

Л. Бриллюэн

М. Пароди

РАСПРОСТРАНЕНИЕ
ВОЛН
в ПЕРИОДИЧЕСКИХ
СТРУКТУРАХ

И * Л

*Издательство
иностранной
литературы*

*

**PROPAGATION DES ONDES
dans
LES MILIEUX PÉRIODIQUES**

par

LÉON BRILLOUIN et MAURICE PARODI

Professeur honoraire
au Collège de France.

Professeur au Conservatoire
national des Arts et Métiers
et à l'École Centrale des Arts
et Manufactures.

MASSON ET C^{ie}, ÉDITEURS
120, boulevard Saint-Germain,
Paris

DUNOD, ÉDITEURS
86, rue Bonaparte,
Paris

1 9 5 6

Л. БРИЛЛЮЭН и М. ПАРОДИ

**РАСПРОСТРАНЕНИЕ
В О Л Н
В ПЕРИОДИЧЕСКИХ
СТРУКТУРАХ**

ПЕРЕВОД С ФРАНЦУЗСКОГО
Л. М. КОВРИЖНЫХ и А. Н. ЛЕБЕДЕВА

ПОД РЕДАКЦИЕЙ
П. А. РЯЗИНА

1 9 5 9
ИЗДАТЕЛЬСТВО ИНОСТРАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
МОСКВА



4985



ПРЕДИСЛОВИЕ РЕДАКТОРА

Книга известных французских ученых-физиков Л. Бриллюэна и М. Пароди „Распространение волн в периодических структурах“ вскрывает общность волновых явлений акустики, механики, электромагнетизма, квантовой механики. В книге читатель найдет ряд неожиданных и ярких аналогий между волновыми явлениями, происходящими в цепочке из связанных масс, в атомной решетке твердого тела, в электрическом цепочечном фильтре, в диафрагмированном волноводе, в электрических линиях с периодически меняющимися параметрами.

Как увидит читатель, в книге применяется единый аппарат, пригодный для анализа колебательных процессов и распространения волн различной физической природы. Общим для рассматриваемой в книге широкой совокупности физических систем является периодичность их структуры. Происходящие в таких системах волновые процессы описываются с помощью теории матриц. Математический аппарат матричного исчисления в той форме, в которой он используется в книге, хорошо знаком как физикам, так и инженеру.

Данная книга является новым изданием книги Л. Бриллюэна „Распространение волн в периодических структурах, электрических фильтрах и кристаллических решетках“, вышедшей в 1946 г. на английском языке¹⁾. В новое издание

¹⁾ Wave Propagation in Periodic Structures, Electric Filters and Crystal Lattices, by prof. Leon Brillouin (International series in Pure and Applied Physics), p. 247, New York and London, 1946.

книги добавлены четыре главы, и некоторые главы старого издания дополнены новыми данными.

Книга содержит 14 глав.

В гл. 1 дан краткий исторический обзор развития учения о колебаниях, начиная с работ Ньютона в конце XVIII века и кончая работами XX столетия.

Гл. 2—5 посвящены распространению волн в неограниченных одномерных периодических цепочках из точечных масс.

В гл. 2 приводится определение волновых характеристик таких цепочек и качественно описываются процессы распространения волн в них.

В гл. 3 дается математическая теория одномерных цепочек. В этой главе составлены уравнения движения для таких цепочек и получены выражения для действующих сил, а также найдена скорость распространения волн и зависимость частоты от длины волны.

Изложенная теория проиллюстрирована на примере электрического фильтра.

Специальный параграф посвящен аналогиям между электрическими, механическими и акустическими явлениями и их характеристиками.

В гл. 4 рассматриваются более сложные цепочки, ячейка периодичности которых имеет несколько степеней свободы, в частности решетка молекул NaCl и эквивалентная такой системе электрическая цепь. Для этой задачи проведено подробное решение и получены все характеристики колебаний (зависимость частоты от волнового числа, связь амплитуд, полосы пропускания и непропускания, коэффициент ослабления).

Гл. 5 посвящена энергетическим проблемам. Дается определение и вывод формул плотности энергии, потока энергии и скорости ее распространения. Четко введены понятия фазовой и групповой скоростей, а также скорости распространения сигнала. Дано определение характеристического импеданса (в том числе и для механической системы) и изучено его значение при явлениях прохождения и отражения волн в цепях.

В гл. 6 изучается вопрос о поведении конечных цепей и о влиянии граничных условий, причем в качестве аппарата широко применяются полиномы Чебышева — Геген-

бауэра¹⁾. С их помощью определяются собственные частоты колебаний одномерных цепочек разных типов для различных граничных условий. Основной вклад в разработку этой проблемы принадлежит одному из авторов книги, а именно М. Пароди.

В гл. 7 рассматривается теория двумерных решеток, в связи с чем излагается теория Бриллюэна об энергетических зонах. Приводится решение задачи о распространении волн в непрерывной среде с малыми периодическими возмущениями по методу Шредингера. Изучается брэгговское отражение и различные случаи распространения волн.

В гл. 8 полученные результаты обобщаются на случай трехмерных решеток и приводится решение трехмерного волнового уравнения. Приведены данные о строении зон кристаллов различных типов. Конец главы посвящен приложению теории к рассмотрению тепловых явлений в твердых телах с учетом квантовых эффектов (удельная теплоемкость, характеристические температуры). Указаны преимущества изложенной авторами теории по сравнению с теорией Дебая.

В гл. 9 рассматривается уравнение Матье, некоторые свойства уравнения Хилла и излагаются практические способы решения уравнения Хилла. Пользуясь указанными уравнениями, авторы рассмотрели параметрический резонанс и поведение свободных электронов в металлах.

Гл. 10—14 посвящены приложению теории к различным физическим объектам. В гл. 10 рассматривается распространение волн вдоль электрических цепей, состоящих из тождественных линейных элементов, не содержащих источников электродвижущих сил. Подробно рассматриваются цепи из четырехполюсников, выводится уравнение четырехполюсника, его характеристический импеданс, изучается распространение волн, их отражение и поглощение в цепях из четырехполюсников.

¹⁾ В гл. 6 и 12 при рассмотрении ограниченных периодических структур, в частности электрических фильтров, применяются полиномы $C_n^y(x)$, которые авторы называют полиномами Гегенбауэра. Сравнение показывает, что полином Гегенбауэра $C_n^1(x)$ (или электросферический полином) представляет собой полином Чебышева второго рода.

В гл. 11 изучаются длинные электрические линии (в том числе двух-, трех- или вообще многофазные), параметры которых могут быть как переменными, так и постоянными.

Гл. 12 посвящена изучению электрических фильтров с помощью полиномов Чебышева — Гегенбауэра. Получены матрицы, с помощью которых ток и напряжение на выходе каждого элемента фильтра выражается через ток и напряжение на входе. Проведена аналогия между прохождением электромагнитных волн через фильтр и распространением рентгеновских лучей в кристаллах.

В гл. 13 даны основы теории нагруженных волноводов, применяемых в линейных ускорителях заряженных частиц, в лампах с бегущей волной, в антенно-фидерных системах и в ряде других устройств, используемых в современной радиотехнике и электронике. Рассмотрены граничные условия, основная и дополнительные волны. Изучены физические свойства нескольких возможных типов волноводов в случае распространения волн типа ТЕ и ТМ. Приведены известные результаты теории цилиндрических волноводов.

Наконец, в гл. 14 исследуется теория движения в периодически меняющемся поле, используемая, например, при конструировании линейных ускорителей с бегущей волной. Приведены исследования Бриллюэна о взаимодействии электронов с электромагнитным полем.

Ценной особенностью книги являются простота и ясность изложения многих трудных проблем. Широкий подход к рассмотрению волновых процессов в различных по своей физической природе системах позволяет применять результаты исследования той или иной конкретной системы к другим системам, моделировать одни волновые процессы другими, что имеет важное практическое значение для специалистов во всех тех областях, которые описываются в книге.

В целом книга, несомненно, будет полезна научным работникам, инженерам и преподавателям, ведущим работу по освещенным в книге вопросам.

Редактор выражает признательность Л. Л. Сабсовичу и Н. В. Соловьеву за помощь при редактировании данного русского издания книги.

П. А. Рязин.

ПРЕДИСЛОВИЕ АВТОРОВ

В этой книге читатель встретится с весьма широким кругом вопросов. Некоторые относятся к электротехнике и теории связи, другие — к теории колебаний и, наконец, третьи — к теории кристаллов и распространению упругих электромагнитных или электронных волн в периодических структурах.

Как бы разнообразны ни были задачи, их математическое рассмотрение приводит к уравнениям, имеющим ряд общих свойств и весьма сходные решения. Это глубокое родство между столь различными проблемами было хорошо известно еще Кельвину и Рэлею. Однако в дальнейшем о нем несколько забыли и только в самых последних работах на эти важные положения было снова обращено необходимое внимание.

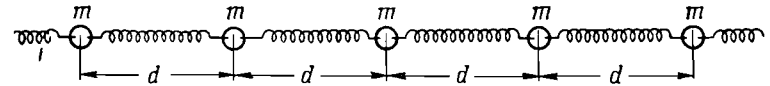
Книга, которую мы предлагаем французскому читателю, основана на более ранних публикациях авторов. Здесь встретится довольно много вопросов, уже рассмотренных одним из нас (Л. Бриллюэном) в небольшой книжке, озаглавленной „Распространение волн в периодических структурах“ (L. Brillouin, Wave propagation in periodic structure, New York, 1946); наряду с этим добавлен значительный материал, отражающий последние работы, в частности работы второго автора (М. Пароди), и весьма интересные результаты, относящиеся к ограниченным системам. В целом же это по существу новая книга, и мы надеемся, что она будет благосклонно встречена читателями.

Л. Бриллюэн и М. Пароди.

**РАСПРОСТРАНЕНИЕ УПРУГИХ ВОЛН В ОДНОМЕРНОЙ РЕШЕТКЕ,
ОБРАЗОВАННОЙ ИЗ ТОЧЕЧНЫХ ЧАСТИЦ.
ИСТОРИЧЕСКИЙ ОБЗОР**

§ 1. Работы XVIII века

Впервые одномерную решетку, состоящую из точечных частиц, рассматривал Ньютон¹⁾ при вычислениях скорости звука. Его расчеты основывались на предположении, что звук распространяется в воздухе подобно тому, как упругая волна распространяется в решетке, образованной точечными частицами конечной массы. Чтобы довести расчеты до конца, он выбрал наиболее простой случай — решетку, состоящую из частиц одинаковой массы, расположенных на равных расстояниях друг от друга вдоль некоторой прямой, совпадающей с направлением распространения. Кроме того, он предположил, что на каждую частицу со стороны соседних с ней частиц действует сила, характеризуемая коэффициентом упругости (фиг. 1).



Фиг. 1.

Обозначая через m массу частицы и через d расстояние между ними в состоянии равновесия, Ньютон получил для скорости распространения упругих волн выражение

$$V = d \sqrt{\frac{e}{m}} = \sqrt{\frac{ed}{\rho}}, \quad (1.1)$$

в котором ρ — средняя плотность.

¹⁾ Newton, Principia, livre II, 1686.

Сравнивая этот результат с экспериментальными данными для скорости звука, Ньютон пришел к выводу, что величине ρ надо приписать значение плотности воздуха, а произведению ed — значение величины, обратной коэффициенту изотермической сжимаемости. Однако полученное таким образом значение скорости звука было меньше значения, найденного экспериментально. Это связано с тем (Лаплас, 1822 г.), что в действительности сжатие и расширение воздуха, сопровождающие распространение звуковой волны, происходят адиабатически. Учет этого факта приводит к замене в предыдущей формуле изотермического коэффициента упругости адиабатическим; при этом формула Ньютона дает для скорости звука значения, очень хорошо совпадающие с экспериментальными данными.

Причина, заставившая Ньютона рассмотреть одномерную решетку, аналогичную решетке, представленной на фиг. 1, заключалась в том, что в то время исследование сплошных сред приводило к задачам, математически неразрешимым, поскольку уравнения в частных производных были почти неизвестны. Движение же выбранной Ньютоном механической модели описывалось системой обыкновенных дифференциальных уравнений, решение которых уже было известно.

С 1727 г. началось изучение одномерных решеток. О полученных при этом результатах упоминается в письмах, которыми обменивались между собой Даниил Бернулли, работавший в Санкт-Петербурге, и его отец Иоганн Бернулли, живший в Базеле. Они установили, что одномерная система из n точечных частиц обладает n независимыми типами колебаний и, как следствие того, n собственными частотами.

Несколько позже, в 1753 г., Даниил Бернулли установил принцип суперпозиции, согласно которому любое движение колебательной системы может быть представлено в виде суперпозиции ее собственных колебаний. Этот важнейший принцип является одним из частных следствий разложения в ряд Фурье; в дальнейшем он был обобщен и получил название „теорема Фурье“.

Эти работы можно считать началом теоретической физики.

Параллельно были экспериментально установлены законы движения колеблющейся струны, проведены первые теоретические исследования в этом направлении (Тейлор, 1713 г.).

Более полные результаты были получены Эйлером (1748 г.), который исследовал уравнения в частных производных, описывающие колебания струны.

Допустим, что ось x совпадает с направлением покоящейся струны, точки которой могут испытывать колебания в плоскости, перпендикулярной оси x . Тогда, как показал Эйлер, смещение точек струны, имеющих координату x в момент времени t , определяется суммой двух произвольных функций переменных $x + vt$ и $x - vt$ (где v — скорость распространения волн) при условии, что эти функции удовлетворяют некоторым условиям непрерывности. Этот результат послужил причиной длительной дискуссии, продолжавшейся вплоть до 1807 г. Действительно, если принять результат Эйлера и учесть принцип суперпозиции, то получим, что произвольную функцию переменных $x \pm vt$ можно представить в виде суммы синусов и косинусов, так как было уже известно, что собственные колебания струны описываются функциями этого типа. Это утверждение, являющееся не чем иным, как установленной в 1807 г. теоремой Фурье, появилось в большой степени благодаря Эйлеру, который не смог подвергнуть сомнению справедливость полученного им решения и был вынужден отказаться от принципа суперпозиции.

Таким образом, отец и сын Бернулли дали полное решение задачи об одномерной решетке, состоящей из точечных частиц, а Эйлер решил задачу о колеблющейся струне; оставалось связать их результаты, установить переход от непрерывного к дискретному. Эту задачу выполнил Лагранж (1759 г.). Так же как и Эйлер, Лагранж не признавал принцип суперпозиции, что кажется несколько странным, так как в его исследованиях были разработаны основы метода разложения в ряд Фурье. С другой стороны, несмотря на то, что уже имелись многочисленные примеры разложения в ряды по тригонометрическим функциям, никто не предполагал, что подобные разложения можно использовать для представления произвольных функций, хотя в 1754 г. в одной из работ по небесной механике, оставшейся незамеченной, Клеро дал необходимое доказательство. Полное решение этой задачи дал Фурье, доказавший возможность такого разложения и указавший на его громадное теоретическое и практическое значение.

Все эти работы конца XVIII века представляют большой интерес, так как они позволили поставить большое число новых проблем как в теоретической физике, так и в чистой математике. К этим проблемам относятся:

1) понятие собственных функций и собственных значений, встретившееся впервые в работах о колебаниях струн, мембран и т. д.;

2) разложения в ряд Фурье и разложения в ряд по собственным функциям;

3) уравнения в частных производных;

4) распространение волн;

5) атомная теория твердого тела и строение кристаллов.

Отметим, наконец, что именно благодаря работам Лагранжа Пупин смог найти решение важной электротехнической задачи о нагруженном кабеле.

§ 2. Работы XIX века; Коши, Баден-Пауэлл, Кельвин

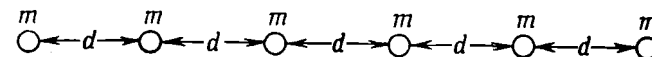
В 1830 г. Коши, используя метод Ньютона, сделал попытку объяснить дисперсию света в предположении, что свет представляет собой упругие волны с очень большой частотой. Он показал, что для длин волн, много больших взаимного расстояния между частицами, образующими одномерную решетку, скорость распространения не зависит от длины волны. Для коротких же волн, т. е. при высоких частотах, скорость распространения является функцией длины волны и может заметно изменяться. Этот результат, полностью справедливый в случае упругих волн, для световых волн справедлив только качественно и, как показал Кельвин, не может дать удовлетворительного объяснения дисперсии.

В 1841 г. Баден-Пауэлл высказал предположение, что скорость распространения упругой волны вдоль оси кубической решетки является функцией длины волны, и рассмотрел распространение волн в одномерной решетке, состоящей из точечных частиц одинаковой массы m , расположенных вдоль некоторой прямой на равных расстояниях d друг от друга (фиг. 2). Считая, что на каждую частицу со стороны ее ближайших соседей действует сила, характеризующаяся одинаковым для всех частиц коэффициентом упругости, Баден-Пауэлл показал, что между скоростью распро-

странения волны V и длиной волны λ существует соотношение

$$V = V_{\infty} \frac{|\sin(\pi d/\lambda)|}{\pi d/\lambda}, \quad (2.1)$$

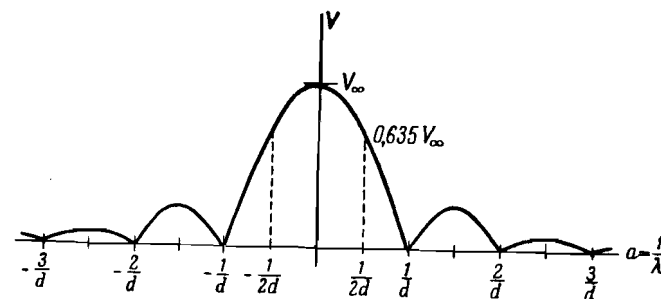
где V_{∞} — скорость распространения, соответствующая бесконечной длине волны.



Фиг. 2.

На фиг. 3 приведена зависимость скорости V от величины a , обратной длине волны (от волнового числа).

Так как скорость распространения является функцией длины волны, то очевидно, что она должна быть также и функцией частоты. Баден-Пауэлл не обратил на это внимания и в результате не заметил одно из важных свойств



Фиг. 3.

подобных систем, а именно существование максимальной частоты, при которой волны еще могут распространяться в решетке.

Действительно, кривая, представляющая изменение скорости в зависимости от волнового числа, не имеет никакой особенности при значении $\lambda = 2d$. Однако дело обстоит иначе, если учесть, что частота также является функцией волнового числа, на что и обратил внимание Кельвин, давший в 1881 г. полное решение рассмотренной задачи ¹⁾.

¹⁾ Kelvin, Popular Lectures, livre 1, p. 185.

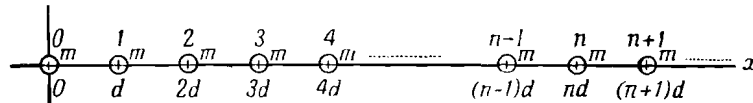
Кельвин изучал распространение волн в решетке, подобной той, какую рассматривал Баден-Пауэлл (фиг. 4). Пусть в состоянии равновесия частицы расположены вдоль оси Ox и их абсцисса равна

$$x = nd, \quad (2.2)$$

Тогда в случае гармонических волн смещение n -й частицы от своего положения равновесия можно представить в виде

$$y_n = A \cos 2\pi(\nu t - ax) = A \cos 2\pi(\nu t - and), \quad (2.3)$$

где a — волновое число, ν — частота, t — время и A — произвольная постоянная.



Фиг. 4.

Заметим, что если в формуле (2.3) заменить a на

$$a' = a \pm \frac{m}{d}, \quad (2.4)$$

где m — целое число, то величина смещения y_n не изменится, т. е. движение останется тем же самым и будет характеризоваться той же частотой колебаний. Таким образом, частота должна быть периодической функцией волнового числа a с периодом, равным $1/d$.

С другой стороны, фазовая скорость распространения волны определится следующим выражением:

$$V = \frac{\nu}{a}. \quad (2.5)$$

Таким образом, если изобразить зависимость ν от волнового числа a , то фазовая скорость, соответствующая данной длине волны, будет равна тангенсу угла наклона полупрямой, проведенной из начала координат в точку на кривой $\nu = \nu(a)$, соответствующую выбранному значению длины волны.

Функция $\nu(a)$ может быть представлена в виде

$$\nu(a) = B |\sin \pi ad|, \quad (2.6)$$

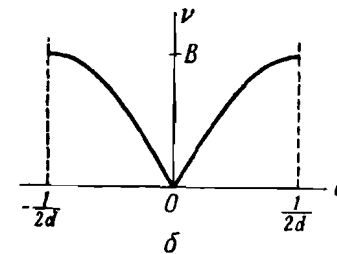
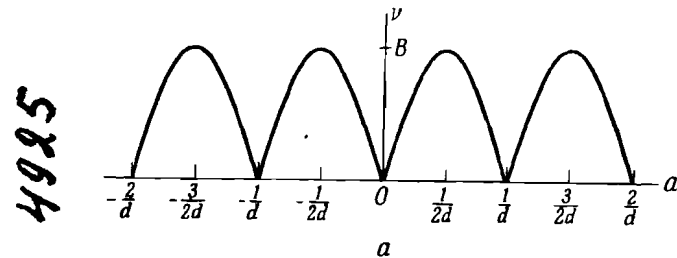
где B — некоторая постоянная, зависящая от структуры решетки. Учитывая теперь (2.5), получаем выражение для фазовой скорости

$$V = \frac{\nu(a)}{|a|} = B \frac{|\sin \pi ad|}{|a|} = V_\infty \frac{|\sin \pi ad|}{|\pi ad|}, \quad (2.7)$$

которое полностью совпадает с выражением, найденным Баден-Пауэллом, если положить

$$V_\infty = \pi dB. \quad (2.8)$$

Из (2.6) следует наличие максимальной частоты, а также утверждение, что для достаточно малых волновых чисел,

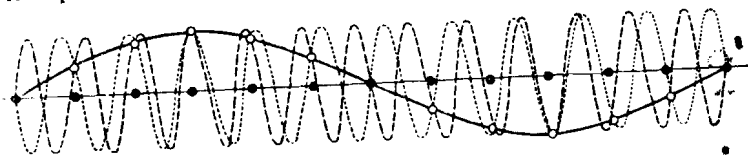


Фиг. 5.

т. е. больших длин волн, график функции $\nu(a)$ представляет собой прямую, выходящую из начала координат. Таким образом, как было указано выше, для больших длин волн фазовая скорость распространения оказывается постоянной. Зависимость $\nu(a)$ изображена на фиг. 5, а. Как следует из периодичности $\nu(a)$, задание частоты не определяет однозначно длину волны; действительно, всем волновым числам,

определяемым при помощи соотношения (2.4), соответствует одно и то же значение частоты.

Физическую причину неоднозначности в выборе длины волны легко понять, если обратиться к фиг. 6, на которой темными кружками изображено положение частиц в состоянии равновесия, а светлыми кружками — положение, занимаемое частицами в заданный момент времени в процессе колебаний. Из всех синусоид, которые могут проходить через светлые кружки, представляющие собой смещенные частицы, на фиг. 6 изображены только три; все они дают одинаково верное представление о движении, поскольку мы имеем возможность наблюдать его только в тех точках, где находятся материальные частицы.



Фиг. 6.

Сплошная кривая соответствует волне, волновое число a которой заключено в интервале $(-1/2d, +1/2d)$, т. е.

$$-\frac{1}{2d} \leq a \leq \frac{1}{2d}. \quad (2.9)$$

Если изменить волновое число a на величину, равную $1/d$, то полученное таким образом его новое значение будет лежать уже вне интервала $(-1/2d, +1/2d)$. Штриховая кривая соответствует волне с волновым числом, равным $a + 1/d$, а пунктирная кривая — волне с волновым числом, равным $a - 1/d$. Как следует из фиг. 6, сплошная и штриховая кривые соответствуют для заданного движения частиц волнам, распространяющимся в одном и том же направлении; пунктирная же кривая соответствует волне, распространяющейся в противоположном направлении.

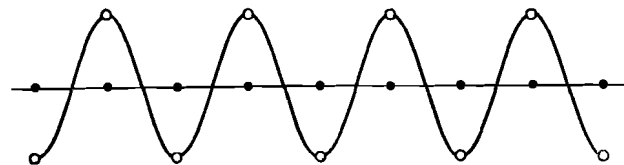
В дальнейшем мы всегда будем выбирать волновое число a так, чтобы оно лежало в интервале, определяемом двойным неравенством (2.9) и соответствующем минимальной длине волны $2d$, равной удвоенному расстоянию между частицами. При этом неопределенность в выборе длины волны и на-

правления распространения полностью устраняется, за исключением предельных случаев

$$a = \pm \frac{1}{2d}, \quad (2.10)$$

которые будут рассмотрены в дальнейшем.

Сделанный только что выбор интервала изменения волнового числа не является столь произвольным, как это может показаться с первого взгляда. Он соответствует вполне



Фиг. 7.

определенному выбору длины волны, а именно рассматриваются только длины волн, удовлетворяющие соотношению

$$\infty \geq |\lambda| \geq 2d, \quad (2.11)$$

и учитывается возможность распространения волн в двух противоположных направлениях.

