллектуальной деятельности инженера, но не сокращает количества вычислений, выполняемых вычислительной машиной.*

III. *Следует особо подчеркнуть, что экономия умственной и физической работы имеет второстепенное значение по сравнению*

с более важными соображениями, которые воздействуют на самые основания мысленных образов и математическую символику. Эта символика построена так, чтобы она представляла физические явления в том виде, в каком они воспринимаются органами чувств или физическими приборами. Эти фундаментальные соображения будут указываться по мере введения новых и более глубоких понятий при дальнейшем изложении.

2. *n*-МАТРИЦЫ НЕПОДВИЖНЫХ СЕТЕЙ С СОСРЕДОТОЧЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ

Пусть дана неподвижная сеть (рис. 2.1), различные ветви которой содержат сопротивления, собственные и взаимные индуктивности, емкости, некоторые из которых равны нулю. Пусть к сети приложены мгновенные напряжения и разные токи текут в различных контурах (*a*, *b*, *c* и *d* соответственно). Такой неподвижной сети можно поставить в соответствие следующие *n*-матрицы:

1. Значения различных приложенных напряжений можно расположить в строку, представляющую «матрицу приложенных напряжений»:

$$e = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline a & b & c & d \\ \hline e_a & e_b & e_c & e_d \\ \hline \end{array}$$

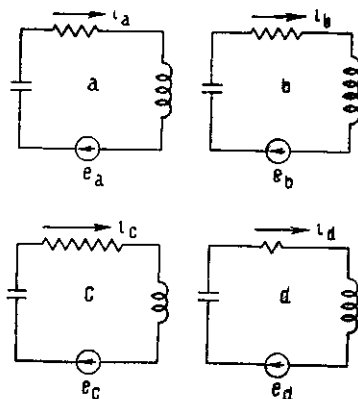


Рис. 2.1. Неподвижная сеть.

$$e_a = \begin{array}{c|cccc} \alpha & a & b & c & d \\ \hline e_a & e_b & e_c & e_d & \end{array}$$

Компоненты e_a , e_b могут представлять мгновенные значения или установившееся значение напряжения переменного тока, или напряжения постоянного тока, или любую функцию времени. Таким образом, e_a может быть равно 5 или $2+3j$, или $2 \sin \omega t$ или $2I$, где I — единичная функция Хевисайда и т. п.

2. Значения различных токов можно расположить в строку, представляющую «матрицу токов»:

$$i = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline a & b & c & d \\ \hline i_a & i_b & i_c & i_d \\ \hline \end{array}$$

$$i_a = \begin{array}{c|cccc} \alpha & a & b & c & d \\ \hline i_a & i_b & i_c & i_d & \end{array}$$

Компоненты i_a , i_b могут представлять переменные, постоянные, мгновенные и другие значения.

3. Собственные и взаимные индуктивности катушек можно расположить в виде квадрата «матрицы индуктивностей»:

$$L = \begin{array}{c|cccc} & a & b & c & d \\ \hline a & L_{aa} & M_{ab} & M_{ac} & M_{ad} \\ \hline b & M_{ba} & L_{bb} & M_{bc} & M_{bd} \\ \hline c & M_{ca} & M_{cb} & L_{cc} & M_{cd} \\ \hline d & M_{da} & M_{db} & M_{dc} & L_{dd} \end{array}$$

$$L_{\alpha\beta} = \begin{array}{c|cccc} & \beta & & & \\ \hline \alpha & a & b & c & d \\ \hline a & L_{aa} & M_{ab} & M_{ac} & M_{ad} \\ \hline b & M_{ba} & L_{bb} & M_{bc} & M_{bd} \\ \hline c & M_{ca} & M_{cb} & L_{cc} & M_{cd} \\ \hline d & M_{da} & M_{db} & M_{dc} & L_{dd} \end{array}$$

Собственные индуктивности расположены на главной диагонали, а взаимные индуктивности — по обеим сторонам от нее. Например, на пересечении строки b и столбца c стоит взаимная индуктивность между катушками b и c : M_{bc} . Если взаимная индуктивность между двумя любыми катушками, скажем c и d , такая же, как между d и c , т. е. если $M_{cd} = M_{dc}$, то матрица индуктивностей симметрична относительно главной диагонали.

Предполагается, что измерение собственной индуктивности катушки или взаимной индуктивности двух катушек осуществляется так, что при этом цепи всех остальных катушек разомкнуты.

Когда вместо фактической цепи вводится другая система координат, то матрица индуктивностей неподвижной сети может стать асимметричной.

4. Различные сопротивления можно расположить в квадрат — «матрицу сопротивлений» $R_{\alpha\beta}$, в данном случае не содержащую взаимных сопротивлений. Подобным же образом эластансы (величины, обратные емкостям) можно расположить в квадрат — «матрицу эластансов» $S_{\alpha\beta}$, в данном случае не содержащую взаимных эластансов:

$$R_{\alpha\beta} = \begin{array}{c|cccc} & \beta & & & \\ \hline \alpha & a & b & c & d \\ \hline a & R_{aa} & 0 & 0 & 0 \\ \hline b & 0 & R_{bb} & 0 & 0 \\ \hline c & 0 & 0 & R_{cc} & 0 \\ \hline d & 0 & 0 & 0 & R_{dd} \end{array}$$

$$S_{\alpha\beta} = \begin{array}{c|cccc} & \beta & & & \\ \hline \alpha & a & b & c & d \\ \hline a & S_{aa} & 0 & 0 & 0 \\ \hline b & 0 & S_{bb} & 0 & 0 \\ \hline c & 0 & 0 & S_{cc} & 0 \\ \hline d & 0 & 0 & 0 & S_{dd} \end{array}$$

5. Сопротивление, индуктивности и эластансы различных катушек можно объединить в одно понятие — импеданс катушки $Z = R + Lp + S/p$, где $p = d/dt$. Аналогично матрицы R , L и S можно объединить в одну — «матрицу импедансов» Z :

$$Z = R + Lp + S/p, \quad Z_{\alpha\beta} = R_{\alpha\beta} + L_{\alpha\beta}p + S_{\alpha\beta}/p$$

$$Z = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} & \text{a} & \text{b} & \text{c} & \text{d} \\ \text{a} & Z_{aa} & Z_{ab} & Z_{ac} & Z_{ad} \\ \text{b} & Z_{ba} & Z_{bb} & Z_{bc} & Z_{bd} \\ \text{c} & Z_{ca} & Z_{cb} & Z_{cc} & Z_{cd} \\ \text{d} & Z_{da} & Z_{db} & Z_{dc} & Z_{dd} \end{array} \end{array},$$

где $Z_{aa} = R_{aa} + L_{aa}p + S_{aa}/p$, причем компоненты представляют собой разные собственные и взаимные импедансы. Для неподвижных сетей матрица импедансов обычно симметрична, хотя и не во всех системах координат.

Когда катушки имеют *сосредоточенные* параметры, приложенное напряжение *одной частоты* и *неподвижны*, то нет необходимости расчленять матрицу импедансов Z на составляющие ее матрицы. В данной книге эти условия обычно выполнены и потому матрица импедансов будет рассматриваться как целое.

3. ПОРЯДОК СЛЕДОВАНИЯ МАТРИЦ В ПРЯМОМ ОБОЗНАЧЕНИИ

I. Индексное обозначение является очень гибким и удобным рабочим инструментом для указания порядка и способа действия с n -матрицами. Когда индексы опускаются (как в прямом обозначении), их роль должны выполнять различные специальные символы и значки: точки, звездочки, крестики, штрихи и т. д. В простых случаях достаточно иметь немного символов, но с возрастанием сложности решаемых задач число специальных символов настолько возрастает, что весь символизм становится непригодным. *«Индексное» обозначение можно рассматривать как вид «прямого» обозначения, в котором сами индексы играют роль специальных символов.*

Выше уже был введен специальный символ для прямого обозначения — точка. Введем другой специальный символ — нижний индекс t . Символом A_t обозначают матрицу, транспонированную по отношению к матрице A (символ A^{-1} , представляющий обратную матрицу, используется как в прямом, так и в индексном обозначении).

II. Как показано в гл. 1, § 13, произведения $A_{\alpha\beta}B_{\gamma\delta}$ или $A_{\alpha\beta}B_{\alpha\gamma}$ не могут быть представлены в прямом обозначении. Чтобы это стало возможно, вводится еще один дополнительный символ.

«Транспонированная» матрица A_t получается из матрицы A перестановкой строк и столбцов. Матрица, получаемая транспонированием из матрицы A , обозначается через A_t ; таким образом

| | <i>a</i> | <i>b</i> | <i>c</i> | <i>d</i> |
|----------|----------|----------|----------|----------|
| <i>a</i> | 1 | -2 | 3 | 0 |
| <i>b</i> | 7 | 8 | -3 | 5 |
| <i>c</i> | 3 | -4 | 6 | 1 |
| <i>d</i> | 9 | 0 | 5 | 8 |

| | <i>a</i> | <i>b</i> | <i>c</i> | <i>d</i> |
|----------|----------|----------|----------|----------|
| <i>a</i> | 1 | 7 | 3 | 9 |
| <i>b</i> | -2 | 8 | -4 | 0 |
| <i>c</i> | 3 | -3 | 6 | 5 |
| <i>d</i> | 0 | 5 | 1 | 8 |

Следовательно, упомянутые выше произведения записываются так:

$$A_{\alpha\beta} B_{\gamma\delta} = \mathbf{A}\mathbf{B}_t \text{ и } A_{\alpha\beta} B_{\alpha\gamma} = \mathbf{A}_t\mathbf{B}, \quad (2.1)$$

поскольку, если в индексном обозначении $\mathbf{A} = A_{\alpha\beta}$, то $\mathbf{A}_t = A_{\beta\alpha}$. Транспонируя транспонированную матрицу еще раз, снова получаем исходную матрицу, т. е.

$$(\mathbf{A}_t)_t = \mathbf{A}. \quad (2.2)$$

Аналогично, обращая обратную матрицу, снова получаем исходную

$$(\mathbf{A}^{-1})^{-1} = \mathbf{A}. \quad (2.3)$$

III. В индексном обозначении порядок следования *n*-матриц в каком-либо выражении не имеет значения. Например, $A_{\alpha\beta} e_\beta$ можно написать как $e_\beta A_{\alpha\beta}$, а $\Gamma_{\alpha\beta\gamma} e_\beta i_\gamma$ — как $i_\gamma e_\beta \Gamma_{\alpha\beta\gamma}$ или $e_\beta \Gamma_{\alpha\beta\gamma} i_\gamma$ и т. д. Если, однако, *n*-матрицы содержат линейные операторы, то их порядок не может быть нарушен.

В прямом обозначении порядок следования *n*-матриц в каком-либо выражении вообще нельзя изменять. В некоторых специальных случаях этот порядок можно изменить, но при условии, что компоненты не содержат линейных операторов. Это можно сделать:

1) в произведении двух 1-матриц, например $e \cdot i$, порядок можно изменить, так как $e \cdot i = i \cdot e$;

2) в произведении 1- и 2-матрицы их порядок можно изменить, если взять транспонированную от 2-матрицы, т. е. $\mathbf{A} \cdot i = i \cdot \mathbf{A}_t$.

Если 1-матрица e расположена между двумя матрицами, как, скажем, в выражении $\mathbf{A}(e \cdot \mathbf{B})$, то скобки должны показывать, на какую из двух матриц должна быть умножена эта 1-матрица в первый раз и на какую — во второй раз, так как результат в этих двух случаях будет различным. Это означает, что

$$\mathbf{A} \cdot (e \cdot \mathbf{B}) \neq (\mathbf{A} \cdot e) \cdot \mathbf{B}. \quad (2.4)$$

Однако если 1-матрица стоит в начале или в конце такого выражения, то скобки могут быть опущены:

$$\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \cdot e) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \cdot e. \quad (2.5)$$

В выражении типа $A(e \cdot B)$ член в скобках есть 1-матрица и с ним можно обращаться, как с 1-матрицей, т. е.

$$A(e \cdot B) = (e \cdot B) \cdot A = A \cdot (B_i \cdot e) = A \cdot B_i \cdot e. \quad (2.6)$$

В индексном обозначении эти предосторожности по отношению к порядку матриц вообще не нужны, так как индексы показывают правильный порядок действий безотносительно к порядку следования базовых букв. Однако если компоненты некоторых n -матриц содержат «операторы» (такие, как $p = d/dt$ или $1/p$ и т. п.), то даже в индексном обозначении порядок n -матриц не может быть изменен.

4. ПОРЯДОК УМНОЖЕНИЯ МАТРИЦ

1. Если нужно перемножить матрицы A , B , C и получить матрицу M , то умножение можно выполнить двумя различными способами.

1. Сначала матрица A умножается на матрицу B , давая $A \cdot B = G$, а затем матрица G умножается на матрицу C в порядке $G \cdot C$, давая $G \cdot C = M$.

2. Сначала матрица B умножается на матрицу C , давая $B \cdot C = K$, а затем матрица A умножается на матрицу K в порядке $A \cdot K$, давая $A \cdot K = M$. Таким образом, умножение может быть выполнено в порядке

$$A \cdot B \cdot C = (A \cdot B) \cdot C = G \cdot C = M \quad (2.7)$$

или в порядке

$$A \cdot B \cdot C = A \cdot (B \cdot C) = A \cdot K = M \quad (2.8)$$

Однако порядок сомножителей изменять нельзя.

Пусть даны три матрицы

$$A = \begin{array}{|c|c|c|} \hline a & b & c \\ \hline d & e & f \\ \hline g & h & i \\ \hline \end{array} \quad B = \begin{array}{|c|c|c|} \hline j & k & l \\ \hline m & n & o \\ \hline p & q & r \\ \hline \end{array} \quad C = \begin{array}{|c|c|c|} \hline s & t & u \\ \hline v & w & x \\ \hline y & z & a \\ \hline \end{array}$$

перемножаемые в порядке $A \cdot B \cdot C = M$ ($A_{mn}B_{np}C_{pq} = M_{mq}$).

1. Выполняя умножение в порядке $(A \cdot B) \cdot C$, получаем первое произведение

$$AB = \begin{array}{|c|c|c|} \hline aj + bm + cp & ak + bn + cq & al + bo + cr \\ \hline dj + em + fp & dk + en + fq & dl + eo + fr \\ \hline gj + hm + ip & gk + hn + iq & gl + ho + ir \\ \hline \end{array}$$

Второе произведение есть $(A \cdot B) \cdot C = M$

$$M = \begin{array}{|l|l|l|} \hline (aj + bm + cp)s + & (aj + bm + cp)t + & (aj + bm + cp)u + \\ + (ak + bn + cq)v + & + (ak + bn + cq)w + & + (ak + bn + cq)x + \\ + (al + bo + cr)y & + (ab + bo + cr)z & + (ab + bo + cr)a \\ \hline (dj + em + fp)s + & (dj + em + fp)t + & (dj + em + fp)u + \\ + (dk + en + fq)v + & + (dk + en + fq)w + & + (dk + en + fq)x + \\ + (dl + eo + fr)y & + (dl + eo + fr)z & + (dl + eo + fr)a \\ \hline (gj + hm + ip)s + & (gj + hm + ip)t + & (gj + hm + ip)u + \\ + (gk + hn + iq)v + & + (gk + hn + iq)w + & + (gk + hn + iq)x + \\ + (gl + ho + ir)y & + (gl + ho + ir)z & + (gl + ho + ir)a \\ \hline \end{array}$$

2. Выполняя теперь умножение в порядке $A \cdot (B \cdot C)$, получаем первое произведение

$$BC = \begin{array}{|l|l|l|} \hline js + kv + ly & jt + kw + lz & ju + kx + la \\ \hline ms + nv + oy & mt + nw + oz & mu + nx + oa \\ \hline ps + qv + ry & pt + qw + rz & pu + qx + ra \\ \hline \end{array}$$

Во втором произведении $A \cdot (B \cdot C) = M$

$$M = \begin{array}{|l|l|l|} \hline a(js + kv + ly) + & a(jt + kw + lz) + & a(ju + kx + la) + \\ + b(ms + nv + oy) + & + b(mt + nw + oz) + & + b(mu + nx + oa) + \\ + c(ps + qv + ry) & + c(pt + qw + rz) & + c(pu + qx + ra) \\ \hline d(js + kv + ly) + & d(jk + kw + lz) + & d(ju + kx + la) + \\ + e(ms + nv + oy) + & + e(mt + nw + oz) + & + e(mu + nx + oa) + \\ + f(ps + qv + ry) & + f(pt + qw + rz) & + f(pu + qx + ra) \\ \hline g(js + kv + ly) + & g(jk + kw + lz) + & g(ju + kx + la) + \\ + h(ms + nv + oy) + & + h(mt + nw + oz) + & + h(mu + nx + oa) + \\ + i(ps + qv + ry) & + i(pt + qw + rz) & + i(pu + qx + ra) \\ \hline \end{array}$$

Каждая компонента этой матрицы совпадает с соответствующей компонентой произведения $(A \cdot B) \cdot C$.

II. В общем случае, когда нужно перемножить любое число n -матриц, например $A \cdot \Gamma \cdot B \cdot C$, то умножение можно начинать с любых двух соседних матриц и продолжать далее, например $A \cdot \Gamma \cdot (B \cdot C)$ или $A \cdot (\Gamma \cdot B) \cdot C$, и т. д. Очень часто удачное объединение матриц в группы существенно ускоряет вычисление.

Если компоненты $a, b, c, \dots, j, k, l, \dots$ и т. д. матриц A, B, C содержат «операторы», то их порядок в произведениях результирующей матрицы M , например ajs, aly и т. д., должен сохраняться в соответствии с правилом стрелок.

5. ОПЕРАЦИИ С ПРОИЗВЕДЕНИЯМИ МАТРИЦ

I. Транспонированное произведение двух матриц $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ равно

$$(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})_i = \mathbf{B}_i \cdot \mathbf{A}_i. \quad (2.9)$$

Подобная формула применяется для обратной матрицы произведения двух матриц

$$(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})^{-1} = \mathbf{B}^{-1} \cdot \mathbf{A}^{-1}. \quad (2.10)$$

В общем случае транспонированная (или обратная) матрица от произведения нескольких матриц находится транспонированием (или обращением) каждой матрицы сомножителя, эти матрицы берутся в *обратном порядке*. Например,

$$(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{C})_i = \mathbf{C}_i \cdot \mathbf{B}_i \cdot \mathbf{A}_i, \quad (2.11)$$

$$(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{C})^{-1} = \mathbf{C}^{-1} \cdot \mathbf{B}^{-1} \cdot \mathbf{A}^{-1}. \quad (2.12)$$

II. Произведение матриц дифференцируется дифференцированием каждой матрицы отдельно, подобно тому, как дифференцируется произведение скаляров. Например,

$$\frac{\partial \mathbf{A} \mathbf{e}}{\partial x} = \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial x} \mathbf{e} + \mathbf{A} \frac{\partial \mathbf{e}}{\partial x}; \quad \frac{\partial A_{\alpha\beta} e_\beta}{\partial x_j} = \frac{\partial A_{\alpha\beta}}{\partial x_j} e_\beta + A_{\alpha\beta} \frac{\partial e_\beta}{\partial x_j}. \quad (2.13)$$

В прямом обозначении *порядок* n -матриц изменять нельзя. Точно так же *дифференциал* произведения находится взятием дифференциала от каждой n -матрицы:

$$d(\mathbf{A} \cdot \mathbf{e}) = (d\mathbf{A}) \mathbf{e} + \mathbf{A} d\mathbf{e}, \quad dA_{\alpha\beta} e_\beta = (dA_{\alpha\beta}) e_\beta + A_{\alpha\beta} d e_\beta. \quad (2.14)$$

III. Интегрирование произведений рассмотрено ниже.

6. «СИММЕТРИЧНЫЕ» И «КОСОСИММЕТРИЧНЫЕ» МАТРИЦЫ

I. Прямая, идущая из верхнего левого угла матрицы в нижний правый угол, называется «главной диагональю».

II. Матрица называется «симметричной», если по обе стороны от главной диагонали стоят одинаковые компоненты, например:

| | a | b | c | d |
|---|----|----|----|----|
| a | 1 | 8 | -2 | 9 |
| b | 8 | 7 | 5 | -6 |
| c | -2 | 5 | 3 | 4 |
| d | 9 | -6 | 4 | 5 |

Транспонированная симметричная матрица совпадает с исходной матрицей. Например, если \mathbf{A} симметричная, то $\mathbf{A} = \mathbf{A}_t$.

Матрица называется «кососимметричной», если по обе стороны главной диагонали стоят одинаковые компоненты, но с противоположными знаками, а компоненты на главной диагонали равны нулю, например:

| | a | b | c | d |
|---|----|---|----|----|
| a | 0 | 8 | 9 | -2 |
| b | -8 | 0 | -3 | 0 |
| c | -9 | 3 | 0 | 7 |
| d | 2 | 0 | -7 | 0 |

III. Любая матрица A общего вида может быть разложена на сумму двух матриц $B + C$, где B — симметричная, а C — кососимметричная матрица.

Например:

$$A = B + C; \quad A_{\alpha\beta} = B_{\alpha\beta} + C_{\alpha\beta},$$

где симметричная матрица задается выражением

$$B = \frac{A + A_t}{2}; \quad B_{\alpha\beta} = \frac{A_{\alpha\beta} + A_{\beta\alpha}}{2}, \quad (2.15)$$

а кососимметричная — выражением

$$C = \frac{A - A_t}{2}; \quad C_{\alpha\beta} = \frac{A_{\alpha\beta} - A_{\beta\alpha}}{2}. \quad (2.16)$$

Например, матрица

$$A = \begin{array}{|c|c|c|} \hline A & B & C \\ \hline D & E & F \\ \hline G & H & K \\ \hline \end{array}, \quad A_t = \begin{array}{|c|c|c|} \hline A & D & G \\ \hline B & E & H \\ \hline C & F & K \\ \hline \end{array}$$

может быть выражена как сумма двух матриц, одна из которых симметричная, а другая — кососимметричная:

$$A = \frac{1}{2} \begin{array}{|c|c|c|} \hline A + A & B + D & C + G \\ \hline D + B & E + E & F + H \\ \hline G + C & H + F & K + K \\ \hline \end{array} + \frac{1}{2} \begin{array}{|c|c|c|} \hline 0 & B - D & C - G \\ \hline D - B & 0 & F - H \\ \hline G - & H - F & 0 \\ \hline \end{array}$$

7. ОПЕРАЦИИ С МАТРИЧНЫМИ УРАВНЕНИЯМИ

I. Уравнение, в котором каждый символ является n -матрицей, будем называть «матричным уравнением». Каждая часть уравнения состоит из суммы нескольких членов, как например:

$$P = iLi \qquad P = L_{\alpha\beta} i^{\alpha} i^{\beta}, \qquad (2.17)$$

$$e = Ri + a \frac{di}{dt} + i\Gamma i, \qquad e_{\alpha} = R_{\alpha\beta} i^{\beta} + a_{\alpha\beta} \frac{di^{\beta}}{dt} + \Gamma_{\alpha\beta\gamma} i^{\beta} i^{\gamma}, \qquad (2.18)$$

$$z' + z'' = R + L \frac{d}{dt}, \qquad z'_{\alpha\beta} + z''_{\alpha\beta} = R_{\alpha\beta} + L_{\alpha\beta} \frac{d}{dt}. \qquad (2.19)$$

II. Важно отметить, что в матричном уравнении каждый член имеет одну и ту же размерность: каждый член есть 0-матрица, как в уравнении (2.17), или 1-матрица, как в уравнении (2.18), или 2-матрица, как в уравнении (2.19) и т. д. В индексном обозначении каждый член имеет те же самые свободные индексы. В уравнении (2.17) ни один из членов не имеет свободных индексов; в уравнении (2.18) в каждом члене свободный индекс есть α ; в уравнении (2.19) их два: α и β . Каждый член, с другой стороны, может иметь любое количество немых индексов.

III. В операциях с матричными уравнениями нужно помнить, что только 2-матрицы (или произведение матриц, образующее 2-матрицу) могут быть перенесены в другую часть уравнения умножением обеих частей уравнения на обратную матрицу. Произведения n -матриц, дающие в результате 1- или 3-матрицу, не могут быть перенесены из одной части уравнения в другую его часть. Кроме того, эта переносимая матрица должна иметь один свободный индекс, что в прямом обозначении равносильно расположению матрицы в начале или в конце члена, но не в середине его. Например, пусть

$$x\Gamma i = e; \qquad \Gamma_{\alpha\beta\gamma} x_{\alpha} i_{\beta} = e_{\gamma}.$$

Объединяя 3-матрицу и 1-матрицу x в 2-матрицу, имеем

$$x\Gamma = A; \qquad \Gamma_{\alpha\beta\gamma} x_{\alpha} = A_{\beta\gamma},$$

что позволяет перенести A в правую часть с помощью умножения обеих частей на обращение A , т. е.

$$\begin{aligned} Ai = e & & A_{\beta\gamma} i_{\beta} = e_{\gamma}; \\ i = A^{-1}e & & i_{\beta} = (A_{\beta\gamma})^{-1}e_{\gamma}; \\ i = (x\Gamma)^{-1}e & & i_{\beta} = (\Gamma_{\alpha\beta\gamma} x_{\alpha})^{-1}e_{\gamma}. \end{aligned}$$

IV. При операциях с матричными уравнениями часто необходимо заменить 1-матрицу или 2-матрицу A на $A\Gamma$ или ΓA , где Γ — «единичная матрица» (уравнение 1.5), имеющая единицы на

главной диагонали, остальные же ее компоненты равны нулю. (Заметим, что $I_t = I$ и $I^{-1} = I$. Кроме того, умножение на I оставляет любую n -матрицу неизменной.) Такие случаи встречаются, когда нужно вынести общую n -матрицу за скобки некоторого выражения. Например,

$$\begin{aligned} \mathbf{A} - \mathbf{i} \cdot \Gamma \cdot \mathbf{A} &= \mathbf{B} & A_{\alpha\beta} - \Gamma_{\gamma\alpha\delta} i_{\gamma} \cdot A_{\delta\beta} &= B_{\alpha\beta}; \\ (\mathbf{I} - \mathbf{i}\Gamma) \cdot \mathbf{A} &= \mathbf{B} & (I_{\alpha\delta} - \Gamma_{\gamma\alpha\delta} i_{\gamma}) \cdot A_{\delta\beta} &= B_{\alpha\beta}; \\ \mathbf{A} &= (\mathbf{I} - \mathbf{i}\Gamma)^{-1} \cdot \mathbf{B} & A_{\delta\beta} &= (I_{\alpha\delta} - \Gamma_{\gamma\alpha\delta} i_{\gamma})^{-1} \cdot B_{\alpha\beta}. \end{aligned}$$

8. ДЕЙСТВИЯ С ИНДЕКСАМИ

При выполнении действий с уравнениями в индексном обозначении нужно иметь в виду следующее:

1. Свободный индекс в каждом члене должен быть одинаковым, но можно менять букву, обозначающую этот индекс. Так, в уравнении

$$i_{\alpha} = A_{\alpha\beta} e_{\beta} + M_{\alpha\beta\gamma} e_{\beta} e_{\gamma}$$

свободный индекс α можно заменить на ω :

$$i_{\omega} = A_{\omega\beta} e_{\beta} + M_{\omega\beta\gamma} e_{\beta} e_{\gamma}.$$

Заметим, что во избежание путаницы новый свободный индекс не должен совпадать ни с одним из немых индексов.

2. Немые индексы можно менять в каждом члене отдельно. Например, уравнение $i_{\alpha} = A_{\alpha\beta} e_{\beta} + M_{\alpha\beta\gamma} e_{\beta} e_{\gamma}$ можно записать также в виде $i_{\alpha} = A_{\alpha\delta} e_{\delta} + M_{\alpha\sigma\tau} e_{\sigma} e_{\tau}$.

3. Один и тот же немой индекс, например β , можно при желании использовать в двух и более членах. В выражении типа $A_{\alpha\beta} e_{\beta} + B_{\alpha\gamma} e_{\gamma}$ вектор e_{β} можно вынести за скобку, изменив немой индекс γ во втором члене на β ; это дает

$$A_{\alpha\beta} e_{\beta} + B_{\alpha\beta} e_{\beta} = (A_{\alpha\beta} + B_{\alpha\beta}) e_{\beta}.$$

9. «ФОРМЫ»

1. В матричном уравнении каждый член является либо 0-матрицей, либо 1-, либо 2-матрицей и т. д. Если каждый член есть 0-матрица (обычное число), то он называется «формой». Форма, например $A_{\alpha\beta} x_{\alpha} x_{\beta}$, состоит из компонентов двух типов:

1) «переменных» x_{α} или i_{α} , которые могут входить в форму один или несколько раз. Может быть два или несколько видов переменных, таких как x_{α} или y_{α} ;

2) «коэффициентов» при этих переменных, таких как $A_{\alpha\beta}$. Ко-

эффиценты формы могут представлять собой произведения нескольких n -матриц.

II. В зависимости от числа и типа переменных различают следующие виды форм:

$e \cdot i$ или $e_{\alpha} i_{\alpha}$ — «линейная»,

$i \cdot L \cdot i$ или $L_{\alpha\beta} i_{\alpha} i_{\beta}$ — «квадратичная»,

$A_{\alpha\beta\gamma} i_{\alpha} \cdot i_{\beta} i_{\gamma}$ — «трелинейная»,

$B_{\alpha\beta\gamma\delta} \dots i_{\alpha} i_{\beta} i_{\gamma} i_{\delta}$ — «полилинейная».

Эти виды форм содержат только один тип переменной. Часто встречаются формы с переменными двух типов, например «билинейная» форма: $x \cdot D \cdot y$ или $D_{\alpha\beta} x_{\alpha} y_{\beta}$.

III. На месте переменных i_{α} в приведенных выше формах могут стоять «дифференциалы» dx_{α} , и тогда эти формы называют дифференциальными. Формы с i_{α} или x_{α} называют алгебраическими. Наиболее важными типами дифференциальных форм являются: линейная дифференциальная форма $e_{\alpha} dx_{\alpha}$, квадратичная дифференциальная форма $a_{\alpha\beta} dx_{\alpha} dx_{\beta}$.

IV. В механических или электротехнических задачах примером линейной формы является входная мощность $p = e \cdot i = e_{\alpha} i_{\alpha}$.

Примерами квадратичных форм являются: запасенная магнитная (или кинетическая) энергия $2T = i \cdot a \cdot i = a_{\alpha\beta} i_{\alpha} i_{\beta}$; функция рассеяния $2F = i \cdot r \cdot i = r_{\alpha\beta} i_{\alpha} i_{\beta}$; запасенная электростатическая (или упругая) энергия $2V = X \cdot S \cdot X = S_{\alpha\beta} X_{\alpha} X_{\beta}$. Если i_{α} имеет вид dx_{α}/dt , то первые три формы из четырех, приведенных выше, можно рассматривать как дифференциальные формы, а не как алгебраические.

V. Если каждый член в матричном уравнении есть 1-матрица, то каждый член можно рассматривать как множество форм. Например, zI или $z_{\alpha\beta} i_{\beta}$ есть множество линейных форм; $\Gamma_{\alpha\beta\gamma} x_{\alpha} y_{\beta}$ — множество билинейных форм.

VI. Важность понятия «форма» объясняется тем, что количество различных матричных уравнений велико, а количество различных составляющих их частей (форм) мало. Создана обширная математическая литература по теории форм, содержащая их характеристики, способы приведения к простым формам и т. д. Все учебники современной или высшей алгебры посвящены преимущественно теории «форм». Результаты этих теоретических работ часто позволяют сократить необходимый объем численных расчетов.

VII. В качестве примера упрощения можно рассмотреть следующую теорему о квадратичных формах. В § 7 было показано, что любую матрицу можно представить в виде суммы симметричной и кососимметричной матриц. Теорема же утверждает, что

в любой квадратичной форме $i \cdot G \cdot i$ матрица G всегда может быть заменена своей симметричной частью $(G + G_t)/2$.

Это означает, что коэффициент квадратичной, алгебраической или дифференциальной формы всегда является симметричной матрицей, так как кососимметричная часть обращает форму в нуль. Таким образом,

$$i \cdot \left(\frac{G - G_t}{2} \right) \cdot i = 0, \quad \left(\frac{G_{\alpha\beta} - G_{\beta\alpha}}{2} \right) i_\alpha i_\beta = 0.$$

Например, если

$$G = \begin{array}{c} a \quad b \\ \begin{array}{|c|c|} \hline A & B \\ \hline C & D \\ \hline \end{array} \\ b \end{array} \quad G_t = \begin{array}{c} a \quad b \\ \begin{array}{|c|c|} \hline A & C \\ \hline B & D \\ \hline \end{array} \\ b \end{array} \quad i = \begin{array}{c} a \quad b \\ \begin{array}{|c|c|} \hline i_a & i_b \\ \hline \end{array} \end{array}$$

$$\frac{G - G_t}{2} = \begin{array}{c} a \quad b \\ \begin{array}{|c|c|} \hline 0 & (B - C)/2 \\ \hline \frac{-(B - C)}{2} & 0 \\ \hline \end{array} \\ b \end{array}$$

$$\frac{1}{2} (G - G_t) \cdot i = \begin{array}{c} \begin{array}{|c|c|} \hline i_b(B - C)/2 & -i_a(B - C)/2 \\ \hline \end{array} \end{array}$$

$$\frac{1}{2} i (G - G_t) \cdot i = \frac{1}{2} [i_b(B - C)i_a - i_a(B - C)i_b] = 0.$$

Следовательно,

$$i \cdot G \cdot i = i \frac{G + G_t}{2} \cdot i. \quad (2.20)$$

10. «ПОСТУЛАТ ПЕРВОГО ОБОБЩЕНИЯ»

I. Следует обратить внимание на следующий интересный факт: если одна катушка характеризуется величинами e, i, R, L, C и Z , то множество катушек характеризуется n -матрицами e, i, R, L, C и Z .

Таким образом, множество катушек характеризуется тем же числом символов того же типа, что и одна катушка, но отличается тем, что отдельные числа заменяются n -матрицами различной размерности.

Следовательно, нужно заметить, что n -матрицы — это совсем не случайный набор каких угодно чисел. Компоненты каждой n -матрицы соответствуют некоторому определенному физическому (или геометрическому) понятию и в каждой задаче должно использоваться ровно такое количество n -матриц, сколько име-

ется в ней физических (или геометрических) понятий. Количество n -матриц может быть увеличено или уменьшено только в соответствии со строгими правилами, вытекающими из физической природы решаемой задачи.

II. В дальнейшем будет показано, что вообще сложные системы не только описываются тем же количеством символов, что и простые системы, но и *весь метод рассуждения*, используемый в анализе их поведения, соответствует этапам анализа простейших систем, отличаясь только тем, что вместо каждой величины используется n -матрица.

Другими словами, *прежде чем исследовать любую сложную систему со многими переменными, необходимо сначала выполнить анализ простой системы с одной (или более) степенью свободы. После этого можно перенести все этапы этого анализа на сложную систему, заменяя каждую величину соответствующей ей n -матрицей.* Далее будет также показано, что вид окончательного уравнения сложной системы с n степенями свободы совпадает с видом *окончательного уравнения* простой системы с одной (или более) степенью свободы, отличаясь только тем, что каждая величина заменена n -матрицей.

Этот рабочий прием, дающий экономию умственных усилий, называется «*постулатом первого обобщения*» и может быть выражен так:

Метод анализа и окончательные уравнения, описывающие поведение сложной физической системы (с n степенями свободы), могут быть найдены последовательно при анализе простейшего, но наиболее общего элемента (unit) системы при условии, что каждая величина заменяется соответствующей n -матрицей. Простейший элемент системы может иметь одну или несколько степеней свободы.

Представляется логичным, что простое увеличение числа элементов не вводит никаких новых физических явлений, которые не наблюдались бы в простейшем элементе, а следовательно, *новые символы, представляющие новые физические понятия, не могут возникнуть при объединении нескольких элементов.* И все же не всегда очевидно, что же такое простейший элемент системы; не всякая формулировка метода анализа и не всякое уравнение простейшего элемента пригодны для обобщения. Будет показано, что только самое короткое (но все еще общее) и в то же время *элегантное* скалярное описание физического явления имеет ту форму, которая пригодна для замены n -матрицей. Скалярная формулировка может, конечно, содержать одно или несколько уравнений.

Нужно помнить, что простейший элемент системы может содержать две или более переменных, а также то, что система может быть образована из двух или более элементов существенно различного типа, так что для каждого из этих элементов необходимо отдельное уравнение.

III. В силу того что действия с n -матрицами почти не отличаются от действий с обычными величинами, при параллельном анализе обычные величины мы будем записывать в видоизмененной форме: 1) вместо деления на число, например $1/Z$, будем умножать на Z^{-1} , что соответствует матрице Z^{-1} , являющейся обратной матрицей Z ; 2) вместо возведения числа в квадрат, например Z^2 , будем записывать эту операцию как умножение $Z \cdot Z$, что соответствует матричной записи произведения матриц $Z \cdot Z$; 3) все величины, которые получаются в определенном порядке в процессе анализа, должны записываться в том же строгом порядке, если предполагается использовать n -матрицы в прямом обозначении. Если используется индексное обозначение и в выражениях отсутствуют операторы (т. е. $p = d/dt$), то порядок записи не играет роли.

Введенные правила обращения с обычными величинами почти совпадают с правилами обращения с «операторами» типа $p = d/dt$ ¹⁾.

IV. Если анализ задачи осуществляется прямо в n -матрицах, то исчезает необходимость выписывания со страницы на страницу систем обычных уравнений. *Следует подчеркнуть, что несколько типов действий и какой-то минимум вычислительных операций остаются необходимыми и при использовании n -матриц.*

Например: 1) в анализе системы линейных уравнений нельзя избежать вычисления некоторого количества детерминантов; 2) *при решении систем дифференциальных уравнений нахождение корней алгебраического уравнения n -й степени нельзя устранить применением любой мыслимой символики.*

Следует подчеркнуть, что каким бы методом не были получены окончательные уравнения, для получения решения в численном виде всегда требуется определенное количество сложений и умножений. Однако часто наблюдается, что окончательный ответ, получаемый с помощью n -матриц, имеет значительно более организованную форму, чем ответ, выраженный через обычные величины, а следовательно, требует меньшего количества вычислений и благодаря организации данных численные расчеты могут быть выполнены вычислительной или счетно-перфорационной машиной. Кроме того, *использование n -матриц предлагает новый подход, который не вытекает из обычных соображений, и окончательный ответ получается в новой форме, требующей намного меньше вычислительной работы.* Примеры этого многочисленны и встретятся в дальнейшем. Таким образом, *использование n -матриц в общем случае дает экономию в аналитической и вычислительной работе.*

Отметим, что не всегда ясно, какие именно величины следует сгруппировать вместе для получения n -матрицы. Часто имеется

¹⁾ Это естественно, так как сами n -матрицы в этом изложении являются «обобщенными операторами». (Прим. ред.).

несколько путей, но только один из них приводит к простейшей формулировке задачи. Организация величин в n -матрицу на первый взгляд кажется бесполезной. Одной из целей настоящей книги является установление фундаментальных принципов организации понятий электротехники с помощью n -матриц.

11. НЕПОДВИЖНЫЕ СЕТИ

Очень простым примером использования постулата первого обобщения является анализ неподвижной сети. Соотношение между приложенным напряжением e и e , токами i и i и импедансами z и z в одной катушке и в сети с n степенями свободы в этих двух случаях определяется законом Ома:

$$e = zi, \quad e = zi. \quad (2.21)$$

Если напряжения известны, а токи неизвестны, то эти уравнения можно разрешить с помощью умножения обеих частей на обратную Z или Z :

$$\begin{aligned} z^{-1}e &= z^{-1}zi, & z^{-1}e &= z^{-1}zi, \\ z^{-1}e &= i, & z^{-1}e &= i. \end{aligned}$$

Таким образом, токи i находятся обращением матрицы Z с последующим умножением ее на e . Если величину, обратную импедансу, определить как адмиттанс¹⁾ и обозначить новым символом, то

$$\begin{aligned} i &= z^{-1}e, & i &= z^{-1}e, \\ i &= Ye, & i &= Ye. \end{aligned} \quad (2.22)$$

Например, обращение z , приведенной в § 2, имеет вид

$$Y = z^{-1} = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} & a & b & c & d \\ a & Y_{aa} & Y_{ab} & Y_{ac} & Y_{ad} \\ b & Y_{ba} & Y_{bb} & Y_{bc} & Y_{bd} \\ c & Y_{ca} & Y_{cb} & Y_{cc} & Y_{cd} \\ d & Y_{da} & Y_{db} & Y_{dc} & Y_{dd} \end{array} \end{array}$$

Это «матрица адмиттанса», которая представляет собственные и взаимные адмиттансы различных катушек (рис. 2.1) при условии, что когда измеряется адмиттанс одной катушки, то все другие катушки короткозамкнуты. Если Z — симметричная матрица, то матрица адмиттанса тоже симметричная. Токи, протекающие

¹⁾ Адмиттанс — полная (комплексная) проводимость. (Прим. пер.).

в различных цепях (см. рис. 2.1) и обусловленные напряжением e , данным в § 2, равны

$$i = Ye = \begin{array}{l} a \\ b \\ c \\ d \end{array} \begin{array}{|c|} \hline Y_{aa}e_a + Y_{ab}e_b + Y_{ac}e_c + Y_{ad}e_d \\ \hline Y_{ba}e_a + Y_{bb}e_b + Y_{bc}e_c + Y_{bd}e_d \\ \hline Y_{ca}e_a + Y_{cb}e_b + Y_{cc}e_c + Y_{cd}e_d \\ \hline Y_{da}e_a + Y_{db}e_b + Y_{dc}e_c + Y_{dd}e_d \\ \hline \end{array}$$

12. РАСПРОСТРАНЕНИЕ ВОЛН В МНОГОПРОВОДНОЙ ЛИНИИ

I. В качестве примера применения постулата первого обобщения к системе дифференциальных уравнений рассмотрим движение электромагнитной волны по системе передачи.

Пусть для одиночного проводника сопротивление единицы длины равно R , индуктивность — L , проводимость утечки — G , а емкость — C . Тогда на бесконечно малом отрезке dx падение напряжения равно

$$-de = -\frac{\partial e}{\partial x} dx = Ridx + L \frac{di}{dt} dx = \left(R + L \frac{d}{dt} \right) idx,$$

а изменение тока

$$-di = -\frac{\partial i}{\partial x} dx = Gedx + C \frac{de}{dt} dx = \left(G + C \frac{d}{dt} \right) edx.$$

Если $R + L \frac{d}{dt} = Z$ и $G + C \frac{d}{dt} = Y$, то, исключая dx , приводим уравнения к виду

$$-\partial e / \partial x = Zi \quad \text{и} \quad -\partial i / \partial x = Ye. \quad (2.23)$$

II. Рассмотрим теперь систему передачи из n параллельных проводников с электромагнитным и электростатическим взаимодействием между ними. Сопротивления, собственные и взаимные индуктивности можно представить в форме матрицы

$$Z = \begin{array}{l} a \\ b \\ \vdots \\ n \end{array} \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline & a & b & \dots & n \\ \hline a & Z_{aa} & Z_{ab} & \dots & Z_{an} \\ \hline b & Z_{ba} & Z_{bb} & \dots & Z_{bn} \\ \hline \vdots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \hline n & Z_{na} & Z_{nb} & \dots & Z_{nn} \\ \hline \end{array},$$

где $Z_{aa} = R_{aa} + L_{aa}d/dt$. Проводимость утечки, собственные и взаимные емкости также можно представить в форме матрицы

$$Y = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} & \mathbf{a} & \mathbf{b} & \dots & \mathbf{n} \\ \mathbf{a} & Y_{aa} & Y_{ab} & \dots & Y_{an} \\ \mathbf{b} & Y_{ba} & Y_{bb} & \dots & Y_{bn} \\ \vdots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mathbf{n} & Y_{na} & Y_{nb} & \dots & Y_{nn} \end{array} \end{array},$$

где $Y_{aa} = G_{aa} + C_{aa}d/dt$. (Эта матрица не является обратной матрице Z , поскольку она не зависит от нее.)

Пусть потенциалы различных проводников расположены в строку и образуют 1-матрицу

$$e = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline & \mathbf{a} & \mathbf{b} & \mathbf{n} \\ \hline e & e_a & e_b & \dots & e_n \\ \hline \end{array}$$

Аналогично токи образуют 1-матрицу

$$i = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline & \mathbf{a} & \mathbf{b} & \mathbf{n} \\ \hline i & i_a & i_b & \dots & i_n \\ \hline \end{array}$$

Поскольку проводники параллельны, то расстояние вдоль каждого проводника можно задать одной величиной x .

Всего вводится пять n -матриц, в частности, две 2-матрицы Z и Y , две 1-матрицы e и i , одна 0-матрица x .

III. Выведем дифференциальные уравнения, содержащие только напряжения, для одного проводника и для n проводников в параллельных столбцах. Уравнения для n проводников запишем как в прямом, так и в индексном обозначениях. Падение напряжения равно

$$-\frac{\partial e}{\partial x} = Zi, \quad -\frac{\partial e}{\partial x} = Z \cdot i, \quad -\frac{\partial e_a}{\partial x} = Z_{\alpha\beta} i_\beta.$$

Изменение тока равно

$$-\frac{\partial i}{\partial x} = Ye, \quad -\frac{\partial i}{\partial x} = Y \cdot e, \quad -\frac{\partial i_\beta}{\partial x} = Y_{\beta\gamma} e_\gamma.$$

Дифференцируя первое уравнение по x , получаем

$$-\frac{\partial^2 e}{\partial x^2} = Z \frac{\partial i}{\partial x}, \quad -\frac{\partial^2 e}{\partial x^2} = Z \frac{\partial i}{\partial x}, \quad -\frac{\partial^2 e_a}{\partial x^2} = Z_{\alpha\beta} \frac{\partial i_\beta}{\partial x}.$$

Подставляя второе уравнение в последнее и изменяя знаки, получаем

$$\frac{\partial^2 e}{\partial x^2} = ZY e, \quad \frac{\partial^2 e}{\partial x^2} = Z \cdot Y \cdot e, \quad \frac{\partial^2 e_a}{\partial x^2} = Z_{\alpha\beta} Y_{\beta\gamma} e_\gamma. \quad (2.24)$$

Полученное уравнение дает дифференциальные уравнения для распространения волны напряжения e , которая является функцией x и t . Отметим, что анализ можно продолжить вплоть до решения дифференциальных уравнений в n -матрицах. Однако использование n -матриц не избавляет от необходимости находить корни алгебраического уравнения n -й (или 2-й) степени. Использование n -матриц избавляет от переписывания n обычных уравнений со страницы на страницу.

IV. Чтобы продемонстрировать систему n обычных уравнений, представленных одним матричным уравнением (2.24), выполним указанные операции:

$$Z \cdot Y =$$

| | a | b | ... | n |
|-----|---------------------------------------|---------------------------------------|-----|---------------------------------------|
| a | $Z_{aa}Y_{aa} + \dots + Z_{an}Y_{na}$ | $Z_{ab}Y_{ab} + \dots + Z_{an}Y_{nb}$ | ... | $Z_{aa}Y_{an} + \dots + Z_{an}Y_{nn}$ |
| b | $Z_{ba}Y_{aa} + \dots + Z_{bn}Y_{na}$ | $Z_{ba}Y_{ab} + \dots + Z_{bn}Y_{nb}$ | ... | $Z_{ba}Y_{an} + \dots + Z_{bn}Y_{nn}$ |
| ... | ... | ... | ... | ... |
| n | $Z_{na}Y_{aa} + \dots + Z_{nn}Y_{na}$ | $Z_{na}Y_{ab} + \dots + Z_{nn}Y_{nb}$ | ... | $Z_{na}Y_{an} + \dots + Z_{nn}Y_{nn}$ |

$$Z \cdot Y \cdot e =$$

| | | | | |
|-----|--|--|--|--|
| a | $(Z_{aa}Y_{aa} + \dots + Z_{an}Y_{na})e_a + (Z_{ab}Y_{ab} + \dots + Z_{an}Y_{nb})e_b + \dots + (Z_{aa}Y_{an} + \dots + Z_{an}Y_{nn})e_n$ | | | |
| b | $(Z_{ba}Y_{aa} + \dots + Z_{bn}Y_{na})e_a + (Z_{ba}Y_{ab} + \dots + Z_{bn}Y_{nb})e_b + \dots + (Z_{ba}Y_{an} + \dots + Z_{bn}Y_{nn})e_n$ | | | |
| ... | ... | | | |
| n | $(Z_{na}Y_{aa} + \dots + Z_{nn}Y_{na})e_a + (Z_{na}Y_{ab} + \dots + Z_{nn}Y_{nb})e_b + \dots + (Z_{na}Y_{an} + \dots + Z_{nn}Y_{nn})e_n$ | | | |

$$\frac{\partial^2 e}{\partial x^2} =$$

| a | b | ... | n |
|---------------------------------------|---------------------------------------|-----|---------------------------------------|
| $\frac{\partial^2 e_a}{\partial x^2}$ | $\frac{\partial^2 e_b}{\partial x^2}$ | ... | $\frac{\partial^2 e_n}{\partial x^2}$ |

Приравнявая соответствующие компоненты двух последних 1-матриц в соответствии с (2.24), получаем представление матричного уравнения в виде системы n обычных уравнений:

$$\left. \begin{aligned}
 \frac{\partial^2 e_a}{\partial x^2} &= (Z_{aa} Y_{aa} + \dots + Z_{an} Y_{na}) e_a + \\
 &\quad + (Z_{aa} Y_{ab} + \dots + Z_{an} Y_{nb}) e_b + \dots \\
 &\quad \dots + (Z_{aa} Y_{an} + \dots + Z_{an} Y_{nn}) e_n, \\
 \frac{\partial^2 e_b}{\partial x^2} &= (Z_{ba} Y_{aa} + \dots + Z_{bn} Y_{na}) e_a + \\
 &\quad + (Z_{ba} Y_{ab} + \dots + Z_{bn} Y_{nb}) e_b + \dots \\
 &\quad \dots + (Z_{ba} Y_{an} + \dots + Z_{bn} Y_{nn}) e_n, \\
 &\quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\
 \frac{\partial^2 e_n}{\partial x^2} &= (Z_{na} Y_{aa} + \dots + Z_{nn} Y_{na}) e_a + \\
 &\quad + (Z_{na} Y_{ab} + \dots + Z_{nn} Y_{nb}) e_b + \dots \\
 &\quad \dots + (Z_{na} Y_{an} + \dots + Z_{nn} Y_{nn}) e_n.
 \end{aligned} \right\} \quad (2.25)$$

Дифференциальное уравнение для токов аналогично уравнению (2.24):

$$\frac{\partial^2 i}{\partial x^2} = Y Z i, \quad \frac{\partial^2 i}{\partial x^2} = Y \cdot Z \cdot i, \quad \frac{\partial^2 i_a}{\partial x^2} = Y_{\alpha\beta} Z_{\beta\gamma} i_\gamma. \quad (2.26)$$

Матрица $Y \cdot Z$ отличается от матрицы $Z \cdot Y$.

13. РАЗЛОЖЕНИЕ В СТЕПЕННОЙ РЯД ¹⁾

I. Для иллюстрации использования постулата первого обобщения в задачах, где встречаются 3- и n -матрицы более высоких размерностей, рассмотрим разложение в степенной ряд нескольких функций от нескольких переменных. Такие задачи встречаются, например, когда существуют нелинейные соотношения между величинами: между током и напряжением в электронной лампе, между магнитодвижущей силой и магнитным потоком в магнитных цепях с насыщением и т. д. Разложение переменных в степенной ряд необходимо и тогда, когда система уравнений не поддается решению другим способом.

Начнем с разложения в ряд одной функции от одной переменной, а затем шаг за шагом повторим этот процесс в n -матрицах для нескольких функций от нескольких переменных.

II. Любая плоская кривая $y = f(x)$ может быть представлена в виде степенного ряда

$$y = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4 + \dots, \quad (2.27)$$

где коэффициенты A, B, C, D, \dots — известные или неизвестные величины (предполагается, что некоторые условия, оговоренные в учебниках, выполнены).

¹⁾ Этот параграф может быть опущен при первом чтении.

III. Кривая в трехмерном пространстве задается пересечением двух поверхностей:

$$y_a = f_a(x_a, x_b), \quad (2.28)$$

$$y_b = f_b(x_a, x_b).$$

Каждая из зависимых переменных y_a и y_b может быть представлена разложением в степенной ряд по независимым переменным x_a и x_b :

$$\begin{aligned} y_a = & A_a + (B_{aa}x_a + B_{ab}x_b) + \\ & + (C_{aaa}x_a^2 + C_{aab}x_ax_b + C_{aba}x_bx_a + C_{abb}x_b^2) + \\ & + (D_{aaaa}x_a^3 + D_{aaab}x_a^2x_b + D_{aaba}x_a^2x_b + D_{aabb}x_ax_b^2) + \\ & + (D_{abaa}x_bx_a^2 + D_{abab}x_ax_b^2 + D_{abba}x_ax_b^2 + D_{abbb}x_b^3) + \\ & + (E_{aaaaa}x_a^4 + E_{aaaab}x_a^3x_b + \dots) \end{aligned} \quad (2.29)$$

Коэффициенты переменных, такие как D_{abaa} , известные или неизвестные величины. Аналогичное уравнение можно написать и для y_b :

$$\begin{aligned} y_b = & A_b + (B_{ba}x_a + B_{bb}x_b) + \\ & + (C_{baa}x_a^2 + C_{bab}x_ax_b + C_{bba}x_bx_a + C_{bbb}x_b^2) + \\ & + (D_{baaa}x_a^3 + D_{baab}x_a^2x_b + D_{baba}x_a^2x_b + D_{babb}x_ax_b^2 + \\ & + D_{bbaa}x_bx_a^2 + D_{bbab}x_ax_b^2 + D_{bbba}x_ax_b^2 + D_{bbbb}x_b^3) + \\ & + (E_{baaaa}x_a^4 + E_{baaab}x_a^3x_b + \dots) \end{aligned} \quad (2.30)$$

Если вместо двух функций от двух переменных имеется n функций от n переменных (с действительными переменными), то

$$\begin{aligned} y_a &= f_a(x_a, x_b, \dots, x_n), \\ y_b &= f_b(x_a, x_b, \dots, x_n), \\ y_c &= f_c(x_a, x_b, \dots, x_n), \\ &\dots \quad \dots \quad \dots \\ y_n &= f_n(x_a, x_b, \dots, x_n) \end{aligned} \quad (2.31)$$

и мы получим n таких степенных рядов, подобных рассмотренным выше, причем в каждой скобке вместо $2^1, 2^2, 2^3, \dots$, членов будет n^1, n^2, n^3, \dots членов.

IV. Чтобы представить n обычных уравнений как одно матричное уравнение, определим следующие n -матрицы:

1) все зависимые переменные расположим в строку, образующую 1-матрицу:

$$y_\alpha = \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline \alpha & a & b & c & \dots & n \\ \hline y_a & y_b & y_c & \dots & y_n \\ \hline \end{array};$$

2) все независимые переменные расположим в строку, образующую 1-матрицу:

$$x_\alpha = \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline \alpha & a & b & c & \dots & n \\ \hline x_a & x_b & x_c & \dots & x_n \\ \hline \end{array};$$

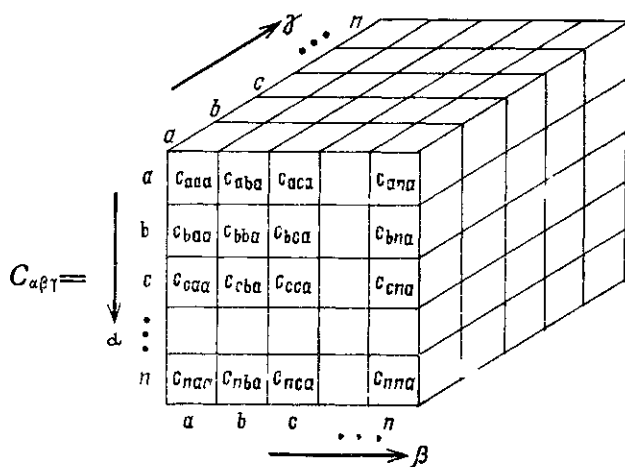
3) все коэффициенты A расположим в 1-матрицу:

$$A_\alpha = \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline \alpha & a & b & c & \dots & n \\ \hline A_a & A_b & A_c & \dots & A_n \\ \hline \end{array};$$

4) все коэффициенты B при x_α расположим в квадрат, образуя 2-матрицу:

$$B_{\alpha\beta} = \begin{array}{c|cccc} \alpha & \beta & & & & \\ \hline & a & b & c & \dots & n \\ \hline a & B_{aa} & B_{ab} & B_{ac} & \dots & B_{an} \\ b & B_{ba} & B_{bb} & B_{bc} & \dots & B_{bn} \\ c & B_{ca} & & B_{cc} & \dots & B_{cn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ n & B_{na} & B_{nb} & B_{nc} & \dots & B_{nn} \\ \hline \end{array};$$

5) все коэффициенты C при $x_\alpha x_\beta$ расположим в куб, образуя 3-матрицу:



б) Все коэффициенты D при $x_\alpha x_\beta x_\gamma$ располагаются в n кубов, образуя 4-матрицу $D_{\alpha\beta\gamma\delta}$. Все коэффициенты E образуют 5-матрицу $E_{\alpha\beta\gamma\delta\epsilon}$ и т. д.

В. Через эти n -матрицы разложение n функций n переменных в степенной ряд записывается в одно матричное уравнение

$$y_\alpha = A_\alpha + B_{\alpha\beta} x_\beta + C_{\alpha\beta\gamma} x_\beta x_\gamma + D_{\alpha\beta\gamma\delta} x_\beta x_\gamma x_\delta + E_{\alpha\beta\gamma\delta\epsilon} x_\beta x_\gamma x_\delta x_\epsilon + \dots \quad (2.32)$$

Это уравнение имеет тот же вид, что и ряд одной переменной (2.27), но отличается от него тем, что каждая величина заменена n -матрицей; n -я степень переменной, например x^4 , заменена произведением n членов; $x_\beta x_\gamma x_\delta x_\epsilon$.

Заметим, что в этом уравнении:

1) каждый член является 1-матрицей, т. е. в каждом члене имеется только один свободный индекс, все остальные индексы являются немymi;

2) каждый свободный индекс в каждом члене уравнения слева и справа обозначается буквой α ;

3) в каждом члене n -матрица умножается на 1-матрицу x_α несколько раз; например, 3-матрица $C_{\alpha\beta\gamma}$ умножается сначала на 1-матрицу x_γ , образуя 2-матрицу $C_{\alpha\beta\gamma} x_\gamma = F_{\alpha\beta}$, затем 2-матрица $F_{\alpha\beta}$ умножается снова на 1-матрицу x_β , $F_{\alpha\beta} x_\beta = [C_{\alpha\beta\gamma} x_\gamma] x_\beta$, давая 1-матрицу G_α . Каждый член уравнения является такой 1-матрицей, как показано на рис. 2.2.

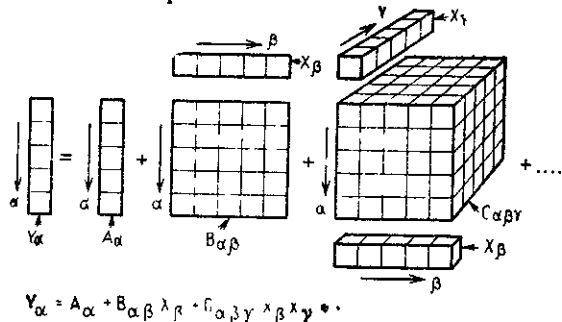


Рис. 2.2. Разложение в степенной ряд в форме n -матриц.

14. ОБРАЩЕННЫЙ СТЕПЕННОЙ РЯД ¹⁾

I. Для демонстрации операций с 3-матрицами рассмотрим три члена приведенного выше ряда, заменяя y на e и x на i :

$$e_\alpha = B_{\alpha\beta} i_\beta + C_{\alpha\beta\gamma} i_\beta i_\gamma + \dots \quad (2.33)$$

Предположим, что компоненты $B_{\alpha\beta}$ и $C_{\alpha\beta\gamma}$ известны, так же как компоненты e_α (которые представляют, например, приложенные напряжения в нелинейной системе). Задача состоит в разре-

¹⁾ Этот параграф может быть опущен при первом чтении.

шении этого уравнения относительно неизвестного i_α , т. е. нужно выразить i_α как функцию от $B_{\alpha\beta}$, $C_{\alpha\beta\gamma}$ и e_α .

Неизвестную i_β можно выразить через e_α с помощью степенного ряда (называемого «обращенным» рядом):

$$i_\beta = K_{\beta\epsilon} e_\epsilon + M_{\beta\epsilon\sigma} e_\epsilon e_\sigma + \dots, \quad (2.34)$$

где коэффициенты $K_{\beta\epsilon}$ и $M_{\beta\epsilon\sigma}$ являются неизвестными функциями введенных ранее известных коэффициентов $B_{\alpha\beta}$ и $C_{\alpha\beta\gamma}$. Задача состоит в том, чтобы выразить K и M в виде явной функции от B и C .

II. Следуя постулату первого обобщения, решим сначала эту задачу для обычной скалярной величины. Другими словами, решим сначала следующую задачу: дано разложение в степенной ряд

$$e = B \cdot i + C \cdot i^2 + \dots, \quad (2.35)$$

надо найти неизвестную i , т. е. в обращенном ряде

$$i = Ke + Me^2 + \dots \quad (2.36)$$

выразить неизвестные K и M как явную функцию от известных B и C . Порядок действий состоит из следующих этапов:

1) Подставить второе уравнение в первое:

$$e = B(Ke + Me^2) + C(Ke + Me^2)^2 + \dots \quad (2.37)$$

Поскольку мы будем пренебрегать всеми членами, в которых степень больше двух, то уравнение приводится к виду

$$e = BKe + BMe^2 + CK^2e^2 + \dots, \quad (2.38)$$

$$e = BKe + (BM + CK^2)e^2 + \dots \quad (2.39)$$

2) Приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях, т. е. при e и e^2 с каждой стороны уравнения, получим

$$1 = BK, \quad (2.40)$$

$$0 = BM + CK^2. \quad (2.41)$$

3) Решаем эти два уравнения относительно неизвестных K и M :

$$K = B^{-1}, \quad (2.42)$$

$$M = -C(B^{-1})^3 = -CK^3. \quad (2.43)$$

4) Таким образом, значение i через e , B , C выражается следующим способом:

$$i = B^{-1}e - C(B^{-1})^3e^2 \quad (2.44)$$

или

$$i = Ke - CK^3e^2, \quad (2.45)$$

где $K = B^{-1}$.

III. Тот же самый порядок с теми же этапами мы повторяем, заменяя каждую величину n -матрицей.

1. Подставим значение i_β из уравнения (2.34) в уравнение (2.33):

$$e_\alpha = B_{\alpha\beta}(K_{\beta\epsilon}e_\epsilon + M_{\beta\epsilon\sigma}e_\epsilon e_\sigma) + C_{\alpha\beta\gamma}(K_{\beta\epsilon}e_\epsilon + M_{\beta\epsilon\sigma}e_\epsilon e_\sigma)(K_{\gamma\omega}e_\omega + M_{\gamma\omega\pi}e_\omega e_\pi). \quad (2.46)$$

Следует заметить, что в процессе этой подстановки свободный индекс обозначен сначала как β , затем как γ . Аналогично в последнем случае, чтобы избежать путаницы при подстановке i_β два раза подряд, замена немых индексов сделана следующим образом:

$$i_\gamma = K_{\gamma\omega}e_\omega + M_{\gamma\omega\pi}e_\omega e_\pi \quad (2.47)$$

(см. § 9).

Пренебрегая степенями e_ϵ выше второй, приходим к уравнению

$$e_\alpha = B_{\alpha\beta}K_{\beta\epsilon}e_\epsilon + B_{\alpha\beta}M_{\beta\epsilon\sigma}e_\epsilon e_\sigma + C_{\alpha\beta\gamma}K_{\beta\epsilon}K_{\gamma\omega}e_\epsilon e_\omega. \quad (2.48)$$

Выносим за скобку $e_\epsilon e_\sigma$:

$$e_\alpha = B_{\alpha\beta}K_{\beta\epsilon}e_\epsilon + (B_{\alpha\beta}M_{\beta\epsilon\sigma} + C_{\alpha\beta\gamma}K_{\beta\epsilon}K_{\gamma\sigma})e_\epsilon e_\sigma. \quad (2.49)$$

2. Приравниваем коэффициенты при одинаковых степенях e_ϵ и $e_\epsilon e_\sigma$ в обеих частях уравнения (представляем e_α в виде $e_\epsilon I_{\epsilon\alpha}$, где $I_{\epsilon\alpha}$ — единичная матрица):

$$I_{\epsilon\alpha} = B_{\alpha\beta}K_{\beta\epsilon}; \quad (2.50)$$

$$0 = B_{\alpha\delta}M_{\delta\epsilon\sigma} + C_{\alpha\beta\gamma}K_{\beta\epsilon}K_{\gamma\sigma}. \quad (2.51)$$

3. Решаем эти два уравнения относительно неизвестных $K_{\alpha\beta}$ и $M_{\alpha\beta\gamma}$:

$$K_{\beta\epsilon} = I_{\epsilon\alpha}(B_{\alpha\beta})^{-1} = (B_{\epsilon\beta})^{-1}, \quad (2.52)$$

$$M_{\delta\epsilon\sigma} = -(C_{\alpha\beta\gamma}K_{\beta\epsilon}K_{\gamma\sigma})(B_{\alpha\delta})^{-1} = -C_{\alpha\beta\gamma}K_{\delta\alpha}K_{\beta\epsilon}K_{\gamma\sigma}. \quad (2.53)$$

Эти матричные уравнения такие же, как и соответствующие им обычные уравнения (2.42) и (2.43). Таким образом, матрица $K_{\alpha\beta}$ находится обращением матрицы $B_{\alpha\beta}$, а 3-матрица $M_{\alpha\beta\gamma}$ находится умножением 3-матрицы $C_{\alpha\beta\gamma}$ на матрицу $K_{\alpha\beta}$ три раза подряд в порядке, указываемом индексами, и полученный результат берется с отрицательным знаком.

Поскольку $(B_{\alpha\beta})^{-1} = K_{\beta\alpha}$, т. е. при обращении матрицы порядок индексов изменяется, три матрицы $K_{\alpha\beta}$ в последнем выражении имеют свободный индекс на разных позициях. Таким образом, в $K_{\delta\alpha}$ свободным индексом является первый индекс, в то время как в $K_{\beta\epsilon}$ и $K_{\gamma\sigma}$ — вторые индексы.

4. Следовательно, значение i_α как функции от $B_{\alpha\beta}$ и $C_{\alpha\beta\gamma}$ таково:

$$i_\alpha = K_{\alpha\beta} e_\beta - C_{\gamma\delta\epsilon} K_{\alpha\gamma} K_{\delta\pi} K_{\epsilon\sigma} e_\pi e_\sigma, \quad (2.54)$$

где $K_{\alpha\beta} = (B_{\beta\alpha})^{-1}$.

Нужно заметить, что без применения понятия n -матрицы процедура обращения системы уравнений, выраженных степенными рядами, является чрезвычайно трудоемкой. Из-за отсутствия правила, которое дается в выражении (2.53), каждый раз, когда нужно обратиться к системе уравнений, с начала и до конца должна быть проделана вся аналитическая работа. Если обращение степенного ряда является только одним этапом в каком-либо исследовании, то редко кто отважится провести этот анализ с использованием обычной символики: после нескольких первых шагов механические трудности при операциях с многочисленными членами становятся непреодолимыми, не говоря уже о том, что в голове нужно держать физическое содержание задачи и ясно обозреть весь анализ.

15. ИСКЛЮЧЕНИЕ ПЕРЕМЕННЫХ

I. Для демонстрации применения постулата первого обобщения в операциях с несколькими матричными уравнениями рассмотрим три линейных уравнения:

$$\left. \begin{aligned} e_1 &= z_1 i_1 + z_2 i_2 + z_3 i_3, & e_1 &= z_1 i_1 + z_2 i_2 + z_3 i_3, \\ e_2 &= z_4 i_1 + z_5 i_2 + z_6 i_3, & e_2 &= z_4 i_1 + z_5 i_2 + z_6 i_3, \\ e_3 &= z_7 i_1 + z_8 i_2 + z_9 i_3, & e_3 &= z_7 i_1 + z_8 i_2 + z_9 i_3. \end{aligned} \right\} \quad (2.55)$$

Левый столбец представляет три обычных линейных уравнения с тремя неизвестными i_1, i_2, i_3 . Правый столбец представляет три линейных матричных уравнения, в которых три 1-матрицы e и девять 2-матриц z известны, а три 1-матрицы i неизвестны. Каждое матричное уравнение может представлять любое число обычных уравнений.

II. Предположим, что в рассматриваемой задаче не требуется определять значение i_3 ; следовательно, можно исключить i_3 , оставив только два матричных уравнения с неизвестными i_1 и i_2 . Исключение i_3 будем проводить в параллельных колонках: слева — для обычных, справа — для матричных уравнений.

1. Из третьего уравнения выразим i_3 через i_1 и i_2 . Поместим член, содержащий i_3 , в левую часть уравнения:

$$z_9 i_3 = e_3 - z_7 i_1 - z_8 i_2, \quad z_9 \cdot i_3 = e_3 - z_7 \cdot i_1 - z_8 \cdot i_2.$$

Умножая обе части уравнения на z_9^{-1} , получаем

$$i_3 = z_9^{-1} (e_3 - z_7 i_1 - z_8 i_2), \quad i_3 = z_9^{-1} \cdot (e_3 - z_7 i_1 - z_8 i_2).$$

2. Полученное значение i_3 подставим в два других уравнения:

$$\begin{aligned} e_1 &= z_1 i_1 + z_2 i_2 + & \mathbf{e}_1 &= \mathbf{z}_1 \cdot \mathbf{i}_1 + \mathbf{z}_2 \cdot \mathbf{i}_2 + \\ &+ z_3 z_9^{-1} (e_3 - z_7 i_1 - z_8 i_2) & \mathbf{z}_3 \cdot \mathbf{z}_9^{-1} (\mathbf{e}_3 - \mathbf{z}_7 \mathbf{i}_1 - \mathbf{z}_8 \mathbf{i}_2) \\ e_2 &= z_4 i_1 + z_5 i_2 + & \mathbf{e}_2 &= \mathbf{z}_4 \mathbf{i}_1 + \mathbf{z}_5 \mathbf{i}_2 + \\ &+ z_6 z_9^{-1} (e_3 - z_7 i_1 - z_8 i_2) & + \mathbf{z}_6 \mathbf{z}_9^{-1} (\mathbf{e}_3 - \mathbf{z}_7 \mathbf{i}_1 - \mathbf{z}_8 \mathbf{i}_2). \end{aligned}$$

Вынесем i_1 и i_2 за скобки:

$$\begin{aligned} e_1 - Z_3 Z_9^{-1} e_3 &= & \mathbf{e}_1 &= \mathbf{Z}_3 \cdot \mathbf{Z}_9^{-1} \cdot \mathbf{e}_3 = \\ &= (Z_1 - Z_3 Z_9^{-1} Z_7) i_1 + & &= (\mathbf{Z}_1 - \mathbf{Z}_3 \cdot \mathbf{Z}_9^{-1} \cdot \mathbf{Z}_7) \cdot \mathbf{i}_1 + \\ &+ (Z_2 - Z_3 Z_9^{-1} Z_8) i_2, & &+ (\mathbf{Z}_2 - \mathbf{Z}_3 \cdot \mathbf{Z}_9^{-1} \cdot \mathbf{Z}_8) \cdot \mathbf{i}_2, \\ e_2 - Z_6 Z_9^{-1} e_3 &= & \mathbf{e}_2 &= \mathbf{Z}_6 \cdot \mathbf{Z}_9^{-1} \cdot \mathbf{e}_3 = \\ &= (Z_4 - Z_6 Z_9^{-1} Z_7) i_1 + & &= (\mathbf{Z}_4 - \mathbf{Z}_6 \cdot \mathbf{Z}_9^{-1} \cdot \mathbf{Z}_7) \cdot \mathbf{i}_1 + \\ &+ (Z_5 - Z_6 Z_9^{-1} Z_8) i_2, & &+ (\mathbf{Z}_5 - \mathbf{Z}_6 \cdot \mathbf{Z}_9^{-1} \cdot \mathbf{Z}_8) \cdot \mathbf{i}_2. \end{aligned} \quad (2.56)$$

В этих двух матричных уравнениях есть только два неизвестных: \mathbf{i}_1 и \mathbf{i}_2 . Эти уравнения можно записать короче:

$$\left. \begin{aligned} e'_1 &= Z'_1 i_1 + Z'_2 i_2, & \mathbf{e}'_1 &= \mathbf{Z}'_1 \cdot \mathbf{i}_1 + \mathbf{Z}'_2 \cdot \mathbf{i}_2, \\ e'_2 &= Z'_3 i_1 + Z'_4 i_2, & \mathbf{e}'_2 &= \mathbf{Z}'_3 \cdot \mathbf{i}_1 + \mathbf{Z}'_4 \cdot \mathbf{i}_2. \end{aligned} \right\} \quad (2.57)$$

Новые коэффициенты Z' при неизвестных являются матрицами и определяются через исходные матрицы с помощью соответствующих преобразований:

$$Z'_1 = Z_1 - Z_3 Z_9^{-1} Z_7, \quad \mathbf{Z}'_1 = \mathbf{Z}_1 - \mathbf{Z}_3 \cdot \mathbf{Z}_9^{-1} \cdot \mathbf{Z}_7.$$

III. Естественно, что операции с системами матричных уравнений лишь изредка связаны с нахождением неизвестных величин. Гораздо чаще целью является, например, установление некоторого соотношения между известными величинами, удовлетворяющего некоторому критерию и обеспечивающему требуемое поведение системы. Операции с системами матричных уравнений могут быть направлены на поиск нового уравнения, содержащего, скажем, меньше переменных или охватывающего более широкий круг систем и т. п. Возможные операции над матричными уравнениями не менее разнообразны, чем операции над обычными уравнениями. Фактически, привычка работать с матричными уравнениями обеспечивает достижение более важных целей, чем работа с обычными уравнениями, так как организация систем величин в n -матрицы позволяет вводить новые дополнительные понятия, само существование которых невозможно без этой организации.

Глава 3

ПОСТУЛАТ ВТОРОГО ОБОБЩЕНИЯ

1. СОЗИДАНИЕ НОВЫХ МАТЕМАТИЧЕСКИХ ОБЪЕКТОВ

I. В предыдущей главе был введен постулат первого обобщения, который гласит, что если множество обыкновенных уравнений представить как одно матричное уравнение, то оно имеет тот же вид для любого числа степеней свободы, что и простейшее уравнение с одной степенью свободы. (В случае нескольких матричных уравнений они имеют тот же вид, что и соответствующее число обычных уравнений, которые представляют простейшую аналогичную или «подобную» систему.) Этот постулат существенно экономит *умственную* и *техническую* работу как при установлении исходных уравнений, так и при действиях над ними.

Однако коль скоро система исходных уравнений установлена, но не случайным, а систематическим образом с помощью n -матриц, то полученное уравнение немедленно демонстрирует существование трех новых взаимосвязанных понятий, наличие которых маскировалось отсутствием системы в решении инженерных задач. Эти понятия занимают ключевую позицию в современном физическом и математическом анализе. Эти три понятия таковы: преобразование, группа, инвариантность.

Система введения и использования этих понятий образует основу изучения теории, известной под названием «тензорный анализ», или «абсолютное дифференциальное исчисление». Идеи и понятия, излагавшиеся в предыдущих главах, полезны для понимания тензорного анализа, но взятые сами по себе они не являются тензорным анализом.

II. Будет показано, что организация множества величин в одну n -матрицу и представление последней с помощью одной базовой буквы $A_{\alpha\beta\gamma}$ является чем-то несравненно большим, чем стенографическое обозначение и эффективный рабочий прием. *Организация множества величин в n -матрицу и одновременное введение понятий «преобразование», «инвариантность» и «группа» означает творение принципиально новой математической сущности $A_{\alpha\beta\gamma}$, обладающей такими свойствами, которые отсутствуют в образующих ее строительных блоках: в n -матрицах или их компонентах. Созидание посредством «организации» новых сущностей из простого набора n -матриц и наделение этих новых*

сущностей новыми свойствами и составляет основную цель тензорного анализа.

Это созидание имеет тот же характер, что и рождение молекулы из отдельных атомов, наделяющее молекулу *за счет организации* такими новыми характеристиками и такими новыми свойствами, которые отсутствовали у атомов до их соединения в молекулу; это созидание имеет тот же характер, что и организация сообщества людей в государство, имеющее такие свойства, которыми не обладали входящие в него отдельные личности. Созидание этих новых математических сущностей и наделение их новыми свойствами эквивалентно открытию в описываемых физических (или геометрических) явлениях новых физических (или геометрических) сущностей, подчиняющихся новым физическим законам.

III. *Следует особенно подчеркнуть, что n -матрицы сами по себе не являются новой математической сущностью.* Таким образом, факт представления токов в системе одним символом i , напряжений — символом e и импедансов — символом z не является созиданием новых сущностей, так же как способ представления тока в виде точки в n -мерном пространстве. *Сама n -матрица — просто стенографическая запись и эффективный рабочий прием,* не обладает еще ни одним свойством, которого бы не имели ее компоненты. И *n -матрицы и их компоненты* имеют одни и те же *правила действий* над ними: их можно суммировать, умножать, дифференцировать и т. п. Использование n -матриц можно сравнить с использованием экскаватора там, где работало много рабочих с ломами и лопатами. Один экскаватор делает ту же самую работу, но более быстро и организованно (с меньшими затратами ручного труда), которую делало много рабочих, используя лом и лопату.

Для того чтобы наделить n -матрицы новыми свойствами, которыми они не обладали, и тем самым создать новую математическую сущность, *абсолютно необходимо ввести новое содержание в матричное уравнение, которым не обладают обычные уравнения.* Это новое содержание вводится с помощью трех взаимосвязанных понятий: преобразование, инвариантность и группа.

IV. *Следует подчеркнуть, что возможно введение новых понятий и нового содержания и без обязательного использования n -матриц.* В самом деле, ни в одном учебнике и ни в одной публикации по тензорному анализу не используется понятие n -матрицы для начального ознакомления с тензорной методологией. В учебниках просто используют выражение вроде «множество из 2^3 величин», которые записывают в виде восьми величин в ряд без расположения их в виде куба с двумя строками, столбцами и слоями. Конечно, для правильного выполнения операций нужно уделять особое внимание фиксированным индексам.

Однако практически накопленный опыт в решении большого числа инженерных задач с использованием нового подхода дока-

зал преимущество систематического применения строк, квадратов или кубов в конкретных вычислениях и именно поэтому они используются в настоящей книге. Их использование имеет косвенное отношение к тензорному анализу; они *содействуют* пониманию и применению тензорной методологии.

2. ПОСТУЛАТ ВТОРОГО ОБОБЩЕНИЯ

1. Когда ток i протекает в одной неподвижной катушке (или контуре), то закон Ома дает следующее уравнение напряжения:

$$e = zi. \quad (3.1)$$

Количество связанных с этим уравнением физических понятий равно трем, а именно: e , z , i .

Если *любое* число неподвижных катушек с различными взаимными импедансами между ними соединены в сеть с n контурами, то постулат первого обобщения утверждает, что уравнение напряжения для множества катушек имеет тот же вид, что и для *одной катушки*, отличаясь только тем, что каждая величина e , z и i заменяется n -матрицей соответствующей размерности e , z и i , что дает окончательное уравнение напряжения для всей системы с n степенями свободы

$$e = zi; \quad e_{\alpha} = z_{\alpha\beta} i^{\beta}. \quad (3.2)$$

Предположим теперь, что электрическое соединение катушек нарушено, а сами катушки соединены в новую контурную сеть другим способом, что, однако, не может изменить их собственных и взаимных импедансов. Возникает вопрос: какой вид будет иметь уравнение напряжения для системы с новым способом соединения в терминах n -матриц?

Фундаментальное предположение тензорного анализа состоит в том, что:

1) *новая система описывается тем же числом n -матриц и того же типа, что и старая система* (а именно, e' , z' и i'), *но отличается от нее численным значением компонент n -матриц*; 2) *уравнение новой системы, записанное в n -матрицах, имеет тот же вид, что и уравнение старой системы*:

$$e' = z' i'; \quad e_{\alpha'} = z_{\alpha'\beta'} i'^{\beta'}. \quad (3.3)$$

3) *n -матрицы новой системы могут быть найдены из n -матриц старой системы с помощью рутинного преобразования*. Эти положения (или их эквиваленты) мы будем называть «*постулатом второго обобщения*».

Таким образом, переход от одного способа соединения к другому не требует введения новых n -матриц и изменения расположения n -матриц в уравнении. *Отличие состоит только в том, что n -матрицы e' и z' имеют компоненты, отличающиеся от компо-*

нент матриц прежнего уравнения, и переменная i теперь заменяется новой переменной i' .

Операцию перехода от одного способа соединения к другому назовем «преобразованием» или (используя словосочетание, которое часто употребляется, но звучит непривычно в описанном нами случае) «преобразованием системы координат». Это можно также назвать «заменой переменных», поскольку множество переменных i заменяется другим множеством переменных i' .

Если теперь еще раз изменить способ соединения катушек друг с другом, т. е. произвести еще одно преобразование, то уравнение новой системы, записанное в n -матрицах, останется неизменным: $e'' = z'' i''$; $e_{\alpha\beta}'' = z_{\alpha\beta}'' i^{\beta''}$, где e'' и z'' вновь имеют компоненты, отличающиеся от компонент e' и z' , а i'' представляет собой новое множество переменных (использование верхнего индекса в $i^{\beta''}$ будет объяснено ниже).

II. В качестве другого примера использования постулата второго обобщения возьмем уравнение напряжения для *одной движущейся катушки* $e = Ri + \frac{d\varphi}{dt} + \psi v$, где Ri — падение напряжения на катушке; $d\varphi/dt$ — напряжение, индуцированное в катушке в результате изменения магнитного потока φ (в предположении, что катушка неподвижна), а ψv — напряжение, генерируемое в катушке в результате ее движения в магнитном потоке плотностью ψ с мгновенной скоростью v (в предположении, что поток не изменяется во времени). В этом обычном уравнении имеется семь понятий, а именно: $t, v, e, i, \varphi, \psi, R$.

Теперь вместо одной катушки возьмем *несколько катушек* с взаимными индуктивностями между ними, движущихся с мгновенной скоростью v . Пусть это будут, например, катушки генератора переменного тока (альтернатора). Постулат первого обобщения утверждает, что уравнение, описывающее это движение, содержит семь n -матриц ($t, v, e, i, \varphi, \psi, R$) и имеет тот же вид, что и уравнение для одной катушки, а именно:

$$e = Ri + \frac{d\varphi}{dt} + \psi v; \quad e_{\alpha} = R_{\alpha\beta} i^{\beta} + \frac{d\varphi'}{dt} + \psi_{\alpha} v.$$

Если теперь эти же самые катушки будут соединены любым другим способом с помощью щеток, контактных колец или другим способом, образуя новую машину, например многофазный коллекторный двигатель, то *постулат второго обобщения утверждает, что уравнение, описывающее новую машину, содержит те же семь n -матриц и они находятся в том же взаимоотношении:*

$$e' = R' i' + \frac{d\varphi'}{dt} + \psi' v'; \quad e_{\alpha'} = R_{\alpha'\beta'} i^{\beta'} + \frac{d\varphi'}{dt} + \psi_{\alpha'} v'.$$

Новые n -матрицы $e', i', R', \varphi', \psi'$ имеют другие компоненты, однако вид уравнения не меняется.

Для третьего способа соединения форма уравнения останется без изменения, за исключением того, что одинарные штрихи заменяются двойными. *Существует огромное количество различных способов взаимосоединения (преобразований) катушек, оставляющих форму уравнений без изменения.*

III. В качестве третьего примера возьмем дифференциальное уравнение распространения электромагнитной волны вдоль *одиночного проводника* $\partial^2 e / \partial x^2 = Z Y e$, содержащее четыре физических понятия: x , e , Z , Y . Если волна распространяется вдоль *нескольких параллельных* проводников, то постулат первого обобщения утверждает, что уравнение, описывающее это движение, содержит четыре n -матрицы x , e , Z , Y и имеет тот же вид, что и для одного проводника:

$$\frac{\partial^2 e}{\partial x^2} = Z Y e; \quad \frac{\partial^2 e_{\alpha}}{\partial x^2} = Z_{\alpha\beta} Y_{\beta\gamma} e_{\gamma}.$$

Если проводники соединяются последовательно или параллельно, то в соответствии с постулатом второго обобщения дифференциальные уравнения распространения волны сохраняют неизменный вид:

$$\frac{\partial^2 e'}{\partial x^2} = Z' Y' e'; \quad \frac{\partial^2 e_{\alpha'}}{\partial x^2} = Z_{\alpha'\beta'} Y_{\beta'\gamma'} e_{\gamma'}.$$

Число подобных примеров неограниченно.

IV. Во всех описанных преобразованиях неявно предполагалось, что при переходе от одной системы к другой *ничего не изменилось, за исключением способа соединения* (осуществляемого бесконечно короткими проводниками, не имеющими ни сопротивления, ни индуктивности и т. д.). Это означает, что *в процессе преобразования не вводятся новые физические явления*, такие как движение, которое отсутствовало до нового соединения, или электростатическое поле, которое ранее не существовало.

Именно благодаря тому, что количество физических понятий и взаимоотношения между ними неизменны, оказывается возможным сохранить неизменным количество математических символов и взаимные отношения между ними. Одной из целей тензорного анализа в анализе любой физической проблемы является введение лишь такого количества символов, которое соответствует количеству физических сущностей, участвующих в естественном явлении, и такого количества связей (отношений) между ними, которое имеется в наблюдаемом явлении. Таким образом, *в уравнениях тензорного анализа каждый математический символ (базовая буква) соответствует физической или геометрической сущности; каждая операция над символами соответствует физическому или геометрическому отношению, имеющему место между сущностями.*

3. ПОНЯТИЕ «ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ ОБЪЕКТ»

I. Постулат второго обобщения утверждает, что одному и тому же символу A соответствует не одна n -матрица, а очень большое количество n -матриц, каждая из которых имеет одну и ту же размерность, одно и то же число осей, но отличаются значениями компонент.

Теперь каждый символ или базовая буква означает бесконечное число n -матриц, которые образуют новую математическую сущность, называемую «геометрический объект». Каждая частная n -матрица будет записываться со скользящими индексами (снабженными одним-двумя штрихами), закрепленными за базовой буквой. Это означает, что с каждым геометрическим объектом в каждой частной системе координат связана n -матрица, которая дает значение компонент одного и того же геометрического объекта в этой частной системе координат. Если система координат изменяется, то изменяются компоненты геометрического объекта (идентифицируемые штрихами индексов), но сам геометрический объект остается неизменным (что представляется неизменной базовой буквой).

В физических явлениях «геометрический объект» соответствует физическому объекту, такому как вектор скорости движущегося тела или напряжения в деформированном теле. Выражение «геометрический объект», используемое для $A_{\alpha\beta}$, с таким же успехом можно заменить на «физический объект» или на «математический объект». В литературе по тензорному анализу сохраняется геометрическая терминология, поскольку понятия тензорного анализа возникли на геометрической почве при решении геометрических проблем.

Следовательно, компоненты, скажем, вектора скорости v^α некоторой точки, измеренные в одной частной системе координат, дадут значения v^α , измеренные в другой системе — $v^{\alpha'}$, а в третьей — $v^{\alpha''}$ и т. д. Хотя все эти компоненты могут быть различны, но сама скорость точки остается неизменной.

Представление «геометрического объекта» в частной системе координат состоит не только из значений компонент, расположенных в строку, квадрат или куб, но и из фиксированных индексов, закрепленных по сторонам n -матрицы. Это означает, что, когда даются компоненты геометрического объекта, абсолютно необходимо указать систему координат, в которой эти компоненты имеют данные численные значения. Если фиксированные индексы, указывающие оси этой частной системы, изображаемые рядом с компонентами, опущены, то мы имеем дело с « n -матрицей», имеющей заданные компоненты, а не с «геометрическим объектом». Например выражение «матрица» относится к множеству величин, расположенных в виде прямоугольника, а не к фиксированным индексам, расположенным вдоль сторон прямоугольника.

II. С введением новой сущности — геометрического объекта — вместо n -матрицы необходимо ввести новую терминологию и новые обозначения. Причина каждого такого изменения уславливается по мере непрерывного развития новых понятий, в частности: 1) при использовании индексного обозначения будем отличать n -матрицу от геометрического объекта путем заключения индексов n -матрицы в скобки: $z_{(\alpha)(\beta)}$. Таким образом, $z_{\alpha\beta}$ — геометрический объект, представляемый n -матрицами в бесконечном числе систем координат; $z_{(\alpha)(\beta)}$ — n -матрица, имеющая компоненты только в данной системе координат. При использовании прямых обозначений такого отличия нет, поскольку в простых задачах действия с этими понятиями одинаковы;

2) уравнение, в котором каждый символ представляет геометрический объект, а не просто n -матрицу, будем называть инвариантным, а не матричным уравнением.

Это означает, что инвариантное уравнение $e_{\alpha} = z_{\alpha\beta} i^{\beta}$ справедливо для бесконечного числа физических систем, тогда как матричное уравнение $e_{(\alpha)} = z_{(\alpha)(\beta)} i^{(\beta)}$ справедливо только для одной частной физической системы, имеющей n -осей;

3) n -мерный геометрический объект будем называть «геометрическим объектом валентности n »;

4) выражение «вектор тока» мы используем для i , «вектор напряжения» — для e , «тензор импеданса» — для z и «тензор адмиттанса» — для y ;

5) вектор тока i^{α} и тензор адмиттанса $y^{\alpha\beta}$ будут иметь верхние, а не нижние индексы.

4. МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ГЕОМЕТРИЧЕСКОГО ОБЪЕКТА

I. Строго говоря, для того чтобы математически представить один геометрический (или физический) объект, необходимо показать все его компоненты во всех возможных системах координат. Это означает, что полное математическое описание геометрического объекта возможно лишь очень большим, обычно бесконечным числом n -матриц.

На практике это описание осуществляется следующим образом:

1) из бесконечного множества n -матриц выбирают только одну и полностью ее задают, показывая значение всех ее компонент;

2) кроме того, задают частную систему координат, в которой определено значение всех компонентов этой n -матрицы;

3) определяют все возможные системы координат, в которых геометрический объект может представляться n -матрицей;

4) указывают формальную процедуру или «формулу», посредством которой можно рутинными преобразованиями найти все

компоненты n -матрицы данного геометрического объекта в любой из бесчисленного множества координатных систем.

Возможность найти значение компонент n -матрицы, представляющей геометрический объект в любой системе координат, если в этом возникает потребность, эквивалентна полному математическому заданию самого геометрического объекта.

II. Подводя итоги сказанному, укажем, что геометрический объект определен, если:

1) в одной из частных систем координат дана частная n -матрица;

2) заданы *все оси* этой частной системы координат;

3) определены все возможные *системы координат*, в которых может быть задан геометрический объект;

4) дана *формула* для нахождения различных n -матриц в различных системах координат, представляющих геометрический объект.

5. ТЕНЗОР ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

I. Когда задана n -матрица, представляющая компоненты геометрического объекта в некоторой системе координат, то конкретные оси показываются фиксированными индексами у каждой строки, столбца или слоя и т. п. n -матрицы.

Каждая другая система координат определяется с помощью 2-матрицы $S = S_{\alpha}^{\alpha'}$, называемой «матрицей преобразования» (ее подробный разбор дан в гл. 4), которая и показывает, чем новая система координат отличается от исходной системы координат. Поскольку каждая новая система имеет свою собственную матрицу преобразования $S_{\alpha}^{\alpha'}$, связывающую ее с исходной системой координат, то, следовательно, с каждым геометрическим объектом ассоциируется целая группа матриц преобразования. *Полная совокупность всех матриц преобразования образует одну сущность — «тензор преобразования» $S_{\alpha}^{\alpha'}$* ¹⁾.

Формулу, с помощью которой определяют компоненты геометрического объекта во всех других системах координат, назовем «формулой преобразования», или «уравнением преобразования», или «законом преобразования». Каждый геометрический объект $A_{\alpha\beta\gamma}$ имеет свой собственный закон преобразования, который включает только $A_{\alpha\beta\gamma}$ и тензор преобразования $S_{\alpha}^{\alpha'}$.

¹⁾ Крон имеет в виду, что это справедливо для измеримых величин, представляющих реальные физические явления. Рассматриваемые величины, как правило, являются тензорами, и группы их матриц преобразования могут рассматриваться как представляющие некоторую сущность — тензор преобразования. Но не всякий геометрический объект является тензором и не всякий тип преобразования носит тензорный характер. Поэтому в общем случае можно говорить только, что совокупность матриц преобразования представляет *геометрический объект преобразования*, а не тензор преобразования (см. гл. 7, § 11, III). (Прим пер).

Таким образом, понятие «геометрический объект» включает в себя следующие новые понятия: n -матрицу (или множество k^n величин); группу матриц преобразования; закон преобразования.

II. В терминах этих новых понятий постулат второго обобщения может быть сформулирован так:

Если известно матричное уравнение физического явления с любым числом степеней свободы, имеющего место в частной системе (или системе отсчета), то это же уравнение справедливо для бесконечного разнообразия подобных систем (или систем отсчета), в которых имеет место то же самое физическое явление, если каждую n -матрицу заменить геометрическим объектом. Компоненты каждого геометрического объекта в любой новой системе координат находят по компонентам в исходной системе координат формальной процедурой посредством «формулы преобразования» с помощью «тензора преобразования» S_{α}^{β} .

III. Следовательно, согласно постулату второго обобщения анализ любой новой системы состоит из следующих шагов (если инвариантное уравнение для одной системы координат уже выведено): 1) найти матрицу преобразования S , показывающую отличие новой системы координат от старой; 2) найти новые компоненты геометрических объектов в новой системе координат посредством формулы преобразования, соответствующей каждому геометрическому объекту.

Если новая система координат или система отсчета существенно отличается от старой системы координат (например, тем, что соединения, не остаются постоянными, а изменяются во времени или система координат не остается прямолинейной), то уравнение в новой системе координат имеет другой вид. Далее будут введены постулаты последующего обобщения, которые позволят учесть и такие случаи нарушения подобия старой и новой системы координат или систем отсчета.

IV. Чтобы сократить описания и изъять излишние повторения, что множество k^n величин (n -матрица) представляет «компоненты геометрического объекта A в данной системе координат», будем говорить, что данная n -матрица представляет «геометрический объект A ». (Если принимается, что фиксированные индексы вдоль сторон n -матрицы представляют единичные векторы осей, то n -матрица плюс единичные векторы представляют геометрический объект.)

6. НАЗНАЧЕНИЕ ПОСТУЛАТОВ ОБОБЩЕНИЯ

I. Подведем итоги сказанному в предыдущих разделах.

1. Постулат первого обобщения заменяет *обычное* уравнение, справедливое для одной (или малого числа) степени свободы, на *матричное* уравнение, справедливое для n степеней свободы;

таким образом, он обобщает явление, имеющее место для одного (или малого числа) измерения, на любое число измерений.

2. Постулат второго обобщения заменяет *матричное* уравнение, справедливое для одной частной системы координат, на *инвариантное* уравнение, справедливое для бесконечного множества координатных систем *того же типа*.

3. Последующие постулаты обобщения будут заменять *инвариантное* уравнение, справедливое для координатных систем того же типа, на *тензорное* уравнение, справедливое для нескольких координатных систем *других типов* (скажем, для прямолинейных и криволинейных осей или для неподвижных и движущихся осей и т. п.).

II. Эти постулаты мы ввели для того, чтобы свести умственную работу к нескольким рутинным стандартизованным этапам, что необходимо для точного формулирования инженерных задач. Вообще говоря, анализ инженерных задач на языке обычных уравнений требует существенно новых процедур и новой физической картины для каждой частной системы, причем с весьма малым использованием опыта анализа других систем. Например, каждая вращающаяся электрическая машина имеет свою теорию (достаточно просмотреть любой учебник) и инженер, специализирующийся на анализе асинхронных двигателей, мало что знает о явнополюсном синхронном генераторе (альтернаторе) и наоборот. Цель данной книги — показать, что разные типы вращающихся машин, неподвижных сетей или систем передачи фундаментально подобны; *их уравнения имеют различный вид только потому, что в каждом случае выбраны различные системы координат. Следовательно, осваивая тензорный анализ некоторой частной машины или системы, инженер в то же время осваивает анализ бесконечного множества подобных ей машин и систем.*

III. В книге показано, что неподвижные сети, вращающиеся машины, линии передачи и тому подобное не представляют собой изолированные типы структур, теория и уравнения которых (даже на языке тензорного анализа) независимы друг от друга. *Все технические структуры можно рассматривать как отдельные звенья различной размерности одной общей цепи, которая следует единственному закону, принимающему, однако, различные (математические) формы: или форму уравнений движения Лагранжа, или форму уравнений электромагнитного поля Максвелла.*

Попытка сохранить это единство всех уравнений поведения технических и нетехнических систем будет подчеркиваться на протяжении всего изложения. Сети — главный объект настоящей книги, рассматриваются как простейшие возможные звенья в цепи многомерных звеньев, состоящие лишь из набора нульмерных

¹⁾ Ср. с полиэдральными сетями, описанными во «Введении», 1965 г. (Прим. пер.).

(узлы) и одномерных (катушки) звеньев. (Вращающиеся машины представляют собой двумерные звенья и т. д.)¹⁾

IV. Следует подчеркнуть, что нахождение стандартных процедур получения уравнений в новой системе координат по уравнениям, известным в исходной системе координат, не является единственной целью тензорного анализа. Гораздо более важной задачей тензорного анализа является получение уравнения в такой форме, в которой *каждый символ соответствует реальной физической сущности, а не является плодом человеческого воображения.*

Другая важная задача тензорного анализа — составление уравнений в такой форме или преобразование их в такую систему координат, в которых они решаются проще всего с помощью точных или приближенных методов. Другими словами, систему уравнений нужно преобразовать в новую систему координат или придать им другую форму не потому, что она соответствует новой физической системе, а потому, что в этих координатах алгебраические, дифференциальные или интегральные уравнения лучше визуализируются или решаются.

V. Следует подчеркнуть, что *постулат второго обобщения дает матричному уравнению новое содержание, которого у множества обычных уравнений нет. Иными словами, матричное уравнение обладает дополнительным свойством оставаться справедливым в большом числе систем и систем координат, а не только действует в одной частной системе или системе координат. С другой стороны, система обычных уравнений справедлива только в одной частной системе или системе координат, но не обладает этим новым свойством.*

Например, обычные уравнения движения, написанные для последовательного многофазного коллекторного двигателя, никаким напряжением воображения нельзя наделить свойствами одновременно представлять уравнения движения, скажем, явнополюсного синхронного двигателя с демпферными обмотками. Однако если их уравнения движения записаны сначала в n -матрицах, а затем с помощью тензора преобразования C получено изменение соединений одной машины в соединения другой машины (что требует замены n -матриц на геометрический объект), то те же самые уравнения являются уравнениями движения обеих машин и обычные уравнения каждой из машин могут быть получены *рутинным* вычислением, без помощи какого-либо физического анализа или других вспомогательных средств.

Ключом к созиданию этих новых сущностей (т. е. к наделению n -матриц новыми свойствами) является понятие «тензор преобразования» C , изучение которого является главным назначением книги. В процессе развития изложения геометрический объект будет наделяться дополнительными свойствами, а инвариантные уравнения будут наполняться новым «содержанием».

7. СЕТИ

Техническая структура простейшего типа состоит из *одномерных членов* (кусков провода, тяг, трубок и т. п.), соединенных в определенных точках; силы (напряжения, весовые нагрузки и т. п.) накладываются вдоль этих членов на узлы. *Систематическое* изучение таких структур, называемых «сетями», является целью настоящей книги.

Мы рассмотрим только электромагнитные сети. Предполагается, что *накладываемые электромагнитные величины мгновенно распространяются через всю сеть*; иными словами, рассматриваемые сети имеют *сосредоточенные*, а не распределенные параметры.

Хотя исследование сетей предпринято на языке электротехники, следует подчеркнуть, что используемая методология имеет отношение не только к методам электротехники. При изменении соответствующих выражений (например, «сила» вместо «напряжения» и т. д.) эта методология может также применяться при исследовании *механических* сетей. Метод рассуждения в основном заимствован из геометрии: из «топологии» и из дифференциальной геометрии. Математический аппарат, применяемый в рассмотрении технических задач, известен как «тензорная алгебра» и «тензорный анализ». Изучение сетей предпринято таким образом, чтобы сформировать логический фундамент для познания более сложных технических структур, составные части которых имеют *более одного измерения*, соединение частей *не сохраняется*, распространение воздействий *не мгновенное* и т. п.

8. СТРОИТЕЛЬНЫЕ БЛОКИ СЕТЕЙ

I. Пусть несколько катушек с сосредоточенными параметрами и электромагнитным взаимодействием между некоторыми из них соединены произвольно и имеют вид сети (рис. 3.1).

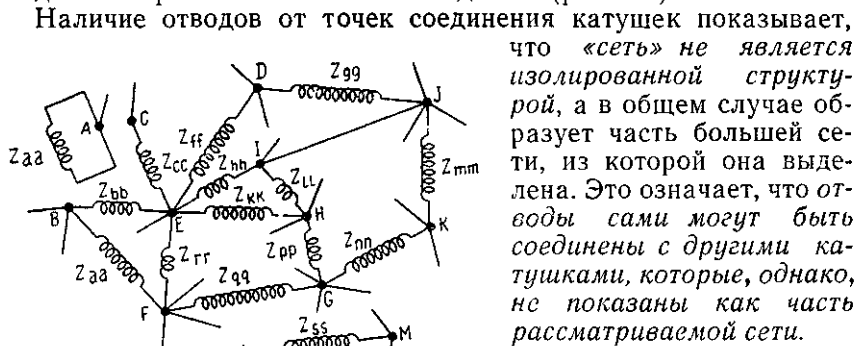


Рис. 3.1. «Сеть», выделенная из большой системы.

Наличие отводов от точек соединения катушек показывает, что «сеть» не является *изолированной структурой*, а в общем случае образует часть большей сети, из которой она выделена. Это означает, что *отводы сами могут быть соединены с другими катушками, которые, однако, не показаны как часть рассматриваемой сети*.

Можно различать следующие компоненты сети:

1) «катушки» Z_{aa} , Z_{bb} ,

которые, соединяясь между собой, образуют сеть. На рис. 3.1 показано 15 катушек;

2) два конца катушки, которыми она соединяется с другими катушками, называются «узлами». Когда n катушек соединяются в сеть, $2n$ узлов всегда соединяются, сокращая, следовательно, их количество. Когда два или более узлов соединены с помощью безымпедансного проводника так, как соединены узлы I и J , то считается, что они образуют только один узел. На рис. 3.1 показано 12 узлов (узлы также называют «вершинами», «полюсами» или «точками ветвления»).

Катушки и узлы являются строительными блоками сети с сосредоточенными параметрами. С катушками связаны некоторые величины (конструкционные константы) Z_{aa} , Y_{aa} и другие, тогда как узлы рассматриваются как проводники, не имеющие ни сопротивлений, ни индуктивностей.

В книге ограничена физическая природа рассматриваемых катушек: их параметры не зависят от действия налагаемых электромагнитных величин. Подобное ограничение наложено и на форму математических выражений Z_{aa} , Y_{aa} : они могут быть действительными или комплексными числами R , $R-jX$ или функциями времени $R \cos \omega t$, или линейными операторами Ld/dt , или \int и т. д., но не функциями электромагнитных величин.

Наложено ограничение и на физическую природу узлов между катушками, оно состоит в том, что *взаимосоединения не изменяются мгновенно во времени*, т. е. узлы фиксированы, по крайней мере для момента рассмотрения.

Соединения предполагаются мгновенно неподвижными, но проводники, образующие катушки, могут иметь мгновенную скорость, как во вращающейся машине с неподвижными осями координат.

II. В заданной сети важно определить количество независимых сетей-компонент или «подсетей», которые не имеют физической связи друг с другом. Однако магнитные и емкостные связи между подсетями могут существовать. На рис. 3.1 число подсетей равно трем. Число катушек обозначим a_1 , число узлов — a_0 , а число независимых подсетей — R_0 .

9. АНАЛИТИЧЕСКИЕ ЕДИНИЦЫ СЕТИ

Двух физических единиц сети (катушек и узлов) еще недостаточно для аналитического изучения сетей. Для анализа поведения сети нужны некоторые комбинации этих единиц. Такими новыми единицами являются:

1) замкнутые цепи, прослеживаемые в сети и называемые «контурами» (например, BEF или $BEHGF$). Для нахождения минимального числа контуров сети каждая катушка должна войти по меньшей мере в один контур. Число контуров на рис. 3.1 равно шести;

2) два любых узла, расположенных в одной и той же независимой подсети, называются «узловой парой» (например, $B-E$, $F-H$, $B-J$, $L-M$ и т. д.). При нахождении минимального числа узловых пар каждый узел должен быть включен по меньшей мере в одну узловую пару. Число узловых пар на рис. 3.1 равно девяти.

Термины «контур» и «узловая пара» включают понятие «направление», в котором они просматриваются. Это означает, что контур BEF имеет противоположное направление относительно контура FEB ; аналогично узловая пара $E-K$ отрицательно направлена по отношению к узловой паре $K-E$. Следовательно, с каждым контуром и с каждой узловой парой связано понятие «ориентация».

Число контуров сети обозначим через μ , а число узловых пар — через ρ_1 .

Пять введенных понятий, а именно α_0 , α_1 , R_0 , μ , ρ_1 , не являются независимыми друг от друга. Нужно помнить два соотношения¹⁾:

1) число узловых пар сети равно числу узлов минус число подсетей

$$\rho_1 = \alpha_0 - R_0; \quad (3.4)$$

2) число катушек, образующих сеть, равно сумме числа контуров и числа узловых пар

$$\alpha_1 = \mu + \rho_1. \quad (3.5)$$

В сети на рис. 3.1

$$\rho_1 = \alpha_0 - R_0, \quad \text{что дает } 9 = 12 - 3;$$

$$\alpha_1 = \mu + \rho_1, \quad \text{что дает } 15 = 6 + 9.$$

До того, как начинается анализ любой сети, необходимо установить число контуров или число узловых пар или и то, и другое вместе в зависимости от выбора переменных. В сложных сетях проще всего найти сначала число узловых пар (число узлов минус число подсетей), а затем определить число контуров (число катушек минус число узловых пар).

10. ДРУГАЯ ФИЗИЧЕСКАЯ ИНТЕРПРЕТАЦИЯ

Обнаружено, что часто лучше заменить понятия «контур» и «узловая пара» другой совокупностью понятий, им подобных, обеспечивающих получение того же самого ответа, но представляющих другую физическую картину. Этими подобными понятиями являются:

1. «Ветвь», представляющая такую часть сети, в которой протекает тот же самый ток. Ветвь может содержать одну катушку, несколько последовательных катушек или проводник, соединя-

¹⁾ Доказательство этих соотношений см.: Veblen, «Analysis Situs». Am. Math. Soc. 1931, p. 15, 18. (Прим. авт.).

ющий два узла и заменяющий их на один узел. Число *ветвей* может заменять соответствующее число контуров на протяжении всего анализа.

2. «Открытый контур», представляющий *любую* цепь через катушки, начинающуюся в одном узле узловой пары и заканчивающуюся в другом узле. Цепь открытого контура включает также отводы от узловой пары. *Открытый контур в анализе может заменять соответствующую узловую пару.* На рис. 3.1 открытый контур для узловой пары $E-F$ состоит из катушек Z_{kk} , Z_{pp} , Z_{qq} или из катушек Z_{ff} , Z_{gg} , Z_{mm} , Z_{nn} , Z_{qq} , или из одной катушки Z_{rr} и т. п.

Подводя итоги, отметим, что теперь введены следующие понятия для сетей: собственно сеть и ее подсети; катушки и узлы; контуры и узловые пары; ветви и открытые контуры.

11. НАКЛАДЫВАЕМЫЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ

1. Возникает вопрос, для чего необходимо вводить понятия «контур» и «узловая пара»?

Действительно, пока сеть электрически не возбуждена, то в этих понятиях нет необходимости. Они появляются тогда и только тогда, когда на сеть *накладываются* электромагнитные величины, такие как напряжения или токи (или те и другие вместе). Предполагается, что накладываются величины бывают двух типов:

1) «воздействующие» величины (impressed)¹⁾, которые возникают вне сети;

2) величины «отклика», представляющие собой реакцию сети на воздействующие величины.

Как воздействующие величины, так и величины отклика могут быть напряжениями или токами или и теми и другими вместе.

II. Предположим сначала, что в сети с n катушками и k контурами имеется только одно напряжение e_a , приложенное последовательно с катушкой (рис. 3.2). В каждой из n катушек появятся в качестве величин отклика различные токи i^a , i^b ...

Эти n токов зависят друг от друга. Достаточно определить только k из них путем установления и решения k уравнений с k неизвестными; таким образом, *достаточно определить столько*

¹⁾ В тексте термин impressed переведен как *приложенный* или как *воздействующий*. Эта разница в переводе вызвана лингвистическими соображениями и не носит принципиального характера. Impressed quantities переведено как «воздействующие величины», реакцией сети на которые являются величины отклика (response). Эти отношения характерны для любых типов сетей. Однако для электромагнитных сетей, на языке которых ведется изложение, impressed voltage принято переводить как *приложенное напряжение*. В качестве двойственного к последнему Крон вводит кроме того понятие приложенный ток в узловых (гл. 14) и ортогональных (гл. 16) сетях, которое иногда переведено и как *воздействующий ток.* (Прим. пер.).

токов отклика i , сколько контуров имеет сеть (см. рис. 3.2). Все остальные токи легко определяются через указанные выше без решения каких-либо уравнений.

III. Пусть теперь вместо напряжения ток I^a приложен к катушке той же самой сети (рис. 3.3). (Это означает, что ток I^a поступает через один узел катушки и вытекает через другой ее

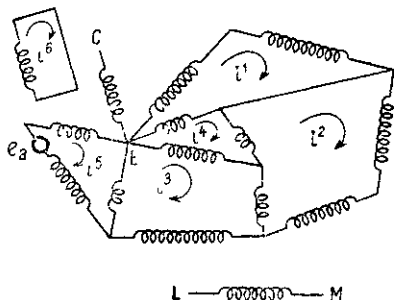


Рис. 3.2. Приложенное напряжение e_a , контурные токи «отклика» i .

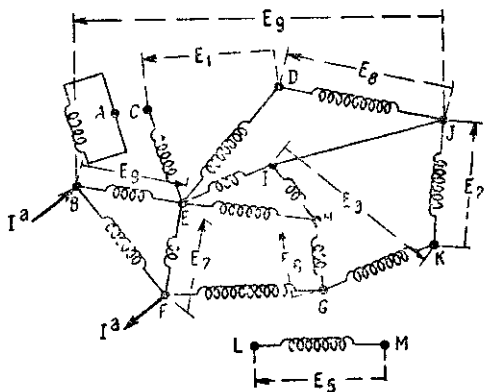


Рис. 3.3. Приложенный узловый ток I^a и разности потенциалов отклика E .

узел.) Откликом сети является возникновение на всех катушках разностей потенциалов E_a, E_b и т. д.

Однако опять эти n разностей потенциалов не зависят один от другого. Достаточно сначала определить только $n-k$ из них путем установления и решения только $n-k$ уравнений относительно $n-k$ неизвестных. Это означает, что достаточно определить столько разностей потенциалов отклика, сколько имеется в сети узловых пар (см. рис. 3.3). Остальные разности потенциалов легко определяются через найденные.

IV. Если вместо одного напряжения e к сети приложено n различных напряжений e , включенных последовательно с n катушками, по-прежнему достаточно найти только k токов отклика i путем установления и решения k уравнений. Не имеет значения, где протекают

эти токи, но они должны быть независимы друг от друга.

Подобным же образом, если вместо одного тока I^a на сеть воздействует n токов I , то достаточно определить только $n-k$ разностей потенциалов отклика E путем составления и решения $n-k$ уравнений. Точно так же совершенно безразлично, где в сети выбраны $n-k$ потенциалов, но они должны быть независимы друг от друга.

Следовательно, когда приложено напряжение e , включенное последовательно с катушками, то для нахождения тока отклика устанавливается ровно столько уравнений, сколько имеется кон-

туров. Аналогично когда к сети приложен ток I , то для нахождения разностей потенциалов отклика устанавливается ровно столько уравнений, сколько имеется узловых пар.

Если к сети приложены и напряжение e , и токи I (рис. 3.4), то (в общем случае) для нахождения величин отклика i и E устанавливается ровно столько уравнений, сколько имеется катушек.

V. Сделаем следующий вывод: для целей анализа предполагается, что 1) воздействующие величины e и I возникают на физических элементах сети, а именно: e — на катушках, I — на ее узловых парах; 2) величины отклика i и E возникают на аналитических элементах сети: i — вдоль контуров, E — на узловых парах.

Поскольку имеется n реально воздействующих величин e и только k токов отклика i , то при выводе k уравнений n приложенных напряжений e заменяются на k напряжений вдоль контуров. Аналогично поскольку имеется n реально приложенных токов I и только $n-k$ напряжений отклика E , то при выводе $n-k$ уравнений n приложенных токов I заменяются на $n-k$ токов на узловых парах.

VI. Воздействующие величины e и I могут рассматриваться как разрыв непрерывности, вводимый в величины отклика, а именно, в потенциалы E вдоль открытых контуров и в токи i по замкнутым контурам.

С термодинамической точки зрения более логично использовать выражение «изымаемые токи», а не «воздействующие токи», изменив соответственно их знаки, т. е. более подходит предположение, что компоненты I представляют токи, текущие во внешние нагрузки. Однако выражение «воздействующий ток» будет использоваться часто для согласования с выражением «приложенное напряжение» без изменения знаков.

12. УСЛОВНОСТИ ТЕРМИНОЛОГИИ

I. В реальных задачах «воздействующие» токи I могут течь во внешнюю нагрузку вне системы (не показанную на схеме сети), тем не менее для аналитических целей мы будем их рассматривать как воздействующие токи. Аналогично разность потен-

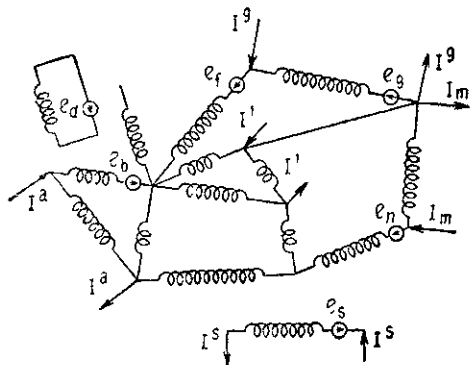


Рис. 3.4. Прикладывание к сети напряжений e и токов I .

циалов «отклика» в действительности может быть приложенным напряжением, но она будет рассматриваться именно как напряжение отклика.

Это значит, что в операциях с уравнениями *воздействующие* величины и величины *отклика* можно сделать взаимозаменяемыми путем изменения знака, но организованная методология требует сохранения этого различия между величинами воздействия и отклика.

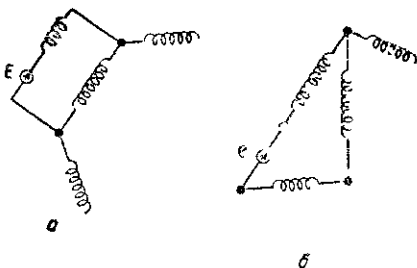


Рис. 3.5.
а — замена E на e , б — замена e на E .

II. Определение того, что должно называться «узел» и «катушка» тоже довольно условно. Например, одна катушка введением узла может быть разделена на две катушки, соединенные последовательно. Разность потенциалов узловой пары можно рассматривать как катушечное напряжение, если предположить последовательно с ним нулевой импеданс (рис. 3.5, а). Напряжение на катушке можно считать разностью потенциалов узловой пары, полагая, что два зажима есть два узла, образующие узловую пару (рис. 3.5, б).

III. Можно также превращать любой узел в ветви с нулевым импедансом и, наоборот, простым вытягиванием точки в линию, как показано на рис. 3.6. Это означает, что количество ветвей, в которых текут токи, можно произвольно изменять, добавляя или исключая безымпедансные ветви.

Две сети, преобразуемые одна в другую *растяжением*, показаны на рис. 3.6, б. Сеть слева имеет семь ветвей, а справа — пять.

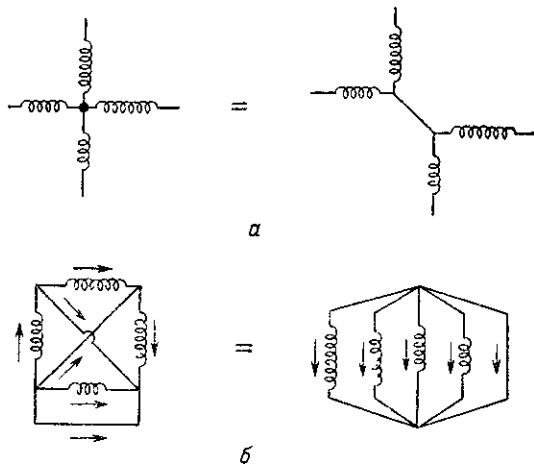


Рис. 3.6.
а — «вытягивание» узла в ветвь, б — «изменение» числа ветвей «растяжением».

13. ДВА ТИПА ПЕРЕМЕННЫХ

При *установлении* уравнения движения любой физической системы на первом этапе вопрос о том, какие величины известны и какие неизвестны, не имеет значения. Важно решить вопрос, какие величины можно считать *постоянными*, а какие — *переменными*.

Только после того, как уравнения движения установлены, возникает вопрос об известных и неизвестных величинах.

При *установлении уравнений движения, представляющих поведение сети, переменными могут считаться два различных множества величин* (которые, однако, не обязательно являются неизвестными), т. е. каждое из множеств величин отклика сети:

1) токи $i(i^n)$, протекающие в (замкнутых) контурах; 2) «разности потенциалов» $E(E_n)$, возникающие на узловых парах.

Максвелл в своей работе «Электричество и магнетизм» разработал оба подхода, но, как правило, используется *только первый метод*. Второй метод применяется только эпизодически, и, по-видимому, только один современный учебник Герцога — Фельдмана последовательно использует его.

Существует несколько причин пренебрежительного отношения ко второму методу:

1. Максвелл получает уравнения относительно «абсолютных потенциалов», возникающих в каждом узле, и таким образом вводит на одну переменную и на одно уравнение больше, чем это фактически необходимо.

2. Максвелл принимает потенциал *одного* из узлов за потенциал отсчета или «потенциал» заземления и вычисляет разности потенциалов, возникающие между этим узлом и остальными узлами (в сетях связи этот узел отсчета называют «опорной точкой»).

3. Метод рассуждения, который используют при выводе этих уравнений, *радикально отличается* от метода, применяемого, когда в качестве переменных принимаются контурные токи. Окончательные уравнения оказываются громоздкими; они не обладают простотой и гибкостью уравнений при контурном подходе и с трудом могут быть использованы на практике.

В *данной книге все перечисленные ограничения устранены* путем введения понятия «узловая пара», которое позволяет выбирать «разности потенциалов» между любыми двумя точками сети в качестве переменных (известных или неизвестных), обеспечивая большую гибкость анализа и удобство приложений, а также полный параллелизм с контурным методом анализа. Будет показано, что понятие «узловая пара» часто более полезно, чем понятие «контур», ибо напряжения и токи на узловой-паре — реальные физические величины, в то время как напряжение и токи в контурах — *гипотетические величины*.

14. ТРИ ТИПА ОПИСАНИЯ ПОВЕДЕНИЯ СЕТИ

I. Существует три способа рассмотрения любой сети:

1) Как совокупность контуров, когда переменными считаются токи i , текущие в контурах. 2) Как совокупность узловых пар, когда переменными считаются разности потенциалов E , возникающие на узловых парах. Следует ли в качестве переменных рассматривать контурные токи или разности потенциалов, обычно зависит от того, чего больше в сети — контуров или узловых пар.

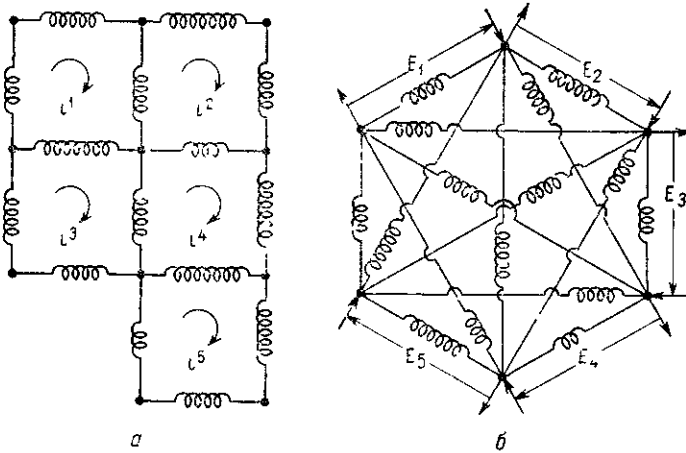


Рис. 3.7. Сеть из 15 катушек:
a — типичная контурная сеть; *b* — типичная узловая сеть.

Типичная контурная сеть из 15 катушек (рис. 3.7, *a*) состоит из 5 контуров и 10 узловых пар ($15=5+10$).

3) В наиболее общем случае для упрощения анализа сети ее нужно рассматривать как совокупность контуров и узловых пар, а не как совокупность или контуров, или узловых пар. В этом случае переменными являются и токи i , текущие в контурах, и разности потенциалов E , возникающие на узловых парах. Максимальное число переменных, которое нужно иметь в виду, равно сумме числа контуров и числа узловых пар, т. е. числу катушек.

Из-за ортогональных свойств, предполагаемых у контуров относительно узловых пар такой сети, последнюю будем называть «ортогональной сетью».

Одна и та же сеть может рассматриваться как контурная, или узловая, или ортогональная, в зависимости от выбора приложенных напряжений или токов (рис. 3.8).

II. Для различения трех типов сетей применяются следующие скользящие индексы:

- 1) в контурных сетях m, k, n, \dots ;
 - 2) в узловых сетях u, v, w, \dots ;
 - 3) в ортогональных сетях из контуров и узловых пар $\alpha, \beta, \gamma, \dots$
- Все три типа сетей анализируются и решаются аналогичными способами.

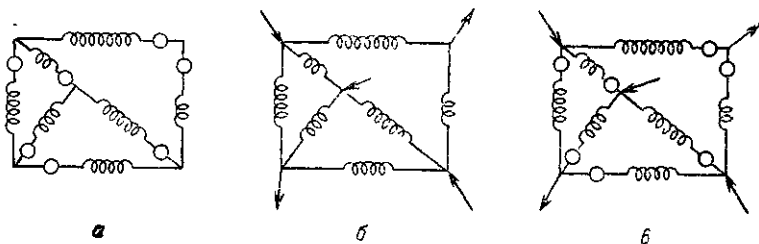


Рис. 3.8. Типы воздействующих величин:
 а — контурная сеть; б — узловая сеть; в — ортогональная сеть.

15. РЕЗЮМЕ ПО «УРАВНЕНИЯМ ДВИЖЕНИЯ»

I. Каждый тип сети имеет специфическое «уравнение движения», описывающее поведение сети.

1. При анализе сети как совокупности контуров сначала устанавливается уравнение напряжения

$$\mathbf{e} = \mathbf{z}\mathbf{i}; \quad e_m = z_{mn}i^n, \quad (3.6)$$

где переменными являются токи \mathbf{i} . Число обычных уравнений равно числу контуров.

2. При анализе сети как совокупности узловых пар сначала устанавливается уравнение тока

$$\mathbf{I} = \mathbf{Y}\mathbf{E}; \quad I^u = Y^{uv}E_v, \quad (3.7)$$

где переменными являются \mathbf{E} . Число обычных уравнений равно числу узловых пар.

3. При анализе сети как совокупности и контуров, и узловых пар сначала устанавливается или уравнение напряжения

$$\mathbf{E} + \mathbf{e} = \mathbf{z}(\mathbf{i} + \mathbf{I}); \quad E_\alpha + e_\alpha = z_{\alpha\beta}(i^\beta + I^\beta), \quad (3.8)$$

или уравнение тока

$$\mathbf{i} + \mathbf{I} = \mathbf{Y}(\mathbf{E} + \mathbf{e}); \quad i^\alpha + I^\alpha = Y^{\alpha\beta}(E_\beta + e_\beta), \quad (3.9)$$

где переменными являются \mathbf{i} и \mathbf{E} . Количество обычных уравнений в этих двух случаях не обязательно одно и то же. В самом общем случае их количество точно определено: оно равно сумме числа контуров и числа узловых пар.

II. Следует подчеркнуть, что выбор точки зрения на сеть (либо как на совокупность только контуров, либо как на сово-

купность только узловых пар) является произвольным и зависит от конкретных предположений о природе воздействующих величин, которые известны, или величин отклика, которые нужно найти. Каждая сеть содержит и контуры, и узловые пары и имеет столько степеней свободы, сколько катушек и отводов от узлов (см. рис. 3.1) имеется в исходной сети.

Кроме того, необходимо подчеркнуть, что уравнение движения, описывающее поведение сети, это не просто выражение закона Ома $e=zi$, содержащее три понятия, а более общее уравнение напряжения $E+e=z(i+I)$, содержащее пять понятий; для него закон Ома является лишь частным случаем. Общее уравнение напряжения не может быть заменено упрощенной формой $e=zi$ ни в математическом, ни в физическом смысле, за исключением частных случаев. В сети общего вида появляются четыре различных электрических понятия e , I , E , I , их число не может быть сокращено.

III. В большинстве задач число переменных и неизвестных не обязательно равно друг другу. Кроме того, число имеющихся уравнений обычно не равно числу переменных. Различия в количестве уравнений, переменных и неизвестных объясняют большое разнообразие возможных операций с множеством уравнений.

IV. Систематическое изучение сетей будет проведено в указанной последовательности. В первую очередь изучаются контурные сети, представляющие один крайний случай поведения; затем — узловые сети, представляющие другой крайний случай поведения, и, наконец, ортогональные сети, в которых имеются как контурные, так и узловые напряжения и токи.

Кроме того, сначала рассматриваются полные системы, т. е. во всех трех случаях предполагается, что число неизвестных то же, что и число уравнений; это ведет к простейшим операциям над уравнениями. Затем предполагается любое число неизвестных, что ведет к более сложным операциям над уравнениями.

16. ТИПЫ СЕТЕЙ

Существуют сети, которые по своему техническому применению могут рассматриваться либо как чисто контурные, либо как чисто узловые.

1. Многообмоточные трансформаторы, линии электропередачи и вращающиеся электрические машины являются преимущественно «контурными» сетями. Конструкционными константами, вычисляемыми по структуре этих сетей, являются собственные и взаимные импедансы z , а их уравнение движения имеет вид $e=zi$.

2. Многоэлектродные вакуумные лампы являются преимущественно «узловыми» сетями. Их конструкционные константы — это собственные и взаимные адмиттансы Y , а их уравнение движения имеет вид $I=YE$.

3. Сети связи, распределительные и обобщенные сетевые структуры могут рассматриваться как «контурные», «узловые» или как «ортогональные» сети, поскольку большинство их элементов содержит сосредоточенные импедансы Z , адмиттансы которых $Y=1/Z$.

Далее показано, что рассмотрение сетей связи, распределительных и обобщенных сетевых структур как узловых сетей, открывает гораздо больше возможностей для операций, чем рассмотрение сети как совокупности контуров. Кроме того, понятия, связанные с узловой сетью, лучше соответствуют задачам, возникающим на практике.

В общем случае можно установить, что: 1) чисто магнитные (или электрокинетические) сети, взаимосвязанные с магнитными сетями, бывают преимущественно контурными; 2) чисто электростатические (или электрокинетические) сети, взаимосоединенные с ними, бывают преимущественно узловыми; 3) электрокинетические сети, взаимосвязанные одновременно и с магнитными и с электростатическими сетями, бывают преимущественно ортогональными.

Ниже показано, что в задачах синтеза (где нужно сконструировать сеть с заданным поведением) все сети должны рассматриваться как «ортогональные» для облегчения перехода от одной сети к другой.

17. ПОНЯТИЕ ПРИМИТИВНОЙ СИСТЕМЫ

Постулат второго обобщения утверждает, что если компоненты геометрических объектов, таких как e_α , $Z_{\alpha\beta}$, $\Gamma_{\alpha\beta\gamma}$, известны для одной частной системы координат, то для любой другой системы координат того же типа (число которых, вообще говоря, бесконечно) компоненты этих геометрических объектов могут быть определены рутинной процедурой с помощью тензора преобразования S . Уравнения поведения, записанные в терминах геометрических объектов, имеют одинаковый вид для всех систем данного типа.

Следует заметить, что совершенно несущественно, какова та частная система (и связанная с ней система координат), в которой заданы геометрические объекты и инвариантное уравнение. С другой стороны, до того как постулат может быть использован, абсолютно необходимо, чтобы уравнения поведения в терминах геометрических объектов были уже известны по крайней мере для одной частной системы (и связанной с ней системы координат) и в этой же системе известны все компоненты всех геометрических объектов. Тогда эта система может быть использована как стартовая точка при расчете уравнений движения для всех других систем (того же типа).

Далее, когда нужно анализировать уравнение движения большого числа систем, то представляется логичным из всего много-

образия систем выделить *одну частную систему* (и связанную с ней систему координат), для которой:

1) сравнительно легко определить компоненты различных геометрических объектов e_α , $Z_{\alpha,\beta}$, $\Gamma_{\alpha\beta\gamma}$ и других, которые необходимы для решения конкретной задачи в численном виде;

2) сравнительно легко установить различные тензоры преобразования $S_\alpha^{\alpha'}$, показывающие, чем эта частная система (и связанная с ней система координат) отличается от *любой другой системы* (и связанной с ней системы координат);

3) сравнительно легко удастся вычислять новые компоненты различных геометрических объектов $e_{\alpha'}$, $Z_{\alpha'\beta'}$, $\Gamma_{\alpha'\beta'\gamma'}$ и других во всех других системах, которые должны быть проанализированы.

Эта частная система (и связанная с ней система координат), выделенная из большого числа подобных систем и используемая как стартовая точка, будет называться в этой книге примитивной системой.

Неизменные сетевые структуры, вакуумные лампы, вращающиеся машины, линии передачи — каждая из них имеет *свою примитивную систему*. Вообще говоря, существует столько различных типов примитивных систем, сколько имеется различных типов инвариантных уравнений. Другими словами, имеется столько типов примитивных систем, сколько существует различных типов фундаментальных систем, подлежащих анализу, и используемых точек зрения. Кроме того, чем больше деталей системы должно быть рассмотрено, тем *более сложную форму принимает примитивная система* (так же, как реальная система).

Необходимо ясно понимать, что мы свободны в выборе одной из множества подобных систем в качестве стартовой точки, т. е. в качестве примитивной системы, и можно получать из ее характеристик характеристики поведения всех других систем. Выбор той или иной системы из множества подобных в качестве примитивной системы достаточно произволен и определяется тем, способна ли выбранная система удовлетворять указанным выше или другим условиям.

В дальнейшем нам встретится много случаев получения уравнений движения новой системы из уравнений движения некоторой другой системы, а не из примитивной системы, так как вычисления при таком выборе становятся более простыми, или по какой-либо другой причине. Следовательно, *использование примитивной системы в качестве стартовой точки анализа не является абсолютно необходимым, а диктуется соображениями удобства.*

Однако, если система используется в качестве стартовой точки для установления уравнений движения одной или нескольких новых систем, *во всех случаях вычисления носят один и тот же рутинный характер и требуют применения одних и тех же процедур для каждой новой системы, а именно: 1) установить тензор*

преобразования С; 2) вычислить новые компоненты различных геометрических объектов с помощью «формул преобразования»; 3) сохранить неизменной форму уравнений движения, уже полученных для обобщенной системы; 4) преобразовать инвариантное уравнение к виду, дающему требуемый результат; 5) решить полученное уравнение относительно неизвестных, если таковые имеются.

Этот последний шаг может, конечно, оказаться непреодолимым из-за типа полученных уравнений. Однако довольно часто случается, что система уравнений, которая кажется неразрешимой, легко решается, если введена новая, более подходящая система координат.

18. ПРИМИТИВНАЯ «КОНТУРНАЯ» СЕТЬ

I. В § 10 показано, что при составлении уравнений *поведения сети с сосредоточенными параметрами и неподвижными взаимосодействиями* можно использовать три различных точки зрения на каждую сеть, если в качестве переменных: 1) принять *контурные токи* i ; 2) принять *разности потенциалов* E , возникающие на

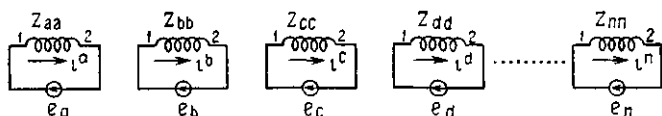


Рис. 3.9. Прimitивная контурная сеть.

узловых парах; 3) принять и *контурные токи* i , и *разности потенциалов* E .

С первой точки зрения сеть из n катушек рассматривается как *совокупность k контуров*, со второй точки зрения — как совокупность $n-k$ *узловых пар*, а с третьей, более общей точки зрения — как совокупность и k *контуров*, и $n-k$ *узловых пар*. Первые две точки зрения являются частными случаями последней.

В дальнейшем будет показано, что ортогональную сеть с n катушками можно анализировать либо как контурную сеть с n (или менее) контурами, либо как узловую сеть с n (или менее) узловыми парами; следовательно, *достаточно установить два типа примитивных сетей, примитивную «контурную» сеть и примитивную «узловую сеть»*, представляющих два крайних случая расположения катушек в сетях.

II. Возникает вопрос, какова простейшая сеть, состоящая из n катушек и n контуров. Ответ в этом случае очевиден. Множество n отдельных катушек, каждая из которых короткозамкнута на себя (рис. 3.9), есть простейшая возможная совокупность n контуров с n катушками.

Следовательно, множество n отдельных катушек без каких-либо гальванических соединений между ними выбирается в качестве «примитивной контурной сети». Некоторые или все катушки могут иметь асимметричные взаимные импедансы.

Следует заметить, что введением примитивной сети из n катушек с n контурами в качестве стартовой точки анализа сети с n катушками и k контурами мы предполагаем, что число контуров (или число узловых пар $n-k$) сети не является определяющим моментом анализа. Единственным определяющим моментом анализа является число катушек n , которое остается неизменным как в реальной, так и в примитивной сети. Таким образом, когда дана физическая сеть, то в ней произвольно можно одновременно менять и число контуров, и число узловых пар, предполагая, например, существование узлов между генератором и катушкой и т. д. (Число катушек n можно также изменить хотя бы введением катушек с нулевым импедансом и расчленением одной катушки на две и т. п.)

III. Следующим шагом после установления примитивной контурной сети должно быть установление различных геометрических объектов, которые играют определенную роль в физическом анализе, а затем составление уравнений движения сети в терминах установленных геометрических объектов.

В выполнении этих шагов в качестве руководящего принципа используется постулат первого обобщения, ориентирующийся в первую очередь на анализ простейшего элемента примитивной сети.

1. Принимаем, что простейшим элементом примитивной контурной сети является один контур.

2. Понятия, необходимые для записи уравнений движения, представлены e , i и z . Из § 6.1 вводятся ограничения на характер величин e , i , z . Они могут быть переходными или установившимися величинами, функциями времени, линейными операторами и т. п.

3. Уравнение напряжения имеет вид $e = zi$.

Теперь повторяем эти же шаги для примитивной сети.

4. Примитивная сеть установлена как совокупность n простейших элементов.

5. Тремя геометрическими объектами примитивной контурной сети из n контуров являются (см. также гл. 1, § 4):

$$e = \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline a & b & c & \dots & n \\ \hline e_a & e_b & e_c & \dots & e_n \\ \hline \end{array}; \quad (3.10)$$

$$i = \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline a & b & c & \dots & n \\ \hline i_a & i_b & i_c & \dots & i_n \\ \hline \end{array}; \quad (3.11)$$

IV. В большинстве задач *единственное* инвариантное уравнение $e=zi$ разными способами расчленяется на несколько инвариантных уравнений. Такое расчленение будет изучено в последующих главах.

Если с уравнением обращаются как с одним целым (не членят его на части), то все действия и его решение производятся так же, как с обычным уравнением (см. гл. 2, § 11). Это означает, что токи, протекающие в катушках примитивной сети, находятся по формуле $i=z^{-1}e$.

Более общая форма примитивной контурной сети и ее уравнения движения даны в гл. 16.

V. В разобранным примере установление и анализ примитивной системы предельно просты и почти очевидны. Однако если анализируемая система или используемая точка зрения усложняется, то как установление, так и метод анализа примитивной системы становятся все менее очевидными и более запутанными. Но *независимо от сложности примитивной системы указанные выше шесть этапов или их эквиваленты должны следовать друг за другом во всех случаях анализа.*

19. ПРИМИТИВНАЯ «УЗЛОВАЯ» СЕТЬ

I. Если сеть из n катушек анализируется в предположении, что переменными являются *разности потенциалов*, возникающие на $n-k$ узловых парах, то опять первым шагом будет установ-

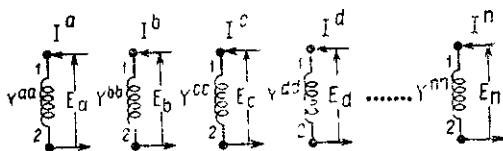


Рис. 3.10. Примитивная узловая сеть.

ление примитивной «узловой» сети и ее уравнений движения через геометрические объекты. Контурная сеть (рис. 3.9) не может быть использована для этой *новой точки зрения* в качестве примитивной сети, так как в ней нет узловых пар, а число контуров то же, что и число катушек. Следовательно, *для новой точки зрения нужно по-новому установить примитивную сеть.*

II. Теперь возникает вопрос: какова простейшая сеть, которая состоит из n катушек и n узловых пар?

Примитивная узловая сеть состоит из n открытых катушек (рис. 3.10).

Она содержит n независимых подсетей, имеющих $2n$ узлов, и, следовательно, имеет $2n-n=n$ узловых пар. *Два конца каждой катушки образуют узловую пару, через которую ток входит и вы-*

ходит. Два узла двух разных катушек не образуют узловой пары, так как принадлежат независимым подсетям.

III. Для установления уравнения движения примитивной узловой сети используется, как и в предыдущем разделе, постулат первого обобщения.

1. Простейшим элементом примитивной сети является одна открытая катушка (рис. 3.10).

2. Понятия, необходимые для описания ее поведения, есть E , I , Y , где I — воздействующий на катушку ток, E — *разность потенциалов*, возникающая на узловой паре под действием тока I , протекающего через катушку, а Y — адмиттанс катушки.

3. Уравнение движения для простейшего элемента представляет собой теперь не уравнение напряжения, а уравнение тока $I = YE$, где предполагается, что I и Y имеют постоянные значения, а E — разность потенциалов, появляющаяся на узловой паре, — переменное. Если E неизвестно, то его можно найти по формуле $E = Y^{-1}I$.

Повторяем те же шаги для примитивной сети.

4. Примитивная узловая сеть из n катушек устанавливается, как на рис. 3.10, где n может быть любым числом.

5. Три геометрических объекта, необходимых для получения уравнения движения:

$$E = \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline a & b & c & \dots & n \\ \hline E_a & E_b & E_c & \dots & E_n \\ \hline \end{array}; \quad (3.16)$$

$$I = \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline a & b & c & \dots & n \\ \hline I^a & I^b & I^c & \dots & I^n \\ \hline \end{array}; \quad (3.17)$$

$$Y = \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline & a & b & c & \dots & n \\ \hline a & \gamma^{aa} & \gamma^{ab} & \gamma^{ac} & \dots & \gamma^{an} \\ \hline b & \gamma^{ba} & \gamma^{bb} & \gamma^{bc} & \dots & \gamma^{bn} \\ \hline c & \gamma^{ca} & \gamma^{cb} & \gamma^{cc} & \dots & \gamma^{cn} \\ \hline \vdots & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \hline n & \gamma^{na} & \gamma^{nb} & \gamma^{nc} & \dots & \gamma^{nn} \\ \hline \end{array}. \quad (3.18)$$

Компонентами E являются *разности потенциалов*, возникающие на узловых парах. Компоненты I — токи, входящие в узловые пары и выходящие из них. Компоненты Y представляют *собственные и взаимные адмиттансы* отдельных катушек. Матрица может быть асимметричной, а некоторые компоненты могут быть равными нулю.

Глава 4

ТЕНЗОР ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

1. ЭТАПЫ АНАЛИЗА

I. Анализ целой группы физических систем в терминах геометрических объектов можно считать состоящим из трех этапов:

1) сначала *устанавливается* уравнение поведения (уравнение напряжения или уравнение тока и т. д.), справедливое для каждого члена группы;

2) над уравнением производятся преобразования, различные для каждого случая. Для преобразования одно инвариантное уравнение поведения обычно подразделяется на несколько инвариантных уравнений;

3) *находятся*, если они есть, неизвестные величины.

В первых главах будут установлены, преобразованы и решены уравнения поведения трех типов неподвижных сетей (контурных, узловых, ортогональных). Однако инвариантное уравнение не будет расчленяться, а сначала преобразуется как одно целое.

II. Для большинства практических проблем одно инвариантное уравнение поведения должно разделяться на несколько инвариантных уравнений. Необходимость разделения может возникнуть в различных случаях:

1) нет необходимости в некоторых неизвестных, следовательно, они могут быть исключены;

2) некоторые переменные или импедансы и т. д. могут быть известны, другие могут быть неизвестны;

3) сама физическая система *функционально* делится на несколько частей. Например, на некоторых зажимах токи могут сставаться постоянными при всех нагрузках или могут оставаться постоянными разности потенциалов, или они могут подчиняться некоторому заданному закону. В некоторых частях импедансы могут изменяться, в то время как в другой части токи изменяются некоторым требуемым образом и т. д.;

4) импедансы или приложенные напряжения, или токи в определенных частях или во всей системе можно *заменить* новыми величинами, в то время как поведение системы все еще удовлетворяет определенным требованиям или критериям и т. д.

Расчленение инвариантных уравнений поведения изучается в последующих главах.

III. В этой главе выводятся уравнения напряжения $e' = z' \cdot i'$ контурной сети с n катушками и n контурами, если известны уравнения $e = z \cdot i$ примитивной контурной сети. После этого будет изучена произвольная контурная сеть с n катушками и менее чем n контурами.

2. ЧИСТО-КОНТУРНЫЕ СЕТИ

I. При анализе любой сети как совокупности контуров сначала предположим, что анализируемая сеть имеет столько же контуров, сколько катушек; она будет называться «чисто-контурная» сеть. Анализ контурных сетей с n катушками, но с менее чем n

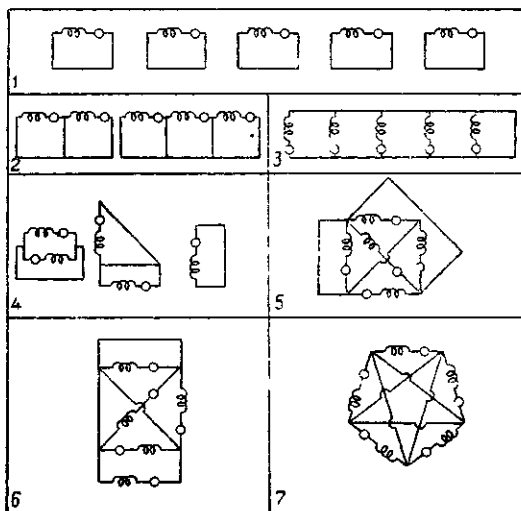


Рис. 4.1. Семь различных способов соединения пяти катушек в пять контуров.

контурами (имеющими большое практическое значение) является частным случаем анализа сетей с n контурами, поэтому сначала будут изучены последние.

Существует большое число способов соединения n катушек в n контуров. Например, на рис. 4.1 показаны 7 различных способов расположения 5 катушек в 5 контурах, включая их общую примитивную сеть. Все явно различные сети на рисунке обладают следующим общим свойством.

При данном напряжении e , приложенном последовательно к каждой катушке, токи i , протекающие в каждой катушке, одни и те же, независимо от способа соединения n катушек в n контуров.

Токи в каждой катушке остаются неизменными, поскольку в каждой сети каждая катушка короткозамкнута на себя. Различные соединения состоят в том, что берется примитивная сеть с пятью независимыми контурами и ее узлы взаимосвязываются различным образом посредством безымпедансных проводников. Ни одна из сетей не содержит узловых пар.

II. Хотя токи в катушках остаются неизменными, токи, протекающие в различных соединительных проводниках, различны для каждого типа соединений. Компоненты каждого геометрического объекта в уравнениях напряжения $e = z \cdot i$ каждой сети одни и те же, если они выражены через токи, протекающие в катушках, но компоненты принимают различные значения для каждой сети, если они выражены через токи, текущие также в безымпедансных соединительных проводниках. Фактически найдено, что даже для одной и той же сети может быть выведено несколько систем n уравнений, отличных одна от другой и от систем уравнений для других сетей.

III. Одна из целей тензорного анализа — систематизировать вывод этого большого разнообразия систем уравнений. Систематизация осуществляется проведением анализа всех возможных сетей одновременно; 1) указываются те их характеристики, которые тождественны для всех сетей, они обозначаются отдельными символами; 2) указываются те характеристики, по которым все сети отличаются друг от друга, эти характеристики также обозначаются отдельными символами.

Чтобы сложность сети не мешала пониманию вводимых новых понятий и метода рассуждения, сначала проанализируем наиболее простую сеть, а именно, сеть, состоящую всего из двух катушек.

3. СОЕДИНЕНИЕ КАТУШЕК

I. Пусть даны две катушки Z_{aa} и Z_{bb} , не связанные между собой (рис. 4.2). Пусть к ним последовательно приложены произвольные напряжения и в них протекают токи. (В табл. 4.1 пока-



Рис. 4.2. Примитивная сеть.

зано также одно частное значение импедансов, токов и напряжений.) Сеть эквивалентна примитивной контурной сети с двумя контурами, и ее уравнения напряжения легко выводятся:

$$\begin{aligned} e_a &= Z_{aa}i^a + Z_{ab}i^b, \\ e_b &= Z_{ba}i^a + Z_{bb}i^b. \end{aligned} \quad (4.1)$$

Эту систему обычных уравнений можно записать в терминах трех геометрических объектов e , i и z следующим образом:

$$\mathbf{e} = \mathbf{z} \cdot \mathbf{i}, \quad (4.2)$$

где

$$\mathbf{e} = \begin{array}{c} \mathbf{a} \quad \mathbf{b} \\ \left[\begin{array}{|c|c|} \hline e_a & e_b \\ \hline \end{array} \right], \quad (4.3)$$

$$\mathbf{i} = \begin{array}{c} \mathbf{a} \quad \mathbf{b} \\ \left[\begin{array}{|c|c|} \hline i^a & i^b \\ \hline \end{array} \right], \quad (4.4)$$

$$\mathbf{z} = \begin{array}{c} \mathbf{a} \quad \mathbf{b} \\ \left[\begin{array}{|c|c|} \hline Z_{aa} & Z_{ab} \\ \hline Z_{ba} & Z_{bb} \\ \hline \end{array} \right]. \quad (4.5)$$

| | |
|---|--------------|
| $Z_{aa} = 2$ | $Z_{bb} = 3$ |
| $e_a = 1$ | $e_b = 2$ |
| $i^a = 1/2$ | $i^b = 2/3$ |
| $\mathbf{e} = \begin{array}{c} \mathbf{a} \quad \mathbf{b} \\ \left[\begin{array}{ c c } \hline 1 & 2 \\ \hline \end{array} \right]$ | |
| $\mathbf{i} = \begin{array}{c} \mathbf{a} \quad \mathbf{b} \\ \left[\begin{array}{ c c } \hline 1/2 & 2/3 \\ \hline \end{array} \right]$ | |
| $\mathbf{z} = \begin{array}{c} \mathbf{a} \quad \mathbf{b} \\ \left[\begin{array}{ c c } \hline 2 & 0 \\ \hline 0 & 3 \\ \hline \end{array} \right]$ | |
| $P = \mathbf{e} \cdot \mathbf{i} = 11/6$ | |

Токи находят из $\mathbf{i} = \mathbf{z}^{-1} \cdot \mathbf{e} = \mathbf{y} \cdot \mathbf{e}$,

$$\mathbf{i} = \begin{array}{c} \overrightarrow{\phantom{\mathbf{z}^{-1}}} \\ \left[\begin{array}{|c|c|} \hline Z_{bb}/D & -Z_{ab}/D \\ \hline -Z_{ba}/D & Z_{aa}/D \\ \hline \end{array} \right] \cdot \left[\begin{array}{|c|} \hline e_a \\ \hline e_b \\ \hline \end{array} \right] = \begin{array}{c} \mathbf{a} \\ \mathbf{b} \\ \left[\begin{array}{|c|} \hline Z_{bb}e_a/D - Z_{ab}e_b/D \\ \hline -Z_{ba}e_a/D + Z_{aa}e_b/D \\ \hline \end{array} \right] \end{array} \quad (4.6)$$

(где $D = Z_{aa}Z_{bb} - Z_{ab}Z_{ba}$) представляет токи i^a и i^b , протекающие в каждой изолированной катушке.

II. Предположим теперь, что две катушки соединены, как показано на рис. 4.3, снова образуя два контура, без изменения напряжений, приложенных последовательно к отдельным катушкам, и без изменения собственных и взаимных импедансов катушек. Поскольку *после* соединения катушек каждая из них все еще короткозамкнута на себя, как и до соединения¹⁾, ток, протекающий через каждую катушку, также остается неизменным.

Однако теперь *дополнительные проводники* вводят новые пути токов и уравнение напряжения может быть выражено через другие токи, помимо тех, которые протекают в катушках. Новые токи выбираются либо произвольно, либо в соответствии с требованиями рассматриваемой задачи. Необходимо выбирать столько новых токов, сколько имеется контуров, т. е. столько же, сколько ста-

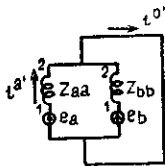


Рис. 4.3. Новая сеть.

¹⁾ Это объясняется тем, что число контуров равно числу катушек. (Прим. пер.)

рых токов. Следовательно, поведение системы (см. рис. 4.3) теперь можно выразить, например, в терминах:

1) тока, протекающего через дополнительную безымпедансную ветвь;

2) тока, протекающего через катушку Z_{aa} .

(Если поведение новой системы выражается в терминах двух токов, протекающих через две катушки, то прежнее уравнение напряжения остается неизменным.)

Две ветви, в которых протекают два новых тока, обозначим буквами со штрихами a' и b' , а токи, протекающие через них, обозначим $i^{a'}$ и $i^{b'}$.

III. Целью анализа является вывод уравнения напряжения новой взаимосвязанной системы, которое в терминах геометрических объектов имеет точно такую же форму, что и до соединения. Другими словами, целью анализа является нахождение новых компонент трех геометрических объектов e' , i' и z' , входящих в уравнение напряжения новой системы $e' = z' \cdot i'$.

В любой общей проблеме компоненты z' и e' обычно известны, а значение i' неизвестно. Независимо от того, какие величины предполагаются известными или неизвестными, при *выводе уравнений контурной сети токи i' всегда выбираются в качестве переменных.*

IV. Примем за правило снабжать штрихами все переменные индексы, принадлежащие новой системе (табл. 4.2). В прямом обозначении сами геометрические объекты следует снабжать штрихами, поскольку нет их переменных индексов.

Таблица 4.2

| Индексы и объекты | До соединения | После соединения |
|--|--------------------|----------------------------|
| Фиксированные индексы | $a, b, c \dots$ | $a', b', c' \dots$ |
| Переменные индексы | $k, m, n \dots$ | $k', m', n' \dots$ |
| Геометрические объекты (индексное обозначение) | e_m, i^m, z_{mn} | $e_{m'}, i^{m'}, z_{m'n'}$ |
| Геометрические объекты (прямое обозначение) | e, i, z | e', i', z' |

В индексном обозначении *основная буква, скажем z* , остается неизменной в любой системе, изменяются только связанные с ней индексы (z_{mn} на $z_{m'n'}$) при переходе от одной системы к другой.

Кроме того, вектор тока будет иметь верхний индекс (i^m), а не нижний. Причины такого обозначения будут вскоре указаны.

Компоненты i^m будем называть «старыми токами», а компоненты $i^{m'}$ — «новыми токами», тогда как основную букву i будем называть «вектором тока».

4. СООТНОШЕНИЕ МЕЖДУ СТАРЫМИ И НОВЫМИ ТОКАМИ

I. На первом этапе анализа новой сети (см. рис. 4.3) рассмотрим, какие токи должны быть новыми переменными. Из-за наличия двух замкнутых цепей (контуров) в качестве переменных нужно выбрать два тока. Выбранные токи должны быть независимы друг от друга, т. е. ни один из них не может быть выражен через другие.

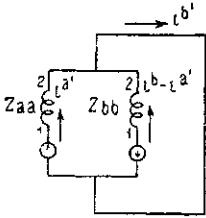


Рис. 4.4. Новые токи в катушках.

Пусть имеется два тока $i^{a'}$ и $i^{b'}$, протекающие в катушке Z_{aa} и в безымпеданной ветви (рис. 4.4), т. е. поведение новой системы выражается через $i^{a'}$ и $i^{b'}$, тогда как поведение старой системы выражается через i^a и i^b .

II. Следующий шаг, после того как выбраны новые токи (переменные), состоит в том, чтобы выразить токи, протекающие в каждой катушке, через новые переменные $i^{a'}$ и $i^{b'}$. На этом этапе используется первый закон Кирхгофа, утверждающий, что сумма токов, входящих в узел, равна нулю.

Следовательно, ток i^x в катушке Z_{bb} (см. рис. 4.3) находится суммированием токов, входящих в узел, т. е. $i^{a'} - i^{b'} + i^x = 0$, откуда

$$i^x = i^{b'} - i^{a'}. \quad (4.7)$$

Это значение тока, протекающего через катушку Z_{bb} , показано на рис. 4.4.

III. Следующий этап состоит в установлении соотношения между старыми токами i^a, i^b и новыми токами $i^{a'}, i^{b'}$ (т. е. между старыми компонентами i вектора тока и новыми компонентами i').

В новой системе оба набора токов могут быть идентифицированы:

1) старый набор токов i^a и i^b — токи, протекающие в отдельных катушках;

2) новый набор токов $i^{a'}$ и $i^{b'}$ может произвольно протекать в любой части сети.

Следовательно, соотношение между старым и новым наборами токов может быть получено при рассмотрении новой сети, содержащей и старые и новые токи, текущие через каждую катушку:

1) токи, протекающие через катушку Z_{aa} : старый ток равен i^a ; новый ток равен $i^{a'}$;

2) токи, протекающие через катушку Z_{bb} : старый ток равен i^b ; новый ток равен $i^{b'} - i^{a'}$.

Так как через каждую катушку до и после соединения протекают одни и те же токи, то соотношения между старыми и новыми токами можно получить в виде

$$\begin{aligned} i^a &= i^{a'} = i^{a'}, \\ i^b &= i^{b'} - i^{a'} = -i^{a'} + i^{b'}. \end{aligned} \quad (4.8)$$

Эти уравнения справедливы независимо от величины токов до тех пор, пока не изменилась сеть. Следовательно, приведенные уравнения являются также тождествами.

IV. Подчеркивается, что в общих проблемах невозможно установить соотношение между старыми и новыми переменными простым рассмотрением только новой системы. Однако в некоторых случаях неподвижных сетей можно выделить старую систему в такой простой форме, что ее можно представить связанной в новую систему. В приведенном примере отдельные катушки новой системы образуют старую систему. Это, однако, не всегда так.

5. ТЕНЗОР ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

I. Этап установления соотношения между токами (или скоростями) старой и новой систем является центральным местом в установлении законов поведения новой системы. Как только это соотношение получено, оставшаяся работа — получение уравнений поведения новой системы из известных уравнений старой системы (или нахождение любого другого свойства новой системы) — является чисто автоматической.

Систему линейных уравнений (4.8) можно выразить в терминах геометрических объектов аналогично системе линейных уравнений $\mathbf{e} = \mathbf{z} \cdot \mathbf{i}$:

$$\boxed{\mathbf{i} = \mathbf{C} \cdot \mathbf{i}'}, \quad \boxed{i^m = C_{m'}^m \cdot i^{m'}}, \quad (4.9)$$

где

$$\mathbf{i} = \begin{array}{c|cc} & \mathbf{a} & \mathbf{b} \\ \hline & i^a & i^b \end{array}, \quad i^m = \begin{array}{c|cc} m & a & b \\ \hline & i^a & i^b \end{array}, \quad (4.10)$$

$$\mathbf{i}' = \begin{array}{c|cc} & \mathbf{a}' & \mathbf{b}' \\ \hline & i^{a'} & i^{b'} \end{array}, \quad i^{m'} = \begin{array}{c|cc} m' & a' & b' \\ \hline & i^{a'} & i^{b'} \end{array}. \quad (4.11)$$

Коэффициенты при новых переменных образуют матрицу, называемую «матрицей преобразования» (или, точнее, «компоненты тензора преобразования по двум системам координат»).

$$C = \begin{array}{c} a' \quad b' \\ \hline a \quad \left| \begin{array}{cc} 1 & 0 \end{array} \right. \\ \hline b \quad \left| \begin{array}{cc} -1 & 1 \end{array} \right. \end{array}, \quad C_{m'}^m = \begin{array}{c} m' \quad | \quad a' \quad b' \\ \hline m \quad a \quad \left| \begin{array}{cc} 1 & 0 \end{array} \right. \\ \hline b \quad \left| \begin{array}{cc} -1 & 1 \end{array} \right. \end{array}. \quad (4.12)$$

Эта двумерная матрица образует костяк тензорного анализа¹⁾. Она показывает соотношение между старыми и новыми переменными (токами). Причина использования верхних и нижних индексов будет указана ниже.

II. Процесс получения матрицы преобразования $C_{m'}^m$ для новой системы состоит в таком случае из трех этапов:

1) принятие решения о том, что будет называться новыми токами $i^{m'}$ в новой системе;

2) получение линейных соотношений между старыми токами i^m и новыми токами $i^{m'}$, протекающими в каждой катушке.

Другими словами, старые токи пишем в левых частях уравнений, а некоторые линейные комбинации новых токов — в правых частях;

3) из коэффициентов при новых токах образуем матрицу, которая является требуемой «матрицей преобразования» $C_{m'}^m$.

III. Следует отметить, что расположение индексов у тензора преобразования $C_{m'}^m$ отличается от их расположения в тензоре импеданса z_{mn} , так как в z_{mn} оба индекса m и n относятся к одному и тому же набору старых фиксированных индексов a, b, c , в то время как в $C_{m'}^m$ верхний индекс относится к старым индексам a, b, c , а нижний индекс m' — к новым индексам a', b', c' , т. е. в z_{mn} или $z_{m'n'}$ индексы, написанные около матрицы, одинаковы, в то время как в матрице $C_{m'}^m$ два набора индексов различны.

IV. Определитель тензора преобразования чисто-контурной сети C никогда не равен нулю, т. е. матрица, обратная матрице (4.12), всегда может быть вычислена. Если определитель C равен нулю, то это означает, что новые переменные выбраны некорректно и не являются независимыми друг от друга (т. е. одна из них может быть выражена через другие).

Тензор обратного преобразования находится вычислением матрицы, обратной (4.12). Это обозначается заменой верхних индексов нижними и наоборот, т. е.

¹⁾ Несмотря на то, что эта матрица содержит только +1, -1 и 0, они являются значениями компонентов якобиана преобразования координат. Это преобразование сохраняет неизменной мощность, но изменяет переменные (токи). (Прим пер.)

$$C^{-1} = \begin{array}{c} a \quad b \\ a' \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 0 \\ \hline 1 & 1 \\ \hline \end{array} \\ b' \end{array}, \quad C_m^{m'} = \begin{array}{c} m \mid a \quad b \\ m' \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 0 \\ \hline 1 & 1 \\ \hline \end{array} \\ a' \\ b' \end{array}. \quad (4.13)$$

6. «ИНВАРИАНТНОСТЬ ФОРМ»

I. Подлежащая исследованию проблема состоит в следующем.

Дана «примитивная сеть» (см. рис. 4.2). С ней связаны следующие понятия:

1) геометрические объекты, такие как

$$e, z, P, \quad e_m, z_{mn}, P,$$

и переменная $i = i^m$ (которая также является геометрическим объектом);

2) инвариантные уравнения, такие как

$$e = z \cdot i, \quad e_m = z_{mn} i^m, \quad (4.14)$$

$$P = e \cdot i, \quad P = e_m i^m. \quad (4.15)$$

Все эти геометрические объекты и уравнения известны.

Дана другая сеть (см. рис. 4.3). С этой сетью связаны точно такие же понятия, как и с данной сетью, а именно:

1) геометрические объекты, такие как

$$e', z', P', \quad e_{m'}, z_{m'n'} P',$$

и переменная $i' = i^{m'}$;

2) инвариантные уравнения, такие как

$$e' = z' \cdot i', \quad e_{m'} = z_{m'n'} i^{n'}, \quad (4.16)$$

$$P' = e' \cdot i', \quad P' = e_{m'} i^{m'}. \quad (4.17)$$

Однако ни одна из новых компонент этих геометрических объектов до сих пор не найдена (поэтому никакие новые уравнения не могут быть установлены), за исключением единственного соотношения, полученного между старыми и новыми переменными,

$$i = C \cdot i', \quad i^m = C_m^{m'} i^{m'}, \quad (4.18)$$

$$i' = C^{-1} \cdot i, \quad i^{m'} = C_m^{m'} i^m, \quad (4.19)$$

определяющего компоненты тензора преобразований, которого, однако, недостаточно для определения новых компонентов геометрических объектов, а следовательно, и новых уравнений.

Необходимо еще найти «формулу преобразования» одного геометрического объекта в другой.

II. Чтобы установить формулу преобразования геометрического объекта, необходимо найти по крайней мере одну физическую величину, которая одинакова для обеих систем, т. е. которая не изменяется при изменении системы координат. Математическое представление «инвариантности» этой физической величины служит вторым соотношением, необходимым для нахождения формул преобразования.

Это второе соотношение устанавливается, если принять, что, когда катушки примитивной сети соединяются, полная мгновенная мощность, потребляемая всей системой, остается «инвариантной», неизменной, т. е.

$$P = P' \quad (4.20)$$

или, на языке тензорного анализа, входная мощность P есть инвариант относительно преобразования C_m^m , поскольку ток в каждой катушке не меняется.

Подчеркивается, что это второе соотношение не является допущением (каким является первое соотношение $\mathbf{i} = \mathbf{C} \cdot \mathbf{i}'$), но выводится из физических соображений как следствие существования первого соотношения.

III. Следовательно, в дополнение к соотношению

$$\mathbf{i} = \mathbf{C} \cdot \mathbf{i}' \quad i^m = C_m^m i^{m'}, \quad (4.21)$$

которое определяет компоненты тензора преобразования, между старыми и новыми компонентами геометрических объектов можно установить следующее соотношение, представляющее инвариантность мощности на входе:

$$\mathbf{e} \cdot \mathbf{i} = \mathbf{e}' \cdot \mathbf{i}' \quad e_m i^m = e_{m'} i^{m'}, \quad (4.22)$$

которое определяет формулу преобразования еще одного геометрического объекта — вектора напряжения \mathbf{e} .

Необходимо заметить, что входная мощность $\mathbf{e} \cdot \mathbf{i}$ является «линейной формой» (гл. 2, § 10).

IV. Итак, прежде чем определить уравнения новой системы по уравнениям старой, необходимо сделать два шага:

1) установить соотношения между старыми и новыми переменными i^m и $i^{m'}$. Этот шаг определяет матрицу преобразования C_m^m . Его следует делать всякий раз, когда дана новая система;

2) выбрать «форму», «инвариантную» относительно преобразования. Этот выбор следует осуществлять только для одной новой системы и нет необходимости делать это для другой новой системы.

где $I = \delta_k^m$ — «единичный тензор». Поскольку умножение любого геометрического объекта на I оставляет его неизменным, I может быть опущен, и мы имеем формулу обратного преобразования (заменяя свободный индекс k на m)

$$e = C_i^{-1} \cdot e', \quad e_m = C_m^{m'} e_{m'}. \quad (4.31)$$

Сравнивая эту формулу с формулой для i

$$i = C \cdot i', \quad i^m = C_m^m i^{m'}, \quad (4.32)$$

можно видеть, что e имеет формулу преобразования, отличную от i .

8. ФОРМУЛА ПРЕОБРАЗОВАНИЯ z_{mn}

I. Когда формула преобразования одного геометрического объекта, принадлежащего уравнениям новой системы, определена (из соображений инвариантности «формы»), формулы преобразования всех других геометрических объектов, входящих в уравнение, могут быть получены автоматически из фундаментального положения тензорного анализа, а именно, из постулата второго обобщения; смысл его в том, что в терминах геометрических объектов форма всех уравнений, описывающих старую и новую систему, остается одинаковой.

Это значит, что если уравнение напряжения старой системы

$$e = z \cdot i, \quad e_m = z_{mn} i^n, \quad (4.33)$$

то уравнение напряжения новой системы имеет точно такую же форму, а именно:

$$e' = z' \cdot i', \quad e_{m'} = z_{m'n'} i^{n'}. \quad (4.34)$$

II. Из требования неизменности формы уравнения напряжения формула преобразования z может быть выведена так.

Подставляем формулы преобразования e и i (уравнения (4.31) и (4.32)) в старое уравнение напряжения (4.33)

$$e = z \cdot i, \quad e_m = z_{mn} i^n, \quad (4.35)$$

$$C_i^{-1} \cdot e' = z \cdot C \cdot i', \quad C_m^{k'} e_{k'} = z_{mn} C_n^m i^{n'}. \quad (4.36)$$

Умножаем обе части уравнения слева на $C_i = C_m^m$,

$$C_i \cdot C_i^{-1} \cdot e' = C_i \cdot z \cdot C \cdot i', \quad C_m^m C_m^{k'} e_{k'} = C_m^m z_{mn} C_n^m i^{n'}.$$

Поскольку $C_i \cdot C_i^{-1}$ есть единичный тензор $I = \delta_m^m$, он может быть опущен, останется

$$e' = C_i \cdot z \cdot C \cdot i', \quad e_{m'} = z_{mn} C_m^m C_n^m i^{n'}. \quad (4.37)$$

Так как новое уравнение должно иметь форму

$$\mathbf{e}' = \mathbf{z}' \cdot \mathbf{i}', \quad e_{m'} = z_{m'n'} i^{n'}, \quad (4.38)$$

то, сравнивая последние два уравнения, получаем

$$\mathbf{z}' = \mathbf{C}_t \cdot \mathbf{z} \cdot \mathbf{C}, \quad z_{m'n'} = z_{mn} C_m^m C_n^n. \quad (4.39)$$

Другими словами, компоненты \mathbf{z}' новой системы находятся из компонент \mathbf{z} старой системы умножением последних *дважды* *последовательно* на тензор преобразования C_m^m .

III. Выполняем, как указано, умножение в два этапа. Первый этап

$$\mathbf{z} \cdot \mathbf{C} = \begin{array}{c|c} Z_{aa} & Z_{ab} \\ \hline Z_{ab} & Z_{bb} \end{array} \cdot \begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline -1 & 1 \end{array} = \begin{array}{cc} \mathbf{a}' & \mathbf{b}' \\ \hline \mathbf{a} & \begin{array}{c|c} Z_{aa} - Z_{ab} & Z_{ab} \\ \hline Z_{ab} - Z_{bb} & Z_{bb} \end{array} \\ \mathbf{b} & \end{array}. \quad (4.40)$$

Второй этап $\mathbf{C}_t \cdot (\mathbf{z} \cdot \mathbf{C}) =$

$$\begin{array}{c|c} 1 & -1 \\ \hline 0 & 1 \end{array} \cdot \begin{array}{c|c} Z_{aa} - Z_{ab} & Z_{ab} \\ \hline Z_{ab} - Z_{bb} & Z_{bb} \end{array} = \begin{array}{c|c} Z_{aa} - 2Z_{ab} + Z_{bb} & Z_{ab} - Z_{bb} \\ \hline Z_{ab} - Z_{bb} & Z_{bb} \end{array}.$$

Следовательно, новые компоненты тензора импеданса для новой сети

$$\mathbf{z}' = \begin{array}{cc} \mathbf{a}' & \mathbf{b}' \\ \hline \mathbf{a}' & \begin{array}{c|c} Z_{aa} - 2Z_{ab} + Z_{bb} & Z_{ab} - Z_{bb} \\ \hline Z_{ab} - Z_{bb} & Z_{bb} \end{array} \\ \mathbf{b}' & \end{array}. \quad (4.41)$$

9. НОВОЕ УРАВНЕНИЕ НАПРЯЖЕНИЯ

I. Вектор приложенного напряжения новой системы дан уравнением (4.28)

$$\mathbf{e}' = \begin{array}{cc} \mathbf{a}' & \mathbf{b}' \\ \hline e_a - e_b & e_b \end{array}. \quad (4.42)$$

Следовательно, уравнение напряжения новой системы $\mathbf{e}' = \mathbf{z}' \cdot \mathbf{i}'$ эквивалентно в термичах обычных величин следующему:

$$\begin{aligned} e_a - e_b &= (Z_{aa} - 2Z_{ab} + Z_{bb}) i^{a'} + (Z_{ab} - Z_{bb}) i^{b'}, \\ e_b &= (Z_{ab} - Z_{bb}) i^{a'} + Z_{bb} i^{b'}. \end{aligned} \quad (4.43)$$

Его можно переписать в более удобной форме:

$$\begin{aligned} e_a - e_b &= Z_{aa}i^{a'} - Z_{bb}(i^{b'} - i^{a'}) - Z_{ab}i^{a'} + Z_{ab}(i^{b'} - i^{a'}), \\ e_b &= Z_{bb}(i^{b'} - i^{a'}) + Z_{ab}i^{a'}, \end{aligned} \quad (4.44)$$

образуя уравнения напряжения двух контуров.

II. В уравнении напряжения i' еще неизвестен. Его величина находится по формуле

$$i' = z'^{-1} \cdot e' = y' \cdot e', \quad i^{n'} = (z_{m'n'})^{-1} e_{m'} = y^{n'm'} e_{m'} \quad (4.45)$$

обращением z' и умножением его на e' .

Обратная z' есть y'

$$y' = \frac{1}{\text{Det}} \times \begin{array}{c} \begin{array}{cc} a' & b' \\ \hline Z_{bb} & Z_{bb} - Z_{ab} \\ \hline Z_{bb} - Z_{ab} & Z_{aa} - 2Z_{ab} + Z_{bb} \end{array} \end{array}, \quad (4.46)$$

где $\text{Det} = D = (Z_{aa} - 2Z_{ab} + Z_{bb})Z_{bb} - (Z_{ab} - Z_{bb})^2$. Следовательно,

$$\begin{aligned} i' = y' \cdot e' &= \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \overrightarrow{Z_{bb}/D} & \overrightarrow{(Z_{bb} - Z_{ab})/D} \\ \hline (Z_{bb} - Z_{ab})/D & (Z_{aa} - 2Z_{ab} + Z_{bb})/D \end{array} \cdot \begin{array}{c} e_a - e_b \\ e_b \end{array} \end{array} = \\ = i' &= \begin{array}{c} a' \begin{array}{c} \frac{Z_{bb}}{D} (e_a - e_b) + \frac{(Z_{bb} - Z_{ab})}{D} e_b \\ \hline \frac{(Z_{bb} - Z_{ab})}{D} (e_a - e_b) + \frac{(Z_{aa} - 2Z_{ab} + Z_{bb})}{D} e_b \end{array} \\ b' \end{array} = \begin{array}{c} a' \\ \hline b' \end{array} \begin{array}{c} i^{a'} \\ i^{b'} \end{array}, \end{aligned} \quad (4.47)$$

что выражает новые токи $i^{a'}$ и $i^{b'}$, текущие в системе, в терминах напряжений e_a, e_b , приложенных к катушкам, и импедансов каждой катушки.

III. Если численные значения, приведенные в табл. 4.1, подставить в новые n -матрицы, получим численные значения, данные в табл. 4.3.

Следует заметить, что формулы преобразования e и z дают только новое уравнение напряжения $e' = z' \cdot i'$. Уравнение должно быть преобразовано далее для нахождения неизвестных токов.

10. ТОКИ И НАПРЯЖЕНИЯ В ОТДЕЛЬНЫХ КАТУШКАХ

I. Когда новые токи i' определены, часто бывает необходимо знать протекающие токи и разности потенциалов, возникающие на каждой отдельной катушке.

Поскольку старая система (примитивная сеть) выбрана так, что каждая из ее осей состоит из отдельной катушки, то компоненты \mathbf{i} и \mathbf{e} представляют собой токи и напряжения, возникающие в отдельных катушках. Следовательно, надо установить соотношение между \mathbf{i} и \mathbf{e} и известными новыми токами \mathbf{i}' . Поскольку напряжение \mathbf{e} теперь приложено к катушке со стороны всей сети, а не только последовательно с ней, обозначим его \mathbf{e}_c . Как \mathbf{e} , так и \mathbf{e}_c имеют одинаковое численное значение в чисто-контурной сети.

Таблица 43

| | | | |
|---------------------------|------|------|------|
| | | a' | b' |
| $z' =$ | a' | 5 | -3 |
| | b' | -3 | 3 |
| | | a' | b' |
| $e' =$ | | -1 | 2 |
| | | | |
| | | a' | b' |
| $i' =$ | | 1/2 | 7/6 |
| | | | |
| $P' = e' \cdot i' = 11/6$ | | | |

II. Соотношение между \mathbf{i} и \mathbf{i}' дается уравнением преобразования $\mathbf{i} = \mathbf{C} \times \mathbf{i}'$. Следовательно, токи, протекающие в отдельных катушках, находятся из $\mathbf{i} = \mathbf{C} \cdot \mathbf{i}'$. Это соотношение уже было выведено при установлении матрицы преобразования.

Соотношение между \mathbf{e}_c и \mathbf{i}' можно получить при замене \mathbf{i} в $\mathbf{e} = \mathbf{z} \cdot \mathbf{i}$ на $\mathbf{C} \cdot \mathbf{i}'$ и \mathbf{e} на \mathbf{e}_c . Тогда $\mathbf{e}_c = \mathbf{z} \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{i}'$, где $\mathbf{z} \cdot \mathbf{C}$ уже было вычислено при нахождении \mathbf{z}' по формуле $\mathbf{C}_t \cdot \mathbf{z} \cdot \mathbf{C}$.

Следовательно, токи \mathbf{i} в отдельных катушках находятся по известным токам \mathbf{i}' :

$$\mathbf{i} = \mathbf{C} \cdot \mathbf{i}', \quad i^m = C_{m'}^m i^{m'}, \quad (4.48)$$

а падения напряжений \mathbf{e}_c на отдельных катушках находятся из $\mathbf{e}_c = \mathbf{z} \cdot \mathbf{i}$ или

$$\mathbf{e}_c = \mathbf{z} \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{i}', \quad e_m = Z_{mn} C_n^m i^{n'}. \quad (4.49)$$

Подчеркивается, что если старые токи \mathbf{i} и напряжения \mathbf{e} представляют не примитивную сеть, а некоторую другую эталонную сеть (ситуация, которая встречается, как будет показано ниже, часто), то по приведенным формулам вычисляют токи и напряжения не в отдельных катушках, а в некоторых совокупностях катушек. Следовательно, последние две формулы следует использовать только в тех случаях, когда старая сеть — примитивная.

III. Для рассматриваемой сети токи в отдельных катушках i^a и i^b находятся из уравнения (4.8), так что $i^a = i^{a'}$ и $i^b = i^{b'} - i^{a'}$.

Разности потенциалов, возникающие на отдельных катушках, находят из $(\mathbf{z} \cdot \mathbf{C}) \cdot \mathbf{i}'$, где $\mathbf{z} \cdot \mathbf{C}$ определяют из уравнения (4.40):

$$\begin{aligned}
 (\mathbf{z} \cdot \mathbf{C}) \cdot \mathbf{i} &= \begin{matrix} & \mathbf{a}' & \mathbf{b}' \\ \mathbf{a} & \boxed{\begin{array}{c|c} Z_{aa} - Z_{ab} & Z_{ab} \\ \hline Z_{ab} - Z_{bb} & Z_{bb} \end{array}} & \begin{matrix} \mathbf{a}' \\ \mathbf{b}' \end{matrix} \\ \mathbf{b} & \end{matrix} \cdot \begin{bmatrix} i^{a'} \\ i^{b'} \end{bmatrix} = \\
 &= \begin{matrix} \mathbf{a} & \boxed{(Z_{aa} - Z_{ab}) i^{a'} + Z_{ab} i^{b'}} \\ \mathbf{b} & \boxed{(Z_{ab} - Z_{bb}) i^{a'} + Z_{bb} i^{b'}} \end{matrix} = e_c. \quad (4.50)
 \end{aligned}$$

В этом уравнении каждая компонента дает напряжения, возникающие в соответствующей катушке в терминах новых найденных токов.

11. СОГЛАСЕНИЕ О ЗНАКАХ

1. Две катушки с взаимной индуктивностью можно соединить последовательно двумя различными способами:

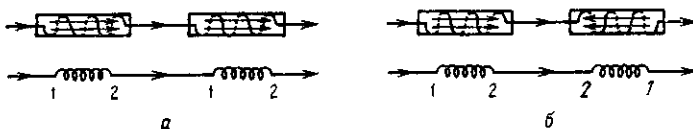


Рис. 4.5.

a — согласное соединение; *b* — встречное соединение.

1) поток идет от витков второй катушки к первой в том же направлении, что и ее собственный поток (рис. 4.5, *a*). Соединение называется «согласное»;

2) поток идет от витков второй катушки к первой в направлении, противоположном ее собственному потоку (рис. 4.5, *b*). Соединение называется «встречным».

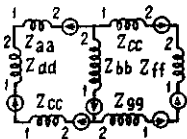


Рис. 4.6.

$Z_{aa} - Z_{dd}$ — согласное соединение, $Z_{aa} - Z_{bb}$ — встречное соединение

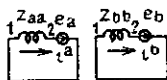


Рис. 4.7. Соглашение о знаках в примитивной сети.

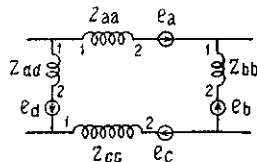


Рис. 4.8. Напряжение в контуре.

При обходе замкнутой цепи в *любом направлении* две катушки рассматриваются как *соединенные согласно*, если они соединены в порядке 1—2, 1—2 или 2—1, 2—1 (такими

на рис. 4.6 являются катушки Z_{aa} и Z_{dd} или катушки Z_{bb} и Z_{cc} и т. д.). Две катушки рассматриваются как *соединенные встречно*, если они соединены в порядке 1—2, 2—1 или 2—1, 1—2. Такими на рис. 4.6 являются катушки Z_{aa} и Z_{bb} или катушки Z_{cc} и Z_{gg} .

II. Предположим, что в «примитивной контурной сети» (рис. 4.7) положительные токи текут в каждой катушке от 1 к 2 и положительные напряжения приложены в каждой замкнутой цепи также от 1 к 2.

В новой сети в каждой отдельной катушке новые токи могут протекать в любых направлениях; в каждой замкнутой цепи положительные напряжения также могут быть приложены в любом направлении.

III. Рассматривая любой замкнутый контур (рис. 4.8) новой системы, видим, что каждой отдельной катушке может соответствовать приложенное напряжение (батарея, генератор и т. д.).

Это индивидуально приложенное напряжение в новой системе рассматривается как одна *старая* компонента вектора напряжения e , имеющая тот же индекс, что и соответствующая катушка. *Новыми компонентами вектора напряжения e' являются полные напряжения, существующие вдоль каждого замкнутого контура.* Следовательно, каждая компонента e' может содержать несколько приложенных напряжений.

IV. Конечно, могут быть введены любые другие соглашения о знаках.

12. ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЬ ЭТАПОВ ВЫВОДА УРАВНЕНИЙ

I. Уравнения напряжения любой контурной сети выводят за несколько этапов:

A. На первом этапе устанавливают примитивную контурную сеть и компоненты трех геометрических объектов i , z и e , принадлежащих ей.

1. Примитивную сеть можно при необходимости начертить отдельно; она состоит из всех катушек данной сети, короткозамкнутых на себя; каждая короткозамкнутая цепь включает любое напряжение, которое может быть приложено к катушке.

Если данная сеть содержит ветви, в которых нет импеданса, а есть только приложенное напряжение, то в простейших задачах можно допустить, что существует катушка с нулевым импедансом в этой ветви, и эта катушка также включается в примитивную сеть. Если ни импеданс, ни приложенное напряжение не существует в ветви (которая короткозамкнута), то эта ветвь не включается в примитивную сеть.

(Вообще ветвь с приложенным напряжением, но без импеданса должна рассматриваться как узловая пара, а не как контур. Такой метод анализа дан в гл. 16.)

2. Устанавливается тензор импеданса z примитивной сети,

который имеет столько строк и столбцов, сколько имеется катушек. Компоненты главной диагонали содержат все собственные импедансы, остальные — все взаимные импедансы различных катушек. Эта матрица симметрична при анализе большинства неподвижных сетей.

3. Вектор приложенного напряжения \mathbf{e} примитивной сети имеет столько компонент, сколько имеется катушек, и содержит напряжения, приложенные к данной сети; предполагается, что каждое приложенное напряжение принадлежит некоторой катушке. Обычно большинство компонент \mathbf{e} равно нулю.

4. Токи \mathbf{i} , протекающие в отдельных контурах, рассматриваются как переменные.

Далее будет показано, что примитивную сеть можно заменить любой другой удобной сетью, используемой как исходная точка.

Б. На следующем этапе получают матрицу преобразования \mathbf{C} , преобразующую примитивную сеть в действительную.

1. Где-нибудь в новой системе выбираем столько новых, но независимых токов \mathbf{i}' , сколько в ней имеется замкнутых цепей (контуров). Их порядок несуществен.

2. Записываем для каждой отдельной катушки токи, протекающие через нее, выражая их через выбранные новые токи; используем первый закон Кирхгофа.

3. Приравниваем величины старых и новых токов, протекающих в каждой отдельной катушке, т. е. устанавливаем соотношения

$$\mathbf{i} = \mathbf{C} \cdot \mathbf{i}', \quad \mathbf{i}^m = C_m^m \cdot \mathbf{i}^{m'}. \quad (4.51)$$

Существует столько уравнений, сколько катушек. Слева записаны старые токи, справа — новые.

4. Коэффициенты при новых токах \mathbf{i}' образуют матрицу преобразования \mathbf{C} .

В. Следующий этап заключается в нахождении новых компонент \mathbf{z}' и \mathbf{e}' и уравнения поведения $\mathbf{e}' = \mathbf{z}' \cdot \mathbf{i}'$ новой сети.

1. Новые компоненты тензора импеданса находят в два этапа по формуле преобразования

$$\mathbf{z}' = \mathbf{C}_t \cdot \mathbf{z} \cdot \mathbf{C}, \quad z_{m'n'} = z_{mn} C_m^m C_n^n; \quad (4.52)$$

сначала находят $\mathbf{z} \cdot \mathbf{C}$, затем $\mathbf{C}_t \cdot (\mathbf{z} \cdot \mathbf{C})$ или сначала $\mathbf{C}_t \cdot \mathbf{z}$, затем $(\mathbf{C}_t \cdot \mathbf{z}) \cdot \mathbf{C}$.

2. Контурные напряжения находят по формуле преобразования

$$\mathbf{e}' = \mathbf{C}_t \cdot \mathbf{e}, \quad e_{m'} = C_m^m e_m. \quad (4.53)$$

3. Уравнения напряжения новой сети

$$\mathbf{e}' = \mathbf{z}' \cdot \mathbf{i}', \quad e_{m'} = z_{m'n'} i^{n'}. \quad (4.54)$$

Г. Как только уравнение напряжения системы получено, его можно подвергнуть многим преобразованиям. Обычно для этого его расчленяют на несколько инвариантных уравнений. О таких расчленениях говорится в последующих главах.

Когда уравнение напряжения рассматривается как одно целое, неизвестные токи находят в два этапа.

1. Производят обращение тензора импеданса \mathbf{z}' , дающее тензор адмиттанса,

$$\mathbf{y}' = \mathbf{z}'^{-1}, \quad y^{n'm'} = (z_{m'n'})^{-1}. \quad (4.55)$$

2. Неизвестные токи находят из

$$\mathbf{i}' = \mathbf{y}' \cdot \mathbf{e}', \quad i^{n'} = y^{n'm'} e_{m'}, \quad (4.56)$$

что дает величины произвольно выбранных новых токов в терминах, приложенных к катушкам напряжений и импедансов катушек.

Как только неизвестные токи \mathbf{i}' вычислены, то:

3. Токи, протекающие в отдельных катушках, находят из соотношения

$$\mathbf{i} = \mathbf{C} \cdot \mathbf{i}', \quad i^m = C_{m'}^m i^{m'}, \quad (4.57)$$

которое уже установлено на этапе Б3.

4. Напряжения, индуцируемые в отдельных катушках, находят посредством $\mathbf{e}_c = \mathbf{z} \cdot \mathbf{i}$ или

$$\mathbf{e}_c = \mathbf{z} \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{i}', \quad e_m = z_{mn} C_{n'}^n i^{n'}, \quad (4.58)$$

где $\mathbf{z} \cdot \mathbf{C}$ уже вычислено на первом этапе при нахождении $\mathbf{C}_t \cdot \mathbf{z} \cdot \mathbf{C}$ на этапе В1.

II. Конечно, в простой сети без взаимных импедансов легче получить уравнения напряжения для различных контуров простым рассмотрением диаграммы сети и применением законов Кирхгофа, чем следовать приведенным выше этапам. Однако, как только сеть становится более сложной или нужно анализировать последовательность цепей, или вводятся новые координатные системы, описанные этапы сокращают количество уместенного и физического труда пропорционально сложности сети. Точное применение этих этапов необходимо, если уравнения должны расчленяться для дальнейших систематических преобразований. Их использование предполагает также новые методы рассуждений, вычислительные устройства и т. д.

Одним из достижений этого метода рассуждений является то, что не надо обращать внимания ни на существование взаимных импедансов между различными обмотками, ни на направление их связей и т. д. Величины и знаки взаимных напряжений автоматически учитываются при использовании тензора преобразования \mathbf{C} .

13. ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЬ ЭТАПОВ РАССУЖДЕНИЯ

I. Пусть n катушек соединены в n -контурные сети самыми различными способами. При выводе n уравнений напряжения каждой сети при помощи законов Кирхгофа обнаружено, что для каждой сети: 1) система уравнений различна; 2) возможно установление большого разнообразия систем n уравнений, отличных одна от другой и от систем уравнений для других сетей.

Цель организации метода анализа заключается в установлении уравнений напряжения для каждой контурной сети для всех способов выбора переменных в тождественной форме $e = z \cdot i$.

II. Чтобы сделать это, сначала *следует выделить* из многочисленных сетей *эталонную сеть* так, чтобы анализ этой сети был сравнительно прост. *Эта частная эталонная сеть называется примитивной сетью*. Уравнение напряжения этой примитивной сети легко установить в виде $e = z \cdot i$. (В качестве эталонной сети можно использовать любую другую сеть.)

Следующий шаг заключается в выяснении, *чем отличаются от примитивной сети все другие сети и чем сходны*.

1. Поскольку сети *отличаются* от примитивной сети только способом соединения катушек, то можно установить *матрицу преобразования* C для каждой сети, компоненты которой полностью представляют все *существенные* характеристики (способ соединения, способ выбора переменных и т. д.), которыми каждая частная сеть *отличается* от примитивной сети (или от любой другой «эталонной» сети, выбранной в качестве исходной точки).

2. Независимо от того, *чем являются* n катушек или как они соединены в n контуров, и независимо от того, *какие токи* выбраны в качестве переменных, *полная мгновенная входная мощность в каждой сети* $e \cdot i$ (линейная форма) *остаётся неизменной*, «инвариантной».

Эти соображения определяют *«тензор преобразования* C » *и формулу преобразования* одного геометрического объекта e .

Если компоненты C и формула преобразования *одного* геометрического объекта $e' = C \cdot e$ установлены, то формулы преобразования всех других геометрических объектов получаются автоматически из постулата, утверждающего, что все сети должны иметь одинаковые уравнения поведения.

III. Следует заметить, что не для всех сетей матричные уравнения поведения будут одинаковыми. Они обладают этой характеристикой только благодаря внутренне присущей им группе матриц преобразования C и *«инварианту» входной мощности* при всех способах соединений.

14. ВТОРОЙ ПРИМЕР

В качестве более сложного примера проанализируем контурную сеть (см. рис. 4.1, б), которая снова воспроизведена на рис. 4.9, а. Катушки Z_{aa} и Z_{cc} имеют асимметричные взаимные

индуктивности, так же как и Z_{dd} и Z_{ff} . Направление связей представлено цифрами 1—2. Катушки обозначены в произвольном порядке.

I. Согласно рассуждениям, изложенным в § 12, установим сначала примитивную сеть и ее геометрические объекты.

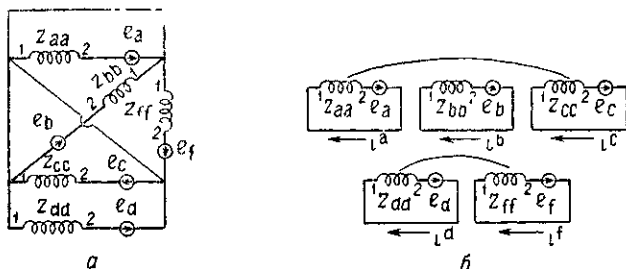


Рис. 4.9.

a — данная сеть; *б* — ее примитивная сеть.

A1. *Примитивная сеть* (рис. 4.9, б) содержит пять короткозамкнутых катушек.

A2. Тензор импеданса z примитивной сети

| | a | b | c | d | f |
|---|----------|----------|----------|----------|----------|
| a | Z_{aa} | | X_{ac} | | |
| b | | Z_{bb} | | | |
| c | X_{ca} | | Z_{cc} | | |
| d | | | | Z_{dd} | X_{df} |
| f | | | | X_{fd} | Z_{ff} |

(4.59)

Нулевые компоненты не показаны.

A3. Вектор приложенных напряжений примитивной сети

$$e = \begin{bmatrix} a & b & c & d & f \\ e_a & e_b & e_c & e_d & e_f \end{bmatrix}. \quad (4.60)$$

A4. Вектор тока

$$i = \begin{bmatrix} a & b & c & d & f \\ i^a & i^b & i^c & i^d & i^f \end{bmatrix}. \quad (4.61)$$

II. Следующий шаг состоит в нахождении тензора преобразования, показывающего, чем соединения сети на рис. 4.9, а отличаются от соединений примитивной сети на рис. 4.9, б.

Б1. Пусть предложены *пять* независимых токов (рис. 4.10, а). Можно принять, что они текут в некоторых катушках или в безымпедансных ветвях в любых направлениях.

Пять токов, выбранных в Б1, не являются *полностью произвольными*. Они должны быть *независимы друг от друга*, т. е. достаточны для определения всех токов, протекающих в остав-

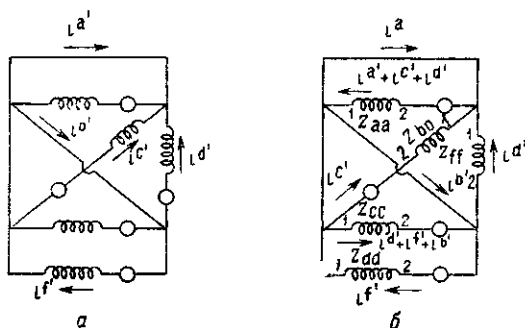


Рис. 4.10.

а — выбранные новые токи, б — токи в каждой катушке.

шихся ветвях. Например, если предположить, что на рис. 4.10, б ток $i^{f'}$ протекает не в катушке Z_{dd} , а в вертикальной безымпедансной ветви между катушками Z_{aa} и Z_{cc} , то токи в катушках Z_{cc} и Z_{dd} нельзя выразить через выбранные новые токи.

Б2. Новые токи, протекающие в каждой катушке, определяются по первому закону Кирхгофа (см. рис. 4.10, б).

Б3. Рассматривая рис. 4.10, б, приравниваем старые и новые токи, протекающие в каждой катушке.

В катушках

$$\begin{aligned}
 Z_{aa} \rightarrow i^a &= -i^{a'} - i^{c'} - i^{d'} & i^a &= -i^{a'} & -i^{c'} & -i^{d'} \\
 Z_{bb} \rightarrow i^b &= -i^{c'} & i^b &= & -i^{c'} & \\
 Z_{cc} \rightarrow i^c &= i^{d'} + i^{f'} - i^{b'} & i^c &= & -i^{b'} & + i^{d'} + i^{f'} \\
 Z_{dd} \rightarrow i^d &= -i^{f'} & i^d &= & & -i^{f'} \\
 Z_{ff} \rightarrow i^f &= -i^{d'} & i^f &= & & -i^{d'}
 \end{aligned} \quad (4.62)$$

Б4. Коэффициенты при новых токах образуют компоненты тензора преобразования

$$\mathbf{C} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} & \mathbf{a'} & \mathbf{b'} & \mathbf{c'} & \mathbf{d'} & \mathbf{f'} \\ \mathbf{a} & -1 & & -1 & -1 & \\ \mathbf{b} & & & -1 & & \\ \mathbf{c} & & & -1 & 1 & 1 \\ \mathbf{d} & & & & & -1 \\ \mathbf{f} & & & & -1 & \end{array} \end{array} , \quad \mathbf{C}_t = \mathbf{c}' = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} & \mathbf{a} & \mathbf{b} & \mathbf{c} & \mathbf{d} & \mathbf{f} \\ \mathbf{a'} & -1 & & & & \\ \mathbf{b'} & & & -1 & & \\ \mathbf{c'} & -1 & -1 & & & \\ \mathbf{d'} & -1 & & 1 & & -1 \\ \mathbf{f'} & & & 1 & -1 & \end{array} \end{array} . \quad (4.63)$$

III. Следующий этап — вычисление *новых* компонент различных геометрических объектов.

В1. Новые компоненты тензора импеданса находятся в два этапа.

Первый этап

$$\mathbf{z} \cdot \mathbf{C} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} & \mathbf{a'} & \mathbf{b'} & \mathbf{c'} & \mathbf{d'} & \mathbf{f'} \\ \mathbf{a} & -Z_{aa} & -X_{ac} & -Z_{aa} & -Z_{aa} + X_{ac} & X_{ac} \\ \mathbf{b} & & & -Z_{bb} & & \\ \mathbf{c} & -X_{ca} & -Z_{cc} & -X_{ca} & -X_{ca} + Z_{cc} & Z_{cc} \\ \mathbf{d} & & & & -X_{df} & -Z_{dd} \\ \mathbf{f} & & & & -Z_{ff} & -X_{fd} \end{array} \end{array} . \quad (4.64)$$

Второй этап $\mathbf{C}_t \cdot (\mathbf{z} \cdot \mathbf{C}) =$

$$\mathbf{z}' = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} & \mathbf{a'} & \mathbf{b'} & \mathbf{c'} & \mathbf{d'} & \mathbf{f'} \\ \mathbf{a'} & Z_{aa} & X_{ac} & Z_{aa} & Z_{aa} - X_{ac} & -X_{ac} \\ \mathbf{b'} & X_{ca} & Z_{cc} & X_{ca} & X_{ca} - Z_{cc} & -Z_{cc} \\ \mathbf{c'} & Z_{aa} & X_{ac} & Z_{aa} + Z_{bb} & Z_{ca} - X_{ac} & -X_{ac} \\ \mathbf{d'} & Z_{aa} - X_{ca} & X_{ca} - Z_{cc} & Z_{aa} - X_{ca} & -X_{ca} + Z_{cc} + Z_{ff} & -X_{ac} + Z_{cc} + X_{fd} \\ \mathbf{f'} & -X_{ca} & -Z_{cc} & -X_{ca} & -X_{ca} + Z_{cc} + X_{of} & Z_{cc} + Z_{dd} \end{array} \end{array} . \quad (4.65)$$

Если взаимные индуктивности одинаковы в обоих направлениях, т. е. если $X_{ac} = X_{ca}$ и так далее, то эта матрица импедансов симметрична. Симметричная форма окончательной матрицы может проверкой правильности вычислений.

В2. Напряжения, приложенные в новой системе, находятся следующим образом:

$$e' = C_f \cdot e = c' \begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \\ d' \\ f' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -e_a \\ -e_c \\ -e_a - e_b \\ -e_a + e_c - e_f \\ e_c - e_d \end{pmatrix}. \quad (4.66)$$

Каждая компонента e' дает напряжения вдоль замкнутого контура. Например, e_d' приложено вдоль контура через импедансы Z_{aa} , Z_{cc} и $-Z_{ff}$.

В3. Уравнение напряжения $e' = z' \cdot i'$ представляет пять уравнений с пятью неизвестными.

IV. Последние этапы — решение относительно неизвестных токов и напряжений на катушках, если только уравнение напряжения не подвергается другим преобразованиям.

Г1. Чтобы найти неизвестные i' , вычисляется обратная z' матрица по методу, указанному в гл. 1, § 13, или при помощи экономящего труд метода, который описан в гл. 10. Тензор проводимости, обратный тензору z' , имеет форму

$$y' = \begin{matrix} & \begin{matrix} a' & b' & c' & d' & f' \end{matrix} \\ \begin{matrix} a' \\ b' \\ c' \\ d' \\ f' \end{matrix} & \begin{pmatrix} \gamma^{aa} & \gamma^{ab} & \gamma^{ac} & \gamma^{ad} & \gamma^{af} \\ \gamma^{ba} & \gamma^{bb} & \gamma^{bc} & \gamma^{bd} & \gamma^{bf} \\ \gamma^{ca} & \gamma^{cb} & \gamma^{cc} & \gamma^{cd} & \gamma^{cf} \\ \gamma^{da} & \gamma^{db} & \gamma^{dc} & \gamma^{dd} & \gamma^{df} \\ \gamma^{fa} & \gamma^{fb} & \gamma^{fc} & \gamma^{fd} & \gamma^{ff} \end{pmatrix} \end{matrix}. \quad (4.67)$$

Его компонентами являются либо числа, либо комбинации импедансов и т. д.

Г2. Неизвестные токи

$$i' = y' \cdot e' = \begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \\ d' \\ f' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\gamma^{aa}e_a - \gamma^{ab}e_c - \gamma^{ac}(e_a + e_b) + \gamma^{ad}(e_c - e_a - e_f) + \gamma^{af}(e_c - e_d) \\ -\gamma^{ba}e_a - \gamma^{bb}e_c - \gamma^{bc}(e_a + e_b) + \gamma^{bd}(e_c - e_a - e_f) + \gamma^{bf}(e_c - e_d) \\ -\gamma^{ca}e_a - \gamma^{cb}e_c - \gamma^{cc}(e_a + e_b) + \gamma^{cd}(e_c - e_a - e_f) + \gamma^{cf}(e_c - e_d) \\ -\gamma^{da}e_a - \gamma^{db}e_c - \gamma^{dc}(e_a + e_b) + \gamma^{dd}(e_c - e_a - e_f) + \gamma^{df}(e_c - e_d) \\ -\gamma^{fa}e_a - \gamma^{fb}e_c - \gamma^{fc}(e_a + e_b) + \gamma^{fd}(e_c - e_a - e_f) + \gamma^{ff}(e_c - e_d) \end{pmatrix}. \quad (4.68)$$

Каждая компонента i' представляет собой один из неизвестных токов.

Г3. Когда неизвестные токи $i^{a'}$, $i^{b'}$ и другие найдены, тогда, если необходимо, находят токи в каждой отдельной катушке i^a , i^b и других из системы уравнений (4.62).

Г4. Напряжения, индуцируемые в каждой отдельной катушке, находят умножением $z \cdot C$ уравнения (4.64) на i' , т. е.

$$z \cdot C \cdot i' = e_c =$$

| | | |
|-----|--|--------|
| a | $-Z_{aa}i^{a'} - X_{ac}i^{b'} - Z_{aa}i^{c'} + (X_{ac} - Z_{aa})i^{d'} + X_{ac}i^{f'}$ | (4.69) |
| b | $-Z_{bb}i^{c'}$ | |
| = c | $-X_{ca}i^{a'} - Z_{cc}i^{b'} - X_{ca}i^{c'} + (Z_{cc} - X_{ca})i^{d'} + Z_{cc}i^{f'}$ | |
| d | $-X_{df}i^{d'} - Z_{dd}i^{f'}$ | |
| f | $-Z_{ff}i^{d'} - X_{fa}i^{f'}$ | |

СИНГУЛЯРНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

1. УРАВНЕНИЯ СВЯЗИ

I. В рассмотренных выше преобразованиях $i = Ci'$ новая сеть имела столько же контуров, сколько примитивная, а тензор преобразования C имел одинаковое количество строк и столбцов.

Однако в инженерной практике в большинстве сетей содержится больше катушек, чем контуров. Один из способов рассмотрения сетей заключается

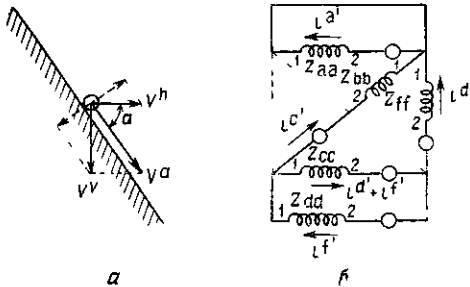


Рис. 5.1. Введение связей:
а — катящийся шарик; б — контурная сеть

в предположении, что сначала количество катушек и контуров в них одинаково, а затем некоторые или все их безымпедансные ветви размыкаются, так что токи по ним не текут.

Рассмотрим, например, сеть на рис. 5.1, б, состоящую из пяти катушек и трех контуров. Ее можно рассматривать как полученную из чисто-контурной сети (рис. 4.10) разрыванием двух безымпедансных ветвей, как показано пунктиром на рис. 5.1. Размыкание ветвей эквивалентно приравнению токов в них нулю, т. е. раскрытие двух безымпедансных ветвей эквивалентно введению следующих двух соотношений:

$$\begin{aligned} i^{c'} + i^{d'} - i^{b'} &= 0, \\ i^{b'} &= 0, \end{aligned} \tag{5.1}$$

которые должны существовать вместе с пятью новыми переменными (см. рис. 4.10).

II. Уравнения, которые выражают некоторые соотношения, существующие между переменными, в динамике называют уравнениями связи. Следовательно, разрывание ветвей эквивалентно введению связей путем запрещения вектору тока i^m иметь компоненты вдоль разорванных ветвей. Таким образом, вводится столько ограничений, сколько имеется разомкнутых контуров.

III. В динамике примером связи может служить падающее тело, вынужденное катиться по наклонной плоскости. Введение наклонной плоскости на пути свободно падающего тела запрещает вектору скорости v^m иметь компоненту, перпендикулярную плоскости. Это значит, что $v^m=0$ и есть уравнение связи (см. рис. 5.1, а), или если v^m выражена в терминах горизонтальной и вертикальной составляющих v^h и v^v , то уравнение связи имеет вид

$$v^v \cos \alpha - v^h \sin \alpha = 0,$$

представляя соотношение между v^v и v^h , имеющее место в любой момент времени.

Конечно, размыкание контуров — это только один из большого числа способов введения связей при анализе сетей. Ниже приведены другие примеры, такие как пренебрежение токами намагничивания и т. д.

IV. Наличие уравнений связи показывает, что исходное количество переменных может быть уменьшено на величину, равную количеству уравнений связи.

(В гл. 16, § 2 показано, что на самом деле вместо исключенных переменных должны быть введены другие переменные. Здесь эта более общая точка зрения не рассматривается.)

2. МАТРИЦЫ СИНГУЛЯРНЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ

I. С помощью каждого уравнения связи можно исключить одну переменную, выразив ее через остальные. В рассматриваемом случае две переменные, скажем $i^{b'}$ и $i^{c'}$, можно выразить через остальные

$$\begin{aligned} i^{b'} &= 0, \\ i^{c'} &= -i^{a'}, \end{aligned} \tag{5.2}$$

оставляя только три новых переменных ($i^{a'}$, $i^{d'}$ и $i^{e'}$) вместо пяти (в соответствии с новым количеством контуров), которые не зависят друг от друга.