Волны же, удовлетворяющие двойному неравенству

$$0 \leq \lambda \leq 2d, \quad (2.12)$$

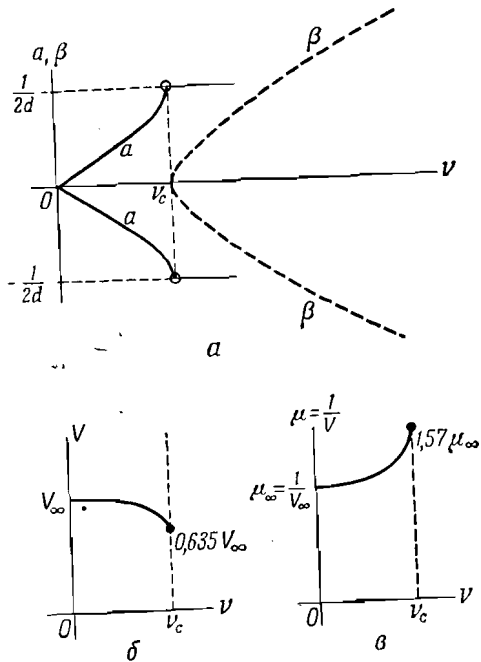
исключаются.

В случае непрерывной структуры, т. е. структуры, для которой понятие смещения частицы имеет физический смысл в каждой точке некоторой прямой, все возможные длины волн также будут заключены в интервале (2.11), поскольку в этом случае $d = 0$; таким образом, устанавливается соответствие при переходе от непрерывных структур к дискретным, и наоборот.

С другой стороны, выбранный интервал изменения a совпадает, как легко видеть, с периодом функции $\nu(a)$; таким образом, учитываются все частоты, соответствующие волнам, которые могут распространяться в решетке.

На фиг. 7 представлен частный случай, определяемый условием (2.10); здесь уже невозможно однозначно определить, какое из двух волновых чисел соответствует движению,

и установить направление распространения. Действительно, в этом случае волну можно рассматривать как стоячую, образованную суперпозицией двух волн, соответствующих двум предельным значениям волнового числа; длина волны при этом равна $2d$.

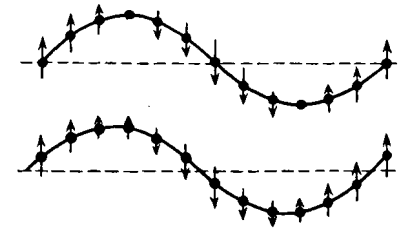


Фиг. 8.

В технике часто представляется удобным рассматривать другие кривые, которые, впрочем, могут быть получены из рассмотренной нами кривой $\nu = \nu(a)$. Наибольший интерес среди них представляет кривая для постоянной затухания. Рассмотрим фиг. 8, а. Сплошная кривая является не чем иным, как повернутой на 90° кривой $\nu = \nu(a)$; штриховая кривая — изменением постоянной затухания β для частот, превышающих те значения, при которых волны могут распространяться. Это затухание будет предметом дальнейшего обсуждения.

Решетка, аналогичная рассмотренной нами, в которой могут распространяться только волны с частотами, меньшими некоторой, так называемой *предельной или критической частоты* ν_c , носит название фильтра нижних частот, так как она пропускает лишь низкие частоты и не пропускает высокие.

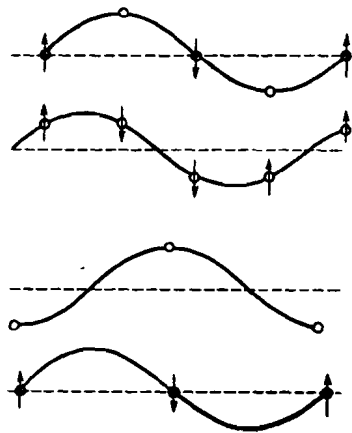
На фиг. 8, б и в представлена соответственно зависимость фазовой скорости V и обратной ей величины (показателя преломления) от частоты. Эти две кривые обрываются при значении частоты, равном ν_c , так как для затухающих волн фазовая скорость не определена. Кривыми, изображенными на фиг. 8, а, б и в, постоянно пользуются на практике, между тем для аналитического исследования наибольшее удобство, как мы увидим, представляет кривая $\nu = \nu(a)$ (см. фиг. 5, б).



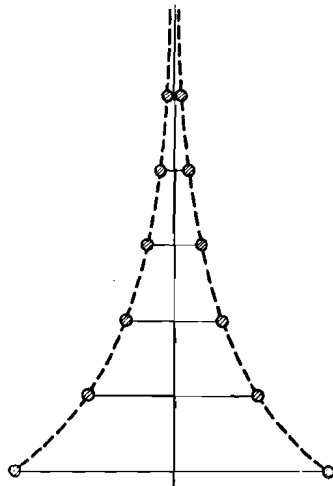
Фиг. 9.

Из упомянутых работ наиболее важными являются работы Кельвина, открывшего существование предельной частоты. На фиг. 9—11 приведены несколько кривых, взятых из его работы, а в табл. 1 — полученные им значения скорости волн W в зависимости от числа частиц $N = \lambda/d$, укладываемых на длине волны. На фиг. 9 и 10 представлены соответственно типы колебаний для больших значений N и для $N = 2$ (предельный случай); фиг. 11 иллюстрирует характер затухания волны для частоты ν , превышающей предельную частоту. Все эти результаты показывают, насколько глубоко понимал Кельвин существо задачи. Однако его работа „Размер атомов“ („The Size of Atoms“) прошла незамеченной, так как в ее названии не содержалось никаких указаний на то, что в ней рассматриваются вопросы, имеющие отношение к распространению волн; явления, связанные с распространением волн, были рассмотрены им в связи с обсуждением теории дисперсии Коши. Из кривой фиг. 3 видно, что существенное изменение фазовой скорости имеет место только для длин волн, равных по порядку величины $2d$; таким образом, теория Коши позволяет предположить, что между-

атомные расстояния должны быть порядка $\lambda/2$, что соответствует величине, близкой к 2000 Å. Но этот результат, очевидно, является неправильным, так как из экспериментальных работ, например по измерению толщины масляных пленок на поверхности воды, уже в то время можно было



Фиг. 10.



Фиг. 11.

найти порядок величины межуатомных расстояний, оказавшейся равной нескольким ангстремам.

Таблица 1

N	W	N	W
2	63,64	16	99,36
4	90,03	20	99,59
8	97,45	∞	100,00
12	98,86		

Взгляды Кельвина на молекулярную структуру вещества могут быть охарактеризованы его же словами¹⁾:

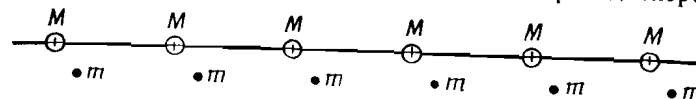
¹⁾ Kelvin, Popular Lectures, livre 1, p. 194.

„Я убежден в том, что, представив молекулы вещества связанными вполне определенными упругими силами с более тяжелой материей... мы получим грубое механическое объяснение явлений дисперсии... Еще не прошло семнадцати часов, как я заметил возможность такого объяснения...“

Эта замечательная интуиция помогла Кельвину получить новую дисперсионную формулу, которая обычно известна под названием „формула Лоренца“.

§ 3. Современные работы

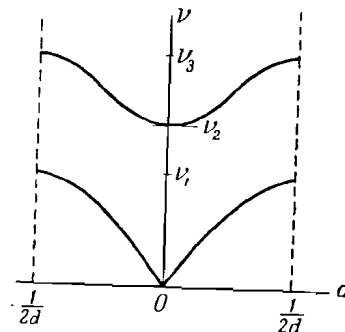
Проанализировав работы Баден-Пауэлла и уточнив понятие минимальной длины волны, соответствующей критической частоте, Кельвин сделал попытку построить теорию дисперсии,



Фиг. 12.

используя модель решетки, имеющей несколько более сложную структуру. Он рассмотрел решетку (фиг. 12), которую составляют частицы двух сортов: с массой M (они изображены на фиг. 12 кружками) и с меньшей массой m (они изображены точками). Каждая из частиц с массой M связана упругими силами с соседними частицами того же сорта и с ближайшей частицей с массой m . Таким образом, система характеризуется двумя коэффициентами упругости. Наличие частиц другого сорта удваивает число степеней свободы системы, и, следовательно, число собственных колебаний становится в 2 раза больше, чем в случае решетки, состоящей из частиц одного сорта.

Кривая, представляющая частоту ν в зависимости от волнового числа $a = 1/\lambda$, изображена на фиг. 13; эта кривая

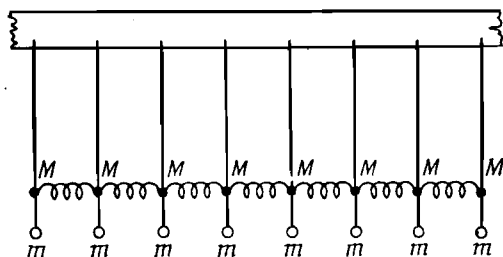


Фиг. 13.

состоит из двух ветвей, обрывающихся при значении $a = \pm 1/2d$.

Легко видеть, что каждому значению волнового числа a соответствуют два различных типа колебаний системы, следовательно, полное число типов колебаний здесь вдвое больше, чем для решетки, рассмотренной Баден-Пауэллом.

В решетке могут распространяться волны, частоты которых меньше ν_1 или заключены между ν_2 и ν_3 ; волны же, частоты которых не удовлетворяют этому условию, не пропускаются решеткой. Подобная решетка представляет собой



Фиг. 14.

пример полосового фильтра. Совокупность частот, заключенных между ν_1 и ν_2 , носит название *полосы непропускания*, а совокупность частот, заключенных в интервале (ν_2, ν_3) , — *полосы пропускания*. Частоты ν_1 и ν_2 очень близки к значению собственной частоты колебаний изолированной „молекулы“, состоящей из двух частиц M и m ; эта резонансная частота не зависит от расстояния между молекулами. Когда значение резонансной частоты попадает в область близкого ультрафиолета, фазовая скорость испытывает заметные изменения. Именно так Кельвин смог объяснить явление дисперсии и обойти затруднения, имевшие место в теории Коши.

Механическая модель, на которой можно иллюстрировать применение теории Кельвина, была построена Винсентом¹⁾; она представлена на фиг. 14. Шарики с массой M , связанные между собой одинаковыми пружинками, подвешены на расположенной горизонтально жесткой планке при помощи

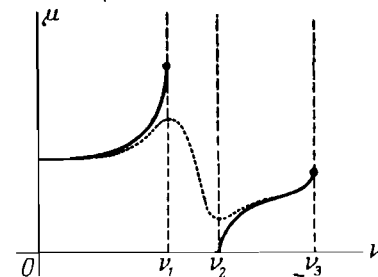
одинаковых нитей равной длины, и к каждому из шариков с массой M подвешен шарик меньшей массы m . Эта модель, эквивалентная решетке, рассмотренной Кельвином, представляет собой первый искусственный механический фильтр¹⁾.

Винсент изучал движение подобной системы при различных частотах и построил кривые, представляющие изменение показателя преломления μ как функции частоты, чтобы сравнить их с классическими кривыми дисперсии. Полученные им результаты приведены на фиг. 15.

Сплошная кривая соответствует бесконечно малому затуханию, а пунктирная — значительному затуханию; можно заметить, что эта последняя кривая полностью аналогична классической кривой для аномальной дисперсии. Чтобы получить кривые, Винсент, подобно Кельвину, определил найденную им функцию $\nu = \nu(a)$ во всех точках; с ее помощью (см. фиг. 13) легко можно найти скорость $V = \nu/a$ и, таким образом, получить изображенные на фиг. 15 кривые, представляющие зависимость показателя преломления $\mu = 1/V$ от частоты.

Работа Кельвина, как мы уже говорили, не обратила на себя должного внимания, и указанная им аналогия между распространением электромагнитных волн и распространением упругих волн вдоль нагруженной струны была забыта.

В 1887 г. Хэвисайд обратил внимание на то, что увеличение индуктивности, приходящейся на единицу длины кабеля, может уменьшить затухание распространяющихся вдоль него электрических волн, но не использовал этот результат. Два года спустя Ваши провел эксперименты по изучению импеданса длинной линии, состоящей из четырех индуктивностей,

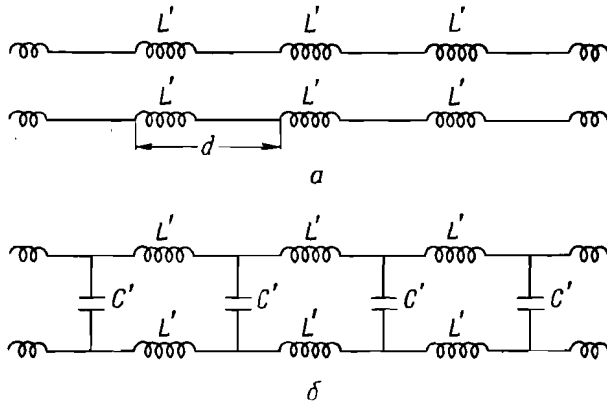


Фиг. 15.

¹⁾ Теорию и экспериментальное устройство цепочки Винсента см. в следующих работах: Специальный физический практикум, ОГИЗ, 1945, задача 9, „Распространение волн в резонирующих средах“, стр. 57; П. Е. Кра си у ш к и н, Вестник МГУ, № 11, 89 (1949); „О методах моделирования волновых процессов“. — *Прим. ред.*

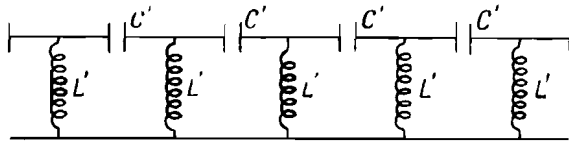
¹⁾ Vincent, Phil. Mag., 46, 537 (1898).

однако вследствие недостаточной точности эксперимента определенных выводов сделать не удалось. В 1900 г. Пупин обнаружил аналогию между электрическими и механическими линиями и, ссылаясь на работу Лагранжа, сделал попытку



Фиг. 16.

построить электрические нагруженные линии и электрический фильтр нижних частот. На фиг. 16, а представлена такая нагруженная линия; индуктивности L' распределены таким



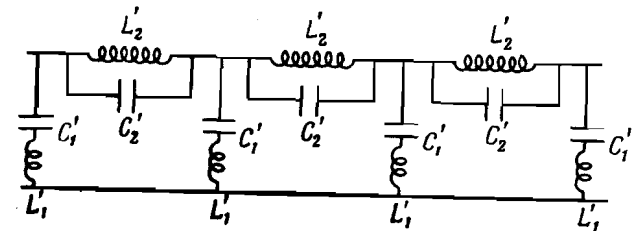
Фиг. 17.

образом, что на длине волны укладывается примерно десять индуктивностей. Обозначая через C' величину емкости участка линии длиной d , Пупин получил для предельной частоты выражение

$$v_c = \frac{1}{\pi \sqrt{2L'C'}}. \quad (3.1)$$

На фиг. 16, б приведена другая эквивалентная линия с сосредоточенными емкостями,

Первый электрический фильтр верхних частот, т. е. система, не пропускающая волны с частотой, меньшей некоторой заданной величины, и пропускающая волны со всеми другими частотами, был осуществлен Кэмпбеллом в 1906 г.; на фиг. 17 приведена схема подобного фильтра. В дальнейшем Кэмпбелл использовал этот фильтр верхних частот для конструирования различных типов фильтров полосовых частот. На фиг. 18 представлена схема электрического полосового фильтра, аналогичного механическому (фильтру Винсента¹⁾).

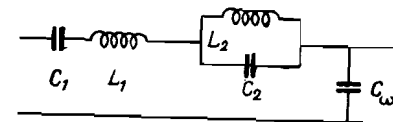


Фиг. 18.

Физическую природу того факта, что описанные выше системы пропускают волны с частотой, лежащей в некоторой заданной области, и задерживают остальные волны, гораздо легче понять на примере электрических моделей, чем механических моделей подобных систем.

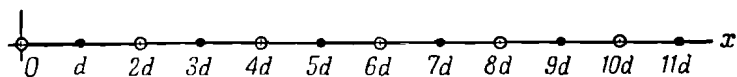
Известно, что для частоты ν импеданс электрического контура прямо пропорционален νL и обратно пропорционален νC , где через C и L обозначены соответственно емкость и коэффициент самоиндукции. Следовательно, для изображен-

¹⁾ Здесь авторы допускают неточность. На самом деле электрический аналог цепочки Винсента, в которой основная цепочка с массами M (см. фиг. 14) подвешена к опорной балке на нитях конечной длины, составляется из звеньев, показанных на прилагаемой схеме:



См. П. Е. Краснушкин, Вестник МГУ, № 11, 96 (1949). — Прим. ред.

ного на фиг. 16, б фильтра нижних частот сопротивление соединенных последовательно индуктивностей L' с ростом частоты увеличивается, тогда как сопротивление емкостей C' , включенных между индуктивностями, падает. Таким образом, сигналы с достаточно низкими частотами будут распространяться вдоль линии, а сигналы с высокими частотами не смогут пройти, так как будут замыкаться через имеющие малое сопротивление емкости. Значение предельной частоты определяется структурой системы, а также величинами емкости и коэффициента самоиндукции. В фильтре верхних частот (см. фиг. 17), наоборот, будут распространяться сигналы с достаточно высокими частотами, поскольку индуктивности L' представляют для них большое сопротивление,



Фиг. 19.

а сигналы низкой частоты не смогут пройти, так как будут замыкаться через индуктивности, имеющие при низких частотах малое сопротивление. Снова оказывается, что наличие предельной частоты вызвано дискретностью структуры рассматриваемых систем. К этим вопросам мы еще вернемся ниже¹⁾.

В 1912 г. Борн, изучая распространение упругих волн в кристаллах, получил результаты, аналогичные тем, которые были получены Кельвином. Он использовал изображенную на фиг. 19 модель: одномерную решетку, состоящую из частиц двух сортов с массами M и m , расположенных в состоянии равновесия вдоль оси Ox на равных расстояниях d друг от друга.

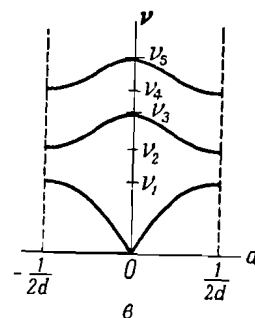
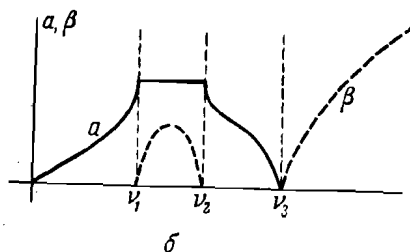
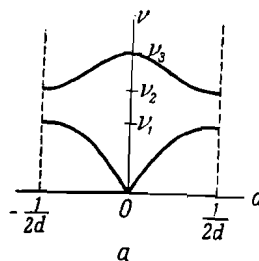
Полученные Борном кривые приведены на фиг. 20, а и б. На фиг. 20, а изображена зависимость частоты ν от волнового числа a ; можно заметить наличие двух различных вет-

¹⁾ Появление предельных частот и связанных с ними частотных полос „прозрачности“ и „непрозрачности“ структуры определяется периодичностью структуры, обуславливающей накопление слабых отражений на каждом звене при прохождении волны вдоль нее. [См. П. Е. Краснушкин, ЖТФ, 20, вып. 9, 1065 (1950).]

вей, что связано с увеличением числа степеней свободы системы, вызванным добавлением частиц второго сорта, характеризующихся новыми параметрами, например массой m .

Заметим, что в общем случае число ветвей кривой равно числу типов частиц, образующих рассматриваемую систему.

Иначе говоря, заданному значению волнового числа a соответствует число частот, равное числу степеней свободы элемента периодичности решетки. В предыдущем случае такой элементарной ячейкой, образующей элемент периодичности, является



Фиг. 20.

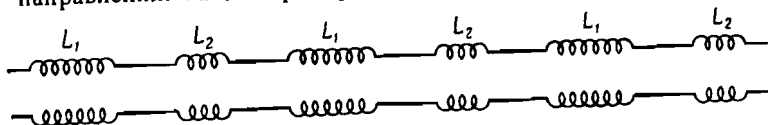
совокупность двух частиц: частицы с массой M и одной из соседних с ней частиц с массой m .

Можно представить себе решетку, состоящую из частиц трех различных масс, расположенных последовательно друг за другом вдоль оси Ox ; элементарная ячейка будет иметь три степени свободы, а кривая $\nu = \nu(a)$ будет состоять из трех различных ветвей, как это показано на фиг. 20, в.

К этим вопросам мы также еще вернемся.

Обычно ветвь, выходящая из начала координат, носит название *акустической ветви*; она соответствует такому движению, при котором все частицы, образующие элементарную ячейку, перемещаются в данный момент времени в одном и том же направлении. Другая ветвь носит название *оптической ветви*; она соответствует движению, при котором

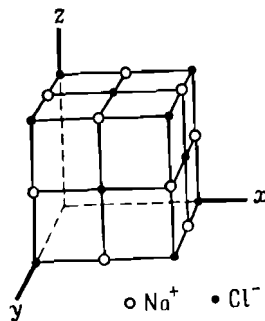
в данный момент времени частицы одного или нескольких сортов перемещаются в одном направлении, тогда как частицы других сортов перемещаются в противоположном направлении. Так, например, в случае, рассмотренном Борном,



Фиг. 21.

оптическая ветвь соответствует движению, при котором в данный момент времени частицы M и m перемещаются в противоположных направлениях.

Зависимость постоянной затухания от частоты для рассмотренной Борном решетки приведена на фиг. 20, б, где можно заметить полосу непропускания и две полосы пропускания. Эта кривая является обобщением более частного случая, представленного на фиг. 8, а.



Фиг. 22.

Электрическая модель, аналогичная рассмотренной Борном решетке, может быть образована из последовательно соединенных индуктивностей с коэффициентом самоиндукции L_1 и L_2 (фиг. 21).

Задача Борна применима при изучении распространения упругих волн в кристаллической решетке хлористого натрия, так как структура решетки каменной соли приводит к совершенно одинаковому расположению ионов: ионы Na^+ и Cl^- чередуются, как это показано на фиг. 22. Так, например, вдоль направления оси x структура решетки полностью аналогична структуре, представленной на фиг. 19.

РАСПРОСТРАНЕНИЕ ВОЛН В ОДНОМЕРНЫХ РЕШЕТКАХ. КАЧЕСТВЕННОЕ РАССМОТРЕНИЕ И ОБЩИЕ ВЫВОДЫ

§ 4. Общие замечания

Прежде чем приступить к строгому решению задачи о распространении упругих волн в одномерной решетке, необходимо сделать ряд общих замечаний и качественно обсудить некоторые особенности рассматриваемой проблемы.

Вернемся снова к рассмотренному Баден-Пауэллом простейшему случаю одномерной решетки, образованной частицами равной массы m , расположенными в состоянии равновесия вдоль некоторой прямой на равном расстоянии d друг от друга.

Если выбрать направление оси x вдоль этой прямой, то координату n -й частицы можно представить в виде

$$x = nd + \psi_n, \quad (4.1)$$

где функция ψ_n описывает отклонение частицы от положения равновесия. Аналогичным образом можно считать, что ψ_n описывает и поперечное смещение, а также другие физические величины (например, электрическую поляризацию), определенные в тех точках, где находится частица.

В рассматриваемом случае можно говорить о распространяющейся волне, если для ψ_n существует решение вида

$$\psi_n = Ae^{2\pi i(\nu t - an)} = Ae^{i(\omega t - kn)}, \quad (4.2)$$

где

$$a = \frac{1}{\lambda}, \quad k = 2\pi ad, \quad \omega = 2\pi\nu,$$

ν — частота, t — время, a — волновое число, λ — длина волны, d — период решетки, ω — круговая частота и A — постоянная амплитуда.

Величина $k = 2\pi ad$ представляет собой изменение фазы при переходе от n -й частицы к $(n+1)$ -й

$$\psi_{n+1} = \psi_n e^{-ik}. \quad (4.3)$$

Этот фазовый угол определяется с точностью до величины, кратной 2π ; действительно, если m — целое положительное или отрицательное число, то решение задачи и, в частности, значение частот ω и ν не меняются при замене k на

$$k' = k + 2\pi m. \quad (4.4)$$

Таким образом, частота ν (так же как и круговая частота ω) должна быть периодической функцией k или волнового числа

$$\begin{aligned} \omega &= f(k), \text{ период } 2\pi \text{ относительно } k = 2\pi ad, \\ \nu &= F(a), \text{ период } \frac{1}{a} \text{ относительно } a. \end{aligned} \quad (4.5)$$

Как уже было отмечено в гл. 1, этот результат является непосредственным следствием дискретности и периодичности одномерной решетки. Заметим, что неопределенность в выборе величины k была бы устранена, если бы функция ψ_n имела физический смысл во всех точках между частицами. Однако, поскольку эта функция определена лишь в точках с координатой, равной nd , условие вида (4.5) является неизбежным.

В силу (4.5) свойства функций $f(k)$ и $F(a)$ достаточно рассмотреть лишь в интервале их периодичности; наиболее простым выбором интервала является следующий:

$$\begin{aligned} -\pi &\leq k \leq \pi, \\ -\frac{1}{2a} &\leq a \leq \frac{1}{2a}. \end{aligned} \quad (4.6)$$

поскольку волны распространяются одинаковым образом в обоих направлениях.

Одним из важных свойств функций $f(k)$ и $F(a)$ является их *четность*. Положительным значениям k соответствуют волны, распространяющиеся направо, отрицательным — распространяющиеся налево; так что если k_0 — положительное число, заключенное в основном интервале $(-\pi, +\pi)$, то ему, так же как и величине $k_0 + 2\pi$, соответствует волна, бегущая направо, а величине $k_0 - 2\pi$ — бегущая налево.

Из неравенства (4.6) следует

$$|\lambda| = \frac{1}{|a|} \geq 2d. \quad (4.7)$$

Таким образом, можно говорить о *минимальной длине волны*, равной удвоенному расстоянию между покоящимися частицами. Этой волне соответствует *критическая* или *предельная частота* ν_c , являющаяся характеристикой данной структуры. Во многих весьма важных случаях эта предельная частота является максимально возможной, и для частот, удовлетворяющих условию

$$\nu \leq \nu_c, \quad (4.8)$$

система ведет себя, как фильтр нижних частот.

Волны с частотой, большей ν_c , в такой системе испытывают сильное затухание.

Условие (4.8) не является, вообще говоря, единственно возможным, и существуют структуры, для которых ν_c является минимально возможной частотой. Однако в любом случае системы с периодической структурой представляют собой фильтры верхних или нижних частот или полосовой фильтр.

Эти общие результаты, дополненные рассмотрением предельных случаев $\lambda = \infty$ ($a = 0$) и $\lambda = 2d$ (a максимально), обычно оказываются достаточными для описания, по крайней мере качественного, общих свойств структуры. Изложенные соображения будут использованы в последующих параграфах для изучения различных структур типа одномерной решетки.

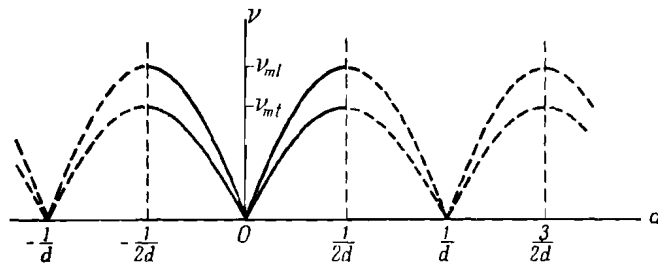
§ 5. Цепочка из свободных частиц

В одномерной цепочке, образованной свободными частицами, существуют только силы взаимодействия между ними. Для простоты будем предполагать, что каждая частица взаимодействует только со смежными ей частицами. Этому соответствует, например, случай упругой струны, на которой равномерно расположены одинаковые массы; силы взаимодействия между частицами определяются при этом постоянно во всех точках упругостью струны.

Рассмотрим вначале случай продольных колебаний.

Значение $a = 0$ соответствует бесконечной длине волны; решетка смещается как целое, и расстояние между частицами не меняется, так что силы взаимодействия не сказываются. Частота при этом равна нулю. При отличном от нуля, но очень малом значении a длина волны много больше расстояния между частицами. В этом случае волна

распространяется вдоль решетки так же, как вдоль непрерывного стержня, а скорость распространения не зависит от длины волны, т. е. частота для больших длин волны оказывается пропорциональной $|a|$. Кроме того, строгие вычисления показывают, что для длин волн, сравнимых с расстоянием между частицами, скорость распространения уменьшается. С другой стороны, частота распространяющейся волны обязательно является периодической функцией a , а кривая $\nu(a)$ должна быть симметрична относительно начала координат. В противном случае при заданной длине волны скорости распространения в прямом и обратном направлении будут



Фиг. 23.

различны, что невозможно в силу симметрии системы. Поскольку функция $\nu(a)$ симметрична относительно начала координат и одновременно периодична с периодом $1/d$, то, как следует из предыдущего, она должна иметь максимум в точке $a = 1/2d$. Можно показать, что в общем случае кривая $\nu(a)$ имеет вид, представленный на фиг. 5. Ее аналитическое выражение будет получено в следующих главах.

В случае *поперечных* колебаний качественное рассмотрение вопроса можно провести аналогичным образом; результаты, полученные выше для *продольных* колебаний, остаются, вообще говоря, справедливыми, с тем лишь отличием, что скорость распространения длинных волн и максимальные частоты для продольных и поперечных колебаний оказываются различными.

Кривые, описывающие поведение функции $\nu(a)$ для этих двух видов движения, представлены на фиг. 23, где индексы указывают, что соответствующая максимальная частота относится к случаю поперечных (t) или продольных (l) колебаний.

Поскольку перпендикулярно решетке частицы могут смещаться в двух независимых направлениях, кривая $\nu(a)$ для поперечных колебаний должна в общем случае состоять из двух различных ветвей.

На фиг. 23 представлен вырожденный случай слияния этих ветвей в одну, что соответствует симметричной струне. Если же струна асимметрична, например имеет эллиптическое сечение, то это вырождение снимается. В общем случае число ветвей i , следовательно, число различных частот при заданной длине волны равно числу степеней свободы системы.

Части кривых на фиг. 23, изображенные сплошными линиями, относятся к основному интервалу (4.6); их периодическое продолжение изображено штрихами.

Заметим, что для получения заданного смещения в поперечном направлении требуются, вообще говоря, намного меньшие силы, чем для смещения в продольном направлении, и, следовательно, смещению в поперечном направлении соответствует меньший коэффициент упругости. Так как частота пропорциональна корню квадратному из коэффициента упругости, то ветвь, соответствующая поперечным колебаниям нагруженной струны, лежит, очевидно, ниже ветви для продольных колебаний.

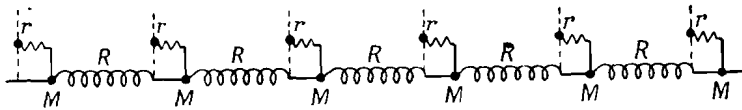
§ 6. Продольные колебания цепочки связанных равноотстоящих осцилляторов

Частица, возвращаемая к положению равновесия упругой силой, образует гармонический осциллятор, которому соответствует собственная частота ν_0 , зависящая от коэффициента упругости и от массы частицы. Если коэффициент упругости имеет различные значения в направлениях Ox , Oy , Oz , то осциллятор является анизотропным и обладает тремя собственными частотами ν_{0x} , ν_{0y} , ν_{0z} , соответствующими колебаниям в этих трех направлениях.

Рассмотрим теперь цепочку одинаковых изотропных гармонических осцилляторов, расположенных на равном расстоянии d друг от друга, и предположим, что взаимодействие имеет место только между смежными осцилляторами. Нас будут интересовать типы продольных колебаний в такой системе (фиг. 24).

Точками на фиг. 24 обозначены массы M , удерживаемые в положении равновесия пружинками r . Каждая частица M вместе со своей пружинкой r образует осциллятор. Связь осуществляется при помощи пружины R , соединяющей две соседние массы.

В случае бесконечной длины волны, волновое число a равно нулю и все частицы перемещаются одинаковым образом. Поскольку расстояния между ними при этом не изменяются и силы взаимодействия R не сказываются, каждая частица стремится вернуться в положение равновесия только благодаря восстанавливающей силе r (одинаковой для всех частиц), и, таким образом, система колеблется с частотой ν_0 . При уменьшении длины волны частицы начинают испытывать



Фиг. 24.

взаимные перемещения, вступают в игру силы взаимодействия R и частота, соответствующая этой длине волны, будет несколько отличаться от ν_0 . Если при этом сумма силы взаимодействия и упругой силы, действующей на частицу, больше восстанавливающей силы r , то частота возрастает, в противном случае частота убывает.

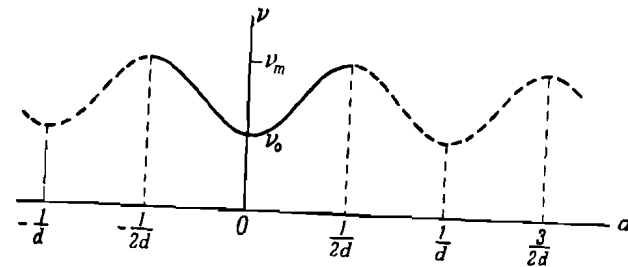
Можно показать, что для больших длин волн частота ν дается соотношением

$$\nu = \nu_0 + ba^2, \quad (6.1)$$

где знак величины b , зависящей от коэффициентов упругости системы, определяет, увеличивается или уменьшается частота ν при возрастании $|a|$.

На основании изложенных выше соображений можно заключить, что частота должна приближаться к своему экстремуму, когда длина волны по порядку величины становится равной $2d$. Отсюда следует, что существуют два предельных значения ν , равных ν_0 и ν_m , причем в системе могут распространяться только волны с частотами, лежащими между ν_0 и ν_m ; волны с частотами, лежащими вне интервала (ν_0, ν_m) , быстро затухают. Таким образом, рассматриваемая

система представляет собой полосовой фильтр. Сплошная кривая на фиг. 25 изображает зависимость $\nu(a)$ на основном интервале $(-1/2d, +1/2d)$, построенную в предположении, что $b > 0$.



Фиг. 25.

Если каждая частица представляет собой анизотропный осциллятор, то кривая $\nu(a)$ распадается на три ветви, одна из которых соответствует продольным колебаниям, а две — поперечным. Эти кривые могут пересекаться и не обязательно возрастают в окрестности точки $|a| = 0$.

§ 7. Продольные колебания цепочки двухатомных молекул

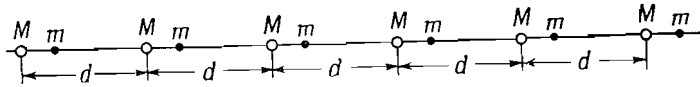
Система, описанная в предыдущем параграфе, несколько искусственна; действительно, довольно трудно представить себе частицы, удерживаемые в некотором заданном положении пружинками r . В дальнейшем (см. § 12) мы приведем примеры аналогичных структур, имеющих, однако, другую физическую природу.

Более естественная механическая модель подобной структуры получается при рассмотрении двухатомных молекул. Эта задача сложнее, поскольку здесь имеются два сорта частиц, причем атомы каждого сорта взаимодействуют одновременно как между собой, так и с атомами другого сорта.

Такая решетка из двухатомных молекул схематически изображена на фиг. 26, причем кружками обозначены частицы с массой M , а точками — с массой m . Каждая отдельная молекула (M, m) обладает некоторой собственной частотой ν_0 , соответствующей продольным колебаниям ее

элементов. Смещения масс M и m имеют при этом разные знаки, так что общий центр тяжести масс остается неподвижным.

Сделав эти замечания, рассмотрим движение цепочки из двухатомных молекул, расположенных в состоянии равновесия на одинаковых расстояниях d вдоль оси xx' , причем будем считать, что взаимодействие имеет место только между ближайшими соседями.



Фиг. 26.

• Введем две комплексные экспоненциальные функции, одна из которых описывает движение частиц с массой M , другая — с массой m ,

$$\psi_M = A_M e^{2\pi i(\nu t - ax)}, \quad \psi_m = A_m e^{2\pi i(\nu t - ax)}. \quad (7.1)$$

Эти функции могут иметь различные амплитуды, но характеризуются одинаковыми величинами ν и a , причем частота ν является функцией параметров системы и волнового числа a .

Можно строго показать, что благодаря удвоенному числу степеней свободы в такой системе число ветвей кривой $\nu(a)$ тоже удваивается. Качественно это можно пояснить следующим образом. В случае бесконечной длины волны могут существовать следующие два вида движения:

а) Колебания всех атомов происходят все время в фазе, т. е.

$$A_M = A_m, \quad (7.2)$$

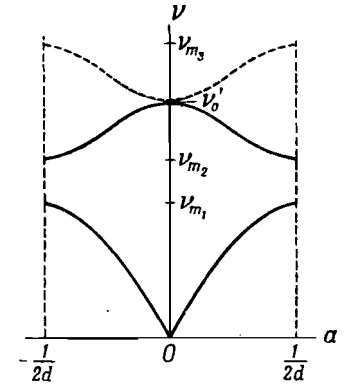
и движение системы сводится к перемещению всей цепочки как целого с сохранением взаимного расстояния между атомами. Частота при этом равна нулю.

б) Цепочки, составленные из атомов M и атомов m , перемещаются как целое, но в противоположных направлениях, так что центр тяжести системы остается в покое. Если бы взаимодействие между молекулами отсутствовало, то частота таких колебаний была бы равна ν_0 , причем $\nu_0 \neq 0$. При наличии взаимодействия частота ν'_0 , вообще говоря, отлична от ν_0 .

Кривая $\nu(a)$ должна иметь, таким образом, две ветви, одна из которых, называемая нижней ветвью, при $a = 0$ проходит через нуль, а другая, называемая верхней ветвью, — через точку ν'_0 .

При уменьшении длины волны нижняя ветвь должна подниматься, т. е. вести себя подобно тому, как если бы каждая молекула была заменена одной частицей. Верхняя же ветвь при удалении от точки $|a| = 0$ в зависимости от параметров системы может как подниматься, так и опускаться относительно точки ν'_0 .

На фиг. 27 представлено изменение частоты ν как функции a , причем верхняя ветвь изображена для двух случаев: штриховая кривая при росте $|a|$ соответствует возрастанию частоты, а сплошная — убыванию частоты. Само собой разумеется, что в каждой рассматриваемой системе возможен только один из этих случаев.



Фиг. 27.

Различное поведение верхней ветви иллюстрируют фиг. 13 (Винсент) и фиг. 20 (Борн). Отметим, что от параметров системы зависит ход верхней ветви кривой $\nu(a)$ и, в частности, положение ν'_0 по отношению к максимальной частоте нижней ветви.

Волны, частоты которых лежат вне полосы пропускания, должны так же, как и в рассмотренных ранее структурах, экспоненциально затухать. Волновые числа a , соответствующие этим частотам, комплексны, причем их мнимая часть β равна *постоянной затухания* на данной частоте.

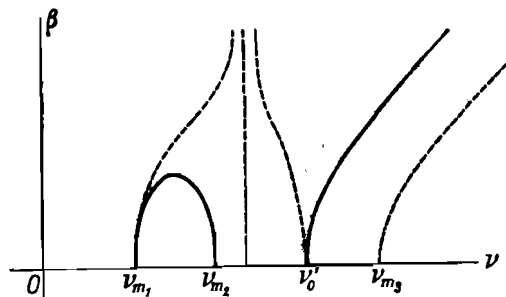
На фиг. 28 приведена зависимость постоянной затухания β от частоты ν , причем сплошные и штриховые кривые соответствуют двум различным типам верхней ветви, представленным на фиг. 27.

Таким образом, рассмотренные примеры позволяют сделать следующие выводы, детальный анализ которых будет проведен в дальнейшем:

1. Частота ν является периодической функцией k (или a) (4.5).

2. Область изменения величин k (или a) можно свести к основному интервалу (4.6).

3. Если элементарная ячейка, образующая элемент периодичности одномерной решетки, имеет N степеней свободы, то для каждого значения k (или a) существует N типов волн



Фиг. 28.

с различными частотами. Примеры, соответствующие $N = 1$, 2 и 3, были приведены в § 5—7.

4. Число ветвей кривой $\nu = F(a)$ равно числу степеней свободы элементарной ячейки решетки, а также числу полос пропускания, некоторые из которых могут перекрываться.

5. Волны с частотой, лежащей вне полос пропускания, не могут распространяться и экспоненциально затухают по мере прохождения через систему.

Таковы общие свойства периодических структур, математическому изучению которых будут посвящены следующие главы.

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ОДНОМЕРНЫХ РЕШЕТОК, СОСТОЯЩИХ ИЗ ОДИНАКОВЫХ ЧАСТИЦ

§ 8. Уравнение движения одномерной решетки, состоящей из одинаковых частиц¹⁾

Здесь будет дан строгий вывод результатов, качественно полученных нами в предыдущих главах.

Мы будем рассматривать неограниченную решетку, состоящую из одинаковых частиц с массой M , расположенных вдоль прямой (направленной по оси x') и находящихся в состоянии равновесия на равных расстояниях друг от друга. Будем изучать продольные колебания такой системы. Пронумеруем частицы начиная от любой из них, взятой за начальную, которую будем называть нулевой частицей; частицу, следующую непосредственно за ней справа, будем называть первой и т. д.

Если через y_n обозначить отклонение n -й частицы при движении от своего положения равновесия, то выражение для ее координаты x_n в данный момент времени будет иметь вид

$$x_n = nd + y_n. \quad (8.1)$$

Так как мы предположили, что одни частицы могут испытывать смещения относительно других, то для вычисления взаимодействия между ними нам необходимо знать расстояние между двумя любыми частицами. Выражение для расстояния между n -й и $(n+m)$ -й частицами имеет вид

$$r_{n, n+m} = x_{n+m} - x_n = md + y_{n+m} - y_n. \quad (8.2)$$

Поскольку смещение y_k предполагается малым по сравнению с расстоянием d , то выражение (8.2) будет положительно или отрицательно в зависимости от знака величины m .

¹⁾ В этом параграфе рассматривается проблема дальнего взаимодействия между частицами цепочки. Эта проблема на примере кулоновских сил взаимодействия рассматривалась А. А. Власовым при изложении теории электронной плазмы. [А. А. В л а с о в, ЖЭТФ, 8, 291 (1938); А. А. В л а с о в, Теория многих частиц, М., 1950.] — *Прим. ред.*

Потенциальную энергию, при помощи которой вычисляются силы взаимодействия между двумя данными частицами, можно рассматривать как функцию только их взаимного расстояния

$$U(r) = U(|x_{n+m} - x_n|). \quad (8.3)$$

Таким образом, выражение для полной потенциальной энергии всей решетки можно записать в виде

$$U = \sum_n \sum_{m>0} U(|x_{n+m} - x_n|) \quad (8.4)$$

при условии суммирования только по положительным значениям m (это условие необходимо для того, чтобы не учитывать дважды взаимодействие каждой пары частиц).

Заметим, что с таким же успехом можно было бы провести суммирование по всем значениям m , но в этом случае необходимо полученный результат разделить на два, так как иначе каждая пара частиц учитывалась бы дважды. Удобнее, однако, ограничиться суммированием только по положительным значениям m , поскольку это позволяет опустить знак модуля у аргумента функции U .

Если предполагать смещение y_k малым по сравнению с расстоянием между частицами, то функцию U всегда можно разложить в ряд Тейлора. Таким образом, получим

$$U(x_{n+m} - x_n) = U(md) + (y_{n+m} - y_n) U'(md) + \\ + \frac{1}{2} (y_{n+m} - y_n)^2 U''(md) + \dots$$

где $U'(md)$ и $U''(md)$ — соответственно значения производных dU/dr и d^2U/dr^2 в точке $r = md$.

Подставляя это разложение в выражение (8.4) и пренебрегая степенями величины $(y_{n+m} - y_n)$, большими двух, получаем выражение для полной потенциальной энергии решетки

$$U = \sum_n \sum_{m>0} \left[U(md) + (y_{n+m} - y_n) U'(md) + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} (y_{n+m} - y_n)^2 U''(md) \right]$$

или

$$U = C + \sum_n \sum_{m>0} \left[(y_{n+m} - y_n) U'(md) + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} (y_{n+m} - y_n)^2 U''(md) \right], \quad (8.5)$$

где постоянная

$$C = \sum_n \sum_{m>0} U(md).$$

Сила F_p , действующая на p -ю частицу, равна взятой с обратным знаком производной от потенциальной энергии по смещению y_p этой частицы. Однако, прежде чем приступить к вычислению силы, следует указать, что при суммировании по n отличный от нуля вклад дают два члена, для которых либо $n = p$, либо $n + m = p$; все остальные члены не играют роли, так как не зависят от переменной y_p .

Так как m величина существенно положительная, то член суммы, для которого $n = p$, учитывает силу, действующую на p -ю частицу со стороны частиц, расположенных справа от нее, а член, для которого $n + m = p$, учитывает силу, действующую на эту же частицу со стороны частиц, расположенных слева.

Таким образом, выражение для силы F_p будет иметь вид

$$F_p = - \frac{\partial U}{\partial y_p} = - \frac{\partial}{\partial y_p} \sum_n \sum_{m>0} \left[(y_{n+m} - y_n) U'(md) + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} (y_{n+m} - y_n)^2 U''(md) \right] = - \frac{\partial}{\partial y_p} \sum_{m>0} \left[(y_{p+m} - y_p) U'(md) + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} (y_{p+m} - y_p)^2 U''(md) + (y_p - y_{p-m}) U'(md) + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} (y_p - y_{p-m})^2 U''(md) \right] = \\ = - \sum_{m>0} \left[-U'(md) - (y_{p+m} - y_p) U''(md) + \right. \\ \left. + U'(md) + (y_p - y_{p-m}) U''(md) \right]$$

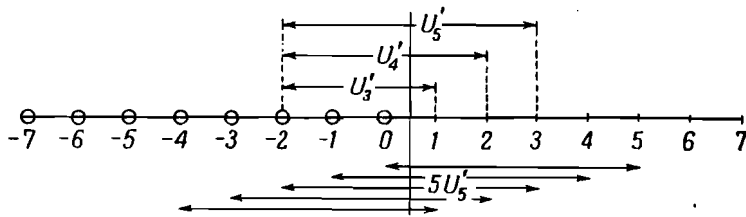
или, если обозначить $U''(md)$ через U''_m ,

$$F_p = \sum_{m>0} U''_m (y_{p+m} + y_{p-m} - 2y_p). \quad (8.66)$$

Эти формулы позволяют сделать ряд интересных замечаний.

Например, в последней строке выражения (8.6 а) фигурирует член $-U'(md)$, представляющий собой силу, с которой $(m+p)$ -я частица действует на p -ю частицу; в случае неограниченной цепочки эта сила компенсируется противоположно направленной силой $+U'(md)$, с которой $(p-m)$ -я частица действует на p -ю частицу.

В случае конечной цепочки дело будет обстоять иначе. Предположим, что цепочка частиц простирается от $n = -\infty$ до $n = 0$ (т. е. частицы с $n = 1, 2, \dots$ отсутствуют), и найдем силы, которые следует ввести, чтобы структура решетки вблизи конца ($n = 0$) оставалась неизменной. Внешние силы



Фиг. 29.

должны быть точно такими же, как силы, действовавшие со стороны отброшенных частиц. Так, например, для частицы с $p = -2$ надо добавить силы (фиг. 29)

$$U'_3, U'_4, U'_5, \dots$$

Итак, если мы хотим, чтобы конец цепочки оставался неискаженным, т. е. желаем сохранить неизменным расстояние d между крайними частицами, то необходимо ввести сложную систему сил, действующих на последние частицы цепочки. Таким образом, полная сила, действующая на совокупность последних частиц ряда, равна

$$F_t = U'_1 + 2U'_2 + 3U'_3 + \dots = \sum_{m=1}^{\infty} mU'_m, \quad (8.7)$$

поскольку существует m пар взаимодействующих между собой частиц, расположенных с обеих сторон от конца и находящихся на расстоянии md друг от друга. Фиг. 29 иллюстрирует этот результат для случая $m = 5$.

Таким образом, для получения ограниченной одномерной решетки с одинаковым расстоянием d между частицами необходимо, чтобы полная сила, действующая на конец решетки, равнялась F_t . Однако это условие никоим образом не является достаточным. В зависимости от того, как эта сила F_t распределяется между граничными частицами решетки, можно рассмотреть два случая:

1. Возможно, что хотя вблизи границы и имеют место возмущения, однако достаточно далеко от нее расстояние между частицами d остается неизменным. Подобное положение имеет место обычно при силах, быстро спадающих с расстоянием, что, в частности, встречается в задачах, связанных с кристаллическими решетками. Если радиус действия сил порядка Ld , то в сумме (8.7) следует оставить члены с $1 \leq m \leq L$. При этом расстояние, на которое распространяется возмущение, по порядку величины также равно Ld .

2. Возмущение может носить периодический характер в зависимости от расстояния и может распространиться по всей решетке. В этом случае мы получаем „супер-решетку“, т. е. периодическую структуру с новым периодом D , большим чем d . Таким образом, для той же самой полной силы F_t , приложенной к граничным частицам решетки, могут иметь место различные расстояния d_1, d_2, \dots между частицами.

Например, чтобы в случае свободной цепочки частиц, т. е. цепочки, к которой не приложены никакие внешние силы, отсутствовали возмущения, необходимо следующее равенство: $U'_1 = U'_2 = \dots = U'_L = 0$. При этом равенство расстояний между частицами решетки сохраняется вплоть до ее границы. Напротив, если все производные U'_m отличны от нуля, то будут иметь место искажения решетки либо только вблизи границы (случай 1), либо по всей ее длине (случай 2).

Все вышеизложенное относится только к одномерному случаю, которому соответствует, например, задача о нахождении формы поверхности и поверхностного натяжения жидкости или твердого тела. В случае трехмерных задач, которые встречаются в физике, взаимодействие между частицами очень быстро убывает с увеличением расстояния между ними и, таким образом, всегда осуществляется случай 1.

Граница поверхностного слоя, который ограничивает жидкое или твердое тело, будет определяться L -м атомом каждого ряда частиц. Искажения решетки, имеющие место внутри поверхностного слоя, вызывают появление добавочных сил, которые и носят название поверхностного натяжения.

Этот тип возмущений решетки и размеры охватываемой ими области будут исследованы в § 10, но уже сейчас можно предвидеть всю сложность граничных условий для структур, частицы в которых взаимодействуют на больших расстояниях. Эти граничные условия уже не могут определяться только суммой сил, действующих на граничные частицы; кроме того, здесь необходимо знать характер распределения этих сил между частицами, находящимися в граничной области. Обычные математические методы, базирующиеся на представлении о поверхностных силах, совершенно неприменимы к решению такого рода задач. Аналогичное положение имеет место при рассмотрении вопросов, относящихся к распространению волн в области соединения двух решеток, а также в задачах об отражении волн на границе среды (см. § 24) и вообще при рассмотрении вопросов, требующих детального анализа явлений, протекающих внутри поверхностного слоя (имеющего порядок Ld).