II. Как следствие, соотношение $i = Ci'$, существующее между старыми и новыми токами (4.62), после подстановки соотношений (5.2), введенных связями, принимает вид

$$\begin{array}{l}
 i^a = -i^{a'} + i^{d'} - i^{d''} = -i^{a'} \\
 i^b = i^{d'} = i^{d'} \\
 i^c = i^{d'} + i^{f'} = i^{d'} + i^{f'} C = c \\
 i^d = -i^{f'} = -i^{f'} \\
 i^f = -i^{d'} = -i^{d'}
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{c}
 \begin{array}{ccc}
 & a' & d' & f' \\
 a & -1 & & \\
 b & & 1 & \\
 c & & 1 & 1 \\
 d & & & -1 \\
 f & & -1 &
 \end{array}
 \end{array}
 , \quad (5.3)$$

так что матрица преобразования имеет теперь три столбца вместо пяти в соответствии с тремя новыми контурами. То есть матрица преобразования C теперь не квадратная, а прямоугольная.

III. Прямоугольные матрицы преобразования C (не имеющие, следовательно, обратной, C^{-1}) называются сингулярными матрицами преобразования, а соответствующие преобразования (переменных) называются «сингулярными» преобразованиями. Квадратные матрицы преобразования, для которых можно найти обратные матрицы, называются «несингулярными», а соответствующие преобразования переменных — «несингулярными» преобразованиями.

В гл. 16 будет показано, что все выведенные ранее формулы, а также те, которые будут выведены, одинаково верны и для сингулярных и для несингулярных матриц преобразования C с той разницей, что формулы с C^{-1} не могут использоваться для сингулярных матриц преобразования C . Следовательно, если выведена сингулярная матрица преобразования C , то этапы определения z' и e' и этапы нахождения i' и т. д. точно такие же, что и для несингулярных матриц преобразования, так как не требуется вычислять C^{-1} .

Ниже будет также показано, что все сингулярные (прямоугольные) матрицы преобразования являются частными случаями несингулярных (квадратных) матриц преобразования, чьи столбцы удаляются из-за отсутствия переменных тока вдоль разомкнутых ветвей.

3. ЗАМЕНА СВЯЗЕЙ СИНГУЛЯРНОЙ МАТРИЦЕЙ C

I. Был использован окольный путь вывода приведенной выше сингулярной матрицы преобразований:

1) сначала предположили, что существует пять новых переменных (по числу катушек);

2) затем с помощью двух уравнений связи исключили две переменные, оставив только три новых переменных.

Однако при взаимосоединении электрических сетей можно избежать этого окольного пути установления сингулярной C ,

предположив с самого начала, что новая сеть имеет столько новых токов, сколько имеется замкнутых контуров.

Например, полагая в качестве трех новых переменных $i^{a'}$, $i^{d'}$, $i^{f'}$, можно, как показано на рис. 5.1, б, выразить новые токи, текущие в каждой отдельной катушке, через эти три тока. Приравнивая старые и новые токи, проходящие через каждую катушку, получаем сразу, без окольных рассуждений, систему уравнений (5.3).

Конечно, вместо $i^{a'}$, $i^{d'}$, $i^{f'}$ можно было взять в качестве новых переменных три других тока в ветвях. При этом матрица преобразования будет отличаться от (5.3).

II. Итак, если n катушек соединяются в сеть с менее чем n контурами, то весь метод анализа остается тот же, что и в случае новой сети с n контурами (см. гл. 4, § 13), за исключением того, что число новых выбранных переменных совпадает с числом новых контуров. Иначе говоря, любую контурную сеть с n катушками можно рассматривать как сеть с n контурами, но ток в некоторых контурах делается равным нулю в результате разрывания каких-либо ветвей.

Подчеркивается, что не всегда можно пренебречь установлением уравнений связи, заменив их сразу сингулярной матрицей C . Во многих случаях, особенно при введении гипотетических токов, сначала необходимо установить уравнения связи и только затем находить сингулярную C .

III. Следует помнить, что как только матрица преобразования установлена, в то же время вводятся и связи в системе. Имеется столько связей, сколько пропущено столбцов в C .

4. ВЫЧИСЛЕНИЯ С ПОМОЩЬЮ СИНГУЛЯРНОЙ МАТРИЦЫ C

I. Прimitivesкая сеть трехконтурной сети (рис. 5.1, б) и ее геометрические объекты z , e и i являются теми же, что и для первоначальной пятиконтурной сети (рис. 4.9, гл. 4, § 14).

Матрица преобразования C трехконтурной сети задается уравнением (5.3).

II. Следовательно, новые компоненты тензора-импеданса z' находятся из $C_t \cdot z \cdot C$

$$z \cdot C = \begin{array}{c} a' \\ b \\ c \\ d \\ f \end{array} \begin{array}{|c|c|c|} \hline -Z_{aa} & X_{ac} & X_{ac} \\ \hline & Z_{bb} & \\ \hline -X_{ca} & Z_{cc} & Z_{cc} \\ \hline & -X_{df} & -Z_{dd} \\ \hline & -Z_{ff} & -X_{fd} \\ \hline \end{array} ; \quad (5.4) \quad C_t = \begin{array}{c} a' \\ f' \end{array} \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline -1 & & & & \\ \hline & 1 & 1 & & -1 \\ \hline & & 1 & -1 & \\ \hline \end{array}$$

$$C_t(z \cdot C) = z' = d' \quad (5.5)$$

| | a' | d' | f' |
|------|-----------|----------------------------|-------------------|
| a' | Z_{aa} | $-X_{ac}$ | $-X_{ac}$ |
| d' | $-X_{ca}$ | $Z_{bb} + Z_{cc} + Z_{ff}$ | $Z_{cc} + X_{fd}$ |
| f' | $-X_{ca}$ | $Z_{cc} + X_{df}$ | $Z_{cc} + Z_{dd}$ |

Необходимо подчеркнуть, что тензор импеданса z' новой сети имеет столько строк и столбцов, сколько контуров в сети. Если взаимные индуктивности одинаковы в двух направлениях, то матрица тензора симметричная.

Новый вектор приложенного напряжения

$$C_t \cdot e = e' = d' \quad (5.6)$$

| | a' |
|------|-------------------|
| a' | $-e_a$ |
| d' | $e_b + e_c - e_f$ |
| f' | $e_c - e_d$ |

и представляет напряжения, приложенные к трем замкнутым контурам. Например, $e^{a'}$ есть приложенное напряжение к контуру с импедансами Z_{cc} и Z_{dd} , $e^{d'}$ — напряжение на контуре Z_{bb} , Z_{cc} и Z_{ff} , а $e^{a'}$ — на контуре с Z_{aa} .

Необходимо подчеркнуть также, что диагональные компоненты z' представляют сумму собственных импедансов каждого из трех контуров, по которым суммируется напряжение. Остальные компоненты z' представляют взаимные импедансы трех контуров относительно друг друга. В них входят собственные импедансы катушек, принадлежащих одновременно двум контурам.

III. Чтобы найти токи i' , надо сначала обратить z' с помощью метода, описанного в гл. 1, § 23:

$$y' = d' \quad (5.7)$$

| | a' | d' | f' |
|------|----------|----------|----------|
| a' | Y^{aa} | Y^{ad} | Y^{af} |
| d' | Y^{da} | Y^{dd} | Y^{df} |
| f' | Y^{fa} | Y^{fd} | Y^{ff} |

Следовательно, вектор тока имеет вид

$$i' = y' \cdot e' = d' \quad (5.8)$$

| a' | $-Y^{aa}e_a + Y^{ad}(e_b + e_c - e_f) + Y^{af}(e_c - e_d)$ |
|------|--|
| d' | $-Y^{da}e_a + Y^{dd}(e_b + e_c - e_f) + Y^{df}(e_c - e_d)$ |
| f' | $-Y^{fa}e_a + Y^{fd}(e_b + e_c - e_f) + Y^{ff}(e_c - e_d)$ |

и его компоненты представляют собой соответственно $i^{a'}$, $i^{d'}$, $i^{f'}$ ¹⁾.

Токи в отдельных катушках находят из системы уравнений (5.3) в виде $\mathbf{i} = \mathbf{C} \cdot \mathbf{i}'$.

Напряжения, индуцированные в пяти отдельных катушках, находят с помощью выражения $\mathbf{z} \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{i}'$, где $\mathbf{z} \cdot \mathbf{C}$ уже вычислено в уравнении (5.4):

$$e_c = \mathbf{z} \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{i}' = c \begin{array}{|l} a \\ b \\ c \\ d \\ f \end{array} \begin{array}{|l} -Z_{aa}i^{a'} + X_{ac}(i^{d'} + i^{f'}) \\ Z_{bb}i^{d'} \\ -X_{ca}i^{a'} + Z_{cc}(i^{d'} + i^{f'}) \\ -X_{df}i^{d'} - Z_{dd}i^{f'} \\ -Z_{ff}i^{d'} - X_{fd}i^{f'} \end{array} \cdot \quad (5.9)$$

Следует отметить, что хотя различные векторы и тензоры имеют разное число строк и столбцов, однако *правило умножения с помощью стрелок сохраняется*, так как *порядок* геометрических объектов в различных формулах автоматически учитывает это различие.

5. РАСПРЕДЕЛИТЕЛЬНАЯ ЦЕПЬ

I. Чтобы привести пример, в котором *несколько катушек объединены в одну ветвь*, рассмотрим трехфазную четырехпроводную распределительную цепь, которая питается от звездообразной вторичной обмотки трансформатора. Нагрузка несимметрична (рис. 5.2, а). (Более быстрый и систематичный метод решения трехфазных несимметричных сетей приведен в гл. 19.)

II. Тензор импеданса примитивной сети (рис. 5.2, в) выглядит так:

¹⁾ Сингулярные преобразования соответствуют геометрическим движениям k -плоскости в n -мерном пространстве. При этих движениях проекции k компонент на $n-k$ — подпространство равны нулю. Инвариантность мощности имеет смысл для ортогональных сетей, которые описывают преобразование n -мерного пространства самого в себя. См. гл. 16 «Ортогональные сети». (Прим. пер.)

| | a | b | c | n | a' | b' | c' | n' | a'' | b'' | c'' | n'' |
|-------|----------|----------|----------|----------|------------|------------|------------|------------|--------------|--------------|--------------|--------------|
| a | Z_{aa} | X_{ab} | X_{ac} | | | | | | | | | |
| b | X_{ba} | Z_{bb} | X_{bc} | | | | | | | | | |
| c | X_{ca} | X_{cb} | Z_{cc} | | | | | | | | | |
| n | | | | Z_{nn} | | | | | | | | |
| a' | | | | | $Z_{a'a'}$ | $X_{a'b'}$ | $X_{a'c'}$ | $X_{a'n'}$ | | | | |
| b' | | | | | $X_{b'a'}$ | $Z_{b'b'}$ | $X_{b'c'}$ | $X_{b'n'}$ | | | | |
| c' | | | | | $X_{c'a'}$ | $X_{c'b'}$ | $Z_{c'c'}$ | $X_{c'n'}$ | | | | |
| n' | | | | | $X_{n'a'}$ | $X_{n'b'}$ | $X_{n'c'}$ | $Z_{n'n'}$ | | | | |
| a'' | | | | | | | | | $Z_{a''a''}$ | $X_{a''b''}$ | $X_{a''c''}$ | |
| b'' | | | | | | | | | $X_{b''a''}$ | $Z_{b''b''}$ | $X_{b''c''}$ | |
| c'' | | | | | | | | | $X_{c''a''}$ | $X_{c''b''}$ | $Z_{c''c''}$ | |
| n'' | | | | | | | | | | | | $Z_{n''n''}$ |

(5.10)

Нули в матрице не пишут.

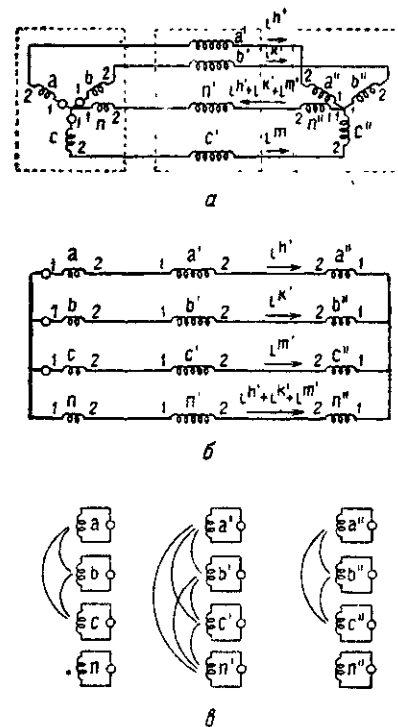


Рис. 5.2. Распределительная сеть:
 a — данная сеть; $б$ — упрощенная диаграмма; $в$ — примитивная сеть.

Вектор приложенного напряжения

$$e = \begin{bmatrix} a & b & c & n & a' & b' & c' & n' & a'' & b'' & c'' & n'' \\ e_a & e_b & e_c & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (5.11)$$

Поскольку имеется три замкнутых цепи, будем считать, что новые токи есть три тока в линиях $i^{h'}$, $i^{k'}$, $i^{m'}$. Нейтральный ток есть $i^{h'} + i^{k'} + i^{m'}$.

III. Устанавливаем соотношение между старыми и новыми токами, текущими в каждой катушке:

$$\begin{array}{l}
 i^a = i^{h'} \\
 i^b = i^{k'} \\
 i^c = i^{m'} \\
 i^n = -i^{h'} - i^{k'} - i^{m'} \\
 i^{a'} = i^{h'} \\
 i^{b'} = i^{k'} \\
 i^{c'} = i^{m'} \\
 i^{n'} = -i^{h'} - i^{k'} - i^{m'} \\
 i^{a''} = i^{h'} \\
 i^{b''} = i^{k'} \\
 i^{c''} = i^{m'} \\
 i^{n''} = -(i^{h'} + i^{k'} + i^{m'})
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{c}
 \begin{array}{ccc}
 h' & k' & m' \\
 a & 1 & \\
 b & & 1 \\
 c & & & 1 \\
 n & -1 & -1 & -1 \\
 a' & 1 & & \\
 b' & & 1 & \\
 c' & & & 1 \\
 n' & -1 & -1 & -1 \\
 a'' & 1 & & \\
 b'' & & 1 & \\
 c'' & & & 1 \\
 n'' & -1 & -1 & -1
 \end{array} \\
 C =
 \end{array}
 \quad (5.12)$$

Коэффициенты перед новыми токами дают C .

IV. Новые компоненты тензора импедансов z' находятся преобразованием $C_i \cdot z \cdot C = z' =$

| | h' | k' | m' | |
|--------|----------------------------|-----------------------------|-----------------------------|----------|
| h' | $Z_{aa} + Z_{nn}$ | $X_{ab} + Z_{nn}$ | $X_{ac} + Z_{nn}$ | (5.13) |
| | $+ Z_{a'a'} - 2X_{a'n'}$ | $+ X_{a'b'} - X_{n'b'}$ | $+ X_{a'c'} - X_{n'c'}$ | |
| | $+ Z_{n'n'}$ | $- X_{a'n'} + Z_{n'n'}$ | $- X_{a'n'} + Z_{n'n'}$ | |
| $= k'$ | $X_{ba} + Z_{nn}$ | $Z_{bb} + Z_{nn}$ | $X_{bc} + Z_{nn}$ | (5.13) |
| | $+ X_{b'a'} - X_{n'a'}$ | $+ Z_{b'b'} - 2X_{b'n'}$ | $+ X_{b'c'} - X_{n'c'}$ | |
| | $- X_{b'n'} + Z_{n'n'}$ | $+ Z_{n'n'}$ | $- X_{b'n'} - Z_{n'n'}$ | |
| m' | $X_{cc} + Z_{nn}$ | $X_{cb} + Z_{nn}$ | $Z_{cc} + Z_{nn}$ | (5.13) |
| | $+ X_{c'a'} + X_{n'a'}$ | $+ X_{c'b'} - X_{n'b'}$ | $+ Z_{c'c'} - 2X_{c'n'}$ | |
| | $- X_{c'n'} + Z_{n'n'}$ | $+ X_{c'n'} + Z_{n'n'}$ | $+ Z_{n'n'}$ | |
| | $+ X_{c'a''} + Z_{n''n''}$ | $+ X_{c''b''} + Z_{n''n''}$ | $+ Z_{c''c''} + Z_{n''n''}$ | |

Вектор приложенного напряжения $C_t \cdot e =$

$$= e' = \begin{bmatrix} e_a & e_b & e_c \end{bmatrix}. \quad (5.14)$$

Токи находятся по формуле $i' = z'^{-1} \cdot e'$.

V. Токи в отдельных катушках находятся из $i = C \cdot i'$, а разности потенциалов, возникающие на отдельных катушках, — из $z \cdot C \cdot i'$

6. МОСТОВАЯ СХЕМА

I. В качестве более сложного примера рассмотрим сеть на рис. 5.3, а, содержащую восемь катушек.

Когда на рисунке катушки пересекают одна другую, не всегда сразу понятно, сколько имеется контуров. В таких случаях лучше

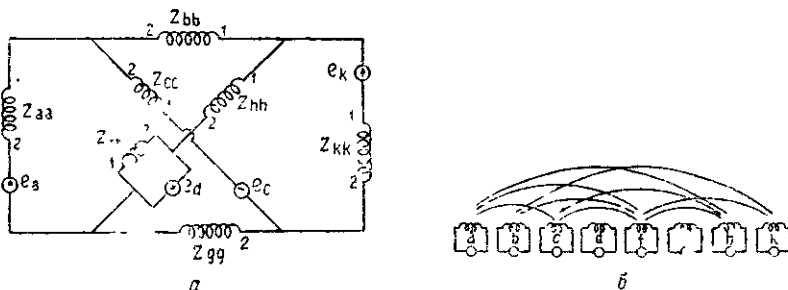


Рис. 5.3. Мостовая сеть:
а — данная сеть; б — ее примитивная сеть.

всего сначала найти число *узловых пар* (количество узлов минус количество подсетей; в данном случае $5-1=4$), а затем найти число *контуров* (число катушек минус число узловых пар; в данном случае $8-4=4$). Итак, число контуров сети равно четырем.

II. Первый этап состоит в том, чтобы установить примитивную сеть и ее геометрические объекты.

1. Примитивная сеть (рис. 5.3, б) показывает, что взаимных индуктивностей между некоторыми катушками нет. Импеданс Z_{dd} вдоль приложенного напряжения e_d равен нулю. Однако его наличие следует учитывать в примитивной сети, так как импеданс и напряжение всегда связаны в каждом ее контуре. (В более общей теории, которая будет развита в гл. 16, нет необходимости вводить дополнительную ось d вдоль Z_{dd} .)

2. Ее тензор импедансов имеет вид

$$z = \begin{array}{c} \begin{array}{cccccccc} & a & b & c & d & f & g & h & k \\ \begin{array}{c} a \\ b \\ c \\ d \\ f \\ g \\ h \\ k \end{array} & \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline Z_{aa} & 0 & Z_{ac} & 0 \\ \hline 0 & Z_{bb} & 0 & 0 \\ \hline Z_{ac} & 0 & Z_{cc} & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline Z_{af} & Z_{bf} & Z_{cf} & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline Z_{ah} & 0 & Z_{ch} & 0 \\ \hline 0 & Z_{bk} & 0 & 0 \\ \hline \end{array} & \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline Z_{af} & 0 & Z_{ah} & 0 \\ \hline Z_{bf} & 0 & 0 & Z_{bk} \\ \hline Z_{cf} & 0 & Z_{ch} & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline Z_{ff} & 0 & Z_{fh} & Z_{fk} \\ \hline 0 & Z_{gg} & 0 & 0 \\ \hline Z_{fh} & 0 & Z_{hh} & 0 \\ \hline Z_{fk} & 0 & 0 & Z_{kk} \\ \hline \end{array} \end{array} \end{array} \quad (5.15)$$

3. Вектор приложенного напряжения

$$e = \begin{array}{c} \begin{array}{cccccccc} & a & b & c & d & f & g & h & k \\ \begin{array}{c} e_a \\ 0 \\ e_c \\ e_d \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ e_k \end{array} \end{array} \end{array} \quad (5.16)$$

4. Вектор токов, представляющий *старые* переменные,

$$i = \begin{array}{c} \begin{array}{cccccccc} & a & b & c & d & f & g & h & k \\ \begin{array}{c} i^a \\ i^b \\ i^c \\ i^d \\ i^f \\ i^g \\ i^h \\ i^k \end{array} \end{array} \end{array}$$

III. Следующий шаг состоит в установлении матрицы преобразования C .

1. Новая система имеет *четыре* контура, поэтому вводим четыре произвольных новых тока (рис. 5.4, а)

$$i' = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} & a' & b' & c' & d' \\ \begin{array}{c} i^{a'} \\ i^{b'} \\ i^{c'} \\ i^{d'} \end{array} \end{array} \end{array}$$

2. Токи в каждой катушке выражаются через $i^{a'}$, $i^{b'}$, $i^{c'}$ и $i^{d'}$ (рис. 5.4, б).

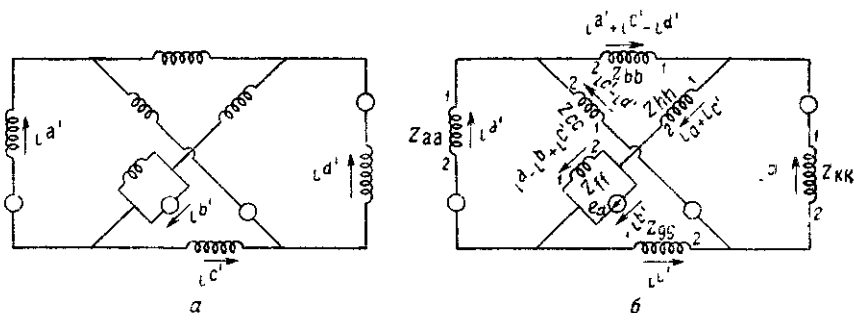


Рис. 5.4.

а — выбранные новые токи; б — новые токи в каждой катушке.

3. Приравнявая старые и новые токи в каждой отдельной катушке, получаем следующие восемь уравнений:

$$\begin{aligned}
 i^a &= -i^{a'} \\
 i^b &= -i^{a'} - i^{c'} + i^{d'} \\
 i^c &= i^{c'} - i^{d'} \\
 i^d &= i^{b'} \\
 i^f &= -i^{a'} + i^{b'} - i^{c'} \\
 i^g &= i^{c'} \\
 i^h &= i^{a'} + i^{c'} \\
 i^k &= -i^{d'}
 \end{aligned}$$

| | a' | b' | c' | d' |
|-----|------|------|------|------|
| a | -1 | 0 | 0 | 0 |
| b | -1 | 0 | -1 | 1 |
| c | 0 | 0 | 1 | -1 |
| d | 0 | 1 | 0 | 0 |
| f | -1 | 1 | -1 | 0 |
| g | 0 | 0 | 1 | 0 |
| h | 1 | 0 | 1 | 0 |
| k | 0 | 0 | 0 | -1 |

(5.17)

Коэффициенты при *новых* токах образуют матрицу преобразования.

IV. Как только матрица преобразования C установлена, новые компоненты геометрических объектов находятся автоматически, а именно:

1. Новые компоненты тензора импеданса находятся из $C_i \cdot z \cdot C$:

| | a' | b' | c' | d' |
|----|-------------------------|------------------|--------------------------------|-------------------------|
| a' | $Z_{aa}+Z_{af}-Z_{ah}$ | | $Z_{bb}+Z_{bf}-Z_{ac}$ | $-Z_{bb}-Z_{bf}+Z_{ac}$ |
| | $+Z_{bb}+Z_{bf}+Z_{af}$ | $-Z_{af}-Z_{bf}$ | $+Z_{af}+Z_{bf}+Z_{ff}$ | $+Z_{bk}+Z_{fk}$ |
| b' | $+Z_{bf}+Z_{ff}-Z_{fh}$ | $-Z_{ff}+Z_{fh}$ | $-Z_{fh}-Z_{ah}-Z_{fh}$ | $+Z_{cf}-Z_{ch}$ |
| | $-Z_{ah}-Z_{fh}+Z_{hh}$ | | $+Z_{hh}-Z_{cf}+Z_{ch}$ | |
| b' | $-Z_{af}-Z_{bf}-Z_{ff}$ | Z_{ff} | $-Z_{bf}+Z_{cf}-Z_{ff}$ | $-Z_{bf}-Z_{cf}$ |
| | $+Z_{fh}$ | | $+Z_{fh}$ | $-Z_{fk}$ |
| c' | $-Z_{ac}+Z_{af}-Z_{ah}$ | | $Z_{bb}+Z_{bf}+Z_{cc}$ | $-Z_{bb}-Z_{bf}-Z_{cc}$ |
| | $+Z_{bb}+Z_{bf}+Z_{bf}$ | $-Z_{bf}+Z_{cf}$ | $-Z_{cf}+Z_{ch}+Z_{bf}$ | $+Z_{cf}-Z_{ch}$ |
| c' | $-Z_{cf}+Z_{ff}-Z_{fh}$ | $-Z_{ff}+Z_{fh}$ | $-Z_{cf}+Z_{ff}-Z_{fh}$ | $+Z_{bk}+Z_{fk}$ |
| | $+Z_{ch}-Z_{fh}+Z_{hh}$ | | $+Z_{gg}+Z_{ch}-Z_{fh}+Z_{hh}$ | |
| d' | $Z_{ac}-Z_{bb}+Z_{bk}$ | $Z_{bf}-Z_{cf}$ | $-Z_{bb}+Z_{bk}-Z_{cc}$ | $Z_{bb}-Z_{bk}+Z_{cc}$ |
| | $-Z_{bf}+Z_{cf}+Z_{fk}$ | $-Z_{fk}$ | $-Z_{bf}+Z_{cf}+Z_{fk}$ | $-Z_{bk}+Z_{kk}$ |
| | $-Z_{ch}$ | | $-Z_{ch}$ | |

(5.18)

Этот окончательный тензор импедансов можно записать так:

$$z' = \begin{matrix} & \begin{matrix} a' & b' & c' & d' \end{matrix} \\ \begin{matrix} a' \\ b' \\ c' \\ d' \end{matrix} & \begin{matrix} | & | & | & | \\ Z_{a'a'} & Z_{a'b'} & Z_{a'c'} & Z_{a'd'} \\ | & | & | & | \\ Z_{a'b'} & Z_{b'b'} & Z_{b'c'} & Z_{b'd'} \\ | & | & | & | \\ Z_{a'c'} & Z_{b'c'} & Z_{c'c'} & Z_{c'd'} \\ | & | & | & | \\ Z_{a'd'} & Z_{b'd'} & Z_{c'd'} & Z_{d'd'} \end{matrix} \end{matrix} \quad (5.19)$$

2. Вектор приложенных напряжений e' , представляющий контурные напряжения, находится и $C_1 e =$

$$e' = \begin{matrix} a' & b' & c' & d' \\ \hline -e_a & e_d & e_c & -e_c - e_k \end{matrix} \quad (5.20)$$

Если предположить, что последовательно с каждой катушкой существует приложенное напряжение, т. е. если ни одна из компонент e уравнения (5.16) не равна нулю, то

$$e' = \begin{matrix} a' & b' & c' & d' \\ \hline -e_a - e_b - e_f + e_h & e_d + e_f & -e_b + e_c - e_f + e_g + e_h & e_b - e_c - e_k \end{matrix} \quad (5.21)$$

Эта формула показывает четыре контура рис. 5.5, уравнения напряжения которых задаются в виде $e' = z' \cdot i'$. Знаки при напряжениях e' показывают также направление обхода каждой

замкнутой цепи. Уравнение напряжения можно подвергнуть различным преобразованиям.

V. Токи i' находим обращением z' и умножением результата на e' , т. е. $z'^{-1} \cdot e'$.

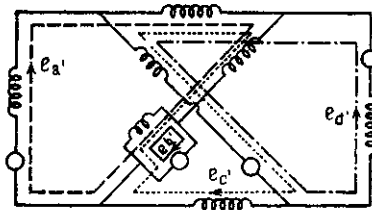


Рис. 5.5. Напряжения в контурах.

Токи в отдельных катушках при необходимости находят вычислением $i = C \cdot i'$, как в уравнениях (5.17). Напряжения в отдельных катушках находят из $z \cdot C i'$.

7. ПОТЕНЦИАЛЫ НА РАЗОМКНУТЫХ КАТУШКАХ

I. Если необходимо найти разность потенциалов на разомкнутых катушках, то *примитивная сеть также должна включать катушки, которые оставлены разомкнутыми после взаимосоединения. Процедура является точно такой же, как в случае наличия тока во всех катушках.*

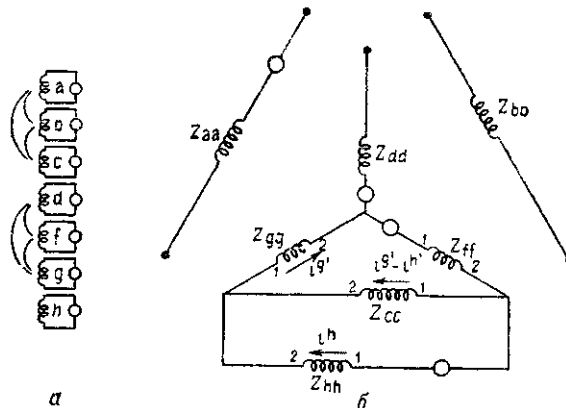


Рис. 5.6. Разомкнутые катушки:
а — примитивная сеть; б — данная сеть.

II. Проанализируем, например, цепь на рис. 5.6, б. Тензор импедансов и приложенное напряжение для примитивной сети, показанной на рис. 5.6, а, имеют вид

| | | | | | | | | |
|--------------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|-----------|
| | <i>a</i> | <i>b</i> | <i>c</i> | <i>d</i> | <i>f</i> | <i>g</i> | <i>h</i> | |
| <i>a</i> | Z_{aa} | X_{ab} | X_{ac} | | | | |), (5.22) |
| <i>b</i> | X_{ab} | Z_{bb} | X_{bc} | | | | | |
| <i>c</i> | X_{ac} | X_{bc} | Z_{cc} | | | | | |
| <i>z = d</i> | | | | Z_{dd} | X_{df} | X_{dg} | | |
| <i>f</i> | | | | X_{df} | Z_{ff} | X_{fg} | | |
| <i>g</i> | | | | X_{dg} | X_{fg} | Z_{gg} | | |
| <i>h</i> | | | | | | | Z_{hh} | |

| | | | | | | | | |
|------------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|-----------|
| | <i>a</i> | <i>b</i> | <i>c</i> | <i>d</i> | <i>f</i> | <i>g</i> | <i>h</i> | |
| <i>e =</i> | e_a | | | e_d | e_f | | e_h |). (5.23) |

Во взаимосвязанной системе имеется только два замкнутых контура, следовательно, вводим два новых тока, скажем $i^{h'}$ и $i^{g'}$. Тензор преобразования имеет вид

| | | | | |
|-------------------------|--------------|-----------|-----------|-----------|
| | | <i>g'</i> | <i>h'</i> | |
| $i^a = 0$ | <i>a</i> | 0 | 0 |). (5.24) |
| $i^b = 0$ | <i>b</i> | 0 | 0 | |
| $i^c = i^{g'} - i^{h'}$ | <i>c</i> | 1 | -1 | |
| $i^d = 0$ | <i>C = d</i> | 0 | 0 | |
| $i^f = i^{g'}$ | <i>f</i> | 1 | 0 | |
| $i^g = i^{g'}$ | <i>g</i> | 1 | 0 | |
| $i^h = i^{h'}$ | <i>h</i> | 0 | 1 | |

Заметим, что в строках С, соответствующих разомкнутым катушкам *a*, *b* и *d*, все компоненты равны нулю.

Тензор импедансов z' находят из $C_t \cdot z \cdot C$

| | | | | |
|--------|-----------|--------------------------------------|-------------------|-----------|
| | | <i>g'</i> | <i>h'</i> | |
| $z' =$ | <i>g'</i> | $Z_{cc} + Z_{ff} + Z_{gg} + 2X_{fg}$ | $-Z_{cc}$ |). (5.25) |
| | <i>h'</i> | $-Z_{cc}$ | $Z_{cc} + Z_{hh}$ | |

III. Токи находят по формуле $i' = z'^{-1}e'$, где $C_t \cdot e =$

$$= e' = \begin{bmatrix} g' & h' \\ e_f & e_h \end{bmatrix}. \quad (5.26)$$

Токи i в отдельных катушках вычисляют из $i = C \cdot i'$. Напряжения, возникающие на всех отдельных катушках, открытых или замкнутых, имеют вид

$$e_c = z \cdot C \cdot i' = d \begin{array}{|c|} \hline a & X_{ac} (i^{g'} - i^{h'}) \\ \hline b & X_{bc} (i^{g'} - i^{h'}) \\ \hline c & Z_{cc} (i^{g'} - i^{h'}) \\ \hline d & (X_{df} + X_{dg}) i^{g'} \\ \hline f & (Z_{ff} + X_{fg}) i^{g'} \\ \hline g & (Z_{gg} + X_{fg}) i^{g'} \\ \hline h & Z_{hh} i^{h'} \\ \hline \end{array}. \quad (5.27)$$

8. ТЕНЗОР АДМИТТАНСОВ ОТДЕЛЬНЫХ КАТУШЕК

I. Применяемый до сих пор метод рассуждения требовал трех этапов для определения тока i в каждой катушке, обусловленного напряжением e , приложенным к другой катушке. Эти три этапа, начиная с известного напряжения в катушке e , следующие:

- 1) найти контурное напряжение e' по формуле $C_t \cdot e$;
- 2) найти контурный ток i' по формуле $z'^{-1} \cdot e'$;
- 3) найти ток i в катушке по формуле $C \cdot i'$.

Это значит: чтобы найти ток в катушке через известное напряжение в катушке, в качестве промежуточных шагов нужно вычислить две контурные величины.

II. Многие контурные задачи можно сформулировать следующим образом: «Дано напряжение e_a , последовательное с катушкой a . Каков ток i^b в другой катушке b ?» Другими словами, задача в следующем: каковы собственные и взаимные адмиттансы отдельных катушек, когда они соединяются? Этот тензор должен иметь столько строк и столбцов, сколько имеется катушек.

Конечно, до того как катушки соединены, их собственные и взаимные адмиттансы находятся решением уравнения $e = z \cdot i$, которое дает $y = z^{-1}$. Однако этот тензор адмиттансов не годится, когда n катушек соединяются в сеть с менее чем n контурами, даже если в нем столько же строк и столбцов, сколько катушек в сети.

Следует отметить, что если n катушек соединяются в контурную сеть с n контурами, то два тензора адмиттансов (выраженные вдоль отдельных катушек) одинаковы. Если контуров меньше, чем n , то в системе имеются связи и, значит, две величины y (вычисленные при наличии связей и без них) должны быть различны.

Собственные и взаимные адмиттансы отдельных катушек y_c могут быть найдены из одной формулы объединением описанных выше трех этапов в один. При их объединении отпадает необходимость в вычислении промежуточных величин: контурных напряжений и токов e' и i' .

Пусть уравнение примитивной сети имеет вид

$$e = z \cdot i, \quad e_m = z_{mn} \cdot i^n.$$

Заменяя e на $C_i^{-1} \cdot e'$ и i на $C \cdot i'$, получаем

$$C_i^{-1} e' = z C i', \quad C_m^m e_{m'} = Z_{mn} C_n^n i^{n'}.$$

Умножая обе части на C_i , получаем контурное уравнение

$$e' = C_i z C i', \quad e'_m = z_{mn} C_m^m C_n^n i^{n'}.$$

Решая относительно i' , получим:

$$i' = (C_i z C)^{-1} e', \quad i^{n'} = y^{n'm'} e_{m'}. \quad (5.28)$$

Это уравнение уже было выведено ранее.

III Теперь заменим i' на $C^{-1} i$ и $e' = C_i e$, чтобы выразить уравнение по осям отдельных катушек:

$$C^{-1} i = (C_i z C)^{-1} C_i e, \quad C_n^n i^n = y^{n'm'} C_m^m e_{m'}.$$

Умножим обе части на C :

$$i = C (C_i z C)^{-1} C_i e, \quad i^n = y^{n'm'} C_n^n C_m^m e_{m'}.$$

Поскольку уравнение имеет форму

$$i = y_c e, \quad i^n = y^{nm} e_m,$$

то тензор отдельных адмиттансов имеет вид:

$$y_c = C (C_i z C)^{-1} C_i; \quad (5.29)$$

$$y_c = C y' C_i, \quad y^{nm} = y^{n'm'} C_n^n C_m^m. \quad (5.30)$$

Таким образом, тензор адмиттансов отдельных катушек находится из тензора адмиттансов контуров y' (вычисленного обычным путем) простым преобразованием его с помощью C . Иначе говоря, имеют место следующие этапы:

1) преобразовать z примитивной сети в z' с помощью C как $C_i \cdot z \cdot C$;

2) найти обратную z' величину y' ;

3) преобразовать y' опять в y с помощью C как $C \cdot y' \cdot C_t$.

Следует отметить, что в преобразовании z в z' сначала появляется C_t , а затем C ; а при преобразовании y' в y сначала появляется C , а затем C_t .

IV. Если тензор преобразования C квадратный (т. е. если новая сеть также имеет n контуров), то можно вычислить C^{-1} и уравнение можно записать как

$$y_c = C \cdot (C_t \cdot z \cdot C)^{-1} \cdot C_t = C \cdot C^{-1} \cdot z^{-1} \cdot C_t^{-1} \cdot C_t = z^{-1}. \quad (5.31)$$

Следовательно, тензор адмиттансов новой сети такой же, как и примитивной оси, о чем упоминалось выше.

9. ПРИМЕР y_c ДЛЯ ОТДЕЛЬНЫХ КАТУШЕК

I. Пусть, например, тензор адмиттансов y' сети (рис. 5.7) (содержащий шесть катушек и три контура) имеет вид

$$y' = \begin{array}{c} a' \\ b' \\ c' \end{array} \begin{array}{|c|c|c|} \hline \gamma^{a'a'} & \gamma^{a'b'} & \gamma^{a'c'} \\ \hline \gamma^{b'a'} & \gamma^{b'b'} & \gamma^{b'c'} \\ \hline \gamma^{c'a'} & \gamma^{c'b'} & \gamma^{c'c'} \\ \hline \end{array}, \quad (5.31)$$

$$C = \begin{array}{c} a' \\ b' \\ c' \\ d \\ f \\ g \end{array} \begin{array}{|c|c|c|} \hline -1 & & \\ \hline 1 & 1 & 1 \\ \hline & 1 & 1 \\ \hline -1 & & -1 \\ \hline & & -1 \\ \hline & 1 & \\ \hline \end{array}. \quad (5.32)$$

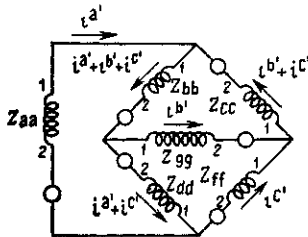


Рис. 5.7.

Уравнение $i = y' \cdot e'$ дает три тока из токов катушек, если напряжения контуров уже известны. Однако мы хотим найти другой тензор y_c , который определяет любой из шести токов в катушках,

если известно любое из отдельных напряжений, приложенных последовательно к катушкам. Следует отметить, что одно и то же приложенное к катушке напряжение может относиться к нескольким контурам.

II. Искомая величина y_c находится из вышеприведенной y' посредством $C \cdot y' \cdot C_t = y_c$

| | a | b | c | d | f | g |
|---|------------------|--|----------------------------------|----------------------------------|------------------|------------------|
| a | $\gamma^{a'a'}$ | $-\gamma^{a'a'} - \gamma^{a'b'} - \gamma^{a'c'}$ | $-\gamma^{a'b'} - \gamma^{a'c'}$ | $\gamma^{a'a'} + \gamma^{a'c'}$ | $\gamma^{a'c'}$ | $-\gamma^{a'b'}$ |
| b | $-\gamma^{a'a'}$ | $\gamma^{a'a'} + \gamma^{a'b'} + \gamma^{a'c'}$ | $\gamma^{a'b'} + \gamma^{a'c'}$ | $-\gamma^{a'a'} - \gamma^{a'c'}$ | $-\gamma^{a'c'}$ | $\gamma^{a'b'}$ |
| b | $-\gamma^{b'a'}$ | $+\gamma^{b'a'} + \gamma^{b'b'} + \gamma^{b'c'}$ | $+\gamma^{b'b'} + \gamma^{b'c'}$ | $-\gamma^{b'a'} - \gamma^{b'c'}$ | $-\gamma^{b'c'}$ | $+\gamma^{b'b'}$ |
| c | $-\gamma^{c'a'}$ | $+\gamma^{c'a'} + \gamma^{c'b'} + \gamma^{c'c'}$ | $+\gamma^{c'b'} + \gamma^{c'c'}$ | $-\gamma^{c'a'} - \gamma^{c'c'}$ | $-\gamma^{c'c'}$ | $+\gamma^{c'b'}$ |
| c | $-\gamma^{b'a'}$ | $\gamma^{b'a'} + \gamma^{b'b'} + \gamma^{b'c'}$ | $\gamma^{b'b'} + \gamma^{b'c'}$ | $-\gamma^{b'a'} - \gamma^{b'c'}$ | $-\gamma^{b'c'}$ | $\gamma^{b'b'}$ |
| c | $-\gamma^{c'a'}$ | $+\gamma^{c'a'} + \gamma^{c'b'} + \gamma^{c'c'}$ | $+\gamma^{c'b'} + \gamma^{c'c'}$ | $-\gamma^{c'a'} - \gamma^{c'c'}$ | $-\gamma^{c'c'}$ | $+\gamma^{c'b'}$ |
| d | $\gamma^{a'a'}$ | $-\gamma^{a'a'} - \gamma^{a'b'} - \gamma^{a'c'}$ | $-\gamma^{a'b'} - \gamma^{a'c'}$ | $\gamma^{a'a'} + \gamma^{a'b'}$ | $\gamma^{a'c'}$ | $-\gamma^{a'b'}$ |
| d | $+\gamma^{c'a'}$ | $-\gamma^{c'a'} - \gamma^{c'b'} - \gamma^{c'c'}$ | $-\gamma^{c'b'} - \gamma^{c'c'}$ | $+\gamma^{c'a'} + \gamma^{c'c'}$ | $+\gamma^{c'c'}$ | $-\gamma^{c'b'}$ |
| f | $\gamma^{c'a'}$ | $-\gamma^{c'a'} - \gamma^{c'b'} - \gamma^{c'c'}$ | $-\gamma^{c'b'} - \gamma^{c'c'}$ | $\gamma^{c'a'} + \gamma^{c'c'}$ | $\gamma^{c'c'}$ | $-\gamma^{c'b'}$ |
| f | $-\gamma^{b'a'}$ | $\gamma^{b'a'} + \gamma^{b'b'} + \gamma^{b'c'}$ | $\gamma^{b'b'} + \gamma^{b'c'}$ | $-\gamma^{b'a'} - \gamma^{b'c'}$ | $-\gamma^{b'c'}$ | $\gamma^{b'b'}$ |
| g | $-\gamma^{b'a'}$ | $\gamma^{b'a'} + \gamma^{b'b'} + \gamma^{b'c'}$ | $\gamma^{b'b'} + \gamma^{b'c'}$ | $-\gamma^{b'a'} - \gamma^{b'c'}$ | $-\gamma^{b'c'}$ | $\gamma^{b'b'}$ |

(5.33)

Например, ток $i^{f'}$ в катушке f, вызванный приложенным напряжением e_a в катушке d, есть $i^{f'} = (\gamma^{c'a'} + \gamma^{c'c'})e_a$.

10. СОЕДИНЕНИЕ НЕСКОЛЬКИХ СЕТЕЙ

I. Вместо того, чтобы соединять отдельные катушки в сеть, можно несколько отдельных сетей соединить в одну более крупную сеть с помощью тензора преобразования $S = S_m^m$. Эта процедура является весьма мощным инженерным орудием, поскольку отдельные соединяемые устройства не обязательно однотипны. Отдельные соединяемые устройства могут быть неподвижными или вращающимися, а также электрическими, механическими, акустическими и др. Результирующая система может быть каким-либо инструментом, прибором или машиной, использующей энергию нескольких видов.

II. Соединение контурных сетей заключается в разрывании одной (или более) ветви каждой сети и соединении двух точек разрыва каждой сети (A—A и B—B) в пары (рис. 5.8). Результат соединения — замена двух токов катушек i^a и i^b одним при неизменных остальных токах.

Соединение узловых сетей показано в гл. 14. Однако типы соединения физических устройств гораздо более разнообразны, чем показано здесь.

III. Часто систему можно анализировать обычным конструированием с помощью соединения отдельных катушек. Однако при симметрии частей системы тензоры импедансов этих частей можно найти гораздо быстрее, если нет мешающих асимметричных частей. В таких случаях систему можно разбить произвольно

на любое число симметричных и асимметричных частей разрыванием ветвей, а затем отдельно проанализировать каждую часть и, наконец, снова соединить их с помощью С. Например, при изучении неисправностей трехфазных систем различные участки, где возникновение дефектов изменяет симметрию цепей, можно удалить и тензоры импедансов системы и дефектов (при любом их количестве) найти отдельно, а затем объединить в действительную систему.

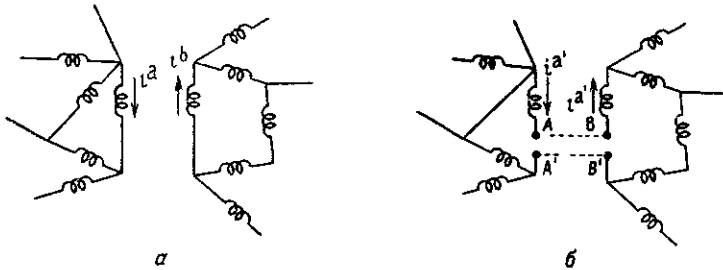


Рис. 5.8. Соединение контурных сетей:
а — до соединения, б — после соединения.

Случается также, что систему строят из нескольких частей, причем компоненты геометрических объектов таких, как z , или каждой из отдельных частей уже бываюи вычислены в предыдущих исследованиях. В таких случаях можно снова разбить систему на уже встречавшиеся ранее и знакомые части или на отдельные знакомые части, а затем объединить их снова с помощью С. Таким образом, многие полученные ранее при анализе отдельных систем результаты можно снова использовать уже при анализе результирующей системы.

При соединении сетей в одну большую систему тензор преобразования снова представляет математическую фотографию способа соединения сетей. Поведение объединенной системы может быть снова автоматически найдено с помощью рутинного преобразования.

IV. При соединении полных сетей выполняются те же этапы, что и при соединении отдельных катушек, а именно:

1) найти геометрические объекты e_m , z_{mn} и другие примитивной системы (состоящей из отдельных сетей без соединения);

2) найти тензор преобразования S_m^m , показывающий соединение отдельных сетей, с помощью которого примитивная система преобразуется в действительную;

3) найти новые компоненты геометрических объектов e_m^* , $z_{m'n'}$, а затем $y^{m'n'}$, $i^{n'}$ новой системы.

11. ПРИМИТИВНАЯ СИСТЕМА

I. Совокупность отдельных сетей без какого-либо их соединения называется *примитивной системой*. Фиксированные индексы в разных сетях отличаются друг от друга, поэтому количество осей примитивной системы является суммой осей отдельных систем.

II. Пусть, например, даны две независимые неподвижные сети с тензорами импедансов

$$z_1 = \begin{array}{c} \text{a} \\ \text{b} \\ \text{c} \end{array} \begin{array}{|c|c|c|} \hline Z_{aa} & Z_{ab} & Z_{ac} \\ \hline Z_{ab} & Z_{bb} & Z_{bc} \\ \hline Z_{ac} & Z_{bc} & Z_{cc} \\ \hline \end{array}, \quad (5.34)$$

$$z_2 = \begin{array}{c} \text{d} \\ \text{f} \end{array} \begin{array}{|c|c|} \hline Z_{dd} & Z_{df} \\ \hline Z_{df} & Z_{ff} \\ \hline \end{array}. \quad (5.35)$$

Если необходимо соединить две сети, то они рассматриваются как части примитивной системы с тензором импедансов

$$z_1 + z_2 = z = \begin{array}{c} \text{a} \\ \text{b} \\ \text{c} \\ \text{d} \\ \text{f} \end{array} \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline Z_{aa} & Z_{ab} & Z_{ac} & 0 & 0 \\ \hline Z_{ab} & Z_{bb} & Z_{bc} & 0 & 0 \\ \hline Z_{ac} & Z_{bc} & Z_{cc} & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & Z_{dd} & Z_{df} \\ \hline 0 & 0 & 0 & Z_{df} & Z_{ff} \\ \hline \end{array}, \quad (5.36)$$

который имеет $3+2=5$ осей.

Следует отметить, что при сложении двух тензоров импедансов z_1 и z_2 (см. (5.36)) никакого изменения самой физической системы не было. Сложение z_1 и z_2 эквивалентно признанию, что две сети являются независимыми частями более общей, так называемой примитивной системы. Другими словами, сложение z_1 и z_2 эквивалентно записи каждого из исходных тензоров z_1 и z_2 с пятью столбцами и строками вместо двух и трех соответственно, посредством заполнения компонент отсутствующих строк и столбцов нулями:

$$z_1 = \begin{array}{c|cc|cc} & \mathbf{a} & \mathbf{b} & \mathbf{c} & \mathbf{d} & \mathbf{f} \\ \hline \mathbf{a} & Z_{aa} & Z_{ab} & Z_{ac} & 0 & 0 \\ \hline \mathbf{b} & Z_{ab} & Z_{bb} & Z_{bc} & 0 & 0 \\ \hline \mathbf{c} & Z_{ac} & Z_{bc} & Z_{cc} & 0 & 0 \\ \hline \mathbf{d} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline \mathbf{f} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}, \quad (5.37)$$

$$z_2 = \begin{array}{c|cc|cc} & \mathbf{a} & \mathbf{b} & \mathbf{c} & \mathbf{d} & \mathbf{f} \\ \hline \mathbf{a} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline \mathbf{b} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline \mathbf{c} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline \mathbf{d} & 0 & 0 & 0 & Z_{dd} & Z_{df} \\ \hline \mathbf{f} & 0 & 0 & 0 & Z_{df} & Z_{ff} \end{array}. \quad (5.38)$$

III. Аналогично, если приложенные напряжения в отдельных сетях имеют вид

$$e_1 = \begin{array}{c|cc} & \mathbf{a} & \mathbf{b} & \mathbf{c} \\ \hline e_a & e_b & e_c \end{array}, \quad (5.39)$$

$$e_2 = \begin{array}{c|cc} & \mathbf{d} & \mathbf{f} \\ \hline e_d & e_f \end{array}, \quad (5.40)$$

то вектор приложенных напряжений примитивной сети

$$e_1 = e_2 = e = \begin{array}{c|cc|cc} & \mathbf{a} & \mathbf{b} & \mathbf{c} & \mathbf{d} & \mathbf{f} \\ \hline e_a & e_b & e_c & e_d & e_f \end{array}. \quad (5.41)$$

полагая, что приложенные напряжения соответствующих сетей на самом деле

$$e_1 = \begin{array}{c|cc|cc} & \mathbf{a} & \mathbf{b} & \mathbf{c} & \mathbf{d} & \mathbf{f} \\ \hline e_a & e_b & e_c & 0 & 0 \end{array}; \quad (5.42)$$

$$e_2 = \begin{array}{c|cc|cc} & \mathbf{a} & \mathbf{b} & \mathbf{c} & \mathbf{d} & \mathbf{f} \\ \hline 0 & 0 & 0 & e_d & e_f \end{array}. \quad (5.43)$$

12. РЕЗУЛЬТИРУЮЩАЯ СИСТЕМА

I. Как только геометрические объекты примитивной системы установлены простым сложением, остальная работа тождественна анализу любой другой системы.

Если способ соединения сетей-компонент задается с помощью C , то тензор импедансов результирующей системы имеет вид

$$z' = C_t \cdot (z_1 + z_2) C \quad (5.44)$$

или в случае нескольких сетей-компонент

$$z' = C_t \cdot (z_1 + z_2 + z_3 + \dots) C. \quad (5.45)$$

Вектор приложенного напряжения результирующей системы

$$e' = C_t \cdot (e_1 + e_2 + e_3 + \dots), \quad (5.46)$$

а уравнение напряжения для нее

$$e' = z' \cdot i'. \quad (5.47)$$

II. Если уравнение не разделено на несколько составляющих уравнений, его можно решить относительно неизвестных в виде $\mathbf{i}' = \mathbf{z}'^{-1} \cdot \mathbf{e}'$, т. е. путем вычисления величины \mathbf{y}' , обратной \mathbf{z}' .

III. Подчеркнем, что этот метод рассуждения можно использовать не только когда действительно даны две сети, которые нужно соединить, но и тогда, когда необходимо анализировать уже существующую сложную систему, которую трудно рассматривать как одно целое. Обычно сложную систему можно разбить на несколько составляющих систем, которые в отдельности легче исследовать и геометрические объекты которых $\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2$ легче получить. После того как каждая составляющая система исследована в отдельности, объединить их в одно целое несравненно легче, чем анализировать исходную систему.

Одним из примеров такой сложной системы является цепь с электронными лампами, некоторые из многоэлектродных ламп цепей соединены с неподвижными сетями. Их анализ проведен в гл. 15. Другим примером является трехфазная линия передачи, в которой многочисленные трехфазные устройства (генераторы, трансформаторы, нагрузки и т. д.) соединяются различными способами. Они подробно рассматриваются в гл. 19.

IV. Если 2-матрица геометрического объекта $\mathbf{z}_1 + \mathbf{z}_2 + \mathbf{z}_3$ имеет слишком большое число строк и столбцов, то результирующая \mathbf{z} (см. (5.45)) может быть вычислена в несколько этапов, поскольку ее можно представить в виде

$$\mathbf{z}' = \mathbf{C}_1 \cdot \mathbf{z}_1 \cdot \mathbf{C} + \mathbf{C}_2 \cdot \mathbf{z}_2 \cdot \mathbf{C} + \mathbf{C}_3 \cdot \mathbf{z}_3 \cdot \mathbf{C} + \dots, \quad (5.48)$$

который показывает, что окончательный тензор импедансов можно представить в виде суммы нескольких тензоров, каждый из которых есть вклад одной из составляющих систем.

13. ПРИМЕР СОЕДИНЕНИЯ ДВУХ КОНТУРНЫХ СЕТЕЙ

I. Пусть даны две контурные сети (рис. 5.9, а). Предполагается, что их геометрические объекты уже установлены выделением в качестве переменных, показанных на рисунке, соответственно четырех и шести токов. В частности, тензоры импедансов этих сетей имеют вид

$$z_1 = \begin{matrix} & \begin{matrix} m & n & h & k \end{matrix} \\ \begin{matrix} m \\ n \\ h \\ k \end{matrix} & \begin{bmatrix} Z_{mm} & Z_{mn} & Z_{mh} & Z_{mk} \\ Z_{nm} & Z_{nn} & Z_{nh} & Z_{nk} \\ Z_{hm} & Z_{hn} & Z_{hh} & Z_{hk} \\ Z_{km} & Z_{kn} & Z_{kh} & Z_{kk} \end{bmatrix} \end{matrix}, \quad (5.49) \quad z_2 = \begin{matrix} & \begin{matrix} a & b & c & d & f & g \end{matrix} \\ \begin{matrix} a \\ b \\ c \\ d \\ f \\ g \end{matrix} & \begin{bmatrix} Z_{aa} & Z_{ab} & Z_{ac} & Z_{ad} & Z_{af} & Z_{ag} \\ Z_{ba} & Z_{bb} & Z_{bc} & Z_{bd} & Z_{bf} & Z_{bg} \\ Z_{ca} & Z_{cb} & Z_{cc} & Z_{cd} & Z_{cf} & Z_{cg} \\ Z_{da} & Z_{db} & Z_{dc} & Z_{dd} & Z_{df} & Z_{dg} \\ Z_{fa} & Z_{fb} & Z_{fc} & Z_{fd} & Z_{ff} & Z_{fg} \\ Z_{ga} & Z_{gb} & Z_{gc} & Z_{gd} & Z_{gf} & Z_{gg} \end{bmatrix} \end{matrix}, \quad (5.50)$$

а векторы приложенных напряжений

$$e_1 = \begin{matrix} & \begin{matrix} m & n & h & k \end{matrix} \\ \begin{matrix} e_m \\ e_n \\ e_h \\ e_k \end{matrix} \end{matrix}, \quad (5.51) \quad e_2 = \begin{matrix} & \begin{matrix} a & b & c & d & f & g \end{matrix} \\ \begin{matrix} e_a \\ e_b \\ e_c \\ e_d \\ e_f \\ e_g \end{matrix} \end{matrix}. \quad (5.52)$$

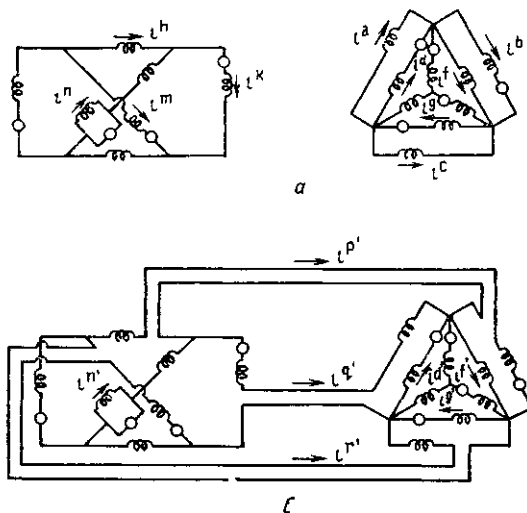


Рис. 5.9. Соединение нескольких сетей:
а — примитивная система, б — результирующая система.

II. Если необходимо соединить в одну систему две сети (рис. 5.9, а), то их можно рассматривать, как будто они уже образуют *одну* примитивную систему, для которой тензор импеданса является суммой тензоров импедансов z_1 и z_2 отдельных систем, представленных в уравнениях (5.49) и (5.50). Иначе говоря, $z_1 + z_2$

| | | m | n | h | k | a | b | c | d | f | g |
|-------|---|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|
| $z =$ | m | Z_{mm} | Z_{mn} | Z_{mh} | Z_{mk} | | | | | | |
| | n | Z_{mn} | Z_{nn} | Z_{nh} | Z_{nk} | | | | | | |
| | h | Z_{mh} | Z_{nh} | Z_{hh} | Z_{hk} | | | | | | |
| | k | Z_{mk} | Z_{nk} | Z_{hk} | Z_{kk} | | | | | | |
| | a | | | | | Z_{aa} | Z_{ab} | Z_{ac} | Z_{ad} | Z_{af} | Z_{ag} |
| | b | | | | | Z_{ab} | Z_{bb} | Z_{bc} | Z_{bd} | Z_{bf} | Z_{bg} |
| | c | | | | | Z_{ac} | Z_{bc} | Z_{cc} | Z_{cd} | Z_{cf} | Z_{cg} |
| | d | | | | | Z_{ad} | Z_{bd} | Z_{cd} | Z_{dd} | Z_{df} | Z_{dg} |
| | f | | | | | Z_{af} | Z_{bf} | Z_{cf} | Z_{df} | Z_{ff} | Z_{fg} |
| g | | | | | Z_{ag} | Z_{bg} | Z_{cg} | Z_{dg} | Z_{fg} | Z_{gg} | |

(5.53)

Вектор приложенных напряжений примитивной системы есть $e_1 + e_2$

| | | m | n | h | k | a | b | c | d | f | g |
|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|---|
| $e =$ | e_m | e_n | e_h | e_k | e_a | e_b | e_c | e_d | e_f | e_g | |

(5.54)

III. Из рис. 5.9, б видно, что соединение двух систем заключается в соединении i^h последовательно с i^b , а также i^h последовательно с i^a и, наконец, i^m последовательно с i^c , оставляя все четыре других тока (i^n , i^d , i^f и i^g) неизменными. Токи в последовательных соединениях можно обозначить новыми буквами, а четыре неизменных тока пометить штрихами.

Таким образом, соотношение между старыми и новыми токами $i = C \cdot i'$ и тензор преобразования C имеют вид

| | | | | | | | | | | | | | |
|----------------|-----------|-----|-----------|-------|---|---|----|----|----|----|----|----|--|
| $i^m =$ | $-i^{r'}$ | $=$ | $-i^{r'}$ | $C =$ | p | q | r | r' | n' | d' | f' | g' | |
| $i^n =$ | $i^{n'}$ | $=$ | $i^{n'}$ | | m | | -1 | | | | | | |
| $i^h = i^{p'}$ | | $=$ | $i^{p'}$ | | n | | | 1 | | | | | |
| $i^k = i^{q'}$ | | $=$ | $i^{q'}$ | | h | 1 | | | | | | | |
| $i^a = i^{q'}$ | | $=$ | $i^{q'}$ | | k | | 1 | | | | | | |
| $i^b = i^{p'}$ | | $=$ | $i^{p'}$ | | a | | 1 | | | | | | |
| $i^c =$ | $-i^{r'}$ | $=$ | $-i^{r'}$ | | b | 1 | | | | | | | |
| $i^d =$ | | $=$ | $i^{d'}$ | | c | | -1 | | | | | | |
| $i^f =$ | | $=$ | $i^{f'}$ | | d | | | | 1 | | | | |
| $i^g =$ | | $=$ | $i^{g'}$ | | f | | | | | 1 | | | |
| | | | | | g | | | | | | 1 | | |

(5.55)

IV. Тензор импеданса результирующей системы задается формулой $C_t \cdot (z_1 + z_2) \cdot C$

| | p' | q' | r' | n' | d' | f' | g' |
|---------|--------------------|--------------------|--------------------|-----------|----------|-----------|-----------|
| p' | $Z_{hh} + Z_{bb}$ | $Z_{hk} + Z_{ab}$ | $-Z_{mh} - Z_{bc}$ | Z_{nh} | Z_{bd} | Z_{bf} | Z_{bg} |
| q' | $Z_{hk} + Z_{ab}$ | $Z_{kk} + Z_{aa}$ | $-Z_{mk} - Z_{ac}$ | Z_{nk} | Z_{ad} | Z_{af} | Z_{ag} |
| r' | $-Z_{mh} - Z_{bc}$ | $-Z_{mk} - Z_{ac}$ | $Z_{mm} + Z_{cc}$ | $-Z_{nm}$ | Z_{cd} | $-Z_{cf}$ | $-Z_{cg}$ |
| z' = n' | Z_{nh} | Z_{nk} | $-Z_{mn}$ | Z_{nn} | 0 | 0 | 0 |
| d' | Z_{bd} | Z_{ad} | $-Z_{cd}$ | 0 | Z_{dd} | Z_{df} | Z_{dg} |
| f' | Z_{bf} | Z_{af} | $-Z_{cf}$ | 0 | Z_{df} | Z_{ff} | Z_{fg} |
| g' | Z_{bg} | Z_{ag} | $-Z_{cg}$ | 0 | Z_{dg} | Z_{fg} | Z_{gg} |

(5.56)

Вектор приложенных напряжений результирующей системы $C_t \cdot (e_1 + e_2)$ имеет вид

$$e' = \begin{bmatrix} p' & q' & r' & n' & d' & f' & g' \\ e_h + e_b & e_k + e_a & -e_m - e_c & e_n & e_d & e_f & e_g \end{bmatrix}. \quad (5.57)$$

Токи находятся из $i' = z'^{-1} \cdot e'$. При вычислении обратной z' можно использовать сокращающую вычисления процедуру, описанную в гл. 10.

14. ВЫБОР ПЕРЕМЕННЫХ

Соединение систем ясно показывает предпочтительность выбора в качестве переменных при решении конкретных задач именно *токов в ветвях*. В соединенных сетях те токи в ветвях *сетей-компонент, которые соединяются последовательно, должны появиться в числе переменных*.

Когда нужный ток не входит в число переменных, то сначала переменные *сети-компоненты* следует заменить с помощью $i = C \cdot i'$ новым набором переменных так, чтобы среди них были все нужные токи. При изменении переменных e и z системы, конечно, тоже должны измениться. (Такая замена переменных, когда физическая система не изменяется, рассматривается в гл. 6, § 4.)

Другими словами, если z_1 или z_2 (или оба) не содержат в качестве переменных токи, которые соединяются, то z_1 или z_2 (или оба) сначала заменяют с помощью C_1 или C_2 на z_1' или z_2' и только затем их соединяют в одну систему с помощью C . В таких случаях тензор импеданса z' результирующей системы находится следующим образом:

$$z' = C_i \cdot [z_1' + z_2' + \dots] \cdot C, \quad (5.58)$$

$$z' = C_i \cdot [(C_{1i} \cdot z_1 \cdot C_1) + (C_{2i} \cdot z_2 \cdot C_2) + \dots] \cdot C. \quad (5.59)$$

Глава 6

ПРИМЕРЫ ИНВАРИАНТНЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ

1. ВИДЫ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ

1. Учет связей между катушками является только одним из множества других изменений, которые могут быть математически представлены тензором преобразования S . Идея преобразования включает в себя лишь замену множества переменных (в данном случае токов) другим множеством переменных независимо от того, соответствует ли это физическим изменениям в системе или нет. Приведем различные примеры, когда преобразования токов влекут за собой изменения различных видов в физической структуре системы или в подборе переменных.

В этой главе показаны следующие типы преобразований:

1) вместо примитивной контурной сети в качестве исходной используется *любая другая n -контурная сеть с n катушками*, которая должна быть преобразована к данной n -контурной n -катушечной сети;

2) система токов, текущих по *ветвям* сети, заменяется другой системой токов, протекающих в других *ветвях* той же сети;

3) система токов, протекающих в *ветвях* сети, заменяется гипотетическими токами, которые должны протекать в *контурах* сети;

4) система *контурных* токов заменяется системой токов *ветвей*;

5) изменяется *число витков* нескольких катушек;

6) не учитываются *токи намагничивания*;

7) *действительные* токи заменяются системой гипотетических токов «нагрузки» и «намагничивания»;

8) *размыкание контуров* рассматривается как преобразование;

9) *порядок* переменных изменяется преобразованием;

10) коммутатор машины переменного тока рассматривается как преобразователь *магнитного порядка* проводников в их *электрический порядок*.

Очень большое число допущений или экономящих труд приемов, которые инженер вводит для организации и решения своих проблем, может рассматриваться как «преобразование», представимое тензором преобразования S_m^m . Следовательно, возможно большое разнообразие преобразований и те из них, кото-

рые приводятся в этой главе, являются только примерами простейшего типа. Впоследствии их будет введено гораздо больше.

II. Эти многочисленные типы преобразований имеют, однако, одну общую особенность: *они оставляют инвариантной входную мощность $e_m i^m$ (линейную форму)*. В результате, несмотря на использование такого множества преобразований, все действительные и гипотетические *контурные* сети имеют одно и то же уравнение поведения, а именно:

$$\mathbf{e} = \mathbf{z} \cdot \mathbf{i}, \quad e_m = z_{mn} i^n,$$

и для любого частного случая компоненты \mathbf{e} и \mathbf{z} находятся по компонентам напряжения и импеданса любой эталонной сети с помощью рутинных формул преобразования.

Преобразования $\mathbf{i} = \mathbf{C} \cdot \mathbf{i}'$, которые оставляют «форму» инвариантной, будут называться *инвариантными преобразованиями*. Позднее будут введены другие типы преобразований, которые не оставляют «форму» инвариантной.

III. Можно упомянуть, что эти преобразования редко встречаются отдельно, как представлено в этой главе. *Большинство инженерных проблем состоит в одновременном применении нескольких преобразований*, и часто бывает довольно трудно разложить результирующее сложное преобразование на последовательное применение более простых преобразований.

Последовательное применение *нескольких* преобразований приведено в гл. 11.

2. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ n -КОНТУРНОЙ СЕТИ В ДРУГУЮ n -КОНТУРНУЮ СЕТЬ

I. Чтобы *быстро* и как можно меньше рассуждая вывести уравнение поведения сети, в качестве эталонной сети используется примитивная сеть. Однако для анализа *n -катушечной сети в качестве эталонной (исходной) может быть использована любая другая сеть*. Довольно часто использование некоторой n -катушечной сети со специальной структурой в качестве отправной точки приводит к более быстрому ответу, чем использование примитивной сети.

В гл. 16, § 17 будет показано, что как данная, так и эталонная сеть могут иметь различное число контуров и узловых пар, пока они имеют одинаковое число катушек. Однако обе сети должны рассматриваться как *ортогональные*, чтобы можно было перейти от одной к другой и обратно с помощью тензора преобразования \mathbf{C} и обратного ему \mathbf{C}^{-1} .

II. Поскольку n -катушечная, n -контурная сеть является также ортогональной сетью (имеющей нуль узловых пар), *разберем пример, в котором и данная, и эталонная сеть имеют n катушек и n контуров*, но различное число подсетей и ветвей с нулевыми импедансами. Например, пусть выводится уравнение напряже-

ния $e' = z' \cdot i'$ сети (рис. 6.1, а), если известно уравнение напряжения $e = z \cdot i$ эталонной исходной сети (рис. 6.2). Последняя уже вычислялась в гл. 4, § 14.

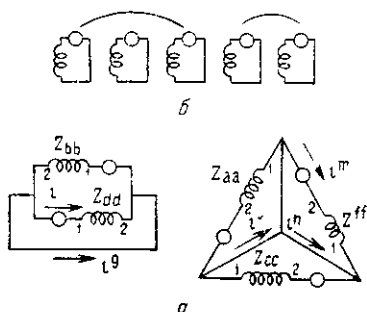


Рис. 6.1. Данная сеть.

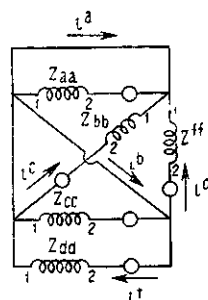


Рис. 6.2. Эталонная сеть.

Так как данная сеть (рис. 6.1, а) имеет пять контуров, в качестве переменных принимаются пять произвольных токов ветвей:

$$i^{g'}, i^{h'}, i^{k'}, i^{m'} \text{ и } i^{n'}.$$

III. Для определения тензора преобразования C первый шаг — записать в обеих сетях токи, протекающие по каждой отдельной катушке (рис. 6.3, 6.4).

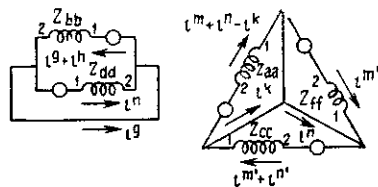


Рис. 6.3. Данная сеть.

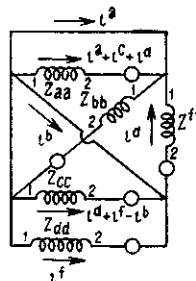


Рис. 6.4. Эталонная сеть.

Следующий шаг — приравнять старые и новые токи, протекающие в каждой катушке.

В катушке

$$\begin{aligned} Z_{aa} - i^a - i^c - i^d &= i^{k'} - i^{m'} - i^{n'}, \\ Z_{bb} - i^c &= i^{g'} + i^{h'}, \\ Z_{cc} \quad i^d + i^f - i^b &= -i^{m'} - i^{n'}, \\ Z_{dd} - i^f &= i^{h'}, \\ Z_{ff} - i^d &= -i^{m'}. \end{aligned} \tag{6.1}$$

Эта система уравнений всегда может быть разрешена относительно старых токов как линейная комбинация новых токов

$$\begin{array}{l}
 i^a = i^{g'} + i^{h'} - i^{k'} + i^{n'} \\
 i^b = -i^{h'} + 2i^{m'} + i^{n'} \\
 i^c = -i^{g'} - i^{h'} \\
 i^d = i^{m'} \\
 i^f = -i^{h'}
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{l}
 \mathbf{C} = \mathbf{c} \\
 \mathbf{a} \\
 \mathbf{b} \\
 \mathbf{c} \\
 \mathbf{d} \\
 \mathbf{f}
 \end{array}
 \begin{array}{|c|c|c|c|c|}
 \hline
 1 & 1 & -1 & & 1 \\
 \hline
 & -1 & & 2 & 1 \\
 \hline
 -1 & -1 & & & \\
 \hline
 & & & 1 & \\
 \hline
 & -1 & & & \\
 \hline
 \end{array}
 \quad (6.2)$$

Коэффициенты при новых токах представляют тензор преобразования \mathbf{C} , изменяющий сеть (рис. 6.3) на другую сеть (рис. 6.4). Следует заметить, что одна из компонент \mathbf{C} равна двум — также целому числу.

IV. Новые компоненты тензора импеданса \mathbf{z}' для данной сети находятся из компонент исходной эталонной сети, заданной уравнением (4.65) с помощью $\mathbf{C}_t \cdot \mathbf{z} \cdot \mathbf{C}$, как

$$\begin{array}{l}
 \mathbf{z} = \\
 \mathbf{g}' \\
 \mathbf{h}' \\
 \mathbf{k}' \\
 \mathbf{m}' \\
 \mathbf{n}'
 \end{array}
 \begin{array}{|c|c|c|c|c|}
 \hline
 Z_{bb} & Z_{bb} & & & \\
 \hline
 Z_{bb} & Z_{bb} + Z_{dd} & & -X_{df} & \\
 \hline
 & & Z_{aa} & -Z_{aa} - X_{ac} & -Z_{aa} - X_{ac} \\
 \hline
 & -X_{fd} & -Z_{aa} - X_{ca} & Z_{aa} + Z_{cc} + Z_{ff} + X_{ac} + X_{ca} & Z_{aa} + Z_{cc} + X_{ca} + X_{ac} \\
 \hline
 & & -Z_{aa} - X_{ca} & Z_{aa} + Z_{cc} + X_{ac} + X_{ca} & Z_{aa} + Z_{cc} + X_{ac} + X_{ca}
 \end{array}
 \quad (6.3)$$

Вектор приложенного напряжения \mathbf{e}' будет $\mathbf{C}_t \cdot \mathbf{e}$, где \mathbf{e} дается уравнением (4.66) как

$$\mathbf{e}' = \begin{array}{|c|c|c|c|c|}
 \hline
 \mathbf{g}' & \mathbf{h}' & \mathbf{k}' & \mathbf{m}' & \mathbf{n}' \\
 \hline
 e_b & e_b + e_d & e_a & -e_a - e_c - e_f & -e_a - e_c \\
 \hline
 \end{array} \quad (6.4)$$

3. ПРОВЕРКА ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

I. Правильность тензоров \mathbf{z}' и \mathbf{e}' (см. рис. 6.3) может быть проверена вычислением компонент этих тензоров из примитивной сети рис. 6.1, б вместо сети рис. 6.2.

Тензоры z и e примитивной контурной сети

$$z = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} & a & b & c & d & f \\ a & Z_{aa} & & X_{ac} & & \\ b & & Z_{bb} & & & \\ c & X_{ca} & & Z_{cc} & & \\ d & & & & Z_{dd} & X_{df} \\ f & & & & X_{fd} & Z_{ff} \end{array} \end{array}, \quad (6.5)$$

$$e = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} a & b & c & d & f \\ e_a & e_b & e_c & e_d & e_f \end{array} \end{array}. \quad (6.6)$$

Тензор преобразования C' данной сети находится из рис. 6.3 приравниванием старых и новых токов на рис. 6.3 и 6.1, e

$$\begin{array}{l} i^a = \\ i^b = i^{g'} + i^{h'} \\ i^c = \\ i^d = \\ i^f = \end{array} \begin{array}{l} i^{k'} - i^{m'} - i^{n'} \\ \\ -i^{m'} - i^{n'} \\ i^{h'} \\ -i^{m'} \end{array} \quad C' = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} & g' & h' & k' & m' & n' \\ a & & & 1 & -1 & -1 \\ b & 1 & 1 & & & \\ c & & & & -1 & -1 \\ d & & 1 & & & \\ f & & & & & -1 \end{array} \end{array}. \quad (6.7)$$

II. Тензор импеданса z' есть $C_i' \cdot z \cdot C'$

$$z' = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} & g' & h' & k' & m' & n' \\ g' & Z_{bb} & Z_{bb} & & & \\ h' & Z_{bb} & Z_{bb} + Z_{dd} & & -X_{df} & \\ k' & & & Z_{aa} & -Z_{aa} - X_{ac} & -Z_{aa} - X_{ac} \\ m' & & -X_{fd} & -Z_{aa} - X_{ca} & Z_{aa} + Z_{cc} + Z_{ff} + X_{ac} + X_{ca} & Z_{aa} + Z_{cc} + X_{ac} + X_{ca} \\ n' & & & -Z_{aa} - X_{ca} & Z_{aa} + Z_{cc} + X_{ac} + X_{ca} & Z_{aa} + Z_{cc} + X_{ac} + X_{ca} \end{array} \end{array}. \quad (6.8)$$

Этот тензор проверяет уравнение (6.3).

Вектор приложенного напряжения e' будет $C_i' \cdot e$

$$e' = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} & g' & h' & k' & m' & n' \\ e_b & e_b + e_d & e_a & -e_a - e_c - e_f & -e_a - e_c \end{array} \end{array}. \quad (6.9)$$

Этот вектор проверяет уравнение (6.4).

4. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ТОКОВ ВЕТВЕЙ

I. Примем, что для рис. 5.4 e' , i' и z' уже вычислены рассмотрением в качестве переменных четырех токов: $i^{a'}$, $i^{b'}$, $i^{c'}$ и $i^{d'}$ (рис. 5.4 воспроизведен на рис. 6.5).

Предположим также, что по какой-то причине поведение системы требуется выразить в терминах четырех других токов, скажем, $i^{f'}$, $i^{g'}$, $i^{h'}$ и $i^{k'}$ как переменных, показанных на рис. 6.6. Применимы две процедуры:

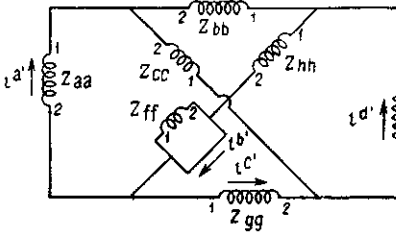


Рис. 6.5. Четыре старых тока.

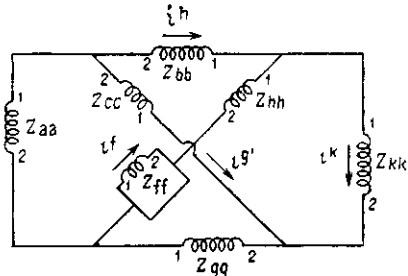


Рис. 6.6. Четыре новых тока.

1) вычисление можно начать с самого начала устранением всех соединений, чтобы установить снова первоначальную примитивную сеть и новый тензор преобразования C ;

2) уже вычисленные e' , z' и i' заменить другим набором e'' , z'' , i'' с помощью новой матрицы преобразования C' , которая устанавливает соотношение между i' и i'' , где

$$i' = \begin{bmatrix} a' & b' & c' & d' \\ i^{a'} & i^{b'} & i^{c'} & i^{d'} \end{bmatrix}, \quad i'' = \begin{bmatrix} f' & g' & h' & k' \\ i^{f'} & i^{g'} & i^{h'} & i^{k'} \end{bmatrix}.$$

II. Следуя второй процедуре, роль отдельных катушек играют ветви, в которых проходят старые токи. Этапы являются следующими:

1) токи в трех ветвях, в которых проходят старые токи $i^{a'}$, $i^{b'}$, $i^{c'}$ и $i^{d'}$, выражаются через новые токи (рис. 6.7);

2) приравниваются старые и новые токи, проходящие в четырех старых ветвях:

$$\begin{aligned} i^{a'} &= i^{h'} + i^{g'} &= i^{g'} + i^{h'} \\ i^{b'} &= i^{h'} - i^{k'} + i^{f'} = i^{f'} &+ i^{h'} - i^{k'} \\ i^{c'} &= -(i^{g'} + i^{k'}) &= -i^{g'} - i^{k'} \\ i^{d'} &= -i^{k'} &= -i^{k'} \end{aligned} \quad C' = \begin{matrix} & \begin{matrix} f' & g' & h' & k' \end{matrix} \\ \begin{matrix} a' \\ b' \\ c' \\ d' \end{matrix} & \begin{bmatrix} & & 1 & 1 \\ 1 & & & -1 \\ -1 & & & -1 \\ & & & -1 \end{bmatrix} \end{matrix} \quad (6.10)$$

Коэффициенты при новых токах дают новый тензор преобразования.

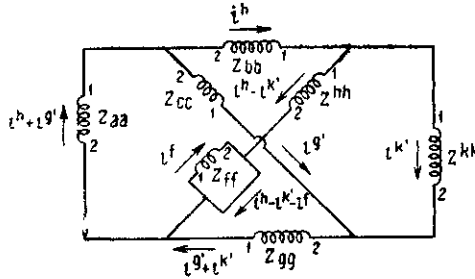


Рис. 6.7. Новые токи в отдельных катушках.

III. По известному C' новые компоненты z'' тензора импеданса находятся из $C_t' \cdot z' \cdot C$, где z' дается уравнением (5.19), так что

| | f' | g' | h' | k' |
|------|---------------------------------------|--|--|--|
| f' | $Z_{b'b'}$ | $Z_{a'b'} - Z_{b'c'}$ | $Z_{a'b'} + Z_{b'c'}$ | $-Z_{b'a'b'} - Z_{b'c'}$ $-Z_{b'd'}$ |
| g' | $Z_{a'b'} - Z_{b'c'}$ | $Z_{a'a'} - Z_{a'c'}$ $-Z_{a'c'} + Z_{c'c'}$ | $Z_{a'a'} - Z_{a'c'}$ $+Z_{a'b'} - Z_{b'c'}$ | $-Z_{a'a'} + Z_{b'c'}$ $-Z_{a'c'}$ $+Z_{c'c'} - Z_{a'd'}$ $+Z_{c'd'}$ |
| h' | $Z_{a'b'} + Z_{b'b'}$ | $Z_{a'a'} + Z_{a'b'}$ $-Z_{a'c'} - Z_{b'c'}$ | $Z_{a'a'} + Z_{a'b'}$ $+Z_{a'b'} + Z_{b'b'}$ | $-Z_{a'b'} - Z_{b'b'}$ $-Z_{a'c'}$ $-Z_{b'c'} - Z_{a'd'}$ $-Z_{b'd'}$ |
| k' | $-Z_{b'b'} - Z_{b'c'}$ $-Z_{b'd'}$ | $-Z_{a'b'} - Z_{a'c'}$ $-Z_{a'd'}$ $+Z_{b'c'} + Z_{c'c'}$ $+Z_{c'd'}$ | $-Z_{a'a'} - Z_{a'c'}$ $-Z_{a'd'}$ $-Z_{b'b'} - Z_{b'c'}$ $-Z_{b'd'}$ | $Z_{b'b'} + Z_{b'c'}$ $+Z_{b'd'}$ $+Z_{b'c'} + Z_{c'c'}$ $+Z_{c'd'}$ $+Z_{b'd'} + Z_{c'd'}$ $+Z_{d'd'}$ |

(6.11)

Значения $Z_{a'a'}$ и другие в терминах Z_{aa} , X_{ab} и других могут быть заменены по уравнению (5.18), чтобы выразить z'' через отдельные импедансы Z_{aa} , X_{ab} ...

Вектор приложенного напряжения $C_i' \cdot e' =$

$$e'' = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline f & g & h' & k' \\ \hline e_{b'} & e'_a - e'_c & e'_a + e'_b & -e'_b - e'_c - e'_d \\ \hline \end{array}.$$

В терминах действительно приложенных напряжений, используя уравнение (5.20), получаем

$$e'' = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline f & g & h' & k' \\ \hline e_d & -e_a - e_c & -e_a + e_d & -e_d + e_k \\ \hline \end{array}.$$

Уравнение напряжения $e'' = z'' \cdot i''$ выражает поведение сети (см. рис 6.6) в терминах $i^{f'}$, $i^{g'}$, $i^{h'}$ и $i^{k'}$, как это и требовалось.

Следует заметить, что имеется большое, хотя и не бесконечное, число способов выбора новых переменных i'' .

IV. Предполагая, что новые контурные токи i'' определяются из $i' = C' \cdot i''$, можно выразить напряжения e' на старой системе контуров. В этом случае уравнение напряжения имеет вид:

$$e' = z' \cdot i' = z' \cdot C' \cdot i'' = z''' \cdot i'',$$

$$e_{m'} = z_{m'n'} \cdot i^{n''} = z_{m'n'} \cdot C_{n''}^{n'} \cdot i^{n''} = z_{m'n''} \cdot i^{n''}, \quad (6.12)$$

где

$$z_{m'n''} = z_{m'n'} C_{n''}^{n'}, \quad z''' = z' \cdot C' \quad (6.13)$$

представляет тензор импеданса сети, в которой напряжения и токи выражаются в разных системах контуров.

Умножая матрицу (5.19) на (6.10), получаем

$$z''' = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline f' & g' & h' & k' \\ \hline a' & Z_{a'b'} & Z_{a'a'} - Z_{a'c'} & Z_{a'a'} + Z_{a'b'} & -Z_{a'b'} - Z_{a'c'} - Z_{a'd'} \\ \hline b' & Z_{b'b'} & Z_{a'b'} - Z_{b'c'} & Z_{a'b'} + Z_{b'b'} & -Z_{b'b'} - Z_{b'c'} - Z_{b'd'} \\ \hline c' & Z_{b'c'} & Z_{a'c'} - Z_{c'c'} & Z_{a'c'} + Z_{b'c'} & -Z_{b'c'} - Z_{c'c'} - Z_{c'd'} \\ \hline d' & Z_{b'd'} & Z_{a'd'} - Z_{c'd'} & Z_{a'd'} + Z_{b'd'} & -Z_{b'd'} - Z_{c'd'} - Z_{d'd'} \\ \hline \end{array}. \quad (6.14)$$

Следует заметить, что z''' имеет два множества координатных систем, контуры токов отличаются от контуров напряжений.

5. ГИПОТЕТИЧЕСКИЕ «КОНТУРНЫЕ» ТОКИ

I. Во всех до сих пор рассматривавшихся задачах новые токи i' всегда были токами, действительно протекающими в некоторых ветвях сети. Однако идея «преобразования» включает замену системы токов другой системой независимо от того, является ли

система токов действительно существующей или только гипотетической. Иначе говоря, старая или новая или обе системы токов могут быть гипотетическими токами.

Имеется, конечно, много путей, которыми гипотетические токи могут быть введены в электротехнику. Фактически большин-

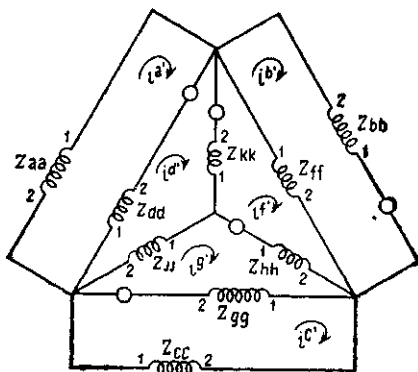


Рис. 6.8. Шесть контурных токов в качестве переменных.

ство приемов анализа технических задач включает гипотетические токи (метод симметричных составляющих, теории поперечного и вращающегося полей, бегущих волн и фактически любое

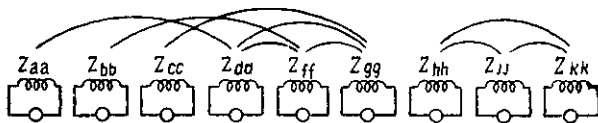


Рис. 6.9. Прimitивная сеть.

разложение результирующих токов на гармоники — пространственные или временные).

II. При анализе неподвижной сети принято предполагать наличие гипотетических «контурных» токов (или токов Максвелла) в каждом замкнутом контуре, так что сумма этих гипотетических токов в каждой ветви является действительно текущим в этой ветви током. Например, на рис. 6.8 из шести контурных токов три являются действительно существующими токами ветвей, а именно $i^{a'}$, $i^{b'}$ и $i^{c'}$, три других контурных тока $i^{d'}$, $i^{f'}$ и $i^{g'}$ являются гипотетическими токами, не существующими физически.

Метод рассуждения является таким же, что и в случае с действительно существующими токами. Прimitивная сеть показана на рис. 6.9. Ее тензор импеданса

| | a | b | c | d | f | g | h | j | k |
|-----|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|
| a | Z_{aa} | | | X_{ad} | | | | | |
| b | | Z_{bb} | | | X_{bf} | | | | |
| c | | | Z_{cc} | | | X_{cg} | | | |
| d | X_{ad} | | | Z_{dd} | X_{df} | X_{dg} | | | |
| z=f | | X_{bf} | | X_{df} | Z_{ff} | X_{fg} | | | |
| g | | | X_{cg} | X_{dg} | X_{fg} | Z_{gg} | | | |
| h | | | | | | | Z_{hh} | X_{hj} | X_{hk} |
| j | | | | | | | X_{hj} | Z_{jj} | X_{jk} |
| k | | | | | | | X_{hk} | X_{jk} | Z_{kk} |

(6.15)

Вектор приложенного напряжения

| | a | b | c | d | f | g | h | j | k |
|-----|---|-------|---|--------|---|-------|--------|---|-------|
| e = | 0 | e_b | 0 | $-e_d$ | 0 | e_g | $-e_h$ | 0 | e_k |

III. При установлении тензора преобразования первый шаг — выразить действительные токи, протекающие через каждую катушку, через новые токи (рис. 6.10). Второй шаг — приравнять старые и новые токи, протекающие через каждую катушку:

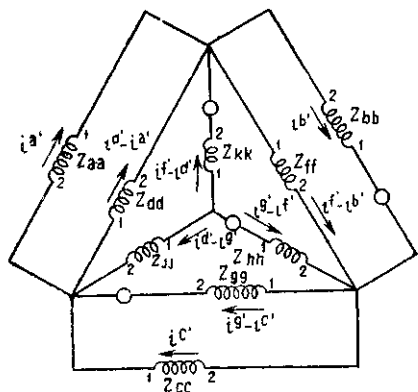


Рис. 6.10. Контурные токи в отдельных катушках.

$$\begin{aligned}
 i^a &= -i^{a'} \\
 i^b &= -i^{b'} \\
 i^c &= -i^{c'} \\
 i^d &= i^{d'} - i^{a'} \\
 i^f &= i^{f'} - i^{b'} \\
 i^g &= i^{g'} - i^{c'} \\
 i^h &= i^{g'} - i^{f'} \\
 i^j &= i^{d'} - i^{g'} \\
 i^k &= i^{j'} - i^{d'}
 \end{aligned}$$

| | a' | b' | c' | d' | f' | g' |
|-------|----|----|----|----|----|----|
| a | -1 | | | | | |
| b | | -1 | | | | |
| c | | | -1 | | | |
| d | -1 | | | 1 | | |
| C = f | | -1 | | | 1 | |
| g | | | -1 | | | 1 |
| h | | | | | -1 | 1 |
| j | | | | 1 | | -1 |
| k | | | | -1 | 1 | |

(6.16)

Коэффициенты при новых токах образуют тензор преобразования.

IV. Новые компоненты тензора импеданса определяются формулой $C_t \cdot z \cdot C = z'$:

| | a' | b' | c' | d' | f' | g' |
|---------|-----------------------------|-----------------------------|-----------------------------|--|--|--|
| a' | $Z_{aa} + Z_{dd} + 2X_{ad}$ | X_{df} | X_{dg} | $-X_{hd} - Z_{dd}$ | $-X_{df}$ | $-X_{dg}$ |
| b' | X_{df} | $2X_{bf} + X_{bb} + Z_{ff}$ | X_{fb} | $-X_{df}$ | $-X_{bf} - Z_{ff}$ | $-X_{fg}$ |
| c' | X_{dg} | X_{fg} | $2X_{cg} + X_{cc} + Z_{gg}$ | $-X_{dg}$ | $-X_{fg}$ | $-X_{cg} - Z_{gg}$ |
| z' = d' | $-X_{ad} - Z_{dd}$ | $-X_{df}$ | $-X_{dg}$ | $Z_{dd} + Z_{jj} - X_{jk} - X_{jk} + Z_{kk}$ | $X_{df} - X_{hj} + X_{hk} + X_{jk} - Z_{kk}$ | $X_{dg} + X_{hj} - X_{hk} - Z_{jj} + Z_{jk}$ |
| f' | $-X_{df}$ | $-X_{bf} - Z_{ff}$ | $-X_{fg}$ | $X_{df} - X_{hj} + X_{jk} + X_{hk} - Z_{kk}$ | $Z_{ff} + Z_{hh} + X_{hk} - X_{hk} + Z_{kk}$ | $X_{fg} - Z_{hh} + X_{hk} + X_{hj} - X_{jk}$ |
| g' | $-X_{dg}$ | $-X_{fg}$ | $-X_{cg} - Z_{gg}$ | $X_{dg} + X_{hj} - Z_{jj} - X_{hk} + X_{jk}$ | $X_{fg} - Z_{hh} + X_{hj} + X_{hk} - X_{jk}$ | $Z_{gg} + Z_{hh} - X_{hj} - X_{hj} + Z_{jj}$ |

(6.17)

Вектор приложенного напряжения из $C_t \cdot e$ равен

$$e' = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|} \hline a' & b' & c' & d' & f' & g' \\ \hline e_d & -e_b & -e_g & -e_d - e_h & e_h + e_k & e_g - e_h \\ \hline \end{array} \quad (6.18)$$

Контурные токи находятся по формуле $i' = z'^{-1} \cdot e'$.

6. ЗАМЕНА КОНТУРНЫХ ТОКОВ ТОКАМИ ВЕТВЕЙ

Действительные токи ветвей i можно заменить гипотетическими контурными токами i' , но можно сделать и обратный шаг, т. е. гипотетические контурные токи заменить действительными токами ветвей.

Используя в качестве исходных контурные токи предыдущего параграфа i' , преобразуем их в токи ветвей i'' (рис. 6.11).

Будет обнаружено, что вместо установления соотношения $i' = C' \cdot i''$ легче установить сначала обратное соотношение $i'' = C'^{-1} \cdot i'$. Затем уравнения решаем относительно действительных токов или ищем C'^{-1} . (Если матрица C имеет много нулей, то легче найти ее обращение решением системы линейных уравнений, чем следовать стандартной процедуре.)

Таким образом, отношение между новыми (действительными) токами и старыми (контурными) токами следующее:

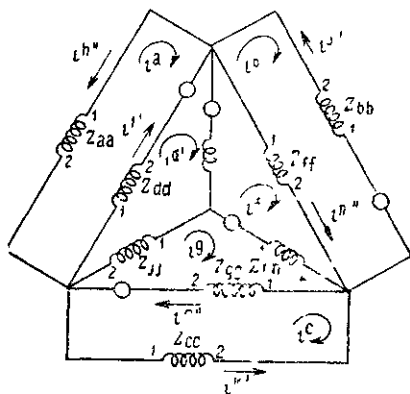


Рис. 6.11. Замена контурных токов токами ветвей.

$$C'^{-1} = \begin{array}{l} i^h = -i^a \\ i^j = -i^b \\ i^k = -i^c \\ i^l = i^d - i^a \\ i^m = i^f - i^b \\ i^n = i^g - i^c \end{array} \begin{array}{l} h'' \\ j'' \\ k'' \\ l'' \\ m'' \\ n'' \end{array} = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|} \hline a' & b' & c' & d' & f' & g' \\ \hline h'' & -1 & & & & \\ \hline j'' & & -1 & & & \\ \hline k'' & & & -1 & & \\ \hline l'' & -1 & & & 1 & \\ \hline m'' & & -1 & & & 1 \\ \hline n'' & & & -1 & & 1 \\ \hline \end{array} \quad (6.19)$$

Решая уравнения относительно старых токов, получаем

$$\begin{aligned}
 i^{a'} &= -i^{h''} & & = -i^{h''} \\
 i^{b'} &= -i^{j''} & & = -i^{j''} \\
 i^{c'} &= -i^{k''} & & = -i^{k''} \\
 i^{d'} &= i^{l''} + i^{a'} = i^{l''} - i^{h''} = -i^{h''} & & + i^{l''} \\
 i^{f'} &= i^{m''} + i^{b'} = i^{m''} - i^{j''} = -i^{j''} & & + i^{m''} \\
 i^{g'} &= i^{n''} + i^{c'} = i^{n''} - i^{k''} = -i^{k''} & & + i^{n''}
 \end{aligned} \tag{6.20}$$

Следовательно, тензор преобразования

$$C' = \begin{array}{c} \begin{array}{c} h'' \quad j'' \quad k'' \quad l'' \quad m'' \quad n'' \\ \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|} \hline a' & -1 & & & & \\ \hline b' & & -1 & & & \\ \hline c' & & & -1 & & \\ \hline d' & -1 & & & 1 & \\ \hline f' & & -1 & & & 1 \\ \hline g' & & & -1 & & & 1 \\ \hline \end{array} \end{array} \end{array} \tag{6.21}$$

Новый вектор импеданса находится из $z'' = C_t' \cdot z' \cdot C'$, а новый вектор приложенного напряжения из $e'' = C_t' \cdot e'$.

7. ЭКВИВАЛЕНТНОСТЬ ТОКОВ ВЕТВЕЙ И КОНТУРНЫХ ТОКОВ

I. Рассмотрим снова сеть (рис. 6.7), воспроизведенную на рис. 6.12, в которой переменными являются четыре действительных тока ветвей: i^f , i^g , i^h и i^k . Действительные токи в других ветвях выражаются через эти четыре тока некоторым произвольным образом.

II. Если каждый из четырех токов i^f , i^g , i^h и i^k проходит в различных ветвях, то оказывается, что каждый из них образует замкнутую цепь. Например, i^h может проходить через катушки Z_k , Z_g , Z_d и Z_h , поэтому можно считать, что i^h проходит через этот контур.

Таким образом, ток ветви можно рассматривать как контурный ток, который действительно существует в этой частной ветви. Однако контурный ток не обязательно должен существовать как независимый ток ветви, что показывает i^d на рис. 6.11.

При сравнении рис. 6.12 и 6.13 обнаруживается, что замкнутые контуры, в которых напряжения складываются с помощью $\mathbf{C}_f \cdot \mathbf{e}$, идентичны замкнутым контурам, в которых на рис. 6.12 должны, по предположению, протекать токи ветвей.

Следовательно, с математической точки зрения компоненты \mathbf{i}' и \mathbf{e}' , найденные после соединения катушек, можно рассматривать так же, как представление токов и напряжений, существу-

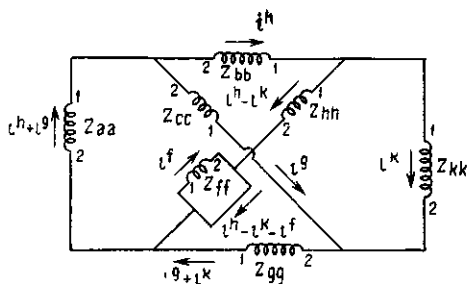


Рис. 6.12. Токи, текущие в ветвях.

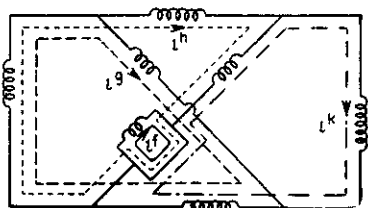


Рис. 6.13. Токи, текущие в замкнутых контурах.

ющих в замкнутых контурах, и, значит, фиксированные индексы f, g, h, k можно рассматривать как представляющие замкнутые контуры. В частности, e^f представляет сумму приложенных напряжений в контуре f , а i^f — гипотетический ток, протекающий в контуре f . Замкнутые контуры сами могут быть или действительными (проходящими на диаграмме сети вдоль катушек), или фиктивными (не проходящими через действительные проводники).

III. Подобно тому, как гипотетический контурный ток \mathbf{i}' можно заменить действительно существующим током ветви, гипотетическое контурное напряжение \mathbf{e}' , представляющее сумму напряжений, действительно приложенных в контуре, можно заменить единственным напряжением, действительно существующим в ветви, в частности, в той ветви, в которой действительно существует контурный ток (рис. 6.14). Следовательно, контурные ток и напряжение можно также физически представить как ток и напряжение в ветви. Математически оба физических представления имеют одинаковую форму, и фиксированные индексы f, g, h, k можно рассматривать как представляющие либо ветви, либо замкнутые контуры.

При решении большинства практических проблем ток ветвей следует выбирать согласно требованиям данной частной пробле-

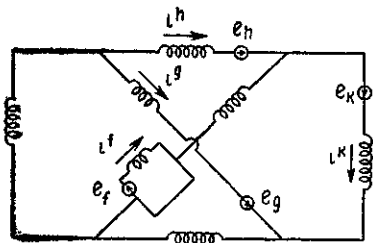


Рис. 6.14. Токи и напряжения ветвей.

мы, в то время как замкнутые контуры выбирают чисто случайно при выражении токов, протекающих через различные катушки, в терминах требуемых токов ветвей (см. рис. 6.13). Следовательно, *можно выбирать произвольно либо n ветвей, либо n замкнутых контуров*; тогда выбор остальных становится ограниченным, хотя некоторая свобода выбора еще остается из-за перехода от ветвей к катушкам.

8. ИЗМЕНЕНИЕ ЧИСЛА ВИТКОВ

I. Другим примером инвариантного преобразования является этап изменения числа витков катушек.

В задачах, связанных с сетями и вращающимися машинами, реактансы отдельных катушек или обмоток обычно вычисляются в предположении, что *каждая катушка имеет одинаковое с другими число витков*. В действительной соединенной сети имеющийся медный проводник используется для наматывания катушек с различным числом витков, в результате чего изменяются вычисленные собственные и взаимные индуктивности на отдельных катушках.

Изменение реактансов, обусловленное изменением числа витков, можно учесть двумя различными способами:

1) предположением, что примитивная сеть сама содержит катушки с *различным* числом витков и ее компоненты X_{aa} , X_{ab} и другие вычислены при помощи катушек, имеющих *различное* число витков;

2) предположением, что катушки примитивной сети содержат *одинаковое* число витков (обычно один) и компоненты z , следовательно, вычислены. Тогда устанавливается тензор преобразования, показывающий, как должно изменяться число витков отдельных катушек.

II. Пусть имеется тензор импеданса примитивной сети (рис. 6.15)

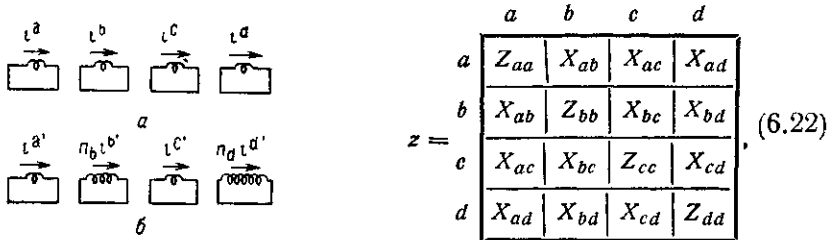


Рис. 6.15. Изменение числа витков:

a — примитивная сеть; b — действительная сеть.

где каждая катушка имеет одинаковое число витков.

Пусть теперь число витков катушек изменилось. В частности, если число витков катушек a и c равно единице, то число витков катушки b есть n_b , а катушки d — n_d . Изменение числа витков в конкретном поперечном сечении медного проводника от одного до n эквивалентно замене первоначального тока i_b , текущего через все поперечное сечение, на $1/n$ -ю его величины при помощи $i^{b'} = i_b/n$, текущего через меньшее поперечное сечение (рис. 6.16). То есть, старые токи являются токами, протекающими через большее поперечное сечение, а новые — через меньшее поперечное сечение.

Подобно тому, как введение коротких проводников для соединения катушек не вносит каких-либо дополнительных сопротивлений или индуктивностей в систему, оставляя, следовательно, входную мощность $e \cdot i$ инвариантной, и введение тонкой изоляции для разделения волокон медного проводника не вводит каких-либо дополнительных реактансов в систему и, следовательно, это преобразование оставляет входную мощность инвариантной.

III. Соотношение между токами, протекающими через большее поперечное сечение, и токами, текущими через меньшее поперечное сечение, можно установить выражением токов, протекающих в каждой катушке, через новые токи (рис. 6.16) и приравниванием старых и новых токов в одном и том же поперечном сечении в каждой катушке:

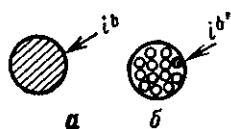


Рис. 6.16. Введение изоляции:
 a — 1 виток; b — n_b витков.

$$i^a = i^{a'} = i^{a'}$$

$$i^b = n_b i^{b'} = n_b i^{b'}$$

$$i^c = i^{c'} = i^{c'}$$

$$i^d = n_d i^{d'} = n_d i^{d'}$$

$$C = \begin{matrix} & a' & b' & c' & d' \\ \begin{matrix} a \\ b \\ c \\ d \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & n_b & & \\ & & 1 & \\ & & & n_d \end{bmatrix} & \end{matrix} \quad (6.23)$$

Коэффициенты при новых переменных образуют матрицу преобразования C .

Матрица преобразования содержит только диагональные компоненты, каждая из которых представляет число витков частной катушки (или число витков катушки в терминах витков некоторой частной катушки). Следует особо подчеркнуть, что теперь компоненты C могут быть не только целыми, но и дробными числами.

IV. Тензор импеданса сети, содержащей катушки с различным числом витков, есть $C_t \cdot Z \cdot C$, равный

$$z' = \begin{array}{c} a' \\ b' \\ c' \\ d' \end{array} \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline a' & Z_{aa} & n_b X_{ab} & X_{ac} & n_d X_{ad} \\ \hline b' & n_b X_{ab} & n_b Z_{bb} & n_b X_{bc} & n_b n_d X_{bd} \\ \hline c' & X_{ac} & n_b X_{bc} & Z_{cc} & n_d X_{cd} \\ \hline d' & n_d X_{ad} & n_b n_d X_{bd} & n_d X_{cd} & n_d Z_{dd} \\ \hline \end{array} \quad (6.24)$$

Вектор приложенного напряжения находится из $C_t \cdot e$:

$$e' = \begin{array}{c} a' \\ b' \\ c' \\ d' \end{array} \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline a' & e_a & n_b e_b & e_c & n_d e_d \\ \hline \end{array} \quad (6.25)$$

Настоящее преобразование изменения числа катушек редко происходит самостоятельно, обычно в то же время происходит соединение катушек.

9. ПРЕНЕБРЕЖЕНИЕ «ТОКАМИ НАМАГНИЧИВАНИЯ» КАК СВЯЗЯМИ

I. В многообмоточном трансформаторе несколько катушек наматываются на один железный сердечник (рис. 6.17). Большое число линий потока, так называемый *поток сердечника*, проходит вдоль сердечника, пронизывая все катушки, в то время как оставшиеся линии потока, так называемые *потoki рассеяния*, замыкаются в воздушном зазоре между катушками.

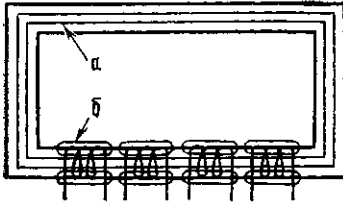


Рис. 6.17. Потoki в многообмоточном трансформаторе:
а — поток сердечника; б — поток рассеяния.

Магнитодвижущая сила M , создающая поток сердечника, обусловлена всеми токами, которые охватываются потоком сердечника; например, в многообмоточном трансформаторе с четырьмя катушками МДС, создающая поток сердечника,

$$M = n_1 i^1 + n_2 i^2 + n_3 i^3 = n_4 i^4.$$

Потоки рассеяния создаются МДС, обусловленной каждым током в отдельности и всеми токами вместе. Далее нас не будет интересовать значение этих МДС.

Естественно предположить, что *поток сердечника*, пронизывающий все катушки, вызван так называемым гипотетическим «*током намагничивания*» i^m , протекающим в одной из катушек, в то время как оставшиеся «*потoki рассеяния*» вызваны оставшимися токами — «*токами нагрузки*», т. е. искусственное разде-

ление линий потока на «поток сердечника» (путь в железе) и «поток рассеяния» (путь в воздухе) ведет также к искусственному разделению токов на «ток намагничивания» и «ток нагрузки».

II. Поскольку в трансформаторе магнитное сопротивление (релактанс) пути потока сердечника мало, МДС, производящая поток сердечника, может быть принята равной нулю или, выражаясь инженерным языком, «током намагничивания» можно пренебречь. Это допущение эквивалентно уравнению

$$n_1 i^1 + n_2 i^2 + n_3 i^3 + n_4 i^4 = 0, \quad (6.26)$$

т. е. сумма всех МДС вдоль магнитной цепи равна нулю.

Это последнее соотношение устанавливает уравнение между токами многообмоточного трансформатора, следовательно, оно является «уравнением связи» (гл. 4, § 19). В предыдущем случае ограничения на токи были установлены при помощи воздействия на электрическую цепь (разрыванием ее), теперь ограничения на токи установлены при помощи воздействия на магнитную цепь.

Когда сеть содержит несколько замкнутых магнитных цепей, в которых можно пренебречь магнитодвижущими силами, создающими потоки сердечников, для каждой магнитной цепи может быть установлено отдельное уравнение связи приравнением нулю МДС, действующих вдоль каждой магнитной цепи.

10. СВЯЗИ КАК ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

I. В предыдущем случае (гл. 5, § 1) уравнения связи были введены размыканием некоторых цепей. Их учитывали двумя различными способами:

1) уравнения были подставлены в уже установленное соотношение $\mathbf{i} = \mathbf{C} \cdot \mathbf{i}'$, чтобы уменьшить число новых переменных, и старая \mathbf{C} была заменена новой \mathbf{C} , имеющей меньше столбцов, чем строк. Число исключенных переменных равнялось числу уравнений связи;

2) уже установленная старая \mathbf{C} была отброшена и с самого начала была установлена другая, сингулярная \mathbf{C} введением меньшего числа новых переменных. Это общий метод, используемый во всех сетях.

II. В данном случае будет использован третий метод учета уравнения связи, поскольку второй метод слишком громоздкий для данного типа связи. Будет установлен отдельный тензор преобразования \mathbf{C} , такой, что соотношение $\mathbf{i} = \mathbf{C} \cdot \mathbf{i}'$ будет эквивалентно самим уравнениям связи, т. е. введение связей будет рассматриваться как отдельное преобразование.

В любой общей проблеме перед введением связи имеется n переменных. Результатом использования тензора преобразования

С, вводящего k уравнений связи, является введение $n-k$ новых переменных вместо n старых.

III. Когда дана система k уравнений связи, этапы установления тензора преобразования являются следующими:

1) выразить *любые* k переменных в уравнениях связи как функции оставшихся $n-k$ переменных;

2) оставить другие $n-k$ переменных неизменными.

Приведенная система уравнений представляет соотношение между «старыми» и «новыми» переменными («новые» переменные являются просто уменьшенными в числе «старыми» переменными), следовательно, тензор преобразования находится, как обычно, по коэффициентам при новых токах.

IV. В качестве примера последнее уравнение связи дано в форме

$$n_1 i^1 + n_2 i^2 + n_3 i^3 + n_4 i^4 = 0, \quad (6.27)$$

устанавливающей, что в четырехобмоточном трансформаторе результирующая МДС равна нулю. Выражая, скажем, i^1 через три остальных (чтобы исключить i^1), получаем

$$i^1 = -\frac{n_2}{n_1} i^2 - \frac{n_3}{n_1} i^3 - \frac{n_4}{n_1} i^4, \quad (6.28)$$

оставляя оставшиеся три неизменными:

$$\begin{aligned} i^2 &= i^2, \\ i^3 &= i^3, \\ i^4 &= i^4. \end{aligned} \quad (6.29)$$

Результирующие четыре уравнения заменяют *четыре* первоначальных тока i^1, i^2, i^3 и i^4 на *три* тока i^1, i^2 и i^3 . Чтобы избежать любых возможных недоразумений, три тока в правых частях уравнений могут быть со штрихами, так что система уравнений $\dot{i} = C \cdot i'$ (представляющая уравнения связей):

$$\begin{aligned} i^1 &= -\frac{n_2}{n_1} i^{2'} - \frac{n_3}{n_1} i^{3'} - \frac{n_4}{n_1} i^{4'} \\ i^2 &= i^{2'} \\ i^3 &= i^{3'} \\ i^4 &= i^{4'} \end{aligned} \quad C = \begin{array}{c} \begin{array}{|c|c|c|} \hline 2' & 3' & 4' \\ \hline 1 & -\frac{n_2}{n_1} & -\frac{n_3}{n_1} & -\frac{n_4}{n_1} \\ \hline 2 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 3 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 4 & 0 & 0 & 1 \\ \hline \end{array} \end{array} \cdot \quad (6.30)$$

Следовательно, роль уравнений связи (6.27) играет тензор преобразования (6.30).

11. МНОГООБМОТОЧНЫЕ ТРАНСФОРМАТОРЫ

Пусть тензор импеданса четырехобмоточного трансформатора

$$z = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix} & \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline Z_{11} & X_{12} & X_{13} & X_{14} \\ \hline X_{12} & Z_{22} & X_{23} & X_{24} \\ \hline X_{13} & X_{23} & Z_{33} & X_{34} \\ \hline X_{14} & X_{24} & X_{34} & Z_{44} \\ \hline \end{array} \end{matrix}; \quad (6.31)$$

каждый импеданс вычислен для его действительного числа витков.

Его токком намагничивания пренебрегаем, преобразуя z с помощью C (уравнение 6.30) и получая $C_t \cdot z \cdot C$:

$$z' = \begin{matrix} & \begin{matrix} 2' & 3' & 4' \end{matrix} \\ \begin{matrix} 2' \\ 3' \\ 4' \end{matrix} & \begin{array}{|c|c|c|} \hline Z_{22} - 2 \frac{n_2}{n_1} X_{12} & X_{23} - \frac{n_2}{n_1} X_{13} & X_{24} - \frac{n_2}{n_1} X_{14} \\ \hline + \left(\frac{n_2}{n_1} \right)^2 Z_{11} & - \frac{n_3}{n_1} X_{12} + \frac{n_2 n_3}{n_1 n_2} Z_{11} & - \frac{n_4}{n_1} X_{12} + \frac{n_2 n_4}{n_1 n_1} Z_{11} \\ \hline X_{23} - \frac{n_2}{n_1} X_{13} & Z_{33} - 2 \frac{n_3}{n_1} X_{13} & X_{34} - \frac{n_3}{n_1} X_{14} \\ \hline - \frac{n_3}{n_1} X_{12} + \frac{n_2 n_3}{n_1 n_1} Z_{11} & + \left(\frac{n_3}{n_1} \right)^2 Z_{11} & - \frac{n_4}{n_1} X_{13} + \frac{n_3 n_4}{n_1 n_1} Z_{11} \\ \hline X_{24} - \frac{n_2}{n_1} X_{14} & X_{34} - \frac{n_3}{n_1} X_{14} & Z_{44} - 2 \frac{n_4}{n_1} X_{14} \\ \hline - \frac{n_4}{n_1} X_{12} + \frac{n_2 n_4}{n_1 n_1} Z_{11} & - \frac{n_4}{n_1} X_{13} + \frac{n_3 n_4}{n_1 n_1} Z_{11} & + \left(\frac{n_4}{n_1} \right)^2 Z_{11} \\ \hline \end{array} \end{matrix}. \quad (6.32)$$

Следовательно, в результате пренебрежения токком намагничивания многообмоточного трансформатора всегда уменьшается число строк и столбцов его тензора импеданса на один посредством сингулярного тензора преобразования C , т. е. четыре обмотки заменяются тремя другими (гипотетическими) обмотками.

Вектор приложенного напряжения e' после пренебрежения токком намагничивания становится $C_t \cdot e$

$$e' = \begin{matrix} & \begin{matrix} 2' & 3' & 4' \end{matrix} \\ & \begin{array}{|c|c|c|} \hline e_2 - \frac{n_2}{n_1} e_1 & e_3 - \frac{n_3}{n_1} e_1 & e_4 - \frac{n_4}{n_1} e_1 \\ \hline \end{array} \end{matrix}. \quad (6.33)$$

Можно сказать, что *разность потенциалов между двумя обмотками, уменьшенная в отношении один к одному, получена*. Ток одной из двух обмоток должен быть исключен.

Нагрузочные токи i' в обмотках 2, 3 и 4 находят посредством $z'^{-1} \cdot e'$. Токи в первоначальных катушках находят в терминах i' из $i = C \cdot i'$, а напряжения, индуцируемые в каждой катушке, из $e = z \cdot C \cdot i'$.

Детальный анализ *цепей* многообмоточного трансформатора приведен в гл. 10.

12. ТОКИ НАГРУЗКИ И НАМАГНИЧИВАНИЯ

I. Предположим, что гипотетический ток намагничивания i^m , создающий поток сердечника, не равен нулю, а действительно существует в одной из катушек, скажем, катушке, связанной с линией.

В этом случае катушка рассматривается как обратная цепь для других «нагрузочных» токов, создающих линии потока в воздухе, т. е. в четырехобмоточном трансформаторе «уравнение МДС» следующее:

$$n_1 i^1 + n_2 i^2 + n_3 i^3 + n_4 i^4 = n_1 i^m = M, \quad (6.34)$$

где i^m принимается текущим в катушке 1. Следовательно, i^1 заменяется следующим соотношением:

$$i^1 = i^m - \frac{n_2}{n_1} i^2 - \frac{n_3}{n_1} i^3 - \frac{n_4}{n_1} i^4, \quad (6.35)$$

в то время как другие токи «нагрузки» остаются неизменными:

$$\begin{aligned} i^2 &= i^2, \\ i^3 &= i^3, \\ i^4 &= i^4. \end{aligned} \quad (6.36)$$

Эти четыре уравнения можно рассматривать как преобразование четырех первоначальных переменных i^1, i^2, i^3 и i^4 в четыре других переменных: $i^m, i^{2'}, i^{3'}$ и $i^{4'}$. Следовательно, система уравнений преобразования $i = C \cdot i'$ следующая:

$$i = C \cdot i' \quad \begin{array}{c} m \quad 2' \quad 3' \quad 4' \\ \begin{array}{l} 1 \\ C = 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} \end{array} \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & -\frac{n_2}{n_1} & -\frac{n_3}{n_1} & -\frac{n_4}{n_1} \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline \end{array} \quad (6.37)$$

Коэффициенты при новых токах образуют *несингулярный* (квадратный) тензор преобразования C .

II. Это преобразование изменяет не только токи, протекающие в катушках, но и физическую структуру сети, вводя фиктивные связи между катушкой i^m и другими катушками. Фиктивные контуры могут быть установлены нахождением нового вектора напряжения $e' = C_t \cdot e$

$$e' = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} m & 2' & 3' & 4' \end{array} \\ \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline e_1 & e_2 - \frac{n_2}{n_1} e_1 & e_3 - \frac{n_3}{n_1} e_1 & e_4 - \frac{n_4}{n_1} e_1 \\ \hline \end{array} \end{array}, \quad (6.38)$$

показывающего, что каждая нагрузочная цепь соединяется встречно с током намагничивания.

III. Следует заметить, что *сингулярная* C , используемая при пренебрежении током намагничивания, является частью *несингулярной* C . Она получается из последней при отбрасывании столбцов, соответствующих токам намагничивания.

Вообще, когда устанавливается сингулярная C , представляющая систему уравнений связи, *всегда можно построить несингулярную (квадратную) C , частью которой является сингулярная C , введением дополнительных новых переменных* (в данном случае i^m).

13. ДВУХОБОТОЧНЫЙ ТРАНСФОРМАТОР

I. Пусть поведение двухобмоточного трансформатора выражается через его токи «намагничивания» и «нагрузки», а не через «первичный» и «вторичный» токи. Первоначальные компоненты тензора импеданса z и нового тензора преобразования C соответственно будут

$$z = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} 1 & 2 \end{array} \\ \begin{array}{|c|c|} \hline Z_{11} & X_{12} \\ \hline X_{12} & Z_{22} \\ \hline \end{array} \end{array}, \quad (6.39)$$

$$C = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} m' & 2' \end{array} \\ \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & -\frac{n_2}{n_1} \\ \hline 0 & 1 \\ \hline \end{array} \end{array}. \quad (6.40)$$

Произведение $C_t \cdot z \cdot C$ дает новые компоненты тензора импеданса

$$z' = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} m & 2' \end{array} \\ \begin{array}{|c|c|} \hline Z_{11} & X_{12} - \frac{n_2}{n_1} Z_{11} \\ \hline X_{12} - \frac{n_2}{n_1} Z_{11} & Z_{22} - 2 \frac{n_2}{n_1} X_{12} + \left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2 Z_{11} \\ \hline \end{array} \end{array}. \quad (6.41)$$

Тензор адмиттанса

$$y' = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} & \begin{array}{c} m \\ \hline \end{array} \\ \begin{array}{c} m \\ \hline \end{array} & \begin{array}{c} \left[Z_{22} - 2 \frac{n_2}{n_1} X_{12} + \left(\frac{n_2}{n_1} \right)^2 Z_{11} \right] / D \\ \hline \left(\left(\frac{n_2}{n_1} \right) Z_{11} - X_{12} \right) / D \end{array} \\ \begin{array}{c} 2' \\ \hline \end{array} & \begin{array}{c} \begin{array}{c} 2' \\ \hline \end{array} \\ \left(\frac{n_2}{n_1} Z_{11} - X_{12} \right) / D \\ \hline Z_{11} / D \end{array} \end{array} \end{array}, \quad (6.42)$$

где $D = Z_{11}Z_{22} - (X_{12})^2$. Вектор приложенного напряжения

$$e' = C_e e = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} & \begin{array}{c} m \\ \hline \end{array} \\ \begin{array}{c} m \\ \hline \end{array} & \begin{array}{c} e_1 \\ \hline e_2 - \frac{n_2}{n_1} e_1 \end{array} \\ \begin{array}{c} 2' \\ \hline \end{array} & \end{array}. \quad (6.43)$$

II. Если во вторичной обмотке отсутствует приложенное напряжение, то $e_2 = 0$ и

$$i' = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} & \begin{array}{c} m \\ \hline \end{array} \\ \begin{array}{c} m \\ \hline \end{array} & \begin{array}{c} \left[\left(Z_{22} - \frac{n_2}{n_1} X_{12} \right) / D \right] e_1 \\ \hline \left[-X_{12} / D \right] e_1 \end{array} \\ \begin{array}{c} 2' \\ \hline \end{array} & \end{array}, \quad (6.44)$$

при этом они дают токи «намагничивания» и «нагрузки».

III. Токи в двух обмотках в терминах i' находятся из $i = C \cdot i'$:

$$i = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} & \begin{array}{c} 1 \\ \hline \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ \hline \end{array} & \begin{array}{c} i^m - \frac{n_2}{n_1} i^{2'} \\ \hline i^{2'} \end{array} \\ \begin{array}{c} 2 \\ \hline \end{array} & \end{array}. \quad (6.45)$$

Значит, первичный ток i^1 равен сумме тока намагничивания i^m и тока нагрузки $-i^{2'}(n_2/n_1)$.

Напряжения, индуцированные в двух катушках, находятся из $z \cdot C \cdot i'$

$$e_c = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} & \begin{array}{c} 1 \\ \hline \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ \hline \end{array} & \begin{array}{c} Z_{11} i^m + \left(X_{12} - \frac{n_2}{n_1} Z_{11} \right) i^{2'} \\ \hline X_{12} i^m + \left(Z_{22} - \frac{n_2}{n_1} X_{12} \right) i^{2'} \end{array} \\ \begin{array}{c} 2 \\ \hline \end{array} & \end{array}. \quad (6.46)$$

14. РАЗМЫКАНИЯ ЦЕПЕЙ КАК ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

I. В качестве другого примера, показывающего, что систему уравнений связи можно заменить сингулярной матрицей преобразования C , рассмотрим случай, когда в сети (уравнение

$\mathbf{e} = \mathbf{z} \cdot \mathbf{i}$ которой уже установлено) часть контуров разомкнута, но катушки не удалены.

Например, пусть рассматривается сеть (рис. 6.18), имеющая шесть катушек с шестью переменными: i^a, i^b, i^c, i^d, i^f и i^g . Ее тензор импеданса дается уравнением (6.17).

II. Пусть теперь разомкнуты ветви, в которых протекают токи $i^b, i^g - i^c$ и $i^f - i^b$, как показано на рис. 6.18. Эти разрывания экви-

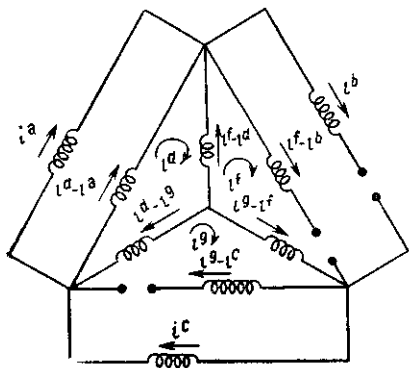


Рис. 6.18. Разрывание ветвей.

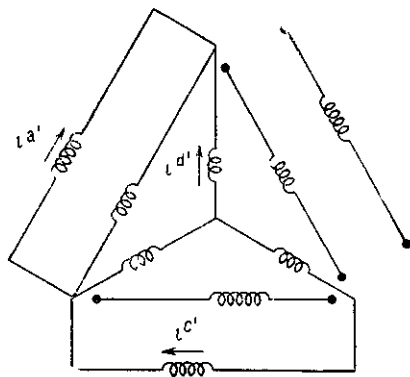


Рис. 6.19. Новые переменные.

валентны следующим уравнениям связи:

$$\begin{aligned} i^b &= 0, \\ i^g - i^c &= 0, \\ i^f - i^b &= 0. \end{aligned} \quad (6.47)$$

В результате этих связей число переменных уменьшается на три, а именно с шести до трех. Выбирая произвольно в качестве оставшихся переменных i^a, i^c и i^d (рис. 6.19), получаем следующее соотношение $\mathbf{i} = \mathbf{C} \cdot \mathbf{i}'$ между старыми и новыми переменными, эквивалентное уравнениям связи:

$$\begin{aligned} i^a &= i^{a'} \\ i^b &= 0 \\ i^c &= i^{c'} \\ i^d &= i^{d'} \\ i^f &= 0 \\ i^g &= i^{c'} \end{aligned} \quad \mathbf{C} = \begin{array}{c|ccc} & a' & c' & d' \\ \hline a & 1 & & \\ \hline b & & & \\ \hline c & & 1 & \\ \hline d & & & 1 \\ \hline f & & & \\ \hline g & & 1 & \end{array} \quad (6.48)$$

III. Следовательно, тензор импеданса уменьшенной сети на рис. 6.19 находится из уравнения (6.17) посредством $C_t \cdot z \cdot C =$

$$z' = \begin{array}{c} \begin{array}{|c|c|c|} \hline a' & c' & d' \\ \hline Z_{aa}+Z_{dd}+2X_{ad} & 0 & -X_{ad}-Z_{dd} \\ \hline 0 & Z_{cc}+Z_{hh}+Z_{jj}-2X_{hj} & X_{hj}-X_{hk}+X_{jk}-Z_{jj} \\ \hline d' & -X_{ad}-Z_{dd} & X_{hj}-X_{hk}+X_{jk}-Z_{jj} \\ \hline \end{array} \\ \hline \end{array} \quad (6.49)$$

Такой же результат для рис. 6.19 может быть получен, если исходить из примитивной сети вместо сети, изображенной на рис. 6.18, и составить новую C , содержащую такие же три новые переменные.

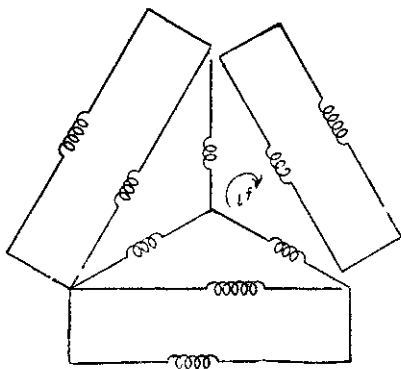


Рис. 6.20. Размыкание контура.

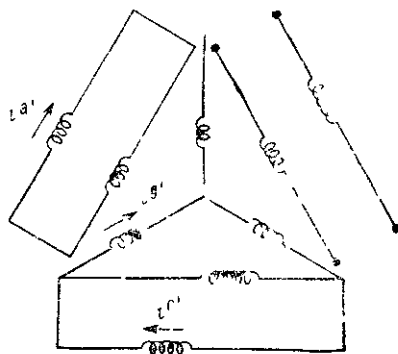


Рис. 6.21. Размыкание ветвей и контуров.

IV. Вместо того чтобы полагать реально существующий ток, протекающий по ветви, равным нулю, можно приравнять нулю *воображаемый* контурный ток, такой как i^f (см. рис. 6.18). Это эквивалентно исключению контура f посредством размыкания его в некоторых узлах (рис. 6.20).

V. Когда уравнения связи имеют простую форму $i^b=0$, $i^d=0$, $i^f=0$ (рис. 6.21), то операция $C_t \cdot z \cdot C$ состоит просто в отбрасывании строк и столбцов b , d , f из тензора (6.17).

Тензор преобразования

$$\mathbf{C} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} & \mathbf{a}' & \mathbf{c}' & \mathbf{g}' \\ \mathbf{a} & 1 & & \\ \mathbf{b} & & & \\ \mathbf{c} & & 1 & \\ \mathbf{d} & & & \\ \mathbf{f} & & & \\ \mathbf{g} & & & 1 \end{array} \end{array} \quad (6.50)$$

Тензор импеданса \mathbf{z}' сети, изображенной на рис. 6.21, находится из тензора (6.17), представляя $\mathbf{C}_t \cdot \mathbf{z} \cdot \mathbf{C}$ как

$$\mathbf{z}' = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} & \mathbf{a}' & \mathbf{c}' & \mathbf{g}' \\ \mathbf{a}' & Z_{aa} + Z_{dd} + 2X_{ad} & X_{dg} & -X_{dg} \\ \mathbf{c}' & X_{dg} & Z_{cc} + Z_{gg} + 2X_{cg} & -X_{cg} - Z_{gg} \\ \mathbf{g}' & -X_{dg} & -X_{cg} - Z_{gg} & Z_{gg} + Z_{hh} + Z_{jj} - 2X_{hj} \end{array} \end{array} \quad (6.51)$$

VI. *Напряжения в отдельных катушках не могут быть найдены посредством $\mathbf{e} = \mathbf{z} \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{i}'$, так как \mathbf{z} не является примитивной сетью. Эта формула дает напряжения, индуцированные в контуре независимо от того, замкнутый он или разомкнутый, так как исходные уравнения, преобразованные с помощью \mathbf{C} , представляют контурные уравнения сети, данной на рис. 6.18. Если требуются напряжения, индуцированные в отдельных катушках с разомкнутой цепью, то исходный импеданс \mathbf{z} будет представлять тензор импеданса примитивной сети.*

15. ПЕРЕСТАНОВКИ КАК ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

I. Преобразования с этой точки зрения представляют либо перестройку физической системы, либо выбор других переменных. Во многих случаях преобразование состоит в простом изменении порядка, в котором располагаются переменные.

Такое изменение порядка переменных называется *перестановкой*. Например, в некоторых трехфазных системах иногда желательно расположить рядом те оси каждой системы, которые относятся соответственно к первой, второй и третьей фазам; или когда катушки обмотки постоянного тока соединены с коммутатором. В результате переключения изменится порядок, в котором напряжения, наводимые в отдельных катушках, суммируются

в напряжение на зажимах в любой момент времени; или порядок, в котором переключатель отпирает последовательность ламп, представляет перестановку и т. д. Такие примеры перестановок, встречающиеся в инженерной практике, можно продолжить неограниченно.

II. В качестве простого примера пусть e , i и z некоторой системы вычисляются как

$$e = \begin{array}{c} \text{g} \quad \text{i} \quad \text{a} \quad \text{j} \quad \text{k} \quad \text{b} \quad \text{h} \quad \text{c} \quad \text{d} \quad \text{f} \\ \hline e_g \quad e_i \quad e_a \quad e_j \quad e_k \quad e_b \quad e_h \quad e_c \quad e_d \quad e_f \end{array}, \quad (6.52)$$

$$i = \begin{array}{c} \text{g} \quad \text{i} \quad \text{a} \quad \text{j} \quad \text{k} \quad \text{b} \quad \text{h} \quad \text{c} \quad \text{d} \quad \text{f} \\ \hline i^g \quad i^i \quad i^a \quad i^j \quad i^k \quad i^b \quad i^h \quad i^c \quad i^d \quad i^f \end{array}, \quad (6.53)$$

$$z = \begin{array}{c} \text{g} \quad \text{i} \quad \text{a} \quad \text{j} \quad \text{k} \quad \text{b} \quad \text{h} \quad \text{c} \quad \text{d} \quad \text{f} \\ \hline \text{g} \quad Z_1 \quad Z_2 \quad \quad \quad Z_3 \quad Z_4 \quad \quad \quad Z_5 \quad Z_6 \\ \text{i} \quad Z_7 \quad Z_8 \quad Z_9 \quad Z_{10} \quad \quad \quad \quad Z_{11} \quad \quad \quad Z_{12} \\ \text{a} \quad \quad \quad Z_{13} \quad Z_{14} \quad \quad \quad Z_{15} \quad \quad \quad Z_{15} \quad \quad \\ \text{j} \quad \quad \quad Z_{17} \quad Z_{18} \quad Z_{19} \quad \quad \quad Z_{20} \quad \quad \quad Z_{21} \quad \quad \quad Z_{22} \\ \text{k} \quad Z_{23} \quad Z_{24} \quad \quad \quad Z_{25} \quad \quad \quad Z_{26} \quad \quad \quad \quad \quad \quad Z_{27} \\ \text{b} \quad Z_{28} \quad \quad \quad \quad \quad \quad Z_{29} \quad \quad \quad Z_{30} \quad Z_{31} \quad \quad \quad Z_{32} \quad \quad \\ \text{h} \quad \quad \quad \quad \quad \quad Z_{33} \quad \quad \quad Z_{34} \quad Z_{35} \quad Z_{36} \quad Z_{37} \quad \quad \quad Z_{38} \\ \text{c} \quad \quad \quad Z_{39} \quad \quad \quad Z_{40} \quad \quad \quad \quad \quad \quad Z_{41} \quad Z_{42} \quad \quad \quad Z_{43} \\ \text{d} \quad Z_{44} \quad \quad \quad Z_{45} \quad \quad \quad \quad \quad \quad Z_{46} \quad \quad \quad \quad \quad \quad Z_{47} \quad Z_{48} \\ \text{f} \quad Z_{49} \quad Z_{50} \quad \quad \quad Z_{51} \quad Z_{52} \quad \quad \quad Z_{53} \quad Z_{54} \quad Z_{55} \quad Z_{56} \end{array}, \quad (6.54)$$

III. Теперь пусть порядок осей изменится от $g, i, a, j, k, b, h, c, d, f$ к $g, j, h, i, a, b, d, i, k, c$, т. е. пусть каждые четвертые оси будут соседними. Такое изменение порядка эквивалентно преобразованию

$$\begin{aligned}
 i^g &= i^{g'} \\
 i^j &= & i^{j'} \\
 i^a &= & & i^{a'} \\
 i^h &= & & & i^{h'} \\
 i^b &= & & & & i^{b'} \\
 i^c &= & & & & & i^{c'} \\
 i^d &= & & & & & & i^{d'} \\
 i^f &= & & & & & & & i^{f'}
 \end{aligned} \tag{6.55}$$

| | g' | j' | h' | f' | a' | b' | d' | i' | k' | c' |
|---|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|
| g | 1 | | | | | | | | | |
| i | | | | | | | | 1 | | |
| a | | | | | 1 | | | | | |
| j | | 1 | | | | | | | | |
| k | | | | | | | | | 1 | |
| b | | | | | | 1 | | | | |
| h | | | 1 | | | | | | | |
| c | | | | | | | | | | 1 |
| d | | | | | | | 1 | | | |
| f | | | | 1 | | | | | | |

$$C = \tag{6.56}$$

$$i' = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|}
 \hline
 g' & j' & h' & f' & a' & b' & d' & i' & k' & c' \\
 \hline
 i^g & i^j & i^h & i^f & i^a & i^b & i^d & i^i & i^k & i^c \\
 \hline
 \end{array} \tag{6.57}$$

Таким образом токи сами по себе остаются неизменными; только порядок, в котором располагаются их оси сверху тензора преобразования, изменяется, как показано. Заметим, что все компоненты тензора преобразования C перестановки кроме *одной* являются нулями в каждом столбце и в каждой строке.

Новые компоненты вектора напряжения определяются из $\mathbf{C}_t \cdot \mathbf{e} = \mathbf{e}'$

$$\mathbf{e}' = \begin{array}{c} \mathbf{g}' \quad \mathbf{j}' \quad \mathbf{h}' \quad \mathbf{i}' \quad \mathbf{a}' \quad \mathbf{b}' \quad \mathbf{d}' \quad \mathbf{i}' \quad \mathbf{k}' \quad \mathbf{c}' \\ \hline e_g \quad e_j \quad e_h \quad e_f \quad e_a \quad e_b \quad e_d \quad e_i \quad e_k \quad e_c \end{array} \cdot \quad (6.58)$$

Новые компоненты тензора импеданса, найденные из $\mathbf{C}_t \cdot \mathbf{z} \cdot \mathbf{C}$,

$$\mathbf{z}' = \begin{array}{c} \mathbf{g}' \quad \mathbf{j}' \quad \mathbf{h}' \quad \mathbf{i}' \quad \mathbf{a}' \quad \mathbf{b}' \quad \mathbf{d}' \quad \mathbf{i}' \quad \mathbf{k}' \quad \mathbf{c}' \\ \hline Z_1 \quad | \quad | \quad | \quad Z_6 \quad | \quad | \quad Z_4 \quad Z_5 \quad Z_2 \quad Z_3 \quad | \\ \hline | \quad | \quad Z_{19} \quad | \quad | \quad Z_{22} \quad Z_{18} \quad Z_{20} \quad | \quad | \quad Z_{17} \quad | \quad | \quad Z_{21} \\ \hline | \quad | \quad | \quad Z_{36} \quad Z_{38} \quad Z_{33} \quad Z_{35} \quad | \quad | \quad | \quad Z_{34} \quad Z_{37} \\ \hline Z_{49} \quad Z_{51} \quad Z_{53} \quad Z_{56} \quad | \quad | \quad | \quad Z_{55} \quad Z_{50} \quad Z_{52} \quad Z_{54} \\ \hline | \quad | \quad Z_{14} \quad Z_{15} \quad | \quad | \quad Z_{13} \quad | \quad | \quad Z_{16} \quad | \quad | \quad | \\ \hline Z_{28} \quad Z_{29} \quad Z_{31} \quad | \quad | \quad | \quad Z_{30} \quad Z_{32} \quad | \quad | \quad | \quad | \\ \hline Z_{44} \quad | \quad | \quad | \quad Z_{48} \quad Z_{45} \quad Z_{46} \quad Z_{47} \quad | \quad | \quad | \quad | \\ \hline Z_7 \quad Z_{10} \quad | \quad | \quad Z_{12} \quad Z_9 \quad | \quad | \quad | \quad Z_8 \quad | \quad | \quad Z_{11} \\ \hline Z_{23} \quad | \quad | \quad Z_{26} \quad Z_{27} \quad | \quad | \quad | \quad | \quad Z_{24} \quad Z_{25} \quad | \quad | \\ \hline | \quad | \quad Z_{40} \quad Z_{41} \quad Z_{43} \quad | \quad | \quad | \quad | \quad | \quad Z_{39} \quad | \quad | \quad Z_{42} \end{array} \quad (6.59)$$

Перестановку \mathbf{C} применительно к \mathbf{z} можно выполнить быстрее, если сначала поменять местами столбцы \mathbf{z} (получая $\mathbf{z} \cdot \mathbf{C}$), а затем поменять местами строки $\mathbf{z} \cdot \mathbf{C}$, получая $\mathbf{C}_t \cdot \mathbf{z} \cdot \mathbf{C}$. Этапы $\mathbf{C}_t \cdot \mathbf{z} \cdot \mathbf{C}$ показаны лишь потому, что служат введением к более сложным перестановкам.

16. ЗАМКНУТЫЕ ОБМОТКИ КАК ПЕРЕСТАНОВКИ

I. Более сложными примерами перестановок являются замкнутые якорные обмотки постоянного тока, в которых проводники пересекаются потоком возбуждения в порядке, отличном от того, в котором по ним протекают токи.

В качестве простого примера рассмотрим 16 проводников, расположенных в 16 пазах (рис. 6.22). Нумерация проводников указывает порядок, в котором они пересекают внешний поток при их вращении.

II. Теперь 16 проводников соединим в непрерывную замкнутую обмотку, соединяя, скажем, каждый четвертый проводник в противоположном направлении, в порядке 1, —4, 7, —10, 13, —16 и т. д., пока не охватим все проводники (рис. 6.23).

В результате такого соединения ток, начиная с проводника 1, будет протекать по следующему проводнику — 4 (минус потому, что направление тока противоположно), затем по 7 и т. д. Таким образом, в результате этого типа непрерывной связи изменяется порядок проводников по отношению к току. Новая нумерация проводников показана на рис. 6.23.

Следовательно, нумерация, соответствующая рис. 6.22, показывает, в каком порядке внешний поток пересекает проводники при их вращении, а нумерация, соответствующая рис. 6.23, показывает порядок, в котором ток протекает по проводникам.

III. Такое изменение в порядке проводников в зависимости от того, рассматривать ли его с точки зрения потока или тока, можно выразить как преобразование $i = C \cdot i'$:

| | | 1' | 2' | 3' | 4' | 5' | 6' | 7' | 8' | 9' | 10' | 11' | 12' | 13' | 14' | 15' | 16' |
|---------------------|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| $i^1 = i^{1'}$ | 1 | 1 | | | | | | | | | | | | | | | |
| $i^2 = -i^{12'}$ | 2 | | | | | | | | | | | | -1 | | | | |
| $i^3 = i^{7'}$ | 3 | | | | | | | 1 | | | | | | | | | |
| $i^4 = -i^{2'}$ | 4 | | -1 | | | | | | | | | | | | | | |
| $i^5 = i^{13'}$ | 5 | | | | | | | | | | | | | 1 | | | |
| $i^6 = -i^{8'}$ | 6 | | | | | | | | -1 | | | | | | | | |
| $i^7 = i^{3'}$ | 7 | | | 1 | | | | | | | | | | | | | |
| $i^8 = -i^{14'}$ | 8 | | | | | | | | | | | | | | -1 | | |
| $i^9 = i^{9'}$ | 9 | | | | | | | | | 1 | | | | | | | |
| $i^{10} = -i^{4'}$ | 10 | | | | -1 | | | | | | | | | | | | |
| $i^{11} = i^{15'}$ | 11 | | | | | | | | | | | | | | | 1 | |
| $i^{12} = -i^{10'}$ | 12 | | | | | | | | | | -1 | | | | | | |
| $i^{13} = i^{5'}$ | 13 | | | | | 1 | | | | | | | | | | | |
| $i^{14} = -i^{16'}$ | 14 | | | | | | | | | | | | | | | | -1 |
| $i^{15} = i^{11'}$ | 15 | | | | | | | | | | | 1 | | | | | |
| $i^{16} = -i^{6'}$ | 16 | | | | | | -1 | | | | | | | | | | |

(6.60)

Этот тензор преобразования превращает электрическую схему проводников (номера со штрихом) в магнитную схему. Легко

установить следующее: начиная с верхнего левого угла числа 1 и -1 располагаются в соответствующих строках в таком же порядке, в каком соединены проводники 1, -4 , 7, -10 , 13, -16 и так далее, каждый раз передвигаясь на один столбец вправо.

Заметим, что в каждой строке и в каждом столбце имеется только одна не равная нулю компонента. Так же, как обмотка охватывает три раза окружность якоря, прежде чем замкнуться, числа ± 1 заполняют матрицу три раза по косой линии, прежде чем заполнят все столбцы.

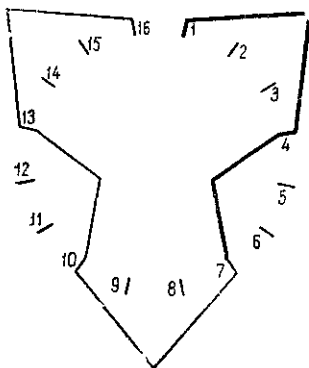


Рис. 6.22. Магнитная схема замкнутой обмотки.

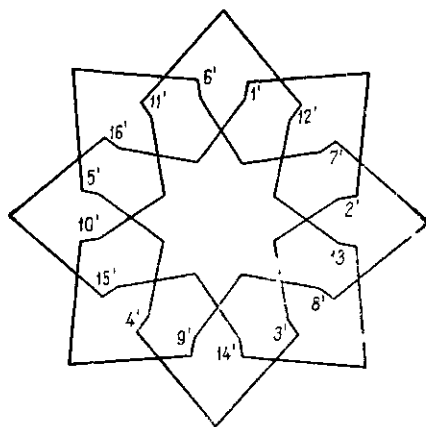


Рис. 6.23. Электрическая схема замкнутой обмотки.

17. НЕПРЕРЫВНЫЕ ОБМОТКИ ПОСТОЯННОГО ТОКА

I. В качестве еще более сложного примера обмоток постоянного тока возьмем 16 пазов, содержащих 32 проводника, по два в пазу, один сверху другого, как показано на рис. 6.24, где изображены видимые концы проводников.

С точки зрения внешнего потока имеется только шестнадцать проводников, так как верхний и нижний проводники паза пересекаются одним и тем же потоком в один момент времени.

II. Пусть 32 проводника соединены следующим образом: верхний 1, нижний -3 , верхний 6, нижний -8 и т. д. (рис. 6.25). Рассматривая два соседних соединенных проводника как образующих катушку (скажем, верхний 1 и нижний -3), получаем, что проводники соединены в катушки, а катушки в обмотку следующим образом:

1) два проводника катушки занимают два паза, т. е. «шаг катушки» есть 1—3;

2) каждая шестая катушка соединена последовательно, т. е. «шаг коммутации» есть 1—6.

С точки зрения *потока* верхний и нижний проводники образуют наименьшую магнитную единицу (всего 16 единиц), а с точки зрения *тока* два проводника катушки образуют наименьшую электрическую единицу (всего 16 единиц).

III. Поэтому тензор преобразования, преобразующий магнитную схему в электрическую, состоит из 16 строк и столбцов:

| | | 1' | 2' | 3' | 4' | 5' | 6' | 7' | 8' | 9' | 10' | 11' | 12' | 13' | 14' | 15' | 16' |
|------------------------------|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| $i^1 = i^{1'} - i^{7'}$ | 1 | 1 | | | | | | -1 | | | | | | | | | |
| $i^2 = i^{14'} - i^{4'}$ | 2 | | | -1 | | | | | | | | | | | 1 | | |
| $i^3 = i^{11'} - i^{1'}$ | 3 | -1 | | | | | | | | | | 1 | | | | | |
| $i^4 = i^{8'} - i^{14'}$ | 4 | | | | | | | | 1 | | | | | | -1 | | |
| $i^5 = i^{5'} - i^{11'}$ | 5 | | | | 1 | | | | | | | -1 | | | | | |
| $i^6 = i^{2'} - i^{8'}$ | 6 | | 1 | | | | | | -1 | | | | | | | | |
| $i^7 = i^{15'} - i^{5'}$ | 7 | | | | | -1 | | | | | | | | | | | 1 |
| $i^8 = i^{12'} - i^{2'}$ | 8 | | | | | | | | | | | | 1 | | | | |
| $i^9 = i^{9'} - i^{15'}$ | 9 | | | | | | | | | 1 | | | | | | | -1 |
| $i^{10} = i^{6'} - i^{12'}$ | 10 | | | | | | 1 | | | | | | -1 | | | | |
| $i^{11} = i^{3'} - i^{9'}$ | 11 | | | 1 | | | | | | -1 | | | | | | | |
| $i^{12} = i^{16'} - i^{6'}$ | 12 | | | | | | -1 | | | | | | | | | | 1 |
| $i^{13} = i^{13'} - i^{3'}$ | 13 | | | | -1 | | | | | | | | | 1 | | | |
| $i^{14} = i^{10'} - i^{16'}$ | 14 | | | | | | | | | | 1 | | | | | | -1 |
| $i^{15} = i^{7'} - i^{13'}$ | 15 | | | | | | | 1 | | | | | -1 | | | | |
| $i^{16} = i^{4'} - i^{10'}$ | 16 | | | | 1 | | | | | | -1 | | | | | | |

(6.61)

Легко установить, начиная с верхнего правого угла, что 1 и -1 располагаются в соответствующих строках в том же порядке, в каком соединяются проводники 1, -3 , 6, -8 , 11, -13 и т. д., сдвигая, однако, столбцы вправо только для $+1$. В каждом столбце присутствуют $+1$ и -1 , представляющие два проводника, пересекаемые одним и тем же потоком (магнитные единицы). Таким образом, теперь в каждой строке и в каждом столбце присутствуют две компоненты, отличные от нуля.

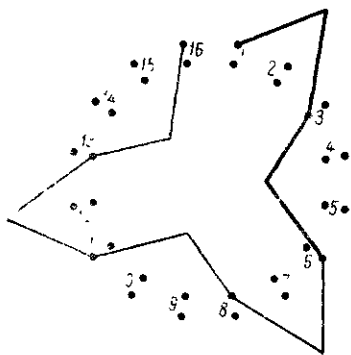


Рис. 6.24. Магнитная схема.

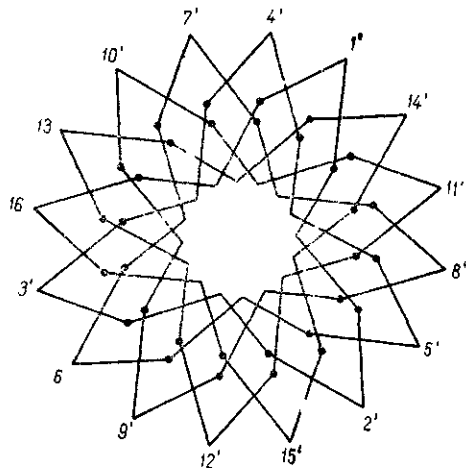


Рис. 6.25. Электрическая схема.

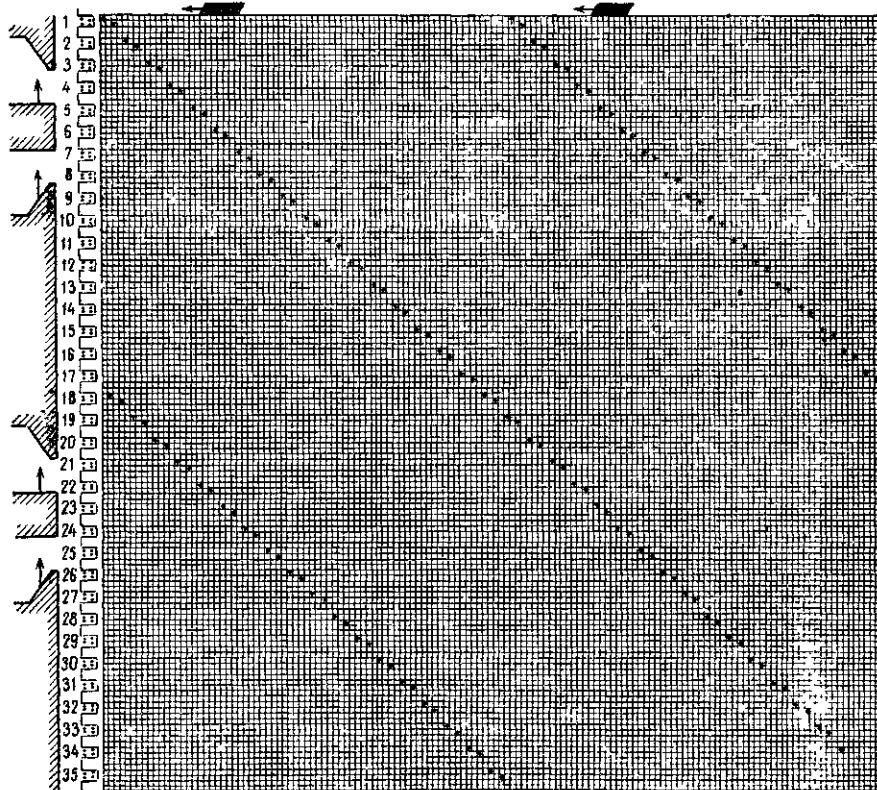


Рис. 6.26. Матрица преобразования С петлевой обмотки с 70 катушками, показывающая, в какой момент времени катушки короткозамкнуты щетками, и их мгновенное положение относительно полюсов.

Использование тензора преобразования C при расчете обмотки постоянного тока показано в гл. 11, § 15. В обмотках постоянного тока C , конечно, принимает еще более сложную форму.

IV. Левая сторона C представляет действительную пространственную схему катушек, так как они уложены в пазы. C можно рассматривать как преобразование дискретных точек реального пространства в воображаемое пространство, в котором эти дискретные точки располагаются по другому порядку протекания электрических зарядов. Можно оставить пустые строки в C , чтобы представить *зубцы* на якоре, где не уложены проводники, как показано на рис. 6.26 для петлевой обмотки с 70 катушками. Теперь левая сторона еще более точно представляет пространственную схему и положение проводников в пазах относительно полюсов.

V. Попутно интересно указать на то, что, если щетки изображены вверху C и охватывают несколько коммутирующих пластин, они замыкают накоротко катушки, представленные $+1$ и -1 , расположенными прямо под ними. Действительное пространственное расположение коротко замкнутых катушек относительно полюсов показано в левой стороне рис. 6.26.

Вращение якоря можно представить одновременным движением щеток влево и полюсов возбуждения вверх. Перемещаясь, щетки каждый раз то замыкают, то размыкают контакт со столбцом, т. е. накоротко замыкают или размыкают катушку. Таким образом, на тензоре преобразования можно наблюдать, как катушки накоротко замыкаются движущимися щетками в каждый момент времени, а также их мгновенное положение по отношению к полюсам возбуждения, как показано на рис. 6.26 для одного фиксированного момента времени.

Коммутация здесь не рассматривается.

18. ФИЗИЧЕСКАЯ ИНТЕРПРЕТАЦИЯ ТЕНЗОРА ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

I. Когда преобразование состоит из физического изменения одной сети в другую взаимосвязыванием, компоненты тензора преобразования C , содержащего только целые числа, полностью определяют физическую сущность изменения. Иначе говоря, тензор преобразования представляет математическую фотографию диаграммы соединений. В частности:

- 1) столбцы C перечисляют старые контуры, из катушек которых строятся новые контуры;
- 2) строки C перечисляют новые контуры, из катушек которых строились старые контуры.

Интересно, что некоторые контуры можно перечислить несколько раз (см. уравнение (6.2)).

II. Когда «старая» сеть является «примитивной» и каждый старый контур является отдельной катушкой, тогда и только тогда:

1) столбцы C перечисляют катушки, из которых строятся новые контуры;

2) строки C перечисляют новые контуры, к которым принадлежит каждая катушка.

Эти соотношения оказывают большую помощь при определении контурной сети, если известен ее тензор преобразования. В задачах синтеза сетей известен тензор преобразования C , дающий сеть с требуемыми рабочими характеристиками, и надо найти такую сеть.

III. Компоненты C полностью определяют также электромагнитные соотношения между двумя сетями. В частности:

1) столбцы C перечисляют старые контуры, напряжения e которых складываются, чтобы образовать новые контурные напряжения e' ;

2) строки C перечисляют новые контуры, токи i' которых складываются, чтобы образовать старые контурные токи i .

IV. Когда старая сеть является примитивной, тогда

1) столбцы C перечисляют катушки, напряжения e которых складываются, образуя контурные напряжения e' ;

2) строки C перечисляют контурные токи i' , которые складываются, образуя токи катушки i .

V. Изучение такого тензора преобразования C , содержащего только целые числа, предпринимается в разделе геометрии, называемом «топология».

Когда преобразование содержит изменения другого вида и компоненты C могут быть также дробными, то компоненты C интерпретируются по-другому. Вообще, каждая группа тензоров преобразования¹⁾ имеет свою физическую интерпретацию.

¹⁾ Следовательно, имеются различные тензоры преобразования, геометрическими объектами которых являются различные типы структур. (Прим. пер.).

КОВАРИАНТНЫЕ И КОНТРАВАРИАНТНЫЕ ИНДЕКСЫ

1. ВЕРХНИЕ И НИЖНИЕ ИНДЕКСЫ

I. В уравнениях (4.31) и (4.32) были введены следующие формулы преобразования векторов тока и напряжения:

$$i' = C^{-1} \cdot i, \quad i'^{\alpha'} = C_{\alpha}^{\alpha'} i^{\alpha}, \quad (7.1)$$

$$e' = C_t \cdot e, \quad e_{\alpha'} = C_{\alpha}^{\alpha'} e_{\alpha}. \quad (7.2)$$

Необходимо заметить, что при замене старых компонент вектора *напряжения* e_{α} новыми компонентами $e_{\alpha'}$ тензором преобразования является $C_{\alpha}^{\alpha'}$ (в индексном обозначении C и C_t представляются как $C_{\alpha}^{\alpha'}$). С другой стороны, при замене старых компонент вектора *тока* новыми компонентами $i^{\alpha'}$ тензором преобразования является $C_{\alpha}^{\alpha'}$, т. е. *обратный* $C_{\alpha}^{\alpha'}$. Другими словами, *при переходе к новым координатам (или системе) вектор тока ведет себя иначе, чем вектор напряжения*. Например, при соединении двух катушек последовательно токи через две катушки остаются одинаковыми, в то время как напряжения суммируются. С другой стороны, при соединении двух катушек *параллельно* токи складываются, а напряжения на каждой катушке одинаковы.

II. Чтобы отразить это различие в поведении векторов тока и напряжения при преобразовании, *вектор напряжения в индексном обозначении всегда имеет нижний индекс, т. е. e_{α} , а вектор тока — верхний индекс, т. е. i^{α}* (в прямом обозначении различие между двумя типами векторов не делается).

Нижние индексы называются ковариантными, а верхние — контравариантными. Соответственно e_{α} называется ковариантным вектором, а i^{α} — контравариантным. По соглашению переменная, представляющая скорость, в данном случае i^{α} , всегда имеет верхний индекс.

Необходимо подчеркнуть, что вектор напряжения не является «обратным» по отношению к вектору тока. Вектор *напряжения* ведет себя как обратный по отношению к вектору тока *только тогда*, когда вводится новая система координат. Когда уравнение

относится к одной и той же частной системе координат, различие между векторами тока и напряжения не проявляется.

III. Индексы других геометрических векторов, как и просто векторов, также бывают верхние и нижние. В частности, так как геометрический объект умножается на $C_{\alpha'}^{\alpha}$ или обратную $C_{\alpha}^{\alpha'}$ столько раз, сколько имеет индексов, то каждый индекс, по которому идет умножение на тензор преобразования $C = C_{\alpha'}^{\alpha}$ (или C_i), пишется как нижний (ковариантный) индекс, в то время как индекс, по которому идет умножение на обратную $C^{-1} = C_{\alpha}^{\alpha'}$ (или C_i^{-1}), пишется как верхний (контравариантный) индекс, чтобы сбалансировать индексы.

Например, так как формула преобразования z есть

$$z' = C_i \cdot z \cdot C, \quad z_{\alpha'\beta'} = z_{\alpha\beta} C_{\alpha'}^{\alpha} C_{\beta'}^{\beta}, \quad (7.3)$$

то оба индекса $z_{\alpha\beta}$ — нижние (ковариантные). В соответствии с этим расположением один из немых индексов является верхним, а другой — нижним.

IV. Чтобы найти формулу преобразования для $y = z^{-1}$, рассмотрим уравнение тока

$$i = y \cdot e, \quad i^{\alpha} = y^{\alpha\beta} e_{\beta}. \quad (7.4)$$

Заменяя i и e их значениями в новой системе координат, получаем

$$C \cdot i' = y (C_i^{-1} e'), \quad C_{\alpha'}^{\alpha} i'^{\alpha} = y^{\alpha\beta} C_{\beta'}^{\beta} e_{\beta'}.$$

Умножая обе части на C^{-1} слева, получаем

$$i' = C^{-1} \cdot y C_i^{-1} \cdot e', \quad i'^{\alpha'} = y^{\alpha\beta} C_{\alpha}^{\alpha'} C_{\beta'}^{\beta} e_{\beta'}.$$

Так как в новой системе координат уравнение (7.4) имеет тот же вид, что и в старой системе координат, а именно

$$i' = y' \cdot e', \quad i'^{\alpha'} = y'^{\alpha'\beta'} e_{\beta'}, \quad (7.5)$$

то отсюда следует, что формула преобразования y есть

$$y' = C^{-1} \cdot y \cdot C_i^{-1}, \quad y'^{\alpha'\beta'} = y^{\alpha\beta} C_{\alpha}^{\alpha'} C_{\beta'}^{\beta}. \quad (7.6)$$

Следовательно, $y^{\alpha\beta}$ записывается с двумя верхними (контравариантными) индексами, показывающими, что в формуле преобразования для $y^{\alpha\beta}$ матрица, обратная $C = C_{\alpha'}^{\alpha}$, а именно $C_{\alpha}^{\alpha'}$, встречается дважды.

2. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ОБЪЕКТЫ

I. Все уравнения тензорного анализа устанавливаются так, что они имеют силу для бесконечного числа систем отсчетов или систем. Следовательно, имеется постоянная необходимость нахо-

дить компоненты геометрических объектов в различных системах координат с помощью их формул преобразования.

Таким образом, с каждым геометрическим объектом, используемым в тензорном анализе, ассоциируется постоянная формула преобразования, остающаяся неизменной в течение всего анализа. Наличие постоянной формулы преобразования отличает компоненты геометрического объекта от n -мерной матрицы и наделяет геометрический объект как математическим, так и физическим содержанием.

II. В тензорном анализе каждый отдельный символ (или «базовая» буква) есть геометрический объект, т. е. « n -мерная матрица» плюс «тензор преобразования», плюс «формула преобразования». С другой стороны, матричный анализ имеет дело с n -мерными матрицами, которым не присуща связанная с ними формула преобразования. Другими словами, матричный анализ имеет дело с n -матрицами, которые справедливы только в одной частной системе координат или для одной частной системы. Преобразования, которые использует матричная алгебра, не предполагают существования «формы», остающейся инвариантной. С другой стороны, тензорный анализ изучает только такие уравнения и такие свойства, которые остаются инвариантными относительно некоторой группы матриц преобразования S . Следовательно, «тензорный анализ» и изучение «инвариантных преобразований» — это одно и то же.

III. Если в тензорном анализе случайно появляются матрицы различной размерности, которые не имеют ассоциированных с ними формул преобразования, то их индексы заключаются в скобки: $A_{(\alpha)}$ или $A_{(\alpha)(\beta)}$. Это показывает, что индексы не имеют ни ковариантного, ни контравариантного значения, но компоненты n -матрицы расположены в строку или в квадрат и т. д.

Таким образом, до сих пор были введены следующие типы индексов: 1) фиксированные и скользящие (e_α , e_α); 2) свободные и немые ($A_{\alpha\beta}i^\beta$); 3) открытые и закрытые ($A_{\alpha\beta}$, $A_{(\alpha)(\beta)}$); 4) верхние и нижние (i^α , e_α).

IV. Подводя итоги ввода новых понятий, отметим, что до сих пор были введены три различных типа обобщенных чисел:

1) множества — это множества чисел, расположенных в определенном порядке: в строку или в квадрат, или в куб и т. д.;

2) n -мерные матрицы — это множества плюс правила преобразования. Объект изучения матричной алгебры и т. п.;

3) геометрические объекты — это n -мерные матрицы плюс группы преобразований плюс формулы преобразования. Объект изучения тензорного анализа.

n -мерные матрицы не имеют ничего общего с преобразованиями; с другой стороны, геометрический объект создается формулами преобразования, постоянно связанной с ним. Если формулу преобразования убрать из определения геометрического

объекта, то исчезнет его целостность и он *распадется* на свои составные части, т. е. на бесконечное число n -мерных матриц.

Другими словами, существование группы матриц преобразования S показывает, что имеющаяся последовательность n -матриц (скажем, последовательность вычисленных матриц импеданса большого числа сетей, образованных из тех же самых n катушек) не представляет изолированные независимые объекты, а является различными сечениями одной и той же физической сущности — тензора импеданса $z_{\alpha\beta}$. Взаимосвязь этих различных матриц видна из того, что любую из них можно получить из любой другой с помощью $S_{\alpha'}^{\alpha}$ по формуле преобразования $z_{\alpha\beta}$. Если группы матриц преобразования $S_{\alpha'}^{\alpha}$, показывающих способ соединения катушек в различные сети, нет, то различные матрицы импеданса не зависят друг от друга и не являются частями одного единого объекта.

Еще раз подчеркнем, что совсем не обязательно представлять компоненты геометрического объекта в частной системе координат в виде n -матрицы. Компоненты могут быть расположены произвольно, поскольку индексы так или иначе контролируют правильность производимых действий. Расположение компонент геометрического объекта валентности n в n -мерную матрицу оказалось удобным при конкретных расчетах, поскольку многие действия с компонентами геометрического объекта и n -мерных матриц оказались идентичными.

V. Различие между геометрическим объектом и n -матрицей имеет ту же природу, что и различие между 2-матрицей и ее определителем. И 2-матрица, и ее определитель, на первый взгляд, представляют собой одно и то же, на самом деле они являются понятиями разного типа. Определитель — более ограниченный тип, так как 2-матрица имеет определитель, но определитель не имеет матрицу. 2-матрица состоит из k^2 сущностей, а определитель — только из одной.

Подобным же образом геометрический объект валентности n и n -матрица, на первый взгляд, представляют одно и то же, а на самом деле они являются понятиями разного типа. n -матрица — более ограниченный тип, так как геометрический объект имеет n -матрицу (различную для каждой системы координат), а n -матрица не имеет геометрического объекта. Фиксированные индексы не принадлежат n -матрице, но принадлежат геометрическому объекту. Геометрический объект — это единая (целостная) сущность; n -матрица состоит из k^n сущностей.

Таким образом, определитель, 2-матрица и геометрический объект валентности два, на первый взгляд, выглядят одинаково: все три состоят из множества величин, расположенных в квадрат, но по своему содержанию они представляют понятия трех различных типов: они подобны грубому наброску статуи, фотографии статуи и самой мраморной статуе. Единственная сущность —

статуя имеет большое число фотографий, каждая из которых сделана со своей точки.

Вообще говоря, различие между геометрическим объектом и n -матрицей имеет ту же природу, что и различие между самой n -матрицей и одной из ее компонент. Сама n -матрица является только одной компонентой геометрического объекта. Конечно, вообще n -матрицы (в матричной алгебре) могут существовать независимо от геометрических объектов.

VI. Было бы ошибочным не подчеркнуть важную роль матриц в преобразовании и решении уравнений тензорного анализа, так же как и роль определителей; любой ведущий инженер, который знает теорию матриц и теорию определителей, гораздо лучше подготовлен к тому, чтобы извлекать пользу из понятий и методов тензорного анализа.

3. ПРОМЕЖУТОЧНЫЕ ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ОБЪЕКТЫ

I. Геометрический объект может содержать индексы, относящиеся к двум или более различным системам координат, например $z_{\alpha\beta}$. Они называются «промежуточными геометрическими объектами».

Примером такого геометрического объекта является тензор преобразования C_{α}^{β} . Другой пример уже встречался при вычислении разностей потенциалов в отдельных катушках по формуле $\mathbf{e} = \mathbf{z} \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{i}'$. Комбинацию $\mathbf{z} \cdot \mathbf{C} = z_{mn} C_{n'}^m$ можно записать одним символом

$$z_{mn'} = z_{mn} C_{n'}^m, \quad \mathbf{z}_1 = \mathbf{z} \cdot \mathbf{C}, \quad (7.7)$$

представляя новую форму записи тензора импеданса.

II. Подобно тому как геометрические объекты могут принадлежать к различным системам координат, уравнения тензорного анализа также могут содержать различные геометрические объекты, принадлежащие полностью или некоторыми индексами к разным системам координат. Так, e_m может принадлежать к одной, а $i^{m'}$ — к другой координатной системе, но оба присутствуют в одном и том же уравнении. Таким примером является уравнение, дающее напряжение по старым осям через новые токи:

$$e_m = z_{mn'} i^{n'}, \quad \mathbf{e} = \mathbf{z}_1 \mathbf{i}'. \quad (7.8)$$

Такое уравнение возникает всегда, когда приложенное напряжение выражено в одной системе контуров, а токи — в другой системе, как показано в уравнении (6.12). Другим примером является уравнение преобразования

$$i^m = C_{m'}^m i^{m'}, \quad \mathbf{i} = \mathbf{C} \cdot \mathbf{i}'. \quad (7.9)$$

Уравнения с промежуточными геометрическими объектами играют важную роль в электротехнике, так как токи, напряже-

ния, импедансы могут быть выражены несколькими типами систем координат, отличных друг от друга, и довольно редко возникает необходимость приводить их к одной системе координат.

III. Вместо того чтобы говорить, что $z_{\alpha\beta}$ есть геометрический объект валентности два, говорят, что $z_{\alpha\beta}$ — геометрический объект валентности один в системе координат α и геометрический объект валентности один в системе координат α' (или β').

Эта точка зрения с необходимостью следует из того, что когда система координат α заменяется системой координат α'' посредством $C_{\alpha}^{\alpha''}$, система координат α' остается без изменения, то $z_{\alpha\beta}$ умножается на $C_{\alpha}^{\alpha''}$ только один раз: $z_{\alpha\beta} C_{\alpha}^{\alpha''}$, давая $z_{\alpha''\beta}$. Подобная ситуация возникает при замене системы координат α' .

4. АССОЦИИРОВАННЫЕ ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ОБЪЕКТЫ

I. Так как геометрический объект может иметь верхние или нижние индексы в зависимости от того, умножается он по индексу на $C_{\alpha}^{\alpha'}$ или на обратную ей $C_{\alpha'}^{\alpha}$, существует несколько типов геометрических объектов одной и той же валентности, обозначаемых одной и той же базовой буквой. В частности, имеется:

два типа валентности один: A_{α} , A^{α} ;

четыре типа валентности два: $A_{\alpha\beta}$; $A^{\alpha\beta}$; A_{α}^{β} ; A^{α}_{β} ;

восемь типов валентности три: $A_{\alpha\beta\gamma}$; $A^{\alpha\beta\gamma}$; $A_{\alpha}^{\beta\gamma}$; $A^{\alpha}_{\beta\gamma}$; $A_{\alpha}^{\beta\gamma}$; $A_{\alpha\beta}^{\gamma}$; $A^{\alpha\beta}_{\gamma}$; $A_{\alpha\beta\gamma}$. Каждый из них представляет одну и ту же физическую сущность, но в различных проявлениях. Чтобы ясно показать, какой индекс является верхним, а какой нижним, и указать правильный порядок индексов, принято ставить точку на пустом месте напротив верхнего или нижнего индекса; например, в $A_{\alpha}^{\beta}_{\gamma}$, чтобы β не могла быть написана, например, над γ , ибо тогда невозможно решить, является β вторым или третьим индексом.

II. Геометрические объекты одной валентности, обозначаемые одной базовой буквой, но имеющие индексы в различных позициях, называются «ассоциированными» геометрическими объектами.

$A_{\alpha\beta}$ называется «дважды ковариантным» геометрическим объектом валентности два, $A^{\alpha\beta}$ — «дважды контравариантным», A_{α}^{β} — «одноковариантным и одноконтравариантным» объектом и т. д. В общем случае геометрический объект с верхними и нижними индексами называется «смешанным».

Как только положение индексов зафиксировано требованиями проблемы, их положение и порядок вообще не могут быть нарушены. Ниже даны правила поднимания и опускания индексов в специальных случаях.

III. Так как ассоциированные геометрические объекты одной валентности, скажем $A_{\alpha\beta}$ и $A_{\sigma\beta}$, являются лишь различными представлениями одной и той же сущности A , ассоциированные объекты нельзя суммировать несмотря на то, что они имеют одну и ту же валентность. Например, $A_{\alpha\beta}$ и A_{α}^{β} не могут быть сложены.

5. ЛИНЕЙНЫЕ И ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

I. Наиболее важным геометрическим объектом является «тензор преобразования» $C_{\alpha'}^{\alpha}$. Он является ключом к тензорному анализу.

Тензор преобразования $C_{\alpha'}^{\alpha}$ во многих отношениях отличается от других геометрических объектов валентности два. Он имеет один верхний и один нижний индекс, но не указывает, является α первым или вторым индексом. Кроме того, один его индекс α принадлежит старой системе координат, а другой α' — новой системе координат. Таким образом, он является «промежуточным геометрическим объектом». Индексы бытия геометрических объектов, введенных до сих пор, принадлежали к одной и той же координатной системе; $z_{\alpha\beta}$ или $z_{\alpha'}^{\beta'}$.

II. Тензор преобразования $C_{\alpha'}^{\alpha}$ находится при установлении соотношения между старыми и новыми контравариантными переменными. При этом необходимо различать два случая:

1) между переменными можно установить линейное соотношение (как во всех случаях, рассмотренных до сих пор), скажем, $i = C \cdot i'$;

2) между переменными можно установить только функциональное соотношение $i = f(i')$.

III. Когда между старыми и новыми переменными можно установить линейные соотношения, тогда тензор преобразования находится по коэффициентам при новых переменных

$$x^{\alpha} = C_{\alpha'}^{\alpha} x^{\alpha'} \quad \text{или} \quad i^{\alpha} = C_{\alpha'}^{\alpha} i^{\alpha'}. \quad (7.10)$$

Только в простых проблемах (таких, как сети, где переменными являются токи и напряжения) можно установить линейные соотношения между старыми и новыми переменными. В этом случае все компоненты $C_{\alpha'}^{\alpha}$ являются постоянными (константы).

IV. В более сложных задачах (проблемах теории поля в криволинейных системах координат или во вращающихся электрических машинах, где переменные x^{α} являются не токами, а зарядами и перемещением ротора) нет линейных соотношений между старыми и новыми переменными. В таких случаях тензор преобразования $C_{\alpha'}^{\alpha}$ находится при выводе соотношений между «дифференциалами» dx^{α} (или токами (dx^{α}/dt) переменных x^{α} по

коэффициентам при новых дифференциалах

$$dx^a = C_{a'}^a dx^{a'} \quad \text{или} \quad \frac{dx^a}{dt} = C_{a'}^a \frac{dx^{a'}}{dt}. \quad (7.11)$$

В этих случаях компоненты $C_{a'}^a$ являются не константами, а функциями переменных. Таким тензором преобразования является, например,

$$C_{a'}^a = c \begin{array}{c|c|c|c|c} a' & a & b & c & d & f \\ \hline a & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline b & 0 & \cos x^f & -\sin x^f & 0 & 0 \\ \hline c & 0 & \sin x^f & \cos x^f & 0 & 0 \\ \hline d & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline f & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array},$$

который встречается при изучении электрических машин. Некоторые компоненты являются функциями переменной x^f (имеется пять переменных: x^a, x^b, x^c, x^d, x^f).

6. ГОЛОНОМНЫЕ И НЕГОЛОНОМНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

I. Соотношение между старыми и новыми дифференциалами устанавливается двумя разными способами:

1) если соотношение между старыми и новыми переменными $x^a = f(x^{a'})$ известно, то дифференцирование обеих частей дает

$$dx^a = \frac{\partial f(x^{a'})}{\partial x^{a'}} dx^{a'} = \frac{\partial x^a}{\partial x^{a'}} dx^{a'} \quad (7.12)$$

и тензор преобразования определяется так:

$$C_{a'}^a = \frac{\partial x^a}{\partial x^{a'}}. \quad (7.13)$$

Такие преобразования называются «голономными»;

2) если никакое соотношение между старыми и новыми переменными x^a и $x^{a'}$ не может быть установлено, то соотношение между старыми и новыми дифференциалами dx^a и $dx^{a'}$ обычно устанавливается из самой задачи в виде

$$dx^a = C_{a'}^a dx^{a'}. \quad (7.14)$$

Поскольку $C_{a'}^a$ не может быть записан как $\partial x^a / \partial x^{a'}$, такие преобразования называются «неголономными». Как только

в электродинамике появляются пространственные перемещения, как во вращающихся электрических машинах, огромное число задач включает в себя неголономные преобразования.

II. Хотя тензор преобразования определяется линейными соотношениями между старыми и новыми контравариантными переменными или между их дифференциалами, из этого, однако, не следует, что в каждом случае $C_{\alpha'}^{\alpha}$ должен определяться по уравнениям (7.11) или (7.12). В некоторых задачах проще определить обратную $C_{\alpha}^{\alpha'}$ матрицу из соотношения

$$x^{\alpha'} = C_{\alpha}^{\alpha'} x^{\alpha} \quad \text{или} \quad dx^{\alpha'} = C_{\alpha}^{\alpha'} dx^{\alpha} \quad (7.15)$$

или из соотношения между ковариантными переменными

$$E_{\alpha} = C_{\alpha}^{\alpha'} E_{\alpha'} \quad \text{или} \quad dE_{\alpha} = C_{\alpha}^{\alpha'} dE_{\alpha'}. \quad (7.16)$$

В других задачах проще установить соотношение между старыми и новыми воздействующими напряжениями e_{α} , а не между токами отклика i^{α} , причем тензор преобразования можно определить из системы уравнений

$$e_{\alpha} = C_{\alpha}^{\alpha'} e_{\alpha'} \quad \text{или} \quad e_{\alpha'} = C_{\alpha}^{\alpha'} e_{\alpha}. \quad (7.17)$$

III. Наиболее развитые понятия тензорного анализа появляются только тогда, когда компоненты тензора преобразования $C_{\alpha'}^{\alpha}$ являются функциями переменных x^{α} .

7. ФОРМУЛЫ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

I. Когда в анализ вводится новый геометрический объект, то первым шагом является установление его формулы преобразования, определяющей число и расположение верхних и нижних индексов и т. д. Как только индексы его установлены (нижний для каждого $C_{\alpha'}^{\alpha}$ и верхний для каждого $C_{\alpha}^{\alpha'}$), в любой момент, если есть необходимость, формула преобразования находится автоматически по расположению индексов, так как при умножении геометрического объекта на $C_{\alpha}^{\alpha'}$ или на $C_{\alpha'}^{\alpha}$ один [из новых индексов является верхним, а другой — нижним. Например,

$$\begin{aligned} i^{\alpha'} &= i^{\alpha} C_{\alpha}^{\alpha'} & i' &= C^{-1} \cdot i \\ e_{\alpha'} &= e_{\alpha} C_{\alpha}^{\alpha'} & e' &= C_1 \cdot e \\ z_{\alpha'\beta'} &= z_{\alpha\beta} C_{\alpha}^{\alpha'} \cdot C_{\beta}^{\beta'} & z' &= C_1 \cdot z \cdot C \\ y^{\alpha'\beta'} &= y^{\alpha\beta} C_{\alpha}^{\alpha'} C_{\beta}^{\beta'} & y' &= C^{-1} \cdot y \cdot C_1^{-1} \\ A_{\alpha'\beta'}^{\gamma'} &= A_{\alpha\beta}^{\gamma} C_{\alpha}^{\alpha'} C_{\beta}^{\beta'} C_1^{\gamma'} & A' & \text{— не может быть представлена.} \end{aligned} \quad (7.18)$$

Нужно заметить, что индексы новой системы координат — со штрихами и в обеих частях уравнения свободные индексы оди-

наковы и занимают одинаковое положение. Следует также отметить, что прямое обозначение требует дополнительных символов при использовании объектов с числом измерений три или более, подобных $A_{\alpha\beta}^{\gamma}$.

Вообще формулы преобразования геометрических объектов бывают более сложными, чем приведенные, они содержат еще дополнительные члены.

II. Количество индексов геометрического объекта совпадает с числом измерений, в которых располагаются его компоненты. Это количество индексов совпадает с числом тензоров преобразования, на которые он последовательно умножается. Чтобы подчеркнуть эту связь числа измерений, в которых располагаются его компоненты, с числом применяемых тензоров преобразования, « n -мерный геометрический объект» назовем «геометрическим объектом валентности n », используя аналогию с валентностью химических элементов. Выражение « n -мерная матрица», или « n -матрица» остается, поскольку n -матрица не связана ни с какими тензорами преобразования.

III. В индексном обозначении порядок геометрических объектов в выражениях не имеет значения при условии, если их компоненты не содержат операторов. Точно так же C и C_t представляются посредством $C_{\alpha'}^{\alpha}$, а C^{-1} и C_t^{-1} — посредством $C_{\alpha}^{\alpha'}$.

В то время как в прямом обозначении нужно постоянно помнить, было ли использовано C , C_t , C^{-1} или C_t^{-1} и в каком порядке, этого не требуется в индексном обозначении. С другой стороны, в индексном обозначении нужно запоминать *положение* индексов.

8. ФОРМУЛЫ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ПРОМЕЖУТОЧНЫХ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ОБЪЕКТОВ

I. Если индексы геометрического объекта, скажем $z_{\alpha\beta'}$ или $C_{\alpha'}^{\alpha}$, относятся к двум различным системам координат, то каждую из систем или обе можно заменить новой. *Поскольку каждая старая система требует своей матрицы преобразования, то используются две разные матрицы преобразования*, например, $C_{\alpha'}^{\alpha}$ и $C_{\alpha}^{\alpha'}$ (или C_1 и C_2), так что

$$z' = C_{1t} \cdot z \cdot C_2, \quad z_{\alpha'\beta''} = z_{\alpha\beta'} \cdot C_{\alpha'}^{\alpha} \cdot C_{\beta''}^{\beta}. \quad (7.19)$$

Первая $C_1 = C_{\alpha'}^{\alpha}$ заменяет координаты без штрихов на координаты с двумя штрихами, а вторая $C_2 = C_{\alpha}^{\alpha'}$ заменяет координаты с одним штрихом на координаты с тремя штрихами, так что и после преобразования геометрический объект остается выраженным в двух различных системах координат. (Конечно, можно преобразовать только *одну* систему координат, используя соответственно только одну матрицу преобразования.)

II. Формула преобразования самого тензора преобразования $C_{\alpha'}^{\alpha}$ принимает вид

$$C' = C_1^{-1} \cdot C \cdot C_2, \quad C_{\alpha''}^{\alpha'} = C_{\alpha'}^{\alpha} \cdot C_{\alpha''}^{\alpha'} \cdot C_{\alpha''}^{\alpha'}. \quad (7.20)$$

Эта новая матрица преобразования C' может заменять индексы с двумя штрихами системы координат на индексы с тремя штрихами, в то время как старая матрица C заменяет индексы без штрихов на индексы со штрихами (или наоборот).

В индексных обозначениях формула преобразования получается автоматически из индексов. В прямом обозначении ее вывод следующий.

$$\text{Дано уравнение } i = C \cdot i'. \quad (7.21)$$

Пусть оба тока i и i' заменяются новыми:

$$i = C_1 \cdot i'', \quad (7.22)$$

$$i' = C_2 \cdot i'''. \quad (7.23)$$

Подставляя

$$C_1 \cdot i'' = C \cdot C_2 \cdot i''' \quad (7.24)$$

или

$$i'' = C_1^{-1} \cdot C \cdot C_2 \cdot i''', \quad (7.25)$$

поскольку

$$i'' = C' \cdot i''', \quad (7.26)$$

то

$$C' = C_1^{-1} \cdot C \cdot C_2. \quad (7.27)$$

9. ИНДУЦИРОВАННЫЕ ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ОБЪЕКТЫ

I. Если тензор преобразования $C_{\alpha'}^{\alpha}$ — сингулярный (не квадратный), то новая система координат имеет другое число осей, обычно меньшее, чем старая. Подобным образом геометрический объект, найденный с помощью $C_{\alpha'}^{\alpha}$, имеет меньшее число строк и столбцов, чем исходный. Геометрические объекты, получаемые с помощью сингулярной матрицы $C_{\alpha'}^{\alpha}$ называются «индуцированными геометрическими объектами». Практически все геометрические объекты контурных и узловых сетей (по не ортогональных) являются «индуцированными» геометрическими объектами.

Всякий раз, когда тензор преобразования сингулярен, обычно можно установить другой тензор преобразования, который не сингулярен (квадратный, с детерминантом, отличным от нуля) при использовании дополнительных координат (реальных или гипотетических), причем так, что сингулярный $C_{\alpha'}^{\alpha}$ образует часть

от несингулярного. Подобным образом все индуцированные объекты образуют часть других объектов, находимых с помощью несингулярного C_a^a , и поэтому имеют также компоненты по дополнительным координатам.

Необходимо заметить, что первоначальный геометрический объект не может быть восстановлен по индуцированному.

II. Когда тензор преобразования C_a^a сингулярен и его дополнительная часть (дополняющая его до несингулярного C_a^a) неизвестна, *геометрические объекты с контравариантными индексами не могут быть преобразованы из старой системы координат в новую*, так как обратная C_a^a величина не может быть найдена. Аналогично, если обратная C_a^a , а именно C_a^a , известна и является сингулярной, то геометрические объекты с ковариантными индексами не могут быть преобразованы из старой системы координат в новую. Обратная ситуация возникает при возвращении от новых осей к старым. Тогда контравариантные индексы, подобные $y^{\alpha\beta'}$, могут быть преобразованы как $y^{\alpha\beta'} C_a^a \cdot C_{\beta'}^{\beta}$, а ковариантные — не могут.

III. *Большинство сингулярных тензоров преобразования C_a^a , появляющихся в этой книге, могут быть дополнены до несингулярных* рассмотрением как контуров, так и узловых пар сети или введением как токов нагрузки, так и токов намагничивания. В синтезе сетей, однако, встречается много сингулярных тензоров преобразования, которые не могут быть дополнены.

10. ИНВАРИАНТЫ

I. Одной из функций тензорного анализа является изучение того, что происходит с системой уравнений, когда вводится новое множество переменных. В частности, *тензорный анализ ориентирован на установление таких характеристик системы уравнений, которые не изменяются при введении нового множества переменных.*

В этих исследованиях внимание фиксируется вокруг двух центров: 1) системы уравнений, которая преобразуется; 2) системы уравнений, которая показывает, как именно преобразуются переменные, т. е. на *группе преобразований $x^\alpha = f(x^{\alpha'})$* , используемой для замены переменных.

Теперь, если дана и «система уравнений» и «группа преобразований», то все свойства системы уравнений, остающиеся неизменными при замене переменных, называются инвариантами системы уравнений относительно данной группы преобразований.

Конечно, «инварианты» системы уравнений являются также «инвариантами» физической системы, которая описывается этими уравнениями. Следовательно, тензорный анализ изучает такие свойства физических систем, которые не изменяются при пере-

стройке системы или при рассмотрении ее с различных точек зрения.

II. В рассмотренных до сих пор уравнениях встречались следующие типы «инвариантов»:

1) *инвариантные уравнения*, такие как уравнения напряжения, тока и другие, форма записи которых остается инвариантной относительно используемой группы преобразований;

2) *инвариантные формы*, такие как накопленная магнитная энергия $(1/2) I_m a_i m_i^n$ или мощность $e_m i^m$ и т. д., численное значение которых остается неизменным;

3) *инвариантные геометрические объекты*, чья базовая буква остается неизменной во всех системах координат;

4) *инвариантные правила* для сложения и умножения геометрических объектов и т. д.;

5) *инвариантные свойства*, такие как равенство суммы числа контуров и числа узловых пар общему числу катушек и т. д.;

6) *инвариантные преобразования*, которые взаимосвязывают катушки, и т. д.

III. В зависимости от типа уравнений, которые подвергаются преобразованию, «инварианты» могут классифицироваться так:

1) арифметические; 2) алгебраические; 3) дифференциальные; 4) интегральные.

Другими словами, инварианты могут состоять соответственно из арифметических, алгебраических, дифференциальных и интегральных выражений.

Тензорный анализ есть изучение инвариантов. Он изучает те характеристики систем уравнений, которые остаются инвариантными относительно данной группы преобразований. Другие методы, помимо тензорного анализа, также устанавливают инварианты, но в физических проблемах, где каждая сущность определяется только измерением, сделанным в некоторой системе координат; способность тензорного анализа вычислять эту величину относительно любой другой системы координат является мощным аналитическим инструментом.

Надо понимать, что не существует резкой границы между арифметическими, алгебраическими, дифференциальными и интегральными инвариантами; их изучение накладывается друг на друга

IV. Чем более ограничена используемая группа преобразований, тем большее число инвариантов обладает система уравнений. Например, если тензор преобразования ограничен тем, что все его компоненты — константы (как в сетях), то число инвариантов системы уравнений много больше, чем в случае, когда тензор преобразования содержит также и функции переменных.

V. Установление инвариантов является преимущественно математической процедурой. Как только инварианты установлены, следующий шаг состоит в их физической или геометрической интерпретации. *Инварианты всегда представляют действительно*

существующие геометрические формы (линии, фигуры и т. п.) или соотношения, которые не зависят от выбора координатных осей

Когда система уравнений интерпретируется физически инженером или физиком, *инварианты представляют только реально существующие измеримые физические величины или соотношения между ними. Эти физические величины и соотношения между ними являются общими для бесконечного разнообразия физических систем (отличающихся только преобразованиями переменных), а не являются атрибутом только одной частной физической системы или одного множества координатных осей.*

Для инженера, который имеет дело с огромным разнообразием физически подобных проблем, знание *инвариантов* системы является крайне важным. Для любой инженерной задачи (механической, тепловой, электрической и т. п.), выраженной уравнением с несколькими переменными или системой уравнений (арифметических, алгебраических, дифференциальных или интегральных), теория инвариантов является мощным методом визуализации, организации и упрощения.

11. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ТЕНЗОРА

I. Было показано, что компоненты тензора преобразования $C_{\alpha}^{\alpha'}$ могут быть либо константы, либо функции переменных x^{α} . Также было показано, что при преобразовании одной системы координат в другую каждый геометрический объект умножается на $C_{\alpha}^{\alpha'}$ или на обратную $C_{\alpha'}^{\alpha}$ столько раз, сколько он имеет индексов.

Это последнее утверждение требует уточнения. *В общем случае, когда тензор преобразования $C_{\alpha}^{\alpha'}$ есть функция переменных x^{α} , формулы преобразования геометрических объектов являются более сложными, чем указанные в уравнениях (7.18). Они содержат еще дополнительные члены.*

Таким геометрическим объектом является, например, $z_{\alpha\beta}$, когда соединения катушек не неподвижны, а движутся с одной скоростью, как во вращающейся машине, работающей на постоянной скорости. Формула преобразования $z_{\alpha\beta}$ в этом случае принимает вид (дается здесь без вывода)

$$z_{\alpha'\beta'} = z_{\alpha\beta} C_{\alpha}^{\alpha'} C_{\beta}^{\beta'} + a_{\alpha\beta} C_{\alpha}^{\alpha'} \frac{\partial C_{\beta}^{\beta'}}{\partial x^{\gamma'}} dx^{\gamma'}. \quad (7.28)$$

В формуле преобразования $z_{\alpha\beta}$ появляется еще один дополнительный член. Этот дополнительный член исчезает, если тензор преобразования не является функцией переменных x^{α} (как в сетях, рассматриваемых в этой книге), поскольку $\partial C_{\beta}^{\beta'} / \partial x^{\gamma'}$ равно нулю.

В качестве другого примера рассмотрим формулу преобразования дифференциала i^α , а именно di^α , не равную $di^\alpha = di^{\alpha'} \cdot C_{\alpha'}^\alpha$. Она может быть получена следующим образом. Пусть

$$i = C \cdot i', \quad i^\alpha = C_{\alpha'}^\alpha \cdot i^{\alpha'}. \quad (7.29)$$

Продифференцировав обе части, получим

$$di = d(C \cdot i'), \quad di^\alpha = d(C_{\alpha'}^\alpha \cdot i^{\alpha'}). \quad (7.30)$$

Поскольку произведение дифференцируется посредством дифференцирования каждого сомножителя отдельно, получим

$$di = C \cdot di' + dC \cdot i', \quad di^\alpha = C_{\alpha'}^\alpha \cdot di^{\alpha'} + dC_{\alpha'}^\alpha \cdot i^{\alpha'}. \quad (7.31)$$

Следовательно, в формуле преобразования di^α возникает дополнительный член $dC_{\alpha'}^\alpha \cdot i^{\alpha'}$.

II. Теперь только те геометрические объекты, формула преобразования которых содержит столько C или C^{-1} , сколько они имеют индексов, и не содержит дополнительных членов, будут называться «тензорами». Те же геометрические объекты, формулы преобразования которых содержат дополнительные члены, кроме указанных в уравнении (7.18), сохраняют свое название «нетензорный геометрический объект». Слово «тензор» ограничивается определенным классом геометрических объектов, подчиняющихся простым правилам преобразования уравнения (7.18). Дополнительные члены, возникающие в формуле преобразования, обычно содержат производные или дифференциалы от $C_{\alpha'}^\alpha$.

Является ли геометрический объект тензором или нет, не зависит от его характеристик только в одной данной проблеме. Это зависит от того, как он ведет себя при введении новых систем координат, т. е. зависит от его характеристик в большом числе проблем.

II. Если компоненты тензора преобразования $C_{\alpha'}^\alpha$ являются константами (когда преобразование линейное, а не функциональное), то все геометрические объекты преобразуются как тензоры. В сетях, изучаемых в этой книге, все геометрические объекты преобразуются как тензоры, поскольку компоненты всех тензоров преобразования — константы. Этого не происходит при изучении вращающихся электрических машин, где компоненты тензора преобразования — функции переменных.

IV. «Тензор валентности один» называется «вектором», а тензор валентности нуль — скаляром. Тензоры других валентностей не имеют специальных названий.

V. Нужно подчеркнуть, что в определении тензора ничего не сказано о природе его компонент. Компонентами тензора могут быть числа, функции, операторы и т. д. Единственным критерием тензора является его линейная формула преобразования относи-

тельно данной группы преобразований. Его тензорный характер не зависит от природы его компонент или от данной ему физической или геометрической интерпретации.

12. ВАЖНЕЙШИЕ ТЕНЗОРЫ ФИЗИЧЕСКИХ ПРОБЛЕМ

Одной из целей тензорного анализа является такая формулировка физических проблем, при которой в их уравнениях все геометрические объекты являются тензорами. Во всех возможных системах координат, которые могут возникнуть в природе, все введенные геометрические объекты должны иметь простые формулы преобразования, как в уравнении (7.18).

Требование, чтобы каждый геометрический объект во всех уравнениях физического явления был тензором, обуславливается тем фактом, что *только сущности, представляемые тензорами, образуют физическую объективную реальность природы. Нетензорные геометрические объекты появляются в уравнениях только за счет случайного выбора экзотических координатных систем и могут быть удалены из уравнений разумным выбором системы координат, как это происходит в случае воображаемых сил, подобных центробежным. Количество тензоров, необходимых для описания явлений природы, очень мало из-за небольшого количества различных сущностей, образующих объективную реальность известной до сих пор природы.*

Важность методологии тензорного анализа в физических проблемах обуславливается способностью выступать в качестве точного критерия для установления факта, имеет ли набор математических выражений некую копию в физическом мире или является только иллюзорным плодом человеческого воображения. *Этот критерий и дается «законом преобразования», или «формулой преобразования» множества величин.*

В дополнение к *закону преобразования* множества величин, представляющих физическую сущность, важно также установить группу преобразований S_a^a , относительно которой справедлив закон преобразования. Физические сущности, связанные с сетями, определяются при помощи S_a^a , отличных от тех, которые связаны с полями. Физические сущности квантовой динамики также определяются группами преобразований, отличными от групп преобразований классической динамики. Физические объекты могут существовать относительно одной группы S_a^a и не существовать относительно другой группы S_a^a .

13. НЕОБХОДИМОСТЬ ПОСТУЛАТА ТРЕТЬЕГО ОБОБЩЕНИЯ

Введение *n-мерных матриц* позволяет установить постулат первого обобщения, утверждающий, что уравнение с *n* степенями свободы записывается в такой же форме, как и уравнение с одной (или минимальным числом) степенью свободы.

Введение *геометрических объектов* позволяет установить постулат второго обобщения, утверждающий, что уравнения бесконечного числа *подобных систем* с n степенями свободы имеют одинаковую форму записи.

Однако в физических проблемах возникают многочисленные *типы систем координат* (каждая из которых содержит бесконечное число различных осей), которые радикально отличаются друг от друга, а физические явления при рассмотрении их в различных типах систем координат описываются уравнениями различного вида. Например, электродинамические системы имеют разные уравнения и представляют различную физическую картину в зависимости от того, движутся ли проводники, магнетики, диэлектрики, электрические заряды, магнитные заряды, наблюдатели и т. д. Понятие «геометрический объект» недостаточно для объединения уравнений этих различных типов систем. В их уравнениях движения появляются производные и дифференциалы, такие как di^α , которые не преобразуются как тензоры (см. уравнение (7.31)), поскольку они зависят от типа движения частей, образующих систему.

Для того чтобы объединить уравнения движения электродинамических систем независимо от относительного движения материальных или электрических составляющих, *все производные и дифференциалы (не являющиеся тензорами) должны быть заменены тензорами так, чтобы каждый символ, каждый геометрический объект в уравнениях стал тензором.* Эта замена возможна благодаря постулату третьего обобщения, который, однако, не изучается в этой книге.

14. ТРИ СТАДИИ ОРГАНИЗАЦИИ

Для лучшей визуализации этого развития простых понятий на последовательных стадиях организации от обычных чисел через стадию 1) n -мерных матриц, 2) геометрических объектов, 3) тензоров, рассмотрим одну *неподвижную катушку* с собственной индуктивностью L , которая описывается уравнением $e = \dot{z}i$ или

$$e = L di/dt, \quad (7.32)$$

содержащим четыре понятия: e , i , L и оператор d/dt .

II. *Первая* стадия организации вводит в рассмотрение вместо одной катушки множество из n *взаимосвязанных неподвижных катушек* с собственными и взаимными индуктивностями $L_{(\alpha)(\beta)}$. Уравнение для этого множества имеет вид

$$e_{(\alpha)} = L_{(\alpha)(\beta)} di_{(\beta)}/dt, \quad (7.33)$$

содержащее снова четыре понятия: $e_{(\alpha)}$, $i_{(\alpha)}$, $L_{(\alpha)(\beta)}$ и d/dt , каждое из которых представляется n -матрицей. Постулат первого обобщения охватывает эту стадию организации.

III. *Вторая* стадия организации вводит в рассмотрение все возможные множества из n неподвижных катушек, где множества отличаются друг от друга способом взаимосоединения катушек и т. п. Уравнение принимает вид

$$e_{\alpha} = L_{\alpha\beta} di^{\beta}/dt \quad (7.34)$$

и содержит четыре понятия: e_{α} , i^{α} , $L_{\alpha\beta}$ и d/dt . Хотя три первых понятия являются тензорами, комбинация di^{α}/dt не является тензором. Постулат второго обобщения охватывает эту вторую стадию организации с помощью введения понятия тензора преобразования $S_{\alpha}^{\alpha'}$ и понятия инвариантности формы ($e_{\alpha} i^{\alpha} = e_{\alpha'} i'^{\alpha'}$).

IV. *Третья* стадия организации вводит в рассмотрение все возможные движения всех возможных множеств из n катушек (что встречается, например, в различных типах вращающихся электрических машин, используемых в промышленности). Уравнение принимает вид

$$e_{\alpha} = L_{\alpha\beta} \delta i^{\beta}/dt \quad (7.35)$$

и содержит четыре понятия: e_{α} , i^{α} , $L_{\alpha\beta}$ и δ/dt , каждое из которых является тензором. (δi^{β} есть «абсолютный» дифференциал, представляющий определенную комбинацию di^{β} и других геометрических объектов, определяемый рутинными правилами тензорного анализа.)

Развитие этой третьей стадии организации, еще более обширной по охвату явлений, чем первые две стадии, и образует основную часть тензорного анализа. Конечно, простые инженерные структуры, введенные в этой книге, должны быть дополнены более сложными структурами в процессе дальнейшего изучения. Это означает, что *нульмерные структуры* (узлы) и *одномерные структуры* (катушки) должны взаимосвязываться с *двухмерными структурами*, такими как *слои обмоток электрических машин*, прежде чем можно будет приступить к рассмотрению изменяющихся соединений.

15. ВАЖНЫЕ ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ОБЪЕКТЫ ФИЗИКИ И ГЕОМЕТРИИ

I. Геометрические объекты, возникающие при изучении сетей, а именно e_{α} , i^{α} , $r_{\alpha\beta}$, $l_{\alpha\beta}$, $z_{\alpha\beta}$ и другие, являются частными случаями некоторых основных геометрических объектов, которые играют основную роль в анализе обобщенных динамических систем и в геометрических исследованиях. Эти более общие геометрические объекты будут введены в следующем томе¹⁾. Бегло упомянем здесь следующие геометрические объекты, встречающиеся в общих динамических и геометрических исследованиях.

¹⁾ См. прим. пер. на с. 21.

II В физических проблемах важнейшим *скаляром* (тензором нулевой валентности) является *время*, обозначаемое как t . В геометрических проблемах его место занимает «перемещение», обозначаемое s .

Другими важными скалярами являются «кинетическая энергия» T , «потенциальная энергия» V , «входная мощность» P и т. д. В геометрии их место занимает бесконечно малый элемент длины ds и т. п.

III. В любой общей проблеме контравариантные переменные x, y, z, \dots обозначаются x^1, x^2, x^3, \dots или x^a, x^b, x^c и представляются как компоненты вектора

$$x = \begin{array}{c|cccc} & a & b & c & d \\ \hline & x^a & x^b & x^c & x^d \end{array}, \quad x^\alpha = \begin{array}{c|cccc} \alpha & a & b & c & d \\ \hline & x^a & x^b & x^c & x^d \end{array}. \quad (7.36)$$

Переменные могут быть известными или неизвестными, или частично известными, частично неизвестными и т. д.

В проблемах механики контравариантные переменные представляют мгновенные «перемещения», в электрических проблемах они представляют «электрические заряды», проходящие по проводникам. В геометрических проблемах x^α представляют любую *точку* в n -мерном пространстве.

Из переменных x^α путем последовательного дифференцирования могут быть получены дополнительные векторы. Первым из них является «дифференциал» переменных (дополнительное множество n переменных)

$$dx = \begin{array}{c|cccc} & a & b & c & d \\ \hline & dx^a & dx^b & dx^c & dx^d \end{array}, \quad dx^\alpha = \begin{array}{c|cccc} \alpha & a & b & c & d \\ \hline & dx^a & dx^b & dx^c & dx^d \end{array}, \quad (7.37)$$

представляющий бесконечно малое изменение смещения или зарядов и т. п. В геометрии dx^α представляет бесконечно малый вектор, опирающийся на точку x^α .

Если вектор dx^α делится на бесконечно малый скаляр dt , то мы получаем вектор «скорость»

$$\frac{dx^\alpha}{dt} = v^\alpha = \begin{array}{c|cccc} & a & b & c & d \\ \hline & \frac{dx^a}{dt} & \frac{dx^b}{dt} & \frac{dx^c}{dt} & \frac{dx^d}{dt} \end{array} = \begin{array}{c|cccc} \alpha & a & b & c & d \\ \hline & v^a & v^b & v^c & v^d \end{array}, \quad (7.38)$$

представляющий «скорость» или «ток». В геометрии dx^α/ds представляет единичный касательный вектор, касающийся линии и начинающийся в точке x^α на этой линии.

Если вектор скорости dx^α/dt снова дифференцируется по времени, то ускорение представляется в виде

$$\frac{d^2x^\alpha}{dt^2} = \frac{dv^\alpha}{dt} = a^\alpha = \begin{array}{c|cccc} \alpha & a & b & c & d \\ \hline & \frac{d^2x^a}{dt^2} & \frac{d^2x^b}{dt^2} & \frac{d^2x^c}{dt^2} & \frac{d^2x^d}{dt^2} \end{array} = \begin{array}{c|cccc} \alpha & a & b & c & d \\ \hline & a^a & a^b & a^c & a^d \end{array}. \quad (7.39)$$

Другим важным ковариантным вектором, компоненты которого обычно известны, является вектор «сила»

$$f_\alpha = \begin{array}{c|cccc} \alpha & a & b & c & d \\ \hline & f_a & f_b & f_c & f_d \end{array}. \quad (7.40)$$

IV. Среди геометрических объектов валентности два наиболее важным является так называемый «метрический тензор» или «фундаментальный тензор»

$$a_{\alpha\beta} = \begin{array}{c|cccc} & \beta & a & b & c & d \\ \hline \alpha & & & & & \\ a & a_{aa} & a_{ab} & a_{ac} & a_{ad} & \\ b & a_{ba} & a_{bb} & a_{bc} & a_{bd} & \\ c & a_{ca} & a_{cb} & a_{cc} & a_{cd} & \\ d & a_{da} & a_{db} & a_{dc} & a_{dd} & \end{array}, \quad (7.41)$$

представляющий «моменты инерции» и «произведения инерции» относительно различных осей или собственные и взаимные индуктивности различных обмоток. В геометрических проблемах он играет важную роль в определении понятия «величина» вектора. В большинстве проблем он является функцией от x^α . Этот тензор подробно изучается в гл. 18.