Вернемся теперь снова к выражению (8.66) и рассмотрим колебания неограниченной решетки. Уравнение движения частицы получим, приравнявая силу F_p силе инерции; таким образом, для p -й частицы получаем

$$M \frac{d^2 y_p}{dt^2} = F_p = \sum_{m > 0} U_m'' (y_{p+m} + y_{p-m} - 2y_p). \quad (8.8)$$

Будем искать решение в виде

$$y_p = Ae^{2\pi i (vt - ax_p)} = Ae^{2\pi i (vt - apd)}, \quad (8.9)$$

где $a = 1/\lambda$ — волновое число, а ν — частота. Подставляя (8.9) в (8.8), получаем

$$\begin{aligned} y_{p+m} + y_{p-m} - 2y_p &= Ae^{2\pi i (vt - apd)} [e^{2\pi i imda} + e^{-2\pi i imda} - 2] = \\ &= -4y_p \sin^2 \pi amd. \end{aligned}$$

Отсюда видно, что уравнение (8.8) допускает решение указанного типа, если ν и a удовлетворяют соотношению

$$\begin{aligned} \frac{M\omega^2}{4} &= M\pi^2 \nu^2 = \sum_{m > 0} U_m'' \sin^2 \pi amd = \\ &= \frac{1}{2} \sum_{m > 0} U_m'' (1 - \cos 2\pi amd), \quad (8.10) \end{aligned}$$

где

$$U_m'' = U''(md).$$

Из соотношения (8.10) следует, что, во-первых, частота ν является периодической функцией волнового числа a с периодом, равным $1/d$, так как

$$\nu^2 \left(a + \frac{1}{d} \right) = \frac{1}{M\pi^2} \sum U_m'' \sin^2 \left[\pi md \left(a + \frac{1}{d} \right) \right] = \nu^2(a),$$

и, во-вторых, ν — величина существенно положительная.

§ 9. Случай взаимодействия только между смежными частицами. Полное решение

В этом случае сумма, входящая в выражение (8.10), сводится к одному члену ($m = 1$) и мы получаем

$$M\pi^2 \nu^2 = U'' \sin^2 \pi ad, \quad (9.1)$$

где для удобства использовано обозначение $U_1''(d) = U''$. Это и есть то искомое дисперсионное соотношение, которое позволяет определить интересующие нас свойства рассматриваемой системы, полученные в предыдущих главах на основании чисто качественных соображений.

Фазовая скорость распространения волны равна

$$V = \frac{\nu}{|a|} = \sqrt{\frac{U''}{M}} \frac{|\sin \pi ad|}{|\pi a|} = d \sqrt{\frac{U''}{M}} \frac{|\sin \pi ad|}{|\pi ad|} \quad (9.2)$$

и при неограниченном увеличении длины волны стремится к пределу

$$V_\infty = d \sqrt{\frac{U''}{M}}; \quad (9.2a)$$

таким образом, мы пришли к результату исследований Баден-Пауэлла [см. формулу (2.1)].

Чтобы установить связь между полученными результатами и проделанными Ньютоном расчетами по определению скорости звука в воздухе, необходимо определить модуль упругости дискретной системы. Это определение должно быть таково, чтобы в предельном случае очень больших плотностей частиц (т. е. для непрерывной структуры) оно совпадало с обычным определением модуля упругости как отношения нормального натяжения к относительному удлинению.

В случае дискретной структуры натяжение между двумя частицами можно рассматривать как силу, действующую между ними; таким образом, натяжение между p -й и $(p+1)$ -й частицами будет равно величине

$$U''(d)[y_{p+1} - y_p],$$

поскольку сумма сил, действующих на p -ю частицу со стороны $(p+1)$ -й и $(p-1)$ -й частиц, равна

$$U''(d)[y_{p+1} + y_{p-1} - 2y_p].$$

С другой стороны, относительное изменение расстояния между p -й и $(p+1)$ -й частицами определяется соотношением

$$\frac{y_{p+1} - y_p}{d}.$$

Исходя из этих соотношений, получаем выражение для модуля упругости

$$\varepsilon = dU''(d). \quad (9.3)$$

Заметим, что в предельном случае больших плотностей частиц все наши определения совпадают с обычными.

Учитывая выражение для модуля упругости (9.3), а также учитывая, что средняя плотность для данной системы $\rho = M/d$, выражение (9.2а) для фазовой скорости можно представить в виде

$$V_\infty = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\rho}}. \quad (9.3a)$$

Формула (9.3а) полностью совпадает с формулой Ньютона; модуль упругости ε играет роль величины, обратной изотермической сжимаемости, а величина U'' аналогична коэффициенту упругости Ньютона e .

Для длин волн, много больших расстояний d между частицами, т. е. когда решетку можно рассматривать как непрерывную среду, скорость распространения равна V_∞ и не зависит от длины волны. С уменьшением длины волны скорость распространения также уменьшается и стремится к предельному значению, равному $(2V_\infty/\pi) = 0,635V_\infty$, которое она принимает при $\lambda = 2d$. В этом случае, как уже было указано, имеет место неоднозначность: волну можно рассматривать либо как бегущую в том или другом направлении со скоростью, равной $0,635V_\infty$, либо как стоячую.

Выражение для предельной частоты ν_c легко получить из (9.1); полагая $a = 1/2d$, находим

$$\nu_c = \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{U''}{M}}. \quad (9.4)$$

Для частот, меньших предельной, соответствующие значения волновых чисел a действительны; для частот, больших предельной, — комплексны, так как, согласно (9.1),

$$\frac{\pi^2 \nu^2 M}{U''} = \sin^2 \pi a d,$$

и левая часть этого равенства является действительной величиной, большей единицы.

Полагая $a = \alpha + i\beta$, получаем

$$\sin \pi a d = \sin \pi \alpha d \operatorname{ch} \pi \beta d + i \cos \pi \alpha d \operatorname{sh} \pi \beta d.$$

Поскольку это выражение должно быть действительно, то необходимо положить $\cos \pi \alpha d = 0$, откуда $\alpha = \pm 1/2d$.

Таким образом, для частот, соответствующих полосе пропускания, действительная часть a равна $\pm 1/2d$; в результате получаем

$$k = 2\pi a d = \pm \pi + 2\pi i \beta d, \quad (9.5)$$

$$\sin \pi a d = \pm \operatorname{ch} \pi \beta d,$$

откуда

$$\nu = \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{U''}{M}} \operatorname{ch} \pi \beta d. \quad (9.6)$$

Величина β носит название постоянной затухания, а кривые, представляющие изменение β как функции частоты ν , — кривых затухания. Поведение действительной и мнимой

частей волнового числа $a = \alpha + i\beta$ в зависимости от частоты ν приведено на фиг. 8.

Для частот, лежащих в интервале между нулем и предельной частотой ν_c , значение a действительно; для частот, больших предельной, действительная часть a принимает постоянное значение $\pm 1/2d$, тогда как мнимая часть a с ростом частоты довольно быстро возрастает. Таким образом, мы получаем, что для частот, больших предельной, амплитуда колебаний экспоненциально затухает с расстоянием, причем характер движения частиц таков, что любые две соседние из них колеблются в противофазе. Для того чтобы убедиться в этом, достаточно значение величины $a = \pm(1/2d) + i\beta$ подставить в выражения для U_p и U_{p+1} .

Указанный выше характер колебаний для случая $\nu > \nu_c$ иллюстрируется кривыми, изображенными на фиг. 11, которые взяты из работы Кельвина, изучившего буквально все аспекты данной проблемы.

§ 10. Учет далеких взаимодействий

Как мы видели, в случае взаимодействия, имеющего место только между смежными частицами, каждому заданному значению длины волны соответствует только одно значение частоты и, наоборот, каждой частоте соответствует одно вполне определенное значение длины волны, превышающее $2d$.

Предположим теперь, что на каждую данную частицу действуют силы со стороны всех L частиц, удаленных от нее на расстояние, не большее чем Ld . Тогда между частотой и волновым числом имеет место соотношение

$$\pi^2 \nu^2 M = \sum_{0 < m < L} U_m'' \sin^2 \pi a m d = \frac{1}{2} \sum_{0 < m < L} U_m'' (1 - \cos 2\pi a m d) \quad (10.1)$$

и для длин волн, стремящихся к бесконечности, получаем

$$V_\infty^2 = \frac{\nu^2}{a^2} = \frac{1}{\pi^2 M} \sum_{0 < m < L} U_m'' \frac{\sin^2 \pi a m d}{a^2} = \frac{d^2}{M} \sum_{0 < m < L} U_m'' m^2. \quad (10.2)$$

Таким образом, предельное значение скорости равно некоторой постоянной, которая зависит от параметров, определяемых структурой рассматриваемой системы. При уменьшении длины волны скорость распространения меняется.

Частота, соответствующая предельному значению длины волны $\lambda = 2d$ ($a = 1/2d$), определяется соотношением

$$\nu^2 = \frac{1}{\pi^2 M} \sum_{0 < m < L} U_m'' \sin^2 \frac{\pi m}{2} = \frac{1}{\pi^2 M} \sum_{0 < m < L} U_m'' (md), \quad (10.3)$$

где последняя сумма берется только по нечетным значениям m , так как

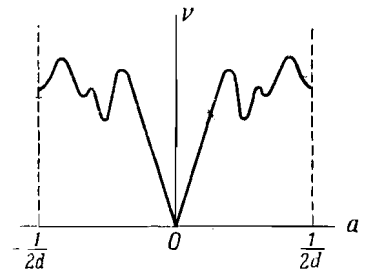
$$\sin \frac{\pi m}{2} = \begin{cases} 0, & \text{если } m \text{ четное,} \\ \pm 1, & \text{если } m \text{ нечетное.} \end{cases} \quad (10.4)$$

Возвращаясь к общему соотношению (10.1), определяющему зависимость частоты ν от волнового числа a , можно заметить, что каждому значению a соответствует только одно значение частоты ν независимо от величины области взаимодействия.

С другой стороны, так как $\cos 2\pi a m d$ может быть представлен в виде полинома степени m по $\cos 2\pi a d$, то, следовательно, выражение для частоты можно представить в виде полинома степени L по $\cos 2\pi a d$. Отсюда вытекает, что для данной частоты существует L значений $\cos 2\pi a d$ и, как следствие этого, L значений a , заключенных в основном интервале $(-1/2d, +1/2d)$. Итак, мы получили, что, в то время как частота является однозначной функцией a , волновое число, наоборот, представляет собой многозначную функцию частоты; это иллюстрируется кривой, изображенной на фиг. 30.

При этом частота не обязательно достигает своего максимального значения на концах основного интервала, хотя кривая $\nu(a)$ и имеет на границах горизонтальную касательную, в чем можно непосредственно убедиться, вычисляя значение производной $d\nu/da$ в точках $a = \pm 1/2d$.

Кроме того, следует указать, что совершенно не обязательно, чтобы все значения величины a , соответствующие некоторой заданной частоте, были действительными; одни из них могут быть комплексными, другие — чисто мнимыми. Такие значения волнового числа должны интерпретироваться



Фиг. 30.

как решения, соответствующие волнам, экспоненциально затухающим с расстоянием. Это имеет особенно важное значение в случае ограниченных решеток, аналогичных тем, которые были рассмотрены в § 8 (см. фиг. 29). Предположим, что к граничной частице решетки приложена гармоническая сила с частотой ν . При этом в системе будет существовать несколько типов волн с разной интенсивностью, соответствующих этой частоте. Те из волн, для которых значения a действительны, будут распространяться вдоль решетки, тогда как волны, для которых значения a комплексны или чисто мнимы, будут экспоненциально затухать по мере удаления от границы. Если же в цепочке, ограниченной с одного конца, необходимо возбудить только одну из этих волн, то следует соответствующим образом выбрать закон движения для L первых от границы частиц. В случае смежного взаимодействия граничные условия наиболее просто: достаточно задать движение только одной граничной (первой) частицы. Если же взаимодействие простирается на достаточно большие расстояния, то задача усложняется и граничные условия необходимо ставить для всех L первых от границы частиц (на расстоянии Ld).

Покоящимся частицам соответствует частота, равная нулю. Кривая на фиг. 30 получена в предположении о таком характере действующих между частицами сил, что решение уравнения для a имеет для малых частот единственное действительное значение; остальные же $(L-1)$ решений комплексны и соответствуют возмущениям, экспоненциально затухающим по мере удаления от границы. Величину, характеризующую расстояние, на которое распространяется это возмущение, будем называть *предельным расстоянием* в случае одномерной решетки и *поверхностным слоем* в случае трехмерной решетки¹⁾. Все рассмотренное здесь от-

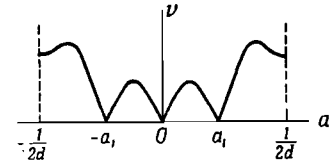
1) Поверхностный слой, в котором затухают возбужденные с поверхности волны, может возникнуть в точках нарушения периодичности в структурах. Это явление было изучено в работах П. Е. Краснушкина и др. [см. П. Е. Краснушкин, В. В. Потемкин, Вестник МГУ, № 10, 33 (1949)]. Оно является аналогом локальных уровней в квантовой механике, исследованных И. Е. Таммом [И. Е. Тамм, Phys. Zs. d. Sow. Union, 1, № 6, 734 (1932)], а затем А. А. Соколовым [А. А. Соколов, Zs. f. Phys., 90, № 7-8, 520 (1934)] в связи с наличием нарушения периодичности решетки твердого тела. — Прим. ред

носится к случаю 1, обсуждавшемуся в § 8 в связи с равенством (8.7).

Имеется, однако, другая возможность, когда кривая $\nu = \nu(a)$ касается оси a ($\nu = 0$) при некоторых отличных от нуля значениях волнового числа $a = \pm a_1$, как это показано, например, на фиг. 31.

В этом случае стационарное периодическое возмущение, характеризуемое длиной волны $\lambda_1 = 1/a_1$, может распространиться на всю решетку; таким образом, мы получаем „суперрешетку“ с периодом (выраженным в единицах d), равным, как уже было указано в § 8 (случай 2),

$$\frac{\lambda_1}{d} = \frac{1}{a_1 d_1}.$$



Фиг. 31.

Соотношением (10.1) квадрат частоты определяется в зависимости от a в виде *конечного* разложения в ряд Фурье. Используя теорию рядов Фурье, можно, считая функцию $\nu = F(a)$ заданной, найти величины, характеризующие силы взаимодействия между частицами; учитывая, что функция $F(a)$ периодична по a с периодом $1/d$, получаем

$$U''(md) = -4\pi^2 M d \int_{-1/2d}^{+1/2d} F^2(a) \cos(2\pi a m d) da. \quad (10.5)$$

В качестве примера попытаемся определить характер взаимодействия, приводящего к постоянной во всей полосе пропускания скорости распространения W . Имеем

$$\nu = W |a|,$$

$$\nu^2 = F^2(a) = W^2 a^2,$$

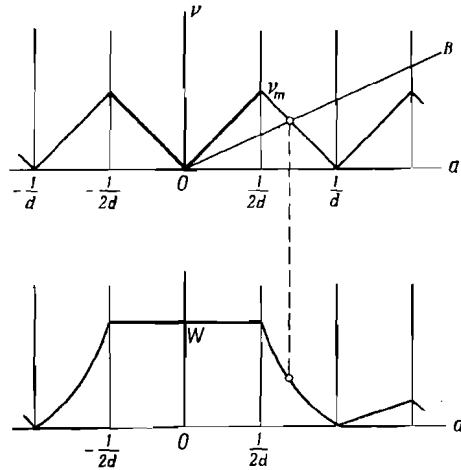
где, разумеется, значения волнового числа a берутся из основного интервала.

Соответствующие кривые приведены на фиг. 32.

Подставляя выражение для функции $F(a)$ в соотношение (10.5), находим

$$U_m'' = -4\pi^2 M d W^2 \int_{-1/2d}^{+1/2d} a^2 \cos(2\pi a m d) da = \\ = (-1)^{m-1} 2M \frac{W^2}{m^2 d^2}. \quad (10.6)$$

Величина U_m'' представляет собой вторую производную



Фиг. 32. Угловой коэффициент прямой OB равен V .

от энергии взаимодействия двух частиц, расстояние между которыми равно md , т. е. функцию, определенную только в дискретном ряде точек, расположенных вдоль оси x на равных расстояниях d друг от друга. Рассмотрим непрерывную функцию

$$U''(x) = -2M \frac{W^2}{x^2} \cos \frac{\pi x}{d}, \quad (10.7)$$

которая принимает точно такие же значения в точках, где определена $U''(md)$. Чтобы получить выражение для энергии взаимодействия, функцию $U''(x)$ необходимо дважды проинтегрировать, что возможно в силу ее непрерывности; интегрирование может быть проведено при помощи таблиц.

Зная функцию $U''(x)$, можно сконструировать систему с дискретной структурой, которая характеризовалась бы только что рассмотренными силами взаимодействия, и получить таким образом механический фильтр нижних частот с постоянной скоростью распространения для всех частот, соответствующих полосе пропускания.

Аналогичный метод может быть использован для получения фильтров верхних частот, а также более сложных полосовых фильтров, имеющих одну или несколько полос пропускания.

В рассмотренном выше случае постоянной скорости распространения легко получить выражение для квадрата круговой частоты ω^2 , где $\omega = 2\pi\nu$, в виде разложения в ряд Фурье. Учитывая соотношение (10.6), находим

$$\omega^2 = 4\pi^2 \nu^2 = \frac{4}{M} \sum_m \frac{U_m''}{2} (1 - \cos 2\pi a m d) = \\ = \sum_m \frac{4(-1)^{m-1}}{m^2 d^2} W^2 (1 - \cos 2\pi a m d) = \\ = \frac{4W^2}{d^2} \left[(1 - \cos 2\pi a d) - \frac{1}{4} (1 - \cos 4\pi a d) + \right. \\ \left. + \frac{1}{9} (1 - \cos 6\pi a d) - \dots \right] = \\ = \frac{4W^2}{d^2} \left[\left(1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} - \frac{1}{16} + \dots \right) - \cos 2\pi a d + \right. \\ \left. + \frac{\cos 4\pi a d}{4} - \frac{\cos 6\pi a d}{9} + \dots \right] = \\ = \frac{4W^2}{d^2} \left[\frac{\pi^2}{12} - \cos 2\pi a d + \frac{\cos 4\pi a d}{4} - \frac{\cos 6\pi a d}{9} + \dots \right], \quad (10.8)$$

поскольку

$$\frac{\pi^2}{12} = 1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} - \frac{1}{16} + \dots \quad (10.9)$$

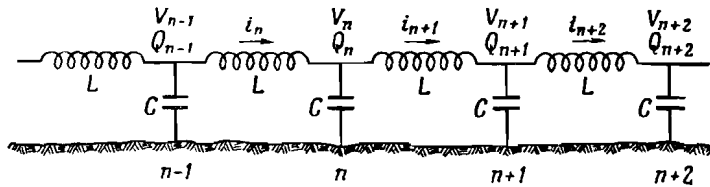
Заменяя теперь в разложении (10.8) $2\pi a d$ на k и учитывая, что $a = \nu/W$, получаем выражение для разложения функции k^2 в ряд Фурье на интервале $(-\pi, +\pi)$

$$k^2 = 4\pi^2 a^2 d^2 = \frac{4\pi^2 \nu^2 d^2}{W^2} = \\ = 4 \left[\frac{\pi^2}{12} - \cos k + \frac{\cos 2k}{4} - \frac{\cos 3k}{9} + \dots \right]. \quad (10.10)$$

Ограничиваясь в рассмотренных выше разложениях конечным числом членов, получаем приближенное решение для функции $\psi(a)$; такая приближенная кривая будет испытывать колебания около точной кривой.

§ 11. Электрический фильтр нижних частот

На фиг. 33 представлена схема электрического фильтра нижних частот, образованного из соединенных последовательно индуктивностей L и емкостей C . Как уже указывалось, благодаря наличию емкостей C подобная система задерживает



Фиг. 33.

сигналы высокой частоты, тогда как низкочастотные сигналы могут распространяться.

Найдем уравнения, описывающие поведение этой системы.

Обозначая через Q_n и V_n соответственно заряд емкости и приложенную к ней разность потенциалов, а через i_n величину тока, протекающего через индуктивность, включенную в цепь между n -й и $(n-1)$ -й емкостью, получаем, учитывая, что $V_n = Q_n/C$,

$$L \frac{di_n}{dt} = V_{n-1} - V_n = \frac{Q_{n-1}}{C} - \frac{Q_n}{C}. \quad (11.1)$$

С другой стороны,

$$i_n - i_{n+1} = \frac{dQ_n}{dt}. \quad (11.2)$$

Отсюда, дифференцируя (11.1), находим

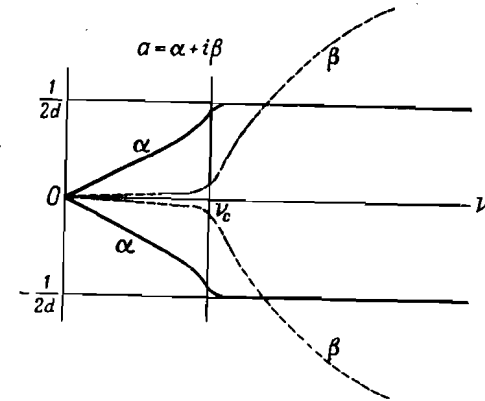
$$L \frac{d^2 i_n}{dt^2} = \frac{1}{C} \left(\frac{dQ_{n-1}}{dt} - \frac{dQ_n}{dt} \right) = \frac{1}{C} (i_{n-1} + i_{n+1} - 2i_n). \quad (11.3)$$

Это уравнение позволяет определить величину тока, протекающего в линии, а также величины электрического заряда

и разности потенциалов во всех ее точках. Как легко видеть, уравнение (11.3) полностью аналогично уравнению, описывающему движение частиц в одномерной решетке в случае взаимодействия, имеющего место только между смежными частицами (см. § 2 и 9), а именно

$$M \frac{d^2 y_n}{dt^2} = U_1'' (y_{n-1} + y_{n+1} - 2y_n), \quad (11.4)$$

которое переходит в (11.3), если отношение U_1''/M заменить на $1/LC$, а y_n на i_n .



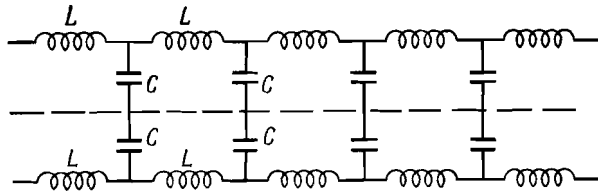
Фиг. 34.

Следовательно, все результаты, полученные выше для механического фильтра нижних частот, можно непосредственно перенести на рассматриваемый здесь случай. Таким образом, получаем, что частота является периодической функцией волнового числа, а скорость распространения при длине волны, стремящейся к бесконечности, постоянна и равна d/\sqrt{LC} , где d — расстояние между соседними конденсаторами. Здесь также имеется предельная частота ν_c и все волны, частоты которых превышают значение ν_c , экспоненциально затухают с расстоянием. Ее значение можно найти из выражения (9.4); оно равно

$$\nu_c = \frac{1}{\pi \sqrt{LC}}. \quad (11.5)$$

Следует указать, что рассмотренный здесь фильтр, описываемый уравнением (11.3), не содержит сопротивлений; введение их несколько изменяет свойства линии: появляется слабое затухание волн, частоты которых лежат внутри полосы пропускания, что связано с наличием активных потерь энергии, и исчезает резкая граница между полосой непропускания и полосой пропускания, т. е. появляется некоторая неопределенность в выборе предельной частоты. В области частот, превышающих критическую, затухание резко возрастает с частотой. На фиг. 34 приведены кривые, изображающие изменение действительной и мнимой частей волнового числа как функции частоты. Более подробно эти вопросы будут рассмотрены в гл. 9.

Изображенная на фиг. 33 электрическая линия полностью эквивалентна двойной линии, схема которой приведена на



Фиг. 35.

фиг. 35 и которая может быть получена добавлением к уже рассмотренной простейшей линии ее отображения, симметричного относительно земли. Двойная линия сама может быть сведена к более простой системе, состоящей из индуктивностей, имеющих ту же величину, и вдвое меньших по величине емкостей (фиг. 36)

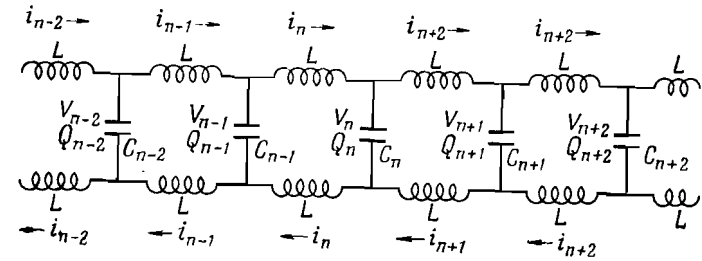
$$L' = L, \quad C' = \frac{C}{2}. \quad (11.6)$$

Эта линия обладает точно такими же свойствами, как и простейшая линия, и характеризуется, как уже было указано в § 3, величинами

$$V_\infty = \frac{d}{\sqrt{LC}} = \frac{d}{\sqrt{2L'C'}}, \quad v_c = \frac{1}{\pi\sqrt{LC}} = \frac{1}{\pi\sqrt{2L'C'}}. \quad (11.7)$$

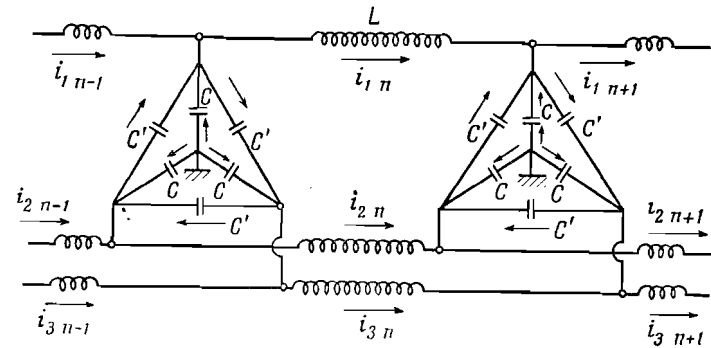
В заключение отметим, что можно провести еще более глубокую аналогию между электрическими и механическими

фильтрами. В § 5 в связи с изучением колебаний цепочки, состоящей из свободных частиц, было указано, что кривая, представляющая частоту в зависимости от волнового числа,



Фиг. 36.

состоит из нескольких различных ветвей, соответствующих продольным и поперечным колебаниям. Подобное же положение имеет место, если рассмотреть бесконечную систему,



Фиг. 37.

представляющую собой трехфазную линию, схема которой приведена на фиг. 37. В этом случае, как мы сейчас покажем, симметричные составляющие вектора тока играют роль, аналогичную упругим продольным и поперечным волнам, которые могут распространяться вдоль цепочки частиц.

Итак, пусть бесконечная трехфазная линия, в которой предполагается отсутствие активных потерь, состоит, как это показано на фиг. 37, из одинаковых ячеек, в каждой

фазе которых включена некоторая индуктивность L . Каждая ячейка связана со следующей при помощи системы емкостей C и C' , где C — емкость между одной из фаз и землей, а C' — емкость между двумя фазами одной и той же ячейки.

Обозначим через $i_{1, n}$, $i_{2, n}$ и $i_{3, n}$ величины тока, протекающего в различных фазах n -й ячейки. Тогда соответствующее уравнение для токов будет иметь вид

$$-\frac{1}{C} i_{1, n-1} + \frac{2}{C} i_{2, n} + L \left(1 + 2 \frac{C'}{C}\right) \frac{d^2 i_{1, n}}{dt^2} - L \frac{C'}{C} \frac{d^2}{dt^2} (i_{2, n} + i_{3, n}) - \frac{1}{C} i_{1, n+1} = 0. \quad (11.8)$$

Оно должно быть дополнено еще двумя уравнениями, которые могут быть получены из (11.8) циклической перестановкой индексов 1, 2, 3.

Введем симметричные составляющие тока нулевой, прямой и обратной последовательностей

$$I_{h, n} = i_{1, n} + i_{2, n} + i_{3, n}$$

$$I_{d, n} = i_{1, n} + \alpha i_{2, n} + \alpha^2 i_{3, n}$$

$$I_{i, n} = i_{1, n} + \alpha^2 i_{2, n} + \alpha i_{3, n}$$

где 1 , α и α^2 равны соответственно трем кубическим корням из единицы.

Переходя теперь к новым переменным, получаем из трех уравнений типа (11.8) систему

$$\begin{aligned} -\frac{1}{C} I_{h, n-1} + \frac{2}{C} I_{h, n} + L \frac{d^2 I_{h, n}}{dt^2} - \frac{1}{C} I_{h, n+1} &= 0, \\ -\frac{1}{C} I_{d, n-1} + \frac{2}{C} I_{d, n} + L \left(1 + 3 \frac{C'}{C}\right) \frac{d^2 I_{d, n}}{dt^2} - \frac{1}{C} I_{d, n+1} &= 0, \\ -\frac{1}{C} I_{i, n-1} + \frac{2}{C} I_{i, n} + L \left(1 + 3 \frac{C'}{C}\right) \frac{d^2 I_{i, n}}{dt^2} - \frac{1}{C} I_{i, n+1} &= 0. \end{aligned} \quad (11.9)$$

Определим, при каких условиях волны вида

$$Ae^{2\pi i(\nu t - kn)}$$

(где ν — частота, а k — величина, обратно пропорциональная длине волны) могут распространяться в системе.

Первое из уравнений системы (11.9) дает

$$\nu_h = \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{1}{CL}} \sin k\pi.$$

Два других уравнения приводят к аналогичной формуле

$$\nu_d, \nu_i = \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{1}{CL \left(1 + 3 \frac{C'}{C}\right)}} \sin k\pi.$$

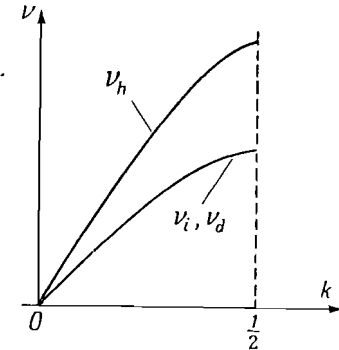
На фиг. 38 изображена зависимость ν от k .

Рассмотренная выше система обладает свойствами фильтра нижних частот. Кривая $\nu = \nu(k)$ состоит из простой ветви (ν_h)

и сдвоенной ветви (ν_d, ν_i), получившейся в результате слияния двух различных ветвей, — картина, полностью подобная той, которая была получена для цепочки, состоящей из свободных частиц (см. § 5, фиг. 23). Составляющие тока нулевой последовательности (ν_h) соответствуют продольным волнам, составляющие же прямой и обратной последовательностей (ν_d, ν_i) — поперечным.

Укажем, кроме того, что при увеличении длины волны скорость распространения стремится к постоянному пределу, имеющему различную величину в зависимости от того, рассматриваем ли мы компоненты нулевой последовательности или прямой и обратной последовательностей; эти скорости являются аналогами скоростей распространения продольных и поперечных волн в сплошной среде.

Рассматривая трехфазную линию, подобную только что описанной, но состоящую из периодически повторяющихся ячеек двух типов, характеризуемых различными индуктивностями L и L' и связанных между собой такими же системами емкостей (одинаковыми вдоль всей линии), можно было бы получить электрическую систему, являющуюся



Фиг. 38.

аналогом решетки типа Борна, состоящей из частиц двух сортов. Более детальные сведения можно найти в оригинальной работе Пароди¹⁾.

§ 12. Аналогия между электрическими и механическими системами

В предыдущем параграфе мы видели, что уравнения, описывающие распространение электрических волн в фильтре нижних частот, имеют точно такой же вид, что и уравнения, описывающие распространение упругих волн в механическом фильтре того же типа. Это дает основание предполагать, что между электрическими и механическими системами имеется более глубокая аналогия.

Детальному изучению электрических линий будет посвящена гл. 9; тем не менее уже сейчас имеется возможность рассмотреть эти вопросы с точностью, вполне достаточной для того, чтобы установить основные черты аналогии между электрическими линиями и механическими решетками.

Как мы уже отмечали, величина $1/\sqrt{LC}$ играет для электрических линий такую же роль, как величина $\sqrt{U''/M}$ для механических решеток.

Классический метод, позволяющий установить аналогию между электромагнитными и механическими явлениями, состоит в установлении взаимного соответствия между магнитной и электрической энергией, с одной стороны, и кинетической и потенциальной энергией — с другой; он приводит к тому, что необходимо сопоставить величины

$$\frac{1}{C} \text{ с } U'' \text{ и } L \text{ с } M. \quad (12.1)$$

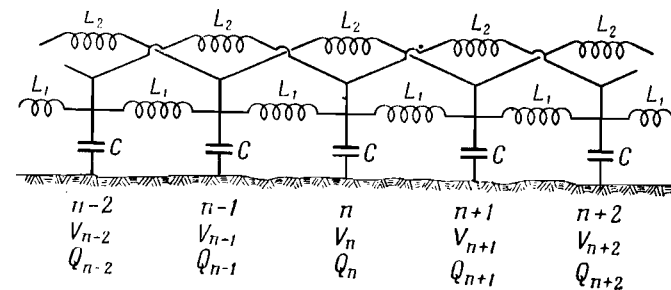
Однако это соответствие не является единственно возможным, и можно представить себе другую, более удобную в ряде случаев возможность. Обычно же выбор того или иного соответствия диктуется соображениями удобства и структурой рассматриваемой системы.

1) См. М. Parodi, Compt. Rend., 216, 175 (1948).

Другой путь установления аналогии сводится, например, к сопоставлению величин

$$U'' \text{ с } \frac{1}{L_p} \text{ и } M \text{ с } C. \quad (12.2)$$

В частности, именно этот путь следует использовать, если мы хотим построить электрическую линию, обладающую такими же свойствами (в отношении характера распространения волн), что и решетка, состоящая из одинаковых, находящихся на равных расстояниях друг от друга частиц, каждая из которых взаимодействует со всеми



Фиг. 39.

остальными частицами решетки. Рассматривая соответствующую электрическую линию, построенную согласно (12.2), легко убедиться, что уравнения, описывающие распространение волн в этих двух системах, имеют совершенно одинаковый вид. Подобная линия представлена на фиг. 39. Каждый из конденсаторов емкостью C связан при помощи индуктивностей L_1 с двумя смежными („первыми соседями“) конденсаторами, при помощи индуктивностей L_2 с двумя следующими („вторыми соседями“), расположенными слева и справа от него, и вообще, при помощи индуктивностей L_p с двумя „ p -ми соседями“ справа и слева. На фиг. 39 для простоты изображены только индуктивности L_1 и L_2 . Сохраняя для конденсаторов такую же нумерацию, как и в предыдущих задачах, обозначим через $i_k, k+p$ величину тока, протекающего через индуктивность L_p от k -го конденсатора к $(k+p)$ -му, а через Q_n — заряд, накопленный n -м конденсатором.

Тогда будем иметь

$$\begin{aligned} \frac{dQ_n}{dt} &= [i_{n-p, n} + i_{n-p+1, n} + \dots + i_{n-1, n}] - \\ &\quad - [i_{n, n+1} + i_{n, n+2} + \dots + i_{n, n+p}] = \\ &= \sum_p (i_{n-p, n} - i_{n, n+p}). \end{aligned} \quad (12.3)$$

С другой стороны, обозначая через V_n разность потенциалов между обкладками n -го конденсатора, легко получить

$$\begin{aligned} L_1 \frac{d}{dt} i_{n-1, n} &= V_{n-1} - V_n = \frac{Q_{n-1} - Q_n}{C}, \\ L_2 \frac{d}{dt} i_{n-2, n} &= V_{n-2} - V_n = \frac{Q_{n-2} - Q_n}{C}, \\ &\dots \dots \dots \\ L_p \frac{d}{dt} i_{n-p, n} &= V_{n-p} - V_n = \frac{Q_{n-p} - Q_n}{C}. \end{aligned} \quad (12.4)$$

Отсюда, дифференцируя (12.3) и учитывая (12.4), находим окончательно

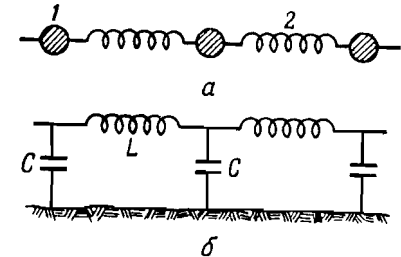
$$\begin{aligned} C \frac{d^2 Q_n}{dt^2} &= C \sum_p \left(\frac{d}{dt} i_{n-p, n} - \frac{d}{dt} i_{n, n+p} \right) = \\ &= \sum_p \frac{Q_{n-p} + Q_{n+p} - 2Q_n}{L_p}. \end{aligned} \quad (12.5)$$

Это уравнение, если учесть соответствие (12.2), полностью совпадает с уравнением (8.8), полученным при изучении цепочки, состоящей из частиц равной массы M с произвольным законом взаимодействия. Таким образом, изображенная на фиг. 39 линия должна обладать такими же свойствами (в отношении характера распространения волн), что и решетка из одинаковых частиц с произвольным законом взаимодействия. Эти свойства были рассмотрены в § 8.

Соответствию (12.2) можно дать геометрическую интерпретацию.

Механический фильтр нижних частот состоит из точечных масс, соединенных упругими элементами, которые наглядно можно представить в виде пружинки. Каждая такая пружинка (фиг. 40) одним концом присоединена к одной массе, а другим — к другой, причем массы на фиг. 40 пред-

ставлены точками. Электрическую линию, в которой все конденсаторы шунтируют высокую частоту, можно представить в виде одиночной линии, через равные интервалы замкнутой через емкость на землю. Тогда роль точек системы будут играть конденсаторы, а элементами, каждый конец которых присоединен к точке, будут индуктивности. Другими словами, эта точка зрения сводится к сопоставлению упругих сил, связывающих решетку, и индуктивностей, связывающих электрическую



Фиг. 40. a — механический фильтр нижних частот: 1 — масса, 2 — пружинка; b — электрический фильтр нижних частот.

линию, в то время как роль инертного элемента в этих системах играют соответственно точечные массы и конденсаторы. В случае фильтра верхних частот электрическая линия состоит из соединенных последовательно конденсаторов и связана с землей через индуктивности, которые могут теперь рассматриваться как точки системы, конденсаторы же играют роль элементов связи. Эта картина отвечает классическому соответствию, определяемому соответствием (12.1).

Пусть теперь имеем полосовой фильтр (см. фиг. 18). Тогда конденсаторы, шунтирующие индуктивности, могут рассматриваться как частицы, так как один конец каждого из них всегда можно считать заземленным. Однако поскольку система содержит еще и другие конденсаторы, кроме только что рассмотренных, то для установления того или иного соответствия необходим более тщательный анализ системы¹⁾.

Заметим, что проводимые здесь аналогии имеют определенные границы: невозможно, например, построить электрическую линию, подчиняющуюся уравнению типа (12.5), с определенной, заданной в области пропускания функциональной зависимостью между частотой ν и волновым числом a ,

¹⁾ Об аналогии и классификации сложных механических и электрических цепей см. работу: П. Е. Краснушкин, Вестник МГУ, № 12 (1949). — *Прим. ред.*

тогда как для механической решетки, как было показано в § 10, такая возможность в принципе имеется. Причина этого заключается в том, что, в то время как с точки зрения механики вполне допустимо, чтобы некоторые из величин U''_p принимали отрицательные значения, невозможно построить электрическую линию, состоящую из индуктивностей с отрицательным коэффициентом самоиндукции.

Однако эти вопросы могут быть разрешены, если учесть взаимную индукцию между контурами. Впервые это было сделано Пирсом и затем более детально разработано Л. Бриллюэном¹⁾, рассмотревшим вопрос о возможности получения электрического фильтра, характеризуемого постоянной скоростью распространения в полосе пропускания фильтра. С другой стороны, следует указать, что, только подбирая надлежащим образом коэффициенты взаимной индукции между контурами, можно получить фильтр нижних частот, действующий в линии задержки вплоть до частот, очень близких к предельной. Подобными линиями снабжены применяемые в подводной акустике²⁾ современные компенсаторы³⁾.

ПРИМЕЧАНИЯ

А. Акустический аналог электрических и механических фильтров нижних частот

Можно привести акустический аналог только что рассмотренных нами систем.

Предположим, что имеется бесконечный ряд одинаковых резонаторов (фиг. 41) объемом V . Обозначим через u объем трубки, соединяющей два соседних резонатора, через ρ плот-

1) L. Brillouin, Proc. of Symposium on Large-scale Digital calculating machinery, Harvard Univ., 1948, p. 110.

2) См., например, M. Parodi, Principes de réception sous-marine dirigée, Paris, 1946.

3) Линии задержки с компенсацией впервые применены Кальманом в 1946 г. (см. H. E. Kallman, Proc. I. R. E., No 9, 1946; см. также „Приемники радиолокационных станций“, перевод с англ., вып. 2, стр. 74, Изд-во „Сов. радио“, 1949). В СССР подробный анализ таких линий дан А. М. Трахтманом (А. М. Трахтман, Расчет электрических фильтров и линий задержки с учетом потерь в элементах, Кандидатская диссертация, НИИ МРТГП, 1951). — Прим. ред.

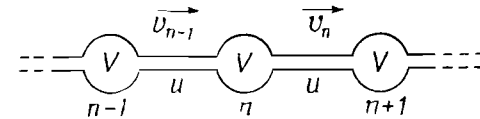
ность газа, находящегося в системе, и, наконец, через p_n внутреннее давление газа в n -м резонаторе. Будем изучать движение массы u газа, заключенного в соединительных трубках, предполагая, что в каждый момент времени газ в резонаторах находится в состоянии равновесия.

При этих условиях имеем

$$\rho u \frac{dv_n}{dt} = (p_n - p_{n+1}) S,$$

$$\rho u \frac{dv_{n-1}}{dt} = (p_{n-1} - p_n) S,$$

где v_n и v_{n-1} — скорости массы газа, заключенного в трубках, соединяющих n -й резонатор с $(n+1)$ -м и $(n-1)$ -м резонаторами, а S — сечение соединительной трубки.



Фиг. 41.

Изменение количества газа, содержащегося в n -м резонаторе, за время dt равно

$$\rho (v_n - v_{n-1}) S dt.$$

Если через χ обозначить сжимаемость газа, то

$$\chi = - \frac{1}{V} \frac{(v_n - v_{n-1}) S dt}{dp_n},$$

где dp_n — изменение давления в n -м резонаторе.

Теперь с помощью этого соотношения, исключая из уравнения движения скорость, получаем

$$\frac{d^2 p_n}{dt^2} = \frac{S^2}{\chi V u \rho} [p_{n+1} + p_{n-1} - 2p_n].$$

Это уравнение имеет точно такой же вид, что и уравнение, полученное при рассмотрении распространения упругих волн в бесконечной цепочке, состоящей из одинаковых частиц, каждая из которых взаимодействует только со смежными частицами.

Будем искать решение в виде бегущих волн, т. е. положим

$$p_n = P e^{2\pi i (\nu t - \alpha n d)},$$

где d — расстояние между соответственными точками двух последовательно расположенных резонаторов. Подставляя это выражение для p_n в полученное уравнение, находим искомое соотношение, определяющее зависимость частоты ν от волнового числа:

$$\nu = \frac{S}{\pi} \sqrt{\frac{1}{\chi V_{up}}} \sin \pi \alpha d.$$

Отсюда следует наличие максимальной частоты распространения, и, таким образом, рассмотренная система представляет собой акустический фильтр нижних частот.

Очевидно, что в силу сделанных нами упрощающих предположений приведенные выше расчеты могут дать только общую картину явления.

Акустические системы подобного типа изучались экспериментально Кэнеком и Стюартом¹⁾.

Б. Пример цепочки связанных осцилляторов, обладающей свойствами рассмотренной в § 6 механической системы. Распространение механического возмущения в цепочке, образованной из магнитов

Выше было указано, что рассмотренная в § 6 механическая система, представляющая собой цепочку упруго связанных осцилляторов, несколько искусственна, и, чтобы представить себе более естественную модель подобной структуры, мы рассмотрели, исходя из качественных соображений, свойства цепочки двухатомных молекул.

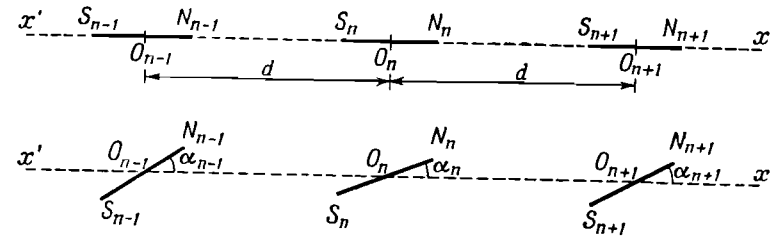
В заключение этой главы мы рассмотрим систему, состоящую из осцилляторов с неупругой связью, свойства которой аналогичны свойствам указанной структуры и могут представлять некоторый интерес.

Рассмотрим цепочку, состоящую из маленьких одинаковых магнитов $S_{n-1}N_{n-1}$, $S_n N_n$, $S_{n+1}N_{n+1}$, ..., расположенных, как показано на фиг. 42, каждый из которых может

¹⁾ См. Сапас, Journ. de Phys. 7, 161 (1926); см. также Stewart, Phys. Rev., 20, 528 (1922).

свободно вращаться в плоскости чертежа вокруг своего неподвижно закрепленного центра симметрии. Обозначим через $2l$ длину каждого из магнитов, а через d расстояние между двумя соседними магнитами, причем величину $2l$ будем предполагать малой по сравнению с d .

Будем изучать распространение волн в этой системе, предполагая, что магнитное взаимодействие имеет место только между полюсами смежных магнитов.



Фиг. 42.

Обозначим теперь через $\pm m$ величину магнитного заряда полюсов и через α_{n-1} , α_n , α_{n+1} — углы отклонения (которые будем предполагать малыми) соответственно $(n-1)$ -го, n -го и $(n+1)$ -го магнитов от положения равновесия. Тогда, если I — момент инерции магнита относительно его оси вращения, то уравнение движения n -го магнита будет иметь вид

$$I \alpha_n'' = - \frac{2m^2 l^2}{d^3} (\alpha_{n+1} - 2\alpha_n + \alpha_{n-1}) - m^2 l^2 \left[\frac{1}{(d-2l)^3} + \frac{1}{(d+2l)^3} \right] (\alpha_{n+1} + 2\alpha_n + \alpha_{n-1}) - 2m^2 l \left[\frac{1}{(d-2l)^2} - \frac{1}{(d+2l)^2} \right] \alpha_n.$$

Как обычно, будем искать решение в виде распространяющейся волны

$$\alpha_n = A e^{2\pi i (\nu t - \alpha n d)},$$

где ν — частота и a — волновое число. Подставляя выражения для α_{n-1} , α_n и α_{n+1} в уравнение движения, получаем

$$\nu^2 = \frac{m^2 l^2}{\pi^2 I} \left\{ \frac{1}{2l} \left(\frac{1}{(d-2l)^2} - \frac{1}{(d+2l)^2} \right) + \left(\frac{1}{(d-2l)^3} - \frac{1}{(d+2l)^3} \right) \cos^2 \pi ad - \frac{2}{d^3} \sin^2 \pi ad \right\}.$$

Отсюда легко видеть, что в рассмотренной системе могут распространяться только волны, частоты которых заключены между двумя предельными значениями

$$\nu_0 = \frac{ml}{\pi} \sqrt{\frac{1}{I} \left\{ \frac{1}{2l} \left(\frac{1}{(d-2l)^2} - \frac{1}{(d+2l)^2} \right) + \frac{1}{(d-2l)^3} + \frac{1}{(d+2l)^3} \right\}},$$

$$\nu_1 = \frac{ml}{\pi} \sqrt{\frac{1}{I} \left\{ \frac{1}{2l} \left(\frac{1}{(d-2l)^2} - \frac{1}{(d+2l)^2} \right) - \frac{2}{d^3} \right\}},$$

т. е. эта система ведет себя как полосовой фильтр. Кривая $\nu = \nu(a)$ аналогична кривой фиг. 25.

Следует указать, что, если магнитное поле H параллельно направлению цепочки, то уравнение движения остается таким же с той лишь разницей, что в правую часть добавляется член $-2mlHa_n$. В этом случае система также представляет собой полосовой фильтр, предельные частоты которого можно легко найти.

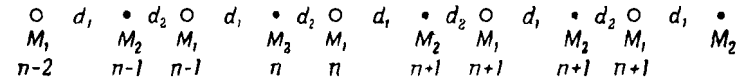
В заключение заметим, что ниже точки Кюри вполне законно предположение о том, что различные элементарные магнитики, находящиеся в ферромагнитном кристалле, по мере приближения к абсолютному нулю стремятся установиться параллельно друг другу. Рассмотренная здесь задача соответствует как раз этой области температур; знание же зависимости $\nu = \nu(a)$, как можно показать¹⁾, позволяет определить некоторые классические свойства рассматриваемых объектов.

¹⁾ М. Parodi, Journ. de Physique, 10, 399 (1939).

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ИЗУЧЕНИЕ БОЛЕЕ СЛОЖНЫХ ОДНОМЕРНЫХ РЕШЕТОК

§ 13. Уравнения движения решетки хлористого натрия. Одномерный случай

Решетку хлористого натрия можно рассматривать как частный случай одномерных решеток, качественно рассмотренных нами в § 3 и 7. Этот тип решетки изображен на фиг. 43. Он представляет собой решетку, образованную двумя семействами частиц, массы которых равны соответственно M_1



Фиг. 43.

и M_2 . Частицы одного семейства (M_1) в решетке чередуются вдоль некоторой прямой с частицами другого семейства (M_2). Обозначим через d_1 и d_2 расстояния от некоторой частицы одного семейства, например семейства M_1 , до двух смежных с ней частиц, находящихся справа и слева; при этом период решетки будет равен

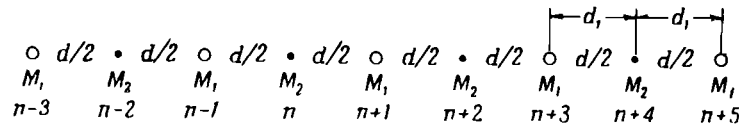
$$d = d_1 + d_2. \quad (13.1)$$

В § 7 мы предполагали, что массы частиц одного семейства, скажем M_2 , много меньше массы частиц другого семейства и что каждая из частиц массы M_2 взаимодействует только с одной ближайшей частицей массы M_1 , тогда как каждая из частиц массы M_1 взаимодействует как с двумя ближайшими частицами массы M_1 , так и со смежными частицами массы M_2 . Другими словами, при взаимодействии молекулы рассматривались как целое и внутренние степени свободы не учитывались.

Здесь мы будем рассматривать решетку несколько иной структуры, а именно будем предполагать, что каждая из

частиц взаимодействует с двумя смежными с ней частицами независимо от того, к какому семейству она принадлежит; это, очевидно, означает, что массы частиц M_1 и M_2 сравнимы. Так как подобные системы отличаются от рассмотренных выше только характером взаимодействия, то кривые зависимости частоты от волнового числа должны иметь такой же вид.

Если мы ограничимся случаем, когда в состоянии равновесия расстояние между любыми двумя соседними частицами одинаково, и предположим, что характер взаимодействия одинаков для всех частиц, то получим решетку, которая аналогична использованной Борном при построении теории



Фиг. 44.

теплоемкости твердых тел. Подобная решетка представлена на фиг. 44; частицы с массой M_2 изображены точками, а частицы с массой M_1 — кружками. Нумеровать частицы можно либо как на фиг. 43, либо как на фиг. 44. Мы будем использовать второй вариант, причем четные значения n будут соответствовать частицам с массой M_2 , а нечетные — частицам с массой M_1 ; при этом в состоянии равновесия координаты частиц M_1 будут равны $(2n+1)d/2$, а координаты частиц M_2 будут равны $2n(d/2) = nd$.