Другим важным тензором валентности два является «тензор сопротивления» $r_{\alpha\beta}$, представляющий силы трения. В геометрических проблемах он играет роль в определении понятия «направление» вектора.

V. Среди геометрических объектов валентности три наиболее важен так называемый символ «аффинной связности» $\Gamma_{\alpha\beta}^\gamma$. В механических проблемах он появляется в вычислении центробежных и других видов *воображаемых* сил; в электрических проблемах — при вычислении генерируемых напряжений, обусловленных вращением, а также вращающего момента. В геометрических проблемах он встречается всякий раз, когда используются криволинейные оси, и *играет главную роль при определении понятия «направление»* вектора. Он не является тензором. В боль-

шинстве проблем он является функцией $a_{\alpha\beta}$, но в общем случае это не обязательно.

VII. Среди геометрических объектов валентности четыре наиболее важным является так называемый «тензор кривизны Римана — Кристоффеля» $K_{\alpha\beta\gamma\delta}$. В динамических проблемах он появляется в уравнениях, когда возникают малые осцилляции. Он всегда является функцией $\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma}$.

VIII. С помощью упомянутых геометрических объектов можно построить много других геометрических объектов различных валентностей. Среди них наиболее важным является тензор валентности два, так называемый «тензор преобразования» $S^{\alpha}_{\alpha'}$, изучение которого и является главной целью данной книги.

16. НЕИНВАРИАНТНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

I. В анализе инженерных проблем часто возникает необходимость вводить матрицы преобразования S , которые обеспечивают нужные изменения. Однако они обычно не образуют группу и не оставляют «форму» инвариантной, т. е. понятия ковариантности и контравариантности для них не имеют смысла. Такие преобразования будут называться «неинвариантными преобразованиями».

n -матрица, подобная $e_{(\alpha)}$ или $i_{(\alpha)}$, или $z_{(\alpha)(\beta)}$ преобразуются различным образом для различных типов матриц преобразования, и формулы преобразования должны устанавливаться заново всякий раз, когда используется новая матрица преобразования.

Такие преобразования обычно встречаются при действиях с системой уравнений для приведения системы к удобному виду. Это бывает при приведении матрицы импеданса $z_{(\alpha)(\beta)}$ к диагональной форме, в которой все компоненты, кроме диагональных, нули; или асимметричная матрица $z_{(\alpha)(\beta)}$ приводится к симметричной форме для того, чтобы установить для нее эквивалентную цепь. Примеры неинвариантных преобразований можно приводить бесконечно.

II. Пусть рассматривается система линейных уравнений

$$\mathbf{e} = \mathbf{z} \cdot \mathbf{i}, \quad e_{(\alpha)} = z_{(\alpha)(\beta)} i_{(\beta)}. \quad (7.42)$$

Они могут представлять уравнения напряжения некоторой сети. Рассмотрим три примера неинвариантных преобразований.

1. Пусть напряжение \mathbf{e} и ток \mathbf{i} преобразуются с помощью двух различных матриц преобразования \mathbf{A} и \mathbf{B} , т. е.

$$\mathbf{e} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{e}', \quad e_{(\alpha)} = A_{(\alpha)(\alpha')} e_{(\alpha')}, \quad (7.43)$$

$$\mathbf{i} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{i}', \quad i_{(\alpha)} = B_{(\alpha)(\alpha')} i_{(\alpha')}. \quad (7.44)$$

Вопрос состоит в том, какова формула преобразования $z_{(\alpha)(\beta)}$, если требуется оставить новую систему уравнений в форме

$$\mathbf{e}' = \mathbf{z}' \cdot \mathbf{i}'.$$

Подставляя уравнения (7.44) и (7.43) в (7.42), получаем

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{e}' = \mathbf{z} \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{i}', \quad A_{(\alpha)(\alpha')} e_{(\alpha')} = z_{(\alpha)(\beta)} B_{(\beta)(\beta')} i_{(\beta')}.$$

Умножаем обе части на \mathbf{A}^{-1}

$$\mathbf{e}' = \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{z} \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{i}', \quad e_{(\alpha')} = A_{(\alpha)(\alpha')}^{-1} z_{(\alpha)(\beta)} B_{(\beta)(\beta')} i_{(\beta')}.$$

Поскольку

$$\mathbf{e}' = \mathbf{z}' \cdot \mathbf{i}', \quad e_{(\alpha')} = z_{(\alpha')(\beta')} i_{(\beta')},$$

то формула преобразования матрицы импеданса \mathbf{z} есть

$$\mathbf{z}' = \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{z} \cdot \mathbf{B}, \quad z_{(\alpha')(\beta')} = z_{(\alpha)(\beta)} A_{(\alpha)(\alpha')}^{-1} B_{(\beta)(\beta')}. \quad (7.45)$$

Во многих задачах \mathbf{A} или \mathbf{B} — единичные матрицы. Следует особенно подчеркнуть, что *входная мощность $\mathbf{e} \cdot \mathbf{i}$ не является инвариантом при этом преобразовании*, поскольку

$$\mathbf{e} \cdot \mathbf{i} = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{e}') (\mathbf{B} \cdot \mathbf{i}') = \mathbf{A} (\mathbf{e}' \cdot \mathbf{i}') \mathbf{B}_t$$

и, следовательно,

$$\mathbf{e} \cdot \mathbf{i} \neq \mathbf{e}' \cdot \mathbf{i}'.$$

2. Пусть \mathbf{e} и \mathbf{i} преобразуются одной и той же матрицей преобразования \mathbf{A} . Иначе говоря, пусть $\mathbf{B} = \mathbf{A}$. Тогда формула преобразования матрицы импеданса

$$\mathbf{z}' = \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{z} \cdot \mathbf{A}, \quad z_{(\alpha')(\beta')} = z_{(\alpha)(\beta)} A_{(\alpha)(\alpha')}^{-1} B_{(\beta)(\beta')}. \quad (7.46)$$

Эта формула преобразования достаточно часто встречается в матричной алгебре, когда 2-матрица приводится к диагональной форме.

3. Возможен случай, когда \mathbf{e} преобразуется посредством \mathbf{A} , а \mathbf{i} — посредством \mathbf{B} , в то время как матрица импедансов \mathbf{z} совершенно независимо от \mathbf{e} и \mathbf{i} преобразуется двумя другими матрицами преобразования \mathbf{C} и \mathbf{D} по формуле

$$\mathbf{z}' = \mathbf{C} \cdot \mathbf{z} \cdot \mathbf{D}, \quad z_{(\alpha')(\beta')} = z_{(\alpha)(\beta)} C_{(\alpha)(\alpha')} D_{(\beta)(\beta')}. \quad (7.47)$$

В таких случаях физический состав системы обычно изменяется: скажем, трехфазная система заменяется на однофазную и т. д.

Глава 8

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ИНТЕРПРЕТАЦИИ

1. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ ЯЗЫК

I. Большинство наук имеет дело с явлениями, которые можно описать системами уравнений. Давно было замечено, что когда казалось бы не связанные друг с другом явления описываются в терминах фундаментальных понятий, то уравнения их имеют один и тот же вид. Например, многие уравнения гидродинамики, теории упругости, электродинамики и дифференциальной геометрии имеют одинаковый вид несмотря на то, что различные члены в этих уравнениях представляют разные понятия в разных науках.

В течение последнего столетия появилась тенденция вводить универсальный язык, на котором подобные уравнения различного происхождения интерпретируются и представляются наглядно на общей основе. Таким языком является геометрия. Следовательно, чтобы сказать: система уравнений описывает поведение электрической машины или гироскопа, или движущегося электрона, — на языке геометрии говорится, что система уравнений описывает определенную геометрическую кривую в n -мерном пространстве или движение частицы по этой кривой. Свойства различных типов кривых, поверхностей и пространств всегда соответствуют некоторым свойствам исследуемой частной физической системы. Например, сингулярность на поверхности соответствует наличию электрического заряда; кривизна пространства в точке является показателем динамической устойчивости или неустойчивости осциллирующей динамической системы.

Таким образом, если уравнения различных наук выражены на геометрическом языке, то все результаты этих наук можно объединить в один общий фонд и применять в других науках, не развивая каждый раз ту же теорию заново, но на другом языке.

II. Вообще говоря, ситуация для получения унифицированной точки зрения в *технике* значительно менее благоприятна, чем в фундаментальных науках. После развития в условиях изоляции

в течение нескольких десятилетий эти дополнительные технические знания настолько удалились от своих «родителей» — фундаментальных наук, что новый запас знаний стал закрытой книгой для всех, кроме специалистов, посвятивших ему жизнь, но потерявших из-за этого всякий контакт с фундаментальной наукой. Теория сетей и вращающихся электрических машин является классическим примером такого роста технических знаний в условиях изоляции со всеми присущими ему неудобствами, такими как необходимость различных теорий для каждой машины.

Цель данной книги — переформулировать имеющиеся знания в области электрических сетей в терминах фундаментальных инвариантных понятий, используемых в современной электродинамике и геометрии, чтобы упростить их понимание и открыть новые каналы исследования их анализа и синтеза, следуя возможно ближе путям развития фундаментальных наук. Всегда выявляется, что геометрическая формулировка технических задач много проще, короче и элегантнее, чем способ, которым привыкли их выражать специалисты по электротехнике; геометрическая формулировка дает лучшее и более ясное наглядное представление. Известно также, что большинство наиболее современных математических инструментов, подобных тензорному анализу, являются более простыми для понимания, более удобными для применения к сложным проблемам и быстрее приводят к численному результату, чем элементарные средства, развитые *наудачу* под давлением случайной необходимости.

III. В этой главе некоторые ранее введенные физические понятия и аналитические процессы проиллюстрированы геометрическим языком. Содержание главы не является необходимым для понимания последующих глав. Однако каждый желающий читать другие учебники по тензорному анализу должен быть хорошо знаком с содержанием этой главы, поскольку практически все книги по тензорному анализу используют геометрический язык.

Некоторые части главы представляют собой утверждения, доказательства которых приводятся в книгах по тензорному анализу. Здесь не делается попытка дать точные определения.

2. ГЕОМЕТРИЗАЦИЯ ФИЗИЧЕСКИХ ПРОБЛЕМ

I. Переход от физической проблемы к геометрической интерпретации осуществляется с помощью следующего допущения: «Система n уравнений с n переменными (с временем в качестве параметра) может представлять либо поведение динамической системы с n степенями свободы, либо движение точки по кривой, расположенной в n -мерном гипотетическом пространстве и записанной в некоторой частной системе координат».

II Например, пусть даны две катушки, в которых уравнение напряжения $e_\alpha = z_{\alpha\beta} i^\beta$ имеет вид

$$\left. \begin{aligned} e_1 &= R_{11} i^1 + L_{11} \frac{di^1}{dt} + M_{12} \frac{di^2}{dt}, \\ e_2 &= R_{22} i^2 + L_{22} \frac{di^2}{dt} + M_{12} \frac{di^1}{dt}. \end{aligned} \right\} \quad (8.1)$$

Пусть величины этих токов в двух катушках в определенный момент времени будут $i^1 = 1,5$ А и $i^2 = 1,765$ А. В следующий момент пусть эти токи будут $i^1 = 0,87$ А и $i^2 = 1,49$ А. Еще позднее $i^1 = 0,763$ и $i^2 = 1,175$ и еще позднее $i^1 = 1,105$ и $i^2 = 0,235$ и т. д.

Чтобы представить изменение токов как геометрическую задачу, допустим сначала, что гипотетическое пространство, которое должно быть введено, является хорошо знакомым «линейным» пространством, в котором оси координат — прямые линии, расположенные под произвольным углом друг к другу. Если обнаружено, что характеристики этого пространства недостаточны для объяснения этапов, действительно выполняемых при изучении сетей, то это пространство можно модифицировать или заменить другим, которое точнее соответствует действительным шагам. Следовательно, пусть в качестве первого приближения даны две пересекающиеся линии, называемые «координатными осями», или системой координат, расположенные под произвольным углом друг к другу (рис. 8.1), и пусть вдоль них выбраны два произвольных отрезка OA и OB , длина которых принята за «единицу», представляющую 1 А. Пусть величина тока в катушке 1 отложена по линии 1 в единицах OA , а величина тока в катушке 2 — по линии 2 в единицах OB . Соединим две точки, которые измеряют ток в каждый момент времени, вычертив параллелограмм, подобный $OMKN$, где проекции точки K представляют два тока $i^1 = OM = 1,5$ и $i^2 = ON = 1,765$ в некоторый момент времени. С течением времени точка K описывает кривую $KK_1K_2K_3K_4\dots$, называемую «траекторией». Компоненты точки K вдоль координатных осей дают

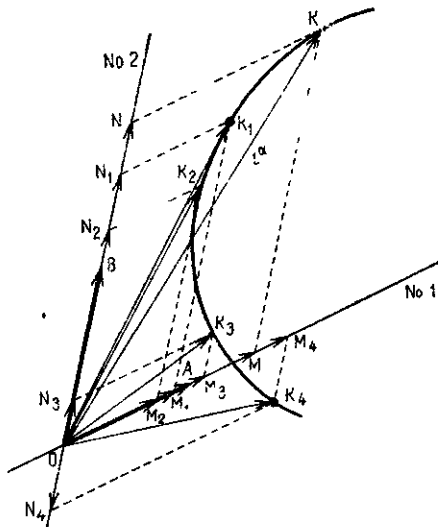


Рис. 8.1. Представление контравариантного вектора i^α в прямолинейной системе координат.

вдоль них выбранные отрезки OA и OB в единицах OA и OB . Пусть величина тока в катушке 1 отложена по линии 1 в единицах OA , а величина тока в катушке 2 — по линии 2 в единицах OB . Соединим две точки, которые измеряют ток в каждый момент времени, вычертив параллелограмм, подобный $OMKN$, где проекции точки K представляют два тока $i^1 = OM = 1,5$ и $i^2 = ON = 1,765$ в некоторый момент времени. С течением времени точка K описывает кривую $KK_1K_2K_3K_4\dots$, называемую «траекторией». Компоненты точки K вдоль координатных осей дают

мгновенные значения токов, текущих в двух катушках. Последовательные изменения токов в двух катушках образуют траекторию, описываемую точкой K .

Плоскость, в которой движется точка K , называется «*линейным*», или «*аффинным*» пространством.

III. Если имеются *три катушки*, то в качестве координатной системы можно выбрать три взаимно пересекающиеся линии, расположенные в пространстве, а не на плоскости, последовательные изменения токов в трех катушках опять будут описываться движением точки K .

Если имеется более трех катушек, то, используя тот же «оборот речи», опять говорят, что точка K движется в n -мерном аффинном пространстве и компоненты этой точки по n взаимно пересекающимся осям представляют в каждый момент времени мгновенные значения токов, протекающих в n катушках. Нужно заметить, что не следует делать каких-либо попыток наглядного представления n -мерного пространства.

3. ПРЕДСТАВЛЕНИЕ КОНТРАВАРИАНТНОГО ВЕКТОРА

I. Линию, соединяющую движущуюся точку K с началом координат O , называют «*контравариантным вектором*» и говорят, что в n катушках протекает только один ток, представленный вектором OK , называемым «*вектором тока*», и что *компоненты этого вектора по осям координат представляют индивидуальные токи, протекающие в катушках.*

II. Возникает вопрос: если компоненты вектора OK — это действительно существующие токи, протекающие в катушках, то чему соответствует сам вектор OK в физической системе?

Ответ состоит в том, что сам вектор OK в физической системе ничему не соответствует. Вектор OK является понятием, изобретенным для того, чтобы существовало что-то, имеющее компоненты. Таким образом, «вектор» является функцией; его компоненты, однако, измеряемые физические величины.

Векторы, которые здесь используются, существенно отличаются от обычных векторов, используемых инженерами. Векторы, используемые инженерами, такие как «*скорость*» тела, физически существуют, а их компоненты являются фикцией, тогда как используемые в книге векторы являются фикцией (по крайней мере до сих пор), а их компоненты физически существуют.

Иначе говоря, *векторы, которые описывают явления, имеющие место в реальном трехмерном мире наших ощущений, отличны от векторов, изобретенных для описания явлений, для которых реальное физическое пространство является чуждой характеристикой.*

III. *Поскольку вектор OK ничему не соответствует в частной физической системе, то нет смысла говорить о его «величине» или «направлении»; его «компоненты» представляют токи в катушках,*

но «величина» и «направление» вектора OK еще не определены геометрически.

В гл. 18 показано, как можно приписать вектору OK некоторую физическую интерпретацию, а значит, приписать численные значения тому, что называется «величина» и «направление» вектора OK . Однако эти понятия имеют мало общего с «величиной» и «направлением» в их обычном значении. Они принимают обычный смысл только в частном случае, когда оси координат взаимно перпендикулярны, а единичные векторы осей имеют одинаковую длину. В неподвижных сетях такая ситуация встречается лишь в тривиальном случае, когда катушки: 1) эквивалентны, 2) имеют единичную собственную индуктивность, 3) не имеют взаимных индуктивностей. Только в этом случае можно сказать, что точка K движется в n -мерном обычном (евклидовом) пространстве и вектор имеет «величину» $\sqrt{i_1^2 + i_2^2 + i_3^2 + \dots}$, представляющую квадратный корень из удвоенной «запасенной магнитной энергии» системы.

Еще раз подчеркнем, что в общем случае векторы не имеют ни «величины», ни «направления». Вектор имеет только «компоненты», которые действительно существуют. Он определяется как множество величин, формула преобразования которых содержит или $C_{\alpha}^{\alpha'}$, или обратную $C_{\alpha'}^{\alpha}$.

4. НЕДОСТАТОЧНОСТЬ ОБЫЧНЫХ ПРОСТРАНСТВ

I Может возникнуть вопрос, почему в качестве системы координат выбраны линии, пересекающиеся под произвольным углом, и почему в качестве одного ампера в каждой катушке выбраны два отрезка *неравной* длины. Более логично было бы выбрать две (или больше) линии, *пересекающиеся под прямым углом* (рис. 8.2), и два (или более) *равных* вектора в качестве единичных векторов. В этом случае легче изобразить и интерпретировать движение точки, поскольку пространство является обычным евклидовым пространством.

Существуют две причины введения прямолинейной (и не прямоугольной) системы координат и неравных единичных векторов.

Первой причиной недостаточности обычного пространства является то, что *выбранное представление должно быть справедливо для произвольных систем координат*. Если вектор тока OK представляется только в прямоугольной системе с равными единичными векторами, то разрешенными преобразованиями могут быть только вращения (и переносы), для которых детерминант тензора преобразования S всегда равен единице. Однако тензоры преобразования, используемые в исследованиях сетей, являются гораздо более сложными; это значит, что системы координат и единичные векторы должны быть более разнообразны.

Вторая причина состоит в том, что в дополнение к геометрической интерпретации токов и напряжений в дальнейшем пред-

полагается нахождение геометрической интерпретации и других электромагнитных величин. Например, если предполагается интерпретировать величину вектора тока OK как величину, которая в каждый момент пропорциональна запасенной магнитной энергии $l_{\alpha\beta}i^{\alpha}i^{\beta}$, то обнаруживается, что различные оси *должны быть* неравными; это неравенство углов и величин единичных векторов является функцией от собственных и взаимных индуктивностей. Другой пример: если предполагается представить

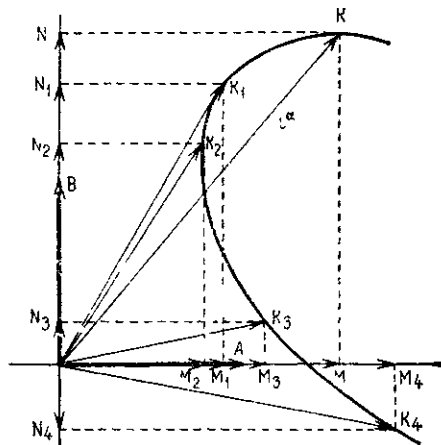


Рис. 8.2. Прямоугольная система координат.

геометрически *электрические разряды*, имеющиеся в обмотках вращающейся электрической машины, то нельзя предполагать, что оси координат располагаются в «плоском пространстве», подобном плоскости; они должны располагаться в n -мерном искривленном пространстве, подобном сферической поверхности (в одномерном случае), а сами координаты оси должны быть кривыми линиями. По мере того как все большее и большее число электромагнитных величин требуется интерпретировать геометрически, все простран-

ства и конфигурации, расположенные в них, становятся соответственно все более сложными.

II. В тех случаях, когда не предполагается вводить группы новых координатных систем для представления новых систем или новых точек зрения, а также не предполагается позднее вводить геометрическую интерпретацию других величин, кроме выбранных переменных, выбор прямоугольной системы координат и равных единичных векторов в любой физической проблеме независимо от сложности является совершенно правильным. Таким представлением, например, является поверхность давление — объем — температура ($p-v-T$), показывающая графически уравнение состояния термодинамической системы. Однако на таких диаграммах понятия «расстояние между двумя точками» или «угол между двумя линиями» и другие не имеют эквивалентов в физической системе.

Геометрическое представление любой физической проблемы является удовлетворительным тогда и только тогда, когда:

1) оно сохраняет силу для всех координатных систем, которые должны быть введены;

2) оно представляет геометрически максимальное число физических величин, относящихся к данной проблеме, и точно показывает их взаимоотношение в любой момент времени.

III. Большое разнообразие сложных координатных систем и неевклидовых криволинейных пространств еще следует ввести в современную физику, чтобы удовлетворить этим двум требованиям корректного геометрического представления физических явлений. Это особенно необходимо для представления электромагнитных явлений, с которыми сталкиваются инженеры-электротехники; здесь требуются очень сложные типы пространства, и большая часть современного тензорного анализа и дифференциальной геометрии обязана своим развитием этим попыткам геометрического представления электромагнитных явлений. Такое представление совершенно необходимо для пояснения физической сути явлений и определения пути атаки еще не решенных проблем.

Подчеркнем, что нет необходимости иметь точное количественное соответствие физической задачи ее геометрическому представлению. Достаточно иметь качественное соответствие, т. е. предложить грубое, но еще работающее наглядное представление.

IV. По мере того как растет сложность электромагнитных явлений и координатных систем, необходимых для использования, пропорционально возрастает сложность геометрических конфигураций, которые требуется ввести, и сложность пространства, в которых эти конфигурации располагаются.

С появлением распространяющихся электромагнитных волн, движущихся проводников, ускоренное движение которых вызывается магнитным полем, геометрическое представление становится чрезвычайно сложным.

Даже представление, данное на рис. 8.1, фактически недостаточно для геометрического изображения поведения системы катушек при всех условиях. Например, если токи в каждой катушке представлены не действительными, а комплексными числами, то такие токи не могут измеряться единичными векторами по осям 1 и 2. В этом случае координатные оси считаются расположенными не в обычном пространстве, а в пространстве нового типа, называемом «унитарным», его можно представить только математически. Следовательно, все диаграммы, все геометрические выражения, такие как «координатные оси», «единичный вектор», «пространство», «плоскость», «пересечение», должны восприниматься инженером только как вспомогательное средство для наглядного представления математических шагов, для облегчения запоминания их особенностей. Геометрический язык должен использоваться только как «оборот речи», а не как точное описание уравнения поведения.

V. Следует подчеркнуть, что n -матрицу нельзя представить геометрически. Чтобы представить математически посредством

n -матрицы геометрическую сущность, такую как линия, плоскость или эллипсоид, рассматриваемую в некоторой системе координат, необходимо, чтобы та же самая сущность могла быть представлена посредством *другой* n -матрицы в другой системе координат. Другими словами, *геометрическая сущность представляется целой последовательностью n -матриц, а не одной n -матрицей, ибо каждая n -матрица представляет компоненты геометрического объекта только в частной системе координат.*

Такая последовательность n -матриц называется здесь «геометрическим объектом», а именно n -матрица с закрепленной формулой преобразования, которая позволяет геометрическому объекту принимать ряд значений, каждое из которых представляется n -матрицей. Таким образом, как с геометрической сущностью, так и с «геометрическим объектом» связывается большое, обычно бесконечное, количество n -матриц, по одной для каждой системы координат.

Следовательно, каждая геометрическая сущность (линия, плоскость и т. д.) представляется «геометрическим объектом», а не просто n -матрицей.

5. ПРЕДСТАВЛЕНИЕ КОВАРИАНТНОГО ВЕКТОРА

В предыдущих параграфах было показано, что имеется два типа векторов (контравариантные и ковариантные), причем каждый из них при изменении системы координат имеет свою формулу преобразования. Из-за этого различия в формуле преобразования обнаружено, что ковариантный вектор нельзя представить геометрически, как контравариантный вектор, т. е. точкой в пространстве.

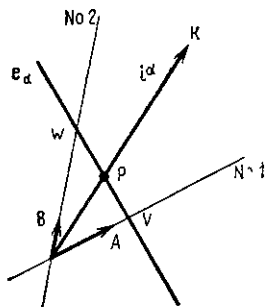


Рис. 8.3. Представление ковариантного вектора e_α .

Пусть снова система координат задана своими единичными векторами (рис. 8.3) и мгновенное значение приложенного напряжения в двух катушках равно 0,8 и 0,25 В, т. е.

$$e_\alpha = \begin{vmatrix} \alpha & 1 & 2 \\ 0,8 & 0,25 \end{vmatrix}. \quad (8.2)$$

Для представления этих компонент по оси 1 измеряют обратную 0,8 величину, т. е. 1,25 единиц V , а по оси 2 обратную 0,25 величину, а именно 4 единицы W . *Линия, проходящая через точки V и W , представляет ковариантный вектор e_α .*

В общем случае в n -мерном пространстве «ковариантный вектор» e_α , имеющий n компонент, представляется $(n-1)$ -мерной гиперплоскостью. «Компоненты» вектора e_α являются обратной величиной отрезков, отсекаемых плоскостью от координатных

осей. При изменении приложенных напряжений от момента к моменту отрезки изменяются и плоскость движется из одной части пространства в другую.

Если i^a используется в качестве переменной, то уравнение плоскости (представляемой e_a) есть

$$e_a i^a = 1 \quad (8.3)$$

или $0,8i^a + 0,25i^b = 1$. Например, если $i^b = 0$, то $i^a = 1/0,8 = 1,25 = OV$.

6. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ СИСТЕМЫ КООРДИНАТ

Пусть вместо линий 1 и 2 в качестве координатных осей введена другая система линий 1' и 2' (рис. 8.4). Вдоль этих новых осей пусть снова отложены два произвольных вектора OA' и OB' ,

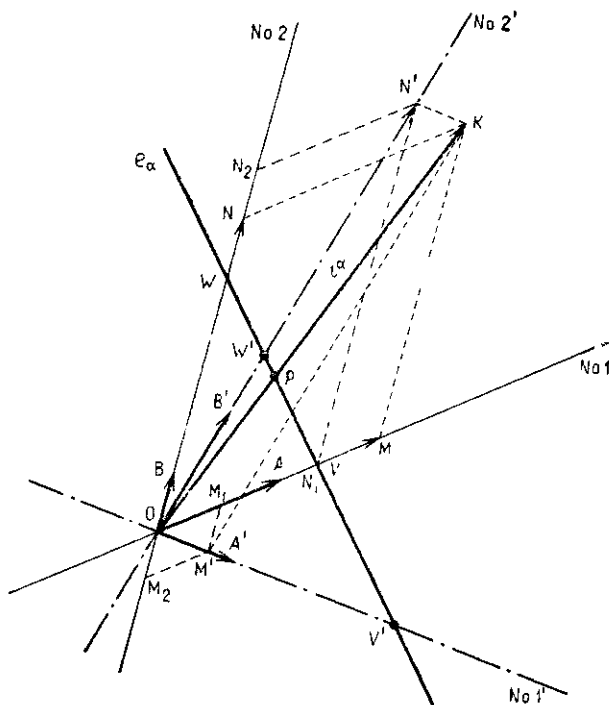


Рис. 8.4. Преобразование системы координат.

которые названы «единичными». (Можно считать, что фиксированные индексы 1, 2 или a, b , появляющиеся вдоль n -матриц, и представляют эти единичные векторы.)

В этих новых осях компонентами контравариантного вектора $i^a = OK$ является $OM' = 0,635$ и $ON' = 3,46$, измеряемые в терми-

нах, заданных вектором OA' и OB' соответственно. Таким образом, компонентами i^α в старых и новых координатных осях являются

$$i^\alpha = \begin{array}{c|cc} & 1 & 2 \\ \hline \alpha & 1,76 & 4,78 \end{array}, \quad i^{\alpha'} = \begin{array}{c|cc} & 1' & 2' \\ \hline \alpha' & 0,635 & 3,46 \end{array}. \quad (8.4)$$

Для того чтобы найти тензор преобразования $C = C_\alpha^{\alpha'}$, нужно установить соотношение между старыми компонентами OM , ON и новыми компонентами OM' и ON' в виде $i = C \cdot i'$. Следовательно, OM и ON должны быть выражены через OM' и ON' .

Проводя из точек M' и N' линии, параллельные старым осям, можно выразить OM и ON через проекции OM' и ON' на старые оси в виде

$$OM = OM_1 + ON_1 = 0,494 + 1,266 = 1,76, \quad (8.5)$$

$$ON = -OM_2 + ON_2 = -0,77 + 5,55 = 4,78.$$

Выражая проекции в виде OM' и ON' (где $OM' = 0,634$ и $ON' = 3,46$),

$$OM = 0,777OM' + 0,366ON', \quad (8.6)$$

$$ON = -1,21OM' + 1,6ON'$$

или через токи

$$\begin{aligned} i^1 &= 0,777i^{1'} + 0,366i^{2'}, \\ i^2 &= -1,21i^{1'} + 1,6i^{2'}, \end{aligned} \quad C_{\alpha'}^\alpha = \begin{array}{c|cc} & 1' & 2' \\ \hline \alpha & 0,777 & 0,366 \\ \hline & -1,21 & 1,6 \end{array}, \quad (8.7)$$

тензор преобразования определяют коэффициентами при новых компонентах тока.

Как только тензор преобразования C установлен, компоненты любого другого вектора или тензора в новых осях можно найти посредством их формулы преобразования. Компоненты ковариантного вектора e_α в новых осях $e' = C_i \cdot e$ или

$$e_{\alpha'} = C_\alpha^{\alpha'} e_\alpha \quad \begin{array}{c|cc} & 1' & 2' \\ \hline \alpha' & 0,8 & 0,25 \\ \hline & 0,32 & 0,692 \end{array} \quad (8.8)$$

Отрезки OV' и OW' , отсекаемые плоскостью e_α от новых осей (рис. 8.4), равны 3,12 и 1,44. Обратные им величины (представляющие компоненты $e_{\alpha'}$) равны 0,32 и 0,692, что является подтверждением значения e_α , найденного с помощью формулы преобразования.

Нельзя не отметить, что *единственным критерием того, что множество величин* (таких, как токи или напряжения в катушках сети), расположенных в строку, называется *величинами «компонент вектора»* (и представляется точкой или $(n-1)$ -мерной плоскостью), является то, что при переходе к новой системе координат эти величины преобразуются посредством умножения на C или на обратную ей C^{-1} . Не существует никакого другого критерия, отличающего систему величин, называемую «компонентами вектора». Эти векторы не имеют никаких других атрибутов, они не имеют ни «величины», ни «направления», ни «ориентации».

Из того факта, что их формула преобразования содержит C или C^{-1} только один раз, их компоненты располагаются в строку, а их базовая буква имеет один индекс. Если системе чисел C или C^{-1} требуется дважды, то тогда и только тогда эти числа располагаются в квадрат, а их базовая буква имеет два индекса. Вполне возможно, что то же самое множество чисел можно в одной задаче расположить в строку, а в другой — в квадрат. В действительности даже в одной проблеме может случиться, что в одном типе системы координат множество чисел рассматривается как вектор и располагается в строку, а в другом типе координатной системы это же множество чисел рассматривается расположенным в квадрат. Единственным критерием способа расположения множества величин является их «формула преобразования» или «уравнение преобразования».

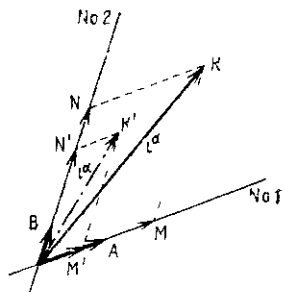


Рис. 8.5. Преобразование точки i^α .

7. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ТОЧЕК ПРОСТРАНСТВА

I. Наряду с тем, что рассматривается геометрически уравнение преобразования $i^\alpha = C_\alpha^{\alpha'} \cdot i^{\alpha'}$ или $x^\alpha = f(x^{\alpha'})$ как преобразование системы координат, используется и другая точка зрения, а именно, что система координат остается неизменной, а вместо нее совершает движение к другой точке сама точка в соответствии с уравнением преобразования $i^\alpha = C_\alpha^{\alpha'} \cdot i^{\alpha'}$.

Например, пусть i^α , как показано на рис. 8.5, до преобразования представлена точкой K с компонентами $OM=1,76$ и $ON=4,28$. После преобразования ее компоненты становятся $OM'=$

$=0,635$ и $ON' = 3,46$; эти числа можно отложить в тех же осях, которые были до преобразования, при этом образуется новая точка K' . Вектор OK можно теперь считать представляющим $i^{\alpha'}$.

Другими словами, *результат преобразования $i^{\alpha} = C_{\alpha}^{\alpha'} i^{\alpha'}$ заключается в движении точки K в точку K'* . Взяв различные компоненты i^{α} , можно переместить все точки пространства в новые положения.

Таким образом, имеются две точки зрения на геометрическое представление преобразования $i^{\alpha} = C_{\alpha}^{\alpha'} i^{\alpha'}$: 1) оно или преобразует систему координат и оставляет точки пространства неизменными; 2) или преобразует точки пространства и оставляет систему координат неизменной. Эти две точки зрения эквивалентны.

II. Сколь велико изменение, вызываемое преобразованием точек пространства $i^{\alpha} = C_{\alpha}^{\alpha'} i^{\alpha'}$ или $x^{\alpha} = f(x^{\alpha'})$, зависит от вида $C_{\alpha}^{\alpha'}$. *Каждый тип геометрии имеет свою собственную группу $C_{\alpha}^{\alpha'}$* . В общем случае может быть установлено:

1. В *евклидовой геометрии* допустимы только такие $C_{\alpha}^{\alpha'}$, которые могут любым способом *переносить* или *вращать* точки пространства без изменения формы фигур.

2. В *дифференциальной геометрии* допустимы только такие $C_{\alpha}^{\alpha'}$, которые могут *изгибать пространственные формы*, однако без разрыва и растяжения.

3. В *топологии* допустимы только такие $C_{\alpha}^{\alpha'}$, которые могут *растягивать и изгибать пространство-структуру* без разрывания его.

4. Однако *оказывается, что преобразования $C_{\alpha}^{\alpha'}$, встречающиеся в электротехнике, являются еще более общими, чем любые используемые в этих геометриях, поскольку они могут разрывать на части представленное пространство-структуру и преобразовывать его в другие типы пространств-структур*.

III. Хотя пространства движутся, изгибаются, растягиваются или разрываются, определенные свойства, связанные с ними, остаются *«инвариантными»*, не зависящими от производимых изменений. Например, при изгибании *поверхности* угол между двумя линиями, нанесенными на поверхность, остается инвариантом, а при растягивании поверхности свойство двух линий пересекать друг друга является инвариантным свойством. Тензорный анализ является инструментом для открытия таких инвариантов.

8. ПРЕДСТАВЛЕНИЕ МОЩНОСТИ

Когда контравариантный вектор i^{α} и ковариантный вектор e_{α} заданы уравнениями (8.2) и (8.4), их произведение (линейная форма)

$$e_{\alpha} i^{\alpha} = (0,8) \cdot (1,76) + (0,25) \cdot (4,78) = 2,61 \quad (8.9)$$

является скаляром, тензором нулевой валентности, представляющим мгновенную мощность, поступающую в катушки. Это число, скаляр, представлено на рис. 8.4 отношением двух длин

$$P = e_\alpha i^\alpha = OK/OP = 2,61, \quad (8.10)$$

причем отрезки можно измерять в любых единицах, поскольку оба лежат на одном и том же направлении. OP является линией, отсекаемой плоскостью e_α от вектора i^α . Таким образом, *произведение ковариантного вектора e_α на контравариантный вектор i^α является скаляром, представленным отношением длины i^α и частью i^α , отсекаемой плоскостью e_α . Обе длины измеряются произвольными единицами.*

Когда вводится новая система координат, это отношение остается неизменным (это очевидно, если выбрана первая точка зрения на C). Таким образом, *линейная форма $e_\alpha i^\alpha$ является инвариантом относительно преобразования системы координат.*

9. ПРОСТРАНСТВА И КОНФИГУРАЦИИ, НАКЛАДЫВАЕМЫЕ НА НИХ

I. Если дано множество из n катушек, а также токи, протекающие в катушках, поведение системы можно представить движением точки (и других геометрических конфигураций) в n -мерном пространстве. (Представленная геометрическая картина является лишь первым приближением к точной картине, которая будет дана в последующем изложении.)

Геометрическое представление физического явления, имеющего место в катушках, можно сгруппировать в два главных направления.

1. *Если даны n отдельных катушек, взаимосвязанных произвольно, образуя k контуров и $n-k$ узловых пар, но не испытывающих воздействия в виде токов и напряжений, то геометрическая ситуация представляется установлением факта: дано n -мерное пространство.*

С этим пространством связываются определенные свойства, называемые его «структурой», которые ассоциируются с конструктивными константами $r_{\alpha\beta}$, $l_{\alpha\beta}$, $C^{\alpha\beta}$ и др. катушек и определяются ими. Соотношение между конструктивными константами и соответствующими «структурами» в n -мерном пространстве рассматривается в гл. 18.

2. *Если в катушках существуют токи и напряжения, т. е. катушки возбуждены, то мгновенные значения токов и напряжений представляются геометрической конфигурацией, например точкой или $(n-1)$ -мерной плоскостью, наложенной (или вложенной) в данное n -мерное пространство. С течением времени, по мере изменения мгновенных значений электрических величин представляющие их конфигурации движутся, описывая определенные кривые, называемые «путями».*

II. Следует подчеркнуть резкое различие, с одной стороны, между невозбужденной системой катушек и возбужденной, содержащей электрические конфигурации; с другой стороны, между пустым пространством и пространством, которое содержит геометрические конфигурации. В обычных электротехнических проблемах нетрудно отличить конструкционные константы материальных конфигураций от электрических величин, наблюдаемых в них. Однако по мере того как электрические явления, например в электронике, становятся все более и более неуловимыми, возникают трудности, достигающие кульминации в теории относительности, где различие между материальными конструкциями и накладываемыми электрическими величинами само собой исчезает и электрические явления представляются не как наложенными на пространство, а как «конструктивные константы» или «структура» самого пространства. Если удалить электрические величины (заряды, напряженности поля, плотность потоков и т. д.), то и само пространство исчезает.

10. ОРТОГОНАЛЬНЫЕ ПОДПРОСТРАНСТВА

Плоскость, лежащая в действительном пространстве, называется двухмерным «подпространством» трехмерного пространства. Если в пространстве выбрана система трех осей, две из которых лежат в плоскости, а третья перпендикулярна ей (рис. 8.6), то любая точка, движущаяся в плоскости, не имеет компоненты по третьей оси.

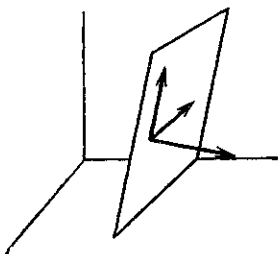


Рис. 8.6. Двухмерное подпространство в трехмерном пространстве.

1. Если сеть из n катушек рассматривается как контурная сеть с k контурами (т. е. с k переменными токами), то движение точки ограничено только k -мерным подпространством полного n -мерного пространства сети. Компоненты, представляющие движение точки по k координатным осям, представляют k контурных токов. Компоненты, представляющие движение точки по остальным

$(n-k)$ координатным осям, равны нулю, что соответствует равенству нулю токов нагрузки, снимаемых с этих узловых пар.

2. Точно так же, если та же сеть из n катушек рассматривается как узловая сеть, имеющая $n-k$ узловых пар (где токи и напряжения заданы только на узловых парах), то движение представляющей точки ограничено $(n-k)$ -мерным подпространством того же n -мерного пространства, но точки которого не включены в предыдущее k -мерное пространство. Это означает, что теперь движущаяся точка не имеет отличных от нуля компонент по

прежним k осям. Можно показать, что эти два взаимоисключающих подпространства ортогональны относительно друг друга.

Точки k и $(n-k)$ -мерных подпространств полностью определяют все точки n -мерного пространства сети.

3. Наконец, если сеть из n катушек рассматривается как ортогональная сеть, имеющая как контурные, так и узловы токи, то точка описывает траекторию в n -мерном пространстве сети и имеет проекции на все n координатных осей.

Можно считать, что сеть из n катушек представляет гипотетическое n -мерное пространство независимо от числа контуров и узловых пар в сети. В зависимости от способа соединения катушек n -мерное пространство разделяется на два независимых ортогональных подпространства с взаимоисключающими друг друга точками, так что движущаяся точка может ограничивать свое движение одним из двух подпространств в зависимости от способа возбуждения сети. Следовательно, токи, протекающие в контурах, и токи, протекающие через узловые пары, ортогональны друг другу.

11. ОГРАНИЧЕННОСТЬ ДАННОГО ГЕОМЕТРИЧЕСКОГО ПРЕДСТАВЛЕНИЯ

I. В геометрической интерпретации электрических явлений, возникающих в сетях, представляющее пространство, в котором движется точка, не подразумевает существования каких-либо границ. В начале координат этого пространства можно допустить существование бесконечного числа координат систем, *некоторые из которых соответствуют:*

1) определенной n -катушечной сети, выделенной из всех возможных n -катушечных сетей;

2) определенному множеству n осей, принятому в этой n -катушечной сети;

3) определенной линейной функции от n токов, протекающих в предполагаемых n осях данной сети (скажем, «намагничиваения» или «нагрузки», соответствующих n выбранным частным токам).

II. Однако представление об n -мерном пространстве, простирающемся во всех направлениях до бесконечности, допускающем бесконечное разнообразие координатных систем, связанных произвольным выбором линейного преобразования, не соответствует представлению об n -катушечной сети, поскольку для n -катушечной сети не все линейные преобразования возможны. Существует ограниченное (хотя и большое) число способов соединения n катушек. Существует ограниченное число способов, которыми могут быть выбраны n осей, и ограниченное число способов, которыми произвольные линейные отношения (гипотетические токи) могут заменять действительные выбранные токи.

Другими словами, в представленном n -мерном пространстве все возможные значения токов, которые возможны в любой n -катушечной сети, всегда могут быть полностью показаны, но не наоборот. В выбранном пространстве точка может следовать по траекториям, которые нельзя воспроизвести действительными или гипотетическими токами любой n -катушечной сети, а следовательно, принятое пространство неточно воспроизводит все возможные сети. Не существует взаимнооднозначного соответствия между введенным пространством и сетью, которое необходимо для дальнейшего использования геометрического представления. Например, в представляющем пространство нет ничего, что оправдывало бы существование двойственных понятий «контур» и «узловая пара», которые играют основную роль в анализе сетей.

III. Чтобы найти геометрическое представление, в котором физические понятия «контур», «узловая пара» и другие находят точный геометрический эквивалент, характер представляющего пространства, рассматриваемого до сих пор, следует ограничить введением границ, удалением частей, добавлением областей проектирования, пока представляющее пространство не приобретет ту же форму, что и сама сеть.

IV. Исследование n -мерных пространств, не ограниченных во всех направлениях, является областью «дифференциальной геометрии»; исследование n -мерных пространств, ограниченных в разных направлениях пространствами меньшей размерности (таких, как куб или икосаэдр), является областью «топологии» («Analysis Situs») ¹⁾, где такие ограниченные пространства известны как «ячейки» разных размерностей.

Тензорная методология (т. е. использование «систем координат», «преобразований», «инварианта» и «группы») используется в исследованиях по дифференциальной геометрии уже более 50 лет, на эту тему имеется обширная литература; исследование в топологии с систематическим использованием тензорной символики начали использовать год-два назад, но до сих пор литературы по этому вопросу нет, если не считать нескольких рефератов и обсуждений.

12. ВЗАИМОСВЯЗАННЫЕ ПРОСТРАНСТВА

I. Катушка может быть геометрически представлена одномерным пространством (линией), которое ограничено двумя точками, двумя узлами катушки. Узловая точка двух катушек также может быть представлена как нульмерное пространство.

¹⁾ А именно алгебраической (комбинаторной) топологии в отличие от гомотопико-множественной топологии, изучающей непрерывные свойства геометрических систем, дифференциальное и интегральное исчисление, теорию функций и т. д. (Прим. пер.).

Следовательно, сеть из n катушек и k узлов можно представить геометрически как совокупность n одномерных пространств и k нульмерных пространств, где нульмерные пространства образуют границы одномерных пространств. С геометрической точки зрения безымпедансная ветвь должна считаться катушкой с нулевым импедансом. (Следовательно, ее нужно представлять одномерным пространством (1-ячейкой), а два ее конца — нульмерными пространствами (0-ячейки), что совершенно не соответствует тому, что мы излагали выше. В нашем описании безымпедансная ветвь образует один узел.)

Когда вращающиеся машины со щетками и контактными кольцами связываются в сеть, но полная система еще остается невозбужденной, представляющее пространство, в добавление к нуль- и одномерным пространствам, пополняется двухмерными и вообще k -мерными пространствами.

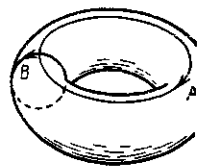


Рис. 8.7. Тор, или «бублик», с двумя инвариантными замкнутыми кривыми.

II. Классификация и изучение свойств этих сложных геометрических фигур и установление их общих свойств слишком сложны, в помощь им требуется дополнительный геометрический аппарат. Он состоит в наложении на такие совокупности пространств геометрических конфигураций различной размерности. Способ, с помощью которого эти дополнительные сетки можно изображать на данных ячейках, служит исходной точкой для их дальнейшего изучения и классификации. Эти дополнительные геометрические конфигурации, накладываемые на данные «ячейки» для изучения их свойств, называются «цепями».

Например, тор (или «бублик», рис. 8.7) отличается от сферы тем, что на нем можно изобразить две (и только две) замкнутые кривые: одна параллельна отверстию (A); другая перпендикулярна отверстию (B).

Характерным для этих замкнутых кривых является то, что они не могут исчезнуть с поверхности тора при деформациях, растяжениях, изгибании и перемещении (без удаления их с поверхности тора).

С другой стороны, любая замкнутая кривая на сфере исчезает при стягивании сферы в точку.

Таким образом, различие между сферой и тором устанавливается с помощью конфигураций («цепей»), накладываемых на них. Из-за наличия этих двух инвариантных замкнутых кривых тор называется «поверхностью 1-го рода», в то время как сфера из-за их отсутствия называется «поверхностью 0-го рода».

III. Заметим теперь, что наложение «цепей» на «ячейки» совершенно аналогично наложению «электромагнитных величин» (токов, напряжений, потоков, МДС и т. п.) на «сеть». Изучать

сети для инженерных приложений можно только наложением электромагнитных величин.

Этот процесс классификации сетей или ячеек с помощью *накладываемых* цепей или электромагнитных величин аналогичен изучению задач *статике* как частного случая задач *динамики*.

Процесс наложения цепей на ячейки и электромагнитных величин на сети является плодотворным аналитическим «инструментом», так как этот процесс наложения цепей или электромагнитных величин позволяет обнаружить «группу» (см. гл II).

13. АНАЛОГИ СЕТЕВЫХ ПОНЯТИЙ В ТОПОЛОГИИ

I. Топологические эквиваленты некоторых сетевых понятий, основанные на номенклатуре Веблена, даны в следующей таблице:

| | |
|--------------|--------------------------|
| Сеть | Одномерный комплекс |
| Подсеть | Подкомплекс |
| Катушка | 1-ячейка |
| Узел | 0-ячейка |
| Контур | 1-цепь |
| Узловая пара | Ограничивающая 0-цепь |

Сеть также известна как «линейный граф» топологии Веблена. Когда указано *направление* для выражений левой части, то прилагательное «ориентированный» добавляется к выражениям правой части таблицы, например, «ориентированная 1-цепь».

Другими соответствующими понятиями являются

| | |
|--------------------|--------------------------|
| Чисто узловая сеть | Дерево |
| Число контуров | Цикломатическое число |

II. Наложение электромагнитных величин на сеть топологически эквивалентно наложению «цепей» на «ячейки». Некоторые аналоги сетевых понятий в топологии даны в номенклатуре Такера в следующей таблице:

| | |
|------------------------------------|-----------------------------|
| Контурный ток i^{α} | 1-цепь |
| Ток, входящий в узел | Граница 1-цепи |
| Абсолютный потенциал узла | Двойственная 0-цепь |
| Напряжение на катушке e_{α} | Граница двойственной 0-цепи |
| Мощность $e_{\alpha} i^{\alpha}$ | Индекс пересечения |

Топологическая номенклатура в тензорном способе описания до сих пор еще не установлена.

14. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ПРОСТРАНСТВ-СТРУКТУР

I. Различные типы преобразований $i = Ci'$, используемые в книге, можно из физических соображений грубо разбить на два типа преобразований:

1) действительных токов в действительные токи; 2) действительных токов в гипотетические токи.

II. Первые преобразования, использующие только действительные физически существующие токи, можно еще раз разделить на два типа: 1) превращение токов, протекающих в одной системе ветвей, в токи, протекающие в другой системе ветвей, при сохранении самой сети; 2) изменение токов при переходе от одного способа соединения ветвей к другому, т. е. при изменении самой сети.

Первый тип преобразования можно рассматривать как обычное «преобразование координат». Однако второй тип преобразования включает в себя новое содержание, поскольку разрушаются соединения катушек и одна сеть заменяется другой.

III. С геометрической точки зрения второй тип понятия «преобразование» S_{α}^{α} , используемый в этой книге для изменения взаимосоединений в сетях, может быть выражен в следующей форме.

Дано множество из n пространств-компонент, взаимосвязанных различным образом и образующих, следовательно, огромное число новых пространств (или пространств-структур). Каждое из этих пространств-структур имеет свое множество координатных систем. Если на каждое из них наложена некоторая геометрическая конфигурация (скажем, множество траекторий или «путей»), то можно установить систему уравнений (типа $e = z \cdot i$) для каждого пространства-структуры, в котором расположена эта конфигурация.

Рассматриваемая проблема состоит в установлении группы матриц преобразования S_{α}^{α} , которые преобразуют эти уравнения конфигураций, различные в разных пространствах-структурах, одно в другое. Другими словами, проблема состоит в на-

хождении уравнения $e' = z' \cdot i'$ некоторой конфигурации, если уравнение конфигурации $e = z \cdot i$ известно для одного пространства-структуры. Или, короче, *проблема состоит в установлении соответствия между конфигурациями, которые наложены на различные пространства-структуры.*

IV. С физической точки зрения эту же проблему можно сформулировать следующим образом.

Дано множество различных сетей, каждая из которых имеет различное число подсетей, контуров и узловых пар (но то же число тех же самых катушек). Если к ним приложены токи и напряжения, то поведение каждой сети описывается системой уравнений (скажем, $e = z \cdot i$). *Проблема состоит в установлении группы преобразований $C_{\alpha}^{\alpha'}$, с помощью которой можно найти уравнение каждой сети, если для одной сети оно уже установлено.*

Система уравнений $i^{\alpha} = C_{\alpha}^{\alpha'} \cdot i^{\alpha'}$ изменяет не только систему координат α на α' , но и пространство-структуру, в котором располагаются системы координат, поскольку α и α' лежат в двух различных пространствах-структурах. Или уравнение $i^{\alpha} = C_{\alpha}^{\alpha'} \cdot i^{\alpha'}$ преобразует часть одного пространства-структуры в часть другого пространства-структуры (а именно те точки, которые лежат на конфигурации).

V. Подводя итоги, отметим, что одной из задач инженера является установление и численный анализ уравнений движения разнообразных динамических систем в различных условиях. Обычный метод атаки состоит в анализе каждой возникающей задачи и в установлении уравнений движения из фундаментальных физических принципов. В этом случае можно изменить оси одной и той же системы, но нельзя *заменять саму систему другой, так как обычный метод анализа не дает возможности переходить из одного пространства-структуры в другое с другим множеством координатных систем.*

Основная цель книги и состоит в предложении новой процедуры, которая включает одновременный анализ разнообразия физически подобных, но тем не менее различных систем. Здесь предлагается делать первый шаг при анализе любой физической системы в направлении установления матрицы преобразования $C_{\alpha}^{\alpha'}$, которая определяет «соответствие» между уравнением движения исследуемой системы и уравнением движения другой системы (примитивной), которое уже известно. Как только $C_{\alpha}^{\alpha'}$ установлена, оставшаяся работа состоит из рутинных вычислений. После того как найдена «группа» $C_{\alpha}^{\alpha'}$, анализ большого разнообразия физических систем становится рутинной процедурой.

VI. Следует напомнить, что в большинстве инженерных задач понятие «преобразование» $i^{\alpha} = C_{\alpha}^{\alpha'} \cdot i^{\alpha'}$ включает «преобразование путей из одного пространства-структуры в другое», а не

просто «преобразование системы координат» в том же пространстве.

Соответствие между различными типами сетей (пространств-структур) устанавливается признанием того, что для всех чисто контурных сетей существует одна и только одна система координат, в которой уравнения движения различных сетей идентичны. Эта система координат состоит из отдельных катушек сети.

Таким образом, если в двух n -катушечных, n -контурных сетях (имеющих различное число подсетей) заданы n переменных в n катушках, то n уравнений движения идентичны. Они не будут идентичными, если в одной из сетей выбрано другое множество ветвей.

VII. В главе о синтезе будет показано, что *можно установить преобразование между «путями», наложенными на пространства-структуры, в которых каждая структура содержит различное число и разные типы составляющих пространств* при условии, что на пути наложено определенное ограничение (скажем, все сети питаются постоянным током).

КОМПАУНД-ТЕНЗОРЫ

1. КОМПАУНД- n -МАТРИЦЫ, ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ОБЪЕКТЫ И ТЕНЗОРЫ

I. Наиболее простое действие с системой n линейных уравнений с n переменными, например $\mathbf{e} = \mathbf{z} \cdot \mathbf{i}$, состоит в том, чтобы трактовать все компоненты \mathbf{e} , \mathbf{i} , \mathbf{z} как одно целое и предположить, что *все* компоненты \mathbf{e} и \mathbf{z} известны, а *все* компоненты \mathbf{i} неизвестны. Однако в большинстве проблем не все компоненты геометрических объектов одинаково важны. Например, часть компонент \mathbf{e} и часть компонент \mathbf{i} могут быть известны, а остальные неизвестны; или некоторые компоненты \mathbf{e} или \mathbf{i} могут отсутствовать, или знание их значений не нужно.

Чтобы учитывать отдельно компоненты геометрического объекта, имеющие различную значимость, *одно инвариантное уравнение, такое как $\mathbf{e} = \mathbf{z} \cdot \mathbf{i}$, заменяется несколькими инвариантными уравнениями, так что каждое частное инвариантное уравнение представляет несколько обыкновенных уравнений, имеющих одинаковую общую значимость*. Конечно, не только линейные, но и всякие другие типы инвариантных уравнений можно заменить несколькими инвариантными уравнениями.

Сначала будет показано, как геометрические объекты можно расчленить на несколько частей; после этого *инвариантные уравнения* будут расчленены на несколько уравнений.

II. Геометрический объект, у которого каждая компонента сама есть геометрический объект той же валентности, а не обычная величина, будет называться «компаунд-геометрическим объектом».

Можно выделить несколько частных случаев. Исходная n -мерная величина, которая расчленяется, может быть тензором или геометрическим объектом, или n -матрицей. Компоненты каждой части также могут быть тензорами, геометрическими объектами или n -матрицами в зависимости от имеющихся тензоров преобразования. Например, каждая компонента тензора валентности 3 может быть 3-матрицей.

Чтобы избежать слишком длинных рассуждений, в этой главе, если противное не оговорено, будем предполагать, что все основные буквы представляют тензоры. Однако во многих слу-

чаях они могут рассматриваться как n -матрицы, если мы игнорируем систему координат, в которой они даны, поскольку при помощи n -матриц многие результаты получаются в более простой форме, чем это показано.

2. СПОСОБ РАЗДЕЛЕНИЯ ТЕНЗОРОВ

I. Вектор A можно разделить на сумму двух или более векторов. Например, вектор

$$A = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|} \hline a & b & c & d & e & f & g & h & i & j & k & l & m & n \\ \hline 2 & 3 & 0 & -8 & 9 & 5 & -1 & 4 & 0 & -3 & 6 & 9 & 7 & 5 \\ \hline \end{array} \quad (9.1)$$

можно разделить так: $A = B + C + D$, где

$$B = \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline a & b & c & d & e \\ \hline 2 & 3 & 0 & -8 & 9 \\ \hline \end{array}, \quad C = \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline f & g & h & i & j & k \\ \hline 5 & -1 & 4 & 0 & -3 & 6 \\ \hline \end{array}, \quad D = \begin{array}{|c|c|c|} \hline l & m & n \\ \hline 9 & 7 & 5 \\ \hline \end{array}, \quad (9.2)$$

так что вектор A можно выразить как компаунд-вектор

$$A = \begin{array}{|c|c|c|} \hline p & q & r \\ \hline B & C & D \\ \hline \end{array}, \quad (9.3)$$

в котором каждая компонента является вектором, а не обычным числом.

II. Для компаунд-тензоров необходимо ввести новый тип фиксированных индексов, каждый из которых представляет не одну ось, а несколько осей одновременно. Например, индекс p является индексом отдельных осей a, b, c, d ; индекс q — осей f, g, h, i, j, k и индекс r — осей l, m, n . Индексы, представляющие несколько осей, будем называть «компаунд-индексами», обычные индексы назовем «отдельными индексами». Как фиксированные, так и переменные индексы могут быть отдельными или компаунд-индексами, т. е. каждый фиксированный или переменный компаунд-индекс может представлять несколько фиксированных или переменных отдельных индексов.

Подобно тому как отдельные индексы компонент тензоров можно преобразовать при помощи тензора преобразования C_1 , составные (компаунд) индексы можно преобразовать при помощи другого тензора преобразования C_2 . В гл. 20 будут приведены примеры, в которых показано преобразование отдельных и компаунд-индексов при помощи различных тензоров преобразования.

III. Тензор валентности два (2-тензор) можно разделить на сумму нескольких 2-тензоров несколькими различными способами в зависимости от решаемой задачи. Его можно разделить

одной или более *горизонтальными* (или *вертикальными*) линиями как $A = A_1 + A_2$, где

| | a | b | c | d | e | f | g |
|-----|---|----|----|---|----|----|---|
| a | 2 | 0 | 0 | 4 | 0 | 3 | 0 |
| b | 0 | 6 | 0 | 9 | 0 | -8 | 0 |
| c | 1 | 0 | -1 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| A=d | 0 | 5 | 0 | 5 | 0 | 2 | 0 |
| e | 1 | 0 | 0 | 0 | -3 | 0 | 9 |
| f | 0 | 0 | 5 | 0 | 0 | 7 | 0 |
| g | 7 | -6 | 0 | 0 | 8 | 0 | 4 |

| | a | b | c | d | e | f | g |
|-------------------|---|---|---|---|---|----|---|
| A ₁ =a | 2 | 0 | 0 | 4 | 0 | 3 | 0 |
| b | 0 | 6 | 0 | 9 | 0 | -8 | 0 |

| | a | b | c | d | e | f | g |
|-------------------|---|----|----|---|----|---|---|
| c | 1 | 0 | -1 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| d | 0 | 5 | 0 | 5 | 0 | 2 | 0 |
| A ₂ =e | 1 | 0 | 0 | 0 | -3 | 0 | 9 |
| f | 0 | 0 | 5 | 0 | 0 | 7 | 0 |
| g | 7 | -6 | 0 | 0 | 8 | 0 | 4 |

$$A = \begin{matrix} p \\ r \\ q \end{matrix} \begin{matrix} A_1 \\ A_2 \end{matrix} \quad (9.4)$$

Здесь исходный тензор A выражен как *однострочный* компонд-2-тензор, в котором каждая компонента есть 2-тензор.

2-тензор A можно разделить и *горизонтальной*, и *вертикальной* линиями на четыре или более 2-тензоров как $A = A_1 + A_2 + A_3 + A_4$, где

| | a | b | c | d | e | f | g |
|-----|---|----|----|---|----|----|---|
| a | 2 | 0 | 0 | 4 | 0 | 3 | 0 |
| b | 0 | 6 | 0 | 9 | 0 | -8 | 0 |
| c | 1 | 0 | -1 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| A=d | 0 | 5 | 0 | 5 | 0 | 2 | 0 |
| e | 1 | 0 | 0 | 0 | -3 | 0 | 9 |
| f | 0 | 0 | 5 | 0 | 0 | 7 | 0 |
| g | 7 | -6 | 0 | 0 | 8 | 0 | 4 |

| | a | b |
|-------------------|---|---|
| A ₁ =a | 2 | 0 |
| b | 0 | 6 |
| c | 1 | 0 |

| | c | d | e | f | g |
|-------------------|----|---|---|----|---|
| A ₂ =a | 0 | 4 | 0 | 3 | 0 |
| b | 0 | 9 | 0 | -8 | 0 |
| c | -1 | 0 | 0 | 0 | 0 |

| | a | b |
|-------------------|---|----|
| A ₃ =d | 0 | 5 |
| e | 1 | 0 |
| f | 0 | 0 |
| g | 7 | -6 |

| | c | d | e | f | g |
|-------------------|---|---|----|---|---|
| A ₄ =d | 0 | 5 | 0 | 2 | 0 |
| e | 0 | 0 | -3 | 0 | 9 |
| f | 5 | 0 | 0 | 7 | 0 |
| g | 0 | 0 | 8 | 0 | 4 |

$$(9.5)$$

Так что A выражается как

$$A = \begin{matrix} & & r & s \\ p & \begin{array}{|c|c|} \hline A_1 & A_2 \\ \hline \end{array} \\ q & \begin{array}{|c|c|} \hline A_3 & A_4 \\ \hline \end{array} \end{matrix}, \quad (9.6)$$

т. е. исходный 2-тензор представлен в виде *квадратного* компанд-2-тензора, в котором каждая компонента сама есть 2-тензор, а не скаляр.

В следующем примере 2-тензор разделен на 16 меньших 2-тензоров:

$$z = \begin{matrix} & & t & u & v & w \\ p & \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline & & & \\ \hline & & & \\ \hline & & & \\ \hline \end{array} \\ q & \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline & & & \\ \hline & & & \\ \hline & & & \\ \hline \end{array} \\ r & \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline & & & \\ \hline & & & \\ \hline & & & \\ \hline \end{array} \\ s & \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline & & & \\ \hline & & & \\ \hline & & & \\ \hline \end{array} \end{matrix}, \quad (9.7)$$

$$\begin{matrix} & & t & u & v & w \\ p & \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline Z_1 & Z_2 & Z_3 & Z_4 \\ \hline \end{array} \\ q & \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline Z_5 & Z_6 & Z_7 & Z_8 \\ \hline \end{array} \\ r & \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline Z_9 & Z_{10} & Z_{11} & Z_{12} \\ \hline \end{array} \\ s & \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline Z_{13} & Z_{14} & Z_{15} & Z_{16} \\ \hline \end{array} \end{matrix}.$$

IV. Аналогично тензор валентности 3 (3-тензор) можно представить как 3-тензор, в котором каждая компонента есть 3-тензор, если разделить его горизонтальными или вертикальными плоскостями или и теми и другими одновременно (рис. 9.1).

V. Вообще говоря, *компоненты имеют ту же валентность*, что и исходный тензор, поскольку 2-тензор можно разделить только на 2-тензоры (например, на однострочный 2-тензор), 3-тензор можно разделить только на 3-тензоры и т. д. Способ разделения создает *компаунд-тензор*, который имеет ту же валентность, что и исходный тензор.

В гл. 21 будет показано, что компаунд-тензоры, рассмотренные здесь (в которых исходный тензор, результирующий тензор и составляющие тензоры имеют одну и ту же валентность), являются частными случаями «мультитензоров» с более сложной структурой.

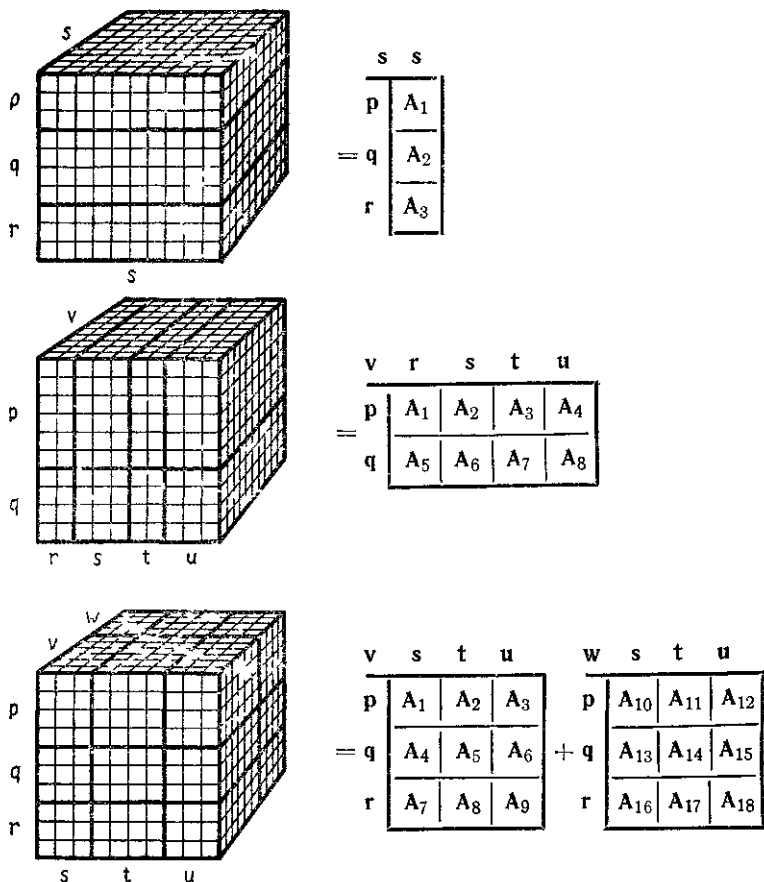


Рис. 9.1. Различные типы разделения тензора валентности три.

3. РАЗЛИЧИЕ МЕЖДУ ТЕНЗОРАМИ, ГЕОМЕТРИЧЕСКИМИ ОБЪЕКТАМИ И n -МАТРИЦАМИ

I. При расчленении тензора на несколько меньших тензоров часто требуется следить за тем, чтобы составные части были тензорами, геометрическими объектами или n -матрицами.

Необходимо напомнить, что с n -матрицей не связана никакая система координат. Однако фиксированные индексы всегда должны быть у каждого геометрического объекта или тензора. Кроме того, необходимо повторить, что геометрический объект, вообще говоря, имеет другую, чем тензор, формулу преобразования, в то время как n -матрица не имеет никакой формулы преобразования.

Если каждая из частей, полученных в результате расчленения, является геометрическим объектом или тензором, то можно менять каждую частную группу координатных осей без ущерба для остальных групп осей. Примеры таких частных изменений осей будут приведены в гл. 20.

II. Например, пусть компоненты компаунд-2-тензора, рассматриваемого в некоторой системе координат, есть:

$$z = \begin{array}{c|cccccc} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ \hline 1 & A & B & E & F & S & T & U \\ \hline 2 & C & D & G & H & V & Z & W \\ \hline 3 & E & G & P & Q & I & J & K \\ \hline z=4 & F & H & R & S & L & M & N \\ \hline 5 & I & L & D & G & J & K & L \\ \hline 6 & J & M & E & H & M & U & P \\ \hline 7 & K & N & F & I & Q & R & S \end{array} \quad (9.8)$$

Так как некоторые из меньших компонент идентичны, возникает вопрос, можем ли мы представлять эти компоненты с помощью одинаковых символов или нет, например:

$$z = \begin{array}{c|cc} A & B & C \\ \hline B_t & E & G_t \\ \hline G & H & J \end{array} \quad (9.9) \quad \text{или} \quad z = \begin{array}{c|cc} A & B & C \\ \hline D & E & F \\ \hline G & H & J \end{array} \quad (9.10)$$

III. Если каждая компонента является тензором или геометрическим объектом (т. е. если предполагается изменить их оси координат), то две компоненты

$$G = \begin{array}{c|cc} & 1 & 2 \\ \hline 5 & I & L \\ \hline 6 & J & M \\ \hline 7 & K & N \end{array}, \quad F = \begin{array}{c|cc} & 5 & 6 & 7 \\ \hline 3 & I & J & K \\ \hline 4 & L & M & N \end{array} \quad (9.11)$$

нельзя представить одной и той же буквой **G**, так как они выражены в различных системах координат несмотря на то, что их компоненты идентичны. Другими словами, два тензора **G** и **F** случайно в этих частных системах координат имеют одинаковые компоненты. Однако в общем случае в других системах координат они имеют разные компоненты.

Но если **G** и **F** являются 2-матрицами и у них нет координатных осей, то **F** можно записать как **G_t**.

IV. С другой стороны, рассматривая **B** и **D** как

$$\mathbf{B} = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} 3 & 4 \end{array} \\ \begin{array}{cc} 1 & \begin{array}{|c|c|} \hline E & F \\ \hline \end{array} \\ 2 & \begin{array}{|c|c|} \hline G & H \\ \hline \end{array} \end{array} \end{array}, \quad \mathbf{D} = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} 1 & 2 \end{array} \\ \begin{array}{cc} 3 & \begin{array}{|c|c|} \hline E & G \\ \hline \end{array} \\ 4 & \begin{array}{|c|c|} \hline F & H \\ \hline \end{array} \end{array} \end{array},$$

видим, что их можно представить одной и той же основной буквой **B** и **B_t**, если они *тензоры*, так как они имеют одинаковые компоненты и выражены в одной и той же системе координат. В любой другой системе координат они все равно имеют одинаковые компоненты.

Однако если **B** — тензор, а **D** — геометрический объект, т. е. если **B** и **D** имеют различные формулы преобразования, то их нельзя представить одним и тем же основным символом, так как в некоторых других системах координат они могут иметь различные компоненты.

Следовательно,

1) две *n*-матрицы идентичны (и обозначаются одной основной буквой), если они имеют одинаковые компоненты;

2) два тензора идентичны, если они имеют одинаковые компоненты в одинаковых координатных осях;

3) два геометрических объекта идентичны, если они имеют одинаковые компоненты, одинаковые координатные оси и одинаковые формулы преобразования.

Чтобы сделать формулы этой главы наиболее общими, предположим, что каждая компонента компаунд-тензора имеет свою основную букву (буквы **z₁**, **z₂**, **z₃** будем рассматривать как различные основные буквы).

4. ДЕЙСТВИЯ С КОМПАУНД-ТЕНЗОРАМИ

I. *Компаунд-тензоры можно складывать, перемножать, дифференцировать и так далее подобно обычным тензорам, но во избежание путаницы следует проявлять дополнительную осторожность.*

Сумма двух компаунд-векторов есть компаунд-вектор:

$$X = \begin{array}{c} p \quad q \quad r \\ \boxed{A_1 \mid A_2 \mid A_3} \end{array}, \quad Y = \begin{array}{c} p \quad q \quad r \\ \boxed{B_1 \mid B_2 \mid B_3} \end{array}, \quad (9.12)$$

$$X + Y = Z = \begin{array}{c} p \quad q \quad r \\ \boxed{A_1 + B_1 \mid A_2 + B_2 \mid A_3 + B_3} \end{array}$$

Векторы, которые складываются как $A_1 + B_1$, должны иметь одинаковое число компонент и одинаковые отдельные индексы.

Транспонирование компаунд-2-тензора, в котором каждая компонента также 2-тензор, производится, как обычно, заменой столбцов на строки. Кроме того, транспонируется каждая компонента, например:

$$z = \begin{array}{c} \boxed{\begin{array}{c|c|c} A & B & C \\ \hline D & E & F \\ \hline G & H & J \end{array}} \end{array}, \quad z_t = \begin{array}{c} \boxed{\begin{array}{c|c|c} A_t & D_t & G_t \\ \hline B_t & E_t & H_t \\ \hline C_t & F_t & J_t \end{array}} \end{array}, \quad (9.13)$$

II. Два компаунд-тензора перемножаются так, как будто каждая компонента есть скаляр. Однако порядок компонент тензоров в произведении не может быть нарушен.

Например, произведение компаунд-2-тензора и компаунд-вектора дает компаунд-вектор

$$\begin{array}{c} p \quad q \quad r \quad s \\ \boxed{\begin{array}{c|c|c|c} Z_1 & Z_2 & Z_3 & Z_4 \\ \hline Z_5 & Z_6 & Z_7 & Z_8 \\ \hline Z_9 & Z_{10} & Z_{11} & Z_{12} \\ \hline Z_{13} & Z_{14} & Z_{15} & Z_{16} \end{array}} \end{array} \cdot \begin{array}{c} p \\ q \\ r \\ s \\ \downarrow \\ \boxed{\begin{array}{c} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \\ i_4 \end{array}} \end{array} = \begin{array}{c} p \\ q \\ r \\ s \\ \downarrow \\ \boxed{\begin{array}{c} Z_1 \cdot i_1 + Z_2 \cdot i_2 + Z_3 \cdot i_3 + Z_4 \cdot i_4 \\ \hline Z_5 \cdot i_1 + Z_6 \cdot i_2 + Z_7 \cdot i_3 + Z_8 \cdot i_4 \\ \hline Z_9 \cdot i_1 + Z_{10} \cdot i_2 + Z_{11} \cdot i_3 + Z_{12} \cdot i_4 \\ \hline Z_{13} \cdot i_1 + Z_{14} \cdot i_2 + Z_{15} \cdot i_3 + Z_{16} \cdot i_4 \end{array}} \end{array} \quad (9.14)$$

Перемножения и сложения, указанные в каждой компоненте, должны быть еще выполнены.

Произведение двух компаунд-2-тензоров является компаунд-2-тензором

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{c}
 \begin{array}{ccc}
 & p & q & r \\
 s & \boxed{A} & \boxed{B} & \boxed{C} \\
 X = t & \boxed{D} & \boxed{E} & \boxed{F} \\
 u & \boxed{G} & \boxed{H} & \boxed{J}
 \end{array}
 , \\
 \xrightarrow{\quad}
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{c}
 \begin{array}{ccc}
 & v & w & z \\
 p & \boxed{K} & \boxed{L} & \boxed{M} \\
 Y = q & \boxed{N} & \boxed{P} & \boxed{Q} \\
 r & \boxed{R} & \boxed{S} & \boxed{T}
 \end{array}
 , \\
 \downarrow
 \end{array}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{ccc}
 & v & w & z \\
 s & \boxed{A \cdot K + B \cdot N + C \cdot R} & \boxed{A \cdot L + B \cdot P + C \cdot S} & \boxed{A \cdot M + B \cdot Q + C \cdot T} \\
 X \cdot Y = t & \boxed{D \cdot K + E \cdot N + F \cdot R} & \boxed{D \cdot L + E \cdot P + F \cdot S} & \boxed{D \cdot M + C \cdot Q + F \cdot T} \\
 u & \boxed{G \cdot K + H \cdot N + J \cdot R} & \boxed{G \cdot L + H \cdot P + J \cdot S} & \boxed{G \cdot M + H \cdot Q + J \cdot T}
 \end{array}
 \end{array}
 \quad (9.15)$$

В компонентах произведения, скажем $A \cdot K$, нельзя писать $K \cdot A$. Важно отметить, что:

- 1) вдоль стрелок исходные тензоры X и Y должны иметь *одинаковые отдельные фиксированные индексы*;
- 2) вдоль стрелок исходные тензоры должны быть разделены одинаково, т. е. они, кроме того, должны иметь *одинаковые фиксированные компаунд-индексы*.

III. Если компоненты компаунд-тензоров идентичны, то окончательный тензор содержит несколько одинаковых произведений, в результате чего *сильно уменьшается необходимое число перемножений, которые надо выполнить*. Например

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{c}
 \begin{array}{ccc}
 \boxed{A} & \boxed{B} & \boxed{B} \\
 X = & \boxed{B} & \boxed{A} & \boxed{B} \\
 & \boxed{B} & \boxed{B} & \boxed{A}
 \end{array}
 , \\
 \xrightarrow{\quad}
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{c}
 \begin{array}{ccc}
 \boxed{D} & \boxed{C} & \boxed{E} \\
 Y = & \boxed{C} & \boxed{E} & \boxed{D} \\
 & \boxed{E} & \boxed{D} & \boxed{C}
 \end{array}
 , \\
 \downarrow
 \end{array}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{ccc}
 \boxed{A \cdot D + B \cdot C + B \cdot E} & \boxed{A \cdot C + B \cdot E + B \cdot D} & \boxed{A \cdot E + B \cdot D + B \cdot C} \\
 X \cdot Y = & \boxed{B \cdot D + A \cdot C + B \cdot E} & \boxed{B \cdot C + A \cdot E + B \cdot D} & \boxed{B \cdot E + A \cdot D + B \cdot C} \\
 & \boxed{B \cdot D + B \cdot C + A \cdot E} & \boxed{B \cdot C + B \cdot E + A \cdot D} & \boxed{B \cdot E + B \cdot D + A \cdot C}
 \end{array}
 \end{array}
 \quad (9.16)$$

Только шесть произведений из компонент-тензоров следует далее вычислить, а именно: $A \cdot C$, $A \cdot D$, $A \cdot E$ и $B \cdot C$, $B \cdot D$, $B \cdot E$.

Если исходные тензоры X и Y не заменены компаунд-тензорами, как в данном случае, то перемножение X и Y требует количества работы, эквивалентного нахождению 27 таких произведений вместо 6. Если исходные тензоры имеют большое число

столбцов и строк, *выигрыш в вычислительной работе весьма значителен.*

IV. Если исходные тензоры имеют большое число строк, столбцов, слоев, например 20 и более, то, *даже если нет какой-либо симметрии*, имеет смысл разделить их на составляющие тензоры и сначала вычислить их произведения, а потом каждое произведение меньших тензоров.

Когда компаунд-тензор расчленен *произвольно*, чтобы уменьшить количество вычислений, его компоненты являются *n*-матрицами, а не тензорами, так как нет никакой физической или геометрической интерпретации, которая может быть связана с компонентами.

5. ПРИМЕР ПЕРЕМНОЖЕНИЯ КОМПАУНД-2-ТЕНЗОРОВ

I. Например, пусть требуется найти произведение $z' = C_t \cdot z \cdot C$, где 2-тензоры z и C имеют много составляющих, расположенных с определенной симметрией. При расчленении z и C на составляющие 2-матрицы получим

$$z = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|} \hline a & b & c & k & l & m & n & p & a & b & c & k & l & m & n & p \\ \hline d & e & f & q & r & s & t & u & d & e & f & q & r & s & t & u \\ \hline g & h & j & v & w & x & y & z & g & h & j & v & w & x & y & z \\ \hline k & q & v & m & a & n & b & p & k & q & v & m & a & n & b & p \\ \hline l & r & w & c & q & d & r & e & l & r & w & c & q & d & r & e \\ \hline m & s & x & s & f & l & g & u & m & s & x & s & f & l & g & u \\ \hline n & t & y & h & v & i & w & j & n & t & y & h & v & i & w & j \\ \hline p & u & z & x & k & y & l & z & p & u & z & x & k & y & l & z \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline A & B & A & B \\ \hline B_t & C & B_t & C \\ \hline A & B & A & B \\ \hline B_t & C & B_t & C \\ \hline \end{array}, \quad (9.17)$$

$$\mathbf{C} = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline & & & 1 \\ \hline & & & 1 \\ \hline & & & 1 \\ \hline 1 & & & \\ \hline & 1 & & \\ \hline & & 1 & \\ \hline -1 & & & \\ \hline & & & 1 \\ \hline & & & 1 \\ \hline & & & 1 \\ \hline 1 & & & \\ \hline & 1 & & \\ \hline & & 1 & \\ \hline -1 & & & \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|} \hline 0 & \mathbf{I} \\ \hline \mathbf{J} & 0 \\ \hline 0 & \mathbf{I} \\ \hline \mathbf{J} & 0 \\ \hline \end{array}, \quad \mathbf{C}_t = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 0 & \mathbf{J}_t & 0 & \mathbf{J}_t \\ \hline \mathbf{I}_t & 0 & \mathbf{I}_t & 0 \\ \hline \end{array}, \quad (9.18)$$

где составляющие 2-матрицы следующие:

$$\mathbf{A} = \begin{array}{|c|c|c|} \hline a & b & c \\ \hline d & e & f \\ \hline g & h & j \\ \hline \end{array}, \quad \mathbf{B} = \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline k & l & m & n & p \\ \hline q & r & s & t & u \\ \hline v & w & x & y & z \\ \hline \end{array}, \quad \mathbf{C} = \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline m & a & n & b & p \\ \hline c & q & d & r & e \\ \hline s & f & t & g & u \\ \hline h & v & i & w & j \\ \hline x & k & y & l & z \\ \hline \end{array}, \quad (9.19)$$

$$\mathbf{I} = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & & \\ \hline & 1 & \\ \hline & & 1 \\ \hline \end{array}, \quad \mathbf{J} = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & & & \\ \hline & 1 & & \\ \hline & & 1 & \\ \hline & & & 1 \\ \hline -1 & & & \\ \hline \end{array},$$

в то время как 2-матрицы \mathbf{O} имеют все компоненты, равные нулю. *Необходимо отметить, что не существует компанд-фиксированных индексов, ассоциированных с 2-матрицами.*

Необходимо также заметить, что *вдоль стрелок* (вдоль которых выполняется перемножение $\mathbf{z} \cdot \mathbf{C}$) каждая составляющая матрица имеет одинаковое число компонент в надлежащем порядке, а именно 3—5—3—5 вдоль обеих стрелок. *Вдоль других двух направлений способ деления произволен.*

II. Произведение $\mathbf{C}_t \cdot \mathbf{z} \cdot \mathbf{C}$ находится так же, как если бы компоненты были обычными числами. Первый шаг:

$$\begin{array}{|c|c|c|c|} \hline \mathbf{A} & \mathbf{B} & \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \hline \mathbf{B}_t & \mathbf{C} & \mathbf{B}_t & \mathbf{C} \\ \hline \mathbf{A} & \mathbf{B} & \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \hline \mathbf{B}_t & \mathbf{C} & \mathbf{B}_t & \mathbf{C} \\ \hline \end{array} \cdot \begin{array}{|c|c|} \hline & \mathbf{I} \\ \hline \mathbf{J} & \\ \hline & \mathbf{I} \\ \hline \mathbf{J} & \\ \hline \end{array} \downarrow \begin{array}{|c|c|} \hline 2\mathbf{B} \cdot \mathbf{J} & 2\mathbf{A} \cdot \mathbf{I} \\ \hline 2\mathbf{C} \cdot \mathbf{J} & 2\mathbf{B}_t \cdot \mathbf{I} \\ \hline 2\mathbf{B} \cdot \mathbf{J} & 2\mathbf{A} \cdot \mathbf{I} \\ \hline 2\mathbf{C} \cdot \mathbf{J} & 2\mathbf{B}_t \cdot \mathbf{I} \\ \hline \end{array} .$$

Второй шаг:

$$\mathbf{C}_t \cdot (\mathbf{z} \cdot \mathbf{C}) = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline & \mathbf{J}_t & & \mathbf{J}_t \\ \hline \mathbf{I}_t & & & \mathbf{I}_t \\ \hline \end{array} \cdot \begin{array}{|c|c|} \hline 2\mathbf{B} \cdot \mathbf{J} & 2\mathbf{A} \cdot \mathbf{I} \\ \hline 2\mathbf{C} \cdot \mathbf{J} & 2\mathbf{B}_t \cdot \mathbf{I} \\ \hline 2\mathbf{B} \cdot \mathbf{J} & 2\mathbf{A} \cdot \mathbf{I} \\ \hline 2\mathbf{C} \cdot \mathbf{J} & 2\mathbf{B}_t \cdot \mathbf{I} \\ \hline \end{array} \downarrow = \mathbf{z}' = \begin{array}{|c|c|} \hline 4\mathbf{J}_t \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{J} & 4\mathbf{J}_t \cdot \mathbf{B}_t \cdot \mathbf{I} \\ \hline 4\mathbf{I}_t \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{J} & 4\mathbf{I}_t \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{I} \\ \hline \end{array} .$$

(9.20)

Окончательное произведение \mathbf{z}' получилось компанд-2-тензором.

III. Чтобы представить \mathbf{z}' в виде обыкновенного 2-тензора с $7 \times 7 = 49$ компонентами, следует выполнить указанные четыре перемножения:

$$\mathbf{C} \cdot \mathbf{J} = \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline m & a & n & b & p \\ \hline c & q & d & r & e \\ \hline s & f & t & g & u \\ \hline h & v & i & w & j \\ \hline x & k & y & l & z \\ \hline \end{array} \cdot \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & & & \\ \hline & 1 & & \\ \hline & & 1 & \\ \hline & & & 1 \\ \hline -1 & & & \\ \hline \end{array} \downarrow = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline m-p & a & n & b \\ \hline c-e & q & d & r \\ \hline s-u & f & t & g \\ \hline h-j & v & i & w \\ \hline x-z & k & y & l \\ \hline \end{array} .$$

$$\mathbf{J}_i \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{J} = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline m-p-x+z & a-k & n-y & b-l \\ \hline c-e & q & d & r \\ \hline s-u & f & t & g \\ \hline h-j & v & i & w \\ \hline \end{array}, \quad (9.21)$$

$$\mathbf{J}_i \cdot \mathbf{B}_i \cdot \mathbf{I} = \begin{array}{|c|c|c|} \hline k-p & q-u & v-z \\ \hline l & r & w \\ \hline m & s & x \\ \hline n & t & y \\ \hline \end{array}.$$

Кроме того, $\mathbf{I}_i \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{I} = \mathbf{A}$ и $\mathbf{I}_i \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{J} = (\mathbf{J}_i \mathbf{B}_i \mathbf{I})_i$.

Следовательно, окончательное произведение-2-тензор $\mathbf{C}_i \cdot \mathbf{z} \cdot \mathbf{C} = \mathbf{z}'$ есть

$$\mathbf{z}' = 4 \times \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|} \hline m-p-x+z & a-k & n-y & b-l & k-p & q-u & v-z \\ \hline c-e & q & d & r & l & r & w \\ \hline s-u & f & z & g & m & s & x \\ \hline h-j & v & i & w & n & t & y \\ \hline k-p & l & m & n & a & b & c \\ \hline q-u & r & s & t & d & e & f \\ \hline v-z & w & x & y & g & h & j \\ \hline \end{array}. \quad (9.22)$$

6. МУЛЬТИКОМПАУНД-ТЕНЗОРЫ

I. Так же, как исходный тензор можно расчленить на несколько компонент, каждую компоненту компаунд-тензора можно расчленить на несколько компонент совершенно аналогичным образом, при этом образуется дважды компаунд-тензор.

Например, компаунд-тензор \mathbf{z} , который в действительности содержит, скажем, 28 строк и столбцов, становится дважды компаунд-тензором, если он снова расчленен следующим образом:

| | u | v | w | t |
|---|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|
| p | z ₁ | z ₂ | z ₃ | z ₄ |
| | z ₅ | z ₆ | z ₇ | z ₈ |
| | z ₁₀ | z ₁₁ | z ₁₂ | z ₁₃ |
| q | z ₁₄ | z ₁₅ | z ₁₆ | z ₁₇ |
| | z ₂₀ | z ₂₁ | z ₂₂ | z ₂₃ |
| r | z ₂₅ | z ₂₆ | z ₂₇ | z ₂₈ |
| | z ₂₉ | z ₃₀ | z ₃₁ | z ₃₂ |
| s | z ₃₃ | z ₃₄ | z ₃₅ | z ₃₆ |
| | z ₃₈ | z ₃₉ | z ₄₀ | z ₄₁ |
| | z ₄₂ | z ₄₃ | z ₄₄ | z ₄₄ |

| | u | v | w | t |
|---|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|
| p | A ₁ | A ₂ | A ₃ | A ₄ |
| q | A ₅ | A ₆ | A ₇ | A ₈ |
| r | A ₉ | A ₁₀ | A ₁₁ | A ₁₂ |
| s | A ₁₃ | A ₁₄ | A ₁₅ | A ₁₆ |

(9.23)

где A_1, A_2 и другие являются компаунд-тензорами. Индексы u, v, w, \dots являются *дважды компаунд-индексами*, каждый из которых представляет несколько компаунд-индексов m, n, \dots

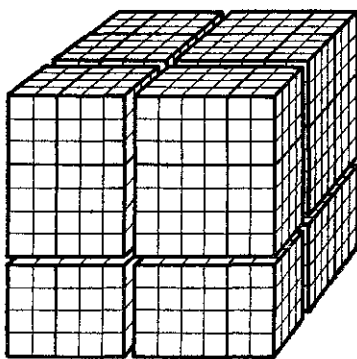


Рис. 9.2. Дважды компаунд-тензор валентности три.

II. Другой пример — тензор валентности 3 можно выразить как *дважды компаунд-3-тензор* (рис. 9.2); он содержит 8 компаунд-3-тензоров в качестве компонент (показаны на рис. 9.2 отдельно), и каждый компаунд-3-тензор содержит 2, 4 или 8 неравных 3-тензоров (показаны жирными линиями).

III. Аналогично каждую компоненту «дважды компаунд-тензора» можно снова расчленить на компаунд-тензоры. Такой тензор можно назвать «трижды компаунд-тензором». Например, приведенный выше исходный 2-тензор z можно представить как «трижды компаунд-2-тензор»

$$z = \begin{array}{c} \text{p} \\ \text{q} \\ \text{r} \\ \text{s} \end{array} \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline \text{u} & \text{v} & \text{w} & \text{t} \\ \hline \text{A}_1 & \text{A}_2 & \text{A}_3 & \text{A}_4 \\ \hline \text{A}_5 & \text{A}_6 & \text{A}_7 & \text{A}_8 \\ \hline \text{A}_9 & \text{A}_{10} & \text{A}_{11} & \text{A}_{12} \\ \hline \text{A}_{13} & \text{A}_{14} & \text{A}_{15} & \text{A}_{16} \\ \hline \end{array} = \begin{array}{c} \text{x} \\ \text{y} \end{array} \begin{array}{|c|c|} \hline \text{B}_1 & \text{B}_2 \\ \hline \text{B}_3 & \text{B}_4 \\ \hline \end{array}, \quad (9.24)$$

так что исходный 2-тензор из 28 строк и столбцов разделен, как показано на рис. 9.3.

Это последовательное расчленение тензора можно продолжать до бесконечности в зависимости от роста сложности задачи, образуя обобщенный «мультикомпаунд-тензор» любой слож-

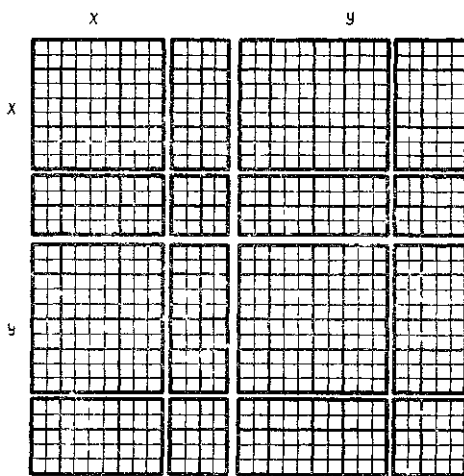


Рис. 9.3. Трижды компаунд-тензор валентности два.

ности; в каждом различные части тензора могут содержать неравное число составляющих тензоров и, кроме того, некоторые комбинации из тензоров, геометрических объектов и n -матриц.

IV. Мультикомпаунд-тензоры важны потому, что *любое расчленение, любая формула, любое уравнение, полученные для обычного тензора, также справедливы без всяких изменений для «мультикомпаунд-тензоров» любой сложности и наоборот.*

7. РАСЧЛЕНЕНИЕ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

I. В предыдущих параграфах показано, как геометрический объект можно расчленить на несколько геометрических объектов. Теперь покажем, как одно инвариантное уравнение можно расчленить на несколько инвариантных уравнений; каждое составляющее уравнение будет представлять несколько обыкновенных уравнений, которые при анализе ведут себя одинаково (или играют одинаковую роль).

Расчленение инвариантных уравнений является очень гибким орудием анализа и синтеза систем, в которых различные координатные оси имеют различный физический смысл. Более подробно это рассмотрено в гл. 22 и 23.

II. Пусть дано множество линейных уравнений $e = z \cdot i$, представленное в виде

| | | $i1$ | $i2$ | $i3$ | $i4$ | $i5$ | $i6$ | $i7$ |
|---|---|------|------|------|------|------|------|--------|
| 1 | 1 | 0 | 2 | 0 | 3 | 4 | 4 | |
| 2 | 0 | 5 | 1 | 6 | 3 | 7 | 0 | |
| 7 | 8 | 0 | 9 | 0 | 2 | 0 | 1 | |
| 4 | 0 | 1 | 5 | 3 | 1 | 4 | 2 | (9.25) |
| 3 | 5 | 0 | 6 | 6 | 7 | 5 | 8 | |
| 6 | 0 | 9 | 8 | 0 | 0 | 1 | 0 | |
| 5 | 2 | 9 | 3 | 0 | 4 | 7 | 5 | |

Единственное инвариантное уравнение можно разделить в соответствии с требованиями задачи на два инвариантных уравнения, при помощи, скажем, горизонтальной линии:

$$\begin{array}{c} \boxed{i} \\ \cdot \\ \begin{array}{|c|} \hline e_1 \\ \hline e_2 \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|} \hline z_1 \\ \hline z_2 \\ \hline \end{array} \end{array} \quad \text{или} \quad \begin{array}{|c|} \hline e_1 \\ \hline e_2 \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|} \hline z_1 \\ \hline z_2 \\ \hline \end{array} \cdot \begin{array}{|c|} \hline \boxed{i} \\ \hline \end{array}$$
(9.26)

Если произвести перемножение, как указано стрелками, то получим

$$\begin{array}{|c|} \hline e_1 \\ \hline e_2 \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|} \hline z_1 \cdot i \\ \hline z_2 \cdot i \\ \hline \end{array}$$
(9.27)

Приравнивая каждую компоненту двум векторам отдельно, можно записать одно инвариантное уравнение $\mathbf{e} = \mathbf{z} \cdot \mathbf{i}$ как два уравнения:

$$\left. \begin{array}{c} \boxed{1} \\ \boxed{2} \\ \boxed{7} \end{array} \right\} = \begin{array}{c} \boxed{1 \mid 0 \mid 2 \mid 0 \mid 3 \mid 4 \mid 4} \\ \boxed{0 \mid 5 \mid 1 \mid 6 \mid 3 \mid 7 \mid 0} \\ \boxed{8 \mid 0 \mid 9 \mid 0 \mid 2 \mid 0 \mid 1} \end{array} \left. \right\} \mathbf{e}_1 = \mathbf{z}_1 \cdot \mathbf{i} \quad (9.28)$$

и

$$\left. \begin{array}{c} \boxed{4} \\ \boxed{3} \\ \boxed{6} \\ \boxed{5} \end{array} \right\} = \begin{array}{c} \boxed{0 \mid 1 \mid 5 \mid 3 \mid 1 \mid 4 \mid 2} \\ \boxed{5 \mid 0 \mid 6 \mid 6 \mid 7 \mid 5 \mid 8} \\ \boxed{0 \mid 9 \mid 8 \mid 0 \mid 0 \mid 1 \mid 0} \\ \boxed{2 \mid 9 \mid 3 \mid 0 \mid 4 \mid 7 \mid 5} \end{array} \left. \right\} \mathbf{e}_2 = \mathbf{z}_2 \cdot \mathbf{i}.$$

III. Ту же самую систему уравнений можно разделить горизонтальной и вертикальной линиями на два инвариантных уравнения

$$\left. \begin{array}{c} \boxed{e_1} \\ \boxed{e_2} \end{array} \right\} = \begin{array}{c} \boxed{z_1 \mid z_2} \\ \boxed{z_3 \mid z_4} \end{array} \quad \text{или} \quad \left. \begin{array}{c} \boxed{e_1} \\ \boxed{e_2} \end{array} \right\} = \underbrace{\begin{array}{c} \boxed{z_1 \mid z_2} \\ \boxed{z_3 \mid z_4} \end{array}}_{\rightarrow} \cdot \left. \begin{array}{c} \boxed{i^1} \\ \boxed{i^2} \end{array} \right\}. \quad (9.29)$$

Перемножив компаунд-тензоры, как показано стрелками, получим

$$\left. \begin{array}{c} \boxed{e_1} \\ \boxed{e_2} \end{array} \right\} = \begin{array}{c} \boxed{z_1 \cdot i^1 + z_2 \cdot i^2} \\ \boxed{z_3 \cdot i^1 + z_4 \cdot i^2} \end{array}. \quad (9.30)$$

Приравняв компоненты двух векторов отдельно, можно одно инвариантное уравнение $e=z \cdot i$ написать в виде двух инвариантных уравнений

$$e_1 = z_1 \cdot i^1 + z_2 \cdot i^2, \quad (9.31)$$

$$e_2 = z_3 \cdot i^1 + z_4 \cdot i^2.$$

Надо заметить, что перекрестные произведения, такие как $z_1 \cdot i^2$, не входят.

IV. Ту же самую систему линейных уравнений $e=z \cdot i$ можно разделить двумя горизонтальными и двумя вертикальными линиями на три инвариантных уравнения

$$\begin{array}{c} \boxed{i^1} \quad \boxed{i^2} \quad \boxed{i^3} \\ \\ \begin{array}{|c|} \hline e_1 \\ \hline e_2 \\ \hline e_3 \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|c|} \hline z_1 & z_2 & z_3 \\ \hline z_4 & z_5 & z_6 \\ \hline z_7 & z_8 & z_9 \\ \hline \end{array} \text{ или } \begin{array}{|c|} \hline e_1 \\ \hline e_2 \\ \hline e_3 \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|c|} \hline z_1 & z_2 & z_3 \\ \hline z_4 & z_5 & z_6 \\ \hline z_7 & z_8 & z_9 \\ \hline \end{array} \cdot \begin{array}{|c|} \hline i^1 \\ \hline i^2 \\ \hline i^3 \\ \hline \end{array} \quad (9.32)
 \end{array}$$

Перемножив, как указано стрелками, получим

$$\begin{array}{|c|} \hline e_1 \\ \hline e_2 \\ \hline e_3 \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|} \hline z_1 \cdot i^1 + z_2 \cdot i^2 + z_3 \cdot i^3 \\ \hline z_4 \cdot i^1 + z_5 \cdot i^2 + z_6 \cdot i^3 \\ \hline z_7 \cdot i^1 + z_8 \cdot i^2 + z_9 \cdot i^3 \\ \hline \end{array} \quad (9.33)$$

Приравняв каждую компоненту двух компаунд-векторов отдельно, получим новую формулу записи одного инвариантного уравнения в виде

$$\begin{array}{l} e_1 = z_1 \cdot i^1 + z_2 \cdot i^2 + z_3 \cdot i^3, \\ e_2 = z_4 \cdot i^1 + z_5 \cdot i^2 + z_6 \cdot i^3, \\ e_3 = z_7 \cdot i^1 + z_8 \cdot i^2 + z_9 \cdot i^3, \end{array} \quad (9.34)$$

где каждое уравнение представляет несколько скалярных уравнений.

V. Аналогично $e=z \cdot i$ можно выразить четырьмя уравнениями, если e и i разделить на четыре, а z на 16 компонент:

$$\begin{array}{l} e_1 = z_1 \cdot i^1 + z_2 \cdot i^2 + z_3 \cdot i^3 + z_4 \cdot i^4, \\ e_2 = z_5 \cdot i^1 + z_6 \cdot i^2 + z_7 \cdot i^3 + z_8 \cdot i^4, \\ e_3 = z_9 \cdot i^1 + z_{10} \cdot i^2 + z_{11} \cdot i^3 + z_{12} \cdot i^4, \\ e_4 = z_{13} \cdot i^1 + z_{14} \cdot i^2 + z_{15} \cdot i^3 + z_{16} \cdot i^4. \end{array} \quad (9.35)$$

VI. Как и уравнение $e = z \cdot i$, любое другое уравнение типа $x = A \cdot y$ можно расчленить. Уравнение $i = y \cdot e$ расчленяется на 3 уравнения следующим образом:

$$\begin{aligned} i^1 &= y^1 \cdot e_1 + y^2 \cdot e_2 + y^3 \cdot e_3, \\ i^2 &= y^4 \cdot e_1 + y^5 \cdot e_2 + y^6 \cdot e_3, \\ i^3 &= y^7 \cdot e_1 + y^8 \cdot e_2 + y^9 \cdot e_3. \end{aligned} \quad (9.36)$$

Хотя e_i и i^i в общем случае могут иметь различное число компонент, так же как и e_2 и i^2 и другие, в большинстве проблем e_1 и i^1 , а также e_2 и i^2 и другие будут иметь одинаковое число компонент. Это эквивалентно тому, что диагональные компоненты 2-тензоров, скажем z_1 , z_6 , z_{11} и z_{16} , будут квадратными, в то время как для других компонент допустима любая прямоугольная форма. Это допущение сделано для того, чтобы дать возможность вычислять обратные z_1^{-1} , z_6^{-1} и другие диагональные тензоры. Обращение недиагональных 2-тензоров возможно только в том случае, если они квадратны.

VII. Уравнения составляющих (например, (9.35)) обычно можно записать при рассмотрении компаунд z , e и i , т. е. без перемножений, которые показаны уравнением (9.33).

8. КОМПАУНД-ТЕНЗОРЫ В ИНДЕКСНЫХ ОБОЗНАЧЕНИЯХ ¹⁾

I. Действия с обычными тензорами при использовании прямого обозначения просты до тех пор, пока их производят с тензорами валентности один или два, т. е. с векторами и 2-тензорами или пока действия носят элементарный характер. Как только появятся тензоры валентности три или больше или более сложные действия, необходимо обратиться к индексному обозначению.

Подобная ситуация характерна для компаунд-тензоров валентности 1 и 2, манипулировать с которыми в прямом обозначении проще, так как индексы скрыты. Если прямых обозначений недостаточно, можно использовать следующее ниже индексное обозначение.

II. В случае обычных тензоров все «фиксированные» индексы a, b, c, \dots, j представляются при помощи некоторых переменных индексов $\alpha, \beta, \gamma, \dots$, где α или β подразумевают все фиксированные индексы последовательности.

Если контуры делятся на две группы, то фиксированные индексы также делятся на две группы, например, все контуры от a до e относятся к первой группе, а контуры от f до j — ко второй. Каждой группе «фиксированных» индексов придается отдельное множество «переменных» индексов. В настоящем случае используются два множества переменных индексов, скажем, k, l, m, n, \dots

¹⁾ Остальные параграфы этой главы (кроме последнего) можно опустить при первом чтении.

для первой группы и u, v, w, \dots — для второй, в то время как $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ еще сохранены, чтобы представлять *все* фиксированные индексы (табл. 9.1).

Таблица 9.1

| Группа | Индексы | |
|--------|----------------------------------|--------------------------------|
| | фиксированные | переменные |
| 1-я | a, b, c, \dots | k, l, m, \dots |
| 2-я | g, h, i, \dots | u, v, w, \dots |
| Обе | $a, b, c, \dots, g, h, i, \dots$ | $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ |

Компаунд-тензоры представляются в обоих обозначениях так:

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{cc}
 1 & 2 \\
 \hline
 i^1 & i^2 \\
 \hline
 \end{array} \\
 \\
 \begin{array}{c}
 1 \\
 \hline
 e_1 \\
 \hline
 2 \\
 \hline
 e_2 \\
 \hline
 \end{array}
 \end{array}
 =
 \begin{array}{cc}
 z_1 & z_2 \\
 \hline
 z_3 & z_4 \\
 \hline
 \end{array},
 \quad
 \begin{array}{c}
 \begin{array}{cc}
 m & v \\
 \hline
 i^m & i^v \\
 \hline
 \end{array} \\
 \\
 \begin{array}{c}
 k \\
 \hline
 e_k \\
 \hline
 u \\
 \hline
 e_u \\
 \hline
 \end{array}
 \end{array}
 =
 \begin{array}{cc}
 z_{km} & z_{kv} \\
 \hline
 z_{um} & z_{uv} \\
 \hline
 \end{array}.
 \quad (9.37)$$

Таким образом, в прямом обозначении используется один набор индексов $1, 2, \dots$, в то время как в индексном обозначении используются два набора символов: k, m, \dots , и u, v, \dots

С помощью трех множеств переменных индексов уравнение *полной системы* в обоих обозначениях записывают

$$\mathbf{e} = \mathbf{z} \cdot \mathbf{i}, \quad e_\alpha = z_{\sigma\beta} i^\beta$$

и два уравнения систем составляющих

$$\begin{array}{cc}
 e_1 = z_1 \cdot i^1 + z_2 \cdot i^2, & e_k = z_{km} i^m + z_{kv} i^v, \\
 e_3 = z_3 \cdot i^1 + z_4 \cdot i^2, & e_u = z_{um} i^m + z_{uv} i^v.
 \end{array} \quad (9.38)$$

9. ГИБКОСТЬ ИНДЕКСНЫХ ОБОЗНАЧЕНИЙ

I. Хотя при прямом обозначении используется меньше множеств переменных индексов, индексное обозначение обладает гораздо большей гибкостью. Например, если система уравнений $\mathbf{e} = \mathbf{z} \cdot \mathbf{i}$ разделяется различными способами:

$$\begin{array}{c} \mathbf{i} \\ \hline \begin{array}{c} e_1 \\ e_2 \end{array} \end{array} = \begin{array}{c} \cdot \\ \hline \begin{array}{c} z_5 \\ z_6 \end{array} \end{array}, \quad \begin{array}{c} \alpha \\ \hline i^\alpha \\ \hline \begin{array}{c} e_k \\ e_u \end{array} \end{array} = \begin{array}{c} \begin{array}{c} Z_{ka} \\ Z_{ua} \end{array} \end{array}, \quad (9.39)$$

их уравнения будут

$$\begin{array}{ll} e_1 = z_5 \cdot \mathbf{i}, & e_k = Z_{ka} i^\alpha, \\ e_2 = z_6 \cdot \mathbf{i}, & e_u = Z_{ua} i^\alpha. \end{array} \quad (9.40)$$

В этом случае прямое обозначение нуждается в новых индексах 5 и 6, а индексные обозначения этого не требуют.

Или пусть уравнение $\mathbf{e} = \mathbf{z} \cdot \mathbf{i}$ разделено так

$$\begin{array}{c} \mathbf{i}_1 \mid \mathbf{i}_2 \\ \hline \mathbf{e} = \begin{array}{c} z_7 \\ z_8 \end{array}, \quad \alpha \begin{array}{c} e_\alpha \end{array} = \begin{array}{c} z_{\alpha m} \mid z_{\alpha v} \end{array} \end{array}, \quad (9.41)$$

В этом случае прямое обозначение нуждается в другой системе новых индексов 7 и 8, а индексные обозначения этого не требуют.

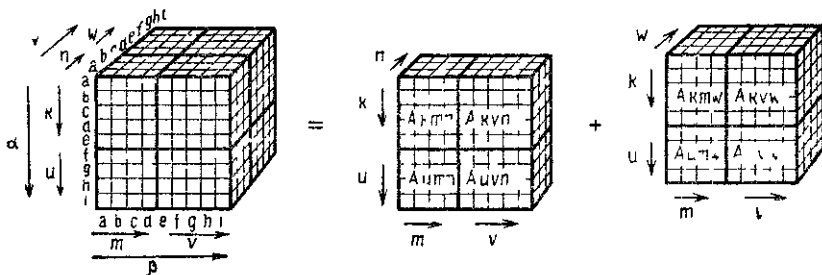


Рис. 9.4. Расчленение компаунд-3-тензора.

II. Когда 3-тензор связан с системой, которая разделяется на две группы, используется то же множество индексов. На рис. 9.4 3-тензор $A_{\alpha\beta\gamma}$ выражен как компаунд-3-тензор.

Другие типы расчленений того же 3-тензора можно выразить без введения новых переменных индексов (рис. 9 5).

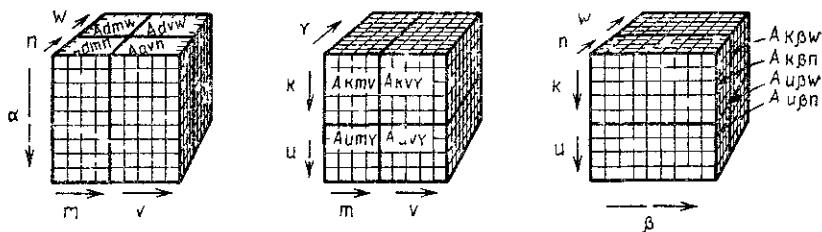


Рис. 9.5. Расчленение компаунд-3-тензора.

III. Когда требуется выделить какую-нибудь строку или столбец для изучения, индексные обозначения легко позволяют это сделать, как показано для 3-тензора на рис. 9 6.

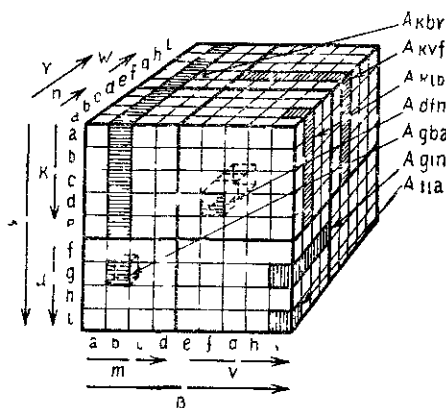


Рис. 9.6. Различные расчленения компаунд-3-тензора.

10. РАЗЛИЧНЫЕ МНОЖЕСТВА ПЕРЕМЕННЫХ ИНДЕКСОВ

I. При расчленении системы уравнений более чем на две группы вводят столько множеств переменных индексов, сколько имеется групп.

Ряд фиксированных и переменных индексов для трех групп показан в табл. 9.2. Конечно, индексы можно выделять и другим способом. Например, фиксированные индексы можно обозначать маленькими буквами, а переменные — заглавными буквами или наоборот.

Таблица 9.2

| Группа | Индексы | |
|--------|----------------------------|--------------------------------|
| | фиксированные | переменные |
| 1-я | a, b, c, \dots | k, l, m, \dots |
| 2-я | e, f, g, \dots | u, v, w, \dots |
| 3-я | h, i, j, \dots | x, y, z, \dots |
| Все | a, b, \dots, i, j, \dots | $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ |

Систему уравнений $e = z \cdot i$ или $e_\alpha = z_{\alpha\beta} i^\beta$ можно представить как

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{ccc}
 m & v & y \\
 \rightarrow & \rightarrow & \rightarrow
 \end{array} \\
 \begin{array}{|c|c|c|}
 \hline
 i^m & i^v & i^y \\
 \hline
 \end{array} \\
 \\
 \begin{array}{c}
 k \downarrow \\
 u \downarrow \\
 x \downarrow
 \end{array}
 \begin{array}{|c|}
 \hline
 e_k \\
 \hline
 e_u \\
 \hline
 e_x \\
 \hline
 \end{array}
 =
 \begin{array}{c}
 \begin{array}{|c|c|c|}
 \hline
 z_{km} & z_{kv} & z_{ky} \\
 \hline
 z_{um} & z_{uv} & z_{uy} \\
 \hline
 z_{xm} & z_{xv} & z_{xy} \\
 \hline
 \end{array}
 \begin{array}{c}
 \left. \vphantom{\begin{array}{|c|c|c|}} \right\} \alpha, \\
 \left. \vphantom{\begin{array}{|c|c|c|}} \right\} \beta
 \end{array}
 \end{array}
 \end{array}
 \begin{array}{l}
 e_k = z_{km}i^m + z_{kv}i^v + z_{ky}i^y, \\
 e_u = z_{um}i^m + z_{uv}i^v + z_{uy}i^y, \\
 e_x = z_{xm}i^m + z_{xv}i^v + z_{xy}i^y.
 \end{array}
 \quad (9.42)
 \end{array}$$

II. Если систему уравнений следует разделить на четыре и более групп, то букв алфавита может оказаться недостаточно, чтобы обеспечить необходимое количество индексов. В этом случае *каждый простой индекс имеет подындекс*: a_1, a_2, a_3, \dots , или b_1, b_2, b_3, \dots и т. д. Например, система из пяти групп может иметь набор индексов, показанный в табл. 9.3.

| Группа | Индексы | |
|--------|---|-------------------------------|
| | фиксированные | переменные |
| 1-я | $1_1, 1_2, 1_3, \dots$ | $a_1, a_2, a_3 \dots$ |
| 2-я | $2_1, 2_2, 2_3, \dots$ | $b_1, b_2, b_3 \dots$ |
| 3-я | $3_1, 3_2, 3_3, \dots$ | $c_1, c_2, c_3 \dots$ |
| 4-я | $4_1, 4_2, 4_3, \dots$ | $d_1, d_2, d_3 \dots$ |
| 5-я | $5_1, 5_2, 5_3, \dots$ | $f_1, f_2, f_3 \dots$ |
| Все | $1_1, 1_2, \dots, 2_1, \dots, 5_1, \dots$ | $\alpha, \beta, \gamma \dots$ |

2-тензор, имеющий 20 фиксированных индексов и 5 наборов переменных индексов и их различные расчленения, показан на рис. 9.7.

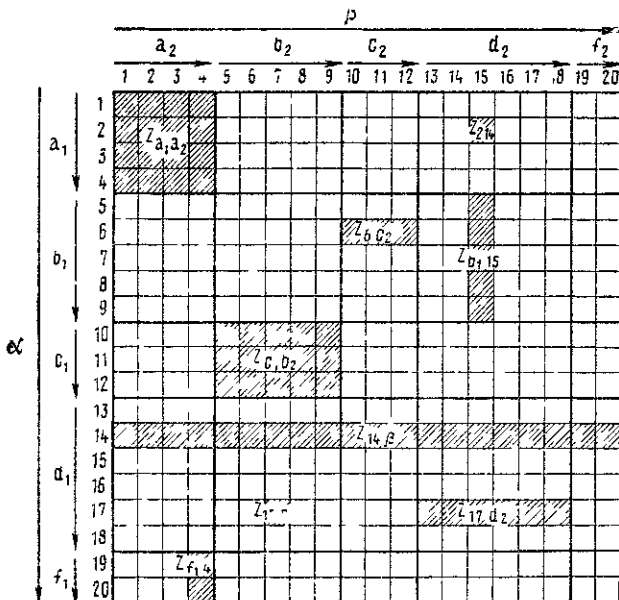


Рис. 9.7. Расчленение компаунд-2-тензора

Когда необходимо выделить строку, принадлежащую двум различным группам, ее представляют как сумму двух строк, каждая из которых принадлежит своей группе: $Z_{8a} + Z_{8b}$.

Аналогичные обозначения используются для расчленения 3-тензоров.

III. В случае *дважды-компаунд-тензоров* используются две группы переменных индексов, как показано в табл. 9.4, где пять групп уравнений разделены на две большие группы.

Таблица 9.4

| Группа | Индексы | | |
|--------|-------------------------------|--------------------------------|--------------------------|
| | фиксированные | переменные малых групп | переменные больших групп |
| 1-я | $1_1, 1_2, 1_3, \dots$ | a_1, a_2, a_3, \dots | a, b, c, \dots |
| 2-я | $2_1, 2_2, 2_3, \dots$ | b_1, b_2, b_3, \dots | |
| 3-я | $3_1, 3_2, 3_3, \dots$ | c_1, c_2, c_3, \dots | |
| 4-я | $4_1, 4_2, 4_3, \dots$ | p_1, p_2, p_3, \dots | p, q, r, \dots |
| 5-я | $5_1, 5_2, 5_3, \dots$ | q_1, q_2, q_3, \dots | |
| Все | $1_1, \dots, 2_1, \dots, 5_1$ | $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ | |

Для трижды компаунд-тензоров вводится три группы переменных индексов. Вообще вводится столько групп переменных индексов, сколько есть систем подразделений.

11. КОМПАУНД-ИНДЕКСЫ

И в прямом, и в индексном обозначении можно вводить как фиксированные, так и переменные компаунд-индексы, чтобы заменять различные отдельные индексы. Если компаунд-индексы обозначить заглавными буквами, то компаунд-2-тензор уравнения (9.42) запишем так:

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{c}
 \text{A} \\
 \text{B} \\
 \text{C}
 \end{array}
 \begin{array}{|c|c|c|}
 \hline
 \text{D} & \text{E} & \text{F} \\
 \hline
 z_1 & z_2 & z_3 \\
 \hline
 z_4 & z_5 & z_6 \\
 \hline
 z_7 & z_8 & z_9 \\
 \hline
 \end{array}
 \end{array}
 ,
 \quad
 \begin{array}{c}
 \text{P} \\
 \text{A} \\
 \text{B} \\
 \text{C}
 \end{array}
 \begin{array}{|c|c|c|}
 \hline
 \text{Q} \\
 \hline
 \text{D} & \text{E} & \text{F} \\
 \hline
 Z_{km} & Z_{kv} & Z_{ky} \\
 \hline
 Z_{um} & Z_{uv} & Z_{uy} \\
 \hline
 Z_{xm} & Z_{xv} & Z_{xy} \\
 \hline
 \end{array}
 ,
 \quad (9.43)$$

где A, B, C, \dots фиксированные компаунд-индексы, каждый из которых представляет частный набор фиксированных отдельных осей; A представляет, скажем, оси a, b, c ; $B — d, e, f$; $C — g, h, i$ и т. д. Соответствующие переменные компаунд-индексы P, Q, R, \dots

Фиксированные компаунд-индексы A, B, C нельзя путать с переменными отдельными индексами p, q, \dots, u, v, \dots и x, y, \dots в табл. 9.2, так как p или q , или r представляют любую одну из осей a, b, c , в то время как A представляет все оси a, b, c и никакой другой индекс.

Оба символа $z_{\alpha\beta}$ и z_{PQ} представляют один и тот же тензор. Однако $z_{\alpha\beta}$ рассматривает его как обычный тензор, а z_{PQ} — как компаунд-тензор.

Чтобы представить мультикомпаунд-тензоры в индексном обозначении, необходимо ввести фиксированные и переменные мультикомпаунд-индексы.

12. РАСЧЛЕНЕНИЕ КВАДРАТИЧНЫХ УРАВНЕНИЙ

I. Пусть дана система квадратичных уравнений, в которых в одном и том же члене уравнения переменная i^α встречается дважды, например в точной форме уравнения движения Лагранжа

$$e_\alpha = a_{\alpha\beta} di^\beta / dt + \Gamma_{\alpha\beta\gamma} i^\beta i^\gamma. \quad (9.44)$$

Это инвариантное уравнение содержит три вектора: e_α , i^α и di^α/dt ; один 2-тензор, $a_{\alpha\beta}$ (так называемый «метрический тензор»)

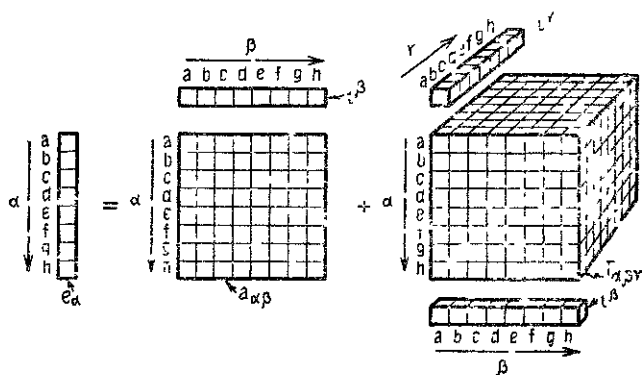


Рис. 9.8. Уравнение движения Лагранжа в инвариантной форме.

и один геометрический объект валентности 3 $\Gamma_{\alpha\beta\gamma}$ (так называемая «аффинная связность»). Инвариантное уравнение представлено на рис. 9.8 в частной системе координат.

II. В электродинамической системе, скажем во вращающейся электрической машине или группе ускоряемых электронов, оси

разделяются на две группы: 1-я группа a, b, c представляет *электрические* оси (скажем, контуры), 2-я группа f, g представляет геометрические оси (оси вращения).

Одно инвариантное уравнение движения (рис. 9.9) можно расчленилть на *два* инвариантных уравнения расчленением каждого вектора на два вектора, 2-тензора — на четыре части и геометрического объекта валентности три на восемь частей.

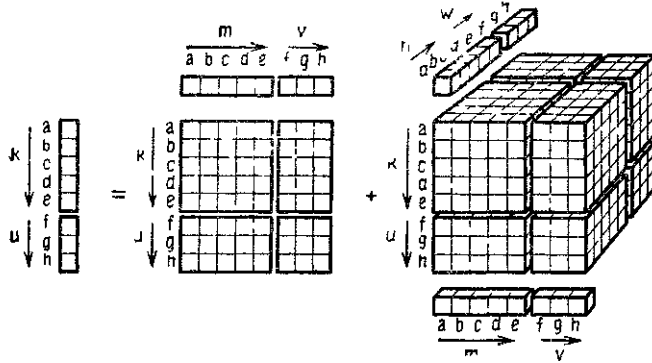


Рис. 9.9. Разделение уравнений движения Лагранжа по электрическим и геометрическим осям.

Если переменные индексы первой группы k, m, n, \dots , а второй u, v, ω , то два инвариантных уравнения будут

$$e_k = a_{km} di^m / dt + a_{kv} dt^v / dt + \Gamma_{k,m,n} i^m i^n + \Gamma_{kvn} i^v i^n + \Gamma_{km\omega} i^m i^\omega + \Gamma_{kv\omega} i^v i^\omega, \quad (9.45)$$

$$e_u = a_{um} di^m / dt + a_{u,v} dt^v / dt + \Gamma_{umn} i^m i^n + \Gamma_{uvn} i^v i^n + \Gamma_{um\omega} i^m i^\omega + \Gamma_{uv\omega} i^v i^\omega. \quad (9.46)$$

Первое уравнение — «уравнение напряжения», второе — «уравнение вращающего момента».

В *классических* динамических системах многие из этих составляющих геометрических объектов равны нулю, так как не существует взаимозаменяемости между электрической и механической точкой зрения. Однако в *релятивистских* динамических системах физическая сущность в одной системе координат может предстать перед нами как электрическая и как механическая сущность (в других координатах), следовательно, ни один из этих составляющих геометрических объектов не равен нулю.

Каждое из этих инвариантных уравнений можно вновь разделить на несколько уравнений.

13. РЕКОМБИНАЦИЯ ИНВАРИАНТНЫХ УРАВНЕНИЙ

I. Если дано единственное уравнение и определены различные типы осей, сравнительно легко решить, как разделить его на несколько инвариантных уравнений. Однако если дано несколько различных инвариантных уравнений, каждое из которых выражено в системах осей различного типа, то *довольно трудно найти единственное инвариантное уравнение, которое поддавалось бы расчленению на несколько данных уравнений.*

Например, во вращающейся электрической машине сравнительно легко получить инвариантное уравнение напряжения и инвариантное уравнение вращающего момента *отдельно*. Но требуются совершенно новые математические понятия, чтобы соединить эти два уравнения в одно уравнение движения (9.44). Главная трудность заключается в том, что *исходные уравнения не имеют формы уравнений (9.45) и (9.46)*, так как все 3-тензоры в них вырождаются в 2-тензоры (большинство их компонент нули), векторы — в скаляры и т. д. Конечно, когда единственное уравнение найдено, то вывод представляется очевидным.

II. Другим примером могут служить уравнения Максвелла для полей, которые вначале были установлены отдельно для электрического и магнитного полей. Своими успехами теория относительности в значительной мере обязана открытию Минковским способа объединения различных тензорных описаний двух типов полей в компаунд-тензоры и объединению двух систем тензорных уравнений в одну систему. *В результате этого объединения магнитное и электрическое поля стали частями одной физической реальности*, а их отдельные электрические и магнитные скаляры, векторы и 2-тензоры, используемые в старой физике, стали компонентами *компаунд-векторов и компаунд-2-тензоров*, используемых в современной физике.

При слиянии нескольких тензорных уравнений в меньшее число тензорных уравнений возникают следующие изменения: число уравнений уменьшается; число осей возрастает; валентность используемых тензоров увеличивается; число вводимых тензоров уменьшается.

Конечной целью упрощения является установление *одного* тензорного уравнения, которое расчленяется на различные составляющие уравнения.

III. Так называемая «единая теория поля» в современной физике представляет попытку физиков и математиков найти единственное тензорное уравнение, состоящее из *компаунд-тензоров*, чтобы оно распадалось на различные тензорные уравнения, представляющие, скажем, уравнения поля Максвелла, уравнение Эйнштейна, уравнения движения Лагранжа и волновое уравнение Шредингера. Открытие такого тензорного уравнения имеет большое значение для объединения представлений класси-

ческой и квантовой динамики с одной стороны, классической и релятивистской динамики — с другой.

Конечная цель при этом — установить *одно тензорное уравнение*, которое не только распадается на перечисленные различные фундаментальные уравнения, но и *состоит из одного единственного тензора* (неопределенной валентности), так что *окончательно единственное тензорное уравнение, включающее в себя, скажем, уравнения Максвелла, Шредингера и другие, имеет форму*

$$T^{a\beta\dots} = 0.$$

Для этого единственного тензора были предложены различные формы, но они не включали квантовых явлений.

IV. Если способ установления компаунд-инвариантного уравнения известен, *то в любой сложной проблеме всегда легче установить сначала окончательное компаунд-уравнение, а потом расчленить его* для установления отдельно составляющих уравнений. Несомненно, что наиболее важные проблемы сетей требуют установления различных инвариантных уравнений и, чтобы сделать это, *во всех случаях устанавливаем сначала окончательное компаунд-уравнение* $\mathbf{e} = \mathbf{z} \cdot \mathbf{i}$ (или $\mathbf{I} = \mathbf{Y} \cdot \mathbf{E}$ и т. д.), которое потом только расчленяется на свои соответствующие уравнения, с которыми оперируют в дальнейшем.

Глава 10

ФОРМУЛЫ РЕДУКЦИИ ¹⁾

1. УМЕНЬШЕНИЕ ЧИСЛА УРАВНЕНИИ

I. Во многих задачах все контуры можно разбить на две группы. Одна группа может содержать приложенные напряжения, другая группа не имеет напряжений, но является постоянно коротко замкнутой. Если для физического анализа не требуется знать токи в постоянно закороченных контурах, то соответствующие уравнения можно опустить.

В других задачах некоторые из контуров, возможно, не играют важной роли при физическом анализе, даже если к ним приложены напряжения. В таких случаях и контуры и приложенные к ним напряжения можно исключить из рассмотрения уменьшением числа уравнений.

Уменьшение числа уравнений может быть вызвано не только желанием игнорировать некоторые контуры и упростить физический анализ, но и попыткой упростить решение системы уравнений. Обычные решения системы линейных уравнений с помощью определителей или исключением переменных по-одному требуют длительного времени.

II. В этой главе развивается прием, экономящий труд, так называемые «формулы редукции». Цель его — ускорить процесс уменьшения числа линейных уравнений или их решения и облегчить физический анализ, сопровождающий такое уменьшение.

2. ИСКЛЮЧЕНИЕ МНОЖЕСТВА ПЕРЕМЕННЫХ

I. Одно из важнейших применений компаунд- n -тензоров или компаунд- n -матриц состоит в быстром и организованном способе решения систем n -линейных уравнений. Метод исключает много промежуточных и ненужных шагов, которые присутствуют при решении систем линейных уравнений, с помощью определителей и метода последовательного исключения переменных по-одному.

¹⁾ Редукция (reduction) — приведение, уменьшение. Речь идет об уменьшении числа элементов сети, а следовательно, и числа уравнений, ее описывающих, т. е. о приведении сети (соответствующей ей системы уравнений), к более простому виду. (Прим. пер.).

Рассмотрим два случая: 1) напряжения, приложенные по исключаемым осям, отсутствуют; 2) напряжения приложены по исключаемым осям.

II. Рассматривая первый случай, зададим линейное инвариантное уравнение $\mathbf{e} = \mathbf{z} \cdot \mathbf{i}$ в частной системе координат с шестью осями в виде

$$\begin{array}{|c|} \hline e_1 \\ \hline e_2 \\ \hline e_3 \\ \hline 0 \\ \hline 0 \\ \hline 0 \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|} \hline a & b & c & d & f & g \\ \hline v & w & x & y & z & a \\ \hline h & j & k & l & m & n \\ \hline b & c & d & f & g & h \\ \hline p & q & r & s & t & u \\ \hline j & k & l & m & n & p \\ \hline \end{array} \cdot \begin{array}{|c|} \hline i^{-1} \\ \hline i^{-2} \\ \hline i^{-3} \\ \hline i^{-4} \\ \hline i^{-5} \\ \hline i^{-6} \\ \hline \end{array}. \quad (10.1)$$

Выражая каждый тензор в виде компаунд-тензора

$$\begin{array}{|c|} \hline e_1 \\ \hline 0 \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|} \hline z_1 & z_2 \\ \hline z_3 & z_4 \\ \hline \end{array} \cdot \begin{array}{|c|} \hline i^1 \\ \hline i^2 \\ \hline \end{array}, \quad (10.2)$$

можно записать $\mathbf{e} = \mathbf{z} \cdot \mathbf{i}$ как два инвариантных уравнения, аналогичных двум уравнениям двухобмоточного трансформатора:

$$\begin{aligned} e_1 &= z_1 i^1 + z_2 i^2, & e_1 &= z_1 \cdot i^1 + z_2 i^2, \\ 0 &= z_3 i^1 + z_4 i^2, & 0 &= z_3 \cdot i^1 + z_4 i^2. \end{aligned} \quad (10.3)$$

Поскольку такое разделение системы линейных уравнений достаточно часто встречается на практике, рассмотрим его теорию более подробно.

Если в исходных уравнениях $\mathbf{e} = \mathbf{z} \cdot \mathbf{i}$ уравнения, содержащие приложенные напряжения, не сгруппированы вместе, их всегда можно переставить в нужном порядке с помощью тензора преобразования \mathbf{C} или любым другим способом.

III. Шесть уравнений могут представлять, например, поведение шести катушек. Наличие или отсутствие приложенного напряжения делит катушки автоматически на две группы так, что.

1) z_1 представляет тензор-импеданс тех катушек, в которых есть приложенные напряжения, в предположении, что все другие катушки разомкнуты;

2) z_4 представляет тензор-импеданс остальных трех катушек, когда первые катушки разомкнуты;

3) z_2 и z_3 представляют взаимные индуктивности между двумя группами катушек. *Взаимные индуктивности в двух направлениях в общем случае неодинаковы*, т. е. z_2 отличается от z_3 .

Эти тензоры импеданса групп катушек можно назвать «тензорами-импеданса размыкания», поскольку они измеряются при условии, что все остальные группы катушек разомкнуты.

IV. Исключение i^2 производится так же, как при действиях с обычными уравнениями. Чтобы исключить i^2 из второго уравнения, член, содержащий i^2 , переносится в левую часть:

$$z_4 i^2 = -z_3 i^1, \quad z_4 i^2 = -z_3 \cdot i^1.$$

Умножая обе части на z_4^{-1} , получаем

$$\begin{aligned} z_4^{-1} z_4 i^2 &= -z_4^{-1} z_3 i^1, & z_4^{-1} \cdot z_4 \cdot i^2 &= -z_4^{-1} \cdot z_3 \cdot i^1, \\ i^2 &= -z_4^{-1} z_3 i^1, & i^2 &= -z_4^{-1} \cdot z_3 \cdot i^1. \end{aligned} \quad (10.4)$$

Подставляя это выражение для i^2 в первое уравнение, получаем

$$e_1 = z_1 i^1 - z_2 z_4^{-1} z_3 i^1, \quad e_1 = z_1 \cdot i^1 - z_2 z_4^{-1} z_3 \cdot i^1.$$

Выносим i^1

$$e_1 = (z_1 - z_2 z_4^{-1} z_3) i^1, \quad e_1 = (z_1 - z_2 z_4^{-1} \cdot z_3) \cdot i^1 \quad (10.5)$$

или

$$e_1 = z_1' i^1, \quad e_1 = z_1' \cdot i^1. \quad (10.6)$$

Таким образом, два инвариантных уравнения (10.3) сведены к одному инвариантному уравнению, представляющему три обычных уравнения и содержащему только три скалярных переменных i^1 . Выражение в скобках z_1' есть 2-тензор, имеющий столько же строк и столбцов, сколько и z_1 .

3. ФОРМУЛА РЕДУКЦИИ ИМПЕДАНСА

I. Для электрических цепей или машин это последнее уравнение можно сформулировать так:

Если в некоторых контурах нет приложенных напряжений, их можно исключить, предполагая, что тензор собственных импедансов оставшихся контуров заменяется на z_1' , называемый «тензором импеданса короткого замыкания», по «формуле редукции»

$$z_1' = z_1 - z_2 z_4^{-1} z_3, \quad (10.7)$$

где z_4 — тензор собственных импедансов исключенных контуров; z_2 и z_3 — тензоры взаимных импедансов между исключенными и оставшимися контурами.

Другими словами, z_1' представляет собой тензор импедансов первой группы катушек, измеренных при условии, что катушки второй группы «коротко замкнуты». Его определение — уравнение

(10.7), аналогично уравнению для «импеданса короткого замыкания» катушки

$$z_1' = z_1 - (z_m)^2 / z_2, \quad (10.8)$$

измеренного при условии, что другая катушка с собственным импедансом z_2 закорочена.

II. Таким образом, *исключение нескольких переменных за один шаг* включает:

1) вычисления обратной z_4 матрицы, в которой исключается столько строк и столбцов, сколько неизвестных;

2) два перемножения 2-тензоров: $z_4^{-1} z_3$ и $z_2 (z_4^{-1} z_3)$;

3) одно вычитание.

III. Если $e = z \cdot i$ содержит много уравнений (скажем, 12), а e состоит, например, из трех компонент, то *уравнения этого параграфа можно повторить несколько раз*.

Так, сначала 12 уравнений делят на две группы, так что z_4 имеет три строки и z_1 — девять. Исключая z_4 , снова делим оставшиеся девять уравнений на две группы, так что z_4 имеет три строки и z_1 — шесть. Исключаем z_4 , опять делим оставшиеся шесть уравнений и исключаем три уравнения, так что окончательно остается только три уравнения.

Быстрее оказывается процедура с исключением *трех* строк и столбцов за один шаг, поскольку сравнительно просто вычислить детерминант матрицы с тремя строками и столбцами.

IV. После того как z_1' найден, токи в 1-й группе катушек определяют так:

$$i^1 = z_1'^{-1} e_1, \quad i^1 = z_1'^{-1} \cdot e_1.$$

Таким образом, *вычисление обратной исходной матрицы z* , содержащей *шесть* строк и столбцов, заменено вычислением обратных двух 2-тензоров (или 2-матриц) z_4 и z_1' , каждый из которых имеет *три* строки и столбца вместо шести. Однако при этом должны быть выполнены некоторые дополнительные перемножения.

Исключаемый ток i^2 во 2-й группе катушек находится через i^1 из уравнения (10.4) и имеет вид

$$i^2 = -z_4^{-1} z_3 i^1, \quad i^2 = -z_4^{-1} \cdot z_3 \cdot i^1, \quad (10.9)$$

где $z_4^{-1} \cdot z_3$ уже вычислялось на промежуточном этапе при определении z_1' .

4. ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ДВАЖДЫ КОМПАУНД-ТЕНЗОРОВ

I. Когда исключение множества переменных должно повторяться подряд несколько раз, работа значительно убыстряется *представлением исходного тензора импеданса как компаунд-*

тензора. Затем этот компанд-тензор приводится как обыкновенный тензор исключением одной строки за один шаг.

Преимущество этого метода в том, что исключается перемножение матриц с большим количеством строк и столбцов. Любую симметрию, которая возможна среди меньших матриц, можно использовать для того, чтобы избежать повторений одинаковых перемножений. Даже в случае отсутствия какой-либо симметрии избегают повторения двойных перемножений.

II. Например, разделим тензор импеданса z с 11 строками и столбцами на 3^2 компонент, представив его в виде компанд-тензора с тремя строками и столбцами:

$$z = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|} \hline & a & n & & b & p \\ \hline d & r & & e & s & \\ \hline v & & h & z & i & \\ \hline l & a & & m & b & n & c \\ \hline d & & 0 & e & f & p & g & q & h & r \\ \hline s & i & & j & & t & k & & u & l \\ \hline & & v & & w & & x & & & \\ \hline y & m & y & & z & n & & a & p & \\ \hline & b & & q & & c & r & s & d & e \\ \hline f & & t & g & u & & h & v & & h \\ \hline i & & & & j & & k & & & l \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|c|} \hline z_1 & z_2 & z_3 \\ \hline z_4 & z_5 & z_6 \\ \hline z_7 & z_8 & z_9 \\ \hline \end{array} \quad (10.10)$$

Уравнение $e = z \cdot i$ может описывать поведение сети с 11 контурами, причем контуры разбиваются на три группы, а напряжения приложены только к контурам 1-й группы. Частный случай такой сети показан на рис. 10.1, где три группы контуров даны как независимые подсети, чтобы сделать физическую картину уравнений нагляднее.

Уравнение $e = z \cdot i$ может представлять также поведение любой линейной динамической системы, такой как группа равномерно вращающихся или осциллирующих электрических машин и т. д.

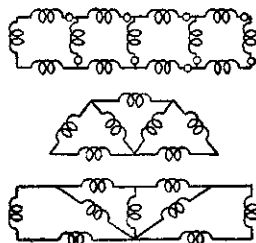


Рис. 10.1. Сеть с тремя группами контуров.

III. Чтобы исключить последнюю строку и столбец, z подразделяется на четыре меньших тензора, т. е. он становится дважды компанд-тензором с двумя строками и столбцами:

$$z = \begin{array}{|c|c|c|} \hline z_1 & z_2 & z_3 \\ \hline z_4 & z_5 & z_6 \\ \hline z_7 & z_8 & z_9 \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|} \hline z_a & z_b \\ \hline z_c & z_d \\ \hline \end{array}. \quad (10.11)$$

В последнем тензоре вторые строку и столбец исключаем при помощи уравнения (10.7), т. е.

$$z_a = z_a - z_b z_d^{-1} z_c,$$

где

$$z_a = \begin{array}{|c|c|} \hline z_1 & z_2 \\ \hline z_4 & z_5 \\ \hline \end{array}, \quad z_b = \begin{array}{|c|} \hline z_3 \\ \hline z_6 \\ \hline \end{array}, \quad z_c = \begin{array}{|c|c|} \hline z_7 & z_8 \\ \hline \end{array}, \quad z_d = \begin{array}{|c|} \hline z_9 \\ \hline \end{array}.$$

Выполняем указанные перемножения:

$$z_b z_d^{-1} z_c = \begin{array}{|c|} \hline z_3 \\ \hline z_6 \\ \hline \end{array} z_9^{-1} \begin{array}{|c|c|} \hline z_7 & z_8 \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|} \hline z_3 z_9^{-1} z_7 & z_3 z_9^{-1} z_8 \\ \hline z_6 z_9^{-1} z_7 & z_6 z_9^{-1} z_8 \\ \hline \end{array}.$$

После вычитания $z_a - z_b z_d^{-1} z_c =$

$$= \begin{array}{|c|c|} \hline z_1 & z_2 \\ \hline z_4 & z_5 \\ \hline \end{array} - \begin{array}{|c|c|} \hline z_3 z_9^{-1} z_7 & z_3 z_9^{-1} z_8 \\ \hline z_6 z_9^{-1} z_7 & z_6 z_9^{-1} z_8 \\ \hline \end{array}$$

получаем приведенный тензор

$$z'_a = \begin{array}{|c|c|} \hline z_1 - z_3 z_9^{-1} z_7 & z_2 - z_3 z_9^{-1} z_8 \\ \hline z_4 - z_6 z_9^{-1} z_7 & z_5 - z_6 z_9^{-1} z_8 \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|} \hline z'_1 & z'_2 \\ \hline z'_4 & z'_5 \\ \hline \end{array}, \quad (10.12)$$

имеющий $4 + 3 = 7$ столбцов и строк.

Опять исключаем последнюю строку и столбец с помощью (10.7) и, находя обратный тензору в правом нижнем углу $z_5 - z_6 z_9^{-1} z_8$, получаем окончательно приведенный тензор

$$z''_1 = (z_1 - z_3 z_9^{-1} z_7) - (z_2 - z_3 z_9^{-1} z_8) (z_5 - z_6 z_9^{-1} z_8)^{-1} (z_4 - z_6 z_9^{-1} z_7). \quad (10.13)$$

Это есть формула для приведения 2-тензора с 11 строками (10.10) к 2-тензору с четырьмя строками. Использование этой формулы избавляет от необходимости переписывать со страницы на страницу большое число уравнений и выписывать их каждый раз при исключении каждой следующей переменной при последовательном исключении. В случае отсутствия какой-либо симметрии количество вычислений на логарифмической линейке, возможно, будет одинаковым при любом методе решения, но при использовании инвариантного уравнения (10.13) скалярный эквивалент всех этапов вывода этого уравнения полностью исключается. Если компоненты 2-тензоров имеют какую-либо симметрию, можно также избежать многих повторений вычислений на линейке.

IV. Следует заметить, что эта формула для z_1'' вполне аналогична формуле для z_1' уравнения (10.7), а именно: $z_1 - z_2 z_4^{-1} z_3$, с той разницей, что каждый «тензор импеданса размыкания» в z_1' заменяется «тензором импеданса замыкания». Другими словами, выражения в скобках в (10.13) представляют тензоры собственных и взаимных импедансов 1-й и 2-й групп катушек (см. рис. 10.1), измеренных при постоянно закороченных катушках 3-й группы.

Полное выражение z_1'' представляет тензор импеданса 1-й группы катушек, измеренный при постоянно закороченных катушках двух других групп. Индуктивность одной катушки в присутствии двух постоянно закороченных катушек аналогична (10.13):

$$L'' = (L_{11} - M_{13} M_{13} / L_{33}) - \frac{(L_{12} - M_{13} M_{23} / L_{33})(L_{12} - M_{13} M_{23} / L_{33})}{L_{22} - M_{23} M_{23} / L_{33}}. \quad (10.14)$$

V. Редуцированное уравнение имеет вид $e_1 = z_1'' \cdot i^1$, где z_1'' имеет столько же столбцов и строк, сколько их в z_1 , а именно четыре. Уравнение решается в виде $i^1 = z_1''^{-1} \cdot e_1$.

Итак, решение 11 уравнений $e = z \cdot i$ сведено к вычислению трех обратных 2-тензоров, каждый из которых имеет столько строк, сколько их в диагональных тензорах z_3 , z_5 и z_1 , а именно: четыре, три и четыре соответственно. Кроме того, надо выполнить несколько умножений и вычитаний.

5. ПРИЛОЖЕННЫЕ НАПРЯЖЕНИЯ В ИСКЛЮЧЕННЫХ ОСЯХ

I. В предыдущих параграфах предполагалось, что в исключенных осях нет приложенных напряжений. Покажем, что те же формулы справедливы даже в присутствии приложенных напряжений, разница лишь в том, что наличие приложенных напряжений в исключенных осях изменяет видимые значения приложенных напряжений в оставшихся осях.

II. Пусть снова дана система линейных уравнений $\mathbf{e} = \mathbf{z} \cdot \mathbf{i}$, и пусть они разделяются на две системы уравнений

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_1 &= \mathbf{z}_1 \cdot \mathbf{i}^1 + \mathbf{z}_2 \cdot \mathbf{i}^2, \\ \mathbf{e}_2 &= \mathbf{z}_3 \cdot \mathbf{i}^1 + \mathbf{z}_4 \cdot \mathbf{i}^2. \end{aligned} \quad (10.15)$$

Разделение системы на две группы может быть вызвано разными причинами: просто для облегчения вычислений или \mathbf{e}_1 может представлять напряжения в точках входа, а \mathbf{e}_2 — какие-либо внутренние напряжения (т. е. система считается «активной», а не «пассивной»). Могут быть и другие причины, например, \mathbf{e}_1 можно рассматривать как постоянную, а \mathbf{e}_2 — как переменную величину. Или \mathbf{z}_4 можно рассматривать как переменную нагрузку, а остальные импедансы могут оставаться постоянными и т. д.

III. Следуя точно этапам § 2, исключаем \mathbf{i}^2 из второго уравнения:

$$\begin{aligned} \mathbf{z}_4 \cdot \mathbf{i}^2 &= \mathbf{e}_2 - \mathbf{z}_3 \cdot \mathbf{i}^1, \\ \mathbf{i}^2 &= \mathbf{z}_4^{-1} \cdot (\mathbf{e}_2 - \mathbf{z}_3 \cdot \mathbf{i}^1). \end{aligned} \quad (10.16)$$

Подставляем \mathbf{i}^2 в первое уравнение:

$$\mathbf{e}_1 = \mathbf{z}_1 \cdot \mathbf{i}^1 + \mathbf{z}_2 \cdot \mathbf{z}_4^{-1} \cdot (\mathbf{e}_2 - \mathbf{z}_3 \cdot \mathbf{i}^1);$$

выносим \mathbf{i}^1

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_1 &= (\mathbf{z}_1 - \mathbf{z}_2 \cdot \mathbf{z}_4^{-1} \cdot \mathbf{z}_3) \mathbf{i}^1 + \mathbf{z}_2 \cdot \mathbf{z}_4^{-1} \cdot \mathbf{e}_2, \\ (\mathbf{e}_1 - \mathbf{z}_2 \mathbf{z}_4^{-1} \cdot \mathbf{e}_2) &= (\mathbf{z}_1 - \mathbf{z}_2 \mathbf{z}_4^{-1} \cdot \mathbf{z}_3) \cdot \mathbf{i}^1 \end{aligned} \quad (10.17)$$

или

$$\mathbf{e}'_1 = \mathbf{z}'_1 \cdot \mathbf{i}^1.$$

Сравнивая эти уравнения с уравнениями (10.5) и (10.6), находим, что *редуцированный тензор импеданса \mathbf{z}'_1 получается так же, как и в предыдущем случае, а именно с помощью «формулы редукции импеданса»:*

$$\mathbf{z}'_1 = \mathbf{z}_1 - \mathbf{z}_2 \mathbf{z}_4^{-1} \cdot \mathbf{z}_3. \quad (10.18)$$

IV. Однако видимое значение приложенного напряжения в 1-й группе катушек изменяется с \mathbf{e}_1 на \mathbf{e}'_1 по формуле редукции напряжения

$$\mathbf{e}'_1 = \mathbf{e}_1 - \mathbf{z}_2 \cdot \mathbf{z}_4^{-1} \cdot \mathbf{e}_2, \quad (10.19)$$

где \mathbf{e}_2 — вектор приложенного напряжения исключаемой группы.

Произведение $\mathbf{z}_2 \cdot \mathbf{z}_4^{-1}$, необходимое при вычислении нового приложенного напряжения \mathbf{e}'_1 , уже вычислялось при определении \mathbf{z}'_1 .

Физическая интерпретация нового приложенного напряжения e' будет дана в § 8 с помощью теоремы Тевенина ¹⁾.

V. Ток i^2 исключенной группы из (10.16) имеет вид

$$i^2 = z_4^{-1} \cdot (e_2 - z_3 \cdot i^1). \quad (10.20)$$

6. ЧИСЛОВОЙ ПРИМЕР

I. Даны пять уравнений с пятью неизвестными

$$10 = 1i^a + 2i^b - 3i^c + 4i^d + 5i^f,$$

$$9 = 2i^a + 4i^b + 3i^c + 5i^d - 1i^f,$$

$$8 = 3i^a + 4i^b + 5i^c + 2i^d + 3i^f,$$

$$7 = 1i^a + 2i^b - 4i^c - 3i^d + 5i^f,$$

$$6 = 5i^a + 1i^b - 3i^c + 3i^d + 2i^f.$$

Если пять уравнений записать как $e = z \cdot i$, то

$$e = \begin{array}{c} a \quad b \quad c \quad d \quad f \\ \boxed{10 \quad 9 \quad 8 \quad 7 \quad 6} \end{array},$$

$$z = \begin{array}{c} a \quad b \quad c \quad d \quad f \\ \boxed{1 \quad 2 \quad -3 \quad 4 \quad 5} \\ \boxed{2 \quad 4 \quad 3 \quad 5 \quad -1} \\ \boxed{3 \quad 4 \quad 5 \quad 2 \quad 3} \\ \boxed{1 \quad 2 \quad -4 \quad -3 \quad 5} \\ \boxed{5 \quad 1 \quad -3 \quad 3 \quad 2} \end{array}.$$

$$i = \begin{array}{c} a \quad b \quad c \quad d \quad f \\ \boxed{i^a \quad i^b \quad i^c \quad i^d \quad i^f} \end{array},$$

Задача состоит в сведении пяти уравнений к двум. Три неизвестных i^c , i^d и i^f можно исключить за один шаг разделением осей на две группы a, b и c, d, f , так что

$$e_1 = \begin{array}{c} a \quad b \\ \boxed{10 \quad 9} \end{array},$$

$$e_2 = \begin{array}{c} c \quad d \quad f \\ \boxed{8 \quad 7 \quad 6} \end{array},$$

$$i^1 = \begin{array}{c} a \quad b \\ \boxed{i^a \quad i^b} \end{array},$$

$$i^2 = \begin{array}{c} c \quad d \quad f \\ \boxed{i^c \quad i^d \quad i^f} \end{array}.$$

¹⁾ В нашей литературе называется теоремой взаимности. (Прим. пер.).

$$z_1 = \begin{array}{c} a \\ b \end{array} \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 2 \\ \hline 2 & 4 \\ \hline \end{array},$$

$$z_2 = \begin{array}{c} a \\ b \end{array} \begin{array}{|c|c|c|} \hline -3 & 4 & 5 \\ \hline 3 & 5 & -1 \\ \hline \end{array},$$

$$z_3 = \begin{array}{c} c \\ d \\ f \end{array} \begin{array}{|c|c|} \hline 3 & 4 \\ \hline 1 & 2 \\ \hline 5 & 1 \\ \hline \end{array},$$

$$z_4 = \begin{array}{c} c \\ d \\ f \end{array} \begin{array}{|c|c|c|} \hline 5 & 2 & 3 \\ \hline -4 & -3 & 5 \\ \hline -3 & 3 & 2 \\ \hline \end{array}.$$

II. Если исключаются три последние строки столбца, оставшийся тензор (имеющий две строки и два столбца) по (10.18) имеет вид

$$z' = z_1 - z_2 \cdot z_4^{-1} \cdot z_3,$$

$$z_4^{-1} = -\frac{1}{182} \times \begin{array}{|c|c|c|} \hline -21 & 5 & 19 \\ \hline -7 & 19 & -37 \\ \hline -21 & -21 & -7 \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 0,115 & -0,0274 & -0,104 \\ \hline 0,0384 & -0,104 & 0,203 \\ \hline 0,115 & 0,115 & 0,0384 \\ \hline \end{array},$$

$$z_2 \cdot z_4^{-1} = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 0,3835 & -0,2412 & 1,316 \\ \hline 0,422 & -0,717 & 0,665 \\ \hline \end{array}, \quad (z_2 \cdot z_4^{-1}) \cdot z_3 = \begin{array}{|c|c|} \hline 7,97 & 3,332 \\ \hline 3,871 & 0,919 \\ \hline \end{array}.$$

$$z' = z_1 - z_2 \cdot z_4^{-1} \cdot z_3 = \begin{array}{c} a \\ b \end{array} \begin{array}{|c|c|} \hline -6,97 & -1,332 \\ \hline -1,871 & 3,081 \\ \hline \end{array}$$

III. Новые приложенные напряжения в соответствии с (10.19)

$$e' = e_1 - z_2 \cdot z_4^{-1} \cdot e_2.$$

Поскольку $z_2 \cdot z_4^{-1}$ уже вычислялось, то

$$z_2 \cdot z_4^{-1} \cdot e_2 = \begin{array}{|c|c|} \hline 12,64 & 2,35 \\ \hline \end{array},$$

$$e' = e_1 - z_2 \cdot z_4^{-1} \cdot e_2 = \begin{array}{|c|c|} \hline -2,64 & 6,65 \\ \hline \end{array}.$$

IV. Таким образом, оставшиеся два уравнения с двумя неизвестными $e = z' \cdot i'$ имеют вид

$$\begin{aligned} -2,64 &= -6,97i^a - 1,332i^b, \\ 6,65 &= -1,87i^a + 3,081i^b. \end{aligned}$$

7. ЗАМЕНА АКТИВНОЙ СЕТИ ПАССИВНОЙ СЕТЬЮ

Поскольку влияние любого приложенного напряжения e_2 в исключаемых контурах заключается в сведении приложенного напряжения e_1 оставшейся группы к e_1' , то *наличие* e_2 можно игнорировать, заменяя e_1 на e_1' так, чтобы систему уравнений (10.15) можно было записать в виде

$$\begin{aligned} e_1 - z_2 \cdot z_4^{-1} \cdot e_2 &= z_1 \cdot i^1 - z_2 \cdot i^2, \\ 0 &= z_3 \cdot i^1 - z_4 \cdot i^2. \end{aligned} \quad (10.21)$$

Таким образом, в любой активной, асимметричной, линейной системе внутренние силы e_2 (напряжения) можно исключить (и систему сделать пассивной) заменой воздействующих на систему сил e_1 новым множеством сил $e_1' = e_1 - z_2 \cdot z_4^{-1} \cdot e_2$ при неизменной структуре полной системы.

Токи i^1 , протекающие через зажимы, те же, что и при наличии внутренних напряжений e_2 . Однако внутренние токи i^2 в обоих случаях разные, поскольку при наличии внутренних напряжений i^2 находятся из i^1 с помощью уравнения (10.20), тогда как при отсутствии их i^2 находится из i^1 с помощью второго из уравнений (10.21) по уравнению (10.9). Таким образом, эквивалентность активной и пассивной сетей, у каждой из которых различные напряжения на зажимах, справедлива только с точки зрения зажимов (т. е. с точки зрения контуров первой группы).

8. ОБОБЩЕНИЕ ТЕОРЕМЫ ТЕВЕНИНА

I. В большинстве инженерных задач определенные переменные исключают до тех пор, пока уравнения не станут содержать числа вместо конструктивных и контрольных констант. Например, в синхронных машинах уравнения поля и демпфирующие обмотки обычно исключаются, в асинхронных двигателях исключаются уравнения вращающихся обмоток и т. д. Переменные в этих случаях исключаются, чтобы упростить *физический* анализ задачи.

Поскольку вряд ли найдется инженерная задача, в которой не использовались бы формулы редукции (интуитивно или сознательно) для упрощения физического или аналитического представления задачи, следует отметить, что эти формулы можно рассматривать как обобщение так называемой «теоремы Тевенина»

нина», которая иногда используется для упрощения анализа в электротехнике. Ее можно сформулировать (среди других способов) и так (рис. 10.2).

Пусть сеть Z_4 , содержащая приложенные напряжения, разомкнута в точке A и мгновенное значение напряжения размыкания в этой точке есть e_0 . Если другая пассивная сеть Z_1 присоединяется в точке A , то мгновенный ток, текущий через A , будет

$$i^A = -e_0 / (Z_1 + Z_4), \quad (10.22)$$

где $Z_1 + Z_4$ — объединенный импеданс двух сетей, рассматриваемый с точки A .

Можно считать, что это последнее уравнение (10.22) является частным случаем уравнения (10.17).

II. Редуцированные уравнения (из (10.17)) имеют вид

$$i^1 = (z_1 - z_2 z_4^{-1} \cdot z_3)^{-1} (e_1 - z_2 \cdot z_4^{-1} \cdot e_2). \quad (10.23)$$

Зажимы, относительно которых рассматривается сеть, являются контурами 1-й группы. Импеданс всей сети относительно 1-й группы есть $z_1 - z_2 \cdot z_4^{-1} \cdot z_3$, ток через него i^1 , и если к нему не приложено напряжение e_1 , то ток обусловлен исключительно дополнительным напряжением $-z_2 \cdot z_4^{-1} \cdot e_2$, появляющимся в контурах 1-й группы.

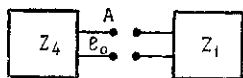


Рис. 10.2. Теорема Тевенина.

Итак, дополнительное напряжение $-z_2 \cdot z_4^{-1} \cdot e_2$, появляющееся в контурах 1-й группы, представляет напряжение размыкания, возникающее на зажимах 1-й группы, когда контуры 1-й группы разомкнуты и токи, протекающие в контурах исключенной 2-й группы, вызваны их вектором приложенного напряжения e_2 .

III. Таким образом, когда возбуждаются только четыре катушки z_4 2-й группы (катушки 1-й группы разомкнуты), в них течет ток

$$i^0 = z_4^{-1} \cdot e_2. \quad (10.24)$$

Напряжение, возникающее в трех катушках 1-й группы, вызванное этим током, есть

$$e_0 = z_2 \cdot i^0 = z_2 \cdot z_4^{-1} \cdot e_2, \quad (10.25)$$

где z_2 — взаимная индуктивность двух групп.

Если к катушкам 1-й группы не прикладывается напряжение e_1 , то ток в них полностью обусловлен напряжением размыкания e_0 , возникающим на них.

IV. Следовательно, «формулы редукции» представляют обобщение «теоремы Тевенина» при:

1) замене скаляров (операторов импедансов и напряжений) тензорами различной валентности;

2) предположении, что существуют *асимметричные взаимные импедансы* между двумя взаимосоединенными системами, которые делают теорему применимой также для движущихся или осциллирующих систем, таких как вращающиеся машины;

3) предположении, что приложенные напряжения есть в обеих системах;

4) использовании теоремы таким образом, что она не зависит от электрических явлений, а применима к любому физическому явлению, которое можно описать системой *линейных* инвариантных уравнений.

9. ПРИЛОЖЕННЫЕ НАПРЯЖЕНИЯ В ТРЕХ ГРУППАХ КАТУШЕК

I. Полное множество инвариантных уравнений трех групп катушек имеет вид

$$\begin{aligned}e_1 &= z_1 \cdot i^1 + z_2 \cdot i^2 + z_3 \cdot i^3, \\e_2 &= z_4 \cdot i^1 + z_5 \cdot i^2 + z_6 \cdot i^3, \\e_3 &= z_7 \cdot i^1 + z_8 \cdot i^2 + z_9 \cdot i^3.\end{aligned}\tag{10.26}$$

II. Разделение системы уравнений на три группы может быть вызвано многими соображениями: просто для упрощения вычислений или e_1 может представлять внешние напряжения на зажимах, e_2 — внутренние напряжения 2-й группы, а e_3 3-й группы может равняться нулю. В другом случае напряжения e_1 в 1-й группе могут оставаться постоянными, во 2-й группе токи i^2 , а в третьей группе e_3 и i^3 могут принимать любые значения.

Перечислять причины, приводящие к разделению системы на две, три, четыре и большее число групп, можно до бесконечности. Каждая причина требует поиска различных преобразований и различных формул и критериев. В гл. 21 подробно обсуждаются различные случаи.

Использование инвариантных уравнений этих параграфов исключает необходимость повторять все стадии анализа каждый раз при выводе новой системы уравнений или поиске нового типа ответа. Выведенные здесь уравнения не зависят от метода взаимосоединения сетей или расположения линейных динамических систем и их координатных осей. Системы могут быть активными или пассивными, симметричными или асимметричными. Каждый символ в уравнении представляет определенную физическую сущность, связанную с системой, которая влияет на ее поведение, *в то время как все возмущения отсутствуют.*

III. Задача заключается в том, чтобы исключить уравнения 2-й и 3-й групп контуров и выразить поведение всей системы в терминах 1-й группы контуров и приложенных к ним напряжений. Другими словами, задача состоит в том, чтобы разрешить систему (10.26) относительно i^1 .

По аналогии со случаем двух групп окончательные формулы будут те же, что и раньше, с той только разницей, что тензоры собственных и взаимных импедансов катушек 1-й и 2-й групп измеряются при *коротко замкнутых катушках* 3-й группы.

IV. Исключаем i^3 из третьего уравнения:

$$i^3 = z_9^{-1} (e_3 - z_7 i^1 - z_8 i^2). \quad (10.27)$$

Подставляем его в первое и второе уравнения

$$e_1 = z_1 i^1 + z_2 i^2 + z_3 z_9^{-1} (e_3 - z_7 i^1 - z_8 i^2),$$

$$e_2 = z_4 i^1 + z_5 i^2 + z_6 z_9^{-1} (e_3 - z_7 i^1 - z_8 i^2).$$

Выносим за скобки i^1 и i^2 :

$$(e_1 - z_3 z_9^{-1} e_3) = (z_1 - z_3 z_9^{-1} z_7) i^1 + (z_2 - z_3 z_9^{-1} z_8) i^2, \quad (10.28)$$

$$(e_2 - z_6 z_9^{-1} e_3) = (z_4 - z_6 z_9^{-1} z_7) i^1 + (z_5 - z_6 z_9^{-1} z_8) i^2.$$

Три системы уравнений (10.26) приведены теперь к двум системам с двумя переменными — уравнениям (10.28), которые можно переписать короче:

$$e'_1 = z'_1 i^1 + z'_2 i^2, \quad (10.29)$$

$$e'_2 = z'_3 i^1 + z'_4 i^2.$$

Эти уравнения представляют первые две группы катушек при исключенной 3-й группе. Следствиями исключения группы являются: 1) замена тензоров само- и взаимоимпеданса замыкания (*разомкнутой цепи*) на тензоры само- и взаимоимпеданса *короткого замыкания*; 2) замена приложенных напряжений в оставшихся группах новыми значениями.

V. Дальнейшие преобразования могут вестись двумя способами: либо в уравнение (10.29) подставляются результаты § 5, либо продолжается преобразование уравнения (10.28) или (10.29). Используя результаты § 5, получаем *редуцированные уравнения, содержащие только контуры первой группы*:

$$e''_1 = z''_1 \cdot i^1, \quad (10.30)$$

где

$$z''_1 = z'_1 - z'_2 z'^{-1}_4 z'_3, \quad (10.31)$$

$$e'_1 = e_1 - z'_2 z'^{-1}_4 e'_2. \quad (10.32)$$

Подставляя значения величин со штрихами из уравнения (10.28), получаем редуцированные тензоры

$$\mathbf{z}_1'' = (\mathbf{z}_1 - \mathbf{z}_3 \mathbf{z}_9^{-1} \mathbf{z}_7) - (\mathbf{z}_2 - \mathbf{z}_3 \mathbf{z}_9^{-1} \mathbf{z}_8) (\mathbf{z}_5 - \mathbf{z}_6 \mathbf{z}_9^{-1} \mathbf{z}_8)^{-1} (\mathbf{z}_4 - \mathbf{z}_6 \mathbf{z}_9^{-1} \mathbf{z}_7), \quad (10.33)$$

$$\mathbf{e}_1'' = (\mathbf{e}_1 - \mathbf{z}_3 \mathbf{z}_9^{-1} \mathbf{e}_3) - (\mathbf{z}_2 - \mathbf{z}_3 \mathbf{z}_9^{-1} \mathbf{z}_8) (\mathbf{z}_5 - \mathbf{z}_6 \mathbf{z}_9^{-1} \mathbf{z}_8)^{-1} (\mathbf{e}_2 - \mathbf{z}_6 \mathbf{z}_9^{-1} \mathbf{e}_3). \quad (10.34)$$

Форма тензора импеданса короткого замыкания \mathbf{z}_1'' 1-й группы (которая уже приводилась в уравнении (10.13)) и форма нового приведенного вектора напряжений \mathbf{e}_1'' , которые приложены к 1-й группе, аналогичны формам в уравнениях (10.18) и (10.19); отличие их в том, что *тензор импеданса размыкания заменяется тензором импеданса короткого замыкания, а каждый вектор действительно приложенного напряжения заменяется эквивалентным вектором \mathbf{e}'* .

VI. Три множества токов, текущих в трех группах контуров, находят из уравнений (10.30), (10.28) и (10.27):

$$\mathbf{i}^1 = \mathbf{z}_1''^{-1} \mathbf{e}_1'',$$

$$\mathbf{i}^2 = (\mathbf{z}_5 - \mathbf{z}_6 \mathbf{z}_9^{-1} \mathbf{z}_8)^{-1} [\mathbf{e}_2 - \mathbf{z}_6 \mathbf{z}_9^{-1} \mathbf{e}_3 - (\mathbf{z}_4 - \mathbf{z}_6 \mathbf{z}_9^{-1} \mathbf{z}_7) \mathbf{i}^1], \quad (10.35)$$

$$\mathbf{i}^3 = \mathbf{z}_9^{-1} (\mathbf{e}_3 - \mathbf{z}_7 \mathbf{i}^1 - \mathbf{z}_8 \mathbf{i}^2).$$

Чтобы вычислить эти токи, необходимо вычислить *три обратных 2-тензора*, а именно:

$$\mathbf{y} = \mathbf{z}_9^{-1},$$

$$\mathbf{y}' = (\mathbf{z}_5 - \mathbf{z}_6 \mathbf{y} \mathbf{z}_8)^{-1}, \quad (10.36)$$

$$\mathbf{y}'' = (\mathbf{z}_1 - \mathbf{z}_3 \mathbf{y} \mathbf{z}_7) - (\mathbf{z}_2 - \mathbf{z}_3 \mathbf{y} \mathbf{z}_8) \mathbf{y}' (\mathbf{z}_4 - \mathbf{z}_6 \mathbf{y} \mathbf{z}_7).$$

В терминах этих обратных 2-тензоров три уравнения токов имеют вид

$$\mathbf{i}^1 = \mathbf{y}'' [\mathbf{e}_1 - \mathbf{z}_3 \mathbf{y} \mathbf{e}_3 - (\mathbf{z}_2 - \mathbf{z}_3 \mathbf{y} \mathbf{z}_8) \mathbf{y}' (\mathbf{e}_2 - \mathbf{z}_6 \mathbf{y} \mathbf{e}_3)],$$

$$\mathbf{i}^2 = \mathbf{y}' [\mathbf{e}_2 - \mathbf{z}_6 \mathbf{y} \mathbf{e}_3 - (\mathbf{z}_4 - \mathbf{z}_6 \mathbf{y} \mathbf{z}_7) \mathbf{i}^1], \quad (10.37)$$

$$\mathbf{i}^3 = \mathbf{y} (\mathbf{e}_3 - \mathbf{z}_7 \mathbf{i}^1 - \mathbf{z}_8 \mathbf{i}^2).$$

VII. *Каждая формула в этих параграфах верна, если каждый тензор является компаунд-тензором любой сложности, т. е. каждая из трех групп цепей сама может быть построена из нескольких меньших групп цепей.*

10. ПРОИЗВОЛЬНОЕ ПОДРАЗДЕЛЕНИЕ КОМПАУНД-ТЕНЗОРОВ

I. Если система обычных уравнений заменяется системой n инвариантных уравнений, в которых каждая компонента является 2-тензором (или 1-тензором), они упрощаются следующим образом: 1) исключается *одна* строка и столбец одновременно по

уравнениям § 5 в предположении, что это дважды-компаунд-тензор с $2^2=4$ компонентами; 2) исключаются две строки и два столбца одновременно по уравнениям § 9, при этом объект рассматривается как дважды-компаунд-тензор с $3^2=9$ компонентами.

Таким образом, когда предыдущие уравнения должны использоваться с компаунд-тензорами, их подразделения, кроме первого, включают только *одну* строку и столбец:

$$z = \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline z_1 & z_2 & z_3 & z_4 & z_5 \\ \hline z_6 & z_7 & z_8 & z_9 & z_{10} \\ \hline z_{11} & z_{12} & z_{13} & z_{14} & z_{15} \\ \hline z_{16} & z_{17} & z_{18} & z_{19} & z_{20} \\ \hline z_{21} & z_{22} & z_{23} & z_{24} & z_{25} \\ \hline \end{array}, \quad z = \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline z_1 & z_2 & z_3 & z_4 & z_5 \\ \hline z_6 & z_7 & z_8 & z_9 & z_{10} \\ \hline z_{11} & z_{12} & z_{13} & z_{14} & z_{15} \\ \hline z_{16} & z_{17} & z_{18} & z_{19} & z_{20} \\ \hline z_{21} & z_{22} & z_{23} & z_{24} & z_{25} \\ \hline \end{array}.$$

Этот тип подразделения был необходим, поскольку тогда должен быть вычислен только тензор, *обратный* диагональному 2-тензору z_{25} или z_{19}' .

II. Однако дважды-компаунд-тензор можно разделить с включением двух или трех столбцов и строк в каждом подразделении:

$$z = \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline z_1 & & z_2 & z_3 & z_4 \\ \hline z_5 & z_6 & & z_7 & z_8 \\ \hline & z_9 & & z_{10} & z_{11} \\ \hline z_{12} & & z_{13} & & z_{14} \\ \hline z_{15} & & & z_{16} & z_{17} & z_{18} \\ \hline & z_{19} & & z_{20} & & z_{21} \\ \hline z_{22} & & z_{23} & & & z_{24} \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|c|} \hline z_a & z_b & z_c \\ \hline z_d & z_f & z_g \\ \hline z_h & z_j & z_k \\ \hline \end{array}, \quad (10.38)$$

$$e = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|} \hline e_1 & e_2 & & e_4 & e_5 & & e_7 \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|c|} \hline e_a & e_b & e_c \\ \hline \end{array}, \quad (10.39)$$

$$i = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|} \hline i_1 & i_2 & i_3 & i_4 & i_5 & i_6 & i_7 \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|c|} \hline i_a & i_b & i_c \\ \hline \end{array}. \quad (10.40)$$

В этом случае полученные выше уравнения также можно использовать для исключения нескольких групп переменных или для решения уравнений $e=z \cdot i$. Однако при этом требуется вычислить обратные компаунд-2-тензоры с двумя или тремя столбцами и строками. Эти формулы будут получены ниже.

11. ОБРАЩЕНИЕ КОМПАУНД-2-ТЕНЗОРА С ДВУМЯ СТРОКАМИ

I. Один способ обращения z , где z — компаунд-2-тензор, заключается в решении нескольких систем инвариантных уравнений и вычислении $i = z^{-1} \cdot e$. В § 5 и 9 решены две и три системы линейных тензорных уравнений, но решения не были доведены до нужного вида, так как i^2 и i^3 были выражены через i^1 , тогда как для обращения тензора требуется выразить i^2 и i^3 через приложенные напряжения e_1, e_2 и e_3 .

II. Рассматривая сначала два уравнения из § 5, получаем выражение для токов из (10.17) и (10.20):

$$\begin{aligned} i^1 &= (z_1 - z_2 z_4^{-1} z_3)^{-1} (e_1 - z_2 z_4^{-1} e_2), \\ i^2 &= z_4^{-1} (e_2 - z_3 i^1). \end{aligned} \quad (10.41)$$

Токи i^1 и i^2 должны быть выражены линейными функциями от e_1 и e_2 , поэтому, подставляя значения i^1 в i^2 , получаем

$$\begin{aligned} i^1 &= (z_1 - z_2 z_4^{-1} z_3)^{-1} e_1 - (z_1 - z_2 z_4^{-1} z_3)^{-1} z_2 z_4^{-1} e_2, \\ i^2 &= z_4^{-1} \{ e_2 - z_3 [(z_1 - z_2 z_4^{-1} z_3)^{-1} e_1 - (z_1 - z_2 z_4^{-1} z_3)^{-1} z_2 z_4^{-1} e_2] \}, \\ i^2 &= -z_4^{-1} z_3 (z_1 - z_2 z_4^{-1} z_3)^{-1} e_1 + [z_4^{-1} + z_4^{-1} z_3 (z_1 - z_2 z_4^{-1} z_3)^{-1} z_2 z_4^{-1}] e_2. \end{aligned}$$

Если $(z_1 - z_2 z_4^{-1} z_3)^{-1} = y'$ и $z_4^{-1} = y$, обратная система уравнений $i = ye$ имеет вид

$$\left. \begin{aligned} i^1 &= y' e_1 - y' z_2 y e_2, \\ i^2 &= -y z_3 y' e_1 + (y + y z_3 y' z_2 y) e_2 \end{aligned} \right\}. \quad (10.42)$$

III. Таким образом, обращение двухстрочного компаунд-тензора z есть

$$z = \begin{array}{|c|c|} \hline z_1 & z_2 \\ \hline z_3 & z_4 \\ \hline \end{array}, \quad z^{-1} = \begin{array}{|c|c|} \hline y' & -y' z_2 y \\ \hline -y z_3 y' & y + y z_3 y' z_2 y \\ \hline \end{array}, \quad (10.43)$$

где два обратных 2-тензора имеют вид

$$\boxed{y = z_4^{-1}}, \quad (10.44) \quad \boxed{y' = (z_1 - z_2 y z_3)^{-1}}. \quad (10.45)$$

Этапы вычисления следующие:

- 1) $z_4^{-1} = y$; 2) yz_3 ; 4) $(yz_3)y'$; 5) $y'z_2y$;
- 3) $[z_1 - z_2(yz_3)]^{-1} = y'$; 6) $y + (yz_3)(y'z_2y)$.

Иначе говоря, нужно вычислить те же два обратных 2-тензора, что и в предыдущем параграфе. Эти вычисления обратных величин входят в три первых этапа, причем этапы те же, что и

в предыдущих параграфах. Оставшаяся работа состоит в трех умножениях и одном вычитании.

Формулы остаются верными, если z — мультикомпаунд-2-тензор любой кратности.

IV. Если компаунд-2-тензор является диагональным, его обращение осуществляется обращением его диагональных элементов по отдельности, как для обычных 2-матриц:

$$z = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline z_1 & & & \\ \hline & z_2 & & \\ \hline & & z_3 & \\ \hline & & & z_4 \\ \hline \end{array}, \quad z^{-1} = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline z_1^{-1} & & & \\ \hline & z_2^{-1} & & \\ \hline & & z_3^{-1} & \\ \hline & & & z_4^{-1} \\ \hline \end{array}. \quad (10.46)$$

Эти формулы справедливы также, если каждая компонента компаунд-тензора есть не 2-тензор или 2-матрица, а линейный оператор, такой как $d(\cos \omega t)/dt$.

12. ОБРАЩЕНИЕ ТРЕХСТРОЧНОГО КОМПАУНД-2-ТЕНЗОРА

I. Обращение трехстрочного компаунд-2-тензора можно осуществить, рассматривая его как двухстрочный дважды компаунд-тензор:

$$z = \begin{array}{|c|c|c|} \hline z_a & z_b & \\ \hline z_d & z_e & z_f \\ \hline z_g & z_h & z_i \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|} \hline z_1 & z_2 \\ \hline z_3 & z_4 \\ \hline \end{array}, \quad z_1 = \begin{array}{|c|c|} \hline z_a & z_b \\ \hline z_d & z_e \\ \hline \end{array}, \quad z_2 = \begin{array}{|c|} \hline z_c \\ \hline z_f \\ \hline \end{array} \quad (10.47)$$

$$z_3 = \begin{array}{|c|c|} \hline z_g & z_h \\ \hline \end{array}, \quad z_4 = \begin{array}{|c|} \hline z_i \\ \hline \end{array}.$$

Обращение дважды компаунд-тензора дано в (10.43), где каждый тензор есть дважды компаунд-тензор, т. е. y' имеет две строки и два столбца и т. д. Четыре компаунд-тензора вполне могут быть найдены, а именно: z_2, z_3, y' и y' ; z_2 и z_3 уже известны, y' легко вычисляется как z_1^{-1} , так что остается найти y' .

Обращение y' вычислено сначала как $z_1^{-1} z_2 z_4^{-1} z_3$, что дает

$$y'^{-1} = \begin{array}{|c|c|} \hline z_a - z_c z_1^{-1} z_g & z_b - z_c z_1^{-1} z_h \\ \hline z_d - z_f z_1^{-1} z_g & z_e - z_f z_1^{-1} z_h \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|} \hline z'_1 & z'_2 \\ \hline z'_3 & z'_4 \\ \hline \end{array}.$$

Обращение его находят с помощью уравнения (10.43):

$$y' = \left[\begin{array}{|c|c|} \hline y''' & -y'''z_2'y'' \\ \hline -y''z_3'y''' & y'' + y''z_3'y'''z_2'y'' \\ \hline \end{array} \right], \quad (10.48)$$

где $y'' = z_4'^{-1}$ и $y''' = (z_1' - z_2'z_4'^{-1}z_3')^{-1} = (z_1' - z_2'y''z_3')^{-1}$. (10.49)

II. Чтобы подставить y , y' , z_2 и z_3 в (10.43), вычисляем

$$y'z_2 = \left[\begin{array}{|c|} \hline y'''(z_c - z_2'y''z_f) \\ \hline y''[z_f - z_3'y'''(z_c - z_2'y''z_f)] \\ \hline \end{array} \right],$$

$$z_3y' = \left[\begin{array}{|c|c|} \hline (z_g - z_hy''z_3')y''' & [z_h - (z_g - z_hy''z_3')y'''z_2']y'' \\ \hline \end{array} \right],$$

$$z_3y'z_2 = (z_g - z_hy''z_3')y'''z_c + [z_h - (z_g - z_hy''z_3')y'''z_2']y''z_f.$$

Подставляя z^{-1} в (10.43), получаем обращение трехстрочного 2-тензора из (10.47):

| | | |
|----------------------------|---|--|
| y''' | $-y'''z_2'y''$ | $-y'''(z_c - z_2'y''z_f)y$ |
| $-y''z_3'y'''$ | $y'' + y''z_3'y'''z_2'y''$ | $-y''[z_f - z_3'y'''(z_c - z_2'y''z_f)]y$ |
| $-y(z_g - z_hy''z_3')y'''$ | $-y[z_h - (z_g + z_hy''z_3')y'''z_2']y''$ | $y + y(z_g - z_hy''z_3')y'''z_cy + y[z_h - (z_g - z_hy''z_3')y'''z_2']y''z_fy$ |

(10.50)

Некоторые произведения встречаются много раз, так что дублирование вычислительной работы исключается, даже если исходный 2-тензор не обладал симметрией.

13. ВЫВОДЫ ПО РЕДУКЦИИ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИИ

Систему n линейных уравнений $e = z \cdot i$ можно свести к меньшему числу уравнений или решить полностью:

1) исключением трех, четырех или более строк одновременно по (10.18) или (10.19). При этом требуется вычислить обращение матрицы с тремя, четырьмя или больше строками на каждом шаге исключения;

2) исключением всех строк за один шаг разделением z на 2^2 или 3^2 компонент и вычислением редуцированной z с помощью одной формулы по (10.18) или (10.33). Это опять требует вычисления обращения двух или трех меньших матриц. Вместо 2^2 и 3^2 компонент z можно разделить на n^2 компонент и можно вывести формулы для немедленных вычислений редуцированного z , следуя рассуждениям § 9;

3) вместо вывода новых формул для исключения $(n-1)$ -групп, n^2 матриц, на которые расчленяются z , снова можно разделить на 2^2 или 3^2 компаунд-2-матриц (z при этом будет 2-компаунд-2-матрица), а дальше повторяются действия предыдущего параграфа в предположении, что каждая n -матрица в уравнении является компаунд- n -матрицей;

4) полностью избежав вычисления обратных матриц исключением одновременно одного столбца и строки, а не трех или четырех по уравнениям (10.18) и (10.19). В этом случае матрица z_4 становится скаляром Z_4 и ее обратная равна просто $1/Z_4$. Однако $z_2 z_4^{-1} z_3$ — матрица, имеющая на одну строку и столбец меньше, чем исходная.

Следует отметить, что если матрица z разделяется произвольно на несколько меньших матриц для исключения переменных без какого-либо физического смысла подразделений, то при этом вводятся только n матрицы, но не тензоры.

14. КОНТУРНО-УЗЛОВЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

I. Когда $e = z \cdot i$ представляет уравнения контурной сети, то исключение одновременно одной строки и одного столбца эквивалентно исключению одного контура из сети с помощью контурно-узлового преобразования.

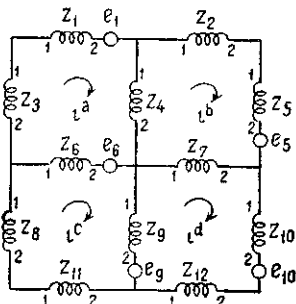


Рис. 10.3. Сеть, которая должна быть редуцирована.

Контур, который исключается, может иметь взаимные индуктивности с любыми другими контурами и в нем могут быть приложенные напряжения. В обычных методах контурно-узловых преобразований исключаемый контур может иметь взаимную индуктивность только с соседними катушками и не должен иметь приложенных напряжений.

II. Пусть, например, 12 катушек соединены в четыре контура (рис. 10.3).

До соединения компоненты вектора приложенного напряжения e и тензора импеданса z имели вид

| | | | | | | | | | | | | | |
|----|----------|----|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|----------|----------|----------|
| | | | | | | | | | | | | | |
| 1 | e_1 | 1 | Z_1 | | | | | | | | | | |
| 2 | | 2 | | Z_2 | | | | | | | | | |
| 3 | | 3 | | | Z_3 | | | | | | | | |
| 4 | | 4 | | | | Z_4 | | | | | | | |
| 5 | e_5 | 5 | | | | Z_5 | | | | | | | |
| 6 | e_6 | 6 | | | | | Z_6 | | | | | | |
| 7 | | 7 | | | | | | Z_7 | | | | | |
| 8 | | 8 | | | | | | | Z_8 | | | | |
| 9 | e_9 | 9 | | | | | | | | Z_9 | | | |
| 10 | e_{10} | 10 | | | | | | | | | Z_{10} | | |
| 11 | | 11 | | | | | | | | | | Z_{11} | |
| 12 | | 12 | | | | | | | | | | | Z_{12} |

(10.51)
(10.52)

Тензор преобразования C есть

| | | | | | | |
|-------------------|----|-----|-----|-----|-----|--|
| | | a | b | c | d | |
| $i^1 = i^a$ | 1 | 1 | | | | |
| $i^2 = i^b$ | 2 | | 1 | | | |
| $i^3 = -i^a$ | 3 | -1 | | | | |
| $i^4 = i^a - i^b$ | 4 | 1 | -1 | | | |
| $i^5 = i^b$ | 5 | | 1 | | | |
| $i^6 = i^c - i^a$ | 6 | -1 | | 1 | | |
| $i^7 = i^d - i^b$ | 7 | | -1 | | 1 | |
| $i^8 = -i^c$ | 8 | | | -1 | | |
| $i^9 = i^c - i^d$ | 9 | | | 1 | -1 | |
| $i^{10} = i^d$ | 10 | | | | 1 | |
| $i^{11} = -i^c$ | 11 | | | -1 | | |
| $i^{12} = -i^d$ | 12 | | | | -1 | |

$C =$
(10.53)

После соединения вектор приложенного напряжения e' и тензор импеданса z' находят по формулам $C_t e$ и $C_t z C$

$$e' = \begin{matrix} a \\ b \\ c \\ d \end{matrix} \begin{matrix} e_1 - e_6 \\ e_5 \\ e_6 - e_9 \\ -e_9 + e_{10} \end{matrix}, \quad (10.54)$$

$$z' = \begin{matrix} a & b & c & d \\ a & \begin{matrix} Z_1 + Z_3 + \\ Z_4 + Z_6 \end{matrix} & -Z_4 & -Z_6 & 0 \\ b & -Z_4 & \begin{matrix} Z_2 + Z_4 + \\ Z_5 + Z_7 \end{matrix} & 0 & -Z_7 \\ c & -Z_6 & 0 & \begin{matrix} Z_6 + Z_8 + \\ Z_9 + Z_{13} \end{matrix} & -Z_9 \\ d & 0 & -Z_7 & -Z_9 & \begin{matrix} Z_7 + Z_9 + \\ Z_{10} + Z_{12} \end{matrix} \end{matrix}, \quad (10.55)$$

III. Исключая последнюю строку и столбец по (10.18), а именно $z_1 - z_2 z_4^{-1} z_3$, вычисляем

$$z_2 z_4^{-1} = \begin{matrix} a \\ b \\ c \end{matrix} \begin{matrix} 0 \\ -Z_7 / (Z_7 + Z_9 + Z_{10} + Z_{12}) \\ -Z_9 / (Z_7 + Z_9 + Z_{10} + Z_{12}) \end{matrix},$$

$$z_2 z_4^{-1} z_3 = \begin{matrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & (Z_7)^2 / (Z_7 + Z_9 + Z_{10} + Z_{12}) & Z_7 Z_9 / (Z_7 + Z_9 + Z_{10} + Z_{12}) \\ 0 & Z_7 Z_9 / (Z_7 + Z_9 + Z_{10} + Z_{12}) & (Z_9)^2 / (Z_7 + Z_9 + Z_{10} + Z_{12}) \end{matrix},$$

Таким образом, редуцированный тензор импеданса имеет вид

$$\begin{matrix} a & b & c \\ a & \begin{matrix} Z_1 + Z_3 + \\ Z_4 + Z_6 \end{matrix} & -Z_4 & -Z_6 \\ b & -Z_4 & \begin{matrix} Z_2 + Z_4 + Z_5 + Z_7 \\ (Z_7)^2 \\ Z_7 + Z_9 + Z_{10} + Z_{12} \end{matrix} & \begin{matrix} Z_7 Z_9 \\ Z_7 + Z_9 + Z_{10} + Z_{12} \end{matrix} \\ c & -Z_6 & \begin{matrix} Z_7 Z_9 \\ Z_7 + Z_9 + Z_{10} + Z_{12} \end{matrix} & \begin{matrix} Z_6 + Z_8 + Z_9 + Z_{11} \\ (Z_9)^2 \\ Z_7 + Z_9 + Z_{10} + Z_{12} \end{matrix} \end{matrix}. \quad (10.56)$$

Редуцированный вектор приложенного напряжения по уравнению (10 19), а именно $e_1 - z_2 z_4^{-1} e_2$, имеет вид

$$\begin{array}{l} a \\ z_2 z_4^{-1} e_2 = b \\ c \end{array} \begin{array}{|c|} \hline 0 \\ \hline [-Z_7 / (Z_7 + Z_9 + Z_{10} + Z_{12})] (e_{10} - e_9) \\ \hline [-Z_9 / (Z_7 + Z_9 + Z_{10} + Z_{12})] (e_{10} - e_9) \\ \hline \end{array}$$

$$e' = \begin{array}{l} a \\ b \\ c \end{array} \begin{array}{|c|} \hline e_1 - e_6 \\ \hline e_5 + [Z_7 / (Z_7 + Z_9 + Z_{10} + Z_{12})] (e_{10} - e_9) \\ \hline e_6 + e_9 + [Z_9 / (Z_7 + Z_9 + Z_{10} + Z_{12})] (e_{10} - e_9) \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|} \hline e_1 - e_6 \\ \hline e_5 + e_6 \\ \hline e_6 + e_9 + e_6 \\ \hline \end{array} \quad (10.57)$$

Редуцированная сеть, соответствующая редуцированным значениям z' и e' , представлена на рис. 10.4, где $Z = Z_7 + Z_9 + Z_{10} + Z_{12}$.

IV. Если теперь z' рассматривать как компаунд-2-тензор, то исключение одной строки и столбца компаунд-тензора является эквивалентом одновременного исключения нескольких контуров многократным контурно-узловым преобразованием.

Одновременно исключаемые контуры могут иметь взаимные индуктивности относительно друг друга и с остающимися контурами, к ним также могут быть приложены напряжения.

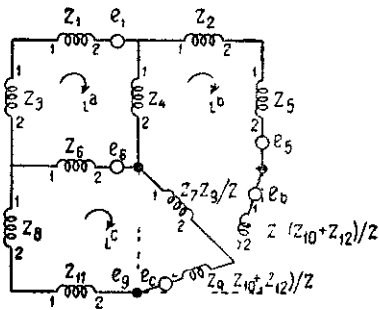


Рис. 10 4. Преобразование «звезда — контур».

15. ИМПЕДАНС МЕЖДУ ДВУМЯ ТОЧКАМИ

I. Довольно часто в n -контурной сети требуется определить импеданс между двумя точками. В таких случаях выгодно ввести дополнительный контур, приложив напряжение e_1 между двумя точками (или узлами), и считать ток i в этой безымпедансной ветви первой переменной.

В результате уравнение $e = z \cdot i$ содержит $n + 1$ строк и столбцов. Если остальные n строк и столбцов z исключаются (за один или несколько шагов), то остающийся скаляр является импедансом сети между двумя точками.

II. Найдем, например, импеданс между узлами A и B в пятиконтурной сети (рис. 10 5). (В ней 12 катушек, 8 узлов, $8 - 1 = 7$

узловых пар; поэтому в ней $12-7=5$ контуров.) Узлы A и B соединяются, чтобы образовать шестой контур.

Токи, протекающие в каждой катушке, изображены на рис. 10.6 в предположении существования шести переменных (первая из них — ток i^1 в ветви, соединяющей A к B). Приравнявая ста-

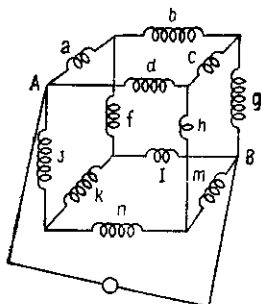


Рис. 10.5. Импеданс между двумя точками $A-B$.

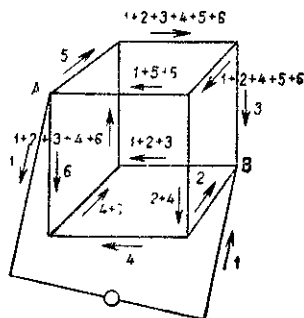


Рис. 10.6. Токи в отдельных катушках.

рые и новые токи в каждой катушке, получаем тензор преобразования

$$\begin{aligned}
 i^a &= i^5 \\
 i^b &= i^1 + i^2 + i^3 + i^4 + i^5 + i^6 \\
 i^c &= i^1 + i^2 + i^4 + i^5 + i^6 \\
 i^d &= i^1 + i^5 + i^6 \\
 i^f &= i^1 + i^2 + i^3 + i^4 + i^6 \\
 i^g &= i^3 \\
 i^h &= i^2 + i^4 \\
 i^j &= i^6 \\
 i^k &= i^4 + i^6 \\
 i^l &= i^1 + i^2 + i^3 \\
 i^m &= i^2 \\
 i^n &= i^4 \\
 i^p &= i^1
 \end{aligned}$$

| | 1' | 2' | 3' | 4' | 5' | 6' |
|-----|----|----|----|----|----|----|
| a | | | | | 1 | |
| b | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| c | 1 | 1 | | 1 | 1 | 1 |
| d | 1 | | | | 1 | 1 |
| f | 1 | 1 | 1 | 1 | | 1 |
| g | | | 1 | | | |
| C=h | | 1 | | 1 | | |
| j | | | | | | 1 |
| k | | | | 1 | | 1 |
| l | 1 | 1 | 1 | | | |
| m | | 1 | | | | |
| n | | | | 1 | | |
| p | 1 | | | | | |

(10.58)

Тензор импеданса z основной сети имеет 13 строк и столбцов, причем последняя строка и столбец p состоят из нулевых компонент. Полагая импедансы Z одинаковыми, а взаимные импедансы отсутствующими, получаем для сети величину z' по формуле $C_t z C$:

$$z' = Z \times \begin{array}{c|ccc|ccc} & 1' & 2' & 3' & 4' & 5' & 6' \\ \hline 1' & 5 & 4 & 3 & 3 & 3 & 4 \\ \hline 2' & 4 & 6 & 3 & 4 & 2 & 3 \\ \hline 3' & 3 & 3 & 4 & 2 & 1 & 2 \\ \hline 4' & 3 & 4 & 2 & 6 & 2 & 4 \\ \hline 5' & 3 & 2 & 1 & 2 & 4 & 3 \\ \hline 6' & 4 & 3 & 2 & 4 & 3 & 6 \end{array} = \begin{array}{c|c} z_1 & z_2 \\ \hline z_3 & z_4 \end{array}. \quad (10.59)$$

Исключаем последние три строки и три столбца с помощью формулы $z_1' = z_1 - z_2 z_4^{-1} z_3$:

$$z_1' = \begin{array}{c|cc} 5 & 4 & 3 \\ \hline 4 & 6 & 3 \\ \hline 3 & 3 & 4 \end{array} - \begin{array}{c|cc} 3 & 3 & 4 \\ \hline 4 & 2 & 3 \\ \hline 2 & 1 & 2 \end{array} \cdot \begin{array}{c|cc} 0,3 & 0 & 0,2 \\ \hline 0 & 0,4 & 0,2 \\ \hline -0,2 & -0,2 & 0,4 \end{array} \cdot \begin{array}{c|cc} 3 & 4 & 2 \\ \hline 3 & 2 & 1 \\ \hline 4 & 3 & 2 \end{array} = \begin{array}{c|cc} 1,9 & 1,6 & 1,6 \\ \hline 1,6 & 3,2 & 1,6 \\ \hline 1,6 & 1,6 & 3,2 \end{array}.$$

Исключаем снова последние две строки и два столбца по той же формуле:

$$z_1' = 1,9 - \begin{array}{c|c} 1,6 & 1,6 \\ \hline 1,6 & 1,6 \end{array} \cdot \begin{array}{c|cc} 0,4165 & -0,2083 \\ \hline -0,2083 & 0,4165 \end{array} \cdot \begin{array}{c} 1,6 \\ \hline 1,6 \end{array} = \begin{array}{c} 1,6 \\ \hline 1,6 \end{array} = 0,833 Z = \frac{5}{6} Z. \quad (10.60)$$

Таким образом, если импеданс каждого ребра куба равен Z , то импеданс всего куба, измеренный вдоль диагональной оси, равен $5/6 Z$. Конечно, благодаря симметрии в этом примере можно было бы найти более быстрое и простое решение.

III. Если надо найти импеданс сети относительно нескольких множеств «точек входа», то каждое множество точек входа закорачивается и рассматривается в виде дополнительного контура. Из вычисленного тензора импеданса z' исключаются все строки и столбцы, кроме тех, которые относятся к добавочным осям. Остающаяся часть z'' представляет собственные и взаимные импедансы сети относительно «точек входа».

| | | | | | |
|--|-------|--|--|-------|--|
| | i^1 | | | i^2 | |
|--|-------|--|--|-------|--|

| | | | | | |
|-------|-------|--|-------|--|--|
| | | | | | |
| e_1 | z_1 | | z_2 | | |
| | | | | | |
| e_2 | z_3 | | z_4 | | |
| | | | | | |

$$\begin{aligned}
 e_1 &= z_1 i^1 + z_2 i^2, \\
 e_2 &= z_3 i^1 + z_4 i^2.
 \end{aligned}
 \tag{10.63}$$

II. Во всех таких случаях система тензорных уравнений может быть решена только относительно i^1 (поскольку только z_1 имеет обратную). Даже когда она выражается через i^2 , компоненты i^2 могут считаться произвольными величинами.

Если z_1 содержит только то максимальное число строк и столбцов, которое позволяет осуществить обращение z_1 (т. е. определитель отличен от нуля), то это максимальное число называется рангом матрицы z . Уравнения надо перегруппировать так, чтобы матрица z_1 с максимальным рангом находилась в верхнем левом углу z .

III. Решение трех описанных выше случаев имеет вид

$$\begin{aligned}
 1. \quad & e = z_1 \cdot i^1 + z_2 \cdot i^2, \\
 & \boxed{i^1 = z_1^{-1} \cdot (e - z_2 \cdot i^2)} ; \tag{10.64}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 2. \quad & e_1 = z_1 \cdot i^1, \\
 & e_2 = z_3 \cdot i^1, \\
 & \boxed{i^1 = z_1^{-1} e_1} ; \tag{10.65}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 3. \quad & e_1 = z_1 \cdot i^1 + z_2 \cdot i^2, \\
 & e_2 = z_3 \cdot i^1 + z_4 \cdot i^2, \\
 & \boxed{i^1 = z_1^{-1} \cdot (e_1 - z_2 \cdot i^2)} . \tag{10.66}
 \end{aligned}$$

Если это значение i^1 подставляют во второе уравнение, чтобы найти $i^2 = (z_4 - z_3 \cdot z_1^{-1} \cdot z_2)^{-1} \cdot (e_2 - z_3 \cdot z_1^{-1} \cdot e_1) = z_4'^{-1} \cdot e_2'$, в численных расчетах z_4' оказывается равным нулю. Конечно, могут быть и другие случаи.

IV. В качестве примера рассмотрим уравнение $e = z \cdot i$:

$$\begin{array}{|c|c|c|c|} \hline x & y & z & w \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|c|} \hline i^1 & i^2 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{|c|} \hline 1 \\ \hline 2 \\ \hline 1 \\ \hline 2 \\ \hline \end{array}
 \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 3 & 4 & -1 & -6 \\ \hline 4 & 8 & -2 & -8 \\ \hline 5 & 4 & -1 & -10 \\ \hline 3 & 8 & -2 & -6 \\ \hline \end{array}
 \begin{array}{|c|} \hline e_1 \\ \hline e_2 \\ \hline \end{array}
 =
 \begin{array}{|c|c|} \hline z_1 & z_2 \\ \hline z_3 & z_4 \\ \hline \end{array}
 \cdot \quad (10.67)$$

Определитель z равен нулю, так как равен нулю любой трех-строчный определитель z . Однако определитель матрицы в левом верхнем углу не равен нулю, следовательно, *ранг z равен двум*. Поэтому по уравнению (10.66)

$$i^1 = z_1^{-1} \cdot (e_1 - z_2 \cdot i^2)$$

$$\begin{array}{|c|} \hline x \\ \hline y \\ \hline \end{array}
 =
 \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & -1/2 \\ \hline -1/2 & 3/8 \\ \hline \end{array}
 \cdot
 \left\{
 \begin{array}{|c|} \hline 1 \\ \hline 2 \\ \hline \end{array}
 -
 \begin{array}{|c|c|} \hline -1 & -6 \\ \hline -2 & -8 \\ \hline \end{array}
 \cdot
 \begin{array}{|c|} \hline z \\ \hline w \\ \hline \end{array}
 \right\}$$

$$\begin{array}{|c|} \hline x \\ \hline y \\ \hline \end{array}
 =
 \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & -1/2 \\ \hline -1/2 & 3/8 \\ \hline \end{array}
 \cdot
 \begin{array}{|c|} \hline 1 + z + 6w \\ \hline 2 + 2z + 8w \\ \hline \end{array}
 =
 \begin{array}{|c|} \hline 2w \\ \hline 1/4 + z/4 \\ \hline \end{array}
 \cdot \quad (10.68)$$

Таким образом, решение есть $x = 2w$ и $y = (1+z)/4$, где w и z могут принимать любые произвольные значения.

Глава 11

ТЕОРИЯ ГРУПП

1. СВОЙСТВА ТЕНЗОРА ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

I. Физическая интерпретация тензора преобразования S_{α}^{α} отличается от интерпретации всех других тензоров, встречающихся при анализе физических систем, таких как e_{α} , $z_{\alpha\beta}$, i^{β} и т. д. В то время как другие тензоры представляют некоторые конкретные свойства самой физической системы, тензор преобразования представляет определенные операции, выполняемые над системой, т. е. некоторое изменение точки зрения. Тензор преобразования S_{α}^{α} не является частью системы, как $z_{\alpha\beta}$ или e_{α} , и не входит явным образом в уравнение системы. Некоторые тензоры преобразования можно представить физически посредством проводников, соединяющих различные импедансы, но сами они не имеют импеданса и поэтому не вносят никакого вклада в энергию или мощность системы. Они только представляют систему координат, вдоль которой текут токи.

II. Из-за этого физического особого значения различные типы матриц преобразования образуют отдельный класс. Они относятся к новому типу совокупности, называемому «группой». Это значит, что каждая матрица преобразования является элементом «группы» матриц преобразования, одновременно являясь также элементом «тензора преобразования».

Благодаря тому, что матрицы преобразования принадлежат «группе», они обладают некоторыми свойствами, которых не имеет другое множество n -матриц (не принадлежащее «группе»).

Изучение этих особенных свойств и является главной темой этой главы. Есть, конечно, и другие свойства тензора преобразования, отличающие его от других тензоров.

2. ТЕОРИЯ ГРУПП

I. «Теория групп» — новая область алгебры, в которой сущности группы A , B , C ... могут подвергаться только одной операции. Результатом этой операции является сущность, также при-

надлежащая этой группе. Эту операцию будем обозначать точкой $A \cdot B = C$.

В обычной алгебре сущности a, b, c могут подвергаться нескольким операциям, таким как сложение, умножение, деление и т. д. Из-за этого множество таких объектов оказывается довольно «узким». Обычно это *отдельные* числа типа $5, 7, 2+3j, x_1y_1^2, ax+y$ и т. д. В теории групп имеется только *одна* операция и поэтому сущности A, B, C значительно более разнообразны, чем в обычной алгебре. Это могут быть, конечно, числа $5, 7$ и другие, но могут быть и n -мерные матрицы или еще более абстрактные сущности, как, например, «вращения», «перестановки», «преобразования» и т. д.

II. Отметим, что «алгебра n -мерных матриц», описанная в гл. 1 и 2 книги, может рассматриваться как еще один тип алгебры с множеством сущностей, более широким, чем в обычной алгебре (являющимся «совокупностью» чисел, образующих строки или квадраты, или кубы и т. д.), но с меньшим количеством операций, чем в обычной алгебре (деления нет, в произведении $A \cdot B$ сомножители нельзя переставлять и т. д.). «Алгебра n -мерных матриц» расположена между «обычной алгеброй» и «теорией групп». Имеется, конечно, и много других типов алгебр.

Можно показать, что с уменьшением количества разрешенных операций над сущностями расширяется поле понятий, из которых можно отбирать сущности. Если над сущностями вообще не определены операции, то их разнообразие становится еще больше.

Если сущностями группы являются всевозможные матрицы преобразования $C_1, C_2, C_3 \dots$, то единственная допустимая операция для них — *умножение* $C_1 \cdot C_2$ в том смысле, в каком говорится в гл. 1, § 12. *Помимо матриц преобразования образовать группу могут и другие матрицы.*

3. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ГРУПП

I. Не все совокупности сущностей, которые подвергаются единственной операции, образуют «группу». *Чтобы сущности и операции, которым они подвергаются, составляли группу, они должны удовлетворять четырем условиям, которым удовлетворяют все матрицы преобразования.*

1. Сущность C , являющаяся произведением $A \cdot B$ двух любых сущностей группы, должна принадлежать этой же группе. Это так называемое «*групповое свойство*». Так, C_3 , образованная из $C_1 \cdot C_2$, принадлежит той же группе.

2. В произведении нескольких элементов $A \cdot B \cdot C$ умножение может быть сделано в любом порядке: $A(BC)$ или $(AB)C$. Это «*ассоциативный закон*».

3. Один из элементов группы является «*единичным элемен-*

том», так что умножение на I оставляет любой элемент неизменным (см. уравнение (1.5), определяющее единичную матрицу I).

4. Каждый элемент A имеет некоторый «обратный» элемент $A^{-1}=B$, также принадлежащий группе, так что произведение A на его обратный A^{-1} есть единичный элемент I (см. гл. 1, § 16—вычисление матрицы обратного преобразования).

Когда элементы не имеют обратных, т. е. последнее условие не выполняется, группа называется «полугруппой». Многие теоремы теории групп справедливы также и для полугрупп.

II. Последними трем условиям удовлетворяют вообще все квадратные матрицы и, в частности, квадратные матрицы преобразования. Ассоциативный закон применим ко всем умножениям, единичная матрица I существует, и большинство квадратных матриц A имеет обратную A^{-1} , так что $AA^{-1}=I$. Однако первое условие удовлетворяется не для всех матриц, например, вообще нельзя перемножать две матрицы импедансов Z_1 и Z_2 . Первое условие является главным, определяющим принадлежность сущностей группе, и поэтому говорят, что сущности, подчиняющиеся первому условию, имеют «групповое свойство». Такими сущностями являются матрицы преобразования C как несингулярные, так и сингулярные. Задача этой главы — детально изучить первое условие, «групповое свойство»; три последних правила уже изучены в связи с тензором преобразования C .

III. Имеется обширная математическая литература по теории групп. В последнее десятилетие теория групп широко применяется в кристаллографии, теории атомных структур, квантовой динамике и во многих других областях науки. Важность понятия «группа» вытекает из того, что матрица преобразования сети C содержит неожиданно много информации о свойствах и поведении сети даже без установления каких-либо других тензоров, таких как вектор e или тензор z самой сети. В последующей главе о синтезе сетей будет показано, как, зная матрицы преобразования C сети (и импедансы ее отдельных катушек), можно предсказать, например, что сеть имеет желаемый отклик при всех частотах или что сеть поддерживает постоянные токи при всех нагрузках, или же постоянные потенциалы при различных токах без установления z' сети и выявления ее функциональных характеристик.