В силу различия масс уравнения движения для каждого из двух сортов частиц будут также отличаться. Силу, действующую на m -ю частицу, можно найти точно так же, как это было сделано в § 8 [уравнения (8.6) и (11.4)]. Обозначая ее через F_m , получаем уравнения

$$F_{2n} = U_1''(y_{2n-1} + y_{2n+1} - 2y_{2n}) = M_2 \frac{d^2 y_{2n}}{dt^2}, \quad (13.2)$$

$$F_{2n+1} = U_1''(y_{2n} + y_{2n+2} - 2y_{2n+1}) = M_1 \frac{d^2 y_{2n+1}}{dt^2},$$

где y_k — смещение k -й частицы от положения равновесия,

Будем искать решение в виде

$$\begin{aligned} y_{2n} &= A_2 e^{i(\omega t - 2nk_1)}, \\ y_{2n+1} &= A_1 e^{i[\omega t - (2n+1)k_1]}, \end{aligned} \quad (13.3)$$

где

$$\begin{aligned} k &= 2\pi a d, \quad k_1 = 2\pi a \frac{d}{2} = \pi a d = \frac{k}{2}, \\ \omega &= 2\pi\nu, \quad a = \frac{1}{\lambda}. \end{aligned}$$

Первое решение (13.3) описывает волновое движение частиц с массой M_2 , второе — движение частиц с массой M_1 . Длины волны и частоты, фигурирующие в этих двух решениях, должны быть для некоторого заданного колебательного движения одинаковы, а амплитуды могут различаться.

Чтобы уравнения (13.2) допускали решения вида (13.3), величины A_1 , A_2 , ω и k должны, как мы сейчас увидим, удовлетворять некоторым определенным соотношениям. Действительно, подставляя (13.3) в уравнение (13.2) и сокращая соответственно на $e^{i(\omega t - 2nk_1)}$ и $e^{i[\omega t - (2n+1)k_1]}$, находим

$$M_2(-A_2\omega^2) = U_1''(A_1 e^{ik_1} + A_1 e^{-ik_1} - 2A_2),$$

$$M_1(-A_1\omega^2) = U_1''(A_2 e^{ik_1} + A_2 e^{-ik_1} - 2A_1)$$

или

$$A_2(M_2\omega^2 - 2U_1'') + 2A_1 U_1'' \cos k_1 = 0,$$

$$A_1(M_1\omega^2 - 2U_1'') + 2A_2 U_1'' \cos k_1 = 0, \quad (13.4)$$

если учесть, что

$$e^{ik_1} + e^{-ik_1} = 2 \cos k_1.$$

Итак, для определения A_1 и A_2 мы получили систему линейных однородных уравнений. Для того чтобы она имела нетривиальное решение, необходимо, как известно, приравнять ее детерминант нулю. Отсюда получаем условие, которому должны удовлетворять ω и k_1 ,

$$(M_1\omega^2 - 2U_1'')(M_2\omega^2 - 2U_1'') - 4U_1''^2 \cos^2 k_1 = 0$$

или, группируя члены при одинаковых степенях ω^2 ,

$$\omega^4 - 2U_1'' \left(\frac{1}{M_1} + \frac{1}{M_2} \right) \omega^2 + 4 \frac{U_1''^2}{M_1 M_2} \sin^2 k_1 = 0. \quad (13.5)$$

Это уравнение относительно ω^2 имеет два действительных решения, а так как мы предполагаем, что величина ω существенно положительная, то им соответствуют два значения частоты. Таким образом, каждому значению k_1 соответствуют два, вообще говоря, различных значения ω , и кривая, представляющая зависимость частоты от волнового числа k_1 , также состоит из двух ветвей, определяемых следующим соотношением:

$$\omega^2 = U_1'' \left[\frac{1}{M_1} + \frac{1}{M_2} \pm \sqrt{\left(\frac{1}{M_1} + \frac{1}{M_2} \right)^2 - 4 \frac{\sin^2 k_1}{M_1 M_2}} \right]. \quad (13.6)$$

Подставляя выражение для частоты (13.6) в систему уравнений (13.4), можно определить отношение A_1/A_2 , которое, кстати говоря, будет действительным. Окончательные же значения амплитуд A_1 и A_2 находятся из начальных условий.

§ 14. Электрический аналог одномерной решетки, состоящей из двухатомных молекул

Для того чтобы получить электрическую линию, аналогичную одномерной решетке, образованной из двухатомных молекул, можно использовать классическое соответствие, к которому приводит условие (12.1). Поскольку в такой решетке имеются два семейства частиц, то необходимо, чтобы соответствующая электрическая модель также состояла из индуктивностей двух типов L_1 и L_2 . С другой стороны, можно обобщить задачу, рассмотренную в предыдущем параграфе, предполагая, что характер взаимодействия различен для частиц каждого семейства, или, что сводится к тому же, что расстояние между некоторой частицей и ближайшей к ней справа частицей не равно расстоянию, отделяющему ее от ближайшей слева частицы. Это соответствует электрической линии, в которой наряду с двумя различными типами индуктивностей имеются также и два типа конденсаторов C_1 и C_2 . При этом конденсатор C_1 , расположенный справа от конденсатора C_2 , связан с ним индуктивностью L_2 , а конденсатор C_1 , находящийся слева от C_2 , — индуктивностью L_1 . Подобная система и рассматривается обычно как электрический аналог механической системы, описанной в § 7.

Схема этой электрической линии представлена на фиг. 45. Если, как и на фиг. 33, через i_m обозначить величину тока,

протекающего в цепи от $(m-1)$ -го конденсатора к m -му, то система уравнений для линии будет иметь вид

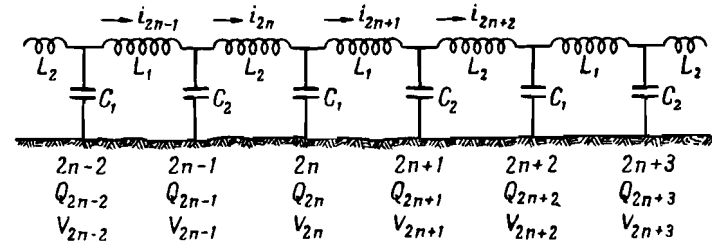
$$i_{2n} - i_{2n+1} = \frac{dQ_{2n}}{dt}, \quad i_{2n+1} - i_{2n+2} = \frac{dQ_{2n+1}}{dt}, \quad (14.1)$$

$$\begin{aligned} L_1 \frac{d}{dt} i_{2n+1} &= V_{2n} - V_{2n+1} = \frac{Q_{2n}}{C_1} - \frac{Q_{2n+1}}{C_2}, \\ L_2 \frac{d}{dt} i_{2n} &= V_{2n-1} - V_{2n} = \frac{Q_{2n-1}}{C_2} - \frac{Q_{2n}}{C_1}; \end{aligned} \quad (14.2)$$

дифференцируя (14.2) по времени и учитывая соотношения (14.1), получаем

$$\begin{aligned} L_1 \frac{d^2}{dt^2} i_{2n+1} &= \frac{i_{2n} - i_{2n+1}}{C_1} - \frac{i_{2n+1} - i_{2n+2}}{C_2}, \\ L_2 \frac{d^2}{dt^2} i_{2n} &= \frac{i_{2n-1} - i_{2n}}{C_2} - \frac{i_{2n} - i_{2n+1}}{C_1}. \end{aligned} \quad (14.3)$$

Легко видеть, что, если положить $C_1 = C_2$ и заменить коэффициенты самоиндукции L_1 и L_2 на массы, а величину,



Фиг. 45.

обратную емкости, на коэффициент упругости, то система уравнений (14.3) будет полностью совпадать с системой уравнений (13.2), описывающей колебания одномерной решетки, состоящей из двухатомных молекул.

При решении системы (14.3) будем поступать так же, как это было сделано в предыдущем параграфе, а именно предположим, что уравнения для i_{2n} и i_{2n+1} имеют решения в виде распространяющихся волн с одинаковыми частотами и волновыми числами, но различными амплитудами

$$i_{2n} = A_2 e^{i(\omega t - 2nk_1)}, \quad i_{2n+1} = A_1 e^{i[\omega t - (2n+1)k_1]}. \quad (14.4)$$

Подставляя эти выражения в (14.3), получаем систему линейных однородных уравнений относительно A_1 и A_2

$$\begin{aligned} \left(-L_1\omega^2 + \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}\right)A_1 - \left(\frac{1}{C_1}e^{ik_1} + \frac{1}{C_2}e^{-ik_1}\right)A_2 &= 0, \\ \left(-L_2\omega^2 + \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}\right)A_2 - \left(\frac{1}{C_2}e^{ik_1} + \frac{1}{C_1}e^{-ik_1}\right)A_1 &= 0. \end{aligned} \quad (14.5)$$

Условие ее разрешимости имеет вид

$$\begin{aligned} \left(-L_1\omega^2 + \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}\right)\left(-L_2\omega^2 + \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}\right) - \\ - \left(\frac{1}{C_1}e^{ik_1} + \frac{1}{C_2}e^{-ik_1}\right)\left(\frac{1}{C_2}e^{ik_1} + \frac{1}{C_1}e^{-ik_1}\right) = 0. \end{aligned} \quad (14.6)$$

Группируя члены при одинаковых степенях ω , получаем

$$\omega^4 - \omega^2\left(\frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2}\right)\left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}\right) + 4\frac{\sin^2 k_1}{L_1 L_2 C_1 C_2} = 0. \quad (14.7)$$

Это квадратное относительно ω^2 уравнение допускает действительные решения

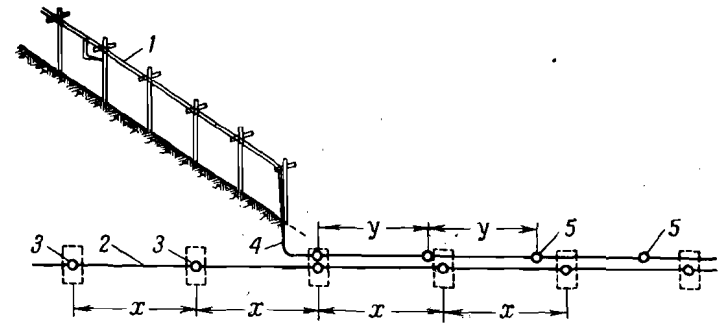
$$\begin{aligned} \omega^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2}\right)\left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}\right) \pm \\ \pm \sqrt{\frac{1}{4}\left(\frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2}\right)^2\left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}\right)^2 - \frac{4\sin^2 k_1}{L_1 L_2 C_1 C_2}}, \end{aligned} \quad (14.8)$$

которые переходят в решения (13.6), полученные для механической задачи, если положить $L_1 = M_2$, $L_2 = M_1$ и $C_1 = C_2 = 1/U_1''$. Вне зависимости от того, равны ли между собой величины емкостей C_1 и C_2 или нет, кривая зависимости частоты ω от k_1 состоит из двух ветвей; однако ход этой кривой для этих двух случаев, очевидно, различен.

Обсуждаемые нами вопросы были рассмотрены в двух работах ¹⁾, однако авторы этих работ не заметили сходства, которое имеется между электрическими и механическими системами и на которое обратил внимание Борн. Речь идет о согласовании воздушной телефонной линии 1 с подземным городским кабелем 2 (фиг. 46). Хорошее соединение в точке 4 получается при нагрузке линии одинаковыми индуктивностями 5, расположенными на равных расстояниях y друг от

¹⁾ N. R. French, U. S. patent 1741926, dec. 1929; S. P. Maed, N. R. French, U. S. patent 1769959, jul. 1930.

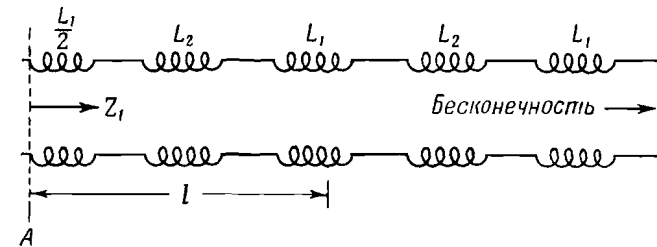
друга. Это связано с необходимостью выполнения определенных условий, обеспечивающих хорошее согласование, а именно:



Фиг. 46.

1) линия и кабель должны иметь одинаковые полосы пропускания;

2) их характеристические импедансы должны быть равны друг другу (см. гл. 5).



Фиг. 47.

Трудность, встречающаяся при выполнении этих условий, заключалась в том, что в подземном городском кабеле расстояние x между нагрузочными индуктивностями 3 было выбрано заранее. Однако ее можно обойти, располагая попеременно на равных расстояниях друг от друга два различных типа индуктивностей с коэффициентами самоиндукции, равными соответственно

$$L_1 = mL_0 \text{ и } L_2 = (1 - m)L_0,$$

Подставляя это разложение в (15.1) и ограничиваясь той же точностью, получаем

$$\begin{aligned} \sqrt{M_1^2 + M_2^2 + 2M_1M_2\left(1 - \frac{k^2}{2}\right)} &= \\ &= (M_1 + M_2) \sqrt{1 - \frac{k^2 M_1 M_2}{(M_1 + M_2)^2}} \approx \\ &\approx (M_1 + M_2) \left[1 - \frac{1}{2} \frac{k^2 M_1 M_2}{(M_1 + M_2)^2}\right]; \end{aligned} \quad (15.4)$$

тогда соотношение (15.1) принимает вид

$$\begin{aligned} \omega_-^2 &= \frac{k^2 U_1''}{2(M_1 + M_2)} \quad (\text{нижняя ветвь}), \\ \omega_+^2 &= 2U_1'' \left[\frac{1}{M_1} + \frac{1}{M_2} - \frac{k^2}{4(M_1 + M_2)} \right] \quad (\text{верхняя ветвь}), \end{aligned} \quad (15.5)$$

где индекс при ω^2 указывает на взятый перед корнем знак.

Из (15.5) видно, что вблизи начала координат ω_- является линейной функцией k , т. е. частота, соответствующая нижней ветви, ведет себя так же, как и в случае решетки из одинаковых частиц; что же касается частоты ω_+ , то в начале координат ее значение максимально и равно

$$\omega_3 = \sqrt{2U_1'' \left(\frac{1}{M_1} + \frac{1}{M_2} \right)},$$

а с ростом $|k|$ значение ω_+^2 спадает по параболическому закону.

Характер движения системы при бесконечной длине волны можно уточнить, вычислив отношение амплитуд для малых значений k_1 (или k). Подставляя полученное выше выражение для корня квадратного (15.4) в формулу (15.3), получаем следующие соотношения:

$$\begin{aligned} \left(\frac{A_1}{A_2}\right)_+ &= 1 + \frac{k^2}{8} \frac{M_1 - M_2}{M_1 + M_2} \quad (\text{нижняя ветвь}), \\ \left(\frac{A_1}{A_2}\right)_- &= -\frac{M_2}{M_1} \left(1 - \frac{k^2}{8} \frac{M_1 - M_2}{M_1 + M_2}\right) \quad (\text{верхняя ветвь}). \end{aligned} \quad (15.6)$$

Если $k = 0$, то

$$\left(\frac{A_1}{A_2}\right)_+ = 1, \quad \left(\frac{A_1}{A_2}\right)_- = -\frac{M_2}{M_1} < 0. \quad (15.7)$$

Таким образом, мы видим, что в этом случае волны, соответствующие нижней ветви кривой $\omega(k_1)$, имеют равные амплитуды и совпадают по фазе, т. е. смещения всех частиц равны по величине и совпадают по направлению. Длина каждой из волн равна бесконечности и решетка смещается как целое; восстанавливающие силы отсутствуют и частота равна нулю. Волны, соответствующие верхней ветви кривой $\omega(k_1)$, имеют сдвиг фаз, равный π , т. е. частицы с массой M_1 колеблются в противофазе с частицами, имеющими массу M_2 , причем более легкие частицы имеют большую амплитуду колебаний. При таком движении центр тяжести двух соседних частиц остается, очевидно, неподвижным, а восстанавливающие силы, действуют таким образом, что частота колебаний становится отличной от нуля. Соответствующая длина волны остается равной бесконечности, поскольку каждая волна должна рассматриваться как распространяющаяся только среди частиц одного сорта.

Рассмотрим второй предельный случай. Ограничивающие основной интервал значения k равны $\pm\pi$; они симметричны относительно начала координат. В окрестности этих значений можно положить

$$k = \pi - \varepsilon = 2k_1,$$

где ε — некоторая малая величина.

Тогда с точностью до ε^2 включительно

$$\cos k = \cos(\pi - \varepsilon) = -\cos \varepsilon \approx -1 + \frac{\varepsilon^2}{2},$$

и корень из соотношения (15.1) будет равен ($k = 2k_1$)

$$\begin{aligned} \sqrt{M_1^2 + M_2^2 + 2M_1M_2 \cos 2k_1} &\approx \\ &\approx \sqrt{M_1^2 + M_2^2 + 2M_1M_2 \left(-1 + \frac{\varepsilon^2}{2}\right)} = \\ &= (M_1 - M_2) \left[1 + \frac{1}{2} \frac{\varepsilon^2 M_1 M_2}{(M_1 - M_2)^2}\right], \end{aligned} \quad (15.8)$$

если только разность $M_1 - M_2$ не очень мала.

Подставляя это выражение в соотношение (15.1), получаем два значения частоты, соответствующие двум различным ветвям кривой $\omega(k_1)$:

$$\omega_+^2 = \frac{2U_1''}{M_2} + \frac{U_1''\varepsilon^2}{2(M_1 - M_2)} \quad (\text{верхняя ветвь}),$$

$$\omega_-^2 = \frac{2U_1''}{M_1} - \frac{U_1''\varepsilon^2}{2(M_1 - M_2)} \quad (\text{нижняя ветвь}).$$

Отсюда легко видеть, что с увеличением $|\varepsilon|$ частота, соответствующая верхней ветви кривой $\omega(k_1)$, возрастает по параболическому закону начиная от некоторого значения

$$\omega_2 = \sqrt{\frac{2U_1''}{M_2}},$$

а частота, соответствующая нижней ветви, убывает по такому же закону начиная от значения

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{2U_1''}{M_1}}.$$

Можно заметить, что поскольку $M_1 > M_2$, то $\omega_2 > \omega_1$, и область частот, заключенная между этими значениями, образует полосу непропускания.

Найдем теперь отношение амплитуд A_1/A_2 на границах основного интервала; так как $k = 2k_1$, то

$$\cos k_1 = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\varepsilon}{2}\right) \approx \frac{\varepsilon}{2},$$

и соотношение (15.3) дает

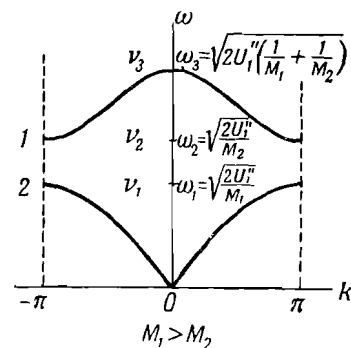
$$\left(\frac{A_1}{A_2}\right)_- = \frac{M_1 - M_2 - (M_1 - M_2) \left[1 + \varepsilon^2 \frac{M_1 M_2}{2(M_1 - M_2)^2}\right]}{\varepsilon M_1} = \frac{-\varepsilon M_1 M_2}{2M_1(M_1 - M_2)}, \quad (15.9a)$$

$$\left(\frac{A_1}{A_2}\right)_+ = \frac{M_1 - M_2 + (M_1 - M_2) \left[1 + \varepsilon^2 \frac{M_1 M_2}{2(M_1 - M_2)^2}\right]}{\varepsilon M_1} = \frac{2(M_1 - M_2) + \frac{\varepsilon^2 M_1 M_2}{2(M_1 - M_2)}}{\varepsilon M_1}. \quad (15.9b)$$

При $\varepsilon \rightarrow 0$ отношение $(A_1/A_2)_-$ также стремится к нулю, тогда как $(A_1/A_2)_+$ стремится к бесконечности. Интерпретация этих результатов очевидна.

Как уже было отмечено, для верхней ветви $[(A_1/A_2)_-, \omega_+]$ при малых значениях k отношение амплитуд отлично от нуля и отрицательно: из соотношения (15.9a) следует, что оно остается также отрицательным и вблизи границ основного интервала $|k| \leq \pi$, а на самих границах обращается в нуль.

Итак, при бесконечной длине волны частицы, принадлежащие к двум различным семействам, колеблются в противофазе, причем более легкие частицы имеют большую амплитуду колебаний. При уменьшении длины волны характер движения в общих чертах остается таким же, однако амплитуда колебаний более тяжелых частиц уменьшается и при значении длины волны, равном предельному значению, обращается в нуль, тогда как амплитуда колебаний более легких частиц остается конечной.



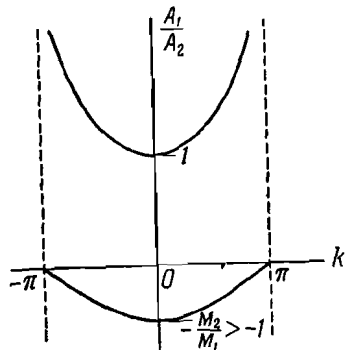
Фиг. 49. 1 — верхняя ветвь; 2 — нижняя ветвь.

Для нижней же ветви $[(A_1/A_2)_+, \omega_-]$ все частицы при бесконечной длине волны, как мы видели, движутся синфазно с равными амплитудами. С уменьшением длины волны колебания частиц, принадлежащих к различным семействам, продолжают оставаться синфазными, но амплитуда колебаний легких частиц уменьшается и при длине волны, равной предельному значению, обращается в нуль, в то время как амплитуда колебаний тяжелых частиц остается конечной.

Эти результаты иллюстрируют фиг. 49, 50 и 51.

На фиг. 49 приведена кривая зависимости круговой частоты ω от k в предположении, что $M_1 > M_2$; две кривые на фиг. 50, соответствующие двум ветвям кривой $\omega = \omega(k)$, представляют зависимость отношения амплитуд A_1/A_2 от k ; наконец, фиг. 51 иллюстрирует характер движения частиц в различных рассмотренных здесь случаях.

Стрелками на фиг. 51 изображены амплитуды колебаний двух сортов частиц. Ясно видно, что характер движения, соответствующего частотам ω_1 и ω_2 , совпадает с тем лишь отличием, что для частоты ω_2 частицы M_1 находятся в состоянии покоя, а частицы M_2 колеблются (причем любые две соседние из них всегда находятся в противофазе), в то время как для частоты ω_1 , наоборот, частицы M_2 находятся в состоянии покоя, тогда как частицы M_1 колеблются. Силы, действующие между частицами и в том и в другом случае,



Фиг. 50.

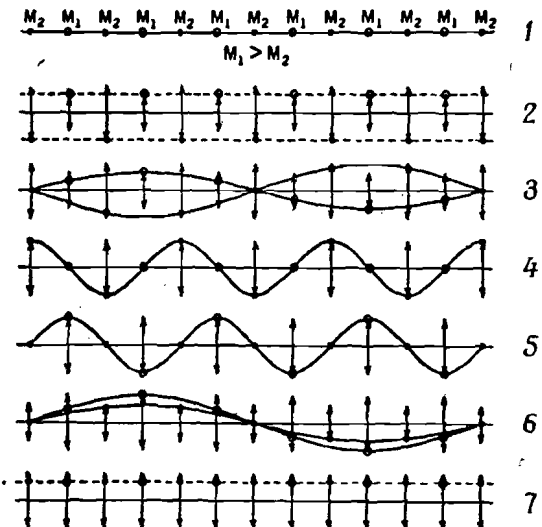
одинаковы, так как относительное смещение частиц в обоих случаях одно и то же. Отсюда следует, что отношение частот ω_1 и ω_2 должно быть равно корню квадратному из величины, обратной отношению масс M_1 и M_2 ,

$$\frac{\nu_1}{\nu_2} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \sqrt{\frac{M_2}{M_1}},$$

что, кстати говоря, следует также из полученных ранее выражений для этих частот.

Нижняя ветвь обычно называется *акустической ветвью*; это связано с тем, что соответствующие ей частоты имеют такой же порядок величины, как звуковые или ультразвуковые частоты. Верхняя ветвь носит название *оптической ветви*, так как соответствующие ей частоты совпадают по порядку величины с частотами, лежащими в инфракрасной области. Более того, оказывается, что в решетке, состоящей из перемежающихся ионов противоположных знаков, например в решетке хлористого натрия (Na^+ и Cl^-), при помощи переменного электрического поля нельзя возбудить волны, соответствующие акустической ветви, для которых соседние частицы колеблются в одной и той же фазе; в такой решетке возбуждаются только волны, соответствующие оптической ветви, для которых соседние частицы колеблются в противофазе. В частности, с возбуждением оптических волн связано явление остаточного свечения, наблюдающееся в хлористом натрии; частота его близка к $\nu_3 = \omega_3/2\pi$, так как именно частота ω_3

соответствует движению частиц, способному изменить электрический момент решетки; это хорошо видно из кривых, изображенных на фиг. 51.



Фиг. 51. 1 — равновесное положение; 2 — оптическая ветвь ($k=0$; $\nu_1 = \nu_3$); 3 — то же, что и 2 (k возрастает, ν убывает, $\nu_2 < \nu < \nu_3$); 4 — то же, что и 2 ($k = \pi$, $\nu = \nu_2 < \nu_3$); 5 — акустическая ветвь ($k = \pi$, $\nu = \nu_1 < \nu_2$); 6 — то же, что и 5 (k убывает, ν убывает, $0 < \nu < \nu_1$); 7 — то же, что и 5 ($k=0$, $\nu=0$).

Обсудив характер движения для частот, лежащих внутри полос пропускания, рассмотрим теперь область, соответствующую частотам, значения которых либо заключены между ω_1 и ω_2 , либо превышают ω_3 .

Возвращаясь к уравнению (13.5), представим его в виде

$$\omega^2 \left[\frac{M_1 + M_2}{2U_1''} - \omega^2 \frac{M_1 M_2}{4U_1''^2} \right] = \sin^2 \frac{k}{2}, \quad (15.10)$$

где $k = 2k_1$. Отсюда легко видеть, что с ростом частоты ω от нуля до значения $\omega_1 = 2\pi\nu_1 = \sqrt{2U_1''/M_1}$ левая часть этого

равенства увеличивается от нуля до единицы, а k при этом действительно. При дальнейшем росте частоты выражение, стоящее в левой части (15.10), оставаясь действительным, становится больше единицы и, пройдя через максимум при некотором значении ω ($\omega_1 < \omega < \omega_2$), начинает уменьшаться, а при значении $\omega = \omega_2$ снова становится равным единице; k при этом комплексно. Полагая

$$k = \alpha + i\beta, \quad (15.11)$$

имеем

$$\sin \frac{k}{2} = \sin \frac{\alpha}{2} \operatorname{ch} \frac{\beta}{2} + i \cos \frac{\alpha}{2} \operatorname{ch} \frac{\beta}{2} \quad (15.12)$$

или, так как это выражение должно быть действительным,

$$\cos \frac{\alpha}{2} \operatorname{sh} \frac{\beta}{2} = 0, \quad \text{откуда} \quad \frac{\alpha}{2} = \frac{\pi}{2}. \quad (15.13)$$

Таким образом, в области частот $\omega_1 < \omega < \omega_2$ действительная часть $k = 2\pi a d$ равна π , и, следовательно, действительная часть a равна $1/2d$.

Когда значение частоты лежит между ω_2 и ω_3 , выражение, стоящее в левой части равенства (15.10), положительно и меньше единицы, что соответствует полосе пропускания. При переходе частоты через значение ω_3 это выражение обращается в нуль и меняет знак, становясь отрицательным. Отсюда следует, что для частот $\omega > \omega_3$, т. е. для частот, соответствующих верхней полосе непропускания, квадрат выражения (15.12) должен быть действительным, но меньше нуля, иначе говоря, выражение (15.12) должно быть чисто мнимым, т. е.

$$\sin \frac{\alpha}{2} \operatorname{ch} \frac{\beta}{2} = 0, \quad \text{откуда} \quad \frac{\alpha}{2} = 0.$$

Таким образом, при $\omega > \omega_3$ получаем

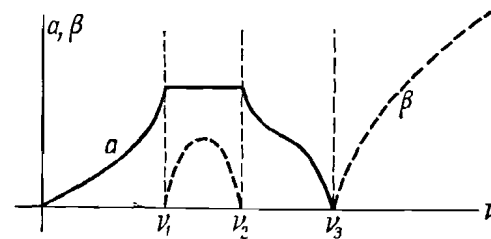
$$k = 2\pi a d = i\beta,$$

и действительная часть a равна нулю.

Поскольку в каждой из полос непропускания действительная часть k постоянна и меняется только его мнимая часть, то для соответствующих этим полосам частот должно иметь место затухание волн.

Уточним характер этого затухания.

Для первой полосы непропускания (ω_1, ω_2) известно, что при частоте ω_1 легкие частицы находятся в состоянии покоя, а колеблются только тяжелые частицы; наоборот, при частоте ω_2 тяжелые частицы неподвижны, тогда как легкие колеблются. Амплитуда этих колебаний затухает при переходе от частицы к частице. При увеличении частоты, начиная от значения $\omega = \omega_1$, движение носит сначала характер, соответствующий акустической ветви, а постоянная затухания возрастает; при некотором значении частоты, лежащем внутри



Фиг. 52.

полосы непропускания, постоянная затухания достигает своего максимального значения и затем начинает убывать, стремясь к нулю по мере приближения ω к ω_2 , а движение принимает характер, соответствующий оптической ветви.

Для частот, лежащих во второй полосе непропускания ($\omega > \omega_3$), длина волны равна бесконечности, и любые две соседние частицы колеблются в противофазе; для всей области частот движение носит одинаковый характер, а постоянная затухания является возрастающей функцией частоты.

На фиг. 52 приведены кривые зависимости действительной части волнового числа a и постоянной затухания от частоты $\nu = \omega/2\pi$.

§ 16. Переход от решетки, состоящей из двухатомных молекул, к решетке из одноатомных молекул

Решетка из двухатомных молекул весьма схожа с решеткой из одноатомных молекул, свойства которой были рассмотрены в гл. 3; действительно, в обоих случаях мы предполагали, что частицы расположены на равных расстояниях друг от друга и ограничивались взаимодействием только между

смежными частицами. Единственное различие заключается в том, что в одном случае мы имеем два различных сорта частиц M_1 и M_2 , тогда как в другом случае только один.

Предельный переход от решетки из двухатомных молекул к решетке из одноатомных молекул можно совершить тремя различными способами, а именно предполагая, что: 1) масса M_2 стремится к нулю; 2) масса M_1 стремится к бесконечности; 3) масса M_1 стремится к массе M_2 .

В первых двух случаях период оказывается таким же, как и у решетки из одноатомных молекул (равным d), в третьем случае период d_1 оказывается вдвое меньше, т. е. $d_1 = d/2$. Мы сейчас рассмотрим все три случая.

1. M_2 стремится к нулю. При этом граничная частота

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{2U_1''}{M_1}}$$

остается неизменной, тогда как частоты

$$\omega_2 = \sqrt{\frac{2U_1''}{M_2}} \quad \text{и} \quad \omega_3 = \sqrt{2U_1'' \left(\frac{1}{M_1} + \frac{1}{M_2} \right)} = \sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2}$$

стремятся к бесконечности, так что ширина полосы пропускания (ω_2 , ω_3) стремится к нулю. Действительно, разность

$$\omega_3 - \omega_2 = \sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2} - \omega_2 = \omega_2 \left[\sqrt{1 + \left(\frac{\omega_1}{\omega_2} \right)^2} - 1 \right] \quad (16.1)$$

при достаточно малых значениях M_2 становится порядка

$$\omega_2 \frac{1}{2} \left(\frac{\omega_1}{\omega_2} \right)^2 = \frac{1}{2} \frac{\omega_1^2}{\omega_2}.$$

Поскольку же при $M_2 \rightarrow 0$ значение ω_1 остается конечным, а ω_2 стремится к бесконечности, то разность $\omega_3 - \omega_2$ также стремится к нулю.

Итак, по мере убывания массы M_2 полоса пропускания (ω_2 , ω_3) сужается, сдвигаясь в сторону высоких частот, и в пределе исчезает совсем. Полоса пропускания нижних частот не меняется. Таким образом, мы получаем решетку из одинаковых частиц, имеющую период d и представляющую собой фильтр нижних частот.

2. M_1 стремится к бесконечности. В этом случае частота $\omega_1 \rightarrow 0$, тогда как частота ω_2 остается неизменной, а $\omega_3 \rightarrow \omega_2$. Таким образом, в пределе мы получаем только одно значение частоты, равное

$$\omega_2 = \omega_3 = \sqrt{\frac{2U_1''}{M_2}},$$

и движение не имеет волнового характера. Действительно, каждая из частиц M_2 колеблется с частотой ω_2 независимо от других частиц, т. е. решетка сводится к цепочке гармонических осцилляторов, совершенно не связанных друг с другом. Частицы M_1 приводят к появлению упругих сил, действующих на частицы M_2 , но не принимают участия в движении; амплитуда колебаний, следовательно, не должна превышать значения, равного $d_1 = d/2$, поскольку мы считаем, что частицы M_2 должны всегда оставаться заключенными между двумя соседними частицами M_1 .

Если не ограничиваться взаимодействием только между смежными частицами, а распространить взаимодействие на расстояние между частицами, равное d , то в этом предельном случае мы получим цепочку связанных гармонических осцилляторов, которая будет представлять собой полосовой фильтр. При этом смогут распространяться сигналы с частотой, равной собственной частоте изолированного осциллятора (которая лежит в полосе пропускания), нижней же полосы пропускания, которая имела в случае решетки из двухатомных молекул, теперь не будет.

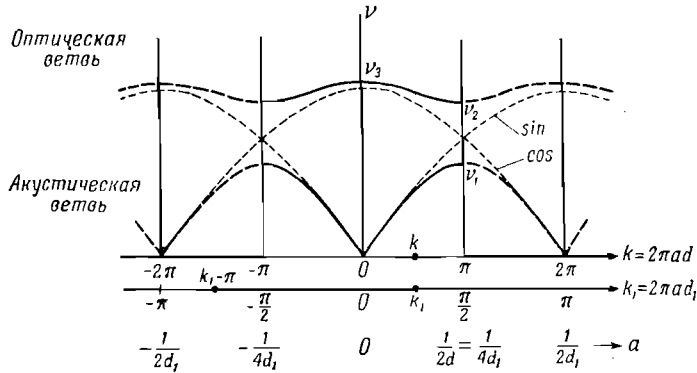
3. M_1 стремится к M_2 . В этом случае предельный переход от решетки из двухатомных молекул к решетке из одноатомных молекул несколько более сложен, так как здесь происходит изменение периода структуры: исходная решетка с $M_1 > M_2$ имеет период d , тогда как период решетки, получаемой в результате предельного перехода ($M_1 \rightarrow M_2$), вдвое меньше, т. е. $d_1 = d/2$.

Возвращаясь к результатам, полученным при изучении соотношения, связывающего для решетки из двухатомных молекул частоту с волновым числом a , заметим, что две кривые, изображенные на фиг 49, представляют собой различные ветви периодической функции $\nu(a)$, построенной на

основном интервале $-\pi < k < \pi$ ($k = 2\pi ad$). На фиг. 53 приведен график этой периодической функции, построенной на интервале $-2\pi < k < 2\pi$; части кривой, лежащие вне интервала $(-\pi, +\pi)$, изображены штрихами.

При предельном переходе, т. е. когда $M_1 \rightarrow M_2$, необходимо учитывать:

а) Изменение периода функции $\nu(a)$, вызванное скачкообразным увеличением основного интервала. Действительно,



Фиг. 53.

период решетки из двухатомных молекул равен d и, следовательно, период $\nu(a)$ равен $1/d$, а основной интервал ограничен значениями $-1/2d$ и $+1/2d$. Когда же период решетки уменьшается, становясь равным $d_1 = d/2$, то период функции $\nu(a)$ принимает значение $1/d_1 = 2/d$ и основной интервал сводится к $(-1/2d_1, +1/2d_1)$ или $(-1/d, +1/d)$.

В табл. 2, где, как обычно,

$$k = 2\pi ad, \quad k_1 = 2\pi ad_1 = \frac{k}{2}, \quad (16.2)$$

приведены изменения, которые имеют место при переходе от решетки из двухатомных молекул к решетке из одноатомных молекул.

б) Изменение кривой, представляющей зависимость частоты ν от волнового числа a . Функция $\nu(a)$, которая в случае решетки из двухатомных молекул имеет две различные ветви, в результате предельного перехода должна свестись к функции,

состоящей из одной ветви, подобно тому, как это изображено на фиг. 5.

Таблица 2

	Период			Основной интервал		
	решетки	частоты $\nu(a)$	частоты $\omega(k)$	частоты $\omega(k_1)$	для k	для k_1
$M_1 > M_2$	d	$\frac{1}{d}$	2π	π	$\pm \pi$	$\pm \frac{\pi}{2}$
$M_1 = M_2$	$d_1 = \frac{d}{2}$	$\frac{1}{d_1} = \frac{2}{d}$	4π	2π	$\pm 2\pi$	$\pm \pi$

Выражение для этой функции можно найти, полагая, что массы M_1 и M_2 одновременно стремятся к значению

$$M = 2 \sqrt{\frac{M_1 M_2}{M_1 + M_2}},$$

и исходя из соотношения, полученного для решетки из двухатомных молекул.

Действительно, полагая в соотношении (13.6) $M_1 = M_2 = M$, находим

$$\frac{M\omega^2}{2U_1''} = 1 \pm \sqrt{1 - \sin^2 k_1} = 1 \pm \cos k_1 = \begin{cases} 2 \sin^2 \frac{k_1}{2}, \\ 2 \cos^2 \frac{k_1}{2}. \end{cases} \quad (16.3)$$

Выбирая решение в виде синуса, получаем соотношение

$$\omega = 2 \sqrt{\frac{U_1''}{M}} \left| \sin \frac{k_1}{2} \right|, \quad (16.4)$$

полностью совпадающее с выражением (9.1), относящимся к рассмотренной в § 2 структуре из одинаковых частиц (см. фиг. 5). Кривая зависимости частоты от k_1 (или k , или a) изображена на фиг. 53 (sin); в пределах основного интервала эта кривая совпадает с кривой, представленной на фиг. 5.

Решение в виде косинуса, являющееся, впрочем, паразитным решением, соответствующим двойной периодичности,

также изображено на фиг. 53 (cos); центральная часть этой кривой соответствует верхней ветви функции $\nu(a)$, полученной для решетки из двухатомных молекул. Кривые для этих двух решений пересекаются в точке с ординатой, соответствующей величине $\sqrt{2U_1''/M}$, которая является общим пределом для частот ω_1 и ω_2 , когда массы M_1 и M_2 одновременно стремятся к значению M . Видно, что полоса непропускания исчезает.

Другой путь перехода от решетки из двухатомных молекул к решетке из одноатомных молекул состоит в несколько ином определении распространяющихся волн и другом подходе к описанию движения частиц решетки.

Рассмотрим снова соотношения (13.3)

$$y_{2n} = A_2 e^{i(\omega t - 2nk_1)},$$

$$y_{2n+1} = A_1 e^{i[\omega t - (2n+1)k_1]}.$$

Выше мы считали, что эти решения соответствуют двум распространяющимся в системе волнам, одна из которых связана с частицами с массой M_2 , а другая — с частицами с массой M_1 . При этом мы предполагали, что переменная $k_1 = \pi a d$ заключена внутри основного интервала $(-\pi/2, +\pi/2)$. Поступим теперь иначе и будем считать, что решения (13.3) определяют волну, распространяющуюся вдоль всех частиц решетки. Как мы убедимся ниже, в этом случае область изменения переменной k_1 будет шире — она охватит интервал $(-\pi; +\pi)$. Введем две новые величины C и D , определяемые соотношениями

$$A_1 = C - D = C + D e^{i(2n+1)\pi},$$

$$A_2 = C + D = C + D e^{i2n\pi};$$
(16.5)

тогда

$$\frac{D}{C} = \frac{A_2 - A_1}{A_2 + A_1},$$

а соотношения (13.3) в этих обозначениях принимают вид

$$y_{2n} = C e^{i(\omega t - 2nk_1)} + D e^{i[\omega t - 2n(k_1 - \pi)]},$$

$$y_{2n+1} = C e^{i[\omega t - (2n+1)k_1]} + D e^{i[\omega t - (2n+1)(k_1 - \pi)]}$$

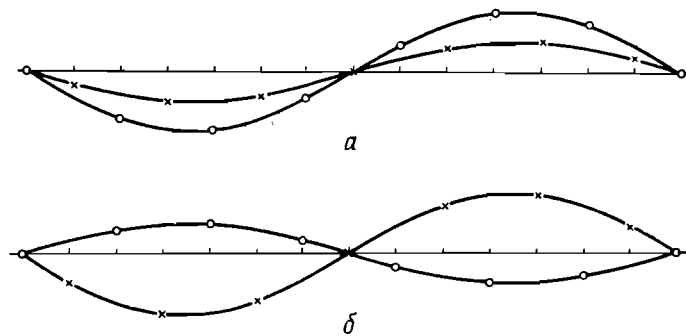
или

$$y_m = C e^{i(\omega t - mk_1)} + D e^{i[\omega t - m(k_1 - \pi)]}. \quad (16.6)$$

Очевидно, что выражение (16.6) соответствует волне, распространяющейся вдоль всех частиц (т. е. как частиц с массой M_1 , так и частиц с массой M_2).

Два различных способа описания распространяющихся волн, которые мы только что рассмотрели, иллюстрируются фиг. 54 и 55.

На фиг. 54 изображены две волны (13.3), каждая из которых относится к одному из двух сортов частиц; случай *a* соответствует акустической ветви, а случай *b* — оптической.

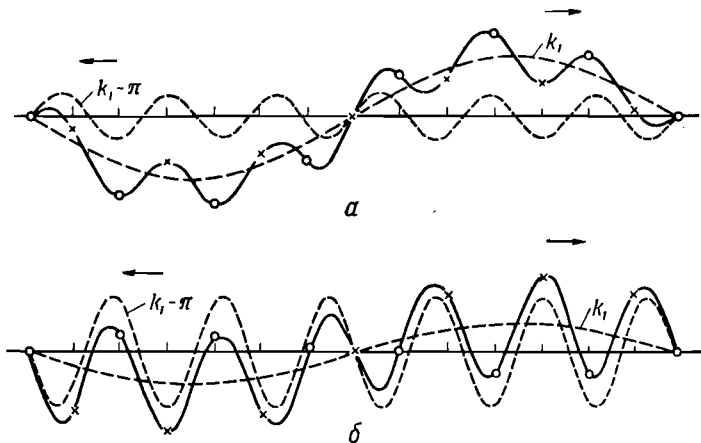


Фиг. 54. *a* — акустическая ветвь; *b* — оптическая ветвь.

На фиг. 55 изображены волны, входящие в выражение (16.6) и соответствующие величинам k_1 и $k - \pi$, и их сумма, как в случае акустической ветви (*a*), так и в случае оптической (*b*). Заметим, что два члена, фигурирующие в (16.6), соответствуют волнам, распространяющимся в противоположных направлениях. Это дает основание думать, что направо распространяется волна, соответствующая волне, отраженной от частиц, и, таким образом, возмущение представляет собой суперпозицию двух волн: проходящей и отраженной.

Чтобы яснее представить себе, как совершается переход от решетки из двухатомных молекул к решетке из одноатомных молекул, обратимся к табл. 2, в которой для этих двух случаев указан основной интервал изменения переменной k_1 . Вначале переменная k_1 заключена в интервале $(-\pi/2, +\pi/2)$. Это означает, что величина $(k_1 - \pi)$ должна изменяться от $-\pi$ до $-\pi/2$ при положительных значениях k_1 и от $\pi/2$ до π при отрицательных значениях k_1 ,

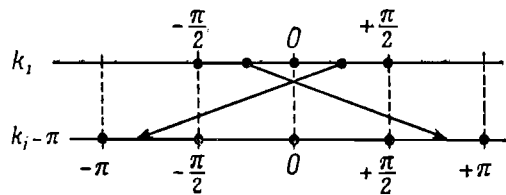
поскольку замена k_1 на $k_1 + 2\pi$ не приводит к изменению решения. Следовательно, основной интервал может рассматриваться уже как простирающийся (в соответствии



Фиг. 55. *a* — акустическая ветвь; *b* — оптическая ветвь.

Стрелками указано направление распространения волны.

с табл. 2) от $-\pi$ до $+\pi$; интервал $(-\pi/2, +\pi/2)$ соответствует волне с амплитудой C , а два других $(-\pi, -\pi/2)$ и $(+\pi/2, +\pi)$ — волне с амплитудой D . Этот переход изображен на фиг. 56.



Фиг. 56.

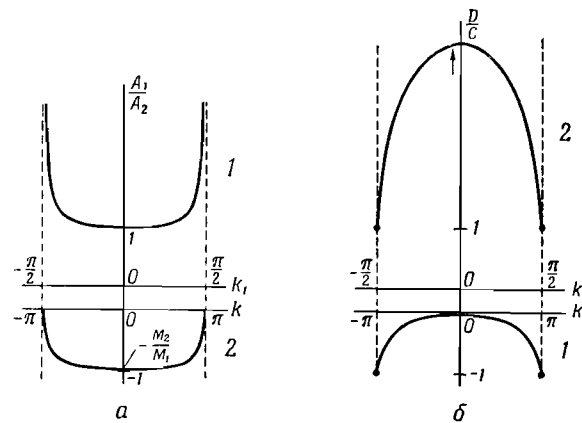
Это позволяет объяснить соответствие между различными ветвями кривой на фиг. 53.

Выше мы исследовали поведение отношения A_1/A_2 для различных типов волн [см. выражение (15.3) и фиг. 50]; полученные нами кривые изображены на фиг. 57, *a* в пред-

положении, что массы частиц, принадлежащих к двум различным семействам, очень близки друг к другу, т. е.

$$M_2 = M_1(1 - \epsilon),$$

где ϵ — положительная величина, много меньшая единицы.



Фиг. 57. 1 — акустическая ветвь; 2 — оптическая ветвь.

$$M_1 \quad M_2(1 + \epsilon).$$

При этом условии выражение (15.3) можно записать в виде

$$\begin{aligned} \frac{A_1}{A_2} &= \frac{1 - \frac{M_2}{M_1} \mp \sqrt{1 + \left(\frac{M_2}{M_1}\right)^2 + 2 \frac{M_2}{M_1} \cos 2k_1}}{2 \cos k_1} = \\ &= \frac{\epsilon \mp \sqrt{2 + 2(1 - \epsilon) \cos 2k_1 - 2\epsilon + \epsilon^2}}{2 \cos k_1} \quad (16.7) \end{aligned}$$

или, так как $2 \cos^2 k_1 = 1 + \cos 2k_1$,

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{\frac{\epsilon}{2} \mp \sqrt{(1 - \epsilon) \cos^2 k_1 + \left(\frac{\epsilon}{2}\right)^2}}{\cos k_1} \quad \text{при} \quad -\frac{\pi}{2} \leq k \leq \frac{\pi}{2}, \quad (16.8)$$

что приводит к выражению

$$\frac{\varepsilon}{2 \cos k_1} \mp \left(1 - \frac{\varepsilon}{2}\right),$$

если $|\cos k_1|$ превышает по порядку величины ε .

Знак *плюс* в этом выражении соответствует акустической ветви, знак *минус* — оптической. Кривые зависимости отношения A_1/A_2 от k_1 для двух ветвей стремятся к прямым $A_1/A_2 = \pm 1$ во всей области изменения переменной, за исключением непосредственной окрестности границ интервала.

Подобное же рассмотрение можно провести и для отношения коэффициентов D/C из соотношения (16.6).

Предполагая, что величина k_1 такова, что всегда выполняется соотношение $\cos k_1 \gg \varepsilon$, получаем для акустической ветви

$$\frac{D}{C} = \frac{1 - \frac{A_1}{A_2}}{1 + \frac{A_1}{A_2}} = \frac{-\frac{\varepsilon}{2 \cos k_1} + \frac{\varepsilon}{2}}{2 + \frac{\varepsilon}{2 \cos k_1} - \frac{\varepsilon}{2}} \approx \frac{\varepsilon}{4} \left(1 - \frac{1}{\cos k_1}\right). \quad (16.9)$$

Отсюда видно, что величина C много больше D , так что преобладает волна с амплитудой C .

Для оптической ветви

$$\frac{D}{C} = \frac{2 - \frac{\varepsilon}{2 \cos k_1} - \frac{\varepsilon}{2}}{\frac{\varepsilon}{2 \cos k_1} + \frac{\varepsilon}{2}} \approx \frac{4}{\varepsilon \left(1 + \frac{1}{\cos k_1}\right)} \quad (16.10)$$

и величина C , наоборот, много меньше D , так что преобладает волна с амплитудой D .

Таким образом, мы видели, что при предельном переходе ($M_1 \rightarrow M_2$) движение описывается более просто, если рассматривать волны типа (16.6) с амплитудами C и D вместо волн с амплитудами A_1 и A_2 .

Будем считать, как показано на фиг. 56, что k_1 меняется от $-\pi$ до $+\pi$. Тогда *акустической ветви*, для которой амплитуда D стремится к нулю, а C остается конечной,

соответствует часть кривой, заключенной в интервале

$$-\frac{\pi}{2} < k_1 < +\frac{\pi}{2}, \quad (16.11)$$

тогда как *оптической ветви*, для которой преобладает волна с амплитудой D , соответствуют части этой же кривой, заключенные в интервалах

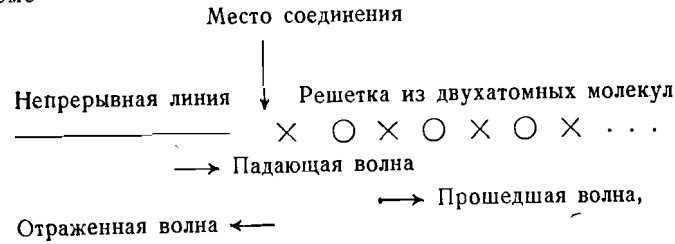
$$\begin{aligned} -\pi < k_1 < -\frac{\pi}{2}, \\ +\frac{\pi}{2} < k_1 < +\pi. \end{aligned} \quad (16.12)$$

Таким образом, в пределе существует только одна волна (либо типа C , либо типа D) и имеется единственная ветвь (акустическая или оптическая), за исключением, может быть, непосредственной окрестности точек ветвления $k_1 = \pm \pi/2$, в которых разделяются кривые, когда M_1 начинает превышать M_2 , и которые определяют положение полосы непропускания.