Иначе говоря, основные характеристики, скелет динамической системы полностью содержатся в тензоре преобразования C . Другие тензоры составляют кровь и плоть системы, но основные качества системы они не определяют. Исключительность тензора преобразования C , его «аристократизм» в обществе тензоров ясно видны еще из того, что он даже не появляется ни в одной из уравнений поведения динамической системы. Он стоит особняком, в стороне от «плебейской», грубой работы вычислительных процедур.

4. ПРИМЕРЫ КОНЕЧНЫХ ГРУПП

I. Число элементов, составляющих группу, может меняться от нескольких до бесконечности. По отношению к количеству элементов группы делятся на два класса: «конечные» и «бесконечные».

Примером «конечной группы» является множество следующих четырех сущностей: 1) поворот на $90^\circ = A$; 2) поворот на $180^\circ = B$; 3) поворот на $270^\circ = C$; 4) поворот на $360^\circ = D$. Четыре сущности A, B, C, D образуют «группу вращений», так как удовлетворяются четыре правила:

1) произведение любых двух вращений, например $B \cdot C$, есть вращение A (поворот на 90°) или $B \cdot C = A$;

2) вращение может быть выполнено в любом порядке, конечный угол вращения останется тем же;

3) имеется единичный элемент D , который оставляет все повороты без изменения $BD = B$;

4) каждое вращение имеет обратное; например, обратным для C является A , так как $CA = D$ — единичный элемент.

II. Другой пример «конечной группы» — группа всех матриц преобразования C_1, C_2, \dots , которые оставляют неизменной n -контурную сеть, но по-разному выбирают переменные из n -ветвей (см. гл. 6, § 4). Имеется только конечное число способов, которыми n переменных могут быть выбраны в n -контурной сети.

Еще пример «конечной группы» — группа всех матриц преобразования C_1, C_2, C_3, \dots , преобразующих некоторую неподвижную n -контурную сеть в любую другую n -контурную сеть. Имеется много различных способов преобразования n -контурной сети в другие n -контурные сети (но не бесконечно много).

III. Примером «полугруппы» является группа всех матриц преобразования сети с n катушками в сеть с другим числом катушек. Ни одна из этих матриц не имеет обратной. Примеры полугрупп встретятся в гл. 23 в связи с синтезом сетей.

5. ПРИМЕРЫ БЕСКОНЕЧНЫХ ГРУПП

I. Примерами наиболее важных бесконечных групп могут быть процедура наложения электромагнитных величин на сеть, суперпозиция геометрических конфигураций над пространством (или цепей¹⁾ над ячейками). Имеется бесконечно много таких процедур, но все они удовлетворяют четырем условиям группы, если операцией, производимой над ними, является сложение. Так, взяв в качестве примера приложенные напряжения, получим:

¹⁾ Здесь имеется в виду цепь топологическая — chain, а не электрическая — circuit. (Прим. пер.).

1) последовательное приложение двух напряжений также эквивалентно приложению напряжения, $e_1 + e_2 = e_3$;

2) результирующее напряжение не зависит от способа группирования, $e_1 + e_2 + e_3 = (e_1 + e_2) + e_3$ и т. д.;

3) имеется *единичный* элемент e_0 , оставляющий сеть неизменной, в этом случае e_0 есть нуль;

4) каждое приложенное напряжение e имеет *обратное* $-e$, так что их произведение (которое в данном случае является сложением) $e(-e)$ дает единичный элемент e_0 .

II. Другим примером «*бесконечной группы*» является группа всех матриц преобразования S_1, S_2, \dots , вводящих переменные *гипотетические* токи вместо действительных токов в ветвях. Такими гипотетическими токами являются «нагрузка» и «намагничивающие токи». Хотя и можно ввести бесконечное разнообразие различных гипотетических токов, однако уже соединение между катушками налагает определенные ограничения на отношения между ними ¹⁾.

6. ПОДГРУППЫ

I. Когда все элементы одной группы принадлежат другой группе, то говорят, что 1-я группа является подгруппой 2-й группы. Например, элементы конечной группы замены переменных в ветвях сети принадлежат конечной группе, изменяющей также соединения в сети, так как являются лишь частным случаем последней. Иначе говоря, группа матриц преобразования, *изменяющих токи в ветвях*, является «подгруппой» группы матриц преобразования, *изменяющих и соединения в сети*.

Группа матриц преобразования, изменяющих соединения в сети, является подгруппой группы матриц преобразования, *изменяющих соединения вращающейся машины с неподвижной системой координат*. Последняя, в свою очередь, является подгруппой так называемой «*группы линейных преобразований*» и т. д.

II. Группы различных типов обозначают обычно буквой G с индексом: G_1, G_2, \dots и т. д. Индекс показывает, какая имеется в виду конкретная группа. В этой книге мы уже определили *следующие группы матриц преобразования*:

1. G_1 = все S , изменяющие *соединения* различных катушек, т. е. преобразующие одну сеть с n катушками в другую сеть с n катушками. Эти S можно назвать «*тензором соединений*».

Эта группа матриц преобразования составляет основу изучения сетей, так как она выражает в зашифрованном виде законы Кирхгофа.

¹⁾ Благодаря соединениям между катушками величины гипотетических токов не являются совсем произвольными, а зависят друг от друга. (Прим. пер.)

2. G_b = все C , оставляющие неизменными соединения в сети, но преобразующие токи одной совокупности ветвей или контуров в токи другой совокупности.

Компоненты всех матриц преобразования, принадлежащих этим двум группам, всегда целые числа. Эти группы относятся к так называемым «группам Бетти», используемым в топологии.

3. G_p = все C , представляющие перестановки осей.

4. G_t = все C , изменяющие числа витков катушек. Их компоненты — рациональные числа.

5. G_m = все C , заменяющие действительные токи намагничивающими и токами нагрузки. Все эти группы являются «подгруппами» следующих групп:

6. G_n = все C , появляющиеся при исследовании сетей и имеющие только действительные компоненты.

Группа действительных преобразований, встречающихся при изучении сетей, является ограниченной. Она образует подгруппу более широкой группы, называемой:

7. G_l = группа «линейных преобразований», или «аффинных преобразований». Компоненты C , принадлежащие этой группе, являются любыми действительными константами (целые, дробные, иррациональные числа).

Последняя группа, в свою очередь, является подгруппой:

8. G_f = группы всех функциональных преобразований, при которых компоненты C являются функциями переменных.

Группы G_i и G_m также включают «полугруппы» матриц C , которые не имеют обратных. В G_i число контуров после соединения может быть меньше, чем до соединения; в G_m пренебрегают током намагничивания. Полугруппы можно обозначать так же, как и соответствующие группы. Каждая группа матриц преобразования образует тензор¹⁾.

Важно заметить, что каждый раз, когда вводится группа действительных преобразований, она является только подгруппой группы действительных линейных или аффинных преобразований, т. е. *имеется много аффинных преобразований, не существующих при изучении сетей.*

Кроме групп действительных преобразований, при исследовании сетей встречаются группы преобразований, C которых имеют вместо действительных компонент комплексные. Эти преобразования показаны в гл. 13.

7. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ, ИНВАРИАНТНОСТЬ, ГРУППА

I. Вследствие того что существует много разнообразных «групп» матриц преобразований, всякий раз, когда инвариантное

¹⁾ Таким образом, имеется целый ряд тензоров преобразования, одним из которых является тензор преобразования C_n^a (гл. 4). Крон не доказывает тензорный характер групп преобразований. (Прим. пер.)

уравнение выводится как инвариант относительно «группы» матриц преобразований, крайне важно определить ту группу матриц преобразований, которая при этом имеется в виду, так как уравнение, инвариантное по отношению к одной группе матриц преобразований, может быть неинвариантным по отношению к другой. Например, уравнение $e_{\alpha} = z_{\alpha\beta} i^{\beta}$ справедливо для сети только в том случае, если соединения между катушками неизменны во времени. Если же они меняются, уравнение несправедливо и неинвариантно относительно последней группы G_f .

Следовательно, три понятия: 1) «преобразование», 2) «инвариантность» и 3) «группа» в одной фразе всегда появляются вместе; например: «Входная мощность $e \cdot i = P$ » инвариантна по отношению к группе преобразований G_n .

Понятие «преобразование» не обязательно выражать при помощи «матрицы преобразования C » как $i = C \cdot i'$. Это более широкое понятие, чем C . «Преобразование», которое можно определить с помощью матрицы преобразования C , является преобразованием весьма специального типа. Поэтому в принятой фразеологии используется понятие «группа преобразований G » вместо «группа матриц преобразования G », чтобы не ограничивать форму преобразования. В этой книге «преобразование» будет означать «преобразование переменных» (i^{α} или E_{α}) с помощью $C_{\alpha}^{\alpha'}$ или $C_{\alpha'}^{\alpha}$.

II. Можно определить множество матриц преобразования C , оставляющих форму уравнения инвариантной, но не образующих «группу». Можно также ввести множество матриц C , образующих группу, но не оставляющих линейную или квадратичную форму «инвариантной». В этих случаях одно из трех понятий отсутствует и изучение таких преобразований не является тензорным анализом, так как, кроме всего прочего, не могут быть введены понятия «ковариантность» и «контравариантность».

8. ГРУППОВОЕ СВОЙСТВО

I. В гл. 6 были введены тензоры преобразования C нескольких типов, каждый из них изменял или изучаемую систему, или используемую точку зрения. Для каждого изменения C при помощи формул преобразования были отдельно вычислены различные тензоры.

Однако во многих инженерных задачах предполагается не одно, а несколько изменений одновременно. Например, в многообмоточном трансформаторе систему обмоток можно подвергнуть одновременно четырем изменениям: 1) изменению числа витков; 2) соединению обмоток; 3) исключению намагничивающих токов; 4) введению симметричных составляющих.

Или, например, проводники в пазах в машине постоянного тока подвергаются одновременно нескольким типам преобразова-

ний, в частности. 1) проводники соединяются в катушки; 2) катушки соединяются с пластинками коллектора; 3) пластины коллектора соединяются щетками; 4) щетки соединяются в цепи; 5) уравнивательные кольца вводят дополнительные пути токов.

II. В обычном анализе инженерных задач подобные одновременные изменения редки, а если и встречаются, то разделены и выполняются каждое отдельно. *Во всех нетензорных методах анализа есть попытка изучать такие преобразования как одновременные, без разделения их на последовательные этапы.*

Итак, можно ввести матрицы преобразования C_1, C_2, \dots, C_n для каждого из составляющих изменений и матрицу преобразования C результирующего изменения, которая является произведением всех отдельных изменений:

$$C = C_1 C_2 C_3 \dots C_n, \quad C_{\alpha n'}^{\alpha} = C_{\alpha'}^{\alpha} C_{\alpha''}^{\alpha'} C_{\alpha'''}^{\alpha''} \dots C_{\alpha n'}^{\alpha'''} \quad (11.1)$$

Эта формула справедлива, так как каждая матрица преобразования является элементом группы линейных преобразований G_i и их произведение является матрицей преобразования, также принадлежащей группе G_i . Можно показать, что эта формула справедлива и в том случае, когда некоторые или все матрицы сингулярные (прямоугольные, неквадратные), так как эта формула представляет так называемое «групповое свойство», которому удовлетворяют и элементы полугруппы.

Эта последняя формула дает эффективный способ экономии труда при анализе сложных инженерных задач, так как она позволяет разбить анализ на несколько шагов и осуществлять каждый шаг так, как если бы остальных не было, а затем комбинацией отдельных шагов получить один результирующий.

III. Интересно отметить, что «групповое свойство» процесса прикладывания напряжений, показанного в § 5.I (т. е. возможность приложения нескольких напряжений и независимого подсчета эффектов от них, как если бы других напряжений не было), используется в электротехнике под названием «теоремы о суперпозиции». Следовательно, разделение преобразования на ряд последовательных преобразований эквивалентно другому типу теоремы о суперпозиции.

9. РАСЧЛЕНЕНИЕ СЛОЖНЫХ ПРОБЛЕМ

Введенные нами ранее экономящие труд приемы, которые позволяют инженеру расчленивать сложную проблему на несколько независимых более простых подпроблем, можно грубо разбить на три класса, предполагая, что большое число подобных систем следует анализировать одновременно:

I. Понятие геометрического объекта позволяет инженеру произвольно разделить полную физическую систему на несколько независимых физических подсистем, каждая из которых имеет

или геометрические объекты различных типов, или поведение совершенно разных типов. Например, *некоторую часть сети можно отделить и проанализировать отдельно*. Или систему передачи можно произвольно разделить на вращающиеся машины, многообмоточные трансформаторы, линии передачи и каждую часть проанализировать отдельно, как если бы остальные отсутствовали, а затем объединить их в первоначальную систему.

2. Понятие *тензоров преобразования* позволяет инженеру разделить каждую из имеющегося большого числа подобных физических систем на *две аналитические части*: идентичные для всех систем, подобно $Z_{\alpha\beta}$, и различные в каждой частной системе, а именно S_{α}^{α} .

Установление матрицы S_{α}^{α} для каждой частной системы практически является единственным этапом анализа, на котором требуется участие инженера для установления уравнений поведения.

3. Понятие *группового свойства* позволяет инженеру разделить *аналитическую часть* его работы, а именно: разделить вывод S_{α}^{α} на несколько независимых шагов, каждый из которых имеет свои собственные методы анализа.

Физическое и аналитическое *разделение* группы проблем в последовательность более простых проблем и их *объединение* в исходную группу проблем возможно только благодаря введению понятия «группа» матриц преобразования S_{α}^{α} . Если их не использовать, то: 1) каждую физическую систему следует анализировать *отдельно*, как если бы аналогичные системы не анализировались; 2) физическую систему нужно анализировать *как целое*, за исключением очень простых случаев, в которых матрица преобразования S становится, как правило, единичной.

10. ТИПЫ РАЗДЕЛЕНИЯ С

Подразделение матрицы преобразования S на произведение нескольких матриц преобразования S_1, S_2, \dots может быть подсказано различными способами рассмотрения.

1. Сама задача *автоматически* членит матрицу преобразования на два или более шагов. Например, в трансформаторной системе происходит расчленение преобразования на два шага: 1) соединение катушек с помощью S_1 и 2) пренебрежение токами намагничивания посредством S_2 является очевидным из-за глубокого различия природы этих преобразований.

Другим случаем *автоматического* разделения S является пример якорной обмотки электрической машины постоянного тока, рассмотренный в § 7.

2. Матрица преобразования может охватывать лишь один тип преобразования, но он может быть столь *сложным*, что во избежание ошибок матрица строится в несколько этапов.

Например, в сложной сети можно соединить сначала, скажем, те катушки, которые образуют ветви последовательным соединением, и построить на этом шаге C_1 . Затем ветви, представляемые как отдельные катушки, соединяются в конечную сеть посредством C_2 . Произведение $C_1 \cdot C_2$ эквивалентно построению C за один шаг. Окончательные соединения можно сделать при желании за три или более шага. Во вращающихся машинах такое разделение часто используется, чтобы избежать недоразумений.

3. Преобразование может быть однотипным, и матрица C устанавливается за один шаг, но *разделение C на $C_1 \cdot C_2 \dots$ все же проводится из аналитических соображений.*

Например, может оказаться, что произведение $C_t \cdot z \cdot C$ вычисляется значительно быстрее, если оно выполняется в несколько этапов:

$$C_t \cdot z \cdot C = (C_{2t} \cdot C_{1t}) \cdot z \cdot (C_1 \cdot C_2) = C_{2t} \cdot (C_{1t} \cdot z \cdot C_1) C_2, \quad (11.2)$$

т. е. z сначала дважды умножается на C_1 , так что $C_{1t} \cdot z \cdot C_1 = z'$, и затем дважды на C_2 . Такие случаи встречаются, например, при вычислении реактансов якорных обмоток, когда нахождение результирующей C довольно просто, но сама матрица z может иметь несколько сотен строк и столбцов и ее совершенно необходимо быстро привести к матрице с небольшим числом строк и столбцов.

Подчеркивается, что для анализа матрицу преобразования C можно произвольно расчленить на произведение $C_1 C_2 C_3 \dots$, даже если C_1 или C_2 и другие не соответствуют никакой физической реальности или даже гипотетическому расчленению. Расчленение может быть чисто аналитическим.

11. МНОГООБМОТОЧНЫЕ ТРАНСФОРМАТОРНЫЕ СИСТЕМЫ

I. Примерами сетей, анализ которых требует применения поменьшей мере двух тензоров преобразования, являются многочисленные типы трансформаторных систем. Их *результрующий* тензор преобразования является произведением следующих двух составляющих тензоров преобразования:

1) C_1 , показывающий способ соединения обмоток в контурную сеть; он находится тем же способом, что и для любой контурной сети;

2) C_2 , показывающий, что током намагничивания каждой замкнутой магнитной цепи пренебрегают; способ построения описан в гл. 6, § 10.

Результирующий тензор преобразования C есть

$$C = C_1 C_2. \quad (11.3)$$

II. Чтобы пренебречь токами намагничивания, надо, во-первых, выразить уравнения связей в *новых* токах i' , появляющихся после введения соединений, полагая сумму магнитодвижущих

сил каждой замкнутой магнитной цепи равной нулю; затем выразить их как $i' = C_2 i''$, где C_2 является сингулярной матрицей, имеющей меньше столбцов, чем строк, на число уравнений связей.

Так как установить уравнения связей в терминах i' , появляющихся *после* введения соединений, нелегко, *проще сначала установить уравнения связей в терминах старых токов i , существующих до введения соединений*, и затем заменить старые токи новыми из соотношения $i = C_1 i'$.

Следовательно, тензор преобразования C_2 , определяющий пренебрежение токами намагничивания, выводится в три этапа:

1) уравнения связей выводятся в терминах старых токов i при отбрасывании всех соединений;

2) старые токи заменяются новыми из соотношения $i = C_1 i'$, тем самым получаем уравнения связей в терминах новых токов;

3) результирующие уравнения связей заменяются соотношением $i' = C_2 i''$.

III. Анализ трансформаторных систем отличается от анализа любой другой общей сети еще одним. В общих неподвижных сетях конструктивными параметрами катушек примитивной сети являются обычно *собственные импедансы* каждой группы Z_{aa} , Z_{bb} и взаимные импедансы Z_{ab} , Z_{ca} между любыми двумя катушками. Однако в сетях многообмоточного трансформатора, где токами намагничивания пренебрегают, для примитивного трансформатора *применяют параметры нового типа, так называемые «импедансы потерь» между двумя катушками Z_{a-b}* (их также называют «проходными импедансами», или «компенсирующими импедансами»). В терминах этих конструктивных параметров конечные уравнения приобретают более простую форму.

Ясно, что и тип компонент тензора импеданса z примитивной сети, и то, каким способом устанавливается результирующий тензор преобразования C , не изменяют пользование формулами. Тензор импеданса z' результирующей сети находится, конечно, как $C_1 \cdot z \cdot C$; напряжения, индуцированные в отдельных обмотках, как $z \cdot C \cdot i''$ и т. д.

12. ТЕНЗОР ИМПЕДАНСА ПРИМИТИВНОГО ТРАНСФОРМАТОРА

I. Пусть имеются две катушки, *соединенные встречно* и состоящие из одного витка каждая. Если z_{11} , z_{22} и z_{12} — собственные и взаимные импедансы каждой катушки, результирующий импеданс двух катушек, соединенных встречно, есть

$$z_{1-2} = z_{11} + z_{22} - 2z_{12}. \quad (11.4)$$

Этот импеданс называется «импедансом потерь» (leakage) между двумя катушками.

Можно сказать, что «*собственный импеданс потерь*» каждой катушки равен нулю, тогда как «*взаимный импеданс потерь*» между двумя катушками равен $-z_{1-2}/2$. Отрицательный знак

появляется из-за того, что поток каждой катушки направлен навстречу потоку другой катушки. Множитель $1/2$ появляется из-за того, что напряжение, индуцированное на одной катушке, равно половине напряжения, индуцированного на обеих катушках.

II. Следовательно, если имеется n катушек на одном сердечнике, каждая из которых имеет один виток, то тензор импеданса многообмоточного трансформатора в терминах собственных и взаимных импедансов потерь есть

$$z_1 = -1/2 \times \begin{array}{c|ccccc} & 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ \hline 1 & 0 & z_{1-2} & z_{1-3} & \dots & z_{1-n} \\ \hline 2 & z_{1-2} & 0 & z_{2-3} & \dots & z_{2-n} \\ \hline 3 & z_{1-3} & z_{2-3} & 0 & \dots & z_{3-n} \\ \hline \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \hline n & z_{1-n} & z_{2-n} & z_{3-n} & \dots & 0 \end{array} \quad (11.5)$$

Следует заметить, что все диагональные компоненты равны нулю. Заметим также наличие множителя $-1/2$ у каждой компоненты.

III. Когда катушки имеют различное число витков, взаимный импеданс потерь двух катушек определяется как

$$Z_{2-3} = -n_2 n_3 (z_{22} + z_{33} - 2z_{23})/2. \quad (11.6)$$

Заметим наличие множителя $-1/2$.

В терминах этих реальных витков импедансов потерь тензор импеданса многообмоточного трансформатора с изолированными обмотками («примитивный трансформатор») будет

$$z = \begin{array}{c|ccccc} & 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ \hline 1 & 0 & Z_{1-2} & Z_{1-3} & \dots & Z_{1-n} \\ \hline 2 & Z_{1-2} & 0 & Z_{2-3} & \dots & Z_{2-n} \\ \hline z=3 & Z_{1-3} & Z_{2-3} & 0 & \dots & Z_{3-n} \\ \hline \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \hline n & Z_{1-n} & Z_{2-n} & Z_{3-n} & \dots & 0 \end{array} \quad (11.7)$$

Он имеет нулевые компоненты на главной диагонали и содержит несколько конструктивных параметров.

Этот тензор импеданса z , рассматриваемый далее как тензор импеданса «примитивного многообмоточного трансформатора», предполагает, что токами намагничивания пренебрегают. Каждая компонента находится из уравнения (11.6).

IV. Реальный взаимный импеданс Z_{23} между двумя катушками определяется в терминах импедансов *отдельного витка* как $Z_{23} = n_2 n_3 z_{23}$.

Если эти *реальные* импедансы используются вместо импедансов *потерь*, то z в уравнении (11.7) не содержит нулевые компоненты, он также содержит на n больше конструктивных параметров

13. ДРУГОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ ИМПЕДАНСА ПОТЕРЬ ⁴⁾

I. Обычно в практике принято одну из обмоток рассматривать как эталонную, скажем катушку с числом витков n_1 , и определять взаимный импеданс потерь двух катушек как

$$Z'_{2-3} = n_1 n_1 (z_{22} + z_{33} - 2z_{23}). \quad (11.8)$$

Следует заметить, что здесь предполагается одинаковое количество витков n_1 у всех катушек.

В терминах этих импедансов потерь при равных числах витков тензор импеданса

$$z_2 = -\frac{1}{2} \times \begin{array}{c|ccccc} & 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ \hline 1 & 0 & Z'_{1-2} & Z'_{1-3} & \dots & Z'_{1-n} \\ \hline 2 & Z'_{1-2} & 0 & Z'_{2-3} & \dots & Z'_{2-n} \\ \hline 3 & Z'_{1-3} & Z'_{2-3} & 0 & \dots & Z'_{3-n} \\ \hline \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \hline n & Z'_{1-n} & Z'_{2-n} & Z'_{3-n} & \dots & 0 \end{array}. \quad (11.9)$$

II. От тензора (11.9) можно перейти к тензору (11.7) при помощи тензора преобразования

$$C = \begin{array}{c|ccccc} & 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ \hline 1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \hline 2 & 0 & n_2/n_1 & 0 & \dots & 0 \\ \hline 3 & 0 & 0 & n_3/n_1 & \dots & 0 \\ \hline \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \hline n & 0 & 0 & 0 & 0 & n_n/n_1 \end{array}, \quad (11.10)$$

⁴⁾ Этот параграф может быть опущен при первом чтении.

так что $z = C_1 z_2 C_1$;

$$z = -\frac{1}{2} \times \begin{array}{c|ccccc} & 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ \hline 1 & 0 & \frac{n_2}{n_1} Z'_{1-2} & \frac{n_3}{n_1} Z'_{1-3} & \dots & \frac{n_n}{n_1} Z'_{1-n} \\ \hline 2 & \frac{n_2}{n_1} Z'_{1-2} & 0 & \frac{n_2 n_3}{n_1 n_1} Z'_{2-3} & \dots & \frac{n_2 n_n}{n_1 n_1} Z'_{2-n} \\ \hline 3 & \frac{n_3}{n_1} Z'_{1-3} & \frac{n_2 n_3}{n_1 n_1} Z'_{2-3} & 0 & \dots & \frac{n_3 n_n}{n_1 n_1} Z'_{3-n} \\ \hline \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \hline n & \frac{n_n}{n_1} Z'_{1-n} & \frac{n_2 n_n}{n_1 n_1} Z'_{2-n} & \frac{n_3 n_n}{n_1 n_1} Z'_{3-n} & \dots & 0 \end{array} \quad (11.11)$$

поэтому из уравнений (11.6) и (11.8) имеем

$$Z_{2-3} = -Z'_{2-3} \left(\frac{1}{2} \right) \frac{n_2 n_3}{n_1 n_1} \quad \text{или} \quad Z'_{2-3} = -Z_{2-3} \frac{2n_1 n_1}{n_2 n_3}. \quad (11.12)$$

Следовательно, можно считать, что тензор импеданса z примитивного многообмоточного трансформатора определяется равенством (11.7) или (11.11). Первый тензор содержит импедансы потерь Z_{2-3} при реальном числе витков, второй тензор содержит обычные импедансы потерь Z'_{2-3} при равном числе витков.

III. Возможно использование вместо Z'_{2-3} и Z_{2-3} импедансов потерь других типов. Однако мы здесь это рассматривать не будем.

Разумеется, z может содержать также и обычные собственные и взаимные импедансы Z_{22} , Z_{23} , ... и другие вместо импедансов потерь Z_{2-3} , ... и т. д. Но какие бы компоненты ни использовались для z , последующий анализ равно справедлив для компонент всех типов.

14. МНОГООБОМОТЧНЫЙ АВТОТРАНСФОРМАТОР

I. В качестве простого примера рассмотрим трехобмоточный трансформатор (рис. 11.1, а); его три катушки a , b , c и нагрузка d соединены в двухконтурную сеть, как показано на рис. 11.1, б.

Тензор импеданса примитивной сети, содержащий импедансы потерь (рис. 11.1, в),

| | | | | | |
|-------|---|-----------|-----------|-----------|-----|
| | a | b | c | d | |
| $z =$ | a | 0 | Z_{a-b} | Z_{a-c} | 0 |
| | b | Z_{a-b} | 0 | Z_{b-c} | 0 |
| | c | Z_{a-c} | Z_{b-c} | 0 | 0 |
| | d | 0 | 0 | 0 | Z |

(11.13)

(можно использовать любые другие реальные импедансы или импедансы потерь).

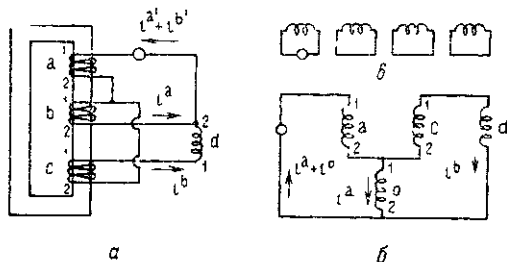


Рис. 11.1.

a — многообмоточный автотрансформатор; *б* — диаграмма соединения; *в* — примитивная сеть.

Вектор приложенных напряжений

$$e = \begin{bmatrix} a & b & c & d \\ e_a & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (11.14)$$

II. Тензор преобразования C_1 , представляющий соединения, получается приравниванием старых и новых токов в каждой катушке (рис. 11.1, б):

$$\begin{aligned}
 i^a &= i^{a'} + i^{b'} \\
 i^b &= i^{a'} \\
 i^c &= -i^{b'} \\
 i^d &= i^{b'}
 \end{aligned}
 \quad C_1 = \begin{bmatrix} a' & b' \\ a & 1 & 1 \\ b & 1 & \\ c & & -1 \\ d & & 1 \end{bmatrix}. \quad (11.15)$$

III. Тензор преобразования C_2 , пренебрегающий токами намагничивания, получается следующим образом.

1. МДС в сердечнике трансформатора полагаются равными нулю. Вместо новых токов используются токи примитивной сети, т. е. токи, существовавшие до введения соединений, так что

$$n_a i^a + n_b i^b + n_c i^c = 0. \quad (11.16)$$

Это уравнение связи в терминах старых токов.

2. В уравнении связи старые токи заменяются новыми по уравнению (11.15)

$$n_a (i^{a'} + i^{b'}) + n_b (i^{a'}) + n_c (-i^{b'}) = 0 \quad (11.17)$$

или

$$(n_a + n_b) i^{a'} + (n_a - n_c) i^{b'} = 0. \quad (11.18)$$

Это уравнение связи в терминах новых токов.

3. Исключение одного (любого) из новых токов дает

$$i^{a'} = \frac{n_c - n_a}{n_a + n_b} i^{b'}. \quad (11.19)$$

4. Оставляя другие токи неизменными, уравнение связи (11.16) заменяем системой уравнений $i' = C_2 i''$:

$$i^{a'} = \frac{n_c - n_a}{n_a + n_b} i^{b''} \quad C_2 = \begin{array}{c|c} & \begin{array}{c} b'' \\ \hline a' \\ \hline n_c - n_a \\ \hline n_a + n_b \\ \hline b' \\ \hline 1 \end{array} \\ \hline & \begin{array}{c} b'' \\ \hline a' \\ \hline n \\ \hline b' \\ \hline 1 \end{array} \end{array} = \begin{array}{c|c} & \begin{array}{c} b'' \\ \hline a' \\ \hline n \\ \hline b' \\ \hline 1 \end{array} \end{array} \quad (11.20)$$

$$i^{b'} = i^{b''}$$

IV. Результирующий тензор преобразования C есть

$$C_1 C_2 = \begin{array}{c|cc} & \begin{array}{cc} a' & b' \end{array} \\ \hline \begin{array}{c} a \\ b \\ c \\ d \end{array} & \begin{array}{cc} 1 & 1 \\ 1 & \\ & -1 \\ & 1 \end{array} \end{array} \cdot \begin{array}{c|c} & \begin{array}{c} b'' \\ \hline a' \\ \hline n \\ \hline b' \\ \hline 1 \end{array} \\ \hline & \begin{array}{c} b'' \\ \hline a' \\ \hline n \\ \hline b' \\ \hline 1 \end{array} \end{array} = \begin{array}{c|c} & \begin{array}{c} b'' \\ \hline a \\ \hline n+1 \\ \hline b \\ \hline n \\ \hline c \\ \hline -1 \\ \hline d \\ \hline 1 \end{array} \end{array} = C \quad (11.21)$$

Тензор импеданса многообмоточного автотрансформатора $C_1 C_2$

$$z' = b'' \left[\begin{array}{c} b'' \\ \hline 2(n+1)nZ_{a-b} - 2(n+1)Z_{a-c} - 2nZ_{b-c} + Z \end{array} \right] \quad (11.22)$$

действует, как простой импеданс.

Вектор приложенных напряжений $C_t e$ есть

$$e' = \boxed{(n+1)e_a} \quad (11.23)$$

Уравнение напряжений $e' = z' i''$, из которого найдем токи с помощью $z'^{-1} e'$:

$$i'' = \frac{(n+1)e_a}{2(n+1)nZ_{a-b} - 2(n+1)Z_{a-c} - 2nZ_{b-c} + Z} \quad (11.24)$$

V. Токи, протекающие в каждой отдельной катушке $i = C \cdot i''$,

$$i = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline a & b & c & d \\ \hline (n+1)i^{b''} & ni^{b''} & -i^{b''} & i^{b''} \\ \hline \end{array} \quad (11.25)$$

Напряжения, индуцированные в каждой отдельной катушке, находятся как $z \cdot C \cdot i''$, где $z \cdot C$ вычислялось при нахождении z' :

$$e_c = \begin{array}{|c|} \hline a \\ \hline i^{b''} (nZ_{a-b} - Z_{a-c}) \\ \hline b \\ \hline i^{b''} [(n+1)Z_{a-b} - Z_{b-c}] \\ \hline c \\ \hline i^{b''} [(n+1)Z_{a-c} + nZ_{b-c}] \\ \hline d \\ \hline i^{b''} Z \\ \hline \end{array} \quad (11.26)$$

15. ОТНОШЕНИЕ НАГРУЗОК БЛОКОВ УПРАВЛЕНИЯ И РЕГУЛИРОВАНИЯ

I. В качестве примера *нескольких* соединенных многообмоточных трансформаторов рассмотрим четырехконтурную сеть (рис. 11.2), образованную одним трехобмоточным трансформатором, двумя двухобмоточными и нагрузкой.

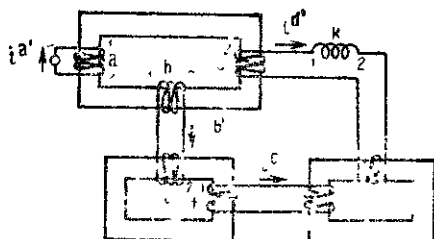


Рис. 11.2. Отношение нагрузок блоков управления и регулирования.

II. Тензор импеданса примитивной сети

| | a | b | c | d | f | g | h | k |
|---|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----|
| a | | Z_{a-b} | Z_{a-c} | | | | | |
| b | Z_{a-b} | | Z_{b-c} | | | | | |
| c | Z_{a-c} | Z_{b-c} | | | | | | |
| d | | | | | Z_{d-f} | | | |
| f | | | | Z_{d-f} | | | | |
| g | | | | | | | Z_{g-h} | |
| h | | | | | | Z_{g-h} | | |
| k | | | | | | | | Z |

(11.27)

и вектор приложенных напряжений

| | a | b | c | d | f | g | h | k |
|-----|-------|---|---|---|---|---|---|---|
| e = | e_a | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |

(11.28)

III. Тензор преобразования четырехконтурной сети находим, приравнявая старые и новые токи в каждой катушке:

| $i^a = i^{a'}$ $i^b = i^{b'}$ $i^c = i^{d'}$ $i^d = -i^{b'}$ $i^f = -i^{c'}$ $i^g = i^{c'}$ $i^h = i^{d'}$ $i^k = i^{d'}$ | <table border="1" style="border-collapse: collapse; text-align: center; width: 100%;"> <thead> <tr> <th></th> <th>a'</th> <th>b'</th> <th>c'</th> <th>d'</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <th>a</th> <td>1</td> <td></td> <td></td> <td></td> </tr> <tr> <th>b</th> <td></td> <td>1</td> <td></td> <td></td> </tr> <tr> <th>c</th> <td></td> <td></td> <td></td> <td>1</td> </tr> <tr> <th>d</th> <td></td> <td>-1</td> <td></td> <td></td> </tr> <tr> <th>f</th> <td></td> <td></td> <td>-1</td> <td></td> </tr> <tr> <th>g</th> <td></td> <td></td> <td>1</td> <td></td> </tr> <tr> <th>h</th> <td></td> <td></td> <td></td> <td>1</td> </tr> <tr> <th>k</th> <td></td> <td></td> <td></td> <td>1</td> </tr> </tbody> </table> <p style="text-align: right; margin-top: -10px;">(11.29)</p> | | a' | b' | c' | d' | a | 1 | | | | b | | 1 | | | c | | | | 1 | d | | -1 | | | f | | | -1 | | g | | | 1 | | h | | | | 1 | k | | | | 1 |
|--|---|----|----|----|----|----|---|---|--|--|--|---|--|---|--|--|---|--|--|--|---|---|--|----|--|--|---|--|--|----|--|---|--|--|---|--|---|--|--|--|---|---|--|--|--|---|
| | a' | b' | c' | d' | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| a | 1 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| b | | 1 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| c | | | | 1 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| d | | -1 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| f | | | -1 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| g | | | 1 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| h | | | | 1 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| k | | | | 1 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |

IV. Имеем три уравнения связи по одному для каждого трансформатора. В терминах старых токов, протекавших до введения

соединений (полагая МДС в сердечнике каждого трансформатора равной нулю (рис. 11.2)),

$$\begin{aligned} n_a i^a + n_b i^b + n_c i^c &= 0, \\ n_d i^d + n_f i^f &= 0, \\ n_g i^g + n_h i^h &= 0. \end{aligned} \quad (11.30)$$

Эти уравнения, выраженные через четыре *новых* тока, протекающих после введения соединений, приобретают вид (подставляя уравнение (11.29))

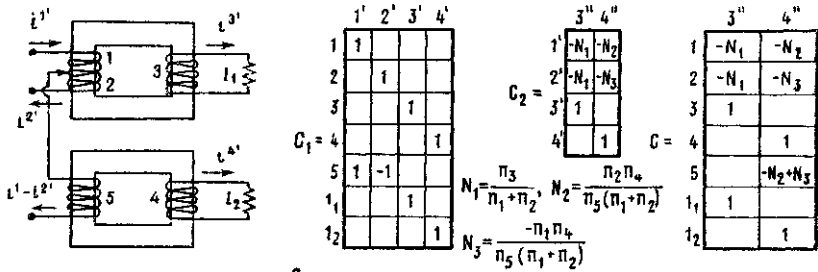
$$\begin{aligned} n_a i^{a'} + n_b i^{b'} + n_c i^{d'} &= 0, \\ -n_d i^{b'} - n_f i^{c'} &= 0, \\ n_g i^{c'} + n_h i^{d'} &= 0. \end{aligned} \quad (11.31)$$

Три тока, скажем $i^{a'}$, $i^{b'}$ и $i^{c'}$, можно выразить через четвертый ток $i^{d'}$

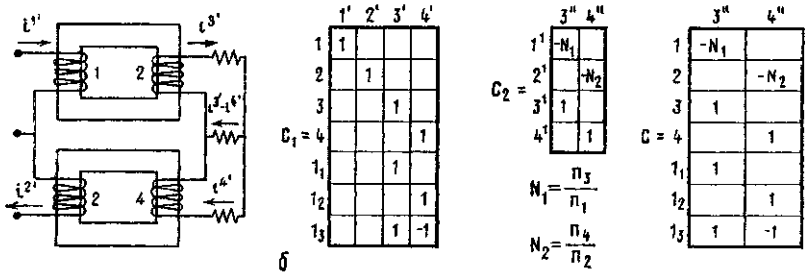
$$\begin{aligned} i^{c'} &= -(n_h/n_g) i^{d'}, \\ i^{b'} &= -(n_f/n_d) i^{c'} = (n_f/n_d)(n_h/n_g) i^{d'}, \\ i^{a'} &= -(n_b/n_a) i^{b'} - (n_c/n_a) i^{d'} = -\left(\frac{n_b}{n_a} \frac{n_f}{n_d} \frac{n_h}{n_g} + \frac{n_c}{n_a}\right) i^{d'}. \end{aligned} \quad (11.32)$$

Следовательно, три уравнения связи можно выразить преобразованием $\mathbf{i}' = \mathbf{C}_2 \mathbf{i}''$:

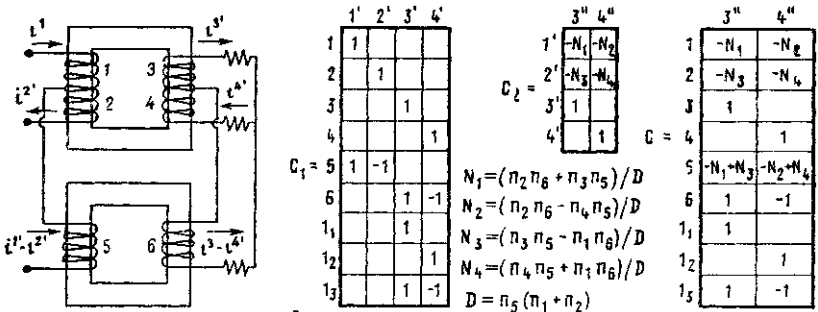
$$\begin{aligned} i^{a'} &= -\left(\frac{n_b}{n_a} \frac{n_f}{n_d} \frac{n_h}{n_g} + \frac{n_c}{n_a}\right) i^{d''} \\ i^{b'} &= \frac{n_f}{n_d} \frac{n_h}{n_g} i^{d''} \\ i^{c'} &= -\frac{n_h}{n_g} i^{d''} \\ i^{d'} &= i^{d''} \end{aligned} \quad \mathbf{C}_2 = \begin{array}{c} \begin{array}{c} a' \\ b' \\ c' \\ d' \end{array} \\ \begin{array}{c} \hline \hline \hline \hline \end{array} \\ \begin{array}{c} a' \\ b' \\ c' \\ d' \end{array} \end{array} = \begin{array}{c} \begin{array}{c} d'' \\ d'' \end{array} \\ \begin{array}{c} \hline \hline \hline \hline \end{array} \\ \begin{array}{c} a' \\ b' \\ c' \\ d' \end{array} \end{array} \quad (11.33)$$



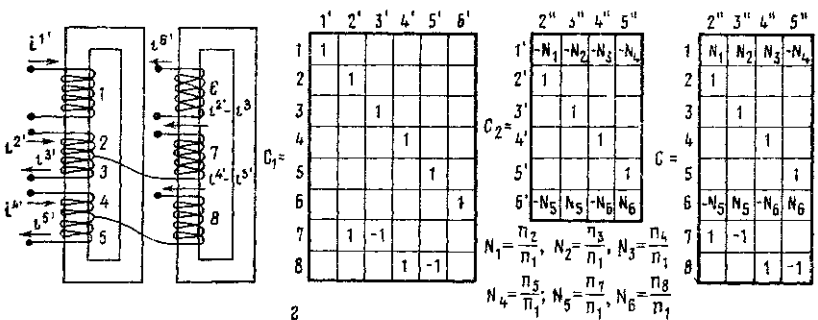
а



б



в



г

Первая колонка — C_1 , показывающая соединение катушек; вторая колонка — C_2 , пренебрегающая токами намагничивания; третья колонка — C , представляющая их результирующую (произведение).

а — схема для перехода с трехфазной системы на двухфазную; б — V — V-соединение; в — T — T-соединение; г — двойная схема для перехода с двухфазной системы на трехфазную.

V Результирующий тензор преобразования

$$C_1 C_2 = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} & a' & b' & c' & d' \\ a & 1 & & & \\ b & & 1 & & \\ c & & & & 1 \\ d & & -1 & & \\ f & & & -1 & \\ g & & & & 1 \\ h & & & & 1 \\ k & & & & 1 \end{array} \\ \cdot \\ \begin{array}{c} d'' \\ \begin{array}{c} a' \\ b' \\ c' \\ d' \end{array} \\ \begin{array}{c} -n_1 \\ n_2 \\ -n_3 \\ 1 \end{array} \end{array} \\ = C \cdot \begin{array}{c} d'' \\ \begin{array}{c} a \\ b \\ c \\ d \\ f \\ g \\ h \\ k \end{array} \\ \begin{array}{c} -n_1 \\ n_2 \\ 1 \\ -n_2 \\ n_3 \\ -n_3 \\ 1 \\ 1 \end{array} \end{array} \quad (11.34)$$

VI. Новые компоненты тензора импеданса находят как $C_t z C$, а новые компоненты вектора приложенных напряжений — как $C_t e$:

$$z' = d'' \begin{array}{c} d'' \\ \begin{array}{c} -2n_1 n_2 Z_{a-b} - 2n_1 Z_{a-c} + \\ + 2n_2 Z_{b-c} - 2n_2 n_3 Z_{d-f} - \\ - 2n_3 Z_{g-h} + Z \end{array} \end{array}, \quad (11.35) \quad e' = \begin{array}{c} d'' \\ \begin{array}{c} -n_1 e_a \end{array} \end{array}. \quad (11.36)$$

Ток $i^{d''}$ находят из $i'' = z'^{-1} e'$.

VII. Токи в каждой катушке находят как $i = C i''$ (11.34)

$$i = \begin{array}{c} \begin{array}{cccccccc} a & b & c & d & f & g & h & k \end{array} \\ \begin{array}{c} -n_1 i^{d''} \quad n_2 i^{d''} \quad i^{d''} \quad -n_2 i^{d''} \quad n_3 i^{d''} \quad -n_3 i^{d''} \quad i^{d''} \quad i^{d''} \end{array} \end{array}. \quad (11.37)$$

Падение напряжения на каждой катушке находят из $z C i''$.

VIII. Таблица 11.1 показывает матрицы результирующего преобразования и матрицы его компонент некоторых широко используемых несбалансированных соединений трансформаторов.

16. НЕСИММЕТРИЧНЫЙ ВПИСАННЫЙ ТРЕУГОЛЬНИК

I. Пусть три трехобмоточных трансформатора (рис. 11.3) питают несбалансированную нагрузку. Для большей общности обмотки можно предположить различными (несбалансированные трехфазные цепи многообмоточных трансформаторов будут рассмотрены с помощью более быстрой процедуры в гл. 19; настоящий пример более медленной процедуры будет затем использован для проверки быстрой процедуры).

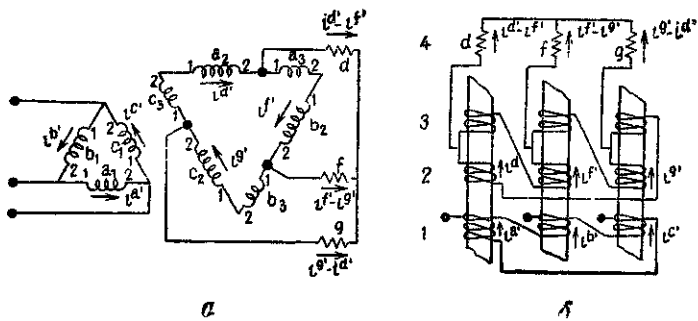


Рис. 11.3. Несимметричный вписанный треугольник:
 а — диаграмма соединений; б — действительные соединения.

II. Тензор импеданса примитивной сети

| | a_1 | b_1 | c_1 | a_2 | b_2 | c_2 | a_3 | b_3 | c_3 | d | f | g |
|-------|---------------|---------------|---------------|---------------|---------------|---------------|---------------|---------------|---------------|----------|----------|----------|
| a_1 | | | | $Z_{a_1-a_2}$ | | | $Z_{a_1-a_3}$ | | | | | |
| b_1 | | | | | $Z_{b_1-b_2}$ | | | $Z_{b_1-b_3}$ | | | | |
| c_1 | | | | | | $Z_{c_1-c_2}$ | | | $Z_{c_1-c_3}$ | | | |
| a_2 | $Z_{a_1-a_2}$ | | | | | | $Z_{a_2-a_3}$ | | | | | |
| b_2 | | $Z_{b_1-b_2}$ | | | | | | $Z_{b_2-b_3}$ | | | | |
| c_2 | | | $Z_{c_1-c_2}$ | | | | | | $Z_{c_2-c_3}$ | | | |
| a_3 | $Z_{a_1-a_3}$ | | | $Z_{a_2-a_3}$ | | | | | | | | |
| b_3 | | $Z_{b_1-b_2}$ | | | $Z_{b_2-b_3}$ | | | | | | | |
| c_3 | | | $Z_{c_1-c_2}$ | | | $Z_{c_2-c_3}$ | | | | | | |
| d | | | | | | | | | | Z_{dd} | Z_{df} | Z_{dg} |
| f | | | | | | | | | | Z_{fd} | Z_{ff} | Z_{fg} |
| g | | | | | | | | | | Z_{gd} | Z_{gf} | Z_{gg} |

$$(11.38)$$

или, записывая как компаунд-тензор,

$$z = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix} & \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline & z_{1-2} & z_{1-3} & \\ \hline z_{1-2} & & z_{2-3} & \\ \hline z_{1-3} & z_{2-3} & & \\ \hline & & & z_4 \\ \hline \end{array} \end{matrix}, \quad (11.39)$$

где z_{1-2} и другие являются диагональными матрицами.

III. Тензор преобразования соединений

$$\begin{matrix} i^{a_1} = i^{a'} \\ i^{b_1} = i^{b'} \\ i^{c_1} = i^{c'} \\ i^{a_2} = i^{d'} \\ i^{b_2} = i^{f'} \\ i^{c_2} = i^{g'} \\ i^{a_3} = i^{f'} \\ i^{b_3} = i^{g'} \\ i^{c_3} = i^{i'} \\ i^d = i^{d'} - i^{f'} \\ i^f = i^{f'} - i^{g'} \\ i^g = -i^{d'} + i^{g'} \end{matrix} \quad C_1 = \begin{matrix} & \begin{matrix} a' & b' & c' & d' & f' & g' \end{matrix} \\ \begin{matrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \\ a_2 \\ b_2 \\ c_2 \\ a_3 \\ b_3 \\ c_3 \\ d \\ f \\ g \end{matrix} & \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|} \hline 1 & & & & & \\ \hline & 1 & & & & \\ \hline & & 1 & & & \\ \hline & & & 1 & & \\ \hline & & & & 1 & \\ \hline & & & & & 1 \\ \hline & & & & 1 & \\ \hline & & & & & & 1 \\ \hline & & & 1 & -1 & & \\ \hline & & & & 1 & -1 & \\ \hline & & & & -1 & & 1 \\ \hline \end{array} \end{matrix} = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1' & 2' \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix} & \begin{array}{|c|c|} \hline I & \\ \hline & I \\ \hline & C_1 \\ \hline & C_2 \\ \hline \end{array} \end{matrix}. \quad (11.40)$$

IV. Уравнения связи в терминах 12 старых токов

$$\begin{aligned} n_{a_1} i^{a_1} + n_{a_2} i^{a_2} + n_{a_3} i^{a_3} &= 0, \\ n_{b_1} i^{b_1} + n_{b_2} i^{b_2} + n_{b_3} i^{b_3} &= 0, \\ n_{c_1} i^{c_1} + n_{c_2} i^{c_2} + n_{c_3} i^{c_3} &= 0. \end{aligned} \quad (11.41)$$

Они же в терминах *новых* шести токов

$$\begin{aligned} n_{a_1} i^{a'} + n_{a_2} i^{d'} + n_{a_3} i^{f'} &= 0, \\ n_{b_1} i^{b'} + n_{b_2} i^{f'} + n_{b_3} i^{g'} &= 0, \\ n_{c_1} i^{c'} + n_{c_2} i^{b'} + n_{c_3} i^{d'} &= 0. \end{aligned} \quad (11.42)$$

Исключая, например, $i^{a'}$, $i^{b'}$, $i^{c'}$, уравнения преобразования $i' = C_2 i''$ приведем к виду

$$\begin{aligned} i^{a''} &= -(n_{a_2}/n_{a_1}) i^{d''} - (n_{a_3}/n_{a_1}) i^{f''} \\ i^{b''} &= -(n_{b_2}/n_{b_1}) i^{f''} - (n_{b_3}/n_{b_1}) i^{g''} \\ i^{c''} &= -(n_{c_2}/n_{c_1}) i^{g''} - (n_{c_3}/n_{c_1}) i^{d''} \\ i^{d''} &= i^{a''} \\ i^{f''} &= i^{f''} \\ i^{g''} &= i^{g''} \end{aligned} \quad C_2 = \begin{array}{c} \begin{array}{|c|c|c|} \hline d'' & f'' & g'' \\ \hline a' & n_{a_2}/n_{a_1} & -n_{a_3}/n_{a_1} & \\ \hline b' & & -n_{b_2}/n_{b_1} & -n_{b_3}/n_{b_1} \\ \hline c' & -n_{c_2}/n_{c_1} & & -n_{c_3}/n_{c_1} \\ \hline d' & 1 & & \\ \hline f' & & 1 & \\ \hline g' & & & 1 \\ \hline \end{array} \\ \begin{array}{l} 1' \\ 2' \end{array} \begin{array}{|c|} \hline -n \\ \hline 1 \\ \hline \end{array} \end{array} \quad (11.43)$$

V. Результирующий тензор преобразования

$$C_1 C_2 = C = \begin{array}{c} \begin{array}{|c|c|c|} \hline d'' & f'' & g'' \\ \hline a_1 & -n_{a_2}/n_{a_1} & -n_{a_3}/n_{a_1} & \\ \hline b_1 & & -n_{b_2}/n_{b_1} & -n_{b_3}/n_{b_1} \\ \hline c_1 & -n_{c_2}/n_{c_1} & & -n_{c_3}/n_{c_1} \\ \hline a_2 & 1 & & \\ \hline b_2 & & 1 & \\ \hline c_2 & & & 1 \\ \hline a_3 & & 1 & \\ \hline b_3 & & & 1 \\ \hline c_3 & 1 & & \\ \hline d & 1 & -1 & \\ \hline f & & 1 & -1 \\ \hline g & -1 & & 1 \\ \hline \end{array} \\ \begin{array}{l} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} \begin{array}{|c|} \hline -n \\ \hline 1 \\ \hline C_1 \\ \hline C_2 \\ \hline \end{array} \end{array} \quad (11.44)$$

VI. Тензор импеданса $C_t zC$ находится как

$$z' = 4'' \begin{matrix} 4'' \\ \boxed{-n_1 Z_{1-2} - Z_{1-2} n - n_1 Z_{1-3} C_1 - C_{1f} Z_{1-3} n + Z_{2-3} C_1 + C_{1f} Z_{2-3} + C_{2f} Z_4 C_2} \end{matrix} \quad (11.45)$$

и является 2-тензором с тремя строками и столбцами. Произведение их матриц еще должно быть выполнено.

Предполагая идентичность трансформаторов, т. е. $Z_{a_1-a_2} = Z_{b_1-b_2} = Z_{c_1-c_2} = Z_{1-2}$, имеем

| | d'' | f'' | g'' |
|------------|---|---|---|
| d'' | $-2Z_{1-2} \frac{n_2}{n_1} + 2Z_{ad} - Z_{fd} - Z_{gd}$ | $-2Z_{1-2} \frac{n_3}{n_1} + 2Z_{2-3} - 2Z_{1-3} \frac{n_2}{n_1} + 2Z_{df} - Z_{ff} - Z_{gf}$ | $-2Z_{1-3} \frac{n_3}{n_1} + 2Z_{dg} - Z_{fg} - Z_{gg}$ |
| $z' = f''$ | $-2Z_{1-3} \frac{n_3}{n_1} + 2Z_{fd} - Z_{gd} - Z_{dd}$ | $-2Z_{1-2} \frac{n_2}{n_1} + 2Z_{ff} - Z_{gf} - Z_{df}$ | $-2Z_{1-2} \frac{n_3}{n_1} + 2Z_{2-3} - 2Z_{1-3} \frac{n_2}{n_1} + 2Z_{fg} - Z_{gg} - Z_{dg}$ |
| g'' | $-2Z_{1-2} \frac{n_3}{n_1} + 2Z_{2-3} - 2Z_{1-3} \frac{n_2}{n_1} + 2Z_{gd} - Z_{dd} - Z_{fd}$ | $-2Z_{1-2} \frac{n_3}{n_1} + 2Z_{gf} - Z_{df} - Z_{ff}$ | $-2Z_{1-2} \frac{n_2}{n_1} + 2Z_{gg} - Z_{dg} - Z_{fg}$ |

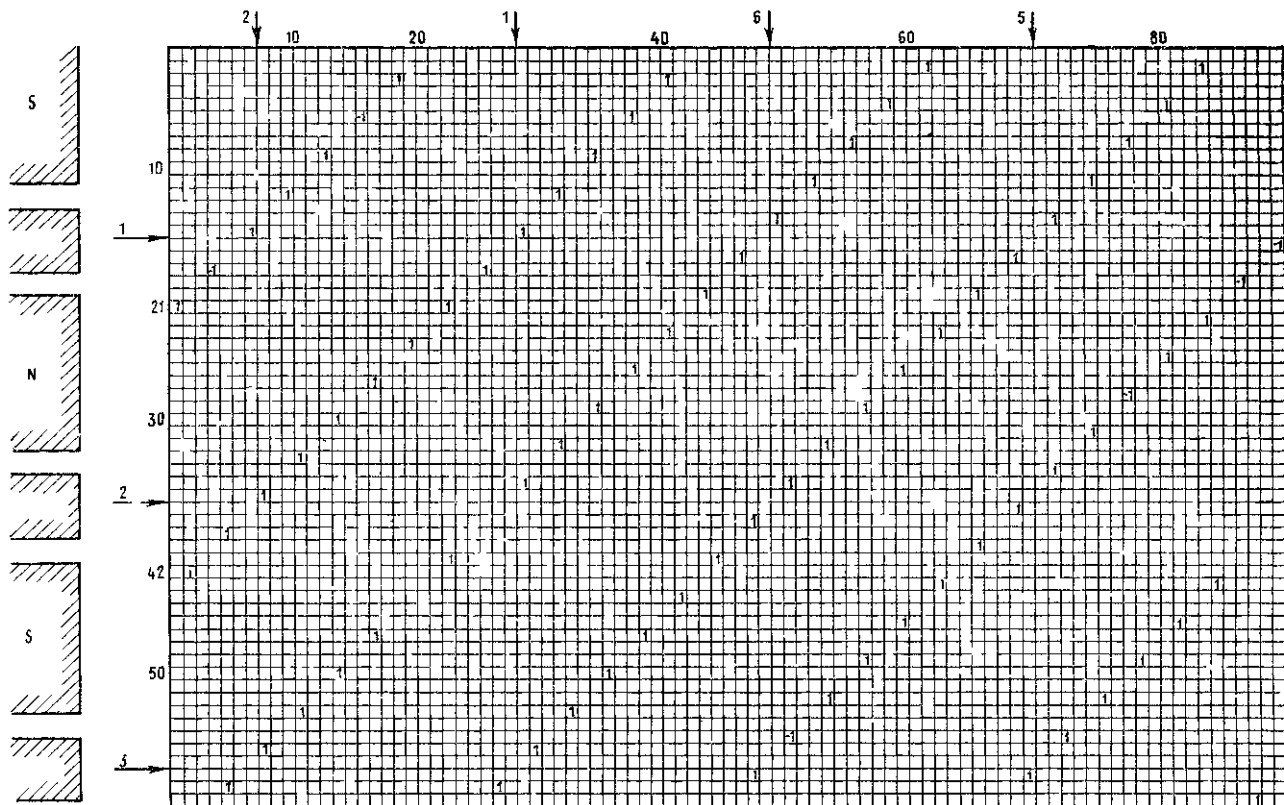
(11.46)

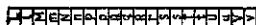
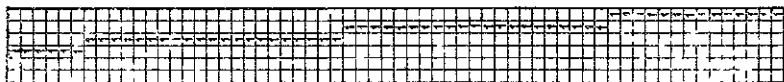
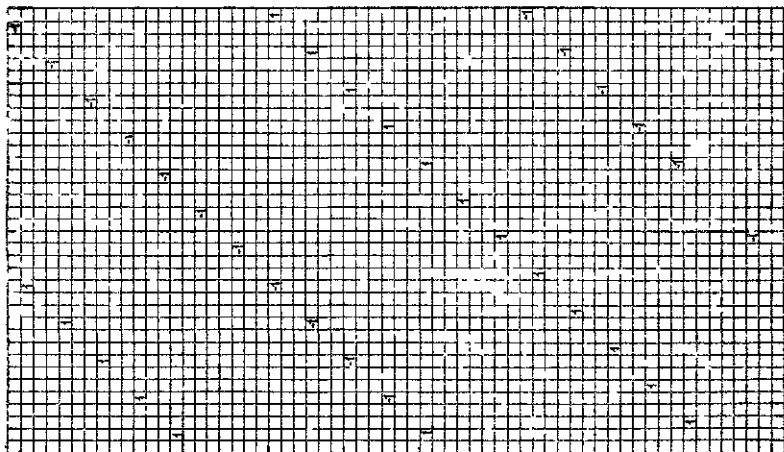
VII. Если i'' найдены, то индуцированные напряжения находят как $z \cdot C \cdot i''$ и т. д.

17. НЕСБАЛАНСИРОВАННЫЕ НАПРЯЖЕНИЯ В ОБМОТКАХ ПОСТОЯННОГО ТОКА

I. В качестве другого примера, когда для определения тензора результирующего преобразования C необходимо привлечь по крайней мере два тензора преобразования C_1 и C_2 , рассмотрим вычисление напряжения, генерированного между шестью щетками волновой обмотки (рис. 11.4), в случае, когда нет возбуждения на одном из полюсов.

Расчет генерированных напряжений волновой обмотки на рис 114





С₂ представляет
сводичеия
щетох

Результурющий: блок
тезор
пребра. таблица, полласоб

Генериремеые
испряжения
(действие
сбалаисробома)

Обит
исобразженны
полас

Генериремеые
испряжения
(несбалаисрор-
биное действие)

II. Тензор преобразования C для шести цепей щеток 1—6 (щетки предполагаются бесконечно тонкими) определяется в три этапа: C_1 в табл. 11.2 показывает соединение 126 катушек в одну

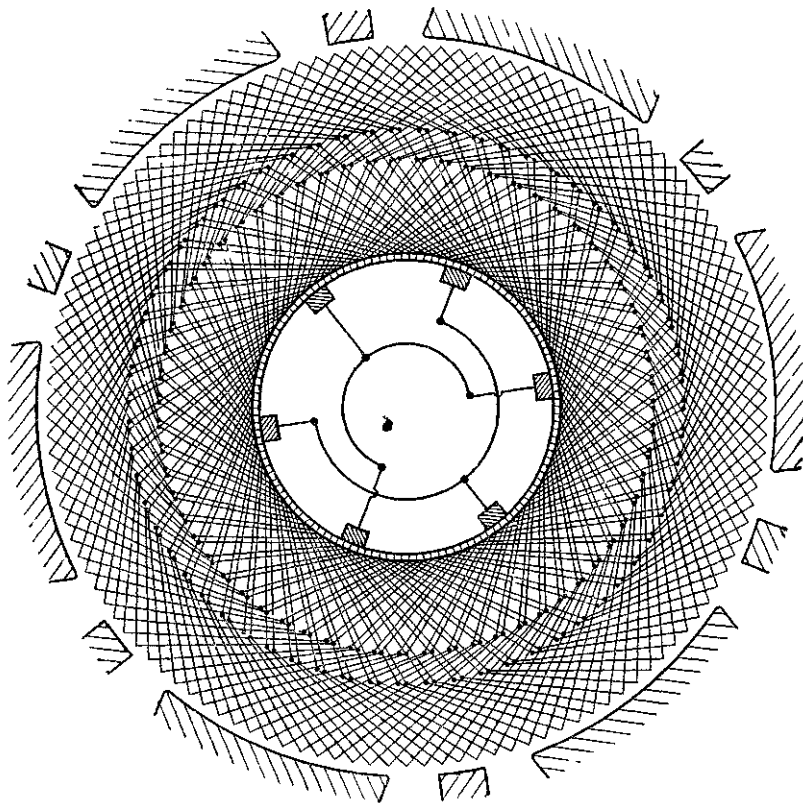


Рис. 11.4. Шестиполюсная волновая обмотка постоянного тока с 126 катушками.

непрерывную обмотку¹⁾; C_2 — замыкание катушек щетками в шесть новых катушек; $C_1 C_2$ — тензор результирующего преобразования.

III. Мгновенное генерированное напряжение вычислится как $C_e e$. Результаты однородного возбуждения и выключения одного из полюсов показаны в последних столбцах табл. 11.2 (Некоторые компоненты вместо 0 содержат одновременно 1 и $n-1$).

¹⁾ Правую часть C_1 см. на стр. 342, 343, левую — на стр. 344, 345. (Прим. пер.)

РАСЧЕТ РЕАКТАНСОВ ОБМОТОК

1. УНИВЕРСАЛЬНОСТЬ МЕТОДА

Расчет реактансов якорных обмоток является еще одним примером, где тензор преобразования S определяется в несколько этапов. На этом примере видно, как понятие «примитивная сеть» раскрывает новый простой прием, который до сих пор не использовался в расчетах обмоток.

Во всех расчетах реактансов, представленных в литературе, используется прием анализа результирующего потока, который образуется при реально соединенной обмотке. Для каждого нового соединения катушек анализ должен начинаться заново. Также в общем случае для вычисления разных типов реактансов используются различные методы подхода. Для вычисления гармонических реактансов используется анализ Фурье; чтобы вычислить реактанс в воздушном зазоре, применяются пространственные измерения, еще один метод используется для расчета пазового рассеяния реактансов и т. д. Все методы требуют постоянного физического анализа в конце, и никакая часть инженерной работы не может быть передана вычислительным машинам.

В методе рассуждения, в выборе конструктивных параметров и во внешней форме конечных получаемых формул метод, который будет показан, существенно отличается от предыдущих процедур. Конечно, этот метод дает тот же численный ответ, что и другие. Конечные формулы появляются в табличной форме, так что численные подстановки можно выполнить с помощью сумматора. Большую часть самих вычислений можно произвести с помощью вычислительной машины, которая способна умножать матрицы, но ничего не знает о реактансах.

Метод подхода совершенно универсален. Пазаы могут быть расположены неравномерно и включать различное количество сторон катушек, катушки могут содержать различное количество витков, иметь различную длину, могут быть соединены произвольно в группы, группы в фазы и т. д. Фазы, в свою очередь, могут быть соединены в линии любым желаемым способом. Принимается, что воздушный зазор является равномерным, однако и неравномерность воздушного зазора можно учесть при обычных предположениях.

Вычисляемые реактансы: главный реактанс воздушного зазора, гармонические реактансы воздушного зазора, полный реактанс воздушного зазора, реактанс пазового рассеяния, реактанс лобового рассеяния.

Одни и те же конечные формулы справедливы для вычисления всех упомянутых пяти реактансов. Если длина, количество витков отдельных катушек или формы пазов, воздушный зазор меняются, то формулы все равно не меняются. Следовательно, влияние любого изменения на реактансы обмоток можно быстро оценить. Для разных типов обмоток, особенно если несколько аналогичных типов анализируются одновременно, можно ввести различные приемы, сокращающие вычисления. В этой главе дается общий метод, в частных задачах много шагов может быть опущено.

2. МЕТОД ПОДХОДА

I. Когда дается какая-либо якорная обмотка, то *сначала предполагаем, что все соединения катушек устранены*, так что остаются только отдельные катушки, представляющие «примитивную» обмотку. Собственные и взаимные индуктивности (или реактансы) различных катушек обозначим A, B, C, D, \dots *Предположим, что эти реактансы катушек представляют любой из пяти типов реактансов*, упомянутых в предыдущем параграфе.

Как только реактансы катушек A, B, C, \dots будут известны, выполняют следующие три шага:

1) устанавливают компоненты тензора импеданса z для отдельных катушек;

2) устанавливают тензор преобразования соединений катушек C ;

3) находят компоненты тензора импеданса z' для действительных обмоток по формуле $z' = C_i z C$, используя, если необходимо, сокращающий вычисления метод «компаунд-тензоров» или любой другой подходящий метод.

Конечные формулы реактансов обмоток в терминах A, B, C, \dots одинаковы для любого из пяти типов реактансов. Конечные формулы обмоток также остаются неизменными, если реактанс отдельной катушки меняется при использовании разного шага или разного количества витков или разных конфигураций пазов, или неравномерного воздушного зазора, или разной конфигурации полюсов и т. д. *Конечные формулы меняются, только если способ соединения катушек C меняется.*

II. Если обмотки с z' снова объединяются при помощи нового тензора преобразования C' , то результирующие компоненты тензора импеданса z'' снова находятся по той же самой формуле $z'' = C'_i z' C'$.

Можно предположить, что сами катушки состоят из *проводников* (сторон катушек), объединяемых с помощью $C_i z C$ (в расчетах реактансов пазового и лобового рассеяния)

Когда обмотки являются *сложными* или когда они обнаруживают определенное *повторение в структуре*, катушки можно объединить в реальные обмотки за два или более шагов вместо одного. Другими словами, сначала предполагается, что катушки объединяются в большее количество групп с помощью C_1 и вычисляется соответствующий z_1 . Затем эти группы объединяются в меньшее количество групп при помощи C_2 и вычисляется соответствующий z_2 . Эти шаги повторяются до тех пор, пока не получим реальную обмотку, причем каждый шаг уменьшает количество строк и столбцов C и z .

3. ОБЪЕДИНЕНИЕ СОСЕДНИХ КАТУШЕК

Из большого числа возможных кратчайших путей здесь показан один, поскольку он часто встречается в расчетах стандартных обмоток. В стандартных обмотках обычно сначала две или боль-

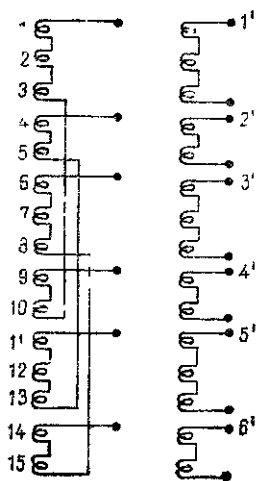


Рис. 12.1. Объединение соседних катушек.

| | 1' | 2' | 3' | 4' | 5' | 6' |
|----|----|----|----|----|----|----|
| 1 | 1 | | | | | |
| 2 | 1 | | | | | |
| 3 | 1 | | | | | |
| 4 | | 1 | | | | |
| 5 | | 1 | | | | |
| 6 | | | 1 | | | |
| 7 | | | 1 | | | |
| 8 | | | 1 | | | |
| 9 | | | | 1 | | |
| 10 | | | | 1 | | |
| 11 | | | | | 1 | |
| 12 | | | | | 1 | |
| 13 | | | | | 1 | |
| 14 | | | | | | 1 |
| 15 | | | | | | 1 |

$C = 8$, (12.1)

ше *соседних* катушек объединяются в группы (в полюсно-фазовые группы), затем эти группы различными способами объеди-

няются в фазы и т. д. В таких случаях выгодно получить C в два этапа, что определяется структурой обмоток. Объединение, скажем, групп из трех соседних катушек уменьшает число строк и столбцов z до одной трети его прежнего значения. Из-за простоты C это объединение можно выполнить очень быстро; сначала установлением C без формальных шагов, затем нахождением $C_t \cdot z \cdot C$.

Например, пусть 15 катушек соединены в три обмотки (рис. 12.1). Первый шаг состоит в том, чтобы объединить их в шесть групп (стр. 349, 12.1).

z отдельных катушек имеет вид

| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 |
|-------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|----|----|----|----|----|----|
| 1 | A | B | C | D | E | F | G | H | H | G | F | E | D | C | B |
| 2 | B | A | B | C | D | E | F | G | H | H | G | F | E | D | C |
| 3 | C | B | A | B | C | D | E | F | G | H | H | G | F | E | D |
| 4 | | | | A | B | C | D | E | F | G | H | H | G | F | E |
| 5 | | | | B | A | B | C | D | E | F | G | H | H | G | F |
| 6 | | | | | | A | B | C | D | E | F | G | H | H | G |
| 7 | | | | | | B | A | B | C | D | E | F | G | H | H |
| $z=8$ | | | | | | C | B | A | B | C | D | E | F | G | H |
| 9 | | | | | | | | | A | B | C | D | E | F | G |
| 10 | | | | | | | | | B | A | B | C | D | E | F |
| 11 | | | | | | | | | | | A | B | C | D | E |
| 12 | | | | | | | | | | | B | A | B | C | D |
| 13 | | | | | | | | | | | C | B | A | B | C |
| 14 | | | | | | | | | | | | | | A | B |
| 15 | | | | | | | | | | | | | | B | A |

Поскольку матрица этого тензора симметрична, нет необходимости заполнять другую половину. Ее можно разделить на компанд-матрицы жирными линиями в соответствии с числом соседних катушек в каждой группе.

Если умножение $C_t \cdot z \cdot C$ выполнено, обнаруживается, что каждая новая компонента тензора I' состоит из суммы всех компонент каждой малой матрицы:

| | | | | | | | | | | |
|--------|----|-------------------|---|---|---|---|---|--------------------|-----------------------|----------------------------|
| | | 1' 2' 3' 4' 5' 6' | | | | | | | | |
| $z' =$ | 1' | a | b | c | d | c | b | $a = 3A + 4B + 2C$ | | |
| | 2' | b | e | b | f | d | f | | $b = B + 2C + 2D + E$ | |
| | 3' | c | b | a | b | c | d | | | $c = D + 2E + 3F + 2G + H$ |
| | 4' | d | f | b | e | b | f | | $d = 2G + 4H$ | |
| | 5' | c | d | c | b | a | b | | | |
| | 6' | b | f | d | f | b | e | | $f = E + 2F + G$ | |

(12.3)

Поскольку первое умножение $C_t \cdot z$ производит сложение компонент каждого столбца в каждой матрице, а второе умножение $(C_t \cdot z) \cdot C$ складывает компоненты каждой строки в каждой матрице, то при соединении соседних катушек в группы достаточно сложить буквы каждой компоненты матрицы z без формального расчета $C_t \cdot z \cdot C$.

Обмотка на рис. 12.2, представляющая собой обмотку на рис. 12.1 после того как были соединены катушки, соединена снова в три фазы посредством C'

| | | | | |
|--------|----|----|----|-----|
| | | I | II | III |
| $C' =$ | 1' | 1 | | |
| | 2' | | 1 | |
| | 3' | | | 1 |
| | 4' | -1 | | |
| | 5' | | -1 | |
| | 6' | | | -1 |

(12.4)

Эта вторая C идентична для всех машин, имеющих одинаковое число полюсно-фазовых групп, независимо от того, одинаковы группы или различны, т. е. имеют обмотки целое или дробное число пазов на полюсно-фазовую группу.

Окончательными компонентами тензора импеданса z'' являются $C_t' z C'$

| | | | | | |
|---------|-----|--------------|--------------|--------------|--------|
| | | I | II | III | |
| $z'' =$ | I | $a + e - 2d$ | $2b - c - f$ | $c + f - 2b$ | (12.5) |
| | II | $2b - c - f$ | $a + c - 2d$ | $2b - c - f$ | |
| | III | $c + f - 2b$ | $2b - c - f$ | $a + e - 2d$ | |

Такие приемы, сокращающие вычисления, можно внедрять практически для всех типов обмоток.

4. РАСЧЕТ РЕАКТАНСОВ ОТДЕЛЬНЫХ КАТУШЕК

Типы реактансов. I. Для расчета *полного реактansa* отдельной якорной катушки (или целой якорной обмотки) его разделяют на три части:

1) *полный реактанс воздушного зазора* определяется всем потоком, проходящим через воздушный зазор от статора к ротору и наоборот (рис. 12.3);

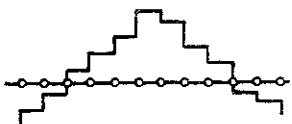


Рис. 12.3. Волна плотности потока, определяющая полный реактанс воздушного зазора.



Рис. 12.4. Поток, определяющий реактанс пазового рассеяния.



Рис. 12.5. Поток, определяющий реактанс лобового рассеяния.

2) *реактанс пазового рассеяния* обусловлен потоками, пересекающими пазы и не пересекающими воздушный зазор (рис. 12.4);

3) *реактанс лобового рассеяния* обусловлен потоками лобовых частей обмоток (рис. 12.5).

Сумма этих трех типов реактансов составляет *полный реактанс* отдельной катушки или всей обмотки.

II. *Полный реактанс воздушного зазора* (рис. 12.3) в свою очередь может быть разделен на два реактansa:

1) *главный реактанс* обусловлен *первой гармонической составляющей* поля, показанной на рис. 12.3 (это полезная составляющая потока);

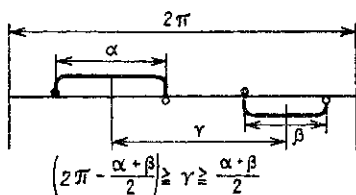
2) *реактанс дифференциального рассеяния* обусловлен оставшейся частью полного потока воздушного зазора (*поток, вызывающий высокочастотные потери в зубцах*). Этот реактанс определяется как реактанс дифференциального рассеяния, равный полному реактансу воздушного зазора без главного реактansa.

Реактанс дифференциального рассеяния сам разделяется на сумму *реактансов n гармонических составляющих*, т. е. сумму реактансов второй гармонической составляющей, третьей и т. д.

Реактансы воздушного зазора катушек. Табл. 12.1 дает формулы для расчета следующих собственных и взаимных реактансов отдельных катушек:

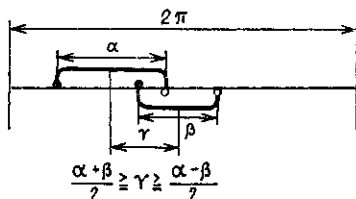
1) *полный реактанс воздушного зазора* при двух катушках: разнесенных друг относительно друга; катушек скрещивающихся; одна внутри другой;

Формулы взаимных реактансов двух катушек



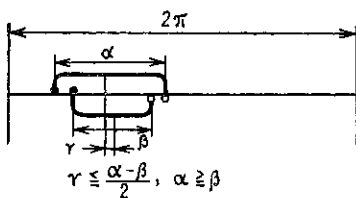
Катушки разнесены

$$X_{\alpha\beta} = -k\alpha\beta \text{ ом}$$



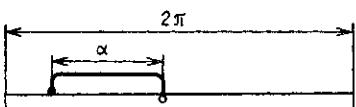
Катушки соединены

$$X_{\alpha\beta} = -k[\alpha\beta - \pi(\alpha + \beta - 2\gamma)] \text{ ом}$$



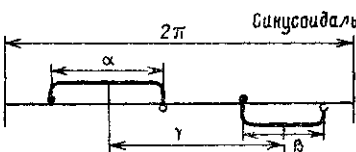
Одна катушка внутри другой

$$X_{\alpha\beta} = -k(\alpha\beta - 2\pi\beta) \text{ ом}$$



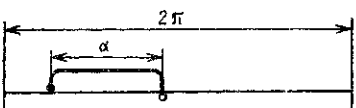
Собственный реактанс

$$X_{aa} = -k(a^2 - 2\pi a) \text{ ом}$$



n-я взаимная гармоника

$$X_{\alpha\beta} = 8k \frac{1}{\pi^2} \sin \frac{\pi}{2} \alpha \sin \frac{\pi}{2} \beta \cos \pi\gamma \text{ ом}$$



n-я собственная гармоника

$$X_{\alpha\alpha} = 8k \frac{1}{\pi^2} (\sin \frac{\pi}{2} \alpha)^2 \text{ ом}$$

$$k = (2\pi f) 0,2 N_{\alpha} N_{\beta} L \frac{R}{\Delta} \frac{1}{\rho^2} 10^{-8}$$

α, β = наложение катушек \int
 электрич радианах
 γ = радианы между центрами катушек

N_{α}, N_{β} = Число витков катушек

R = Радиус якоря

ρ = Сколько раз 2π укладывается на якорь

Δ = Ширина воздушного зазора

f = Частота тока

L = Толщина укладки в см

2) реактанс гармонических составляющих. Случай $n=1$ дает главный реактанс.

Самоиндуктивность катушки определяется в предположении, что две катушки одинаковые и находятся на нулевом расстоянии друг от друга.

Если обмотка повторяется после каждой пары полюсов, то расстояние, покрываемое одной парой полюсов, принимается равным 2π радиан. Если, однако, имеются также потоки с несколько большим числом пар полюсов, чем главный поток, то расстояние, покрываемое наибольшей длиной волны, принимается равным 2π радиан. В случае сомнения за 2π радиан принимается вся окружность машины.

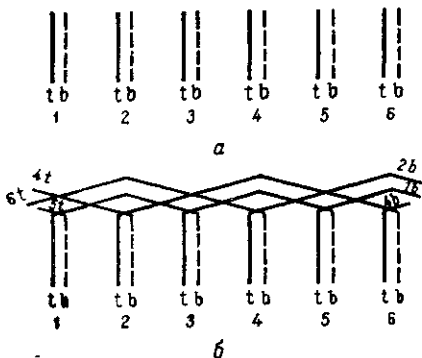


Рис. 12.6.

a — проводники, лежащие в пазах; b — проводники, соединенные в катушки.

Число витков в катушках N_α и N_β можно точно учесть в $X_{\alpha\beta}$ вместо того, чтобы включить их в константу k .

Поскольку в якорной обмотке многие катушки являются идентичными и устроены одинаково, следует вычислить только некоторые из этих собственных и взаимных реактансов катушек. Эти различные реактансы обозначим A, B, C, D, \dots .

Реактансы пазового рассеяния катушек. Расчет собственных и взаимных реактансов пазового рассеяния проводников, расположенных в одном и том же пазе, дается в соответствующих книгах. Этапы перехода от реактансов проводников к реактансам катушек можно выполнить с помощью «тензора преобразования» C , показывающего, как проводники соединяются в катушки.

Иначе говоря, если z представляет тензор импеданса всех проводников, а C — тензор преобразования, показывающий соединение проводников в катушки, как в уравнении (12.6) для рис. 12.6, тензор импеданса катушек находится посредством $C_z C$, показывающего их собственные и взаимные реактансы пазового рассеяния.

Поскольку проводники в разных пазах не имеют взаимных индуктансов, реактансы катушек обычно можно взять с обмоточных диаграмм без установления тензора преобразования C .

| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|--------|----|---|----|----|----|---|
| 1 | 1 | | | | | |
| { b | | | | | -1 | |
| 2 | | 1 | | | | |
| { b | | | | -1 | | |
| 3 | | | 1 | | | |
| { b | -1 | | | | | |
| 4 | | | | 1 | | |
| { b | | | | | -1 | |
| 5 | | | | | 1 | |
| { b | | | -1 | | | |
| 6 | | | | | | 1 |
| { b | -1 | | | | | |

(12.6)

Реактансы лобового рассеяния катушек. Подобным образом можно найти реактансы лобового рассеяния, если известны собственные и взаимные реактансы отдельных катушек.

5. СТАНДАРТНАЯ ТРЕХФАЗНАЯ ОБМОТКА

Типы реактансов. В качестве первого примера рассчитаем реактансы стандартной трехфазной обмотки, поскольку их величину можно легко проверить другими методами или по таблицам.

Пусть дана обмотка (рис. 12.7), которая имеет 12 катушек с шагом 1—6, соединение катушек показано на рисунке. Будут рассчитаны следующие реактансы:

- 1) полный реактанс воздушного зазора; 2) главный реактанс;
- 3) реактанс пятой гармоники; 4) реактанс седьмой гармоники;
- 5) реактанс пазового рассеяния; 6) реактанс лобового рассеяния.

Полный реактанс воздушного зазора. Достаточно рассчитать собственные и взаимные реактансы катушки 1 с катушками от 2 до 6, т. е. *шесть различных величин* (A, B, C, D, E, F), поскольку реактансами других катушек являются те же самые шесть величин, повторяемые в различном порядке.

Шаг каждой катушки (рис. 12.8) есть $\alpha = \beta = 150^\circ = (5/6)\pi$ радиан. Расстояние γ между катушками равно $0, \pi/6, 2\pi/6, 3\pi/6, 4\pi/6, 5\pi/6, 7\pi/6$ радиан.

1. Собственная индуктивность катушки 1

$$A = -k(a^2 - 2\pi a) = -k[(25/36)\pi^2 - (10/6)\pi^2] = 9,583k.$$

2. Взаимная индуктивность катушки 1 с катушками 2—5, т. е. с теми катушками, которые скрещиваются с первой катушкой; $M_{\alpha\beta} = k(9,583 - 6,28\gamma)$, где γ равно 0,5236; 1,0472; 1,571 и 2,0944.

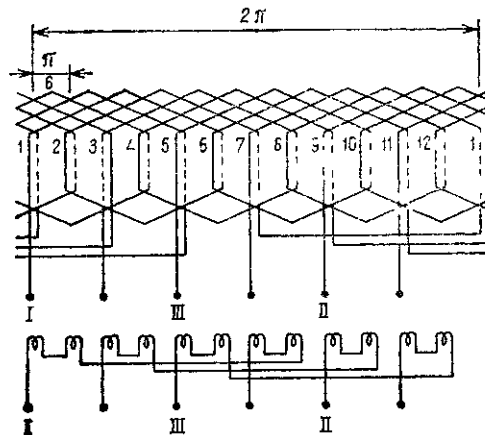


Рис. 12.7. Стандартная трехфазная обмотка.

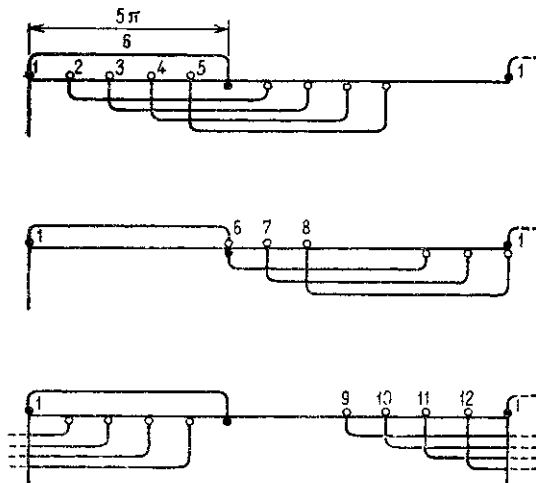


Рис. 12.8. Вычисление взаимных реактансов.

Подставляя различные значения γ , получаем индуктивности, равные $B = 6,29k$, $C = 3,02k$, $D = -0,28k$, $E = -3,57k$.

3. Взаимная индуктивность катушки 1 с катушками 6—8 есть $F = -k\alpha\beta = -k6,85 = G = H$.

4. *Взаимная индуктивность* катушки 9 с катушкой 1 та же самая, что и катушки 5 с 1. Подобным образом индуктивность катушки 10 с 1 та же самая, что и индуктивность катушки 4 с 1 и т. д.

Следовательно, собственные и взаимные индуктивности катушки 1 со всеми остальными катушками можно расположить в строку:

$$1 \begin{bmatrix} A & B & C & D & E & F & G & F & E & D & C & B \end{bmatrix},$$

где значения A, B, C и другие даются в первом столбце табл. 12.2, а постоянная k , являющаяся функцией числа витков, длины воздушного зазора и других, определена в табл. 12.1.

Таблица 12.2

Катушечные реактансы

| | Воздушный зазор | Главный | Пятой гармоники | Седьмой гармоники | Пазовое рассеяние | Лобовое рассеяние |
|-----|-----------------|----------|-----------------|-------------------|-------------------|-------------------|
| A | $9,58k$ | $7,47k$ | $0,0216k$ | $0,0294k$ | $L+N$ | A' |
| B | $6,29k$ | $6,47k$ | $-0,0187k$ | $-0,0254k$ | 0 | B' |
| C | $3,02k$ | $3,73k$ | $0,0108k$ | $0,0147k$ | 0 | C' |
| D | $-0,28k$ | $0k$ | $0k$ | $0k$ | 0 | D' |
| E | $-3,57k$ | $-3,73k$ | $-0,0108k$ | $-0,0147k$ | 0 | E' |
| F | $-6,85k$ | $-6,47k$ | $0,0187k$ | $0,0254k$ | $-M$ | F' |
| G | $-6,85k$ | $-7,47k$ | $-0,0216k$ | $-0,294k$ | 0 | G' |

Собственные и взаимные индуктивности катушки 2 образуют аналогичную строку, за исключением порядка компонент, который изменен, и, следовательно, все собственные и взаимные индуктивности воздушного зазора отдельных катушек можно организовать в тензор индуктивности ¹⁾:

¹⁾ Точнее, в матрицу, представляющую тензор индуктивности для данного типа соединения катушек обмоток. (Прим. пер.).

| | | | | | | | | | | | | | | |
|-------|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|--------|
| | | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | |
| $z =$ | 1 | A | B | C | D | E | F | G | F | E | D | C | B | (12.7) |
| | 2 | B | A | B | C | D | E | F | G | F | E | D | C | |
| | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | |
| | 12 | B | C | D | E | F | G | F | E | D | C | B | A | |

Этот тензор представляет также все другие типы реактансов катушек, которые следует вычислить.

Синусоидальные реактансы. 1. Рассматривая *главный* реактанс синусоидальной волны, положим в формулах табл. 12.1 $n=1$. Тогда

$$8k \sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2} = k8 \left(\sin \frac{5}{12} \pi \right)^2 = 8k (\sin 75^\circ)^2 = 7,464k$$

и $m_{\alpha\beta} = 7,47k \cos \gamma$, где γ изменяется от 0 до 330° с шагами в 30° , давая для различных главных собственных и взаимных индуктивностей отдельных катушек второй столбец табл. 12.2.



Рис. 12.9. Две стороны катушки в пазу.

2. Рассмотрим собственные и взаимные индуктивности *пятой гармоники*, где $n=5$. В этом случае $8k^{1/25} (\sin^{5/2} 5/6\pi)^2 = 0,32k (\sin 15^\circ)^2 = 0,0216k$ и $M_{\alpha\beta} = 0,0216k \cos 5\gamma$, где γ изменяется от 0 до 330° с шагом в 30° . Различные собственные и взаимные индуктивности пятой гармоники заданы в табл. 12.2.

3. Рассмотрим реактансы *седьмой гармоники*, когда $n=7$. В этом случае $8k^{1/49} (\sin^{7/2} 7/6\pi)^2 = 0,163k (\sin 165^\circ)^2 = 0,0294k$ и $M_{\alpha\beta} = 0,0294k \cos 7\gamma$, где γ изменяется от 0 до 330° с шагом в 30° . Различные реактансы даются в табл. 12.2.

Реактансы пазового рассеяния. В одном пазу расположены две стороны катушки (рис. 12.9). Пусть рассчитанные по методам, данным в учебника, собственные индуктивности пазового рассеяния будут для верхнего проводника L , для нижнего проводника N , а их взаимная индуктивность M .

Проблема состоит в нахождении реактансов пазового рассеяния различных катушек, если реактансы сторон катушек есть L , N и M .

Находить C не обязательно. При проверке можно увидеть, что каждая катушка имеет взаимную индуктивность только с теми катушками, которые лежат в том же самом пазу, поэтому z' можно получить немедленно.

Реактансы пазового рассеяния катушек показаны в шестом столбце табл. 12.2.

Пусть также предполагается, что реактансы лобового рассеяния отдельных катушек уже рассчитаны тем же способом; они показаны в последнем столбце табл. 12.2.

Реактансы соединения обмоток. Из рис. 12.7 видно, что первый шаг состоит в том, чтобы соединить соседние катушки в шесть полюсно-фазовых групп разделением z на малые матрицы с двумя строками и столбцами. Произведение $C_t z C$ находят простым сложением компонент каждой малой матрицы z

| | | | | | | | |
|----|----|----|----|----|----|----|------------------|
| | 1' | 2' | 3' | 4' | 5' | 6' | |
| 1' | a | b | c | d | c | b | |
| 2' | b | a | b | c | d | c | $a = 2A + 2B$ |
| 3' | c | b | a | b | c | d | $b = B + 2C + D$ |
| 4' | d | c | b | a | b | c | $c = D + 2E + F$ |
| 5' | c | d | c | b | a | b | $d = 2F + 2G$ |
| 6' | b | c | d | c | b | a | |

(12.8)

Следующий шаг состоит в том, чтобы соединить шесть полюсно-фазовых групп в трехфазные обмотки (см. рис. 12.7). В трехфазных обмотках выгодно изменить на обратное направление во второй обмотке так, чтобы три обмотки располагались симметрично под 120° . В этом случае

| | | | | |
|----|----|----|----|-----|
| | | I | II | III |
| 1' | 1 | | | |
| 2' | | -1 | | |
| 3' | | | | 1 |
| 4' | -1 | | | |
| 5' | | 1 | | |
| 6' | | | | -1 |

$C' =$

Компоненты $z'' = C_t' z' C'$ есть

| | | | | | |
|-----|----|----|----|-----|--|
| | | I | II | III | |
| I | a' | b' | b' | | |
| II | b' | a' | b' | | |
| III | b' | b' | a' | | |

$a' = 2a - 2d = 4(A + B - F - G),$
 $b' = 2c - 2b = 2(F - B) + 4(E - C),$

(12.9)

где a' представляет собственную индуктивность каждой фазовой обмотки, а b' — взаимную индуктивность между любыми двумя фазовыми обмотками. Из девяти возможных реактансов только два реактанса являются разными.

Теперь при подстановке значений A, B, C, D, E, F , данных в табл. 12.2, табл. 12.3 дает различные однофазные реактансы фазовых обмоток.

Таблица 12.3

Однофазные реактансы

| | Полный | Главный | Пятой гармоники | Седьмой гармоники | Пазовое рассеяние | Лобовое рассеяние |
|------|-----------|-----------|-----------------|-------------------|-------------------|---------------------|
| a' | $118,28k$ | $111,52k$ | $0,0232k$ | $0,032k$ | $4(L+N+M)$ | $4(A'+B'-G')$ |
| b' | $-52,64k$ | $-55,76k$ | $-0,0116k$ | $-0,016k$ | $-2M$ | $2(F'-B')+4(E'-C')$ |

Различные типы трехфазных реактансов можно вычислить снова по формуле $z'' = C_t' z' C'$, где C' представляет собой соединения отдельных фазовых обмоток (см. рис. 12.13).

6. ОБМОТКА КОНДЕНСАТОРНОГО ДВИГАТЕЛЯ

I. В качестве примера обмотки, в которой катушки имеют разные шаги, рассмотрим четырехполюсную с 36 пазами, несбалансированную двухфазную обмотку (рис. 12.10).

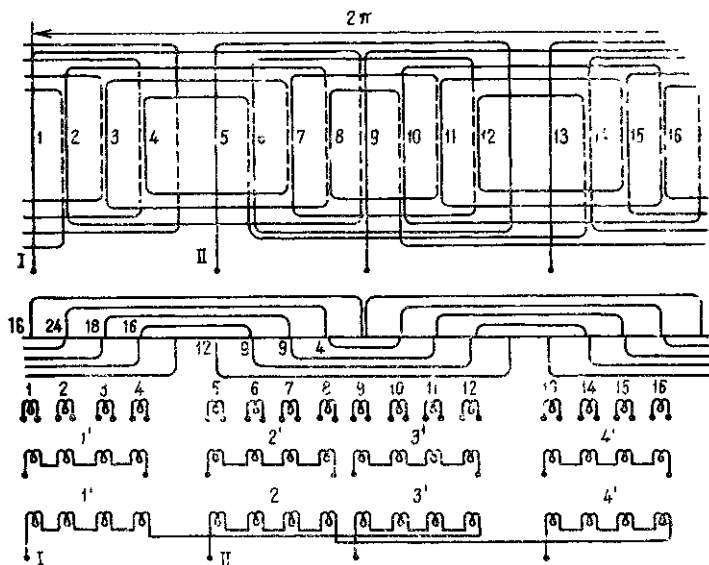


Рис. 12.10. Обмотка конденсаторного двигателя.

Катушки главной обмотки имеют 16, 24, 18, 16 витков, а катушки конденсаторной обмотки — 12, 9, 9, 4 витков. Поскольку обмотка симметрична, то 18 пазов рассматриваются как 2π радиан.

Так как половина катушек на протяжении 2π радиан имеет разные шаги и число витков, то в z — тензоре обобщенной обмотки — строки различны. В качестве примера рассчитаем только главный реактанс и реактанс третьей гармоники, для которых z приводится к простой форме.

Главные реактансы рассчитывают по формуле $X_{\alpha\beta} = \sin \alpha/2 \times \sin \beta/2 \cdot \cos \gamma N_{\alpha} N_{\beta} k$.

Реактансы *третьей гармоники* рассчитывают как $X_{\alpha\beta} = = 1/9 \sin 3/2 \sin 3\beta/2 \cdot \cos 3\gamma N_{\alpha} N_{\beta} k$.

Найдено, что между катушками главной и пусковой обмоток нет взаимного реактанса ($\cos \gamma = \cos 90^{\circ} = 0$), так что для обоих типов реактансов тензор импеданса отдельных катушек

$$z = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1' & 2' & 3' & 4' \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1' \\ 2' \\ 3' \\ 4' \end{matrix} & \begin{bmatrix} A & & -A & \\ & B & & -B \\ -A & & A & \\ & -B & & B \end{bmatrix} \end{matrix}, \quad (12.10)$$

где для *главного* реактанса

$$A = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 256 & 361 & 220,5 & 128 \\ 361 & 507 & 311 & 180,5 \\ 220,5 & 311 & 190 & 107,5 \\ 128 & 180,5 & 107,5 & 64 \end{bmatrix} \end{matrix}; \quad B = \begin{matrix} & \begin{matrix} 5 & 6 & 7 & 8 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 248 & 327 & 182 & 86,1 \\ 327 & 432 & 240 & 113,8 \\ 182 & 240 & 134 & 63,4 \\ 86,1 & 113,8 & 63,4 & 30 \end{bmatrix} \end{matrix}, \quad (12.11)$$

а для реактанса *третьей гармоники*

$$A = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 28,4 & 21,3 & -16 & -28,4 \\ 21,3 & 16 & -20 & -21,2 \\ -16 & -20 & 9 & 16 \\ -28,4 & -21,2 & 16 & 28,4 \end{bmatrix} \end{matrix}, \quad B = \begin{matrix} & \begin{matrix} 5 & 6 & 7 & 8 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 21,3 & 0 & -24 & -21,3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -24 & 0 & 27 & 24 \\ -21,3 & 0 & 24 & 21,3 \end{bmatrix} \end{matrix} \quad (12.12)$$

и каждое число умножается на постоянную k .

Для полного реактанса воздушного зазора z имеет более сложную форму.

II. Первый шаг состоит в том, чтобы соединить, как показано, соседние катушки в четыре группы; z' такого соединения катушек находится суммированием компонент каждой матрицы z , а именно тех из A и B , которые дают матрицу, подобную A и B , замененную числами A и B . Для главных реактансов $A=3634$, $B=3368,5$. Для третьей гармонической составляющей $A=-14,8$, а $B=27$.

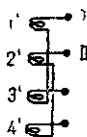


Рис. 12.11.

$$C' = \begin{array}{c} \text{I} \quad \text{II} \\ \begin{array}{|c|c|} \hline 1' & \\ \hline 2' & \\ \hline 3' & \\ \hline 4' & \\ \hline \end{array} \end{array}, \quad (12.13)$$

$$z'' = \begin{array}{c} \text{I} \quad \text{II} \\ \begin{array}{|c|c|} \hline \text{I} & 4A \quad | \quad 0 \\ \hline \text{II} & 0 \quad | \quad 4B \\ \hline \end{array} \end{array}. \quad (12.14)$$

Для главных реактансов и реактансов третьей гармоники они равны соответственно

$$z'' = \begin{array}{c} \text{I} \quad \text{II} \\ \begin{array}{|c|c|} \hline \text{I} & 14,536 \quad | \quad 0 \\ \hline \text{II} & 0 \quad | \quad 11,474 \\ \hline \end{array} \end{array}, \quad (12.15)$$

$$z'' = \begin{array}{c} \text{I} \quad \text{II} \\ \begin{array}{|c|c|} \hline \text{I} & -59,2 \quad | \quad 0 \\ \hline \text{II} & 0 \quad | \quad 103 \\ \hline \end{array} \end{array}, \quad (12.16)$$

причем каждое число умножается на постоянную k .

7. ПРИМЕР ДВОЙНОЙ ОБМОТКИ ДЛЯ ТУРБОГЕНЕРАТОРА

Тензор импеданса z примитивной обмотки. I. Пусть дана обмотка (рис. 12.12) с 42 пазами, покрывающими 2π электрических радиан. Все катушки идентичны и имеют шаг из первого в девятнадцатый паз ($13/21=6/7\pi$). Всего имеется шесть идентичных групп, причем каждая содержит семь катушек.

Катушка 1 будет иметь собственную индуктивность A и различные взаимные индуктивности с каждой из остальных катушек. Катушки справа от 1 (2, 3, ...) имеют те же самые взаимные индуктивности, что и катушки слева (42, 41, ...); следовательно, имеется всего 42 различные взаимные индуктивности катушки 1, показанные в первой строке z .

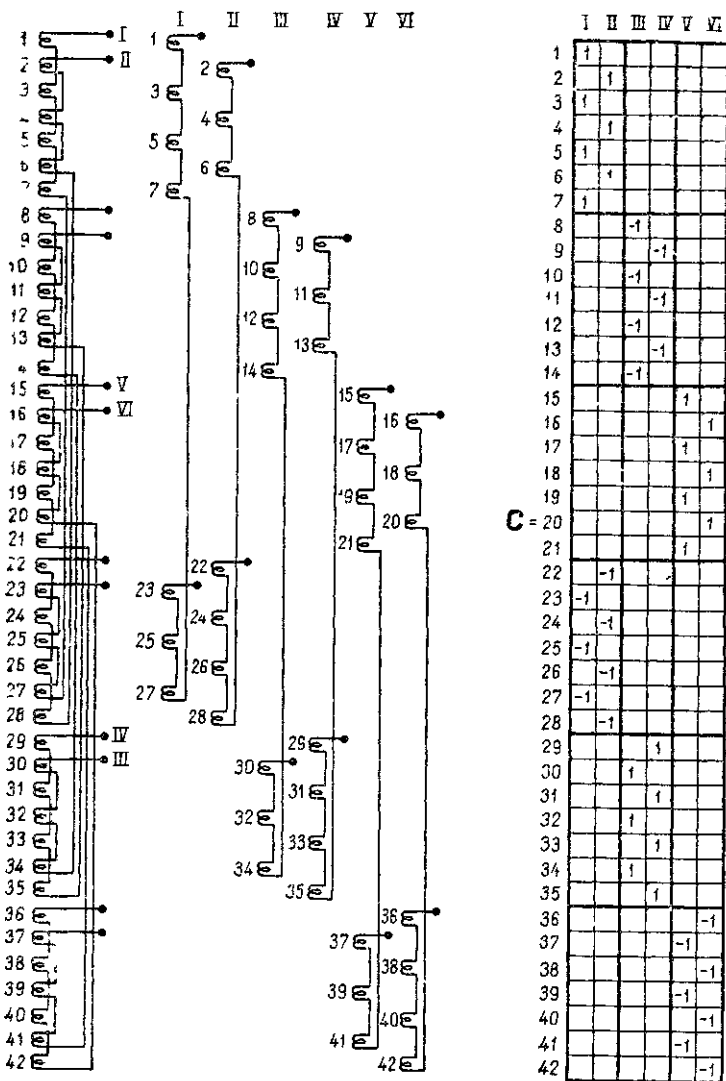


Рис. 12.12. Диаграмма соединений и матрица преобразования двойной обмотки турбогенератора.

Катушка 2 будет иметь те же самые собственные и взаимные индуктивности со всеми остальными катушками, как и катушка 1, за исключением того, что упомянутая выше строка сдвинута вправо на одну клетку. Для катушки 3 упомянутая строка сдвинута вправо на две клетки и так далее, так что для 42 катушек собственные и взаимные индуктивности равны $Z = Z_1 + Z_2$, где Z_1 и Z_2 есть

| | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|---------|----|---|---|---|---|---|---|---|---|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|---|
| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 | 21 | |
| | 1 | A | B | C | D | E | F | G | H | I | J | K | L | M | N | P | Q | R | S | T | U | V |
| | 2 | B | A | B | C | D | E | F | G | H | I | J | K | L | M | N | P | Q | R | S | T | U |
| | 3 | C | B | A | B | C | D | E | F | G | H | I | J | K | L | M | N | P | Q | R | S | T |
| | 4 | D | C | B | A | B | C | D | E | F | G | H | I | J | K | L | M | N | P | Q | R | S |
| | 5 | E | D | C | B | A | B | C | D | E | F | G | H | I | J | K | L | M | N | P | Q | R |
| $z_1 =$ | 6 | F | E | D | C | B | A | B | C | D | E | F | G | H | I | J | K | L | M | N | P | Q |
| | 7 | G | F | E | D | C | B | A | B | C | D | E | F | G | H | I | J | K | L | M | N | P |
| | 8 | H | G | F | E | D | C | B | A | B | C | D | E | F | G | H | I | J | K | L | M | N |
| | 9 | I | H | G | F | E | D | C | B | A | B | C | D | E | F | G | H | I | J | K | L | M |
| | : | : | : | : | : | : | : | : | : | : | : | : | : | : | : | : | : | : | : | : | : | : |
| | 42 | B | C | D | E | F | G | H | I | J | K | L | M | N | P | Q | R | S | T | U | V | W |

(12.17a)

| | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|---------|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|
| | | 22 | 23 | 24 | 25 | 26 | 27 | 28 | 29 | 30 | 31 | 32 | 33 | 34 | 35 | 36 | 37 | 38 | 39 | 40 | 41 | 42 |
| | 1 | W | V | U | T | S | R | Q | P | N | M | L | K | J | I | H | G | F | E | D | C | B |
| | 2 | V | W | V | U | T | S | R | Q | P | N | M | L | K | J | I | H | G | F | E | D | C |
| | 3 | U | V | W | V | U | T | S | R | Q | P | N | M | L | K | J | I | H | G | F | E | D |
| | 4 | T | U | V | W | V | U | T | S | R | Q | P | N | M | L | K | J | I | H | G | F | E |
| | 5 | S | T | U | V | W | V | U | T | S | R | Q | P | N | M | L | K | J | I | H | G | F |
| $z_2 =$ | 6 | R | S | T | U | V | W | V | U | T | S | R | Q | P | N | M | L | K | J | I | H | G |
| | 7 | Q | R | S | T | U | V | W | V | U | T | S | R | Q | P | N | M | L | K | J | I | H |
| | 8 | P | Q | R | S | T | U | V | W | V | U | T | S | R | Q | P | N | M | L | K | J | I |
| | 9 | N | P | Q | R | S | T | U | V | W | V | U | T | S | R | Q | P | N | M | L | K | J |
| | : | : | : | : | : | : | : | : | : | : | : | : | : | : | : | : | : | : | : | : | : | : |
| | 42 | V | U | T | S | R | Q | P | N | M | L | K | J | I | H | G | F | E | D | C | B | A |

(12.176)

(z представлено в виде суммы двух тензоров из-за требования печатания).

Поскольку каждая строка сама повторяется, достаточно записать лишь первые несколько строк z .

II. Так как имеется шесть идентичных групп, причем каждая группа содержит семь катушек, то тензор z , содержащий 42 строки и столбца, будет разделен на соответствующие матрицы, причем каждая из них содержит семь строк и столбцов. Из тридцати компонент матрицы различны только четыре. Следовательно, z как компаунд-тензор можно записать

$$z = \begin{array}{c} \text{I} \\ \text{II} \\ \text{III} \\ \text{IV} \\ \text{V} \\ \text{VI} \end{array} \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|} \hline \text{I} & \text{A} & \text{B} & \text{C} & \text{D} & \text{C}_t & \text{B}_t \\ \hline \text{II} & \text{B}_t & \text{A} & \text{B} & \text{C} & \text{D} & \text{C}_t \\ \hline \text{III} & \text{C}_t & \text{B}_t & \text{A} & \text{B} & \text{C} & \text{D} \\ \hline \text{IV} & \text{D} & \text{C}_t & \text{B}_t & \text{A} & \text{B} & \text{C} \\ \hline \text{V} & \text{C} & \text{D} & \text{C}_t & \text{B}_t & \text{A} & \text{B} \\ \hline \text{VI} & \text{B} & \text{C} & \text{D} & \text{C}_t & \text{B}_t & \text{A} \\ \hline \end{array} \quad (12.18)$$

где A, B, C и D являются первыми четырьмя малыми матрицами.

Тензор преобразования C. Имеется 42 катушки, соединенных в шесть групп; следовательно, тензор преобразования C содержит 42 строки и 6 столбцов (рис. 12.12). (Можно соединить катушки сначала в 12 групп, а затем только в 6.)

Первый столбец показывает, что катушки 1, 3, 5, 7 соединены между собой встречно катушкам 23, 24, 27. *Второй столбец* показывает, что катушки 2, 4, 6 соединены встречно катушкам 22, 24, 26, 28. Те же самые соединения повторяются.

Посмотрев на C , можно увидеть, что он записывается как «компаунд-тензор»

$$C = \begin{array}{|c|c|c|} \hline M & & \\ \hline & -M & \\ \hline & & M \\ \hline N & & \\ \hline & -N & \\ \hline & & N \\ \hline \end{array}, \quad M = \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & \\ \hline & 1 \\ \hline 1 & \\ \hline & 1 \\ \hline 1 & \\ \hline & 1 \\ \hline 1 & \\ \hline \end{array}, \quad N = \begin{array}{|c|c|} \hline & -1 \\ \hline -1 & \\ \hline & -1 \\ \hline -1 & \\ \hline & -1 \\ \hline -1 & \\ \hline & -1 \\ \hline \end{array} \quad (12.19)$$

Образец расчета компаунд-матрицы X

$$M_i A = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|} \hline ACEG & BBDF & CACE & DBBD & ECAC & FDBB & GECA \\ \hline BDF & ACE & BBD & CAC & DBB & ECA & FDB \\ \hline \end{array}$$

$$M_i AM = \begin{array}{|c|c|} \hline ACEG & BBDF \\ CACE & DBBD \\ ECAC & FDBB \\ GECA & \\ \hline BDF & ACE \\ BBD & CAC \\ DBB & ECA \\ FDB & \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|} \hline 4A + 6C + 4E + 2G & 6B + 4D + 2F \\ \hline 6B + 4D + 2F & 3A + 4C + 2E \\ \hline \end{array}$$

$$N_i D = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|} \hline -VTR & -WUS & -VVT & -UWU & -TVV & -SUW & -RTV \\ \hline -WUSQ & -VVTR & -UWUS & -TVVT & -SUWU & -RTVV & -QSUV \\ \hline \end{array}$$

$$N_i DM = \begin{array}{|c|c|} \hline VTR & WUS \\ VVT & -UWU \\ -TVV & SUW \\ RTV & \\ \hline WUSQ & VVTR \\ UWUS & TVVT \\ -SUWU & RTVV \\ QSUW & \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|} \hline -2R - 4T - 6V & -2S - 4U - 3W \\ \hline -2Q - 4S - 6U - 4W & -2R - 4T \\ \hline \end{array}$$

$$M_i D = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|} \hline WUSQ & VVTR & UWUS & TVVT & SUWU & RTVV & QSUV \\ \hline VTR & WUS & VVT & UWU & TVV & SUW & RTV \\ \hline \end{array}$$

$$M_i DN = \begin{array}{|c|c|} \hline VVTR & WUSQ \\ -TVVT & UWUS \\ RTVV & -SUWU \\ & QSUV \\ \hline WUS & VTR \\ -UWU & VVT \\ SUW & TVV \\ & RTV \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|} \hline -2R - 4T - 6V & -2Q - 4S - 6U - 4W \\ \hline -2S - 4U - 3W & -2R - 4T - 6V \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|} \hline -BDF & -ACE & -BBD & -CAC & -DBB & -ECA & -FDB \\ \hline -ACEG & -BBDF & -CACE & -DBBD & -ECAC & -FDBB & -GECA \\ \hline \end{array}$$

$$N_i AN = \begin{array}{|c|c|} \hline ACE & BDF \\ CAC & BBD \\ ECA & DBB \\ & FDB \\ \hline BBDF & ACEG \\ DBBD & CACE \\ FDBB & ECAC \\ & GECA \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|} \hline 3A + 4C + 2E & 6B + 4D + 2F \\ \hline 6B + 4D + 2F & 4A + 6C + 4E + 2G \\ \hline \end{array}$$

$$X = \begin{array}{|c|c|} \hline 7A + 10C + 6E + 2G - 4R - 8T - 12V & 12B + 8D + 4F - 6S - 2Q - 10U - 7W \\ \hline 12B + 8D + 4E - 6S - 2Q - 10U - 7W & 7A + 10C + 6E + 2G - 4R - 8T - 12V \\ \hline \end{array}$$

Следует заметить, что **M** содержит семь строк, т. е. ровно столько, сколько и **A, B, C, D** в предыдущем разделе.

Тензор импеданса z' обмотки находится по $C_t zC$

| | | |
|-------|-------|---|
| X | Y | W |
| Y_t | X | Y |
| W_t | Y_t | X |

$$\begin{aligned} X &= (M_t A + N_t D) M + (M_t D + N_t A) N, \\ Y &= -(M_t B + N_t C_t) M + (M_t C_t + N_t B) N, \\ W &= (M_t C + N_t B_t) M + (M_t B_t + N_t C) N. \end{aligned} \quad (12.20)$$

Оставшаяся работа состоит в вычислении трех матриц: **X, Y** и **W**. Табл. 12.4 дает расчет **X**.

Поскольку каждая компонента в матрице состоит из суммы букв (**A, B, C, D, E**), то плюс в табл. 12.4 опускается, а знак минус ставится перед ними там, где появляются $-A, -B, -C, -D, -E$. Следует заметить, что матрицы **X, Y** и **W** симметричны и что некоторые компоненты их равны. Это равенство компонент служит проверкой правильности вычислений. Следует также заметить, что в каждой компоненте в табл. 12.4 вдоль главной диагонали буквы идентичны, что служит дальнейшей проверкой и немедленно указывает на любую ошибку, сделанную при вычислениях.

Следовательно, **X, Y** и **W** представляют собой следующие матрицы:

$$X = \begin{bmatrix} a & b \\ b & a \end{bmatrix}, \quad Y = \begin{bmatrix} c & d \\ d & c \end{bmatrix}, \quad W = \begin{bmatrix} d & c \\ c & d \end{bmatrix}.$$

При подстановке приведенных выше **X, Y** и **W** в z' окончательные компоненты тензора импеданса z' будут

| | I | II | III | IV | V | VI |
|-----|---|----|-----|----|---|----|
| I | a | b | c | d | d | c |
| II | b | a | d | c | c | d |
| III | c | d | a | b | c | d |
| IV | d | c | b | a | d | c |
| V | d | c | c | d | a | b |
| VI | c | d | d | c | b | a |

$$(12.21)$$

где

$$\begin{aligned} a &= 7A + 10C + 6E + 2G - 4R - 8T - 12V; \\ b &= 12B + 8D + 4F - 6S - 2Q - 10U - 7W; \\ c &= -(B + 3D + 5F + 7A + 3J - L - 5N - 6Q - 4S - 2U); \\ d &= -(2C + 4E + 6G + 5I + K - 3M - 7P - 5R - 3T - V) \end{aligned}$$

и представляют собой *собственные и взаимные реактансы шести обмоток I и VI* (рис. 12.12) в терминах реактансов A, B, C, \dots отдельных катушек.

Из возможных 36 реактансов различны только четыре.

Если эти шесть обмоток снова соединить любым способом, представленным посредством C' , результирующий новый тензор импеданса получится по $C_i' z' C' = z''$.

Оценка реактансов. Будут оценены три типа реактансов: полный воздушного зазора, главный и реактансы пазового рассеяния.

I. Собственные и взаимные реактансы отдельных катушек, рассчитанные по формулам табл. 12.1, приводятся в табл. 12.5. Постоянная k' была подобрана так, чтобы главная собственная индуктивность была равна единице.

Таблица 125

| | Полный | Главный | Пазовый | | Полный | Главный | Пазовый |
|-----|------------|------------|------------|-----|--------|---------|---------|
| A | 1,273 k' | 1,000 k' | 1,875 k' | L | -0,088 | -0,075 | 0 |
| B | 1,150 | 0,989 | 0 | M | -0,212 | -0,2235 | 0 |
| C | 1,025 | 0,955 | 0 | N | -0,336 | -0,366 | 0 |
| D | 0,901 | 0,902 | 0 | P | -0,459 | -0,500 | 0 |
| E | 0,776 | 0,825 | 0 | Q | -0,583 | -0,625 | 0 |
| F | 0,653 | 0,733 | 0 | R | -0,707 | -0,733 | 0 |
| G | 0,529 | 0,625 | 0 | S | -0,829 | -0,825 | 0 |
| H | 0,405 | 0,500 | 0 | T | -0,953 | -0,902 | -0,625 |
| I | 0,281 | 0,366 | 0 | U | -0,953 | -0,955 | 0 |
| J | 0,157 | 0,2235 | 0 | V | -0,953 | -0,989 | 0 |
| K | 0,035 | 0,075 | 0 | W | -0,953 | -1,000 | 0 |

Поскольку шаг у всех катушек один и тот же, *реактанс пазового рассеяния отдельных катушек* можно записать без расчета аналогично реактансу стандартной трехфазной обмотки, приведенному ранее. Иначе говоря, если собственная индуктивность проводников в одном пазе есть L_i и L_b , а их взаимная индуктив-

ность есть L_{tb} , то: 1) собственная индуктивность каждой катушки есть $A=L_t+L_b$; 2) только те катушки имеют взаимную индуктивность, которые находятся в том же пазу. Величина этой взаимной индуктивности равна $-L_{tb}$.

Таблица 126

Реактансы обмоток

| | Полный | Главный | Пазовый |
|-----|------------|------------|---------|
| a | $46,76k'$ | $44,77k'$ | $18,1$ |
| b | $45,96k'$ | $44,77k'$ | 0 |
| c | $-20,91k'$ | $-22,39k'$ | -0 |
| d | $-20,96k'$ | $-22,39k'$ | $-1,88$ |

Следовательно, катушка I имеет взаимную индуктивность только с катушками 19 и 25, давая $T=-L_{tb}$, а все остальные взаимные индуктивности B, C, D, E, ... равны нулю. Реактансы по-

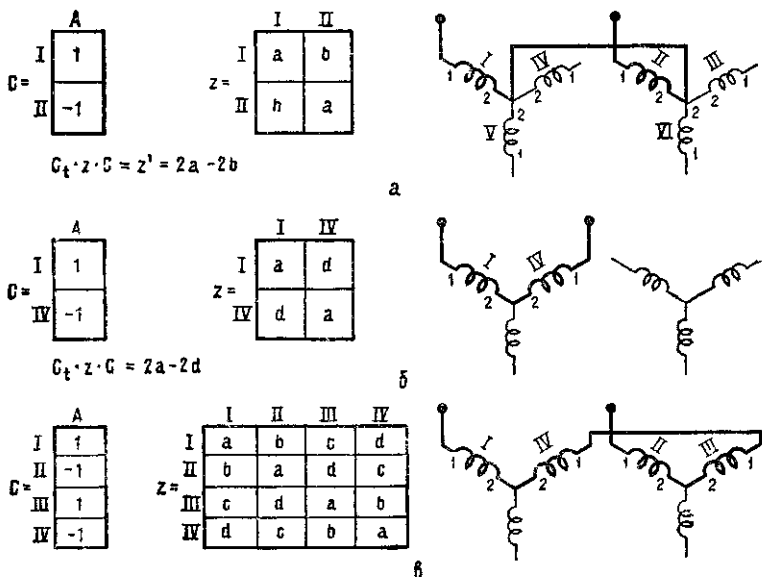


Рис. 12.13. Различные соединения двойных обмоток: а — однофазное прямое; б — трехфазное; в — трехфазное прямое.

терь в пазах проводников принимаются равными $L_t=0,5$, $L_b=$
 $=1,375$ и $L_{tb}=0,625$.

II. Четыре различных собственных и взаимных реактанса шести соединенных обмоток, содержащихся в z' , приведены в табл. 12.6.

Соединения обмоток. Рассчитанные реактансы a, b, c, d являются однофазными реактансами обмоток. Сами обмотки могут быть соединены различными способами по новой C' , три соединения показаны на рис. 12.13; для этих случаев реактансы z'' соединения обмоток рассчитываются снова из однофазных реактансов по $C_i'zC' = z''$.

Собственные импедансы соединенных обмоток (рис. 12.13) приведены в табл. 12.7.

Таблица 12.7

Реактансы соединенных обмоток

| Реактанс | Полный | Главный | Пазового рассеяния |
|---------------------------------------|----------|----------|--------------------|
| 1 — ф $= a$ | 46,76к' | 44,77к' | 18,1 |
| 1 — ф посредством = 2 (a — b) | 1,6к' | 0к' | 36,2 |
| 3 — ф $= 2 (a — d)$ | 135,44к' | 134,34к' | 39,98 |
| 3 — ф посредством = 4 (a — d — b + c) | 3,4к' | 0к' | 79,96 |

8. ПУСКОВЫЕ ОБМОТКИ синхронного двигателя

Реактансы катушек. I. Специальный 24-полюсный трехфазный синхронный двигатель имеет 252 одинаковые катушки. Для запуска катушки соединены в 24 группы (рис. 12.14). Во время запуска некоторые группы соединяются и возбуждаются различным образом. Поскольку две механически противоположные обмотки всегда возбуждены, достаточно проанализировать только половину матрицы, содержащую 126 катушек в двух радианах. Диаграмма соединения 126 катушек в 12 обмоток показана на рис. 12.15.

Поскольку имеется 63 катушки, покрывающие 2π радиан, взаимные индуктивности между 63 катушками в основном все разные, что вызывает необходимость использования 64 разных букв в тензоре импеданса z (см. рис. 12.15).

Достаточно, как показано, заполнить лишь половину первых семи столбцов, поскольку вторая половина повторяет первую половину в обратном порядке и точно так же другие столбцы повторяют первые семь столбцов.

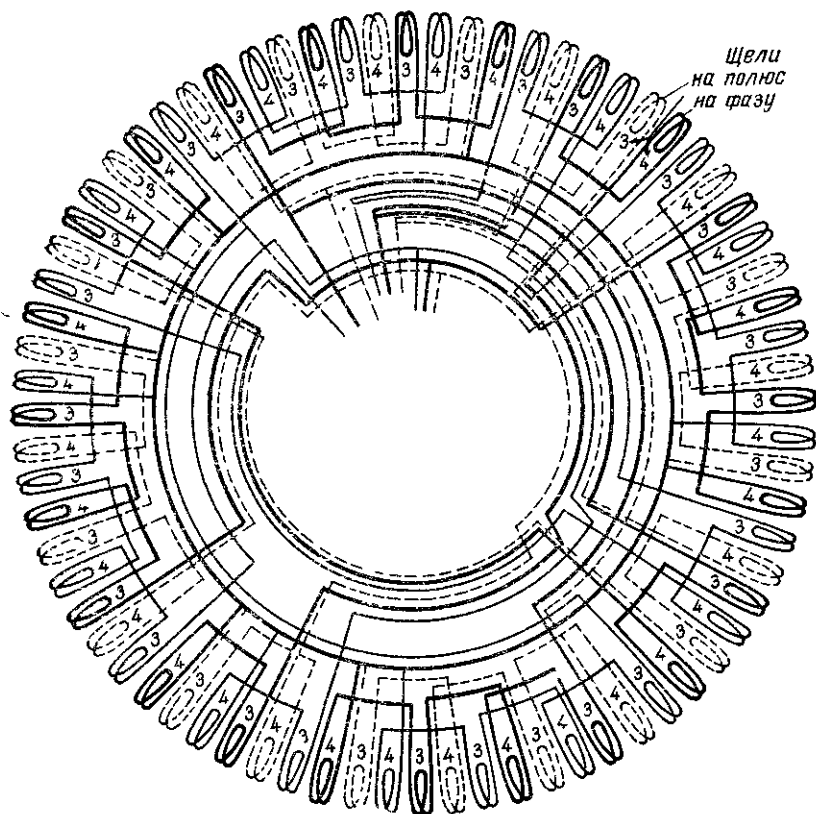


Рис. 12.14. Соединение 252 катушек обмотки синхронного двигателя в 24 группы при запуске.

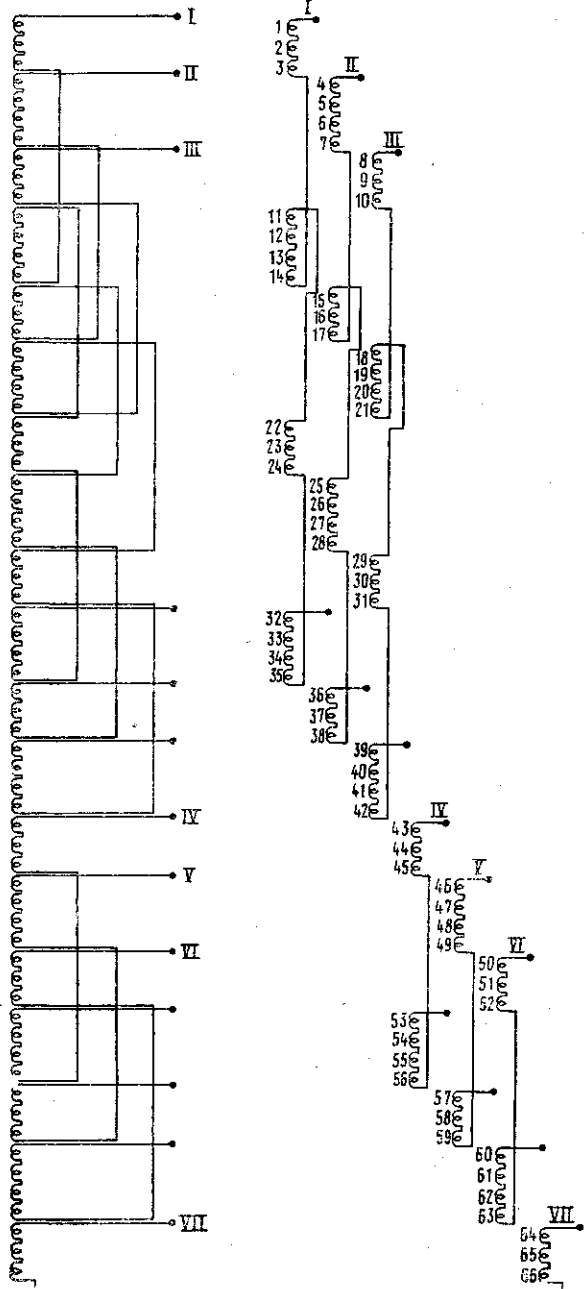


Рис. 12.15. Диаграмма соединения и матрица

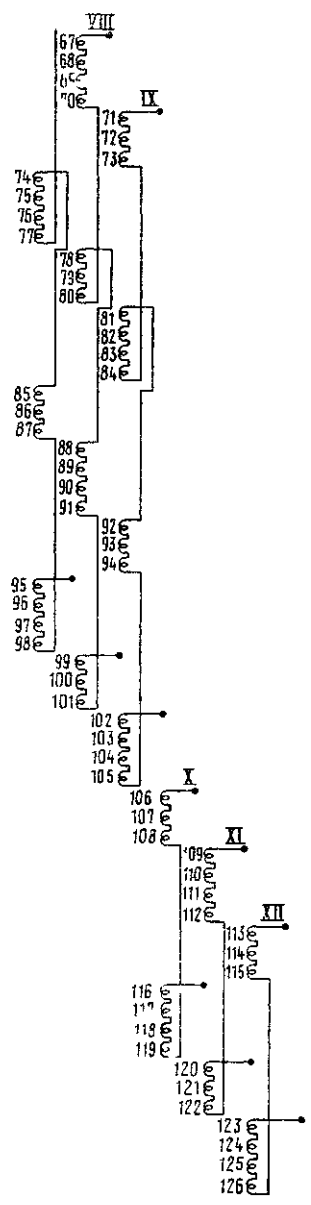
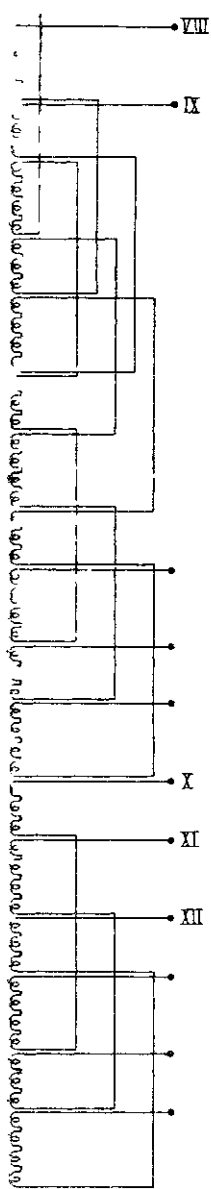


Рис. 12.15. Диаграмма соединения и матрица

II. Первый шаг состоит в том, чтобы соединить только соседние катушки в чередующиеся группы по три и по четыре катушки. Результирующие z' благодаря такому соединению находятся без C_2z разделением z на 36×36 блоков и сложением компонент каждого блока. Результирующий z' , диаграмма соединения и тензор преобразования 36 результирующих групп показаны на рис. 12.16.

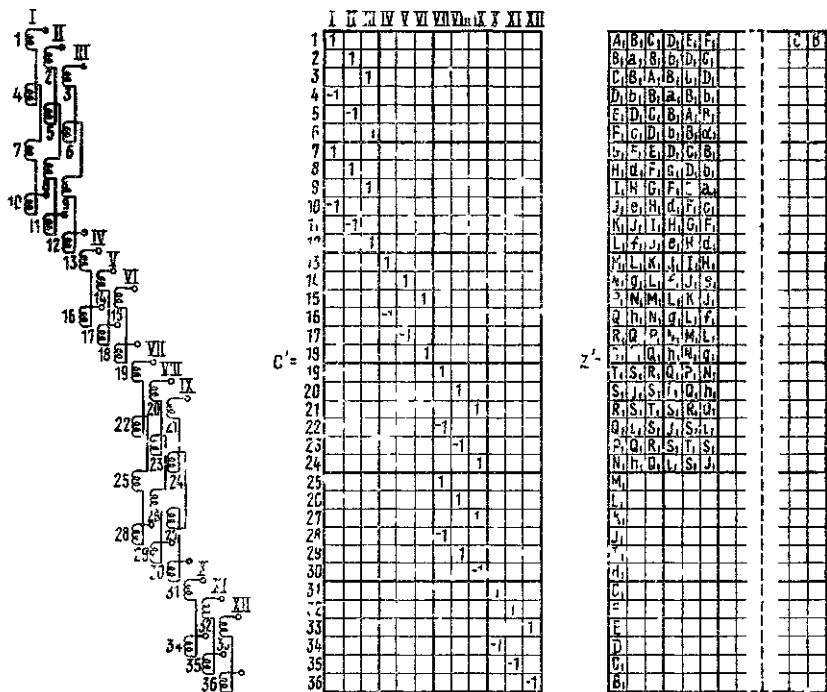


Рис. 12.16. Диаграмма соединения и матрица преобразования обмотки рис. 12.15, после того как соседние катушки соединены.

1. Тензор преобразования C' можно представить как компанд-тензор, в котором единственной компонентой является матрица M , имеющая шесть строк:

$$C' = \begin{matrix} M & & & & & \\ M & & & & & \\ & M & & & & \\ & & M & & & \\ & & & M & & \\ & & & & M & \end{matrix}, \quad M = \begin{matrix} 1 & & & & & \\ & 1 & & & & \\ & & 1 & & & \\ -1 & & & & & \\ & -1 & & & & \\ & & & & & -1 \end{matrix} \quad (12.22)$$

2. Тензор импеданса групповых реактансов z' можно подразделить на составляющие матрицы, каждая из которых имеет по шесть строк и столбцов (т. е. столько же, сколько строк в \mathbf{M}), так что z' можно записать как компаунд-тензор

$$z' = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|} \hline A & B & C & D & C_t & B_t \\ \hline B_t & A & B & C & D & C_t \\ \hline C_t & B_t & A & B & C & D \\ \hline D & C_t & B_t & A & B & C \\ \hline C & D & C_t & B_t & A & B \\ \hline B & C & D & C_t & B_t & A \\ \hline \end{array} \quad (12.23)$$

Только четыре разные матрицы A, B, C, D , каждая из которых имеет по шесть строк и столбцов и показана на рис. 12.16, необходимы для полного представления тензора z' , имеющего 36 строк и столбцов.

Реактансы обмоток. При определении $C_t'z'C'$ тензор импеданса 20 обмоток равен

$$z'' = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 2P + Q + Q_t & Q + R & 2S + R + R_t & Q_t + R_t \\ \hline Q_t + R_t & P & Q + R & S \\ \hline 2S + R + R_t & Q_t + R_t & 2P + Q + Q_t & Q + R \\ \hline Q + R & S & Q_t + R_t & P \\ \hline \end{array} \quad (12.24)$$

где

$$P = M_t A M; \quad R = M_t C M;$$

$$Q = M_t B M; \quad S = M_t D M.$$

Использование компаунд-матриц уменьшает умножение множества матриц с 36 строками и 12 столбцами (рис. 12.16) до умножения *четырёх* множеств матриц, имеющих только 6 строк и 3 столбца. Экономия труда значительная.

При подстановке значений P, Q, R и S в z'' получим окончательные компоненты тензора импеданса

| | | | | | | | | | | | | | |
|---------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|
| $z'' =$ | I | a' | b' | c' | i' | j' | k' | e' | f' | g' | l' | m' | n' |
| | II | b' | a' | d' | m' | i' | e' | f' | e' | h' | j' | i' | p' |
| | III | c' | d' | a' | n' | p' | i' | g' | h' | e' | k' | l' | i' |
| | IV | i' | m' | n' | q' | r' | s' | i' | j' | k' | u' | b' | w' |
| | V | j' | i' | p' | r' | q' | t' | m' | i' | l' | v' | u' | z' |
| | VI | k' | l' | i' | s' | t' | q' | n' | p' | i' | w' | z' | u' |
| | VII | e' | f' | g' | i' | m' | n' | a' | b' | c' | i' | j' | k' |
| | VIII | f' | e' | h' | j' | i' | p' | b' | a' | d' | m' | i' | l' |
| | IX | g' | h' | e' | h' | l' | i' | c' | d' | a' | n' | p' | i' |
| | X | i' | j' | k' | u' | v' | w' | l' | m' | n' | q' | r' | s' |
| | XI | m' | i' | l' | v' | u' | z' | j' | i' | p' | r' | q' | l' |
| | XII | n' | p' | i' | w' | z' | u' | k' | l' | i' | s' | t' | q' |

(12.25)

где

$$\begin{aligned}
 a' &= 2(A' + E') & g' &= 2V' + N' + R' & m' &= I' + Q' & t' &= D' \\
 b' &= 2B' + F' + I' & h' &= 2Z' + P' + S' & n' &= J' + R' & u' &= T' \\
 c' &= 2C' + G' + J' & i' &= E' + M' & p' &= K' + S' & v' &= U' \\
 d' &= 2D' + H' + K' & j' &= F' + L' & q' &= A' & w' &= V' \\
 e' &= 2(T' + M') & k' &= G' + N' & r' &= B' & z' &= Z' \\
 f' &= 2U' + L' + Q' & l' &= H' + P' & s' &= C' & &
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 A' &= 7A + 10B + 6C + 2D - 2I - 4J - 6K - 6L - 4M - 2N \\
 B' &= 2B + 4C + 6D + 5E + 2F - G - M - 2N - 3P - 4H - 3I - 2J - K - 2Q - R \\
 C' &= F + 4G + 7H + 5I + 3J + K - B - 2C - 3D - 2E - Q - 2R - 3S - 3T - 2U - V \\
 D' &= 2B + 4C + 6D + 6E + 3F - 3H - 2I - J - L - 2M - 3N - 4P - 3Q - 2R - S \\
 E' &= T + 3U + 5V + 7W + 6X + 3Y + Z - I - 2J - 3K - 3L - 2M - N - e - 2f - 3g - \\
 &\quad - 3h - 2i - j \\
 F' &= 2X - 4Y + 6a + 4b + 2c - L - 2M - 3N - 4P - 3Q - 2R - S - i - 2j - 3k - 2l - m \\
 G' &= a + 3b + 5c + 7d + 5e + 3f + g - Q - 2R - 3S - 3T - 2U - V - l - 2m - 3n - 3p - \\
 &\quad - 2q - r \\
 H' &= 2X + 4Y + 6Z + 6a + 4b + 2c - M - 2N - 3P - 2Q - R - h - 2i - 3j - 4k - \\
 &\quad - 3l - 2m - n \\
 I' &= 2Q + 4R + 6S + 6T + 4U + 2V - F - 2G - 3H - 2I - J - a - 2b - 3c - 4d - 3e - \\
 &\quad - 2f - g \\
 J' &= L + 3M + 5N + 7P + 5Q + 3R + S - B - 2C - 3D - 3E - 2F - G - \\
 &\quad - X - 2Y - 3Z - 3a - 2b - c \\
 K' &= 2Q + 4R + 6S + 6T + 4U + 2V - E - 2F - 3G - 4H - 3I - 2J - K - \\
 &\quad - b - 2c - 3d - 2e - f
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
L' &= 2t + 4u + 6v + 6a + 4\beta + 2\gamma - h - 2i - 3j - 4k - 3l - 2m - n - \epsilon - \\
&\quad - 2\Omega - 3\varphi - 2\theta - p \\
M' &= p + 3q + 3r + 7s + 5t + 3u + v - e - 2f - 3g - 3h - 2i - j - \lambda - 2\sigma - \\
&\quad - 3\tau - 3\pi - 2\rho - \theta \\
N' &= \alpha + 3\beta + 5\gamma + 7\delta + 5\lambda + 3\delta + \tau - l - 2m - 3n - 3p - 2q - r - \varphi - 2\mu - \\
&\quad - 3\omega - 3\eta - 2\varepsilon - \Omega \\
P' &= 2t + 4u + 6v + 6a + 4\beta + 2\gamma - i - 2j - 3k - 2l - m - \pi - 2p - 3\theta - \\
&\quad - 4\psi - 3\Omega - 2\varepsilon - \eta \\
Q' &= 2l + 4m + 6n + 6p + 4q + 2r - b - 2c - 3d - 2e - f - a - 2\beta - 3\gamma - \\
&\quad - 4\delta - 3\lambda - 2\sigma - \tau \\
R' &= h' + 3i + 5j + 7k + 5l + 3m + n - x - 2y - 3z - 3a - 2b - c - t - 2u - \\
&\quad - 3v - 3a - 2\beta - \gamma \\
S' &= 2l + 4m + 6n + 6p + 4q + 2r - a - 2b - 3c - 4d - 3e - 2f - g - \beta - \\
&\quad - 2\gamma - 3\delta - 2\lambda - \sigma \\
T' &= 7\psi + 10\varphi + 6\mu + 2\omega - 2\theta - 4p - 6\pi - 6\tau - 4\sigma - 2\lambda \\
U' &= 2\varphi + 4\mu + 6\omega + 5\eta + 2\varepsilon - \Omega - 4\psi - 3\theta - 2p - \pi - \sigma - 2\lambda - 3\delta - 2\gamma - \beta \\
V' &= \epsilon + 4\Omega + 7\psi + 5\theta + 3p + \pi - \varphi - 2\mu - 3\omega - 2\eta - \gamma - 2\beta - 3\alpha - 3v - 2u - t \\
Z' &= 2\varphi + 4\mu + 6\omega + 6\eta + 3\varepsilon - 3\varphi - 2\theta - p - v - 2\sigma - 3\lambda - 4\delta - 3\gamma - 2\beta - \alpha
\end{aligned}$$

Каждая из строчных букв (а их 23) со штрихом представляет собственные и взаимные импедансы одной из 12 обмоток. Из 144 возможных импедансов имеется 23 разных импеданса.

Импедансы отдельных катушек (буквы без штрихов) могут представлять любую из гармонических составляющих полного, пазового рассеяния и так далее, рассчитанных по изложенному методу. Численные подстановки в формулы обмоток, данные выше, можно сделать вычислительной машиной.

Двенадцать обмоток могут быть соединены в группы посредством С различным образом во время пуска. Значение нового z''' находят из приведенного выше z'' по $C_t'' z'' C'' = z'''$, что дает различные типы собственных и взаимных реактансов соединенных обмоток.

Если это требуется, то расчеты от z' к z'' можно выполнять в два или даже три этапа.

Глава 13

СПИНОРНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

1. СОПРЯЖЕНИЕ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ОБЪЕКТОВ

I. Все тензоры преобразования C , рассмотренные ранее, содержали только действительные числа (константы), такие как 1, -1 , n . Во многих технических задачах тензор преобразования C содержит также комплексные числа (константы), такие как $a + jb$. В таких случаях все уравнения и все формулы преобразования можно записать в более общей форме.

Примечательно, что эти более общие формулы, которые мы получим, будут лишь частным случаем еще более общих формул, получаемых, если компоненты тензора преобразования C не действительные или комплексные константы, как 5 или $a + jb$, а функции переменной x^α .

II. Если n -матрицы геометрического объекта некоторой валентности содержат комплексные компоненты, то из него можно построить еще один геометрический объект, «Сопряжение» геометрического объекта образуется при замещении каждой компоненты $(a + jb)$ каждой n -матрицы сопряженной комплексной величиной $(a - jb)$. В прямом обозначении сопряжение геометрического объекта A обозначается звездочкой: A^* . (Индексное обозначение дано ниже.) Например, если в некоторой частной системе координат

$$e = \begin{array}{cccc} a & b & c & d \\ \hline a + jb & c & -jd & e - jf \end{array}, \quad (13.1)$$

его сопряжение имеет вид

$$e^* = \begin{array}{cccc} a & b & c & d \\ \hline a - jb & c & jd & e + jf \end{array} \quad (13.2)$$

или, если

$$z = \begin{array}{c|cccc} & \mathbf{a} & \mathbf{b} & \mathbf{c} & \mathbf{d} \\ \hline \mathbf{a} & a + jb & -jc & 0 & 0 \\ \hline \mathbf{b} & -jc & d - je & f & 0 \\ \hline \mathbf{c} & -f & 0 & 0 & g + jh \\ \hline \mathbf{d} & 0 & jp & k + jl & m - jn \end{array} \quad (13.3)$$

его сопряжение

$$\begin{array}{c|cccc} & \mathbf{a} & \mathbf{b} & \mathbf{c} & \mathbf{d} \\ \hline \mathbf{a} & a - jb & +jc & 0 & 0 \\ \hline \mathbf{b} & jc & d + je & f & 0 \\ \hline \mathbf{c} & -f & 0 & 0 & g - jh \\ \hline \mathbf{d} & 0 & -jp & k - jl & m + jn \end{array} \quad (13.4)$$

III. При сопряжении сопряженного геометрического объекта восстанавливается оригинал

$$(\mathbf{A}^*)^* = \mathbf{A}. \quad (13.5)$$

Сопряжение произведения получается сопряжением каждого сомножителя

$$(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})^* = \mathbf{A}^* \cdot \mathbf{B}^*. \quad (13.6)$$

Сопряжение обратного геометрического объекта то же самое, что и обращение сопряженного, т. е.

$$(\mathbf{A}^{-1})^* = (\mathbf{A}^*)^{-1}. \quad (13.7)$$

Другими словами, можно сначала сделать обращение тензора валентности 2, а потом сопряжение или, наоборот, сначала сопряжение, а потом его обращение. Конечный тензор будет тот же самый.

2. БОЛЕЕ ОБЩЕЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ МОЩНОСТИ

1. Комплексное число $\hat{i} = a + jb$ представляется на плоскости (плоскость времени) линией с координатами a и b (рис. 13.1). Произведение комплексного числа самого на себя $(\hat{i})(\hat{i})$ должно быть определено так, чтобы оно было равно квадрату его абсолютной величины, т. е. $a^2 + b^2$. Этот результат можно полу-

чить только в том случае, если произведение i на себя произвольно определено как

$$(\widehat{i})(\widehat{i}^*) = (a + jb)(a - jb) = a^2 + b^2, \quad (13.8)$$

т. е. как произведение комплексного числа на свое сопряжение.

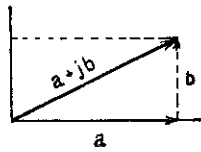


Рис. 13.1. Комплексное число, как вектор времени.

II. Вообще произведение двух векторов (дающее скаляр) определяется посредством сопряжения одного из векторов. Таким образом, если

$$a = \begin{array}{c} a \quad b \quad c \quad d \\ \hline (a + jb) \quad c + jd \quad e + jf \quad g + jh \end{array},$$

$$b = \begin{array}{c} p \quad q \quad r \quad s \quad t \quad u \quad v \quad z \\ \hline p + jq \quad r + js \quad t + ju \quad v + jz \end{array},$$

то их произведение определяется как

$$ab^* = (a + jb)(p - jq) + (c + jd)(r - js) + (e + jf)(t - ju) + (g + jh)(v - jz) = (ap + bq + cr + ds + et + fu + gv + hz) + j(bp - aq + dr - cs + ft - eu + hv - gz).$$

III. В соответствии с определением, данным выше, *мощность входа в системе переменного тока*

$$P = e^*i = (e_a)^*i^a. \quad (13.9)$$

Эта «воображаемая» мощность имеет реальную и мнимую компоненты. По соглашению сопряженным будет вектор *напряжения*, а не вектор тока, потому что реактивная мощность, вызванная отставанием тока, должна быть отрицательна. Это сообразуется с практикой выбора вектора приложенного напряжения как оси отсчета времени. Например, если токи в двух цепях m и n отстают, т. е.

$$e = \begin{array}{c} m \quad n \\ \hline a + j0 \quad 0 + jb \end{array}, \quad i = \begin{array}{c} m \quad n \\ \hline 0 - jc \quad d + j0 \end{array},$$

то, представляя реактивную мощность, обусловленную запаздыванием токов, отрицательной, имеем: полная мощность входа равна

$$P = e^*i = (a)(-jc) + (-jb)(d) = -j(ac + bd).$$

Если не делать сопряжение e , то ответ $P = -j(ac - bd)$ не верен.

В частном случае, когда компоненты — действительные числа, произведение двух векторов сводится к обычной форме.

3. ФОРМУЛЫ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

I. Пусть вектор тока системы i преобразуется в i' формулой преобразования $i = Ci'$, где некоторые компоненты C — комплексные числа.

Предположим снова, что линейная форма, мощность входа — инвариант, и исследуем формулы преобразования различных тензоров e , z и др., когда компоненты C — комплексные числа:

$$P = e^* i = e'^* i' = P'. \quad (13.10)$$

Эта формула, однако, более общая, чем аналогичная формула (4.22).

II. Чтобы найти формулу преобразования e , подставим снова $i \equiv Ci'$ в уравнение (13.10): $e^* Ci' \equiv e'^* i'$.

Это тождество, поэтому i' можно опустить: $e^* C = e'^*$.

Взяв сопряжение от обеих частей, получим

$$e C^* = e', \quad (13.11)$$

$$e = C_i^{*-1} e'. \quad (13.12)$$

Следовательно, если тензор преобразования C содержит комплексные компоненты, то в формулах преобразования также появляется сопряжение с C , т. е. C^* .

III. Установим теперь формулу преобразования z , следуя методу рассуждения гл. 4, § 8. Уравнение напряжения $e = zi$. Подставляя i и e через их значения со штрихами, получаем

$$C_i^{*-1} e' = z C i',$$

$$e' = C_i^* z C i'.$$

Так как по постулату второго обобщения форма уравнения напряжения не зависит от выбора системы координат $e' = z' i'$, то, следовательно, формула преобразования z

$$z' = C_i^* z C. \quad (13.13)$$

4. ТЕНЗОР «ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ»

I. Простой пример матрицы преобразования C , имеющей компоненты в виде комплексных чисел, появляется при рассмотрении трех «операторов последовательности» в методе симметричных составляющих.

Пусть даны три различные катушки с неравными взаимными импедансами. Их тензор импеданса, векторы приложенного напряжения и тока

$$z = \begin{array}{c} \begin{array}{|c|c|c|} \hline a & b & c \\ \hline Z_{aa} & Z_{ab} & Z_{ac} \\ \hline b & Z_{ab} & Z_{bb} & Z_{bc} \\ \hline c & Z_{ac} & Z_{bc} & Z_{cc} \\ \hline \end{array} \end{array}, \quad e = \begin{array}{|c|c|c|} \hline a & b & c \\ \hline e_a & e_b & e_c \\ \hline \end{array},$$

$$i = \begin{array}{|c|c|c|} \hline a & b & c \\ \hline i_a & i_b & i_c \\ \hline \end{array}.$$

II. Пусть теперь действительные токи i^a, i^b, i^c заменены другим множеством гипотетических токов i^0, i^1 и i^2 (называемых токами нулевой, положительной и отрицательной последовательности фаз соответственно) следующим образом:

$$i^a = \frac{1}{\sqrt{3}} (i^0 + i^1 + i^2),$$

$$i^b = \frac{1}{\sqrt{3}} (i^0 + a^2 i^1 + a i^2),$$

$$i^c = \frac{1}{\sqrt{3}} (i^0 + a i^1 + a^2 i^2),$$

$$C = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{array}{c} \begin{array}{|c|c|c|} \hline 0 & 1 & 2 \\ \hline a & 1 & 1 & 1 \\ \hline b & 1 & a^2 & a \\ \hline c & 1 & a & a^2 \\ \hline \end{array} \end{array}, \quad (13.14)$$

где операторы $a = -\frac{1}{2} + j866 = \epsilon^{j120^\circ}$, $a^2 = -\frac{1}{2} - j866 = \epsilon^{-j120^\circ}$

вращают вектор времени $(a + jb)$ против часовой стрелки (или по часовой стрелке) на 120° соответственно. Они удовлетворяют соотношению $1 + a + a^2 = 0$.

Сопряженный с a есть a^2 и сопряженный с a^2 есть a . Кроме того, $a^3 = 1$ и $a^4 = a$. В дальнейшем этот частный тензор преобразования C будем называть «тензором последовательности».

Множитель $1/\sqrt{3}$ вводится здесь из тех соображений, что мощность $e^* i$ должна быть инвариантом относительно преобразования последовательности (см. § 19). Таким образом, тензор последовательности можно использовать в сочетании с другими тензорами инвариантных преобразований на равных основаниях.

Компоненты тензора последовательности C являются коэффициентами при новых токах. Обращение сопряженного и сопряжение обратного (или их транспонирование) имеют вид

$$C^{-1} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{array}{c} \begin{array}{|c|c|c|} \hline a & b & c \\ \hline 0 & 1 & 1 & 1 \\ \hline 1 & 1 & a & a^2 \\ \hline 2 & 1 & a^2 & a \\ \hline \end{array} \end{array}, \quad C_t^{-1} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{array}{c} \begin{array}{|c|c|c|} \hline 0 & 1 & 2 \\ \hline a & 1 & 1 & 1 \\ \hline b & 1 & a & a^2 \\ \hline c & 1 & a^2 & a \\ \hline \end{array} \end{array},$$

$$\begin{aligned}
 \mathbf{C}^* &= \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{array}{c|cc} & 0 & 1 & 2 \\ \hline a & 1 & 1 & 1 \\ b & 1 & a & a^2 \\ \hline c & 1 & a^2 & a \end{array}, & \mathbf{C}_i^* &= \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{array}{c|cc} & a & b & c \\ \hline 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a & a^2 \\ \hline 2 & 1 & a^2 & a \end{array}. \quad (13.15) \\
 \mathbf{C}^{*-1} &= \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{array}{c|cc} & a & b & c \\ \hline 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a^2 & a \\ \hline 2 & 1 & a & a^2 \end{array}, & \mathbf{C}_i^{*-1} &= \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{array}{c|cc} & 0 & 1 & 2 \\ \hline a & 1 & 1 & 1 \\ b & 1 & a^2 & a \\ \hline c & 1 & a & a^2 \end{array}
 \end{aligned}$$

Представленные здесь семь тензоров образуются только двумя различными видами матриц

$$\frac{1}{\sqrt{3}} \begin{array}{c|cc} & 1 & 1 & 1 \\ \hline & 1 & a^2 & a \\ \hline & 1 & a & a^2 \end{array} \quad \text{и} \quad \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{array}{c|cc} & 1 & 1 & 1 \\ \hline & 1 & a & a^2 \\ \hline & 1 & a^2 & a \end{array}$$

с различно расположенными индексами. Детерминант первой матрицы равен $\sqrt{3}(a-a^2)$, а второй $\sqrt{3}(a^2-a)$.

III. Три строки тензора преобразования \mathbf{C} являются тремя так называемыми «операторами последовательности», а именно:

1) оператор нулевого сдвига фаз $S^0 = (1, 1, 1)$; 2) оператор положительного сдвига фаз $S^1 = (1, a^2, a)$; 3) оператор отрицательного сдвига фаз $S^2 = (1, a, a^2)$.

Таким образом, обычный метод симметричных составляющих использует три различных матрицы преобразования (каждая матрица состоит из одной строки), в то время как данный метод использует только одну матрицу преобразования из трех строк, что ускоряет вычисления и упрощает метод рассуждения.

IV. Вектор приложенного напряжения есть $\mathbf{e}' = \mathbf{C}_i^* \mathbf{e}$

$$\mathbf{e}' = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{array}{c|cc} & 0 & 1 & 2 \\ \hline e_a + e_b + e_c & e_a + ae_b + a^2e_c & e_a + a^2e_b + ae_c \\ \hline \end{array} = \begin{array}{c|c} \begin{array}{c} e_0 \\ e_1 \\ e_2 \end{array} & \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 2 \end{array} \end{array} \quad (13.16)$$

Новые компоненты вектора тока $\mathbf{i}' = \mathbf{C}^{-1} \mathbf{i}$

$$\mathbf{i}' = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{array}{c|cc} & 0 & 1 & 2 \\ \hline i^a + i^b + i^c & i^a + ai^b + a^2i^c & i^a + a^2i^b + ai^c \\ \hline \end{array} = \begin{array}{c|c} \begin{array}{c} i_0 \\ i_1 \\ i_2 \end{array} & \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 2 \end{array} \end{array} \quad (13.17)$$

Новые напряжения и токи находятся из старых по той же формуле, поскольку $\mathbf{C}_i^* = \mathbf{C}^{-1}$.

5. ТЕНЗОР ИМПЕДАНСА ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

I. Рассматривая более общую формулу тензора импеданса трех *неодинаковых* катушек

$$z = \begin{matrix} & \begin{matrix} a & b & c \end{matrix} \\ \begin{matrix} a \\ b \\ c \end{matrix} & \begin{array}{|c|c|c|} \hline Z_{aa} & Z_{ab} & Z_{ac} \\ \hline Z_{ba} & Z_{bb} & Z_{bc} \\ \hline Z_{ca} & Z_{cb} & Z_{cc} \\ \hline \end{array} \end{matrix} \quad (13.18)$$

получаем, что его компоненты относительно последовательности сдвинутых по фазе осей находятся по формуле $C_i^* z C$. Первый шаг:

$$z C = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{matrix} & \begin{matrix} a & b & c \end{matrix} \\ \begin{matrix} a \\ b \\ c \end{matrix} & \begin{array}{|c|c|c|} \hline Z_{aa} + Z_{ab} + Z_{ac} & Z_{aa} - a^2 Z_{ab} + a Z_{ac} & Z_{aa} + a Z_{ab} + a^2 Z_{ac} \\ \hline Z_{ba} + Z_{bb} + Z_{bc} & Z_{ba} + a^2 Z_{bb} + a Z_{bc} & Z_{ba} + a Z_{bb} + a^2 Z_{bc} \\ \hline Z_{ca} + Z_{cb} + Z_{cc} & Z_{ca} + a^2 Z_{cb} + a Z_{cc} & Z_{ca} + a Z_{cb} + a^2 Z_{cc} \\ \hline \end{array} \end{matrix}$$

Промежуточный тензор обычно записывается как

$$z C = \begin{matrix} & \begin{matrix} 0 & 1 & 2 \end{matrix} \\ \begin{matrix} a \\ b \\ c \end{matrix} & \begin{array}{|c|c|c|} \hline Z_{a0} & Z_{a1} & Z_{a2} \\ \hline Z_{b0} & a^2 Z_{b1} & a Z_{b2} \\ \hline Z_{c0} & a Z_{c1} & a^2 Z_{c2} \\ \hline \end{array} \end{matrix} \quad (13.19)$$

где

$$\begin{aligned} Z_{a0} &= (1/\sqrt{3})(Z_{aa} + Z_{ab} + Z_{ac}); \\ Z_{a1} &= (1/\sqrt{3})(Z_{aa} + a^2 Z_{ab} + a Z_{ac}); \\ Z_{a2} &= (1/\sqrt{3})(Z_{aa} + a Z_{ab} + a^2 Z_{ac}). \end{aligned} \quad (13.20)$$

Этот тензор представляет импедансы каждой фазы, вызванной токами последовательности фаз, согласно уравнению $e = z C i'$, как показано в гл. 4, § 10. Он используется, когда токи выражены в осях *последовательности*, а напряжения — относительно *реальных* осей цепи.

Второй шаг $C_i^* (z C) =$

$$z' = \frac{1}{3} \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 2 \end{array} \begin{array}{|c|c|c|} \hline 0 & Z_{a0} + Z_{b0} + Z_{c0} & Z_{a1} + a^2 Z_{b1} + a Z_{c1} & Z_{a2} + a Z_{b2} + a^2 Z_{c2} \\ \hline 1 & Z_{a0} + a Z_{b0} + a^2 Z_{c0} & Z_{a1} + Z_{b1} + Z_{c1} & Z_{a2} + a^2 Z_{b2} + a Z_{c2} \\ \hline 2 & Z_{a0} + a^2 Z_{b0} + a Z_{c0} & Z_{a1} + a Z_{b1} + a^2 Z_{c1} & Z_{a2} + Z_{b2} + Z_{c2} \\ \hline \end{array} \quad (13.21)$$

$$z' = \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 2 \end{array} \begin{array}{|c|c|c|} \hline 0 & Z_{00} & Z_{01} & Z_{02} \\ \hline 1 & Z_{10} & Z_{11} & Z_{12} \\ \hline 2 & Z_{20} & Z_{21} & Z_{22} \\ \hline \end{array} \quad (13.22)$$

II. Когда взаимные индуктивности трех неодинаковых катушек нули, тензор импеданса равен

$$z = \begin{array}{c} a \\ b \\ c \end{array} \begin{array}{|c|c|c|} \hline a & Z_a & 0 & 0 \\ \hline b & 0 & Z_b & 0 \\ \hline c & 0 & 0 & Z_c \\ \hline \end{array}, \quad z' = \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 2 \end{array} \begin{array}{|c|c|c|} \hline 0 & Z_0 & Z_2 & Z_1 \\ \hline 1 & Z_1 & Z_0 & Z_2 \\ \hline 2 & Z_1 & Z_1 & Z_0 \\ \hline \end{array} \quad (13.23)$$

где

$$\begin{aligned} Z_0 &= (1/3)(Z_a + Z_b + Z_c); \\ Z_1 &= (1/3)(Z_a + a Z_b + a^2 Z_c); \\ Z_2 &= (1/3)(Z_a + a^2 Z_b + a Z_c) \end{aligned} \quad (13.24)$$

Они называются соответственно реактансами нулевой, положительной и отрицательной последовательности фаз.

Необходимо заметить, что тензор импеданса последовательности z' не является симметричным даже в случае неподвижных катушек. Вообще симметричный тензор импеданса перестает быть симметричным после преобразования с помощью матрицы C с комплексными компонентами.

III. Уравнение $e' = z' i'$ дает три последовательных напряжения, когда приложены три последовательных тока. В общем случае, когда три катушки неодинаковы, каждый приложенный ток последовательности генерирует все три последовательных напряжения. Например, ток нулевой последовательности i^0 генерирует напряжение обратного порядка следования фаз, равное $i^0 Z_{20} = i^0 (Z_{a2} + Z_{b2} + Z_{c2})/3$.

Уравнение решается в виде $i' = z'^{-1} e'$. Решением являются три тока порядка следования фаз, порожденных тремя напряже-

ниями последовательности. В случае *неодинаковых катушек* каждое приложенное напряжение последовательности генерирует все три тока последовательности и форма \mathbf{z}' (уравнение (13.22) или (13.23)) не имеет никакого преимущества перед первоначальной формой \mathbf{z} уравнения (13.18).

6. ПРИВЕДЕНИЕ К ДИАГОНАЛЬНОЙ ФОРМЕ

I. Когда три катушки одинаковы, тензор импеданса последовательности \mathbf{z}' можно привести к специальной форме, которая уменьшает количество вычислений.

Предположим, что тензор импеданса первоначальных трех катушек имеет форму

$$\mathbf{z} = \begin{array}{c} \text{a} \\ \text{z}=\text{b} \\ \text{c} \end{array} \begin{array}{|c|c|c|} \hline \text{a} & Z & X_1 & X_2 \\ \hline \text{b} & X_2 & Z & X_1 \\ \hline \text{c} & X_1 & X_2 & Z \\ \hline \end{array}, \quad (13.25)$$

где три катушки имеют равные собственные импедансы Z и две (не три) различные взаимные индуктивности X_1 и X_2 . Такая ситуация возникает в трехфазных синхронных и индукционных машинах с равномерными зазорами. Тензор импеданса последовательности уравнения (13.21) становится диагональным 2-тензором:

$$\mathbf{z}' = \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 2 \end{array} \begin{array}{|c|c|c|} \hline 0 & Z+X_1+X_2 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 0 & Z+a^2X_1+aX_2 & 0 \\ \hline 2 & 0 & 0 & Z+aX_1+aX_2 \\ \hline \end{array} = \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 2 \end{array} \begin{array}{|c|c|c|} \hline 0 & Z_0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 0 & Z_1 & 0 \\ \hline 2 & 0 & 0 & Z_2 \\ \hline \end{array}, \quad (13.26)$$

где Z_0 , Z_1 и Z_2 — реактансы нулевого, положительного и отрицательного порядков следования фаз соответственно.

II. Когда две взаимные индуктивности X_1 и X_2 равны, то тензор импеданса порядка следования фаз становится равным (поскольку $1+a+a^2=0$)

$$\mathbf{z}' = \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 2 \end{array} \begin{array}{|c|c|c|} \hline 0 & Z+2X & 0 & 0 \\ \hline 1 & 0 & Z-X & 0 \\ \hline 2 & 0 & 0 & Z-X \\ \hline \end{array} = \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 2 \end{array} \begin{array}{|c|c|c|} \hline 0 & Z_0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 0 & Z_1 & 0 \\ \hline 2 & 0 & 0 & Z_1 \\ \hline \end{array} \quad (13.27)$$

Иначе говоря, при одинаковых взаимных индуктивностях реактансы положительного и отрицательного порядка следования фаз равны.

III. Тензор адмиттанса y' также имеет диагональную форму

$$y' = \begin{array}{c|ccc} & 0 & 1 & 2 \\ \hline 0 & 1/Z_0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 1/Z_1 & 0 \\ \hline 2 & 0 & 0 & 1/Z_2 \end{array}, \quad (13.28)$$

указывая, что каждое напряжение последовательности генерируется только своим собственным током последовательности и наоборот.

IV. Одной из наиболее важных проблем в теории матриц является нахождение матрицы преобразования, которая приводит данную матрицу к диагональной форме. Интересно, что метод симметричных составляющих дает матрицу преобразования S (уравнение (13.14)), которая приводит определенные симметричные матрицы к диагональной форме. (Конечно, в теории матриц линейная форма не обязательно инвариантна при преобразовании.) Несомненно, что существуют и другие группы S -матриц, которые приводят к диагональной форме еще более сложные z' .

V. Если тензор импеданса имеет n строк и столбцов, матрица преобразования S в методе симметричных составляющих имеет вид

$$S = \frac{1}{\sqrt{n}} \begin{array}{c|cccc} & 0 & 1 & 2 & n-1 \\ \hline 0 & 1 & 1 & 1 & \vdots & 1 \\ \hline 1 & 1 & a^{-1} & a^{-2} & \vdots & a^{-1(n-1)} \\ \hline 2 & 1 & a^{-2} & a^{-4} & \vdots & a^{-2(n-1)} \\ \hline \dots & \dots & \dots & \dots & \ddots & \dots \\ \hline n-1 & 1 & a^{-(n-1)} & a^{-2(n-1)} & \vdots & a^{-(n-1)(n-1)} \end{array}, \quad (13.29)$$

где a — корень n степени из единицы. Когда $n=3$, S определяется уравнением (13.14).

Определитель C называется «определителем Вандермонда», общая форма которого имеет вид

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ a & b & c & \dots & f \\ a^2 & b^2 & c^2 & \dots & f^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a^{n-1} & b^{n-1} & c^{n-1} & \dots & f^{n-1} \end{vmatrix} \quad (13.30)$$

Здесь a, b, c, \dots, f заменяют n различных корней n -й степени из единицы.

7. ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ТЕНЗОРА ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

I. Трехфазные сети состоят из различных типов трехфазных устройств, соединенных различными способами, параллельно или последовательно, как отдельные катушки. Компонентами трехфазных устройств могут быть генераторы, трансформаторы, линии передач, нагрузки.

Использование тензора последовательности, описанного в предыдущем параграфе, сокращает анализ, если выполняются следующие два условия:

1) каждое отдельное трехфазное устройство сбалансировано, т. е. если его тензор импеданса имеет форму уравнений (13.25) или (13.27); 2) связь каждого устройства с другими сбалансирована.

II. Если одно или больше устройств или их связей не сбалансированы, то полная сеть разбивается на две части: 1) содержащую несколько сбалансированных устройств; 2) содержащую несколько несбалансированных устройств.

Анализ первой части упрощается при использовании тензора последовательности, второй части — нет. Анализ часто становится фактически более сложным.

В большинстве трехфазных сетей несбалансированная часть появляется из-за аварии или несбалансированной нагрузки, в то время как сбалансированные части содержат несколько устройств. Очевидно, в этом случае имеет смысл использовать тензор последовательности.

Анализ взаимосвязи трехфазных устройств систематически изложен в гл. 19. Несколько простейших примеров будут рассмотрены здесь.

III. Во всех рассматриваемых до сих пор задачах осями «примитивной» сети всегда были оси реальных катушек. Однако в трехфазных устройствах конструктивные параметры могут быть известны вдоль осей последовательности. Следовательно, тензор импеданса z примитивной сети каждого трехфазного устройства может быть выражен:

либо вдоль реальных фазовых осей a, b, c ; либо вдоль осей последовательности $0, 1, 2$.

Аналогично приложенные напряжения e или токи i выражаются относительно этих двух типов осей.

Однако тензор преобразования C , показывающий способ соединения катушек, должен быть выражен сначала по реальным осям цепи a, b, c и только после этого его следует преобразовать к осям последовательности $0, 1, 2$.

При нахождении различных геометрических объектов результирующей сети они могут быть выражены либо по фазным осям a, b, c , либо по осям последовательности $0, 1, 2$, либо по тем и другим.

8. ГЕНЕРАТОР, ОПИСАННЫЙ В ОСЯХ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

I. Пусть трехфазный генератор задан своим тензором импеданса z' и генерируемым напряжением e' , выраженными по осям последовательности:

$$z' = \begin{array}{c|cc} & 0 & 1 & 2 \\ \hline 0 & Z_0 & & \\ \hline 1 & & Z_1 & \\ \hline 2 & & & Z_2 \\ \hline \end{array}, \quad (13.31) \quad e' = \begin{array}{c|cc} & 0 & 1 & 2 \\ \hline 0 & 0 & e_1 & 0 \\ \hline \end{array}. \quad (13.32)$$

Пусть зажимы генератора соединены с любой нагрузкой посредством C . Если нагрузка и C выражены по реальным осям цепи, удобно заменить оси последовательности y, z и e генератора на оси a, b, c .

II. Из уравнения (13.13) $z' = C_i^* z C$ получим

$$z = C_i^{*-1} z' C^{-1} \quad (13.33)$$

и из $e' = C_i^* e$ получим

$$e = C_i^{*-1} e', \quad (13.34)$$

где величины со штрихами выражены по осям последовательности. Следовательно, компоненты геометрических объектов генератора в реальных контурных осях цепи находятся с помощью $C_i^{*-1} z' C^{-1}$:

$$z = \frac{1}{3} \begin{array}{c|cc} & a & b & c \\ \hline a & Z_0 + Z_1 + Z_2 & Z_0 + aZ_1 + a^2Z_2 & Z_0 + a^2Z_1 + aZ_2 \\ \hline b & Z_0 + a^2Z_1 + aZ_2 & Z_0 + Z_1 + Z_2 & Z_0 + aZ_1 + a^2Z_2 \\ \hline c & Z_0 + aZ_1 + a^2Z_2 & Z_0 + a^2Z_1 + aZ_2 & Z_0 + Z_1 + Z_2 \\ \hline \end{array}, \quad (13.35)$$

$$e = \begin{bmatrix} a & b & c \\ e_1 & a^2 e_1 & a e_1 \end{bmatrix}. \quad (13.36)$$

При использовании этих компонент геометрических объектов как отправной точки метод анализа генератора является таким же, как и метод анализа любой другой асимметричной неподвижной сети из трех катушек.

9. ГЕНЕРАТОР, ПОДСОЕДИНЕННЫЙ К НАГРУЗКЕ

I. Пусть генератор присоединен к нагрузке (рис. 13.2). Имеется два контура, следовательно, выбираются две переменных,

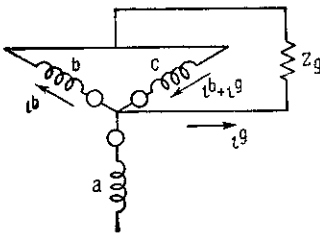


Рис. 13.2. Несимметричная нагрузка генератора.

например i^b и i^g . Тензор импеданса примитивной сети имеет вид

$$z = \frac{1}{3} \begin{array}{c|cccc} & a & b & c & g \\ \hline a & Z_0 + Z_1 + Z_2 & Z_0 + aZ_1 + a^2Z_2 & Z_0 + a^2Z_1 + aZ_2 & 0 \\ \hline b & Z_0 + a^2Z_1 + aZ_2 & Z_0 + Z_1 + Z_2 & Z_0 + aZ_1 + a^2Z_2 & 0 \\ \hline c & Z_0 + aZ_1 + a^2Z_2 & Z_0 + a^2Z_1 + aZ_2 & Z_0 + Z_1 + Z_g & 0 \\ \hline g & 0 & 0 & 0 & 3Z_g \end{array}$$

Приравнивая старые и новые токи, протекающие в каждой катушке, получаем

$$\begin{array}{l} i^a = 0 \\ i^b = i^{b'} \\ i^c = -i^{b'} - i^{g'} \\ i^g = i^{g'} \end{array} \quad C = \begin{array}{c|cc} & b' & g' \\ \hline a & & \\ \hline b & 1 & \\ \hline c & -1 & -1 \\ \hline g & & 1 \end{array}. \quad (13.37)$$

Коэффициенты при новых тока́х образуют матрицу C . Отсюда по формулам $C_i^* z C$ и $C_i^* e$ находим

$$z' = \begin{array}{c} b' \\ g' \end{array} \begin{array}{|c|c|} \hline Z_1 + Z_2 & [Z_1(1-a) + Z_2(1-a^2)]/3 \\ \hline [Z_1(1-a^2) + Z_2(1-a)]/3 & (Z_0 + Z_1 + Z_2 + 3Z_g)/3 \\ \hline \end{array}, \quad (13.38)$$

$$e' = \begin{array}{c} b' \\ g' \end{array} \begin{array}{|c|c|} \hline (a^2 - a)e & -ae \\ \hline \end{array}, \quad (13.39)$$

$$y' = \begin{array}{c} b' \\ g' \end{array} \begin{array}{|c|c|} \hline (Z_0 + Z_1 + Z_2 + 3Z_g)/3D & [Z_1(a-1) + Z_2(a^2-1)]/3D \\ \hline [Z_1(a^2-1) + Z_2(a-1)]/3D & (Z_1 + Z_2)/D \\ \hline \end{array}, \quad (13.40)$$

где $D = [Z_1 Z_2 + (Z_1 + Z_2)(Z_0 + 3Z_g)]/3$;

$$i' = \begin{array}{c} b' \\ g' \end{array} \begin{array}{|c|} \hline 3e[(a^2 - a)(Z_0 + 3Z_g) + (a^2 - 1)Z_2]/D \\ \hline 3e[2aZ_1 + (1 - 2a^2)Z_2]/D \\ \hline \end{array}. \quad (13.41)$$

II. В качестве второго примера рассмотрим короткозамкнутый нагруженный генератор (рис. 13.3). Геометрические объек-

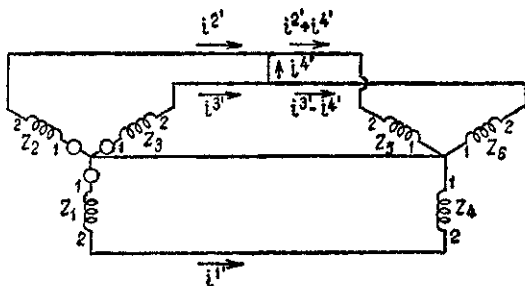


Рис. 13.3. Короткое замыкание на генераторе.

ты примитивной сети

$$z = \begin{array}{c} g \\ 1 \end{array} \begin{array}{|c|c|} \hline z_g & 0 \\ \hline 0 & z_l \\ \hline \end{array}, \quad e = \begin{array}{c} g \\ 1 \end{array} \begin{array}{|c|c|} \hline e_g & 0 \\ \hline \end{array}, \quad (13.42)$$

где z_g задается уравнениями (13.55), а z_l — уравнениями (13.22) и (13.23).

Тензор преобразования есть

$$\begin{array}{l}
 i1 = i1' \\
 i2 = i2' \\
 i3 = -i3' \\
 i4 = i1' \\
 i5 = -i2' - i4' \\
 i6 = -i3' + i4'
 \end{array}
 \quad
 C = \begin{array}{c|cccc}
 & 1' & 2' & 3' & 4' \\
 \hline
 1 & 1 & & & \\
 \hline
 2 & & 1 & & \\
 \hline
 3 & & & 1 & \\
 \hline
 4 & +1 & & & \\
 \hline
 5 & & +1 & & -1 \\
 \hline
 6 & & & -1 & +1
 \end{array}
 = \begin{array}{c|cc}
 & g' & 1' \\
 \hline
 g & 1 & \\
 \hline
 1 & -1 & A
 \end{array}
 \quad (13.43)$$

Геометрические объекты реальной сети определяются по $C_i z C$ и $C_i e$:

$$z' = \begin{array}{c|cc}
 & g' & 1' \\
 \hline
 g' & z_g + z_l & -z_l A \\
 \hline
 1' & -A_l z_l & A_l z_l A
 \end{array}, \quad e' = \begin{array}{c|cc}
 & g' & 1' \\
 \hline
 e_g & & 0
 \end{array} \quad (13.44)$$

10. ГРУППА «СИММЕТРИЧНЫХ СОСТАВЛЯЮЩИХ» G_{sc}

1. Матрица преобразования, возникающая в методе симметричных составляющих, а именно C и C^{-1} , вместе с двумя другими матрицами, определяемые как $CC^{-1} = I$ и $CC = S$, образуют «группу», состоящую из четырех элементов:

$$\begin{array}{c}
 C = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{array}{c|ccc}
 & 0 & 1 & 2 \\
 \hline
 a & 1 & 1 & 1 \\
 \hline
 b & 1 & a^2 & a \\
 \hline
 c & 1 & a & a^2
 \end{array}, \quad C^{-1} \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{array}{c|ccc}
 & a & b & c \\
 \hline
 0 & 1 & 1 & 1 \\
 \hline
 1 & 1 & a & a^2 \\
 \hline
 2 & 1 & a^2 & a
 \end{array}, \\
 \\
 S = \begin{array}{c|ccc}
 & a & b & c \\
 \hline
 a & 1 & 0 & 0 \\
 \hline
 b & 0 & 0 & 1 \\
 \hline
 c & 0 & 1 & 0
 \end{array}, \quad I = \begin{array}{c|ccc}
 & a & b & c \\
 \hline
 a & 1 & 0 & 0 \\
 \hline
 b & 0 & 1 & 0 \\
 \hline
 c & 0 & 0 & 1
 \end{array}. \quad (13.45)
 \end{array}$$

Эти четыре матрицы удовлетворяют четырем условиям, которым подчиняются элементы группы, данным в гл. 11, § 3, а именно:

1. Произведение любых двух элементов есть элемент группы. В этом можно убедиться, образовав «*таблицу умножения*», в которой каждая компонента — произведение двух окаймляющих элементов, соответствующей строки и столбца:

| | | | | | |
|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|---------|
| | C | S | C ⁻¹ | I | |
| C | S | C ⁻¹ | I | C | (13.46) |
| S | C ⁻¹ | I | C | S | |
| C ⁻¹ | I | C | S | C ⁻¹ | |
| I | C | S | C ⁻¹ | I | |

2. Выполняется ассоциативный закон, т. е.

$$C(SC^{-1}) = (CS)C^{-1}.$$

3. Каждый элемент имеет себе обратный (обратный для S есть S).

4. Существует единичный элемент I.

Примечательно, что эта группа из четырех элементов есть подгруппа большого числа других групп, имеющих более четырех элементов. В частности, G_{sc} является подгруппой группы линейных преобразований с комплексными компонентами.

II. Эти четыре матрицы C, S, C⁻¹ и I обладают свойствами, аналогичными свойствам четырех чисел j , -1 , $-j$ и 1 , которые также образуют группу, т. е. абстрактные свойства C аналогичны свойствам комплексного оператора j , свойства C⁻¹ — аналогичны $-j$, S аналогичны -1 , а I аналогичны 1 . Подобие свойств этих групп иллюстрируется подобием их таблиц умножения:

| | | | | | |
|----|----|----|----|----|---------|
| | j | -1 | -j | 1 | |
| j | -1 | -j | 1 | j | (13.47) |
| -1 | -j | 1 | j | -1 | |
| -j | 1 | j | -1 | j | |
| 1 | j | -1 | -j | 1 | |

В этих двух таблицах аналогичные элементы возникают на тех же местах.

Так как матрица S представляет замену фазы вращения обратной от $a \rightarrow b \rightarrow c$ к $a \rightarrow c \rightarrow b$ (аналогично -1 , которая представляет обращение направления), то матрицу последовательности C можно считать представляющей изменение фазы вращения на мнимый угол (аналогично числу j , которое представляет поворот направления на мнимый угол).

В гл. 19, § 14 будет показано, что матрица преобразования C используется в анализе многообмоточных трансформаторов, соединенных зигзагом, когда взаимосвязаны три фазы. Следовательно, матрица последовательности представляет собой также мнимую взаимосвязь трех фаз.

11. ТРАНСФОРМАТОРЫ СО СДВИГОМ ФАЗ

I. В качестве другого примера преобразований, где тензор преобразований содержит комплексные компоненты, *возьмем сбалансированный трехфазный многообмоточный трансформатор*, в котором электрическая фаза порождает несколько магнитных фаз.

Пусть даны три одинаковых многообмоточных трансформатора и пусть на каждом сердечнике имеется, скажем, четыре различные обмотки. В терминах реактансов утечки X_{a-b} тензор импеданса первого трансформатора есть:

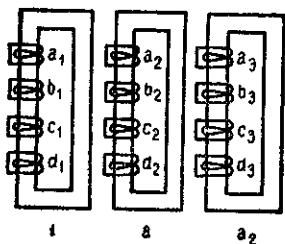


Рис. 13.4. Трехфазные четырехобмоточные трансформаторы.

$$z_i = \begin{array}{c|cccc} & a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ \hline a_1 & 0 & X_{a-b} & X_{a-c} & X_{a-d} \\ \hline b_1 & X_{a-b} & 0 & X_{b-c} & X_{b-d} \\ \hline c_1 & X_{a-c} & X_{b-c} & 0 & X_{c-d} \\ \hline d_1 & X_{a-d} & X_{b-d} & X_{c-d} & 0 \end{array} \quad (13.48)$$

Тензор импеданса каждого трансформатора имеет ту же матрицу, в которой оси a, b, c, d имеют другие индексы.

Если катушки этих трех трансформаторов (рис. 13.4) взаимосвязаны каким-либо способом, образуя *сбалансированную* трехфазную сеть, и подсоединены к сбалансированным импедансам, то в каждой электрической фазе протекает тот же ток, что и в других двух фазах, только сдвинутый по времени на 120 или 240°. Подобным образом в обмотках второго трансформатора протекают те же токи, что и в соответствующих обмотках первого, но сдвинуты по времени на 120°, т. е. на $a = e^{j120^\circ}$. В обмотках третьего трансформатора токи сдвинуты относительно тока первого на $a^2 = e^{j240^\circ}$. (Конечно, в каждой обмотке a_1, b_1, c_1 и d_1 первого трансформатора токи находятся не в фазе во времени.) Следовательно, если в первом трансформаторе протекают токи i^a, i^b, i^c, i^d , то во втором трансформаторе — ai^a, ai^b, ai^c, ai^d , в третьем — a^2i^a, a^2i^b, a^2i^c и a^2i^d .

Обычно каждую обмотку представляют прямой линией, в частности, обмотки первого трансформатора, скажем, вертикальными линиями (или горизонтальными), второго трансформатора — линиями, повернутыми на 120° относительно вертикали, третьего — на 240° (рис. 13.5). Когда две обмотки соединены

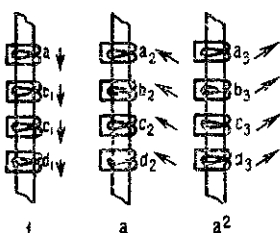


Рис 13.5. Представление фаз.

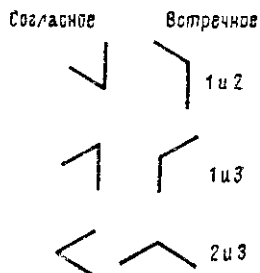


Рис. 13.6. Последовательное соединение.

последовательно, их соединение аналогично соединению на рис. 13.6.

Так как в сбалансированных системах нет нейтральных токов, то токи, протекающие при соединении звездой или треугольником, могут быть приняты, как показано на рис. 13.7. При определении числа контуров можно полагать, что в соединении звездой имеется нейтральный провод.

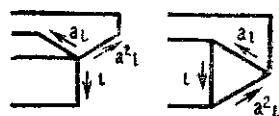


Рис. 13.7.

Следует заметить, что *каждый раз, когда ток поворачивается на 120° по часовой стрелке, он умножается на a .*

II. Пусть теперь 12 обмоток соединены любым способом в трехфазную обмотку, например:

1) a -обмотки — звездой; 2) d -обмотки — треугольником; 3) c -обмотки — звездой; 4) b -обмотки — встречные c -обмоткам; в частности, b -обмотки *третьего* трансформатора соединены встречно c -обмоткам *первого* трансформатора (рис. 13.8) (такое соединение называется «зигзаг»); 5) b -обмотки соединены последовательно с симметричной нагрузкой, соединенной звездой.

12. ПОЛУЧЕНИЕ НОВЫХ ТОКОВ

I. Число новых токов, которые надо рассмотреть, составляет одну треть от числа контуров, поскольку остальные токи являются теми же самыми, только умноженными на a или a^2 . Следовательно, достаточно установить соотношение между старыми и новыми токами, протекающими только в одной трети обмоток, скажем, в обмотках первого трансформатора и в одном из импе-

дансов нагрузки. Аналогично было бы достаточно пренебречь токами намагничивания только в первом трансформаторе.

II. На рис. 13.8, а и б показаны старые и новые токи, протекающие в одной трети обмоток в звездно-треугольном трансформаторе, соединенном зигзагом. Так как число контуров девять, число выбираемых новых токов $9/3=3$, а именно $i^{a'}$, $i^{c'}$, $i^{d'}$. Предположим, что они текут в трех вертикальных обмотках. В четвертой вертикальной обмотке Z_b течет ток $ai^{c'}$, повернутый

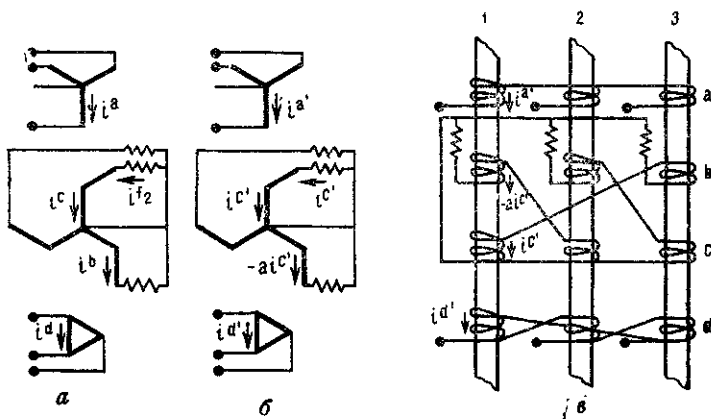


Рис. 13.8. Фазосдвигающий, соединенный зигзагом трансформатор: а — старые токи; б — новые токи; в — действительные соединения.

на 120° относительно $i^{c'}$. Он протекает через Z_b в направлении, противоположном первоначальному i^b , через один из потоков нагрузки от $i^{c'}$. Отсюда следует, что безразлично, какой нагрузочный импеданс рассматривать.

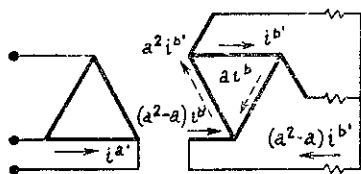
Чтобы определить новые токи во всех других вертикальных линиях, часто необходимо в качестве промежуточного шага определить новые токи в тех или других обмотках, как показано штриховыми линиями в табл. 13.1 и 13.2.

Вообще новые токи должны быть установлены во всех линиях, имеющих одинаковое направление (или во всех вертикальных, или во всех горизонтальных и т. д.), и в одной трети нагрузок.

13. ТЕНЗОР ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

I. При выводе тензора преобразования повторяются те же шаги, что и при анализе неуравновешенного трансформатора, а именно: 1) способ соединения представляется с помощью C_1 ; 2) пренебрежение токами намагничивания представляется через C_2 ;

3) окончательный тензор преобразования $C = C_1 C_2$.



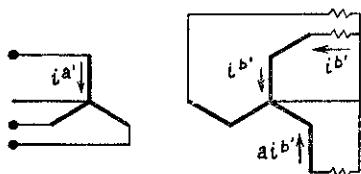
$$C_1 = \begin{matrix} a' & b' \\ a & 1 \\ b & 1 \\ c & a^2-a \\ 1 & a^2-a \end{matrix}$$

$$C_2 = \begin{matrix} b'' \\ a' & -N \\ b' & 1 \end{matrix}$$

$$C = \begin{matrix} b'' \\ a & -N \\ b & 1 \\ c & a^2-a \\ 1 & a^2-a \end{matrix}$$

$$N = \frac{n_b + (a^2-a)n_c}{n_a}$$

а



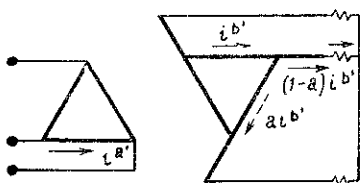
$$C_1 = \begin{matrix} a' & b' \\ a & 1 \\ b & 1 \\ c & -a \\ 1 & 1 \end{matrix}$$

$$C_2 = \begin{matrix} b'' \\ a' & -N \\ b' & 1 \end{matrix}$$

$$C = \begin{matrix} b'' \\ a & -N \\ b & 1 \\ c & -a \\ 1 & 1 \end{matrix}$$

$$N = \frac{n_b - a n_c}{n_a}$$

б



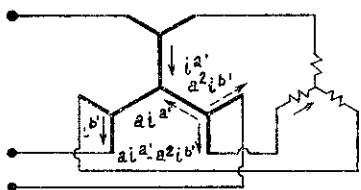
$$C_1 = \begin{matrix} a' & b' \\ a & 1 \\ b & 1 \\ c & 1-a \\ 1 & 1-a \end{matrix}$$

$$C_2 = \begin{matrix} b'' \\ a' & -N \\ b' & 1 \end{matrix}$$

$$C = \begin{matrix} b'' \\ a & -N \\ b & 1 \\ c & 1-a \\ 1 & 1-a \end{matrix}$$

$$N = \frac{n_b + (1-a)n_c}{n_a}$$

в



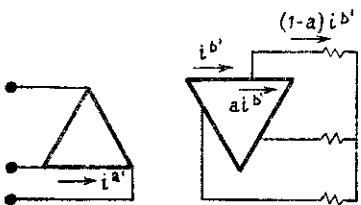
$$C_1 = \begin{matrix} a' & b' \\ a & 1 \\ b & 1 \\ c & -a \\ 1 & -a \end{matrix}$$

$$C_2 = \begin{matrix} b'' \\ a' & -N \\ b' & 1 \end{matrix}$$

$$C = \begin{matrix} b'' \\ a & -N \\ b & 1 \\ c & aN - a^2 \\ 1 & aN - a^2 \end{matrix}$$

$$N = \frac{n_b - a^2 n_c}{n_a - a n_c}$$

г



$$C_1 = \begin{matrix} a' & b' \\ a & 1 \\ b & 1 \\ c & a \\ 1 & 1-a \end{matrix}$$

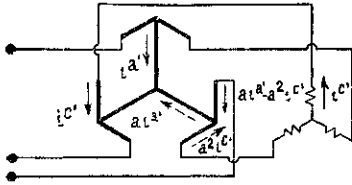
$$C_2 = \begin{matrix} b'' \\ a' & -N \\ b' & 1 \end{matrix}$$

$$C = \begin{matrix} b'' \\ a & -N \\ b & 1 \\ c & a \\ 1 & 1-a \end{matrix}$$

$$N = \frac{n_b + a n_c}{n_a}$$

д

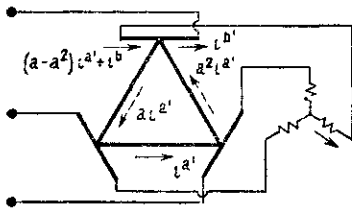
Симметричные трехфазные многообмоточные трансформаторы и их матрицы преобразования: первая колонка — C_1 , показывающая соединение катушек; вторая колонка — C_2 , пренебрегающая токами намагничивания; третья колонка — C , представляющая их результирующую (произведение).



$$C_1 = \begin{matrix} & a' & c' \\ a & 1 & \\ b & a & -a^2 \\ c & & 1 \\ 1 & & 1 \end{matrix} \quad C_2 = \begin{matrix} & c'' \\ a' & -N \\ c' & 1 \end{matrix} \quad C = \begin{matrix} & c'' \\ a & -N \\ b & -aN - a^2 \\ c & 1 \\ 1 & 1 \end{matrix}$$

$$N = \frac{n_c - a^2 n_b}{n_a + a n_b}$$

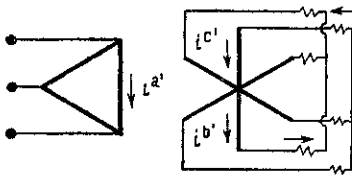
а



$$C_1 = \begin{matrix} & a' & b' \\ a & 1 & \\ b & & 1 \\ c & a - a^2 & 1 \\ 1 & a - a^2 & 1 \end{matrix} \quad C_2 = \begin{matrix} & c'' \\ a' & -N \\ b' & 1 \end{matrix} \quad C = \begin{matrix} & b'' \\ a & -N \\ b & 1 \\ c & (a^2 - a)N + 1 \\ 1 & (a^2 - a)N + 1 \end{matrix}$$

$$N = \frac{n_b + n_c}{n_a + (a - a^2)n_c}$$

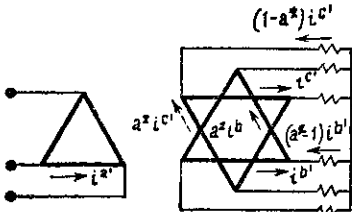
б



$$C_1 = \begin{matrix} & a' & b' & c' \\ a & 1 & & \\ b & & 1 & \\ c & & & 1 \\ 1_1 & & & 1 - a^2 \\ 1_2 & & a^2 - 1 & \end{matrix} \quad C_2 = \begin{matrix} & b'' & c'' \\ a' & -N_1 & -N_2 \\ b' & 1 & \\ c' & & 1 \end{matrix} \quad C = \begin{matrix} & b'' & c'' \\ a & -N_1 & -N_2 \\ b & 1 & \\ c & & 1 \\ 1_1 & 1 & \\ 1_2 & & 1 \end{matrix}$$

$$N_1 = \frac{n_b}{n_a} \quad N_2 = \frac{n_c}{n_a}$$

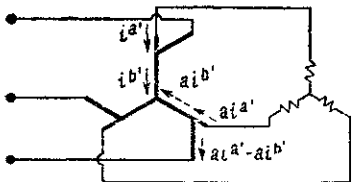
в



$$C_1 = \begin{matrix} & a' & b' & c' \\ a & 1 & & \\ b & & 1 & \\ c & & & 1 \\ 1_1 & & & 1 - a^2 \\ 1_2 & & a^2 - 1 & \end{matrix} \quad C_2 = \begin{matrix} & b'' & c'' \\ a' & -N_1 & -N_2 \\ b' & 1 & \\ c' & & 1 \end{matrix} \quad C = \begin{matrix} & b'' & c'' \\ a & -N_1 & -N_2 \\ b & 1 & \\ c & & 1 \\ 1_1 & & 1 - a^2 \\ 1_2 & a^2 - 1 & \end{matrix}$$

$$N_1 = \frac{n_b}{n_a} \quad N_2 = \frac{n_c}{n_a}$$

г

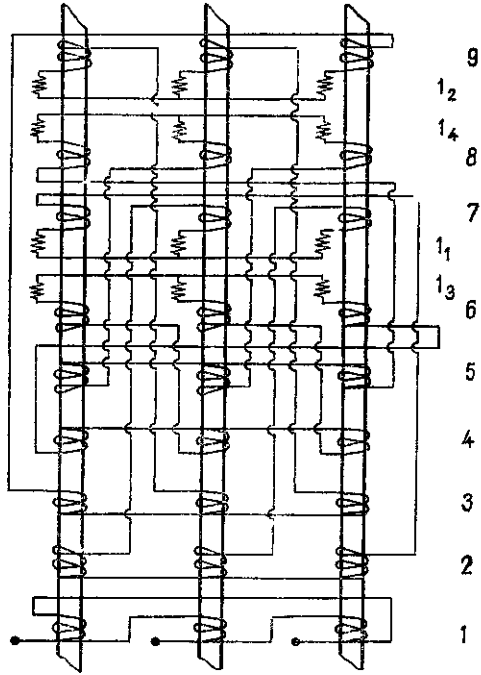
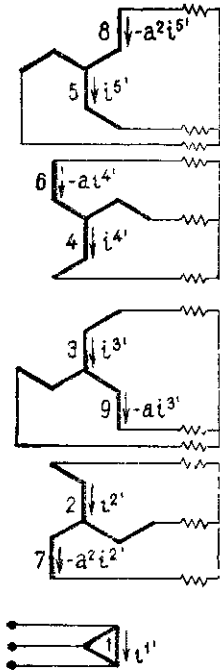


$$C_1 = \begin{matrix} & a' & b' \\ a & 1 & \\ b & & 1 \\ c & a & -a \\ 1 & & 1 \end{matrix} \quad C_2 = \begin{matrix} & b'' \\ a' & -N \\ b' & 1 \end{matrix} \quad C = \begin{matrix} & b'' \\ a & -N \\ b & 1 \\ c & -aN - a \\ 1 & 1 \end{matrix}$$

$$N = \frac{(n_b - a n_c)}{n_a + a n_c}$$

д

Симметричные трехфазные многообмоточные трансформаторы и их матрицы преобразования: первая колонка — C_1 , показывающая соединение катушек; вторая колонка — C_2 , пренебрегающая токами намагничивания; третья колонка — C , представляющая их результирующую (произведение).
а — обращенный двойной зигзаг; **б** — автотрансформатор шлейф-треугольник; **в** — диаметральной звезда; **г** — двойной треугольник; **д** — зигзаг-автотрансформатор.



| | 1' | 2' | 3' | 4' | 5' |
|----------------|----|-----------------|----|----|-----------------|
| 1 | 1 | | | | |
| 2 | | 1 | | | |
| 3 | | | 1 | | |
| 4 | | | | 1 | |
| 5 | | | | | 1 |
| 6 | | | | -a | |
| 7 | | -a ² | | | |
| 8 | | | | | -a ² |
| 9 | | | -a | | |
| 1 ₁ | | 1 | | | |
| 1 ₂ | | | 1 | | |
| 1 ₃ | | | | 1 | |
| 1 ₄ | | | | | 1 |

| | 2'' | 3'' | 4'' | 5'' |
|----|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|
| 1' | -N ₁ | -N ₂ | -N ₃ | -N ₄ |
| 2' | 1 | | | |
| 3' | | 1 | | |
| 4' | | | 1 | |
| 5' | | | | 1 |

$$N_1 = \frac{n_2 - a^2 n_7}{n_1}$$

$$N_2 = \frac{n_3 - a n_9}{n_1}$$

$$N_3 = \frac{n_4 - a n_5}{n_1}$$

$$N_4 = \frac{n_5 - a^2 n_8}{n_1}$$

| | 2'' | 3'' | 4'' | 5'' |
|----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|
| 1 | -N ₁ | -N ₂ | -N ₃ | -N ₄ |
| 2 | 1 | | | |
| 3 | | 1 | | |
| 4 | | | 1 | |
| 5 | | | | 1 |
| 6 | | | -a | |
| 7 | | -a ² | | |
| 8 | | | | -a ² |
| 9 | | -a | | |
| 1 ₁ | 1 | | | |
| 1 ₂ | | 1 | | |
| 1 ₃ | | | 1 | |
| 1 ₄ | | | | 1 |

Учетверенный зигзаг — трансформатор и его матрица преобразования С.

Различие между симметричным (уравновешенным) случаем, рассматриваемым здесь, и несимметричным, рассмотренным в гл. II, заключается в том, что в симметричном случае используется только одна треть обмоток и одна треть уравнений.

II. Рассматривая старые и новые токи, протекающие, скажем, в четырех вертикальных линиях (в обмотках первого трансформатора) (рис. 13.8, а) и в одной (любой) из нагрузок, получаем

$$\begin{array}{l}
 i^a = i^{a'} \\
 i^b = -ai^{c'} \\
 i^c = i^{c'} \\
 i^d = i^{d'} \\
 i^f = i^{c'}
 \end{array}
 \quad
 C_1 =
 \begin{array}{c}
 a_1 \\
 b_1 \\
 c_1 \\
 d_1 \\
 f_1
 \end{array}
 \begin{array}{|c|c|c|}
 \hline
 & a' & c' & d' \\
 \hline
 a_1 & 1 & 0 & 0 \\
 \hline
 b_1 & 0 & -a & 0 \\
 \hline
 c_1 & 0 & 1 & 0 \\
 \hline
 d_1 & 0 & 0 & 1 \\
 \hline
 f_1 & 0 & 1 & 0 \\
 \hline
 \end{array}
 \quad (13.49)$$

Соединение обмоток уменьшает число переменных на фазу с пяти до трех.

Вместо четырех обмоток первого трансформатора, конечно, можно рассматривать любые другие четыре обмотки (но обязательно обозначаемые разными буквами), например, c_2 вместо c_1 и т. д.

III. Уравнение связи, исключаяющее токи намагничивания в первом трансформаторе, до соединения есть

$$n_a i^a + n_b i^b + n_c i^c + n_d i^d = 0. \quad (13.50)$$

При замене старых токов новыми оно становится

$$n_a i^{a'} - n_b a i^{c'} + n_c i^{c'} + n_d i^{d'} = 0.$$

Предполагая, скажем, что $i^{d'}$ в соединении треугольником есть ток намагничивания, который должен быть исключен, уравнение связи можно заменить системой уравнений, определяющих тензор преобразования:

$$\begin{array}{l}
 i^{a'} = i^{a''} \\
 i^{c'} = i^{c''} \\
 i^{d'} = -\frac{n_a}{n_d} i^{a''} + \left(\frac{n_b a}{n_d} - \frac{n_c}{n_d} \right) i^{c''}
 \end{array}
 \quad
 C_2 =
 \begin{array}{c}
 a' \\
 c' \\
 d'
 \end{array}
 \begin{array}{|c|c|}
 \hline
 & a'' & c'' \\
 \hline
 a' & 1 & 0 \\
 \hline
 c' & 0 & 1 \\
 \hline
 d' & N_1 & N_2 \\
 \hline
 \end{array}
 \quad (13.51)$$

Следовательно, окончательный тензор преобразования $C_1 C_2$ равен

$$C = \begin{matrix} & \begin{matrix} a'' & c'' \end{matrix} \\ \begin{matrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \\ d_1 \\ f_2 \end{matrix} & \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 0 \\ \hline 0 & -a \\ \hline 0 & 1 \\ \hline N_1 & N_2 \\ \hline 0 & 1 \\ \hline \end{array} \end{matrix}, \quad C_t^* = \begin{matrix} & \begin{matrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 & f_2 \end{matrix} \\ \begin{matrix} a'' \\ c'' \end{matrix} & \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline 1 & 0 & 0 & N_1^* & 0 \\ \hline 0 & -a^2 & 1 & N_2^* & 1 \\ \hline \end{array} \end{matrix} \quad (13.52)$$

14. ТЕНЗОР ИМПЕДАНСА

Если тензор преобразования C установлен, остается выполнить те же самые операции, что и в случае любой контурной сети.

I. Тензор импеданса первого четырехобмоточного трансформатора и одной из нагрузок *до соединения есть*

$$Z = \begin{matrix} & \begin{matrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 & f_2 \end{matrix} \\ \begin{matrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \\ d_1 \\ f_2 \end{matrix} & \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline & Z_{a-b} & Z_{a-c} & Z_{a-d} & \\ \hline Z_{a-b} & & Z_{b-c} & Z_{b-d} & \\ \hline Z_{a-c} & Z_{b-c} & & Z_{c-d} & \\ \hline Z_{a-d} & Z_{b-d} & Z_{c-d} & & \\ \hline & & & & Z \\ \hline \end{array} \end{matrix} \quad (13.53)$$

Вектор приложенных напряжений

$$e = \begin{matrix} & \begin{matrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 & f_2 \end{matrix} \\ & \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline e_a & 0 & 0 & e_d & 0 \\ \hline \end{array} \end{matrix}, \quad (13.54)$$

где e_a — напряжение между фазой и нейтралью.

II. После соединения и исключения тока намагничивания новые компоненты тензора импеданса, найденные по формуле $C_t^* z C$, есть

$$z' = \begin{matrix} & \begin{matrix} a'' & c'' \end{matrix} \\ \begin{matrix} a'' \\ c'' \end{matrix} & \begin{array}{|c|c|} \hline Z_{a-d}(N_1 + N_1^*) & \begin{array}{l} -aZ_{a-b} + Z_{a-c} + N_2 Z_{a-d} \\ -aN_1^* Z_{b-d} + N_1^* Z_{c-d} \end{array} \\ \hline \begin{array}{l} -a^2 Z_{a-b} + Z_{a-c} + N_2^* Z_{a-d} \\ -a^2 N_1 Z_{b-d} + N_1 Z_{c-d} \end{array} & \begin{array}{l} Z_{b-c} - Z_{b-d}(N_2 a^2 + N_2^* a) \\ + Z_{c-d}(N_2 + N_2^*) + Z \end{array} \\ \hline \end{array} \end{matrix} \quad (13.55)$$

III. Новые токи (т. е. токи в обмотках a и c) находят по формуле $i' = z'^{-1}e'$, где

$$e' = C'_t e = \begin{array}{c} a'' \qquad b'' \\ \boxed{e_a + N_1^* e_d \quad | \quad N_2^* e_d} \end{array} \quad (13.56)$$

IV. Если i' вычислен, то:

1. Токи, протекающие в отдельных обмотках первого трансформатора, находят по формулам $i = C_i i'$, т. е.

$$i \begin{array}{c} a_1 \qquad b_1 \qquad c_1 \qquad d_1 \qquad f_2 \\ \boxed{i^{a''} \quad | \quad -a i^{c''} \quad | \quad i^{c''} \quad | \quad N_1 i^{a''} + N_2 i^{c''} \quad | \quad i^{c''}} \end{array} \quad (13.57)$$

2. Напряжения, индуцированные в отдельных обмотках первого трансформатора, находят по формуле $e = zC i'$ (где zC была уже вычислена при нахождении z')

$$zC i' = \begin{array}{c} a_1 \quad N_1 Z_{a-d} i^{a''} + (-a Z_{a-b} + Z_{a-c} + N_2 Z_{a-d}) i^{c''} \\ b_1 \quad (Z_{a-b} + N_1 Z_{b-d}) i^{a''} + (Z_{b-c} + N_2 Z_{b-d}) i^{c''} \\ c_1 \quad (Z_{a-c} + N_1 Z_{c-d}) i^{a''} + (-a Z_{b-c} + N_2 Z_{c-d}) i^{c''} \\ d_1 \quad Z_{a-d} i^{a''} + (-a Z_{b-d} + Z_{c-d}) i^{c''} \\ f_2 \quad Z i^{c''} \end{array} \quad (13.58)$$

15. ШЕСТИУГОЛЬНЫЙ СДВИГАЮЩИЙ ФАЗУ АВТОТРАНСФОРМАТОР

В качестве другого примера рассмотрим автотрансформатор, изображенный на рис. 13.9.

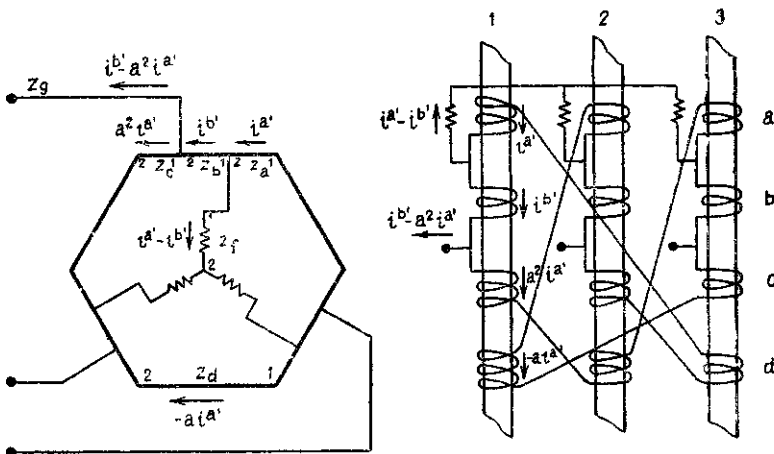


Рис. 13.9. Шестиугольный фазосдвигающий автотрансформатор.

Чтобы учесть падение напряжения на подводящих проводах, необходимо предположить, что последовательно с ними соединен импеданс Z_g нулевой величины. Двенадцать обмоток, нагрузки и проводящие провода образуют шесть контуров, следовательно, достаточно ввести $6/3=2$ новых тока, скажем, $i^{a'}$ и $i^{b'}$. Предположим, что они протекают в двух горизонтальных линиях. Новые токи в оставшихся горизонтальных линиях и в одной нагрузке и подводящем проводе (составляющие одну треть обмоток) также показаны. Соотношения между старыми и новыми токами в обмотках первого трансформатора (горизонтальные линии) есть

$$\begin{aligned}
 i^a &= i^{a'} \\
 i^b &= i^{b'} \\
 i^c &= a^2 i^{a'} \\
 i^d &= -a i^{a'} \\
 i^f &= i^{a'} - i^{b'} \\
 i^g &= -a^2 i^{a'} + i^{b'}
 \end{aligned}$$

| | | | |
|-----|--------|------|---------|
| | a' | b' | |
| a | 1 | 0 | (13.59) |
| b | 0 | 1 | |
| c | a^2 | 0 | |
| d | $-a$ | 0 | |
| e | 1 | -1 | |
| f | $-a^2$ | 1 | |

Уравнения связи для первого трансформатора до соединения имеют вид

$$n_a i^a + n_b i^b + n_c i^c + n_d i^d = 0. \quad (13.60)$$

В терминах новых токов

$$n_a i^{a'} + n_b i^{b'} + n_c a^2 i^{a'} - n_d a i^{a'} = 0$$

или

$$(n_a + a^2 n_c - a n_d) i^{a'} + n_b i^{b'} = 0.$$

Исключив, скажем, $i^{b'}$, получим следующие уравнения преобразования:

$$\begin{aligned}
 i^{a'} &= -n_b / (n_a + a^2 n_c - a n_d) i^{b'} \\
 i^{b'} &= i^{b''}
 \end{aligned}$$

| | | | |
|------|-----|-------|---------|
| | | b'' | |
| a' | N | | (13.61) |
| b' | 1 | | |

Окончательный тензор преобразования

$$C_1 C_2 = C = \begin{array}{c} \mathbf{b}'' \\ \begin{array}{|c|} \hline a & N \\ \hline b & 1 \\ \hline c & Na^2 \\ \hline d & -Na \\ \hline f & N-1 \\ \hline g & -a^2N+1 \\ \hline \end{array} \end{array} \quad (13.62)$$

сводящий четырехобмоточный трансформатор к одной эквивалентной катушке.

Тензор импеданса \mathbf{z} примитивного трансформатора и нагрузки дается уравнением (13.53) с дополнительной строчкой и столбцом \mathbf{g} , с нулевыми элементами. Оставшаяся работа состоит в вычислении $\mathbf{C}^* \mathbf{z} \mathbf{C} = \mathbf{z}'$, нахождении \mathbf{i}' и т. д.

Несколько примеров \mathbf{C} сбалансированных трехфазных трансформаторов даны в табл. 13.1 и 13.2, а для девятиобмоточных трансформаторов — в табл. 13.3.

16. «НАДЧЕРКНУТЫЕ» И «НЕНАДЧЕРКНУТЫЕ» ИНДЕКСЫ

I. Было показано, что, когда тензор преобразования содержит комплексные компоненты, формулы преобразования различных геометрических объектов оказываются более сложными. В частности, формулы преобразования кроме \mathbf{C} содержат и обратную величину \mathbf{C}^{-1} , а также их сопряжения \mathbf{C}^* и \mathbf{C}^{-1*} .

В индексном обозначении введено соглашение, которое используется для отличия \mathbf{C} от ей сопряженной.

Индексы, преобразуемые сопряжениями от \mathbf{C}_α^i , или $\mathbf{C}_\alpha^{i'}$, следует писать с чертой сверху (e_α^i), они называются «надчеркнутыми» индексами. В противном случае индекс остается неизменным и будет называться «ненадчеркнутым» индексом (i^α). Следовательно, в соответствии с формулой преобразования (13.13) $z_{\alpha\beta}$ следует записать как $z_{\alpha\bar{\beta}}$, а $y^{\alpha\beta}$ как $y_{\alpha\bar{\beta}}$.

(Обычно вместо черты используют «точку» (e_α^i), но для печати и написания черта предпочтительнее.)

II. *Когда проводится сопряжение геометрического объекта, все «надчеркнутые» индексы становятся «ненадчеркнутыми» и наоборот.*

Например:

$$(C_{\alpha'}^i)^* = \overline{C_{\alpha}^i} \quad \text{или} \quad (e_\alpha^i)^* = e_\alpha, \quad (13.63)$$

$$(z_{\alpha\bar{\beta}})^* = z_{\alpha\beta} \quad \text{или} \quad (y^{\alpha\bar{\beta}})^* = y^{\alpha\beta} \quad (13.64)$$

III. Иначе говоря, в индексном обозначении различаются друг от друга не только *верхние* и *нижние* индексы, но и *надчеркнутые* и *ненадчеркнутые*, что необходимо для указания формул преобразования различных геометрических объектов. Следовательно, *формулы преобразования некоторых тензоров, полученные к настоящему времени*, в случае, если тензор преобразования имеет комплексные компоненты, есть

$$\begin{array}{l|l}
 \mathbf{i} = \mathbf{C}\mathbf{i}' & i^{\alpha} = C_{\alpha}^{\alpha'} i'^{\alpha'} \\
 \mathbf{e} = \mathbf{C}_i^* \mathbf{e}' & e_{\bar{\alpha}} = C_{\bar{\alpha}}^{\bar{\alpha}'} e'_{\bar{\alpha}'} \\
 \mathbf{z}' = \mathbf{C}_i^* \mathbf{z} & z_{\bar{\alpha}'\beta'} = z_{\bar{\alpha}\beta} C_{\bar{\alpha}}^{\bar{\alpha}'} C_{\beta}^{\beta'} \\
 \mathbf{y}' = \mathbf{C}^{-1} \mathbf{y} \mathbf{C}_i^{-1*} & y^{\alpha'\beta'} = y^{\alpha\beta} C_{\alpha}^{\alpha'} C_{\beta}^{\beta'} \\
 \mathbf{C} = \mathbf{C}_1^{-1} \mathbf{C} \mathbf{C}_2 & C_{\alpha}^{\alpha''} = C_{\alpha'}^{\alpha} C_{\alpha}^{\alpha''} C_{\alpha''}^{\alpha'}
 \end{array} \quad (13.65)$$

Нужно заметить, что формулы преобразования для тензоров следуют автоматически из их индексов. Можно также заметить, что *везде, где возникает \mathbf{C}_i , он возникает как сопряжение от \mathbf{C}_i^** .

Эти формулы сводятся к формулам, приведенным в уравнении (6.17), где $C_{\alpha}^{\alpha'}$ не содержит комплексных компонент. Формулы преобразования i^{α} и $C_{\alpha}^{\alpha'}$ остались теми же самыми, так как они не содержат надчеркнутых индексов.

Следует особенно подчеркнуть, что каждый член каждого уравнения сбалансирован не только по верхним и нижним индексам, но и по надчеркнутым и ненадчеркнутым, т. е. 1) свободный индекс в каждом члене есть либо надчеркнутый, либо ненадчеркнутый; 2) два немых индекса являются либо надчеркнутыми, либо ненадчеркнутыми.

Инвариантные преобразования, в которых некоторые компоненты тензора преобразования — комплексные числа, будут называться «спинорными преобразованиями».

17. ТЕНЗОРНЫЕ И СПИНОРНЫЕ ИНДЕКСЫ

I. Тензоры, в которых могут появляться надчеркнутые и ненадчеркнутые индексы, называются также «тензорами Эрмита» (по имени математика Эрмита). Они также называются «спинорами»¹⁾. Сами индексы (которые могут быть надчеркнутые и ненадчеркнутые) называются «спинорными индексами».

Существуют геометрические объекты, индексы которых не зависят от наличия или отсутствия комплексных компонент в тензоре преобразования. Такие индексы называются «тензорными индексами». *Один и тот же геометрический объект может иметь как тензорные, так и спинорные индексы. Все индексы, исполь-*

¹⁾ См. замечания Крона о терминологии во введении 1964 г. (Прим. пер.).

зубые в этой главе, являются *спинорными* индексами. Индексы, используемые в предыдущих главах, были *тензорными*. Когда оба типа индексов возникают в одном и том же тензоре, спинорные индексы могут быть обозначены заглавными, а тензорные — прописными буквами.

II. Таким образом, к настоящему времени введены следующие типы индексов: фиксированные и переменные, свободные и немые, ковариантные и контравариантные, открытые и закрытые, индивидуальные и сложные (компаунд-индексы), надчеркнутые и ненадчеркнутые, тензорные и спинорные.

Каждый из этих индексов связан с различным типом тензора преобразования.

III. Уравнения поведения (в терминах спинорных индексов) контурных, узловых и ортогональных сетей следующие:

$$e_{\bar{\alpha}} = z_{\alpha\bar{\beta}} i^{\bar{\beta}}, \quad (13.66)$$

$$I^{\alpha} = Y^{\alpha\bar{\beta}} E_{\bar{\beta}}, \quad (13.67)$$

$$E_{\bar{\alpha}} + e_{\bar{\alpha}} = z_{\alpha\bar{\beta}} (i^{\bar{\beta}} + \mathbf{1}^{\bar{\beta}}), \quad (13.68)$$

$$i^{\alpha} + I^{\alpha} = Y^{\alpha\bar{\beta}} (E_{\bar{\beta}} + e_{\bar{\beta}}). \quad (13.69)$$

Когда не предполагается использовать тензоры преобразования с комплексными компонентами, спинорные индексы заменяют тензорными (просто опуская черту).

IV. Уравнение мощности в терминах спинорных индексов

$$P = e_{\bar{\alpha}} i^{\alpha} = P = e_{\alpha} i^{\bar{\alpha}} \quad \text{или} \quad P = E_{\alpha} I^{\bar{\alpha}}. \quad (13.70)$$

Надо помнить, что $e_{\bar{\alpha}}$ и $E_{\bar{\alpha}}$ первоначально имеют надчеркнутые индексы. Следовательно, если они появились без черты, это означает, что они взяты с сопряжением. Следовательно, если индексы в последнем уравнении являются спинорными, они показывают, что при вычислении мощности должно быть сделано сопряжение $e_{\bar{\alpha}}$ и $E_{\bar{\alpha}}$.

18. ВЗВЕШЕННЫЕ ТЕНЗОРЫ ¹⁾

В предыдущих параграфах тензор был определен как геометрический объект, формула преобразования которого содержит только $C_{\alpha'}^{\alpha}$ или обратную $C_{\alpha}^{\alpha'}$ по одной на каждый индекс.

Когда формула преобразования тензора содержит в дополнение к $C_{\alpha'}^{\alpha}$ и $C_{\alpha}^{\alpha'}$ также скаляр (скажем, число или функцию), то он называется «псевдотензором». Например, если

$$z_{\alpha'\beta'} = z_{\alpha\beta} C_{\alpha'}^{\alpha} C_{\beta'}^{\beta} k, \quad (13.71)$$

где k может быть 5 или $\log x$, то $z_{\alpha\beta}$ есть не тензор, а псевдотензор.

¹⁾ Два следующих параграфа могут быть опущены при первом чтении.

Важен специальный случай псевдотензоров. Если скаляр k равен детерминанту с матрицы C_a^a , возведенному в степень p , то псевдотензор называется взвешенным тензором, или тензором веса p . В физических проблемах «тензор веса один» называется также «тензорной плотностью» и имеет особую важность. Таким образом, если:

$$\begin{aligned} k &= \text{какая-либо функция} \rightarrow \text{псевдотензор,} \\ k &= c^p && \rightarrow \text{тензор веса } p, \\ \tilde{k} &= c && \rightarrow \text{тензорная плотность.} \end{aligned}$$

Взвешенные спиноры в своих формулах преобразования имеют также c^* , возведенную в степень q .

В задачах электротехники взвешенные тензоры возникают тогда, например, когда делается переход от трехфазных к однофазным или двухфазным величинам, вообще всякий раз, когда временно ограничиваются рассмотрением части системы.

19. ВЗВЕШЕННЫЕ СПИНОРЫ

1. Взвешенный спинор вводится, когда используется первоначальное определение метода симметричных составляющих, т. е. когда новые переменные последовательности i^0 , i^1 и i^2 представляют фазовые токи без множителя $\sqrt{3}$. Часто такое определение удобно. В этом случае

$$C = \begin{matrix} & \begin{matrix} 0 & 1 & 2 \end{matrix} \\ \begin{matrix} a \\ b \\ c \end{matrix} & \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 1 & 1 \\ \hline 1 & a^2 & a \\ \hline 1 & a & a^2 \\ \hline \end{array} \end{matrix}, \quad C^{-1} = \frac{1}{3} \begin{matrix} & \begin{matrix} a & b & c \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{matrix} & \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 1 & 1 \\ \hline 1 & a & a^2 \\ \hline 1 & a^2 & a \\ \hline \end{array} \end{matrix}, \quad (13.72)$$

т. е. в определении C опущен множитель $1/\sqrt{3}$.

Благодаря этой разнице в определении C первоначальное выражение для мощности в терминах величин последовательности

$$P' = e_0 i^0 + e_1 i^1 + e_2 i^2 \quad (13.73)$$

представляет собой входную мощность одной фазы, а не всей системы. С другой стороны, мощность в терминах фазовых величин

$$P = e_a i^a + e_b i^b + e_c i^c \quad (13.74)$$

представляют входную мощность всех трех фаз. Следовательно, в первоначальном определении уравнения инвариантности мощности

$$P = e_a i^a \equiv 3e_a i^{a'} = e_a i^{a'} k = P' \quad (13.75)$$

содержится скаляр $k=3$.

Так как линейная форма для мощности содержит скаляр, формулы преобразования различных спиноров будут содержать этот скаляр в какой-либо форме.

II. Первоначально предполагалось, что переменная i^α преобразуется с помощью данной C_α^a , как $i^\alpha = C_\alpha^a i^{a'}$ и не содержит скаляр. Подставляя ее в уравнение (13.75), получаем

$$e_\alpha C_\alpha^a i^{a'} \equiv e_\alpha i^{a'} k, \quad e^* C_i = e'^* i' k.$$

Сокращая на $i^{a'}$, получаем

$$e_\alpha C_\alpha^a = e_\alpha k, \quad e^* C = e'^* k.$$

Умножая обе части на обратную C_α^a матрицу, имеем

$$e_\alpha = e_\alpha C_\alpha^a k, \quad e^* = C_i^{-1} e'^* k.$$

Производя сопряжение обеих частей, получаем

$$\begin{aligned} e_\alpha^- &= k e_\alpha^- C_\alpha^{\bar{a}'}, & e &= k C_i^{-1*} e'; \\ e_\alpha^- &= 3 e_\alpha^- C_\alpha^{\bar{a}'}, & e &= 3 C_i^{-1*} e'. \end{aligned} \tag{13.76}$$

Следовательно, e_α^- — взвешенный спинор.

Детерминант матрицы преобразования $C_\alpha^{\bar{a}'} = C^{-1*}$ равен $a - a^2 = j\sqrt{3} = c$. Следовательно, скаляр $k = 3$ равен cc^* . Надо заметить, что величина $3C_i^{-1*}$ в точности равна C , следовательно, в первоначальном определении вектор напряжения преобразуется так же, как и вектор тока.

III. Чтобы найти формулу преобразования $z_{\alpha\beta}^-$ как взвешенного спинора, используют рассуждения § 3. Дано $e_\alpha^- = z_{\alpha\beta}^- i^\beta$; заменяем i^β с помощью $C_{\beta'}^\beta, i^{\beta'}$ и $e_{\alpha'}^-$ на $e_{\alpha'}^- C_{\alpha'}^{\bar{a}'} k^*$

$$\begin{aligned} e_{\alpha'}^- C_{\alpha'}^{\bar{a}'} k^* &= z_{\alpha\beta}^- C_{\beta'}^\beta i^{\beta'} \\ e_{\alpha'}^- &= z_{\alpha\beta}^- C_{\alpha'}^{\bar{a}'} C_{\beta'}^\beta k^* = i^{\beta'} z_{\alpha\beta}^-. \end{aligned} \tag{13.77}$$

Так как в новой системе координат $e_{\alpha'}^- = z_{\alpha'\beta'}^- i^{\beta'}$, формула преобразования имеет вид $z_{\alpha\beta}^-$

$$z_{\alpha'\beta'}^- = z_{\alpha\beta}^- C_{\alpha'}^{\bar{a}'} C_{\beta'}^\beta k^{*-1}, \tag{13.78}$$

показывая, что $z_{\alpha\beta}^-$ является взвешенным спинором.

IV. Следовательно, если сохраняется первоначальное определение метода симметричных составляющих, то все спиноры становятся взвешенными спинорами, поскольку в трехфазных задачах внимание ограничено только одной фазой.

Глава 14

УЗЛОВЫЕ СЕТИ

1. ДУАЛИЗМ ФИЗИЧЕСКИХ ПРОБЛЕМ

1. При анализе физических явлений обнаруживается, что многие (если не все) измеримые величины, законы и методы рассуждений встречаются *парами*, т. е. находятся в определенных *взаимных* отношениях. Электрическое и магнитное поле, волны и частицы, материя и энергия и пр. — все это проявления двойственной стороны природы. В электротехнических задачах также существуют двойственные отношения, например между напряжением и током, импедансом и адмиттансом, параллельным и последовательным соединениями и т. д.

Преимущество признания таких двойственных свойств состоит в том, что все *уравнения, все рассуждения можно продублировать в терминах двойственных величин без того, чтобы приводить те же доказательства еще раз, и в том, что новые отношения можно легко обнаружить простой аналогией.*

II. Будет показано, что, как только методы рассуждения и уравнения установлены для контурных сетей, их можно повторить в двойственной форме для узловых сетей. При рассуждениях и в уравнениях нужно поменять местами следующие двойственные выражения:

1) контур и узловую пару (не узел); 2) катушку и узел; 3) короткозамкнутую и открытую цепь; 4) последовательное и параллельное (соединение); 5) напряжение и ток; 6) импеданс и адмиттанс; 7) ковариантность и контравариантность.

III. Среди введенных геометрических объектов существуют следующие двойственные величины:

- 1) двойственным для ϵ является $I(e_{\alpha}^- \rightarrow I^{\alpha})$;
- 2) двойственным для i является $E(i^{\alpha} \rightarrow E_{\alpha}^-)$;
- 3) двойственным для z является $Y(z_{\alpha\beta}^- \rightarrow Y^{\alpha\beta})$;
- 4) двойственным для C является $C_i^{\alpha-1}(C_{\alpha}^{\alpha} \rightarrow C_{\alpha}^{\alpha-})$.

2. ЧИСТО УЗЛОВЫЕ СЕТИ

I. Сначала детально проанализируем случай, когда n катушек расположены в n узловых парах. Анализ n катушек, объединенных менее чем в n узловых пар, является частным случаем (хотя гораздо более важным практически) чисто узловой сети.

Снова на физическую природу соединенных вместе катушек налагается единственное ограничение: они являются линейными

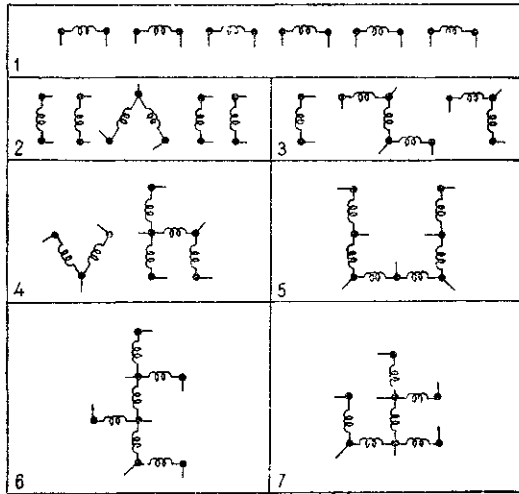


Рис. 14.1. Различные типы соединений шести катушек в шесть узловых пар.

и Y не есть функция от I или E . На природу их взаимосоединений устанавливается ограничение: они в рассматриваемый момент времени не изменяются. Иначе говоря, компоненты тензора преобразования S являются константами, а не функциями времени.

II. На рис. 14.1 показаны семь различных способов расположения шести катушек, образующих сети с шестью узловыми парами.

Следует вспомнить, что число узловых пар равно числу узлов минус число независимых подсетей.

Узловая пара состоит из любых двух узлов, выбранных произвольно в одной и той же подсети. Предполагается, что между этими двумя узлами возникает разность потенциалов E' и что ток I' поступает в сеть через первый узел и тот же ток I' покидает сеть во втором узле узловой пары.

III. При изучении контурных сетей было показано, что «ток в ветви» можно заменить гипотетическим «контурным током»,

если предположить, что токи ветвей продолжают свое течение в замкнутой цепи.

Эта замена *не изменяет уравнений*, а меняет лишь физическую интерпретацию тока i .

Подобное изменение *физической интерпретации* I можно сделать в узловых сетях, если предположить, что «узловой ток», поступающий в сеть в узловых парах, продолжает свое течение через сеть. *Гипотетическая цепь, проходящая в сети от одного из узлов узловой пары к другому, называется «открытым контуром».*

Так же, как гипотетический «контурный ток» имеет физический смысл потока, протекающего в соответствующей ветви, так гипотетический «ток открытого контура» имеет физический смысл только на концах соответствующей ему узловой пары.

Способ определения открытого контура, принадлежащего узловой паре, будет показан при изучении ортогональных сетей.

IV. При выводе уравнений предположим, что известные токи I приложены к отдельным катушкам, собственные и взаимные адмиттансы Y которых также известны. Будут исследованы разности потенциала E , которые возникают на катушках из-за приложенных токов I . Для этого необходимо вывести *уравнение тока* $I = Y'E'$, выраженное через узловые пары; тогда его можно решить относительно E' (если не понадобится никаких других манипуляций). Значит, *«переменными» теперь вместо контурных токов i' являются напряжения на узловых парах E' .*

Хотя имеется n катушек и n известных приложенных к ним токов, тем не менее n неизвестных разностей потенциалов, возникающих на n катушках, не являются независимыми друг от друга. Достаточно вывести и решить уравнение для стольких разностей потенциалов, сколько имеется узловых пар, а остальные можно через них немедленно определить. Ситуация аналогична той, которая возникает в контурных сетях, где имеется n катушек и n известных приложенных напряжений, а n неизвестных токов можно найти *выводом и решением уравнений лишь для стольких токов, сколько имеется контуров.*

V. Вместо того чтобы рассматривать I как приложенный ток, а E — как обусловленную им разность потенциала, задачу можно поставить таким образом, что I — ток, протекающий через два узла различных катушек под действием напряжения E на каждой катушке. Или же задачу можно поставить так, что I — ток, протекающий в некоторых внешних нагрузках Z_L или Y_L (которые, однако, не появляются в уравнении или на диаграмме), а E — разность потенциалов, появляющихся на нагрузках. Чтобы подчеркнуть аналогию с контурным анализом, где e рассматривается как воздействующая величина, а i — как величина отклика при выводе уравнений, предпочтем первый способ постановки. Поэтому в узловых сетях I является воздействующей

величиной, а E — величиной отклика. Конечно, при *манипулировании* с уравнениями возможен любой вариант воздействующих и откликающихся величин.

3. ИНВАРИАНТНОСТЬ МОЩНОСТИ

I. Следует заметить, что если одинаковые токи I приложены к двум узлам каждой из соответствующих катушек различных сетей (рис. 14.1), то на соответствующих катушках возникают одинаковые разности потенциала E , поскольку через каждую катушку может протекать лишь приложенный к ней ток, тогда как остальные катушки являются разомкнутыми цепями. Поэтому входная мощность $I E$, линейная форма, остается «инвариантной» при различных взаимосоединениях n катушек в n узловых пар:

$$I E = I' E', \quad I^u E_u = I'^u E'_u. \quad (14.1)$$

II. Точно так же, как в чисто контурных сетях, все различные типы сетей на рис. 14.1 имеют одно и то же уравнение $I = Y E$, если разности потенциалов E_u , возникающие на каждой катушке, рассматриваются как неизвестные переменные. Но как только другие E_u выбираются как переменные, уравнения становятся разными для каждой сети.

Другими словами, ключом к возможности преобразования уравнения поведения любой сети, скажем первой (см. рис. 14.1), в уравнение любой другой чисто узловой сети является то, что каждая сеть имеет одну и только одну систему координат, в которой уравнение наложенных электромагнитных величин является одним и тем же.

Таким образом, все сети различны, но уравнения наложенных электромагнитных явлений одинаковы для разных сетей, если одна частная система координат выбрана для каждой сети. Эти частные координатные системы (узловые пары в отдельных катушках) служат теми «мостами», по которым можно перейти от одной сети к любой другой.

4. ТЕНЗОР АДМИТТАНСА Y

I. Пусть дана чисто узловая сеть (рис. 14.2, а), в которой к каждой катушке приложен разный набор токов I . Ее примитивная узловая сеть показана на рис. 14.2, б, она имеет асимметричные взаимные адмиттансы между, скажем, Y^{bb} , Y^{dd} и Y^{cc} , Y^{gg} .

Метод анализа узловых сетей повторяет шаг за шагом анализ контурных сетей с той разницей, что взаимно заменяются двойственные величины (показанные в § 1).

II. Первый шаг состоит в установлении геометрических объектов и уравнения поведения примитивной узловой сети. Ее уравнение тока

$$I = Y \cdot E, \quad I^u = Y^{uv} E_v, \quad (14.2)$$

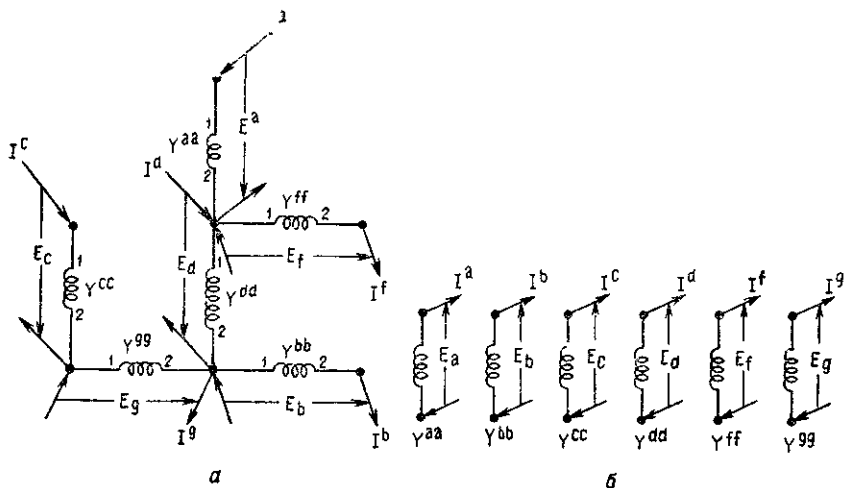


Рис. 14.2.
 а — заданная узловaя сеть; б — ее примитивная сеть.

где

$$I = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|} \hline a & b & c & d & f & g \\ \hline I^a & I^b & I^c & I^d & I^f & I^g \\ \hline \end{array}; \quad (14.3)$$

$$E = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|} \hline a & b & c & d & f & g \\ \hline E_a & E_b & E_c & E_d & E_f & E_g \\ \hline \end{array}; \quad (14.4)$$

$$\begin{array}{|c|c|c|c|c|c|} \hline a & b & c & d & f & g \\ \hline a & \gamma_{aa} & & & & \\ \hline b & & \gamma_{bb} & & \gamma_{bd} & \\ \hline c & & & \gamma_{cc} & & \gamma_{cg} \\ \hline d & & \gamma_{db} & & \gamma_{dd} & \\ \hline f & & & & & \gamma_{ff} \\ \hline g & & & \gamma_{gc} & & \gamma_{gg} \\ \hline \end{array} \quad (14.5)$$

III. Эффект взаимосоединения катушек заключается во введении дополнительных узловых пар, в которых могут быть приложены токи или с помощью которых могут быть соединены нагрузки.

Следует заметить, что в примитивной сети (рис. 14.2, б) токи нельзя приложить ни в одной из точек, кроме тех, которые показаны.

В новой сети (см. рис. 14.2) имеется огромное число способов, с помощью которых можно выбрать шесть новых узловых пар; к ним приложены новые токи I' . Выбор зависит от требования задачи. Пусть произвольно выбраны шесть *независимых* узловых пар (рис. 14.3). Следует заметить, что каждый узел охватывается по крайней мере один раз.

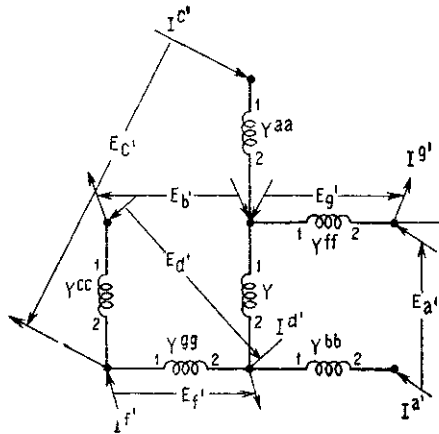


Рис. 14.3. Введенные узловые пары.

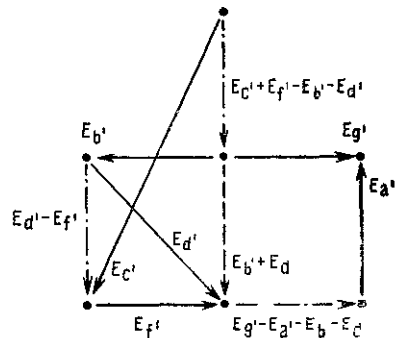


Рис. 14.4. Разности потенциалов на отдельных катушках.

Необходимо помнить, что если два узла каждой катушки выбраны как узловые пары новой сети, то уравнение тока примитивной сети $I = Y \cdot E$ можно использовать для новой сети без каких-либо изменений.

IV. Чтобы установить отношение между старыми и новыми напряжениями E и E' , сначала необходимо найти *разности потенциалов, возникающих на каждой отдельной катушке, в терминах новых приложенных напряжений*.

Для этого шага используется второй закон Кирхгофа: *сумма напряжений по замкнутому контуру равна нулю*.

Разности потенциалов, возникающие на каждой катушке, рассчитаны на рис. 14.4 следующим образом:

1) сначала между узловыми парами изображают предполагаемые новые напряжения E' с соответствующими знаками;

2) затем, предполагая, что *сумма разностей потенциала в любой замкнутой цепи равна нулю*, находят напряжение между двумя концами каждой катушки через новые напряжения E_a , E_b и т. д. Замкнутая цепь не обязательно проходит через катушки (т. е. замкнутые цепи не образуют контуров).

V. Приравняв разности потенциалов, возникающие на каждой катушке до и после взаимосоединения, можно установить следующие уравнения:

$$\begin{aligned}
 E_a &= -E_{b'} + E_{c'} - E_{d'} + E_{f'} \\
 E_b &= -E_{a'} - E_{b'} - E_{d'} + E_{g'} \\
 E_c &= +E_{d'} - E_{f'} \\
 E_d &= E_{b'} + E_{d'} \\
 E_f &= +E_{g'} \\
 E_g &= E_{f'}
 \end{aligned}
 \quad C_t^{-1} =
 \begin{array}{c}
 \begin{array}{|c|c|c|c|}
 \hline
 a & -1 & 1 & -1 & 1 \\
 \hline
 b & -1 & -1 & -1 & 1 \\
 \hline
 c & & & 1 & -1 \\
 \hline
 d & 1 & & 1 & \\
 \hline
 f & & & & 1 \\
 \hline
 g & & & & 1 \\
 \hline
 \end{array}
 \end{array}
 \quad (14.6)$$

представляющие собой уравнение преобразования переменных

$$E = C_t^{-1} E', \quad E_u = C_u'' E_u'. \quad (14.7)$$

Следовательно, коэффициенты при новых переменных представляют собой транспонированный обратный тензор преобразования C_t^{-1} . Определитель его матрицы не равен нулю.

VI. Как только установлен обратный тензор преобразования C^{-1} , находят новые компоненты геометрических объектов новой сети Y' и I' .

Новые компоненты тензора адмиттанса находят следующим образом:

$$Y' = C^{-1} Y C_t^{-1}, \quad Y^{u'v'} = Y^{uv} C_u'' C_v', \quad (14.8)$$

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|}
 \hline
 & a' & b' & c' & d' & f' & g' \\
 \hline
 a' & Y_{bb} & Y_{bb} - Y_{bd} & 0 & Y_{bb} - Y_{bd} & 0 & -Y_{bb} \\
 \hline
 b' & Y_{bb} - Y_{db} & Y_{aa} + Y_{bb} - Y_{bd} & -Y_{aa} & Y_{aa} + Y_{bb} - Y_{bd} & -Y_{aa} & -Y_{bb} + Y_{db} \\
 \hline
 c' & 0 & -Y_{aa} & Y_{aa} & -Y_{aa} & Y_{aa} & 0 \\
 \hline
 d' & Y_{bb} - Y_{db} & Y_{aa} + Y_{bb} - Y_{bd} & -Y_{aa} & Y_{aa} + Y_{bb} - Y_{bd} & -Y_{aa} - Y_{cc} & -Y_{bb} + Y_{db} \\
 \hline
 f' & 0 & -Y_{aa} & Y_{aa} & -Y_{aa} - Y_{cc} + Y_{gc} & Y_{aa} + Y_{cc} - Y_{cg} - Y_{gc} + Y_{gg} & 0 \\
 \hline
 g' & -Y_{bb} & -Y_{bb} + Y_{bd} & 0 & -Y_{bb} + Y_{bd} & 0 & Y_{bb} + Y_{ff} \\
 \hline
 \end{array}
 \end{array}
 \quad (14.9)$$

Если взаимные адмиттансы одинаковы в обоих направлениях, эта матрица — симметричная.

5. ВЕКТОР ТОКА I'

I. Новые компоненты вектора тока I' находят как

$$I' = C^{-1}I, \quad I^{u'} = C_u^{u'} I^u, \quad (14.10)$$

$$I' = \begin{array}{c} \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|} \hline a' & b' & c' & d' & f' & g' \\ \hline -I^b & -I^a - I^b + I^d & I^a & -I^a - I^b + I^c + I^d & I^a - I^c + I^g & I^b + I^f \\ \hline \end{array} \end{array}, \quad (14.11)$$

$$I' = \begin{array}{c} \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|} \hline a' & b' & c' & d' & f' & g' \\ \hline I^{a'} & I^{b'} & I^{c'} & I^{d'} & I^{f'} & I^{g'} \\ \hline \end{array} \end{array}. \quad (14.12)$$

Значит, если к отдельным катушкам приложены I^a, I^b , то через различные узловые пары (вход в один узел и выход из другого узла) протекают $-I^b, -I^a - I^b + I^d$ и т. д.

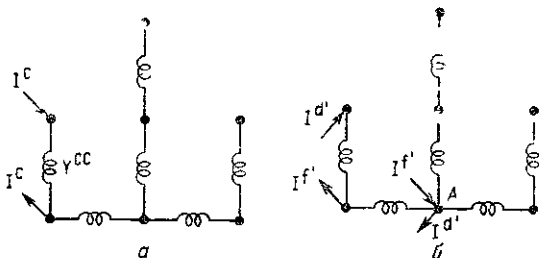


Рис. 14.5.

a — ток, примененный к катушке; b — ток через катушку в терминах токов узловых пар.

Адмиттансы тех катушек, токи которых встречаются в узле, образуя узловую ток, формируют диагональные составляющие адмиттанс-тензора Y' . Например, согласно уравнению (14.12) $I^{f'}$ построен из $I^a, -I^c$ и I^g ; следовательно, три адмиттанса Y_{aa}, Y_{cc}, Y_{gg} (и любой взаимный адмиттанс между ними) образуют $I^{f'}$ диагональную компоненту Y' . (В контурных сетях импедансы тех катушек, примененное напряжение к которым добавляется к контурному напряжению, образуют диагональные компоненты импеданса z' .)

II. Этот последний шаг вычисления I' из I используется всякий раз, когда ток применен (или нагрузка присоединена) не через узловую пару, а через катушку. Например, может случиться, что единственным примененным током в данном примере (рис. 14.5) будет ток I^c . Однако два узла катушки Y_{cc} не рассматриваются как узловая пара, напряжение в которой выбрано

в качестве переменной, поэтому I^c не может рассматриваться как компонента I' . Значение I' с одним приложенным I^c есть $C^{-1}I$, т. е.

$$I' = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|} \hline & a' & b' & c' & d' & f' & g' \\ \hline & 0 & 0 & 0 & I^c & -I^c & 0 \\ \hline \end{array}. \quad (14.13)$$

Иначе говоря, I^c образует часть из двух различных приложенных узловых токов аналогично контурным сетям, где одно приложенное последовательно с катушкой напряжение может образовать часть из нескольких контурных напряжений. На рис. 14.5, б показано, как I^c образует приложенные токи в двух узловых парах d' и f' . *Результирующий* ток через узел А, конечно, равен нулю.

III. Если два узла, через которые протекает приложенный ток, не образуют узловую пару и не соединены вместе катушкой, то предполагается, что два узла соединены катушкой с нулевым адмиттансом так, что в примитивной сети имеется одна дополнительная катушка. Это предположение аналогично тому, которое используется в контурных сетях, где при отсутствии действительной катушки предполагается катушка с нулевым импедансом, последовательно соединенная с приложенным напряжением. (Можно предположить, что два узла, не связанные катушкой, но имеющие воздействующие на них токи, образуют «безадмиттансную ветвь» или «кажущуюся катушку».)

IV. Уравнение тока, представляющее шесть обычных уравнений, устанавливается и записывается как

$$I' = Y'E', \quad I^u = Y^{u'v'}E_{v'}. \quad (14.14)$$

Во многих практических задачах это уравнение подразделяется по крайней мере на два инвариантных уравнения.

V. Когда известны токи I' , протекающие через узловые пары, разности потенциала E' , возникающие на узловых парах, находят по формуле

$$E' = Z'I', \quad E_{v'} = Z_{v'u'}i^{u'}, \quad (14.15)$$

где Z' — обратная Y' .

Как только известны разности потенциалов в узловых парах E' найдены, с их помощью можно рассчитать величины, существующие в каждой отдельной катушке.

VI. Разности потенциала, возникающие на каждой отдельной катушке, находят по уравнению преобразования E

$$E = C_t^{-1}E', \quad E_u = C_u^{u'}E_{u'}, \quad (14.16)$$

уже приведенному в уравнении (14.6).

Токи I , протекающие в отдельных катушках, находят из $I = YE$ заменой I на I_c и E на $C_t^{-1}E'$, получая

$$I_c = YC_t^{-1}E', \quad I^u = Y^{u'v'}C_u^{u'}E_{v'}, \quad (14.17)$$

где матрица YC_t^{-1} была уже рассчитана в уравнении (14.9) (в чисто узловой сети I и I_c численно равны). Следовательно,

$$I_c = \begin{array}{|l|} \hline a & Y^{aa}(-E_{b'} + E_{c'} - E_{d'} + E_{f'}) \\ \hline b & Y^{bb}(-E_{a'} - E_b - E_{d'} + E_{g'}) + Y^{bd}(E_{b'} + E_{d'}) \\ \hline c & Y^{cc}(E_{d'} - E_{f'}) + Y^{cg}E_{f'} \\ \hline d & Y^{dd}(E_{b'} + E_{d'}) + Y^{db}(-E_{a'} - E_b - E_{d'} + E_{g'}) \\ \hline f & Y^{ff}E_{g'} \\ \hline g & Y^{gg}E_{f'} + Y^{gc}(E_{g'} - E_{f'}) \\ \hline \end{array} \quad (14.18)$$

VII. Если тензор преобразования C_t^{-1} является сингулярным, собственные и взаимные импедансы отдельных катушек Z находят по импедансам узловых пар Z' из соотношения

$$Z = C_t^{-1} Z' C^{-1}, \quad Z_{uv} = Z_{u'v'} C_u^{u'} C_v^{v'}. \quad [(14.19)]$$

6. СВОДКА ЭТАПОВ

Этапы установления тока любой узловой сети параллельны этапам вывода уравнения напряжения контурной сети, за исключением того, что *каждое понятие заменяется «двойственным» ему понятием.*

I. Сначала устанавливаются примитивная узловая сеть и ее геометрические объекты Y , I и E .

1. Примитивная сеть состоит из всех разомкнутых катушек данной сети.

2. Установлен тензор адмиттанса Y примитивной сети, содержащий собственные и взаимные адмиттансы отдельных катушек.

3. Вектор тока I содержит поступающие и покидающие каждую катушку токи.

4. Вектор напряжений E содержит неравные разности потенциалов (известные и неизвестные), возникающие на каждой катушке.

II. Следующий шаг состоит в получении транспонированного обратного тензора преобразования C_t^{-1} , превращающего примитивную сеть в действительную.

1. Выберем в системе столько независимых разностей потенциалов E' между разными узлами, сколько имеется узловых пар. Две конечные точки каждого напряжения представляют узловую пару.

2. *Запишем вдоль каждой катушки разности возникающих на них потенциалов, выраженных через выбранные новые E' , используя второй закон Кирхгофа.*

3. Приравняем старые и новые напряжения, возникающие на каждой отдельной катушке. Имеется столько уравнений, сколько катушек. Левая часть содержит старые напряжения, а правая — новые напряжения.

4. Коэффициенты при новых напряжениях E' образуют транспонированный обратный тензор преобразования C_t^{-1} , математически представляющий второй закон Кирхгофа.

III. Следующий шаг состоит в том, чтобы найти новые компоненты геометрических объектов Y' и I' и уравнение тока новой системы.

1. Тензор адмиттанса Y' находят по формуле преобразования

$$Y' = C^{-1} Y C_t^{-1}, \quad Y^{u'v'} = Y^{uv} C_u^{u'} C_v^{v'}. \quad (14.20)$$

2. Токи, приложенные к новым узловым парам, находят по формуле преобразования

$$I' = C^{-1} I, \quad I^{u'} = C_u^{u'} I^u. \quad (14.21)$$

3. Уравнение тока новой сети устанавливают как

$$I' = Y' E', \quad I^{u'} = Y^{u'v'} E_{v'}. \quad (14.22)$$

IV. Однажды установленное уравнение поведения пригодно для всех типов манипуляций в зависимости от имеющейся задачи.

Когда с уравнением тока работают как с единым целым, не подразделяя его, неизвестные разности потенциалов, возникающие на выбранных узловых парах, находят в два этапа:

1) рассчитывают обратный тензор адмиттанса, который является тензором импеданса:

$$Z' = Y'^{-1}, \quad Z_{v'u'} = (Y^{u'v'})^{-1}; \quad (14.23)$$

2) неизвестные разности потенциалов находят как

$$E' = Z' I', \quad E_{v'} = Z_{v'u'} I^{u'}. \quad (14.24)$$

Неизвестные величины для отдельных катушек можно найти с помощью E' следующим образом:

3) разности потенциала на отдельных катушках E находят как

$$E = C_t^{-1} E', \quad E_v = C_v^{v'} E_{v'}; \quad (14.25)$$

4) токи, протекающие в отдельных катушках, находят как

$$I_c = Y C_t^{-1} E', \quad I^u = Y^{u'v'} C_v^{v'} E_{v'}, \quad (14.26)$$

где $Y C_t^{-1}$ уже были рассчитаны при нахождении Y' ;

5) собственные и взаимные импедансы отдельных катушек суть

$$Z_c = C_t^{-1} Z' C^{-1}, \quad Z_{uv} = Z_{u'v'} C_u^{u'} C_v^{v'}. \quad (14.27)$$

V. При прямом обозначении значительно удобнее заменить C_t^{*-1} во всех уравнениях новым символом, скажем А. В терминах А все формулы преобразования контурных сетей можно использовать для соответствующих двойственных величин узловых сетей, если C_t^{*-1} везде заменена на А и точно так же C^{-1} на A_t^* и т. д. Например:

$$z' = C_t^* z C \rightarrow Y' = A_t^* Y A, \quad (14.28)$$

$$y_c = C y' C_t^* \rightarrow Z_c = A Z' A_t^*, \quad (14.29)$$

$$e' = C_t^* e \rightarrow I' = A_t^* I, \quad (14.30)$$

$$i = C i' \rightarrow E = A E'. \quad (14.31)$$

7. УРАВНЕНИЯ СВЯЗИ

I. Теперь предположим, что в предыдущей сети (см. рис. 14.3) три узловые пары коротко замкнуты, как показано на рис. 14.6, так что вместо шести имеется три узловые пары. Короткое замыкание узловых пар приводит к тому, что разности потенци-

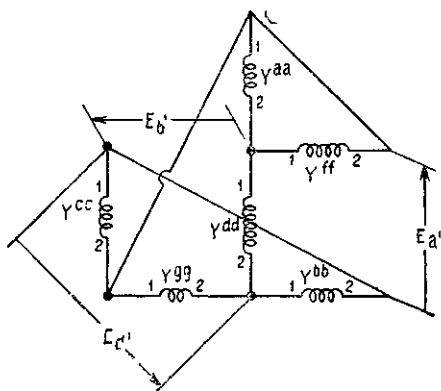


Рис. 14.6. Короткое замыкание трех узловых пар.

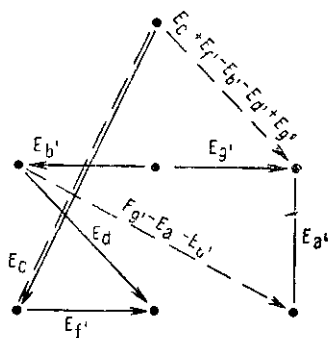


Рис. 14.7. Разности потенциалов перед коротким замыканием.

ала, возникающие на них, равны нулю. Это значит, что короткое замыкание трех узловых пар эквивалентно введению следующих трех уравнений связи, которые должны существовать между шестью новыми узловыми парами (рис. 14.7):

$$\begin{aligned} E_{c'} &= 0, \\ E_{c'} + E_{f'} - E_{b'} - E_{d'} + E_{g'} &= 0, \\ E_{g'} - E_{a'} - E_{b'} &= 0. \end{aligned} \quad (14.32)$$

При помощи трех уравнений связи три переменные, скажем $E_{c'}$, $E_{g'}$ и $E_{f'}$, можно исключить

$$\begin{aligned} E_{c'} &= 0, \\ E_{g'} &= E_{a'} + E_{b'}, \\ E_{f'} &= E_{d'} - E_{a'}, \end{aligned} \quad (14.33)$$

сохраняя в качестве новых переменных $E_{a'}$, $E_{b'}$, $E_{d'}$.

При подстановке этих уравнений в уравнение преобразования (14.6) соотношение между старыми и новыми переменными становится

$$\begin{aligned} E_a &= -E_{a'} - E_{b'} \\ E_b &= \phantom{-E_{a'}} - E_{d'} \\ E_c &= E_{a'} \\ E_d &= \phantom{-E_{a'}} E_{b'} + E_{d'} \\ E_f &= E_{a'} + E_{b'} \\ E_g &= -E_{a'} \phantom{+ E_{b'}} + E_{d'} \end{aligned} \quad C_t^{-1} = \begin{array}{c} \begin{array}{|c|c|c|} \hline a' & b' & d' \\ \hline a & -1 & -1 & \\ \hline d & & & -1 \\ \hline c & 1 & & \\ \hline d & & 1 & 1 \\ \hline f & 1 & 1 & \\ \hline g & -1 & & 1 \\ \hline \end{array} \end{array} \quad (14.34)$$

Коэффициенты при новых переменных дают сингулярный обратный тензор преобразования, имеющий столько столбцов, сколько новых переменных, а именно — три.

Метод анализа с этого момента точно такой же, как и в случае несингулярного (квадратного) обратного тензора преобразования. Однако новый тензор адмиттанса Y' будет иметь три строки и три столбца вместо шести и т. п.

II. Новые компоненты тензора адмиттанса находят по компонентам тензора примитивной сети (уравнение (14.5)) из соотношения $C^{-1}Y C_t^{-1}$:

$$Y' = \begin{array}{c} \begin{array}{|c|c|c|} \hline a' & \begin{array}{l} Y^{aa} + Y^{cc} - Y^{cg} + Y^{ff} \\ - Y^{gc} + Y^{gg} \end{array} & Y^{aa} + Y^{ff} & Y^{cg} - Y^{gg} \\ \hline b' & Y^{aa} + Y^{ff} & Y^{aa} + Y^{dd} + Y^{ff} & -Y^{db} + Y^{dd} \\ \hline d' & Y^{gc} - Y^{gg} & -Y^{bd} + Y^{dd} & Y^{bb} - Y^{bd} - Y^{db} \\ & & & Y^{dd} + Y^{gg} \\ \hline \end{array} \end{array} \quad (14.35)$$

Новые компоненты вектора токов, входящих и выходящих из узловых пар, равны $C^{-1}I$:

$$I' = \begin{bmatrix} a' & b' & d' \\ -I^a + I^c + I^f - I^g & -I^a + I^a + I^f & -I^b + I^d + I^g \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I^{a'} & I^{b'} & I^{d'} \end{bmatrix}. \quad (14.36)$$

Уравнение тока новой сети есть $I' = Y'E'$ и т. д.

8. СИНГУЛЯРНЫЙ ТЕНЗОР ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

I. *Снова вместо того, чтобы для представления коротко замкнутых узловых пар выводить уравнение связи, можно с самого начала выбрать столько новых переменных, сколько имеется узловых пар, и следовать анализу § 4, как если бы обратный тензор преобразования C_i^{-1} был несингулярным.*

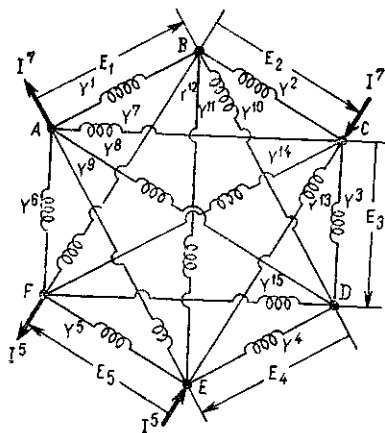


Рис. 14.8 Узловая сеть.

Следует помнить, что число узловых пар любой сети равно числу катушек минус число замкнутых контуров.

Подобным образом любая формула, полученная через C^{-1} , справедлива как для сингулярного, так и для несингулярного C^{-1} . Однако не следует использовать формулы, в которых присутствует сингулярный, обратный C^{-1} .

II. В качестве примера пусть 15 катушек соединены в сеть (см. рис. 14.8), имеющую пять узловых пар и десять контуров. В предположении, что в последовательном соединении с катушками нет приложенного напряжения, сеть является первоначально узловой сетью, поскольку она имеет гораздо меньше узловых пар, чем контуров.

Предположим, что к сети приложены два тока. Первый, I^7 , входит в сеть через узел A и выходит через узел C.

Второй ток, I^5 , поступает в сеть через узел E и покидает ее через узел F . Другими словами, предположим, что два узла катушки Y^5 являются, скажем, входными клеммами, а два узла катушки Y^7 — выходными клеммами сети. Вопрос заключается в том, какие разности потенциалов возникают на входных и выходных клеммах.

III. Этапы вывода уравнения тока следующие:

- 1) примитивная сеть состоит из 15 разомкнутых катушек;
- 2) тензор адмиттанса примитивной сети есть

| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 |
|----|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|
| 1 | Y^1 | | | | | | | | | | | | | | |
| 2 | | Y^2 | | | | | | | | | | | | | |
| 3 | | | Y^3 | | | | | | | | | | | | |
| 4 | | | | Y^4 | | | Y^7 | | | | | | | | |
| 5 | | | | | Y^5 | | | | Y^9 | | | | | | |
| 6 | | | | | | Y^6 | | | | | | | | | |
| 7 | | | | Y^7 | | | Y^7 | | | | | | | | |
| 8 | | | | | | | | Y^8 | | | | | | | |
| 9 | | | | | Y^9 | | | | Y^9 | | | | | | |
| 10 | | | | | | | | | | Y^{10} | | | | | |
| 11 | | | | | | | | | | | Y^{11} | | | | |
| 12 | | | | | | | | | | | | Y^{12} | | | |
| 13 | | | | | | | | | | | | | Y^{13} | | |
| 14 | | | | | | | | | | | | | | Y^{14} | |
| 15 | | | | | | | | | | | | | | | Y^{15} |

(14.37)

сюда входят асимметричные собственные и взаимные адмиттансы, скажем, между Y^4 и Y^7 и между Y^5 и Y^9 . Этот тензор несимметричный;

- 3) вектор тока, приложенного к примитивной сети, есть $I =$

$$= \begin{bmatrix} | & | & | & | & | & | & | & | & | & | & | & | & | & | & | \\ | & | & | & | & I^5 & | & -I^7 & | & | & | & | & | & | & | & | \\ | & | & | & | & | & | & | & | & | & | & | & | & | & | & | \end{bmatrix}.$$

(14.38)

IV. Для установления тензора преобразования делаются следующие шаги:

1) на рис. 14.9 показаны выбранные пять узловых пар;

2) на рис. 14.9 показаны также разности потенциалов, возникающие на каждой катушке;

3) приравнявая старые и новые разности потенциалов, возникающие на каждой катушке, можно записать следующие 15 уравнений (сравнивая рис. 14.8 и 14.9):

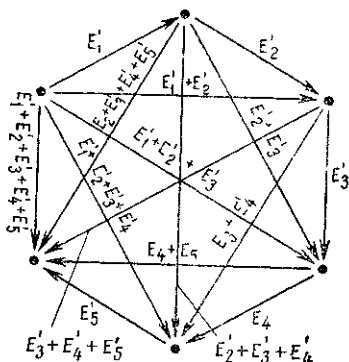


Рис. 14.9. Разности потенциалов на отдельных катушках.

$$E_1 = E_{1'}$$

$$E_2 = E_{2'}$$

$$E_3 = E_{3'}$$

$$E_4 = E_{4'}$$

$$E_5 = E_{5'}$$

$$E_6 = E_{1'} + E_{2'} + E_{3'} + E_{4'} + E_{5'}$$

$$E_7 = E_{1'} + E_{2'}$$

$$E_8 = E_{1'} + E_{2'} + E_{3'}$$

$$E_9 = E_{1'} + E_{2'} + E_{3'} + E_{4'}$$

$$E_{10} = E_{2'} + E_{3'}$$

$$E_{11} = E_{2'} + E_{3'} + E_{4'}$$

$$E_{12} = E_{2'} + E_{3'} + E_{4'} + E_{5'}$$

$$E_{13} = E_{3'} + E_{4'}$$

$$E_{14} = E_{3'} + E_{4'} + E_{5'}$$

$$E_{15} = E_{4'} + E_{5'}$$

1' 2' 3' 4' 5'

| | | | | | |
|----|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | | | | |
| 2 | | 1 | | | |
| 3 | | | 1 | | |
| 4 | | | | 1 | |
| 5 | | | | | 1 |
| 6 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 7 | 1 | 1 | | | |
| 8 | 1 | 1 | 1 | | |
| 9 | 1 | 1 | 1 | 1 | |
| 10 | | 1 | 1 | | |
| 11 | | 1 | 1 | 1 | |
| 12 | | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 13 | | | 1 | 1 | |
| 14 | | | 1 | 1 | 1 |
| 15 | | | | 1 | 1 |

$$C_i^{-1} = \dots ; (14.39)$$

4) коэффициенты перед новыми переменными дают транспонированный обратный тензор преобразования C_T^{-1} .

V. Следующий шаг состоит в том, чтобы найти уравнение тока.

1. Тензор адмиттанса находится по $C^{-1} \cdot Y \cdot C_T^{-1}$ или по $A_t \cdot Y \cdot A$ как

| | 1' | 2' | 3' | 4' | 5' |
|---------|---|--|---|--|--|
| 1' | $Y_1 + Y_6 + Y_7 + Y_8 + Y_9$ | $Y_6 + Y_7 + Y_8 + Y_9$ | $Y_6 + Y_8 + Y_9$ | $Y_6 + Y_7 + Y_8 + Y_9$ | $Y_6 + Y_9$ |
| 2' | $Y_6 + Y_7 + Y_8 + Y_9$ | $Y_2 + Y_6 + Y_7 + Y_8 + Y_9 + Y_{10} + Y_{11} + Y_{12}$ | $Y_6 + Y_8 + Y_9 + Y_{10} + Y_{11} + Y_{12}$ | $Y_6 + Y_7 + Y_8 + Y_9 + Y_{11} + Y_{12}$ | $Y_6 + Y_9$ |
| Y' = 3' | $Y_6 + Y_8 + Y_9$ | $Y_4 + Y_6 + Y_7 + Y_8 + Y_9 + Y_{11} + Y_{12}$ | $Y_6 + Y_8 + Y_9 + Y_{10} + Y_{11} + Y_{12} + Y_{13} + Y_{14} + Y_{15}$ | $Y_6 + Y_8 + Y_9 + Y_{11} + Y_{12} + Y_{13} + Y_{14}$ | $Y_6 + Y_9 + Y_{12} + Y_{14}$ |
| 4' | $Y_4 + Y_6 + Y_7 + Y_8 + Y_9 + Y_{11} + Y_{12}$ | $Y_2 + Y_6 + Y_7 + Y_8 + Y_9 + Y_{11} + Y_{12}$ | $Y_6 + Y_8 + Y_9 + Y_{10} + Y_{11} + Y_{12} + Y_{13} + Y_{14}$ | $Y_4 + Y_6 + Y_7 + Y_8 + Y_9 + Y_{11} + Y_{12} + Y_{13} + Y_{14} + Y_{15}$ | $Y_6 + Y_9 + Y_{12} + Y_{14} + Y_{15}$ |
| 5' | $Y_5 + Y_6$ | $Y_5 + Y_6 + Y_{12}$ | $Y_5 + Y_6 + Y_{12} + Y_{14}$ | $Y_5 + Y_6 + Y_{12} + Y_{14} + Y_{15}$ | $Y_5 + Y_6 + Y_{12} + Y_{14} + Y_{15}$ |

(14.40)

2. Новые компоненты вектора приложенных токов, входящих и выходящих через узловые пары, согласно $C^{-1}I = A_t I$:

$$I' = \begin{bmatrix} 1' & 2' & 3' & 4' & 5' \\ -I_7 & -I_7 & & & I_5 \end{bmatrix}. \quad (14.41)$$

Ток, приложенный к катушке Y_7 , является частью двух приложенных к узловым парам токов I_1' и I_2' . Результирующий ток через узел B (принадлежащий обоим узловым парам) равен нулю.

3. Уравнение тока, представляющее собой пять уравнений с пятью переменными E' , есть $I' = Y'E'$.

VI. Если даны токи I' , протекающие в узловых парах, напряжения, которые следует приложить к узловым парам E' , чтобы произвести ток I' , находят по $E' = Y^{-1}I'$, т. е. вычислением обратного Y' .

В большинстве задач инвариантное уравнение $I' = Y'E'$ подразделяется на несколько инвариантных уравнений для дальнейших манипуляций.

9. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ УЗЛОВЫХ ПАР

I. Точно так же, как для контурных сетей (если уравнение поведения узловой сети было записано вдоль некоторых выбранных узловых пар), посредством нового тензора преобразования C_t^{-1} можно ввести новую систему узловых пар.

Необходимость введения новой системы переменных E'' возникает довольно часто. Когда сеть используется в нескольких

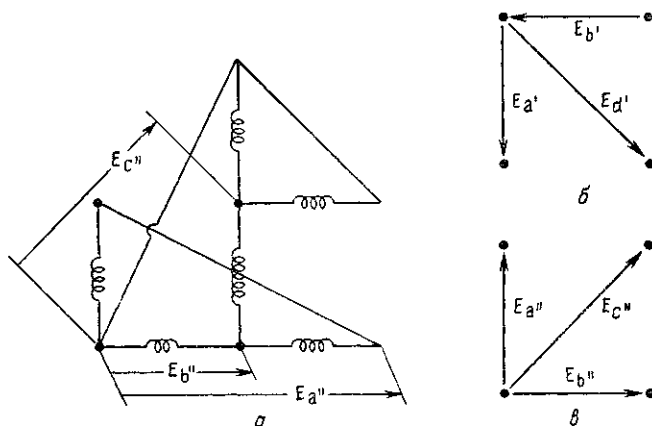


Рис. 14.10. Преобразование узловых пар:
а — заданная сеть; б — старые переменные; в — новые переменные.

различных типах задач, разные геометрические объекты, вычисленные для задач одного типа, можно использовать в некоторых других задачах, просто вводя новый тензор преобразования вместо того, чтобы каждый раз начинать все вновь с примитивной сети.

II. Рассмотрим пример такого преобразования (см. рис. 14.6). Предположим, что один из узлов является заземленным и разность потенциалов между землей и другими узлами будем рассматривать как переменные, т. е. три узловые пары $E_{a'}$, $E_{b'}$ и $E_{d'}$ (см. рис. 14.6) заменим другим набором трех узловых пар $E_{a''}$, $E_{b''}$ и $E_{c''}$ (рис. 14.10, а).

Поскольку несколько катушек соединены безадмиттансными ветвями, имеется только четыре узловые точки (см. рис. 14.10, б и в), между которыми можно предположить существование разности потенциалов. Из этих упрощенных диаграмм можно получить соотношение между старыми и новыми разностями потенциалов:

$$\begin{aligned}
 E_{a'} &= -E_{a''} \\
 E_{b'} &= E_{a''} - E_{c''} \\
 E_{d'} &= -E_{a''} + E_{b''}
 \end{aligned}
 \quad
 \begin{aligned}
 a' \\
 b' \\
 d'
 \end{aligned}
 C_t'^{-1} = \begin{bmatrix} a'' & b'' & c'' \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}. \quad (14.42)$$

Коэффициенты при новых переменных дают $C_t'^{-1}$.

III. Если требуется тензор адмиттанса Y'' сети в этой второй системе координат, его можно найти по $C'^{-1}Y'C_t'^{-1}$, где Y' задан уравнением (14.33):

$$Y'' = \begin{array}{c} a'' \\ b'' \\ c'' \end{array} \begin{array}{|c|c|c|} \hline a'' & Y^{bb} + Y^{cc} & -Y^{cg} - Y^{bb} + Y^{bd} & -Y^{bd} \\ \hline b'' & -Y^{gc} - Y^{bb} + Y^{db} & Y^{bb} - Y^{bd} - Y^{db} + Y^{dd} + Y^{gg} & Y^{bd} - Y^{dd} \\ \hline c'' & -Y^{db} & Y^{db} - Y^{dd} & Y^{aa} + Y^{dd} + Y^{ff} \\ \hline \end{array} \quad (14.43)$$

IV. Новый вектор тока согласно $C'^{-1}I'$ равен

$$I'' = \begin{array}{c} a'' \\ b'' \\ c'' \end{array} \begin{bmatrix} I^b - I^c & -I^b + I^d + I^g & I^a - I^d - I^f \end{bmatrix}. \quad (14.44)$$

представляя собой токи, выходящие из разных узловых пар и входящие в общее заземление (рис. 14.11).

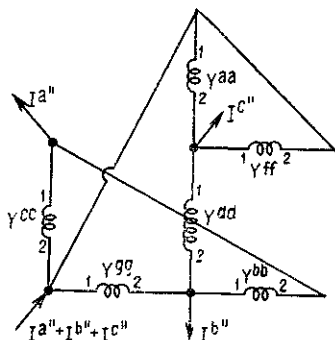


Рис. 14.11. Токи, примененные к узловым парам.

Если токи I'' , входящие в узлы, известны, разности потенциалов, возникающие между землей и другими узлами, находят по $E'' = Y''^{-1}I''$ вычислением «обращения» Y'' .

10. ЧИСЛОВОЙ ПРИМЕР

I. Пусть для числового примера адмиттансы будут чистыми проводимостями $Y^{aa}=2$, $Y^{bb}=5$, $Y^{cc}=6$, $Y^{dd}=7$, $Y^{ff}=8$, $Y^{gg}=9$ и три тока узловых пар

$$I'' = \begin{array}{|c|c|c|} \hline a'' & b'' & c'' \\ \hline 1 & 3 & 4 \\ \hline \end{array}. \quad (14.45)$$

Тогда при подстановке в уравнение (14.43) тензор адмиттанса Y'' и обратный ему будут

$$Y'' = \begin{array}{|c|c|c|} \hline a'' & b'' & c'' \\ \hline 11 & -5 & 0 \\ \hline -5 & 21 & -7 \\ \hline 0 & -7 & 17 \\ \hline \end{array}, \quad (14.46) \quad Y''^{-1} = \begin{array}{|c|c|c|} \hline a'' & b'' & c'' \\ \hline 0,1094 & 0,02868 & 0,01181 \\ \hline 0,02868 & 0,06311 & 0,026 \\ \hline 0,01181 & 0,023 & 0,06952 \\ \hline \end{array}. \quad (14.47)$$

Разности потенциалов относительно земли согласно $Y''^{-1}I'' =$

$$E'' = \begin{array}{|c|c|c|} \hline a'' & b'' & c'' \\ \hline 0,23725 & 0,32137 & 0,35987 \\ \hline \end{array} \quad (14.48)$$

II. Разности потенциалов на отдельных катушках нельзя найти по $E' = C_t'^{-1}E''$, поскольку разность потенциалов на отдельных катушках есть E , а не E' . Однако E можно найти по $E = C_t^{-1}C_t'^{-1}E''$, поскольку $E = C_t^{-1}E'$, где C_t^{-1} дана в уравнении (14.34). Произведение двух тензоров преобразования уравнений (14.34) и (14.42) есть

$$C_t'^{-1} = C_t^{-1}C_t'^{-1} = \begin{array}{|c|c|c|} \hline a'' & b'' & c'' \\ \hline a & 0 & 0 & 1 \\ \hline b & 1 & -1 & 0 \\ \hline c & -1 & 0 & 0 \\ \hline d & 0 & 1 & -1 \\ \hline f & 0 & 0 & -1 \\ \hline g & 0 & 1 & 0 \\ \hline \end{array} \quad (14.49)$$

и дает разности потенциалов на отдельных катушках по формуле $E = C_t^{-1} E''$

$$E = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|} \hline a & b & c & d & f & g \\ \hline 0,36787 & -0,08471 & -0,23725 & -0,04590 & -0,36787 & 0,32197 \\ \hline \end{array} \quad (14.50)$$

Токи I_c , протекающие в каждой отдельной катушке, определяются по формуле $I_c = YE = Y C_t^{-1} E''$

$$I_c = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|} \hline a & b & c & d & f & g \\ \hline 0,73574 & -0,42356 & -1,42356 & -0,321295 & -2,94296 & 2,89774 \\ \hline \end{array} \quad (14.51)$$

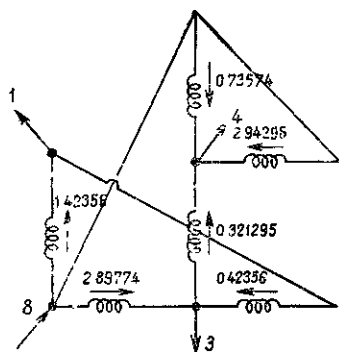


Рис. 14.12. Токи в отдельных катушках.

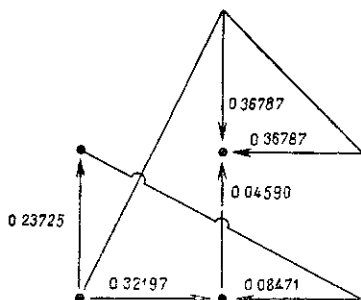


Рис. 14.13. Падение напряжения на отдельных катушках.

III. Правильность E и I_c можно проверить, проставляя на схеме около каждой катушки значения вновь найденных токов и разностей потенциалов (рис. 14.12 и 14.13). Эти значения удовлетворяют законам Кирхгофа.

11. ФИЗИЧЕСКАЯ ИНТЕРПРЕТАЦИЯ ОБРАТНОГО ТЕНЗОРА ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

I. В гл. 6, § 17 было показано, что при соединении сети с другой сетью компоненты C приводят в соответствие контуры двух сетей. Подобным образом обратный тензор преобразования C_t^{-1} (содержащий только целые числа) приводит в соответствие узловые пары двух сетей.

В частности:

- 1) столбцы C_t^{-1} перечисляют старые узловые пары, узлы которых образуют новые узловые пары;
- 2) строки C_t^{-1} перечисляют новые узловые пары, из узлов которых строятся старые узловые пары.

II. Когда старая сеть является примитивной, то:

1) столбцы C_t^{-1} перечисляют катушки, два узла которых образуют новые узловые пары;

2) строки C_t^{-1} перечисляют новые узловые пары, которым принадлежат узлы каждой катушки.

Эти физические интерпретации играют важную роль в синтезе сетей, где C_t^{-1} задан и необходимо получить саму сеть.

III. При рассмотрении электромагнитных величин:

1) столбцы C_t^{-1} перечисляют старые узловые пары, токи которых I добавляются, чтобы образовать новые токи узловых пар I' ;

2) строки C_t^{-1} перечисляют новые узловые пары, напряжения которых E' образуют напряжение E старых узловых пар.

IV. Когда старая сеть примитивная, то:

1) столбцы C_t^{-1} перечисляют катушки, токи которых I образуют токи новых узловых пар I' ;

2) строки C_t^{-1} перечисляют новые узловые пары, напряжения на которых E' добавляются к напряжению E на отдельных катушках.

Физическая интерпретация для каждой группы матриц преобразования разная.

Настоящая интерпретация применима только в группе G_t (гл. 11, § 6), представляющей *взаимосоединение* катушек и *содержащей только целые числа*.

Следует напомнить, что при получении тензоров преобразования C или C_t^{-1} , содержащих целые числа, используются только первый и второй законы Кирхгофа.

12. ВЗАМОСОЕДИНЕНИЕ СЕТЕЙ

I. Вместо того, чтобы соединить отдельные катушки в систему, можно взять *несколько независимых узловых сетей и соединить их в одну результирующую сеть с помощью C_t^{-1}* . И снова отдельные системы, подлежащие взаимосоединению, могут быть неподвижными или движущимися, электрическими, механическими, акустическими и другими системами. Взаимосоединение *узловых* сетей состоит из короткого замыкания узловых пар ($A-A'$) каждой сети с другой парой (рис. 14.14). При взаимосоединении две узловые пары заменяются одной.

Вместо того, чтобы взаимосоединить несколько независимых сетей, *одну систему можно разделить на несколько составляющих систем разделением узловых пар* и каждую компоненту сети можно проана-

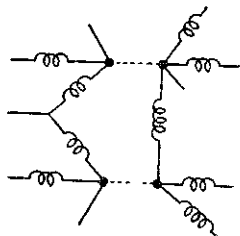


Рис. 14.14. Взаимосоединение узловых пар.

лизовать отдельно и затем соединить вновь в одну систему посредством C_t^{-1} .

II. При взаимосоединении целых систем выполняются те же этапы, что и при взаимосоединении отдельных катушек, а именно:

1. Находят I , Y и другие геометрические объекты примитивной системы, состоящей из отдельных систем.

Тензор адмиттанса примитивной системы есть

$$Y = Y_1 + Y_2 + Y_3 + \dots \quad (14.52)$$

Результирующий Y имеет столько осей, какова сумма осей составляющих координатных систем.

Вектор тока примитивной системы есть

$$I = I_1 + I_2 + I_3 + \dots \quad (14.53)$$

2. Находят тензор преобразования $C_t^{-1} = C_\alpha^\alpha$, показывающий способ взаимосоединения составляющих систем.

3. Находят новые компоненты геометрических объектов результирующей системы

$$Y' = C^{-1}(Y_1 + Y_2 + Y_3 + \dots)C_t^{-1}, \quad (14.54)$$

$$I' = C^{-1}(I_1 + I_2 + I_3 + \dots). \quad (14.55)$$

Уравнение тока результирующей системы есть $I' = Y'E'$. Если оси некоторых составляющих систем Y_1 или Y_2 и других не содержат некоторые узловые пары, которые являются взаимосоединенными, то сначала вводят новое множество переменных, которое включает необходимые узловые пары.

13. ПРИМЕР СОЕДИНЕНИЯ ДВУХ СЕТЕЙ

I. Пусть две узловые сети (см. рис. 14.6 и 14.8) соединены, как показано на рис. 14.15.

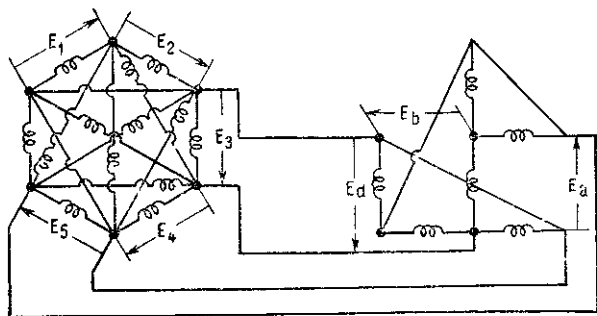


Рис. 14.15. Взаимосоединение узловых сетей.

| | | | | | | | | | |
|--------------|-----------------|----------|----------|--|--|--|--|--|--|
| $E_1 = E'_1$ | | | | | | | | | |
| $E_2 = E'_2$ | | | | | | | | | |
| $E_3 =$ | | $E_{n'}$ | | | | | | | |
| $E_4 =$ | $E'_4 + E_{b'}$ | | | | | | | | |
| $E_5 =$ | | $E_{m'}$ | | | | | | | |
| $E_a =$ | | $E_{m'}$ | | | | | | | |
| $E_b =$ | | $E_{b'}$ | | | | | | | |
| $E_d =$ | | | $E_{n'}$ | | | | | | |

| | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|--------------|--|---|---|---|--|---|---|--|--|---|--|---|--|--|--|--|--|---|--|--|--|--|--|--|---|---|--|--|---|---|--|--|--|---|--|--|--|--|--|---|--|---|--|--|--|--|--|---|--|---|--|--|--|---|--|--|--|---|--|--|--|--|--|--|---|---------|
| $C_t^{-1} =$ | <table style="border-collapse: collapse; text-align: center;"> <tr> <td style="padding: 5px;">1</td> <td style="padding: 5px;">1</td> <td style="padding: 5px;"></td> <td style="padding: 5px;"></td> <td style="padding: 5px;"></td> <td style="padding: 5px;"></td> <td style="padding: 5px;"></td> <td style="padding: 5px;"></td> </tr> <tr> <td style="padding: 5px;">2</td> <td style="padding: 5px;"></td> <td style="padding: 5px;">1</td> <td style="padding: 5px;"></td> <td style="padding: 5px;"></td> <td style="padding: 5px;"></td> <td style="padding: 5px;"></td> <td style="padding: 5px;"></td> </tr> <tr> <td style="padding: 5px;">3</td> <td style="padding: 5px;"></td> <td style="padding: 5px;"></td> <td style="padding: 5px;"></td> <td style="padding: 5px;"></td> <td style="padding: 5px;"></td> <td style="padding: 5px;"></td> <td style="padding: 5px;">1</td> </tr> <tr> <td style="padding: 5px;">4</td> <td style="padding: 5px;"></td> <td style="padding: 5px;"></td> <td style="padding: 5px;">1</td> <td style="padding: 5px;">1</td> <td style="padding: 5px;"></td> <td style="padding: 5px;"></td> <td style="padding: 5px;"></td> </tr> <tr> <td style="padding: 5px;">5</td> <td style="padding: 5px;"></td> <td style="padding: 5px;"></td> <td style="padding: 5px;"></td> <td style="padding: 5px;"></td> <td style="padding: 5px;"></td> <td style="padding: 5px;">1</td> <td style="padding: 5px;"></td> </tr> <tr> <td style="padding: 5px;">a</td> <td style="padding: 5px;"></td> <td style="padding: 5px;"></td> <td style="padding: 5px;"></td> <td style="padding: 5px;"></td> <td style="padding: 5px;"></td> <td style="padding: 5px;">1</td> <td style="padding: 5px;"></td> </tr> <tr> <td style="padding: 5px;">b</td> <td style="padding: 5px;"></td> <td style="padding: 5px;"></td> <td style="padding: 5px;"></td> <td style="padding: 5px;">1</td> <td style="padding: 5px;"></td> <td style="padding: 5px;"></td> <td style="padding: 5px;"></td> </tr> <tr> <td style="padding: 5px;">d</td> <td style="padding: 5px;"></td> <td style="padding: 5px;"></td> <td style="padding: 5px;"></td> <td style="padding: 5px;"></td> <td style="padding: 5px;"></td> <td style="padding: 5px;"></td> <td style="padding: 5px;">1</td> </tr> </table> | 1 | 1 | | | | | | | 2 | | 1 | | | | | | 3 | | | | | | | 1 | 4 | | | 1 | 1 | | | | 5 | | | | | | 1 | | a | | | | | | 1 | | b | | | | 1 | | | | d | | | | | | | 1 | (14.58) |
| 1 | 1 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 2 | | 1 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 3 | | | | | | | 1 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 4 | | | 1 | 1 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 5 | | | | | | 1 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| a | | | | | | 1 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| b | | | | 1 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| d | | | | | | | 1 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |

Коэффициенты новых переменных образуют C_t^{-1} .

III. Тензор адмиттанса результирующей системы находят по формуле $C^{-1}YC_t^{-1} = A_tYA$

| | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|--------|---|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------------------------|-----------------------------------|-----------------|-----------------|-----------------|----|-----------------|-----------------|-----------------|--|--|-----------------|-----------------|----|-----------------|-----------------|-----------------|--|--|-----------------|-----------------|----|--|--|--|-----------------|-----------------|-----------------|--|----|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------------------------|-----------------------------------|--|----|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------------------------|-----------------------------------|--|---------|
| | | 1' | 2' | 4' | b' | m' | n' | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| $Y' =$ | <table style="border-collapse: collapse; text-align: center;"> <tr> <td style="padding: 5px;">1'</td> <td style="padding: 5px;">Y₁₁</td> <td style="padding: 5px;">Y₁₂</td> <td style="padding: 5px;">Y₁₄</td> <td style="padding: 5px;"></td> <td style="padding: 5px;"></td> <td style="padding: 5px;">Y₁₅</td> <td style="padding: 5px;">Y₁₃</td> </tr> <tr> <td style="padding: 5px;">2'</td> <td style="padding: 5px;">Y₂₁</td> <td style="padding: 5px;">Y₂₂</td> <td style="padding: 5px;">Y₂₄</td> <td style="padding: 5px;"></td> <td style="padding: 5px;"></td> <td style="padding: 5px;">Y₂₅</td> <td style="padding: 5px;">Y₂₃</td> </tr> <tr> <td style="padding: 5px;">4'</td> <td style="padding: 5px;">Y₄₁</td> <td style="padding: 5px;">Y₄₂</td> <td style="padding: 5px;">Y₄₄</td> <td style="padding: 5px;"></td> <td style="padding: 5px;"></td> <td style="padding: 5px;">Y₄₅</td> <td style="padding: 5px;">Y₄₃</td> </tr> <tr> <td style="padding: 5px;">b'</td> <td style="padding: 5px;"></td> <td style="padding: 5px;"></td> <td style="padding: 5px;"></td> <td style="padding: 5px;">Y_{bb}</td> <td style="padding: 5px;">Y_{ba}</td> <td style="padding: 5px;">Y_{bd}</td> <td style="padding: 5px;"></td> </tr> <tr> <td style="padding: 5px;">m'</td> <td style="padding: 5px;">Y₅₁</td> <td style="padding: 5px;">Y₅₂</td> <td style="padding: 5px;">Y₅₄</td> <td style="padding: 5px;">Y_{ab}</td> <td style="padding: 5px;">Y₅₅ + Y_{aa}</td> <td style="padding: 5px;">Y₅₃ + Y_{ad}</td> <td style="padding: 5px;"></td> </tr> <tr> <td style="padding: 5px;">n'</td> <td style="padding: 5px;">Y₃₁</td> <td style="padding: 5px;">Y₃₂</td> <td style="padding: 5px;">Y₃₄</td> <td style="padding: 5px;">Y_{ab}</td> <td style="padding: 5px;">Y₃₅ + Y_{da}</td> <td style="padding: 5px;">Y₃₃ + Y_{dd}</td> <td style="padding: 5px;"></td> </tr> </table> | 1' | Y ₁₁ | Y ₁₂ | Y ₁₄ | | | Y ₁₅ | Y ₁₃ | 2' | Y ₂₁ | Y ₂₂ | Y ₂₄ | | | Y ₂₅ | Y ₂₃ | 4' | Y ₄₁ | Y ₄₂ | Y ₄₄ | | | Y ₄₅ | Y ₄₃ | b' | | | | Y _{bb} | Y _{ba} | Y _{bd} | | m' | Y ₅₁ | Y ₅₂ | Y ₅₄ | Y _{ab} | Y ₅₅ + Y _{aa} | Y ₅₃ + Y _{ad} | | n' | Y ₃₁ | Y ₃₂ | Y ₃₄ | Y _{ab} | Y ₃₅ + Y _{da} | Y ₃₃ + Y _{dd} | | (14.59) |
| 1' | Y ₁₁ | Y ₁₂ | Y ₁₄ | | | Y ₁₅ | Y ₁₃ | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 2' | Y ₂₁ | Y ₂₂ | Y ₂₄ | | | Y ₂₅ | Y ₂₃ | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 4' | Y ₄₁ | Y ₄₂ | Y ₄₄ | | | Y ₄₅ | Y ₄₃ | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| b' | | | | Y _{bb} | Y _{ba} | Y _{bd} | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| m' | Y ₅₁ | Y ₅₂ | Y ₅₄ | Y _{ab} | Y ₅₅ + Y _{aa} | Y ₅₃ + Y _{ad} | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| n' | Y ₃₁ | Y ₃₂ | Y ₃₄ | Y _{ab} | Y ₃₅ + Y _{da} | Y ₃₃ + Y _{dd} | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |

Вектор тока $I' = C^{-1}I = A_tI$ равен

| | | | | | | | | | |
|--------|--|----------------|----------------|----------------|---------------------------------|---------------------------------|---------------------------------|---------------------------------|---------|
| $I' =$ | <table style="border-collapse: collapse; text-align: center;"> <tr> <td style="padding: 5px;">1'</td> <td style="padding: 5px;">I¹</td> <td style="padding: 5px;">I²</td> <td style="padding: 5px;">I⁴</td> <td style="padding: 5px;">I^b</td> <td style="padding: 5px;">I⁵ + I^a</td> <td style="padding: 5px;">I³ + I^d</td> </tr> </table> | 1' | I ¹ | I ² | I ⁴ | I ^b | I ⁵ + I ^a | I ³ + I ^d | (14.60) |
| 1' | I ¹ | I ² | I ⁴ | I ^b | I ⁵ + I ^a | I ³ + I ^d | | | |

IV. Если составляющие системы выражены вдоль осей, по которым происходит соединение (как в настоящем примере), то можно обойтись без установления C_t^{-1} , а результирующий Y' может быть найден как $Y_1 + Y_2$ при условии, что оси, по которым происходит взаимосвязь, обозначены одними и теми же фиксированными индексами как в Y_1 , так и в Y_2 .

ственной формы теоремы Тевенина¹⁾. Разность потенциалов на исключенных узловых парах

$$E_2' = -(\mathbf{Y}^4)^{-1} \mathbf{Y}^3 E_1. \quad (14.65)$$

IV. Всякий раз, когда используются формулы редукции, чтобы из системы уравнений $\mathbf{I} = \mathbf{Y}\mathbf{E}$ исключить несколько ковариантных переменных E_n за один шаг, исключение переменных физически эквивалентно исключению нескольких узловых пар при помощи преобразований типа контур-звезда. Исключение возможно даже при наличии взаимных адмиттансов между всеми узловыми парами и наличии приложенных к исключаемым узловым парам токов.

V. Адмиттанс сети между любыми двумя (или более) точками можно найти, если предположить, что эти две точки — одна из узловых пар, затем получить $\mathbf{I} = \mathbf{Y}\mathbf{E}$ и, наконец, исключить все оси, кроме необходимых.

¹⁾ Теорема взаимности. (Прим. пер.)

ЦЕПИ С МНОГОЭЛЕКТРОДНЫМИ ЛАМПАМИ

1. НЕЛИНЕЙНЫЕ СИСТЕМЫ

До сих пор при рассмотрении различных сетей предполагалось, что существует *линейная* зависимость величины «отклика» от величины «воздействия», т. е. уравнение *поведения* имеет вид $e=zi$ или $I=YE$, где коэффициент пропорциональности z или Y не является функцией от i или E .

Однако в общем случае соотношение между величинами воздействия и отклика является *нелинейным*. Например, оно может иметь вид $e=zi+wi^2$ для каждой катушки, так что линейное соотношение $e=zi$ для всей сети использовать нельзя и *уравнение поведения, рассматривавшееся ранее, следует обобщить*.

Если изменения электромагнитных величин в нелинейных системах достаточно малы, то соотношение между величинами воздействия и отклика (когда изменения малы) — линейное и уравнение поведения остается в силе. Такие случаи часто встречаются, например, в цепях на многоэлектродных лампах, когда они работают в усилительном или генераторном режиме, а напряжения и токи изменяются в небольших пределах.

2. ЭЛЕКТРОДНАЯ ЛАМПА

I. n -электродную лампу можно рассматривать как чисто-контурную или как чисто-узловую сеть. Соединенные с нею цепи могут быть контурными, узловыми или ортогональными. *В большинстве практических приложений ламповые цепи содержат меньше узловых пар, чем контуров, поэтому детально здесь будет представлен только узловой метод анализа.*

II. Если рассматривать лампу как чисто-узловую сеть, то она имеет n узлов, считая каждый электрод за узел (рис. 15.1). Катод действует как общий узел, от которого ответвляются остальные электроды, так что каждая «катушка» чисто-узловой сети — это путь электронов между катодом и остальными электродами. Катод служит источником электронов.

Один из электродов служит анодом, а все остальные — сетками. Но с аналитической точки зрения нет никакого различия между анодом и сетками, все они рассматриваются как узлы. Ток

накала не фигурирует в сети, так как его значение в анализе не играет никакой роли. Катод рассматривается только как вывод в общей узловой точке.

III. Чисто-узловая сеть имеет $n-1$ узловую пару (число узлов минус число подсетей). Два узла каждого из $n-1$ путей электронов («катушек») будем рассматривать как узловую пару, так что I представляет собой мгновенное значение тока, протекающего от катода к различным электродам, а E — мгновенную разность потенциалов между различными электродами и катодом.

IV. Если к одной узловой паре (к электродам) приложено постоянное напряжение E_a , то во всех узловых парах возникают постоянные токи I^a, I^b, I^c, \dots . Когда E_a изменяется, токи I^a, I^b, I^c, \dots также изменяются, но непропорционально. Их изменение зависит от значений напряжений E_b, E_c, \dots на других электродах или на самой лампе. Зависимости типа $I^a = f^a(E_a)$, $I^b = f^b(E_b)$ и другие называются «статическими характеристиками» лампы.

Для каждого электрода можно получить n таких зависимостей при каждом заданном значении тока катода и при каждом заданном значении постоянных напряжений на других электродах. Далее будем предполагать, что все эти зависимости $I = f(E)$ известны.

V. В дальнейшем в качестве примера n -электродной лампы будем рассматривать уравнения пятиэлектродной лампы (пентода).



Рис. 15.1.
а — пентод; б — эквивалентная узловая сеть.

3. УРАВНЕНИЕ ЛАМПЫ

I. Пусть к четырем узловым парам приложены четыре постоянных напряжения

$$E_u = \begin{bmatrix} a & b & c & p \\ E_a & E_b & E_c & E_p \end{bmatrix}. \quad (15.1)$$

Тогда через узловые пары будут протекать четыре постоянных тока

$$I^u = \begin{bmatrix} a & b & c & p \\ I^a & I^b & I^c & I^p \end{bmatrix}. \quad (15.2)$$

Предположим теперь, что одно из напряжений на зажимах лампы, скажем E_a , изменяется на малую величину от E_a до $E_a + \Delta E_a$. Тогда все четыре тока также изменятся. Один из токов, например I^a изменится от I^a до $I^a + \Delta I^a$. Если пренебречь

кривизной кривой $I^a=f(E_a)$ в окрестности данных значений E_a и I^a , то ΔI^a по данному ΔE_a можно найти по формуле

$$\Delta I^a = \frac{\partial I^a}{\partial E_a} \Delta E_a, \quad (15.3)$$

где $\partial I^a/\partial E_a$ — наклон кривой $I^a=f(E_a)$ при данных значениях I^a и E_a . Этот наклон предполагается известным (рис. 15.2).

Аналогично при изменении E_a остальные токи изменяются в соответствии с величинами наклона кривых в зависимости от ΔE_a и наклона частной кривой $I^a=f(E_a)$. Величины этих изменений:

$$\Delta I^b = \frac{\partial I^b}{\partial E_a} \Delta E_a, \quad \Delta I^c = \frac{\partial I^c}{\partial E_a} \Delta E_a, \quad \Delta I^p = \frac{\partial I^p}{\partial E_a} \Delta E_a.$$

II. Если изменяются все четыре напряжения, то изменение I^a равно

$$\Delta I^a = \frac{\partial I^a}{\partial E_a} \Delta E_a + \frac{\partial I^a}{\partial E_b} \Delta E_b + \frac{\partial I^a}{\partial E_c} \Delta E_c + \frac{\partial I^a}{\partial E_p} \Delta E_p,$$

поскольку каждое малое ΔE вызывает соответствующее изменение ΔI , которое не зависит от других малых изменений напряжения.

III. Аналогичные уравнения характерны для остальных токов, так что можно записать следующие четыре уравнения, показывающие изменения токов в зависимости от изменения напряжения:

$$\begin{aligned} \Delta I^a &= \frac{\partial I^a}{\partial E_a} \Delta E_a + \frac{\partial I^a}{\partial E_b} \Delta E_b + \frac{\partial I^a}{\partial E_c} \Delta E_c + \frac{\partial I^a}{\partial E_p} \Delta E_p, \\ \Delta I^b &= \frac{\partial I^b}{\partial E_a} \Delta E_a + \frac{\partial I^b}{\partial E_b} \Delta E_b + \frac{\partial I^b}{\partial E_c} \Delta E_c + \frac{\partial I^b}{\partial E_p} \Delta E_p, \end{aligned} \quad (15.4)$$

$$\Delta I^c = \frac{\partial I^c}{\partial E_a} \Delta E_a + \frac{\partial I^c}{\partial E_b} \Delta E_b + \frac{\partial I^c}{\partial E_c} \Delta E_c + \frac{\partial I^c}{\partial E_p} \Delta E_p,$$

$$\Delta I^p = \frac{\partial I^p}{\partial E_a} \Delta E_a + \frac{\partial I^p}{\partial E_b} \Delta E_b + \frac{\partial I^p}{\partial E_c} \Delta E_c + \frac{\partial I^p}{\partial E_p} \Delta E_p.$$

4. «БАЗОВЫЕ» И «ПРОИЗВОДНЫЕ» ТЕНЗОРЫ

I. Появление производных в приведенных выше фундаментальных уравнениях лампы требует более подробного обсуждения дифференцирования геометрических объектов.

Все рассмотренные ранее геометрические объекты e, i, z и I, E, Y были введены *по определению*. Это значит, что они не были *произведены* из других геометрических объектов, но, на-

оборот, сами образуют минимальное число базовых геометрических объектов, необходимых для определения электромагнитных явлений, возникающих в линейных сетях.

Когда определили минимальное количество базовых геометрических объектов в физических системах, используя различные приемы, можно получить множество других геометрических объектов, называемых «производными геометрическими объектами». Одной из целей тензорного анализа является нахождение формальных процедур, с помощью которых можно получить «производные тензоры», пользуясь данными «базовыми тензорами».

II. Для физических систем, матрицы преобразования C которых содержат только константы, одним из путей нахождения новых тензоров является дифференцирование различных базовых тензоров по переменным, если они являются функциями этих переменных.

Следует подчеркнуть, что если компоненты тензора преобразования C не являются константами, то метод обычного дифференцирования не дает новых тензоров.

(В таких случаях тензорный анализ предусматривает новый вид дифференцирования, называемый «абсолютным дифференцированием», или «ковариантным дифференцированием», который приводит к образованию новых производных тензоров из заданных базовых тензоров. Поскольку в этой книге все тензоры преобразования C имеют постоянные компоненты, нет нужды вводить абсолютное дифференцирование.)

Базовыми тензорами, которые были введены в линейных ламповых сетях, являются E и I (в уравнениях (15.1) и (15.2)), где $E = E_u$ — ковариантная переменная. Поскольку I является функцией E , новые тензоры можно получить последовательным дифференцированием I по E .

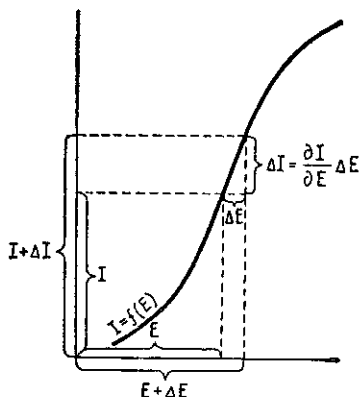


Рис. 15.2. Кривая статической характеристики.

5. КОНСТРУИРОВАНИЕ НОВЫХ ТЕНЗОРОВ ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕМ

Повторя сказанное в гл. 1, § 17, можно сформулировать следующие положения:

1. Производную от n -тензора по вектору находят дифференцированием каждой его компоненты по каждой компоненте вектора.

Например, если 2-тензор имеет n^2 компонент и каждая из них по очереди дифференцируется по каждой из n компонент векто-

ра (предполагается, что вектор имеет n компонент), то получаем тензор с n^3 компонентами.

2. Если тензор валентности n дифференцируется по вектору, то валентность результата равна $n+1$.

3. Если вектор, по которому дифференцируется тензор, является ковариантным, т. е. имеет нижний индекс, то результирующий объект ¹⁾ будет иметь один дополнительный контравариантный (верхний) индекс и наоборот. Например,

$$\partial Y^{uv} / \partial E_w = M^{uvw}. \quad (15.5)$$

Это положение можно доказать так. Продифференцируем вектор E_u по I^v . Если u, v, w являются индексами старых осей, а индексы u', v', w' представляют новые оси, то

$$\frac{\partial E_u}{\partial I^v} = \frac{\partial E_u}{\partial I^{v'}} \frac{\partial I^{v'}}{\partial I^v}.$$

Однако по (6.12)

$$\partial I^{v'} / \partial I^v = C_v^{v'}, \quad (15.6)$$

откуда

$$\frac{\partial E_u}{\partial I^v} = \frac{\partial E_u}{\partial I^{v'}} C_v^{v'} = Z_{uv'} C_v^{v'} = Z_{uv}. \quad (15.7)$$

Следовательно, новый тензор, полученный из E_u дифференцированием по I^v , имеет $1+1=2$ индекса. При этом одним ковариантным индексом является u (тот же индекс, что и у исходного вектора), а вторым (нижним) является v .

Дополнительно можно сформулировать также следующее положение.

4. Если тензор дифференцируется по вектору, то результат в общем случае не является тензором.

Продифференцируем, например, тензор E_u . То, что E_u — тензор, выражается его формулой преобразования:

$$E_u = E_{u'} C_u^{u'}. \quad (15.8)$$

Дифференцируем обе части этого равенства по I^v :

$$\frac{\partial E_u}{\partial I^v} = \frac{\partial E_{u'}}{\partial I^v} C_u^{u'} + E_{u'} \frac{\partial C_u^{u'}}{\partial I^v}, \quad (15.9)$$

поскольку произведение геометрических объектов дифференцируется посредством дифференцирования каждого геометрического объекта в отдельности.

$$\frac{\partial E_u}{\partial I^v} = \frac{\partial E_{u'}}{\partial I^{v'}} \frac{\partial I^{v'}}{\partial I^v} C_u^{u'} + E_{u'} \frac{\partial C_u^{u'}}{\partial I^v}.$$

¹⁾ Вообще говоря, не являющийся тензором (см. ниже). (Прим. пер.).

Используя (15.6), получаем

$$\frac{\partial E_u}{\partial I^v} = \frac{\partial E_{u'}}{\partial I^{v'}} C_{v'}^{v'} C_u^{u'} + E_{u'} \frac{\partial C_u^{u'}}{\partial I^v}$$

и из (15.7)

$$Z_{uv} = Z_{u'v'} C_{v'}^{v'} C_u^{u'} + E_{u'} \frac{\partial C_u^{u'}}{\partial I^v}. \quad (15.10)$$

Следовательно, формула преобразования $\partial E_u / \partial I^v = Z_{uv}$ отлична от формулы преобразования тензора валентности два, так как она содержит дополнительный член.

Для дальнейшего сформулируем следующие правила.

5. Если преобразования линейны, т. е. тензор преобразования имеет постоянные компоненты, производные от всех тензоров являются тензорами, поскольку все дополнительные члены в их формулах преобразования содержат $\partial C_u^{u'} / \partial I^v$, которые обращаются в нуль.

Последние два положения справедливы не только для производных тензора, но и для дифференциалов тензора. Например, дифференциал вектора (1-тензора) (гл. 7, § 10, I), вообще говоря, не является тензором, так что

$$\Delta I^u = \Delta I^{u'} C_{u'}^u + \frac{\partial C_{u'}^u}{\partial I^{v'}} I^{u'} \Delta I^{v'}. \quad (15.11)$$

Поскольку в данном случае последний член исчезает, так как $\partial C_{u'}^u / \partial I^{v'} = 0$, то ΔI^u преобразуется здесь как контравариантный тензор валентности один.

6. ТЕНЗОР АДМИТТАНСА

I. Преобразования, которые будут рассмотрены, имеют только постоянные компоненты, благодаря чему различные ΔI в четырех линейных уравнениях (15.4) можно рассматривать как компоненты контравариантного вектора $\Delta \mathbf{I} = \Delta I^u$:

$$\Delta I^u = \begin{bmatrix} u & a & b & c & p \\ \Delta I^a & \Delta I^b & \Delta I^c & \Delta I^p \end{bmatrix}. \quad (15.12)$$

Различные ΔE можно рассматривать как компоненты ковариантного вектора $\Delta \mathbf{E} = \Delta E_u$, так что

$$\Delta E_u = \begin{bmatrix} u & a & b & c & p \\ \Delta E_a & \Delta E_b & \Delta E_c & \Delta E_p \end{bmatrix}. \quad (15.13)$$

Коэффициенты при E_u образуют дважды контравариантный тензор $\mathbf{Y} = Y^{uv}$, называемый «тензором адмиттанса», поскольку они являются производными от вектора I^u по вектору E_v :

$$Y^{uv} = \begin{array}{c|cccc} v & a & b & c & p \\ \hline u & a & \frac{\partial I^a}{\partial E_a} & \frac{\partial I^a}{\partial E_b} & \frac{\partial I^a}{\partial E_c} & \frac{\partial I^a}{\partial E_p} \\ & b & \frac{\partial I^b}{\partial E_a} & \frac{\partial I^b}{\partial E_b} & \frac{\partial I^b}{\partial E_c} & \frac{\partial I^b}{\partial E_p} \\ & c & \frac{\partial I^c}{\partial E_a} & \frac{\partial I^c}{\partial E_b} & \frac{\partial I^c}{\partial E_c} & \frac{\partial I^c}{\partial E_p} \\ & p & \frac{\partial I^p}{\partial E_a} & \frac{\partial I^p}{\partial E_b} & \frac{\partial I^p}{\partial E_c} & \frac{\partial I^p}{\partial E_p} \end{array}, \quad (15.14)$$

и теперь уравнение (15.4) можно записать в индексных обозначениях

$$\Delta I^u = Y^{uv} \Delta E_v. \quad (15.15)$$

II. Y^{uv} можно записать в виде

$$Y^{uv} = \partial I^u / \partial E_v, \quad (15.16)$$

так что уравнение (15.15) принимает вид

$$\Delta I^u = \frac{\partial I^u}{\partial E_v} \Delta E_v. \quad (15.17)$$

Это тензорное уравнение представляет собой n линейных уравнений (15.4) с n переменными и по своей форме подобно простому уравнению (15.3) с одной неизвестной.

III. Каждый член тензора адмиттанса представляет крутизну кривой $I = f(E)$ в заданной точке и является действительным числом (не комплексным). Эти константы называются собственными и взаимными проводимостями различных катушек (отражением (reflex) и крутизной характеристик (transconductances) соответственно) и обозначаются G^{mn} . Тензор адмиттанса записывается через проводимости (кондуктансы) как

$$Y^{uv} = \begin{array}{c|cccc} v & a & b & c & p \\ \hline u & a & G^{aa} & G^{ab} & G^{ac} & G^{ap} \\ & b & G^{ba} & G^{bb} & G^{bc} & G^{bp} \\ & c & G^{ca} & G^{cb} & G^{cc} & G^{cp} \\ & p & G^{pa} & G^{pb} & G^{pc} & G^{pp} \end{array}. \quad (15.18)$$

Многие компоненты могут, разумеется, иметь нулевые значения.

IV. Удобно определить величину, обратную собственной проводимости, как сопротивление, т. е. $G^{mm} = 1/r_{mm}$. Отношение взаимной проводимости к собственной определяется как коэффициент усиления

$$\mu_a^b = \frac{G^{ab}}{G^{aa}} = \frac{\partial I^a / \partial E_b}{\partial I^a / \partial E_a} = - \frac{dE_a}{dE_b} \quad (15.19)$$

и

$$\mu_b^a = \frac{G^{ba}}{G^{bb}} = - \frac{dE_b}{dE_a}, \quad (15.20)$$

так что

$$G^{ba} = \mu_b^a / r_{bb}. \quad (15.21)$$

Следовательно, в терминах коэффициентов усиления и сопротивления тензор адмиттанса пентода есть

$$y^{uv} = \begin{array}{c|cccc} v & a & b & c & p \\ \hline u & a & 1/r_{aa} & \mu_a^b/r_{ab} & \mu_a^c/r_{aa} & \mu_a^p/r_{aa} \\ & b & \mu_b^a/r_{bb} & 1/r_{bb} & \mu_b^c/r_{bb} & \mu_b^p/r_{bb} \\ & c & \mu_c^a/r_{cc} & \mu_c^b/r_{cc} & 1/r_{cc} & \mu_c^p/r_{cc} \\ & p & \mu_p^a/r_{pp} & \mu_p^b/r_{pp} & \mu_p^c/r_{pp} & 1/r_{pp} \end{array}. \quad (15.22)$$

Тензор адмиттанса тетрада можно получить, опустив одну строку и столбец. В общепринятых обозначениях

$$y^{uv} = \begin{array}{c|ccc} v & a & b & p \\ \hline u & a & 1/r_a & \eta_a/r_a & \nu_a/r_a \\ & b & \eta_b/r_b & 1/r_b & \nu_b/r_b \\ & p & \mu_a/r_p & \mu_b/r_p & 1/r_p \end{array} = \begin{array}{c|ccc} v & a & b & p \\ \hline u & a & G^{aa} & G^{ab} & G^{ap} \\ & b & G^{ba} & G^{bb} & G^{bp} \\ & p & G^{pa} & G^{pb} & G^{pp} \end{array}, \quad (15.23)$$

где μ — анодный коэффициент усиления; ν — коэффициент усиления по сетке; η — коэффициент взаимного усиления. Тензор адмиттанса триада можно получить, опустив строки и столбцы b и c :

$$y^{uv} = \begin{array}{c|cc} v & g & p \\ \hline u & g & 1/r_g & \mu_g/r_g \\ & p & \mu_p/r_p & 1/r_p \end{array} = \begin{array}{c|cc} v & g & p \\ \hline u & g & G^{gg} & G^{gp} \\ & p & G^{pg} & G^{pp} \end{array}. \quad (15.24)$$

Если многоэлектродная лампа работает в режиме усиления или генерации, она, как правило, рассматривается как триод. Дополнительным сеткам как бы отводится роль регуляторов проводимости триода до нужных значений.

V. Если сеточный ток триода равен нулю, т. е. r_g — бесконечная величина, то тензор адмиттанса такого триода

$$Y^{uv} = \begin{array}{c|cc} v & g & p \\ \hline u & g & 0 \\ \hline p & \mu_p/r_p & 1/r_p \end{array} = \begin{array}{c|cc} v & g & p \\ \hline u & g & 0 \\ \hline p & G^p g & G^p p \end{array}. \quad (15.25)$$

Тензор адмиттанса *тетрода* в отсутствие сеточного тока имеет вид

$$Y^{uv} = \begin{array}{c|ccc} v & a & b & p \\ \hline u & a & 0 & 0 \\ \hline b & 0 & 0 & 0 \\ \hline p & \mu_a/r_p & \mu_b/r_p & 1/r_p \end{array} = \begin{array}{c|ccc} v & a & b & p \\ \hline u & a & 0 & 0 \\ \hline b & 0 & 0 & 0 \\ \hline p & G^p a & G^p b & G^p p \end{array}. \quad (15.26)$$

7. МНОГОЭЛЕКТРОДНЫЕ ЛАМПЫ И МНОГООБОМОТЧНЫЕ ТРАНСФОРМАТОРЫ

Так как тензор адмиттанса Y несимметричен, n -электродная лампа представляется $n-1$ катушкой с односторонней проводимостью (кондуктансом) между ними. Катушки соединяются в общем узле, соответствующем катоду (рис. 15.3, а).

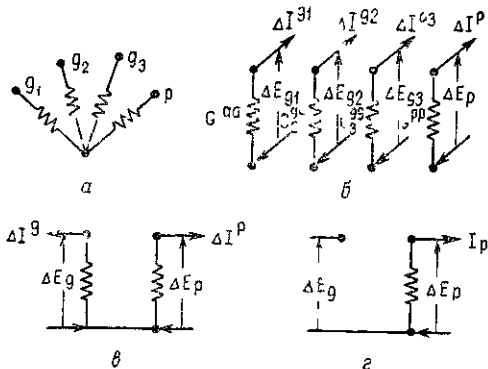


Рис. 15.3.
а — реальная лампа, б — примитивная сеть лампы,
в — триод, г — триод без сеточного тока.

На рис. 15.3, в показан триод с катушкой сетки, а на рис. 15.3, г — без катушки сетки. *Интересно заметить, что изолированная узловная пара образует часть сетки.*

Представление n -электродной лампы в виде узловой сети с $n-1$ катушками с взаимными проводимостями между ними подобно представлению n -обмоточного трансформатора в виде контурной сети с n катушками и взаимными индуктивностями. Однако имеются различия в аналитической форме их представления. Например:

1. В многообмоточном трансформаторе как тензор импеданса, так и тензор адмиттанса являются симметричными, т. е. столбцы и строки взаимозаменяемы. В лампе с нагретым катодом взаимные проводимости различны в различных направлениях. Другими словами, G^{ab} отличается от G^{ba} и влияние изменения анодного напряжения на сеточный ток отличается от влияния такого же изменения сеточного напряжения на анодный ток.

2. В трансформаторах, в условиях стационарного режима работы, каждый компонент тензора является или действительным, или комплексным числом. В лампах каждый компонент тензора является действительным числом, характеризующим проводимость. (Следует упомянуть, что в высокочастотных лампах, где приходится учитывать время пролета электронов в межэлектродном пространстве, действительные числа в тензоре адмиттанса также уступают место комплексным числам.)

3. В трансформаторах z - и y -тензоры одинаково применимы в широкой области изменения входных и выходных напряжений, в то время как в лампах и других нелинейных системах они применяются лишь в области малых изменений напряжений и токов.

8. ЭКВИВАЛЕНТНЫЕ УЗЛОВЫЕ СЕТИ ДЛЯ ЛАМП

1. Уравнение тока для триода $\Delta I = Y \Delta E$, пользуясь (15.25), можно записать так:

$$\Delta I_g = \frac{1}{r_g} \Delta E_g + \frac{\mu_g}{r_g} \Delta E_p = G^{gg} \Delta E_g + G^{gp} \Delta E_p, \quad (15.27)$$

$$\Delta I_p = \frac{\mu_p}{r_p} \Delta E_g + \frac{1}{r_p} \Delta E_p = G^{pg} \Delta E_g + G^{pp} \Delta E_p.$$

Таким образом, мы видим, что сеточный ток протекает не только при появлении потенциала на сетке, но и при появлении анодного потенциала ΔE_p (и наоборот), так как между ними существуют взаимные проводимости.

II. Вместо представления сети и анода с помощью двух катушек с асимметричными взаимными адмиттансами μ_g/r_g и μ_p/r_p и собственными адмиттансами $1/r_g$ и $1/r_p$ стало обычным

представлять эти катушки без взаимных адмиттансов. Роль асимметричных взаимных адмиттансов выполняют два генератора тока, подающие на сетку ток $(\mu_g/r_g)\Delta E_p$ и на анод $(\mu_p/r_p)\Delta E_g$, как следует из уравнений и как показано на рис. 15.4, б.

В терминологии узловых сетей *однаправленные взаимные адмиттансы между двумя узловыми парами заменяются токами, воздействующими (impressed) на две узловые пары* (рис. 15.4, в). Конечно, одновременно к этим же узловым парам приложены также ΔE_g и ΔE_p соответственно.

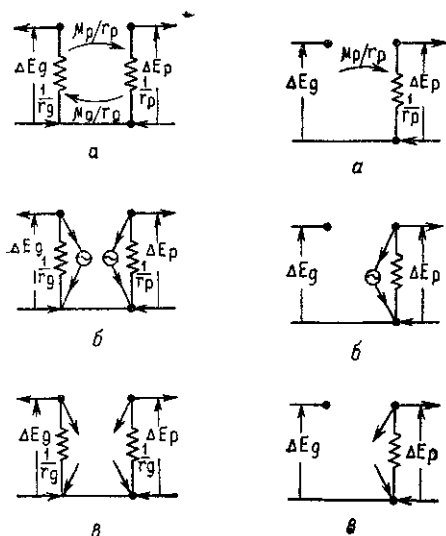


Рис. 15.4:
 а — триод с сеточным током; б — взаимные проводимости как генераторы тока; в — взаимная проводимость как приложенный ток.

Рис. 15.5:
 а — триод без сеточного тока; б — взаимные проводимости как генераторы тока; в — взаимная проводимость как приложенный ток.

В *n*-электродной лампе взаимные адмиттансы между *n* — 1 катушками (см. рис. 15.3, а) можно заменить на *n* — 2 различных множеств токов через каждую катушку.

III. Если сеточное сопротивление r_g бесконечно, то сеточный ток отсутствует, $\Delta I_g = 0$ и эквивалентная узловая сеть *триода* приобретает вид, показанный на рис. 15.5.

9. ВЗАИМОСОЕДИНЕНИЕ ЛАМП В СЕТИ

I. Если сеть в качестве элементов содержит лампы, то *каждую лампу можно представить двумя (или более) дополнительными катушками, имеющими какие-либо собственные и взаимные адмиттансы, по уравнениям (15.22) — (15.26)*. Это означает, что примитивная узловая сеть должна содержать все катушки внешней сети и по две (или более) катушки на каждую лампу. Тензор преобразования устанавливается точно так же, как это делалось для узловых сетей в предыдущих главах, и точно так же проводится весь анализ полной сети.

II. Иногда весьма удобно сначала разделить полную систему на две подсистемы: одну — содержащую только лампы, другую — представляющую неподвижную сеть, провести анализ отдельно и уже затем объединить их в исходную сеть по уравнению (14.59). Это значит, что если тензор адмиттанса лампы (или ламп) есть Y_2 ,

а статической сети (или сетей) Y_1 и две подсистемы взаимосоединяются с помощью $C_t^{-1} = A$, то тензор адмиттанса результирующей сети есть

$$Y' = A_t(Y_1 + Y_2)A. \quad (15.28)$$

Они взаимосоединяются при размещении узловых пар параллельно друг другу.

Неподвижную сеть можно разделить на части и затем объединить снова в единое целое. Например, обратную связь между сеткой и анодом можно проанализировать отдельно, поскольку анализ оставшейся части неподвижной сети обычно весьма прост. Аналогично ламповую сеть можно разделить на несколько частей в зависимости от способа их взаимодействия. В неподвижных сетях множество катушек можно заменить простой эквивалентной катушкой.

III. Так как каждая узловая пара лампы соединена с соответствующей узловой парой внешней сети, действие тензора преобразования C_t^{-1} сводится к простой замене осей лампы g_1 и p_2 и осей сети g и p на g и p . Это изменение эквивалентно простому суммированию тензоров Y_1 и Y_2 .

Значит, если узловые пары сети включают сеточную и анодную оси, то результирующий Y' находят как $Y_1 + Y_2$ без выполнения процесса преобразования. Другими словами, действие преобразования сводится к тому, что оси g и p утрачивают свои индексы.

IV. После того как результирующий Y' , а следовательно, и уравнение $I' = Y'E'$ получены, уравнение можно подвергнуть всем типам преобразований, некоторые из которых будут позднее показаны в гл. 21.

Во многих задачах приложенный ток I' известен лишь для одной узловой пары, а разность потенциалов E' необходимо найти для другой узловой пары. В таких случаях все ненужные строки и столбцы Y' следует исключить по формулам редукции (гл. 10) и оставить лишь два столбца и две строки по направлению входной и выходной осей. (Одновременное исключение одной строки и одного столбца эквивалентно обычному упрощению сети путем преобразования контур-звезда.)

В результате получим два уравнения

$$\begin{aligned} \Delta I^a &= Y^{aa} \Delta E_a + Y^{ab} \Delta E_b, \\ 0 &= Y^{ba} \Delta E_a + Y^{bb} \Delta E_b, \end{aligned} \quad (15.29)$$

где ΔI^a известно, а ΔE_b неизвестно.

Исключая ΔE_a из второго уравнения, получаем

$$\begin{aligned} \Delta E_a &= -(Y^{ba})^{-1} Y^{bb} \Delta E_b, \\ \Delta I^a &= [(Y^{ab} Y^{ba} - Y^{aa} Y^{bb}) / Y^{ba}] \Delta E_b. \end{aligned}$$

Следовательно, входное напряжение через входной ток запишем как

$$\Delta E_b = [Y^{ba} / (Y^{ab}Y^{ba} - Y^{aa}Y^{bb})] \Delta I_a. \quad (15.30)$$

В других задачах требуется найти отношение выходного напряжения к входному. В этом случае из второго уравнения (15.29) имеем

$$\frac{\Delta E_b}{\Delta E_a} = - \frac{Y^{ba}}{Y^{bb}}. \quad (15.31)$$

10. УСИЛИТЕЛЬ ПРОМЕЖУТОЧНОЙ ЧАСТОТЫ

I. Проанализируем сеть (рис. 15.6, а), представляющую собой один каскад усилителя промежуточной частоты приемника, в которой нужно определить эффект влияния сеточно-анодно-емкостной обратной связи Y^5 .

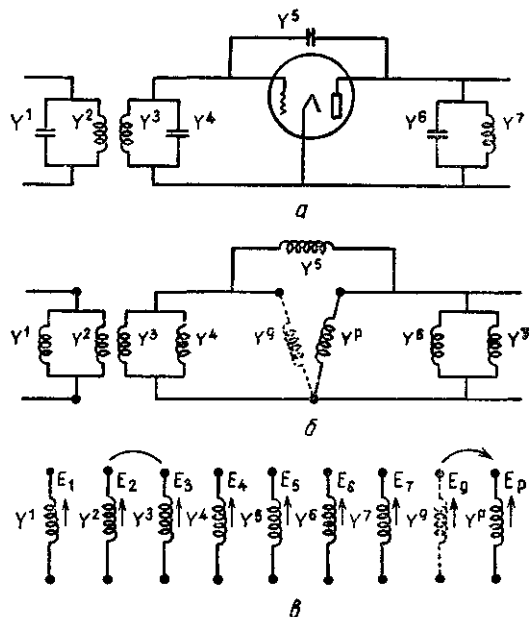


Рис. 15.6. Усилитель промежуточной частоты:

а — заданная сеть; б — катушки и узлы сети; в — соответствующая примитивная сеть.

Если лампу заменить двумя катушками, то получится результирующая узловая сеть из девяти катушек (рис. 15.6, б). В ней имеется пять узлов и две подсети, а также соответственно $5-2=3$ узловые пары и $9-3=6$ контуров. Следовательно, удобнее анализировать эту сеть как узловую.

II. Чтобы найти тензор адмиттанса Y примитивной сети, необходимо найти адмиттансы катушек. Однако обычно известны лишь их импедансы

| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|-------|----------|----------|-------|-------|-------|-------|
| 1 | Z_1 | | | | | | |
| 2 | | Z_2 | Z_{23} | | | | |
| 3 | | Z_{23} | Z_3 | | | | |
| 4 | | | | Z_4 | | | |
| 5 | | | | | Z_5 | | |
| 6 | | | | | | Z_6 | |
| 7 | | | | | | | Z_7 |

Тензор адмиттанса можно найти, вычислив тензор, обратный Z , имеющий диагональную форму. Поэтому его можно рассматривать как диагональную компаунд-матрицу, в которой каждая составляющая матрица имеет единственную компоненту, кроме одной матрицы, имеющей четыре компоненты, представляющие трансформатор из катушек 2 и 3. Обратная диагональной компаунд-матрицы находится вычислением обратных матриц отдельно для каждой диагональной компаунд-компоненты (уравнение (10.46)). Следовательно, тензор адмиттанса внешней сети равен

| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---------|-------------|-------------|---------|---------|---------|---------|
| 1 | $1/Z_1$ | | | | | | |
| 2 | | Z_3/D | $-Z_{23}/D$ | | | | |
| 3 | | $-Z_{23}/D$ | Z_2/D | | | | |
| 4 | | | | $1/Z_4$ | | | |
| 5 | | | | | $1/Z_5$ | | |
| 6 | | | | | | $1/Z_6$ | |
| 7 | | | | | | | $1/Z_7$ |

где $D = Z_2 Z_3 - (Z_{23})^2$.

Тензор адмиттанса примитивной сегги (рис. 15.6, в) имеет девять строк и столбцов:

$$Y = \begin{array}{c|cccccccc|cc} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & g & p \\ \hline 1 & Y^1 & & & & & & & & \\ 2 & & Y^2 & Y^{23} & & & & & & \\ 3 & & Y^{23} & Y^3 & & & & & & \\ 4 & & & & Y^4 & & & & & \\ 5 & & & & & Y^5 & & & & \\ 6 & & & & & & Y^6 & & & \\ 7 & & & & & & & Y^7 & & \\ g & & & & & & & & & \\ p & & & & & & & & G^p g & G^p p \end{array} \quad (15.32)$$

Следует заметить, что согласно уравнению (15.25) нулевые компоненты содержит лишь строка g , но не столбец.

Вектор приложенных токов

$$\Delta I = \begin{array}{c|cccccccc|cc} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & p & g \\ \hline \Delta I & & & & & & & & & \end{array}$$

III. Если предположить, что имеются три узловые пары, то они должны по возможности включать входные и выходные узлы, а также катушки катод — сетка — анод. Три выбранные узловые пары показаны на рис. 15.7, а; разности потенциалов на всех катушках показаны на рис. 15.7, б.

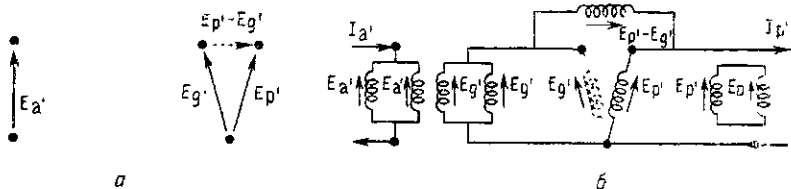


Рис. 15.7.

а — новые узловые пары; б — напряжения на отдельных катушках.

Тензор преобразования получается приравнованием старых и новых напряжений на каждой катушке (ΔE заменяется при этом на E):

| | a' | g' | p' | |
|--------------------------|----|----|----|---|
| $E_1 = E_{a'}$ | 1 | | | 1 |
| $E_2 = E_{a'}$ | 1 | | | 2 |
| $E_3 = E_{g'}$ | | 1 | | 3 |
| $E_4 = E_{g'}$ | | 1 | | 4 |
| $E_5 = -E_{g'} + E_{p'}$ | | -1 | 1 | 5 |
| $E_6 = E_{p'}$ | | | 1 | 6 |
| $E_7 = E_{p'}$ | | | 1 | 7 |
| $E_g = E_{g'}$ | | 1 | | g |
| $E_p = E_{p'}$ | | | 1 | p |

(15.33)

Коэффициенты при *новых* напряжениях дают обратный транспонированный тензор преобразования C_t^{-1} .

IV. Результирующий тензор адмиттанса сети находят из $A_t \cdot Y \cdot A$:

| | a' | g' | p' | |
|---------|-------------|-------------------|----------------------------|---------|
| a' | $Y_1 + Y_2$ | Y_{23} | 0 | (15.34) |
| Y' = g' | Y_{23} | $Y_3 + Y_4 + Y_5$ | $-Y_5$ | |
| p' | | $-Y_5 + G_{pg}$ | $Y_5 + Y_6 + Y_7 + G_{pp}$ | |

Вектор приложенных токов находят из $C^{-1}\Delta I = A_t \Delta I$:

$$\Delta I' = \begin{bmatrix} a' & g' & p' \\ \Delta I^a & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (15.35)$$

Разности потенциалов (ковариантные переменные) равны

$$\Delta E' = \begin{bmatrix} a' & g' & p' \\ \Delta E'_a & \Delta E'_g & \Delta E'_p \end{bmatrix}, \quad (15.36)$$

и уравнение токов принимает вид $\Delta I' = Y' \Delta E'$.

V. Если необходимо найти разность потенциалов на выходе $\Delta E_{p'}$, то оси g' несущественны и соответствующую строку и столбец можно исключить с помощью формулы редукции. Располагая ось g' в последней строке, имеем

| | a' | p' | g' |
|-----------|-------------|----------------------------|-------------------|
| a' | $Y^2 + Y^2$ | 0 | Y^{23} |
| $Y' = p'$ | 0 | $Y^5 + Y^6 + Y^7 + G^{pp}$ | $-Y^5 + G^{pg}$ |
| g' | Y^{23} | $-Y^5$ | $Y^3 + Y^4 + Y^5$ |

(15.37)

Исключим g' по формуле редукции адмиттанса:

$$Y^{1'} = Y^1 - Y^2 \cdot Y^{4-1} \cdot Y^3, \quad (15.38)$$

$$\begin{aligned}
 Y^{1'} &= Y^1 - \overrightarrow{\begin{array}{|c|} \hline Y^{23} \\ \hline -Y^5 + G^{pg} \\ \hline \end{array}} \cdot \boxed{1/(Y^3 + Y^4 + Y^5)} \cdot \begin{array}{|c|c|} \hline Y^{23} & -Y^5 \\ \hline \end{array} \downarrow \\
 &= Y^1 - \begin{array}{|c|c|} \hline \frac{Y^{23} Y^{23}}{Y^3 + Y^4 + Y^5} & -\frac{Y^{23} Y^5}{Y^3 + Y^4 + Y^5} \\ \hline \frac{(-Y^5 + G^{pg}) Y^{23}}{Y^3 + Y^4 + Y^5} & -\frac{(-Y^5 + G^{pg}) Y^5}{Y^3 + Y^4 + Y^5} \\ \hline \end{array}, \quad (15.39)
 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{|c|c|} \hline a' & p' \\ \hline Y^1 + Y^2 - \frac{(Y^{23})^2}{Y^3 + Y^4 + Y^5} & \frac{Y^{23} Y^5}{Y^3 + Y^4 + Y^5} \\ \hline \frac{(Y^5 - G^{pg}) Y^{23}}{Y^3 + Y^4 + Y^5} & \frac{Y^5 + Y^6 + Y^7 + G^{pp} + (G^{pg} - Y^5) Y^5}{Y^3 + Y^4 + Y^5} \\ \hline p' & \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|} \hline a' & p' \\ \hline Y^{aa} & Y^{ap} \\ \hline Y^{pa} & Y^{pp} \\ \hline \end{array}.$$

Разность потенциалов ΔE_p^1 находят по формуле (15.30).

11. УСИЛИТЕЛЬ С ОБРАТНОЙ СВЯЗЬЮ

Рассмотрим сеть (рис. 15.8, а), которая состоит из 14 катушек и имеет 8 узлов, 3 подсети и, следовательно, $8-3=5$ узловых пар и $14-5=9$ контуров.

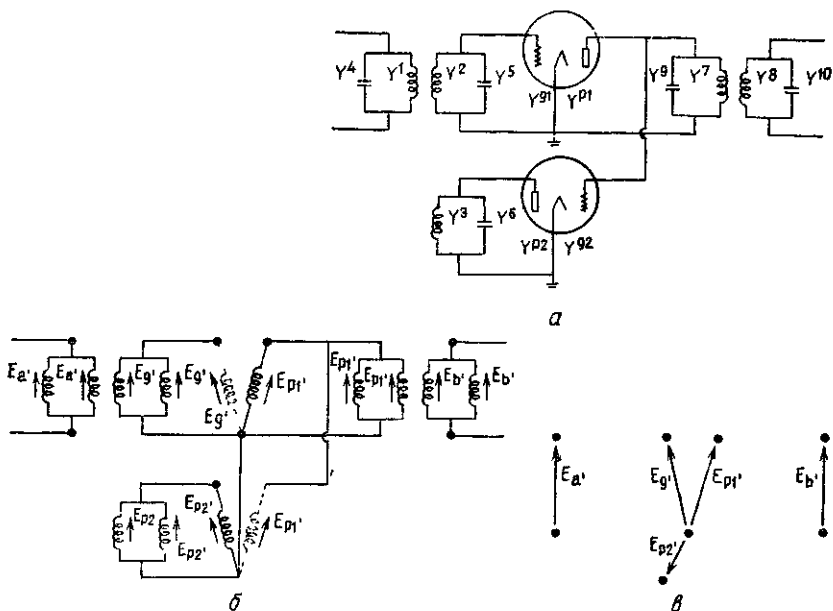


Рис. 15.8. Усилитель с обратной связью:
 а — заданная сеть; б — напряжение на отдельных катушках; в — выбранные узловые пары.

Тензор адмиттанса сети до соединения равен

| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | g_1 | p_1 | g_2 | p_2 |
|-------|----------|----------|----------|-------|-------|-------|----------|----------|-------|----------|---------|---------|---------|---------|
| 1 | Y_1 | Y_{12} | Y_{13} | | | | | | | | | | | |
| 2 | Y_{12} | Y_2 | Y_{23} | | | | | | | | | | | |
| 3 | Y_{12} | Y_{23} | Y_3 | | | | | | | | | | | |
| 4 | | | | Y_4 | | | | | | | | | | |
| 5 | | | | | Y_5 | | | | | | | | | |
| 6 | | | | | | Y_6 | | | | | | | | |
| 7 | | | | | | | Y_7 | Y_{78} | | | | | | |
| 8 | | | | | | | Y_{78} | Y_8 | | | | | | |
| 9 | | | | | | | | | Y_9 | | | | | |
| 10 | | | | | | | | | | Y_{10} | | | | |
| g_1 | | | | | | | | | | | GPE_1 | GPP_1 | | |
| p_1 | | | | | | | | | | | | | GPE_2 | GPP_2 |
| g_2 | | | | | | | | | | | | | | |
| p_2 | | | | | | | | | | | | | | |

$$(15.40)$$

Если ток $I^{a'}$ известен, а E_b необходимо определить, *исключают три строки и три столбца* (g', p_2', p_1') и получают уравнения, аналогичные (15.29).

12. ДВУХТАКТНЫЙ УСИЛИТЕЛЬ

В качестве иллюстрации раздельного анализа сети и лампы рассмотрим мощный радиочастотный усилитель (рис. 15.9, а), в котором внутренняя межсеточная емкостная связь скомпенсирована внешне приложенной емкостной связью.

Неподвижная компонента сети (рис. 15.9, б) имеет 14 катушек и семь узлов, а следовательно, шесть узловых пар и восемь контуров. Тензор адмиттанса до соединения имеет 14 строк и столбцов и содержит *лишь диагональные компоненты*.

Тензор преобразования этой сети (ΔE заменен на E) (по рис. 15.9, б, г) есть

| | g_1 | p_1 | g_2 | p_2 | a | b | |
|------------|-------|-------|-------|-------|-----|-----|--|
| $E_1 =$ | 1 | | -1 | | | | |
| $E_2 =$ | 1 | | -1 | | | | |
| $E_3 =$ | 1 | | | | | | |
| $E_4 =$ | | | 1 | | | | |
| $E_5 =$ | -1 | 1 | | | | | |
| $E_6 =$ | | 1 | -1 | | | | |
| $E_7 =$ | | | -1 | 1 | | | |
| $E_8 =$ | 1 | | | -1 | | | |
| $E_9 =$ | | 1 | | | | | |
| $E_{10} =$ | | | | 1 | | | |
| $E_{11} =$ | | 1 | -1 | | | | |
| $E_{12} =$ | | | | | 1 | | |
| $E_{13} =$ | | 1 | -1 | 1 | 1 | | |
| $E_{14} =$ | | | | | | 1 | |

$A =$

(15.43)

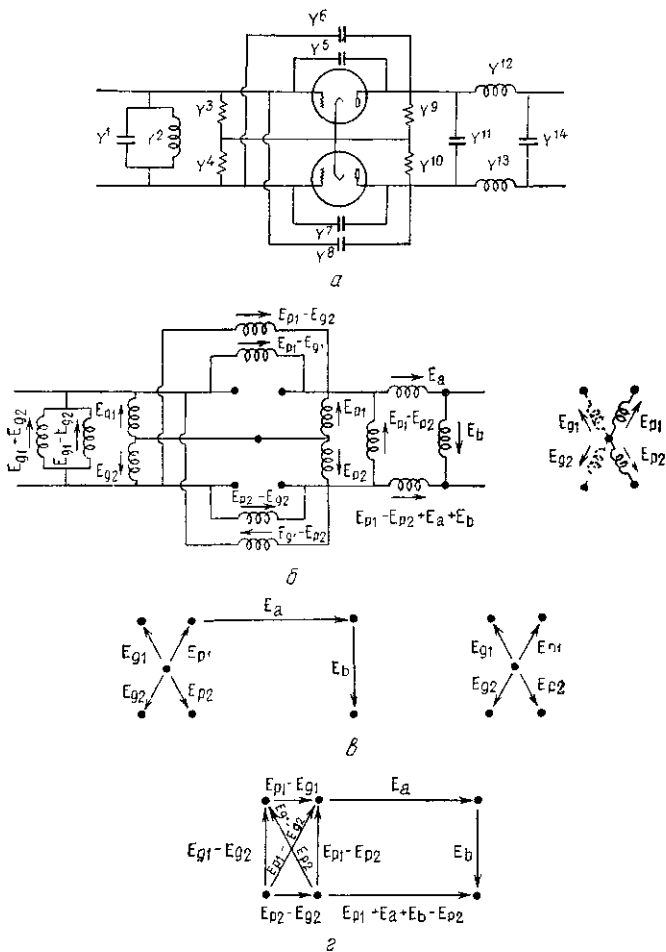


Рис. 15.9. Двухтактный усилитель:

a — заданная сеть; b — напряжения на отдельных катушках двух компонент сети; $в$ — штырьные узловые пары; $г$ — разности потенциалов.

Результирующий тензор адмиттанса получаем по $A_t Y_A$

| | g_1 | p_1 | g_2 | p_2 | a | b |
|-------------|-----------------------------|-----------------------------------|-----------------------------|--------------------------------------|-----------------|-----------------|
| g_1 | $Y_1+Y_2+Y_3$ $+Y_5+Y_8$ | $-Y_5$ | $-Y_1-Y_2$ | $-Y_8$ | 0 | 0 |
| p_1 | $-Y_5$ | $Y_5+Y_6+Y_9$ $+Y_{11}+Y_{13}$ | $-Y_6$ | $-Y_{11}-Y_{13}$ | Y_{13} | Y_{13} |
| $Y_1 = g_2$ | $-Y_1-Y_2$ | $-Y_6$ | $Y_1+Y_2+Y_4$ $+Y_6+Y_7$ | $-Y_7$ | 0 | 0 |
| p_2 | $-Y_8$ | $-Y_{11}-Y_{13}$ | $-Y_7$ | $Y_7+Y_8+Y_{10}$ $+Y_{11}+Y_{13}$ | $-Y_{13}$ | $-Y_{13}$ |
| a | 0 | Y_{13} | 0 | $-Y_{13}$ | $Y_{12}+Y_{13}$ | Y_{13} |
| b | 0 | Y_{13} | 0 | $-Y_{13}$ | Y_{13} | $Y_{13}+Y_{14}$ |

(15.44)

Тензор адмиттанса двух ламп на рис. 15.9, б есть

$$Y_2 = \begin{matrix} & g_1 & p_1 & g_2 & p_2 \\ p_1 & G^{pg1} & G^{pp1} & & \\ p_2 & & & G^{pg2} & G^{pp2} \end{matrix} \quad (15.45)$$

Следовательно, новые компоненты тензора адмиттанса результирующей сети $Y_1 + Y_2 = Y$:

| | g_1 | p_1 | g_2 | p_2 | a | b |
|------------|-----------------------------|---|-----------------------------|--|-----------------|-----------------|
| g_1 | $Y_1+Y_2+Y_3$ $+Y_5+Y_8$ | $-Y_5$ | $-Y_1-Y_2$ | $-Y_8$ | | |
| p_1 | $-Y_5+G^{pg1}$ | $Y_5+Y_6+Y_9$ $+Y_{11}+Y_{13}$ $+G^{pp1}$ | $-Y_6$ | $-Y_{11}-Y_{13}$ | Y_{13} | Y_{13} |
| $Y' = g_2$ | $-Y_1-Y_2$ | $-Y_6$ | $Y_1+Y_2+Y_4$ $+Y_6+Y_7$ | Y_7 | | |
| p_2 | $-Y_8$ | $-Y_{11}-Y_{13}$ | $-Y_7+G^{pg2}$ | $Y_7+Y_8+Y_{10}$ $+Y_{11}+Y_{13}$ $+G^{pp2}$ | $-Y_{13}$ | $-Y_{13}$ |
| a | | Y_{13} | | $-Y_{13}$ | $Y_{11}+Y_{13}$ | Y_{13} |
| b | | Y_{13} | | $-Y_{13}$ | Y_{13} | $Y_{13}+Y_{14}$ |

(15.46)

(тензор C_t^{-1} , соединяющий лампу с сетью, имеет единичную матрицу).

Вектор токов ΔI приложен не к узловой паре, а к двум узлам, принадлежащим разным узловым парам E_{g_1} и E_{g_2} . Это означает, что ΔI можно выбрать как вектор, приложенный к катушке Y_1 :

$$\Delta I = \begin{array}{c|c|c|c|c} & 1 & 2 & 3 & 14 \\ \hline & \Delta I^1 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{array}, \quad (15.47)$$

$$\Delta I' = A_t \Delta I = \begin{array}{c|c|c|c|c|c} & g_1 & p_1 & g_2 & p_2 & a & b \\ \hline & \Delta I^1 & & -\Delta I^1 & & & \end{array}. \quad (15.48)$$

Следовательно, имеются два приложенных тока.

Шесть уравнений $\Delta I' = Y' \Delta E'$ можно свести к трем с помощью формулы редукции. Три оставшихся уравнения легко разрешить относительно ΔE_b .

13. КРИТЕРИЙ ВОЗНИКНОВЕНИЯ КОЛЕБАНИИ

Если в узловой сети происходят колебания, хотя отсутствует приложенный ток ΔI , на некоторых узловых парах наблюдается разность потенциалов ΔE . Причина появления ΔE заключена в существовании (физических) контурных токов Δi , которые, однако, не включены в уравнение.

I. Возникает вопрос: если в уравнении $I = YE$ (или $\Delta I = Y \Delta E$) приложенный ток равен нулю, то может ли быть E отличным от нуля?

Решая уравнение, имеем $E = Y^{-1}I$. Если $I = 0$, $E = Y^{-1}0$. Так как Y^{-1} имеет вид дроби, в числителе которой стоит матрица Y_c , состоящая из всех алгебраических дополнений Y , а в знаменателе — детерминант D от Y , то последнее уравнение можно переписать так:

$$E = Y^{-1}0 = \frac{Y_c}{D} 0. \quad (15.49)$$

Чтобы не все компоненты E равнялись нулю, необходимо, чтобы детерминант D от Y равнялся нулю. В этом случае $E = 0/0$, что может равняться и конечному числу, и соответственно в сети будут наблюдаться колебания.

Следовательно, если детерминант тензора адмиттанса Y равен нулю, в сети могут наблюдаться колебания. Приравнявая детерминант тензора адмиттанса нулю, можно получить необходимое соотношение между параметрами сети, при котором в ней будут наблюдаться колебания.

II. Другой метод состоит в разделении системы на усилительную сеть и оставшуюся сеть обратной связи, имеющие общие входные и выходные узловые пары, и нахождении затем соответствующих тензоров адмиттанса Y_1 и Y_2 . Если отношения входного и выходного напряжений каждой компоненты системы найдены по уравнению (15.31), то, обозначая отношение напряжений усилительной сети через μ , а сети обратной связи через β , критерий возникновения колебаний записывается как

$$\mu\beta = 1. \quad (15.50)$$

14. СЕТИ С ТЕТРОДАМИ

В качестве примера, в котором существенными являются два сеточных напряжения ΔE , рассмотрим сеть избирательного автоматического регулирования (рис. 15.10, а).

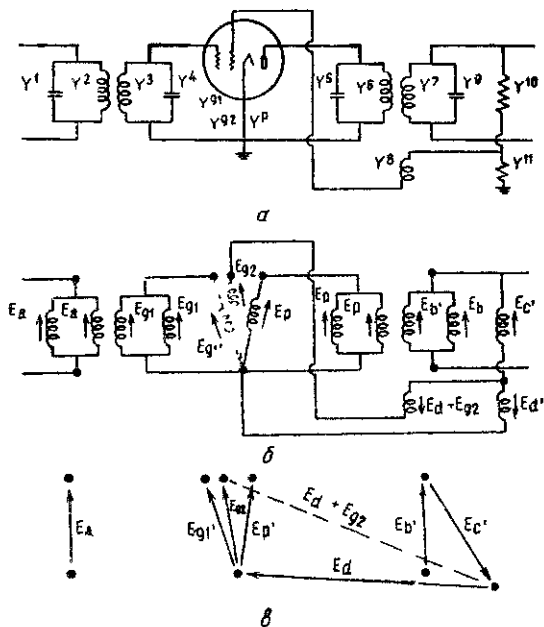


Рис. 15.10. Сеть с тетродом:
а — заданная сеть, б — напряжения, в — выбранные узловые пары.

Сеть имеет 14 катушек, 9 узлов и 2 подсети, а следовательно, $9-2=7$ узловых пар и $14-7=7$ контуров. Выбранные семь узловых пар и соответствующие напряжения на отдельных катушках показаны на рис. 15.10, б и в.

Тензор адмиттанса примитивной сети равен

| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | g_1 | g_2 | p |
|-------|-------|-------|----------|-------|-------|----------|----------|----------|-------|----------|----------|-----------|-----------|----------|
| 1 | Y_1 | | | | | | | | | | | | | |
| 2 | | Y_2 | Y_{23} | | | | | | | | | | | |
| 3 | | | Y_{23} | Y_3 | | | | | | | | | | |
| 4 | | | | Y_4 | | | | | | | | | | |
| 5 | | | | | Y_5 | | | | | | | | | |
| 6 | | | | | | Y_6 | Y_{67} | Y_{68} | | | | | | |
| 7 | | | | | | Y_{67} | Y_7 | Y_{78} | | | | | | |
| 8 | | | | | | Y_{68} | Y_{78} | Y_8 | | | | | | |
| 9 | | | | | | | | | Y_9 | | | | | |
| 10 | | | | | | | | | | Y_{10} | | | | |
| 11 | | | | | | | | | | | Y_{11} | | | |
| g_1 | | | | | | | | | | | | | | |
| g_2 | | | | | | | | | | | | | | |
| p | | | | | | | | | | | | G_{pg1} | G_{pg2} | G_{pp} |

(15.51)

Приравнивая старые и новые напряжения на каждой катушке, получаем тензор преобразования

| | | | | | | | | | | | |
|---------------------|--|--|--|----------|----------------------|----------------------|----------|----------|----------|----------|--|
| | | | | a | g₁ | g₂ | p | b | c | d | |
| $E_1 = E_a$ | | | | 1 | | | | | | | |
| $E_2 = E_a$ | | | | 1 | | | | | | | |
| $E_3 = E_{g_1}$ | | | | | 1 | | | | | | |
| $E_4 = E_{g_1}$ | | | | | 1 | | | | | | |
| $E_5 = E_p$ | | | | | | | 1 | | | | |
| $E_6 = E_p$ | | | | | | | 1 | | | | |
| $E_7 = E_b$ | | | | | | | | 1 | | | |
| $E_8 = E_{g_2}$ | | | | | | 1 | | | | 1 | |
| $E_9 = E_b$ | | | | | | | | 1 | | | |
| $E_{10} = E_c$ | | | | | | | | | 1 | | |
| $E_{11} = E_d$ | | | | | | | | | | 1 | |
| $E_{g_1} = E_{g_1}$ | | | | | 1 | | | | | | |
| $E_{g_2} = E_{g_2}$ | | | | | | 1 | | | | | |
| $E_p = E_p$ | | | | | | | 1 | | | | |

$A =$

| | | | | | | | | | | | |
|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|
| | | | | | | | | | | | |
| | | | | | | | | | | | |
| | | | | | | | | | | | |
| | | | | | | | | | | | |
| | | | | | | | | | | | |
| | | | | | | | | | | | |
| | | | | | | | | | | | |
| | | | | | | | | | | | |
| | | | | | | | | | | | |
| | | | | | | | | | | | |

(15.52)

Результирующий тензор адмиттанса определяется формулой $A_i Y A$

| | | | | | | | | | |
|-------------|--|----------------------|----------------------|----------------------|-------------------|-------------|----------|----------------|--|
| | | a | g₁ | g₂ | p | b | c | d | |
| | | a | $Y_1 + Y_2$ | Y_{23} | | | | | |
| | | g₁ | Y_{23} | $Y_3 + Y_4$ | | | | | |
| | | g₂ | | Y_8 | Y_{68} | Y_{78} | | Y_8 | |
| Y' = | | p | | Gp^2g_1 | $Y_5 + Y_6 + Gpp$ | Y_{67} | | Y_{68} | |
| | | b | | Y_{78} | Y_{67} | $Y_9 + Y_7$ | | Y_{78} | |
| | | c | | | | | Y_{10} | | |
| | | d | | Y_8 | Y_{68} | Y_{78} | | $Y_8 + Y_{11}$ | |

(15.53)

Нанесенные жирные линии ускоряют умножение.

Так как входным зажимом является a , а выходным b , то оставшиеся пять осей можно исключить с помощью формулы редукции. Два уравнения, соответствующие осям a и b , разрешают относительно E_b , пользуясь уравнением (15.30).

15. ТЕНЗОР ИМПЕДАНСА ЛАМПЫ

Может случиться, что ламповая сеть будет иметь намного меньше контуров, чем узловых пар. Тогда сеть удобнее анализировать как контурную.

Тензор импеданса z лампы находится обращением тензора адмиттанса Y , данного уравнениями (15.22), (15.26). Следовательно, тензор импеданса тетрода имеет вид

$$z_{mn} = \begin{array}{c|ccc} n & a & b & p \\ \hline m & & & \\ a & \frac{1 - \mu_b \nu_b}{r_b r_p D} & \frac{\eta_b \gamma_a - \gamma_a}{r_a r_p D} & \frac{\gamma_a \nu_b - \nu_a}{r_a r_b D} \\ \hline z_{mn} = b & \frac{\mu_a \nu_b - \eta_b}{r_b r_p D} & \frac{1 - \mu_a \nu_a}{r_a r_p D} & \frac{\eta_b \nu_a - \nu_b}{r_a r_p D} \\ \hline p & \frac{\eta_b \mu_b - \mu_a}{r_b r_p D} & \frac{\mu_a \eta_a - \mu_b}{r_a r_p D} & \frac{1 - \eta_a \eta_b}{r_a r_p D} \end{array} \quad (15.54)$$

где

$$D = \frac{1 + \mu_a (\eta_a \nu_b - \nu_a) + \mu_b (\eta_b \nu_a - \nu_b) - \eta_a \eta_b}{r_a r_b r_p}$$

Тензор импеданса триода имеет вид

$$z_{mn} = \begin{array}{c|cc} n & g & p \\ \hline m & & \\ g & \frac{r_g}{1 - \mu_g \mu_p} & \frac{-\mu_g r_p}{1 - \mu_g \mu_p} \\ \hline z_{mn} = p & \frac{-\mu_p r_g}{1 - \mu_g \mu_p} & \frac{r_p}{1 - \mu_g \mu_p} \end{array} = \begin{array}{c|cc} n & g & p \\ \hline m & & \\ g & Z_{g\epsilon} & Z_{gp} \\ \hline p & Z_{pg} & Z_{pp} \end{array} \quad (15.55)$$

Это означает, что в контурной сети n -электродную лампу можно представить $n-1$ катушками с односторонними собственными и взаимными импедансами точно так же, как $n-1$ -обмоточный трансформатор. Следовательно, тетрод можно представить тремя катушками, а триод — двумя, их соединения представляют катод (рис. 15.11).

Анализ контурной сети, содержащей лампы, ничем не отличается от анализа любой другой контурной сети. Так как сеточ-

ное сопротивление бесконечно, то в конце вычислений в тензоре адмиттанса $y = z^{-1}$ все r_g следует заменить бесконечно большими величинами, что позволит уменьшить число уравнений.

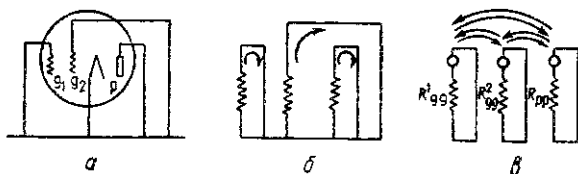


Рис. 15.11.

a — тетрод *б* — эквивалентная контурная сеть; *в* — упрощенная сеть.

16. УСИЛИТЕЛЬ С ВЫРОЖДЕННОЙ ОБРАТНОЙ СВЯЗЬЮ

Рассмотрим сеть (рис. 15.12, *a*), представляющую усилитель с вырожденной обратной связью. В ней имеется 14 катушек, 9 узлов, 8 узловых пар и $14 - 8 = 6$ контуров. Выбирая шесть новых токов (рис. 15.12, *б*) (четыре из них в четырех катушках

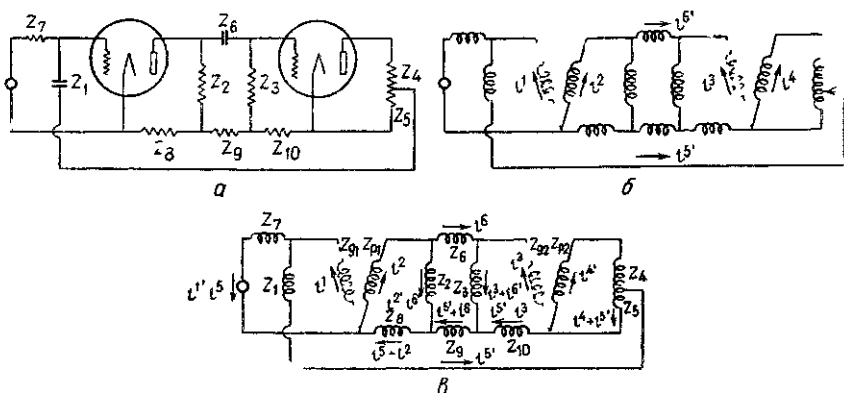


Рис. 15.12 Усилитель с вырожденной обратной связью:

a — заданная сеть; *б* — выбранные токи в ветвях, *в* — токи в отдельных катушках.

лампы), получаем результирующие токи в каждой катушке (рис. 15.12, *в*). Приравнивая старые и новые токи, протекающие в каждой катушке (и используя обозначение i^a вместо Δi^a), имеем

| | 1' | 2' | 3' | 4' | 5' | 6' |
|------------|----------|----------|-----------|-------------------|----------|-------------------|
| $i^1 =$ | | | | | $i^{5'}$ | |
| $i^2 =$ | $i^{2'}$ | | | | | $-i^{6'}$ |
| $i^3 =$ | | | $i^{3'}$ | | | $+i^{6'}$ |
| $i^4 =$ | | | | $i^{4'}$ | | |
| $i^5 =$ | | | | $i^{4'} + i^{5'}$ | | |
| $i^6 =$ | | | | | | $i^{6'}$ |
| $i^7 =$ | $i^{1'}$ | | | | | $-i^{5'}$ |
| $i^8 =$ | | $i^{2'}$ | | | | $+i^{5'}$ |
| $i^9 =$ | | | | | | $i^{5'} + i^{6'}$ |
| $i^{10} =$ | | | $-i^{3'}$ | | | $+i^{5'}$ |
| $i^{g1} =$ | $i^{1'}$ | | | | | |
| $i^{p1} =$ | | $i^{2'}$ | | | | |
| $i^{g2} =$ | | | $i^{3'}$ | | | |
| $i^{p2} =$ | | | | $i^{4'}$ | | |

| | 1' | 2' | 3' | 4' | 5' | 6' |
|----|----|----|----|----|----|----|
| 1 | | | | | 1 | |
| 2 | | 1 | | | | -1 |
| 3 | | | 1 | | | 1 |
| 4 | | | | 1 | | |
| 5 | | | | 1 | 1 | |
| 6 | | | | | | 1 |
| 7 | 1 | | | | -1 | |
| 8 | | 1 | | | 1 | |
| 9 | | | | | 1 | 1 |
| 10 | | | -1 | | 1 | |
| g1 | 1 | | | | | |
| p1 | | 1 | | | | |
| g2 | | | 1 | | | |
| p2 | | | | 1 | | |

C =

(15.56)

Тензор импеданса сети находится как $C_{iZ}C$

| | 1' | 2' | 3' | 4' | 5' | 6' |
|----|-----------------|-----------------------|--------------------------|-----------------------|--|-------------------------|
| 1' | $Z_7 + Z_{gg1}$ | Z_{gp1} | | | $-Z_7$ | |
| 2' | Z_{pg1} | $Z_2 + Z_8 + Z_{pp1}$ | | | Z_8 | $-Z_2$ |
| 3' | | | $Z_3 + Z_{10} + Z_{gg2}$ | Z_{gp2} | $-Z_{10}$ | Z_3 |
| 4' | | | Z_{pg2} | $Z_4 + Z_5 + Z_{pp2}$ | Z_5 | |
| 5' | $-Z_7$ | Z_8 | $-Z_{10}$ | Z_5 | $Z_1 + Z_5 + Z_7 + Z_8 + Z_9 + Z_{10}$ | Z_9 |
| 6' | | $-Z_2$ | Z_3 | | Z_9 | $Z_2 + Z_3 + Z_6 + Z_9$ |

(15.57)

В (15.57) тензор импеданса примитивной сети имеет вид

| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | g_1 | p_1 | g_2 | p_2 |
|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|----------|-----------|-----------|-----------|-----------|
| 1 | Z_1 | | | | | | | | | | | | | |
| 2 | | Z_2 | | | | | | | | | | | | |
| 3 | | | Z_3 | | | | | | | | | | | |
| 4 | | | | Z_4 | | | | | | | | | | |
| 5 | | | | | Z_5 | | | | | | | | | |
| 6 | | | | | | Z_6 | | | | | | | | |
| 7 | | | | | | | Z_7 | | | | | | | |
| 8 | | | | | | | | Z_8 | | | | | | |
| 9 | | | | | | | | | Z_9 | | | | | |
| 10 | | | | | | | | | | Z_{10} | | | | |
| g_1 | | | | | | | | | | | Z_{gg1} | Z_{gp1} | | |
| p_1 | | | | | | | | | | | Z_{pg1} | Z_{pp1} | | |
| g_2 | | | | | | | | | | | | | Z_{gg2} | Z_{gp2} |
| p_2 | | | | | | | | | | | | | Z_{pg2} | Z_{pp2} |

(15.58)

Чтобы найти некоторые токи, оставшиеся строки и столбцы можно исключить с помощью формулы редукции. В тензоре адмиттанса y' нужно представить r_g бесконечно большой величиной, тогда матрица существенно упростится.

17. УПРОЩЕННОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ТРИОДА

Если нет необходимости определять сеточный ток триода Δi_g (практически его значение, как правило, равно нулю), оси g в тензоре импеданса триода можно исключить с помощью формулы редукции $z' = z_1 - z_2 z_4^{-1} z_3$, так что эквивалентным импедансом анода будет

$$r_p' = \frac{r_p}{D} - \left(\frac{-\mu_p r_g}{D} \right) \left(\frac{D}{r_g} \right) \left(\frac{-\mu_g r_p}{D} \right) = \frac{r_p (1 - \mu_p \mu_g)}{1 - \mu_p \mu_g} = r_p \quad (15.59)$$

Итак, катушку, соответствующую сетке, можно опустить в эквивалентной сети триода при замене собственного импеданса анода r_p/D на r_p .

Если напряжение e_g приложено последовательно с катушкой сети или разность потенциалов e_g — падение напряжения на этой катушке, то эквивалентное внешне приложенное напряжение на анодной катушке получают по формуле редукции

$$e'_p = e_p - \left(\frac{-\mu_p r_g}{D} \right) \left(\frac{D}{r_g} \right) e_g = e_p + \mu_p E_g. \quad (15.60)$$

Следовательно, напряжение E_g , появляющееся на катушке сетки, оказывается включенным последовательно с катушкой

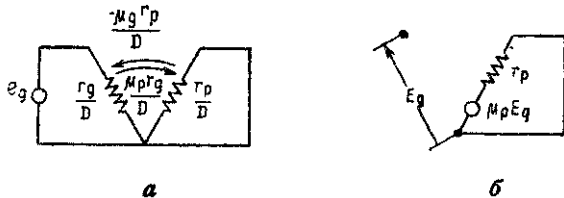


Рис. 15.13.

а — триод как двухконтурная сеть; б — триод как ортогональная сеть (1 контур, 1 узловaя пара).

анода с коэффициентом $\mu_p E_g$ (рис. 15.13, б). Значит, катушкой сетки и ее взаимными импедансами можно пренебречь.

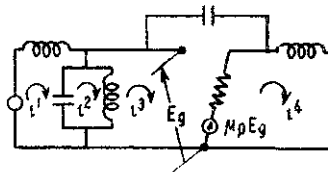


Рис. 15.14. Сеть триода как ортогональная сеть.

Однако сеть, содержащая лампу, на рис. 15.13, б является не контурной, а ортогональной (рис. 15.14), поскольку напряжение на узловой паре E_g должно быть предварительно известно, чтобы найти приложенное контурное напряжение $\mu_p E_g$. Ортогональные сети таких типов изучаются в гл. 21.

ОРТОГОНАЛЬНЫЕ СЕТИ

1. НАПРЯЖЕНИЯ И ТОКИ В КОНТУРНЫХ И УЗЛОВЫХ СЕТЯХ

I. В контурной сети n катушек образуют k контуров. В общем случае имеется n известных приложенных напряжений e , каждое из которых предполагается последовательно соединенным с отдельной катушкой. Поскольку известно только k токов отклика i' , при получении k уравнений $e' = z'i'$ n известных напряжений катушек e заменяются посредством k приложенных контурных напряжений e' с помощью $e' = C_1 e$.

Обычно предполагается, что k новых переменных i' протекают в k ветвях. В гл. 6, § 7 было показано, что k новых компонент приложенного напряжения e' можно считать сконцентрированными в тех же самых k ветвях, в которых предполагается наличие новых компонент i' . Таким образом, все приложенные к контурам напряжения можно сконцентрировать в единое напряжение e' , приложенное к ветви, в которой протекает i' .

Когда приложенное напряжение имеется в безымпедансной ветви, то полагают, что эта ветвь имеет импеданс нулевой величины, так что ветвь считается катушкой и рассматривается как катушка в примитивной контурной сети. Такую безымпедансную ветвь с известным приложенным напряжением будем называть «воображаемой катушкой». Присутствие «воображаемых катушек» требует большего числа координатных осей, чем это абсолютно необходимо. Эти дополнительные оси должны быть введены для того, чтобы можно было обращаться с сетью, как с контурной, а не как с ортогональной, имеющей более сложное уравнение напряжения.

II. В узловой сети n катушек образуют $n-k$ узловых пар. В общем случае имеется n известных приложенных токов I (или токов, отбираемых внешними нагрузками), каждый из которых, как предполагается, приложен к узлам отдельной катушки. Поскольку имеется только $n-k$ напряжений отклика E' , n известных приложенных катушечных токов I при получении $n-k$ уравнений $I' = Y'E'$ заменяются на $n-k$ приложенных узловых токов посредством преобразования $I' = C^{-1}I$.

И $n-k$ новых переменных E' , и $n-k$ новых приложенных токов I' рассматриваются на одних и тех же $n-k$ узловых парах.

Если воздействующий ток (внешняя нагрузка) проходит через два узла, между которыми нет катушек, предполагается, что два узла соединены безадмиттансной катушкой. В примитивной узловой сети эта катушка появляется и вводит дополнительную координатную ось. Такая безадмиттансная ветвь с известным действующим током называется «воображаемой катушкой».

III. Одна из задач последующего анализа состоит в том, чтобы перейти от примитивных сетей, катушки которых имеют нулевой импеданс или адмиттанс, так, чтобы сеть полностью описывалась только теми катушками, которые имеют действительный импеданс или адмиттанс. Таким образом, *все воображаемые катушки и, следовательно, все лишние координатные оси исчезнут из анализа ортогональных сетей.*

IV. «Контур» и «узловая пара» (или их эквивалент «ветвь» и «открытый контур») в общем случае будут называться «координатной осью».

2. НАПРЯЖЕНИЯ И ТОКИ В ОРТОГОНАЛЬНЫХ СЕТЯХ

I. Каждая k -контурная сеть из n катушек содержит также $n-k$ узловых пар, на которых возникают измеряемые разности потенциалов E' и присутствие которых до сих пор не принималось во внимание при написании уравнений напряжения. (Разности потенциалов, возникающие на всех отдельных катушках, рассчитанные посредством вспомогательного уравнения $e_r = zC_i'$, не являются напряжением узловых пар.) Для завершенности картины можно также предположить, что через $n-k$ узловых пар действуют токи I' , имеющие нулевые значения.

Таким образом, любую контурную сеть можно фактически рассматривать как ортогональную сеть, на которую воздействуют e и I и в которой как отклик возникают i и E . Из-за отсутствия I и из-за того, что не нужно находить E , оси узловых пар до сих пор не принимались во внимание.

II. Аналогично каждая узловая сеть с $n-k$ узловыми парами содержит k контуров, в которых протекают контурные токи i' и наличие которых до сих пор не принималось во внимание при записи уравнения тока. (Токи, протекающие во всех отдельных катушках, вычисляемые с помощью вспомогательного уравнения $I_c = YC_i^{-1}E'$, представляют собой полный ток, но не ток отклика.) Для завершенности картины можно также предположить, что имеются приложенные контурные напряжения e , значение которых равно нулю.

Таким образом, любую узловую сеть можно фактически рассматривать как ортогональную сеть, на которую воздействуют

I и e и отклик которой есть E и i . Из-за отсутствия e и из-за того, что не нужно находить i , контурные оси до сих пор игнорировались.

III. В общем случае ортогональная сеть из n катушек образует k контуров и $n-k$ узловых пар. В общем случае n напряжений приложены последовательно с каждой катушкой и n токов I воздействуют (отбираются) параллельно каждой катушке. При замене $2n$ воздействующих величин e и I для отдельных катушек их значениями e' и I' вдоль контуров и узловых пар согласно $e' = C_e e$ и $I' = C^{-1} I$ можно видеть (если C несингулярна), что (вместо k) имеется лишь n известных приложенных величин напряжения e' и n (вместо $n-k$) известных воздействующих величин тока I . Таким образом (на узловых парах открытых контуров), существуют теперь известные приложенные напряжения e' , а около контуров (закрытых контуров) — известные воздействующие токи I' .

В результате приложенных n катушечных напряжений e и катушечных токов I возникают k токов отклика i в контурах и $n-k$ напряжений отклика E на узловых парах. Всего имеется n величин отклика, действующих как n переменных.

IV. Представленный ниже метод анализа ортогональных сетей основывается на двух соображениях:

1) число переменных и уравнений должно быть равно числу катушек независимо от способа их соединения или возбуждения или числа воображаемых катушек;

2) входная мощность $e^* i$ и выходная мощность $E^* I$ должны оставаться инвариантными при всех способах соединения и возбуждения n катушек.

Эти постулаты делают возможным построение несингулярного тензора преобразования C , имеющего n строк и столбцов для всех n катушечных сетей. Это позволит при анализе и синтезе переходить от любой n катушечной сети к любой другой n катушечной сети без проверки метода возбуждения каждой сети для существования воображаемых катушек.

Поскольку несколько катушек можно объединить в одну эквивалентную катушку, всегда будет предполагаться, что рассматриваемая сеть представляет собой редуцированную исходную сеть.

3. КОВАРИАНТНЫЕ И КОНТРАВАРИАНТНЫЕ ПЕРЕМЕННЫЕ

I. В ортогональной сети имеются переменные величины двух типов: 1) k контравариантных переменных i^m , протекающих в замкнутых контурах; 2) $n-k$ ковариантных переменных E_u , возникающих на открытых контурах или узловых парах.

Между контравариантными и ковариантными переменными существует интересная взаимосвязь, которая открывает простой метод анализа ортогональных сетей.

II. Когда ветвь, по которой протекает контурный ток i^a , раскрывается, эта частная контравариантная переменная обращается в нуль. *Вместо нее возникает другая переменная, которая, однако, является ковариантной*, а именно, разность потенциалов E_a на открытой ветви.

Подобным образом, когда узловая пара с разностью потенциалов E_a замыкается накоротко, эта частная переменная обращается в нуль. *Вместо нее возникает другая новая переменная, являющаяся ковариантной*, а именно, контурный ток i^a , протекающий в новом контуре.

В общем случае в любой динамической системе, когда контравариантная переменная (скажем, *скорость* v^a по некоторому направлению) редуцируется в нуль при введении некоторой связи, вместо нее немедленно появляется ковариантная переменная (скажем, *сила реакции* f_a связи). Аналогично, когда ковариантная переменная (скажем, *сила реакции* f_a) обращается в нуль, вместо нее появляется новая контравариантная переменная (*скорость* v^a по направлению исчезнувшей силы).

Во время добавления и устранения связей структура динамической системы не изменяется, *а наличие связей только изменяет относительное число ковариантных и контравариантных переменных*, сумма которых при этом остается постоянной.

4. ИЗВЕСТНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ ОТКЛИКА

I. Переменная вдоль определенной оси до возникновения двойственной величины не обязательно должна обращаться в нуль. *Если переменная i' (или E') по некоторому направлению известна, то двойственная ей переменная E' (или i') все еще проявляется по этому же направлению*. Конечно, известная i' (или E') не является теперь переменной величиной и имеет по каждой оси еще одна переменная (ковариантная или контравариантная). (В динамике такие случаи встречаются при «движущихся связях».) Следовательно, вдоль каждой оси существуют величины отклика i' и E' , одна из которых имеет известное значение, а другая является переменной.

II. *Воображаемые катушки представляют собой такие координатные оси, вдоль которых возникают два типа величин отклика*. В частности: 1) если известное напряжение существует в безымпедансной ветви, то известное приложенное напряжение обозначается через E , а неизвестный ток через i ; 2) если известный ток воздействует на безадмиттансную ветвь, то известный ток обозначается как i , а неизвестная разность потенциалов как E .

Таким образом, *при наличии воображаемых катушек число величин отклика i и E может быть равно $2n$ так же, как и число воздействующих величин e и I может быть равно $2n$* . Однако число переменных величин во всех случаях равно n .

III. Следовательно, вдоль каждой оси из n координатных осей может существовать четыре величины: два напряжения e и E и два тока I и i . Два напряжения нельзя объединить в одно выражение, поскольку одно из них известно, а второе неизвестно. Точно так же не могут быть объединены два тока I и i , протекающие в одной и той же катушке.

5. ОРТОГОНАЛЬНЫЕ ЧИСТО-КОНТУРНЫЕ И ЧИСТО-УЗЛОВЫЕ СЕТИ

I. Поскольку можно вводить воображаемые катушки без нарушения режима работы сети, то с помощью воображаемых катушек «закрытый контур» можно превратить в «открытый контур»

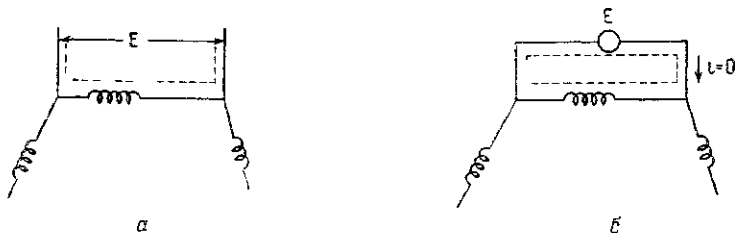


Рис. 16.1. Замена открытого контура закрытым:
 а — открытый контур, б — закрывание открытого контура.

тур» и наоборот. В частности: 1) можно считать, что любой открытый контур закрыт воображаемой катушкой, имеющей неизвестное воздействующее E и нулевое i (рис. 16.1, а, б); 2) любой

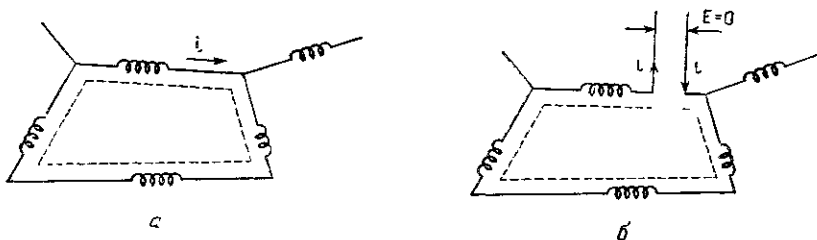


Рис. 16.2. Замена закрытого контура открытым:
 а — закрытый контур; б — открывание закрытого контура.

закрытый контур можно рассматривать как открытый, в разрыве которого имеется воображаемая катушка с неизвестным i в узлах и нулевым E (рис. 16.2, а, б). (Считается, что два узла, полученные при открывании контура, не соединены вместе обычной катушкой, но, поскольку в этих узлах протекают идентичные токи, два узла можно рассматривать как соединенные воображаемой катушкой.)

II. Следовательно, предполагается, что любая ось представляет либо узловую пару, либо контур в зависимости от значения переменных i и E , существующих на этой оси: 1) если E неизвестно, ось является «узловой парой»; 2) если i неизвестно, ось является «контуром».

III. Поскольку каждую узловую пару ортогональной сети можно рассматривать как закрытую неизвестным напряжением E , то после введения при этом воображаемой катушки каждая ортогональная сеть становится эквивалентной чисто-контурной

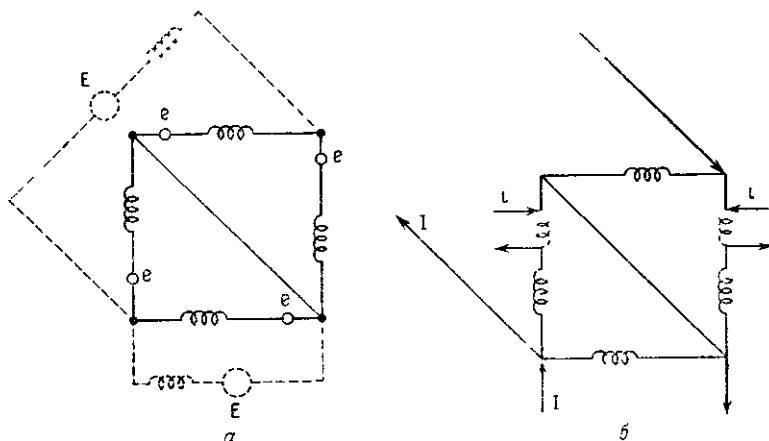


Рис. 16.3. Эквивалентность контуров и узловых пар:
 а — закрывание узловых пар; б — открывание контуров.

сети, в которой напряжение приложено не только последовательно с действительными катушками (как показано на рис. 16.3, а), но и последовательно с некоторыми из воображаемых катушек.

Подобным образом, поскольку каждый контур ортогональной сети можно рассматривать как контур, открытый посредством приложения неизвестного тока i в каждом разрыве, всякая ортогональная сеть эквивалентна чисто-узловой сети, в которой токи воздействуют не только параллельно (*in shunt*) каждой действительной катушке (как показано на рис. 16.3, б), но и параллельно некоторым воображаемым катушкам.

IV. Каждая закрытая узловая пара связывает воображаемую катушку с чисто-контурной сетью, а каждый открытый контур связывает воображаемую катушку с чисто-узловой сетью.

Напряжение, появляющееся на воображаемой катушке, обозначается E . В примитивной сети воображаемые катушки не появляются.

Суммируя, можно заметить, что:

1) воздействующие векторы e и i ассоциируются с действительными катушками;

2) векторы отклика I и E ассоциируются с воображаемыми катушками.

6. ИНВАРИАНТНОСТЬ ВХОДНОЙ И ВЫХОДНОЙ МОЩНОСТИ

1. В чисто-контурной сети, содержащей только e и i (см. рис. 4.1), входная мощность e^*i остается инвариантной независимо от того, как соединены катушки, поскольку в любом взаимосоединении каждая катушка является короткозамкнутой на себя и ток через нее остается неизменным. Когда в чисто-контур-

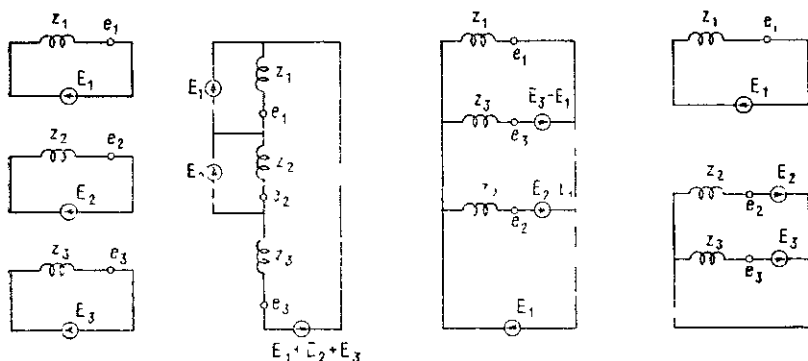


Рис. 16.4. Различные типы соединения трех катушек, образующих три контура (одно и то же E приложено к каждой катушке).

ной сети с заданными e и i воздействующими являются также токи I в параллельном соединении с каждой катушкой, входная мощность e^*i остается еще инвариантной в любом взаимосоединении. Однако, когда n катушек образуют k -контурную сеть, токи в катушках становятся различными и e^*i не является больше инвариантной.

Если вместо двух понятий e и i с сетью ассоциируются четыре электромагнитных понятия, а именно e , i , E и I , то при любых приложенных напряжениях и токах все сети (контурные и ортогональные) можно рассматривать как чисто-контурные сети, следовательно, при любом соединении катушек в сетях входная e^*i и выходная E^*I мощность остается инвариантной.

Это утверждение верно, поскольку можно предположить, что на каждой катушке при любом взаимосоединении существуют лишь одинаковые разности потенциалов E (рис. 16.4, где три катушки образуют четыре разные чисто-контурные сети).

(Способ преобразования напряжения E следует автоматически из уравнений, которые будут получены в этом параграфе.)

Необходимо заметить, что напряжение E , приложенное последовательно с безымпедансной катушкой, также последовательно и с некоторыми другими катушками, поэтому инвариантность E^*I не так уж очевидна.

II. Аналогичные соображения относятся и к чисто-узловой сети. Если вместо двух электрических понятий (E и I) с сетью ассоциируется четыре понятия (e , i , E и I), то при любых приложенных напряжениях и токах все сети можно рассматривать как чисто-узловые и при любых соединениях катушек входная мощность e^*i и выходная E^*I все же остаются инвариантными.

Это действительно так, поскольку можно предположить, что при любых взаимосоединениях (рис. 16.5) через каждую катуш-

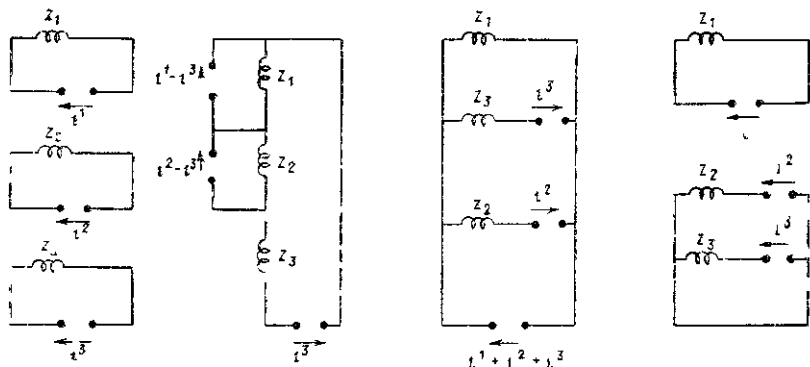


Рис. 16.5. Различные типы соединения трех катушек, образующих три узловые пары (один и тот же I протекает в каждой катушке).

ку протекает один и тот же ток i . (Следует заметить, что ток i , действующий в безадмиттансной катушке, протекает через некоторые другие катушки, следовательно, инвариантность e^*i не является совершенно очевидной.)

III. Итак, при взаимосоединении n катушек в сети различных типов входную мощность e^*i и выходную E^*I можно сделать инвариантной:

$$e^*i = e^*i', \quad e_a i^a = e_a i'^a, \quad (16.1)$$

$$E^*I = E^*I', \quad E_a I^a = E_a I'^a, \quad (16.2)$$

$$\begin{aligned} (e + E)^*(I + i) &= (e_o + E_o)(I^o + i^o) = \\ &= (e' + E')^*(I' + i'), \quad = (e_a' + E_a')(I^{a'} + i^{a'}). \end{aligned} \quad (16.3)$$

Для этого при любом способе соединения катушек вводят четыре электрические величины (e , i , E и I) вместо двух величин (e , i или E , I), причем любые три из четырех величин сохраняются неизменными в каждой катушке, в то время как взаимо-

соединения могут изменяться. При взаимосоединении n катушек изменяются значения n из $4n$ электрических величин или любых их линейных комбинаций.

В общем случае каждую сеть можно рассматривать как чисто-контурную, чисто-узловую или ортогональную сеть и так далее, в зависимости от того, какие компоненты \mathbf{i} и \mathbf{E} считаются переменными. В частности, сеть: 1) чисто-контурная, если все \mathbf{i} переменные; 2) чисто-узловая, если все \mathbf{E} переменные; 3) ортогональная, если некоторые \mathbf{E} и некоторые \mathbf{i} переменные; 4) контурная, если некоторые \mathbf{i} переменные; 5) узловая, если некоторые \mathbf{E} переменные.

7. УРАВНЕНИЯ НАПРЯЖЕНИЯ И ТОКОВ

I. Хотя на каждой координатной оси имеется два типа напряжений e и E и два типа токов I и i (некоторые из которых известны, а некоторые неизвестны), в каждый момент времени результирующие токи и напряжения удовлетворяют закону Ома.

Следовательно:

1. Уравнения напряжения ортогональной сети при рассмотрении ее как чисто-контурной имеют вид

$$\mathbf{E} + \mathbf{e} = \mathbf{z}(\mathbf{i} + \mathbf{I}), \quad E_{\alpha} + e_{\alpha} = z_{\alpha\beta}(i^{\beta} + I^{\beta}). \quad (16.4)$$

2. Уравнения токов ортогональной сети при рассмотрении ее как чисто-узловой имеют вид

$$\mathbf{i} + \mathbf{I} = \mathbf{Y}(\mathbf{E} + \mathbf{e}), \quad i^{\sigma} + I^{\sigma} = Y^{\alpha\beta}(\bar{E}_{\beta} + e_{\beta}). \quad (16.5)$$

При выводе уравнений все компоненты \mathbf{e} и \mathbf{I} предполагаются известными, а компоненты \mathbf{i} и \mathbf{E} частично известными, а частично неизвестными. На каждой оси можно задать только одну переменную величину (i или E). Однако при манипулировании с уравнениями любые n из $4n$ величин могут быть неизвестными.

Известное воздействующее напряжение можно рассматривать произвольно как компоненту \mathbf{E} или \mathbf{e} (в зависимости от того, считаются ли зажимы генератора узловыми парами или нет). Это отражается лишь на перераспределении известных компонент напряжения между \mathbf{E} и \mathbf{e} , а \mathbf{z} сохраняется неизменным. Аналогично эффект произвольного рассмотрения известного воздействующего тока как компоненты \mathbf{i} или \mathbf{I} (в зависимости от того, считается ли катушка, соединяющая два узла, за две последовательные катушки или нет) также состоит лишь в перераспределении известных компонент тока между \mathbf{i} и \mathbf{I} при сохранении \mathbf{Y} неизменным.

II. В общем случае каждый вектор имеет столько компонент, сколько имеется координатных осей. Два вектора e_{α} и E_{α} (или i^{α} и I^{α}) нельзя сложить, поскольку в таком случае каждая компонента результирующего вектора разделяется на две части,

одна из которых известна, а другая неизвестна. Чтобы получить решение для неизвестных компонент, результирующий вектор необходимо разложить на его известный и неизвестный составляющие векторы.

8. ЭТАПЫ ВЫВОДА УРАВНЕНИЯ НАПРЯЖЕНИЯ

I. Уравнение напряжения ортогональной сети получено при рассмотрении ее как чисто-контурной сети, в которой все узловые пары закрыты воображаемыми катушками.

Точно так же, как и во всех первоначально рассмотренных сетях, величины отклика i' и E' определяются на n произвольных

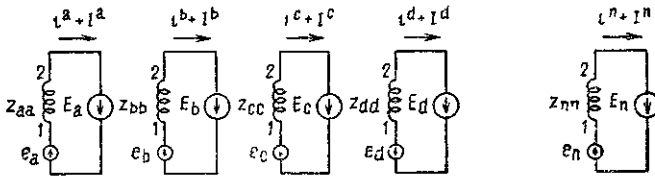


Рис. 16.6. Общая форма примитивной контурной сети.

осях, а воздействующие величины e' и I' — преобразованием из e и I примитивной сети.

Поскольку воображаемые катушки в примитивной сети не появляются, все известные воздействующие величины, ассоциированные с воображаемыми катушками, следует рассматривать как известные величины отклика i' и E' (т. е. они не могут появиться в I' или e' , которые происходят от I и e примитивной сети). Вдоль различных катушек произвольно выбирают n координатных осей.

Из предосторожности все воображаемые катушки должны рассматриваться как координатные оси.

II. Когда сетевая диаграмма соответствует действительной физической структуре (рис. 16.7), для *известных* величин используются следующие обозначения (предполагается, что величины со штрихами относятся к действительной сети, а без штрихов — к примитивной):

1) все известные напряжения в последовательном соединении с катушками обозначаются через e ;

2) все известные напряжения в последовательном соединении с безымпедансной ветвью обозначаются через E' (первоначально они также обозначались через e);

3) все известные токи, приложенные к катушке, обозначаются через I ;

4) все известные токи, воздействующие на безадмиттансную ветвь, обозначаются через i' (первоначально они также обозначались через I).

III. Прimitivesкая контурная сеть для сети, изображенной на рис. 16.7, показана на рис. 16.6. Она теперь содержит четыре величины вместо двух: два последовательных напряжения (e и E) и два тока (i и I).

Компонентами e являются известные напряжения, приложенные *последовательно с каждой действительной катушкой* сети, а компонентами I известные токи, воздействующие (или отбираемые нагрузками) в каждой действительной катушке сети.

IV. Несингулярный тензор преобразования C ортогональной сети получается тем же способом, как и для любой чисто-контурной сети (см. гл. 4, § 12).

При выводе соотношения $i = C I'$ не существенно, являются ли компоненты i' известными величинами или переменными.

V. Если C один раз получен, то новые компоненты тензора импеданса z' сети находят по $C_1 z C$.

Новые компоненты величин *отклика* частично известны, а частично нет. В частности:

1. *Предполагается*, что компоненты i' заданы в следующем виде: 1) на осях действительных катушек они равны нулю (известны); 2) на осях безадмиттансных катушек они обычно известны; 3) на всех остальных осях (в контурах) они обычно неизвестны (т. е. на осях узловых пар они известны, а на контурных осях неизвестны).

2. *Предполагается*, что компоненты E' заданы в следующем виде: 1) на действительных катушках они равны нулю (т. е. известны); 2) на безымпедансных катушках они обычно известны; 3) на всех других осях (узловых парах) они обычно неизвестны (т. е. на всех контурных осях они известны, на осях узловых пар они неизвестны).

Новые компоненты *воздействующих* величин рассчитывают исходя из величин primitivesкой сети.

В частности:

3. Компоненты e' *рассчитывают* по соотношению $e' = C_1 e$, в котором компоненты e обычно известны.

4. Компоненты I' *рассчитывают* по соотношению $I' = C^{-1} I$, в котором компоненты I обычно известны.

Если оси узловых пар выбирают по тем же катушкам, по которым действуют токи I , то компоненты I' заранее известны без всякого расчета.

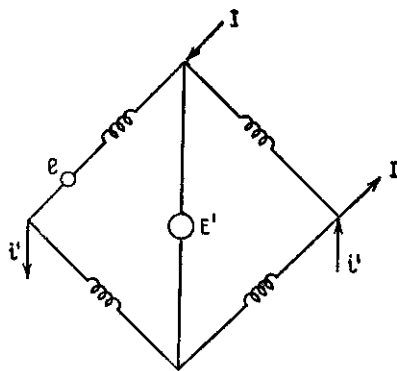


Рис. 16.7. Обозначение известных токов и напряжений.

В сетях на рис 16.4 компоненты E' не задаются, а рассчитываются из компонент E примитивной контурной сети по соотношению $E' = C_t E$. Эта процедура продемонстрирована на примере (рис. 16.4), чтобы показать, как определить E' для различных сетей, сохраняя неизменным E на каждой катушке и поэтому сохраняя мощность инвариантной. Для всех остальных сетей в этой главе E примитивной сети можно рассчитать по выбранным значениям E' действительной сети обратным шагом $E = C_t^{-1} E'$, однако такой расчет не сделан, поскольку при анализе действительной сети в этом нет необходимости).

VI. В окончательной системе уравнений $E' + e' = z'(i' + I')$ имеется столько же токовых переменных i' , сколько контуров, и столько же переменных напряжений E' , сколько узловых пар в сети. Полное число переменных равно числу действительных катушек.

Воображаемые катушки действительной сети нигде больше не появляются, следовательно, они не увеличивают число координатных осей. Их роль состоит в том, что с их помощью вводятся известные компоненты E' и i' .

9. ПРИМЕР ОРТОГОНАЛЬНОЙ СЕТИ

I. Допустим, что уравнение напряжения ортогональной сети (рис. 16.8, а) уже получено. Все токи и напряжения, показанные на рисунке, известны; некоторые напряжения и токи являются

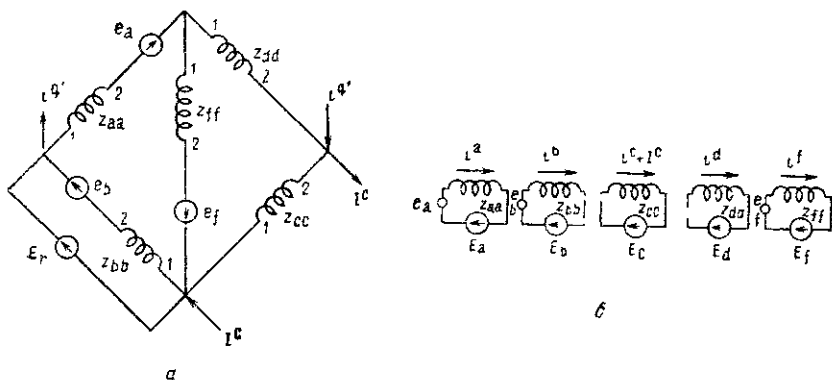


Рис. 16.8. Ортогональная сеть с приложениями e, I, E', i' :
а — заданная сеть; б — ее примитивная контурная сеть.

воздействующими для воображаемых катушек, и поэтому они обозначены как E' и i' вместо e и i .

В сети имеется пять катушек и три контура и, следовательно, две узловые пары. Одну из узловых пар следует выбирать на узлах, через которые проходит ток i^a , другую — произвольно на катушке Z_{aa} . В эквивалентную чисто-контурную сеть (рис. 16.9) введены как воображаемые катушки еще две узловые пары.

II. Прimitivesкая контурная сеть заданной сети показана на рис. 16.8, б. Компоненты геометрических объектов:

$$e = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} a & b & c & d & f \\ \hline e_a & e_b & 0 & 0 & e_f \\ \hline \end{array} , \\ \\ \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} a & b & c & d & f \\ \hline 0 & 0 & I^c & 0 & 0 \\ \hline \end{array} , \\ \\ z = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} a & b & c & d & f \\ \hline Z_{aa} & & & & \\ \hline b & Z_{bb} & & & \\ \hline c & & Z_{cc} & & Z_{cf} \\ \hline d & & & Z_{dd} & \\ \hline f & & Z_{fc} & & Z_{ff} \\ \hline \end{array} \end{array} \end{array}$$

В общем случае сеть предполагается асимметричной, так что Z_{cf} не равно Z_{fc} . Все компоненты e и I являются известными ве-

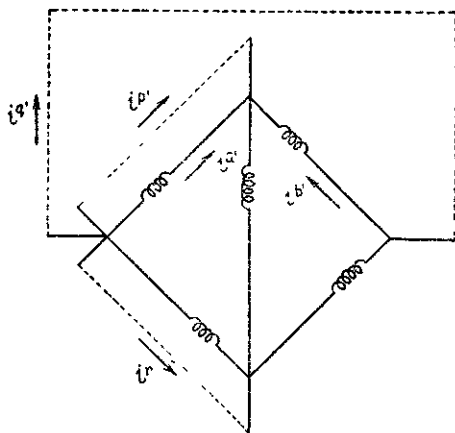


Рис. 16.9. Эквивалентная сеть.

личинами. Компоненты i и E не представляют интереса при расчете новой сети, поскольку i' и E' не являются производными от них, а выбираются произвольно (как в контурных сетях, так и в узловых).

III. Матрица преобразования чисто-контурной сети (см. рис. 16.9) устанавливается заданием первых пяти новых токовых переменных i' . Предполагается, что три из новых токов протекают в трех воображаемых катушках.

Токи, протекающие по отдельным катушкам, получают с помощью первого закона Кирхгофа (рис. 16.10).

Приравниваем старые и новые значения токов, протекающих в каждой катушке:

$$\begin{aligned}
 i^a &= i^{a'} \\
 i^b &= -i^{a'} + i^{p'} + i^{q'} + i^{r'} \\
 i^c &= i^{b'} - i^{q'} \\
 i^d &= -i^{b'} \\
 i^f &= i^{a'} + i^{b'} + i^{p'}
 \end{aligned}
 \quad C = \begin{array}{c}
 \begin{array}{ccccc}
 & a' & b' & p' & q' & r' \\
 a & 1 & & & & \\
 b & -1 & & 1 & 1 & 1 \\
 c & & 1 & & -1 & \\
 d & & -1 & & & \\
 f & 1 & 1 & 1 & &
 \end{array}
 \end{array}$$

(16.6)

Коэффициенты при значениях новых токов дают несингулярную матрицу преобразования С.

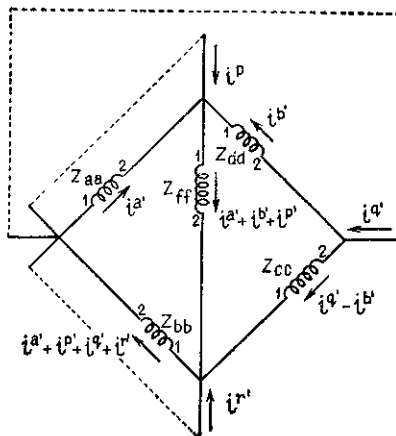


Рис. 16.10. Токи в катушках чисто-контурной сети.

IV. Контравариантными величинами отклика являются

$$i' = \begin{array}{ccccc}
 & a' & b' & p' & q' & r' \\
 \begin{array}{c} i' \\ \hline \end{array} & i^{a'} & i^{b'} & 0 & i^{q'} & i^{r'}
 \end{array}$$

Компонента $i^{p'}$ на оси p' узловой пары известна и равна нулю. Воздействующий ток $i^{q'}$ в первоначальной воображаемой катушке q' также известен. Следовательно, контравариантными переменными являются переменные трех первоначальных контуров, а именно $i^{a'}$, $i^{b'}$ и $i^{r'}$.

Ковариантные величины отклика записываются как

$$E' = \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline a' & b' & p' & q' & r' \\ \hline 0 & 0 & E_{p'} & E_{q'} & E_{r'} \\ \hline \end{array}.$$

По контурным осям a' и b' известными и равными нулю величинами являются компоненты E_a , или $E_{b'}$, а для первоначальной воображаемой катушки r' известной величиной является приложенное напряжение $E_{r'}$. Следовательно, ковариантными оказываются переменные двух первоначальных узловых пар, а именно $E_{p'}$ и $E_{b'}$.

Полное число переменных (неизвестных) равно пяти, по одной на каждой координатной оси.

V. Как только несингулярный тензор преобразования получен, геометрические объекты z' , I' и e' новой сети устанавливаются автоматически.

Новые компоненты тензора импеданса находят по формуле $C_i z C$

| | a' | b' | p' | q' | r' |
|-----------|----------------------------|--|-------------------|--------------------|----------|
| a' | $Z_{aa} + Z_{bb} + Z_{ff}$ | $Z_{fc} + Z_{ff}$ | $Z_{bb} + Z_{ff}$ | $Z_{bb} - Z_{fc}$ | Z_{bb} |
| b' | $Z_{cf} + Z_{ff}$ | $Z_{cc} + Z_{cf} + Z_{dd} + Z_{fc} + Z_{ff}$ | $Z_{cf} + Z_{ff}$ | $-Z_{cc} - Z_{fc}$ | 0 |
| $z' = p'$ | $Z_{bb} + Z_{ff}$ | $Z_{fc} + Z_{ff}$ | $Z_{bb} + Z_{ff}$ | $Z_{bb} - Z_{fc}$ | Z_{bb} |
| q' | $Z_{bb} - Z_{cf}$ | $-Z_{cc} - Z_{cf}$ | $Z_{bb} - Z_{cf}$ | $Z_{bb} + Z_{cc}$ | Z_{bb} |
| r' | Z_{bb} | 0 | Z_{bb} | Z_{bb} | Z_{bb} |

(16.7)

VI. Новые компоненты вектора e' приложенного напряжения по $C_i e C$ равны

$$e' = \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline a' & b' & p' & q' & r' \\ \hline e_a + e_b + e_f & e_f & e_b + e_f & e_b & e_b \\ \hline \end{array}. \quad (16.8)$$

Все эти компоненты известны.

Чтобы найти вектор I' воздействующего тока, нужно рассчитать матрицу, обратную C , решая систему уравнений (16.6) относительно величин со штрихами.

| | | | a | b | c | d | f | |
|------------|--------------|-----------------------|----|----|----|----|----|--------|
| $i^{a'} =$ | i^a | | a' | 1 | | | | |
| $i^{b'} =$ | $-i^d$ | | b' | | | -1 | | |
| $i^{p'} =$ | $-i^a$ | $+i^d + i^f C^{-1} =$ | p' | -1 | | 1 | 1 | (16.9) |
| $i^{q'} =$ | $-i^c - i^d$ | | q' | | -1 | -1 | | |
| $i^{r'} =$ | $i^b + i^c$ | $-i^f$ | r' | | 1 | 1 | -1 | |

Новые воздействующие контурные токи на C^{-1} . I равны

$$I' = \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline a' & b' & p' & q' & r' \\ \hline 0 & 0 & 0 & -i^c & i^c \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline a' & b' & p' & q' & r' \\ \hline I^{a'} & I^{b'} & I^{p'} & I^{q'} & I^{r'} \\ \hline \end{array}. \quad (16.10)$$

Все эти компоненты являются известными величинами.

VII. Уравнение напряжения сети имеет вид

$$E' + e' = z' \cdot (i' + I'), \quad E_{\alpha'} + e_{\alpha'} = z_{\alpha' \beta'} (i^{\beta'} + I^{\beta'}). \quad (16.11)$$

Все компоненты e' и I' — известные величины, в то время как компоненты E' и i' частично известны, а частично нет. В таком виде уравнение относительно неизвестных решить нельзя.

10. «ОРТОГОНАЛЬНЫЕ» УРАВНЕНИЯ НАПРЯЖЕНИЯ

I. Чтобы решить уравнение напряжения ортогональных сетей, необходимо подразделить их на два инвариантных уравнения вдоль осей контуров и узлов пар. Тогда, подразделив e на $e_1 + e_2$ и другие (см. гл. 9, § 2) и опустив штрихи у индексов, «ортогональное» уравнение напряжения можно представить в виде

$$\left. \begin{aligned} E_1 + e_1 &= z_1 (i^1 + I^1) + z_2 (i^2 + I^2), \\ E_2 + e_2 &= z_3 (i^1 + I^1) + z_4 (i^2 + I^2), \end{aligned} \right\} \quad (16.12)$$

$$\left. \begin{aligned} E_m + e_m &= z_{mn} (i^n + I^n) + z_{mv} (i^v + I^v), \\ E_u + e_u &= z_{un} (i^n + I^n) + z_{uv} (i^v + I^v). \end{aligned} \right\}$$

Эти уравнения можно подвергнуть различным преобразованиям.

II. Можно различить следующие специальные случаи:

1. Если к безымпедансным ветвям не приложены известные напряжения, то $E_1 = 0$.

2. Если известные токи через два узла, которые не связаны катушкой, не являются воздействующими (или связанными с нагрузкой), то $i^2 = 0$. Таким образом, в случае отсутствия вообра-

жаемых катушек приведенные выше уравнения приобретают вид

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_1 &= \mathbf{z}_1(\mathbf{i}^1 + \mathbf{I}^1) + \mathbf{z}_2 \mathbf{I}^2, & e_m &= z_{mn}(i^n + I^n) + z_{mv} I^v, \\ \mathbf{E}_2 + \mathbf{e}_2 &= \mathbf{z}_3(\mathbf{i}^1 + \mathbf{I}^1) + \mathbf{z}_4 \mathbf{I}^2, & E_u + e_u &= z_{un}(i^n + I^n) + z_{uv} I^v. \end{aligned} \quad (16.13)$$

Переменными являются \mathbf{i}^1 и \mathbf{E}_2 .

3. Если в качестве новых узловых пар выбрать все нагрузочные клеммы, то не будет существовать ни одного действующего контурного тока $\mathbf{I}^1 = 0$.

Если все три случая представлены одновременно, уравнения приобретают вид

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_1 &= \mathbf{z}_1 \mathbf{i} + \mathbf{z}_2 \mathbf{I}, & e_m &= z_{mn} i^n + z_{mv} I^v, \\ \mathbf{E} + \mathbf{e}_2 &= \mathbf{z}_3 \mathbf{i} + \mathbf{z}_4 \mathbf{I}, & E_u + e_u &= z_{un} i^n + z_{uv} I^v. \end{aligned} \quad (16.14)$$

Переменными являются \mathbf{i} и \mathbf{E} .

4. Если известные напряжения действуют только на закрытые контуры, но не на открытые, то $\mathbf{e}_2 = 0$.

Следовательно, если воображаемых катушек нет и если все известные напряжения приложены к закрытым контурам, а все известные действующие токи — к узловым парам, то ортогональные уравнения напряжения упрощаются:

$$\begin{aligned} \mathbf{e} &= \mathbf{z}_1 \mathbf{i} + \mathbf{z}_2 \mathbf{I}, & e_m &= z_{mn} i^n + z_{mv} I^v, \\ \mathbf{E} &= \mathbf{z}_3 \mathbf{i} + \mathbf{z}_4 \mathbf{I}, & E_u &= z_{un} i^n + z_{uv} I^v. \end{aligned} \quad (16.15)$$

Переменными являются \mathbf{i} (контурные токи) и \mathbf{E} (напряжения узловых пар).

III. Если неизвестными являются контурные токи \mathbf{i}^1 и разности потенциалов узловых пар \mathbf{E}_2 , неизвестное \mathbf{i}^1 можно найти из одного первого ортогонального уравнения

$$\mathbf{z}_1 \mathbf{i}^1 = \mathbf{E}_1 + \mathbf{e}_1 - \mathbf{z}_2(\mathbf{i}^2 + \mathbf{I}^2) - \mathbf{z}_1 \mathbf{I}^1, \quad (16.16)$$

$$\mathbf{i}^1 = \mathbf{z}_1^{-1} [\mathbf{E}_1 + \mathbf{e}_1 - \mathbf{z}_2(\mathbf{i}^2 + \mathbf{I}^2)] - \mathbf{I}^1.$$

Подстановкой значения \mathbf{i}^1 во второе ортогональное уравнение находим неизвестное \mathbf{E}_2 без вычисления обратных матриц

$$\mathbf{E}_2 = \mathbf{z}_3(\mathbf{i}^1 + \mathbf{I}^1) + \mathbf{z}_4(\mathbf{i}^2 + \mathbf{I}^2) - \mathbf{e}_2. \quad (16.17)$$

Эту величину только через одни известные действующие величины \mathbf{E}_1 , \mathbf{e}_1 , \mathbf{e}_2 , \mathbf{i}^2 и \mathbf{I}^2 можно также выразить как

$$\mathbf{E}_2 = \mathbf{z}_3 \mathbf{z}_1^{-1} (\mathbf{E}_1 + \mathbf{e}_1) - \mathbf{e}_2 + (\mathbf{z}_4 - \mathbf{z}_3 \mathbf{z}_1^{-1} \mathbf{z}_2)(\mathbf{i}^2 + \mathbf{I}^2). \quad (16.18)$$

IV. Следует заметить, что, хотя число неизвестных равно числу катушек (в данном примере пяти), только матрица z_1 , обратную которой необходимо рассчитать, имеет число строк и столбцов, равное числу закрытых контуров. Никаких других обратных матриц при нахождении неизвестных рассчитывать не нужно.

Следует также заметить, что хотя для расчета контурных токов необходимо столько уравнений, сколько в сети имеется контуров, но, чтобы найти z_2 , необходимое для определения i^1 , следует все же принять во внимание наличие узловых пар.

Значит, знания z_1 (которое можно найти с помощью сингулярного тензора преобразования S , игнорируя узловые пары) недостаточно для расчета i^1 , если имеются воздействующие токи I .

В специальном случае уравнения (16.15) неизвестные находят по соотношениям

$$\begin{aligned} i &= z_1^{-1}(e - z_2 I), \\ E &= z_3 i + z_4 I, \\ E &= z_3 z_1^{-1} e + (z_4 - z_3 z_1^{-1} z_2) I. \end{aligned} \quad (16.19)$$

11. «АКТИВНЫЕ» УЗЛОВЫЕ ПАРЫ

I. Если некоторые узловые пары не имеют воздействующих на них токов I' и не обязательно знать разность потенциалов E' на них, то в расчете z можно не принимать во внимание наличие этих узловых пар и учитывать лишь столько узловых пар, сколько имеется известных I' или необходимых E' . Это происходит, если тензор импеданса z' , содержащий все оси узловых пар, получается каждый раз, когда одной из узловых пар пренебрегают. Соответствующие строку и столбец можно вычеркивать до тех пор, пока наконец z' будет иметь столько же строк и столбцов, сколько имеется контуров. Однако нельзя опустить ни одной строки или столбца, относящихся к контурной оси, поскольку при этом уничтожается соответствующая переменная.

Таким образом, для ортогональных сетей число необходимых уравнений может быть меньше числа катушек. В общем случае число полученных уравнений напряжения равно числу контуров и «активных» узловых пар. «Активной» будем называть такую узловую пару, для которой воздействующий ток I' или напряжение E' является известной величиной, в случае ее отсутствия по некоторым соображениям нужно рассчитать разность потенциалов E' .

II. Ортогональная сеть, в которой принимаются во внимание все координатные оси (следовательно, она имеет несингулярную

С), будет упоминаться как «полностью ортогональная сеть», или «полная сеть». Выражение «ортогональная сеть» используется всякий раз, когда существует два типа переменных (или два типа воздействующих величин), если не предполагается, что С несингулярная.

Следовательно, в общем случае считается, что для ортогональной сети число координатных осей равно числу контуров и «активных» узловых пар и сеть рассматривается как контурная сеть с сингулярной матрицей С.

Во многих случаях, особенно в задачах синтеза, все сети следует рассматривать как полностью ортогональные независимо от типа воздействующих величин, чтобы можно было получить для них несингулярную матрицу С. Когда каждая сеть определена несингулярным тензором преобразования С, переход от одной сети к любой другой сети при исследовании требуемого состояния является легкой рутинной процедурой и не требует применения методов проб и ошибок для нахождения диаграмм.

12. ЧИСЛОВОЙ ПРИМЕР

1. Предположим, что импедансы сети (см. рис. 16.8) имеют значения, показанные на рис. 16.11. Определенные значения указаны также для приложенных к катушкам напряжений e и воздействующих токов I . Неизвестными величинами являются контурные токи i' и напряжения узловых пар E' , а именно: два контурных тока $i^{a'}$ и $i^{b'}$ и три предварительных напряжения узловых пар $E_{p'}$, $E_{q'}$ и $E_{r'}$. Ни одна из известных величин i' или E' не является воздействующей.

Следует заметить, что, хотя сеть подает ток на две внешние нагрузки, соединенные через Z_{aa} и Z_{cc} , зажимы лишь одной из нагрузок рассматриваются как узловая пара. Другие две узловые пары нагрузки не включают. Такой выбор узловых пар может потребоваться во многих типах задач.

II. Если сеть рассматривается как чисто-контурная (см. рис. 16.9), то геометрические объекты z , e и I соответствующей примитивной сети равны

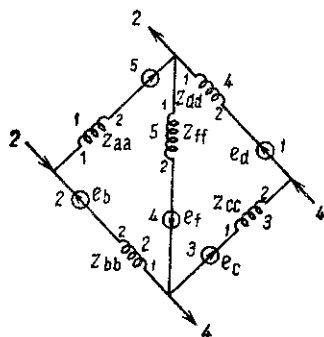


Рис. 16.11. Данная ортогональная сеть.

$$e = \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline a & b & c & d & f \\ \hline 5 & 2 & 3 & 1 & 4 \\ \hline \end{array},$$

$$I = \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline a & b & c & d & f \\ \hline 2 & 0 & -4 & 0 & 0 \\ \hline \end{array}$$

$$z = \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline a & b & c & d & f \\ \hline 1 & & & & \\ \hline b & 2 & & & \\ \hline c & & 3 & & \\ \hline d & & & 4 & \\ \hline f & & & & 5 \\ \hline \end{array}. \quad (16.20)$$

III. Новые компоненты геометрических объектов z' , e и I' для чисто-контурной сети можно найти подстановкой компонент z в уравнение (16.7), а $e' = C_e e$ и $I' = C^{-1}I$ по уравнениям (16.6) и (16.8), откуда

$$e' = \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline a' & b' & p' & q' & r' \\ \hline 11 & 6 & 6 & -1 & 2 \\ \hline \end{array}$$

$$I' = \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline a' & b' & p' & q' & r' \\ \hline 2 & 0 & -2 & 4 & -4 \\ \hline \end{array}$$

$$i' = \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline a' & b' & p' & q' & r' \\ \hline i^{a'} & i^{b'} & 0 & 0 & 0 \\ \hline \end{array}$$

$$E' = \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline a' & b' & p' & q' & r' \\ \hline 0 & 0 & E_{p'} & E_{q'} & E_{r'} \\ \hline \end{array}$$

$$z' = \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline a' & b' & p' & q' & r' \\ \hline 8 & 5 & 7 & 2 & 2 \\ \hline b' & 5 & 12 & 5 & -3 & 0 \\ \hline c' & 7 & 5 & 7 & 3 & 2 \\ \hline d' & 2 & -3 & 2 & 5 & 2 \\ \hline r' & 2 & 0 & 2 & 2 & 2 \\ \hline \end{array}. \quad (16.21)$$

IV. Чтобы получить решение для неизвестных компонент i' и E' , каждый вектор разделяется на две составляющие, а z' — на четыре составляющие по каждой контурной оси (a' , b') и осям узловых пар (p' , q' , r'):

$$i_1' = \begin{array}{|c|c|} \hline i^{a'} & i^{b'} \\ \hline \end{array} \quad i_2' = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 0 & 0 & 0 \\ \hline \end{array} \quad e_1' = \begin{array}{|c|c|} \hline 11 & 6 \\ \hline \end{array} \quad e_2' = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 6 & -1 & 2 \\ \hline \end{array}$$

$$E_1' = \begin{array}{|c|c|} \hline 0 & 0 \\ \hline \end{array} \quad E_2' = \begin{array}{|c|c|c|} \hline E_{p'} & E_{q'} & E_{r'} \\ \hline \end{array} \quad I_1' = \begin{array}{|c|c|} \hline 2 & 0 \\ \hline \end{array} \quad I_2' = \begin{array}{|c|c|c|} \hline -2 & 4 & -4 \\ \hline \end{array}.$$

Из-за отсутствия воображаемых катушек все известные компоненты i' и E' (а именно $i^{2'}$ и E_2') равны нулю.

$$z_1' = \begin{array}{|c|c|} \hline 8 & 5 \\ \hline 5 & 12 \\ \hline \end{array}, \quad z_2' = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 7 & 2 & 2 \\ \hline 5 & -3 & 0 \\ \hline \end{array}, \quad (16.22)$$

$$z_3' = \begin{array}{|c|c|} \hline 7 & 5 \\ \hline 2 & -3 \\ \hline 2 & 0 \\ \hline \end{array}, \quad z_4' = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 7 & 2 & 2 \\ \hline 2 & 5 & 2 \\ \hline 2 & 2 & 2 \\ \hline \end{array}.$$

Из уравнения (16.16) найдем неизвестное $i^{1'}$ (учитывая, что E_1' и $i^{2'}$ равны нулю) :

$$i^{1'} = z_1'^{-1}(e_1' - z_2' i^{2'}) - I^{1'}.$$

Следовательно,

$$z_2' i^{2'} = \begin{array}{|c|c|} \hline -7 \times 2 + 2 \times 4 - 2 \times 4 \\ \hline -5 \times 2 - 3 \times 4 - 0 \times 4 \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|} \hline -14 \\ \hline -22 \\ \hline \end{array}, \quad z_1'^{-1} = \begin{array}{|c|c|} \hline 0,169014 & -0,070423 \\ \hline -0,070423 & 0,112676 \\ \hline \end{array}$$

$$e_1' - z_2' i^{2'} = \begin{array}{|c|} \hline 11 + 14 \\ \hline 6 + 22 \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|} \hline 25 \\ \hline 28 \\ \hline \end{array}, \quad i^{1'} = \begin{array}{|c|} \hline 2,253521 - 2 \\ \hline 1,39437 - 0 \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|} \hline a' & 0,253521 \\ \hline b' & 1,39437 \\ \hline \end{array} \quad (16.23)$$

Неизвестные разности потенциалов E_2' найдем из уравнения (16.17)

$$E_2' = z_3'(i^{1'} + I^{1'}) + z_4' i^{2'} - e_2':$$

$$E_2' = \begin{array}{|c|} \hline (7 \times 160 + 99 \times 5) / 71 \\ \hline (2 \times 160 - 99 \times 3) / 71 \\ \hline 2 \times 160 / 71 \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|} \hline -7 \times 2 + 2 \times 4 - 2 \times 4 \\ \hline -2 \times 2 + 5 \times 4 - 2 \times 4 \\ \hline -2 \times 2 + 2 \times 4 - 2 \times 4 \\ \hline \end{array} - \begin{array}{|c|} \hline 6 \\ \hline -1 \\ \hline 2 \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|} \hline p' & 2,7464 \\ \hline q' & 9,3239 \\ \hline r' & -1,4930 \\ \hline \end{array} \quad (16.24)$$

V. Правильность полученных результатов можно проверить подстановкой численных значений токов и напряжений в схему сети, как показано на рис. 16.12. Они должны удовлетворять двум законам Кирхгофа: сумма всех токов в любом узле равна

нулю и сумма всех напряжений по замкнутым контурам равна нулю. Отметим, что в катушке Z_{aa} и во всех отдельных катушках протекают токи $i^a + I^a = 0,25 + 2 = 2,25$.

13. ЭТАПЫ ВЫВОДА УРАВНЕНИЯ ТОКА

I. Уравнение тока для ортогональных сетей устанавливается поэтапно аналогично тому, как это было выполнено для уравнения напряжения, с той лишь разницей, что двойственные величины взаимозаменяются.

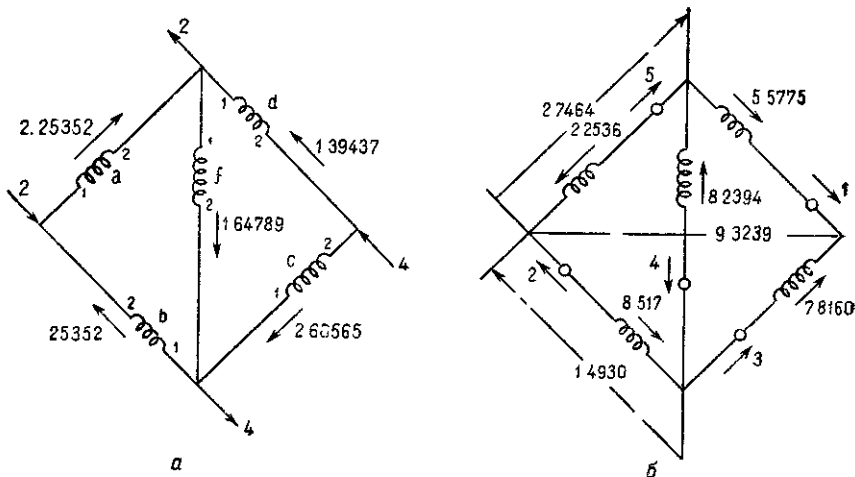


Рис. 16.12.

а — распределение токов; б — распределение напряжений.

Уравнения тока ортогональных сетей $\mathbf{i} + \mathbf{I} = \mathbf{Y}(\mathbf{E} + \mathbf{e})$ можно получить, рассматривая их как чисто-узловые сети, когда каждый контур открывается и вводятся воображаемые катушки. Для величин, значения которых известны, используются те же обозначения, что и для чисто-контурной сети (см. рис. 16.7).

Если некоторые контуры не имеют приложенных к ним напряжений \mathbf{e}' и нет необходимости знать некоторые контурные токи \mathbf{i}' , присутствие их можно не принимать во внимание. Таким образом, в общем случае число полученных уравнений токов равно числу узловых пар и «активных» контуров, если сеть рассматривается как узловая сеть с сингулярной матрицей \mathbf{C}_t^{-1} .

II. Прimitivesкая узловая сеть (рис. 16.13) также содержит четыре величины, причем \mathbf{e} , \mathbf{I} известны, а \mathbf{i} , \mathbf{E} неизвестны.

Тензор преобразования \mathbf{C}_t^{-1} этой сети находится точно так же, как и для любой другой чисто-узловой сети (гл. 14, § 6, II). Однако необходимо все воображаемые катушки (т. е. оси откры-

тых контуров и безадмиттансные ветви с известными воздействующими токами) также рассматривать как новые координатные оси. При выводе соотношения $E = C_t^{-1} E'$ безразлично, являются ли компоненты E' известными или неизвестными величинами.

III. После того как матрица $C_t^{-1} = A$ получена, Y' находят по соотношению $A_t Y A$. Известные и неизвестные компоненты переменных i' и E' и компоненты известных величин e' и I' находят точно так же, как для чисто-контурных сетей (см. § 8).

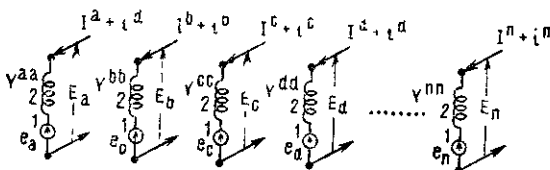


Рис. 16.13. Общая форма примитивной узловой сети.

IV. Окончательное уравнение тока имеет вид

$$i' + I' = Y'(E' + e'), \quad i^{o'} + I^{o'} = Y^{o'\beta'}(E_{\beta'} + e_{\beta'}). \quad (16.25)$$

Компоненты e' и I' являются известными величинами, а компоненты i' и E' частично известны, а частично неизвестны.

В системе уравнений число переменных i' равно числу «активных» контуров, а число переменных E' — числу узловых пар. «Ортогональные» уравнения токов для заданной сети записывают как

$$\left. \begin{aligned} i^1 + I^1 &= Y^1(e_1 + E_1) + Y^2(e_2 + E_2), \\ i^2 + I^2 &= Y^3(e_1 + E_1) + Y^4(e_2 + E_2), \end{aligned} \right\} \quad (16.26)$$

$$\left. \begin{aligned} i^m + I^m &= Y^{mn}(e_n + E_n) + Y^{mv}(e_v + E_v), \\ i^u + I^u &= Y^{un}(e_n + E_n) + Y^{uv}(e_v + E_v). \end{aligned} \right\}$$

Эти уравнения можно преобразовать различными способами.

Если в сети нет воображаемых катушек, то E_1 и i^2 равны нулю. Когда приложенное напряжение задано только в контурах, то $e_2 = 0$, а когда воздействующие токи заданы только на выбранных новых узловых парах, то $I^1 = 0$. При выполнении всех этих специальных условий ортогональные уравнения токов упрощаются:

$$\begin{aligned} i &= Y^1 e + Y^2 E, & i^m &= Y^{mn} e_n + Y^{mv} E_v, \\ I &= Y^3 e + Y^4 E, & I^u &= Y^{un} e_n + Y^{uv} E_v. \end{aligned} \quad (16.27)$$

Здесь переменными являются E и i .

V. Если неизвестными являются разности потенциалов узловых пар E_2 и активные контурные токи i^1 , то неизвестную E_2 можно найти из второго уравнения как

$$Y^4 E_2 = i^2 + I^2 - Y^3(e_1 + E_1) - Y^4 e^2, \quad (16.28)$$

$$E_2 = (Y^4)^{-1} [i^2 + I^2 - Y^3(e_1 + E_1)] - e_2.$$

Подставляя значение E_2 в первое ортогональное уравнение, найдем неизвестную i без каких-либо вычислений обратных матриц

$$i^1 = Y^1 \cdot (e_1 + E_1) + Y^2(e_2 + E_2) - I^1. \quad (16.29)$$

Через известные воздействующие величины она выражается как

$$i^1 = Y^2 Y^{4-1} (i^2 + I^2) - I^1 + (Y^1 - Y^2 Y^{4-1} Y^3)(e_1 + E_1). \quad (16.30)$$

И опять здесь число строк и столбцов тензора Y^4 , обратный которого нужно рассчитать, равно числу узловых пар.

В частном случае уравнения (16.27) эти выражения упрощаются:

$$E = (Y^4)^{-1} (I - Y^3 e),$$

$$i = Y^1 e + Y^2 E, \quad (16.31)$$

$$i = Y^2 Y^{4-1} I + (Y^1 - Y^2 Y^{4-1} Y^3) e.$$

14. СВОДКА ОСНОВНЫХ ЭТАПОВ

I. Итак, если число контуров ортогональной сети меньше числа узловых пар, то (если это возможно) при выводе уравнения напряжения сеть рассматривается как контурная. Если число узловых пар меньше числа контуров, то при выводе уравнения тока сеть рассматривается как узловая. При таком рассмотрении количество вычислений обратных матриц сокращается. Конечно, это не всегда легко выполнить, иногда могут быть известны только одни импедансы сети или одни адмиттансы и т. д.

II. Определяя z ортогональной сети, следует помнить, что: 1) неактивные узловые пары можно просто игнорировать и анализировать сеть как контурную с сингулярной матрицей C ; 2) наличие контуров можно игнорировать, только применяя формулы редукции гл. 10 после того, как z' уже найдено.

III. Рассчитывая Y ортогональной сети, следует иметь в виду, что: 1) некоторые контуры можно не учитывать, анализировать сеть как узловую с сингулярной матрицей C_T^{-1} ; 2) число узловых пар можно сократить только с помощью формул редукции после того, как Y' уже рассчитано.

15. НЕСИНГУЛЯРНАЯ МАТРИЦА С ДЛЯ СЕТИ ПРОИЗВОЛЬНОГО ТИПА

I. Если несингулярная матрица преобразования C получена для полностью ортогональной сети и какая-либо ось узловой пары не является необходимой, то соответствующий столбец матрицы C можно вычеркнуть. Все оси узловых пар можно опустить, так что окончательно число столбцов матрицы C равно числу контуров. Это соответствует уже известной нам сингулярной матрице *контурной сети* (рис. 16.14). Например, если оси узловых пар p' , q' , r' (см. рис. 16.3) не являются необходимыми, то матрица преобразования уравнения (16.6) упрощается:

| | | | | | |
|-----|------|------|------|------|------|
| | a' | b' | p' | q' | r' |
| a | 1 | | | | |
| b | 1 | | 1 | 1 | 1 |
| c | | 1 | | -1 | |
| d | | -1 | | | |
| f | 1 | 1 | 1 | | |

$$(16.32)$$

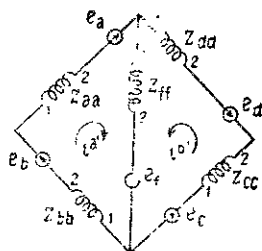


Рис. 16.14. Контурная сеть.

Оставшиеся столбцы нельзя опустить, не разрушив саму сеть.

После получения несингулярной матрицы C_t^{-1} столбцы, соответствующие контурным осям, можно вычеркивать до тех пор, пока не останется *узловая сеть* (рис. 16.15) с матрицей преобразования C_t^{-1} (см. уравнение (16.9)):

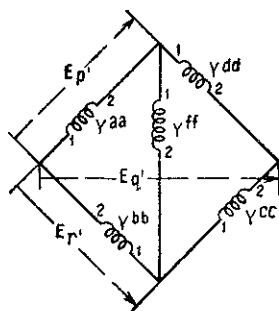


Рис. 16.15. Узловая сеть.

| | | | | | |
|-----|------|------|------|------|------|
| | a' | b' | p' | q' | r' |
| a | 1 | | -1 | | |
| b | | | | | 1 |
| c | | | -1 | 1 | |
| d | | -1 | 1 | -1 | |
| f | | | 1 | | -1 |

$$(16.33)$$

Здесь также все остальные столбцы опустить нельзя.

Итак, *следует помнить, что:* 1) при формировании z -сети существованием неактивных узловых пар можно пренебречь, од-

нако ни один из контуров опустить нельзя; 2) при формировании Y сети можно пренебречь наличием неактивных контуров, однако ни одну из узловых пар опустить нельзя.

В предельных случаях пренебрежение всеми узловыми парами приводит к z контурной сети, а пренебрежение всеми контурами приводит к Y узловой сети.

II. Чтобы сделать более ясной физическую суть исключения из рассмотрения узловых пар и контуров, нужно помнить, что любая сингулярная (прямоугольная) матрица преобразования контурной или узловой сети, приведенная в предыдущих главах, представляет собой только часть несингулярной (квадратной) матрицы, которую можно получить для любой контурной или узловой сети простым добавлением отсутствующих ортогональных осей, если рассматривать узловые пары закрытыми или контуры открытыми.

В уравнении (16.16) показано, что для определения контурных токов i^1 достаточно найти только одну обратную матрицу от z_1 . Итак, если нет воздействующих токов I (и i^2), то определять значения z_2 не нужно. Теперь необходимое значение z_1 можно найти из примитивной сети с помощью сингулярной матрицы S , в которой нет осей узловых пар. Таким образом, *обоснованием использования сингулярной матрицы S в анализе контурных сетей является то обстоятельство, что для нахождения контурных токов i^1 значения z_2 , z_3 и z_4 в уравнении (16.16) не требуются. Исключения составляют только z_1 . А значение Y можно найти, даже если нет осей узловых пар в S .*

Такое обоснование используется в анализе узловых сетей, для которых с помощью сингулярной матрицы S_i^{-1} нужно считать только значение Y^4 .

III. Поскольку любую сеть можно рассматривать как полностью ортогональную, и если предположить, что она содержит четыре электрические величины, то можно найти компоненты тензоров импеданса или адмиттанса z' или Y' любой сети из n катушек, исходя из известных компонент z или Y любой другой сети из n катушек, а не из компонент для примитивных сетей. Координатная (эталонная) сеть может иметь любое количество контуров и узловых пар. Однако обе сети следует анализировать как полные.

Примитивная сеть используется как координатная сеть, поскольку легко: 1) установить компоненты ее геометрических объектов; 2) получить тензор преобразования, соотносящий новую сеть с примитивной сетью.

IV. Чтобы найти матрицу преобразования, заменяющую частную сеть 1 сетью 2, часто бывает проще ввести в качестве координатной сети примитивную сеть. Пусть: 1) S_1^0 преобразует примитивную сеть в сеть 1; 2) S_2^0 преобразует примитивную

сеть в сеть 2; 3) C_2^1 преобразует сеть 1 в сеть 2. Тогда, используя их групповое свойство, получаем

$$C_1^0 C_2^1 = C_2^0. \quad (16.34)$$

Отсюда матрица преобразования, переводящая сеть 1 в сеть 2, равна

$$C_2^1 = (C_1^0)^{-1} C_2^0, \quad (16.35)$$

где C_1^0 и C_2^0 — матрицы преобразования двух сетей, для которых используются примитивные сети в качестве координатных сетей.

V. Следует помнить, что сингулярный тензор преобразования C_2 , используемый при исключении намагничивающего тока, является также частью несингулярного тензора преобразования, который разделяет действительные токи на гипотетические «нагруженные» и «намагничивающие» токи (см. гл. 6, § 12).

16. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ДВУХ СЕТЕЙ ПРОИЗВОЛЬНОГО ТИПА

I. Чтобы показать, что сеть из n катушек можно использовать в качестве координатной сети при анализе любой другой n -катушечной сети, в качестве примера рассмотрим пятикатушечную сеть (рис. 16.16, а) (воспроизведенную с рис. 16.8), ко-

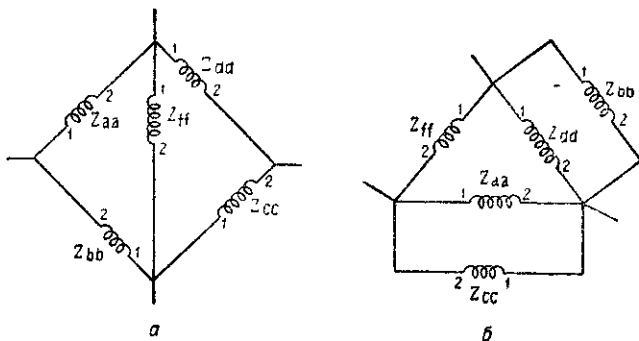


Рис. 16.16. Преобразование сетей:
а — координатная сеть; б — производная сеть.

торая содержит два контура и три узловые пары. Тензоры C и C^{-1} сети уже были получены раньше, в § 9. Предположим, что пять катушек пересоединены так, что образуют другую сеть с тремя контурами и двумя узловыми парами (рис. 16.16, б). Задача состоит в том, чтобы 1) установить C' , переводящую первую сеть во вторую; 2) с помощью C' найти e'' , I'' и z'' второй сети по e' , I' и z' первой сети (см. § 6).

Метод анализа тот же, что и в случае, когда в качестве координатной сети используется примитивная сеть.

II. Предположим, что обе сети являются пятиконтурными, а узловые пары рассматриваются как воображаемые катушки. Тогда:

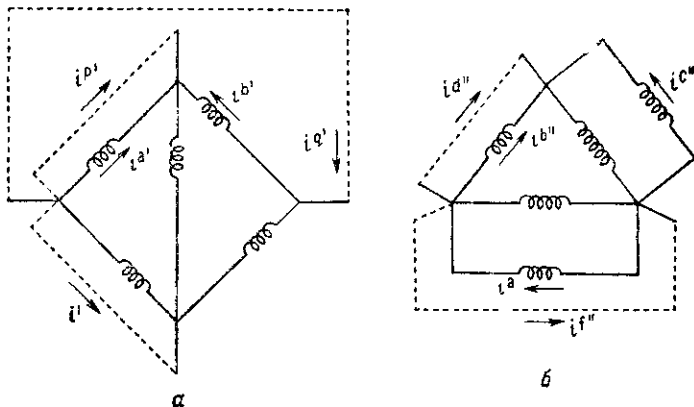


Рис. 16.17. Переход к чисто-контурной сети:
а — координатная сеть; б — производная сеть.

1. Выберем пять новых переменных i'' для новой сети, две из которых на узловых парах, а остальные в контурах (рис. 16.17). В старой сети (рис. 16.17, а) выбраны три переменные узловых пар и две контурные переменные.

2. С помощью первого закона Кирхгофа запишем токи в каждой катушке обеих сетей (рис. 16.18, а).

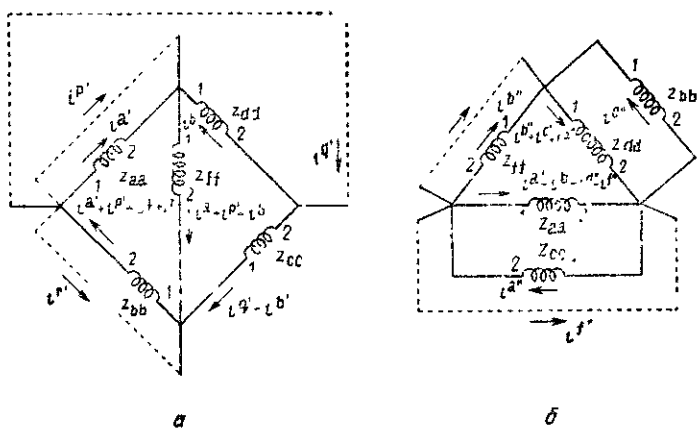


Рис. 16.18. Токи в отдельных катушках:
а — координатные сети; б — производная сеть.

3. Приравниваем старые и новые токи в каждой катушке (рис. 16.18, а, б)

$$\begin{aligned}
 i^{a'} &= i^{a''} - i^{b''} - i^{d''} - i^{f''} \\
 i^{a'} + i^{p'} - i^{q'} + i^{r'} &= i^{c''} \\
 i^{b'} - i^{q'} &= i^{a''} \\
 -i^{b'} &= i^{b''} + i^{c''} + i^{d''} \\
 i^{a'} + i^{b'} + i^{p'} &= -i^{b''}.
 \end{aligned} \tag{16.36}$$

Эту систему уравнений всегда можно преобразовать так, что в левой части каждого уравнения окажется только один старый ток:

$$\begin{aligned}
 i^{a'} = i^{a''} & \quad -i^{b''} \quad -i^{d''} \quad -i^{f''} & a' \\
 i^{b'} = & \quad -i^{b''} - i^{c''} - i^{d''} & b' \\
 i^{p'} = & -i^{a''} + i^{b''} + i^{c''} + 2i^{d''} + i^{f''} & c' = p' \\
 i^{q'} = & -i^{a''} - i^{b''} - i^{c''} - i^{d''} & q' \\
 i^{r'} = & i^{a''} + i^{b''} - i^{c''} & r'
 \end{aligned}$$

| | a'' | b'' | c'' | d'' | f'' |
|---------|-----|-----|-----|-----|-----|
| a' | 1 | -1 | 0 | -1 | -1 |
| b' | 0 | -1 | -1 | -1 | 0 |
| c' = p' | -1 | 1 | 1 | 2 | 1 |
| q' | -1 | -1 | -1 | -1 | 0 |
| r' | 1 | 1 | -1 | 0 | 0 |

(16.37)

Следует отметить наличие целого числа 2.

4. Коэффициенты при новых токах дают матрицу преобразования C' , превращающую сеть на рис. 16.18, а в сеть на рис. 16.18, б.

III. Новые компоненты тензора импеданса новой сети найдем по формуле $C'_i z' C'$

| | a'' | b'' | c'' | d'' | f'' |
|-----------|--------------------|----------------------------|-------------------|-------------------|-----------|
| a'' | $Z_{aa} + Z_{fc}$ | $-Z_{aa} - Z_{cf}$ | 0 | $-Z_{aa}$ | $-Z_{aa}$ |
| b'' | $-Z_{aa} - Z_{fc}$ | $Z_{aa} + Z_{dd} + Z_{ff}$ | Z_{dd} | $Z_{aa} + Z_{dd}$ | Z_{aa} |
| z'' = c'' | 0 | Z_{dd} | $Z_{bb} + Z_{dd}$ | Z_{dd} | 0 |
| d'' | $-Z_{aa}$ | $Z_{aa} + Z_{dd}$ | Z_{dd} | $Z_{aa} + Z_{dd}$ | Z_{aa} |
| f'' | $-Z_{aa}$ | Z_{aa} | 0 | Z_{aa} | Z_{aa} |

(16.38)

Новые компоненты напряжений, действующих на катушки, равны $C_t' e' = e''$:

$$e'' = \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline a'' & b'' & c'' & d'' & f'' \\ \hline e_a + e_c & -e_a + e_d - e_f & -e_b + e_d & -e_a + e_d & -e_a \\ \hline \end{array} \quad (16.39)$$

Вектор I'' можно найти, рассчитав сначала матрицу, обратную C' .

17. ПРОВЕРКА ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

Правильность вычислений C' , z'' , e'' и I'' сети на рис. 16.16, б можно проверить, получив их не из рис. 16.16, а, а из примитивной сети.

Матрица преобразования C'' на рис. 16.8, б (если использовать ее примитивную контурную сеть) равна

$$\begin{array}{l} i^a = i^{a''} - i^{b''} - i^{d''} - i^{f''} \\ i^b = -i^{c''} \\ i^c = i^{a''} \\ i^d = i^{b''} + i^{c''} + i^{d''} \\ i^f = -i^{b''} \end{array} \quad C'' = \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline a'' & b'' & c'' & d'' & f'' \\ \hline a & 1 & -1 & & -1 & -1 \\ \hline b & & & -1 & & \\ \hline c & 1 & & & & \\ \hline d & & 1 & 1 & 1 & \\ \hline f & & -1 & & & \\ \hline \end{array} \quad (16.40)$$

Эта матрица C'' должна быть произведением матриц C (16.6) и C' (16.37), т. е. $CC' = C''$:

$$\begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline 1 & & & & \\ \hline 1 & & 1 & 1 & 1 \\ \hline & 1 & & -1 & \\ \hline & -1 & & & \\ \hline 1 & 1 & 1 & & \\ \hline \end{array} \cdot \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline 1 & -1 & & -1 & -1 \\ \hline & -1 & -1 & -1 & \\ \hline -1 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ \hline -1 & -1 & -1 & -1 & \\ \hline 1 & 1 & -1 & & \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline 1 & -1 & & -1 & -1 \\ \hline & & -1 & & \\ \hline 1 & & & & \\ \hline & 1 & 1 & 1 & \\ \hline & -1 & & & \\ \hline \end{array} \quad (16.41)$$

Матрицы (16.40) и (16.41) одинаковы. Матрица импедансов имеет вид

$$C_i z C^i = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} & a'' & b'' & c'' & d'' & f'' \\ a'' & Z_{ca} + Z_{cc} & -Z_{aa} - Z_{cf} & 0 & -Z_{aa} & -Z_{aa} \\ b'' & -Z_{aa} - Z_{fc} & Z_{aa} + Z_{dd} + Z_{ff} & Z_{dd} & Z_{aa} + Z_{dd} & Z_{aa} \\ c'' & 0 & Z_{dd} & Z_{bb} + Z_{dd} & Z_{dd} & 0 \\ d'' & -Z_{aa} & Z_{aa} + Z_{dd} & Z_{dd} & Z_{aa} + Z_{dd} & Z_{aa} \\ f'' & -Z_{aa} & Z_{aa} & 0 & Z_{aa} & Z_{aa} \end{array} \end{array} \quad (16.42)$$

Эта матрица соответствует уравнению (16.38). Итак, $C_i'' e = e''$:

$$e'' = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} & a'' & b'' & c'' & d'' & f'' \\ e'' & e_a + e_c & -e_a + e_d - e_f & -e_b + e_d & -e_a + e_d & -e_a \end{array} \end{array} \quad (16.43)$$

Эта 1-матрица также соответствует уравнению (16.39).

Следовательно, нет никакой разницы в том, какая сеть из n катушек используется в качестве координатной сети для расчета любой сети из n катушек. Конечные n -матрицы и уравнения одинаково независимы от выбора исходной координатной сети.

18. ЭКВИВАЛЕНТНОСТЬ ВСЕХ n -КАТУШЕЧНЫХ СЕТЕЙ

I. Таким образом, было показано, что можно найти несингулярную матрицу преобразования S_α^a , для любых двух n -катушечных сетей независимо от того, сколько контуров, узловых пар и подсетей имеет каждая из них. Это следует из того, что связанные с каждой сетью шесть n -матриц, а именно $e_{(\alpha)}$, $E_{(\alpha)}$, $i_{(\alpha)}$, $I_{(\alpha)}$, $z_{(\alpha)(\beta)}$ и $Y_{(\alpha)(\beta)}$, не являются независимыми одна от другой, а представляют различные совокупности компонент шести сущностей или «геометрических объектов», а именно e_α , E_α , i^α , I^α , $z_{\alpha\beta}$ и $Y^{\alpha\beta}$, по различным координатным системам.

Такое большое разнообразие n -матриц связано вместе в шесть понятий посредством группы несингулярных матриц преобразования S_α^a , благодаря тому факту, что каждую из них можно найти из любой другой исключительно с помощью некоторой частной матрицы S_α^a , не используя никакой другой n -матрицы. Компоненты всех матриц преобразования этой группы содержат только целые числа. Эту группу можно назвать «группой соединения».

Подобным образом различные уравнения поведения всех n -катушечных сетей не являются независимыми и могут быть пре-

образованы друг в друга с помощью C_a^z . Следовательно, если различные типы уравнений однажды получены для примитивной сети (или для любой другой сети), то аналогичные уравнения можно получить для всех асимметричных, активных сетей с помощью рутинных преобразований.

Следует, однако, подчеркнуть, что между сетями, имеющими различное число катушек, группы матриц преобразования все же не были получены. Такие группы будут введены в связи с задачей синтеза сетей.

II. Подведем итог. При исследовании характеристик, уравнений или поведения сетей нет необходимости рассматривать только одну частную сеть, часто можно одновременно рассматривать аналогичные сети, устанавливая инвариантные уравнения. Это возможно только благодаря существованию группы несингулярных матриц преобразования C_a^z , с помощью которых можно привести уравнения одной сети из n катушек к уравнениям любой другой сети из n катушек. Матрицы преобразования можно получить между любыми n -катушечными сетями из группы (группы соединений), поскольку они удовлетворяют четырем групповым условиям (гл. 11, § 3), а именно:

1) произведение любых двух матриц C также является элементом группы, т. е. если C_2^1 преобразует сеть 1 в сеть 2 и C_3^2 преобразует сеть 2 в сеть 3, то их произведение $C_3^1 C_3^2 = C_3^1$ преобразует сеть 1 в сеть 3; 2) справедлив ассоциативный закон: $(C_2^1 C_3^2) C_4^3 = C_2^1 (C_3^2 C_4^3)$, т. е. несколько последовательных преобразований можно выполнить при любых группировках; 3) сеть остается неизменной при преобразовании ее посредством единичной матрицы I ; 4) каждая матрица преобразования C имеет обратную C^{-1} , так что уравнения ортогональной сети можно получить вновь из уравнений новой сети с помощью C^{-1} .

Следует помнить, что существование этой группы матриц C возможно потому, что с каждой сетью ассоциируются четыре электромагнитные величины (e, E, i и I), а не две (e, i или E, I).

ВЗАИМОСВЯЗАННЫЕ ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ И МАГНИТНЫЕ СЕТИ

1. МАГНИТНЫЕ И ДИЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ СЕТИ

I. При установлении уравнений поведения сетей, скажем $e=zi$, не уделялось внимания компонентам различных геометрических объектов. Было принято, что они могут быть константами, функциями, линейными операторами и пр.

Исследуем теперь подробно определенную специальную форму z и Y . Пусть ее матрица будет симметричной, т. е. сеть неподвижная и симметричная, и пусть сеть содержит только сосредоточенные сопротивления, индуктивности и эластансы¹⁾. Задача настоящей главы состоит в том, чтобы выразить тензоры z и Y этих специальных сетей в терминах более фундаментальных тензоров.

II. При изучении таких сетей выделим три типа непрерывных путей, каждый из которых вносит свой вклад в конструктивные параметры, определяющие значение z и Y . Эти пути следующие: 1) описываемые электрическими зарядами; назовем их «электрической сетью»; 2) описываемые линиями магнитного потока, называемые «магнитной сетью»; 3) описываемые линиями диэлектрического потока, называемые «диэлектрической сетью».

Каждая из этих трех сетей построена из «катушек» и «узлов» (1- и 0-ячеек). (Во вращающихся электрических машинах эти три типа сетей обобщаются, включая также электрические, магнитные и диэлектрические «слои» (2-ячейки). Имеются также механические сети, принимаемые во внимание при анализе вращающихся машин или других электромеханических систем.)

III. Теперь будем считать, что электрическая сеть содержит только взаимосоединенные непрерывные медные проводники, которые не имеют других конструктивных параметров, кроме сопротивлений $r_{\alpha\beta}$, представляющих собой сопротивления протекающему в сети потоку электрических зарядов. Индуктивности $l_{\alpha\beta}$ катушек обусловлены линиями магнитного потока, идущими совершенно другими путями и не по направлению проводника,

¹⁾ Эластанс — величина, обратная емкости (см. гл. 2). (Прим. ред.).

как для электрических зарядов. Эти пути лежат в окрестности непрерывного медного проводника. Подобным образом эластансы $s_{\alpha\beta}$, обусловленные линиями электростатического потока, локализованы частично в конденсаторах (в разрывах, вводимых в проводники). Конденсаторы не будут считаться частью электрической сети, поскольку электрические заряды не проходят через разрывы между обкладками.

IV. Следовательно, когда предполагается, что тензор импеданса $z_{\alpha\beta}$ в сети из катушек содержит другие конструктивные параметры, помимо сопротивления $r_{\alpha\beta}$, тогда молчаливо предполагается, что существуют другие сети, взаимосвязанные с основной электрической сетью, а именно, магнитные и диэлектрические, присутствие которых, однако, замаскировано тем, что отдельные катушки искусственно наделяются собственными и взаимными индуктивностями и эластансами.

Однако компоненты $z_{\alpha\beta}$, а именно собственные и взаимные индуктивности и эластансы отдельных катушек, можно изменить при изменении способа соединения различных членов, составляющих магнитные и диэлектрические сети, не изменяя взаимосоединения самой электрической сети. Таким образом, при установлении конструктивных параметров $z_{\alpha\beta}$ электрической сети необходимо изучить взаимосвязанные магнитные и диэлектрические сети.

В то же время магнитные и диэлектрические сети исследуются в электротехнике, но без взаимосвязи с электрическими сетями. Однако их инженерное значение как независимых сетей гораздо меньше, чем электрических. Их анализ как независимых сетей был дан в предыдущих главах.

2. УРАВНЕНИЯ СОСТОЯНИЯ ИЗОЛИРОВАННЫХ КОНТУРНЫХ СЕТЕЙ

I. Если рассматривать изолированные электрические, магнитные и электростатические поля, то соотношения между интенсивностями полей (воздействующая величина) и результирующими плотностями потоков (величина отклика) вдоль выбранного направления в каждой точке неподвижной однородной среды определяются так:

$$1) \text{ в электрическом поле } e = ri \text{ или } i = ge; \quad (17.1)$$

$$2) \text{ в магнитном поле } h = \rho b, \text{ или } b = \rho h; \quad (17.2)$$

$$3) \text{ в электростатическом поле } e = sd, \text{ или } d = ce. \quad (17.3)$$

Различные символы определены в табл. 17.1.

II. В неподвижной неоднородной среде интенсивность поля, действующая в одном направлении, порождает потоки, которые имеют составляющие по другим направлениям. Поэтому коэффициент пропорциональности двух величин не может быть скаляром. Рассматривая воздействующие и ответные величины

| Символы | |
|--|--|
| электрические | вещественные |
| e — напряженность электрического поля | r — удельное сопротивление |
| h — напряженность магнитного поля | ρ — удельное магнитное сопротивление; |
| ε — напряженность электростатического поля | s — эластанс — удельная «электростатическая жесткость» ¹⁾ |
| i — плотность тока | g — удельная проводимость |
| b — плотность магнитного потока | μ — магнитная проницаемость |
| d — плотность электростатического потока | c — диэлектрическая постоянная |

¹⁾ Величина, обратная удельной емкости.

В каждой точке как векторы, параметры среды вместо скаляров будем считать тензорами валентности два, а приведенные выше соотношения для неоднородной среды примут вид

$$1) e_{\alpha} = r_{\alpha\beta} i^{\beta} \quad \text{или} \quad i^{\alpha} = g^{\alpha\beta} e_{\beta}; \quad (17.4)$$

$$2) h_{\alpha} = \rho^{\alpha\beta} b_{\beta}, \quad b_{\alpha} = \mu_{\alpha\beta} h^{\beta}; \quad (17.5)$$

$$3) e_{\alpha} = s_{\alpha\beta} d^{\beta}, \quad d^{\alpha} = c^{\alpha\beta} e_{\beta}. \quad (17.6)$$

Позиции индексов следуют из соображений, которые приведены ниже.

III. При изучении сетей вместо интенсивности поля в точке рассматривается интеграл интенсивности по линии между двумя точками (узловая пара) или по замкнутой цепи (контур). Точно так же вместо плотности потока в точке рассматривается ее поверхностный интеграл по площади поперечного сечения катушки.

Сеть с несколькими контурами и узловыми парами рассматривается как неоднородное поле, в котором предполагается только конечное число направлений (во всех других направлениях поле равно нулю).

В такой интерпретации уравнения (17.4)—(17.6) остаются неизменными и представляют уравнения поведения контурных сетей трех типов. Каждый тип при этом является изолированной сетью.

IV. Вначале изучим изолированные магнитные и диэлектрические сети, а затем эффекты взаимоотношения их с электрической сетью.

3. МАГНИТНЫЕ СЕТИ

I. Магнитная сеть состоит из магнитных проводников (обычно железо и воздух) и их соединений (рис. 17.1, а).

Аналогичная электрическая сеть показана на рис. 17.1, б.

Такие магнитные сети играют важную роль в многообмоточных трансформаторах, вращающихся машинах, измерительных приборах и т. д. Конструктивными параметрами их являются

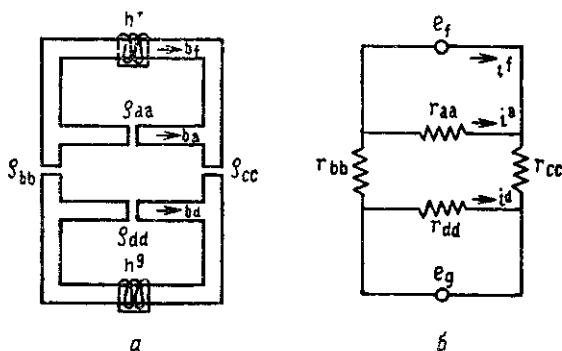


Рис. 17.1.

а — магнитная сеть; б — ее электрический аналог.

магнитные сопротивления (*релактансы*) ρ^{aa} , ρ^{bb} различных магнитных компонент или их проницаемости μ_{aa} , μ_{bb} и т. д. Между отдельными членами нет взаимных релактансов ρ^{ab} или проницаемостей μ_{ab} точно так же, как нет взаимных сопротивлений между отдельными катушками электрической сети.

Магнитную сеть можно также рассматривать как контурную, узловую или ортогональную в зависимости от точки зрения.

II. Наложенные электромагнитные величины бывают двух видов:

1) *силы намагничивания* h^a обычно создаются токами, протекающими в катушках, намотанных вокруг магнитных путей в изолированных точках (магнитодвижущие силы — МДС); постоянные магниты также имеют МДС, однако здесь они не рассматриваются;

2) *плотность магнитного потока* b_a . Каждая из этих двух типов величин может быть и *приложенной* и *ответной* величиной.

III. По своему *физическому* действию МДС аналогична напряжению, а плотность потока — току. В частности:

1) *в контурной сети* МДС h приложены в разных точках, а плотность потока b возникает в замкнутых контурах как отклик, подобно приложенному e и отклику i ;

2) *в узловой сети* плотность магнитного потока B приложена в узловых парах, и в ответ в узловых парах возникают МДС H

(или, скорее, разности магнитных потенциалов) подобно приложенному I и ответу E .

Из-за определенной взаимозависимости, существующей между векторами электрических и магнитных сетей во взаимосвязанной системе (как показано в § 8, III), магнитные потоки, связывающие различные катушки, представляются ковариантным вектором b_α , тогда как физически подобный ток является контравариантным вектором i^α . Подобным образом МДС катушки является контравариантным вектором h^α , в то время как физически подобный вектор напряжения — ковариантным e_α .

В соответствии с этим изменением тензор релактанса — $\rho^{\alpha\beta}$ (физически подобный $r_{\alpha\beta}$), а тензор проницаемости — $\mu_{\alpha\beta}$ (физически подобный $\gamma^{\alpha\beta}$).

Различные уравнения поведения подобны уравнениям электрических сетей, за исключением того, что позиции индексов оказались измененными, т. е.

1) для контурной сети уравнение МДС имеет вид

$$\mathbf{h} = \rho \mathbf{b}, \quad h^m = \rho^{mn} b_n; \quad (17.7)$$

2) для узловой сети уравнение потока

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}, \quad B_\alpha = \mu_{\alpha\beta} H^\beta; \quad (17.8)$$

3) для ортогональной сети уравнения МДС и потока

$$\mathbf{H} + \mathbf{h} = \rho (\mathbf{b} + \mathbf{B}), \quad H^\alpha + h^\alpha = \rho^{\alpha\beta} (b_\beta + B_\beta), \quad (17.9)$$

$$\mathbf{b} + \mathbf{B} = \mu (\mathbf{H} + \mathbf{h}), \quad b_\alpha + B_\alpha = \mu_{\alpha\beta} (H^\beta + h^\beta). \quad (17.10)$$

4. ПРИМЕР МАГНИТНОЙ КОНТУРНОЙ ЦЕПИ

1. Пусть дана сеть (рис. 17.2), в которой электрическая сеть взаимосвязана с магнитной и в которой состояние электрической сети известно.

Поскольку ковариантные и контравариантные индексы физически подобных величин взаимозаменяемы, то между электрическими и магнитными сетями существует такая же двойственность, как между контурными и узловыми сетями.

Во всех рассматривавшихся до сих пор задачах электрических сетей предполагалось, что собственные и взаимные индуктивности отдельных катушек (z примитивной сети) известны. В настоящем примере предполагается, однако, что известны только релактансы $\rho^{\alpha\beta}$ отдельных элементов магнитной

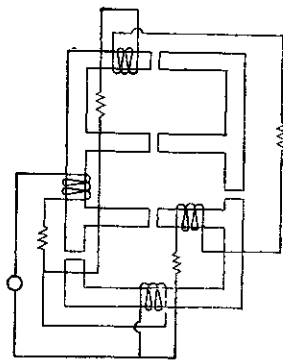


Рис. 17.2. Взаимосвязанная электрическая и магнитная сеть.

сети. Следовательно, чтобы найти поведение электрической сети, необходимо удалить все электрические соединения и найти собственные и взаимные индуктивности (проницаемости) отдельных катушек (показанных еще раз на рис. 17.3, а) из отдельных релактансов магнитных членов. Подобные случаи встречаются во всех многообмоточных трансформаторах.

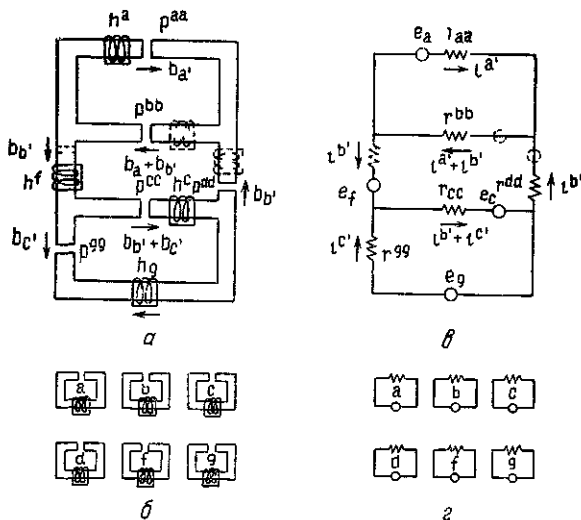


Рис. 17.3.

а — магнитная сеть, б — примитивная магнитная сеть; в — эквивалентная электрическая сеть, г — примитивная электрическая сеть.

Проблема нахождения собственных и взаимных проницаемостей (или индуктивностей) отдельных катушек, входящих в магнитную сеть, аналогична нахождению собственных и взаимных адмиттансов отдельных катушек электрической сети *после того*, как катушки соединены в несколько контуров (см. гл. 5, § 8). Итак, вычисление идет в два этапа:

1) прежде всего находят собственные и взаимные релактансы магнитных *контуров*, образуемых отдельными элементарными магнитными составляющими;

2) затем находят собственные и взаимные проницаемости отдельных *магнитных членов* (или катушек, навитых вокруг них). В этом параграфе дается первый этап вычислений, второй этап дан в § 9.

II. Электрическая сеть, подобная магнитной сети (рис. 17.3, а), показана на рис. 17.3, в. Их анализ ведется параллельно. Примитивная магнитная контурная сеть показана на рис. 17.3, б.

Ее тензор релактансов равен

$$\rho = \rho^{mn} = \begin{array}{c|cccccc} n & a & b & c & d & f & g \\ \hline m & a & \rho^{aa} & & & & \\ & b & & \rho^{bb} & & & \\ & c & & & \rho^{cc} & & \\ & d & & & & \rho^{dd} & \\ & f & & & & & 0 \\ & g & & & & & \rho^{gg} \end{array} \quad (17.11)$$

Компоненты этого тензора, представляющие релактансы различных путей, обычно вычисляют с помощью методов *теории поля*.

Вместо релактансов $\rho^{aa} \dots$, конечно, можно использовать *проницаемости* $\mu_{aa} \dots$, где $\rho^{ad} = 1/\mu_{aa}$.

В магнитной сети с каждой МДС ассоциируется отдельный магнитный релактанс, в том числе и равный нулю, а с каждым релактансом ассоциируется МДС, величина которой также может быть равна нулю. Как следствие, примитивная магнитная контурная сеть содержит равное число электрических и магнитных элементов. Введение дополнительных катушек и релактансов аналогично введению добавочного напряжения e_a вместе с импедансом Z_{aa} и дополнительному импедансу с напряжением, т. е. в примитивной электрической сети каждому новому члену соответствует дополнительный импеданс Z_{aa} и связанное с ним дополнительное напряжение e_a .

Приложенная МДС представлена вектором

$$\mathbf{h} = \mathbf{h}^m = \begin{array}{c|cccccc} m & a & b & c & d & f & g \\ \hline & h^a & 0 & h^c & 0 & h^f & h^g \end{array} \quad (17.12)$$

III. Поскольку имеется *три* контура, любые три магнитных потока могут считаться переменными (см. рис. 17.3, *a*). Там же показаны потоки, проходящие через каждое магнитное сопротивление.

Уравнение преобразования $b_m = C_m^{m'} b_{m'}$ или $\mathbf{b} = \mathbf{C}^{-1} \mathbf{b}'$ получается *приравниванием старых и новых потоков, проходящих через каждое магнитное сопротивление* ρ^{aa} , ρ^{bb} как

$$\begin{aligned}
 b_a &= b_{a'} \\
 b_b &= b_{a'} + b_{b'} \\
 b_c &= b_{b'} + b_{c'} \\
 b_d &= b_{b'} \\
 b_f &= b_{b'} \\
 b_g &= b_{c'}
 \end{aligned}
 \quad
 \mathbf{C}_t^{-1'} = \mathbf{A} =
 \begin{array}{c|ccc}
 & a' & b' & c' \\
 \hline
 a & 1 & & \\
 \hline
 b & 1 & 1 & \\
 \hline
 c & & 1 & 1 \\
 \hline
 d & & 1 & \\
 \hline
 f & & 1 & \\
 \hline
 g & & & 1
 \end{array}
 \quad (17.13)$$

Коэффициенты при новых токах образуют \mathbf{C}_t^{-1} . Если \mathbf{C}_t^{-1} заменить \mathbf{A} , то можно использовать все формулы, выведенные для контурной электрической сети и для магнитной контурной сети простой заменой в них (в прямом обозначении) \mathbf{C} на \mathbf{A} .

IV. Новые компоненты тензора релактанса ρ находят посредством $\mathbf{A}_i \rho \mathbf{A}$, а компоненты \mathbf{h}' — посредством $\mathbf{A}_i \mathbf{h}$ как

$$\rho \mathbf{A} =
 \begin{array}{c|ccc}
 & a' & b' & c' \\
 \hline
 a & \rho^{aa} & & \\
 \hline
 b & \rho^{bb} & \rho^{bb} & \\
 \hline
 c & & \rho^{cc} & \rho^{cc} \\
 \hline
 d & & \rho^{dd} & \\
 \hline
 f & & & \\
 \hline
 g & & & \rho^{gg}
 \end{array},
 \quad (17.14)$$

$$\rho^{m'n'} =
 \begin{array}{c|ccc}
 m' & n' & a & b' & c' \\
 \hline
 a' & \rho^{aa} + \rho^{bb} & \rho^{bb} & 0 \\
 \hline
 b' & \rho^{bb} & \rho^{bb} + \rho^{cc} + \rho^{dd} & \rho^{cc} \\
 \hline
 c' & 0 & \rho^{cc} & \rho^{cc} + \rho^{gg}
 \end{array},
 \quad (17.15)$$

$$\mathbf{h}' = \mathbf{h}^{m'} =
 \begin{array}{c|ccc}
 m' & a' & b' & c' \\
 \hline
 & h^a & h^c + h^f & h^c + h^g
 \end{array}
 \quad (17.16)$$

V. Если приложенные МДС предполагаются известными, то магнитные потоки в контурах находят с помощью $\mathbf{b}' = \rho'^{-1} \mathbf{h}' = = \mu' \mathbf{h}'$.

Если три компоненты \mathbf{b}' вычислены, то потоки через отдельные релактансы можно найти как $\mathbf{b} = \mathbf{A} \mathbf{b}'$. Падение магнитного потенциала (МДС) на каждом отдельном релактансе находят из $\mathbf{h}_c = \rho \mathbf{A} \mathbf{b}'$, где $\rho \mathbf{A}$ уже было вычислено в уравнении (17.14), так что

$$\mathbf{h}_c =
 \begin{array}{c|ccccc}
 & a & b & c & d & f & g \\
 \hline
 & \rho^{aa} b_{a'} & \rho^{bb} (b_{a'} + b_{b'}) & \rho^{cc} (b_{b'} + b_{c'}) & \rho^{dd} b_{b'} & 0 & \rho^{gg} b_{c'}
 \end{array}
 \quad (17.17)$$

5. ДИЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ СЕТИ

I. Диэлектрические сети состоят из электрических проводников и изоляторов (скажем, медь и воздух), образующих пути для линий электростатического потока. Эти пути играют важную роль во всех электрических устройствах, использующих высокое напряжение.

Конструктивными параметрами здесь являются *эластансы* S_{aa}, S_{bb}, \dots различных элементов или обратные величины — *емкости* C^{aa}, C^{bb} и т. д. Предполагается, что они сконцентрированы в воздушном зазоре между проводниками. Они всегда вычисляются методами теории поля. Снова не существует взаимных емкостей C^{ab} между отдельными членами.

Диэлектрическая сеть может быть контурной, узловой и ортогональной.

II. Наложенными электромагнитными величинами являются: 1) *электродвижущие силы* e_a , т. е. те самые силы, которые ускоряют электрические заряды в электрической сети; 2) *линии электростатического потока* d^a (также называемые «смещением»).

Вместо того, чтобы говорить, что электрический заряд $+q$ помещен в точке A , а заряд $-q$ в точке B , скажем, что d линий электрического потока входят в точку A и выходят из точки B , т. е. что d линий электрического потока протекают от A к B по путям, которые соединяют A и B . Если это требуется, электрические заряды q и электростатический поток d могут быть в дальнейшем взаимозаменяемы. Каждый из них может быть воздействующей или ответной величиной.

III. Существует двойственность между диэлектрической и магнитной сетью, но не существует двойственности между диэлектрической и электрической сетью. Это значит, что линии d^a электрического потока (или заряда q^a) и физически эквивалентный ток i^a являются контравариантными векторами.

Различие между электрической и диэлектрической сетью заключается в способе, по которому в их уравнения поведения входит время.

IV. Различные уравнения поведения для трех типов диэлектрических сетей аналогичны соответствующим уравнениям электрической сети, т. е.

$$\text{контурное } \mathbf{e} = \mathbf{s}d, \quad e_m = s_{mn}d^n; \quad (17.18)$$

$$\text{узловое } \mathbf{D} = \mathbf{C}\mathbf{E}, \quad D^u = C^{uv}E_v; \quad (17.19)$$

$$\text{ортогональное } \begin{cases} \mathbf{E} + \mathbf{e} = \mathbf{s}(\mathbf{d} + \mathbf{D}), & E_\alpha + e_\alpha = s_{\alpha\beta}(d^\beta + D^\beta); \\ (\mathbf{d} + \mathbf{D}) = \mathbf{C}(\mathbf{E} + \mathbf{e}), & d^\alpha + D^\alpha = C^{\alpha\beta}(E_\beta + e_\beta). \end{cases} \quad (17.20)$$

В этих уравнениях \mathbf{d} может быть заменено \mathbf{q} .

V. В инженерных задачах магнитные сети обычно появляются как контурные, в то время как диэлектрические сети обычно появляются как узловые.

Электрический заряд, возникающий в точке, эквивалентен линиям электрического потока, входящим в эту точку, как если бы это была узловая точка нескольких диэлектрических составляющих. Можно сказать, что *магнитные потоки, появляющиеся в технических задачах (создаваемые электрическими токами), рассматриваются как замкнутые линии, в то время как линии электростатического потока рассматриваются как открытые линии.* (Они начинаются у положительного заряда и заканчиваются у отрицательного.) Линии магнитного потока образуют замкнутые контуры, в то время как линии диэлектрического потока — открытые контуры.

Подобным образом в магнитных сетях *приложенные МДС* обычно концентрируются в точке, *последовательно* соединенной с каждым магнитным членом; с другой стороны, в диэлектрических сетях приложенные *разности потенциалов* обычно появляются в диэлектрических членах, но не в последовательном соединении с ними.

6. ПРИМЕР УЗЛОВОЙ ДИЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ СЕТИ

1. Пусть задана узловая диэлектрическая сеть (рис. 17.4, а), состоящая из четырех проводников *A, B, C* и *D* (скажем, четырех электродов лампы или трех проводников линии передачи и заземления и т. д.). Имеется три контура и три узловые пары

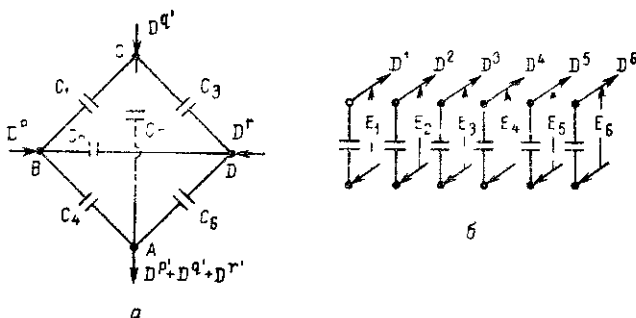


Рис. 17.4.

а — диэлектрическая узловая сеть; б — ее примитивная узловая сеть.

A—D, A—C, A—B (узел *A* может быть заземленным). Пусть линии потока входят в узлы и выходят через узел *A* (т. е. пусть предполагается наличие зарядов на проводниках *B, C* и *D*, если рассматривать проводник *A* как заземление).

Разность потенциалов между любыми двумя проводниками и должна быть исследована.

II. Тензор емкостей примитивной узловой сети на рис. 17.4, б

| | | | | | | |
|------------|---|-------|-------|-------|-------|-------|
| v | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| u | 1 | C^1 | | | | |
| | 2 | | C^2 | | | |
| | 3 | | | C^3 | | |
| $C^{uv} =$ | 4 | | | | C^4 | |
| | 5 | | | | | C^5 |
| | 6 | | | | | C^6 |

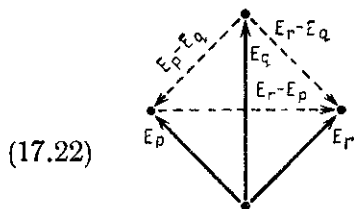


Рис. 17.5. Разности потенциалов.

На рис. 17.5 показаны три выбранные разности потенциалов $E_{p'}$, $E_{q'}$ и $E_{r'}$, а также разности потенциалов, возникающие на каждом элементе.

Приравнявая старые и новые разности потенциалов, возникающие на каждом элементе, имеем

| | | | | | |
|--------------------------|------------------|------|------|------|------|
| $E_1 = E_{p'} - E_{q'}$ | $C_u^{u'} = A =$ | u' | p' | q' | r' |
| $E_2 = -E_{p'} + E_{r'}$ | | u | 1 | -1 | |
| $E_3 = -E_{q'} + E_{r'}$ | | 2 | -1 | | 1 |
| $E_4 = E_{p'}$ | | 3 | | -1 | 1 |
| $E_5 = E_{q'}$ | | 4 | 1 | | |
| $E_6 = E_{r'}$ | | 5 | | 1 | |
| | 6 | | | 1 | |

(17.23)

III. Тензор емкостей найдем с помощью $A_t CA = C'$

| | | | |
|-----------------|-------------------|-------------------|-------------------|
| v' | p' | q' | r' |
| $u' p'$ | $C_1 + C_2 + C_4$ | $-C_1$ | $-C_2$ |
| $C^{u'v'} = q'$ | $-C_1$ | $C_1 + C_3 + C_5$ | $-C_3$ |
| r' | $-C_2$ | $-C_3$ | $C_2 + C_3 + C_6$ |

(17.24)

В уравнениях потока $D^{u'} = C^{u'v'} E_{v'}$, линии потока $D^{u'}$ в узловых парах задаются как

| | | | |
|------------|----------|----------|----------|
| u' | p' | q' | r' |
| $D^{u'} =$ | $D^{p'}$ | $D^{q'}$ | $D^{r'}$ |

(17.25)

(нет необходимости находить их как $D^{u'} = D^u C_u^{u'}$).

Неизвестные разности потенциалов на любой узловой паре находят как $E_{v'} = S_{v'u'} D^{u'}$, т. е. нахождением обратной матрицы от $C^{u'v'}$.

$$S_{u'v'} = \begin{array}{c|ccc} v' & p' & q' & r' \\ \hline u' p' & S_{pp} & S_{pq} & S_{pr} \\ \hline q' & S_{pq} & S_{qq} & S_{qr} \\ \hline r' & S_{pr} & S_{qr} & S_{rr} \end{array} \quad (17.26)$$

IV. Умножение **S** на **A** по ASA_t дает собственные и взаимные эластансы различных конденсаторов S'_{uv} , которые взаимосвязаны как

| v | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|-----------|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|--------------------|-------------------|-------------------|
| u | | | | | | |
| 1 | $S_{pp} - 2S_{pq} + S_{qq}$ | $S_{pr} - S_{qr} - S_{pp} + S_{pq}$ | $S_{pr} - S_{qr} + S_{qq} - S_{pq}$ | $-S_{pp} - S_{pq}$ | $S_{pq} - S_{qq}$ | $S_{pr} - S_{qr}$ |
| 2 | $S_{pr} - S_{pp} - S_{qr} + S_{pq}$ | $S_{rr} - 2S_{pr} + S_{pp}$ | $S_{rr} - S_{pr} - S_{qr} + S_{pq}$ | $S_{pr} - S_{pp}$ | $S_{qr} - S_{pq}$ | $S_{rr} - S_{pr}$ |
| 3 | $S_{pr} - S_{pp} - S_{qr} + S_{pq}$ | $S_{rr} - S_{qr} - S_{pr} + S_{pq}$ | $S_{rr} - 2S_{qr} + S_{qq}$ | $S_{pr} - S_{pp}$ | $S_{qr} - S_{qq}$ | $S_{rr} - S_{qr}$ |
| S'_{uv} | | | | | | |
| 4 | $S_{pp} - S_{pq}$ | $S_{pr} - S_{pp}$ | $S_{pr} - S_{pq}$ | S_{pp} | S_{pq} | S_{pr} |
| 5 | $S_{pq} - S_{qq}$ | $S_{qr} - S_{pq}$ | $S_{qr} - S_{qq}$ | S_{pq} | S_{qq} | S_{qr} |
| 6 | $S_{pr} - S_{qr}$ | $S_{rr} - S_{pr}$ | $S_{rr} - S_{qr}$ | S_{pr} | S_{qr} | S_{rr} |

(17.27)

так что $E_u^* = S'_{uv} D^v$, где D^v — воздействующий поток (заряды) через каждый конденсатор; E_u^* — разность потенциалов, возникающая между пластинами каждого конденсатора.

7. ВЗАИМОСВЯЗАННЫЕ СЕТИ

I. В большинстве проблем три типа сетей, а именно электрические, магнитные и диэлектрические, не изолированы одна от другой, а некоторым образом взаимосвязаны. В исследовании сетей можно рассмотреть два следующих типа взаимоотношений:

1) электрическая и диэлектрическая сети *взаимосвязаны* так, что между ними существует *физический* контакт (рис. 17.6);

2) магнитная сеть взаимосцеплена как с электрической, так и с диэлектрической сетью, так что между ними *нет физического контакта* (рис. 17.7).

II. Следует подчеркнуть, что эти два случая являются совершенно противоположными, *предельными* и между ними есть много других возможностей. Например, путь в магнитном железе может представлять собой часть электрической сети, но при этом возникает новая проблема. В каждом случае должно быть сделано различие между 1) *материальными* частицами, образу-

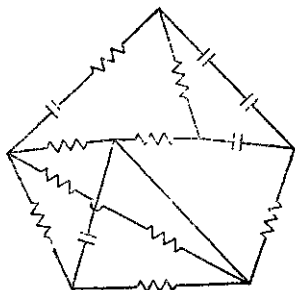


Рис. 17.6. Взаимосвязанные электрические и диэлектрические сети.

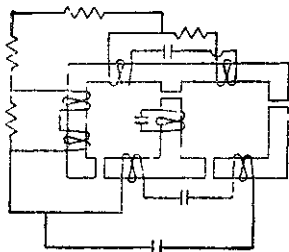


Рис. 17.7. Магнитная сеть, сцепленная с электрической и диэлектрической сетью.

щими подлежащую основную сеть (*материальную*); 2) наложенными на эту сеть *электромагнитными величинами*, которые также образуют сеть (*геометрическую*).

Таким образом, сеть, образованная наложенными электромагнитными величинами (сеть «цепей» — *chains*), отличается от сети, которая образована основной материальной сетью (сетью «ячеек» — *cells*). В неподвижных симметричных сетях эти два типа сетей полностью совпадают, но этого не происходит во вращающихся машинах.

Следует заметить, что в диэлектрической сети путь электрических зарядов является *разрывным*, поскольку предполагается, что заряды не проходят между двумя пластинами конденсатора. Таким образом, в диэлектрической сети оба пути (*материальный и геометрический*) имеют разрывы для электрических зарядов. Следовательно, в нашем случае можно предположить, что диэлектрическая сеть есть то же самое, что и электрическая сеть, имеющая разрывы.

Однако магнитная сеть принципиально отличается от электрической, поскольку в ней не протекают электрические заряды. Она является *двойственной* сетью для диэлектрической сети. Теоретически можно допустить существование магнитной сети, по которой протекают магнитные заряды, производящие рассеяние тепла, являющейся *двойственной* электрической сети. Однако такого магнитного явления пока наблюдать не удавалось.

8. ВЗАИМОСВЯЗАННЫЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ ЯВЛЕНИЯ

I. Так же, как связаны между собой три типа физических сетей, связаны и наложенные на них электромагнитные явления (e_α и i^α , h^α и b_α , e_α и d^α). Эти взаимосвязи даются уравнениями электромагнитного поля Максвелла. Взаимосоединение между магнитными и диэлектрическими сетями в настоящей работе не рассматривается.

II. Рассматривая лишь один элементарный контур каждого типа сети, когда электрическая цепь N раз обвита вокруг магнитного сердечника, имеем:

$$N\dot{b} = \varphi \text{ — потокосцепление (вектор-потенциал),} \quad (17.28)$$

$$Ni = m \text{ — магнитодвижущая сила.} \quad (17.29)$$

В терминах этих новых величин отношения между тремя типами контуров будут

$$1) \text{ магнитный} \rightarrow \text{электрический } d\varphi/dt = e, \quad (17.30)$$

$$2) \text{ электрический} \rightarrow \text{магнитный } m = h, \quad (17.31)$$

$$3) \text{ диэлектрический} \rightarrow \text{электрический } dq/dt = i. \quad (17.32)$$

III. Когда *несколько* диэлектрических и электрических контуров соединены с магнитными контурами, количество взаимосвязей представлено тензором \mathbf{N} , содержащим число витков в каждой катушке, а приведенные выше соотношения для контурных сетей принимают следующий вид:

$$1) \text{ магнитная} \rightarrow \text{электрическая } d\varphi/dt = e, \quad d\varphi_m/dt = e_m; \quad (17.33)$$

$$2) \text{ электрическая} \rightarrow \text{магнитная } \mathbf{m} = \mathbf{h}, \quad m^m = h^m; \quad (17.34)$$

$$3) \text{ диэлектрическая} \rightarrow \text{электрическая } d\mathbf{q}/dt = \mathbf{i}, \quad dq^m/dt = i^m, \quad (17.35)$$

где

$$\varphi = \mathbf{N}_i \mathbf{b}, \quad \varphi_m = N_m^f b_f; \quad (17.36)$$

$$\mathbf{m} = \mathbf{N}i, \quad m^m = N_n^m i^n. \quad (17.37)$$

IV. Вектор потокосцепления φ можно выразить через вектор тока \mathbf{i} :

$$\varphi = \mathbf{N}_i \mathbf{b} = \mathbf{N}_i \mu \mathbf{h} = \mathbf{N}_i \mu \mathbf{m} = \mathbf{N}_i \mu \mathbf{N}i. \quad (17.38)$$

Если тензор индуктивности определяется через тензор проницаемости как

$$\mathbf{l} = \mathbf{N}_i \mu \mathbf{N}, \quad l_{mn} = \mu_{pq} N_m^p N_n^q, \quad (17.39)$$

то вектор потокосцепления в терминах тензора индуктивности

$$\varphi = \mathbf{l}i, \quad \varphi_m = l_{mn} i^n. \quad (17.40)$$

Обратное соотношение может быть записано как

$$\mathbf{i} = \mathbf{k}\varphi, \quad i^m = k^{mn} \varphi_n. \quad (17.41)$$

9. СОБСТВЕННЫЕ И ВЗАИМНЫЕ ИНДУКТИВНОСТИ

I. Знание собственных и взаимных проницаемостей μ' магнитных контуров, вычисленных в § 4, является лишь первым шагом в расчете *отдельных катушек*. Необходимо сделать шаг дальше и вычислить собственные и взаимные проницаемости отдельных магнитных членов, которые с помощью уравнения (17.44) позволяют найти *собственные и взаимные индуктивности отдельных катушек*, связывающих отдельные магнитные элементы.

Переход от *контурной* проницаемости к проницаемости *катушек* точно такой же, как переход от *контурных* адмиттансов к адмиттансам отдельных *катушек* (см. гл. 5, § 8). Это значит, что если контурная проницаемость μ' была вычислена с помощью обращения ρ' , то проницаемость *катушек* подобна уравнению (5.30):

$$\mu_c = C_t^{-1} \mu' C^{-1}, \quad \mu'_{mn} = \mu_{m'n'} C_m^{m'} C_n^{n'}; \quad (17.42)$$

$$\mu_c = A \mu' A_t. \quad (17.43)$$

II. Если известны только собственные и взаимные релактансы ρ примитивной магнитной сети, то *после соединения магнитной контурной сети посредством* $C_t^{-1} = A$ собственные и взаимные проницаемости отдельных катушек магнитной сети по уравнению (5.29) (если электрические цепи еще не взаимосоединены) будут

$$\mu_c = A (A_t \rho A)^{-1} A_t; \quad \mu_c = C_t^{-1} (C^{-1} \rho C_t^{-1})^{-1} C^{-1}. \quad (17.44)$$

Если отдельные катушки имеют различное число витков, представляемых диагональным тензором числа витков $N = N_m \rho$, то собственные и взаимные индуктивности I можно найти из проницаемостей μ_c с помощью уравнения (17.39).

III. Следовательно, *собственные и взаимные индуктивности* I примитивной электрической контурной сети находят из релактансов ρ *примитивной магнитной контурной сети* как

$$I = N_t [A (A_t \rho A)^{-1} A_t] N, \quad (17.45)$$

где $A = C_t^{-1}$ показывает способ взаимосоединения *магнитной* сети, а N — число витков катушек примитивной электрической контурной сети. В I имеется столько строк и столбцов, сколько катушек.

Когда некоторые элементы релактансов не имеют катушек, то соответствующие строчки и столбцы I автоматически исключаются при использовании N .

IV. При рассмотрении примера (см. рис. 17.3, а) тензор реактанса уже был вычислен в уравнении (17.15). Его обращение (тензор проницаемости) есть

$$\mu' = \begin{array}{c} \begin{array}{|c|c|c|} \hline a' & b' & c' \\ \hline a' & \mu_{aa} & \mu_{ab} & \mu_{ac} \\ \hline b' & \mu_{ab} & \mu_{bb} & \mu_{bc} \\ \hline c' & \mu_{ac} & \mu_{bc} & \mu_{cc} \\ \hline \end{array} \end{array} \quad (17.46)$$

Дважды последовательно умножая его на тензор преобразования $C_t^{-1} = A$ (данный в уравнении (17.13)), находим тензор проницаемости отдельных катушек как $A\mu'A_t$, т. е.

$$\mu_c = \begin{array}{c} \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|} \hline & a & b & c & d & f & g \\ \hline a & \mu_{aa} & \mu_{aa} + \mu_{ab} & \mu_{ab} + \mu_{ac} & \mu_{ab} & \mu_{ab} & \mu_{ac} \\ \hline b & \mu_{aa} + \mu_{ab} & \mu_{aa} + 2\mu_{ab} + \mu_{bb} & \mu_{ab} + \mu_{bb} + \mu_{ac} + \mu_{bc} & \mu_{ab} + \mu_{bb} & \mu_{ab} + \mu_{bb} & \mu_{ac} + \mu_{bc} \\ \hline c & \mu_{ab} + \mu_{ac} & \mu_{ab} + \mu_{ac} + \mu_{bb} + \mu_{bc} & \mu_{bb} + 2\mu_{bc} + \mu_{cc} & \mu_{bb} + \mu_{bc} & \mu_{bb} + \mu_{bc} & \mu_{bc} + \mu_{cc} \\ \hline d & \mu_{ab} & \mu_{ab} + \mu_{bb} & \mu_{bb} + \mu_{bc} & \mu_{bb} & \mu_{bb} & \mu_{bc} \\ \hline f & \mu_{ab} & \mu_{ab} + \mu_{bb} & \mu_{bb} + \mu_{bc} & \mu_{bb} & \mu_{bb} & \mu_{bc} \\ \hline g & \mu_{ac} & \mu_{ac} + \mu_{bc} & \mu_{bc} + \mu_{cc} & \mu_{bc} & \mu_{bc} & \mu_{cc} \\ \hline \end{array} \end{array} \quad (17.47)$$

Тензор отношения числа витков равен

$$N = \begin{array}{c} \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|} \hline & a & b & c & d & f & g \\ \hline a & n_a & & & & & \\ \hline b & & & & & & \\ \hline c & & & n_c & & & \\ \hline d & & & & & & \\ \hline f & & & & & n_f & \\ \hline g & & & & & & n_g \\ \hline \end{array} \end{array} \quad (17.48)$$

Следовательно, собственные и взаимные индуктивности четырех обмоток находят из $N_t \mu_c N =$

| | a | c | f | g |
|---|---------------------------------|---|---------------------------------|---------------------------------|
| a | $(n_a)^2 \mu_{aa}$ | $n_a n_c (\mu_{ab} + \mu_{ac})$ | $n_a n_f \mu_{ab}$ | $n_a n_g \mu_{ac}$ |
| c | $n_a n_c (\mu_{ab} + \mu_{ac})$ | $n_c^2 (\mu_{bb} + 2\mu_{bc} + \mu_{cc})$ | $n_c n_f (\mu_{bb} + \mu_{bc})$ | $n_c n_g (\mu_{bc} + \mu_{cc})$ |
| f | $n_a n_f \mu_{ab}$ | $n_c n_f (\mu_{bb} + \mu_{bc})$ | $(n_f)^2 \mu_{bb}$ | $n_f n_g \mu_{bc}$ |
| g | $n_a n_g \mu_{ac}$ | $n_c n_g (\mu_{bc} + \mu_{cc})$ | $n_f n_g \mu_{bc}$ | $(n_g)^2 \mu_{cc}$ |

(17.49)

10. БАЗОВЫЕ И ПРОИЗВОДНЫЕ ПЕРЕМЕННЫЕ

I. В уравнениях электрической сети были введены два типа переменных: 1) контравариантная переменная $i = i^m$, используемая в контурных сетях; 2) ковариантная переменная $E = E_u$, используемая в узловых сетях.

Когда электрическую сеть связывают магнитные и диэлектрические сети, вводится два дополнительных множества переменных: 1) контравариантные переменные $q = q^m$, представляющие электрические заряды в контурных сетях; 2) ковариантные переменные $\Phi = \Phi_u$, представляющие потокосцепление в узловых сетях.

II. Первичные переменные i и E можно получить из дополнительных переменных q и Φ с помощью дифференцирования как $i^m = dq^m/dt$ и $E_u = d\Phi_u/dt$; следовательно, q^m и Φ_u можно назвать «базовыми переменными», а i^m и E_u — «производными переменными».

Нужно заметить, что базовой переменной является не Φ_u , а φ_u — понятие, отличное от Φ_u , поскольку одно из них относится к контурной сети, а другое — к узловой сети. Подобным образом другая базовая переменная есть q^m , а не Q^m .

Уравнения поведения сетей можно выразить через эти четыре типа переменных в различных комбинациях.

11. ДВОЙСТВЕННЫЕ ВЕЛИЧИНЫ

I. В гл. 14, § 1 было показано, что понятия «контур» и «узловая пара» двойственны, и все величины, ассоциируемые с ними, также двойственны друг другу. В предыдущих главах были введены следующие двойственные тензоры:

- 1) приложенные величины $e = e_{\bar{m}} \rightarrow I = I^u$;
- 2) ответные величины $i = i^{\bar{m}} \rightarrow E = E_u$;
- 3) константы сети $z = z_{\bar{m}\bar{n}} \rightarrow Y = Y^{\bar{u}\bar{v}}$;
- 4) тензоры преобразования $C = C_{\alpha}^{\alpha'} \rightarrow C_t^{\alpha'-1} = C_{\alpha}^{\bar{\alpha}'}$.

II. При наличии взаимосвязанных электрических, магнитных и диэлектрических сетей появляются следующие дополнительные двойственные тензоры:

$$5) \text{ ответные величины } \begin{cases} \varphi = \varphi_m^- \rightarrow \mathbf{Q} = \mathbf{Q}^u, \\ \mathbf{q} = \mathbf{q}^m \rightarrow \Phi = \Phi_u^-; \end{cases}$$

$$6) \text{ электрические константы } \mathbf{r} = \mathbf{r}_{mn}^- \rightarrow \mathbf{G} = \mathbf{G}^{uv^-};$$

$$7) \text{ магнитные константы } \mathbf{l} = \mathbf{l}_{mn}^- \rightarrow \mathbf{K} = \mathbf{K}^{uv^-};$$

$$8) \text{ диэлектрические константы } \mathbf{s} = \mathbf{s}_{mn}^- \rightarrow \mathbf{C} = \mathbf{C}^{uv^-};$$

Существуют также следующие двойственные скаляры:

1) кинетическая энергия = $T \rightarrow V'$ — потенциальная энергия;

2) скорость излучения тепла = $D \rightarrow D'$ — скорости излучения тепла;

3) входная мощность = $P \rightarrow P'$ — входная мощность.

Если «воздействующий» ток \mathbf{I} интерпретировать как «отводящий» (ток, снабжающий внешнюю нагрузку), то P' — выходная мощность.

12. УРАВНЕНИЕ НАПРЯЖЕНИЯ

I. Уравнение напряжения $\mathbf{e} = \mathbf{z}\mathbf{i}$ во взаимосоединенной электрической и диэлектрической контурной сети, связанной с магнитной сетью, согласно уравнениям (17.14), (17.18), (17.33) принимает вид

$$\mathbf{e} = \mathbf{r}\mathbf{i} + d\varphi/dt + \mathbf{s}\mathbf{q}, \quad e_m = r_{mn}i^n + d\varphi_m/dt + s_{mn}q^n. \quad (17.50)$$

Электрическая сеть вносит $\mathbf{r}\mathbf{i}$, взаимосвязанная магнитная сеть — $d\varphi/dt$, а взаимосоединенная диэлектрическая сеть — $\mathbf{s}\mathbf{q}$. По закону Кирхгофа напряжения суммируются вдоль контура.

В терминах производной переменной i (поскольку $\varphi = \int \mathbf{i}$ и $\mathbf{q} = \int \mathbf{i} dt$) уравнение напряжения в контурной сети

$$\mathbf{e} = \mathbf{r}\mathbf{i} + \mathbf{l} \frac{d\mathbf{i}}{dt} + \mathbf{s} \int \mathbf{i} dt, \quad e_m = r_{mn}i^n + l_{mn} \frac{di^n}{dt} + s_{mn} \int i^n dt; \quad (17.51)$$

$$\mathbf{e} = \mathbf{r}\mathbf{i} + \mathbf{l}p\mathbf{i} + (\mathbf{s}/p)\mathbf{i}, \quad e_m = r_{mn}i^n + l_{mnp}i^n + (s_{mn}/p)i^n. \quad (17.52)$$

II. Следовательно, тензор импеданса \mathbf{z} для неподвижных симметричных сетей принимает следующую специальную форму:

$$\mathbf{z} = \mathbf{r} + \mathbf{l}d/dt + \mathbf{s} \int dt, \quad z_{mn} = r_{mn} + l_{mnd}/dt + s_{mn} \int dt, \quad (17.53)$$

$$\mathbf{z} = \mathbf{r} + \mathbf{l}p + \mathbf{s}/p, \quad z_{mn} = r_{mn} + l_{mnp} + s_{mn}/p. \quad (17.54)$$

Электрическая сеть вносит \mathbf{r} , магнитная сеть — $\mathbf{l}p$, а диэлектрическая — s/p .

III. В терминах базовой переменной \mathbf{q} получаем уравнение

$$\mathbf{e} = \mathbf{l} \frac{d^2 \mathbf{q}}{dt^2} + \mathbf{r} \frac{d\mathbf{q}}{dt} + \mathbf{s}\mathbf{q}, \quad e_m = l_{mn} \frac{d^2 q^n}{dt^2} + r_{mn} \frac{dq^n}{dt} + s_{mn} q^n. \quad (17.55)$$

Оно представляет столько дифференциальных уравнений второго порядка, сколько имеется контуров.

Это уравнение подобно уравнению напряжения отдельной катушки, имеющей сопротивление r , индуктивность l и эластанс s :

$$e = l \frac{d^2 q}{dt^2} + r \frac{dq}{dt} + sq, \quad (17.56)$$

за исключением того, что согласно первому обобщающему постулату каждый скаляр заменяется соответствующей n -матрицей, а каждая n -матрица — геометрическим объектом валентности n .

IV. В ортогональной сети появляется также \mathbf{E} и \mathbf{I} , так что уравнение напряжения в ортогональной сети (с использованием спинорных индексов) принимает вид

$$\mathbf{E} + \mathbf{e} = (\mathbf{r} + \mathbf{l}p + \mathbf{s}/p)(\mathbf{i} + \mathbf{I}), \\ E_{\alpha}^{-} + e_{\alpha}^{-} = (r_{\alpha\beta}^{-} + l_{\alpha\beta}^{-}p + s_{\alpha\beta}^{-}/p)(i^{\beta} + I^{\beta}). \quad (17.57)$$

Уравнения этого параграфа, используемые для формализованного анализа сетей, представляют собой точную форму уравнений динамики Лагранжа с контравариантными переменными (см. § 16).

13. УРАВНЕНИЕ ТОКА

I. Уравнение тока $\mathbf{I} = \mathbf{Y}\mathbf{E}$ взаимосвязанной электрической и диэлектрической узловой сети, соединенной с магнитной сетью, согласно уравнениям (17.4), (17.35) и (17.41) будет

$$\mathbf{I} = \mathbf{G}\mathbf{E} + \frac{d\mathbf{Q}}{dt} + \mathbf{K}\Phi, \quad I^u = G^{uv}E_v + \frac{dQ^u}{dt} + K^{uv}\Phi_v. \quad (17.58)$$

Электрическая сеть дает $\mathbf{G}\mathbf{E}$, взаимосвязанная магнитная сеть — $\mathbf{K}\Phi$, а взаимосвязанная диэлектрическая сеть — $d\mathbf{Q}/dt$. По закону Кирхгофа токи суммируются в узлах.

В терминах производной переменной E (поскольку $Q = CE$ и $\Phi = \int E dt$) уравнение тока в узловой сети следующее:

$$I = GE + C \frac{dE}{dt} + K \int E dt, \quad I^u = G^{uv} E_v + C^{uv} \frac{dE_v}{dt} + K^{uv} \int E_v dt; \quad (17.59)$$

$$I = GE + CpE + (K/p)E, \quad I^u = G^{uv} E_v + C^{uv} p E_v + (K^{uv}/p) E_v. \quad (17.60)$$

II. Следовательно, тензор адмиттанса Y принимает для неподвижных симметричных сетей следующую специальную форму:

$$Y = G + C \frac{d}{dt} + K \int dt \quad Y^{uv} = G^{uv} + C^{uv} \frac{d}{dt} + K^{uv} \int dt, \quad (17.61)$$

$$Y = G + Cp + K/p, \quad Y^{uv} = G^{uv} + C^{uv} p + K^{uv}/p. \quad (17.62)$$

Сама электрическая цепь дает G , диэлектрическая цепь — Cp , магнитная — K/p .

III. В терминах базовой переменной Φ уравнение принимает вид

$$I = C \frac{d^2 \Phi}{dt^2} + G \frac{d\Phi}{dt} + K\Phi, \quad I^u = C^{uv} \frac{d^2 \Phi_v}{dt^2} + G^{uv} \frac{d\Phi_v}{dt} + K^{uv} \Phi_v \quad (17.63)$$

и представляет столько дифференциальных уравнений второго порядка, сколько имеется узловых пар.

Это уравнение подобно уравнению для отдельной катушки

$$I = C \frac{d^2 \Phi}{dt^2} + G \frac{d\Phi}{dt} + K\Phi, \quad (17.64)$$

в котором каждый скаляр заменяется соответствующим геометрическим объектом.

IV. В ортогональной сети появляются также e и i , так что уравнение тока в этой сети (используются спинорные индексы) есть

$$i + I = (G + Cp + K/p)(E + e), \\ i^\alpha + I^\alpha = (G^{\alpha\bar{\beta}} + C^{\alpha\bar{\beta}} p + K^{\alpha\bar{\beta}}/p)(E_{\bar{\beta}} + e_{\bar{\beta}}). \quad (17.65)$$

Уравнения этого параграфа, используемые при нормальном анализе сетей, представляют собой точную форму уравнений динамики Лагранжа с ковариантными переменными (см. § 16).

14. УРАВНЕНИЕ МОЩНОСТИ

I. Если уравнение напряжения умножить на \mathbf{l} (см. (17.52)), то каждый член будет представлять собой мощность:

$$\mathbf{ie} = \mathbf{iri} + \mathbf{ilpi} + \mathbf{is/pi},$$

$$e_m i^m = r_{mn} i^m i^n + l_{mn} (p i^n) i^m + s_{mn} ((1/pe) i^n) i^m.$$

Поскольку $\mathbf{i} = d\mathbf{q}/dt = p\mathbf{q}$, то уравнение мощности есть также

$$\mathbf{ie} = \mathbf{iri} + p \left(\frac{1}{2} \mathbf{ili} \right) + p \left(\frac{1}{2} \mathbf{qsq} \right), \quad (17.66)$$

$$e_m i^m = r_{mn} i^m i^n + p \left(\frac{1}{2} l_{mn} i^m i^n \right) + p \left(\frac{1}{2} s_{mn} q^m q^n \right), \quad (17.67)$$

где $\mathbf{ie} = P$ — полная мощность, поступающая в электрическую контурную сеть; $\mathbf{iri} = D$ — скорость рассеяния тепла в электрической сети $\mathbf{ili}/2 = T$ — кинетическая энергия, запасенная в магнитной сети; $\mathbf{qsq}/2 = V$ — потенциальная энергия, запасенная в диэлектрической сети.

Следовательно, уравнение мощности контурной сети есть

$$P = D + dT/dt + dV/dt. \quad (17.68)$$

II. Умножая уравнение тока (17.60) на \mathbf{E} , получаем

$$\mathbf{EI} = \mathbf{EGE} + \mathbf{ECP} + \mathbf{EK/pE}, \quad (17.69)$$

$$E_u I^u = G^{uv} E_u E_v + C^{uv} (p E_v) E_u + K^{uv} ((1/p) E_v) E_u.$$

Поскольку $\mathbf{E} = d\Phi/dt = p\Phi$, то уравнение мощности

$$\mathbf{EI} = \mathbf{EGE} + p \left(\frac{1}{2} \mathbf{ECE} \right) + p \left(\frac{1}{2} \mathbf{ФКФ} \right),$$

$$E_u I^u = G^{uv} E_u E_v + p \left(\frac{1}{2} C^{uv} E_u E_v \right) + p \left(\frac{1}{2} K^{uv} \Phi_u \Phi_v \right), \quad (17.70)$$

где $\mathbf{EI} = P'$ — полная мощность, поступающая в узловую электрическую сеть; $\mathbf{EGE} = D'$ — скорость рассеяния тепла электрической сетью; $\mathbf{ECE}/2 = V'$ — потенциальная энергия, запасенная в диэлектрической сети; $\mathbf{ФКФ}/2 = T'$ — кинетическая энергия, запасенная в магнитной сети. Через P' , D' , V' , T' уравнение мощности узловой сети записывается так:

$$P' = D' + \frac{dT'}{dt} + \frac{dV'}{dt}. \quad (17.71)$$

15. КВАДРАТИЧНЫЕ И ЭРМИТОВЫ ФОРМЫ

I. Различные выражения для мощности и энергии

$$\text{iri} = D \quad \left| \quad \text{EGE} = D' \quad \left| \quad r_{mn} i^m j^n = D \quad \left| \quad G^{uv} E_u E_v = D', \quad (17.72)\right.\right.$$

$$\text{ih} = 2T \quad \left| \quad \Phi K \Phi = 2T' \quad \left| \quad l_{mn} i^m j^n = 2T \quad \left| \quad K^{uv} \Phi_u \Phi_v = 2T', \quad (17.73)\right.\right.$$

$$\text{qsq} = 2V \quad \left| \quad \text{ECE} = 2V' \quad \left| \quad s_{mn} q^m q^n = 2V \quad \left| \quad C^{uv} E_u E_v = 2V' \quad (17.74)\right.\right.$$

являются *квадратичными* формами. С другой стороны, полная входная мощность $\text{ie} = P$ и $\text{EI} = P'$ является *линейной* формой.

Когда компоненты — комплексные числа, то соответствующие квадратичные формы заменяются билинейными:

$$\text{iri}^* = D \quad \left| \quad \text{E}^* \text{GE} = D' \quad \left| \quad r_{mn} i^{\bar{m}} j^n = D \quad \left| \quad G^{u\bar{v}} E_u E_{\bar{v}} = D', \quad (17.75)\right.\right.$$

$$\text{ih}^* = 2T \quad \left| \quad \Phi^* K \Phi = 2T' \quad \left| \quad l_{mn} i^{\bar{m}} j^n = 2T \quad \left| \quad K^{u\bar{v}} \Phi_u \Phi_{\bar{v}} = 2T', \quad (17.76)\right.\right.$$

$$\text{qsq}^* = 2V \quad \left| \quad \text{E}^* \text{CE} = 2V' \quad \left| \quad s_{mn} q^{\bar{m}} q^n = 2V \quad \left| \quad C^{u\bar{v}} E_u E_{\bar{v}} = 2V', \quad (17.77)\right.\right.$$

т. е. берутся сопряженные с соответствующих переменных.

Поскольку компоненты \mathbf{r} , \mathbf{l} и другие являются действительными числами, $\mathbf{r} = \mathbf{r}^*$ и т. д. Из-за этого свойства коэффициентов шести билинейных форм последние называются далее «*эрмитовыми формами*». Значение эрмитовой формы (скаляра) всегда *действительное*, а не комплексное число.

Когда любой тензор преобразования \mathbf{C} в этой книге используется для неподвижных симметричных сетей, *все эти шесть квадратичных (или эрмитовых) форм остаются инвариантными при всех преобразованиях, так же как и две линейные формы (инварианты мощности)*.

II. Нужно подчеркнуть, что *предположение об инвариантности входной мощности является более общим, чем предположение об инвариантности различных квадратичных форм, поскольку в асимметричных сетях в общем случае не существует квадратичных форм, их \mathbf{z} или \mathbf{Y} — асимметричные тензоры, но линейная форма существует*.

16. ДВОЙСТВЕННЫЕ УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ ЛАГРАНЖА

I. Уравнения (17.52) и (17.60), имеющие *точный* вид уравнений Лагранжа, используемые в изучении сетей, можно привести к *исходной основополагающей* форме, которую им дал Лагранж, заменив выражения, содержащие тензоры валентности два \mathbf{r} , \mathbf{l} и другие эквивалентными выражениями, содержащими векторы и скаляры. Эти исходные основополагающие уравнения не являются, однако, лучшей формой для стандартных расчетов большого разнообразия систем.

Возьмем уравнения напряжения (17.52) и произведем следующую замену (помня, что матрицы \mathbf{r} , \mathbf{l} и \mathbf{s} — симметричные матрицы во всех системах координат и не являются функциями переменных и времени): $\mathbf{r}\mathbf{i} = \frac{1}{2} \frac{\partial \mathbf{r}\mathbf{i}\mathbf{i}}{\partial \mathbf{i}} = \frac{\partial F}{\partial \mathbf{i}}$.

$$\begin{aligned} \text{Здесь } F &= \frac{1}{2} \mathbf{r}\mathbf{i}\mathbf{i} = D_1/2 - \text{функция диссипации; } \mathbf{l}\mathbf{p}\mathbf{i} = p\mathbf{i}\mathbf{i} = \\ &= p \left(\frac{1}{2} \frac{\partial \mathbf{l}\mathbf{i}\mathbf{i}}{\partial \mathbf{i}} \right) = p \frac{\partial T}{\partial \mathbf{i}}; \quad \mathbf{s} = \mathbf{s}\mathbf{q} = \frac{1}{2} \frac{\partial \mathbf{s}\mathbf{q}\mathbf{q}}{\partial \mathbf{q}} = \frac{\partial V}{\partial \mathbf{q}}. \end{aligned}$$

В терминах этих скаляров и векторов уравнение напряжения (17.52) принимает вид

$$\mathbf{e} = \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\mathbf{i}}} - \frac{\partial (-V)}{\partial \mathbf{q}} + \frac{\partial F}{\partial \mathbf{i}}, \quad e_m = \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{i}^m} - \frac{\partial (-V)}{\partial q^m} + \frac{\partial F}{\partial i^m}. \quad (17.78)$$

Эта форма уравнения напряжения, содержащего скаляры T , V , F есть частный случай уравнений движения Лагранжа, выраженный в терминах двух контравариантных переменных q^m и i^m .

II. Подобным образом пусть в уравнении тока (17.60) будут сделаны следующие преобразования:

$\mathbf{G}\mathbf{E} = \frac{1}{2} \frac{\partial \mathbf{G}\mathbf{E}\mathbf{E}}{\partial \mathbf{E}} = \frac{\partial F'}{\partial \mathbf{E}}$; здесь $F' = \frac{1}{2} \mathbf{G}\mathbf{E}\mathbf{E} = D'/2$ — двойственная диссипативная функция;

$$\mathbf{C}p\mathbf{E} = p\mathbf{C}\mathbf{E} = p \left(\frac{1}{2} \frac{\partial \mathbf{C}\mathbf{E}\mathbf{E}}{\partial \mathbf{E}} \right) = p \frac{\partial V'}{\partial \mathbf{E}};$$

$$\mathbf{K}_j p\mathbf{E} = \mathbf{K}\Phi = \frac{1}{2} \frac{\partial \mathbf{K}\Phi\Phi}{\partial \Phi} = \frac{\partial T'}{\partial \Phi}.$$

В терминах этих скаляров и векторов уравнение тока (17.60) принимает вид

$$\begin{aligned} \mathbf{I} &= \frac{d}{dt} \frac{\partial V'}{\partial \mathbf{E}} - \frac{\partial (-T')}{\partial \Phi} + \frac{\partial F'}{\partial \mathbf{E}}, \\ I^u &= \frac{d}{dt} \frac{\partial V'}{\partial E_u} - \frac{\partial (-T')}{\partial \Phi_u} + \frac{\partial F'}{\partial E_u}. \end{aligned} \quad (17.79)$$

Эта форма уравнения тока — частная форма уравнений движения Лагранжа, выраженная в терминах двух ковариантных переменных Φ_u и E_u .

III. Двойственные уравнения движения Лагранжа можно представить в более симметричной форме определением

$$\text{функции Лагранжа} \quad L = T - V; \quad (17.80)$$

$$\text{двойственной функции Лагранжа} \quad L' = V' - T'; \quad (17.81)$$

В частности, в терминах контравариантных переменных

$$L = (\text{ili} - \text{qsq})/2, \quad L = (l_{mn}i^m i^n - s_{mn}q^m q^n)/2 \quad (17.82)$$

и в терминах ковариантных переменных

$$L' = (\text{ESE} - \Phi\text{K}\Phi)/2, \quad L' = (C^{uv}E_u E_v - K^{uv}\Phi_u \Phi_v)/2. \quad (17.83)$$

В терминах функций Лагранжа L и L' двойственные уравнения движения принимают вид

$$e = \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial i} - \frac{\partial L}{\partial q} + \frac{\partial F}{\partial i}, \quad e_m = \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial i^m} - \frac{\partial L}{\partial q^m} + \frac{\partial F}{\partial i^m}; \quad (17.84)$$

$$I = \frac{d}{dt} \frac{\partial L'}{\partial E} - \frac{\partial L'}{\partial \Phi} + \frac{\partial F'}{\partial E}, \quad I^u = \frac{d}{dt} \frac{\partial L'}{\partial E_u} - \frac{\partial L'}{\partial \Phi_u} + \frac{\partial F'}{\partial E_u}. \quad (17.85)$$

Таким образом, двойственные уравнения движения Лагранжа дают или уравнения напряжения в «контурной» сети, или уравнения тока в «узловой» сети в зависимости от того, выбираются ли контравариантные переменные q^m и i^m или ковариантные переменные Φ_u и E_u .

Следует еще раз подчеркнуть, что контравариантные и ковариантные переменные не зависят друг от друга, поскольку первые появляются в контурах, а вторые — в узловых парах.

МЕТРИЧЕСКИЙ ТЕНЗОР

1. СЕТИ С НУЛЕВЫМИ КОНСТРУКТИВНЫМИ КОНСТАНТАМИ

Известно, что в неподвижных сетях \mathbf{z} и \mathbf{Y} можно разделить на три составляющих тензора-компоненты, это позволяет ввести *новые типы конструктивных констант* (состоящих только из отношений) и новые типы уравнений. Прежде чем вводить новые

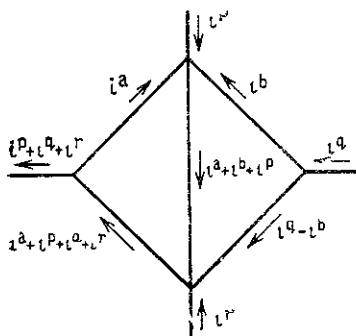


Рис. 18.1. Сеть с нулевыми импедансами.

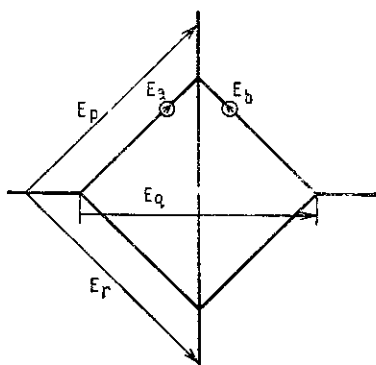


Рис. 18.2. Сеть с нулевыми адмиттансами.

типы конструктивных констант, кратко рассмотрим сети без этих констант. Такие сети играют важную роль в релейном, переключательном, управляющем и другом оборудовании.

Простейшая электрическая сеть состоит из набора соединенных ветвей, имеющих нулевые сопротивления (см. рис. 18.1) пяти ветвей, на которых нет падения напряжения. Единственное электрическое понятие, связанное с сетью, — это текущие через нее токи. Рассматривая рис. 18.1 как чисто-контурную сеть, можно с помощью первого закона Кирхгофа установить для нее не-сингулярный (квадратный) тензор преобразования \mathbf{C}_a^z , в котором заложены все абстрактные свойства сети. Теорией этой простой сети является теория тензора \mathbf{C}_a^z .

Двойственная рассмотренной сети состоит из набора соединенных *непроводящих ветвей* (рис. 18.2) и имеет равные нулю токи ветвей.

Единственное электрическое понятие, связанное с сетью, — это напряжение на узловых парах. С помощью второго закона Кирхгофа можно установить обратный тензор преобразования $C_{\alpha}^{\alpha'}$, в котором заложены все абстрактные свойства такой сети.

Элементарная топология изучает свойства таких сетей, с которыми не связаны никакие конструктивные константы. Сеть полностью описывается с помощью тензора преобразования.

Геометрически сеть с нулевыми конструктивными константами (но с $C_{\alpha}^{\alpha'}$) эквивалентна пространству, в котором не заданы ни «величина», ни «направление» введенных векторов.

2. БАЗОВЫЕ ИНВАРИАНТЫ

I. Первый шаг в наделении сети конструктивными константами состоит во введении сопротивлений $r=r_{mn}$, что дает уравнение напряжения для контурной сети $e=ri$.

Если с электрической сетью связана подлежащая *магнитная сеть*, то катушки наделяются дополнительными конструктивными константами, индуктансами $l=l_{mn}$, что дает уравнение напряжения $e=ri+l\frac{di}{dt}$.

Если электрическая контурная сеть *связана* также с *диэлектрической* сетью, то требуется еще одно множество конструктивных констант — эластансов $s=s_{mn}$, так что уравнение напряжения принимает вид

$$e=ri+li\dot{i}+(s/p)i=l\frac{d^2q}{dt^2}+r\frac{dq}{dt}+sq.$$

II. Три вида независимых конструктивных констант сети: 1) тензор резистанса $r=r_{mn}$, 2) тензор индуктанса $l=l_{mn}$ и 3) тензор эластанса $s=s_{mn}$ называются «*базовыми инвариантами*» сети. Они определяют «структуру» сети.

Наложённые электромагнитные величины являются переменными; в частности, определим их как: 1) $q=q^m$ — базовая переменная, 2) $i=i^m$ — производная переменная, 3) $e=e^m$ — параметр. Есть еще также независимая переменная t .

Все другие инварианты контурной сети выводятся из этих базовых инвариантов дифференцированием или их комбинацией друг с другом или с переменными.

Хотя в общем случае компоненты структурных базовых инвариантов r , l и s являются функциями переменной, в этой книге предполагается, что их компоненты — константы. В общем случае базовые инварианты не обязательно являются тензорами.

III. Одной из целей тензорного анализа является получение других инвариантов из данных базовых инвариантов и переменных геометрической или физической системы. Получение новых инвариантов из базовых инвариантов дифференцированием было показано в гл. 15, § 4.

Другой путь получения новых инвариантов — образование *произведений* базовых инвариантов и переменных. Такие *геометрические объекты* называются «*мгновенными инвариантами*». Например, ими являются четыре скалярные «*формы*»

$$P = ie, \quad D = iri, \quad T = ili/2 \quad \text{и} \quad V = qsq/2.$$

IV. Узловая сеть обладает *двойственными инвариантами* по отношению к инвариантам контурной сети. В уравнении тока

$$I = GE + CpE + (K/p)E = C(d^2\Phi/dt^2) + G(d\Phi/dt) + K\Phi$$

базовыми инвариантами узловой сети являются: тензор проводимости $G = G^{uv}$; тензор восприимчивости $K = K^{uv}$; тензор емкости $C = C^{uv}$.

Переменными узловой сети являются: базовая переменная $\Phi = \Phi_u$; производная переменная $E = E_u$; параметр $I = I^u$.

Мгновенными инвариантами для нее являются те же, что и выше, но выраженные в терминах узловых базовых инвариантов и переменных, а именно $P' = EI$; $D' = EGE$; $T' = \Phi K \Phi / 2$; $V' = ECE/2$.

3. ОБОБЩЕНИЕ (НОРМИРОВКА) СИСТЕМЫ «НА ЕДИНИЦУ»

I. При изучении многих физических явлений или геометрических отношений или при конструировании любой инженерной структуры *одним из первых шагов в упрощении проблемы является исключение каким-либо образом из рассмотрения понятия «величина»*. Это достигается построением маломасштабных моделей или выражением проблемы в терминах *отношений* величин вместо самих действительных величин.

II. Первый шаг во введении *отношений* в задаче состоит в выборе какой-либо удобной величины — напряжения, тока и других в качестве единицы и выражении всех остальных подобных величин через их отношение. Например, ток при полной нагрузке можно принять за 1; величину тока и все другие токи выражают как дроби или целые числа от тока при полной нагрузке. Можно выбрать аналогичные единицы для выражения напряжений, реактансов и т. д.

Вместо обозначения условной величины через 1 принято также считать ее за 100% и выражать все другие количества в процентах. Это так называемая система, нормированная «на единицу», которая используется в электротехнических задачах.

С помощью таких отношений *можно сравнивать два устройства различной величины* и видеть, какое из них имеет, скажем, больший или меньший реактанс короткого замыкания, сопротивление и т. п.

Все формулы в этой книге остаются верными, если все количества выражены в системе «на единицу». Другими словами, когда речь идет о формулах книги, *неважно, в каких единицах*

измерены компоненты соответствующих геометрических объектов.

III. Этот первый шаг не вполне удовлетворительный, поскольку он не связывает количественные величины *различного типа*, такие как резистансы и реактансы. Второй шаг в проектировании различных устройств состоит в выражении их свойств в терминах *отношений* двух величин различного типа, таких как r/X (резистанс/индуктанс). При сравнении двух устройств, свойства которых выражены в терминах таких отношений, они являются мерой качества устройств по относительной эффективности, стоимости и т. п.

IV. Тензорный анализ представляет систематическую процедуру, в которой поведение физических систем выражается в терминах отношений двух различных типов конструктивных констант, а не в терминах их действительных значений. Таким образом, *тензорный анализ дает стандартную процедуру, с помощью которой действительные «значения» физических величин можно по желанию исключать и снова вводить в рассмотрение*. При исключении их заменяют отношениями физических величин, которые играют решающую роль в анализе. *Эта стандартная процедура называется «поднятием и опусканием индексов»*.

4. МЕТРИЧЕСКИЙ ТЕНЗОР a_{mn}

I. Базовым инвариантом, который играет основную роль в исключении и возобновлении понятия «величина», является тензор индуктивности $I = l_{mn}$, представляющий собственные и взаимные индуктивности различных контуров. *Из-за этой роли тензор индуктивности l_{mn} называется в тензорном анализе «метрическим тензором» и обозначается a_{mn}* (в литературе по геометрии g_{mn}).

Метрический тензор a_{mn} представляет дополнительные характеристики, приобретенные электрической сетью благодаря ее связи с соответствующей магнитной сетью. Это симметричный тензор валентности два. (Следует заметить, что в присутствии постоянных магнитов тензор индуктивности l_{mn} не является симметричным, так как нет потока в магнит и связь является однонаправленной, и его нельзя считать метрическим тензором a_{mn} .)

Например, метрический тензор двухобмоточного трансформатора (рис. 18.3) имеет вид



Рис. 18.3. Двухобмоточный трансформатор.

$$a = \begin{array}{c} p \quad s \\ \begin{array}{|c|c|} \hline L_p & M \\ \hline M & L_s \\ \hline \end{array} \end{array} \quad (18.1)$$

В проблемах механики компоненты метрического тензора могут быть моментами инерции и произведениями инерции различных масс.

II. Метрический тензор — один из нескольких тензоров валентности два, у которых инверсия обозначается той же базовой буквой a^{nm} . (Другими тензорами являются, например, C_α^α , и его инверсия $C_\alpha^{\alpha'}$; то же характерно и для единичного тензора I_β^α , инверсия которого I_α^β .)

Инверсия тензора двухобмоточного трансформатора имеет вид

$$a^{nm} = \begin{array}{c|cc} m & p & s \\ \hline n & & \\ \hline p & L_s/D & -M/D \\ s & -M/D & L_p/D \end{array}, \quad (18.2)$$

где $D = L_p L_s - M^2$. Поскольку индуктивность короткого замыкания первичной обмотки $L_p' = L_p - M^2/L_p L_s$, то $D = L_p L_p' = L_s L_s'$. Поскольку коэффициенты рассеяния есть $\lambda_p = M/L_p$ и $\lambda_s = M/L_s$, инверсия метрического тензора может быть представлена в виде

$$a^{nm} = \begin{array}{c|cc} m & p & s \\ \hline n & & \\ \hline p & 1/L_p' & -\lambda_p/L_p' \\ s & -\lambda_s/L_s' & 1/L_s' \end{array} \quad (18.3)$$

III. Поскольку индуктивности пропорциональны проницаемостям (уравнение (17.39), а инверсия магнитной проницаемости есть релактанс), можно сказать, что:

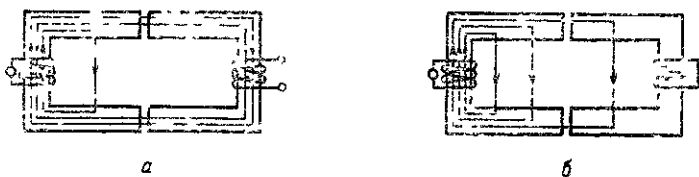


Рис. 18.4.

a — магнитные пути с максимальной проницаемостью; *b* — магнитные пути с минимальной проницаемостью.

1) метрический тензор a_{mn} представляет собственные и взаимные магнитные проницаемости подлежащей магнитной сети, измеренные при условии, что цепи всех катушек электрической сети разомкнуты;

2) инверсия метрического тензора a^{nm} представляет собственные и взаимные релактансы подлежащей магнитной сети, измеренные при замкнутых катушках электрической сети.

Другими словами:

1) при измерении компонент метрического тензора a_{mn} линии магнитного потока следуют по пути *максимально возможной* магнитной проницаемости (рис. 18.4, а); 2) при измерении компонент инверсии метрического тензора линии магнитного потока следуют по пути с минимально возможной магнитной проницаемостью (рис. 18.4, б).

5. ПОДНЯТИЕ И ОПУСКАНИЕ ИНДЕКСОВ

I. Метрический тензор a_{mn} имеет следующие важные свойства:

1. Если верхний (контравариантный) индекс любого тензора умножается на метрический тензор a_{mn} , верхний индекс становится нижним (ковариантным). Например,

$$K^{..n} a_{nk} = K^m_{..k} \quad \text{или} \quad A_m^{..nk} = A_m^{..n} p. \quad (18.4)$$

Все другие индексы тензора и базовая буква остаются теми же. Индексы также сохраняют надлежащий порядок:

$$K^{m..k.q} a_{kr} = K^{m..nr.p} q. \quad (18.5)$$

Здесь третий верхний индекс k стал третьим нижним индексом r . Аналогично:

2. Если нижний (ковариантный) индекс любого тензора умножается на инверсию метрического тензора a^{nm} , то нижний индекс становится верхним:

$$K^{m..k.q} a^{nr} = K^{mrk..q} p. \quad \text{или} \quad i^m a_{mn} = i_n. \quad (18.6)$$

Эти правила изменения индексов *не имеют силы* для геометрических объектов, они верны только для тензоров. (Следует помнить, что индексы n -матриц не являются ни ковариантными, ни контравариантными, и эти правила для них не имеют смысла.) За один шаг можно поднять или опустить несколько индексов:

$$K^{m..k.q} a^{nr} a_{qt} a_{ks} = K^{mr..spt}. \quad (18.7)$$

II. Тензоры, имеющие одинаковые базовые буквы и одинаковое количество индексов, но на разных позициях, называются «ассоциированными тензорами» (см. гл. 8, § 4). Следовательно, ассоциированные тензоры могут преобразовываться друг в друга при помощи метрического тензора.

III. Если поднимается один индекс самого метрического тензора, то смешанный метрический тензор является единичным тензором I_n^m :

$$a_{mn} a^{nk} = a a^{-1} = I = a_m^k = I_m^k. \quad (18.8)$$

Как следствие, два немых индекса, верхний и нижний, могут меняться местами:

$$R_{mn}i^n = R_m^n i_n, \quad (18.9)$$

так как $R_{mn}i^n = R_{mk}I_n^k i^n$ и $I_n^k = a^{kp}a_{np}$;

следовательно, $R_{mn}i^n = (R_{mk}a^{kp})(a_{np}i^n) = R_m^p i_p = R_m^n i_n$.

6. АССОЦИИРОВАННЫЕ ТЕНЗОРЫ КОНСТРУКТИВНЫХ КОНСТАНТ

I. Три конструктивные константы, или базовые инварианты контурной сети, определены как дважды ковариантные 2-тензоры r_{mn} , a_{mn} , s_{mn} . Если их умножить на инверсию метрического тензора, они становятся смешанными 2-тензорами:

$$r_{mn}a^{nk} = r_m^k, \quad (18.10), \quad a_{mn}a^{nk} = I_m^k, \quad (18.11), \quad s_{mn}a^{nk} = s_m^k. \quad (18.12)$$

II. Смешанный тензор резистанса r_m^k содержит такие отношения, как

$$\frac{\text{резистанс}}{\text{индуктанс короткого замыкания}} = \frac{r}{L'} = \delta = \text{декремент затухания}. \quad (18.13)$$

Для двухобмоточного трансформатора

$$r_m^n = \begin{array}{|c|c|} \hline r_p & \\ \hline & r_s \\ \hline \end{array} \cdot \begin{array}{|c|c|} \hline 1/L'_p & -\lambda_p/L'_p \\ \hline -\lambda_s/L'_s & 1/L'_s \\ \hline \end{array} = \begin{array}{c|cc} n & p & s \\ \hline m & r_p/L'_p & -\lambda_p(r_p/L'_p) \\ \hline p & -\lambda_s(r_s/L'_s) & r_s/L'_s \\ \hline s & & \end{array} \quad (18.14)$$

Через «декремент затухания» δ_p смешанный тензор резистанса выражается как

$$r_m^n = \begin{array}{c|cc} & p & s \\ \hline p & \delta_p & -\lambda_p\delta_p \\ \hline s & -\lambda_s\delta_s & \delta_s \\ \hline \end{array} \quad (18.15)$$

Если катушка с сопротивлением r не имеет взаимных индуктивностей с другими катушками, индуктанс короткого замыкания для нее тот же, что и ее собственная индуктивность L , и соответствующий член в r_m^n есть r/L .

III. Смешанный тензор эластанса S_m^n содержит такие отношения, как

$$\frac{\text{эластанс}}{\text{индуктанс короткого замыкания}} = \frac{S}{L'} = \frac{1}{CL'} = v = \text{частотный фактор.} \quad (18.16)$$

Если катушка с емкостью C не имеет взаимных индуктивно-стей с другими катушками, то соответствующий член в C_m^n есть $1/LC$.

7. АССОЦИИРОВАННЫЕ ТЕНЗОРЫ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВЕЛИЧИН

I. Если вектор тока i^m умножают на метрический тензор a_{mn} , то получают вектор потокосцепления φ_n

$$i^m a_{mn} = i_n = \varphi_n. \quad (18.17)$$

Таким образом, вектор потокосцепления φ_n может быть записан как ковариантный ток i_m . Аналогично вектор тока i^m может быть записан как контравариантный вектор потокосцепления

$$\varphi_m a^{mn} = \varphi^n = i^n. \quad (18.18)$$

В задачах механики «скорость» v^m и «количество движения» M_m (масса \times скорость) находятся в том же отношении, что и «ток» и «потокосцепление» в электротехнических задачах. Это значит, что $v^m = M^m$ и $M_m = v_m$.

II. Если вектор *воздействующего напряжения* e_m умножить на инверсию метрического тензора, то получим

$$e_m a^{mn} = e^n. \quad (18.19)$$

В электротехнике не встречается понятие, которое соответствовало бы величине e^m . Ее компоненты содержат такие выражения, как e/L' . Она представляет собой ускорение электрических зарядов. В задачах механики «ускорение» a^m и «приложенная сила» f_m (масса \times ускорение) находятся в том же отношении, что и e^m и e_m в задачах электротехники.

Точно так же нет электрического эквивалента для $q_n = q^m a_{mn}$. (Однако в узловых сетях E^u и Q_u имеют физическую интерпретацию, тогда как I_u и Φ^u не имеют ее, см. § 15.)

8. СМЕШАННЫЕ УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ

I. Уравнение напряжения неподвижной симметричной контурной сети

$$e_m = (r_{mn} + l_{mn}p + s_{mn}/p) i^n \quad (18.20)$$

можно выразить в терминах смешанных тензоров изменением позиции двух немых индексов n :

$$e_m = (r_m^n + l_m^n p + s_m^n/p) \varphi_n. \quad (18.21)$$

Таким образом, если в уравнении напряжения ток i^m заменяется новой переменной — потокосцеплением Φ_m , то в уравнении остаются только два вида конструктивных констант: декременты затухания δ и факторы частоты ν . Имеем

$$z_m^n = r_m^n + I_m^n p + s_m^n / p. \quad (18.22)$$

Новая величина z_m^n находится из обычного z_{mn} умножением на инверсию тензора индуктивности или метрического тензора.

II. Представляют интерес два специальных случая.

1. Если диэлектрическая сеть отсутствует,

$$z_m^n = r_m^n + I_m^n p. \quad (18.23)$$

Матрица z_m^n содержит оператор дифференцирования p только в диагональных элементах:

| | n | a | b | c | |
|-------------|-----|-------------------|-------------------|-------------------|---------|
| m | a | $\delta_{aa} + p$ | δ_{ab} | δ_{ac} | (18.24) |
| $z_m^n = b$ | | δ_{ab} | $\delta_{bb} + p$ | δ_{bc} | |
| c | | δ_{ac} | δ_{bc} | $\delta_{cc} + p$ | |

Эта матрица называется «характеристической матрицей», а соответствующее дифференциальное уравнение $e_m = z_m^n \Phi_n$ называется «характеристическим уравнением», или «вековым уравнением». Существует обширная литература по свойствам и методам решения уравнений такого типа.

2. Если можно пренебречь сопротивлениями, как это можно сделать в колебательных цепях, смешанный тензор импеданса принимает вид

$$z_m^n = I_m^n p + s_m^n / p, \quad (18.25)$$

а если нет приложенных напряжений, дифференциальное уравнение собственных колебаний системы

$$0 = (I_m^n p^2 + s_m^n) i_n \quad (18.26)$$

содержит p^2 в каждой диагональной компоненте. Это и есть «характеристическое уравнение».

III. Вместо замены тока i^m потокосцеплением Φ_m смешанные конструктивные константы можно вводить заменой e_m на e^m с умножением каждого члена на a^{mn} :

$$a^{km} e_m = a^{km} z_{mn} i^n, \quad (18.27)$$

$$e^k = z_{\cdot n}^k i^n = (r_{\cdot n}^k + I_n^k p + s_{\cdot n}^k / p) i^n.$$

IV. Лучше всего вывести сначала смешанный тензор импеданса z_m^n для примитивной контурной сети, а затем преобразовать его для реальной сети. *Формула преобразования z_m^n имеет вид*

$$z' = C_t z C_t^{-1}, \quad z_{m'}^{n'} = z_m^n C_m^m C_n^{n'}. \quad (18.28)$$

9. ПРЕИМУЩЕСТВА ИСПОЛЬЗОВАНИЯ СМЕШАННЫХ ТЕНЗОРОВ

Для конкретных расчетов и операций с числовыми значениями предпочтительно заменить уравнение для z_{mn} на z_m^n и для Y^{nm} на Y_m^n , т. е. перейти от резистансов, индуктансов и элстансов к их соотношениям, а именно к коэффициентам затухания δ и частоты ν . Преимущество их применения многопланово:

1) их значения для данного вида устройств незначительно меняются от одного устройства к другому; следовательно, окончательный численный результат можно оценить более просто, меньше будет ошибок в постановке десятичной запятой и т. д.;

2) одни и те же результаты верны для нескольких аппаратов различных размеров;

3) когда количество меди, железа или изоляции изменяется, смешанные расчетные константы меняются пропорционально;

4) эти отношения мало подвержены влиянию насыщения;

5) при составлении графиков и номограмм для быстрого определения поведения устройств определенного типа, но разных размеров смешанные конструктивные константы являются наиболее логичными параметрами, поскольку их меньше, чем обычных конструктивных констант;

6) при определении корней алгебраических уравнений относительно p для решения дифференциальных уравнений корни являются функциями только смешанных конструктивных констант;

7) при графическом исследовании поведения системы соответствующие кривые можно построить легко, если используются смешанные конструктивные константы.

Есть возможность заменить смешанные конструктивные константы, описанные в предыдущих параграфах, новыми и менее многочисленными конструктивными константами. Однако их изучение здесь не предусматривается.

(Последующая часть главы относится к геометрическим представлениям и может быть опущена без вреда для дальнейшего изложения.)

10. ЕДИНИЧНЫЙ ЭЛЛИПС

I. Когда вводится метрический тензор, то вектор тока i^m и вектор потокосцепления φ_m можно обозначать одной базовой буквой i или φ , выражая этим, что и ток i и потокосцепление i_m — два различных представления одной и той же физической сущности i .

Возникает вопрос: какую же физическую сущность представляет базовая буква i^m ? Напомним, что в гл. 8, § 3 этот вопрос остался без ответа.

Чтобы на него ответить, дадим сначала геометрическое представление метрического тензора a_{mn} на плоскости с прямолинейной системой координат и вектором тока на ней (см. гл. 8). Следует понять, что представление вектора тока i^m , лежащим в n -мерном обычном пространстве (аффинном), является слишком общим (как объяснялось в гл. 8, § 11), но оно служит для уяснения геометрического понятия «величины». Пусть, например, дан вектор тока

$$i^m = \begin{array}{c} m \\ \hline a \quad b \\ \hline |1,340|0,772| \end{array} \quad (18.29)$$

Предположим, что на плоскости (рис. 18.5) любые два отрезка OA и OB вдоль осей a и b являются единичными. Тогда, измерив $OM = 1,34 OA$ по оси a и $ON = 0,772 OB$ по оси b , определим по правилу параллелограмма точку K . Длина OK представляет данный вектор тока i^m , так как его компоненты OM и ON равны соответственно 1,34 и 0,772.

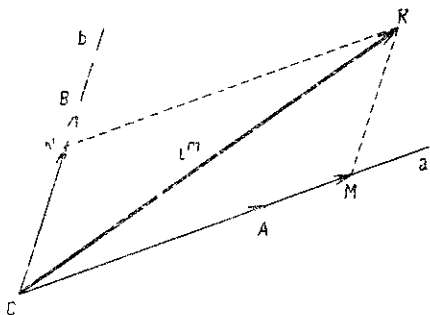


Рис. 18.5. Контравариантный вектор i^m .

II. Возникает вопрос: что такое «величина» вектора OK (или что такое «расстояние» между точками O и K)? Теоретически допустимо связать с вектором OK любое произвольное число и назвать его «величиной» вектора (или «расстоянием между O и K). Практически, однако, имеется следующий механизм приписывания «величины» любому вектору, изображенному на плоскости с началом в точке O .

Изобразим на плоскости произвольный эллипс с центром в точке O . По определению, любой контравариантный вектор, проведенный из точки O до пересечения с эллипсом, имеет единичную величину. Если вектор не касается эллипса, его величина измеряется с помощью этой единицы.

Например, величина вектора OK (рис. 18.6) есть $OK/OP = 1,73$, где P — точка пересечения вектора OK с эллипсом.

Таким образом, в каждом направлении единицей величины служат разные отрезки и один и тот же вектор OK имеет разную величину, когда он вращается вокруг начала координат, так как эллипс отсекает различные его отрезки в зависимости от направления.

В n -мерном пространстве эллипс становится $(n-1)$ -мерным эллипсоидом или «квадратичной поверхностью».

III. Это сложное определение «величины» вектора (или расстояния между двумя точками) упрощается до обычного определения в частном случае, когда (рис. 18.7): 1) оси перпендику-

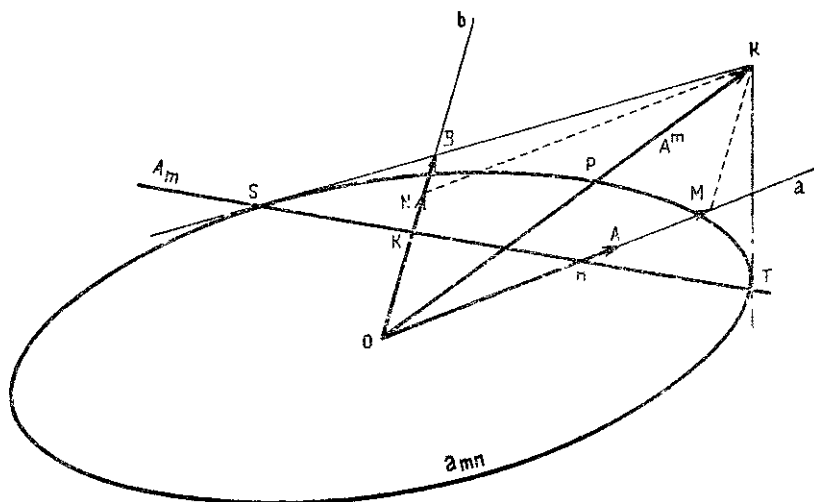


Рис. 18.6. Представление метрического тензора a_{mn} .

лярны; 2) два единичных вектора OA и OB равны; 3) эллипс есть окружность; 4) окружность проходит через точки A и B .

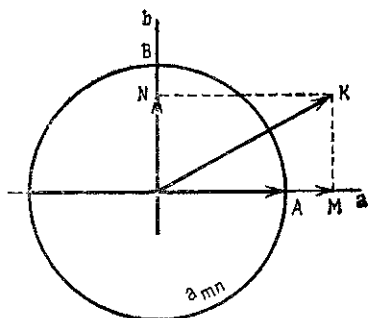


Рис. 18.7. Метрический тензор в евклидовом пространстве.

IV. Отметим, что *не существует связи между введенными измеряемыми векторами OM и ON и введенным эллипсом, они совершенно независимы друг от друга.* Введение измеряемых векторов определяет «компоненты» i^m , а введение эллипса определяет «величину» i^m .

Отметим также, что *нет необходимости определять «величину» вектора, когда заданы его «компоненты».* Например, в общем случае тензора импеданса z_{mn} метрический тензор a_{mn} может не определяться, но тем не менее e_m и i^m существуют геометрически и физически.

Таким образом, при использовании уравнения $e_m = z_{mn} i^n$ понятие «величина» вообще не рассматривается.

11. ВЕЛИЧИНА ВЕКТОРА

I. Единичный эллипс, служащий шкалой для определения «величины», может также служить геометрическим представлением метрического тензора a_{mn} . Так, если заданы компоненты метрического тензора, то можно построить единичный эллипс. Если

$$a_{mn} = \begin{array}{c|cc} & n & a & b \\ \hline m & a & 0,6 & 0,547 \\ & b & 0,547 & 1,32 \end{array}, \quad (18.30)$$

то единичная квадратичная поверхность определяется как

$$a_{mn} i^m i^n = 1, \quad (18.31)$$

где i^m может принимать любые значения. Для заданного значения a_{mn} это уравнение имеет вид

$$0,6(i^a)^2 + 2 \times 0,547 i^a i^b + 1,32(i^b)^2 = 1.$$

Если i^a принимает различные значения и уравнение решается относительно i^b , точка описывает эллипс, изображенный на рис. 18.6. Таким образом, метрический тензор a_{mn} определяет квадратичную поверхность с помощью уравнения (18.31), так же как ковариантный вектор e_m определяет плоскость с помощью уравнения (8.3) ($e_m i^m = 1$).

II. Если задан вектор A^m , его «величина» определяется с помощью метрического тензора следующим образом:

$$(\text{Величина } A^m)^2 = |A|^2 = a_{mn} A^m A^n. \quad (18.32)$$

Эта формула является обобщением для прямолинейных осей теоремы Пифагора для прямоугольных осей.

Например, если A^m — вектор, заданный в уравнении (18.29) и изображенный как OK на рис. 18.5, то квадрат его величины есть AaA или

$$\begin{array}{|c|c|} \hline 1,34 & 0,722 \\ \hline \end{array} \cdot \begin{array}{|c|c|} \hline 0,6 & 0,547 \\ \hline 0,547 & 1,32 \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|} \hline 1,226 \\ \hline 1,752 \\ \hline \end{array}$$

и

$$\begin{array}{|c|c|} \hline 1,226 & 1,752 \\ \hline \end{array} \cdot \begin{array}{|c|} \hline 1,34 \\ \hline 0,72 \\ \hline \end{array} = 3. \quad (18.33)$$

Следовательно, величина A^m есть $\sqrt{3} = 1,73$. Рис. 18.6 задает также $OK/OP = 1,73$.

Поскольку $a_{mn}A^m = A_n$, величина A_m также есть
 (Величина A^m)² = $|A|^2 = A_m A^m = a^{mn} A_m A_n$. (18.34)

12. ПОЛЮС И ПОЛЯРА ЭЛЛИПСА

Контравариантный вектор A^m представляет точку K на рис. 18.6. Если он умножается на a_{mn} , то становится ковариантным вектором $a_{mn}A^m = A_n$:

$$A_n = \begin{array}{|c|c|} \hline 0,6 & 0,547 \\ \hline 0,547 & 1,32 \\ \hline \end{array} \cdot \begin{array}{|c|} \hline 1,34 \\ \hline 0,722 \\ \hline \end{array} \downarrow \begin{array}{|c|c|} \hline n & a & b \\ \hline 1,227 & 1,752 \\ \hline \end{array} \quad (18.35)$$

Он представляется прямой ST на рис. 18.6, отрезки пересечения которой с осями равны $OK = 1/1,227$ и $OH = 1/1,752$.

Существует интересное соотношение между прямой A_m и точкой A^m . Если заданы точка A^m и эллипс a_{mn} , прямая A_m находится построением касательных из точки A^m к эллипсу a_{mn} . Касательные обозначены KS и KT . Прямая A_m соединяет точки касания касательных с эллипсом. Точка K называется «*полюсом*» а прямая ST — «*полярной*» эллипса. Если одна из величин задана, другая однозначно определяется. Итак, точка A^m есть «*полюс*», а прямая A_m — соответствующая «*поляра*» эллипса a_{mn} .

В n -мерном пространстве (где A^m имеет n компонент) a_{mn} есть $(n-1)$ -мерная квадратичная поверхность (эллипсоид), A^m — точка, а A_m — $(n-1)$ -мерная гиперплоскость, «*полярная плоскость*» этого «*полюса*» относительно квадратичной поверхности. Если задан эллипсоид (a_{mn}) , для каждой точки A^m n -мерного пространства имеется одна и только одна $(n-1)$ -мерная полярная гиперплоскость A_m и наоборот.

13. НАКОПЛЕННАЯ МАГНИТНАЯ ЭНЕРГИЯ

I. Контравариантный вектор i^m представляет токи в контурах. Его «*величина*» равна

$$(величина i^m)² = $|i|^2 = a_{mn} i^m i^n = 2T$. (18.36)$$

Следовательно, квадрат «*величины*» вектора тока i^m равен удвоенному значению накопленной магнитной энергии в сети.

Ковариантный вектор $i_m = \varphi_m$ представляет потокосцепление контуров. Его величина

$$|\varphi|^2 = a^{mn} \varphi_m \varphi_n = \varphi_m i^m. \quad (18.37)$$

Таким образом, квадрат величины вектора φ_m потокосцепления также равен удвоенной накопленной магнитной энергии.

Следовательно, вектор тока i^m и вектор потокосцепления φ_m — два различных представления одной и той же физической

сущности: «накопленной магнитной энергии» или «кинетической энергии» системы.

II. Фундаментальная физическая сущность, присутствующая в сети или где-либо в природе, — есть «энергия». Любая форма энергии обладает свойством быть измеримой приборами в двух различных проявлениях: 1) как «интенсивный фактор», подобно току i^m или скорости v^m , которые представлены как контравариантные компоненты энергии; 2) как «экстенсивный фактор», подобно потокоцеплению φ_m или импульсу M_m , которые представлены как ковариантные компоненты энергии.

Произведение интенсивных и экстенсивных величин есть энергия, т. е. произведение контравариантного вектора и ковариантного есть энергия, подобно тому как $2T = i^m \varphi_m = v^m M_m$.

Таким образом, если известны только одни «компоненты» вектора тока i^m , то невозможно определить, как много накопленной магнитной энергии они представляют. Их наличие указывает только на наличие физической сущности магнитной энергии.

То же самое происходит, если известен только вектор φ_m . Если, однако, известен также метрический тензор a_{mn} , то из одного вектора тока или из одного вектора потокоцепления можно получить количество накопленной магнитной энергии (т. е. «величину» i^m или φ_m).

Другими словами, со многими контурными сетями связана реально существующая физическая субстанция — накопленная магнитная энергия i . Эта сущность имеет два вида компонент в сети, которые можно измерить приборами двух различных типов. Контравариантные величины i^m измеряются амперметрами, ковариантные компоненты i_m — измерителями потока (флюксометрами).

Нет таких физических величин в сети, как «результурующий вектор тока» или «результурующий вектор потокоцепления». Есть, однако, физически существующая «величина» — «общая накопленная магнитная энергия», i , которая имеет «контравариантные компоненты» i^m и «ковариантные компоненты» $i_m = \varphi_m$.

Компоненты i могут принимать различные значения в разных системах координат, но величина i не зависит от выбора системы координат.

14. ТЕРМОДИНАМИКА СЕТЕЙ

I. Для простоты рассмотрим ортогональную сеть только с накопленной магнитной энергией; скажем, сеть многообмоточного трансформатора, в котором будем пренебрегать сопротивлением обмоток.

В любой ортогональной сети из n катушек k контуров с k воздействующими напряжениями e могут рассматриваться как входные клеммы, а $n-k$ узловых пар, дающих $n-k$ токов нагрузки I на внешних нагрузках, как клеммы выхода. Другими

словами, любую ортогональную сеть можно рассматривать как обобщенный трансформатор, в котором контуры являются входными клеммами, а узловые пары — выходными. Энергия течет в контуры и покидает сеть из узловых пар, а сама сеть играет роль устройства, преобразующего величину, фазу и число напряжений и токов.

Следовательно, ортогональная сеть преобразует одну форму электрической энергии в другую.

II. В ортогональных сетях метрический тензор $a = a_{\alpha\beta}$ (представляющий собственные и взаимные индуктивности) может принимать два экстремальных значения:

1) если узловые пары разомкнуты и в нагрузке нет тока I , то a равно той же величине для контурной сети a_1 и имеет k строк и столбцов;

2) если узловые пары замкнуты и на нагрузках нет напряжения E , то a становится равным

$$a' = a_1 - a_2 a_4^{-1} a_3. \quad (18.38)$$

В первом случае накопленная магнитная энергия в сети минимальна и линии потока идут по пути с максимальной магнитной проницаемостью. Во втором случае накопленная магнитная энергия максимальна и линии потока идут по пути с минимальной магнитной проницаемостью. Когда сеть нагружена, накопленная энергия принимает промежуточное значение между двумя экстремальными значениями. Поток энергии существует при постоянной температуре («изотермический» процесс).

Минимально возможная накопленная энергия называется «связанной энергией» сети, а разность между максимальной и минимальной накопленной энергией называется «свободной энергией» (или «термодинамическим потенциалом»).

Энергия, которая покидает систему, всегда образуется за счет свободной энергии. «Свободная энергия» характеризует способность сети выделять энергию во внешнюю нагрузку.

III. «Эффективность» сети в смысле обеспечения энергией внешних нагрузок можно представить одним числом

$$\eta = \frac{\text{свободная энергия}}{\text{максимальная накопленная энергия}} = \frac{\text{максимальная энергия} - \text{минимальная энергия}}{\text{максимальная накопленная энергия}}. \quad (18.39)$$

В двухобмоточном трансформаторе это отношение характеризует «коэффициент связи». Таким образом, величина η представляет также меру связи между контурами и узловыми парами.

IV. Этим закончим интересные и важные термодинамические рассуждения.

15. ДВОЙСТВЕННЫЙ МЕТРИЧЕСКИЙ ТЕНЗОР

I. Предыдущие рассуждения можно повторить слово в слово для узловых сетей, если все «контурные» величины заменить соответствующими «двойственными» величинами.

Тензор емкости C^{uv} играет роль двойственного метрического тензора A^{uv} , который повышает и понижает индексы тензоров, встречающихся в уравнении тока. Так, смешанные тензоры имеют вид

$$G^{uv} A_{vw} = G^u_w, \quad C^{uv} A_{vw} = I^u_w, \quad K^{uv} A_{vw} = K^u_w. \quad (18.40)$$

Смешанный тензор проводимости G^u_w представляет

$$\frac{\text{проводимость}}{\text{емкость «открытой цепи»}} = \frac{G}{C'} = S'G, \quad (18.41)$$

а смешанный тензор восприимчивости K^u_w представляет

$$\frac{\text{восприимчивость}}{\text{емкость «открытой цепи»}} = \frac{K}{C'} = \frac{1}{LC'}. \quad (18.42)$$

II. Контравариантная переменная напряжения E^u

$$E_u A^{uv} = E^v = Q^v \quad (18.43)$$

эквивалентна электрическому заряду Q^u , так что $E_u = Q_u$.

Однако теперь $I_u = I^v A_{vu}$ и $\Phi^u = \Phi_v A^{vu}$ не имеют физической интерпретации так же, как в контурных сетях ее не имели величины e^m и q_m .

В терминах смешанных тензоров уравнение тока имеет вид

$$I^u = (G^u_v + I^u_v \rho + K^u_v / \rho) Q^v = Y^u_v Q^v. \quad (18.44)$$

III. Квадрат «величины» вектора напряжения E_u (или вектор заряда Q_u) равен удвоенной запасенной электростатической энергии в сети

$$|E|^2 = |Q|^2 = A^{uv} E_u E_v = A_{uv} Q^u Q^v = E_u Q^u = 2V. \quad (18.45)$$

Следовательно, вектор напряжения E_u и вектор заряда Q^u являются двумя видами представления одной и той же «физической сущности» — «запасенной электростатической энергии», или «потенциальной энергии» системы.

IV. Следует отметить, что с теоретической точки зрения нет причин предпочитать употребление $a_{mn} = l_{mn}$ вместо $A^{uv} = C^{uv}$. Во всех книгах по тензорному анализу только a_{mn} считается единственным метрическим тензором, так как не вводится двойственная точка зрения. Однако двойственная точка зрения в сетях (и в топологии) приводит к необходимости введения двойственного метрического тензора, а также и других двойственных понятий и уравнений.

16. «ПОДЛЕЖАЩИЕ» ПРОСТРАНСТВА И «ЛОКАЛЬНЫЕ» ПРОСТРАНСТВА

I. В гл. 8 контравариантная переменная i^m геометрически представлялась (в первом приближении) точкой в n -мерном аффинном пространстве, проекции которой (измерены относительно общего начала) представляли компоненты i^m . Однако когда i^m становится переменной dq^m/dt , полученной из базовой переменной q^m , то даже это приблизительное представление требует дальнейшего развития. *Только базовая переменная q^m представляется вектором, проведенным из фиксированного начала в переменную точку.*

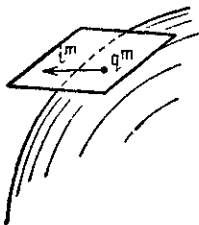


Рис. 18.8. Искривленное подлежащее пространство и скользящее локальное пространство.

Чтобы сделать более наглядным представление производной переменной i^m , предположим, что точка q^m лежит на изогнутой поверхности вроде сферы с закрепленным началом, относительно которого измеряются все компоненты q^m в некоторой криволинейной системе координат. Чтобы представить $i^m = dq^m/dt$, рассмотрим в точке q^m касательную плоскость (рис. 18.8). Если точка q^m движется, то эта касательная плоскость движется вместе с ней.

В касательной плоскости для каждой точки q^m можно ввести множество систем координат, оси которых касательны к осям на подлежащей криволинейной поверхности. Другими словами, точка q^m — точка соприкосновения плоскости и поверхности — служит началом системы координат в касательной плоскости. В общем случае и поверхность и плоскость n -мерны.

II. Теперь производная переменная i^m представляется точкой на касательной плоскости, в то время как базовая переменная q^m представляется точкой на подлежащей поверхности. Так как точка q^m служит началом i^m , то можно заметить, что начало q^m закреплено, тогда как начало i^m не закреплено. Когда значение q^m изменяется, локальное пространство движется по подлежащему пространству вместе с i^m .

Криволинейная поверхность, геометрическое место точек базовой переменной q^m , называется «подлежащим пространством», а плоскость, геометрическое место точек, изображающих производную переменную dq^m или dq^m/dt , называется «локальным пространством» или «касательным пространством». При изучении сетей подлежащее пространство не криволинейное, а плоское, так что в двух измерениях оно становится плоскостью и два пространства соприкасаются на всем протяжении. В этом случае i^m представляется вектором, проведенным между двумя точками $q^m = OA$ и $q^m + dq^m/dt = OB$ (рис. 18.9).

Когда значение q^m изменяется до OA' , i^m изменяется до $A'B'$.

III. Переменная точка q^m служит началом не только для dq^m или dq^m/dt , но и для любого другого определенного тензора. Другими словами, все ранее введенные тензоры полагаются расположенными в касательном пространстве, точка соприкосновения которого с подлежащим пространством изменяется всякий раз, когда изменяется q^m .

Например, центр эллипсоида, представляющего метрический тензор a_{mn} , также движется вместе с точкой q^m (рис. 18.10). Если a_{mn} — функция, то в каждой точке подлежащего пространства эллипсоид a_{mn} имеет различную форму. Таким образом,

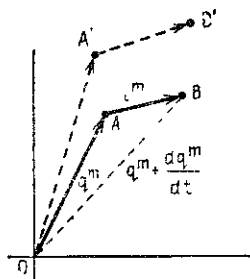


Рис. 18.9. Вектор q^m с фиксированным началом. Вектор l^m с переменным началом.

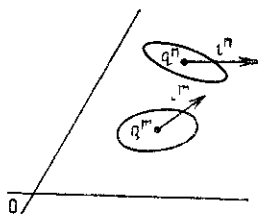


Рис. 18.10. Изменение метрического тензора от точки к точке.

в общем случае измерение единицы «длины» вектора не только различно по разным направлениям, но и изменяется от точки к точке в подлежащем пространстве.

IV. В этой главе исследовался вопрос о том, что является величиной вектора. Он вызвал рождение сущности в виде первого фундаментального инварианта тензорного анализа — «метрического тензора» $a_{\alpha\beta}$.

Поскольку положение всех векторов изменяется с изменением q^m , то такой вектор, как AB (рис. 18.9), также изменяется до $A'B'$. Перемещение векторов из одного положения в другое вызывает вопрос: когда вектор $A'B'$ параллелен вектору AB ? Этот вопрос рождает второй фундаментальный инвариант тензорного анализа — «аффинную связность» $\Gamma_{\alpha\beta}^\gamma$, которая, однако, не вводится в этой книге. Тензор резистанса $r_{\alpha\beta}$ также будет играть свою роль в определении параллелизма двух векторов.

II. Перечисленные четыре типа систем тензорных уравнений представляют собой полный набор базовых уравнений для активных асимметричных сетей и служат отправной точкой для их анализа и синтеза. Каждое тензорное уравнение соотнесено системе осей, функция которых неизменна на протяжении всего анализа.

В дальнейшем не будем специально подчеркивать, что эти четыре типа систем тензорных уравнений не являются матричными уравнениями. Они являются тензорными уравнениями, представляющими поведение большого разнообразия сетей, а не только одной конкретной сети. В предшествующем изложении был установлен механизм, с помощью которого можно определить компоненты этих тензоров для некоторой части сети из n катушек в том случае, если они известны для некоторой другой сети из n катушек. Различные группы преобразований, которые оставляют эти уравнения инвариантными, являются подгруппами группы «линейных преобразований», или «группы «аффинных преобразований» G_n . Некоторые группы преобразований определены в гл. 11, § 6.

2. КОМПАУНД-СЕТИ

I. Система тензорных уравнений аналогична по форме системе обычных уравнений, представляющих некоторую физическую систему. Для визуализации системы тензорных уравнений представляется довольно логичным построить физическую систему, в которой каждый составной элемент сам по себе уже является системой, так что он характеризуется не обычными числами, а тензорами. Такую фиктивную физическую систему, в которой составные элементы сами являются некоторыми системами, мы будем называть «компаунд-системой» (по аналогии с «компаунд-тензорами», в которых каждая компонента сама по себе уже является не обычным числом, а тензором).

Чтобы физически обосновать системы тензорных уравнений предыдущего параграфа, введем фиктивную «компаунд-сеть», в которой собственные и взаимные импедансы катушек являются тензорами валентности два, а токи и напряжения в отдельных катушках — не простыми величинами, а векторами. Такие компаунд-катушки в отличие от обычных катушек будем изображать жирными линиями. Каждая компаунд-катушка на самом деле представляет собой целую сеть.

Фиктивные компаунд-сети, уравнения которых были приведены в предыдущем параграфе, показаны на рис. 19.1 для случая, когда число тензорных уравнений равно четырём. Это значит, что в контурной компаунд-сети токи и напряжения определены только в контурах, в узловых компаунд-сети — только на узловых парах, а в ортогональной компаунд-сети — как в контурах, так и в узловых парах.

Каждая компаунд-катушка представляет некоторую сеть, базис которой может быть физически определенным или может иметь гипотетические оси аналогично случаю с симметричными составляющими.

Компонентами каждого z могут быть реальные индуктансы или же другие гипотетические константы, такие как реактансы потерь. Это означает, что отдельные координатные оси каждой

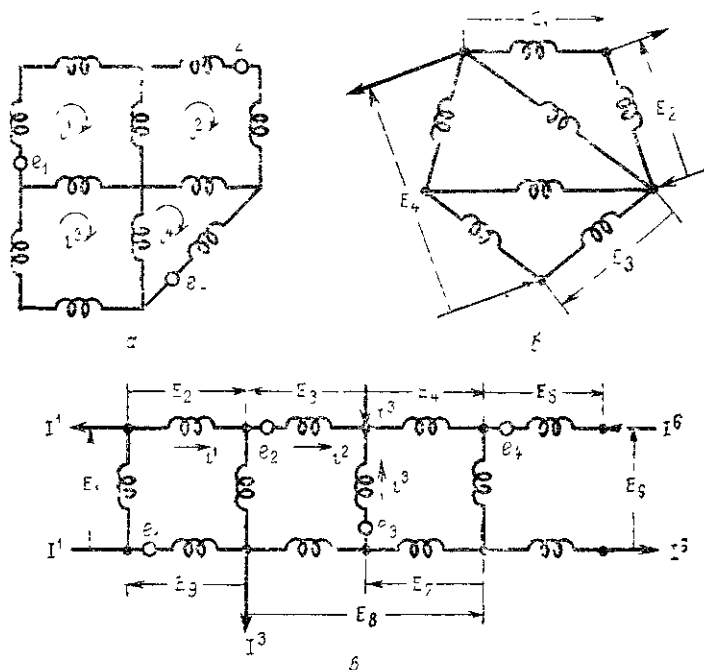


Рис. 19.1. Три типа компаунд-сетей:

а — секторная компаунд-сеть; *б* — узловая компаунд-сеть; *в* — ортогональная компаунд-сеть.

компаунд-катушки можно выбирать несколько произвольно с помощью тензора отдельного преобразования без каких-либо изменений в самой компаунд-сети. Каждая компаунд-катушка имеет свой собственный тензор преобразования.

Компаунд-сети вводятся как основное понятие в рамках эффективного метода, позволяющего составлять уравнения сложных сетей, манипулировать ими и решать эти уравнения так же просто, как обычные уравнения для простых, несложных сетей.

II. Все теории, законы, уравнения, соображения, развитые для обычных сетей в предыдущих главах книги, справедливы и для компаунд-сетей с той лишь разницей, что простые величины надо заменить в них соответствующими тензорами, а простые тензоры — соответствующими компаунд-тензорами.

Например, можно *соединять* компаунд-катушки (каждая из которых представляет сложную сеть) в компаунд-сеть с помощью *компаунд-тензора преобразования С*, в котором *каждая компонента является не целым числом, а тензором валентности два*, или с помощью последовательности таких компаунд-тензоров преобразования. Можно *исключить* отдельные контуры или узловые пары, которые не участвуют в анализе сети, исключить токи намагничивания и т. д. Метод анализа и действия с компаунд-сетями с известными оговорками аналогичны методу анализа обычных сетей.

3. ФУНКЦИОНАЛЬНОЕ РАЗБИЕНИЕ СЕТЕЙ

I. Существует множество способов изображения сети в виде некоторой компаунд-сети. Наиболее очевидным путем является разбиение сетей *физически* на составные части, при этом предполагается, что сеть составлена из них, как из элементов, соединенных друг с другом различными способами. Наименьшими составными частями могут быть, например, трехфазные трансформаторы, генераторы, линии электропередачи и т. д. Другой менее очевидной, но более важной точкой зрения является разделение контуров и узловых пар на более мелкие единицы в соответствии с их *функцией*.

II. Узловые пары сети могут выполнять различные функции, например:

1) некоторые узловые пары выполняют роль зажимов для приложенных напряжений E или воздействующих токов I ; такие узловые пары будем называть *входными* клеммами;

2) некоторые из них могут служить зажимами для *нагрузок* или для присоединения внешних сетей, не учитываемых в уравнениях или схемах сети; в этом случае I представляют собой токи в нагрузках, а E — разность потенциалов в нагрузках; такие узловые пары будем называть *выходными* зажимами;

3) узловые пары могут быть *управляемыми*; например, разность потенциалов E на них может поддерживаться с помощью регулятора постоянного напряжения или изменяться по заданному закону;

4) некоторые узловые пары могут подвергаться определенным *изменениям*; например, к ним можно присоединить катушку с заданным импедансом Z или замкнуть их накоротко, или изменять приложенное напряжение на данной узловой паре и т. д.;

5) узловые пары могут оказаться вообще постоянно *разомкнутыми*, так что через них не протекает ток; знание разности потенциалов E на таких парах необязательно, так как соответствующие им координатные оси можно исключить из Y .

III. Различные контуры в сети могут выполнять аналогичные функции. Однако *функции контуров обычно не так очевид-*

ны, как функции узловых пар. Например, контурное напряжение e_a может играть роль входного напряжения лишь в том случае, если вдоль всего контура (состоящего из многих катушек) оно является единственным приложенным напряжением (рис. 19.2, а), а также если это приложенное напряжение e_a существует в ветви, которая не является общей с другими контурами. Подобные оговорки можно сделать и по поводу других контурных величин, таких как нагрузка в контуре (рис. 19.2, б) и т. п.

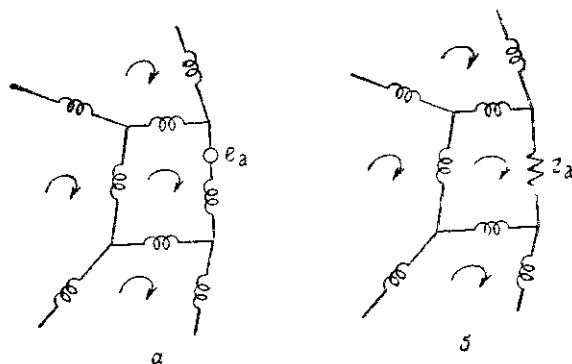


Рис. 19.2. Контурные величины как величины на зажимах сети:

а — контурное напряжение как напряжение на зажимах; б — контурная катушка как нагрузка на зажимах.

IV. В некоторых сетях может оказаться любое количество типов узловых пар и контуров, функционально отличных друг от друга. Как следствие этого, *единое уравнение* поведения сети *разбивается на столько тензорных уравнений, сколько в ней имеется функционально различных типов узловых пар и контуров*.

Функциональное разбиение сетей детально разбирается в гл. 22 и 23. В последующих нескольких параграфах обсуждаются общие сетевые теоремы, применяемые для уменьшения числа тензорных уравнений в ходе анализа сети.

4. ИСКЛЮЧЕНИЕ ПЕРЕМЕННЫХ

I. *Уравнение поведения сети разделяется на столько тензорных уравнений, сколько функционально различных типов узловых пар и контуров имеется в сети*. Однако часто случается, что некоторые из узловых пар или контуров *не требуются* при анализе. Например, узловые пары, через которые не идет ток \mathbf{I} , или контуры, в которых нет приложенных напряжений \mathbf{e} в ходе анализа, являются «пассивными», и соответствующие тензорные уравнения выступают в качестве балласта как в процессе вы-

кладок, так и в окончательном результате. Такие ненужные уравнения следует исключать еще перед началом анализа.

Нужно помнить, что если уравнение напряжений (z) составлено, пассивными узловыми парами пренебрегают, но пассивными контурами — нет. Чтобы исключить их из рассмотрения, уравнения следует подвергнуть редукции по формулам гл. 10. Точно так же, если уравнение токов (Y) составлено, то игнорируются лишь пассивные контуры. Пассивные узловые пары можно исключить из рассмотрения лишь редукцией уже составленного уравнения

II. Компаунд-сети и их тензорные уравнения можно упрощать точно так же, как простые сети и их уравнения. Это означает, что число контуров в них можно сократить преобразованием контур-звезда, число узловых пар — преобразованием звезда-контур и т. д. Эти редукции (упрощения) выполняются исключением одной или более переменных из систем тензорных уравнений по формулам, приведенным в гл. 10.

Редукцию излишних осей следует проводить по возможности до операций с уравнениями.

5. РЕДУКЦИЯ (УПРОЩЕНИЕ) УЗЛОВЫХ КОМПАУНД-СЕТЕЙ

I. В качестве примера рассмотрим узловую сеть (рис. 19.3), имеющую три типа узловых пар. К первой совокупности узловых пар приложено напряжение $E_1 (E_1, E_2, E_3)$, вторая совокупность соединена с нагрузками, имеющими разности потенциалов

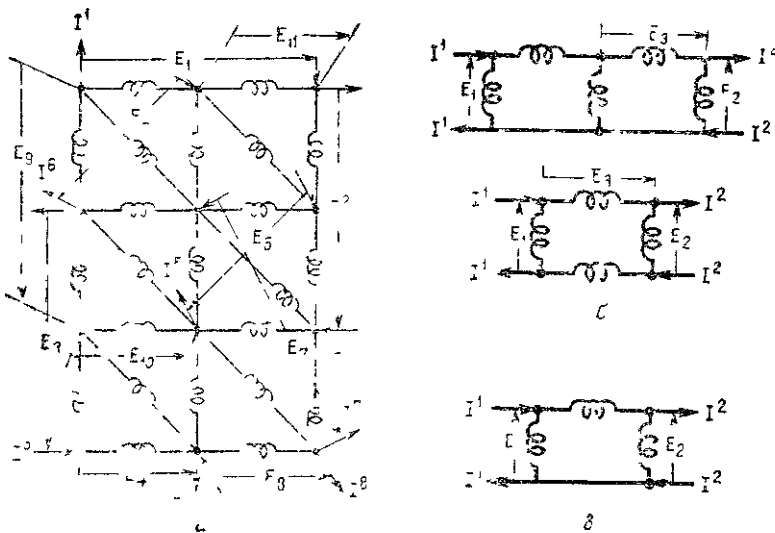


Рис 19.3. Замена обычной узловой сети узловой компаунд-сетью:

а — заданная узловая сеть б — два типа узловых компаунд-сетей, в — эквивалентная л-сеть

$E_2(E_4, E_5, E_6, E_7, E_8)$. Оставшиеся узловые пары $E_3(E_9, E_{10}, E_{11})$ являются постоянно-разомкнутыми и не играют роли в задаче, но их наличие учитывается при составлении уравнения токов.

Соответственно уравнение токов системы $I=YE$, содержащее 11 обычных уравнений, необходимо разделить на три тензорных уравнения:

$$\begin{aligned} I^1 &= Y^1 E_1 - Y^2 E_2 - Y^3 E_3, \\ I^2 &= Y^4 E_1 - Y^5 E_2 - Y^6 E_3, \\ 0 &= Y^7 E_1 - Y^8 E_2 - Y^9 E_3. \end{aligned} \quad (19.7)$$

В предположении, что приложенное напряжение E_1 — положительное, разности потенциалов E_2 нагрузки и E_3 на открытых узловых парах следует считать отрицательными.

Ток $I^3=0$. Входным током является I_1 , нагрузочным током — I^2 . Первое тензорное уравнение представляет три обычных уравнения, второе — пять, а третье — три. Эти тензорные уравнения справедливы для множества сетей, имеющих такие же три типа узловых пар.

Узловая компаунд-сеть, представленная тремя тензорными уравнениями, показана в двух различных формах на рис. 19.3 б. Эти сети имеют три узловые пары (по одной узловой паре на уравнение) и, следовательно, четыре узла. Число выбираемых компаунд-контуров не играет роли, так как контуры не присутствуют явно в тензорных уравнениях. Для облегчения анализа сложную действительную сеть (рис. 19.3, а) заменяют простой компаунд-сетью (рис. 19.3, б). (Следует упомянуть, что тем самым простое тензорное уравнение $I=YE$ представляется простой открытой катушкой, имеющей одну узловую пару)

II. Теперь, если для анализа важны лишь входные величины E_1 , I^1 и выходные E_2 , I^2 , переменную E_3 можно исключить. При этом число тензорных уравнений уменьшается с трех до двух. Результатом исключения является то, что узловая компаунд-сеть (рис. 19.3, б) упрощается (рис. 19.3, в) и имеет две узловые пары вместо трех. Катушки упрощенной сети соединяются в π-сеть.

III. Уравнение новой сети (рис. 19.3, в) находят исключением E_3 из третьего уравнения системы (19.7) с помощью формул редукции (14.63) и (14.64), что дает

$$\begin{aligned} I^1 &= Y^{1'} E_1 - Y^2 E_2, \\ I^2 &= Y^3 E_1 - Y^4 E_2, \end{aligned} \quad (19.8)$$

где совокупность адмиттансов открытых цепей

$$\begin{aligned} Y^{1'} &= Y^1 - Y^3 Y^9 - 1 Y^7, & Y^{3'} &= Y^4 - Y^6 Y^9 - 1 Y^7, \\ Y^{2'} &= Y^2 - Y^3 Y^9 - 1 Y^8, & Y^{4'} &= Y^5 - Y^6 Y^9 - 1 Y^9 \end{aligned} \quad (19.9)$$

представляет π -сеть (сеть с двумя узловыми парами), имеющую лишь входные и выходные зажимы. Постоянно разомкнутые узловые пары исключены из рассмотрения. Их место заняли адмиттансы Y^1, Y^2, Y^3, Y^4 , представляющие собственные и взаимные адмиттансы входа и выхода, измеренные при условии, что остальные узловые пары разомкнуты.

IV. Если бы исключенные узловые пары не были постоянно разомкнутыми и на них действовал ток I^3 , соответствующее уравнение было бы исключено, а система приведена к π -сети. Однако действующие токи I^1 и I^2 меняются при этом на новые токи I^1' и I^2' , определяемые по формулам приведения как

$$I^1' = I^1 - Y^3 Y^9 - I^3,$$

$$I^2' = I^2 + Y^6 Y^9 - I^3. \quad (19.10)$$

Следует напомнить, что для исключения k узловых пар из системы необходимо обратить матрицу Y^9 , имеющую k строк и столбцов.

Анализ упрощенного уравнения (19.8) гораздо проще анализа исходного уравнения (19.7).

V. Такие этапы анализа выполняют и в том случае, если нужно исключить два или более уравнений, а число уравнений исходной системы больше трех.

6. РЕДУКЦИЯ КОНТУРНОЙ КОМПАУНД-СЕТИ

I. Рассмотрим контурную сеть (рис. 19.4, а), которая содержит систему входных контуров с током $i^1 (i^1, i^2)$ и систему выходных контуров с током $i^2 (i^3, i^4)$, а также третью совокупность кон-

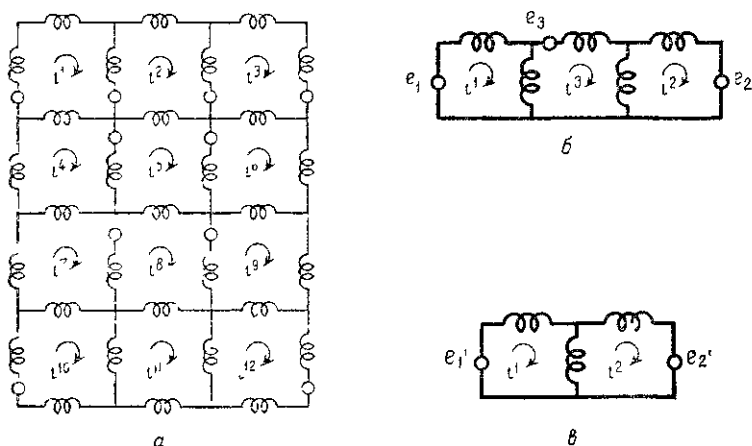


Рис. 19.4. Замена обычной контурной сети компаунд-сетью:

а — заданная контурная сеть; б — контурная компаунд-сеть; в — эквивалентная T-сеть.

туров с током $i^3 (i^5 - i^{12})$, не играющую в анализе никакой роли. На рис. 19.4, б показана соответствующая контурная компаунд-сеть с тремя контурами.

Запишем три тензорных уравнения, представляющих систему обычных уравнений $e = z i$ контурной сети с контурами трех типов:

$$\begin{aligned} e_1 &= z_1 i^1 + z_2 i^2 + z_3 i^3, \\ e_2 &= z_4 i^1 + z_5 i^2 + z_6 i^3, \\ e_3 &= z_7 i^1 + z_8 i^2 + z_9 i^3. \end{aligned} \quad (19.11)$$

Третья совокупность контуров исключается по формуле редукции (10.28) или с помощью такой процедуры, которая применяется к обычным уравнениям. При этом получаем

$$e'_1 = z'_1 i^1 + z'_2 i^2, \quad (19.12)$$

$$e'_2 = z'_3 i^1 + z'_4 i^2,$$

где

$$e'_1 = e_1 - z_3 z_9^{-1} e_3, \quad (19.13)$$

$$e'_2 = e_2 - z_6 z_9^{-1} e_3;$$

$$z'_1 = z_1 - z_3 z_9^{-1} z_7, \quad z'_3 = z_4 - z_6 z_9^{-1} z_7, \quad (19.14)$$

$$z'_2 = z_2 - z_3 z_9^{-1} z_8; \quad z'_4 = z_5 - z_6 z_9^{-1} z_8.$$

Импедансы со штрихами z'_1, z'_2, z'_3 и z'_4 являются собственными и взаимными импедансами входных и выходных контуров, измеренными при наличии токов в остальных контурах. Новые приложенные напряжения e_1 и e_2 включают напряжение e_3 , приложенное к исключенным контурам.

Если же исключенные контуры не содержат приложенных напряжений, то e'_1 и e'_2 равны соответственно e_1 и e_2 .

II. Аналогичные этапы упрощения пригодны и в том случае, если исходная система уравнений содержит более трех тензорных уравнений и исключается больше одного из этих уравнений.

7. УПРОЩЕНИЕ ОРТОГОНАЛЬНЫХ КОМПАУНД-СЕТЕЙ

I. Предположим, что задана ортогональная сеть с двумя типами контуров и двумя типами узловых пар (рис. 19.5, а).

Уравнения этой сети в (19.4) записаны как

$$\begin{aligned} e_1 &= z_1 i^1 + z_2 i^2 + z_3 I^1 + z_4 I^2, \\ e_2 &= z_5 i^1 + z_6 i^2 + z_7 I^1 + z_8 I^2, \\ E_1 &= z_9 i^1 + z_{10} i^2 + z_{11} I^1 + z_{12} I^2, \\ E_2 &= z_{13} i^1 + z_{14} i^2 + z_{15} I^1 + z_{16} I^2. \end{aligned} \quad (19.15)$$

II. Предположим, что один из контуров и одна из узловых пар для анализа лишние. Поэтому *исключим, например, второе и четвертое тензорные уравнения*. Тогда сеть будет содержать *один контур и одну узловую пару* (рис. 19.5, б).

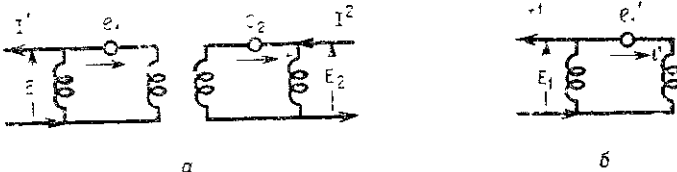


Рис. 19.5. Упрощение ортогональной компаунд-сети:
а — перед упрощением; б — после упрощения.

Заметим, что исключенный контур имеет приложенное напряжение e_2 , а исключенная узловая пара подает ток $-I^2$ в нагрузку (или, что то же самое, имеет воздействующий ток I^2).

Исключив I^2 из последнего уравнения, получим

$$I^2 = -z_{16}^{-1} (z_{13} i^1 + z_{14} i^2 + z_{15} I^1 - E_2)$$

и подставим в оставшиеся три уравнения

$$\begin{aligned} e_1 &= (z_1 - z_4 z_{16}^{-1} z_{13}) i^1 + (z_2 - z_4 z_{16}^{-1} z_{14}) i^2 \\ &\quad + (z_3 - z_4 z_{16}^{-1} z_{15}) I^1 + z_4 z_{16}^{-1} E_2, \\ e_2 &= (z_5 - z_6 z_{16}^{-1} z_{13}) i^1 + (z_6 - z_6 z_{16}^{-1} z_{14}) i^2 \\ &\quad + (z_7 - z_8 z_{16}^{-1} z_{15}) I^1 + z_8 z_{16}^{-1} E_2, \\ E_1 &= (z_9 - z_{12} z_{16}^{-1} z_{13}) i^1 + (z_{10} - z_{12} z_{16}^{-1} z_{14}) i^2 \\ &\quad + (z_{11} - z_{12} z_{16}^{-1} z_{15}) I^1 + z_{12} z_{16}^{-1} E_2. \end{aligned}$$

Это может быть также записано как

$$\begin{aligned} e_1 &= z'_1 i^1 + z'_2 i^2 + z'_3 I^1 + z_4 z_{16}^{-1} E_2, \\ e_2 &= z'_5 i^1 + z'_6 i^2 + z'_7 I^1 + z_8 z_{16}^{-1} E_2, \\ E_1 &= z'_9 i^1 + z'_{10} i^2 + z'_{11} I^1 + z_{12} z_{16}^{-1} E_2. \end{aligned} \quad (19.16)$$

III. Исключим i^2 из второго уравнения

$$i^2 = -z_6'^{-1}(z_5' i^1 + z_7' I^1 + z_8 z_{16}^{-1} E_2 - e_2)$$

и подставим в оставшиеся два уравнения

$$\begin{aligned} e_1 - z_2' z_6'^{-1} e_2 - (z_4 z_{16}^{-1} - z_2' z_6'^{-1} z_8 z_{16}^{-1}) E_2 &= \\ &= (z_1' - z_2' z_6'^{-1} z_5') i^1 + (z_3' - z_2' z_6'^{-1} z_7') I^1, \\ E_1 - z_{10}' z_6'^{-1} e_2 - (z_{12} z_{16}^{-1} - z_{10}' z_6'^{-1} z_8 z_{16}^{-1}) E_2 &= \\ &= (z_9' - z_{10}' z_6'^{-1} z_5') i^1 + (z_{11}' - z_{10}' z_6'^{-1} z_7') I^1. \end{aligned}$$

Эти два уравнения можно записать как

$$\begin{aligned} e_1 &= z_1'' i^1 + z_2'' I^1, \\ E_1 &= z_3'' i^1 + z_4'' I^1. \end{aligned} \quad (19.17)$$

Импедансы, помеченные двумя штрихами, представляют собой собственные и взаимные импедансы оставшегося контура и узловой пары, измеренные в присутствии исключаемых контуров и узловых пар. Аналогично e_1'' и E_1'' — изменившиеся входные напряжения, отличные от действительных e_1 и E_1 из-за наличия исключаемых e_2 и E_2 .

8. ТЕРМИНОЛОГИЯ КОМПАУНД-СЕТЕЙ

Концепция компаунд-сети (каждая катушка представляет целую сеть) предполагает, что *вся терминология для импедансов обычных сетей может быть перенесена на компаунд-сети с заменой обычных числовых значений компонент соответствующими тензорами.*

Назовем некоторые термины и их устойчивые сочетания, которые будут употребляться при анализе компаунд-сетей.

1. *Собственные и взаимные импедансы* z_{11} , z_{12} и адмиттансы Y^{11} , Y^{12} , называемые также импедансами и адмиттансами «точки движения» и «переноса» в обычных сетях.

2. *Собственный импеданс короткого замыкания* z_{11}' (равный $z_{11} - z_{12} z_{22}^{-1} z_{21}$) и собственный адмиттанс размыкания Y^{11} (равный $Y^{11} - Y^{12} Y^{22-1} Y^{21}$).

3. *Взаимный импеданс короткого замыкания (переноса)* z_{12}' и взаимный адмиттанс размыкания Y^{12} , существующий между различными совокупностями зажимов, которые приведены, например, в уравнениях (19.12) и (19.9).

Другими понятиями являются также

4. *Коэффициенты потерь* $\lambda =$ (взаимный импеданс/собственный импеданс) или $=$ (взаимный адмиттанс/собственный адмиттанс)

то есть $z_{12}z_{11}^{-1}$ или $Y^{12}Y^{11-1}$. Они являются тензорами валентности два, каждая компонента которых есть отношение двух импедансов или адмиттансов.

Такие коэффициенты потерь были уже введены в уравнениях (19.10) и (19.13), где показано, что *любое приложенное напряжение e или воздействующий ток I одной совокупности зажимов можно преобразовать* в напряжение и ток другой совокупности зажимов умножением их (e и I) на *соответствующие коэффициенты потерь*. Произведение представляет собой напряжение размыкания на второй совокупности зажимов.

Например, в уравнении (19.13) приложенное напряжение e_3 можно «перенести» на входные зажимы как $-z_3z_9^{-1}e_3$, где $z_3z_9^{-1}$ — коэффициент потерь. Аналогично в уравнении (19.10) воздействующий ток I_3 переносится на выходные зажимы как $-Y^6Y^{9-1}I_3$, где Y^6Y^{9-1} — его коэффициент потерь. Произведение представляет собой ток короткого замыкания на выходных зажимах.

5. *Импедансы потерь* $z_1 = z_{11} - z_{12}$ — собственный импеданс минус взаимный импеданс, а адмиттанс потерь $Y^1 = Y^{11} - Y^{12}$. Например, тензорные уравнения симметричной двухконтурной компаунд-сети

$$e_1 = z_{11}i^1 + z_{12}i^2, \tag{19.18}$$

$$e_2 = z_{12}i^1 + z_{22}i^2$$

можно определить на T -сети (рис. 19.6, б); эта сеть не имеет взаимных импедансов между тремя катушками, а $z_1 = z_{11} - z_{12}$ и $z_2 =$

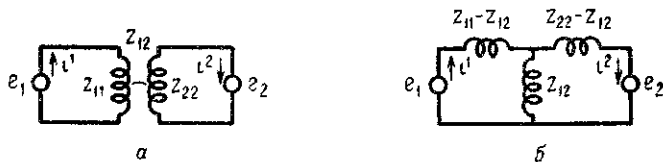


Рис. 19.6

а — двухконтурная сеть; б — эквивалентная T -сеть

$= z_{22} - z_{12}$ аналогично эквивалентной T -сети для двухобмоточных трансформаторов.

9. ФИЗИЧЕСКОЕ РАЗДЕЛЕНИЕ СЕТЕЙ

1. В предыдущих параграфах предполагалось, что сеть образована компаунд-катушками, различающимися функциональным назначением. Другим способом является физическое разделение исходной сети на компаунд-катушки, каждая из которых сама по себе является сетью, так что действительная сеть состо-

ит из этих составляющих сетей, соединенных последовательно или параллельно и т. п.

Примером такого разделения может служить трехфазная сеть электропередачи, состоящая из совокупности линий электропередачи, трансформаторов, генераторов, нагрузок и т. д.

Другой пример — *цепи вакуумных ламп*, состоящие из усилителей, модуляторов, трансформаторов, неподвижных сетей, соединенных различными способами. Можно назвать также *коммуникационные сети*, состоящие из передающей и приемной аппаратуры, линий передачи, фильтров, корректирующих цепей, взаимосвязанных четырехполюсников и т. д.; *силовые установки*, состоящие из различных типов вращающихся электрических машин, соединенных с неподвижными сетями, а также управляющих сетей, релейных систем и т. д. Практически все электрические сети и электромеханические системы можно разделить *физически* на множество меньших единиц, каждая из которых затем анализируется отдельно, и результаты анализа вновь объединить для исходной системы.

Определенные общие принципы идентичны и справедливы для анализа всех сложных систем. Некоторые из них описаны при более детальном анализе трехфазных линий электропередач.

II. *Метод анализа компаунд-сети подобен методу анализа обычной сети, разница лишь в том, что каждая обычная величина заменяется тензором, а каждый тензор — соответствующим компаунд-тензором.* Например, если компаунд-сеть является *контурной* сетью, то:

1) составляют примитивную компаунд-сеть и определяют ее геометрические объекты z , e и i (компаунд-тензоры);

2) определяют токи, протекающие в компаунд-сети;

3) тензор преобразования компаунд-сети C получают приравнованием старых и новых токов в каждой катушке;

4) геометрические объекты действительной сети определяют как $z' = C_i z C$, $e' = C_i^* e$, $i' = z'^{-1} e'$. Величины, характеризующие отдельные катушки, находят как $i = C i'$, $e_c = z C i'$, $y_c = C y' C_i^*$ и т. д.

Естественно, компаунд-сеть можно анализировать как контурную, ортогональную или узловую в зависимости от существа проблемы.

III. Будет установлено, что второй из перечисленных шагов, а именно определение токов через компаунд-сеть, уже не является такой простой процедурой, как для обычной сети, так как приходится учитывать способы соединения отдельных катушек в каждой компаунд-катушке.

10. ТРЕХФАЗНЫЕ УСТРОЙСТВА КАК КОМПАУНД-КАТУШКИ

I. В трехфазных компаунд-сетях для простоты можно предположить, что тензор импеданса z каждой компаунд-катушки перед их объединением определен тремя отдельными катушками (в отдельной примитивной сети), т. е. число столбцов равно или кратно трем (конечно, в компаунд-сетях общего вида отдельные катушки можно представлять относительно любых произвольных осей). Индивидуальный тензор преобразования каждого устройства также находят заменой его примитивной сети действительным устройством.

II. Тензор импеданса *неслабанированного* трехфазного генератора линии электропередачи или трехфазной нагрузки можно представить как

$$z = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} & a & b & c \\ \begin{array}{c} a \\ b \\ c \end{array} & \begin{array}{|c|c|c|} \hline Z_1 & Z_2 & Z_3 \\ \hline Z_4 & Z_5 & Z_6 \\ \hline Z_7 & Z_8 & Z_9 \\ \hline \end{array} & \end{array} \quad (19.19)$$

Этот тензор в общем случае несимметричен. Компаунд-сеть такого устройства изображается в виде простой катушки (рис. 19.7, б). Некоторые специальные случаи приведены в первом столбце табл. 19.1.

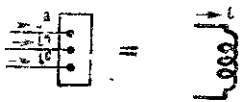
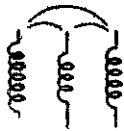
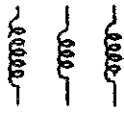
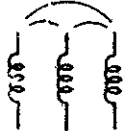

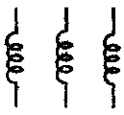
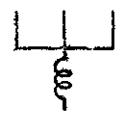


Рис. 19.7.
а — трехфазное устройство; б — компаунд-катушка

III. Тензоры импеданса трехфазных *многообмоточных трансформаторов* имеют три, шесть, девять, двенадцать и т. д. строк столбцов в зависимости от числа степеней свободы трансформаторов. Их компонентами могут быть действительные реактансы или реактансы потерь, как показано в гл. 11, § 11. Выраженный через реактансы потерь тензор импеданса *двухобмоточного* трехфазного трансформатора выглядит так же, как для трансформатора, состоящего из *трех однофазных трансформаторов*, если пренебречь намагничивающими токами:

Таблицы импедансов трехфазных катушек разных типов

| | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|-------|---|--|----------|---|---|---|---|----------|----------|----------|-------|----------|----------|----------|---|----------|----------|----------|--|--|---|---|---|---|----------|----------|----------|-------|----------|----------|----------|---|----------|----------|----------|
| 1 |  | <table border="1"> <tr><td></td><td>a</td><td>b</td><td>c</td></tr> <tr><td>a</td><td>Z_{aa}</td><td>Z_{ab}</td><td>Z_{ac}</td></tr> <tr><td>Z = b</td><td>Z_{ba}</td><td>Z_{bb}</td><td>Z_{bc}</td></tr> <tr><td>c</td><td>Z_{ca}</td><td>Z_{cb}</td><td>Z_{cc}</td></tr> </table> | | a | b | c | a | Z_{aa} | Z_{ab} | Z_{ac} | Z = b | Z_{ba} | Z_{bb} | Z_{bc} | c | Z_{ca} | Z_{cb} | Z_{cc} | <table border="1"> <tr><td></td><td>0</td><td>1</td><td>2</td></tr> <tr><td>0</td><td>Z_{00}</td><td>Z_{01}</td><td>Z_{02}</td></tr> <tr><td>Z = 1</td><td>Z_{10}</td><td>Z_{11}</td><td>Z_{12}</td></tr> <tr><td>2</td><td>Z_{20}</td><td>Z_{21}</td><td>Z_{22}</td></tr> </table> | | 0 | 1 | 2 | 0 | Z_{00} | Z_{01} | Z_{02} | Z = 1 | Z_{10} | Z_{11} | Z_{12} | 2 | Z_{20} | Z_{21} | Z_{22} |
| | | | a | b | c | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| a | Z_{aa} | Z_{ab} | Z_{ac} | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| Z = b | Z_{ba} | Z_{bb} | Z_{bc} | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| c | Z_{ca} | Z_{cb} | Z_{cc} | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| | 0 | 1 | 2 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 0 | Z_{00} | Z_{01} | Z_{02} | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| Z = 1 | Z_{10} | Z_{11} | Z_{12} | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 2 | Z_{20} | Z_{21} | Z_{22} | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 2 |  | <table border="1"> <tr><td></td><td>a</td><td>b</td><td>c</td></tr> <tr><td>a</td><td>Z_a</td><td></td><td></td></tr> <tr><td>Z = b</td><td></td><td>Z_b</td><td></td></tr> <tr><td>c</td><td></td><td></td><td>Z_c</td></tr> </table> | | a | b | c | a | Z_a | | | Z = b | | Z_b | | c | | | Z_c | <table border="1"> <tr><td></td><td>0</td><td>1</td><td>2</td></tr> <tr><td>0</td><td>Z_0</td><td>Z_2</td><td>Z_1</td></tr> <tr><td>Z = 1</td><td>Z_1</td><td>Z_0</td><td>Z_2</td></tr> <tr><td>2</td><td>Z_2</td><td>Z_1</td><td>Z_0</td></tr> </table> | | 0 | 1 | 2 | 0 | Z_0 | Z_2 | Z_1 | Z = 1 | Z_1 | Z_0 | Z_2 | 2 | Z_2 | Z_1 | Z_0 |
| | | | a | b | c | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| a | Z_a | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| Z = b | | Z_b | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| c | | | Z_c | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| | 0 | 1 | 2 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 0 | Z_0 | Z_2 | Z_1 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| Z = 1 | Z_1 | Z_0 | Z_2 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 2 | Z_2 | Z_1 | Z_0 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 3 |  | <table border="1"> <tr><td></td><td>a</td><td>b</td><td>c</td></tr> <tr><td>a</td><td>Z</td><td>X_1</td><td>X_2</td></tr> <tr><td>Z = b</td><td>X_2</td><td>Z</td><td>X_1</td></tr> <tr><td>c</td><td>X_1</td><td>X_2</td><td>Z</td></tr> </table> | | a | b | c | a | Z | X_1 | X_2 | Z = b | X_2 | Z | X_1 | c | X_1 | X_2 | Z | <table border="1"> <tr><td></td><td>0</td><td>1</td><td>2</td></tr> <tr><td>0</td><td>Z_0</td><td></td><td></td></tr> <tr><td>Z = 1</td><td></td><td>Z_1</td><td></td></tr> <tr><td>2</td><td></td><td></td><td>Z_2</td></tr> </table> | | 0 | 1 | 2 | 0 | Z_0 | | | Z = 1 | | Z_1 | | 2 | | | Z_2 |
| | | | a | b | c | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| a | Z | X_1 | X_2 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| Z = b | X_2 | Z | X_1 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| c | X_1 | X_2 | Z | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| | 0 | 1 | 2 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 0 | Z_0 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| Z = 1 | | Z_1 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 2 | | | Z_2 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 4 |  | <table border="1"> <tr><td></td><td>a</td><td>b</td><td>c</td></tr> <tr><td>a</td><td>Z</td><td>X</td><td>X</td></tr> <tr><td>Z = b</td><td>X</td><td>Z</td><td>X</td></tr> <tr><td>c</td><td>X</td><td>X</td><td>Z</td></tr> </table> | | a | b | c | a | Z | X | X | Z = b | X | Z | X | c | X | X | Z | <table border="1"> <tr><td></td><td>0</td><td>1</td><td>2</td></tr> <tr><td>0</td><td>$Z + 2X$</td><td></td><td></td></tr> <tr><td>Z = 1</td><td></td><td>$Z - X$</td><td></td></tr> <tr><td>2</td><td></td><td></td><td>$Z - X$</td></tr> </table> | | 0 | 1 | 2 | 0 | $Z + 2X$ | | | Z = 1 | | $Z - X$ | | 2 | | | $Z - X$ |
| | | | a | b | c | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| a | Z | X | X | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| Z = b | X | Z | X | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| c | X | X | Z | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| | 0 | 1 | 2 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 0 | $Z + 2X$ | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| Z = 1 | | $Z - X$ | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 2 | | | $Z - X$ | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 5 |  | <table border="1"> <tr><td></td><td>a</td><td>b</td><td>c</td></tr> <tr><td>a</td><td>Z</td><td></td><td></td></tr> <tr><td>Z = b</td><td></td><td>Z</td><td></td></tr> <tr><td>c</td><td></td><td></td><td>Z</td></tr> </table> | | a | b | c | a | Z | | | Z = b | | Z | | c | | | Z | <table border="1"> <tr><td></td><td>0</td><td>1</td><td>2</td></tr> <tr><td>0</td><td>Z</td><td></td><td></td></tr> <tr><td>Z = 1</td><td></td><td>Z</td><td></td></tr> <tr><td>2</td><td></td><td></td><td>Z</td></tr> </table> | | 0 | 1 | 2 | 0 | Z | | | Z = 1 | | Z | | 2 | | | Z |
| | | | a | b | c | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| a | Z | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| Z = b | | Z | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| c | | | Z | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| | 0 | 1 | 2 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 0 | Z | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| Z = 1 | | Z | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 2 | | | Z | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 6 |  | <table border="1"> <tr><td></td><td>a</td><td>b</td><td>c</td></tr> <tr><td>a</td><td>Z_g</td><td>Z_g</td><td>Z_g</td></tr> <tr><td>Z = b</td><td>Z_g</td><td>Z_g</td><td>Z_g</td></tr> <tr><td>c</td><td>Z_g</td><td>Z_g</td><td>Z_g</td></tr> </table> | | a | b | c | a | Z_g | Z_g | Z_g | Z = b | Z_g | Z_g | Z_g | c | Z_g | Z_g | Z_g | <table border="1"> <tr><td></td><td>0</td><td>1</td><td>2</td></tr> <tr><td>0</td><td>$3Z_g$</td><td></td><td></td></tr> <tr><td>Z = 1</td><td></td><td></td><td></td></tr> <tr><td>2</td><td></td><td></td><td></td></tr> </table> | | 0 | 1 | 2 | 0 | $3Z_g$ | | | Z = 1 | | | | 2 | | | |
| | | | a | b | c | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| a | Z_g | Z_g | Z_g | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| Z = b | Z_g | Z_g | Z_g | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| c | Z_g | Z_g | Z_g | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| | 0 | 1 | 2 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 0 | $3Z_g$ | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| Z = 1 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 2 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |

Первый столбец — z в фазных осях; второй столбец — z в последовательных осях.

$$z = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \end{matrix} & \begin{bmatrix} & z_{1-2} \\ z_{1-2} & \end{bmatrix} \end{matrix} = \begin{matrix} & \begin{matrix} a_1 & b_1 & c_1 & a_2 & b_2 & c_2 \end{matrix} \\ \begin{matrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \\ a_2 \\ b_2 \\ c_2 \end{matrix} & \begin{bmatrix} & & & z'_{1-2} & & \\ & & & & z'_{1-2} & \\ & & & & & z''_{1-2} \\ z'_{1-2} & & & & & \\ & z''_{1-2} & & & & \\ & & z''_{1-2} & & & \end{bmatrix} \end{matrix} \quad (19.20)$$

Это означает, что *каждый компаунд-реактанс потерь имеет диагональную матрицу*. Если три однофазных трансформатора отличаются один от другого, то все три диагональные компоненты также отличаются друг от друга.

Тензор импеданса трехфазного *трехобмоточного* трансформатора через реактансы потерь представляется в виде

$$z = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} & \begin{bmatrix} & z_{1-2} & z_{1-3} \\ z_{1-2} & & z_{2-3} \\ z_{1-3} & z_{2-3} & \end{bmatrix} \end{matrix} \quad (19.21)$$

Каждая компонента этого тензора сама является диагональным тензором валентности два.

Если все три фазы задействованы в одной и той же магнитной сети и если пренебречь намагничивающим током, то между разными фазами появляются взаимные индуктивности, тогда тензор импеданса двухобмоточного трансформатора равен

$$z = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \end{matrix} & \begin{bmatrix} z_{1-1} & z_{1-2} \\ z_{1-2} & z_{2-2} \end{bmatrix} \end{matrix} = \begin{matrix} & \begin{matrix} a_1 & b_1 & c_1 & a_2 & b_2 & c_2 \end{matrix} \\ \begin{matrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \\ a_2 \\ b_2 \\ c_2 \end{matrix} & \begin{bmatrix} & z_{a-b}^{11} & z_{a-c}^{11} & z_{a-c}^{12} & z_{a-b}^{12} & z_{a-c}^{12} \\ z_{a-b}^{11} & & z_{b-c}^{11} & z_{b-a}^{12} & z_{b-b}^{12} & z_{b-c}^{12} \\ z_{a-c}^{11} & z_{b-c}^{11} & & z_{c-a}^{12} & z_{c-b}^{12} & z_{c-c}^{12} \\ z_{a-a}^{12} & z_{b-a}^{12} & z_{c-a}^{12} & & z_{a-b}^{22} & z_{a-c}^{22} \\ z_{a-b}^{12} & z_{b-b}^{12} & z_{c-a}^{12} & z_{a-b}^{22} & & z_{b-c}^{22} \\ z_{a-c}^{12} & z_{b-c}^{12} & z_{c-c}^{12} & z_{a-c}^{22} & z_{b-c}^{22} & \end{bmatrix} \end{matrix} \quad (19.22)$$

В примитивной компаунд-сети двухобмоточный трехфазный трансформатор представляется двумя катушками, а n -обмоточный трансформатор — n катушками (рис. 19.8 и 19.9).

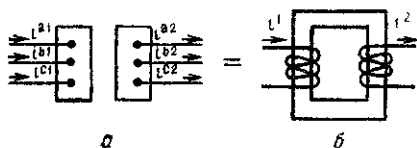


Рис. 19.8.

а — двухобмоточный трехфазный трансформатор; б — двухобмоточный компаунд-трансформатор.

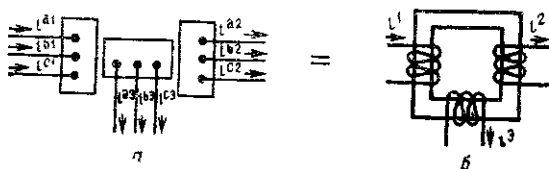


Рис. 19.9.

а — трехобмоточный трехфазный трансформатор; б — трехобмоточный компаунд-трансформатор.

IV. Если между двумя трехфазными устройствами, например между двумя линиями электропередачи, имеется взаимная индуктивность, то тензор импеданса примитивной компаунд-сети равен

$$z = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \end{matrix} & \begin{bmatrix} z_{11} & z_{12} \\ z_{12} & z_{22} \end{bmatrix} \end{matrix} = \begin{matrix} & \begin{matrix} a_1 & b_1 & c_1 & a_2 & b_2 & c_2 \end{matrix} \\ \begin{matrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \\ a_2 \\ b_2 \\ c_2 \end{matrix} & \begin{bmatrix} Z_1 & Z_2 & Z_3 & Z_4 & Z_5 & Z_6 \\ Z_2 & Z_7 & Z_8 & Z_9 & Z_{10} & Z_{11} \\ Z_3 & Z_8 & Z_{12} & Z_{13} & Z_{14} & Z_{15} \\ Z_4 & Z_9 & Z_{13} & Z_{16} & Z_{17} & Z_{18} \\ Z_5 & Z_{10} & Z_{14} & Z_{17} & Z_{19} & Z_{20} \\ Z_6 & Z_{11} & Z_{15} & Z_{18} & Z_{20} & Z_{21} \end{bmatrix} \end{matrix} \quad (19.23)$$

V. Если трехфазные устройства представлены компаунд-катушками, то последовательные и параллельные соединения различных трехфазных устройств представляются аналогичными последовательным и параллельным соединениями соответствующих компаунд-катушек. *Диаграмма компаунд-сети несимметричных трехфазных систем полностью идентична однолиней-*

ной диаграмме симметричных трехфазных систем Незначительное отличие состоит в том, что здесь контуры замкнуты для того, чтобы сделать применимыми методы анализа обычных контурных сетей.

11. ТЕНЗОР ПРЕОБРАЗОВАНИЯ КОМПАУНД-СЕТИ

I. Рассмотрим сначала простой пример, в котором отдельные катушки каждого трехфазного устройства еще не соединены в схему, т. е. не существует отдельных тензоров преобразования

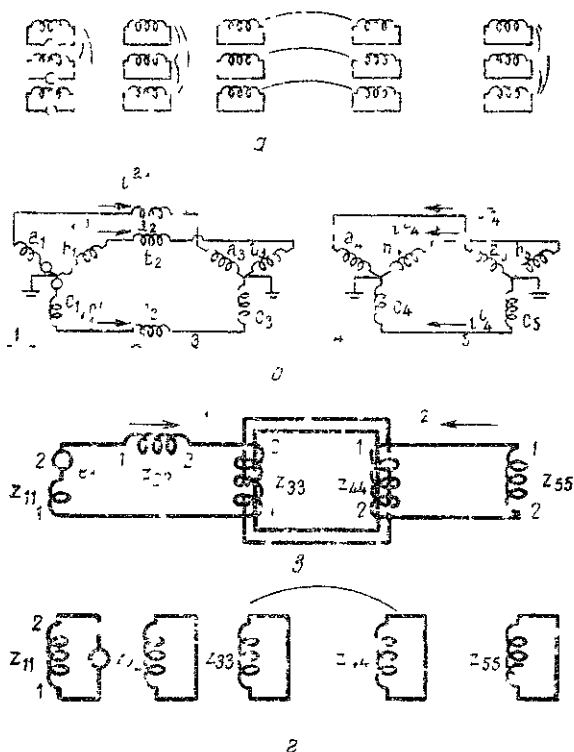


Рис. 19.10.

а — действительная примитивная сеть; б — действительная сеть; в — компаунд-сеть; г — примитивная компаунд-сеть

(или же все отдельные тензоры преобразований являются единичными тензорами). Такая сеть показана на рис. 19.10, б. Соответствующая компаунд-сеть и примитивная контурная сеть показаны на рис. 19.10, в, г.

Индексы 1—5 компаунд-сети являются *компаунд-индексами* (гл. 9, § 11, II), каждый из которых представляет три отдельных индекса. Например, 1 стоит вместо a_1 , b_1 и c_1 .

Тензор импеданса примитивной сети равен z

$$z = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \hline 1 & z_{11} & & & & \\ \hline 2 & & z_{22} & & & \\ \hline 3 & & & z_{33} & z_{34} & \\ \hline 4 & & & z_{34} & z_{44} & \\ \hline 5 & & & & & z_{55} \end{array} \end{array} \quad (19.24)$$

а вектор приложенного напряжения

$$e = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \hline e_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \end{array} \quad (19.25)$$

II. Определим теперь C с учетом компаунд-сети на рис. 19.10, в, представляющей действительную сеть на рис. 19.10, б.

Эта компаунд-сеть имеет два контура, следовательно, предполагается существование двух новых контурных токов $i^{1'}$ и $i^{2'}$. Эти же токи протекают через все последовательные катушки. Примитивная сеть показана на рис. 19.10, г.

Приравнивая старые и новые токи в каждой компаунд-катушке,

$$\begin{array}{l} i^1 = i^{1'} \\ i^2 = i^{1'} \\ i^3 = -i^{1'} \\ i^4 = i^{2'} \\ i^5 = -i^{2'} \end{array} \quad C = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} & 1' & 2' \\ \hline 1 & 1 & \\ \hline 2 & 1 & \\ \hline 3 & -1 & \\ \hline 4 & & 1 \\ \hline 5 & & -1 \end{array} \end{array} \quad (19.26)$$

получаем, что коэффициенты при новых токах представляют тензор преобразования C .

III. Для проверки правильности записи этого тензора C определим обычный тензор преобразования C для исходной сети, показывающий способ соединения 15 катушек сети на рис. 19.10, б в шесть контуров:

| | a'_1 | b'_1 | c'_1 | a'_2 | b'_2 | c'_2 |
|-----------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| a_1 | 1 | | | | | |
| b_1 | | 1 | | | | |
| c_1 | | | 1 | | | |
| a_2 | 1 | | | | | |
| b_2 | | 1 | | | | |
| c_2 | | | 1 | | | |
| a_3 | -1 | | | | | |
| $C = b_3$ | -1 | | | | | |
| c_3 | | | -1 | | | |
| a_4 | | | | 1 | | |
| b_4 | | | | | 1 | |
| c_4 | | | | | | 1 |
| a_5 | | | | -1 | | |
| b_5 | | | | | -1 | |
| c_5 | | | | | | -1 |

| | $1'$ | $2'$ |
|---|------|------|
| 1 | 1 | |
| 2 | 1 | |
| 3 | -1 | |
| 4 | | 1 |
| 5 | | -1 |

(19.27)

| | $1'$ | $2'$ |
|---|------|------|
| 1 | 1 | |
| 2 | | 1 |
| 3 | | |
| 4 | | 1 |
| 5 | | |

(19.28)

Теперь C можно подразделить и представить как компаунд-тензор, каждая компонента которого есть 0 или единичный тензор 1. Компаунд-тензор C показывает, что системы 1, 2, 3 соединены последовательно, так же как системы 4 и 5, что в явном виде изображено на рис. 19.10, в.

IV. Тензор импеданса и вектор приложенного напряжения всей сети находятся по соотношениям $C_i z C$ и $C_i e$ соответственно

$$z' = \begin{array}{c} 1' \\ 2' \end{array} \begin{array}{|c|c|} \hline z_{11} + z_{22} + z_{33} & z_{34} \\ \hline z_{34} & z_{44} + z_{55} \\ \hline \end{array}, \quad (19.28)$$

$$e' = \begin{array}{c} 1' \\ 2' \end{array} \begin{array}{|c|c|} \hline e_1 & 0 \\ \hline \end{array}. \quad (19.29)$$

Токи можно найти как $i' = z'^{-1} e' = y' e'$. Собственные и взаимные адмиттансы отдельных систем (или компаунд-катушек) находят по формуле $Cy' C$. Токи в отдельных системах через известные i' находят как $i = C i'$, а напряжения в отдельных системах — как $z C i'$.

Вторую строку и второй столбец можно исключить с помощью формулы редукции, оставив

$$z' = 1' \boxed{z_{11} + z_{22} + z_{33} + z_{34}(z_{44} + z_{55})^{-1}z_{34}} \quad (19.30)$$

У. Подчеркнем, что трехфазную сеть можно анализировать так же, как и любую другую контурную сеть, не вводя компаунд-тензоры, т. е. используя в три раза большее число переменных. Применение компаунд-тензоров и компаунд-сетей просто ускоряет анализ, сокращает число переменных в три раза и делает более ясной физическую картину, но ни в коей мере не уменьшает общее количество окончательных вычислительных операций, необходимых для получения числового ответа, исключая случаи повторяющихся операций.

Главное преимущество применения компаунд-тензоров состоит в полной свободе, допускающей замену отдельных координатных систем одного или нескольких трехфазных устройств путем стандартных автоматических операций, при этом не затрагиваются остальные части сети. Этот вопрос о свободе введения симметричных составляющих или других трехфазных осей более детально разбирается в следующей главе.

12. ПРОХОЖДЕНИЕ КОМПАУНД-ТОКОВ ЧЕРЕЗ КОМПАУНД-СЕТИ

И. В этом параграфе определяется способ, с помощью которого отдельные оси каждого устройства можно заменить «отдельными тензорами преобразования».

Когда обычная катушка z_1 соединена последовательно с другой обычной катушкой z_2 , один и тот же ток i течет как в той, так и в другой катушке, а также через соединяющий их проводник. Однако, когда мы имеем дело с компаунд-катушками, тензоры импеданса z_1 и z_2 можно выразить в различных системах осей, а ток i еще в какой-нибудь системе осей так, что в z_1 будет протекать ток $C_1 i$ (вместо i), в z_2 — ток $C_2 i$, а в соединяющей их системе — ток $C_3 i$ (рис. 19.11). Изменение отдельных координатных систем проявляется как поступление или выход тока из компаунд-катушек.

II. Имеется два варианта появления тока в катушке: 1) он порождается в катушке, т. е. является новой переменной, берущей начало из этой катушки; 2) входит в катушку из других катушек через зажимы.

В любом случае появления тока в катушке и выхода его из катушки его можно изменить преобразованием осей с помощью C .

III. Следовательно, ток i приобретает отдельный тензор преобразования C в трех случаях:

1) при появлении тока в катушке в качестве новой переменной, если катушка имеет тип осей, отличный от выбранных для тока;

2) при попадании в катушку через зажимы, если ток также имеет тип оси, отличный от типа осей катушки;

3) при выходе тока из катушки через ее зажимы в соединяющую систему, имеющую оси, отличные от осей, принятых для этого тока.

Значит, ток приобретает тензор преобразования C каждый раз при появлении системы координат, отличной от выбранной для этого тока.

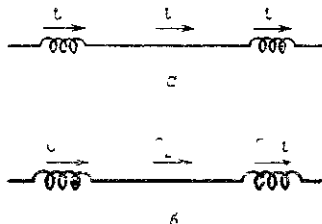


Рис. 19 11.

а — поток в обычных катушках, б — поток в компаунд-катушках.

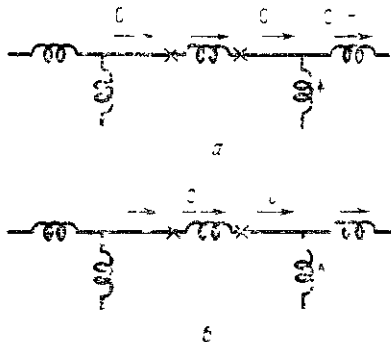


Рис. 19 12. Компаунд-узлы:

а — ток, возникающий в катушке, б — ток, поступающий в катушку

IV. Если это происходит из-за выбора новых переменных, соответствующий тензор C будем называть «катушечным тензором». Если же ток приобретает тензор преобразования при появлении его в сети или при выходе его из сети, то соответствующий тензор преобразования C будем называть «узловым тензором». (В общем случае их можно назвать «отдельными тензорами преобразования» и «трехфазными тензорами»). Более детально эти два типа тензоров рассматриваются в последующих параграфах.

Подчеркнем, что если ток i проникает в компаунд-сети, то выполняются все законы Кирхгофа, сформулированные для компаунд-узлов. Катушечный и узловой тензоры не меняют величины токов; они изменяют лишь отдельные системы координат каждого устройства, и непрерывность тока сохраняется во всей компаунд-сети так же, как и в обычной сети.

Следовательно, единственным отличием анализа обычных сетей и компаунд-сетей является способ определения тока в сети. Это означает, что если i заменяют на \bar{i} с помощью индивидуального тензора преобразования, следует также задать отдельную систему координат.

I. Если координатные оси изменяются так, что ток i' претерпевает изменение C_i' при входе или выходе через зажимы катушки, то оба этих узла зажимов мы будем отмечать на схеме маленькими крестиками (рис. 19.12).

В табл. 19.2 показаны некоторые виды часто встречающихся узловых тензоров. Следует подчеркнуть, что существует множество других трехфазных устройств, для описания которых требуются катушечные тензоры. После того как такой тензор определен для некоторого конкретного устройства, нет нужды вычислять его снова в другом случае. Если устройство используется в некоторой трехфазной системе, этот тензор берут из таблицы и снова используют без каких-либо изменений.

II. Наиболее важным примером компаунд-узла, изменяющего оси координат, является узловое соединение треугольника с линией передачи.

Если ток в трех катушках треугольника равен i' , ток в линии равен $i = C_{\Delta} i'$, где

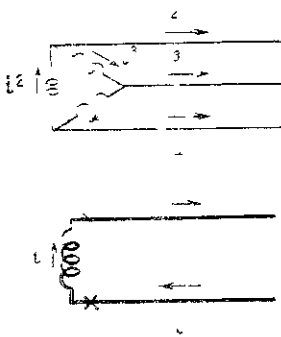


Рис. 19.13. Соединение треугольником:
 σ — ток в треугольнике b — ток в компаунд-треугольнике

$$i' = \begin{matrix} 1' & 2' & 3' \\ \begin{vmatrix} i^1 & i^2 & i^3 \end{vmatrix} \end{matrix}; \quad (19.31)$$

$$i = \begin{matrix} 1 & 2 & 3 \\ \begin{vmatrix} i^2 - i^3 & i^3 - i^1 & i^1 - i^2 \end{vmatrix} \end{matrix}, \quad (19.32)$$

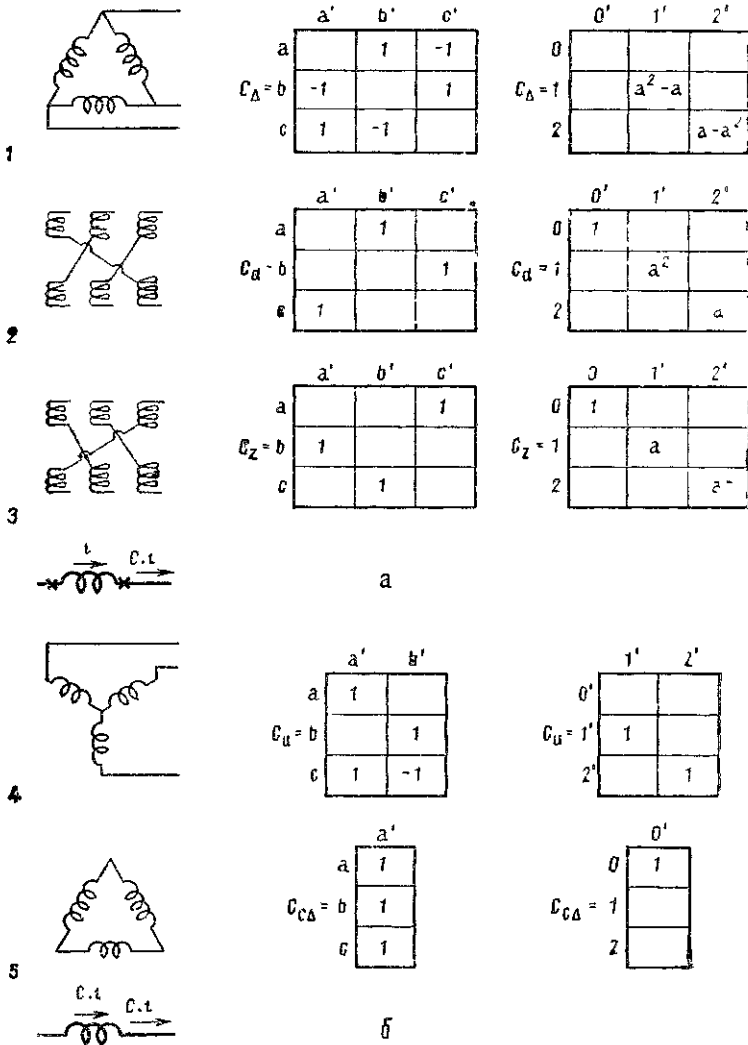
$$C_{\Delta} = 2 \begin{matrix} & 1' & 2' & 3' \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} & \begin{vmatrix} & & 1 & -1 \\ -1 & & & 1 \\ 1 & -1 & & \end{vmatrix} \end{matrix} \quad (19.33)$$

Преобразование C_{Δ} заменяет токи в треугольнике на токи в линии.

Если компаунд-катушка представляет собой соединенное треугольником устройство, то приходится считать, что в треугольнике образуются новые компаунд-переменные.

III. Можно предположить, что все компаунд-узлы приводят к изменению системы координат, но тензор преобразования в узлах, не помеченных маленькими крестиками, является единичным тензором I.

Отдельные тензоры преобразования для различных типов трехфазных соединений



Первая колонка — в фазных осях; вторая колонка — в последовательных осях; а — узловые тензоры, б — катушечные тензоры.

14. УЗЛОВЫЕ ТЕНЗОРЫ КАК ПЕРЕСТАНОВКИ

I. Поскольку компаунд-узел может порождать преобразование системы координат C , это преобразование системы координат может быть самым различным. В предыдущем примере C представляет картину действительных взаимосвязей. Рассмотрим теперь другой пример, в котором C характеризует перестановку.

В трехфазных сетях обычно соединяют соответственные фазные обмотки. В многообмоточных трансформаторах часто соединяют разнофазные обмотки (рис. 19.14). При зигзагообразном

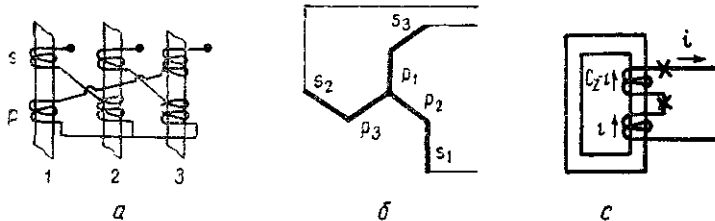


Рис. 19.14 Соединение зигзагом:
 a — действительная сеть; b — представление, c — компаунд-сеть.

соединении три катушки вторичных обмоток соединены *последовательно* с тремя катушками первичных обмоток, но не фаза с фазой.

Если i' проходит через вторичную катушку, то через первичную должен проходить ток $C_z i' = i$, где C_z

$$\begin{aligned}
 i' &= \begin{array}{|c|c|c|} \hline s_1 & s_2 & s_3 \\ \hline i^1 & i^2 & i^3 \\ \hline \end{array} \\
 i &= \begin{array}{|c|c|c|} \hline p_1 & p_2 & p_3 \\ \hline i^3 & i^1 & i^2 \\ \hline \end{array} \\
 C_z &= \begin{array}{|c|c|c|} \hline s_1 & s_2 & s_3 \\ \hline p_1 & & 1 \\ \hline p_2 & 1 & \\ \hline p_3 & & 1 \\ \hline \end{array} \quad (19.34)
 \end{aligned}$$

показывает способ соединения фаз.

II. Вместо того чтобы подсоединить *третью фазу* к первой, можно подсоединить *вторую фазу*, как в двойном треугольнике на рис. 19.15, где

$$\begin{aligned}
 i' &= \begin{array}{|c|c|c|} \hline s_1 & s_2 & s_3 \\ \hline i^1 & i^2 & i^3 \\ \hline \end{array} \\
 i &= \begin{array}{|c|c|c|} \hline p_1 & p_2 & p_3 \\ \hline i^2 & i^3 & i^1 \\ \hline \end{array} \\
 C_d &= \begin{array}{|c|c|c|} \hline s_1 & s_2 & s_3 \\ \hline p_1 & & 1 \\ \hline p_2 & & 1 \\ \hline p_3 & 1 & \\ \hline \end{array} \quad (19.35)
 \end{aligned}$$

Когда I' течет в *первичной* катушке, а не во вторичной, тензоры C_z и C_d меняются ролями

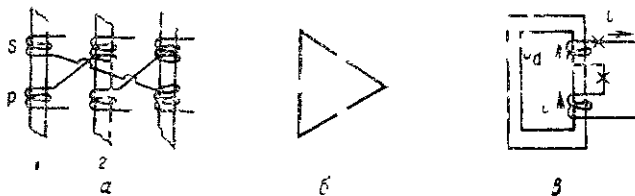
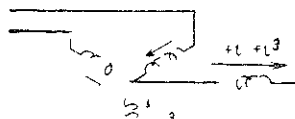


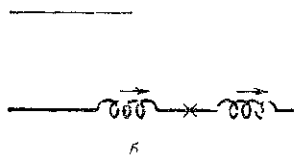
Рис 19.15 Соединение зигзагом
 а — действительное соединение б — представление в — коплануид катушек

15 УЗЛОВОЙ ТЕНЗОР ИМПЕДАНСА ЗАЗЕМЛЕНИЯ

I Компонд узел может ввести *сингулярное преобразование*, сокращающее число осей (В треугольнике число осей не меняется) Примером является *импеданс заземления* при отсутствии токов замыкания В вершине звезды три внешних тока I' заменяются одним током i (текущим через импеданс заземления) при помощи $C_g I'$, где



$$i^1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ i^1 & i^2 & i^3 \end{bmatrix}$$



$$i = \begin{bmatrix} g \\ i^1 - i^2 + i^3 \end{bmatrix} \quad (19.30)$$

$$C_g = g \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Рис 19.16 Заземление
 а — импеданс заземления о — компанд катушки

Следует отметить, что при соединении треугольником ток I' в катушках треугольника предполагается известным Для импеданса заземления (в случае отсутствия токов заземления) ток предполагается известным *вне* импеданса заземления

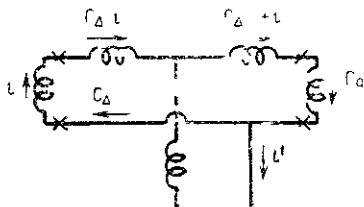


Рис 19.17 Дельта-ток через заземление

II Интересно, что ток i' , порождаемый в треугольнике, обращается в нуль, проходя через импеданс заземления, так как в нем ток равен $C_g C_{\Delta} i'$ (C_{Δ} действует, когда i' покидает треугольник, а C_g действует на входе в заземление (рис 19 17)) и

$$C_g C_{\Delta} = 0, \quad (19.37)$$

так как

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

III Как показано на рис 19 17, в компаунд-сетях импеданс заземления и звезда всегда соединены *последовательно*. Две компаунд-катушки, соединенные последовательно, можно заметить одной катушкой, тензор импеданса которой равен сумме импедансов катушек

Найдем решение для сети из этих двух последовательно соединенных катушек (рис 19 18), рассматривая ее как обычную сеть (или как компаунд-сеть).

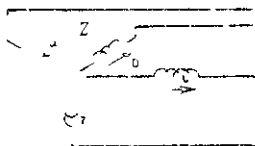


Рис 19 18 Заземленная звезда

Тензор импеданса z примитивной сети равен

$$z = \begin{matrix} & \begin{matrix} a & b & c & g \end{matrix} \\ \begin{matrix} a \\ b \\ c \\ g \end{matrix} & \begin{bmatrix} Z_{aa} & Z_{ab} & Z_{ac} \\ Z_{ba} & Z_{bb} & Z_{bc} \\ Z_{ca} & Z_{cb} & Z_{cc} \\ & & & Z_g \end{bmatrix} \end{matrix} = \begin{matrix} & \begin{matrix} m & g \end{matrix} \\ \begin{matrix} m \\ g \end{matrix} & \begin{bmatrix} z_1 & \\ & z_2 \end{bmatrix} \end{matrix}, \quad (19.38)$$

а тензор преобразования

$$\begin{aligned}
 i^a &= i^{a'} \\
 i^b &= i^{b'} \\
 i^c &= i^{c'} \\
 i^g &= i^{a'} + i^{b'} + i^{c'}
 \end{aligned}
 \quad C = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} a' & b' & c' \\ \hline a & 1 & \\ \hline b & & 1 \\ \hline c & & & 1 \\ \hline g & 1 & 1 & 1 \end{array} \\ = \begin{array}{c} m' \\ \hline m \\ \hline g \\ \hline C_g \end{array} \end{array} \quad (19.39)$$

Результирующий тензор импеданса равен $C_t z C$

$$\mathbf{z}' = \mathbf{z}_1 + C_g z_2 C_g = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} a' & b' & c' \\ \hline a' & Z_{aa} + Z_g & Z_{ab} + Z_g & Z_{ac} + Z_g \\ \hline b' & Z_{ba} + Z_g & Z_{bb} + Z_g & Z_{bc} + Z_g \\ \hline c' & Z_{ca} + Z_g & Z_{cb} + Z_g & Z_{cc} + Z_g \end{array} \end{array} \quad (19.40)$$

Следовательно, импеданс звезды и импеданс заземления можно заменить одной компаунд-катушкой с тензором импеданса z' . Эта компаунд-катушка представляет эквивалентную заземленную звезду без импеданса заземления, собственные и взаимные импедансы которой увеличены на Z_g из-за наличия импеданса заземления (рис. 19.19).

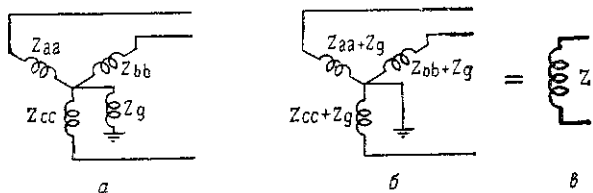


Рис. 19.19.

а — заземленная звезда; б — эквивалентная звезда; в — компаунд-катушка.

IV. Если имеется несколько проводов заземления, соединенных параллельно (рис. 19.20, а), то один из них выбирается как импеданс заземления с узловым тензором C_g , а остальные рассматриваются как одна компаунд-катушка, соединенная параллельно с импедансом заземления.

В этой параллельной цепи вводится новая переменная — ток i^1 с компонентами i^p и i^q , протекающий в дополнительном компаунд-контуре (рис. 19.20, б). Предполагается, что в остальной части системы шунтирующий ток i^1 не проходит.

16. ПРИМЕР ПРИМЕНЕНИЯ УЗЛОВЫХ ТЕНЗОРОВ

I. В качестве примера узлового тензора рассмотрим сеть, содержащую семь трехфазных устройств (рис. 19.21, а).

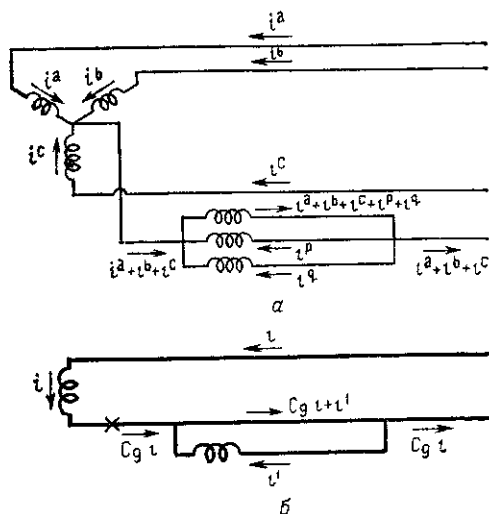


Рис. 19.20.

а — три провода заземления; б — компаунд-сеть заземления.

Примитивная компаунд-сеть (рис. 19.21, б) имеет семь катушек (по числу трехфазных устройств), соединенных в одну общую.

Геометрическими объектами сети являются

$$e = \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \end{array} \\ \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|} \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline \end{array} \end{array}, \quad (19.41)$$

$$z = \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \end{array} \\ \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|} \hline 1 & z_1 & & & & & \\ \hline 2 & & z_2 & & & & \\ \hline 3 & & & z_3 & & & z_{37} \\ \hline 4 & & & & z_4 & & \\ \hline 5 & & & & & z_5 & \\ \hline 6 & & & & & & z_6 \\ \hline 7 & & & z_{37} & & & z_7 \\ \hline \end{array} \end{array}, \quad (19.42)$$

Между линией передачи 3 и проводом заземления 7 предполагается наличие индуктивной связи.

II. В компаунд-сети имеется три закрытых контура, поэтому выбирают три новых тока. Два из них $i^{1'}$ и $i^{2'}$ проходят, например, через устройства 1 и 2, соединенные треугольником, а

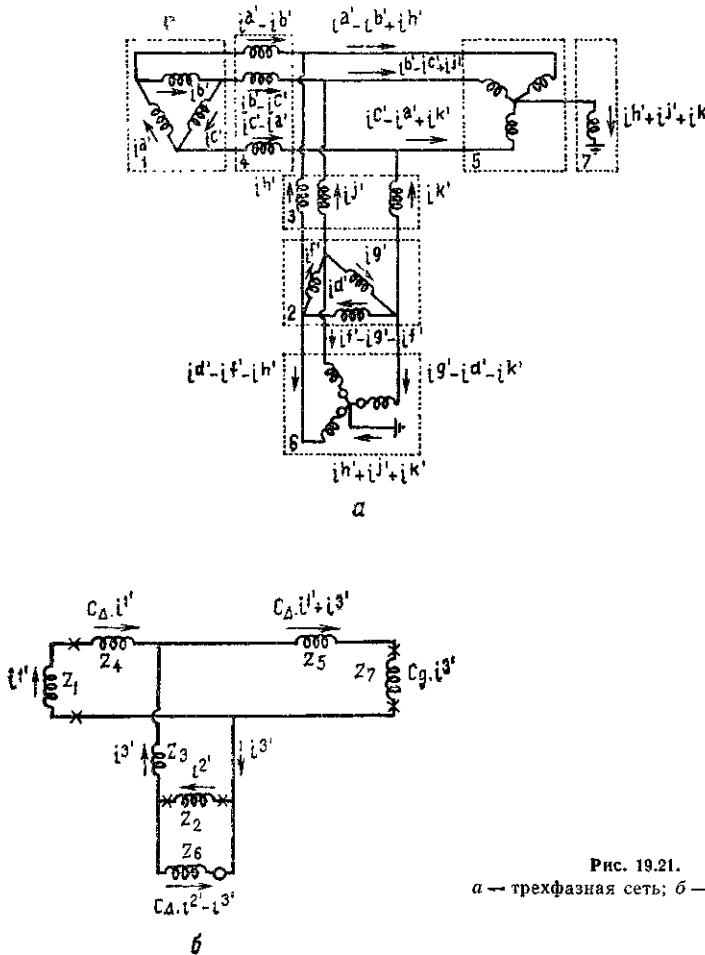


Рис. 19.21.
а — трехфазная сеть; б — компаунд-сеть

третий ток $i^{3'}$ можно произвольно приписать любой ветви, например 3.

Соответствующие девять токов исходной сети показаны на рис. 19.21, а как i^a, i^b, i^c в сети 1; i^d, i^e, i^f в сети 2; i^g, i^h, i^k в сети 3. Предполагается, что эти девять токов проходят во всех катушках трех устройств.

Токи во всех катушках компаунд-сети показаны на рис. 19.21, б. Они выражены через новые токи $i^{1'}$, $i^{2'}$ и $i^{3'}$, а также через узловые тензоры преобразования C_{Δ} и C_g . В импедансе заземления z_7 ток равен $C_g \cdot C_{\Delta} \cdot i^{1'}$, т. е. равен 0.

III. Получим теперь тензор преобразования C компаунд-сети, приравняв старые и новые токи в компаунд-катушках:

$$\begin{array}{rcl}
 i^1 = & i^{1'} & 1 \\
 i^2 = & i^{2'} & 2 \\
 i^3 = & i^{3'} & 3 \\
 i^4 = C_{\Delta} i^{1'} & & C = 4 \\
 i^5 = C_{\Delta} i^{1'} & + i^{3'} & 5 \\
 i^6 = & C_{\Delta} i^{2'} - i^{3'} & 6 \\
 i^7 = & C_g i^{3'} & 7
 \end{array}
 \begin{array}{|c|c|c|}
 \hline
 1' & 2' & 3' \\
 \hline
 1 & I & | & | \\
 \hline
 2 & | & I & | \\
 \hline
 3 & | & | & I \\
 \hline
 4 & C_{\Delta} & | & | \\
 \hline
 5 & C_{\Delta} & | & I \\
 \hline
 6 & | & C_{\Delta} & -I \\
 \hline
 7 & | & | & C_g \\
 \hline
 \end{array}
 \quad (19.43)$$

Правильность записи этого компаунд-тензора преобразования можно проверить, построив обычный тензор преобразования (см. рис. 19.21, а), имеющий 19 строк и 9 столбцов.

Короче говоря, различные C_{Δ} и I , появившиеся в компаунд-тензоре C , не эквивалентны друг другу, поскольку каждый из них имеет различные компаунд-индексы, а также отдельные индексы.

Этими признаками они и различаются между собой.

Так как единственной операцией, выполняемой при участии C , является умножение (C сам по себе не преобразуется), отличающиеся индексы можно опустить. Если же тензоры C_{Δ} приведены к разным типам отдельных сетей, абсолютно необходимо отличать тензоры C_{Δ} и I , относящиеся к разным устройствам.

IV. Результирующий тензор импеданса z' найдем по соотношению $C_i^* z C$

$$\begin{array}{r}
 z' = \begin{array}{|c|c|c|}
 \hline
 1' & z_1 + C_{\Delta f}^* z_4 C_{\Delta} + C_{\Delta f}^* z_5 C_{\Delta} & 0 & C_{\Delta f}^* z_5 \\
 \hline
 2' & 0 & z_2 + C_{\Delta f}^* z_6 C_{\Delta} & -C_{\Delta f}^* z_6 \\
 \hline
 3' & z_5 C_{\Delta} & -z_6 C_{\Delta} & z_3 + z_5 + z_6 + z_{37} C_g + C_{g f}^* z_{37} + C_{g f}^* z_7 C_g \\
 \hline
 \end{array}
 \end{array}
 \quad (19.44)$$

Вектор приложенных напряжений по $C_t^* \cdot e$ равен

$$e' = \begin{matrix} 1' & 2' & 3' \\ \hline 0 & C_{\Delta t}^* \cdot e & -e \end{matrix} \quad (19.45)$$

Токи находят из $i' = z'^{-1} \cdot e'$. Токи в отдельных катушках равны C_i' , а индуцированные напряжения — $z \cdot C \cdot i'$.

17. «КАТУШЕЧНЫЙ» ТЕНЗОР ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

I. В предыдущем примере новые переменные $i^{1'}$, $i^{2'}$ и $i^{3'}$ выбирались в соответствующих обмотках новой сети, при этом повторялось распределение токов в обмотках примитивной сети. Это означает, что три компоненты тока $i^{1'}$, а именно $i^{a'}$, $i^{b'}$ и $i^{c'}$, проходят в тех же катушках, что и i^a , i^b и i^c в примитивной сети.

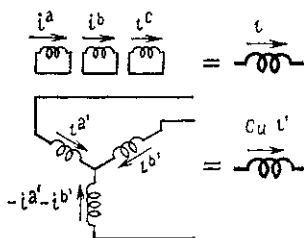


Рис. 19.22. Незаземленная звезда.

II. Однако часто для нового тока $i^{1'}$ необходимо выбрать другие компоненты, например, в *незаземленной* звезде (рис. 19.22). Новый ток $i^{1'}$, рассматриваемый как переменная, имеет лишь две компоненты $i^{a'}$ и $i^{b'}$ вместо трех $i^{a'}$, $i^{b'}$, $i^{c'}$.

Другими словами, новая переменная $i^{1'}$ имеется не во всех обмотках компаунд-катушки, а лишь в части их. Поэтому в трех катушках компаунд-катушки протекает ток $C_u \cdot i^{1'} = i$ вместо выбранной переменной $i^{1'}$, причем

$$i' = \begin{matrix} a' & b' \\ \hline i^{a'} & i^{b'} \end{matrix} \quad C_u = \begin{matrix} a' & b' \\ a & \begin{matrix} | & \\ 1 & \end{matrix} \\ b & \begin{matrix} | & \\ & 1 \end{matrix} \\ c & \begin{matrix} | & \\ -1 & -1 \end{matrix} \end{matrix} \quad (19.46)$$

$$i = \begin{matrix} a & b & c \\ \hline i^{a'} & i^{b'} & -i^{a'} - i^{b'} \end{matrix}$$

Таким образом, при выборе новых переменных одной из них часто должен быть ток в компаунд-катушке, соответствующей незаземленной звезде, как и для случая соединения треугольником. Однако в соединении треугольником новая переменная — ток $i^{1'}$ проходит через все катушки треугольника (и в том же

порядке), как в примитивной сети, тогда как в незаземленной звезде новая переменная i' покрывает лишь часть звезды. Следовательно, во всех катушках звезды протекает ток $C \cdot i'$. Этот же ток проходит в отводах звезды, поэтому ее узлы не помечают крестиками.

III. Частным случаем незаземленной звезды является *открытый треугольник* (рис. 19.23). Его можно рассматривать как незаземленную звезду, у которой импеданс Z_{cc} равен нулю.

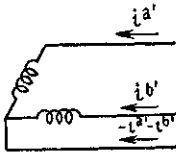


Рис. 19.23. Открытый треугольник.

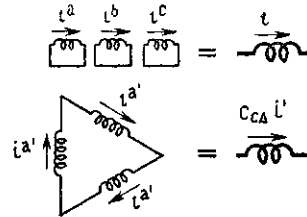


Рис. 19.24. Закрытый треугольник.

IV. Другим примером катушечного тензора является *закрытый треугольник* в преобразователе (рис. 19.24), где новая переменная i' имеет лишь одну компоненту $i^{a'}$, и, следовательно, в трех катушках компаунд-катушки есть ток $C_{c\Delta} \cdot i' = i$, где

$$i' = \begin{bmatrix} a' \\ i^{a'} \end{bmatrix} \quad C_{c\Delta} = \begin{bmatrix} a & 1 \\ b & 1 \\ c & 1 \end{bmatrix} \quad (19.47)$$

$$i = \begin{bmatrix} a & b & c \\ i^{a'} & i^{a'} & i^{a'} \end{bmatrix}$$

В следующей главе будут более подробно рассмотрены сети с катушечными тензорами преобразования.

Если все сети рассматриваются как *полные*, то катушечные тензоры не являются сингулярными.

18. ПРЕНЕБРЕЖЕНИЕ НАМАГНИЧИВАЮЩИМ ТОКОМ

I. Любой прием, экономящий время анализа и введенный для простых сетей, обычно можно применить и для компаунд-сетей. Например, если в компаунд-сеть включены многообмоточные компаунд-трансформаторы, их намагничивающим током можно пренебречь, повторяя точно те же шаги, которые были предприняты для обычного многообмоточного трансформатора (см. гл. 11), а именно:

1) составляют тензор импеданса z примитивной компаунд-сети, применяя *импеданс потерь* z_{1-2} для компаунд-трансформатора, как показано в уравнении (19.21);

2) составляют тензор преобразования C_1 для компаунд-сети так же, как в предыдущем разделе;

3) пренебрегают намагничивающим током, учитывая это с помощью тензора преобразования C_2 ;

4) их произведение $C_1 C_2$ дает окончательный тензор преобразования C_3 ;

5) тогда $C_3^* z C_3$ дает тензор импеданса z' новой компаунд-сети и т. д.

II. Второй тензор преобразования C_2 , учитывающий пренебрежение намагничивающим током, составляется следующим образом:

1) уравнение принуждающих связей через *старые* токи можно записать так:

$$n_1 i^1 + n_2 i^2 + \dots = 0, \quad (19.48)$$

где n_1 — диагональный тензор валентности два, задающий число витков каждой катушки первой сети и т. д.;

2) *старые* токи в уравнении принуждающих связей заменяются новыми токами из $i = C_1 i^1$;

3) исключают столько токов, сколько имеется уравнений принуждающих связей;

4) соотношение $i = C_2 i^1$ дает C_2 .

СИММЕТРИЧНЫЕ СОСТАВЛЯЮЩИЕ

1. УНИВЕРСАЛИЗМ КОМПАУНД-СЕТЕЙ

I. Если импедансы трехфазных устройств сбалансированы, то, как показано в гл. 13, их тензоры импеданса можно привести к диагональной форме тензором последовательности C_s . Поэтому при соединении *сбалансированных* трехфазных устройств в одну сеть *сбалансированным* способом результирующее z сети принимает более простой вид, если отдельные z выражены в последовательных осях.

Таким образом, при получении компаунд-сети любой трехфазной системы нет никакой разницы в том, относительно каких осей представлены отдельные трехфазные устройства: осей а, в, с цепи или последовательных осей 0, 1, 2. В любом случае сама компаунд-сеть и полный анализ компаунд-сети одинаковы. Разница лишь в значениях отдельных z и C (катушечных и узловых тензоров) на осях обоих типов.

Поэтому содержание гл. 19 в равной степени относится к устройствам, которые рассматриваются относительно фазных и последовательных осей.

II. Тензоры импеданса трех катушек (сбалансированных или несбалансированных), выраженные в последовательных осях 0, 1, 2, уже приводились в гл. 13.

В дополнение к тензорам, выраженным в осях фаз а, в, с, необходимо лишь получить z других типов трехфазных устройств и различных катушечных и узловых тензоров относительно последовательных осей 0, 1, 2.

Следует заметить, что нет необходимости однажды полученные тензоры импеданса z и тензор преобразования C для отдельного устройства частного типа относительно частной системы координат получать заново всякий раз, когда устройство используется в какой-либо трехфазной системе. По этой причине устройство рассматривается как единая компаунд-катушка, а внутренние соединения совершенно не принимаются во внимание.

Поэтому при наличии таблиц для z и C анализ трехфазных систем сводится к анализу контурных (узловых или ортогональных) компаунд-сетей, а частные трехфазные системы коорди-

нат (скажем, симметричные составляющие или любые другие системы координат) исчезают из поля зрения. Они снова появляются при *стандартных* действиях, которые, однако, может выполнить тот, кто даже не знаком с симметричными составляющими.

III. Если сеть сбалансирована и для отдельных устройств используется последовательность осей, результирующий компаунд-тензор z' целой системы имеет несколько строк и столбцов, причем каждая компонента является тензором с тремя осями по 0, 1 и 2 (см. гл. 19). Если перестроить результирующую матрицу z' таким образом, чтобы все одинаковые последовательные оси были собраны вместе (т. е. все 0-оси вместе и т. д.), можно обнаружить, что *тензоры, содержащие одни и те же последовательные оси, не зависят друг от друга и не содержат ни одного взаимного члена*. Эквивалентные сети, соответствующие каждому независимому тензору, называются «сетями последовательностей». (Устройство сетей, эквивалентных тензору валентности два, в этой книге не рассматривается.)

2. ТЕНЗОРЫ ИМПЕДАНСА В ОСЯХ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

I. Тензор z трех различных катушек в осях фаз и осях последовательности дается соответственно уравнениями (13.18) и (13.21). Для трех одинаковых катушек с симметричными взаимными импедансами уравнения приводятся к более простой форме. Например, некоторые из таких более простых форм уравнений представлены еще раз во втором столбце табл. 19.1.

II. Когда трехфазные многообмоточные трансформаторы сбалансированы, а намагничивающие токи пренебрежимо малы, тензор z_{p-q} потерь на сопротивлении имеет диагональную матрицу с идентичными компонентами. Следовательно, по соотношению $C_{st}^* z_{p-q} C_s$

$$z_{p-q} = \begin{array}{c} \begin{array}{|c|c|c|} \hline a & b & c \\ \hline \end{array} \\ \begin{array}{|c|c|c|} \hline z_{p-q} & & \\ \hline \end{array} \\ \begin{array}{|c|c|c|} \hline & z_{p-q} & \\ \hline \end{array} \\ \begin{array}{|c|c|c|} \hline & & z_{p-q} \\ \hline \end{array} \end{array} = 1 \begin{array}{c} \begin{array}{|c|c|c|} \hline 0 & 1 & 2 \\ \hline \end{array} \\ \begin{array}{|c|c|c|} \hline z_{p-q} & & \\ \hline \end{array} \\ \begin{array}{|c|c|c|} \hline & z_{p-q} & \\ \hline \end{array} \\ \begin{array}{|c|c|c|} \hline & & z_{p-q} \\ \hline \end{array} \end{array} \quad (20.1)$$

Точно так же тензор виткового отношения по $C_s^{-1} n_p C_s$ равен

$$n_p = \begin{array}{c} \begin{array}{|c|c|c|} \hline a' & b' & c' \\ \hline \end{array} \\ \begin{array}{|c|c|c|} \hline n_p & & \\ \hline \end{array} \\ \begin{array}{|c|c|c|} \hline & n_p & \\ \hline \end{array} \\ \begin{array}{|c|c|c|} \hline & & n_p \\ \hline \end{array} \end{array} = 1 \begin{array}{c} \begin{array}{|c|c|c|} \hline 0' & 1' & 2' \\ \hline \end{array} \\ \begin{array}{|c|c|c|} \hline n_p & & \\ \hline \end{array} \\ \begin{array}{|c|c|c|} \hline & n_p & \\ \hline \end{array} \\ \begin{array}{|c|c|c|} \hline & & n_p \\ \hline \end{array} \end{array} \quad (20.2)$$

В общем случае \mathbf{n}_p содержит комплексные компоненты относительно последовательных осей.

III. Для многих трехфазных устройств тензоры импеданса относительно последовательных осей не рассчитывают по соотношению $\mathbf{C}_{st}^* z \mathbf{C}_s$ для тензоров, представленных в фазных осях, а определяют в отдельных испытаниях или исходя из конструктивных констант устройства. Для вращающихся или неподвижных устройств соответственно они обычно имеют следующий вид:

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{ccc}
 & 0 & 1 & 2 \\
 0 & Z_0 & & \\
 z=1 & & Z_1 & \\
 2 & & & Z_2
 \end{array}
 , \quad
 \begin{array}{ccc}
 & 1 & 2 & 3 \\
 0 & Z_0 & & \\
 z=1 & & Z_1 & \\
 2 & & & Z_1
 \end{array}
 \end{array}
 \quad (20.3)$$

3. УЗЛОВЫЕ И КАТУШЕЧНЫЕ ТЕНЗОРЫ В ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫХ ОСЯХ

I. Поскольку *узловые тензоры* \mathbf{C}_j — несингулярные (квадратные), к последовательным осям они преобразуются по формуле $\mathbf{C}_s^{-1} \mathbf{C}_j \mathbf{C}_s$. Для треугольника и двух типов зигзагообразных соединений они приведены в табл. 19.2, а. Отметим, что ток нулевой последовательности не может выйти из треугольника.

Интересно также обнаружить, что при симметричных соединениях трехфазных устройств соответствующий тензор преобразования, выраженный в последовательных осях, также имеет диагональную форму. Таким образом, можно установить, что последовательный тензор \mathbf{C}_s приводит к диагональному виду:

- 1) z сбалансированного импеданса;
- 2) тензор \mathbf{C} симметричного соединения.

II. *Катушечные тензоры* \mathbf{C}_c — сингулярные, поэтому не допускается неразборчивое употребление соотношения $\mathbf{C}_s^{-1} \mathbf{C}_c \mathbf{C}_s$. Одним из способов преобразования сингулярного катушечного тензора к последовательным осям является следующий:

- 1) выразить сингулярное преобразование $\mathbf{i} = \mathbf{C} \mathbf{i}'$ как систему «уравнений связей», содержащих фазные токи;
- 2) в уравнениях связей заменить все фазные токи последовательными токами;
- 3) заменить уравнения связей (содержащие теперь последовательные токи) преобразованием $\mathbf{i} = \mathbf{C} \mathbf{i}'$.

Коэффициенты дают искомым катушечный тензор, выраженный в последовательных осях.

III. В качестве примера рассмотрим катушечный тензор *незаземленной звезды* (уравнение (19.46))

$$\begin{aligned}
 i^a &= i^{a'} \\
 i^b &= i^{b'} \\
 i^c &= -i^{a'} - i^{b'}
 \end{aligned}
 \quad C_u = \mathbf{b}
 \quad \begin{array}{c}
 \begin{array}{cc}
 & \begin{array}{c} a' \quad b' \end{array} \\
 \begin{array}{c} a \\ b \\ c \end{array} & \begin{array}{|c|c|}
 \hline
 1 & \\
 \hline
 & 1 \\
 \hline
 -1 & 1 \\
 \hline
 \end{array}
 \end{array}
 \end{array}
 \quad (20.4)$$

Преобразование $\mathbf{i} = C_u \mathbf{i}'$ подставляется в следующее «уравнение связи»:

$$i^a + i^b + i^c = 0. \quad (20.5)$$

Заменяя фазные токи токами последовательности, имеем

$$\frac{1}{\sqrt{3}} [(i^0 + i^1 + i^2) + (i^0 + a^2 i^1 + a i^2) + (i^0 + a i^1 + a^2 i^2)] = 0$$

или $\sqrt{3} i^0 = 0$. Отсюда получаем уравнение связи в терминах токов последовательности

$$i^0 = 0, \quad (20.6)$$

что эквивалентно следующему преобразованию $\mathbf{i} = C_u \mathbf{i}'$:

$$\begin{aligned}
 i^0 &= 0 \\
 i^1 &= i^{1'} \\
 i^2 &= i^{2'}
 \end{aligned}
 \quad C_u = \mathbf{1}
 \quad \begin{array}{c}
 \begin{array}{cc}
 & \begin{array}{c} 1' \quad 2' \end{array} \\
 \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 2 \end{array} & \begin{array}{|c|c|}
 \hline
 & \\
 \hline
 1 & \\
 \hline
 & 1 \\
 \hline
 \end{array}
 \end{array}
 \end{array}
 \quad (20.7)$$

Этот новый C_u является последовательным эквивалентом фазному C_u уравнения (19.46).

Следует заметить, что *наличие тока нулевой последовательности, протекающего в заземленной звезде* (или открытом треугольнике), *не предполагается*.

IV. Катушечные тензоры *закрытого треугольника* в фазных и последовательных осях приведены в табл. 19.2.

Особо следует подчеркнуть, что в последовательных осях вводится такое же число новых переменных, как и в фазных осях. Поэтому катушечные тензоры имеют одинаковый вид и в тех и в других осях. В обычных методах анализа практически всегда вводится более длинная последовательность переменных, чем это действительно необходимо, отчего анализ становится лишь более запутанным.

4. ПРИМЕР С ОСЯМИ ДВУХ ТИПОВ

I. Возьмем для примера z' (рис. 20.1, а), выраженный в осях обоих типов. Компануд-сеть (рис. 20.1, б) и ее анализ одинаковы для трехфазных осей обоих типов.

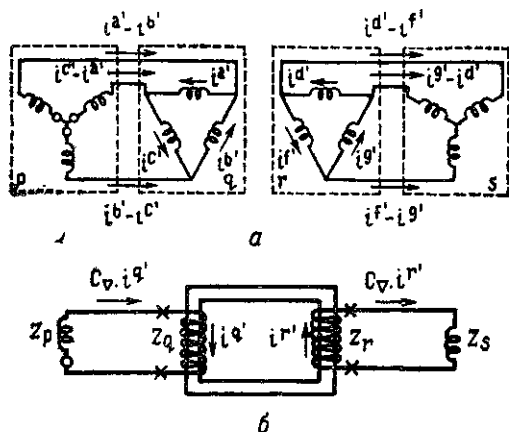


Рис. 20.1.

а — данная сеть; б — компануд-сеть.

II. z и e примитивной сети равны

$$z = \begin{array}{c|cccc} & p & q & r & s \\ \hline p & z_p & & & \\ q & & & z_{q-r} & \\ r & & z_{q-r} & & \\ s & & & & z_s \end{array}, \quad (20.8)$$

$$e = \begin{array}{c|cccc} & p & q & r & s \\ \hline p & e_p & & & \\ q & & & & \\ r & & & & \\ s & & & & \end{array} \quad (20.9)$$

Тензор преобразования можно записать как

$$\begin{array}{l} i^p = C_{\Delta} i^{q'} \\ i^q = i^{q'} \\ i^r = i^{r'} \\ i^s = C_{\Delta} i^{r'} \end{array} \quad C_{\Delta} = \begin{array}{c|cc} & q' & r' \\ \hline p & C_{\Delta} & \\ q & I & \\ r & & I \\ s & & C_{\Delta} \end{array} \quad (20.10)$$

Чтобы исключить намагничивающие токи, устанавливается уравнение связи

$$n_q i^{q'} + n_r i^{r'} = 0. \quad (20.11)$$

Заменив старые токи новыми из уравнения (20.10)

$$n_q i^{q'} + n_r i^{r'} = 0$$

и исключив $i^{q'}$, имеем

$$i^{q'} = -n_q^{-1} n_r i^{r'} = -n i^{r'},$$

$$C_2 = \begin{matrix} & & r' \\ q' & \begin{bmatrix} -n \\ I \end{bmatrix} \\ r' & \end{matrix}, \quad C_1 C_2 = C = \begin{matrix} & & & r' \\ p & \begin{bmatrix} -C_\Delta n \\ -n \\ I \\ C_\Delta \end{bmatrix} \\ q & \\ r & \\ s & \end{matrix} \quad (20.12)$$

Окончательный тензор импеданса z' находят по соотношению $C_t^* z C$

$$z' = r' \begin{matrix} & & & r' \\ & & \begin{bmatrix} n_t^* C_{\Delta t}^* z_p C_\Delta n - n_t^* z_{q-r} - z_{q-r} n + C_{\Delta t}^* z_s C_\Delta \end{bmatrix} \\ & & & \end{matrix}, \quad (20.13)$$

$$e' = \begin{matrix} & & r' \\ & & \begin{bmatrix} -n_t^* C_{\Delta t}^* e_p \end{bmatrix} \\ & & \end{matrix} \quad (20.14)$$

Если витковое отношение для каждой фазы одинаково, т. е. $n = nI$,

$$z' = r' \begin{matrix} & & & r' \\ & & \begin{bmatrix} C_{\Delta t}^* (n^2 z_p + z_s) C_\Delta - 2n z_{q-r} \end{bmatrix} \\ & & & \end{matrix} \quad (20.15)$$

III. Предположим теперь, что заданы следующие величины:

$$z_p = \begin{matrix} & a & b & c \\ a & \begin{bmatrix} Z_p & & \\ & Z_p & \\ & & Z_p \end{bmatrix} \\ b & \\ c & \end{matrix} = 1 \begin{matrix} & 0 & 1 & 2 \\ 0 & \begin{bmatrix} Z_p & & \\ & Z_p & \\ & & Z_p \end{bmatrix} \\ 1 & \\ 2 & \end{matrix}, \quad (20.16)$$

$$z_s = \begin{matrix} & a & b & c \\ a & \begin{bmatrix} Z_a & & \\ & Z_b & \\ & & Z_c \end{bmatrix} \\ b & \\ c & \end{matrix} = 1 \begin{matrix} & 0 & 1 & 2 \\ 0 & \begin{bmatrix} Z_0 & Z_2 & Z_1 \\ Z_1 & Z_0 & Z_2 \\ Z_2 & Z_1 & Z_0 \end{bmatrix} \\ 1 & \\ 2 & \end{matrix}, \quad (20.17)$$

$$z_{q-r} = \begin{array}{c} \begin{array}{|c|c|c|} \hline a & b & c \\ \hline Z_{q-r} & & \\ \hline b & Z_{q-r} & \\ \hline c & & Z_{q-r} \\ \hline \end{array} \\ \end{array} = \begin{array}{c} \begin{array}{|c|c|c|} \hline 0 & 1 & 2 \\ \hline Z_{q-r} & & \\ \hline & Z_{q-r} & \\ \hline & & Z_{q-r} \\ \hline \end{array} \\ \end{array}, \quad (20.18)$$

$$C_{\Delta} = \begin{array}{c} \begin{array}{|c|c|c|} \hline a' & b' & c' \\ \hline & 1 & -1 \\ \hline -1 & & 1 \\ \hline 1 & -1 & \\ \hline \end{array} \\ \end{array} = \begin{array}{c} \begin{array}{|c|c|c|} \hline 0' & 1' & 2' \\ \hline & & \\ \hline & a^2 - a & \\ \hline & & a - a^2 \\ \hline \end{array} \\ \end{array}, \quad (20.19)$$

$$e_p = \begin{array}{c} \begin{array}{|c|c|c|} \hline a & b & c \\ \hline e_p & a^2 e_p & a e_p \\ \hline \end{array} \\ \end{array} = \begin{array}{c} \begin{array}{|c|c|c|} \hline 0 & 1 & 2 \\ \hline \sqrt{3} e_p & & \\ \hline \end{array} \\ \end{array} \quad (20.20)$$

IV. Тогда тензоры импеданса по уравнению (20.15) равны

$$z' = \begin{array}{c} \begin{array}{|c|c|c|} \hline a' & b' & c' \\ \hline Z_b + Z_c + 2n^2 Z_p - \\ -2nZ_{q-r} & -Z_c - Z_p & -Z_b - Z_p \\ \hline -Z_c - Z_p & Z_a + Z_c + 2n^2 Z_p - \\ -2nZ_{q-r} & -Z_a - Z_p & \\ \hline -Z_b - Z_p & -Z_a - Z_p & Z_a + Z_b + 2n^2 Z_p - \\ -2nZ_{q-r} & & \\ \hline \end{array} \\ \end{array} \quad (20.21)$$

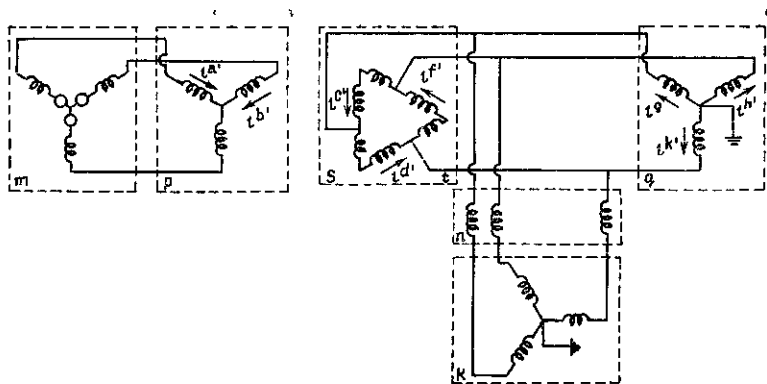
$$z' = \begin{array}{c} \begin{array}{|c|c|c|} \hline 0' & 1' & 2' \\ \hline -2nZ_{q-r} & & \\ \hline & 3Z_0 + 3n^2 Z_p - 2nZ_{q-r} & -3Z_2 \\ \hline & -3Z_1 & 3Z_0 + 3n^2 Z_p - 2nZ_{q-r} \\ \hline \end{array} \\ \end{array}, \quad (20.22)$$

а векторы приложенного напряжения по уравнению (20.14) равны

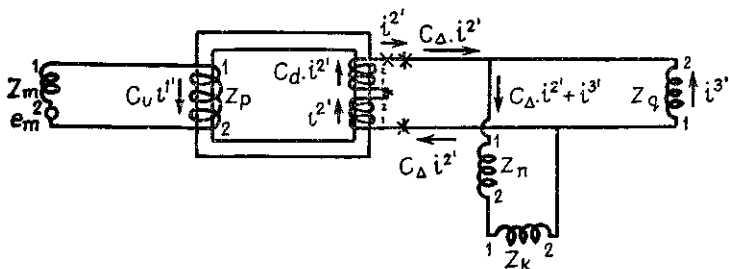
$$e' = \begin{array}{c} \begin{array}{|c|c|} \hline a' & n(a^2 - a)e_p \\ \hline b' & n(a - 1)e_p \\ \hline c' & n(1 - a^2)e_p \\ \hline \end{array} \\ \end{array} = \begin{array}{c} \begin{array}{|c|c|} \hline 0' & \\ \hline 1' & 3(a - a^2)ne_p \\ \hline 2' & \\ \hline \end{array} \\ \end{array} \quad (20.23)$$

5. МНОГООБОМОТЧНЫЕ КОМПАУНД-ТРАНСФОРМАТОРЫ

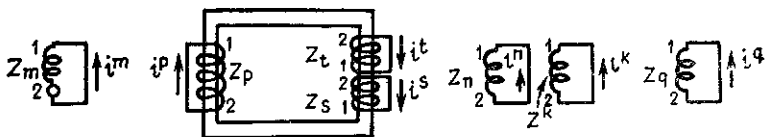
I. Рассмотрим сеть (рис. 20.2, а), содержащую вписанный треугольный трехобмоточный трансформатор (см. рис. 10.3). Компаунд-сеть содержит трехобмоточный компаунд-трансформатор.



а



б



в

Рис. 20.2.

а — данная сеть; б — компаунд-сеть, в — примитивная компаунд-сеть

Примитивная компаунд-сеть (рис. 20.2, в) содержит семь катушек. Тензор импеданса и вектор приложенного напряжения этой сети равны

| | m | p | s | t | n | k | q |
|-------|-------|-----------|-----------|-----------|-------|-------|-------|
| m | z_m | | | | | | |
| p | | | z_{p-s} | z_{p-t} | | | |
| s | | z_{p-s} | | z_{s-t} | | | |
| z = t | | z_{p-t} | z_{s-t} | | | | |
| n | | | | | z_n | | |
| k | | | | | | z_k | |
| q | | | | | | | z_q |

(20.24)

| | m | p | s | t | n | k | q |
|-----|-------|---|---|---|---|---|---|
| e = | e_m | | | | | | |

(20.25)

Отдельные трехфазные устройства z_m и другие можно представить как в фазных a, b, c , так и в последовательных $0, 1, 2$ осях.

II. Заметим, что в компаунд-трансформаторе:

1) вторичная z_s и третичная z_t обмотки соединены последовательно;

2) компаунд-узлы третичной обмотки показывают, что фазные соединения взаимно заменяются с помощью C_d ;

3) вторичная и третичная обмотки *вместе* образуют треугольник, поэтому в каждой из них имеются скрещивающиеся компаунд-узлы треугольника (три скрещивающихся линии на рис. 20.2, б).

III. Поскольку имеются три компаунд-контура, выбирают *три новые переменные*: одна переменная $C_u i^{1'}$ — в любой из незаземленных звезд, вторая $i^{2'}$ — в одной из двух катушек треугольника, третья $i^{3'}$ выбирается произвольно. *Катушечные и узловые тензоры можно выразить как в фазных, так и в последовательных осях, в зависимости от компонент примитивной компаунд-сети.*

Приравнивая старые и новые токи в каждой катушке, имеем

$$\begin{array}{l}
 i^m = -C_u i^{1'} \\
 i^p = C_u i^{1'} \\
 i^s = \quad \quad + i^{2'} \\
 i^t = \quad \quad + C_d i^{2'} \\
 i^n = \quad \quad + C_\Delta i^{2'} + i^{3'} \\
 i^k = \quad \quad + C_\Delta i^{2'} + i^{3'} \\
 i^q = \quad \quad \quad + i^{3'}
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{c}
 \begin{array}{c}
 1' \quad 2' \quad 3' \\
 m \quad | \quad | \quad | \\
 p \quad | \quad | \quad | \\
 s \quad | \quad | \quad | \\
 C_1 = t \quad | \quad | \quad | \\
 n \quad | \quad | \quad | \\
 k \quad | \quad | \quad | \\
 q \quad | \quad | \quad |
 \end{array} \\
 \end{array}
 \quad
 (20.26)$$

IV. Тензор преобразования C_2 , исключаяющие намагничивающие токи катушек p , s и t трансформатора, находят за четыре этапа следующим образом:

1. Запишем уравнение связей через *старые* токи. Оно выражает равенство нулю сумму МДС по замкнутому контуру компаунд-трансформатора примитивной сети (рис. 20.2, б):

$$n_p i^p + n_s i^s + n_t i^t = 0. \quad (20.27)$$

Здесь n_p — число витков трех первичных катушек:

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{c}
 p_1 \quad p_2 \quad p_3 \\
 p_1 \quad | \quad | \quad | \\
 n_p = p_2 \quad | \quad | \quad | \\
 p_3 \quad | \quad | \quad | \\
 \quad \quad \quad | \quad | \quad | \\
 \quad \quad \quad n_{p_3}
 \end{array} \\
 \end{array}
 \quad (20.28)$$

Аналогичные матрицы записывают и для n_s и n_t .

2. Заменяем старые токи новыми из уравнения (20.26)

$$n_p C_u i^{1'} + n_s i^{2'} + n_t C_d i^{2'} = 0 \quad (20.29)$$

или

$$n_p C_u i^{1'} + (n_s + n_t C_d) i^{2'} = 0,$$

что является уравнением связей, выраженным через новые токи.

3. Исключим $i^{2'}$:

$$i^{2'} = -(n_s + n_t C_d)^{-1} n_p C_u i^{1'} = -n i^{1'}.$$

При исключении одного из токов нужно следить за тем, чтобы каждый коэффициент имел обратный. Например, нельзя исключить $i^{1'}$, поскольку C_u (уравнение (20.4)) не имеет обратного. Таким образом, поскольку $i^{1'}$ имеет две компоненты, а $i^{2'}$ —

три (по числу закрытых магнитных контуров), $i^{2'}$ следует исключить.

4. Отсюда получаем уравнения преобразования $i' = C_2 i''$

$$\begin{aligned}
 i^{1'} &= i^{1''} \\
 i^{2'} &= -n i^{1''} \\
 i^{3'} &= i^{3''}
 \end{aligned}
 \quad C_2 = 2' \quad \begin{array}{c} 1'' \quad 3'' \\ \begin{array}{|c|c|} \hline 1' & \\ \hline -n & \\ \hline & 1 \\ \hline \end{array} \end{array} \quad (20.30)$$

Произведение двух тензоров преобразования равно $C_1 C_2 =$

$$C = \begin{array}{c} 1'' \quad 3'' \\ \begin{array}{|c|c|} \hline m & -C_u \\ \hline p & C_u \\ \hline s & -n \\ \hline t & -C_{\Delta n} \\ \hline n & -C_{\Delta n} \quad | \quad I \\ \hline k & -C_{\Delta n} \quad | \quad I \\ \hline q & \quad \quad \quad | \quad I \\ \hline \end{array} \end{array}
 \quad C_i^* = 1'' \quad \begin{array}{c} m \quad p \quad s \quad t \quad n \quad k \quad q \\ \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|} \hline -C_{ut}^* & C_{ut}^* & -n_t^* & -n_t^* C_{\Delta t}^* & -n_t^* C_{\Delta t}^* & -n_t^* C_{\Delta t}^* & \\ \hline & & & & I & I & I \\ \hline 3'' & & & & & & \\ \hline \end{array} \end{array} \quad (20.31)$$

V. Окончательный тензор импеданса находят по формуле $C_i^* z C$

$$z' = \begin{array}{c} 1'' \\ \begin{array}{|c|c|} \hline C_{ut}^* z_m C_u + n_t^* C_{\Delta t}^* z_n C_{\Delta n} + n_t^* C_{\Delta t}^* z_k C_{\Delta n} \\ \hline C_{ut}^* z_{p-t} C_{\Delta n} - n_t^* C_{\Delta t}^* z_{p-t} C_u - n_t^* z_{p-s} C_u \\ \hline -C_{ut}^* z_{p-s} n + n_t^* z_{s-t} C_{\Delta n} + n_t^* C_{\Delta t}^* z_{s-t} n \\ \hline 3'' & -z_n C_{\Delta n} - z_k C_{\Delta n} \\ \hline \end{array} \end{array} \quad \begin{array}{c} 3'' \\ \begin{array}{|c|} \hline -n_t^* C_{\Delta t}^* z_n \\ \hline -n_t^* C_{\Delta t}^* z_k \\ \hline z_n + z_k + z_q \\ \hline \end{array} \end{array} \quad (20.32)$$

Поскольку z_{p-s} и другие имеют диагональную матрицу, его позиция в соответствующем члене можно изменить.

Последний столбец и последнюю строку можно исключить по формуле редукции $z_1 - z_2 z_4^{-1} z_3$.

При этом остается компонента, представляющая два обычных уравнения с двумя неизвестными $i^{2'}$ и $i^{3'}$ ($i^{1'}$).

Если токи i' определены, токи в отдельных компаунд-катушках равны $i = C i'$, а индуцированные напряжения $e_c = z C i'$.

6. ЗАМЫКАНИЯ

I. Если одна или несколько фаз линии электропередачи закорачиваются или заземляются в некоторых точках через импедансы, то *каждое замыкание можно рассматривать как компаунд-катушку, присоединенную в двух точках параллельно компаунд-сети* (рис. 20.3), как катушечный тензор C_f и узловой тензор C_{ff} , но в большинстве практических случаев достаточно предположить наличие катушечного тензора C_f . *Каждая катушка замыкания приносит новую переменную i_f , поскольку она вводит в компаунд-сеть новый внешний контур.*

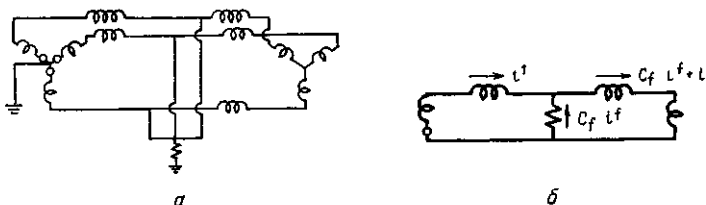


Рис. 20.3.
а — замыкание в сети; б — компаунд-замыкание.

Компаунд-сеть, содержащая одну или несколько катушек замыкания, анализируется точно так же, как и любая другая контурная (узловая или ортогональная) компаунд-сеть, т. е. количество переменных i выбирается по числу контуров и т. д. *Отдельные замыкающие устройства могут быть представлены как в действительных осях фаз, так и в последовательных осях.*

II. Чтобы иметь возможность подставлять *несколько типов замыкания* в двух точках и т. д., можно получить тензор импеданса сети *без замыканий, временно заменив катушку замыкания генератором*. Как показано в гл. 10, § 15, эта процедура эквивалентна измерению импеданса сети через замыкание (или несколько замыканий). Тогда подстановкой разных z для разных типов замыканий получают тензор импеданса сети, *последовательно соединенной с замыканием*.

Этот последний метод (отдельного расчета сети и замыканий) используется особенно в тех случаях, когда можно вводить симметричные составляющие, т. е. когда не сбалансированы только замыкания, а оставшаяся часть сети сбалансирована.

7. ТЕНЗОРЫ ИМПЕДАНСА И КАТУШЕЧНЫЕ ТЕНЗОРЫ ЗАМЫКАНИЙ

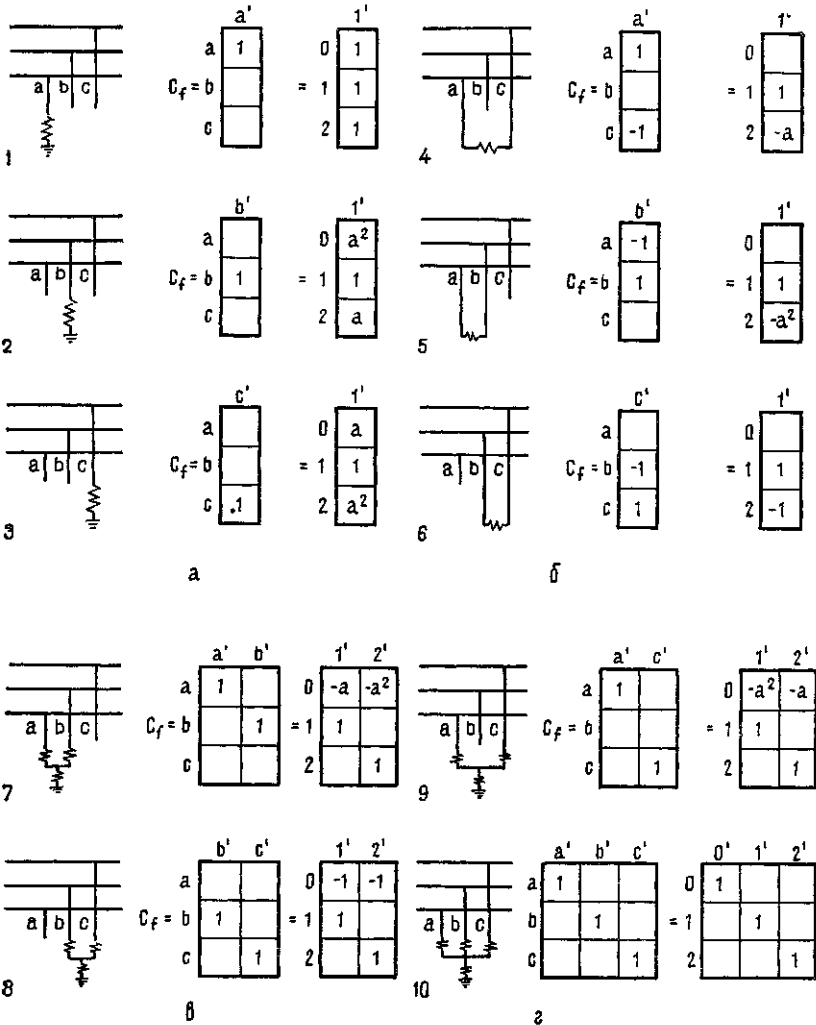
I. Каждое замыкание можно рассматривать как присоединенное к системе несбалансированное трехфазное устройство. В таком случае z_f замыкания является z_f для трех изолированных катушек, причем некоторые из них, как показано в первых пяти рисунках табл. 20.1, имеют нулевые импедансы. Они явля-

Отдельные тензоры импеданса z_f замыканий различных типов

| | | | |
|---|--|--|---|
| 1 | | $z_f = \begin{matrix} & a & b & c \\ \begin{matrix} a \\ b \\ c \end{matrix} & Z & & \\ & & & \end{matrix}$ | $z_f = \frac{1}{3} \times \begin{matrix} & 0 & 1 & 2 \\ \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{matrix} & Z & Z & Z \\ & Z & Z & Z \\ & Z & Z & Z \end{matrix}$ |
| 2 | | $z_f = \begin{matrix} & a & b & c \\ \begin{matrix} a \\ b \\ c \end{matrix} & & & \\ & & Z & \\ & & & \end{matrix}$ | $z_f = \frac{1}{3} \times \begin{matrix} & 0 & 1 & 2 \\ \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{matrix} & Z & a^2 Z & a Z \\ & a Z & Z & a^2 Z \\ & a^2 Z & a Z & Z \end{matrix}$ |
| 3 | | $z_f = \begin{matrix} & a & b & c \\ \begin{matrix} a' \\ b \\ c \end{matrix} & & & \\ & & & Z \\ & & & \end{matrix}$ | $z_f = \frac{1}{3} \times \begin{matrix} & 0 & 1 & 2 \\ \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{matrix} & Z & a Z & a^2 Z \\ & a^2 Z & Z & a Z \\ & a Z & a^2 Z & Z \end{matrix}$ |
| 4 | | $z_f = \begin{matrix} & a & b & c \\ \begin{matrix} a \\ b \\ c \end{matrix} & & & \\ & & Z & \\ & & & Z \end{matrix}$ | $z_f = \frac{1}{3} \times \begin{matrix} & 0 & 1 & 2 \\ \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{matrix} & 2Z & -Z & -Z \\ & -Z & 2Z & -Z \\ & -Z & -Z & 2Z \end{matrix}$ |
| 5 | | $z_f = \begin{matrix} & a & b & c \\ \begin{matrix} a \\ b \\ c \end{matrix} & Z & & \\ & & Z & \\ & & & Z \end{matrix}$ | $z_f = \begin{matrix} & 0 & 1 & 2 \\ \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{matrix} & Z & & \\ & & Z & \\ & & & Z \end{matrix}$ |
| 6 | | $z_f = \begin{matrix} & a & b & c \\ \begin{matrix} a \\ b \\ c \end{matrix} & & & \\ & & Z_g & Z_g \\ & & Z_g & Z_g \end{matrix}$ | $z_f = \frac{1}{3} \times \begin{matrix} & 0 & 1 & 2 \\ \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{matrix} & 4Z_g & -2Z_g & -2Z_g \\ & -2Z_g & Z_g & Z_g \\ & -2Z_g & Z_g & Z_g \end{matrix}$ |
| 7 | | $z_f = \begin{matrix} & a & b & c \\ \begin{matrix} a \\ b \\ c \end{matrix} & Z_g & Z_g & Z_g \\ & Z_g & Z_g & Z_g \\ & Z_g & Z_g & Z_g \end{matrix}$ | $z_f = \begin{matrix} & 0 & 1 & 2 \\ \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{matrix} & 3Z_g & & \\ & & & \\ & & & \end{matrix}$ |
| 8 | | $z_f = \begin{matrix} & a & b & c \\ \begin{matrix} a \\ b \\ c \end{matrix} & & & \\ & & Z + Z_g & Z_g \\ & & Z_g & Z + Z_g \end{matrix}$ | $z_f = \frac{1}{3} \times \begin{matrix} & 0 & 1 & 2 \\ \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{matrix} & 2Z + 4Z_g & -Z - 2Z_g & -Z - 2Z_g \\ & -Z - 2Z_g & 2Z + Z_g & -Z + Z_g \\ & -Z - 2Z_g & -Z + Z_g & 2Z + Z_g \end{matrix}$ |

Первая колонка — z_f в фазных осях, вторая колонка — z_f в последовательных осях.

Отдельные тензоры преобразования C_f замыканий разных типов



Первая колонка — C_f в фазных осях; вторая колонка — C_f в последовательных осях;
 а — линия на заземление; б — линия на линию; в — двойная линия на заземление; г — три фазы на заземление.

ются частными случаями уравнений (13.18) и (13.21) соответственно.

Импеданс заземления для замыкания (см. рис. 19.16) образует другую компаунд-катушку, соединенную последовательно с компаунд-катушкой замыкания. Для экономии можно считать, что импеданс заземления Z_g объединен в три изолированные ка-

тушки замыкания (см. рис. 19.19), поэтому их z_f также включает Z_g аналогично тому, как это сделано в уравнении (19.40) (см. последние рисунки табл. 20.1). На этих рисунках каждая катушка замыкания все еще изолирована; *влияние катушки заземления состоит лишь в изменении собственных и взаимных импедансов тех катушек замыкания, с которыми она соединена*, т. е. при новом значении z_f можно игнорировать присутствие импеданса заземления.

II. Катушечный тензор замыкания показывает способ соединения импеданса замыкания с сетью. Катушечные тензоры замыкания различных типов даны в табл. 20.2 как в фазных, так и в последовательных осях. В каждом замыкании столько же новых токов, сколько и действительно текущих токов (чаще всего существует *один* действительный ток).

Когда замыкание состоит из треугольника, его нужно рассматривать как и любое другое соединенное треугольником трехфазное устройство.

8. ПРИМЕР ОДИНОЧНОГО ЗАМЫКАНИЯ

I. Рассмотрим сеть (рис. 20.4, а), в которой есть замыкание двойной линии заземления с фазами b и c . В компаунд-сети замыкание представлено шунтирующей катушкой z_f по этой линии.

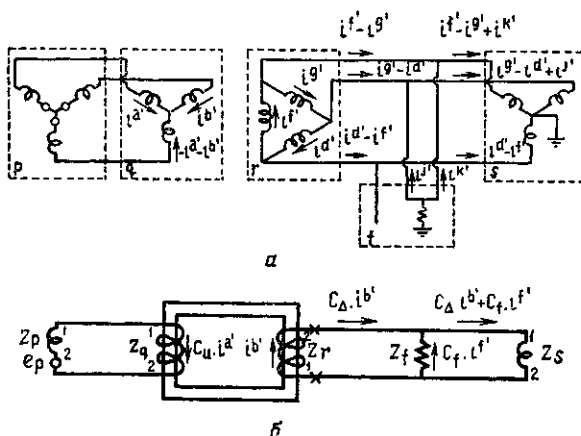


Рис. 20.4.

а — одиночное замыкание в сети; б — компаунд-замыкание.

По числу контуров выбираются *три переменные*. Через замыкание протекает ток $C_f i^{f'}$ (где $i^{f'}$ имеет две компоненты: $i^{j'}$ и $i^{k'}$), в треугольнике — ток $i^{b'}$ (с тремя компонентами), а в заземленной звезде — $C_{\Delta} i^{a'}$ (где $i^{a'}$ имеет две компоненты: $i^{a'}$ и $i^{b'}$).

После того как построена компаунд-сеть и обозначены протекающие токи, *последующий анализ полностью соответствует анализу обычной контурной сети.*

II. Тензор импеданса и вектор приложенного напряжения примитивной компаунд-сети с пятью катушками равны

$$z = \begin{array}{c|ccccc} & p & q & r & f & s \\ \hline p & z_p & & & & \\ \hline q & & & z_{q-r} & & \\ \hline r & & z_{q-r} & & & \\ \hline f & & & & z_f & \\ \hline s & & & & & z_s \end{array}, \quad (20.33) \quad e = \begin{array}{c|ccccc} & p & q & r & f & s \\ \hline e_p & & & & & \end{array}, \quad (20.34)$$

где значение z_f из табл. 20.2 равно

$$z_f = \begin{array}{c|ccc} & a & b & c \\ \hline a & & & \\ \hline b & & Z_f & Z_f \\ \hline c & & Z_f & Z_f \end{array} = \frac{1}{3} \begin{array}{c|ccc} & 0 & 1 & 2 \\ \hline 0 & 4Z_f & -2Z_f & -2Z_f \\ \hline 1 & -2Z_f & Z_f & Z_f \\ \hline 2 & -2Z_f & Z_f & Z_f \end{array} \quad (20.35)$$

Трехфазные тензоры импеданса z_p и z_s имеют по три строки и по три столбца из собственных и взаимных индуктансов трех катушек каждого трехфазного устройства *без их взаимосоединения.*

III. Установим соотношение между старыми и новыми токами, протекающими в каждой катушке (рис. 20.4, б):

$$\begin{array}{l} i^p = -C_u i^{a'} \\ i^q = C_u i^{a'} \\ i^r = i^{b'} \\ i^f = C_f i^{f'} \\ i^s = C_{\Delta} i^{b'} + C_f i^{f'} \end{array} \quad C_1 = \begin{array}{c|ccc} & a' & b' & f' \\ \hline p & -C_u & & \\ \hline q & C_u & & \\ \hline r & & I & \\ \hline f & & & C_f \\ \hline s & & C_{\Delta} & C_f \end{array}, \quad (20.36)$$

где трехфазные тензоры преобразования C_u , C_f и C_{Δ} из табл. 19.2 и 20.1 равны соответственно

$$C_a = \begin{array}{c|c|c} & a' & b' \\ \hline a & 1 & \\ \hline b & & 1 \\ \hline c & 1 & -1 \end{array} = \begin{array}{c|c|c} & 1' & 2' \\ \hline 0 & & \\ \hline 1 & 1 & \\ \hline 2 & & 1 \end{array}, \quad (20.37)$$

$$C_f = \begin{array}{c|c|c} & j' & k' \\ \hline h & & \\ \hline j & 1 & \\ \hline k & & 1 \end{array} = \begin{array}{c|c|c} & 1' & 2' \\ \hline 0 & -1 & -1 \\ \hline 1 & 1 & \\ \hline 2 & & 1 \end{array}, \quad (20.38)$$

$$C_\Delta = \begin{array}{c|c|c|c} & d' & f' & g' \\ \hline d & & 1 & -1 \\ \hline f & -1 & & 1 \\ \hline g & 1 & -1 & \end{array} = \begin{array}{c|c|c|c} & 0' & 1' & 2' \\ \hline 0 & & & \\ \hline 1 & & a^2 - a & \\ \hline 2 & & & a - a \end{array} \quad (20.39)$$

Коэффициенты при новых токах дают тензор преобразования цепи C_1 .

IV. Для исключения намагничивающих токов трансформатора уравнение связи трансформатора записывается до взаимодействия

$$n_q i^q + n_r i^r = 0 \quad (20.40)$$

С учетом уравнения (20.36) уравнение связи после присоединения записывают как

$$n_q C_a i^{a'} + n_r i^{b'} = 0. \quad (20.41)$$

Исключаем i_b' :

$$i^{b'} = -n_r^{-1} n_q C_a i^{a'}. \quad (20.42)$$

Таким образом, уравнение связи заменяется преобразованием $i' = C_2 i''$

$$\begin{array}{l} i^{a'} = i^{a''} \\ i^{b'} = -n_r^{-1} n_q C_a i^{a''} = -n i^{a''} \\ i^{f'} = i^{f''} \end{array} \quad \begin{array}{c|c|c} & a'' & f'' \\ \hline a' & I & \\ \hline & -n & \\ \hline f' & & I \end{array} \quad (20.43)$$

V. Результирующий тензор преобразования $C_1 C_2$ равен

$$C = \begin{array}{c|c} & \begin{array}{c} a'' \\ f'' \end{array} \\ \hline \begin{array}{c} p \\ q \\ r \\ f \\ s \end{array} & \begin{array}{c} -C_{u1} \\ C_{u1} \\ -n \\ C_f \\ -C_{\Delta} n \\ C_f \end{array} \end{array} \quad C_t^* = \begin{array}{c|ccccc} & p & q & r & f & s \\ \hline a'' & -C_{ut}^* & C_{ut}^* & -n_t^* & & -n_t^* C_{\Delta t}^* \\ \hline f'' & & & & C_{ft}^* & C_{ft}^* \end{array} \quad (20.44)$$

VI. Тензор импеданса всей системы по соотношению $C_t^* z C$ равен

$$z'' = \begin{array}{c|c} & \begin{array}{c} a'' \\ f'' \end{array} \\ \hline \begin{array}{c} a'' \\ f'' \end{array} & \begin{array}{c} C_{ut}^* z_p C_u - C_{ut}^* z_{q-r} n \\ -n_t^* z_{q-r} C_u + \\ + n_t^* C_{\Delta t}^* z_s C_{\Delta} n \\ -C_{ft}^* z_s C_{\Delta} n \end{array} \quad \begin{array}{c} \\ -n_t^* C_{\Delta t}^* z_s C_f \\ C_{ft}^* (z_f + z_s) C_f \end{array} \end{array} \quad (20.45)$$

и имеет 2-матрицу с *четырьмя* строками и столбцами. Ось a'' можно исключить по формулам редукции (гл. 10), при этом остаются лишь две переменные для замыкания.

Токи находят как $i'' = z''^{-1} e''$, где $e'' = C_t^* e$:

$$e'' = \begin{array}{c|c} & \begin{array}{c} a'' \\ f'' \end{array} \\ \hline C_{ut}^* e_p & 0 \end{array} \quad (20.46)$$

После того как токи i'' определены, *напряжения на отдельных катушках* каждого трехфазного устройства находят по соотношению

$$e_c = z C i'' = \begin{array}{c|c} & \begin{array}{c} p \\ q \\ r \\ f \\ s \end{array} \\ \hline \begin{array}{c} p \\ q \\ r \\ f \\ s \end{array} & \begin{array}{c} -z_p C_{ui} a'' \\ -z_{q-r} n i a'' \\ z_{q-r} C_{ui} a'' \\ z_f C_f i f'' \\ -z_s C_{\Delta} n i a'' + z_s C_f i f'' \end{array} \end{array}, \quad (20.47)$$

где $z C$ уже определены в уравнении (20.45). Токи в отдельных катушках находят как $i_c = C i''$. Собственные и взаимные адмиттансы отдельных компаунд-катушек определяют через $C_y C_t^*$.

9. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ РАСЧЕТЫ ДЛЯ ОДНОВРЕМЕННЫХ ЗАМЫКАНИЙ

I. Рассмотрим сеть (рис. 20.5, а), в которой имеются два замыкания в точках f_1 и f_2 . В примитивной компаунд-сети (рис. 20.5, б) имеется восемь закрытых электрических контуров и два магнитных контура. Поскольку возможны несколько типов замыканий, временно следует допустить замену замыканий в этих точках трехфазными генераторами e_{f_1} и e_{f_2} . Метод анализа остается прежним, как для любой другой компаунд-сети.

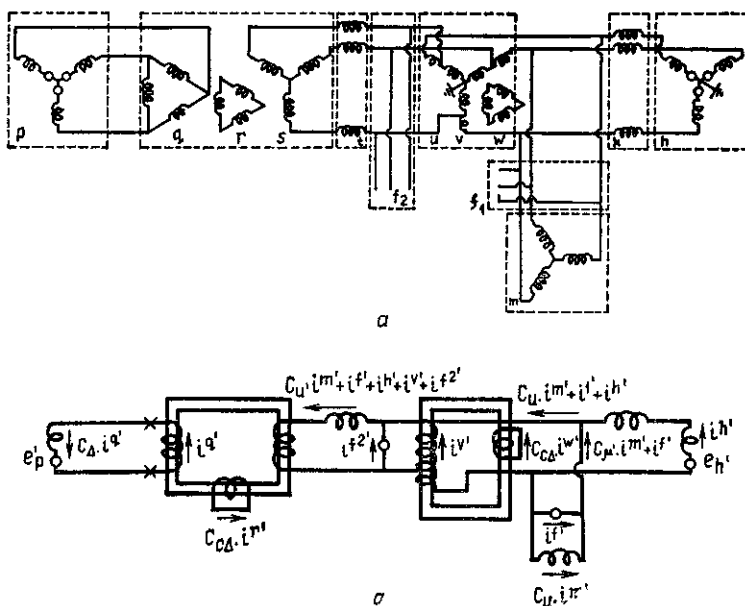


Рис. 20.5. Многократные замыкания:
а — сеть с двумя замыканиями; б — компаунд-сеть.

После нахождения z' компаунд-сети, содержащей шесть строк и столбцов (две из восьми исходных переменных исключены, так как намагничивающие токи двух трансформаторов не принимаются во внимание), будут также исключены четыре строки и четыре столбца так, чтобы в z' остались лишь строки и столбцы замыканий f_1 и f_2 . Результирующий z' , состоящий из двух строк и двух столбцов, будет подставлен на место e_{f_1} и e_{f_2} последовательно с импедансами z_f замыканий разных типов.

II. Тензор импеданса z примитивной сети равен

| | p | q | r | s | t | f ₂ | u | v | w | k | h | f ₁ | m |
|----------------|-------|-----------|-----------|---|----------|----------------|-----------|-----------|---|---|---|----------------|----------|
| p | z_p | | | | | | | | | | | | |
| q | | z_{q-r} | z_{q-s} | | | | | | | | | | |
| r | | z_{q-r} | z_{r-s} | | | | | | | | | | |
| s | | z_{q-s} | z_{r-s} | | | | | | | | | | |
| t | | | | | z_t | | | | | | | | z_{tm} |
| f ₂ | | | | | | | | | | | | | |
| z = u | | | | | | | z_{u-v} | z_{u-w} | | | | | |
| v | | | | | | | z_{u-v} | z_{v-w} | | | | | |
| w | | | | | | | z_{u-w} | z_{v-w} | | | | | |
| k | | | | | | | | | | | | | |
| h | | | | | | | | | | | | | |
| f ₁ | | | | | | | | | | | | | |
| m | | | | | z_{tm} | | | | | | | | z_m |

(20.48)

Следует заметить, что ветви, представляющие замыкания f_1 и f_2 , не имеют импедансов. Для них зарезервированы лишь соответствующие строки и столбцы. Предполагается, что между двумя линиями передачи t и m существует взаимный импеданс z_{tm} .

Вектор приложенного напряжения равен

$$e = \begin{bmatrix} e_p & & & & & e_{f_2} & & & & & e_h & e_{f_1} & & \end{bmatrix} \quad (20.49)$$

(Если компаунд-сеть с несколькими одновременными замыканиями рассматривается как ортогональная компаунд-сеть, то дополнительные генераторы замыкания не вводят в примитивную сеть дополнительных воображаемых катушек. Генераторы замыкания в этом случае проявляются как компоненты E' , а не e . Однако в любом случае результирующий тензор импеданса z' имеет такое же число строк и столбцов.)

III. Для получения тензора преобразования C_1 выбирается столько новых переменных, сколько имеется контуров, а именно восемь. Предполагается, что две из них, токи i^{f_1} и i^{f_2} , протекают через генераторы замыкания. (Наличие катушечного тензора C_f будет предполагаться в том случае, если генераторы заменяются

импедансами замыкания.) Другие переменные, как обычно, выбираются в треугольниках и незаземленных звездах.

После нахождения токов, протекающих в каждой катушке (рис. 20.5, б), между старыми и новыми токами в катушках устанавливается соотношение $\mathbf{i} = \mathbf{C}_1 \mathbf{i}'$

$$\begin{aligned}
 \mathbf{i}^p &= C_{\Delta} \mathbf{i}^{q'} \\
 \mathbf{i}^q &= \mathbf{i}^{q'} \\
 \mathbf{i}^r &= C_{c\Delta} \mathbf{i}^{r'} \\
 \mathbf{i}^s &= \mathbf{i}^{f_2'} + \mathbf{i}^{v'} + \mathbf{i}^{h'} + \mathbf{i}^{f_1'} + C_{u1} \mathbf{i}^{m'} \\
 \mathbf{i}^t &= \mathbf{i}^{f_2'} + \mathbf{i}^{v'} + \mathbf{i}^{h'} + \mathbf{i}^{f_1'} + C_{u1} \mathbf{i}^{m'} \\
 \mathbf{i}^{f_2} &= \mathbf{i}^{f_2'} \\
 \mathbf{i}^u &= \mathbf{i}^{v'} + \mathbf{i}^{h'} + \mathbf{i}^{f_1'} + C_{u1} \mathbf{i}^{m'} \\
 \mathbf{i}^v &= \mathbf{i}^{v'} \\
 \mathbf{i}^w &= C_{c\Delta} \mathbf{i}^{w'} \\
 \mathbf{i}^k &= \mathbf{i}^{h'} \\
 \mathbf{i}^h &= \mathbf{i}^{h'} \\
 \mathbf{i}^{f_1} &= \mathbf{i}^{f_1'} \\
 \mathbf{i}^m &= C_{u1} \mathbf{i}^{m'}
 \end{aligned}$$

| | q' | r' | f_2' | v' | w' | h' | f_1' | m' |
|-----------|--------------|---------------|--------|------|---------------|------|--------|----------|
| p | C_{Δ} | | | | | | | |
| q | 1 | | | | | | | |
| r | | $C_{c\Delta}$ | | | | | | |
| s | | | 1 | 1 | | 1 | 1 | C_{u1} |
| t | | | 1 | 1 | | 1 | 1 | C_{u1} |
| f_2 | | | 1 | | | | | |
| $C_1 = u$ | | | | | | 1 | 1 | C_{u1} |
| v | | | | 1 | | | | |
| w | | | | | $C_{c\Delta}$ | | | |
| k | | | | | | 1 | | |
| h | | | | | | 1 | | |
| f_1 | | | | | | | 1 | |
| m | | | | | | | | C_{u1} |

(20.50)

Коэффициенты при *новых* токах образуют C_1 .

IV. Уравнения связи двух трансформаторов для исключения намагничивающих токов, записанные через *старые* токи, имеют вид

$$\mathbf{n}_q \mathbf{i}^q + \mathbf{n}_r \mathbf{i}^r + \mathbf{n}_s \mathbf{i}^s = 0, \quad (20.51)$$

$$\mathbf{n}_u \mathbf{i}^u + \mathbf{n}_v \mathbf{i}^v + \mathbf{n}_w \mathbf{i}^w = 0.$$

Заменяя старые токи новыми, получаем

$$\mathbf{n}_q \mathbf{i}^{q'} + \mathbf{n}_r C_{c\Delta} \mathbf{i}^{r'} + \mathbf{n}_s (\mathbf{i}^{f_2'} + \mathbf{i}^{v'} + \mathbf{i}^{h'} + \mathbf{i}^{f_1'} + C_u \mathbf{i}^{m'}) = 0, \quad (20.52)$$

$$\mathbf{n}_u (\mathbf{i}^{h'} + \mathbf{i}^{f_1'} + C_u \mathbf{i}^{m'}) + \mathbf{n}_v \mathbf{i}^{v'} + \mathbf{n}_w C_{c\Delta} \mathbf{i}^{w'} = 0.$$

Исключив, скажем, $\mathbf{i}^{q'}$ из первого уравнения, а $\mathbf{i}^{h'}$ из второго, имеем

$$\mathbf{i}^{q'} = -\mathbf{n}_q^{-1} [\mathbf{n}_r C_{c\Delta} \mathbf{i}^{r'} + \mathbf{n}_s (\mathbf{i}^{f_2'} + \mathbf{i}^{v'} + \mathbf{i}^{h'} + \mathbf{i}^{f_1'} + C_u \mathbf{i}^{m'})],$$

$$\mathbf{i}^{h'} = -\mathbf{n}_u^{-1} (\mathbf{n}_v \mathbf{i}^{v'} + \mathbf{n}_w C_{c\Delta} \mathbf{i}^{w'}) - \mathbf{i}^{f_1'} - C_u \mathbf{i}^{m'}.$$

Подставив $\mathbf{i}^{h'}$ в первое уравнение, получим

$$\mathbf{i}^{q'} = -\mathbf{n}_q^{-1} \mathbf{n}_r C_{c\Delta} \mathbf{i}^{r'} - \mathbf{i}_q^{-1} \mathbf{n}_s [\mathbf{i}^{f_2'} + (\mathbf{I} - \mathbf{n}_u^{-1} \mathbf{n}_v) \mathbf{i}^{v'} - \mathbf{n}_u^{-1} \mathbf{n}_w C_{c\Delta} \mathbf{i}^{w'}].$$

Определим

$$\mathbf{n}_1 = -\mathbf{n}_q^{-1} \mathbf{n}_r, \quad \mathbf{n}_2 = -\mathbf{n}_q^{-1} \mathbf{n}_s, \quad \mathbf{n}_3 = -(\mathbf{n}_q^{-1} \mathbf{n}_s - \mathbf{n}_q^{-1} \mathbf{n}_s \mathbf{n}_u^{-1} \mathbf{n}_v),$$

$$\mathbf{n}_4 = \mathbf{n}_q^{-1} \mathbf{n}_s \mathbf{n}_u^{-1} \mathbf{n}_w, \quad \mathbf{n}_6 = -\mathbf{n}_u^{-1} \mathbf{n}_w, \quad \mathbf{n}_7 = -\mathbf{n}_u^{-1} \mathbf{n}_w$$

и подставим в выражения для $\mathbf{i}^{q'}$ и $\mathbf{i}^{h'}$

$$\mathbf{i}^{q'} = \mathbf{n}_1 C_{c\Delta} \mathbf{i}^{r'} + \mathbf{n}_2 \mathbf{i}^{f_2'} + \mathbf{n}_3 \mathbf{i}^{v'} + \mathbf{n}_4 C_{c\Delta} \mathbf{i}^{w'},$$

$$\mathbf{i}^{h'} = \mathbf{n}_6 \mathbf{i}^{v'} + \mathbf{n}_7 C_{c\Delta} \mathbf{i}^{w'} - \mathbf{i}^{f_1'} - C_u \mathbf{i}^{m'}.$$

Оставив другие токи без изменений, получим два уравнения связей в виде преобразования $\mathbf{i}' = C_2 \mathbf{i}''$, где

| | r'' | f ₂ ' | v'' | w'' | f ₁ ' | m'' |
|------------------|--------------------------------|------------------|----------------|--------------------------------|------------------|-----------------|
| q' | n ₁ C _{cΔ} | n ₂ | n ₃ | n ₄ C _{cΔ} | | |
| r' | I | | | | | |
| f ₂ ' | | I | | | | |
| v' | | | I | | | |
| w' | | | | I | | |
| h' | | | n ₆ | n ₇ C _{cΔ} | -I | -C _u |
| f ₁ ' | | | | | I | |
| m' | | | | | | I |

(20.53)

V. Результирующий тензор преобразования равен C₁C₂:

| | r'' | f ₂ ' | v'' | w'' | f ₁ ' | m'' |
|----------------|---|-------------------------------|-------------------------------|---|------------------|-----------------|
| p | C _Δ n ₁ C _{cΔ} | C _Δ n ₂ | C _Δ n ₃ | C _Δ n ₄ C _{cΔ} | | |
| q | n ₁ C _{cΔ} | n ₂ | n ₃ | n ₄ C _{cΔ} | | |
| r | C _{cΔ} | | | | | |
| s | | I | I + n ₆ | n ₇ C _{cΔ} | | |
| t | | I | I + n ₆ | n ₇ C _{cΔ} | | |
| f ₂ | | I | | | | |
| C = u | | | n ₆ | n ₇ C _{cΔ} | | |
| v | | | I | | | |
| w | | | | C _{cΔ} | | |
| k | | | n ₆ | n ₇ C _{cΔ} | -I | -C _u |
| h | | | n ₆ | n ₇ C _{cΔ} | -I | -C _u |
| f ₁ | | | | | I | |
| m | | | | | | C _u |

(20.54)

VI. Тензор импеданса z' сети по соотношению $C_t^* z C$, где z дается уравнением (20.48), равен

$$z' = \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} r'' & f_2'' & v'' & w'' & f_1'' & m'' \end{array} \\ \begin{array}{c} r'' \\ f_2'' \\ v'' \\ w'' \\ f_1'' \\ m'' \end{array} \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|} \hline z_{rr} & z_{rf_2} & z_{rv} & z_{rw} & z_{rf_1} & z_{rm} \\ \hline z_{rf_2} & z_{f_2 f_2} & z_{f_2 v} & z_{f_2 w} & z_{f_2 f_1} & z_{f_2 m} \\ \hline z_{rv} & z_{f_2 v} & z_{vv} & z_{vw} & z_{vf_1} & z_{vm} \\ \hline z_{rw} & z_{f_2 w} & z_{vw} & z_{ww} & z_{wf_1} & z_{wm} \\ \hline z_{rf_1} & z_{f_2 f_1} & z_{vf_1} & z_{wf_1} & z_{f_1 f_1} & z_{f_1 m} \\ \hline z_{rm} & z_{f_2 m} & z_{vm} & z_{wm} & z_{f_1 m} & z_{mm} \\ \hline \end{array} \end{array} = \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} f_1'' & f_2'' & r'' & v'' & w'' & m'' \end{array} \\ \begin{array}{c} f_1'' \\ f_2'' \\ r'' \\ v'' \\ w'' \\ m'' \end{array} \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|} \hline z_{f_1 f_1} & z_{f_1 f_2} & z_{f_1 r} & z_{f_1 v} & z_{f_1 w} & z_{f_1 m} \\ \hline z_{f_2 f_1} & z_{f_2 f_2} & z_{f_2 r} & z_{f_2 v} & z_{f_2 w} & z_{f_2 m} \\ \hline z_{f_1 r} & z_{f_2 r} & z_{rr} & z_{rv} & z_{rw} & z_{rm} \\ \hline z_{f_1 v} & z_{f_2 v} & z_{rv} & z_{vv} & z_{vw} & z_{vm} \\ \hline z_{f_1 w} & z_{f_2 w} & z_{rw} & z_{vw} & z_{ww} & z_{wm} \\ \hline z_{f_1 m} & z_{f_2 m} & z_{rm} & z_{vm} & z_{wm} & z_{mm} \\ \hline \end{array} \end{array}, \quad (20.55)$$

а вектор приложенного напряжения по соотношению $C_t^* e$ равен

$$e' = \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} r'' & f_2'' & v'' & w'' & f_1'' & m'' \end{array} \\ \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|} \hline C_{c\Delta t}^* n_{1t}^* C_{\Delta t}^* e_p & n_{2t}^* C_{\Delta t}^* e_p + e_{f_2} & n_{3t}^* C_{\Delta t}^* e_p + n_{6t}^* e_h & C_{c\Delta t}^* n_{4t}^* C_{\Delta t}^* e_p + C_{c\Delta t}^* n_{7t}^* e_h & + e_{f_1} - e_h & - C_{ut}^* e_h \\ \hline \end{array} \end{array}, \quad (20.56)$$

$$e' = \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} r'' & f_2'' & v'' & w'' & f_1'' & m'' \end{array} \\ \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|} \hline e_r & e_{f_2} & e_v & e_w & e_{f_1} & e_m \\ \hline \end{array} \end{array} = \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} f_1'' & f_2'' & r'' & v'' & w'' & m'' \end{array} \\ \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|} \hline e_{f_1} & e_{f_2} & e_r & e_v & e_w & e_m \\ \hline \end{array} \end{array} \quad (20.57)$$

VII. Из z' и e' по формулам редукции (см. гл. 10) можно исключить все строки и столбцы, кроме f_1'' и f_2'' . Сначала, как было показано, нужно изменить порядок осей так, чтобы оси

f_1'' и f_2'' были первыми двумя осями. В этом случае z' и e' можно записать как *дважды компаунд-тензоры*

$$z' = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} d & g \\ \hline z_{dd} & z_{dg} \\ \hline z_{dg} & z_{gg} \end{array} \\ \begin{array}{c} d \\ g \end{array} \end{array}, \quad (20.58) \quad e' = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} d & g \\ \hline e_d & e_g \end{array} \\ \begin{array}{c} d \\ g \end{array} \end{array}. \quad (20.59)$$

Исключив вторую строку и столбец по формулам редукции, получим

$$z'' = z_{dd} - z_{dg} z_{gg}^{-1} z_{dg}, \quad (20.60)$$

$$e'' = e_d - z_{dg} z_{gg}^{-1} e_g, \quad (20.61)$$

где z'' имеет полные шесть строк и столбцов, представляющих собственные и взаимные импедансы трехфазных линий с двумя замыканиями, а e'' имеет *шесть компонент, представляющих напряжения открытой цепи, возникающие на двух замыканиях*, т. е. эквивалентные приложенные напряжения. Следовательно,

$$z'' = z_n = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} f_1'' & f_2'' \\ \hline z_{11} & z_{12} \\ \hline z_{12} & z_{22} \end{array} \\ \begin{array}{c} f_1'' \\ f_2'' \end{array} \end{array}, \quad e'' = e_n = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} f_1'' & f_2'' \\ \hline e_1 & e_2 \end{array} \\ \begin{array}{c} f_1'' \\ f_2'' \end{array} \end{array}. \quad (20.62)$$

10. ОДНОВРЕМЕННЫЕ ЗАМЫКАНИЯ В СБАЛАНСИРОВАННОЙ СЕТИ

I. В тех случаях когда z_n и e_n сети с замыканиями рассчитаны отдельно, эту сеть можно представить двойной компаунд-катушкой z_n , а два (или больше) замыкания — соединенной с ней последовательно дважды компаунд-катушкой (рис. 20.6). Импеданс

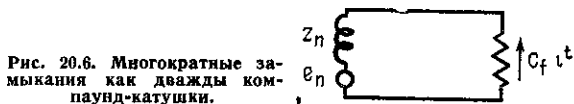


Рис. 20.6. Многократные замыкания как дважды компаунд-катушки.

данс дважды компаунд-катушек — тензор, в котором каждая компонента сама является тензором.

II. Тензор импеданса z' сети и замыканий можно найти из рис. 20.6 обычным способом. Тензор импеданса примитивной сети равен

$$z = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} n & f \\ \hline z_n & \\ \hline & z_f \end{array} \\ \begin{array}{c} n \\ f \end{array} \end{array}, \quad (20.63) \quad e = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} n & f \\ \hline e_n & \end{array} \\ \begin{array}{c} n \\ f \end{array} \end{array}. \quad (20.64)$$

Тензор преобразования C сети и замыканий согласно рис. 20.6 равен

$$\begin{aligned} i^n &= C_f i^{f'} \\ i^{f'} &= C_f i^n \end{aligned} \quad C = \begin{array}{c} f' \\ \hline n \\ \hline f \end{array} \begin{array}{c} C_f \\ \hline C_f \end{array} \quad (20.65)$$

Тензор импеданса результирующей системы по соотношению $C^{t*} z C$ можно записать как

$$z' = C_{f't}^* (z_n + z_f) C_f, \quad (20.66)$$

а вектор приложенного напряжения по $C_t^* e$

$$e' = C_{f't}^* e_n, \quad (20.67)$$

где каждый тензор является компаунд-тензором, выраженным в фазных или в последовательных осях.

Эти два уравнения пригодны для расчета любого количества замыканий.

III. Для двух замыканий эти уравнения принимают вид

$$\begin{aligned} z_n &= \begin{array}{|c|c|} \hline z_{11} & z_{12} \\ \hline z_{12} & z_{22} \\ \hline \end{array} & z_f &= \begin{array}{|c|c|} \hline z_{f_1} & \\ \hline & z_{f_2} \\ \hline \end{array} \\ C_f &= \begin{array}{|c|c|} \hline C_{f_1} & \\ \hline & C_{f_2} \\ \hline \end{array} & e_n &= \begin{array}{|c|c|} \hline e_1 & e_2 \\ \hline \end{array} \end{aligned} \quad (20.68)$$

Выполним операции, указанные в уравнениях (20.66) и (20.67):

$$z' = \begin{array}{c} f_1 \qquad f_2 \\ \hline \begin{array}{|c|c|} \hline C_{f_1 t}^* (z_{11} + z_{f_1}) C_{f_1} & C_{f_1 t}^* z_{12} C_{f_2} \\ \hline C_{f_2 t}^* z_{12} C_{f_1} & C_{f_2 t}^* (z_{22} + z_{f_2}) C_{f_2} \\ \hline \end{array} \\ \hline f_2 \end{array}, \quad (20.69)$$

$$e' = \begin{array}{c} f_1 \qquad f_2 \\ \hline \begin{array}{|c|c|} \hline C_{f_1 t}^* e_1 & C_{f_2 t}^* e_2 \\ \hline \end{array} \\ \hline \end{array} \quad (20.70)$$

Следует заметить, что z' — несимметричный тензор.

11. ПРИМЕР ОДИНОЧНОГО ЗАМЫКАНИЯ В СБАЛАНСИРОВАННОЙ СЕТИ

Пусть даны тензор импеданса z_n , а также e_n сбалансированной сети относительно замыкания

$$z_n = \begin{array}{c|cc} & 0 & 1 & 2 \\ \hline 0 & Z_0 & & \\ \hline 1 & & Z_1 & \\ \hline 2 & & & Z_2 \end{array}, \quad e_n = \begin{array}{c|cc} & 0 & 1 & 2 \\ \hline & & e_1 & \end{array} \quad (20.71)$$

Предположим, что замыканием является соединение двойной линии с землей (рис. 20.7).

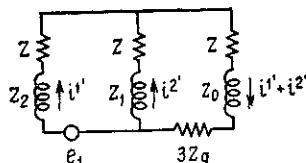
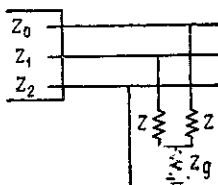


Рис. 20.7. Замыкание двойной линии на заземление. Рис. 20.8. Эквивалентная цепь сети рис. 20.7.

По табл. 20.1 и 20.2 определяем тензор импеданса и катушечный тензор

$$z = \frac{1}{3} \times \begin{array}{c|cc} & 0 & 1 & 2 \\ \hline 0 & 2Z + 4Z_g & -Z - 2Z_g & -Z - 2Z_g \\ \hline 1 & -Z - 2Z_g & 2Z + Z_g & -Z + Z_g \\ \hline 2 & -Z - 2Z_g & -Z + Z_g & 2Z + 2Z_g \end{array}, \quad C_f = \begin{array}{c|cc} & 1' & 2' \\ \hline 0 & -1 & -1 \\ \hline 1 & 1 & \\ \hline 2 & & 1 \end{array} \quad (20.72)$$

Из уравнений (20.66) и (20.67) получаем z' и e' целой системы

$$z' = \begin{array}{c|cc} & 1' & 2' \\ \hline 1' & Z_0 + Z_1 + 2Z + 3Z_g & Z_0 + Z + 3Z_g \\ \hline 2' & Z_0 + Z + 3Z_g & Z_0 + Z_2 + 2Z + 3Z_g \end{array}, \quad e' = \begin{array}{c|cc} & 1' & 2' \\ \hline & e_1 & \end{array} \quad (20.73)$$

Уравнения $e' = z'i'$ можно представить эквивалентной цепью (рис. 20.8), имеющей два контура.

12. ПРИМЕР ДВОЙНОГО ЗАМЫКАНИЯ В СБАЛАНСИРОВАННОЙ СЕТИ

Допустим, что тензор импеданса z_n , а также e_n сбалансированной сети относительно двух замыканий равны

$$z_n = \begin{matrix} & \begin{matrix} f_1 & f_2 \end{matrix} \\ \begin{matrix} f_1 \\ f_2 \end{matrix} & \begin{bmatrix} z_{11} & z_{12} \\ z_{12} & z_{22} \end{bmatrix} \end{matrix} = \begin{matrix} & 0_1 & 1_1 & 2_1 & 0_2 & 1_2 & 2_2 \\ \begin{matrix} 0_1 \\ 1_1 \\ 2_1 \\ 0_2 \\ 1_2 \\ 2_2 \end{matrix} & \begin{bmatrix} Z_0 + X_0 & & & X_0 & & \\ & Z_1 + X_1 & & & X_1 & \\ & & Z_2 + X_2 & & & X_2 \\ X_0 & & & Z'_0 + X_0 & & \\ & X_1 & & & Z'_1 + X_1 & \\ & & X_2 & & & Z'_2 + X_2 \end{bmatrix} \end{matrix}, \quad (20.74)$$

$$e_n = \begin{matrix} & \begin{matrix} f_1 & f_2 \end{matrix} \\ \begin{matrix} e_1 \\ e_2 \end{matrix} & \begin{bmatrix} e_1 & e_2 \end{bmatrix} \end{matrix} = \begin{matrix} & 0_1 & 1_1 & 2_1 & 0_2 & 1_2 & 2_2 \\ \begin{matrix} e_1 \\ e_2 \end{matrix} & \begin{bmatrix} & & & & & \\ & e_1 & & & & \\ & & & & & \\ & & & & e_2 & \\ & & & & & \\ & & & & & \end{bmatrix} \end{matrix} \quad (20.75)$$

Предположим, что одно из замыканий — замыкание двух линий, а второе — замыкание линии на землю (рис. 20.9).

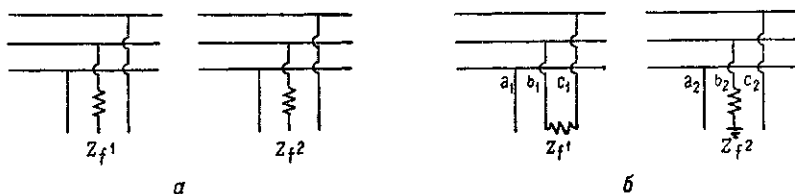


Рис. 20.9. Пример двойного замыкания:
а — до замыкания; б — после замыкания.

Из табл. 20.1 и 20.2 тензор импеданса и катушечный тензор замыканий (непосредственно перед замыканием) равны

$$z = \begin{matrix} & \begin{matrix} f_1 & f_2 \end{matrix} \\ \begin{matrix} f_1 \\ f_2 \end{matrix} & \begin{bmatrix} z_{f_1} & \\ & z_{f_2} \end{bmatrix} \end{matrix} = \begin{matrix} & 0_1 & 1_1 & 2_1 & 0_2 & 1_2 & 2_2 \\ \begin{matrix} 0_1 \\ 1_1 \\ 2_1 \\ 0_2 \\ 1_2 \\ 2_2 \end{matrix} & \begin{bmatrix} Z_{f_1}/3 & a^2 Z_{f_1}/3 & a Z_{f_1}/3 & & & \\ a Z_{f_1}/3 & Z_{f_1}/3 & a^2 Z_{f_1}/3 & & & \\ a^2 Z_{f_1}/3 & a Z_{f_1}/3 & Z_{f_1}/3 & & & \\ & & & Z_{f_2}/3 & a^2 Z_{f_2}/3 & a Z_{f_2}/3 \\ & & & a Z_{f_2}/3 & Z_{f_2}/3 & a^2 Z_{f_2}/3 \\ & & & a^2 Z_{f_2}/3 & a Z_{f_2}/3 & Z_{f_2}/3 \end{bmatrix} \end{matrix} \quad (20.76)$$

Импедансы замыканий соединены с сетью через свои катушечные тензоры

$$C_f = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1_{1'} & 1_{2'} \end{matrix} \\ \begin{matrix} f_1 \\ f_2 \end{matrix} & \begin{bmatrix} C_{f_1} & \\ & C_{f_2} \end{bmatrix} \end{matrix} = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1_{1'} & 1_{2'} \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0_1 \\ 1_1 \\ 2_1 \\ 0_2 \\ 1_2 \\ 2_2 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & \\ 1 & \\ -1 & \\ & a^2 \\ & 1 \\ & a \end{bmatrix} \end{matrix} \quad (20.77)$$

Из уравнений (20.66) и (20.67) (или из уравнений (20.69) и (20.70)) находим z' и e' всей системы

$$z' = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1_{1'} & 1_{2'} \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1_{1'} \\ 1_{2'} \end{matrix} & \begin{bmatrix} Z_1 + Z_2 + X_1 + X_1 + Z_{f_1} & X_1 - aX_2 \\ X_1 - a^2X_2 & Z'_0 + Z'_1 + Z'_2 + X_0 + X_1 + X_2 + Z_{f_2} \end{bmatrix} \end{matrix}, \quad (20.78)$$

$$e' = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1_{1'} & 1_{2'} \end{matrix} \\ & \begin{bmatrix} e_1 & e_2 \end{bmatrix} \end{matrix} \quad (20.79)$$

13. СМЕШАННЫЕ КООРДИНАТНЫЕ ОСИ

I. Как было показано, при построении компаунд-сети для трехфазных систем безразлично, относительно каких осей (фазных a, b, c или последовательных $0, 1, 2$) представлены отдельные устройства. Это различие координатных осей компонент z существенно для катушечных и узловых тензоров, причем каждому типу z соответствует отдельная система осей.

II. Однако нет необходимости представлять все устройства одной системы в осях одинакового типа. *Компаунд-сеть и ее анализ без всяких изменений подходят к системам, в которых различные трехфазные устройства представлены в осях разных типов. Некоторые оси могут быть фазными, другие — последовательными. Некоторые компоненты z могут иметь даже два типа индексов: первый — индекс фазной оси, а второй — последовательной оси или наоборот.*

Это различие отдельных координатных осей компонент z следует вновь принимать во внимание при получении различных

совокупностей отдельных тензоров преобразования (катушечных или узловых тензоров), имеющих два типа индексов, когда одна система имеет фазные оси, а другая — последовательные, т. е. в дополнение к двум системам катушечных и узловых тензоров, приведенных в табл. 19.2 и 20.2, нужно получить дополнительные системы тензоров. В первой системе вертикальными индексами являются 0, 1, 2, а горизонтальными — а, б, с; во второй системе позиции индексов меняются местами.

Подобную серию таблиц можно получить для различных устройств и замыканий.

III. Возможно также введение для некоторых или для всех трехфазных устройств координатных систем других типов, отличных от а, б, с и 0, 1, 2. Однако отдельные тензоры импеданса и тензоры преобразования должны быть выражены в новых отдельных координатных осях.

Кроме того, возможна замена некоторых или всех трехфазных устройств двух- или четырехфазными и другими устройствами без изменения компаунд-сети.

IV. Следует подчеркнуть, что поскольку каждую компаунд-катушку компаунд-сети можно представить отдельно в координатных системах разных типов, то каждая компонента z_1 , z_2 компаунд-импеданс-тензора z примитивной оси является тензором соответствующего порядка, а не 2-матрицей.

МУЛЬТИТЕНЗОРЫ

1. ФОРМИРОВАНИЕ ЕЩЕ БОЛЕЕ СЛОЖНЫХ СУЩНОСТЕЙ

Когда организация совокупности атомов образует новую сущность — молекулу, *то результатом организации является возникновение у молекулы новых свойств*, которыми не обладали составляющие молекулу атомы. Процесс организации, однако, продолжается по *нескольким направлениям*, формируя все более и более сложные сущности. Группа молекул может быть организована в коллоидную частицу, фильтрующийся вирус, кристалл, и каждая из этих сущностей имеет свойства, которых не имели образующие их молекулы. Коллоидные частицы могут быть организованы в клетки, клетки — в органы, органы — в растения или организм животного.

Организация совокупности математических выражений в «геометрические объекты», в «тензоры» различной валентности является только первым шагом в организованном формировании еще более сложных математических сущностей. Второй шаг сделан в гл. 9, где совокупность тензоров *одной и той же валентности* организована в «компаунд-тензор». В этой главе совокупность тензоров, *имеющих различную валентность*, организуется в сущность с еще более сложной структурой, которая называется «мультитензором».

«Компаунд-тензоры» и «мультитензоры» являются только отдельными звеньями в различных цепях математических сущностей возрастающей сложности. Эти математические сущности представляют более сложные реальные физические сущности, обнаруживаемые в природе при помощи измерений, выполняемых относительно координатных систем различного типа.

2. МУЛЬТИСИСТЕМЫ КООРДИНАТ

I. В каждой проблеме, рассмотренной ранее, возникало только одно множество систем координат, причем каждая система координат имела n осей. Эти n осей были непосредственно связаны с катушками или являлись такими n гипотетическими осями,

что для $A_{\alpha\beta\gamma}$, например, каждый индекс, α , β или γ относился ко всем n осям. При введении компаунд-тензоров n осей были расчленены на несколько групп так, что для $A_{i\beta p}$, например, индекс i относился к одной группе осей, p — к другой и β — ко всем осям.

II. В электротехнике возникает огромное количество задач, в которых используются различные множества систем координат, причем система координат, принадлежащая одному множеству, может содержать n осей, в то время как другая система координат, принадлежащая ко второму множеству, содержит k осей, третья система может содержать h осей и т. д. Каждое множество систем координат имеет свой собственный тензор преобразования, так что для $A_{\alpha\beta pq}$, например, тензор преобразования множества осей α , β есть C_{α}^{α} , в то время как тензор преобразования множества осей p , q есть $C_{p'}^p$. Два тензора C_{α}^{α} и $C_{p'}^p$ представляют различные группы матриц преобразований.

В частном случае с одной из систем координат можно не связывать ни одного тензора преобразования, так что соответствующие индексы являются закрытыми индексами, например $A_{\alpha\beta(p)(q)}$.

До сих пор предполагалось, что с каждой ветвью каждой сети связана только одна компонента e_{α} или i^{α} , т. е. предполагалось, что в каждой ветви существует только одно известное напряжение или один известный ток. Однако в каждой ветви может существовать несколько наборов токов или напряжений, каждый из которых влияет на другие несколькими способами.

Например, в каждой ветви могут существовать токи и напряжения с различными частотами $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_k$, так что в каждой ветви ток представляется как i^p , где p принимает последовательно значения $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_k$. Если существует n независимых ветвей, вектор тока представляется как $i^{\alpha p}$, где α представляет ветви, в которых течет ток, а p представляет различные частоты. Вектор $i^{\alpha p}$ имеет $n \times k$ составляющих.

Если в сети имеется конверсия частот, представленная тензором преобразования $C_{p'}^p$, то вектор $i^{\alpha p}$ требует два различных типа тензоров преобразования: C_{α}^{α} взаимосвязывает катушки, оставляя частоты неизменными; $C_{p'}^p$ изменяет частоты, оставляя взаимосвязи катушек неизменными, т. е. $i^{\alpha p}$ является контравариантным вектором валентности один в p -координатной системе и в α -координатной системе. Несмотря на свои два индекса, $i^{\alpha p}$ не является тензором валентности два.

III. В технике очень много мультисистем координат. Например, вращающиеся электрические машины с постоянными и переменными приложенными напряжениями или с малыми колебаниями, накладывающимися на устойчивое вращение; передающие линии, вдоль которых распространяется несколько волн с различными скоростями и т. д.

3. ПРЕДСТАВЛЕНИЕ МУЛЬТИТЕНЗОРОВ

I. Тензор, содержащий два или более множеств индексов (каждое множество индексов относится к различным множествам систем координат), будем называть «мультитензором».

Основная буква может иметь различное число индексов в различных координатах. Например, $z_{\alpha\beta}^{pq\gamma}$ является ковариантным тензором валентности два в α -координатах, но он является контравариантным тензором валентности три в p -координатах. Матрицы преобразования $C_{\alpha'}^{\alpha}$ и C_p^p принадлежат к различным группам.

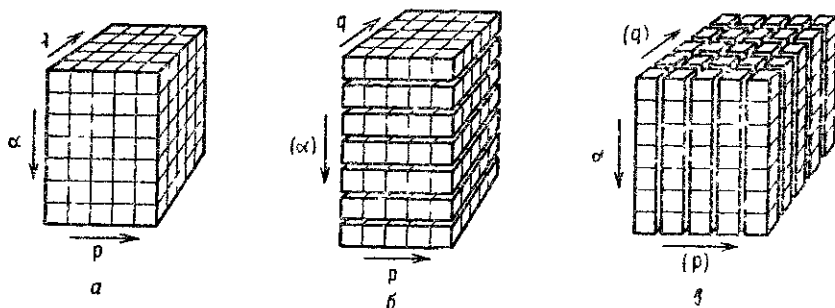


Рис. 21.1. Несколько представлений мультитензора:

а — мультитензор $A^{\alpha pq}$; б — набор k 2-тензоров $A^{(\alpha)pq}$; в — набор k^2 векторов $A^{\alpha(p)(q)}$.

Кроме того, основная буква может быть тензором в одних координатах, геометрическим объектом в других и n -матрицей в третьем множестве координат. Например, $A_{\alpha(p)(q)}$ — вектор в α -координатах и в то же время 2-матрица в p -координатах. Это значит, что $A_{\alpha(p)(q)}$ представляет множество из k^2 векторов A_{α} . Альфакоординатная система может быть преобразована к α' при помощи $C_{\alpha'}^{\alpha}$, но закрытые индексы не преобразуются.

II. Мультитензоры представляют так же, как и обычные тензоры (см. гл. 1, § 7), отличие их в том, что вдоль различных направлений число фиксированных индексов различно. Например, если для $A^{\alpha pq}$ существует семь осей в α -координатах и пять осей в p -координатах, то число компонент $A^{\alpha pq}$ равно $7 \times 5 \times 5 = 175$ (рис. 21.1, а).

Когда α -координаты временно не меняются, т. е. когда α — закрытый индекс ($A^{(\alpha)pq}$), тогда тензор является совокупностью семи 2-тензоров A^{pq} , расположенных в столбец (α) (рис. 21.1, б).

Когда индексы p, q рассматриваются как закрытые индексы ($A^{\alpha(p)(q)}$), тогда тензор — множество из $5^2 = 25$ векторов (рис. 21.1, в).

Точно так же мультитензор $A^{\alpha\beta\gamma\rho\eta}$ можно представить временно как множество $3^3=27$ 2-тензоров $A^{(\alpha)(\beta)(\gamma)\rho\eta}$ (рис.21.2, а) или как совокупность $4^2=16$ 3-тензоров $A^{\alpha\beta\gamma(\rho)(\eta)}$ (рис. 21.2, б).

III. Мультитензор также можно расчленить на составляющие тензоры, так что мультитензор становится компаунд-мультитензором. Например, если в $A^{\alpha\beta\gamma(\rho)(\eta)}$ индексы α, β, γ представляют

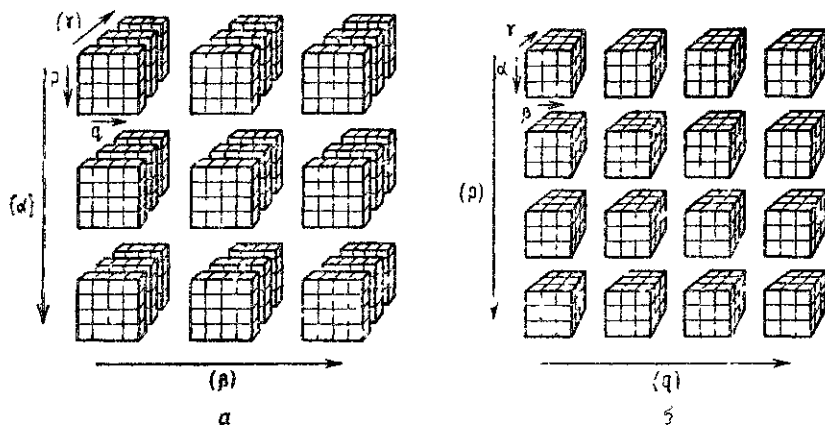


Рис. 21.2 Представление мультитензора

а — совокупность 3^3 2-тензоров $A^{(\alpha)(\beta)(\gamma)\rho\eta}$ б — совокупность 4^2 3-тензоров $A^{\alpha\beta\gamma(\rho)(\eta)}$

как контурные оси, так и оси узловых пар, то, скажем, индекс α можно расчленить на контурные оси m и оси узловых пар u , образовав $A^{m\beta\gamma(\rho)(\eta)}$ и $A^{u\beta\gamma(\rho)(\eta)}$ (рис. 21.3). Или m может представлять активные, а u — неактивные узловые пары и т. д.

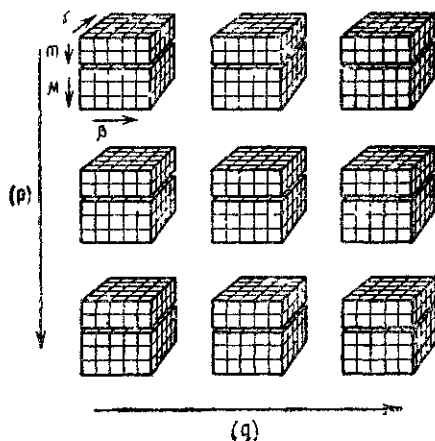


Рис. 21.3. Компаунд-мультитензор $A^{\alpha\beta\gamma(\rho)(\eta)}$.

4. ЗАМЕНА КОМПЛЕКСНЫХ ЧИСЕЛ

Простой пример мультитензоров можно найти в проблемах устойчивости, где компоненты некоторых тензоров — комплексные числа. Расчет показывает, что *всякое комплексное число $r + jx$, представляющее импеданс, можно заменить матрицей с двумя строками и столбцами, содержащей только действительные числа,*

$$r + jx = \begin{array}{|c|c|} \hline r & -x \\ \hline x & r \\ \hline \end{array}.$$

так, что, например, тензор импеданса $z_{\alpha\beta}$ контурной сети с n^2 комплексными компонентами можно заменить мультитензором $z_{\alpha\beta(p)(q)}$, имеющим вдвое большее количество строк и столбцов со всеми действительными компонентами:

$$z = \begin{array}{|c|c|} \hline a & b \\ \hline a + jb & jc \\ \hline -d & -e - jf \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline a_r & a_i & b_r & b_i \\ \hline a_r & -b_i & & -c_i \\ \hline a_i & b_r & c_i & \\ \hline b_r & -d_i & -e_i & f_i \\ \hline b_i & -d_i & -f_i & -e_i \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|} \hline (q) & (i) \\ \hline (r) & (i) \\ \hline a & b \\ \hline -d & -e - jf \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|c|} \hline a & b \\ \hline c & \\ \hline -d & -e - jf \\ \hline -f & -e \\ \hline \end{array} \quad (21.1)$$

где α и β представляют n осей цепи a и b , в то время как p и q — две оси времени r и i .

Теперь предположим, что вдоль каждой координатной системы (контурной или узловых пар) существуют две новые гипотетические оси времени (действительная и мнимая оси r и i), так что векторы напряжения и тока выражаются через их совпадающие и находящиеся в противофазе составляющие. Например, если вектор тока двухконтурной сети

$$i = \begin{array}{|c|c|} \hline a & b \\ \hline 2 + 3j & 4 - 5j \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline a_r & a_i & b_r & b_i \\ \hline 2 & 3 & 4 & -5 \\ \hline \end{array},$$

вектор напряжения e находят по z_i как

$$e = \frac{\begin{matrix} a \\ b \end{matrix} \begin{matrix} 2a - 3b + 5c + j(3a + 2b + 4c) \\ -2d - 4e - 5f + j(-3d + 5e - 4f) \end{matrix}}{\begin{matrix} a_r \\ a_i \\ b_r \\ b_i \end{matrix} \begin{matrix} 2a - 3b + 5c \\ 3a + 2b + 4c \\ -2d - 4e - 5f \\ -3d - 5e - 4f \end{matrix}}$$

5. СЕТИ МНОГОЭЛЕКТРОДНОЙ ЛАМПЫ

I. Простым примером сетей, в которых возникают мультитензоры, является сеть многоэлектродной лампы с *маленькими* приложенными напряжениями Δe или токами ΔI . *Из-за нелинейности ламп напряжение одной частоты ω_1 генерирует в каждой катушке токи с несколькими частотами $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$ и наоборот.* В результирующих мультитензорах один набор индексов m, n, k, \dots относится к катушкам, в которых протекают токи, в то время как другой набор индексов $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ относится к различным частотам.

Поскольку в этой главе не предполагается никаких частотных преобразований, индексы $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ являются закрытыми индексами.

Уравнения напряжения и тока для контурных и узловых сетей будут получены в форме рядов Тейлора, аналогичных степенным рядам (см. гл. 1, § 13 и 14). *Нелинейную сеть, так же как и линейную, можно представить как контурную, узловую или ортогональную сеть.*

Сначала получают нелинейные уравнения многоэлектродной лампы *без внешней линейной сети*, а затем рассматривают соединение лампы или нескольких ламп с линейными сетями.

II. Так как группа матриц преобразования $S_{\alpha'}^{\alpha}$, которая будет использоваться, не является функцией переменных, *все геометрические объекты, введенные в этой главе, являются тензорами.*

6. БОЛЕЕ ОБЩАЯ ФОРМУЛИРОВКА «ПОСТУЛАТА ВТОРОГО ОБОБЩЕНИЯ»

I. Чтобы физическая картина была ясной, нелинейные уравнения получим в четыре шага, предполагая, что существует: 1) один электрод, имеющий один ток; 2) один электрод, имеющий ток с несколькими частотами; 3) несколько электродов, имеющих различные частоты токов; 4) несколько систем электродов, каждая из которых имеет различные функции.

Шаг от 1 к 2 вводит набор закрытых индексов $(\alpha), (\beta), \dots$; шаг от 2 к 3 добавляет дополнительный набор открытых индек-

сов m, n, \dots (для контурных сетей) или u, v, \dots (для узловых сетей); шаг от 3 к 4 добавляет несколько множеств открытых индексов.

На протяжении всего этого «развертывания» подчеркивается, что при возрастании сложности физической системы число тензоров, образующих уравнение, и содержание, вложенное в них, не изменяются, только возрастает множество индексов. Каждое увеличенное множество сложности физической структуры прибавляет дополнительное множество индексов к каждой основной букве.

Таким образом, какие бы теории, законы, уравнения не устанавливались для обычных сетей, они все остаются справедливыми для мультисетей благодаря простой замене скалярных величин тензорами и простых тензоров соответствующими мультитензорами. Они одинаково справедливы и для компаунд-мультисетей при замене каждого мультитензора соответствующим компаунд-мультитензором.

Это утверждение можно рассматривать как более общую формулировку «постулата второго обобщения», в котором слово «тензор» может означать компаунд-тензоры, мультитензоры и компаунд-мультитензоры произвольной сложности.

II. Ряды Тейлора, соответствующие уравнениям физической системы, вводятся поэтапно: 1) функции действительных переменных, одной переменной и нескольких переменных; 2) функции комплексных переменных, одного множества переменных и нескольких множеств переменных. После этого в таком же порядке вводятся обратные ряды.

7. РЯДЫ ТЕЙЛОРА

Пусть дано уравнение $y=f(x)$ (рис. 21.4). Для данной величины переменной x , скажем x_0 , величина y известна и равна y_0 , но величина y не известна ни для какого другого значения x . Предположим также, что для данного значения x известна не только y , но и все ее производные.

Задача заключается в том, чтобы найти, если это возможно, значение y в другой точке x_1 , лежащей в окрестности x_0 , если величина y известна только в точке x_0 .

Ряды Тейлора дают значение y в точке x_1 через значения y в x_0 и на расстоянии $x_1 - x_0 = \Delta x$, которые известны, при выполнении различных условий, устанавливаемых в учебниках.

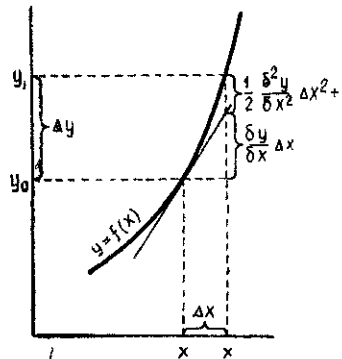


Рис. 21.4. Кривая уравнения $y=f(x)$.

Величина y в точке x_1 равна

$$y_0 + \Delta y = y_0 + \frac{\partial y}{\partial x} \Delta x + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} (\Delta x)^2 + \frac{1}{6} \frac{\partial^3 y}{\partial x^3} (\Delta x)^3 + \dots,$$

где все производные взяты в точке y_0 . Так как необходимо найти только величину Δy , а не сам характер изменения в y , уравнение принимает вид

$$\Delta y = \frac{\partial y}{\partial x} \Delta x + \frac{1}{2!} \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} (\Delta x)^2 + \frac{1}{3!} \frac{\partial^3 y}{\partial x^3} (\Delta x)^3 + \dots \quad (21.2)$$

Если наклон кривой в окрестности y_0 постоянен, кривизна и $\partial^2 y / \partial x^2$ равны нулю и остается $\Delta y = (\partial y / \partial x) \Delta x$.

8. РЯДЫ ТЕЙЛОРА В ИНВАРИАНТНОЙ ФОРМЕ

I. Пусть каждая из двух переменных есть функция двух других независимых переменных, т. е. пусть $y^a = f^a(x_a, x_b)$ и $y^b = f^b(x_a, x_b)$. (Позиции индексов меняются в различных проблемах в зависимости от того, что представляют переменные y и x .) Если каждая из независимых переменных изменяется на величину Δx_a и Δx_b , зависимые переменные изменяются следующим образом:

$$\begin{aligned} \Delta y^a = & \left[\frac{\partial y^a}{\partial x_a} \Delta x_a + \frac{\partial y^a}{\partial x_b} \Delta x_b \right] + \\ & + \frac{1}{2} \left[\frac{\partial^2 y^a}{\partial x_a \partial x_a} \Delta x_a \Delta x_a + \frac{\partial^2 y^a}{\partial x_a \partial x_b} \Delta x_a \Delta x_b + \frac{\partial^2 y^a}{\partial x_b \partial x_a} \Delta x_b \Delta x_a + \right. \\ & \left. + \frac{\partial^2 y^a}{\partial x_b \partial x_b} \Delta x_b \Delta x_b \right] + \frac{1}{6} \left[\frac{\partial^3 y^a}{\partial x_a \partial x_a \partial x_a} \Delta x_a \Delta x_a \Delta x_a + \dots \right] + \dots \end{aligned} \quad (21.3)$$

$$\begin{aligned} \Delta y^b = & \left[\frac{\partial y^b}{\partial x_a} \Delta x_a + \frac{\partial y^b}{\partial x_b} \Delta x_b \right] + \\ & + \frac{1}{2} \left[\frac{\partial^2 y^b}{\partial x_a \partial x_a} \Delta x_a \Delta x_a + \frac{\partial^2 y^b}{\partial x_a \partial x_b} \Delta x_a \Delta x_b + \frac{\partial^2 y^b}{\partial x_b \partial x_a} \Delta x_b \Delta x_a + \right. \\ & \left. + \frac{\partial^2 y^b}{\partial x_b \partial x_b} \Delta x_b \Delta x_b \right] + \frac{1}{6} \left[\frac{\partial^3 y^b}{\partial x_a \partial x_a \partial x_a} \Delta x_a \Delta x_a \Delta x_a + \dots \right] + \dots \end{aligned}$$

II. Если вместо двух функций двух переменных имеется n функций n переменных, то существует n таких уравнений, которые приведены выше, каждые скобки содержат n , n^2 или n^3 членов вместо $2, 2^2$ или 2^3 . В индексном обозначении n уравнений записывают одним инвариантным уравнением

$$\Delta y^m = \frac{\partial y^m}{\partial x_n} \Delta x_n + \frac{1}{2!} \frac{\partial^2 y^m}{\partial x_n \partial x_k} \Delta x_n \Delta x_k +$$

$$+ \frac{1}{3!} \frac{\partial^3 y^m}{\partial x_n \partial x_k \partial x_h} \Delta x_n \Delta x_k \Delta x_h + \dots, \quad (21.4)$$

где индексы m, n, k, \dots могут принимать значения a, b, c, \dots

Это уравнение аналогично своей скалярной форме — уравнению (21.2) за исключением того факта, что n -я степень Δx , т. е. $(\Delta x)^n$, заменяется на $\Delta x_a \Delta x_b \dots \Delta x_n$.

9. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ОБЪЕКТЫ БОЛЕЕ ВЫСОКОЙ ВАЛЕНТНОСТИ

I. В инвариантном уравнении (21.4) Δy^m есть контравариантный вектор, а Δx_n — ковариантный вектор; $\partial y^m / \partial x_n$ есть дважды контравариантный тензор (см. уравнение (15.16)) и представляется, например, посредством Y^{mn} .

Выражение $M^{mnk} = \left(\frac{1}{2}\right) \partial^2 y^m / \partial x_n \partial x_k$ есть тензор валентности три, в котором каждый член — частная производная компоненты в Y^{mn} . Оно представляется в каждой частной системе координат n^3 членами, расположенными в кубе (см. рис. 1.2). На бумаге для $n=4$, скажем, его можно представить четырьмя матрицами, каждая из которых содержит 4^2 компонент, в предположении, что в M^{mnk} переменный индекс m принимает фиксированные индексы a, b, c и d последовательно. Одна из четырех матриц (когда m принимает значение a) есть

| | k | a | b | c | d | |
|------------|-----|--|--|--|--|--------|
| n | a | $\frac{\partial^2 y^a}{\partial x_a \partial x_a}$ | $\frac{\partial^2 y^a}{\partial x_a \partial x_b}$ | $\frac{\partial^2 y^a}{\partial x_a \partial x_c}$ | $\frac{\partial^2 y^a}{\partial x_a \partial x_d}$ | |
| | b | $\frac{\partial^2 y^a}{\partial x_b \partial x_a}$ | $\frac{\partial^2 y^a}{\partial x_b \partial x_b}$ | $\frac{\partial^2 y^a}{\partial x_b \partial x_c}$ | $\frac{\partial^2 y^a}{\partial x_b \partial x_d}$ | |
| $2M^{anb}$ | c | $\frac{\partial^2 y^a}{\partial x_c \partial x_a}$ | $\frac{\partial^2 y^a}{\partial x_c \partial x_b}$ | $\frac{\partial^2 y^a}{\partial x_c \partial x_c}$ | $\frac{\partial^2 y^a}{\partial x_c \partial x_d}$ | |
| | d | $\frac{\partial^2 y^a}{\partial x_d \partial x_a}$ | $\frac{\partial^2 y^a}{\partial x_d \partial x_b}$ | $\frac{\partial^2 y^a}{\partial x_d \partial x_c}$ | $\frac{\partial^2 y^a}{\partial x_d \partial x_d}$ | (21.5) |

В матрице $2M^{bnk}$ в каждом числителе стоит y^b вместо y^a ; аналогично в остальных случаях появляются y^c и y^d соответственно. Вместо m , конечно, n или k могут иметь фиксированные индексы a, b, c, d , образуя матрицы, которые представляют различные части первоначального куба, или те же 4^3 компонент можно расположить двумя другими способами.

II. Выражение $D^{mnhk} = (1/6) \partial^3 y^m / \partial x_n \partial x_h \partial x_k$ есть тензор валентности четыре. Он имеет в каждой частной системе координат n^4 компонент, каждая из которых — частная производная

компоненты в M^{mnk} по x_k . На бумаге (рис. 1.7) эти компоненты можно представить n^2 матрицами, каждая с n^2 компонентами, последовательно заменяя два переменных индекса их фиксированными значениями. Для $n=4$ одна из 16 матриц (когда $m=b$ и $n=c$) есть

| | h | a | b | c | d | |
|---------------|-----|--|--|--|--|--------|
| k | a | $\partial^3 y^b$ | $\partial^3 y^b$ | $\partial^3 y^b$ | $\partial^3 y^b$ | (21.6) |
| | | $\partial x_c \partial x_a \partial x_a$ | $\partial x_c \partial x_a \partial x_b$ | $\partial x_c \partial x_a \partial x_c$ | $\partial x_c \partial x_a \partial x_d$ | |
| | b | $\partial^3 y^b$ | $\partial^3 y^b$ | $\partial^3 y^b$ | $\partial^3 y^b$ | |
| $6D^{bcnh} =$ | | $\partial x_c \partial x_b \partial x_a$ | $\partial x_c \partial x_b \partial x_b$ | $\partial x_c \partial x_b \partial x_c$ | $\partial x_c \partial x_b \partial x_d$ | |
| | c | $\partial^3 y^b$ | $\partial^3 y^b$ | $\partial^3 y^b$ | $\partial^3 y^b$ | |
| | | $\partial x_c \partial x_c \partial x_a$ | $\partial x_c \partial x_c \partial x_b$ | $\partial x_c \partial x_c \partial x_c$ | $\partial x_c \partial x_c \partial x_d$ | |
| | d | $\partial^3 y^b$ | $\partial^3 y^b$ | $\partial^3 y^b$ | $\partial^3 y^b$ | |
| | | $\partial x_c \partial x_d \partial x_a$ | $\partial x_c \partial x_d \partial x_b$ | $\partial x_c \partial x_d \partial x_c$ | $\partial x_c \partial x_d \partial x_d$ | |

III. В терминах этих тензоров ряды Тейлора можно записать:

$$\Delta x^m = Y^{mn} \Delta x_n + M^{mnk} \Delta x_n \Delta x_k + D^{mnkh} \Delta x_n \Delta x_k \Delta x_h + \dots \quad (21.7)$$

Заметим, что свободным индексом в каждом члене является m .

IV. Индексы Δy и Δx могут быть верхними или нижними в зависимости от проблемы. Соответственно позиция индексов других тензоров также меняется в различных проблемах, как будет показано ниже. Например, когда ряды представляют преобразования переменных (Δy^m представляют переменные в старой координатной системе, а Δx^m — в новой, тип преобразования, который часто возникает в тензорном анализе), как y , так и x имеют верхние индексы и уравнение (21.7) становится следующим:

$$\Delta x^m = Y^m_{\alpha} \Delta x^{\alpha} + M^m_{\alpha\beta} \Delta x^{\alpha} \Delta x^{\beta} + D^m_{\alpha\beta\gamma} \Delta x^{\alpha} \Delta x^{\beta} \Delta x^{\gamma} + \dots \quad (21.8)$$

10. ТЕНЗОР МОДУЛЯЦИИ

I. Если малые напряжения приложены к различным узловым парам многоэлектродной лампы в дополнение к постоянному напряжению батареи, малое изменение тока дается уравнением (21.7), где y заменяется на I и x на E , т. е.

$$\Delta I^u = Y^{uv} \Delta E_v + M^{uvw} \Delta E_v \Delta E_w + D^{uvwz} \Delta E_v \Delta E_w \Delta E_z + \dots \quad (21.9)$$

4-тензор D^{uvwz} вводит токи, причиной которых является кручение; следовательно, его можно назвать «тензором кручения».

Обычно бывает достаточно рассмотреть первую кривизну кривой $I-E$; следовательно, последним членом можно пренебречь и получить уравнение тока многоэлектродных ламп (рассматриваемых здесь как узловые сети)

$$\Delta I^u = Y^u \Delta E + \Delta E M \Delta E, \quad \Delta I^u = Y^{uv} \Delta E_v + M^{uvw} \Delta E_v \Delta E_w. \quad (21.10)$$

Так как 3-тензор M^{uvw} определяет модуляционные характеристики лампы, его можно назвать «тензором модуляции». Если кривизна пренебрежимо мала, уравнение упрощается: $\Delta I^u = Y^{uv} \Delta E_v$ (см. уравнение (15.15)). Тензор адмиттанса нелинейных сетей можно назвать «тензором усиления».

Для всякой лампы

$$Y^{uv} = \frac{\partial I^u}{\partial E_v},$$

$$M^{uvw} = \frac{1}{2!} \frac{\partial Y^{uv}}{\partial E_w} = \frac{1}{2!} \frac{\partial^2 I^u}{\partial E_v \partial E_w}, \quad (21.11)$$

$$D^{uvwz} = \frac{1}{3!} \frac{\partial M^{uvw}}{\partial E_z} = \frac{1}{3!} \frac{\partial^2 Y^{uv}}{\partial E_w \partial E_z} = \frac{1}{3!} \frac{\partial^3 I^u}{\partial E_v \partial E_w \partial E_z}.$$

II. Для пентода четыре матрицы тензора модуляции даны уравнением (21.5), если заменить y на I и x на E . Для ламп с экранирующей сеткой три матрицы тензора-модулятора имеют вид

| | | | | | |
|--------------|-----|---|---|---|--|
| | w | a | b | p | |
| $2M^{avw} =$ | v | a | b | p | |
| | | $\frac{1}{r_a^2} \frac{\partial r_a}{\partial E_a}$ | $\frac{1}{r_a^2} \frac{\partial r_a}{\partial E_b}$ | $\frac{1}{r_a^2} \frac{\partial r_a}{\partial E_p}$ | |
| | | $\frac{\partial G^{ab}}{\partial E_a}$ | $\frac{\partial G^{ab}}{\partial E_b}$ | $\frac{\partial G^{ab}}{\partial E_p}$ | |
| | | $\frac{\partial G^{ap}}{\partial E_a}$ | $\frac{\partial G^{ap}}{\partial E_b}$ | $\frac{\partial G^{ap}}{\partial E_p}$ | |

| | | | | | |
|--------------|-----|---|---|---|--|
| | w | a | b | p | |
| $2M^{bvw} =$ | v | a | b | p | |
| | | $\frac{\partial G^{ba}}{\partial E_a}$ | $\frac{\partial G^{ba}}{\partial E_b}$ | $\frac{\partial G^{ba}}{\partial E_p}$ | |
| | | $\frac{1}{r_b^2} \frac{\partial r_b}{\partial E_a}$ | $\frac{1}{r_b^2} \frac{\partial r_b}{\partial E_b}$ | $\frac{1}{r_b^2} \frac{\partial r_b}{\partial E_p}$ | |
| | | $\frac{\partial G^{bp}}{\partial E_a}$ | $\frac{\partial G^{bp}}{\partial E_b}$ | $\frac{\partial G^{bp}}{\partial E_p}$ | |

| | | | | | |
|--------------|-----|---|---|---|--|
| | w | a | b | p | |
| $2M^{pvw} =$ | v | a | b | p | |
| | | $\frac{\partial G^{pa}}{\partial E_a}$ | $\frac{\partial G^{pa}}{\partial E_b}$ | $\frac{\partial G^{pa}}{\partial E_p}$ | |
| | | $\frac{\partial G^{pb}}{\partial E_a}$ | $\frac{\partial G^{pb}}{\partial E_b}$ | $\frac{\partial G^{pb}}{\partial E_p}$ | |
| | | $\frac{1}{r_p^2} \frac{\partial r_p}{\partial E_a}$ | $\frac{1}{r_p^2} \frac{\partial r_p}{\partial E_b}$ | $\frac{1}{r_p^2} \frac{\partial r_p}{\partial E_p}$ | |

(21.12)

При отсутствии сеточных токов все компоненты первых двух матриц M^{uvw} и M^{vuw} равны нулю.

Так как $M^{uvw} = 1/2 \partial Y^{uv} / \partial E_w$, компоненты Y^{uv} дифференцируются по третьему индексу, данному над столбцами. Например, M^{cra} должно быть равно половине частной производной от Y^{cp} по E_a .

III. Для триода две матрицы тензора модуляции

$$2M^{gvw} = \begin{array}{c|cc} & g & p \\ \hline v & \begin{array}{c|c} \frac{1}{r_g^2} \frac{\partial r_g}{\partial E_g} & \frac{1}{r_g^2} \frac{\partial r_g}{\partial E_p} \\ \hline \frac{\partial G^{gp}}{\partial E_g} & \frac{\partial G^{gp}}{\partial E_p} \end{array} & \end{array} \quad 2M^{pvw} = \begin{array}{c|cc} & g & p \\ \hline v & \begin{array}{c|c} \frac{\partial G^{pg}}{\partial E_g} & \frac{\partial G^{pg}}{\partial E_p} \\ \hline \frac{1}{r_p^2} \frac{\partial r_p}{\partial E_g} & \frac{1}{r_p^2} \frac{\partial r_p}{\partial E_p} \end{array} & \end{array} \quad (21.13)$$

При отсутствии сеточного тока все компоненты первой матрицы равны нулю.

IV. Уравнение напряжения лампы, рассматриваемой как контурная сеть, выводятся из уравнения (21.7)

$$\Delta e = z \Delta i + \Delta i h \Delta i, \quad \Delta e_m = z_{mn} \Delta i^n + h_{mnk} \Delta i^n \Delta i^k, \quad (21.14)$$

где

$$z_{mn} = \frac{\partial e_m}{\partial i^n}; \quad h_{mnk} = \frac{1}{2} \frac{\partial z_{mn}}{\partial i^k} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 e_m}{\partial i^n \partial i^k}.$$

II. КОМПЛЕКСНЫЕ РЯДЫ ТЕЙЛОРА

I. В этом параграфе исследованы ряды Тейлора, в которых переменные и коэффициенты являются не действительными числами, а комплексными.

Пусть множество из n синусоидальных напряжений приложено к нелинейной узловой сети, скажем, к кристаллическому детектору, соединенному последовательно с импедансом, каждое напряжение имеет различную частоту; т. е. пусть

$$\Delta E_{(\alpha)} = \left[\Delta E_{(\omega_1)} \right] \left[\Delta E_{(\omega_2)} \right] \dots \left[\Delta E_{(\omega_n)} \right], \quad (21.15)$$

каждое ΔE является комплексным числом

$$\Delta E_1 = \Delta E_1 + j \Delta E_1' = \sqrt{2} (E_1 \cos \omega_1 t - E_1' \sin \omega_1 t).$$

Так как в этой главе не рассматриваются преобразования частот, закрытый индекс α в $E_{(\alpha)}$ показывает, что компоненты организованы в строку, но нет никакой формулы преобразования, связанной с этим индексом.

где обычно $\gamma = \alpha$ и $\delta = \beta$ — две 4-матрицы. Вычисления будут приведены ниже.

Матрица $\Delta E_{(\gamma)} \Delta E_{(\delta)}$ представляет $2n^2$ комплексных чисел (две матрицы), образованных всеми возможными произведениями компонент $\Delta E_{(\gamma)}$, образующими суммы и разности частот.

III. При перемножении двух комплексных чисел $\Delta E_1 = A + jB$ и $\Delta E_2 = C + jD$, каждое из которых представляет синусоидальную функцию различных частот ω_1 и ω_2 , необходимо заметить следующее: 1) произведения с $\omega_1 + \omega_2$ частотами находятся из $(A + jB) \times (C + jD)$; 2) произведения с $\omega_1 - \omega_2$ частотами находятся из $(A + jB) \times (C - jD)$; 3) компоненты комплексных чисел представляют квадратные корни от квадратов средних значений, а их произведения — пиковые значения.

IV. Уравнения (21.18) и (21.19) (1-матричное и 2-матричное уравнения) можно скомбинировать как

$$\Delta I^{(\epsilon)} + \Delta I^{(\alpha)(\pm\beta)} = Y^{(\epsilon)(\delta)} \Delta E_{(\delta)} + M^{(\alpha)(\pm\beta)(\gamma)(\delta)} \Delta E_{(\gamma)} \Delta E_{(\delta)}, \quad (21.20)$$

представляющее $n + 2n^2$ уравнений. Так как компоненты 1-матрицы $\Delta I^{(\epsilon)}$ и 2-матрицы $\Delta I^{(\alpha)(\beta)}$ нельзя складывать, различные наборы токов сохраняются отдельными.

12. КОМПАУНД-РЯДЫ

I. Допустим теперь, что дополнительные множества напряжений с $(\alpha \pm \beta)$, $(\alpha \pm \beta \pm \gamma)$, ... частотами также приложены к системе. Множество из $2n^2$ напряжений с комбинированными частотами генерируют в этом случае $2n^2$ токов такой же частоты:

$$[\Delta I^{(\alpha)(\pm\beta)} = Y^{(\alpha)(\pm\beta)(\gamma)(\pm\delta)} \Delta E_{(\gamma)(\pm\delta)}. \quad (21.21)$$

Здесь обычно $\gamma = \alpha$, $\delta = \beta$ и компоненты $Y^{(\alpha)(\pm\beta)(\gamma)(\pm\delta)}$ рассчитываются при различных производных частотах. Дополнительные токи, обусловленные кривизной кривых $E-I$, здесь вычислять не будем.

2-матрица $\Delta E_{(\gamma)(\pm\delta)}$ содержит $2n^2$ комплексных чисел, представляя производные частоты приложенных напряжений, но они образованы не за счет основной частоты приложенных напряжений, как компоненты $\Delta E_{(\gamma)} \Delta E_{(\delta)}$, а независимо от них.

Следовательно, если приложены напряжения как с основной, так и с производной частотами, результирующие токи с основной и производной частотами суть

$$\Delta I^{(\epsilon)} + \Delta I^{(\alpha)(\pm\beta)} + \dots = Y^{(\epsilon)(\sigma)} \Delta E_{(\sigma)} + M^{(\alpha)(\pm\beta)(\gamma)(\delta)} \Delta E_{(\gamma)} \Delta E_{(\delta)} + \\ + \dots + Y^{(\alpha)(\pm\beta)(\gamma)(\pm\delta)} \Delta E_{(\gamma)(\pm\delta)} + \dots + \dots \quad (21.22)$$

Это есть матричная форма тейлоровских рядов для каждого множества приложенных напряжений, т. е. одна для $\Delta E_{(\alpha)}$, а другая для $\Delta E_{(\sigma)(\pm\beta)}$, каждое множество напряжений генерирует бесконечное множество токов. Такие ряды называются

компаунд-рядами. Если приложено напряжение только с основной частотой, последние члены уравнения (21.22) исчезают.

II. Наоборот, если текут токи как основной частоты, так и производных частот, результирующее напряжение основной частоты и производных частот есть

$$\Delta E_{(\varepsilon)} + \Delta E_{(\alpha)(\pm\beta)} + \dots = Z_{(\varepsilon)(\sigma)} \Delta I^{(\sigma)} + H_{(\alpha)(\pm\beta)(\gamma)(\delta)} \Delta I^{(\gamma)} \Delta I^{(\delta)} + \dots \\ \dots + Z_{(\alpha)(\pm\beta)(\gamma)(\pm\delta)} \Delta I^{(\gamma)(\pm\delta)} + \dots + \dots; \quad (21.23)$$

здесь обычно $\gamma = \alpha$, $\delta = \beta$, $\varepsilon = \sigma$.

III. Надо отметить тот важный факт, что переменные ΔI не обязательно всегда расположены в строку, образуя 1-матрицу $\Delta I^{(\alpha)}$. Здесь некоторые переменные расположены в квадраты, а некоторые в кубы. В современном матричном аппарате переменные располагаются в форме квадрата, образуя матрицу.

13. КОМПЛЕКСНЫЕ РЯДЫ В ИНВАРИАНТНОЙ ФОРМЕ

I. Пусть теперь вместо кристаллического детектора к сети, содержащей катушки, подсоединена многоэлектродная лампа. Если к различным узловым парам приложен набор основных напряжений $\Delta E_{(\alpha)}$, то в каждой цепи текут различные наборы токов с различными частотами.

В этом случае следует вводить два набора индексов: 1) открытые индексы u, v, w , представляющие различные цепи системы a, b, c, g, p и 2) закрытые индексы $(\alpha), (\beta), (\gamma)$, представляющие различные приложенные частоты $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$.

В прямом обозначении открытые индексы не указываются. Когда напряжения как основной, так и производных частот приложены к различным цепям, токи имеют вид (см. уравнения (21.10) и (21.22))

$$\Delta I^{(\varepsilon)} + \Delta I^{(\alpha)(\pm\beta)} + \dots = Y^{(\varepsilon)(\sigma)} \Delta E_{(\sigma)} + \Delta E_{(\gamma)} M^{(\alpha)(\pm\beta)(\gamma)(\delta)} \Delta E_{(\delta)} + \dots + \\ + Y^{(\alpha)(\pm\beta)(\gamma)(\pm\delta)} \Delta E_{(\gamma)(\pm\delta)} + \dots + \dots \quad (21.24)$$

Порядок тензоров тот же, что и в уравнении (21.10), а порядок закрытых индексов тот же, что и в уравнении (21.22).

В индексном обозначении

$$\Delta I^{u(\varepsilon)} + \Delta I^{u(\alpha)(\pm\beta)} + \dots = Y^{uv(\varepsilon)(\delta)} \Delta E_{v(\gamma)} + \\ + M^{uvw(\alpha)(\pm\beta)(\gamma)(\delta)} \Delta E_{v(\gamma)} \Delta E_{w(\delta)} + \dots + \\ + Y^{uv(\alpha)(\pm\beta)(\gamma)(\pm\delta)} \Delta E_{v(\gamma)(\pm\delta)} + \dots + \dots \quad (21.25)$$

Порядок «открытых» индексов тот же, что в уравнении (21.10), а порядок «закрытых» индексов — как в уравнении (21.22).

II. Открытые индексы имеют ковариантный и контравариантный смысл, но закрытые индексы не имеют такого значения, следовательно, для более компактной записи позиции закрытых ин-

дексов можно изменить и записать предыдущее уравнение:

$$\Delta I_{(\varepsilon)}^u + \Delta I_{(\sigma)(\pm\beta)}^u + \dots = Y_{(\varepsilon)(\sigma)}^{uv} \Delta E_{\nu}^{(\sigma)} + M_{(\alpha)(\pm\beta)(\gamma)(\delta)}^{uv\omega} \Delta E_{\nu}^{(\gamma)} \Delta E_{\omega}^{(\delta)} + \dots \\ \dots + Y_{(\sigma)(\pm\beta)(\gamma)(\pm\delta)}^{uv} \Delta E_{\nu}^{(\gamma)(\pm\delta)} + \dots + \dots \quad (21.26)$$

III. Вместо того чтобы писать n^2 различных 2-тензоров для представления $Y^{(\sigma)(\beta)}$, в расчетах применяется метод записи сначала *одного* 2-тензора Y , каждая компонента которого содержит закрытые индексы ($A^{(\alpha)(\beta)}$); при этом операции, представленные открытыми индексами, удаляют, оставляя переменные закрытые индексы. Отныне считается, что закрытые индексы меняются, принимая значения ряда фиксированных индексов.

14. СПИНОРНЫЕ ИНДЕКСЫ

I. Если компоненты тензоров преобразования содержат комплексные числа $a + jb$, выгодно использовать спинорные индексы вместо тензорных, т. е. индексы с чертой над некоторыми из них. Черта над некоторыми индексами помогает также сохранить правильный порядок перемножения нескольких тензоров различной валентности. Спинорное обозначение справедливо, однако, если все комплексные члены представляют величины одной и той же частоты.

Допуская, что открытые индексы — фиксированные, а закрытые — переменные (в случае, когда в одной частной цепи рассматриваются все возможные токи), получаем, что каждое комплексное число представляет величины различной частоты. Следовательно, в данном анализе закрытые индексы не могут быть спинорными.

Допуская, что закрытые индексы — фиксированные, а открытые — переменные (случай, когда рассматриваются токи одной частоты во всех цепях), получаем, что каждое комплексное число представляет величину одной и той же частоты. Таким образом, открытые индексы можно рассматривать как спинорные.

В терминах спинорных индексов тензоры, введенные до сих пор, следующие:

$$e_m, i^m, \Delta e_m, \Delta i^m, Y_m^{\bar{n}}, Z_m^{\bar{n}}, M_m^{\bar{n}k}, Q_m^{\bar{n}k}, D_m^{\bar{n}k\bar{h}}.$$

II. Когда место индексов с чертой в e_m и i^m определено из инвариантности $e_m i^m$, их позиция в других тензорах автоматически следует из уравнений по правилу: два немых индекса должны быть либо оба с чертой, либо оба без черты.

В терминах спинорных индексов предыдущие уравнения будут выглядеть так:

$$\Delta I_{(\varepsilon)}^u + \Delta I_{(\sigma)(\pm\beta)}^u + \dots = Y_{(\varepsilon)(\sigma)}^{u\bar{v}} E_{\nu}^{(\sigma)} + M_{(\sigma)(\pm\beta)(\gamma)(\delta)}^{u\bar{v}\omega} \Delta E_{\nu}^{(\gamma)} \Delta E_{\omega}^{(\delta)} + \dots \\ \dots + Y_{(\sigma)(\pm\beta)(\gamma)(\pm\delta)}^{u\bar{v}} \Delta E_{\nu}^{(\gamma)(\pm\delta)} + \dots + \dots \quad (21.27)$$

15. ОБРАЩЕНИЕ ТЕЙЛОРОВСКИХ РЯДОВ

В предыдущих параграфах были установлены различные формы рядов Тейлора. В следующих параграфах будут найдены обратные ряды.

Так как ряды Тейлора являются степенными рядами, а их обращение уже рассмотрено в гл. 2, § 12 для случая полного отсутствия индексов и наличия одного набора индексов, расчеты здесь повторять не будем. Для рядов Тейлора с одним набором индексов

$$\Delta e = z \Delta i + \Delta i h \Delta i, \quad \Delta e_m^- = z_{mn}^- \Delta i^n + h_{mnk}^- \Delta i^n \Delta i^k, \quad (21.28)$$

обратные ряды по уравнению (2.54)

$$\Delta i = y \Delta e + \Delta e m \Delta e, \quad \Delta i^m = y^{mn} \bar{\Delta} e_n^- + m^{mnk} \bar{\Delta} e_n^- \Delta e_k^-, \quad (21.29)$$

где

$$y = z^{-1}; \quad y^{mn} = (z_{nm})^{-1}; \quad (21.30)$$

$$m = -y_t (y h) y; \quad m^{mnk} = -h_{dfg} y^{md} y^{fn} y^{gk}. \quad (21.31)$$

Там, где 3-тензор h и 2-тензор y заключены в скобки (yh) , это означает, что свободный индекс при h следует умножить на второй индекс при y : $(yh) = y^{md} h_{dfg}$, так что первый индекс при y становится свободным.

Следует заметить, что в уравнении (21.31) свободный индекс d величины h_{dfg} умножается на второй индекс y^{md} , в то время как другие два индекса h_{dfg} умножаются на первые индексы y^{fn} и y^{gk} . При таком порядке перемножения спинорные индексы учитываются автоматически.

16. ОБРАЩЕНИЕ КОМПЛЕКСНЫХ РЯДОВ

I. Пусть дано уравнение напряжения

$$\begin{aligned} \Delta e_{(\epsilon)} + \Delta e_{(\sigma)(\pm\beta)} = z_{(\epsilon)(\sigma)} \Delta i^{(\sigma)} + h_{(\sigma)(\pm\beta)(\gamma)(\delta)} \Delta i^{(\gamma)} \Delta i^{(\delta)} + \\ + z_{(\sigma)(\pm\beta)(\gamma)(\pm\delta)} \Delta i^{(\gamma)(\pm\delta)} \end{aligned} \quad (21.32)$$

и пусть рассчитывается ему обратное

$$\begin{aligned} \Delta i^{(\epsilon)} + \Delta i^{(\sigma)(\pm\beta)} = y^{(\epsilon)(\sigma)} \Delta e_{(\sigma)} + m^{(\sigma)(\pm\beta)(\gamma)(\delta)} \Delta e_{(\gamma)} \Delta e_{(\delta)} + \\ + y^{(\sigma)(\pm\beta)(\gamma)(\pm\delta)} \Delta e_{(\gamma)(\pm\delta)}, \end{aligned} \quad (21.33)$$

где y и m — неизвестные функции от z и h .

Следуя предыдущему, подставим второе уравнение в первое. Пренебрежем членами более чем второго порядка:

$$\begin{aligned} \Delta e_{(\varepsilon)} + \Delta e_{(\alpha)(\pm\beta)} &= z_{(\varepsilon)(\sigma)} y^{(\sigma)(\nu)} \Delta e_{(\nu)} + \\ &+ h_{(\alpha)(\pm\beta)(\tau)(\delta)} y^{(\tau)(\sigma)} y^{(\sigma)(\nu)} \Delta e_{(\sigma)} \Delta e_{(\nu)} + \\ &+ z_{(\alpha)(\pm\beta)(\tau)(\pm\delta)} m^{(\tau)(\pm\delta)(\sigma)(\nu)} \Delta e_{(\sigma)} \Delta e_{(\nu)} + \\ &+ z_{(\alpha)(\pm\beta)(\tau)(\pm\delta)} y^{(\alpha)(\pm\delta)(\sigma)(\pm\nu)} \Delta e_{(\sigma)(\pm\nu)}. \end{aligned}$$

Приравняем соответствующие коэффициенты при Δe в обеих частях уравнения:

$$\begin{aligned} I_{(\varepsilon)}^{(\nu)} &= z_{(\varepsilon)(\sigma)} y^{(\sigma)(\nu)}, \\ J_{(\alpha)(\pm\beta)}^{(\sigma)(\pm\nu)} &= y_{(\alpha)(\pm\beta)(\tau)(\pm\delta)} y^{(\tau)(\pm\delta)(\sigma)(\pm\nu)}, \\ 0 &= h_{(\alpha)(\pm\beta)(\tau)(\delta)} y^{(\tau)(\delta)} y^{(\delta)(\nu)} + z_{(\sigma)(\pm\beta)(\tau)(\pm\delta)} m^{(\tau)(\pm\delta)(\sigma)(\nu)}. \end{aligned}$$

Решим относительно y и m :

$$y^{(\sigma)(\beta)} = \text{обратная от } z_{(\beta)(\sigma)}; \quad (21.34)$$

$$y^{(\sigma)(\pm\beta)(\tau)(\pm\delta)} = \text{обратная от } z_{(\tau)(\pm\delta)(\sigma)(\pm\beta)}; \quad (21.35)$$

$$m^{(\sigma)(\pm\beta)(\tau)(\delta)} = -h_{(\sigma)(\pm\nu)(\varepsilon)(\omega)} y^{(\sigma)(\pm\beta)(\sigma)(\pm\nu)} y^{(\varepsilon)(\tau)} y^{(\omega)(\delta)}, \quad (21.36)$$

где $\gamma = \alpha$ и $\delta = \beta$.

II. Так как в $\Delta e_{(\varepsilon)} = z_{(\varepsilon)(\sigma)} \Delta i^{(\sigma)}$ матрица $z_{(\varepsilon)(\sigma)}$ обычно содержит только диагональные компоненты (один ток генерирует только одно напряжение своей собственной частоты), обратная ей матрица $y^{(\varepsilon)(\sigma)}$ рассчитывается в этом случае обращением каждой компоненты отдельно.

Аналогично, так как в уравнении

$$\Delta e_{(\sigma)(\pm\beta)} = z_{(\alpha)(\pm\beta)(\tau)(\pm\delta)} \Delta i^{(\tau)(\pm\delta)}$$

каждый ток обычно генерирует только одно напряжение своей собственной частоты (так как $\gamma = \alpha$ и $\delta = \beta$), обращение $z_{(\sigma)(\pm\beta)(\tau)(\pm\delta)}$ рассчитывается обращением каждой компоненты.

17. ОБРАЩЕНИЕ КОМПЛЕКСНЫХ ИНВАРИАНТНЫХ РЯДОВ

I. Пусть дана система инвариантных уравнений

$$\begin{aligned} \Delta e_{(\varepsilon)} + e_{(\alpha)(\pm\beta)} &= z_{(\varepsilon)(\sigma)} \Delta i^{(\sigma)} + \Delta i^{(\tau)} h_{(\alpha)(\pm\beta)(\tau)(\delta)} \Delta i^{(\delta)} + \\ &+ z_{(\alpha)(\pm\beta)(\tau)(\pm\delta)} \Delta i^{(\tau)(\pm\delta)} \end{aligned} \quad (21.37)$$

и пусть рассчитываются обратные ей уравнения

$$\begin{aligned} \Delta i^{(\varepsilon)} + \Delta i^{(\alpha)(\pm\beta)} &= y^{(\varepsilon)(\sigma)} \Delta e_{(\sigma)} + \Delta e_{(\tau)} m^{(\alpha)(\pm\beta)(\tau)(\delta)} \Delta e_{(\delta)} + \\ &+ y^{(\sigma)(\pm\beta)(\tau)(\pm\delta)} \Delta e_{(\tau)(\pm\delta)}, \end{aligned} \quad (21.38)$$

в которых y и m — неизвестные функции z и h .

Подставляем второе уравнение в первое:

$$\begin{aligned} \Delta e_{(\cdot)} + \Delta e_{(\alpha)(\pm\beta)} &= z_{(\cdot)(\tau)} y^{(\sigma)(\nu)} \Delta e_{(\nu)} + \\ &+ \Delta e_{(\sigma)} y_t^{(\tau)(\sigma)} h_{(\alpha)(\pm\beta)(\tau)(\delta)} y^{(\delta)(\nu)} \Delta e_{(\nu)} + \\ &+ \Delta e_{(\sigma)} (z_{(\sigma)(\pm\beta)(\tau)(\pm\delta)} m^{(\tau)(\pm\delta)(\sigma)(\nu)}) \Delta e_{(\nu)} + \\ &+ z_{(\tau)(\pm\beta)(\tau)(\pm\delta)} y^{(\tau)(\pm\delta)(\sigma)(\pm\nu)} \Delta e_{(\sigma)(\pm\nu)}. \end{aligned}$$

Приравняем соответствующие коэффициенты при Δe :

$$\begin{aligned} I_{(\varepsilon)}^{(\nu)} &= z_{(\varepsilon)(\sigma)} y^{(\sigma)(\nu)}, \\ I_{(\alpha)(\pm\beta)}^{(\sigma)(\pm\nu)} &= z_{(\alpha)(\pm\beta)(\tau)(\pm\delta)} y^{(\tau)(\pm\delta)(\sigma)(\pm\nu)}, \\ 0 &= y_t^{(\tau)(\sigma)} h_{(\alpha)(\pm\beta)(\tau)(\delta)} y^{(\delta)(\nu)} + (z_{(\sigma)(\pm\beta)(\tau)(\pm\delta)} m^{(\tau)(\pm\delta)(\sigma)(\nu)}). \end{aligned}$$

Решаем относительно неизвестных y и m :

$$y^{(\alpha)(\beta)} = z_{(\alpha)(\beta)}^{-1}; \quad (21.39)$$

$$y^{(\sigma)(\pm\beta)(\tau)(\pm\delta)} = z_{(\alpha)(\pm\beta)(\tau)(\pm\delta)}^{-1}; \quad (21.40)$$

$$m^{(\sigma)(\pm\beta)(\tau)(\delta)} = -y_t^{(\tau)(\sigma)} (y^{(\sigma)(\pm\beta)(\sigma)(\pm\nu)} h_{(\alpha)(\pm\beta)(\tau)(\delta)} y^{(\omega)(\delta)}). \quad (21.41)$$

II. В спинорных обозначениях последнее уравнение при замене позиций закрытых индексов и использовании спинорных индексов таково:

$$m_{(\sigma)(\pm\beta)(\tau)(\delta)}^{\overline{m}\overline{n}\overline{k}} = -h_{\overline{h}\overline{f}\overline{g}}^{(\alpha)(\pm\nu)(\varepsilon)(\omega)} y_{(\sigma)(\pm\beta)(\sigma)(\pm\nu)}^{\overline{m}\overline{h}} y_{(\tau)(\tau)}^{\overline{f}\overline{n}} y_{(\omega)(\delta)}^{\overline{g}\overline{k}}. \quad (21.42)$$

III. Необходимо заметить, что последнее уравнение представляет наиболее сложную инвариантную форму, однако оно содержит то же число основных букв, что и уравнение (2.43), представляющее простейшую возможную скалярную форму.

18. УПРОЩЕНИЯ В ЛАМПОВЫХ ЦЕПЯХ

В термоэлектронных цепях ламп описанные выше мультитензоры принимают специальные формы, и можно ввести следующие упрощения.

I. Для лампы без внешней сети $Y^{(\alpha)(\beta)}$ и $M^{(\alpha)(\pm\beta)(\tau)(\delta)}$ содержат только действительные числа; следовательно, для них можно опустить закрытые индексы, их компоненты не зависят от частоты входных напряжений ΔE .

Уравнения лампы (или ламп) записываются как

$$\Delta e_{(\alpha)} + \Delta e_{(\alpha)(\pm\beta)} = z \Delta I^{(\alpha)} + \Delta I^{(\alpha)} h \Delta I^{(\beta)} + z \Delta I^{(\alpha)(\pm\beta)}; \quad (21.43)$$

$$\Delta I^{(\alpha)} + \Delta I^{(\alpha)(\pm\beta)} = Y \Delta E_{(\sigma)} + \Delta E_{(\alpha)} M \Delta E_{(\beta)} + u \Delta E_{(\alpha)(\pm\beta)}; \quad (21.44)$$

их рассматривают как контурную или как узловую сеть соответственно. Уравнения, получаемые при рассмотрении лампы как ортогональной сети, аналогичны.

Обратным к Y является Z и обратным к M (из уравнения (21.31)) является $N = -Z_t(ZM)Z$. Так как Y не имеет закрытых индексов, обратная к M , содержащая Y , не вызывает появления закрытых индексов, так же, как и при умножении на Y .

II. В тензорах импеданса и адмиттанса *внешней сети* все компоненты, за исключением случая, когда два закрытых индекса совпадают, равны нулю. Например:

$$z_{(\sigma)(\beta)} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \begin{array}{c} (\beta) \\ \hline (1) \end{array} \left| \begin{array}{c} (1) \\ \hline z_{\omega_1} \end{array} \right. & \begin{array}{c} (2) \\ \hline 0 \end{array} & \begin{array}{c} (n) \\ \hline 0 \end{array} \\ \dots & \dots & \dots \\ \begin{array}{c} (2) \\ \hline 0 \end{array} & \begin{array}{c} (2) \\ \hline z_{\omega_2} \end{array} & \begin{array}{c} (n) \\ \hline 0 \end{array} \\ \dots & \dots & \dots \\ \begin{array}{c} (n) \\ \hline 0 \end{array} & \begin{array}{c} (n) \\ \hline 0 \end{array} & \begin{array}{c} (n) \\ \hline z_{\omega_n} \end{array} \end{array} \quad (21.45)$$

Следовательно, для внешней сети $z_{(\sigma)(\beta)}$ можно рассматривать как совокупность n 2-тензоров, расположенных в строку:

$$z_{(\alpha)} = \begin{array}{c} \begin{array}{c} (\alpha) \\ \hline (1) \end{array} \left| \begin{array}{c} (1) \\ \hline z_{\omega_1} \end{array} \right. \quad \begin{array}{c} (2) \\ \hline z_{\omega_2} \end{array} \quad \dots \quad \begin{array}{c} (n) \\ \hline z_{\omega_n} \end{array} \end{array} \quad (21.46)$$

Подобным образом $y^{(\beta)(\sigma)}$, обратную к $z_{(\sigma)(\beta)}$, можно рассматривать как совокупность n 2-тензоров, расположенных в строку:

$$y^{(\sigma)} = \begin{array}{c} \begin{array}{c} (\sigma) \\ \hline (1) \end{array} \left| \begin{array}{c} (1) \\ \hline z_{\omega_1}^{-1} \end{array} \right. \quad \begin{array}{c} (2) \\ \hline z_{\omega_2}^{-1} \end{array} \quad \dots \quad \begin{array}{c} (n) \\ \hline z_{\omega_n}^{-1} \end{array} \end{array} \quad (21.47)$$

Для внешней сети M есть нуль.

Необходимо заметить, что обращение $z_{(\sigma)(\beta)}$ рассчитывается нахождением обратного для каждого из своих компонент-тензоров. Все они, за исключением частот, в свою очередь имеют одинаковую форму.

Таким же образом $Y^{(\sigma)(\pm\beta)(\tau)(\pm\delta)}$, где $\gamma = \alpha$ и $\delta = \beta$, можно записать на $Y^{(\sigma)(\pm\beta)}$.

Каждая компонента этих двух матриц содержит $Z_{\omega_1 + \omega_2}^{-1}$, все они имеют одинаковую форму, если не вычисляются для различных комбинаций частот. Эти упрощающие замечания используются, когда лампы соединяют с сетью.

Уравнения сети без ламп, с приложенными напряжениями или токами основной и производных частот имеют вид

$$\Delta e_{(\alpha)} + \Delta e_{(\sigma)(\pm\beta)} = z_{(\alpha)(\beta)} \Delta i^{(\beta)} + z_{(\sigma)(\pm\beta)(\tau)(\pm\delta)} \Delta i^{(\tau)(\pm\delta)}, \quad (21.48)$$

$$\Delta I^{(\sigma)} + \Delta I^{(\sigma)(\pm\beta)} = Y^{(\sigma)(\beta)} \Delta E_{(\beta)} + Y^{(\sigma)(\pm\beta)(\tau)(\pm\delta)} \Delta E_{(\tau)(\pm\delta)}. \quad (21.49)$$

I. В ламповой цепи соединены два физически разных типа структур: *нелинейная сеть*, содержащая одну или более изолированных ламп, и *линейная сеть*, соединяющая лампы. Их можно рассматривать как контурные, узловые или ортогональные сети.

Две нелинейные сети или одна линейная и одна нелинейная сеть соединяются способом, аналогичным способу соединения двух линейных сетей (см. гл. 5, § 12 для контурных сетей и гл. 14, § 12 для узловых сетей).

Этапы соединения сетей следующие:

1) устанавливаются геометрические объекты Y и M (или z и h) каждой составляющей части; некоторые из них могут быть нулями;

2) их соответствующие суммы $Y = Y^1 + Y^2 + \dots$ и $M = M_1 + M_2 + \dots$ представляют геометрические объекты примитивной системы;

3) тензор преобразования S или S_t^{-1} устанавливается из рассмотрения способа перестройки примитивной системы в действительную систему; *зажимы ламп всегда образуют часть новой системы координат*;

4) новые компоненты Y' и M' (или z' и h') находят при помощи соответствующих им формул преобразования.

II. Уравнения напряжения или тока результирующей системы (опуская штрихи) имеют вид

$$\Delta e_{(\sigma)} + \Delta e_{(\alpha)(\pm\beta)} = z_{(\sigma)(\beta)} \Delta i^{(\beta)} + z_{(\sigma)(\pm\beta)(\gamma)(\pm\delta)} \Delta i^{(\gamma)(\pm\delta)} + \Delta i^{(\sigma)} h i^{(\beta)}; \quad (21.50)$$

$$\Delta I^{(\alpha)} + \Delta I^{(\alpha)(\pm\beta)} = Y^{(\sigma)(\beta)} \Delta E_{(\beta)} + Y^{(\sigma)(\pm\beta)(\gamma)(\pm\delta)} \Delta E_{(\gamma)(\pm\delta)} + \Delta E_{(\alpha)} M E_{(\beta)}. \quad (21.51)$$

В этих уравнениях (где h и M не имеют закрытых индексов) допускается, что *зажимы лампы (или ламп) рассматриваются как координатные оси*, в которых течет Δi или на которых возникает ΔE .

III. Вместо того чтобы использовать приведенный выше метод нахождения уравнений (21.51) или (21.50), *первый член $Y^{(\sigma)(\beta)}$ можно найти точно таким же способом, как показано в гл. 15, в то время как M результирующей системы находят умножением M лампы на A три раза, изменяя, однако, только ее индексы. Свободные индексы модуляционного члена относятся только к зажимам лампы g и p , в то время как свободные индексы члена усиления включают также другие узловые пары.*

IV. Для удобства манипулирования их можно разделить на несколько тензорных уравнений; например, в уравнении (21.51) можно ввести три типа узловых пар:

1) ΔE_1 , представляющее все узловые пары лампы;

2) ΔE_2 , представляющее активные узловые пары с известными приложенными напряжениями;

3) ΔE_3 , представляющее оставшиеся неактивные узловые пары.

В этом случае уравнение (21.51) разделяется на три, первое содержит член с M . Исключение E_3 влечет только введение адмиттансов разомкнутой сети $Y^{(\alpha)(\beta)}$, тогда как исключение неактивных узловых пар E_1 лампы требует обращения ряда.

Устанавливая уравнение напряжений как контурную сеть, необходимо сначала обратить ряд, так как лишь z_2 и h_2 лампы фигурируют в уравнении, тогда как обратные константы y_2 и m_2 лампы обычно известны.

Попытка найти уравнения, обратные (21.50) и (21.51), или некоторую подсистему этих уравнений, содержащую 3-тензор, потребует введения закрытых индексов и для 3-тензора.

20. РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ

1. Уравнения напряжений и токов (21.50) и (21.51) можно решить без подразделений относительно неизвестных (если некоторые из приложенных величин известны).

Для контурных сетей при нахождении уравнения, обратного (21.50), обратный h должен был бы быть (согласно уравнению (21.31)) $m = -y_t(yh)y$, если бы $y = z^{-1}$ не содержало закрытых индексов; но, поскольку z содержит закрытые индексы $(\alpha)(\beta)$, обратный h из уравнения (21.41)

$$m^{(\alpha)(\pm\beta)(\gamma)(\delta)} = -y_t^{(\gamma)}(y^{(\alpha)(\pm\beta)}h)y^{(\delta)}, \quad (21.52)$$

где половина индексов y опущена в соответствии с упрощением § 16.

Поскольку h найдено при известном m как $h = -z_t(zm)z$, уравнение (21.52) для контурных сетей приобретает вид

$$m^{(\alpha)(\pm\beta)(\gamma)(\delta)} = -y_t^{(\gamma)}z_t(y^{(\alpha)(\pm\beta)}zm)zy^{(\delta)}, \quad (21.53)$$

где m — тензор модуляции лампы до соединения с сетью, а $m^{(\sigma)(\pm\beta)(\gamma)(\delta)}$ — ее тензор модуляции после соединения. Точно так же z — тензор импеданса только лампы, а $y^{(\gamma)}$ — тензор адмиттанса соединенной системы.

Следовательно, для контурной сети обратное (21.50) уравнение

$$\Delta i^{(\alpha)} + \Delta i^{(\sigma)(\pm\beta)} = y^{(\sigma)(\beta)} \Delta e_{(\beta)} + \Delta e_{(\gamma)} m^{(\alpha)(\pm\beta)(\gamma)(\delta)} \Delta e_{(\delta)}, \quad (21.54)$$

показывающее изменения токов основных и производных частот, обусловленные изменениями напряжений основных частот $\Delta e_{(\sigma)}$, приложенных к контурам.

Следует отметить, что наличие приложенных напряжений производных частот $\Delta e_{(\alpha)+(\beta)}$ не предполагается.

II. Для *узловых сетей* тензор, обратный известному \mathbf{M} , по аналогии с уравнением (21.52) есть

$$\mathbf{N}_{(\alpha)(\pm\beta)(\gamma)(\delta)} = -\mathbf{Z}_{\lambda(\gamma)}(\mathbf{Z}_{(\alpha)(\pm\beta)}\mathbf{M})\mathbf{Z}_{\lambda(\delta)} \quad (21.55)$$

и уравнение напряжения

$$\Delta E_{(\alpha)} + \Delta E_{(\alpha)(\pm\beta)} = \mathbf{Z}_{(\alpha)(\beta)} \Delta \mathbf{I}^{(\beta)} + \Delta \mathbf{I}^{(\gamma)} \mathbf{N}_{(\alpha)(\pm\beta)(\gamma)(\delta)} \Delta \mathbf{I}^{(\delta)}, \quad (21.56)$$

где $\Delta \mathbf{I}^{(\alpha)}$ — известные приложенные токи основных частот.

III. Мультитензор $\mathbf{m}^{(\alpha)(\pm\beta)(\gamma)(\delta)}$ (или, скорее, $\mathbf{m}^{(\alpha)(\pm\beta)(\gamma)(\pm\delta)}$), содержит $4n^4$ 3-тензоров \mathbf{m} . Из них отличными от нуля являются $2n^2$ 3-тензоров, поскольку в них $\alpha = \gamma$ и $\beta = \delta$, остальные 3-тензоры равны нулю. Их можно расположить в два квадрата, каждый из них содержит n^2 3-тензоров; один — дающий токи $\alpha + \beta$ частот, а в другой — $\alpha - \beta$ частот. Каждый 3-тензор содержит токи одной частоты, текущие в различных цепях.

Если k цепей имеют приложенный вектор напряжений $\Delta e_{i\alpha}$, то каждая цепь содержит n напряжений различных частот, каждое из возможных k^2 произведений дает $2n^2$ токов производных частот в каждой цепи; это значит, что в каждой цепи течет $2n^2 k^2$ токов производных частот и nk токов основных частот.

21. ПРИМЕР КОНТУРНОЙ ЦЕПИ ТРИОДА

I. Пусть сетка и анод триода соединены последовательно с двумя катушками (рис. 21.5) и пусть в сеточном и анодном контурах приложено множество напряжений различных частот.

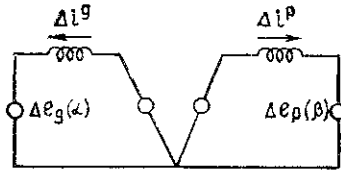


Рис. 21.5. Контурная сеть триода.

Чтобы найти тензор модуляции соединенной сети с помощью уравнения (21.53), надо установить следующие два 2-тензора и один 3-тензор. Тензор адмиттанса \mathbf{y} *соединенной системы* можно найти по методу, описанному в гл. 15, § 15, а \mathbf{z}_1 *одной лампы* дается уравнением (15.55), так что

$$\mathbf{z}_1 = \begin{array}{c} \mathbf{g} \\ \mathbf{p} \end{array} \begin{array}{|c|c|} \hline \frac{r_g}{1 - \mu p^{\mu} g} & \frac{-\mu g^r p}{1 - \mu p^{\mu} g} \\ \hline \frac{\mu p^r g}{1 - \mu p^{\mu} g} & \frac{r_r}{1 - \mu p^{\mu} g} \\ \hline \end{array} = \begin{array}{c} \mathbf{g} \\ \mathbf{p} \end{array} \begin{array}{|c|c|} \hline a & b \\ \hline c & d \\ \hline \end{array}, \quad (21.57)$$

$$y = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} g & p \\ \hline \left(\frac{r_p}{1 - \mu_p \mu_g} + Z_p \right) / \text{Det} & \frac{\mu_g r_p}{1 - \mu_p \mu_g} / \text{Det} \\ \hline -\frac{\mu_g r_g}{1 - \mu_p \mu_g} / \text{Det} & \left(\frac{r_g}{1 - \mu_p \mu_g} + Z_g \right) / \text{Det} \end{array} \\ \hline \begin{array}{cc} g & p \\ \hline e & f \\ \hline g & h \end{array} \end{array}, \quad (21.58)$$

где $\text{Det} = [(r_g + Z_g)(r_p + Z_p) - Z_p Z_g \mu_p \mu_g] (1 - \mu_p \mu_g)$.

Тензор модуляции m_1 лампы дан уравнением (21.13) как

$$m^{g^v w} = m_{1g} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} w & g & p \\ \hline v & g & p \\ \hline g & k & l \\ \hline p & m & n \end{array} \\ \hline \begin{array}{ccc} w & g & p \\ \hline v & g & p \\ \hline g & p & q \\ \hline p & r & s \end{array} \end{array}, \quad (21.59)$$

II. На первом этапе определяются три произведения матриц из уравнения (21.53). Заменяя $(\alpha) (\pm \beta)$ на (ω) и оставив закрытые индексы прикрепленными к каждой компоненте $y^{(\alpha)}$, $y^{(\beta)}$ и $y^{(\omega)}$, получим

$$\begin{aligned} z_1 y^\beta &= \begin{array}{c} \begin{array}{cc} g & p \\ \hline a e_\beta + b g_\beta & a f_\beta + b h_\beta \\ \hline c e_\beta - d g_\beta & c f_\beta + d h_\beta \end{array} \\ \hline \begin{array}{cc} g & p \\ \hline A & B \\ \hline C & D \end{array} \end{array} = p, \\ (z_1 y^\alpha)_t &= \begin{array}{c} \begin{array}{cc} g & p \\ \hline a e_\alpha + b g_\alpha & c e_\alpha + d g_\alpha \\ \hline a f_\alpha + b h_\alpha & c f_\alpha + d h_\alpha \end{array} \\ \hline \begin{array}{cc} g & p \\ \hline E & F \\ \hline G & H \end{array} \end{array} = s, \\ y^\omega z_1 &= \begin{array}{c} \begin{array}{cc} g & p \\ \hline e_\omega a + f_\omega c & e_\omega b + f_\omega d \\ \hline g_\omega a + h_\omega c & g_\omega b + h_\omega d \end{array} \\ \hline \begin{array}{cc} g & p \\ \hline K & L \\ \hline M & N \end{array} \end{array} = r. \end{aligned}$$

Теперь значения m находят по уравнению (21.53), т. е.

$$m^{\omega \alpha \beta} = (z_1 y^\alpha)_t [(y^\omega z_1)_m] (z_1 y^\beta) = s(r m_1)_p. \quad (21.60)$$

III. Центральное произведение $r m_1$ есть $r_{zu} m^{uvw}$.

Умножая куб m^{uvw} на квадрат r_{zu} по направлению u , как показано на рис. 21.6, имеем, что произведение по первой строке r дает

$$(r m_1)_g = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} g & g & p \\ \hline g & Kk + Lp & Kl + Lq \\ \hline p & Km + Lr & Kn + Ls \end{array} \end{array},$$

а произведение по второй строке r

$$(rm_1)_p = \begin{array}{c|cc} & g & p \\ \hline g & Mk + Np & Ml + Nq \\ \hline p & Mm + Nr & Mn + Ns \end{array}$$

Эти две матрицы образуют часть куба rm_1 . (Умножить можно и другим способом, отличным от показанного.)

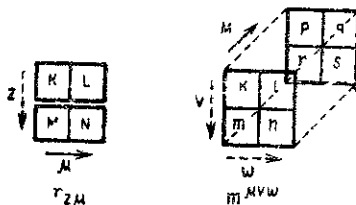


Рис. 21.6. Вычисление произведения $r_{zu} m^{uvw}$.

IV. Каждую из этих матриц следует умножить на s :

$$s(rm_1)_g = \begin{array}{c|cc} & g & p \\ \hline g & E(Kk + Lp) + F(Km + Lr) & E(kl + Lq) + F(Kn + Ls) \\ \hline p & G(Kk + Lp) + H(Km + Lr) & G(Kl + Lq) + H(Kn + Ls) \end{array},$$

$$s(rm_1)_p = \begin{array}{c|cc} & g & p \\ \hline g & E(Mk + Np) + F(Mm + Nr) & E(Ml + Nq) + F(Mn + Ns) \\ \hline p & G(Mk + Np) + H(Mm + Nr) & G(Ml + Nq) + H(Mn + Ns) \end{array}$$

V. Две последние матрицы умножают на p , как $s(rm_1)_g p$ что дает матрицы-компоненты окончательного куба:

$$m^g = \begin{array}{c|cc} & g & p \\ \hline g & [E(Kk + Lp) + F(Km + Lr)]A + [E(Kl + Lq) + F(Kn + Ls)]C & [E(Kk + Lp) + F(Km + Lr)]B + [E(Kl + Lq) + F(Kn + Ls)]D \\ \hline p & [G(Kk + Lp) + H(Km + Lr)]A + [G(Kl + Lq) + H(Kn + Ls)]C & [G(Kk + Lp) + H(Km + Lr)]B + [G(Kl + Lq) + H(Kn + Ls)]D \end{array} \quad (21.61)$$

С помощью этой матрицы выражают компоненты производных частот сеточного тока $\Delta i^g = \Delta e m^g \Delta e$. Другая матрица куба есть $s = (rm_1)_p p =$

| | p | g | p |
|---------|---|--|---|
| $m^p =$ | g | $[E(Mk+Np)+F(Mm+Nr)]A + [E(Mk+Np)+F(Mm+Nr)]B + [E(Ml+Nq)+F(Mn+Ns)]C$ | $[E(Mk+Np)+F(Mm+Nr)]B + [E(Ml+Nq)+F(Mn+Ns)]D$ |
| | p | $[G(Mk+Np)+H(Mm+Nr)]A + [G(Mk+Np)+H(Mm+Nr)]B + [G(Ml+Nq)+H(Mn+Ns)]C$ | $[G(Mk+Np)+H(Mm+Nr)]B + [G(Ml+Nq)+H(Mn+Ns)]D$ |

(21.62)

С помощью этой матрицы находят компоненты производных частот $\Delta i^p = \Delta \text{em}^p \Delta e$.

Последние две матрицы m^g и m^p — компоненты 3-тензора m , дающие все токи производных частот (если $\omega = \alpha \pm \beta$):

$$\Delta i^{(\omega)} = \Delta e_{(\alpha)} m^{(\omega)(\alpha)(\beta)} \Delta e_{(\beta)}, \quad (21.63)$$

обусловленные напряжениями основных частот $\Delta e_{(\alpha)}$.

VI. Оценим одну из восьми компонент 3-тензора m , скажем, M^{pgg} , т. е. компоненту верхнего левого угла в матрице (21.62):

$$M' = M(AEk + AFm + CEI + CFn) + \\ + N(AEp + AFr + CEq + CFs),$$

но

$$M = -\frac{r g^{\mu p} Z_{g\omega}}{D_\omega}, \quad A = \frac{r g Z'_{p\beta}}{D_\beta}, \quad E = \frac{r g Z'_{p\alpha}}{D_\alpha}; \\ C = -\frac{r g^{\mu p} Z_{p\beta}}{D_\beta}, \quad F = -\frac{r g^{\mu p} Z_{p\alpha}}{D_\alpha D}, \quad N = \frac{r p Z'_{g\omega}}{D_\omega},$$

где

$$D = (r_g + Z_g)(r_p + Z_p) - Z_p Z_{g^{\mu p} p^{\mu g}}; \\ Z' = r + Z; \quad \omega = \alpha \pm \beta.$$

Следовательно, одна из восьми компонент есть

$$M^{(\omega)(\alpha)(\beta)} = \frac{r g^{\mu p} Z_{g\omega}}{2D_\alpha D_\beta D_\omega} \left[Z'_{p\alpha} Z'_{p\beta} \frac{\partial r_g}{\partial e_g} + r_g^2 \mu_p Z_{p\alpha} Z'_{p\beta} \frac{\partial G^{gp}}{\partial e_g} - \right. \\ \left. - \mu_p Z_{p\beta} Z'_{p\alpha} \frac{\partial r_g}{\partial e_p} - r_g^2 \mu_p^2 Z_{p\alpha} Z_{p\beta} \frac{\partial G^{gp}}{\partial e_p} \right] + \\ + \frac{r_p Z'_{g\omega}}{2D_\alpha D_\beta D_\omega} \left[\frac{r_g^2}{r_p^2} \mu_p Z_{p\alpha} Z'_{p\beta} \frac{\partial r_p}{\partial e_g} + r_g^2 Z'_{p\alpha} Z'_{p\beta} \frac{\partial G^{pg}}{\partial e_g} - \right. \\ \left. - \frac{r_g^2}{r_p^2} \mu_p^2 Z_{p\alpha} Z_{p\beta} \frac{\partial r_p}{\partial e_p} - r_g^2 \mu_p Z_{p\beta} Z'_{p\alpha} \frac{\partial G^{gp}}{\partial e_p} \right]. \quad (21.64)$$

Каждый Z вычисляется для частоты, соответствующей его нижним индексам. Если *сеточное напряжение* — сумма n напряжений различных частот, то имеется $2n^2$ различных компонент $M^{(\omega)(\alpha)(\beta)}$, дающих $2n^2$ различных *анодных токов*:

$$\Delta i^{p(\alpha\pm\beta)} = m p g g^{(\alpha\pm\beta)(\alpha)(\beta)} \Delta e_{g(\alpha)} \Delta e_{g(\beta)} \quad (21.65)$$

в предположении, что α и β пробегает диапазон частот 1, 2, (или $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$). В уравнении p и g — фиксированные открытые индексы.

Когда аналогично уравнению (21.63) рассчитывают все восемь компонент m , каждой частоте тока $\Delta i^{(\omega)} = \Delta i^{(\alpha\pm\beta)}$ соответствует куб. В общей сложности имеется $2n^2$ кубов, каждый из которых дает частный ток одной производной частоты, текущий во всей цепи. Все токи, данные в кубе, имеют одну частоту

АНАЛИЗ СЕТЕЙ

1. ТИПЫ СЕТЕВЫХ ЗАДАЧ

I. Задачи, возникающие при изучении сетей, можно разбить на две основные группы: 1) *дана сеть, нужно установить ее свойства*, а именно: различные токи, напряжения, мощности, импедансы данной сети; такие задачи встречаются в «анализе сетей»; 2) *даны свойства сети, требуется найти саму сеть*; например, нужно определить, каковы должны быть импедансы сети, чтобы сеть обеспечивала постоянные токи на некоторых нагрузках; такие задачи встречаются в «синтезе сетей».

II. Анализ сетей может включать простые или сложные действия с тензорными уравнениями в зависимости от рассматриваемой задачи. Простыми действиями являются:

1) при заданной сети и некоторых токах и напряжениях найти токи, напряжения, мощность в других частях сети;

2) изменено значение некоторых токов, напряжений или импедансов сети, найти изменения в различных частях сети.

Более сложными действиями являются:

3) сделаны такие изменения, что отклик сети в некоторой узловой паре или контуре является *максимальным* или *минимальным*, например, могут изменяться некоторые импедансы так, чтобы выходная мощность на определенных нагрузках была максимальной;

4) изменения, которые надо сделать, зависят от данных, которые еще надо найти.

Хотя во многих задачах геометрические объекты преобразовать легко, *решения* уравнений могут стать неуправляемыми или невозможными и тогда нужно прибегать к аппроксимации и пошаговому решению. Такие случаи, например, встречаются в анализе при наличии *абсолютных значений* или фазовых углов напряжений, токов или импедансов.

Все рассматриваемые сети будем считать активными и *асимметричными*, следовательно, в них могут входить многоэлектродные лампы, вращающиеся электрические машины и другие линейные электрические и механические сети.

III. *Огромное преимущество формулировки и решения* (если возможно) *сетевых задач в терминах тензорных уравнений заключается в том, что каждый тип задач можно изучить раз и*

навсегда независимо от количества контуров или узловых пар, от способа соединения катушек или способа их возбуждения. Анализ нужно провести только однажды, и конечный результат можно использовать для каждого конкретного случая одним и тем же способом автоматически.

При обычном способе анализа как вывод уравнений, так и весь метод анализа следует повторять для каждого отдельного случая, возникающего в инженерной практике. Поскольку в обычном анализе огромное количество катушек, огромное разнообразие соединений и гипотетических координатных систем затрудняют задачу, очень часто для каждого конкретного случая требуется отдельный метод решения. Во многих случаях анализ просто прекращается уже после первых шагов из-за механических трудностей оперирования с огромным числом уравнений.

2. МЕТОД РАССУЖДЕНИЯ

I. Задачи анализа систем можно сформулировать так: дана сеть, *найти ее свойства*. Нечислимое множество задач, возникающих при исследовании сетей, не позволяет указать общий способ решения. Во многих случаях предпринимаются следующие шаги:

1) устанавливается, будет ли рассматриваться сеть как контурная, узловая или полная;

2) выводится уравнение поведения сети;

3) устанавливается количество типов контуров и узловых пар, однотипные контуры или узловые пары выполняют одинаковые функции;

4) уравнение поведения разделяют на столько инвариантных уравнений, сколько есть типов контуров или узловых пар, как показано в уравнениях (19.1) и (19.6);

5) *система тензорных уравнений преобразуется аналогично обычным уравнениям* в соответствии с требованиями задачи,

6) неизвестные, если они есть, находят точными или приближенными методами.

II. При анализе ортогональных компаунд-сетей следует помнить, что:

1) при выводе компаунд Z наличие неактивных компаунд-узловых пар просто игнорируется; неактивные компаунд-контуры исключаются по формулам редукции (см. гл. 10);

2) при выводе компаунд Y наличие неактивных компаунд-контуров просто игнорируется; неактивные компаунд-узловые пары исключаются по формулам редукции (см. гл. 10).

Таким образом, исключая или игнорируя неактивные контуры и узловые пары, анализ сетей можно проводить только в терминах активных контуров и узловых пар.

III. Будут разработаны два типа задач как примеры этого метода исследования: 1) дана приложенная величина, найти отклик; 2) даны изменения величин, определить отклик.

При анализе обычно нужно провести такое количество обращений матриц, сколько есть типов контуров и узловых пар. Аналогично каждая матрица будет иметь только столько строк и столбцов, сколько осей имеется в соответствующей группе контуров или узловых пар.

Отметим, что каждый тип контуров или узловых пар может содержать любое число отдельных контуров или узловых пар.

При операциях с уравнениями нужно постоянно помнить, что даже в качестве промежуточного шага можно использовать обращение только квадратного 2-тензора. Такие тензоры являются обычно только диагональными компонентами компаунд-2-тензора.

3. АНАЛИЗ π -СЕТЕЙ

I. При заданном входе E_1 и выходе I^2 следует найти входной ток I^1 и разность потенциалов E_2 на нагрузке.

Узловые пары сетей бывают трех типов: входные, выходные и неактивные; последние включают все остальные узловые пары (рис. 22.1, а). Если неактивные узловые пары исключаются из

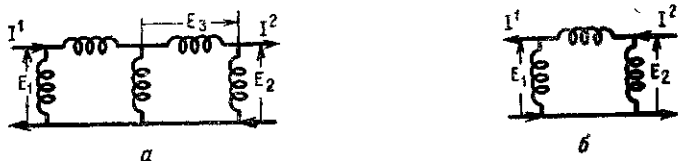


Рис. 22.1.

а — данная узловая сеть (3 узловые пары); б — редуцированная (уменьшенная) сеть (2 узловые пары). Дано: E_1 , I^2 ; найти: I^1 , E_2 .

уравнения тока методами, описанными в гл. 10, § 9, остаются только входные и выходные узловые пары (рис. 22.1, б), уравнения для которых заданы в (19.2):

$$I^1 = Y^{11}E_1 - Y^{12}E_2, \quad (22.1)$$

$$I^2 = Y^{21}E_1 - Y^{22}E_2.$$

Штрихи опущены.

II. Напряжения нагрузки E_2 находят из второго уравнения

$$E_2 = Y^{22-1}(Y^{21}E_1 - I^2) \quad (22.2)$$

вычислением тензора, обратного Y^{22} , имеющего столько строк и столбцов, сколько имеется осей нагрузки.

Входной ток I^1 находят подстановкой E_2 в первое уравнение:

$$I^1 = Y^{11}E_1 - Y^{12}Y^{22-1}(Y^{21}E_1 - I^2),$$

$$I^1 = (Y^{11} - Y^{12}Y^{22-1}Y^{21})E_1 + Y^{12}Y^{22-1}I^2. \quad (22.3)$$

4. НАПРЯЖЕНИЯ ОТКРЫТОЙ ЦЕПИ

I. При заданном входе E_1 и выходе I^2 найти разность потенциалов E_3 на нескольких (не всех) из оставшихся узловых пар.

Имеется *четыре* типа узловых пар (рис. 22.2, а): входные, выходные, зажимы открытой цепи и неактивные. Компонент-сеть должна иметь соответственно четыре узловых пары (или пять узлов).

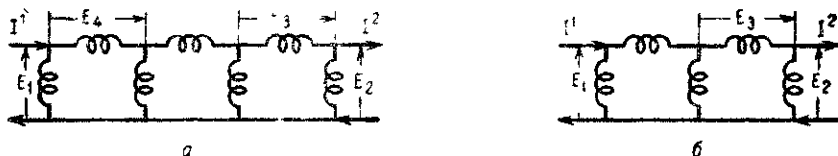


Рис. 22.2.

а — дающая узловую сеть (4 узловые пары); б — редуцированная сеть (3 узловые пары).
Дано: E_1 , I^2 ; найти: E_3 .

Уравнение тока $I = YE$ узловой сети должно быть разделено на *четыре* уравнения. Если неактивное уравнение *не исключается*, эти четыре уравнения имеют вид

$$I^1 = Y^{11}E_1 - Y^{12}E_2 - Y^{13}E_3 - Y^{14}E_4,$$

$$I^2 = Y^{21}E_1 - Y^{22}E_2 - Y^{23}E_3 - Y^{24}E_4,$$

$$0 = Y^{31}E_1 - Y^{32}E_2 - Y^{33}E_3 - Y^{34}E_4,$$

$$0 = Y^{41}E_1 - Y^{42}E_2 - Y^{43}E_3 - Y^{44}E_4. \quad (22.4)$$

Все *диагональные* тензоры Y^{11} , Y^{22} , Y^{33} и Y^{44} имеют квадратные матрицы и обратные им могут быть найдены.

Задача состоит в том, чтобы найти E_3 , если известны E_1 и I^2 .

II. Первый этап — исключить неактивное E_4 из последнего уравнения:

$$E_4 = Y^{44-1}(Y^{41}E_1 - Y^{42}E_2 - Y^{43}E_3).$$

Подставив в остальные уравнения, получим

$$I^1 = (Y^{11} - Y^{14}Y^{44-1}Y^{41})E_1 - (Y^{12} - Y^{14}Y^{44-1}Y^{42})E_2 - (Y^{13} - Y^{14}Y^{44-1}Y^{43})E_3,$$

$$I^2 = (Y^{21} - Y^{24}Y^{44-1}Y^{41})E_1 - (Y^{22} - Y^{24}Y^{44-1}Y^{42})E_2 -$$

$$- (Y^{23} - Y^{24}Y^{44-1}Y^{43})E_3, \quad (22.5)$$

$$0 = (Y^{31} - Y^{34}Y^{44-1}Y^{41})E_1 - (Y^{32} - Y^{34}Y^{44-1}Y^{42})E_2 -$$

$$- (Y^{33} - Y^{34}Y^{44-1}Y^{43})E_3.$$

Если требуется, заменяем их на

$$\begin{aligned} I^1 &= Y^{11'} E_1 - Y^{12'} E_2 - Y^{13'} E_3, \\ I^2 &= Y^{21'} E_1 - Y^{22'} E_2 - Y^{23'} E_3, \\ 0 &= Y^{31'} E_1 - Y^{32'} E_2 - Y^{33'} E_3, \end{aligned} \quad (22.6)$$

представляющие собой эквивалент двойной π -сети с тремя узловыми парами (рис. 22.2, б). Адмиттансы со штрихами это собственные и взаимные адмиттансы первых трех узловых пар, измеренные при разомкнутой четвертой узловой паре, аналогично адмиттансам уравнения (22.1).

III. В последней системе уравнений E_1 и I^2 известны, а E_3 следует найти. Получая E_2 из второго уравнения

$$E_2 = Y^{22'-1} (Y^{21'} E_1 - Y^{23'} E_3 - I^2)$$

и подставляя его в третье

$$0 = Y^{31'} E_1 - Y^{32'} Y^{22'-1} (Y^{21'} E_1 - Y^{23'} E_3 - I^2) - Y^{33'} E_3,$$

получаем уравнение, содержащее только известные E_1 и I^2 и неизвестное E_3 . Приведем подобные члены

$$0 = (Y^{31'} - Y^{32'} Y^{22'-1} Y^{21'}) E_1 - (Y^{33'} - Y^{32'} Y^{22'-1} Y^{23'}) E_3 + Y^{32'} Y^{22'-1} I^2$$

и, разрешая относительно неизвестной E_3 , получаем

$$\begin{aligned} E_3 &= (Y^{33'} - Y^{32'} Y^{22'-1} Y^{23'})^{-1} [(Y^{31'} - Y^{32'} Y^{22'-1} Y^{21'}) E_1 + \\ &\quad + Y^{32'} Y^{22'-1} I^2]. \end{aligned} \quad (22.7)$$

IV. При вычислении E_3 нужно найти три обратные матрицы:

1) обратную Y^{44} , содержащую столько строк и столбцов, сколько имеется неактивных узловых пар (E_4);

2) обратную $Y^{22'} = Y^{22} - Y^{24} Y^{44-1} Y^{42}$, содержащую столько столбцов и строк, сколько их в Y^{22} , т. е. столько, сколько имеется узловых пар нагрузки;

3) обратную $Y^{33'} = Y^{32'} Y^{22'-1} Y^{23'}$, имеющую столько строк и столбцов, сколько их в $Y^{33} = Y^{33} - Y^{34} Y^{44-1} Y^{43}$ или в Y^{33} , т. е. столько, сколько имеется зажимов разомкнутой цепи.

5. КОНТУРНЫЕ ТОКИ В ОРТОГОНАЛЬНОЙ СЕТИ

I. Чтобы получить пример задачи с ортогональной сетью, предположим, что ток I^j , проходящий через *некоторые* (не все) узловые пары сети во внешней нагрузке, известен (рис. 22.3, а). Найдем все токи контуров i^m .

Поскольку напряжения роли не играют, пишем уравнение для напряжения $E + e = z(i + I)$, содержащее столько уравнений, сколько всего имеется контуров и требуемых узловых пар. В дан-

ном примере число известных токов то же, что и число требуемых узловых пар.

Ортогональные уравнения напряжения можно вывести из уравнения (19.3) в виде

$$0 = z_{mm} i^m - z_{mj} I^j, \quad (22.8)$$

$$E_j = z_{jm} i^m - z_{jj} I^j,$$

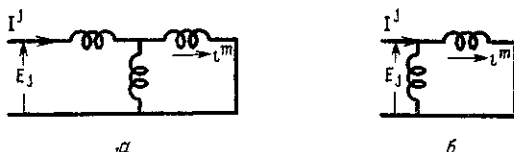


Рис. 22.3.

a — данная узловая сеть (1 контур, 2 узловые пары); *б* — пренебрежение неактивной узловой парой. Дано: I^j ; найти: i^m .

поскольку нет приложенных напряжений в катушках e_m . В этих уравнениях I известны, а i^m (и E_j) неизвестны. *Неизвестные токи контуров находят* из первого уравнения

$$i^m = + z_{mm}^{-1} z_{mj} I^j. \quad (22.9)$$

Матрица z_{mm} , обратную которой нужно найти, имеет столько строк и столбцов, сколько есть контуров. Числовой пример был

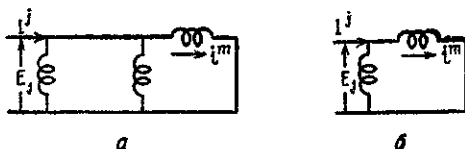


Рис. 22.4.

a — данная ортогональная сеть (2 контура, 1 узловая пара); *б* — пренебрежение активным контуром при получении Y . Дано: E_j ; найти i^m .

рассмотрен в гл. 16, § 11 с приложенными в контурах напряжениями e_m .

II. Пусть вместо I известно E (рис. 22.4) и пусть некоторые (не все) контурные токи i^m найдены. В этом случае пишем уравнение тока $i + I = Y(E + e)$, в котором столько уравнений, сколько *всего* узловых пар и контуров. (Если нужно найти только некоторые контурные токи, количество контуров берется меньше, чем количество всех контуров.) При получении Y неактивными контурами можно пренебречь, рассматривая только требуемые контуры.

Ортогональные уравнения токов из уравнения (19.5) (где $\mathbf{e}_m = \mathbf{e}_j = \mathbf{I}^m = \mathbf{i}^j = \mathbf{E}_m = 0$) имеют вид

$$\mathbf{i}^m = \mathbf{Y}^{mj} \mathbf{E}_j, \quad \mathbf{I}^j = \mathbf{Y}^{jj} \mathbf{E}_j. \quad (22.10)$$

Токи \mathbf{i}^m находят, не вычисляя обратные матрицы.

III. Пусть вновь известен ток \mathbf{I} , проходящий через *некоторые* узловые пары, и пусть требуется найти только *некоторые* из контурных токов \mathbf{i}^m . Теперь контуры следует разделить на два вида, в то время как из узловых пар используются только *исследуемые* (рис. 22.5).



Рис. 22.5.

а — данная ортогональная сеть (2 контура, 2 узловые пары); б — пренебрежение неактивными узловыми парами.

Таким образом, в ортогональном уравнении напряжения первое уравнение (представляющее контурные оси) делится на два:

$$\begin{aligned} z_{m1m1} \mathbf{i}^{m1} + z_{m1m2} \mathbf{i}^{m2} - z_{m1j1} \mathbf{I}^{j1} &= 0 = z_{11} \mathbf{i}^1 + z_{12} \mathbf{i}^2 - z_{13} \mathbf{I}^3, \\ z_{m2m1} \mathbf{i}^{m1} + z_{m2m2} \mathbf{i}^{m2} - z_{m2j1} \mathbf{I}^{j1} &= 0 = z_{21} \mathbf{i}^1 + z_{22} \mathbf{i}^2 - z_{23} \mathbf{I}^3, \\ z_{j1m1} \mathbf{i}^{m1} + z_{j1m2} \mathbf{i}^{m2} - z_{j1j1} \mathbf{I}^{j1} &= \mathbf{E} = z_{31} \mathbf{i}^1 + z_{32} \mathbf{i}^2 - z_{33} \mathbf{I}^3, \end{aligned} \quad (22.11)$$

где \mathbf{i}^1 представляет те контурные токи, которые нужно найти; \mathbf{i}^2 — остальные контурные токи; \mathbf{I}^3 — токи узловых пар (рис. 22.5, б). В этих уравнениях \mathbf{I}^3 известен, а \mathbf{i}^1 требуется найти (\mathbf{E}_3 — неизвестно).

Исключая \mathbf{i}^2 из второго уравнения, получаем

$$\mathbf{i}^2 = z_{22}^{-1} (z_{23} \mathbf{I}^3 - z_{21} \mathbf{i}^1). \quad (22.12)$$

Подставляя в первое уравнение, имеем

$$\mathbf{0} = z_{11} \mathbf{i}^1 + z_{12} z_{22}^{-1} (z_{23} \mathbf{I}^3 - z_{21} \mathbf{i}^1) - z_{13} \mathbf{I}^3.$$

Перегруппируем и получим

$$(z_{11} - z_{12} z_{22}^{-1} z_{21}) \mathbf{i}^1 = (z_{13} - z_{12} z_{22}^{-1} z_{23}) \mathbf{I}^3.$$

Отсюда контурные токи \mathbf{i}^1 , выраженные через узловые токи \mathbf{I}^3 ,

$$\mathbf{i}^1 = (z_{11} - z_{12} z_{22}^{-1} z_{21})^{-1} (z_{13} - z_{12} z_{22}^{-1} z_{23}) \mathbf{I}^3. \quad (22.13)$$

Две обратные матрицы, которые надо вычислить, имеют столько строк, сколько имеется неактивных и активных контуров соответственно.

Токи i^2 в неактивных контурах можно найти из уравнения (22.12), а разности потенциалов E на узловых парах — при подстановке значений i^1 и i^2 в третье уравнение (22.11).

6. ТРИОДНЫЕ ЦЕПИ

I. В гл. 15, § 17 было показано, что триод можно заменить одной анодной катушкой с сердечником и импедансом r_p с последовательно приложенным напряжением $\mu_p E_g$, где E_g — разность потенциалов между сеткой и катодом. Следовательно, если сеточная катушка исключается и количество контуров уменьшается на один, его заменяют узловой парой. При нескольких лампах исключается несколько контуров и их место занимает столько же узловых пар.

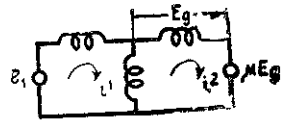


Рис. 22.6. Ламповая сеть как ортогональная сеть. Дано: e_1 ; найти i^1, i^2

При замене сеточной катушки на $\mu_p E_g$ количество уравнений, которые надо написать, не уменьшается, поскольку контурная сеть заменяется ортогональной. Однако ранг матрицы, обратную которой надо вычислить, уменьшается. Ранг этой матрицы равен числу контуров.

II. Рассмотрим ортогональную сеть (рис. 22.6) и рассчитаем ее тензор импеданса z , временно закорачивая сеточные узловые пары.

Все другие узловые пары неактивные, и при получении z их можно не учитывать.

После того как найдено z для данной сети, которая рассматривается как ортогональная, контуры сети можно разделить на два типа — содержащие μE_g и все остальные. Таким образом, соответствующая ортогональная сеть имеет два контура и одну узловую пару (рис. 22.6) и для нее уравнение напряжений имеет вид

$$\begin{aligned} e_1 &= z_{11}i^1 + z_{12}i^2, \\ \mu E_g &= z_{21}i^1 + z_{22}i^2, \\ -E_g &= z_{23}i^1 + z_{32}i^2 \end{aligned} \quad (22.14)$$

при нулевом токе узловой пары I^3 .

Следует отметить, что имеется два приложенных контурных напряжения e_1 и μE_g (где μ имеет диагональную матрицу), но из них известно только одно e_1 ; другое является функцией разности потенциалов E_g на компаунд-узловой паре.

III. E_g можно исключить, подставляя третье уравнение во второе:

$$\begin{aligned} -\mu(z_{31}i^1 + z_{32}i^2) &= z_{21}i^1 + z_{22}i^2, \\ (\mu z_{31} + z_{21})i^1 + (\mu z_{32} + z_{22})i^2 &= 0. \end{aligned}$$

Тогда оставшиеся два уравнения имеют вид

$$e_1 = z_{11}i^1 + z_{12}i^2, \quad (22.15)$$

$$0 = z'_{21}i^1 + z'_{22}i^2,$$

где

$$z'_{21} = \mu z_{31} + z_{21} \quad \text{и} \quad z'_{22} = \mu z_{32} + z_{22}. \quad (22.16)$$

В этих двух тензорных уравнениях сеточные узловые пары отсутствуют. Второе уравнение представляет собой анодные, а первое уравнение — остальные контуры, причем некоторые из них имеют приложенные напряжения.

С этого момента анализ становится таким же, как и для любой другой компаунд-контурной сети. Контуры, представленные первым уравнением (22.14), можно подразделить далее на контуры с приложенными напряжениями и без них или контуры эти можно разделить на входные, выходные и неактивные, или по любому другому признаку.

7. ОБЩИЕ ПАРАМЕТРЫ ЦЕПИ

1. В задачах линий передач часто получается, что входные величины E_1 и I^1 или (e_1 и i^1) известны, тогда как выходные величины E_2 и I^2 (или e_2 и i^2) неизвестны. Систему передачи будем рассматривать как узловую сеть.

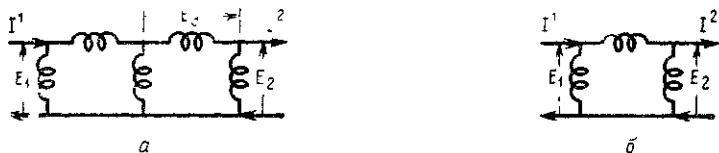


Рис. 22.7:

a — данная узловая сеть (3 узловые пары); *б* — редуцированная сеть (2 узловые пары).
Дано: E_1, I^1 ; найти E_2, I^2 .

В рассматриваемом случае имеется три вида узловых пар: входные, выходные и неактивные (рис. 22.7). Исключая неактивные оси по методу, описанному в гл. 10, § 9, получаем уравнения входных и выходных узловых пар (рис. 22.7, б):

$$I^1 = Y^{11}E_1 - Y^{12}E_2, \quad I^m = Y^{mn}E_n - Y^{mv}E_v, \quad (22.17)$$

$$I^2 = Y^{21}E_1 - Y^{22}E_2, \quad I^u = Y^{un}E_n - Y^{uv}E_v,$$

где E_1 и I^1 известны, а E_2 и I^2 — неизвестны.

II. Исключая E_2 из второго уравнения, получаем

$$E_2 = Y^{22-1}(Y^{21}E_1 - I^2). \quad (22.18)$$

Подставляем в первое уравнение

$$I^1 = Y^{11}E_1 - Y^{12}Y^{22-1}(Y^{21}E_1 - I^2).$$

Преобразуем

$$I^1 = (Y^{11} - Y^{12}Y^{22-1}Y^{21})E_1 + Y^{12}Y^{22-1}I^2. \quad (22.19)$$

В последнем уравнении неизвестной является I^2 . Разрешаем его относительно I^2 :

$$I^2 = Y^{22}Y^{12-1}[I^1 - (Y^{11} - Y^{12}Y^{22-1}Y^{21})E_1],$$

$$I^2 = Y^{22}Y^{12-1}I^1 - Y^{22}Y^{12-1}Y^{11}E_1 + Y^{21}E_1.$$

Таким образом, выходной ток выражений через входные величины имеет вид

$$I^2 = (Y^{21} - Y^{22}Y^{12-1}Y^{11})E_1 + Y^{22}Y^{12-1}I^1. \quad (22.20)$$

Так как нужно найти обратный Y^{12} , заметим, что Y^{12} является квадратным тензором, когда выбранное число входных и выходных узловых пар одинаково.

Если компаунд-входные и выходные зажимы имеют разное количество узловых пар, уравнение (22.20) представляет для каждой отдельной сети систему обычных линейных уравнений, в которой число неизвестных (компонент I^2) меньше или больше числа уравнений (компонент I^1). Такие линейные уравнения можно решать по методу, описанному в гл. 10, § 16.

Подставляя найденные выше значения I^2 в уравнение (22.18), получаем

$$E_2 = Y^{22-1}Y^{21}E_1 - Y^{22-1}(Y^{21} - Y^{22}Y^{12-1}Y^{11})E_1 - Y^{12-1}I^1.$$

Таким образом, выходные напряжения выражаются через входные в виде

$$E_2 = Y^{12-1}Y^{11}E_1 - Y^{12-1}I^1. \quad (22.21)$$

Два приведенных выше уравнения можно записать так:

$$E_2 = AE_1 + BI^1, \quad E_u = A_u^m E_m + B_{um} I^m, \quad (22.22)$$

$$I_2 = CE_1 + DI^1, \quad I^u = C^{um} E_m + D^u_m I^m,$$

где коэффициенты при выходных величинах называются «общими параметрами цепи» и определяются выражениями

$$\begin{aligned} A &= Y^{12-1}Y^{11} & A_u^m &= Z_{um}Y^{mn}, \\ B &= -Y^{12-1}, & B_{um} &= -Z_{um}, \\ C &= Y^{21} - Y^{22}Y^{12-1}Y^{11}, & C^{um} &= Y^{um} - Y^{uv}Z_{vn}Y^{nm}, \\ D &= Y^{22}Y^{12-1}, & D^u_m &= Y^{uv}Z_{vm}. \end{aligned} \quad (22.23)$$

Следует особо отметить, что каждый из общих параметров цепи имеет индексы в различных позициях.

III. Эти параметры не являются независимыми друг от друга, если сеть симметрична.

В этом случае $Y^{12} = Y_t^{21}$, а $Y^{11} = Y_t^{11}$ и $AD_t - BC_t = Y^{12-1} Y^{11} \times \times Y_t^{12-1} Y_t^{22} + Y^{12-1} (Y_t^{21} - Y_t^{11} Y_t^{12-1} Y_t^{22}) = Y^{12-1} Y_t^{21} = I - \text{единичный тензор.}$

Таким образом,

$$AD_t - BC_t = I, \quad A_u^m D_m^v - B_{um} C^{mv} = \delta_u^v. \quad (22.24)$$

С помощью этих уравнений выходные величины можно найти путем измерений на входе.

Аналогичные соотношения можно установить для контурной сети с заменой z на Y .

8. РАСПРЕДЕЛИТЕЛЬНЫЕ СЕТИ

I. В распределительной сети узловые пары, как правило, *поддерживаются при постоянной разности потенциалов E* с помощью регулятора напряжения. Точнее, абсолютное значение $\sqrt{E_1^2 + E_2^2}$ каждой компоненты $E_1 + jE_2$ величины E остается постоянным, тогда как другие величины меняются. Соответствующее I равно нулю.

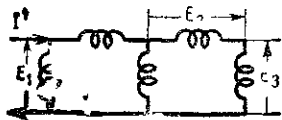


Рис. 22.8. Распределительная сеть (3 узловые пары).

Дано: $\rightarrow E, \{ E_2 \}$; найти:
 $\rightarrow E_2, \{ E_1 \}$.

В качестве простого примера задачи на распределительную сеть рассмотрим узловые пары, разделенные на три части (рис. 22.8):

- 1) одна часть содержит генераторы E_1 ; абсолютное значение каждой компоненты E_1 неизвестно, но их фазовые углы даны;
- 2) другая часть содержит регулятор напряжений E_2 ; абсолютное значение каждой компоненты E_2 известно, а их фазовые углы неизвестны;
- 3) остальные узловые пары с разностью потенциалов E_3 неактивны.

Уравнения тока узловой сети $I = YE$ разделяются на *три* тензорных уравнения:

$$\begin{aligned} I &= Y^{11} E_1 - Y^{12} E_2 - Y^{13} E_3, \\ 0 &= Y^{21} E_1 - Y^{22} E_2 - Y^{23} E_3, \\ 0 &= Y^{31} E_1 - Y^{32} E_2 - Y^{33} E_3. \end{aligned} \quad (22.25)$$

II. Исключая неактивные E_3 из третьего уравнения, получаем

$$E_3 = Y^{33-1} (Y^{31} E_1 - Y^{32} E_2).$$

Подставляем его во второе уравнение

$$0 = Y^{21}E_1 - Y^{22}E_2 - Y^{23}Y^{33-1}(Y^{31}E_1 - Y^{32}E_2)$$

и получаем следующее соотношение между напряжением генератора и напряжением регулятора E_2 :

$$(Y^{21} - Y^{23}Y^{33-1}Y^{31})E_1 = (Y^{22} - Y^{23}Y^{33-1}Y^{32})E_2. \quad (22.26)$$

Матрица Y^{22} является квадратной, как и матрица $Y^{22} - Y^{23}Y^{33-1}Y^{32}$. Решая относительно E_2 , получаем

$$E_2 = (Y^{22} - Y^{23}Y^{33-1}Y^{32})^{-1}(Y^{21} - Y^{23}Y^{33-1}Y^{31})E_1, \quad (22.27)$$

$$E_2 = Y^{22'-1}Y^{21'}E_1 = Y_2^1 E_1. \quad (22.28)$$

Это уравнение дает соотношение между напряжением генератора E_1 и напряжением регулятора E_2 . *Неизвестными являются абсолютные значения E_1 и фазовый угол E_2* . Матрица Y_2^{-1} имеет столько столбцов, сколько есть регуляторов напряжения, и столько строк, сколько генераторов. Точный способ решения таких уравнений здесь не рассматривается.

III. В частных случаях можно найти *приближенное* решение; например: если число генераторов совпадает с числом регуляторов; если все генераторы и регуляторы напряжения работают в фазе.

Поскольку компоненты E_1 и E_2 — действительные числа, уравнение (22.28) можно разрешить с *использованием только действительной части Y_2^1* , а именно Y^r , где $Y_2^1 = Y^r + jY^i$, так что уравнение $E_{2r} = Y^r E_{1r}$ можно решить в виде

$$E_{1r} = Y^{r-1} E_{2r}. \quad (22.29)$$

Оно задает неизвестные генерированные напряжения $|E_1|$.

IV. Если предполагается, что в фазе находятся только генерированные напряжения ($E_1 = E_{1r}$), то действительные и мнимые компоненты $E_2 = E_{2r} + jE_{2i}$ можно найти методом *последовательных приближений*, если абсолютные значения каждой компоненты известны.

Таким образом, если E_1 имеет только действительные значения, уравнение (22.28) можно записать в форме

$$E_{2r} = Y^r E_{1r}, \quad E_{2i} = Y^i E_{1r}. \quad (22.30)$$

Далее делаем следующее:

1) находим E_{1r} из первого уравнения, полагая абсолютное значение каждой компоненты E_2 равным действительной компоненте E_{2r} ;

2) подставляя E_{1r} во второе уравнение, получаем мнимые компоненты E_{2i} ;

3) при известном абсолютном значении каждой компоненты E_2 и их мнимых частей из уравнения $(E)^2 = (E_r)^2 + (E_i)^2$ можно рассчитать *вещественные значения* каждой компоненты E_2 .

Если известны более точные значения описанных выше E_{2r} , действия можно повторить несколько раз, улучшая последовательно точность определения E_{2r} и E_{2j} .

Генераторные токи I^1 находим при подстановке значений E_1 , E_2 и E_3 (данных в уравнении (22.29)) в первое уравнение (22.25).

9. ИЗМЕНЕНИЯ В ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ВЕЛИЧИНАХ

I. Если токи и напряжения в цепи подвержены возмущениям ΔE и ΔI , то в силу линейности системы каждое возмущение вызывает собственный отклик независимо от наличия E и I в момент возмущения. Это можно видеть из рассмотрения контурной сети, для которой уравнение напряжения до возмущения есть $e=zi$.

При изменении e до $e+\Delta e$ и i до $i+\Delta i$ (при неизменном z) уравнение напряжения *после* изменения есть $e+\Delta e=z(i+\Delta i)$.

Вычитая исходное уравнение $e=zi$, получаем *уравнение для изменения напряжения* $\Delta e=z\Delta i$.

Таким образом, для Δe , ΔE , Δi и ΔI для e , E , i и I применяют одни и те же уравнения. Следовательно, для *изучения изменений в сети при условии, что сама сеть неизменна, применяют следующие уравнения*:

$$\Delta e = z\Delta i, \quad (\Delta E + \Delta e) = z(\Delta i + \Delta I), \quad (22.31)$$

$$\Delta I = Y\Delta E, \quad (\Delta i + \Delta I) = Y(\Delta E + \Delta e).$$

II. При наличии нескольких типов контуров и узловых пар *результатирующие уравнения разделяются на несколько тензорных аналогично уравнениям (19.1)–(19.6)*. Например, $\Delta e=z\Delta i$ разделяется на

$$\begin{aligned} \Delta e_1 &= z_{11}\Delta i^1 + z_{12}\Delta i^2 + z_{13}\Delta i^3 + \dots, \\ \Delta e_2 &= z_{21}\Delta i^1 + z_{22}\Delta i^2 + z_{23}\Delta i^3 + \dots, \end{aligned} \quad (22.32)$$

$$\Delta e_3 = z_{31}\Delta i^1 + z_{32}\Delta i^2 + z_{33}\Delta i^3 + \dots$$

.

III. *Изменения могут быть любой величины, большими или малыми*. Изменение, скажем, ΔE может заключаться в уменьшении некоторых компонент E до нуля.

В нелинейных сетях, например в цепях многоэлектродных ламп, изменения ΔE и ΔI могут быть только небольшими.

10. ИЗМЕНЕНИЕ В π -СЕТИ

1. Пусть дана сеть с узловыми парами трех видов: входными, выходными и неактивными (рис. 22.9, а). Будем исследовать два вида изменений.

1. Пусть изменяется нагрузка. Ток нагрузки I^2 изменяется на ΔI^2 , а приложенное напряжение E_1 остается постоянным. Вопрос

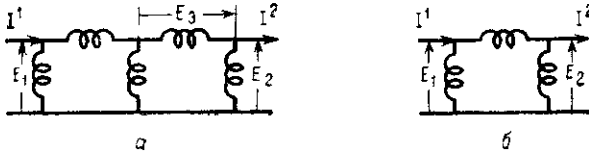


Рис. 22.9.

а — данная узловая сеть (3 узловые пары), б — редуцированная сеть (2 узловые пары).
Дано ΔI^2 , ΔE_1 , найти ΔE_2 , ΔI^1 .

заключается в том, насколько изменится напряжение на нагрузке E_2 и входной ток I^1 .

Исключая неактивные оси ΔE_3 , получаем уравнение эквивалентной π -сети (рис. 22.9, б):

$$\Delta I^1 = Y^{11} \Delta E_1 - Y^{12} \Delta E_2, \quad (22.33)$$

$$\Delta I^2 = Y^{21} \Delta E_1 - Y^{22} \Delta E_2.$$

Поскольку приложенное напряжение E_1 не меняется, то $\Delta E_1 = 0$ и уравнения принимают вид

$$\Delta I^1 = -Y^{12} \Delta E_2, \quad \Delta I^2 = -Y^{22} \Delta E_2.$$

Изменение напряжения на зажимах нагрузки (из второго уравнения)

$$\Delta E_2 = -Y^{22-1} \Delta I^2. \quad (22.34)$$

Подставляя ΔE_2 в первое из уравнений (22.33), получаем изменение входного тока

$$\Delta I^1 = Y^{12} Y^{22-1} \Delta I^2. \quad (22.35)$$

2. Пусть вновь нагрузка меняется, но теперь входное напряжение E_1 изменяется на ΔE_1 , а напряжение на нагрузке E_2 остается постоянным ($\Delta E_2 = 0$). Тогда уравнение (22.33) можно записать в виде

$$\Delta I^1 = Y^{11} \Delta E_1, \quad (22.36)$$

$$\Delta I^2 = Y^{21} \Delta E_1, \quad (22.37)$$

что дает явные выражения для приращений токов (рис. 22.10).

Эту последнюю задачу можно сформулировать в виде вопроса о том, каково должно быть ΔE_1 , чтобы обеспечить постоянст-

во E_2 при заданном ΔI^2 . Поэтому в последнем уравнении будем считать, что ΔE_1 неизвестно, а ΔI^2 известно (рис. 22.11).

Если число входных и выходных зажимов одинаково, то Y^{21} — квадратная и необходимая (для поддержания постоянства напряжений нагрузки (E_2)) изменение приложенного напряжения

$$\Delta E_1 = Y^{21-1} \Delta I^2 \quad (22.38)$$

для данного изменения тока в нагрузке.

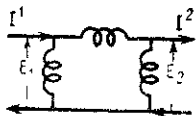


Рис. 22.10. Данная узловая сеть (2 узловые пары).

Дано: ΔE_1 , ΔE_2 ; найти ΔI^1 , ΔI^2 .

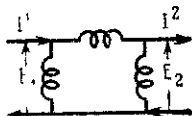


Рис. 22.11. Данная узловая сеть (2 узловые пары).

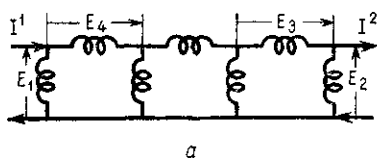
Дано: ΔI^2 , ΔE_2 ; найти: ΔE_1 .

Если число входных и выходных зажимов разное, следует использовать метод, изложенный в гл. 10, § 16.

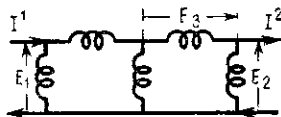
11. ИЗМЕНЕНИЕ НАПРЯЖЕНИЙ ОТКРЫТОЙ ЦЕПИ

I. Пусть ток в нагрузке меняется на ΔI^2 , а входное напряжение E_1 остается постоянным. Каково изменение ΔE_3 на части неактивных узловых пар?

Имеется четыре вида узловых пар (рис. 22.12, а). Исключая неактивное E_4 , оставляем три типа узловых пар (рис. 22.12, б),



а



б

Рис. 22.12.

а — данная узловая сеть (4 узловые пары), б — редуцированная сеть (3 узловые пары).
Дано ΔI^2 , ΔE_1 , найти ΔE_3

уравнения для которых даны в (22.6). Опуская штрихи, выписываем те же уравнения для изменений:

$$\begin{aligned} \Delta I^1 &= Y^{11} \Delta E_1 - Y^{12} \Delta E_2 - Y^{13} \Delta E_3, \\ \Delta I^2 &= Y^{21} \Delta E_1 - Y^{22} \Delta E_2 - Y^{23} \Delta E_3, \\ 0 &= Y^{31} \Delta E_1 - Y^{32} \Delta E_2 - Y^{33} \Delta E_3. \end{aligned} \quad (22.39)$$

II. В этих уравнениях ΔI^2 дано, а $\Delta E_1 = 0$. Задача состоит в том, чтобы найти ΔE_3 в терминах ΔI^2 .

Приравниваем ΔE_1 нулю:

$$\begin{aligned}\Delta I^1 &= -Y^{12}\Delta E_2 - Y^{13}\Delta E_3, \\ \Delta I^2 &= -Y^{22}\Delta E_2 - Y^{23}\Delta E_3, \\ 0 &= -Y^{32}\Delta E_2 - Y^{33}\Delta E_3.\end{aligned}\tag{22.40}$$

Находим ΔE_2 из второго уравнения

$$\Delta E_2 = -Y^{22-1}(Y^{23}\Delta E_3 + \Delta I^2),$$

подставляем в третье уравнение

$$0 = Y^{32}Y^{22-1}(Y^{23}\Delta E_3 + \Delta I^2) - Y^{33}\Delta E_3.$$

Преобразуем

$$(Y^{33} - Y^{32}Y^{22-1}Y^{23})\Delta E_3 = Y^{32}Y^{22-1}\Delta I^2.$$

Таким образом, изменение напряжения открытой цепи, вызванное изменением тока в нагрузке на величину ΔI^2 , есть

$$\Delta E_3 = (Y^{33} - Y^{32}Y^{22-1}Y^{23})^{-1}Y^{32}Y^{22-1}\Delta I^2.\tag{22.41}$$

12. ОБОБЩЕНИЕ «ТЕОРЕМЫ О КОМПЕНСАЦИИ»

I. В предыдущих параграфах изменялись электрические величины при неизменной электрической сети. (Конечно, нагрузка на сети могла меняться.) *Теперь пусть импедансы z или адмиттансы некоторых или всех катушек тоже изменяются до $z + \Delta z$ или до $Y + \Delta Y$, но без изменения количества или способа соединения катушек.* Например, могут изменяться собственные импедансы некоторых катушек или взаимные индуктивности между катушками и т. д.

Рассматривая уравнение напряжений всей сети до изменения

$$E + e = z(i + I),\tag{22.42}$$

будем считать, что z изменяется до $z + \Delta z$, путь также меняются все электрические величины. После изменения уравнение имеет вид

$$(E + \Delta E) + (e + \Delta e) = (z + \Delta z)[(i + \Delta i) + (I + \Delta I)].\tag{22.43}$$

Вычитаем исходное уравнение (22.42) и получаем

$$\Delta E + \Delta e = (z + \Delta z)(\Delta i + \Delta I) + \Delta z(i + I),\tag{22.44}$$

так что уравнение изменения напряжения есть

$$(\Delta E + \Delta e) - \Delta z(i + I) = (z + \Delta z)(\Delta i + \Delta I).\tag{22.45}$$

Таким образом, если импеданс z сети изменяется на Δz , то это изменение эквивалентно приложению к новой системе на-

пряжения, равного $-\Delta z(i+I)$, где $(i+I)$ — полные токи, текущие в системе до изменения.

Если приложенные напряжения $E+e$ не меняются, то последнее уравнение принимает вид

$$-\Delta z(i+I) = (z + \Delta z)(\Delta i + \Delta I) \quad (22.46)$$

и показывает, что все изменения токов обусловлены этим кажущимся дополнительным приложенным напряжением. В контурной сети без приложенного тока I уравнение (22.45) становится следующим:

$$\Delta e - \Delta zi = (z + \Delta z) \Delta i. \quad (22.47)$$

II. Аналогичные рассуждения применяются к уравнению тока полной сети, в которой так же адмиттансы изменяются на ΔY . Уравнение изменения тока

$$(\Delta i + \Delta I) - \Delta Y(E + e) = (Y + \Delta Y)(\Delta E + \Delta e). \quad (22.48)$$

В узловой сети без приложенного e это уравнение принимает вид

$$\Delta I - \Delta YE = (Y + \Delta Y) \Delta E, \quad (22.49)$$

задавая кажущийся дополнительно приложенный ток в виде $-\Delta YE$.

Уравнения (22.45) и (22.48) являются обобщениями так называемой «теоремы о компенсации», утверждающей, что единичное изменение импеданса Δz эквивалентно приложению напряжения $-\Delta zi$, где i — ток, текущий через z до изменения.

III. Каждое из приведенных выше тензорных уравнений для изменений можно разбить на столько тензорных уравнений, сколько есть видов контуров и узловых пар. Изменение сети Δz или ΔY обычно встречается только в одном типе контуров или узловых пар, значит, только одно из уравнений содержит Δz или ΔY , в то время как остальные содержат только z или Y и, конечно, $\Delta i \Delta E$ и т. д.

Например, в контурной сети с тремя видами контуров, в которой только z_{33} изменяется до $z_{33} + \Delta z_{33}$, уравнение (22.47) принимает вид

$$\begin{aligned} \Delta e_1 &= z_{11} \Delta i^1 + z_{12} \Delta i^2 + z_{13} \Delta i^3, \\ \Delta e_2 &= z_{21} \Delta i^1 + z_{22} \Delta i^2 + z_{23} \Delta i^3, \\ -\Delta z_{33} i^3 + \Delta e_3 &= z_{31} \Delta i^1 + z_{32} \Delta i^2 + (z_{33} + \Delta z_{33}) \Delta i^3. \end{aligned} \quad (22.50)$$

Следует отметить, что величины изменений Δz , Δi и других могут быть любыми: большими или малыми.

13. ИЗМЕНЕНИЕ ИМПЕДАНСА

I. В качестве простого примера рассмотрим двухконтурную компаунд-сеть (рис. 22.13, а), для которой уравнение напряжения

$$e_1 = z_{11}i^1 + z_{12}i^2, \quad (22.51)$$

$$e_2 = z_{21}i^1 + z_{22}i^2.$$



Рис. 22.13.

а — данная контурная сеть (2 контура); б — добавление Δz_{22} . Дано: Δz_{22} ; найти Δi^1 , Δi^2 .

Пусть импеданс z_{22} изменяется на Δz_{22} (рис. 22.13, б), а приложенные напряжения e_1 и e_2 остаются неизменными. Требуется найти приращения токов Δi^1 и Δi^2 .

Уравнение изменения напряжения в контурной сети (22.45) без I и Δe

$$-\Delta z i = (z + \Delta z) \Delta i \quad (22.52)$$

разделяем на два составных уравнения

$$0 = z_{11}\Delta i^1 + z_{12}\Delta i^2, \quad (22.53)$$

$$-\Delta z_{22}i^2 = z_{21}i^1 + (z_{22} + \Delta z_{22})\Delta i^2.$$

Исключая Δi^1 из первого уравнения

$$\Delta i^1 = -z_{11}^{-1} z_{12} \Delta i^2 \quad (22.54)$$

и подставляя его во второе уравнение

$$-\Delta z_{22}i^2 = -z_{21}z_{11}^{-1} z_{12}\Delta i^2 + (z_{22} + \Delta z_{22})\Delta i^2,$$

получаем изменение токов в зависимости от изменения импеданса

$$\Delta i^2 = -(z_{22} + \Delta z_{22} - z_{21}z_{11}^{-1} z_{12})^{-1} \Delta z_{22}i^2. \quad (22.55)$$

Подставляя Δi^2 в уравнение (22.45), получаем уравнение изменения остальных токов

$$\Delta i^1 = z_{11}^{-1} z_{12} (z_{22} + \Delta z_{22} - z_{21}z_{11}^{-1} z_{12})^{-1} \Delta z_{22}i^2. \quad (22.56)$$

II. Значение i^2 , необходимое при вычислении Δi^2 , находим из уравнения (22.51)

$$\begin{aligned} i^1 &= z_{11}^{-1} (e_1 - z_{12} i^2), \\ e_2 &= z_{21} z_{11}^{-1} (e_1 - z_{12} i^2) + z_{22} i^2, \\ i^2 &= (z_{22} - z_{21} z_{11}^{-1} z_{12})^{-1} (e_2 - z_{21} z_{11}^{-1} e_1). \end{aligned} \quad (22.57)$$

Если это значение i^2 подставить в уравнение (22.55), то получим Δi^2 , выраженный через приложенные напряжения e_1 и e_2 , и изменение импеданса Δz_{22} в виде

$$\begin{aligned} \Delta i^2 &= -(\Delta z_{22} + z_{22} - z_{21} z_{11}^{-1} z_{12})^{-1} \Delta z_{22} \times \\ &\times (z_{22} - z_{21} z_{11}^{-1} z_{12})^{-1} (e_2 - z_{21} z_{11}^{-1} e_1), \\ \Delta i^2 &= -(\Delta z_{22} + z'_{22})^{-1} \Delta z_{22} z'^{-1}_{22} e'_2. \end{aligned} \quad (22.58)$$

14. НЕИЗМЕННЫЕ НАПРЯЖЕНИЯ И ТОКИ НАГРУЗКИ

I. Пусть узловая сеть имеет *четыре* типа узловых пар: входные, выходные, нагрузочные, адмиттансы которых Y изменяются на ΔY , остальные неактивные узловые пары (рис. 22.14).

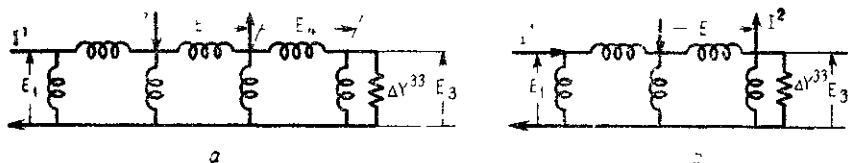


Рис. 22.14:

a — данная узловая сеть (4 узловые пары); *б* — редуцированная сеть (3 узловые пары). Дано. ΔY^{33} , ΔE_2 , ΔI^2 ; найти ΔE_1 .

Если исключить неактивные узловые пары, то уравнения тока *трех* узловых пар имеют вид

$$\begin{aligned} I^1 &= Y^{11} E_1 - Y^{12} E_2 - Y^{13} E_3, \\ I^2 &= Y^{21} E_1 - Y^{22} E_2 - Y^{23} E_3, \\ 0 &= Y^{31} E_1 - Y^{32} E_2 - Y^{33} E_3. \end{aligned} \quad (22.59)$$

В этих уравнениях E_1 и E_2 можно считать известными.

II. Предположим теперь, что 1) Y^{33} изменяется до $Y^{33} + \Delta Y^{33}$; 2) напряжение на входных зажимах E_1 изменяется до $E_1 + \Delta E_1$; 3) напряжение E_2 и ток I^2 в нагрузке не меняются, т. е. $\Delta E_2 = 0$ и $\Delta I^2 = 0$.

Надо найти, каково должно быть изменение ΔE , при котором для данного ΔY^{33} поддерживается $\Delta E_2 = 0$ и $\Delta I^2 = 0$.

III. Уравнение изменения тока

$$\Delta I - \Delta Y E = (Y + \Delta Y) \Delta E \quad (22.60)$$

можно разбить на три составных уравнения:

$$\begin{aligned} \Delta I &= Y^{11} \Delta E_1 - Y^{13} \Delta E_3, \\ 0 &= Y^{21} \Delta E_1 - Y^{23} \Delta E_3, \end{aligned} \quad (22.61)$$

$$\Delta Y^{33} E_3 = Y^{31} \Delta E_1 - (Y^{33} + \Delta Y^{33}) \Delta E_3,$$

где ΔE_1 следует определить через E_3 , значение которого известно из уравнения (22.59).

Исключаем ΔE_3 из третьего уравнения

$$\Delta E_3 = (Y^{33} + \Delta Y^{33})^{-1} (Y^{31} \Delta E_1 - \Delta Y^{33} E_3).$$

Подставляем его во второе уравнение

$$\begin{aligned} 0 &= Y^{21} \Delta E_1 - Y^{23} (Y^{33} + \Delta Y^{33})^{-1} (Y^{31} \Delta E_1 - \Delta Y^{33} E_3), \\ 0 &= [Y^{21} - Y^{23} (Y^{33} + \Delta Y^{33})^{-1} Y^{31}] \Delta E_1 + Y^{23} (Y^{33} + \Delta Y^{33})^{-1} \Delta Y^{33} E_3. \end{aligned} \quad (22.62)$$

Таким образом, для данного ΔY^{33} изменение приложенного к входным зажимам напряжения E_1 имеет вид

$$\Delta E_1 = - [Y^{21} - Y^{23} (Y^{33} + \Delta Y^{33})^{-1} Y^{31}]^{-1} Y^{23} (Y^{33} + \Delta Y^{33})^{-1} \Delta Y^{33} E_3, \quad (22.63)$$

где E_3 вычисляется из уравнения (22.59) через известные величины E_1 и E_2 (или I^2).

Хотя матрица тензора Y^{33} квадратная, матрица Y^{21} в общем случае неквадратная; следовательно, матрица тензора в квадратных скобках тоже неквадратная. Они квадратные только в случае равенства числа входных и выходных узловых пар.

Когда матрица Y^{21} неквадратная, уравнение (22.62) представляет в любой системе координат систему обычных линейных уравнений, в которой число неизвестных ΔE_1 не равно числу уравнений. Метод решения таких систем изложен в гл. 10, § 16.

15. ПОТОК МОЩНОСТИ В НАГРУЗКАХ

I. Рассмотрим вновь предыдущую сеть и будем теперь считать, что при изменении адмиттанса Y^{33} на ΔY^{33} входящая в нагрузку мощность $E_2^* I^2$ остается неизменной, хотя E_2 и I^2 меняются (нагрузка может состоять, например, из синхронных двигателей). Задача состоит в том, чтобы найти изменение напряжения на нагрузке, а именно ΔE_2 .

В настоящей задаче вместо E_2 и I^2 постоянным напряжением остается E_1 на входном зажиме, поэтому *уравнение для изменения тока имеет вид*

$$\begin{aligned}\Delta I^1 &= -Y^{12}\Delta E_2 - Y^{13}\Delta E_3, \\ \Delta I^2 &= -Y^{22}\Delta E_2 - Y^{23}\Delta E_3, \\ \Delta Y^{33}E_3 &= -Y^{32}\Delta E_2 - (Y^{33} + \Delta Y^{33})\Delta E_2.\end{aligned}\quad (22.64)$$

В дополнение к этим уравнениям верно также то, что мощность, входящая в нагрузку до изменения $E_2^* I^2$, та же, что и после изменения $(E_2^* + \Delta E_2^*)(I^2 + \Delta I^2)$. Другими словами, имеет место также уравнение $E_2^* I^2 = (E_2^* + \Delta E_2^*)(I^2 + \Delta I^2)$. Упрощая, получаем четвертое уравнение, представляющее мощность:

$$(E_2^* + \Delta E_2^*)\Delta I^2 = -\Delta E_2^* I^2. \quad (22.65)$$

Два последних уравнения из (22.64) и уравнение мощности (22.65) содержат три неизвестных: ΔE_3 , ΔE_2 и ΔI^2 .

II. Исключаем ΔE_3 из последнего уравнения (22.64)

$$\Delta E_3 = -(Y^{33} + \Delta Y^{33})^{-1}(Y^{32}\Delta E_2 + \Delta Y^{33}E_3).$$

Подставляем его во второе уравнение

$$\begin{aligned}\Delta I^2 &= -Y^{22}\Delta E_2 + Y^{23}(Y^{33} + \Delta Y^{33})^{-1}(Y^{32}\Delta E_2 + \Delta Y^{33}E_3), \\ \Delta I^2 &= -[Y^{22} - Y^{23}(Y^{33} + \Delta Y^{33})^{-1}Y^{32}]\Delta E_2 + \\ &\quad + Y^{23}(Y^{33} + \Delta Y^{33})^{-1}\Delta Y^{33}E_3.\end{aligned}\quad (22.66)$$

Это последнее уравнение и уравнение мощности содержат два неизвестных: ΔE и ΔI .

Подставляем ΔI^2 из последнего уравнения в уравнение (22.65)

$$\begin{aligned}- (E_2^* + \Delta E_2^*) \{ [Y^{22} - Y^{23}(Y^{33} + \Delta Y^{33})^{-1}Y^{32}] \Delta E_2 + \\ + Y^{23}(Y^{33} + \Delta Y^{33})^{-1}\Delta Y^{33}E_3 \} = -\Delta E_2^* I^2\end{aligned}$$

или, приведя подобные члены при ΔE_2 как неизвестном, получаем

$$\begin{aligned}\Delta E_2^* [Y^{22} - Y^{23}(Y^{33} + \Delta Y^{33})^{-1}Y^{32}] \Delta E_2, \\ - \Delta E_2^* [I^2 + Y^{23}(Y^{33} + \Delta Y^{33})^{-1}Y^{33}E_3], \\ + \Delta E_2^* [Y^{22} - Y^{23}(Y^{33} + \Delta Y^{33})^{-1}Y^{32}] \Delta E_2, \\ - E_2^* Y^{23}(Y^{33} + \Delta Y^{33})^{-1}\Delta Y^{33}E_3 = 0.\end{aligned}\quad (22.67)$$

Это инвариантное квадратное уравнение относительно неизвестного вектора ΔE_2 . Метод решения его здесь не рассматрива-

ется. Если есть *только один зажим нагрузки*, то ΔE_2 является скаляром и это уравнение является обычным квадратным уравнением относительно ΔE_2 , оно легко разрешимо.

16. ОБОБЩЕНИЕ ТЕОРЕМЫ ТЕВЕНИНА

I. Пусть дана полная компаунд-сеть с двумя контурами и двумя узловыми парами (рис. 22.15, а).

Задача заключается в следующем: если нагрузка (рис. 22.15, в) присоединяется к разомкнутым узловым парам при на-

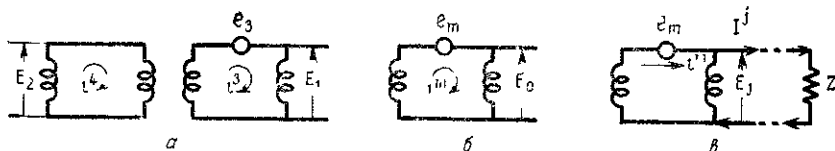


Рис. 22.15.

а — данная ортогональная сеть (2 контура, 2 узловые пары); б — редуцированная сеть (1 контур, 1 узловая пара); в — добавление z . Дано: E_0, z ; найти: I^j .

пряжении на зажиме E_0 , то каким будет ток I в нагрузке в терминах напряжения E_0 , существующего до присоединения нагрузки?

Рассматривая контур с i^4 и узловую пару с E_2 как неактивные, можно упростить сеть так, что она будет иметь один контур и одну узловую пару (рис. 22.15, б).

Уравнение напряжений редуцированной полной сети (рис. 22.15, б) получаем из уравнения (22.8)

$$e_m = z_{mm} i^m - z_{mj} I^j, \quad (22.68)$$

$$E_j = z_{jm} i^m - z_{jj} I^j.$$

Первое инвариантное уравнение выражает столько обычных уравнений, сколько имеется активных контуров, а второе — сколько имеется активных узловых пар.

II. До введения нагрузки (рис. 22.15, б) ток нагрузки I^j равен нулю и уравнение (22.68) принимает вид

$$e_m = z_{mm} i^m, \quad -E_0 = z_{jm} i^m.$$

Решаем первое уравнение относительно i^m (контурный ток)

$$i^m = z_{mm}^{-1} e_m. \quad (22.69)$$

Подставляя во второе уравнение напряжение на зажимах разомкнутой цепи, получаем для E_0 на нагрузке

$$E_0 = z_{jm} z_{mm}^{-1} e_m. \quad (22.70)$$

III. Теперь введем z (рис. 22.15, *в*) (другими словами, пусть импедансы со взаимными индуктансами между ними будут соединены несколькими узловыми парами). Эффект воздействия нагрузки z заключается в установлении напряжения на зажиме E , равном zI . Следовательно, при наличии z уравнение (22.68) становится равным

$$e_m = z_m i^m - z_{mj} I^j, \quad (22.71)$$

$$z I^j = z_{jm} i^m - z_{jj} I^j.$$

Снова разрешая первое уравнение относительно i^m

$$i^m = z_{mm}^{-1} (e_m + z_{mj} I^j) \quad (22.72)$$

и подставляя во второе уравнение

$$z I^j = z_{jm} z_{mm}^{-1} (e_m + z_{mj} I^j) - z_{jj} I^j,$$

получаем ток в нагрузке I^j

$$(z + z_{jj} - z_{jm} z_{mm}^{-1} z_{mj}) I^j = z_{jm} z_{mm}^{-1} e_m.$$

Но из уравнения (10.7)

$$z_{jj} - z_{jm} z_{mm}^{-1} z_{mj} = z'_{jj} \quad (22.73)$$

представляет импеданс короткого замыкания сети, измеренный на нагрузке. Следовательно, $(z + z'_{jj}) I^j = z_{jm} z_{mm}^{-1} e_m$ и ток в нагрузке

$$I^j = (z + z'_{jj})^{-1} z_{jm} z_{mm}^{-1} e_m. \quad (22.74)$$

Но выражение за скобками $z_{jm} z_{mm}^{-1} e_m$ представляет собой по уравнению (22.70) напряжение разомкнутой цепи на нагрузке E_0 , так как напряжение e_m , приложенное в контуре, одно и то же до и после присоединения нагрузки z . Следовательно, ток в нагрузке z

$$I = (z + z'_{jj})^{-1} E_0, \quad (22.75)$$

где z — тензор импеданса нагрузки; z'_{jj} — тензор импеданса короткого замыкания сети, измеренный на зажимах нагрузки; E_0 — напряжение разомкнутой цепи на зажимах нагрузки до присоединения z .

Контурный ток i^m находят из тока нагрузки I^j по уравнению (22.72) или из уравнения

$$i^m = z_{mm}^{-1} [e_m + z_{mj} (z + z'_{jj})^{-1} E_0], \quad (22.76)$$

где первый член $z_{mm}^{-1} e_m$ представляет собой контурные токи до присоединения нагрузки.

IV. Уравнение (22.75) представляет обобщение теоремы Тевенина, которая задает единственный ток нагрузки I , текущий в единственной нагрузке Z , в виде

$$I = (z + z'_{jj})^{-1} E_0, \quad (22.77)$$

где Z'_{jj} — импеданс сети со стороны нагрузки, а E_0 — напряжение на зажиме разомкнутой цепи (рис. 22.16).

Следует отметить, что сети Z'_{jj} и Z могут быть асимметричными и, кроме того, могут содержать приложенные напряжения e_m и токи I^j в исключаемых контурах и узловых парах. Другими словами, сети являются асимметричными, активными сетями с любым количеством контуров и зажимов.

V. Эта теорема может быть также развита в предположении, что существуют два компанд-контюра вместо одного контюра и одной узловой пары; можно использовать

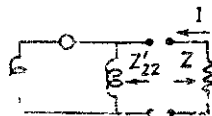


Рис. 22.16. Теорема Тевенина.

$$\begin{aligned} e_1 &= z_{11}i^1 + z_{12}i^2, \\ e_2 &= z_{21}i^1 + z_{22}i^2 \end{aligned} \quad (22.78)$$

вместо уравнения (22.68) с заменой e_2 на $-zi^2$ (рис. 22.17). Результаты будут те же. Однако этот метод рассуждений не явля-

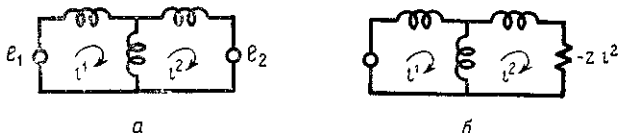


Рис. 22.17.

а — данная контурная сеть (2 контюра); б — замена e на $-z \cdot i^2$. Дано: e_2, z ; найти: i^2

ется законченным, так как каждый контур e_2 должен содержать только одно приложенное напряжение.

17. ТОКИ КОРОТКОГО ЗАМЫКАНИЯ

I. Частный случай теоремы Тевенина, когда $z=0$, представляет закорачивание разомкнутых узловых пар (рис. 22.18).

Из уравнения (22.77) ток короткого замыкания

$$I^j = z'_{jj}{}^{-1} E_0, \quad (22.79)$$

где E_0 — разность потенциалов на узловых парах до их закорачивания, а z'_{jj} — импеданс сети при короткозамкнутых зажимах.

Контурные токи в закороченных цепях определяются по уравнению (22.76)

$$i^m = z_{mm}^{-1} (e_m + z_{mj} z'_{jj}{}^{-1} E_0), \quad (22.80)$$

где первый член $z_{mm}^{-1} e_m$ представляет контурные токи, существующие до закорачивания. Следовательно, дополнительные кон-



Рис. 22.18.

a — данная ортогональная сеть (1 контур, 1 узловая пара); *б* — короткое замыкание. Дано: E_0 , найти I^s .

турные токи, обусловленные закороченными цепями, равны

$$i^m = z_{mm}^{-1} z_{mj} z'_{jj}{}^{-1} E_0. \quad (22.81)$$

18. ТЕОРЕМА, ДВОЙСТВЕННАЯ ТЕОРЕМЕ ТЕВЕНИНА

I. Любой способ рассуждения, любую теорему можно выразить в двойственной форме, заменив z на Y (см. гл. 14, § 1).

Вместо сети, двойственной по отношению к полной сети, возьмем сеть, двойственную к контурной сети (рис. 22.17), а именно

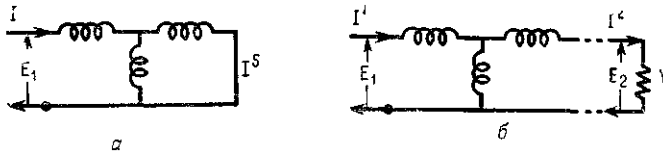


Рис. 22.19.

a — данная короткозамкнутая цепь с током I^s , *б* — включена нагрузка Y . Дано: I^s , Y ; найти: E_2 .

узловую сеть (рис. 22.19), имеющую две узловые пары (после упрощения).

Для нее уравнение тока

$$I^1 = Y^{11} E_1 - Y^{12} E_2, \quad (22.82)$$

$$I^2 = Y^{21} E_1 - Y^{22} E_2.$$

Пусть параллельно с закороченной узловой парой, по которой идет ток короткого замыкания I^s , присоединена нагрузка Y . Надо найти разность потенциалов E_2 на нагрузке в терминах

тока короткого замыкания I^s , существующего до введения нагрузки. Будем считать, что входные токи I^1 остаются теми же как до введения Y , так и после (так же, как e_1 остается постоянной при введении z).

II. До введения Y (рис. 22.19, *a*) напряжение на нагрузке E_2 равно нулю, и уравнение (22.82) становится следующим:

$$I^1 = Y^{11}E_1, \quad (22.83)$$

$$I^2 = Y^{21}E_1.$$

Решая первое уравнение относительно E_1 и подставляя его во второе, получаем ток короткого замыкания

$$I^s = Y^{21}Y^{11-1}I^1. \quad (22.84)$$

III. Цель введения Y — сделать ток нагрузки I^2 равным YE_2 . Следовательно, в присутствии Y уравнение (22.82) становится равным

$$I^1 = Y^{11}E_1 - Y^{12}E_2, \quad (22.85)$$

$$YE_2 = Y^{21}E_1 - Y^{22}E_2.$$

Решая первое уравнение относительно E_1 , получаем

$$E_1 = Y^{11-1}(I^1 + Y^{12}E_2)$$

и подставляя его во второе уравнение

$$YE_2 = Y^{21}Y^{11-1}(I^1 + Y^{12}E_2) - Y^{22}E_2,$$

получаем для напряжения на нагрузке

$$(Y + Y^{22} - Y^{21}Y^{11-1}Y^{12})E_2 = Y^{21}Y^{11-1}I^1, \quad (22.86)$$

но $Y^{22} - Y^{21}Y^{11-1}Y^{12} = Y^{22'}$ представляет адмиттанс разомкнутой цепи со стороны нагрузки, а правая часть уравнения (22.86) по уравнению (22.84) — ток короткого замыкания I^s , существующий до нагрузки (так как I^1 остается постоянным). Таким образом, напряжение на нагрузке

$$E_2 = (Y + Y^{22'})^{-1}I^s. \quad (22.87)$$

Это уравнение является двойственным уравнению (22.75).

IV. Частный случай, когда $Y=0$, представляет размыкание короткозамкнутой узловой пары. Напряжение разомкнутой цепи

$$E_2 = Y^{22'-1}I^s \quad (22.88)$$

и выражается через ток короткого замыкания, существующего до размыкания цепи.

Глава 23

СИНТЕЗ СЕТЕЙ

1. ТИПЫ РАССМАТРИВАЕМЫХ ЗАДАЧ

I. В задачах, которые рассматривались в предыдущей главе, посвященной анализу сетей, предполагалось, что:

1) конструкционные константы z или Y всех катушек известны;

2) соединение C или C_t^{*-1} катушек между собой также известно.

При синтезе сетей одно из этих условий или оба считают невыполненными. Вместо них выступают некоторые требования к поведению сети.

II. В этой главе рассмотрим три проблемы общего типа.

1. *Даны определенные требуемые характеристики поведения (скажем, сеть должна давать неизменный ток I на зажимах, заданных независимо от величины подсоединенной нагрузки), и задача состоит в нахождении соотношения, которое должно существовать между импедансами или адмиттансами контуров или узлов сети, чтобы сеть работала требуемым образом. Эти соотношения между компонентами z' или Y (а также e и i) будем называть «критериями поведения». Каждый тип поведения имеет свой «критерий». В дальнейшем будет установлено несколько таких критериев для множества типов поведения.*

2. Когда дана сеть, в которой контурные импедансы z' (или Y') известны и удовлетворяют требуемому «критерию поведения», то следующая проблема состоит в автоматическом нахождении импедансов (приложенных напряжений) среди множества других произвольных сетей, имеющих другие соединения и импедансы катушек, которые ведут себя так же. Тензор импеданса (или адмиттанса) z' или Y' (а также e' и I') этих сетей находят с помощью тензора преобразования нового типа — так называемого «тензора синтеза» C'_s . Для каждого критерия поведения следует получить свой «тензор синтеза», который оставляет критерий (или множество критериев) инвариантным.

3. Если «тензор синтеза» C'_s , меняющий z'_1 на z'_2 (без выхода из области согласия с критерием), известен, то следующая задача заключается в определении «примитивного тензора син-

теза» C_{σ} , меняющего z_1 (или Y^1) отдельных катушек одной сети на z_2 (или Y^2) отдельных катушек любой другой сети без определения z'_1 и z'_2 результирующих сетей.

Это значит, что C'_i устраняет необходимость установления «критерия поведения» каждой сети и C_{σ} устраняет даже необходимость получения тензора импеданса z' (или Y') каждой сети. Следовательно, в задачах синтеза для рассмотрения существенны: 1) собственные и взаимные импедансы изолированных катушек; 2) тензор соединения рассматриваемой сети.

Тензоры синтеза C'_i и C_{σ} представляют новый тип «групп преобразования», которые устанавливают соответствие между сетями, имеющими вообще различное число катушек.

III. Рассмотрим подробно следующие примеры и найдем в каждом случае «критерий поведения» и «тензор синтеза».

1. Как, сохраняя постоянным напряжение на входных зажимах и изменяя внешнюю нагрузку Y , поддерживать в сети ток нагрузки I^2 постоянным; входной ток I^1 постоянным; оба тока I^1 и I^2 постоянными; напряжение на нагрузке E_2 постоянным; разность потенциалов E_3 на множестве пассивных зажимов постоянной?

2. Как поддерживать входной импеданс z_i или адмиттанс Y^i постоянным в некоторой сети, если сеть пассивная; сеть активная с напряжениями (или токами), приложенными к некоторым или всем замкнутым (или открытым) контурам; сеть питает постоянную нагрузку?

Конечно, количество примеров, встречающихся в инженерной практике, не ограничено.

В случаях, исключаящих недоразумения, штрих, отмечающий действительную физическую сеть, не указывается.

2. ОБЩНОСТЬ МЕТОДА

I. Рассматривая каждую сеть как полную, имеющую несингулярную S , можно определить новую сеть, имеющую требуемые характеристики поведения, без установления тензора импеданса z (или Y) каких-либо сетей, критерия поведения любых сетей.

Таким образом, можно получить большое количество новых сетей, рассматривая только: 1) собственные или взаимные импедансы (или адмиттансы) их отдельных катушек (даже без установления импедансов контуров); 2) тензор преобразования сетей, который показывает их соединение S и тензор их синтеза C_{σ} .

Это значит, что в указанных задачах синтеза нет необходимости находить тензор импеданса z всей сети или даже какой-либо ее части.

II. Во всех задачах синтеза будем предполагать, что синтезируемые сети являются активными асимметричными сетями; следовательно, они могут содержать вакуумные лампы, электрические машины, вращающиеся или колеблющиеся около постоянной скорости, и другие линейные электрические и механические сети.

III. В задачах синтеза часто возникает вопрос: является ли катушка с необходимым значением импеданса или адмиттанса физически реализуемой? Или если она физически реализуема, то является ли она наиболее практичной? Эти вопросы в данной главе подробно не обсуждаются.

Поскольку особенностью подхода, описываемого в этой главе, является то, что определяемые окончательные собственные и взаимные импедансы могут, если требуется, относиться к отдельным катушкам, а также поскольку импедансы отдельных катушек всегда могут быть пересчитаны по известным импедансам, комплексным коэффициентам линейных операторов, то выяснение физической реализуемости сетей можно осуществить, рассматривая только изолированные катушки, которые являются функциями произвольных параметров. Нет необходимости усложнять анализ рассмотрением еще и способа соединения катушек и ограничиваться лишь вещественными параметрами.

IV. Подчеркивается, что демонстрируемый подход не является наиболее общим даже для рассматриваемых случаев. Он представляет лишь одну из многих возможностей.

3. КРИТЕРИЙ ПОСТОЯНСТВА ТОКОВ В НАГРУЗКЕ

I. Пусть дана сеть с любым числом контуров и узловых пар, с несколькими генераторами с постоянным напряжением E .

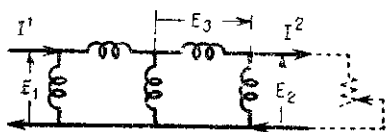


Рис. 23.1. При постоянном E_1 поддерживать постоянным I^2 .

Пусть сеть дает ток I^2 в несколько внешних нагрузок (скажем, в трехфазную нагрузку), адмиттансы Y которых не показаны на диаграмме сети. Задача такова: определить, какие соотношения должны быть между адмиттансами сети, чтобы ток I оставался неизменным

независимо от того, как меняются адмиттансы нагрузки Y .

II. Независимо от того, как устроена сеть, предположим, что она рассматривается как узловая сеть и ее узловые пары разделены на три функционально различные группы (рис. 23.1): 1) содержащую все те узловые пары, которые имеют постоянные приложенные к ним напряжения E_1 ; 2) содержащую узловые пары, которые выходят на нагрузку и через которые протекает I^2 , на них же возникает E_2 ; 3) в которой находятся пассивные узловые пары с возникающей на них разностью потенциалов E_3 .

Следовательно, если эту сеть рассматривать как узловую с тремя узловыми парами, то уравнения тока будут

$$\begin{aligned} I^1 &= Y^{11}E_1 - Y^{12}E_2 - Y^{13}E_3, \\ I^2 &= Y^{21}E_1 - Y^{22}E_2 - Y^{23}E_3, \\ 0 &= Y^{31}E_1 - Y^{32}E_2 - Y^{33}E_3. \end{aligned} \quad (23.1)$$

В этих уравнениях E_1 — константа, а I^2 необходимо поддерживать постоянным.

III. Исключаем пассивное E_3 из третьего уравнения

$$E_3 = Y^{33-1}(Y^{31}E_1 - Y^{32}E_2).$$

Подставляя его в два других уравнения, имеем

$$\begin{aligned} I^1 &= (Y^{11} - Y^{13}Y^{33-1}Y^{31})E_1 - (Y^{12} - Y^{13}Y^{33-1}Y^{32})E_2, \\ I^2 &= (Y^{21} - Y^{23}Y^{33-1}Y^{31})E_1 - (Y^{22} - Y^{23}Y^{33-1}Y^{32})E_2. \end{aligned} \quad (23.2)$$

Ток нагрузки I^2 — функция генерируемого напряжения E_1 , которое всегда постоянно, и E_2 — напряжение, возникающее на нагрузке, значение которого зависит от нагрузки.

IV. Теперь для того чтобы I^2 был функцией постоянного E_1 и не зависел от переменного E_2 , необходимо и достаточно, чтобы коэффициент при E_2 во втором уравнении равнялся нулю. Следовательно, если адмиттансы катушек удовлетворяют «критерию постоянства тока в нагрузке» (в котором все «адмиттансы размыкания», такие как в уравнении (23.2), будут отличаться двумя штрихами вместо одного)

$$Y^{22''} = Y^{22} - Y^{23}Y^{33-1}Y^{32} = 0, \quad (23.3)$$

то постоянные токи в нагрузке

$$I^2 = (Y^{21} - Y^{23}Y^{33-1}Y^{31})E_1. \quad (23.4)$$

Так как компоненты E_1 — константы, то компоненты I^2 — также константы независимо от того, каковы нагрузки. (Если компоненты E_1 изменяются, то компоненты I^2 следуют за этими изменениями пропорционально множителю $Y^{22''}$.) Таким образом, если адмиттанс $Y^{22''}$, рассматриваемый со стороны нагрузки, равен нулю, то в любой сети токи нагрузки постоянны. Адмиттанс может удовлетворять этому условию на одной частоте либо на всех частотах, либо в некоторой полосе частот в зависимости от других условий, которые должны быть установлены.

V. Левая часть уравнения (23.3) является матрицей в каждой частной задаче. Матрица является нулевой, если каждая ее компонента равна нулю. Следовательно, приравняв нулю компоненты матрицы в уравнении (23.3), получаем, что критерий поведения выражается системой k^2 соотношений между конст-

рукционными константами сети, которые должны быть выполнены (где k — число токов и их надо поддерживать постоянными).

Следует заметить, что, если сеть рассматривается как полная, а не узловая, ее тензор адмиттанса содержит 16 компонент Y вместо 9, остальные семь Y представляют контуры, которыми мы пренебрегали. Этим дополнительным Y можно придавать любые значения, так как они не фигурируют в критерии. Следовательно, из 16 компонент-тензоров сети 15 имеют произвольные значения, тогда как один из них (Y^{22}) должен быть равен $Y^{23}Y^{33}-1Y^{32}$. Конечно, для того чтобы удовлетворять этому последнему требованию, используя физически реализуемые катушки, три других тензора — Y^{23} , Y^{32} , Y^{33} — не могут иметь произвольные значения.

VI. Если вместо постоянства тока нагрузки I^2 стабилизирует ток генератора I^1 , то коэффициент при E_2 в первом уравнении (23.2) приравнивается нулю. Значит, если

$$Y^{12} = Y^{12} - Y^{13}Y^{33} - 1Y^{32} = 0, \quad (23.5)$$

т. е. получаем «критерий постоянства тока генератора» и ток генератора

$$I^1 = (Y^{11} - Y^{13}Y^{33} - 1Y^{31}) E_1.$$

VII. Если уравнения (23.3) и (23.5) удовлетворяются вместе, то при всех нагрузках I^1 и I^2 будут постоянными.

VIII. Если необходимо поддерживать постоянными лишь часть токов нагрузки или токов генератора, то тензорное уравнение тока сети $I = YE$ разбивается более чем на три тензорных уравнения, дальнейшие действия с которыми аналогичны.

IX. Снова надо обратить внимание на то, что все рассмотренные уравнения (и их следствия) применимы к любым асимметричным сетям, которые можно разбить на указанное число групп узловых пар или контуров. Каждая группа может содержать любое число узловых пар или контуров — от 1 до ∞ .

4. КРИТЕРИЙ ПОСТОЯНСТВА РАЗНОСТИ ПОТЕНЦИАЛОВ

I. Пусть необходимо поддерживать постоянными разности потенциалов E_3 на некоторых пассивных узловых парах сети, тогда как E_4 остальных пассивных узловых пар и E_2 нагрузочных узловых пар меняются вместе с нагрузкой (рис. 23.2). Приложенное напряжение E_1 также постоянно.

Разбивая узловые пары на четыре группы, составляем уравнения токов

$$\begin{aligned} I^1 &= Y^{11}E_1 - Y^{12}E_2 - Y^{13}E_3 - Y^{14}E_4, \\ I^2 &= Y^{21}E_1 - Y^{22}E_2 - Y^{23}E_3 - Y^{24}E_4, \\ 0 &= Y^{31}E_1 - Y^{32}E_2 - Y^{33}E_3 - Y^{34}E_4, \\ 0 &= Y^{41}E_1 - Y^{42}E_2 - Y^{43}E_3 - Y^{44}E_4. \end{aligned} \quad (23.6)$$

II. Исключаем E_4 из последнего уравнения

$$E_4 = Y^{44-1}(Y^{41}E_1 - Y^{42}E_2 - Y^{43}E_3).$$

Подставляем в третье уравнение

$$0 = (Y^{31} - Y^{34}Y^{44-1}Y^{41})E_1 - (Y^{32} - Y^{34}Y^{44-1}Y^{42})E_2 - \\ - (Y^{33} - Y^{34}Y^{44-1}Y^{43})E_3.$$

Напряжение E_3 будет постоянным, если коэффициент при E_2 равен нулю. Это и есть «*критерий постоянного напряжения*»

$$Y^{32*} = Y^{32} - Y^{34}Y^{44-1}Y^{42} = 0. \quad (23.7)$$

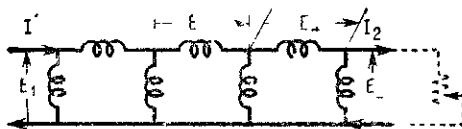


Рис. 23.2. При постоянном E_2 поддерживать постоянным E_3 .

Постоянные напряжения на зажимах равны

$$E_3 = (Y^{33} - Y^{34}Y^{44-1}Y^{43})^{-1}(Y^{31} - Y^{34}Y^{44-1}Y^{41})E_1 = Y^{33* - 1}Y^{31*}E_1. \quad (23.8)$$

5. КРИТЕРИЙ ПОСТОЯНСТВА НАПРЯЖЕНИЙ НА НАГРУЗКЕ

I. Пусть теперь необходимо выдерживать постоянными разности потенциалов E_2 на некоторых *переменных нагрузках* при постоянстве некоторых других нагрузок. Это значит, что сеть

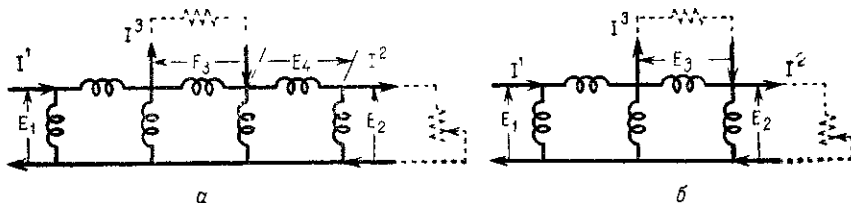


Рис. 23.3. При постоянном E_1 поддерживать постоянным E_2 .

разделяется на четыре типа узловых пар (рис. 23.3): 1) с постоянным входным напряжением (E_1); 2) с постоянным напряжением на переменной нагрузке (E_2); 3) с переменным напряжением на постоянной нагрузке (E_3); 4) пассивные узловые пары (E_4).

II. Исключаем пассивные узловые пары (с помощью формул редукции) и получаем уравнения для активных узловых пар

$$\begin{aligned} I^1 &= Y^{11''} E_1 - Y^{12''} E_2 - Y^{13''} E_3, \\ I^2 &= Y^{21''} E_1 - Y^{22''} E_2 - Y^{23''} E_3, \\ I^3 &= Y^{31''} E_1 - Y^{32''} E_2 - Y^{33''} E_3. \end{aligned} \quad (23.9)$$

Пусть величина постоянных нагрузок Y , так что $I^3 = Y E_3$.

Подставляем это в третью уравнение $(Y + Y^{33''}) E_3 = Y^{31''} E_1 - Y^{32''} E_2$.

III. Потенциалы E_2 на переменных нагрузках постоянны, если коэффициент при E_3 равен нулю — это есть «критерий постоянного напряжения на нагрузке»:

$$Y + Y^{33''} = 0. \quad (23.10)$$

Постоянный потенциал на нагрузке равен

$$E_2 = Y^{32''-1} Y^{31''} E_1. \quad (23.11)$$

Для существования матрицы, обратной $Y^{32''}$, необходимо, чтобы число зажимов постоянной нагрузки выбиралось равным числу зажимов переменной нагрузки. Любую катушку сети можно рассматривать как постоянную нагрузку Y , считая два узла катушки за узловую пару.

IV. Интересно, что для поддержания постоянных токов I^2 в нагрузке адмиттанс сети следует рассчитывать с учетом только переменных нагрузок. Однако для поддержания постоянными нагрузочных напряжений E_2 адмиттансы сети нужно рассчитывать с учетом как переменных нагрузок, так и равного числа других зажимов.

6. КРИТЕРИЙ ПОСТОЯНСТВА ВХОДНОГО ИМПЕДАНСА

I. Пусть дана сеть (рис. 23.4), в которой известны входные импедансы z_i некоторых ветвей. Сеть может иметь, например, некоторую требуемую характеристику зависимости импеданса от входной частоты. Необходимо теперь сконструировать другие сети, имеющие тот же самый входной импеданс z_i во всем диапазоне частот.

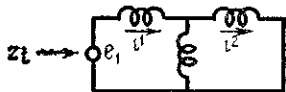


Рис. 23.4. Поддерживать постоянным входной импеданс z_i .

Контуры сети могут быть двух типов: 1) входные с приложенным напряжением e ; 2) пассивные. Наличием узловых пар (третьей группой открытых контуров) пренебрегаем.

II. Первый шаг состоит в том, чтобы найти «критерий поведения», т. е. соотношение, которое должно существовать между

импедансами сети (z_1 должен иметь исходное значение). Уравнение напряжения

$$e_1 = z_{11}i^1 = z_{12}i^2, \quad (23.12)$$

$$0 = z_{21}i^1 + z_{22}i^2.$$

Для нахождения входного импеданса исключаем i^2 из второго уравнения $i^2 = -z_{22}^{-1}z_{21}i^1$. Подставляем его в первое уравнение

$$e_1 = (z_{11} - z_{12}z_{22}^{-1}z_{21})i^1.$$

Выражение в скобках — входной импеданс сети, и он должен быть равен данному значению z_i . Следовательно, «критерий постоянства входного импеданса»

$$z_i = z_{11} - z_{12}z_{22}^{-1}z_{21}. \quad (23.13)$$

7. КРИТЕРИЙ РАВЕНСТВА ВХОДНОГО ИМПЕДАНСА АКТИВНЫХ СЕТЕЙ

I. Предположим, что сеть имеет требуемые входные характеристики, когда к бывшим пассивным контурам приложены напряжения e_2 (рис. 23.5). В этом случае данная сеть имеет определенное эквивалентное входное напряжение e , которое должно быть таким же во всех других сетях. Следовательно, нужно иметь *дополнительный* критерий, который должен выполняться во всех эквивалентных сетях.

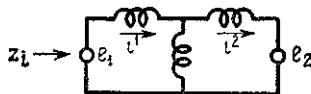


Рис. 23.5. В активной сети поддерживать постоянным z_i .

Уравнение сети

$$e_1 = z_{11}i^1 + z_{12}i^2, \quad (23.14)$$

$$e_2 = z_{21}i^1 + z_{22}i^2.$$

II. Исключаем i^2 из второго уравнения и подставляем его значение в первое уравнение

$$e_1 = z_{11}i^1 + z_{12}z_{22}^{-1}(e_2 - z_{21}i^1), \quad (23.15)$$

$$(e_1 - z_{12}z_{22}^{-1}e_2) = (z_{11} - z_{12}z_{22}^{-1}z_{21})i^1.$$

(Это такое же уравнение, что и (10.17).)

Левая часть его представляет эквивалентное входное напряжение сети, которое должно сохраняться во всех сетях. Следо-

вательно, дополнительный «критерий постоянства входного напряжения»

$$e_i = e_1 - z_{12}z_{22}^{-1}e_2. \quad (23.16)$$

III. Если только часть из ранее пассивных контуров содержит приложенные напряжения (рис. 23.6), то предполагаются три группы контуров:

$$\begin{aligned} e_1 &= z_{11}i^1 + z_{12}i^2 + z_{13}i^3, \\ e_2 &= z_{21}i^1 + z_{22}i^2 + z_{23}i^3, \\ 0 &= z_{31}i^1 + z_{32}i^2 + z_{33}i^3. \end{aligned} \quad (23.17)$$

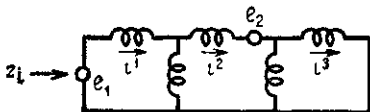


Рис. 23.6. В активной сети поддерживать постоянным z_i .

Исключаем i^3 и i^2 по уравнениям (10.33) и (10.34), получаем два критерия

$$z_i = z_{11}'' - z_{12}''z_{22}''^{-1}z_{21}'', \quad (23.18)$$

$$e_i = e_1 - z_{12}''z_{22}''^{-1}e_2, \quad (23.19)$$

где величины со штрихами — импедансы короткого замыкания.

8. КРИТЕРИЙ РАВЕНСТВА ВХОДНОГО ИЛИ ВЫХОДНОГО АДМИТТАНСА

I. Пусть дана сеть (рис. 23.7), в которой входной адмиттанс Y^i и выходной Y^o известны. Задача состоит в конструировании другой сети с теми же входным и выходным адмиттансами.

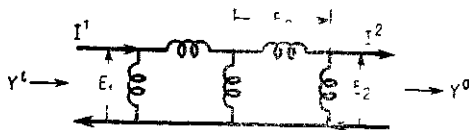


Рис. 23.7. Поддерживать постоянными Y^i и Y^o .

Узловые пары сети делим на три группы: входные, выходные и пассивные. Наличием контуров (дополнительной группой замкнутых узловых пар) пренебрегаем.

II. Первый шаг состоит в установлении соотношения, которое должно существовать между адмиттансами сети, чтобы Y^i и Y^o были постоянными. Таким образом, первым шагом является нахождение «критерия поведения».

Уравнения токов сети

$$\begin{aligned} I^1 &= Y^{11}E_1 - Y^{12}E_2 - Y^{13}E_3, \\ I^2 &= Y^{21}E_1 - Y^{22}E_2 - Y^{23}E_3, \\ 0 &= Y^{31}E_1 - Y^{32}E_2 - Y^{33}E_3. \end{aligned} \quad (23.20)$$

Так как Y^0 постоянный, то $I^2 = Y^0 E_2$. Находим входной импеданс сети, исключая E_3 из третьего уравнения и подставляя его в два других; получаем (23.2) уже как

$$I^1 = (Y^{11} - Y^{13}Y^{33-1}Y^{31})E_1 - (Y^{12} - Y^{13}Y^{33-1}Y^{32})E_2, \quad (23.21)$$

$$Y^0 E_2 = (Y^{21} - Y^{23}Y^{33-1}Y^{31})E_1 - (Y^{22} - Y^{23}Y^{33-1}Y^{32})E_2.$$

Эти уравнения можно записать так:

$$I^1 = Y^{11*}E_1 - Y^{12*}E_2, \quad (23.22)$$

$$Y^0 E_2 = Y^{21*}E_1 - Y^{22*}E_2.$$

Исключим E_2 из второго уравнения: $E_2 = (Y^0 + Y^{22*})^{-1} Y^{21*} E_1$, подставим его в первое уравнение:

$$I^1 = [Y^{11*} - Y^{12*} (Y^0 + Y^{22*})^{-1} Y^{21*}] E_1. \quad (23.23)$$

Выражение в квадратных скобках — входной адмиттанс сети, который должен быть равен заданному Y^i . Следовательно, «критерий постоянства адмиттанса» есть

$$Y^i = Y^{11*} - Y^{12*} (Y^0 + Y^{22*})^{-1} Y^{21*}. \quad (23.24)$$

9. ОПРЕДЕЛЕНИЕ «ТЕНЗОРА СИНТЕЗА» C_s .

I. Предположим, что для данной сети (имеющей несингулярный C_1) собственные и взаимные импедансы или адмиттансы отдельных катушек уже выбраны так, что сеть удовлетворяет требуемому «критерию поведения» и, следовательно, работает так, как требуется. Предположим также, что тензор импеданса z_1 (или Y^1) сети также известен.

Представим теперь некоторую другую произвольную сеть C_2 , имеющую другое число катушек, соединенных произвольно. Задача состоит в нахождении z_2 (или Y^2) второй сети из z_1 (или Y^1) таким преобразованием, чтобы вторая сеть при этом работала точно так же, как первая сеть. Таким образом, z_2 (или Y^2) второй сети нужно найти, минуя метод проб и ошибок, и установленное z_2 должно удовлетворять «критерию поведения».

II. Тензор преобразования, который переводит z_1 данной сети в z_2 некоторой другой сети и автоматически учитывает «критерий поведения», будем называть «тензором синтеза» C_s^* . Вместо сохранения скаляра e^*i инвариантом C_s^* оставляет инвариантом некоторые другие комбинации тензоров, а именно «критерий поведения».

Тензоры преобразований, применявшиеся до сих пор, выполняли несколько видов подсобной работы: соединяли катушки, меняли число витков, вводили гипотетические токи, выполняя это за один шаг. Тензор преобразования C_{σ} , вводимый теперь, будет выполнять другую работу: менять импедансы отдельных катушек, выполняя, впрочем, и другие функции, преимущественно соединения катушек.

Так как в нескольких следующих параграфах примитивные сети не рассматриваются, штрихи будем опускать.

10. УСТАНОВЛЕНИЕ ТЕНЗОРА СИНТЕЗА

I. Тензор синтеза C_{σ} или $C_{\sigma t}^{*-1} = A_{\sigma}$ будет установлен отдельно для каждого «критерия поведения» как компаунд-тензор следующими шагами. Эти шаги определяются требованием, чтобы «критерий поведения» имел одну и ту же форму как до преобразования посредством C_{σ} , так и после него. (Вместо преобразования самого критерия найдена более быстрая процедура, заключающаяся в предварительном преобразовании z и в последующем восстановлении формы преобразованного критерия.)

1. Составляем тензор импеданса z_1 (или Y^1) первой сети как компаунд-тензор, содержащий столько строк и столбцов, сколько типов контуров и узловых пар.

2. Получаем несингулярный компаунд-тензор преобразования C_{σ} (или $C_{\sigma t}^{*-1}$), каждая компонента которого — пока не определенный 2-тензор.

3. Определяем тензор импеданса z_2 (или Y^2) новой сети, как произведение $C_{\sigma t}^* z_1 C_{\sigma}$ (или $C_{\sigma}^{-1} Y^1 C_{\sigma t}^{*-1}$).

4. Составляем выражение «критерия поведения», пользуясь компонентами нового тензора импеданса z_2 .

Этот критерий содержит те же импедансы, что и исходный критерий; кроме того, он содержит все тензоры — компоненты компаунд-тензора синтеза C_{σ} .

5. Некоторые (но не все) тензорные блоки тензора C_{σ} приравняются нулю или единичным тензорам I (или изменяются некоторым другим образом), так что все компоненты C_{σ} выпадают из выражения «критерия поведения».

II. Таким образом обнаруживается, что если тензор синтеза C_{σ} принимает простейшую форму после приравнивания его компонент нулю или единице, оставляя другие компоненты совершенно произвольными, то последующее умножение z_1 сети на эту специальную форму оставляет «критерий поведения» без изменения, так как все компоненты C_{σ} выпадают из рассмотрения. Следовательно, импедансы катушек, взаимосоединения между катушками и число катушек — все может изменяться под действием C_{σ} , при этом критерий поведения не изменяется. Новая сеть будет работать точно так же, как исходная сеть.

Так как некоторые компоненты C_{σ} содержат произвольные величины (действительные или комплексные числа или линейные операторы), то *существует большое число сетей, каждая с большим разнообразием импедансов катушек, которые имеют одинаковые характеристики поведения*. Выделение частной сети с конкретными импедансами катушек определяется физически и экономическими соображениями.

11. ТЕНЗОР СИНТЕЗА ДЛЯ «ПОСТОЯННОГО ВЫХОДНОГО ТОКА»

I. Тензор адмиттанса узловой сети, выходной ток которой выдерживается постоянным, из уравнения (23.1) есть

$$Y = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} & 1 & 2 & 3 \\ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} & \begin{array}{|c|c|c|} \hline Y_{11} & Y_{12} & Y_{13} \\ \hline Y_{21} & Y_{22} & Y_{23} \\ \hline Y_{31} & Y_{32} & Y_{33} \\ \hline \end{array} & \end{array} \end{array} \quad (23.25)$$

Подчеркивается, что Y полной ортогональной сети содержит одну дополнительную строку и столбец, соответствующие отбрасываемым контурам.

«Критерий поведения», оставляемый инвариантным, согласно уравнению (23.3)

$$Y^{22} - Y^{23}Y^{33-1}Y^{32} = 0. \quad (23.26)$$

Следует заметить, что в критерии не встречаются компоненты *первой* строки и столбца Y (входные оси) и компоненты *четвертой* строки и столбца Y , представляющие отбрасываемые контуры и не показанные в уравнении (23.1).

II. *Задача состоит в установлении тензора преобразования A_{σ}* («сопряженный транспонированный обратный тензор преобразования» $C_{\sigma t}^{*-1}$, обозначенный через A_{σ}), изменяющего Y данной сети в Y' некоторой другой сети так

$$Y' = A_{\sigma t}^* Y A_{\sigma} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} & 1' & 2' & 3' \\ \begin{array}{c} 1' \\ 2' \\ 3' \end{array} & \begin{array}{|c|c|c|} \hline Y^{11'} & Y^{12'} & Y^{13'} \\ \hline Y^{21'} & Y^{22'} & Y^{23'} \\ \hline Y^{31'} & Y^{32'} & Y^{33'} \\ \hline \end{array} & \end{array}, \end{array} \quad (23.27)$$

что критерий поведения остается неизменным, инвариантным. Таким образом, после преобразования

$$Y'^{22'} - Y'^{23'} Y'^{33'-1} Y'^{32'} = Y^{22} - Y^{23} Y^{33-1} Y^{32}, \quad (23.28)$$

причем компоненты A_{σ} выпали. Если это условие удовлетворено, то даже *после* преобразования

$$Y^{22'} - Y^{23'} Y^{33'} - 1 Y^{32'} = 0 \quad (23.29)$$

и выходные токи новой сети являются постоянными. Тензор синтеза имеет вид

$$A_{\sigma} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 1' & 2' & 3' \\ \hline 1 & A_1^1 & A_1^2 & A_1^3 \\ \hline 2 & A_2^1 & A_2^2 & A_2^3 \\ \hline 3 & A_3^1 & A_3^2 & A_3^3 \end{array} \\ \end{array}, \quad A_{\sigma t}^* = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \\ \hline 1' & A_{1t}^{1*} & A_{2t}^{1*} & A_{3t}^{1*} \\ \hline 2' & A_{1t}^{2*} & A_{2t}^{2*} & A_{3t}^{2*} \\ \hline 3' & A_{1t}^{3*} & A_{2t}^{3*} & A_{3t}^{3*} \end{array} \\ \end{array}, \quad (23.30)$$

где все компоненты пока полагаем произвольными.

III. После преобразования Y по формуле $A_{\sigma t}^* Y A_{\sigma}$ новое значение Y'' по (23.27) имеет вид $Y'' =$

| | | |
|---|---|---|
| $\begin{aligned} & A_{1t}^{1*} (Y^{11} A_1^1 + \\ & + Y^{12} A_2^1 + Y^{13} A_3^1) \\ & + A_{2t}^{1*} (Y^{21} A_1^1 + \\ & + Y^{22} A_2^1 + Y^{23} A_3^1) \\ & + A_{3t}^{1*} (Y^{31} A_1^1 + \\ & + Y^{32} A_2^1 + Y^{33} A_3^1) \end{aligned}$ | $\begin{aligned} & A_{1t}^{1*} (Y^{11} A_1^2 + \\ & + Y^{12} A_2^2 + Y^{13} A_3^2) \\ & + A_{2t}^{1*} (Y^{21} A_1^2 + \\ & + Y^{22} A_2^2 + Y^{23} A_3^2) \\ & + A_{3t}^{1*} (Y^{31} A_1^2 + \\ & + Y^{32} A_2^2 + Y^{33} A_3^2) \end{aligned}$ | $\begin{aligned} & A_{1t}^{1*} (Y^{11} A_1^3 + \\ & + Y^{12} A_2^3 + Y^{13} A_3^3) + \\ & + A_{2t}^{1*} (Y^{21} A_1^3 + \\ & + Y^{22} A_2^3 + Y^{23} A_3^3) + \\ & + A_{3t}^{1*} (Y^{31} A_1^3 + \\ & + Y^{32} A_2^3 + Y^{33} A_3^3) \end{aligned}$ |
| $\begin{aligned} & A_{1t}^{2*} (Y^{11} A_1^1 + \\ & + Y^{12} A_2^1 + Y^{13} A_3^1) \\ & + A_{2t}^{2*} (Y^{21} A_1^1 + \\ & + Y^{22} A_2^1 + Y^{23} A_3^1) \\ & + A_{3t}^{2*} (Y^{31} A_1^1 + \\ & + Y^{32} A_2^1 + Y^{33} A_3^1) \end{aligned}$ | $\begin{aligned} & A_{1t}^{2*} (Y^{11} A_1^2 + \\ & + Y^{12} A_2^2 + Y^{13} A_3^2) \\ & + A_{2t}^{2*} (Y^{21} A_1^2 + \\ & + Y^{22} A_2^2 + Y^{23} A_3^2) \\ & + A_{3t}^{2*} (Y^{31} A_1^2 + \\ & + Y^{32} A_2^2 + Y^{33} A_3^2) \end{aligned}$ | $\begin{aligned} & A_{1t}^{2*} (Y^{11} A_1^3 + \\ & + Y^{12} A_2^3 + Y^{13} A_3^3) \\ & + A_{2t}^{2*} (Y^{21} A_1^3 + \\ & + Y^{22} A_2^3 + Y^{23} A_3^3) \\ & + A_{3t}^{2*} (Y^{31} A_1^3 + \\ & + Y^{32} A_2^3 + Y^{33} A_3^3) \end{aligned}$ |
| $\begin{aligned} & A_{1t}^{3*} (Y^{11} A_1^1 + \\ & + Y^{12} A_2^1 + Y^{13} A_3^1) \\ & + A_{2t}^{3*} (Y^{21} A_1^1 + \\ & + Y^{22} A_2^1 + Y^{23} A_3^1) \\ & + A_{3t}^{3*} (Y^{31} A_1^1 + \\ & + Y^{32} A_2^1 + Y^{33} A_3^1) \end{aligned}$ | $\begin{aligned} & A_{1t}^{3*} (Y^{11} A_1^2 + \\ & + Y^{12} A_2^2 + Y^{13} A_3^2) \\ & + A_{2t}^{3*} (Y^{21} A_1^2 + \\ & + Y^{22} A_2^2 + Y^{23} A_3^2) \\ & + A_{3t}^{3*} (Y^{31} A_1^2 + \\ & + Y^{32} A_2^2 + Y^{33} A_3^2) \end{aligned}$ | $\begin{aligned} & A_{1t}^{3*} (Y^{11} A_1^3 + \\ & + Y^{12} A_2^3 + Y^{13} A_3^3) \\ & + A_{2t}^{3*} (Y^{21} A_1^3 + \\ & + Y^{22} A_2^3 + Y^{23} A_3^3) \\ & + A_{3t}^{3*} (Y^{31} A_1^3 + \\ & + Y^{32} A_2^3 + Y^{33} A_3^3) \end{aligned}$ |

(23.31)

IV. Для получения критерия необходимо обратить нижний правый 2-тензор Y^{33} , содержащий девять различных Y . Поскольку в критерии (уравнение (23.26)) фигурирует лишь обратный Y^{33} , то все члены в правом нижнем тензоре Y^{33} , кроме Y^{33} , будут обращены в нуль, если предположить, что A_1^3 и A_2^3 равны нулю. (Конечно, другие более сложные предположения приводят к тому же результату.)

Точно так же, чтобы в центральном 2-тензоре Y^{22} член Y^{22} имел вид Y^{22} без дополнительных сомножителей, надо положить A_2^2 равным единичному тензору I . (Возможны другие предположения; данное предположение сделано только для упрощения результата.)

Следовательно, если $A_1^3=0$, $A_2^3=0$, $A_2^2=I$, то Y' приобретает вид

| | 1' | 2' | 3' |
|---------|---|--|---|
| 1' | $A_{1f}^{1*} (Y^{11}A_1^1 + Y^{12}A_2^1 + Y^{13}A_3^1)$ $+ A_{2f}^{1*} (Y^{21}A_1^1 + Y^{22}A_2^1 + Y^{23}A_3^1)$ $+ A_{3f}^{1*} (Y^{31}A_1^1 + Y^{32}A_2^1 + Y^{33}A_3^1)$ | $A_{1f}^{1*} (Y^{11}A_1^2 + Y^{12} + Y^{13}A_3^2)$ $+ A_{2f}^{1*} (Y^{21}A_1^2 + Y^{22} + Y^{23}A_3^2)$ $+ A_{3f}^{1*} (Y^{31}A_1^2 + Y^{32} + Y^{33}A_3^2)$ | $(A_{1f}^{1*}Y^{13} +$ $A_{2f}^{1*}Y^{23} +$ $A_{3f}^{1*}Y^{33}) A_3^3$ |
| Y' = 2' | $A_{1f}^{2*} (Y^{11}A_1^1 + Y^{12}A_2^1 + Y^{13}A_3^1)$ $+ (Y^{21}A_1^1 + Y^{22}A_2^1 + Y^{23}A_3^1)$ $+ A_{3f}^{2*} (Y^{31}A_1^1 + Y^{32}A_2^1 + Y^{33}A_3^1)$ | $A_{1f}^{2*} (Y^{11}A_1^2 + Y^{12} + Y^{13}A_3^2)$ $+ (Y^{21}A_1^2 + Y^{22} + Y^{23}A_3^2)$ $+ A_{3f}^{2*} (Y^{31}A_1^2 + Y^{32} + Y^{33}A_3^2)$ | $(A_{1f}^{2*}Y^{13} +$ $+ Y^{23} +$ $+ A_{3f}^{2*}Y^{33}) A_3^3$ |
| 3' | $A_{3f}^{3*} (Y^{31}A_1^1 + Y^{32}A_2^1 + Y^{33}A_3^1)$ | $A_{3f}^{3*} (Y^{31}A_1^2 + Y^{32} + Y^{33}A_3^2)$ | $A_{3f}^{3*} Y^{33} A_3^3$ |

(23.32)

V. «Критерий поведения» $Y^{22} - Y^{23'}Y^{33'} - Y^{32'}$; вычисленный из этого тензора, принимает вид

$$\begin{aligned}
 & A_{1f}^{2*} (Y^{11}A_1^2 + Y^{12} + Y^{13}A_3^2) + (Y^{21}A_1^2 + Y^{22} + Y^{23}A_3^2) + \\
 & + A_{3f}^{2*} (Y^{31}A_1^2 + Y^{32} + Y^{33}A_3^2) - (A_{1f}^{2*}Y^{13} + Y^{23} + \\
 & + A_{3f}^{2*}Y^{33}) Y^{33-1} (Y^{31}A_1^2 + Y^{32} + Y^{33}A_3^2). \quad (23.33)
 \end{aligned}$$

Упрощая, критерий приводим к виду

$$A_{1f}^{2*} (Y^{11}A_1^2 + Y^{12}) + Y^{21}A_1^2 + Y^{22} - (A_{1f}^{2*}Y^{13} + Y^{23}) Y^{33-1} (Y^{31}A_1^2 + Y^{32}). \quad (23.34)$$

Если A_1^2 также положить равным нулю, то критерий примет вид $Y^{22} - Y^{23}Y^{33-1}Y^{32}$. Это и есть требуемая форма критерия.

VI. Следовательно, если тензор синтеза имеет вид

$$A_{\sigma} = \begin{array}{c|ccc} & 1' & 2' & 3' \\ \hline 1 & A_1^1 & 0 & 0 \\ \hline 2 & A_2^1 & I & 0 \\ \hline 3 & A_3^1 & A_3^2 & A_3^3 \end{array} \quad (23.35)$$

и существует обратная A_3^3 , то «критерий постоянства тока в нагрузке» по уравнению (23.26) остается инвариантным.

Другими словами, если Y умножается на A_{σ} для нахождения Y' и если критерий устанавливается в терминах Y' , то все компоненты A_{σ} , определенные равенством (23.25), выпадают из выражения критерия независимо от природы, которую имеют различные компоненты A .

Компоненты A могут содержать действительные и комплексные числа или линейные операторы и т. д. Не имеет значения, что они собой представляют, так как они не влияют на постоянство тока в нагрузках. Однако матрица, обратная A_3^3 , должна существовать, поскольку она присутствует при получении критерия в уравнении (23.33).

12. СИНГУЛЯРНЫЙ ТЕНЗОР СИНТЕЗА

I. Следует отметить очень важный факт, заключающийся в том, что, поскольку обратный A_1^1 не требуется, его матрица может иметь любую прямоугольную форму, так что количество осей в группе 1' можно варьировать от нуля до любого числа. Следовательно, новая сеть может иметь как меньше, так и больше узловых пар, чем исходная. Однако имеется абсолютный минимум числа узловых пар, которые должны иметься в новой сети, он равен сумме узловых пар в группах 2 и 3.

Так как матрицы большинства A_{σ} прямоугольные, то обратные им не могут быть вычислены и все множество матриц A_{σ} образует только «полугруппу» (см. гл. 1, § 3), а не «группу». В то время как все предыдущие тензоры преобразования переводили друг в друга только сети с одинаковым числом катушек, тензор синтеза переводит сети с разным числом катушек.

Тензор синтеза $A_{\sigma} = A_{\sigma}^{\alpha}$ можно рассматривать как мультитензор с одним индексом σ , принадлежащим системам координат всех возможных n -катушечных сетей, и с другим индексом α , принадлежащим системам координат всех k -катушечных сетей. В предыдущих исследованиях n -катушечные сети и их координатные оси были независимы от k -катушечных сетей и их осей.

II. Преобразование A_{σ} , помимо других изменений, может включать следующие три изменения: 1) может измениться способ соединения сети; 2) могут измениться импедансы катушек сети; 3) может измениться число катушек сети.

III. Следует подчеркнуть, что данный A_{σ} является не только тензором преобразований, оставляющих инвариантным выходной ток. Зная значение Y , можно подобрать другие, ненулевые значения A_1^2 , A_1^3 и A_2^3 так, что критерий все же будет инвариантным. Эти другие формы A_{σ} здесь не рассматриваются.

13. ВЛИЯНИЕ ПАССИВНЫХ УЗЛОВЫХ ПАР НА A_{σ}

I. Было упомянуто, что критерий $Y^{22} - Y^{23}Y^{33} - Y^{32}$ не включает элементов первой строки и столбца Y уравнения (23.1) и поэтому достаточно вычислить вторую и третью строку и столбец Y' с помощью уменьшенного A_{σ}

$$Y = \begin{array}{c} 2 \quad 3 \\ \hline Y_{22} \quad Y_{23} \\ \hline Y_{32} \quad Y_{33} \end{array}, \quad A_{\sigma} = \begin{array}{c} 2' \quad 3' \\ \hline 1 \quad 0 \\ \hline A_3^2 \quad A_3^3 \end{array}, \quad Y' = \begin{array}{c} 2' \quad 3' \\ \hline Y^{22'} \quad Y^{23'} \\ \hline Y^{32'} \quad Y^{33'} \end{array} \quad (23.36)$$

Влияние дополнительной строки и столбца в Y (которые не используются в критерии) заключается в добавлении столбца к A_{σ} (содержащего произвольные компоненты A_1^1 , A_2^1 и A_3^1), так как умножение на этот дополнительный столбец A_{σ} не меняет необходимых компонент Y' . Таким образом,

$$Y = \begin{array}{c} 1 \quad 2 \quad 3 \\ \hline Y_{11} \quad Y_{12} \quad Y_{13} \\ \hline Y_{21} \quad Y_{22} \quad Y_{23} \\ \hline Y_{31} \quad Y_{32} \quad Y_{33} \end{array}, \quad A_{\sigma} = \begin{array}{c} 1' \quad 2' \quad 3' \\ \hline A_1^1 \quad 0 \quad 0 \\ \hline A_2^1 \quad 1 \quad 0 \\ \hline A_3^1 \quad A_3^2 \quad A_3^3 \end{array}, \quad Y' = \begin{array}{c} 1' \quad 2' \quad 3' \\ \hline Y^{11'} \quad Y^{12'} \quad Y^{13'} \\ \hline Y^{21'} \quad Y^{22'} \quad Y^{23'} \\ \hline Y^{31'} \quad Y^{32'} \quad Y^{33'} \end{array} \quad (23.37)$$

Следует повторить (см. гл. 16, § 16), что добавление в C столбцов вдоль дополнительных осей узловых пар (с соответствующим добавлением к z) не меняет компонент z' вдоль других контурных осей. Подобным образом здесь добавление столбца $1'$ к A_{σ} (и соответствующего добавления столбца и строки 1 к Y) не изменяет компонент Y' вдоль других осей $2'$ и $3'$. Так как A_{σ} может иметь дополнительные ненулевые компоненты только

вдоль добавленных столбцов, то добавочные компоненты вдоль других столбцов равны нулю.

Следовательно, при расчете тензора синтеза достаточно преобразовать лишь те компаунд-оси Y (или z), которые играют роль в критерии. Остальные компаунд-оси добавляют в тензор синтеза то же число произвольных столбцов.

II. Так как в приведенном примере Y содержит еще другие компаунд-оси 4, представляющие игнорируемые контурные оси, то тензор синтеза содержит еще один произвольный столбец

$$Y = \begin{array}{c|cccc} & 4 & 1 & 2 & 3 \\ \hline 4 & Y_{44} & Y_{41} & Y_{42} & Y_{43} \\ \hline 1 & Y_{14} & Y_{11} & Y_{12} & Y_{13} \\ \hline 2 & Y_{24} & Y_{21} & Y_{22} & Y_{23} \\ \hline 3 & Y_{34} & Y_{31} & Y_{32} & Y_{33} \\ \hline \end{array}, \quad (23.38)$$

$$A_{\sigma} = \begin{array}{c|cccc} & 4' & 1' & 2' & 3' \\ \hline 4 & A_4^4 & A_4^1 & 0 & 0 \\ \hline 1 & A_1^4 & A_1^1 & 0 & 0 \\ \hline 2 & A_2^4 & A_2^1 & I & 0 \\ \hline 3 & A_3^4 & A_3^1 & A_3^2 & A_3^3 \\ \hline \end{array}. \quad (23.39)$$

При использовании этого тензора сеть надо рассматривать как полную.

Так как A_{σ} может не иметь обратного, то новая сеть может иметь произвольное число контурных осей $4'$.

III. Другими словами, если некоторая сеть имеет уравнение (23.38) в качестве тензора адмиттанса и при этом поддерживает постоянный ток в нагрузке I^2 , то тензор адмиттанса можно умножить на A_{σ} (из (23.39)), который поменяет соединения, число катушек и адмиттансы катушек, но новая сеть также будет поддерживать постоянный ток $I^{2'}$ в нагрузке.

Однако этот ток $I^{2'}$ уже не равен току I^2 , так как из уравнения (23.4) $I^2 = (Y^{21} - Y^{23}Y^{33-1}Y^{31})E_1$ и коэффициент при E_1 не остается инвариантным после преобразования Y с помощью A_{σ} из уравнения (23.39).

14. ТЕНЗОР СИНТЕЗА ДЛЯ «НЕИЗМЕННОГО ВЫХОДНОГО ТОКА»

I. Предположим теперь, что необходимо не только поддерживать постоянным $I^{2'}$ при переменной нагрузке, но и сохранить новое значение $I^{2'}$ после преобразования таким же, каким оно было до преобразования. Другими словами, пусть A_{σ} сохраняет не только коэффициент при E_2 во втором уравнении (23.2), а именно инвариантным $Y^{22} - Y^{23}Y^{33-1}Y^{32}$, но и коэффициент при E_1 , а именно $Y^{21} - Y^{32}Y^{33-1}Y^{31}$.

В этом втором критерии все три оси Y имеют компоненты, следовательно, только оси, которыми пренебрегают, являются контурными осями 4.

II. Из уравнения (23.32) (где теперь также A_1^2 равно нулю) этот последний критерий есть

$$Y^{21}A_1^1 + Y^{22}A_2^1 + Y^{23}A_3^1 + A_{3f}^{2*}(Y^{31}A_1^1 + Y^{32}A_2^1 + Y^{33}A_3^1) - \\ - (Y^{23}A_3^3 + A_{3f}^{2*}Y^{33}A_3^3)A_3^{3-1}Y^{33-1}A_{3f}^{3*-1}A_{3f}^{3*}(Y^{31}A_1^1 + Y^{32}A_2^1 + Y^{33}A_3^1). \quad (23.40)$$

Упрощая, получаем критерий

$$Y^{22}A_1^1 + Y^{22}A_2^1 - Y^{23}Y^{33-1}(Y^{31}A_1^1 + Y^{32}A_2^1).$$

Если A_2^1 положить равным нулю и A_1^1 — равным I, то получим критерий $Y^{21} - Y^{23}Y^{33-1}Y^{31}$.

III. Следовательно, величина I^2 остается одинаковой при всех преобразованиях, если A_σ имеет вид

$$A_\sigma = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} & 1' & 2' & 3' \\ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} & \begin{array}{|c|c|c|} \hline I & & \\ \hline & I & \\ \hline A_3^1 & A_3^2 & A_3^3 \\ \hline \end{array} & & \end{array} \end{array} \quad (23.41)$$

Влияние опущенных контурных осей сводится к добавлению произвольного четвертого столбца к A_σ , следовательно, *полный тензор синтеза*

$$A_\sigma = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} & 4' & 1' & 2' & 3' \\ \begin{array}{c} 4 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} & \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline A_4^4 & & & \\ \hline A_1^4 & I & & \\ \hline A_2^4 & & I & \\ \hline A_3^4 & A_3^1 & A_3^2 & A_3^3 \\ \hline \end{array} & & & \end{array} \end{array}, \quad (23.42)$$

где A_4^4 может иметь прямоугольную форму.

IV. Простые вычисления показывают, что этот последний A_σ оставляет коэффициенты при E_1 и E_2 в первом уравнении (23.2) неизменными.

Таким образом, A_σ уравнения (23.42) оставляет неизменными все явления, происходящие на входных и выходных осях 1 и 2. Следует заметить, что вдоль этих инвариантных осей A_σ содержит только единичные тензоры I.

V. Вычисления также показывают, что приведенный выше тензор синтеза был бы найден, если критерием был бы отдельно $Y^{21} - Y^{23}Y^{33-1}Y^{31}$ или $Y^{12} - Y^{13}Y^{33-1}Y^{32}$.

Этот последний критерий оставляет постоянным генераторный ток I^1 . Его необходимо поддерживать постоянным, поскольку требуется поддерживать постоянным в то же время и выходной ток I^2 . Это нужно потому, что некоторые компоненты A были без особой необходимости приравнены нулю. Их можно определить как функции некоторых Y . Для упрощения результатов здесь это не сделано.

15. ТЕНЗОР СИНТЕЗА ДЛЯ «ПОСТОЯНСТВА РАЗНОСТИ ПОТЕНЦИАЛОВ»

I. Критерием постоянства разностей потенциалов E_3 на некоторых пассивных узловых парах является равенство нулю некоторой комбинации компонентов компаунд-тензора адмиттанса Y , имеющего четыре строки и четыре столбца, а именно $Y^{32} - Y^{34}Y^{44-1}Y^{42} = 0$ (уравнение (23.7)).

Так как в этом критерии не участвуют компоненты первой строки и столбца Y , то достаточно изучить изменения в оставшихся трех строках и столбцах Y , а именно в

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{ccc}
 & 2 & 3 & 4 \\
 2 & \boxed{Y_{22} \mid Y_{23} \mid Y_{24}} \\
 Y=3 & \boxed{Y_{32} \mid Y_{33} \mid Y_{34}} \\
 4 & \boxed{Y_{42} \mid Y_{43} \mid Y_{44}}
 \end{array}
 \rightarrow
 \begin{array}{ccc}
 & 2 & 3 & 4 \\
 2 & \boxed{Y_{11} \mid Y_{12} \mid Y_{13}} \\
 & \boxed{Y_{21} \mid Y_{22} \mid Y_{23}} \\
 4 & \boxed{Y_{31} \mid Y_{32} \mid Y_{33}}
 \end{array}
 ,
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{c}
 \begin{array}{ccc}
 & 2' & 3' & 4' \\
 2 & \boxed{A_1^1 \mid A_1^2 \mid A_1^3} \\
 A_\sigma=3 & \boxed{A_2^1 \mid A_2^2 \mid A_2^3} \\
 4 & \boxed{A_3^1 \mid A_3^2 \mid A_3^3}
 \end{array}
 \end{array}
 \quad (23.43)$$

II. Поменяем индексы подстановкой (см. (23.43)), чтобы использовать некоторые результаты § 11. Критерий становится $Y^{21} - Y^{23}Y^{33-1}Y^{31} = 0$.

Произведение $A_{\sigma t}^* Y A_\sigma$ показано в уравнении (23.31). Поскольку необходимо, чтобы обратная Y^{33} оставалась неизменной, здесь также $A_1^3 = 0$ и $A_2^3 = 0$.

Для сохранения тензора $Y^{21'}$ равным Y^{21} положим $A_2^2 = I$ и $A_1^1 = I$. С этими значениями уравнение (23.31) переходит в (23.32), в котором также $A_1^1 = I$.

III. Критерий $Y^{21} - Y^{23}Y^{33-1}Y^{31}$ из уравнения (23.32) будет

$$\begin{aligned}
 & A_{1t}^{2*} (Y^{11} + Y^{12}A_2^1 + Y^{13}A_3^1) + Y^{21} + Y^{22}A_2^1 + \\
 & + Y^{23}A_3^1 + A_{3t}^{2*} (Y^{31} + Y^{32}A_2^1 + Y^{33}A_3^1) - \\
 & - (A_{1t}^{2*}Y^{13} + Y^{23} + A_{3t}^{2*}Y^{33}) Y^{33-1} (Y^{31} + Y^{32}A_2^1 + Y^{33}A_3^1). \quad (23.44, a)
 \end{aligned}$$

Упрощая, получаем критерий

$$\begin{aligned}
 & A_{1t}^{2*} (Y^{11} + Y^{12}A_2^1) + Y^{21} + Y^{22}A_2^1 - \\
 & - (A_{1t}^{2*}Y^{13} + Y^{23}) Y^{33-1} (Y^{31} + Y^{32}A_2^1). \quad (23.44, b)
 \end{aligned}$$

Если $A_1^2=0$ и $A_2^1=0$, то получаем $Y^{21}-Y^{23}Y^{33-1}Y^{31}$. Следовательно, тензор синтеза имеет тот же вид, что и в уравнении (23.41).

Изменим штрихи у компонентов A_σ и добавим два произвольных столбца вдоль опущенных осей узловых пар 1 и вдоль игнорируемых контурных осей 5; тогда тензор синтеза

$$A_\sigma = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} & 5' & 1' & 2' & 3' & 4' \\ \begin{array}{c} 5 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} & \begin{array}{|c|} \hline A_5^5 \\ \hline \end{array} & \begin{array}{|c|} \hline A_5^1 \\ \hline \end{array} & & & \\ \hline & \begin{array}{|c|} \hline A_1^5 \\ \hline \end{array} & \begin{array}{|c|} \hline A_1^1 \\ \hline \end{array} & & & \\ \hline & \begin{array}{|c|} \hline A_2^5 \\ \hline \end{array} & \begin{array}{|c|} \hline A_2^1 \\ \hline \end{array} & \begin{array}{|c|} \hline I \\ \hline \end{array} & & \\ \hline & \begin{array}{|c|} \hline A_3^5 \\ \hline \end{array} & \begin{array}{|c|} \hline A_3^1 \\ \hline \end{array} & & \begin{array}{|c|} \hline I \\ \hline \end{array} & \\ \hline & \begin{array}{|c|} \hline A_4^5 \\ \hline \end{array} & \begin{array}{|c|} \hline A_4^1 \\ \hline \end{array} & \begin{array}{|c|} \hline A_4^2 \\ \hline \end{array} & \begin{array}{|c|} \hline A_4^3 \\ \hline \end{array} & \begin{array}{|c|} \hline A_4^4 \\ \hline \end{array} \\ \hline \end{array} \end{array} \quad (23.45)$$

16. ТЕНЗОР СИНТЕЗА «ПОСТОЯНСТВА ВХОДНОГО ИМПЕДАНСА»

I. Чтобы импеданс относительно нескольких входных зажимов оставался постоянным, критерий (уравнение (23.13))

$z_{11} - z_{12} z_{22}^{-1} z_{21}$ должен оставаться инвариантным, хотя взаимосоединения катушек или импедансы изменяются под действием C_σ . Задача состоит в нахождении вида C_σ . Пусть

$$z = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} & 1 & 2 \\ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \end{array} & \begin{array}{|c|c|} \hline z_{11} & z_{12} \\ \hline z_{21} & z_{22} \\ \hline \end{array} \end{array}, \quad C_\sigma = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} & 1' & 2' \\ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \end{array} & \begin{array}{|c|c|} \hline C_1^1 & C_1^2 \\ \hline C_2^1 & C_2^2 \\ \hline \end{array} \end{array}. \quad (23.46)$$

После преобразования $C_{\sigma'}^* z C_\sigma$ импеданс сети будет

$$z' = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} & 1' & 2' \\ \begin{array}{c} 1' \\ 2' \end{array} & \begin{array}{|c|c|} \hline (C_{11}^{1*} z_{11} + C_{11}^{2*} z_{21}) C_1^1 + \\ + (C_{11}^{1*} z_{12} + C_{11}^{2*} z_{22}) C_1^2 \\ \hline (C_{21}^{1*} z_{11} + C_{21}^{2*} z_{21}) C_1^1 + \\ + (C_{21}^{1*} z_{12} + C_{21}^{2*} z_{22}) C_1^2 \\ \hline (C_{12}^{1*} z_{11} + C_{12}^{2*} z_{21}) C_2^1 + \\ + (C_{12}^{1*} z_{12} + C_{12}^{2*} z_{22}) C_2^2 \\ \hline (C_{22}^{1*} z_{11} + C_{22}^{2*} z_{21}) C_2^1 + \\ + (C_{22}^{1*} z_{12} + C_{22}^{2*} z_{22}) C_2^2 \\ \hline \end{array} \end{array} \quad (23.47)$$

II. Для нахождения обратной матрицы в правом нижнем углу предположим, что $C_2^1=0$. Чтобы оставить неизменным верхний левый тензор, предположим, что $C_1^1=I$. Следовательно, принимая

$$C_{\sigma} = \begin{array}{c} 1' \quad 2' \\ \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 0 \\ \hline C_1^2 & C_2^2 \\ \hline \end{array} \end{array} \quad (23.48)$$

в качестве тензора синтеза, имеем тензор импеданса после преобразования

$$z' = \begin{array}{c} 1' \quad 2' \\ \begin{array}{|c|c|} \hline z_{11} + z_{12}C_1^2 + C_{1i}^2 z_{21} + C_{1i}^{2'} z_{22} C_1^2 & z_{12}C_2^2 + C_{1i}^{2*} z_{22} C_2^2 \\ \hline C_{2i}^{2*} z_{21} + C_{2i}^{2*} z_{22} C_1^2 & C_{2i}^{2*} z_{22} C_2^2 \\ \hline \end{array} \end{array} \quad (23.49)$$

III. Входной импеданс относительно осей 1' по формулам редукции равен

$$z'_{11} - z'_{12} z'_{22}{}^{-1} z'_{21} = (z_{11} + z_{12} C_1^2 + C_{1i}^{2*} z_{21} + C_{1i}^{2*} z_{22} C_1^2) - \\ - (z_{12} C_2^2 + C_{1i}^{2*} z_{22} C_2^2) (C_{2i}^{2*} z_{22} C_2^2)^{-1} (C_{2i}^{2*} z_{21} + C_{2i}^{2*} z_{22} C_1^2).$$

Упрощая, получаем

$$z'_{11} - z'_{12} z'_{22}{}^{-1} z'_{21} = z_{11} - z_{12} z_{22}{}^{-1} z_{21}. \quad (23.50)$$

Следовательно, входной импеданс (критерий поведения) и после преобразования, и до преобразования одинаков. Компоненты C_{σ} выпадают из рассмотрения.

Вместе с опущенными осями узловых пар 3', тензор синтеза, сохраняющий неизменным входной импеданс асимметричной сети, равен

$$C_{\sigma} = \begin{array}{c} 1' \quad 2' \quad 3' \\ \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & & C_3^1 \\ \hline C_1^2 & C_2^2 & C_3^2 \\ \hline 3 & & C_3^3 \\ \hline \end{array} \end{array}, \quad (23.51)$$

где C_3^3 может иметь любую прямоугольную форму.

IV. Подобным образом C_{σ} используется, если вместо входного импеданса $z_{11} - z_{12} z_{22}{}^{-1} z_{21}$ надо поддерживать инвариантным входной адмиттанс $Y^{11} - Y^{12} Y^{22}{}^{-1} Y^{21}$. Например, чтобы оставить неизменным одновременно и входной и выходной адмиттансы (уравнение (23.24), содержащее адмиттансы размыканий) вдоль осей 1 и 2, тензор синтеза должен иметь вид

$$A_{\sigma} = \begin{array}{c|c|c|c|} & 1' & 2' & 3' & 4' \\ \hline 1 & I & & & A_1^4 \\ \hline 2 & & I & & A_2^4 \\ \hline 3 & A_3^1 & A_3^2 & A_3^3 & A_3^4 \\ \hline 4 & & & & A_4^4 \\ \hline \end{array} \quad (23.52)$$

V. Приведем другой пример. Чтобы поддерживать напряжение E_2 на нагрузках постоянным, необходимо в уравнении (23.10) иметь постоянный адмиттанс на группе осей 3, а именно $Y^{33'}$, при наличии пассивных узловых пар группы 4. Следовательно,

$$A_{\sigma} = \begin{array}{c|c|c|c|} & 1' & 2' & 3' & 4' \\ \hline 1 & A_1^1 & A_1^2 & & \\ \hline 2 & A_2^1 & A_2^2 & & \\ \hline 3 & A_3^1 & A_3^2 & I & \\ \hline 4 & A_4^1 & A_4^2 & A_4^3 & A_4^4 \\ \hline \end{array} \quad \text{или} \quad A_{\sigma} = \begin{array}{c|c|c|c|c|} & 1' & 2' & 3' & 4' & 5' \\ \hline 1 & A_1^1 & A_1^2 & & & A_1^5 \\ \hline 2 & A_2^1 & A_2^2 & & & A_2^5 \\ \hline 3 & A_3^1 & A_3^2 & I & & A_3^5 \\ \hline 4 & A_4^1 & A_4^2 & A_4^3 & A_4^4 & A_4^5 \\ \hline 5 & A_5^1 & A_5^2 & & & A_5^5 \\ \hline \end{array} \quad (23.53)$$

где 5 — отброшенные контурные компаунд-оси.

VI. Допустим, что все пассивные контуры предыдущей сети содержат приложенные напряжения e_2 , так что вектор напряжения e до и после преобразования C_{σ} (уравнение (23.48))

$$e = \begin{array}{c|c} 1 & e_1 \\ \hline 2 & e_2 \end{array}, \quad (23.54) \quad e' = C_{\sigma t}^* e = \begin{array}{c|c} 1' & e_1 + C_{1t}^{2*} e_2 \\ \hline 2' & C_{2t}^{2*} e_2 \end{array}. \quad (23.55)$$

VII. Второй критерий (уравнение (23.16)) с использованием (23.54) и (23.49)

$$e_4 = e_1' - z_{12}' z_{22}'^{-1} e_2' = e_1 + C_{1t}' e_2 - \\ - (z_{12} C_2^2 + C_{1t}^{2*} z_{22} C_2^2) C_2^{2-1} z_{22}^{-1} C_{2t}^{2* -1} (C_{2t}^{2*} e_2) = e_1 - z_{12} z_{22}^{-1} e_2. \quad (23.56)$$

Следовательно, предыдущие тензоры синтеза пригодны для случая, когда пассивные контуры или узловые пары содержат

приложенные напряжения или токи, так как они оставляют инвариантными как входной импеданс, так и входное напряжение активной сети.

VIII. Частный случай упрощенного тензора синтеза (23.48) (без включения осей узловых пар группы 3) был установлен Кауэром. В тензоре синтеза Кауэра:

1) компоненты C_{σ} , а именно C_1^2 и C_2^2 , могут содержать только действительные числа;

2) сеть *симметрична* и содержит только сосредоточенные сопротивления, индуктансы и эластансы;

3) сеть *пассивна*.

Ограничения тензора синтеза Кауэра происходят от того, что при его определении не использовалось понятие «критерия поведения», а именно, что входной импеданс $z_{11} - z_{12}z_{22}^{-1}z_{21}$ не изменяется, но он был установлен в предположении одновременной неизменности трех действительных квадратичных форм. Эти три действительные квадратичные формы есть iri , $i\pi/2$ и $isi/2$ контурной сети.

Следует заметить, что вообще с рассмотренными в данной главе сетями не ассоциировались никакие квадратичные (или эрмитовы) формы, поскольку не обязательно предполагать, что сети неподвижны и симметричны.

17. «ПРИМИТИВНЫЙ» ТЕНЗОР СИНТЕЗА

I. Тензор синтеза C_{σ}' изменяет z_1' (или Y_1') сети на z_2' (или Y_2') другой сети, имеющей тот же характер поведения. Так как компоненты z_1' и z_2' представляют собственные и взаимные импедансы различных катушек, соединенных в замкнутые или открытые контуры, то было бы весьма трудно определить импедансы отдельных катушек.

Тензор синтеза C_{σ} можно установить между отдельными катушками, вместо того чтобы определять его между их контурами и узловыми парами. Это значит, что с помощью C_{σ} можно найти непосредственно собственные и взаимные импедансы отдельных катушек второй сети через собственные и взаимные импедансы отдельных катушек первой сети. Этот дополнительный шаг очень важен, поскольку намного легче иметь дело с собственными взаимными импедансами отдельных катушек с точки зрения, например, их физической реализуемости, чем это делать с собственными и взаимными импедансами целых контуров как замкнутых, так и открытых.

II. C_{σ} отдельных катушек можно найти из C_{σ}' контуров (определенного в предыдущих параграфах) с помощью следующих шагов:

1) C_1 — тензор преобразования исходной сети, изменяющий z_1 на z_1' с помощью $C_1'z_1C_1 = z_1'$;

2) C_2 — тензор преобразования новой сети, изменяющий z_2 на z_2' с помощью $C_{2t}^* z_2 = z_2'$;

3) C_σ' — тензор синтеза сети, преобразующий z_1' в z_2' с помощью $C_{\sigma t}^* z_1' C_\sigma' = z_2'$; предполагается, что он известен. В общем случае это сингулярная матрица.

4) C_σ — примитивный тензор синтеза (который надо найти), преобразующий z_1 в z_2 с помощью $C_{\sigma t}^* z_1 C_\sigma = z_2$.

Так как две сети имеют разное число катушек, C_1 и C_2 имеют разное число строк и столбцов.

Подставляем 1 и 2 в 3: $C_{\sigma t}^* (C_{1t}^* z_1 C_1) C_\sigma' = C_{2t}^* z_2 C_2$. Переносим C_{2t}^* и C_2 в левую часть уравнения: $C_{2t}^*{}^{-1} C_{\sigma t}^* C_{1t}^* z_1 C_1 C_\sigma' C_2^{-1} = z_2$.

Сравнивая с 4 отдельный тензор синтеза C_σ , преобразующий z_1 в z_2 , находим его из исходного тензора C_σ' с помощью

$$C_\sigma = C_1 C_\sigma' C_2^{-1}, \quad (23.57)$$

где C_1 — тензор преобразования первой сети; C_2 — тензор преобразования второй сети.

Так как для вычисления C_σ необходимо существование матрицы, обратной C_2 , то при определении C_σ' каждая сеть рассматривается как полная ортогональная сеть.

III. При изменении Y^1 в Y^2 каждая C заменяется на C_t^{*-1} , так что

$$C_{\sigma t}^{*-1} = C_{1t}^{*-1} C_{\sigma t}^*{}^{-1} C_{2t}^* \quad \text{или} \quad A_\sigma = A_1 A_\sigma' A_2^{-1}. \quad (23.58)$$

IV. Если имеется в виду изменение не самой сети, а лишь импедансов отдельных катушек, то $C_2 = C_1$. Это значит, что импедансы отдельных катушек некоторой сети можно изменить тензором преобразования

$$C_\sigma = C_1 C_\sigma' C_1^{-1}, \quad (23.59)$$

не изменяя при этом характеристики поведения сети.

Конечно, каждая катушка сама может быть компунд-катушкой, представляющей целую сеть.

18. ПРИМЕР ДВУХ ЭКВИВАЛЕНТНЫХ СЕТЕЙ

I. Пусть даны три катушки с асимметричными взаимными импедансами, образующие два контура и одну узловую пару (рис. 23.8, а). Рассматривая их как полную сеть, имеем C и C^{-1}

$$C_1 = \begin{array}{c} 1_1 \\ 2_1 \\ 3_1 \end{array} \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & & \\ \hline & & 1 \\ \hline 1 & 1 & 1 \\ \hline \end{array}, \quad (23.60)$$

$$C_1^{-1} = \begin{array}{c} 1_1' \\ 2_1' \\ 3_1' \end{array} \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & & \\ \hline & 1 & \\ \hline 1 & -1 & -1 \\ \hline \end{array}. \quad (23.61)$$

Относительно e_1 эта сеть имеет определенный импеданс Z_1^{\bullet} .

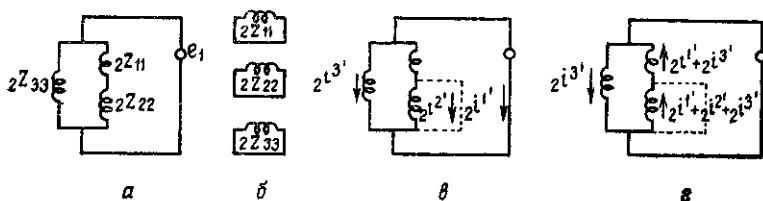


Рис. 23.8. Первая сеть с тремя катушками.

II. Пусть дана другая сеть (рис. 23.9), в которой соединены четыре катушки, образуя два контура и две узловые пары (каж-

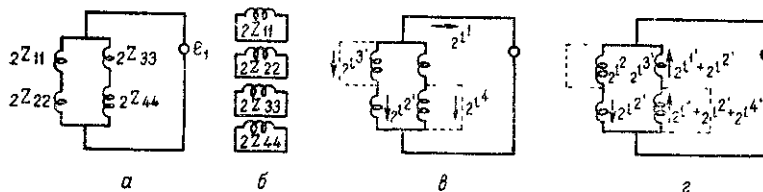


Рис. 23.9. Вторая сеть с четырьмя катушками.

дая катушка может представлять эквивалентный импеданс целой сети). Так как это полная сеть, C и C^{-1} можно выразить так:

$$C_2 = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1_2 & 2_2 & 3_2 & 4_2 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1_2 \\ 2_2 \\ 3_2 \\ 4_2 \end{matrix} & \begin{bmatrix} & 1 & -1 & \\ & 1 & & \\ 1 & 1 & & \\ 1 & 1 & & 1 \end{bmatrix} \end{matrix} \quad C_2^{-1} = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1_2 & 2_2 & 3_2 & 4_2 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1_2 \\ 2_2 \\ 3_2 \\ 4_2 \end{matrix} & \begin{bmatrix} & -1 & 1 & \\ & 1 & & \\ -1 & 1 & & \\ & & -1 & 1 \end{bmatrix} \end{matrix} \quad (23.62)$$

Задача состоит в том, чтобы найти собственные и взаимные импедансы четырех катушек второй сети z_2 в терминах трех катушек исходной сети z_1

$$z_1 = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1_1 & 2_1 & 3_1 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1_1 \\ 2_1 \\ 3_1 \end{matrix} & \begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} & \\ Z_{21} & Z_{22} & \\ & & Z_{33} \end{bmatrix} \end{matrix} \quad (23.63) \quad z_2 = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1_2 & 2_2 & 3_2 & 4_2 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1_2 \\ 2_2 \\ 3_2 \\ 4_2 \end{matrix} & \begin{bmatrix} Z'_{11} & Z'_{12} & Z'_{13} & Z'_{14} \\ Z'_{21} & Z'_{22} & Z'_{23} & Z'_{24} \\ Z'_{31} & Z'_{32} & Z'_{33} & Z'_{34} \\ Z'_{41} & Z'_{42} & Z'_{43} & Z'_{44} \end{bmatrix} \end{matrix} \quad (23.64)$$

так, чтобы при этом обе сети имели один и тот же входной импеданс относительно приложенного напряжения e_1 .

III. Тензор импеданса z_1' исходной сети (не полученный) можно умножить на тензор синтеза C_σ из уравнения (23.51)

$$C'_\sigma = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & & C_3^1 \\ \hline C_1^2 & C_2^2 & C_3^2 \\ \hline & & C_3^3 \\ \hline \end{array} = \begin{array}{l} 1'_1 \\ 2'_1 \\ 3'_1 \end{array} \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1_2 & 2_2 & 3_2 & 4_2 \\ \hline 1 & & k_3 & k_6 \\ \hline k_1 & k_2 & k_4 & k_7 \\ \hline & & k_5 & k_8 \\ \hline \end{array}, \quad (23.65)$$

где компоненты k — действительные или комплексные числа или операторы, дающие тензор импеданса z_2 новой сети (неустановленный).

Пусть теперь C_σ' — отдельный тензор синтеза, с помощью C_σ изменяющий импедансы примитивной сети (а именно, изменяющий z_1 на z_2) по уравнению (23.58). Следовательно, $C_1 C_\sigma C_2^{-1} =$

$$= \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & & \\ \hline & 1 & \\ \hline 1 & 1 & 1 \\ \hline \end{array} \cdot \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & & k_3 & k_6 \\ \hline k_1 & k_2 & k_4 & k_7 \\ \hline & & k_5 & k_8 \\ \hline \end{array} \cdot \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline & -1 & 1 & \\ \hline & 1 & & \\ \hline -1 & 1 & & \\ \hline & & -1 & 1 \\ \hline \end{array} =$$

$$= \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline -k_3 & k_3 - 1 & 1 - k_2 & k_6 \\ \hline -k_4 & k_2 + k_4 - k_1 & k_1 - k_7 & k_7 \\ \hline -k_3 - k_4 - k_5 & k_3 + k_4 + k_5 + k_2 - k_1 - 1 & 1 + k_1 - k_6 - k_7 - k_8 & k_6 + k_7 + k_8 \\ \hline \end{array} =$$

$$= C_\sigma = \begin{array}{l} 1_1 \\ 2_1 \\ 3_1 \end{array} \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline K_1 & K_2 & K_3 & K_4 \\ \hline K_5 & K_6 & K_7 & K_8 \\ \hline K_9 & K_{10} & K_{11} & K_{12} \\ \hline \end{array} \quad (23.66)$$

где k — произвольные величины.

IV. Тензор импеданса z_2 примитивной сети (рис. 23.9) найдем как $C_{st}^* z_1 C_\sigma = z_2$ (см. (23.67) на стр. 688).

Эта матрица представляет значения собственных и взаимных импедансов четырех катушек (рис. 23.9) через соответствующие значения для трех катушек сети (рис. 23.8).

$1_2 \quad 2_2 \quad 3_2 \quad 4_2$

| | | | |
|--|---|---|---|
| $K_{1f}^* (K_1 Z_{11} + K_5 Z_{12}) +$ $+ K_{5f}^* (K_1 Z_{21} + K_5 Z_{22}) +$ $+ K_{9f}^* K_9 Z_{33}$ | $K_{1f}^* (K_2 Z_{11} + K_6 Z_{12}) +$ $+ K_{5f}^* (K_2 Z_{21} + K_6 Z_{22}) +$ $+ K_{9f}^* K_{10} Z_{33}$ | $K_{1f}^* (K_3 Z_{11} + K_7 Z_{12})$ $K_{5f}^* (K_3 Z_{21} + K_7 Z_{22})$ $K_{9f}^* K_{11} Z_{33}$ | $K_{1f}^* (K_4 Z_{11} + K_8 Z_{12})$ $K_{5f}^* (K_4 Z_{21} + K_8 Z_{22})$ $K_{9f}^* K_{12} Z_{33}$ |
| $K_{2f}^* (K_1 Z_{11} + K_5 Z_{12}) +$ $+ K_{6f}^* (K_1 Z_{21} + K_5 Z_{22}) +$ $+ K_{10f}^* K_9 K_{33}$ | $K_{2f}^* (K_2 Z_{11} + K_6 Z_{12}) +$ $+ K_{6f}^* (K_2 Z_{21} + K_6 Z_{22}) +$ $+ K_{10f}^* K_{10} Z_{33}$ | $K_{2f}^* (K_3 Z_{11} + K_7 Z_{12})$ $K_{6f}^* (K_3 Z_{21} + K_7 Z_{22})$ $K_{10f}^* K_{11} Z_{33}$ | $K_{2f}^* (K_4 Z_{11} + K_8 Z_{12})$ $K_{6f}^* (K_4 Z_{21} + K_8 Z_{22})$ $K_{10f}^* K_{12} Z_{33}$ |
| $K_{3f}^* (K_1 Z_{11} + K_5 Z_{12}) +$ $+ K_{7f}^* (K_1 Z_{21} + K_5 Z_{22}) +$ $+ K_{11f}^* K_9 K_{33}$ | $K_{3f}^* (K_2 Z_{11} + K_6 Z_{12}) +$ $+ K_{7f}^* (K_2 Z_{21} + K_6 Z_{22}) +$ $+ K_{11f}^* K_{10} Z_{33}$ | $K_{3f}^* (K_3 Z_{11} + K_7 Z_{12})$ $K_{7f}^* (K_3 Z_{21} + K_7 Z_{22})$ $K_{11f}^* K_{11} Z_{33}$ | $K_{3f}^* (K_4 Z_{11} + K_8 Z_{12})$ $K_{7f}^* (K_4 Z_{21} + K_8 Z_{22})$ $K_{11f}^* K_{12} Z_{33}$ |
| $K_{4f}^* (K_1 Z_{11} + K_5 Z_{12}) +$ $+ K_{8f}^* (K_1 Z_{21} + K_5 Z_{22}) +$ $+ K_{12f}^* K_9 Z_{33}$ | $K_{4f}^* (K_2 Z_{11} + K_6 Z_{12}) +$ $+ K_{8f}^* (K_2 Z_{21} + K_6 Z_{22}) +$ $+ K_{12f}^* K_{10} Z_{33}$ | $K_{4f}^* (K_3 Z_{11} + K_7 Z_{12})$ $K_{8f}^* (K_3 Z_{21} + K_7 Z_{22})$ $K_{12f}^* K_{11} Z_{33}$ | $K_{4f}^* (K_4 Z_{11} + K_8 Z_{12})$ $K_{8f}^* (K_4 Z_{21} + K_8 Z_{22})$ $K_{12f}^* K_{12} Z_{33}$ |

Различные k следует выбирать так, чтобы четыре катушки были физически реализуемы. Конечно, некоторые k в S_0^* можно положить равными нулю, в то время как диагональные k — равными единичным значениям.

Следует особо заметить, что вторая сеть (имеющая тот же входной импеданс, что и исходная сеть) была определена без расчета матрицы импеданса или критерия поведения, или входных импедансов сетей.

Из простого значения отдельного тензора синтеза S_0 уравнения (23.66) можно предсказать без дополнительных расчетов, что две сети (рис. 23.8 и 23.9) имеют один и тот же входной импеданс относительно e_1 .

19. ФИЗИЧЕСКАЯ РЕАЛИЗУЕМОСТЬ КАТУШЕК

В качестве предварительных шагов в определении произвольных k можно упомянуть следующие:

1) первым условием физической реализуемости катушек является то, что взаимные индуктивности в уравнении (23.67), а именно недиагональные компоненты, должны иметь вид jX ; это условие налагает некоторые ограничения на значения k в терминах Z ;

2) можно потребовать, чтобы некоторые или все взаимные индуктивности равнялись нулю; это требование еще более ограничивает возможный произвол k ;

3) еще одним условием является то, что взаимные индуктивности должны быть меньше собственных индуктивностей; это условие устанавливает верхние и нижние границы значений k .

20. ТРИ ПРОИЗВОЛЬНЫХ МНОЖЕСТВА ВЕЛИЧИН В СИНТЕЗЕ СЕТЕЙ

1. Когда определен критерий поведения требуемых характеристик сети, но еще нет сети, константы которой удовлетворяют критерию, *удобно выбрать примитивную сеть с некоторым произвольным числом катушек в качестве исходной точки* и установить (на бумаге) параметры примитивной сети, не уделяя внимания ее физической реализуемости. Большинство ее параметров можно выбрать произвольно, а остальные выбрать так, чтобы удовлетворить критерию. *Если работа сети не должна зависеть от частоты, примитивная сеть, служащая стартовой точкой, может содержать только сопротивления.*

Например, для поддержания постоянного тока в нагрузке критерий, которому удовлетворяют катушки, выбирается из уравнения (23.3)

$$Y^{22} = Y^{23}Y^{33} - 1Y^{32}. \quad (23.69)$$

Следовательно, тензор адмиттанса Y примитивной сети разделен на $4^2 = 16$ тензоров-компонент (одна из четырех групп —

игнорируемые контуры), 15 тензоров можно выбрать произвольно, и в то же время диагональный тензор Υ^{22} будет удовлетворять последнему условию.

II. На множестве этих произвольных тензоров можно определить две операции: 1) катушки могут быть взаимосоединены в произвольно выбранную сеть с помощью несингулярного S ; 2) тензоры могут быть умножены на тензор синтеза S' , компоненты которого в большинстве случаев произвольны.

III. Следовательно, для нахождения сети с предписанными характеристиками поведения необходимо выделить конечные значения из трех произвольных множеств значений:

1) произвольные компоненты тензора импеданса исходной предполагаемой примитивной сети, удовлетворяющие «критерию поведения»;

2) компоненты тензора преобразования произвольно выбираемой сети, показывающие способ взаимосоединений и т. д.;

3) произвольные компоненты тензора синтеза.

Значения этих произвольных величин фиксируются из условий физической реализуемости катушек и экономических факторов.

«ТЕНЗОРНЫЙ АНАЛИЗ СЕТЕЙ» Г. КРОНА И ЕГО РОЛЬ В ПРОЕКТИРОВАНИИ СИСТЕМ

В настоящее время стало банальным говорить о необходимости применения математики к решению технических проблем. Остается не очень ясным вопрос о том, что значит «использовать математику» в техническом проектировании. Принимая, что роль математики очень велика, нужно понять ее «историческое назначение». В этом вопросе точка зрения инженера-пользователя не совпадает с точкой зрения математика-разработчика. Эта точка зрения инженера-пользователя и представлена в настоящей книге. Г. Крон пишет, что эта книга написана инженером для инженеров, т. е. тем, кто конструирует большие технические системы, для тех, кто будет конструировать большие технические системы.

То, что в книге Г. Крона называется «геометрическим объектом» — это известный инженеру «объект», который в различных системах координат имеет «различный вид». В этом смысле инженер, использующий математику, не нуждается в «теоремах существования» искомого решения: решение существует всегда. Поэтому обращение инженера к математику за консультацией *всегда* имеет смысл и он не натолкнется на ответ математика типа: «Не вижу задачи».

В этой книге не используются «криволинейные» системы координат», т. е. не вводятся операции ковариантного дифференцирования, столь характерные для тензорного анализа. Здесь инженер знакомится с алгеброй тензоров. Для желающих ознакомиться с нарастанием широты обобщений, даваемых Г. Кроном в виде постулатов первого и второго обобщений, можно рекомендовать классические книги О. Веблена («Инварианты дифференциальных квадратичных форм» М., ИЛ, 1948) и О. Веблена и Дж. Уайтхеда («Основания дифференциальной геометрии», М., ИЛ., 1949). Г. Крон дал инженерную интерпретацию этих работ, используя переход к аффинным координатам и аффинным нормальным тензорам.

«Тензорный анализ сетей» — это фактически введение к другим работам Крона, в том числе к диакоптике. В тензорной теории электрических машин показано, что для любой вращающейся электрической машины можно построить эквивалентную неподвижную цепь; эквивалентные электрические цепи были построены для многих фундаментальных уравнений физики, а

также для самых различных технических систем. Диакоптика основана на том, что анализируемая система может быть представлена эквивалентной цепью. Поэтому данная книга не является законченным и логически замкнутым изложением формальной теории, а построена так, что наряду с развитием тензорного анализа неподвижных сетей в ней содержатся многочисленные «перекидные мостики», указывающие путь перехода к другим работам Крона.

Чем же отличаются тензоры сетей Крона от обычных тензоров? Главное отличие заключается в том, что в то время как обычные тензоры обозначают одной буквой набор величин, описывающих некоторую сущность, расположенную в изотропном пространстве топологии, тензоры сетей Крона обозначают одной буквой набор величин, описывающих некоторую сущность, расположенную в анизотропном пространстве совокупности сетей, отличающихся друг от друга способом соединения их элементов, т. е. тензоры Крона относятся к дискретной структуре системы.

Традиционные тензоры суть геометрические объекты, компоненты которых, записанные в некоторой системе координат, при переходе к некоторой другой системе координат преобразуются по определенным правилам.

$$A_{\beta_1 \dots \beta_m}^{\alpha_1 \dots \alpha_n} = C_{\alpha_1}^{\alpha_1'} \dots C_{\alpha_2}^{\alpha_2'} C_{\beta_1}^{\beta_1'} \dots C_{\beta_m}^{\beta_m'} A_{\beta_1' \dots \beta_m'}^{\alpha_1' \dots \alpha_n'}$$

где

$$C_{\alpha_r}^{\alpha_r'} = \frac{\partial x^{\alpha_r'}}{\partial x^{\alpha_r}}$$

— матрица преобразования, элементы которой составляют якобиан перехода от старой системы координат к новой системе координат.

Роль системы координат играют всевозможные виды осей (прямолинейные, криволинейные и т. д.), расположенные в непрерывном пространстве. Роль осей систем координат в дискретном пространстве сетей играют пути, образуемые элементами сети (катушками). Пути бывают двух видов — замкнутые и открытые. Первые Крон называет контурами, вторые — узловыми парами. Эти два вида путей образуют два ортогональных и взаимодополняющих друг друга подпространства в пространстве сети, поэтому существует два вида систем координат — контурные и узловые. Все величины в сети записываются в терминах координатных осей двух подпространств: m — контурных осей и k — узловых пар, между которыми существует соотношение $k + m = n$, где n — число катушек, задающее размерность пространства сети.

Преобразование систем координат в этом пространстве заключается во всевозможных пересоединениях n катушек в сети

различными способами, что приводит к взаимному изменению числа контуров и узловых пар, а также к тому, что вместо старых путей в качестве системы координат выбираются новые пути. В этом смысле все сети, состоящие из одних и тех же n катушек, могут рассматриваться как одна и та же сеть, но представленная в различных системах координат. Поэтому различные сети, отличающиеся друг от друга лишь соединением своих элементов, описываются уравнениями поведения одного типа при условии, что эти уравнения тензорные.

Собственно сеть, состоящую из катушек и соединительных проводов, Крон рассматривает как «мертвую», невозбужденную. Когда сеть возбуждается электромагнитным полем, то на «мертвую» подлежащую сеть накладываются токи и напряжения. В контурах токи являются величинами отклика, а приложенные напряжения — воздействующими величинами, при этом уравнение поведения сети $e_\alpha = Z_{\alpha\beta} i^\beta$. В узловых парах, наоборот, воздействуют токи, а напряжения — отклик; уравнение поведения $I^\alpha = Y^{\alpha\beta} E_\beta$.

В качестве «единичных векторов», расположенных по осям координат (путям в сети, выбираются величины отклика, т. е. m контурных токов i^α и k узловых напряжений E_β .

Для контурной части сети при преобразовании от одной сети к другой контурные токи в старой сети записываются через токи в новой сети (новой системе координат). Коэффициенты при новых токах образуют матрицу преобразования S_α^α' , из $i^\alpha = S_\alpha^{\alpha'} i^{\alpha'}$.

Для узловой части сети формула преобразования записывается для узловых напряжений $E_\beta = A_\beta^{\beta'} E_{\beta'}$.

Матрицы S_α^α' и $A_\beta^{\beta'}$ представляют вид тензора преобразования в данной системе координат. Именно тензор преобразования является инструментом, с помощью которого записывается структура исследуемой системы. Функции тензора преобразования значительно шире, чем просто соединение катушек сети. На протяжении книги появляются тензоры преобразования, изменяющие число витков в катушках, вводящие гипотетические токи — все это в рамках пространства одной и той же сети. В гл. 23 вводится тензор синтеза, который, помимо других функций, меняет также импедансы и, что самое существенное, — количество катушек, следовательно, изменяет размерность пространства сети. Таким образом, тензор синтеза осуществляет переход от одного пространства сети к другому.

Тензор преобразования дает величины отклика при переходе от одной сети к другой. Чтобы получить закон преобразования других величин сети, необходимо еще одно соотношение. Таким соотношением в случае, когда мы имеем дело с одним и тем же пространством сети, является мощность на входе $e_\alpha i^\alpha$ или на выходе сети $I^\alpha E_\alpha$. При преобразованиях сети, состоящей из n катушек, мощность остается инвариантной. Сам по себе этот факт

достаточно очевиден. Дело в том, что геометрическая модель Крона любой системы представляет собой ортогональную сеть, потоки энергии в единицу времени на входе и выходе которой должны быть равны — закон сохранения потока в сети. Единственные изменения, происходящие в сети, заключаются в том, что те же самые катушки соединяются по-другому, и ни мощность источников, ни нагрузки, ни импедансы катушек не меняются. Поэтому суммарный поток энергии E через сеть (а это и есть мощность $P = dE/dt$) должен оставаться тем же самым. Потоки энергии лишь перераспределяются между путями открытыми и замкнутыми, что и служило источником всех недоразумений. Критики Крона заявляли, что мощность не является инвариантом при контурных (узловых) преобразованиях, когда число контуров (узловых пар) новой сети отличается от их числа в старой сети, и были правы. Однако мощность в ортогональной сети, рассматриваемой как совокупность открытых и замкнутых путей, остается той же самой.

Отметим, что в самой первой работе Дж. К. Максвелла (1855 г.) «О фарадеевых силовых линиях» уже используется инвариантность мощности. Максвелл, построив геометрическую картину эквипотенциальных поверхностей, рассекаемых трубками тока на объемные «клетки», отмечает:

«Поверхности равного давления вырезают из единичных трубок элементы объема длины l и поперечного сечения h . Все эти элементы объема единичных трубок мы назовем единичными клетками. В каждой из них единица объема жидкости переходит в единицу времени от давления P к давлению $P-1$ и потому преодолевает за это время единицу сопротивления. Работа, израсходованная на это жидкостью за единицу времени для каждой единичной клетки, также равна единице» (Дж. К. Максвелл. «Избранные сочинения по теории электромагнитного поля». М., ГИТТЛ, 1954, с. 25—26).

Достаточно заметить, что в стационарном поле общее число клеток постоянно; мы получим в этом утверждении Максвелла закон постоянства величины рассеиваемой мощности.

Если из «трубок тока» Максвелла образовать сеть, то инвариантом такой сети и будет мощность.

Инвариантность мощности тесно связана с несингулярностью тензора преобразования. Контурная и узловая матрицы преобразования сингулярны, поскольку, вообще говоря, при изменении сети меняется число контуров и узловых пар. Однако, если рассматривать преобразование всей сети в целом как ортогональной (пространство которой состоит из двух ортогональных подпространств контуров и узловых пар), то матрица преобразования этой сети во всех случаях остается несингулярной, пока преобразования остаются в пределах одного пространства сети. Следовательно, матрица преобразования всегда имеет обратную и совокупность матриц преобразования образует группу.

Тензор синтеза, как было сказано, осуществляет преобразование одного пространства сети в другое, а не только внутри того же пространства. При этом остается инвариантным критерий поведения сети, а мощность уже более инвариантом не является.

Обратим внимание на физику книги, т. е. на ее физическое содержание. Еще в 1944 г. А. А. Андронов и Г. С. Горелик поставили вопрос о разработке «общей динамики машин», как динамики неконсервативных систем. Фактически книга Г. Крона может рассматриваться как введение в общую динамику машин, использующую двойственные уравнения Лагранжа второго рода. Ее можно было бы написать и на языке аналитической динамики, но Г. Крон сознательно выбрал язык электротехники. Это произошло потому, что в аналитической механике нет механического аналога индуктивной и емкостной связи. Кроме того, для машин и механизмов, которые являются передающими сетями, оказалось необходимым использовать инвариант мощности.

Общая динамика машин выделяет в машинах их основное назначение: выполнять процесс внешней работы. Скорость выполнения рабочего процесса характеризуется полезной мощностью машины. Мы можем искать «структуру» соединения частей такой машины или сеть с конечной целью — выполнить работу с той же скоростью и иметь минимальную входную мощность. Но можно фиксировать входную мощность и искать такую «структуру» соединения частей машины или сеть, которая максимизирует полезную мощность на выходе конструкции. В этом смысле переход от конструкции одной машины к другой при инварианте входной мощности можно рассматривать как преобразование координат.

Здесь и находится ключевая идея Г. Крона, весьма важная с точки зрения автоматизации проектирования технических систем, идея, что изменение конструкции есть преобразование координат.

Для современного состояния теории больших систем и кибернетики в работе Крона важны прежде всего концепции моделей систем в виде обобщенной машины и полиэдральных сетей, которые исследуются методами тензорного исчисления.

Это представляет интерес для появившихся в последнее время так называемых интеллектуальных систем, в частности, интеллектуальных вопросно-ответных систем (ИВОС), интеллектуальных банков данных (ИБД), интеллектуальных сетей связи, теория которых разрабатывается специалистами по искусственному интеллекту.

Методы принятия решений, которые исследуются специалистами по искусственному интеллекту, так или иначе связаны с решением задач оптимизации. Наиболее общую формализацию

эти задачи находят в уравнениях Лагранжа II-ого рода, связь которых с сетями Крон исследует в гл. 17 и устанавливает определенную эквивалентность их с уравнениями Максвелла для электромагнитного поля. Если не связывать уравнения Максвелла с электромагнитным полем, то в некотором смысле их можно рассматривать как более детальную формальную запись закона оптимальности любых процессов управления.

Представляя эти уравнения в виде геометрического образа (полиэдральной сети) и исследуя его, Крон, по существу, использует тот же метод, что и в качественной теории колебаний Андронова, где нелинейные дифференциальные уравнения (в обычных производных) качественно исследуются (решаются) геометрически с помощью фазовой плоскости и пространства.

Так же, как в теории колебаний, где исследуются различные траектории в фазовом пространстве типа предельных циклов, в полиэдральной сети рассматриваются пути и циклы, состоящие из дискретных ребер. Каждый «кристалл», полиэдр полиэдральной сети обладает своей автономией, замкнутостью через свою «двойственность» и в то же время (через ту же двойственность) имеет связь с соседними полиэдрами.

Вот именно в этом смысле полиэдральные сети Крона представляют собой универсальную среду для задач принятия решений, что сейчас называется интеллектуальным банком данных.

Далее, современные методы моделирования больших систем переживают определенный этап кризиса. Дело в том, что опыт проектирования таких систем, как автоматизированные системы управления (АСУ) и проектирования (АСП), а также систем принятия решений искусственного интеллекта показал, что все эти системы обладают свойством индивидуальности, т. е. одно предприятие и его АСУ, один профессиональный человеческий интеллект не похожи на другие. Поэтому появилась концепция в теории больших систем о невозможности создания общих моделей, т. е. модели каждой большой системы следует создавать под конкретную, реальную систему со всеми ее индивидуальными свойствами. Однако, используя модель Крона в виде обобщенной машины и полиэдральной сети, и методы их интерпретации, конкретизации (или настройки) на конкретную систему (в частности, с использованием тензора преобразования S), представляется возможным сохранить для кибернетики методологическую концепцию моделей, очень важную для любой науки.

В гл. 8 книги, где Крон разбирает различие между «геометриями» с точки зрения групп, характеризующих эти преобразования, он рассматривает группу евклидовой геометрии, группу дифференциальной геометрии и топологическую группу. Но этих групп ему мало, и он вводит группу преобразований, которая включает топологическую группу лишь как частный случай. Мы назвали эту новую группу Г. Крона «тиринг-топологией». Если топологию называют «резиновой геометрией», т. е. геометрией

линий, нанесенных на растяжимую резиновую пленку, которые при всех деформациях сохраняют точки взаимного пересечения, то Крон предлагает еще «разрывать» такую пленку на «куски». Что же здесь может служить инвариантом группы? Оказывается, что в «резиновой» топологии взаимосвязаны два понятия: «принадлежность» и «непрерывность». Принадлежность точки двум пересекающимся линиям сохраняется лишь благодаря «непрерывности» этих пересекающихся линий. Г. Крон «отпрепарировал» понятие «принадлежность» от понятия «непрерывность». В группе «тиринг-топологии» сохраняется «принадлежность» и не сохраняется «непрерывность».

Возьмем лист бумаги. Этот лист имеет площадь. Введем операцию «разрезания» листа бумаги ножницами (без изменения площади!) и операцию раскладывания обрезков на плоскости. Каждая операция изменяет число обрезков и их расположение на плоскости, но все эти операции тем не менее образуют группу, сохраняющую площадь исходного листа бумаги. Более того, это преобразование является линейным — оно сохраняет «линейную форму», численно равную площади листа бумаги, но число компонент этой линейной формы равно числу обрезков. Число компонент в этой сумме и есть ранг линейного пространства.

Эта новая группа преобразований позволяет вводить квази-изоморфизм для линейных пространств, которые отличаются размерностью, но эквивалентны по численному значению линейной формы. Обычные линейные пространства изоморфны тогда и только тогда, когда они имеют одинаковую размерность.

В этой и других книгах Крона роль величины, которая остается неизменной при всех преобразованиях, играет величина мощности: сети считаются эквивалентными, если они рассеивают одинаковую мощность. Такие сети преобразуются друг в друга с помощью тензора преобразования.

Это отличие «линейных» преобразований Г. Крона имеет типично тензорный характер: одна и та же величина мощности представляется различными электрическими схемами или сетями, что соответствует тому, что ее компоненты различны в разных системах координат, а она сама остается неизменной или инвариантной величиной.

*Л. Кузин
П. Кузнецов
А. Петров*

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. К предисловию

1. **Kron G.** «Diacoptycs: The piecewise Solution of Large Scale Sistsms». Electrical Journal (London). Серия из 20 статей, опубликованных с июня 1957 г. по февраль 1959 г.; т. 158—162. Русский перевод: Г. Крон «Исследование сложных систем по частям — диакоптика». М. «Наука», 1972 г. Отдельной книгой опубликовано издательством Mc Donald (London), 1963.
2. **Kron G.** «Generalized theory of electrical machinery». Trans. AIEE, v. 49, № 4, 1930, pp. 666—685.
3. **Gabriel Kron and System Theory.** Ed. by H. H. Happ. Union College Press, Schenectady, N. Y. 1973.
4. **Kron G.** «The Life and Times of Gabriel Kron or Walking Around the World and Tensors», ed by Philip Alger, Schenectady: Mohauk Development Service, 1969.
5. Memoirs of Research Association of Applied Geometry, Japan v. I,—1955, v. II, 1958, v. III, 1962; v. IV, 1968.
6. **Берендеев А. В.** О работах Крона по применению тензорного анализа в электротехнике. — «Электричество», 1950, № 12.
7. **Грузов Л. Н.** К статье А. В. Берендеева «О работах Крона». — «Электричество», 1951, № 3.
8. **Максимович Н. Г.** К теории преобразования схем Г. Крона. — «Электричество», 1951, № 11.
9. **Крон Г.** Применение тензорного анализа в электротехнике. М., Госэнергоиздат, 1955.
10. **Веников В. А., Ионкин П. А., Петров Г. Н., Копылов И. П.** «Габриэль Крон» — «Электричество», 1969, 1.
11. **Brameller A., John M. N., Scoff M. R.** «Practical Diacoptycs for Electrical Networks». London, N. Y., 1969.
12. **Happ H. H.** «Diacoptycs and Networks», N. Y., London, 1971.
Хэпп Г. Х. Диакоптика и электрические цепи. М., «Мир», 1974.
13. **Lynn J. W.** Tensors in electrical engineering. London, E. Arnold, 1963.
14. **Roth J. P.** «An application of algebraic topology Kron's methods of tearing. Quart. of Appl. Math. 1969, v. XXIII, № 2.
15. **Kron G.** «Tensor Analysis of Networks». N. Y., John Wiley and Sons, 1939; reprinted London: Mc Donald, 1965.
Хэпп Г. Х. Диакоптика и электрические цепи. М., «Мир», 1974.
16. **Арменский В. А., Кузина И. В.** Единая теория электрических машин. Москва, РИО МИЭМ, 1975.
17. **Kron G.** «The Application of Tensors to the Analysis of Rotating Electrical Machinery», General Electric Review, 1935.
Перепечатано в форме книги в 1942 г.
18. Journal of Franklin Institute, 1968, v. 286, № 6.

II. К книге Г. Крона

Учебники по определителям

Muir and Metzler. Theory of Determinants. 1930.
Kowalevsky. Determinantentheory. 1934.

Учебники по матрицам

Cullis. Matrices and Determinoids. 1913 (3 vol./Cambridg University Press.
Turnbull. The Theory of Determinants, Matrices Invariants. 1928, Blackie and Son, Toronto.
Bocher. Introduction to Higher Algebra. 1930, The Macmillan Co.
Wedderburn. Lectures on Matrices. 1936, American Mathematical Society.

Статьи, относящиеся к областям электротехники, использующим матрицы

Strecker and Feldkeller. Grundlagen der Theory des Allgemeinen Vierpols. Elektrische Nach richten—Technik, 1929, p. 93.
Cauer. Vierpoul. Elektrischten—Technic, 1929, p. 272.
Howitt. Group Theory and the Electric Circuit. Physical Review, 1931, p. 1583.
Summers. Vector Theory of Circuits Involving Synchronous Machines. Trans. A I E E, June, 1932, p. 318.
Gewertz. The Syntesis of Finite, Four-terminal Networks. Journ. of Mathematics and Physics, January, 1933, p. 1.
Brillouin. Les Filtres Electriques et la Théorie des Matrices. Revue Générale de l'Electricite, 1936, p. 3.
Sah. Dyadic Algebra Applied to Three-phase Circuits. Electrical Engineering, 1936, p. 876.
Pipes. Matrices in Engineering. Electrical Engineering, 1937, p. 1177.
Более подробная библиография содержится в выше приведенных статьях.

Учебники по алгебраическим формам

Salmon. Modern Higher Algebra. Steckert and Co.
Elliotot. Algebra of Quantics. 1913, Clarendon Press.
Dickson. Modern Algebraic Theories, 1926, Sanborn & Co.

Учебники по теории групп

Mathewcon. Elementary Theory of Finite Groups, 1930, Houghton Mifflin.
Hilton. Finite Groups. Clarendon Press.
Burnside. Theory of Groups 1911.
Eisenhart. Continuous Groups of Transformation. 1934, American Mathematical Society.
Weyl. The Theory of Groups and Quantum Mechanics.

Учебники по топологии

Veblen. Analysis Situs. 1931. American Mathematical Society.
Lefschetz: Topology, 1930, American Mathemaitcal Society.
Tuker. Elementary Topology. 1935, Princeton University Press.

Предметом большей части последующего списка является дифференциальная геометрия или теория относительности. Книги, отмеченные звездочкой, относятся также к классическим задачам динамики. За единственным исключением, нет книг, написанных на языке инженера.

- * **Wright**. Invariant of Quadratic Differential Forms 1906, Cambridge Tract in Math. and Math. Physics, № 9.
- Garmichael**. Theory of Relativity. 1920, John Wiley and Sons.
- Weyl**. Spase, Time, Matter. 1923, Birkhoff: Relativity and Modern Physics, 1923, Harvard University Press.
- * **Sheppard**. From Determinants to Tensors. 1923, Oxford University Press.
- Rice**. Relativity. 1923, Longmans, Green and Co., London.
- Eddington**. The Mathematical Theory of Relativity. 1924, Cambridge University Press.
- Henderson**. Hobbs and Lasley: The Theory of Relativity. 1924, Oxford Press.
- Eisenhart**. Riemannian Geometry. 1926, Princeton University Press.
- Levy-Civita**. The Absolute Differential Calculus. 1927, Blackie and Son, Toronto.
- Veblen**. Invariants of Quadratic Differential Forms. 1927, Cambridge Tracts in Math. and Math. Physics, № 24.
- О. Веблен**. Инварианты дифференциальных квадратичных форм. М., ИЛ, 1948.
- * **Thomas**. The Elementary Theory of Tensors. 1931, McGraw-Hill.
- * **Jeffreys**. Cartesian Tensors. 1931, Cambridge University Press.
- * **Mc Connell**. Applications of the Absolute Differential Calculus. 1931, Blackie and Son, Toronto.
- Veblen-Whitehead**. Foundations of Differential Geometry. 1932, Cambridge Tracts in Mech and Math. Physics, № 29.
- Веблен О., Уайтхед Дж.** Основания дифференциальной геометрии. М., ИЛ, 1949.
- Levinson and Zeisler**. The law of Gravitation in Relativity. 1932, University of Chicago Press.
- Weatherburn**. An Intioudction to Riemannian Geometry and the Tensor Calculus. 1938, The Macmillan Co.
- * **Kron**. The Application of Tensors to Analysis of Rotating Electrical Machinery. 1938, General Electric Review.
- Laue**. Relativitätstheorie. (2 vol.), 1921, Vieweg and Sohn.
- Struik**. Grundzuge der Mehrdimensionalen Differentialgeometrie in Directer Darstellung. 1922, Springer, Berlin.
- Pauli**. Relativitätstheorie. 1921, Taubner, Leipzig.
- Schouten**. Der Ricci-Kalkül, 1924, Springer, Berlin.
- Rothe**. Einführung in die Tensorrechnung. 1924, Seidel and Sohn, Vienna.
- Duschek-Mayer**. Lehrbuch der Differentialgeometrie. (2 vol.), 1930, Teubner, Leipzig.
- Schouten-Struik**. Einführung in die Neueren Methoden der Differential geometrie. (2 vol.), 1935, Noordhoff, Groningen.
- Juvet**. Introduction au Calcul Tensoriel. 1922, Blanchard.
- Becquerel**. Le Principe de Relativité. 1922, Gauthier-Villars.
- Galbrun**. Théorie de la Relativité. 1923, Gauthier-Villars.
- Lagrange**. Calcul Differential Absolu. 1926, Mémorial des Scences Mathématiques, Fasc. XIX.
- * **Appell**. Cours de Mécanique Rationelle. Vol. V, 1926.
- Cartan**. Géométrie des Espaces de Riemann. 1928, Gauthier-Villars.
- Romey**. Notions de Calcul Tensoriel. 1934, Gauthier-Villars.
- * **Brillouin**. Les Tenseurs en Mécanique et en Elasticité. 1938, Masson et Cie.

Статьи по применению тензорного анализа в электротехнике

Kron. Tensor Analysis of Rotating Machinery. I, 1932; II and III, 1933. Mimeographed.

- Kron.** Discussion of Summers' paper. Vector Theory of Circuits Involving Synchronous Machines. Trans. A I E E, June, 1932, p. 325.
- Kron.** Non-Riemmanian Dynamics of Rotating Electrical Machinery. Journ. of Mathematics and Physics, 1934, p. 103—194.
- Kron.** The Application of Tensors to the Analysis of Rotating Electrical Machinery. General Electric Review. April, May, June, July, August, October, November, December, 1935. February, March, April, May, June, August, October, 1936. February, April, June, August, October, December, 1937. March, May, 1938.
- Kron.** Quasi-Holonomic Dynamical Systems. Physics, 1936, p. 143.
- Kron.** Tensor Analysis of Multielectrode-Tube Circuits. Electrical Engineering, 1936, p. 1220.
- Kron.** Analyse Tensorielle Appliquée à l'Art de l'Ingénieur. Bulletin de l'Association des Ingénieurs Electriciens. Liège, Belgium, September, October, 1936; January, February, 1937.
- Kron.** Invariant Form of Maxwell-Lorentz Field Equations for Accelerated Systems. Journ. of Applied Physics, March, 1938, p. 196.
- Lauder.** Salient-pole Motors out of Synchronism. Electrical Engineering, 1936, p. 636.
- Wiener, Norbert.** Notes on the Kron Theory of Tensors in Electrical Machinery. Journ. of Electrical Engineering, China, 1936, Nos. 3 and 4.
- Boyajian.** The Tensor — A New Engineering Tool. Electrical Engineering, 1936, p. 856.
- Bewley.** Tensor Algebra in Transformer Circuits. Electrical Engineering, 1936, p. 1214.
- Slepian.** A Parable on Tensor Analysis. Electric Journal, December, 1936.
- Slepian.** Tensors and Fruit Salad. Electric Journal, February, 1937.
- Slepian.** Discussion on Tensor Analysis. Electrical Engineering, 1937, p. 617.
- Slepian.** Letter to The Editor. Electrical Engineering, February, 1938. p. 83. Reply by Hoffmann. March, 1938, p. 137.
- Tucker.** Discussion on Tensor Analysis. Electrical Engineering, 1937, p. 619.
- Chang.** Theory and Tensor Analysis of Single-phase Induction Motors (in Chinese). Tsing-Hua Engineering Quarterly, 1937, Vol. 1, № 1.
- Stigant.** A—c Circuits. Symmetrical Components, Determinants, Tensors and Matrices. The Electrician, October 15, 1937.
- Van den Meersche.** Notes on the Application of Tensors to the Analysis of Networks with Radio — Tubes (in Dutch). Thesis, University of Ghent, 1937.
- Concordia.** Two-reaction Theory of Synchronous Machines with any Balanced Terminal Impedance. Electrical Engineering, 1937, p. 1124.
- Hoffmann.** What is Tensor Analysis? Electrical Engineering, January, February, March, 1938.
- Bouthillon.** Sur la Nature des Grandeurs Électriques et Magnétiques et l'Application de la Notation Tensorielle aux Lois de l'Électricité. Bull. Soc. Franc. Electriciens, January, 1938.
- Coburn.** A new Approach to Kron's Work. Journal of Mathematics and Physics. June 1938. p. 112—122.
- Concordia.** Relations Among Transformations Used in Electrical Engineering Problems. General Electric Review, July, 1938.
- Wikstrom.** The Application of Tensor Analysis to Electrical Calculations. Journal of American Society of Naval Engineers, August, 1938, p. 381.
- Skilling.** Tensors — in «Words of One Syllable». 1938, Electrical Engineering, September, p. 378.

Другие использованные статьи и учебники

- Maxwell.** Electricity and Magnetism. vol. 1.
- Herzog-Feldmann.** Die Berechnung Elektrischer Leitungsnetze, 1927, Springer.
- Webster.** Dynamics.
- Wagner and Evans.** Symmetrical Components, 1933, McGraw-Hill.

- Lyon.** Symmetrical Components, 1937, McGraw-Hills.
- Guillemin.** Communication Networks. (2 vol.), 1931, John Wiley and Sons.
- Dahl.** Electrical Circuits. 1928, McGraw-Hill.
- Mc Ilwain and Brainerd.** High-Frequency Alternating Currents. 1931, John Wiley and Sons.
- Doherty and Keller.** Mathematics of Modern Engineering, 1936, John Wiley and Sons.
- Stigant and Lacey.** The J-and P-Transformer Book. 1937, Johnson and Phillips.
- Foster.** Geometrical Circuits of Electrical Networks. Trans A I E E, 1932, p. 369.
- Kron.** Generalized Theory of Electrical Machinery. Trans. A I E E, 1930, p. 660.
- Tucker.** Non-Riemannian Subspaces. Annals of Mathematics, 1935, p. 965.
- Laporte and Uhlenbeck.** Applications of Spinor Analysis to the Maxwell and Dirac Equations. Physical Review, vol. 37, 1931.
- Veblen.** Spinors in Projective Relativity. Proceedings of the National Academy of Sciences, 1933, p. 979.
- Hoffman, Kock and Pryce.** A Geometrical Interpretation of the Method of Symmetrical Components. Journal of Mathematics and Physics, 1936, p. 18.
- Starr.** Theory of Primary Networks. Trans. A I E E, 1933, p. 939.
- Nyquist.** Regeneration Theory: Bell System Technical Journal, January 1932.
- Van den Meersche.** Sur un Théorème en Électricité Dédruit du Théorème de Réciprocité de Maxwell Généralisé. Revue générale de l'Electricité, 1935, p. 259.
- Alger.** Calculation of Armature Reactance of Synchronous Machinery. Trans. A I E E, 1928, p. 493.

*Краткий список статей о применении тензоров в классической физике
и в задачах механики*

- Ricci and Levi-Civita.** Methods de Calcul Differentiel Absolu et Leurs Applications. 1900, Math. Annalen, p. 125.
- Lipka.** On the Geometry of Motion in Curved n -Space. Journal of Mathematics and Physics, 1921, p. 21.
- Brillouin.** Les lois de l'Elasticité sous Forme Tensorielle Valable pour des Coordonnées Quelconques. Annalen de Physique, Series 10, vol. 3, May—June, 1925.
- Syngé.** On the Geometry of Dynamics, Philosophical Transactions of the Royal Society. London, 1926, Series A, p. 33.
- Murnaghan.** On the Application of Tensor Analysis to Physical Problems. Philosophical Magazine, 1928, Series 7, Vol. 6, № 38. Supplement, p. 779.
- Syngé.** Applications of the Absolute Differential Calculus to the Theory of Elasticity. Proceedings of the London Mathematical Society, Series 2, Vol. 24, p. 103.
- Eisenhart.** Contact Transformations. Annals of Mathematics, 1929, p. 211—249.
- McConnel.** The Braqhistochronic Motion of Dynamical Systems. Proceedings of the Royal Irish Academy. 39 A, 1930, p. 31.
- Lewis.** On the Reduction of Dynamics to Geometry. Philosophical Magazine, 1931, p. 753.
- Wundheiler.** Uber die Variationsgleichungen für Affine Geodetische Linien und Nichtholonome, Nichtkonservative Dynamische Systeme. Prac. Mat.-Fiz. Warszawa, 38, 1931, p. 129.
- Ruse.** Generalized Solutions of Some of the Partial Differential Equations of Mathematical Physics. Quarterly Journal of Mathematics, 1932, p. 15.
- Syngé.** The Equilibrium of a Tooth with a General Conical Root. Philosophical Magazine, Series 7, 1933, p. 969.
- Volterra.** Components of Deformation and Elastic Potential in Any Coordinate Systems. Atti Accad. Lincei, 20, Dec. 2, 1934, 424.
- Horak.** Mécanique Absolue et sa Représentation dans l'Espace-Temps des Configurations. Prac. Mat. — Fiz., Warszawa, 42, 1934, p. 59.

- Van Dijl.** The Application of Ricci-Calculus to the Solution of Vibration Equations of Piezo-Electric Quartz. *Physica*, 1936, p. 31.
- Concordia.** The Use of Tensors in Mechanical Engineering Problems. *General Electric Review*, 1936, p. 335.
- Vranceanu.** Les espaces Non-holonomes et leurs Applications Mécaniques *Mem. Sci. Math.* 76, 1936.
- Synge.** Tensorial Methods in Dynamics. 1936, University of Toronto Studies, Applied Math. Series, № 2.
- Kármán von.** The Fundamentals of the Statistical Theory of Turbulence. *Journal of the Aeronautical Sciences*. February, 1937, p. 131.

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

- Абсолютное дифференциальное исчисление** (см. тензорный анализ)
Абсолютное (ковариантное) дифференцирование 441
Автоматизация проектирования и теория Крона 695
Адмиттанс 89
— сети между двумя точками 437
«Активные» узловые пары 486
Алгебраическая топология 31
Алгебраические формы 84
Алгебраическое дополнение 69
Алгебра n -матриц 40
Анализ ортогональных осей 471
— n -сетей 638
— сетей 636
Аналоги сетевых понятий в топологии 256
Ассоциированные тензоры 530
Аффинная связность, 285, 543
Базовая буква 46
Базовые геометрические объекты 441
— инварианты 526
— переменные 517
— тензоры 441
— уравнения активных асимметричных сетей 544
Вектор ковариантный 217
—, представление 246
— контравариантный 217, 242
—, представление в прямолинейной системе координат 241
— напряжения 107
Векторы 242
—, компоненты 249
— потокосцепления 532
—, способ разделения 261
— тока 107
Величина вектора 236, 535
Ветвь 114
Взаимные реактансы 356
Взаимный импеданс короткого замыкания 555
Взаимосвязанная электрическая и магнитная сеть 505
Взаимосвязанные сети 512
— электрические и магнитные сети 501
— и диэлектрические сети 513
— электромагнитные явления 514
Взаимосоединение 25
— катушек 477
— ламп в сети 448
— узловых сетей 433
Взвешенные функции распределения 36
Воздействующие величины (impresed) 115
Воздействующий ток 115
Волны в многопроводной линии 90
Воображаемая катушка 469
Время 235
Геометризация физических проблем 240
Геометрические объекты 106; 218, 691
— ассоциированные 222
— индугированные 227
—, математическое представление 107
— и n -матрицы 221
— промежуточные 221
— смешанные 222
—, сопряжение 380
— физики и геометрии 234
Геометрический объект валентности n 107, 226, 617
— дважды ковариантный 222
— одноковариантный 222
— одноконтравариантный 222
— язык 239
Генератор короткозамкнутый нагруженный 393
—, описанный в осях последовательности 391
—, подсоединенный к нагрузке 392
Гипотетические контурные токи (токи Максвелла) 189
Гипотетический ток намагничивания 198
Граф-теоретики 26
Группа 101
— вращений 320
— конечная 320
— преобразований 11
— линейных 321
— сетей 26

- «симметричных составляющих» 394
- соединения 499
- Групповое свойство 324
- Группы бесконечные 320
- Бетти 320
- Дважды компаунд — индексы 273
- — тензоры 284
- — — валентности три 273
- — —, их использование 292
- Двойная обмотка для турбогенератора 362
- Двойственная ($n-1$)-сеть электромагнитного поля 28
- Двойственность между диэлектрической и магнитной цепью 509
- Двойственные величины 517
- скаляры 518
- тензоры 517
- уравнения движения Лагранжа 522
- Двойственный метрический тензор 541
- Двумерное «подпространство» трехмерного пространства 252
- Двухобмоточные трансформаторы 203
- Двухтактный двигатель 458
- усилитель 457
- Двухфазная структура сетей 29
- Деление на 2-матрицы 68
- Диаграмма компаунд-сети несимметричных трехфазных систем 561
- соединения и матрица преобразования половины обмотки синхронного двигателя 372
- Диакоптика 27, 692
- Диэлектрические константы 518
- сети 501, 509
- — узловые 510
- Дифференциальная геометрия 16, 254
- Дифференцирование матрицы 71
- Дуализм физических проблем 411
- Единичные клетки 694
- Задача с ортогональной сетью 640
- сведения пяти уравнений к двум 297
- Задачи анализа систем 637
- линий передачи 644
- физика и инженера 41
- Заземленная звезда 571
- Закон сохранения потока в сети 694
- Закрытый треугольник 577
- Замена активной сети пассивной 299
- комплексных чисел 613
- контурных токов токами ветвей 193
- обычной контурной сети компаунд-сетью 550
- — узловой сети компаунд-сетью 550
- открытого контура закрытым и наоборот 473
- переменных 104
- связей сингулярной матрицей 158
- Замкнутые цепи 113
- Замкнутый гиперпуть 28
- контур 27
- Замыкание 590
- одиночное 593, 604
- двойное в сбалансированной сети 605
- двойной линии на заземление 605
- Замыкания многократные как дважды компаунд-катушки 603
- одновременные в сбалансированной сети 605
- Зигзагообразные соединения 359
- Идентичность матриц, тензоров, геометрических объектов 266
- Изменения в π -сети 649
- импеданса 653
- напряжения открытой цепи 650
- в электрических величинах 643
- Импеданс катушки 76
- — заземления 562
- звезды 562
- потерь 327
- Инвариантное преобразование 196
- уравнение 107
- —, расчленение 275
- Инвариантность 101
- мощности 694
- — входной 522
- входной и выходной мощности 475
- форм 139
- Инвариантные геометрические объекты 229
- —, рекомбинация
- — преобразования 183, 229
- —, примеры 182
- уравнения 229
- Инварианты 228
- Индексное обозначение матриц 46, 78
- — —, гибкость 279
- Индексы 84
- верхние 219
- закрытые 219
- ковариантные и контравариантные 217
- надчеркнутые 406
- немые 219
- «ненадчеркнутые» 406
- нижние 219
- открытые 219
- свободные 219
- скользящие 219
- спинорные 407
- тензорные 407
- фиксированные 219
- — и скользящие 47
- Инженер-математик 5

- Интегрирование матрицы 72
 Интеллектуальный банк данных 696
 Исключение переменных 437, 549
 Искусственный интеллект 695
- Катушка** 38, 113
 Катушек соединение 133
 Катушечный тензор замыкания 593
 — — закрытого треугольника 582
 — — незаземленной звезды 582
 Квадратичные и эрмитовы формы 522
 Квадратный тензор соединения 25
 — —, физическая интерпретация 28
 Ковариантные переменные 517
 — и контравариантные переменные 471
 Компаунд-геометрический объект 260
 Компаунд-индексы 261, 284
 — катушки 546
 — мультитензор 610
 — — матрицы 260
 — ряды 622
 — сети 18, 546
 — — ортогональные 553, 555
 — —, универсализм 579
 — — фиктивные 546
 — тензоры 260, 565
 — —, действия с ними 267
 — — в индексных обозначениях 278
 — —, пример перемножения 269
 — —, произвольное подразделение 303
 — 2-тензор с двумя строками 305
 — 2-тензор трехстрочный 306
 Комплексные ряды в инвариантной форме 623
 — —, их обращение 625
 Константы сети 517
 Контурная цепь триода 631
 Контравариантные переменные 517
 Контурные токи в ортогональной сети 640
 Контуры 113
 Короткое замыкание трех узловых пар 422
 Коэффициент потерь 555
 — связи 540
 — трансформации 333
 Критерий постоянства входного импеданса 668
 — — входного напряжения 670
 — — тока генератора 666
 — — тока в нагрузке 664
 — — разности потенциалов 666
 — постоянного напряжения 667
 — равенства входного или выходного адмиттанса 670
 — — — импеданса активных сетей 669
Ламповая сеть как ортогональная сеть 643
- Линейная форма 251, 522
 Линейное (аффинное) пространство 242
 Локальные (касательные) пространства 542
- Магнитная контурная сеть** 505
 — энергия накопленная 538
Магнитные константы 518
 — сети 501, 504
 — —, сцепленные с электрическими и диэлектрическими 513
 Математический аппарат Крона 5, 9
 Матрица диагональная 70
 — обратная 68
 — — преобразования 137
 — — петлевой обмотки 214
 — —, преобразующая примитивную сеть в действительную 148
 — транспонированная 77
 — характеристическая 533
Матриц произведение 63
Матрицы, действия с ними 52
 — неподвижных сетей 75
 —, представление различных частей 48
 — симметричные и кососимметричные 81
 — сингулярных преобразований 157
 —, физический пример их появления 45
Матричные уравнения 83
Мгновенные инварианты 527
Метод симметричных составляющих 385
Методы атаки (method of attack) 14
Метрический тензор (тензор индуктивности) 285, 528
 — — двухобмоточного трансформатора 528
Минор компоненты 67
Многомерные полиэдральные сети 21
Многообмоточные компаунд-трансформаторы 586
 — трансформаторные системы 326
 — трансформаторы 201, 446
Многообмоточный автотрансформатор 330
Многоэлектродные лампы 446
Множества 219
 — переменных индексов 281
Мостовая схема 164
Мощность 381
 — входа в системе переменного тока 382
- Мультикомпаунд-тензоры** 272
Мультитензоры 609, 611
Мультисистемы координат 609
Накладываемые электромагнитные величины 115

- Направление 114
- вектора 236
- Напряжения и токи в контурах и узловых сетях 469
- — нагрузки неизменные 654
- — в ортогональных сетях 470
- холостого хода 639
- Недостаток общности 16
- Недостаточность обычных пространств 243
- Незаземленная звезда 576
- Некоммутативная алгебра 61
- Нелинейные системы 438
- —, соединение 629
- Неподвижная сеть 75, 89
- Непрерывные обмотки постоянного тока 212
- Несбалансированные напряжения в обмотках постоянного тока 341
- Несимметричные трехфазные многообмоточные трансформаторы и их матрицы преобразования 399
- Несимметричный вписанный треугольник 337
- Несингулярная (квадратная) матрица соединений 24
- матрица для сети произвольного типа 493
- Нетензорный геометрический объект 231
- Неэлектрические сети 23
- n -матрицы 42, 49, 102
- n -множества 42
- N -мерные матрицы 219
- Нуль-матрица 44
- Обмотка конденсаторного двигателя 360
- Обобщение (нормировка) системы «на единицу» 527
- Обобщенная кристаллооптика 22, 35
- Обобщенные координаты 11
- Обобщенный мультикомпаунд-тензор 274
- Обратный тензор преобразования 431
- соединения 29
- Обращение комплексных инвариантных рядов 626
- Общая динамика машин 695
- Общие параметры сети 645
- Объединение соседних катушек 349
- Операторы последовательности 385
- — в методе симметричных составляющих 383
- Операции с матричными уравнениями 83
- с произведениями матриц 81
- Определение уравнения новой системы по уравнениям старой 140
- Определители 66
- Ортогональная компаунд-сеть 553
- сеть с двумя типами контуров и двумя типами узловых пар 553
- теория сетей-ветвей 24
- Ортогональные подпространства 252
- Организация 21
- множества величин в n -матрицу 101
- в технических задачах 40
- Организованные множества 41
- Оси двух типов 583
- Отдельные индексы 261
- Ответные величины 517
- Открытая нитка (трубка) тока 25
- Открытый гиперпуть 28
- контур 26, 413
- путь 26
- треугольник 577
- Переменные 119
- Перестановка 207
- замкнутые обмотки 210
- Переход к чисто контурной сети 496
- Поведение (performance) 13
- Подгруппы 321
- Подлежащее пространство 542
- Полугруппа 319
- Поднятие и опускание индексов 528
- Подразделение матрицы преобразования на произведение нескольких матриц 325
- Полиэдральные волны 37
- сети 27, 33, 38
- — динамические 34
- — неподвижные 34
- Полиэдр как квантово-механическая модель 36
- как релятивистская модель 35
- Полюсная пара 26
- Полюс эллипса 538
- Поляра эллипса 538
- Постулат второго обобщения 101, 111, 614
- первого обобщения 86, 93, 101
- третьего обобщения 232
- Постулаты обобщения 109, 19
- Правила быстрого манипулирования с множествами чисел 19
- Полная компаунд-сеть с двумя контурами и двумя узловыми парами 657
- Поток мощности в нагрузках 655
- Правило стрелки 58, 62
- Представление мощности 250
- Преобразование 101
- n -контурной сети в другую сеть 183
- звезда-контур 311
- , перестановки 207
- , размыкание цепей 204
- сингулярного катушечного тензора к последовательным осям 581
- системы координат 104, 247
- токов ветвей 187

- точек пространства 249
- Преобразования голономные 224
 - контурно-узловые 308
 - линейные 223
 - неголономные 224
 - неинвариантные 237
 - сингулярные 159
 - , проверка 498
 - пространств-структур 257
 - сетей 495
 - спинорные 407
 - точек пространства 249
 - узловых пар 428
 - функциональные 223
- Приложенные напряжения в исключенных осях 295
 - в трех группах катушек 301
 - величины 517
- Приложенный ток в узловых и ортогональных сетях 115
- Примитивная сеть 26, 190, 478, 491
 - контурная 125
 - узловая 128
 - система 17, 175, 123
- Примитивные системы 17
- Примитивный тензор синтеза 684
- Принцип массового производства 14
- Полный реактанс воздушного зазора 355
- Принадлежность и непрерывность 697
- Производные геометрические объекты 441
 - переменные 517
- Пространства взаимосвязанные 254
 - и конфигурации, накладываемые на них 251
 - n -мерные и другие 12
- Пространство унитарное 245
- Прямое обозначение матриц 46, 78
- Псевдотензор 408
- Пусковые обмотки синхронного двигателя 370
- Пути 251
- Разложение в степенной ряд 93
- Разомкнутые катушки 168
- Разрывание (tearing) 25
- Распределительная цепь 161
- Распространение волн в многопроводной линии 90
- Расчленение квадратичных уравнений 285
 - компаунд 2-тензора 283
 - компаунд 3-тензора 280
 - линейных уравнений 275
 - сложных проблем 324
- Реактанс воздушного зазора катушки 352
 - гармонических составляющих 352
 - главный 352
 - дифференциального рассеяния 352
 - полный 352
- Реактансы катушечные 357
 - лобового рассеяния 352, 355
 - отдельных катушек 352
 - пазового рассеяния 352
 - синусоидальные 358
 - соединения обмоток 359
 - , типы 355
 - якорных обмоток 347
- Редукция, двойственный вид формул 436
 - контурной компаунд-сети 552
 - линейных уравнений 307
 - (упрощение) узловых компаунд-сетей 550
- Результатирующая система 176
- Ряд Тейлора 615
 - комплексный 620
 - , обращение 625
- Самоорганизующиеся полиэдральные сети 31
- Свободная энергия (термодинамический потенциал) 540
- Связанная энергия 540
- Сетевые задачи 636
- Сети 110, 122
 - коммуникационные 557
 - и лампы 457
 - многоэлектродной лампы 614
 - с нулевыми импедансами 525
 - , описание поведения 120
 - ортогональные 469, 475
 - , последовательностей 580
 - распределительные 646
 - , синтез 662
 - с тетрадами 461
 - узловые 122, 411
 - , физическое разделение 556
 - чисто контурные 132, 473
- Сеть, в которой имеются два замыкания 597
 - с любым числом контуров и узловых пар с несколькими генераторами с постоянным напряжением 664
 - , состоящая из пяти узловых пар девяти контуров 454
 - триада как ортогональная сеть 468
- Силовые установки 557
- Символ аффинной связности 236
- Симметричная форма окончательной матрицы 153
- Симметричные составляющие 579
- Сингулярные матрицы 159
 - преобразования 156
- Синусоидальный реактанс 358
- Система нормированная «на 1» 527
 - n уравнений с k переменными 314
 - передачи из n параллельных проводников 90

- Скользющие индексы 48
Скорость 235
Смешанные координатные оси 607
Смешанный тензор восприимчивости 541
— — проводимости 541
— — резистанса 531
— — эластанса 532
Собственные и взаимные импедансы и адмиттансы 555
Соединение катушек 133
— — обмотки синхронного двигателя в группы при запуске 371
— — встречное 146
— — согласное 146
— — сетей 173
Собственный импеданс короткого замыкания 555
Спинор 38
— взвешенный 409
Спинорные индексы 624
— преобразования 380
Спинорный анализ (абсолютное дифференциальное исчисление) 10
Способность к самоорганизации 36
Способы соединения пяти катушек в пять контуров 132
«Стальной каркас» при изучении физических явлений 15
— — в технике 15
Стадии организации 233
Стандартная трехфазная обмотка 355
Статические характеристики лампы 439
Стенографический способ обозначений 11
Степенные ряды 93
— — обращенные 96
Строительные блоки сетей 122
Структуры 17
— пространства 251
Тензор адмиттанса 107, 443
— — пентода 445
— адмиттансов отдельных катушек 445
— базовый 440
— валентности два 237
— — нуль (скаляр) 231
— — один (вектор) 231
— — три 617
— — четыре 617
— импеданса лампы 464
— — примитивного трансформатора 327
— — примитивной обмотки 362
— — лампы 464
— импедансов результирующей системы 176
— кривизны Римана — Кристоффеля 237
— метрический 236
— модуляции 618
Тензорная плотность 409
Тензорный анализ сетей 20, 31, 101
— —, искажения 22
— —, нападки и осуждения 22
— —, применение к вращающимся электрическим машинам 19
— —, его роль в проектировании систем 691
Тензор обратного преобразования 138
Тензоров гибкость 14
Тензор отдельный 556
— преобразования 25, 108, 111, 131, 137, 243, 365, 517
— —, свойства 317
— — синтеза 662, 671
— — для постоянного выходного тока 673
— — постоянства входного импеданса 681
— — примитивный 662
— — для неизменного выходного тока 678
— — для постоянства разности потенциалов 680
— — последовательности 384
— —, использование 390
— — релактанса 505
— — соединения 17
— — узловой 556
— — импеданса заземления 570
— — перестановки 569
— —, пример применения 563
Тензоры взвешенные 498
—, геометрические объекты и n -матрицы 265
— импеданса в осях последовательности 580
— — трехфазных многообмоточных трансформаторов 580, 558
— — замыкания 291
— катушечные в последовательных осях 581
— — замыкания 590
— Крона 692
— и спиноры в решении инженерных задач 13
—, способ разделения 261
— узловые 587
— — в последовательных осях 581, 587
Теорема о квадратичных формах 85
— о компенсации 651
— Тевенина (взаимности) 297, 299, 437, 657
Теория групп 317
— динамических систем 6
— Крона 12
— относительности 9
— полиэдральных сетей 6

- электрических сетей 23
- Термодинамика сетей 539
- Тиринг-топология 696
- Токи короткого замыкания 659
- Топологическая структура электрической сети 21
- Топология 10, 16, 254
 - и электричество 18
 - дифференцируемых многообразий 231
- Трансформаторы со сдвигом по фазе 396
- Трехмерная матрица 44
- Траектория 241
- Трижды компаунд-тензор валентности два 274
 - ортогональная организация 30, 38
 - — природа сетей 33
- Триод 467
 - «Узел» 113
 - узловая пара 26, 38, 114, 119
 - — активная 486
 - — пассивная 548
- Узловой ток 25
- Узловые пары сетей 638
- Умножение матриц 57, 79
 - — с использованием «правила стрелки» 58
 - — по правилу суммирования 61
- Упрощения в ламповых цепях 627
- Уравнение движения Лагранжа в инвариантной форме 285
 - мощности 521
 - напряжения 286, 518, 630
 - лампы, рассматриваемой как контурная сеть 620
 - — любой контурной сети 147
 - — новой системы 143
 - — ортогональной сети 477, 519
 - тока 519, 630
 - — многоэлектродных ламп 618
 - — ортогональной сети 477, 519, 490
 - — в узловой сети 520
- Уравнения связи 156, 422
 - — двух трансформаторов для исключения намагничивающих токов 600
 - — состояния изолированных контурных сетей 502
- Усилитель промежуточной частоты 450
 - с вырожденной обратной связью 465
 - с обратной связью 454
- Фазосдвигающий соединенный зигзагом трансформатор 398
- Физическая реализуемость катушек 689
- Формулы преобразования 225, 108, 142
 - — вектора напряжения 141
 - — импеданса 296
 - — промежуточных геометрических объектов 226
 - — редукции 18, 289
- Формы 84
- Функциональное разбиение сетей 548
- Характеристическое (вековое) уравнение 533
- Цепи 255
 - вакуумных ламп 557
 - с многоэлектродными лампами 438
 - , общие параметры 644
 - триодные 643
- Четырехконтурная сеть из трехобмоточного трансформатора, двух двухобмоточных и нагрузки 333
- Шестиполюсная волновая обмотка постоянного тока со 126 катушками 346
- Шестиугольный фазосдвинутый автотрансформатор 404
- Эквивалентная цепь 691
- Эквивалентность токов ветвей и контурных токов 194
 - n -катушечных цепей 499
 - контуров и узловых пар 474
- Эквивалентные сети 685
 - узловые сети для ламп 447
- Эластансы 76, 501
- Электрическая лампа 438
 - —, уравнение 439
 - сеть 24, 501
- Электрические константы 518
- Энергия 539
- Эталонная (примитивная сеть) 150
- Этапы восстановления любой узловой сети 420
- Эффективность сети 540

О Г Л А В Л Е Н И Е

| | |
|---|----|
| Предисловие редакторов перевода | 5 |
| Введение (1939 г.) | 9 |
| Аналитический аппарат | 12 |
| Метод рассуждения | 15 |
| Точка зрения | 18 |
| Указание для читателей | 19 |
| Благодарности | 20 |
| Тензорный анализ сетей | 20 |
| Осуждение и одобрение | 22 |
| «Многоязычный парад с фальшивым оперением» | 22 |
| Обилие различных «неэлектрических» сетей | 23 |
| Проявление массовой истерии | 23 |
| Что такое электрическая сеть? | 24 |
| Электрическая сеть как пара «мертвой» и «живой» структур | 24 |
| Квадратный «тензор соединения» и его роль как «тензора преобразования» | 25 |
| Двойственные понятия «открытого» и «замкнутого» контура | 25 |
| Неудачное выражение «узловая пара», или «полусная пара» | 26 |
| «Группа» сетей с n ветвями и инвариантность мощности | 26 |
| «Примитивная» сеть | 26 |
| Избыточность понятия «узел» в «электрической» сети | 27 |
| Понятие «ортогональная» сеть | 27 |
| Физическая интерпретация «квадратного» тензора соединения C | 28 |
| «Двойственная» $(n-1)$ -сеть невидимого электромагнитного поля | 28 |
| «Двухфазная» структура обычных сетей | 29 |
| Физическая интерпретация «обратного» тензора соединения $A=C_1^{-1}$ | 29 |
| Специальные формы C или A | 29 |
| «Трижды-ортогональная» организация | 30 |
| Дополнительные понятия 1-сети | 30 |
| «Старый тип» тензорного анализа и алгебраическая топология | 31 |
| «Новый тип» тензорного анализа и алгебраической топологии | 31 |
| Модели электрических цепей для дифференциальных уравнений в частных производных | 32 |
| «Полиэдральные» сети | 33 |
| «Трижды-ортогональная» природа всех p -сетей | 33 |
| Четыре опорных столба полиэдральных сетей | 33 |
| «Неподвижные» полиэдральные сети | 34 |
| «Динамические» полиэдральные сети | 34 |
| Обобщенная кристаллическая оптика | 35 |
| Электровозбужденный полиэдр как релятивистская модель | 35 |
| Энерговозбуждаемый полиэдр как квантово-механическая модель | 36 |
| Нефизические приложения многомерных аппроксимирующих кривых | 36 |
| Взвешенные функции распределения | 36 |
| Дальнейшее развитие | 37 |
| Предполагаемые изменения в терминологии | 37 |
| Необходимость в трижды-ортогональной реорганизации | 38 |

Глава 1.

| | |
|--|-----------|
| Алгебра n-матриц | 40 |
| 1. Необходимость «организации» в подходе к техническим задачам | 40 |
| 2. «Организованные» множества | 41 |
| 3. n -матрицы | 42 |
| 4. Физический пример появления n -матриц | 45 |
| 5. Система обозначений | 46 |
| 6. «Фиксированные» и «скользящие» индексы | 47 |
| 7. Представление n -матриц более высоких размерностей | 49 |
| 8. Матричное обозначение | 51 |
| 9. Действия с n -матрицами | 52 |
| 10. Сложение | 53 |
| 11. Умножение 1-матриц | 57 |
| 12. Умножение 2-матриц с использованием «правила стрелки» | 58 |
| 13. Умножение 2-матриц по правилу суммирования | 61 |
| 14. Произведение любых двух n -матриц | 63 |
| 15. Определители | 66 |
| 16. Деление на 2-матрицы | 68 |
| 17. Дифференцирование | 71 |
| 18. Интегрирование | 72 |

Глава 2.

| | |
|--|-----------|
| Постулат первого обобщения | 74 |
| 1. Появление n -матриц | 74 |
| 2. n -матрицы неподвижных сетей с сосредоточенными параметрами | 75 |
| 3. Порядок следования матриц в прямом обозначении | 77 |
| 4. Порядок умножения матриц | 79 |
| 5. Операции с произведениями матриц | 81 |
| 6. «Симметричные» и «кососимметричные» матрицы | 81 |
| 7. Операции с матричными уравнениями | 83 |
| 8. Действия с индексами | 84 |
| 9. «Формы» | 84 |
| 10. «Постулат первого обобщения» | 86 |
| 11. Неподвижные сети | 89 |
| 12. Распространение волн в многопроводной линии | 90 |
| 13. Разложение в степенной ряд ¹⁾ | 93 |
| 14. Обращенный степенной ряд ¹⁾ | 96 |
| 15. Исключение переменных | 99 |

Глава 3.

| | |
|---|------------|
| Постулат второго обобщения | 101 |
| 1. Созидание новых математических объектов | 101 |
| 2. Постулат второго обобщения | 103 |
| 3. Понятие «геометрический объект» | 106 |
| 4. Математическое представление геометрического объекта | 107 |
| 5. Тензор преобразования | 108 |
| 6. Назначение постулатов обобщения | 109 |
| 7. Сети | 112 |
| 8. Строительные блоки сетей | 112 |
| 9. Аналитические единицы сети | 113 |
| 10. Другая физическая интерпретация | 114 |
| 11. Накладываемые электромагнитные величины | 115 |
| 12. Условности терминологии | 117 |
| 13. Два типа переменных | 119 |
| 14. Три типа описания поведения сети | 120 |

| | |
|---|-----|
| 15. Резюме по «уравнениям движения» | 121 |
| 16. Типы сетей | 122 |
| 17. Понятие примитивной системы | 123 |
| 18. Примитивная «контурная» сеть | 125 |
| 19. Примитивная «узловая» сеть | 128 |

Глава 4.

| | |
|--|------------|
| Тензор преобразования | 131 |
| 1. Этапы анализа | 131 |
| 2. Чисто-контурные сети | 132 |
| 3. Соединение катушек | 133 |
| 4. Соотношение между старыми и новыми токами | 136 |
| 5. Тензор преобразования | 137 |
| 6. «Инвариантность форм» | 139 |
| 7. «Формула преобразования» вектора напряжения e_m | 141 |
| 8. Формула преобразования Z_{mn} | 142 |
| 9. Новое уравнение напряжения | 143 |
| 10. Токи и напряжения в отдельных катушках | 144 |
| 11. Соглашение о знаках | 146 |
| 12. Последовательность этапов вывода уравнений | 147 |
| 13. Последовательность этапов рассуждения | 150 |
| 14. Второй пример | 150 |

Глава 5.

| | |
|---|------------|
| Сингулярные преобразования | 156 |
| 1. Уравнения связи | 156 |
| 2. Матрицы сингулярных преобразований | 157 |
| 3. Замена связей сингулярной матрицей C | 158 |
| 4. Вычисления с помощью сингулярной матрицы C | 159 |
| 5. Распределительная цепь | 161 |
| 6. Мостовая схема | 164 |
| 7. Потенциалы на разомкнутых катушках | 168 |
| 8. Тензор адмиттансов отдельных катушек | 170 |
| 9. Пример u_c для отдельных катушек | 172 |
| 10. Соединение нескольких сетей | 173 |
| 11. Примитивная система | 175 |
| 12. Результирующая система | 176 |
| 13. Пример соединения двух контурных сетей | 177 |
| 14. Выбор переменных | 180 |

Глава 6.

| | |
|--|------------|
| Примеры инвариантных преобразований | 182 |
| 1. Виды преобразований | 182 |
| 2. Преобразование n -контурной сети в другую n -контурную сеть | 183 |
| 3. Проверка преобразования | 185 |
| 4. Преобразование токов ветвей | 187 |
| 5. Гипотетические «контурные» токи | 189 |
| 6. Замена контурных токов токами ветвей | 193 |
| 7. Эквивалентность токов ветвей и контурных токов | 194 |
| 8. Изменение числа витков | 196 |
| 9. Пренебрежение «токами намагничивания» как связями | 198 |
| 10. Связи как преобразования | 199 |
| 11. Многообмоточные трансформаторы | 201 |
| 12. Токи нагрузки и намагничивания | 202 |
| 13. Двухобмоточный трансформатор | 203 |
| 14. Размыкания цепей как преобразования | 204 |

| | |
|---|-----|
| 15. Перестановки как преобразования | 207 |
| 16. Замкнутые обмотки как перестановки | 210 |
| 17. Непрерывные обмотки постоянного тока | 212 |
| 18. Физическая интерпретация тензора преобразования | 215 |

Глава 7.

| | |
|---|------------|
| Ковариантные и контравариантные индексы | 217 |
| 1. Верхние и нижние индексы | 217 |
| 2. Геометрические объекты | 218 |
| 3. Промежуточные геометрические объекты | 221 |
| 4. Ассоциированные геометрические объекты | 222 |
| 5. Линейные и функциональные преобразования | 223 |
| 6. Голономные и неголономные преобразования | 224 |
| 7. Формулы преобразования | 225 |
| 8. Формулы преобразования промежуточных геометрических объектов | 226 |
| 9. Индуцированные геометрические объекты | 227 |
| 10. Инварианты | 228 |
| 11. Определение тензора | 230 |
| 12. Важнейшие тензоры физических проблем | 232 |
| 13. Необходимость постулата третьего обобщения | 232 |
| 14. Три стадии организации | 233 |
| 15. Важные геометрические объекты физики и геометрии | 234 |
| 16. Неннвариантные преобразования | 237 |

Глава 8.

| | |
|--|------------|
| Геометрические интерпретации | 239 |
| 1. Геометрический язык | 239 |
| 2. Геометризация физических проблем | 240 |
| 3. Представление контравариантного вектора | 242 |
| 4. Недостаточность обычных пространств | 243 |
| 5. Представление ковариантного вектора | 246 |
| 6. Преобразование системы координат | 247 |
| 7. Преобразование точек пространства | 249 |
| 8. Представление мощности | 250 |
| 9. Пространства и конфигурации, накладываемые на них | 251 |
| 10. Ортогональные подпространства | 252 |
| 11. Ограниченность данного геометрического представления | 253 |
| 12. Взаимосвязанные пространства | 254 |
| 13. Аналогии сетевых понятий в топологии | 256 |
| 14. Преобразование пространств-структур | 257 |

Глава 9.

| | |
|---|------------|
| Компаунд-тензоры | 260 |
| 1. Компаунд- n -матрицы, геометрические объекты и тензоры | 260 |
| 2. Способ разделения тензоров | 261 |
| 3. Различие между тензорами, геометрическими объектами и n -матрицами | 265 |
| 4. Действия с компаунд-тензорами | 267 |
| 5. Пример перемножения компаунд-2-тензоров | 269 |
| 6. Мульти-компаунд-тензоры | 272 |
| 7. Расчленение линейных уравнений | 275 |
| 8. Компаунд-тензоры в индексных обозначениях | 278 |
| 9. Гибкость индексных обозначений | 279 |
| 10. Различные множества переменных индексов | 281 |

| | |
|---|-----|
| 11. Компаунд-индексы | 284 |
| 12. Расчленение квадратичных уравнений | 285 |
| 13. Рекомбинация инвариантных уравнений | 287 |

Глава 10.

| | |
|---|------------|
| Формулы редукции | 289 |
| 1. Уменьшение числа уравнений | 289 |
| 2. Исключение множества переменных | 289 |
| 3. Формула редукции импеданса | 291 |
| 4. Использование дважды компаунд-тензоров | 292 |
| 5. Приложенные напряжения в исключенных осях | 295 |
| 6. Числовой пример | 297 |
| 7. Замена активной сети пассивной сетью | 299 |
| 8. Обобщение теоремы Тевенина | 299 |
| 9. Приложенные напряжения в трех группах катушек | 301 |
| 10. Произвольное подразделение компаунд-тензоров | 303 |
| 11. Обращение компаунд-2-тензора с двумя строками | 305 |
| 12. Обращение трехстрочного компаунд-2-тензора | 306 |
| 13. Выводы по редукции линейных уравнений | 307 |
| 14. Контурно-узловые преобразования | 308 |
| 15. Импеданс между двумя точками | 311 |
| 16. Система n -уравнений с k переменными | 314 |

Глава 11.

| | |
|---|------------|
| Теория групп | 317 |
| 1. Свойства тензора преобразования | 317 |
| 2. Теория групп | 317 |
| 3. Определение групп | 318 |
| 4. Примеры конечных групп | 320 |
| 5. Примеры бесконечных групп | 320 |
| 6. Подгруппы | 321 |
| 7. Преобразование, инвариантность, группа | 322 |
| 8. Групповое свойство | 323 |
| 9. Расчленение сложных проблем | 324 |
| 10. Типы разделения S | 325 |
| 11. Многообмоточные трансформаторные системы | 326 |
| 12. Тензор импеданса примитивного трансформатора | 327 |
| 13. Другое определение импеданса потерь | 329 |
| 14. Многообмоточный автотрансформатор | 330 |
| 15. Отношение нагрузок блоков управления и регулирования | 333 |
| 16. Несимметричный вписанный треугольник | 337 |
| 17. Несбалансированные напряжения в обмотках постоянного тока | 341 |

Глава 12.

| | |
|---|------------|
| Расчет реактансов обмоток | 347 |
| 1. Универсальность метода | 347 |
| 2. Метод подхода | 348 |
| 3. Объединение соседних катушек | 349 |
| 4. Расчет реактансов отдельных катушек | 352 |
| 5. Стандартная трехфазная обмотка | 355 |
| 6. Обмотка конденсаторного двигателя | 360 |
| 7. Пример двойной обмотки для турбогенератора | 362 |
| 8. Пусковые обмотки синхронного двигателя | 370 |

Глава 13.

| | |
|---|------------|
| Спинорные преобразования | 380 |
| 1. Сопряжение геометрических объектов | 380 |
| 2. Более общее определение мощности | 381 |
| 3. Формулы преобразования | 383 |
| 4. Тензор «последовательности» | 383 |
| 5. Тензор импеданса последовательности | 386 |
| 6. Приведение к диагональной форме | 388 |
| 7. Использование тензора последовательности | 390 |
| 8. Генератор, описанный в осях последовательности | 391 |
| 9. Генератор, подсоединенный к нагрузке | 392 |
| 10. Группа «симметричных составляющих» G_{sc} | 394 |
| 11. Трансформаторы со сдвигом фаз | 396 |
| 12. Получение новых токов | 397 |
| 13. Тензор преобразования | 398 |
| 14. Тензор импеданса | 403 |
| 15. Шестиугольный сдвигающий фазу автотрансформатор | 404 |
| 16. «Надчеркнутые» и «ненадчеркнутые» индексы | 406 |
| 17. Тензорные и спинорные индексы | 407 |
| 18. Взвешенные тензоры | 408 |
| 19. Взвешенные спиноры | 409 |

Глава 14.

| | |
|---|------------|
| Узловые сети | 411 |
| 1. Дуализм физических проблем | 411 |
| 2. Чисто узловые сети | 412 |
| 3. Инвариантность мощности | 414 |
| 4. Тензор адмиттанса Y' | 414 |
| 5. Вектор тока I' | 418 |
| 6. Сводка этапов | 420 |
| 7. Уравнения связей | 422 |
| 8. Сингулярный тензор преобразования | 424 |
| 9. Преобразование узловых пар | 428 |
| 10. Числовой пример | 430 |
| 11. Физическая интерпретация обратного тензора преобразования | 431 |
| 12. Взаимосоединение сетей | 432 |
| 13. Пример соединения двух сетей | 433 |
| 14. Двойственный вид формул редукции | 436 |

Глава 15.

| | |
|--|------------|
| Цепи с многоэлектродными лампами | 438 |
| 1. Нелинейные системы | 438 |
| 2. Электродная лампа | 438 |
| 3. Уравнение лампы | 439 |
| 4. «Базовые» и «производные» тензоры | 440 |
| 5. Конструирование новых тензоров дифференцированием | 441 |
| 6. Тензор адмиттанса | 443 |
| 7. Многоэлектродные лампы и многообмоточные трансформаторы | 446 |
| 8. Эквивалентные узловые сети для ламп | 447 |
| 9. Взаимосоединение ламп в сети | 448 |
| 10. Усилитель промежуточной частоты | 450 |
| 11. Усилитель с обратной связью | 454 |
| 12. Двухтактный усилитель | 457 |
| 13. Критерий возникновения колебаний | 460 |
| 14. Сети с тетрами | 461 |

| | |
|---|-----|
| 15. Тензор импеданса лампы | 464 |
| 16. Усилитель с вырожденной обратной связью | 465 |
| 17. Упрощенное представление триода | 467 |

Глава 16.

| | |
|---|------------|
| Ортогональные сети | 469 |
| 1. Напряжения и токи в контурных и узловых сетях | 469 |
| 2. Напряжения и токи в ортогональных сетях | 470 |
| 3. Ковариантные и контравариантные переменные | 471 |
| 4. Известные величины отклика | 472 |
| 5. Ортогональные чисто-контурные и чисто-узловые сети | 473 |
| 6. Инвариантность входной и выходной мощности | 475 |
| 7. Уравнения напряжений и токов | 477 |
| 8. Этапы вывода уравнения напряжения | 478 |
| 9. Пример ортогональной сети | 480 |
| 10. «Ортогональные» уравнения напряжения | 484 |
| 11. «Активные» узловые пары | 486 |
| 12. Числовой пример | 487 |
| 13. Этапы вывода уравнения тока | 490 |
| 14. Сводка основных этапов | 492 |
| 15. Несингулярная матрица S для сети произвольного типа | 493 |
| 16. Преобразование двух сетей произвольного типа | 495 |
| 17. Проверка преобразования | 498 |
| 18. Эквивалентность всех n -катушечных сетей | 499 |

Глава 17.

| | |
|---|------------|
| Взаимосвязанные электрические и магнитные сети | 501 |
| 1. Магнитные и диэлектрические сети | 501 |
| 2. Уравнения состояния изолированных контурных сетей | 502 |
| 3. Магнитные сети | 504 |
| 4. Пример магнитной контурной цепи | 505 |
| 5. Диэлектрические сети | 509 |
| 6. Пример узловой диэлектрической сети | 510 |
| 7. Взаимосвязанные сети | 512 |
| 8. Взаимосвязанные электромагнитные явления | 514 |
| 9. Собственные и взаимные индуктивности | 515 |
| 10. Базовые и производные переменные | 517 |
| 11. Двойственные величины | 517 |
| 12. Уравнение напряжения | 518 |
| 13. Уравнение тока | 519 |
| 14. Уравнение мощности | 521 |
| 15. Квадратичные и эрмитовы формы | 522 |
| 16. Двойственные уравнения движения Лагранжа | 522 |

Глава 18.

| | |
|---|------------|
| Метрический тензор | 525 |
| 1. Сети с нулевыми конструктивными константами | 525 |
| 2. Базовые инварианты | 526 |
| 3. Обобщение (нормировка) системы «на единицу» | 527 |
| 4. Метрический тензор a_{mn} | 528 |
| 5. Поднятие и опускание индексов | 530 |
| 6. Ассоциированные тензоры конструктивных констант | 531 |
| 7. Ассоциированные тензоры электромагнитных величин | 532 |
| 8. Смешанные уравнения движения | 532 |
| 9. Преимущества использования смешанных тензоров | 534 |
| 10. Единичный эллипс | 534 |

| | |
|--|-----|
| 11. Величина вектора | 537 |
| 12. Полюс и полюра эллипса | 538 |
| 13. Накопленная магнитная энергия | 538 |
| 14. Термодинамика сетей | 539 |
| 15. Двойственный метрический тензор | 541 |
| 16. «Подлежащие» пространства и «локальные» пространства | 542 |

Глава 19.

| | |
|--------------------------------|------------|
| Компаунд-сети | 544 |
|--------------------------------|------------|

| | |
|--|-----|
| 1. Базовые уравнения активных асимметричных сетей | 544 |
| 2. Компаунд-сети | 546 |
| 3. Функциональное разбиение сетей | 548 |
| 4. Исключение переменных | 549 |
| 5. Редукция (упрощение) узловых компаунд-сетей | 550 |
| 6. Редукция контурной компаунд-сети | 552 |
| 7. Упрощение ортогональных компаунд-сетей | 553 |
| 8. Терминология компаунд-сетей | 555 |
| 9. Физическое разделение сетей | 556 |
| 10. Трехфазные устройства как компаунд-катушки | 558 |
| 11. Тензор преобразования компаунд-сети | 562 |
| 12. Прохождение компаунд-токов через компаунд-сети | 565 |
| 13. Узловой тензор | 567 |
| 14. Узловые тензоры как перестановки | 569 |
| 15. Узловой тензор импеданса заземления | 570 |
| 16. Пример применения узловых тензоров | 573 |
| 17. «Катушечный» тензор преобразования | 576 |
| 18. Пренебрежение намагничивающим током | 577 |

Глава 20.

| | |
|--|------------|
| Симметричные составляющие | 579 |
|--|------------|

| | |
|---|-----|
| 1. Универсализм компаунд-сетей | 579 |
| 2. Тензоры импеданса в осях последовательности | 580 |
| 3. Узловые и катушечные тензоры в последовательных осях | 581 |
| 4. Пример с осями двух типов | 583 |
| 5. Многообмоточные компаунд-трансформаторы | 586 |
| 6. Замыкания | 590 |
| 7. Тензоры импеданса и катушечные тензоры замыканий | 590 |
| 8. Пример одиночного замыкания | 593 |
| 9. Предварительные расчеты для одновременных замыканий | 597 |
| 10. Одновременные замыкания в сбалансированной сети | 603 |
| 11. Пример одиночного замыкания в сбалансированной сети | 604 |
| 12. Пример двойного замыкания в сбалансированной сети | 605 |
| 13. Смешанные координатные оси | 607 |

Глава 21.

| | |
|--------------------------------|------------|
| Мультитензоры | 609 |
|--------------------------------|------------|

| | |
|---|-----|
| 1. Формирование еще более сложных сущностей | 609 |
| 2. Мультисистемы координат | 609 |
| 3. Представление мультитензоров | 611 |
| 4. Замена комплексных чисел | 613 |
| 5. Сети многоэлектродной лампы | 614 |
| 6. Более общая формулировка «постулата второго обобщения» | 614 |
| 7. Ряды Тейлора | 615 |
| 8. Ряды Тейлора в инвариантной форме | 616 |
| 9. Геометрические объекты более высокой валентности | 617 |

| | |
|--|-----|
| 10. Тензор модуляции | 618 |
| 11. Комплексные ряды Тейлора | 620 |
| 12. Компаунд-ряды | 622 |
| 13. Комплексные ряды в инвариантной форме | 623 |
| 14. Спинорные индексы | 624 |
| 15. Обращение тейлоровских рядов | 625 |
| 16. Обращение комплексных рядов | 625 |
| 17. Обращение комплексных инвариантных рядов | 626 |
| 18. Упрощения в ламповых цепях | 627 |
| 19. Соединение нелинейных систем | 629 |
| 20. Решение уравнений | 630 |
| 21. Пример контурной цепи триода | 631 |

Глава 22.

| | |
|--|------------|
| Анализ сетей | 636 |
| 1. Типы сетевых задач | 636 |
| 2. Метод рассуждения | 637 |
| 3. Анализ π -сетей | 638 |
| 4. Напряжения открытой цепи | 639 |
| 5. Контурные токи в ортогональной сети | 640 |
| 6. Триодные цепи | 643 |
| 7. Общие параметры цепи | 644 |
| 8. Распределительные сети | 646 |
| 9. Изменения в электрических величинах | 648 |
| 10. Изменение в π -сети | 649 |
| 11. Изменение напряжений открытой цепи | 650 |
| 12. Обобщение «теоремы о компенсации» | 651 |
| 13. Изменение импеданса | 653 |
| 14. Неизменные напряжения и токи нагрузки | 654 |
| 15. Поток мощности в нагрузках | 655 |
| 16. Обобщение теоремы Тевенина | 657 |
| 17. Токи короткого замыкания | 659 |
| 18. Теорема, двойственная теореме Тевенина | 660 |

Глава 23.

| | |
|--|------------|
| Синтез сетей | 662 |
| 1. Типы рассматриваемых задач | 662 |
| 2. Общность метода | 663 |
| 3. Критерий постоянства токов в нагрузке | 664 |
| 4. Критерий постоянства разности потенциалов | 666 |
| 5. Критерий постоянства напряжений на нагрузке | 667 |
| 6. Критерий постоянства входного импеданса | 668 |
| 7. Критерий равенства входного импеданса активных сетей | 669 |
| 8. Критерий равенства входного или выходного адмиттанса | 670 |
| 9. Определение «тензора синтеза» C_{σ} | 671 |
| 10. Установление тензора синтеза | 672 |
| 11. Тензор синтеза для «постоянного выходного тока» | 673 |
| 12. Сингулярный тензор синтеза | 676 |
| 13. Влияние пассивных узловых пар на A_{σ} | 677 |
| 14. Тензор синтеза для «неизменного выходного тока» | 678 |
| 15. Тензор синтеза для «постоянства разности потенциалов» | 680 |
| 16. Тензор синтеза «постоянства входного импеданса» | 681 |
| 17. «Примитивный» тензор синтеза | 684 |
| 18. Пример двух эквивалентных сетей | 685 |
| 19. Физическая реализуемость катушек | 689 |
| 20. Три произвольных множества величин в синтезе сетей | 689 |
| «Тензорный анализ сетей» Г. Крона и его роль в проектировании систем | 691 |
| Список литературы | 698 |
| Предметный указатель | 704 |

ИБ № 369

ГАБРИЭЛЬ КРОН

Тензорный анализ сетей

Перевод с английского

Под редакцией *Л. Т. Кузина* и *П. Г. Кузнецова*

Редактор **Н. Я. Гутчина**

Художественный редактор **А. Н. Алтунин**

Обложка художника **В. М. Аладьева**

Технический редактор **Т. П. Сафонова, В. А. Позднякова**

Корректор **Л. С. Глаголева**

Сдано в набор 31.10.77. Подписано в печать 03.10.78. Формат 60×90/16.

Бумага типографская № 2. Гарнитура литерат. Печать высокая.

Объем 45 усл. п. л. 43,51 уч.-изд. л. Тираж 8400 экз. Зак. 3519.

Цена 3 р. 30 к.

Издательство «Советское радио», Москва, Главпочтамт, а/я 693

Московская типография № 8 Союзполиграфпрома

при Государственном комитете СССР

по делам издательств, полиграфии и книжной торговли,

Хохловский пер., 7.