Только что рассмотренный пример является очень важным, поскольку он является первым из круга весьма часто встречающихся задач. Он позволяет детально проследить переход от невозмущенной системы, состоящей из одинаковых частиц ($M_1 = M_2 = M$), к возмущенной системе, состоящей из разных частиц ($M_1 \neq M_2$). Однако для изучения более сложных задач применяется другой метод, согласно которому, прежде чем исследовать возмущения вблизи точек ветвления, исходят из невозмущенных плоских волн типа C или D и образуют их линейную комбинацию [как в уравнении (16.6)]. Такой метод применяется при изучении распространения электромагнитных волн в кристаллах (рентгеновские лучи), а также в задачах о распространении электронных волн де-Бройля, когда периодическое распределение атомов в кристаллической решетке можно рассматривать как малое возмущение.

В заключение сделаем еще одно замечание, которое укажет на связь, существующую между полосами пропускания, полосами непропускания и отражением волн. Если непрерывная линия, способная пропускать все частоты, соединена

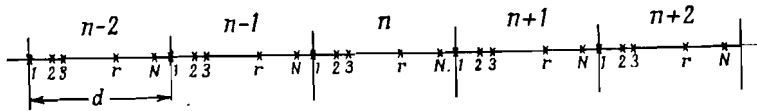
с решеткой из двухатомных молекул, как это показано на схеме



то коэффициент отражения от места соединения зависит от частоты падающей волны. Если частота попадает в полосу непропускания, то будет наблюдаться полное отражение, т. е. коэффициент отражения R будет равен единице. Если же частота лежит в полосе пропускания, то, помимо отраженной волны, будет наблюдаться также прошедшая волна. В этом случае коэффициент отражения $R < 1$, а его численное значение определяется параметрами системы.

§ 17. Одномерная решетка из многоатомных молекул

При изучении структур подобного типа мы будем пользоваться другой нумерацией частиц. Разобьем решетку на элементарные ячейки, каждая из которых состоит из частиц,



Фиг. 58.

образующих отдельную молекулу. Эта элементарная ячейка представляет собой в то же время элемент периодичности системы (наименьший, поскольку в общем случае сами молекулы не обладают периодической структурой). Если молекула состоит из N атомов, то каждому из них мы будем приписывать определенный номер от 1 до N ; число же n будет обозначать номер ячейки, нумерацию будем проводить слева направо. Эта нумерация изображена на фиг. 58, где крестики обозначают положения равновесия атомов, а вер-

тикальные черточки — первые атомы каждой молекулы, которые определяют границы ячеек; длина каждой ячейки (т. е. элемента периодичности) обозначена через d .

Предположим опять, что смещения частиц в процессе движения остаются малыми и что силы взаимодействия между частицами носят упругий характер.

Сила, действующая на r -й атом n -й ячейки со стороны s -го атома $(n+p)$ -й ячейки, определяется выражением

$$f_{n,r;n+p,s} = C_{prs} (y_{n+p,s} - y_{n,r}), \quad (17.1)$$

где через $y_{n+p,s}$ и $y_{n,r}$ обозначены соответственно смещения рассматриваемых частиц от положения равновесия, а через C_{prs} — не зависящая от n константа взаимодействия.

Отсюда следует, что сила, действующая на s -ю частицу $(n+p)$ -й ячейки со стороны r -й частицы n -й ячейки, равна

$$f_{n+p,s;n,r} = C_{-psr} (y_{n,r} - y_{n+p,s}). \quad (17.2)$$

Однако поскольку действие равно противодействию, то

$$f_{n,r;n+p,s} = -f_{n+p,s;n,r}. \quad (17.3)$$

Подставляя теперь в это равенство выражения для сил из (17.1) и (17.2), непосредственно убеждаемся, что

$$C_{prs} = C_{-psr}. \quad (17.4)$$

Поскольку член

$$C_{orr} (y_{nr} - y_{nr})$$

равен нулю и не должен учитываться при расчетах, то мы положим

$$C_{orr} = 0. \quad (17.5)$$

При этом *полная сила*, действующая на r -ю частицу n -й ячейки со стороны всех остальных частиц, будет иметь вид

$$f_{n,r} = \sum_p \sum_s f_{n,r;n+p,s} = \sum_p \sum_s C_{prs} (y_{n+p,s} - y_{n,r}). \quad (17.6)$$

Решение, как и прежде, будем искать в виде распространяющейся волны

$$y_{n,r} = A_r e^{2\pi i (vt - ax)}, \quad (17.7)$$

где A_r — комплексная амплитуда, учитывающая фазу r -й частицы; за начало отсчета этой фазы принимается фаза первой

частицы той же элементарной ячейки; $x = nd$ — расстояние от начала решетки до начала данной ячейки.

Полагая

$$\omega = 2\pi\nu, \quad k = 2\pi ad,$$

выражение (17.7) можно записать в виде

$$y_{n,r} = A_r e^{i(\omega t - kn)}. \quad (17.8)$$

Отсюда видно, что, как и в § 4, функция $y_{n,r}$ периодична с периодом $1/d$ относительно волнового числа a и с периодом 2π относительно k . Заметим, что решение $y_{n,r}$ не меняется при замене k на $k + 2\pi p$ (где p — целое).

Подставляя теперь выражение (17.6) для полной силы, действующей на r -ю частицу n -й ячейки со стороны остальных частиц, в уравнения движения и учитывая (17.8), получаем

$$\begin{aligned} M_r \frac{d^2}{dt^2} y_{n,r} &= -\omega^2 M_r A_r e^{i(\omega t - kn)} = f_{nr} = \\ &= e^{i(\omega t - kn)} \sum_p \sum_s C_{prs} (A_s e^{-ikp} - A_r), \end{aligned} \quad (17.9)$$

где M_r — масса r -й частицы.

Таким образом, получаем, что для того, чтобы решение имело вид (17.8), необходимо выполнение соотношений

$$\sum_s D_{rs}(k) A_s = -\omega^2 M_r A_r, \quad (17.10)$$

где

$$\begin{aligned} D_{rs}(k) &= \sum_p C_{prs} e^{-ikp} \quad (r \neq s), \\ D_{rr}(k) &= -\sum_p \sum_s C_{prs} + \sum_p C_{prr} e^{-ikp} \quad (r = s). \end{aligned} \quad (17.11)$$

Выражение (17.10), где r меняется от 1 до N , представляет собой систему линейных однородных уравнений относительно неизвестных A_r

$$\sum_s [D_{rs}(k) + \omega^2 M_r \delta_{rs}] A_s = 0, \quad (17.12)$$

где δ_{rs} — символы Кронекера:

$$\delta_{rs} = \begin{cases} 0 & \text{при } r \neq s, \\ 1 & \text{при } r = s. \end{cases}$$

Чтобы эта система допускала нетривиальное решение, необходимо равенство нулю ее детерминанта, иначе говоря,

$$|D_{rs}(k) + \omega^2 M_r \delta_{rs}| = 0. \quad (17.13)$$

Таким образом, мы получим уравнение N -й степени относительно ω^2 , так что каждому заданному значению k соответствует N , вообще говоря, различных значений квадрата частоты ω^2 . Кривая зависимости ω от k (или зависимости ν от a) состоит из N ветвей. Одна из них, как мы увидим, выходит из начала координат ($k = 0$) и соответствует акустическим колебаниям; остальные же ($N - 1$) ветвей соответствуют оптическим колебаниям.

Заметим, что поскольку коэффициенты $D_{rs}(k)$ являются периодическими функциями k , то и квадрат частоты ω^2 также будет периодической функцией переменной k .

Покажем теперь, что среди N ветвей кривой $\omega = \omega(k)$ имеется одна акустическая ветвь. Для акустической волны при $k = 0$ должно иметь место равенство

$$A_r = A_s.$$

Отсюда

$$\begin{aligned} -\omega^2 M_r &= \sum_s D_{rs}(0) = \sum_{s \neq r} D_{rs}(0) + D_{rr}(0) = \\ &= \sum_{s \neq r} \sum_p C_{prs} - \sum_p \sum_s C_{prs} + \sum_p C_{prr} = \\ &= \sum_{s \neq r} \sum_p C_{prs} - \sum_p \sum_{s \neq r} C_{prs} = 0, \end{aligned}$$

и, таким образом,

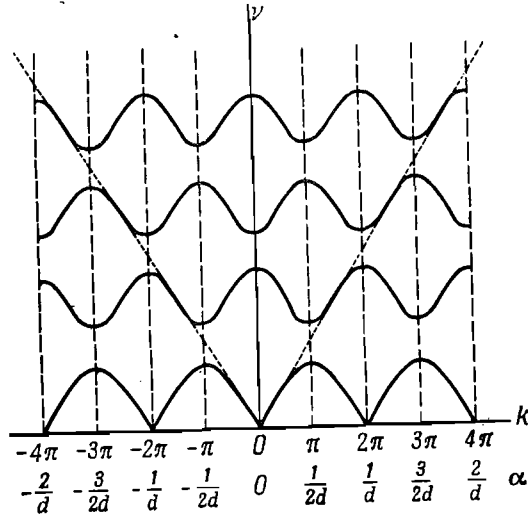
$$\omega = 0,$$

поскольку величина M_r отлична от нуля.

Итак, мы получили ветвь функции $\omega(k)$, выходящую из начала координат, т. е. акустическую ветвь.

При безграничном увеличении числа частиц, образующих элементарную ячейку, число оптических ветвей также стремится к бесконечности, так как оно равно числу степеней свободы ячейки. При этом решетка переходит в непрерывную струну с периодической структурой. Этот вопрос будет рассмотрен в одной из следующих глав. Если же непрерывная струна имеет однородную структуру, то частота ν будет

линейной функцией k . На фиг. 59 представлен общий вид кривых для функций $v(k)$ в случае непрерывной струны с периодической структурой; две наклонные пунктирные полупрямые отражают поведение этой же функции в случае однородной струны.



Фиг. 59.

Переход от однородной непрерывной струны к непрерывной струне с периодической структурой (например, к нагруженной струне) приводит к одной из тех задач о периодических возмущениях, на которые было указано в § 16. Использованный здесь метод может служить образцом для решения подобного рода задач. Переход от V-образной кривой (изображенной на фиг. 59 пунктиром) к различным ветвям кривой $v = v(a)$ можно провести с помощью метода, аналогичного методу, который позволил совершить переход от синусоидальной кривой (изображенной на фиг. 53 штрихами) к двум ветвям кривой $v(k_1)$ (изображенным на фиг. 53 сплошной линией).

СКОРОСТЬ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ЭНЕРГИИ, ПОТОК ЭНЕРГИИ, ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИЙ ИМПЕДАНС

§ 18. Общие замечания; фазовая скорость

До сих пор мы изучали неограниченную решетку. Чтобы полученные результаты перенести на случай ограниченной решетки, к ее свободным концам необходимо приложить силы, характер которых зависит от граничных условий. Например, с левым концом должен быть, вообще говоря, связан какой-либо источник энергии, в результате чего на крайние частицы будут действовать такие силы, как если бы решетка была слева неограниченной. При этом характер распространения волн зависит, как это было указано в конце § 16, от частоты. На правом же конце, наоборот, должно находиться какое-либо устройство, поглощающее точно такое же количество энергии, какое рассеялось бы в части решетки, находящейся справа от границы, если бы решетка была неограниченной. Таким образом, определяются граничные условия, которым должны удовлетворять плотность энергии, поток энергии и скорость ее распространения в решетке. Изучению этих вопросов и посвящена настоящая глава.

Изучение одномерных решеток вообще и механических одномерных решеток в частности представляет главным образом чисто теоретический интерес. Единственным важным примером одномерной структуры являются электрические линии, детальному изучению которых будут посвящены последние главы. Тем не менее введение только что указанных граничных условий полезно рассмотреть именно на примере одномерных механических систем, так как полученные здесь результаты можно непосредственно распространить на случай двух и трех измерений, а используемый при этом метод, являющийся достаточно общим, легче усвоить, рассматривая одномерные структуры.

Вопросы, которые мы сейчас будем разбирать, тесно связаны со свойствами систем, обладающих *дисперсией*.

Скорость распространения волн, определение которой было дано в предыдущих главах, носит название фазовой скорости, так как она представляет собой скорость распространения фазы и может быть получена из сравнения относительных фаз колебаний двух соседних частиц. Фазовая скорость V удовлетворяет следующим соотношениям:

$$\lambda = V\tau, \quad V = \frac{v}{a}, \quad (18.1)$$

где $a = 1/\lambda$ — волновое число, λ — длина волны, v — частота и $\tau = 1/v$ — период колебаний.

Диспергирующей средой называется среда, в которой фазовая скорость зависит от частоты волны. Системы, рассматриваемые во многих задачах о распространении волн в классической физике, не обладают дисперсией. Таковы, например, задачи о распространении описываемых уравнениями Максвелла электромагнитных волн в пустоте, приводящие к постоянной скорости распространения, а также задачи о распространении звуковых волн, в которых можно сделать ряд упрощающих предположений, приводящих к скорости распространения, практически не зависящей от частоты. Во всех этих случаях легко определить скорость распространения энергии: она просто равна фазовой скорости V . Однако для диспергирующей среды скорость распространения энергии отличается от фазовой скорости, и ее определение требует специального рассмотрения. Это связано с тем фактом, что только монохроматические волны, т. е. волны, простирающиеся от $-\infty$ до $+\infty$, могут распространяться в диспергирующей среде без искажения. Ограниченный же сигнал будет по мере распространения искажаться, и поэтому определение его средней скорости представляет известные трудности. Здесь вводят понятие *групповой скорости*. Группой волн (или, как говорят в квантовой механике, волновым пакетом) называют сигнал ограниченной длины, состоящий только из конечного числа длин волн. Мы будем изучать свойства такой группы волн, характер ее распространения в среде, а также сравним среднюю скорость распространения группы волн с полученной на основании других определений скоростью распространения энергии.

§ 19. Об одной теореме из теории функций комплексного переменного

Метод, обычно применяемый при описании гармонических колебательных процессов, состоит в использовании комплексных экспоненциальных функций. Так, например, смещение и скорость частицы, участвующей в волновом движении, могут быть записаны соответственно в виде

$$y = Ae^{2\pi i(vt - ax)}, \quad \dot{y} = \frac{dy}{dt} = 2\pi i v A e^{2\pi i(vt - ax)}.$$

Точка, стоящая над искомой функцией, означает производную по времени, причем порядок этой производной равен числу точек; таким образом,

$$\dot{y} = \frac{dy}{dt}, \quad \ddot{y} = \frac{d^2y}{dt^2} \text{ и т. д.}$$

Следует указать, что перед всеми этими выражениями должен был бы всегда стоять знак Re , указывающий, что только действительная часть этих выражений должна приниматься во внимание и что в действительности предыдущие выражения представляют собой функции

$$y = A \cos 2\pi(vt - ax), \quad \dot{y} = -2\pi v A \sin 2\pi(vt - ax).$$

Однако если мы оперируем только линейными выражениями относительно y , \dot{y} , \ddot{y} и т. д., то знак Re можно опустить. В том же случае, если при вычислениях мы сталкиваемся с нелинейными комбинациями функций и их производных, например произведением, степенью и т. д., то его всегда необходимо учитывать. На самом деле легко видеть, что произведение действительных частей, например

$$\dot{y}\dot{y} = -2\pi v A^2 \cos 2\pi(vt - ax) \sin 2\pi(vt - ax),$$

не равно действительной части выражения

$$2\pi i v A^2 e^{i4\pi(vt - ax)},$$

полученного перемножением комплексных выражений для y и \dot{y} . Рассмотрению этого вопроса и посвящен настоящий параграф. Во многих случаях требуется узнать среднее за период от произведения действительных частей двух комплексных функций

$$F = f_0 e^{i(\omega t - \varphi)}, \quad F = F_0 e^{i(\omega t - \Phi)}. \quad (19.1)$$

Как мы сейчас убедимся, его легко получить, пользуясь соотношением

$$\overline{\operatorname{Re} f \cdot \operatorname{Re} F} = \frac{1}{2} \operatorname{Re} (fF^*), \quad (19.2)$$

где F^* означает величину, комплексно сопряженную с F . В самом деле

$$\begin{aligned} \overline{\operatorname{Re} f \cdot \operatorname{Re} F} &= f_0 F_0 \overline{\cos(\omega t - \varphi) \cos(\omega t - \Phi)} = \\ &= f_0 F_0 \frac{1}{\tau} \int_0^\tau \cos(\omega t - \varphi) \cos(\omega t - \Phi) dt, \end{aligned}$$

где $\tau = 2\pi/\omega$ — общий период функций f и F . С другой стороны,

$$\begin{aligned} \overline{\operatorname{Re} f \cdot \operatorname{Re} F} &= \frac{f_0 F_0}{\tau} \int_0^\tau \cos(\omega t - \varphi) \cos(\omega t - \varphi + \varphi - \Phi) dt = \\ &= \frac{f_0 F_0}{\tau} \int_0^\tau \cos(\omega t - \varphi) [\cos(\omega t - \varphi) \cos(\varphi - \Phi) - \\ &\quad - \sin(\omega t - \varphi) \sin(\varphi - \Phi)] dt \end{aligned}$$

или, полагая $\varphi - \Phi = \psi$,

$$\begin{aligned} \overline{\operatorname{Re} f \cdot \operatorname{Re} F} &= \\ &= \frac{f_0 F_0}{\tau} \int_0^\tau [\cos \psi \cos^2(\omega t - \varphi) - \sin \psi \sin(\omega t - \varphi) \cos(\omega t - \varphi)] dt. \end{aligned}$$

Теперь, учитывая, что интеграл от второго члена обращается в нуль, а интеграл от первого равен

$$\frac{\tau}{2} \cos \psi,$$

получаем окончательно

$$\overline{\operatorname{Re} f \cdot \operatorname{Re} F} = \frac{f_0 F_0}{\tau} \frac{\tau}{2} \cos \psi = \frac{1}{2} f_0 F_0 \cos \psi = \frac{1}{2} \operatorname{Re} (fF^*),$$

поскольку

$$fF^* = f_0 F_0 e^{i(\omega t - \varphi)} e^{-i(\omega t - \Phi)} = f_0 F_0 e^{-i\psi}.$$

Таким образом, соотношение (19.2) доказано.

§ 20. Плотность энергии, поток энергии, скорость распространения энергии

Прежде всего определим среднюю плотность энергии (или просто плотность энергии) и найдем для нее математическое выражение. Ограничимся сначала случаем решетки из одинаковых частиц, каждая из которых взаимодействует только со смежными частицами. Распространение волн в подобной системе было рассмотрено в § 8 и 9. Будем исходить из полученных там [см. формулы (8.9), (8.10) и (9.2)] соотношений

$$\begin{aligned} y_n &= A e^{i(\omega t - kn)}, \quad k = 2\pi a d, \\ \omega^2 &= \frac{2U''}{M} (1 - \cos k) = \frac{4U''}{M} \sin^2 \frac{k}{2}, \quad (20.1) \\ W &= \frac{v}{a} = \frac{\omega d}{k} = W_\infty \left| \frac{\sin k/2}{k/2} \right|. \end{aligned}$$

где через W теперь обозначена (вместо V) фазовая скорость, а U'' , как и прежде, обозначает U''_1 .

Среднюю плотность энергии мы определим как сумму средней плотности потенциальной энергии и средней плотности кинетической энергии.

Средняя плотность потенциальной энергии равна средней потенциальной энергии одной элементарной ячейки, деленной на длину элемента периодичности d , т. е.

$$\bar{E}_{\text{пот.}} = \frac{1}{d} \operatorname{Re} \frac{1}{2} U'' (y_n - y_{n-1})^2 \quad (20.2)$$

или, учитывая, что

$$y_n - y_{n-1} = \operatorname{Re} A e^{i(\omega t - kn)} (1 - e^{ik}),$$

находим

$$\begin{aligned} \bar{E}_{\text{пот.}} &= \frac{U''}{2d} \frac{1}{2} \operatorname{Re} (y_n - y_{n-1})(y_n - y_{n-1})^* = \\ &= \frac{A^2 U''}{4d} (1 - e^{ik})(1 - e^{-ik}) = \frac{A^2 U''}{4d} (2 - e^{ik} - e^{-ik}) = \\ &= \frac{A^2 U''}{4d} 2(1 - \cos k) = \frac{A^2 U''}{d} \sin^2 \frac{k}{2}. \quad (20.3) \end{aligned}$$

Средняя плотность кинетической энергии $\bar{E}_{\text{кин.}}$, равная отношению средней кинетической энергии одной ячейки к ее длине d , находится аналогичным образом:

$$\bar{E}_{\text{кин.}} = \frac{1}{d} \operatorname{Re} \frac{1}{2} M \overline{(y_n)^2}, \quad (20.4)$$

а так как

$$\dot{y}_n = \operatorname{Re} \frac{dy_n}{dt} = \operatorname{Re} A \frac{d}{dt} e^{i(\omega t - kn)} = \operatorname{Re} i\omega y_n,$$

то

$$\bar{E}_{\text{кин.}} = \operatorname{Re} \frac{M}{2d} \overline{(i\omega y_n)^2} = \frac{\omega^2 M}{2d} \operatorname{Re} (ty_n)(ty_n)^* = \frac{M\omega^2 A^2}{4d}. \quad (20.5)$$

Учитывая теперь соотношение, связывающее квадрат частоты ω^2 с k , получаем

$$\bar{E}_{\text{кин.}} = \frac{MA^2}{4d} \frac{4U''}{M} \sin^2 \frac{k}{2} = \frac{A^2 U''}{d} \sin^2 \frac{k}{2} = \bar{E}_{\text{пот.}} \quad (20.6)$$

В результате средняя плотность энергии равна

$$\bar{E} = \bar{E}_{\text{кин.}} + \bar{E}_{\text{пот.}} = \frac{2A^2 U''}{d} \sin^2 \frac{k}{2}. \quad (20.7)$$

Это выражение будет нами использовано при вычислении скорости распространения энергии.

Поток энергии, выходящий из ячейки, равен средней мощности, поглощенной при переходе от данной ячейки к следующей.

Если через $f_{n, n+1}$ обозначить силу, действующую на n -ю ячейку со стороны $(n+1)$ -й ячейки, то поток энергии будет равен произведению взятой с обратным знаком действительной части силы $f_{n, n+1}$ на действительную часть скорости частицы, находящейся в n -й ячейке. Знак минус связан с тем фактом, что мощность поглощается $(n+1)$ -й ячейкой, а сила $f_{n, n+1}$ действует на n -ю частицу.

Так как

$$\begin{aligned} f_{n, n+1} &= U'' (y_{n+1} - y_n), \\ y_n &= A e^{i(\omega t - kn)}, \\ \dot{y}_n &= i\omega A e^{i(\omega t - kn)} = i\omega y_n, \end{aligned} \quad (20.8)$$

то средняя за период мощность Φ , поглощенная $(n+1)$ -й ячейкой, равна

$$\begin{aligned} \Phi &= -\operatorname{Re} f_{n, n+1} \cdot \operatorname{Re} \dot{y}_n = -\frac{1}{2} \operatorname{Re} (f_{n, n+1} \dot{y}_n^*) = \\ &= -\frac{U'' A^2}{2} \operatorname{Re} (-1 + e^{-ik})(i\omega)^* = \\ &= \frac{U'' A^2 \omega}{2} \operatorname{Re} [\sin k - i(1 - \cos k)] = \frac{U'' A^2 \omega}{2} \sin k. \end{aligned} \quad (20.9)$$

Подставляя сюда выражение для ω из (20.1), находим окончательно

$$\Phi = U'' A^2 \sqrt{\frac{U''}{M}} \sin \frac{k}{2} \sin k. \quad (20.10)$$

Этот поток представляет собой энергию, протекающую за единицу времени от n -й к $(n+1)$ -й ячейке.

С ним связана другая величина — *скорость распространения энергии*. Она определяется как отношение потока энергии к плотности энергии. Обозначая ее через U_e , получаем

$$U_e = \frac{\Phi}{\bar{E}} = \frac{U'' A^2 \sqrt{\frac{U''}{M}} \sin \frac{k}{2} \sin k}{2 \frac{U''}{d} A^2 \sin^2 \frac{k}{2}} = d \sqrt{\frac{U''}{M}} \cos \frac{k}{2}. \quad (20.11)$$

Данное здесь определение сохраняется также и при наличии затухания. Смысл этой скорости становится ясным из сравнения предыдущей формулы с выражением для потока движущейся со скоростью v жидкости, плотность которой равна ρ . Так как поток равен $\Phi = \rho v$, то отношение Φ/ρ определяет скорость жидкости. Подобным же образом отношение Φ/\bar{E} потока энергии к плотности энергии определяет скорость распространения энергии вдоль системы. Этот вопрос детально рассмотрел Бриллюэн¹⁾, иллюстрировав его многочисленными примерами.

¹⁾ L. Brillouin, Exposé au Congrès international de l'Électricité. vol. II, Paris, 1932, p. 739.

§ 21. Групповая скорость и скорость распространения сигнала

В § 18 мы определили, что следует понимать под группой волн, или волновым пакетом. В качестве одного из простейших примеров рассмотрим распространение сигнала, образованного суперпозицией двух монохроматических волн с одинаковыми амплитудами A и разными, но близкими между собой частотами $\nu_0 + \Delta\nu$ и $\nu_0 - \Delta\nu$. Волне с частотой $\nu_0 + \Delta\nu$ соответствует волновое число $a_0 + \Delta a$, а волне с частотой $\nu_0 - \Delta\nu$ — волновое число $a_0 - \Delta a$. Таким образом, для этих волн имеем соответственно

$$y_- = A \cos 2\pi [(\nu_0 - \Delta\nu)t - (a_0 - \Delta a)x],$$

$$y_+ = A \cos 2\pi [(\nu_0 + \Delta\nu)t - (a_0 + \Delta a)x].$$

Результирующая волна, определяемая как суперпозиция двух первоначальных волн, будет описываться функцией

$$y = y_- + y_+ = A \{ \cos [2\pi (\nu_0 - \Delta\nu)t - (a_0 - \Delta a)x] + \cos [2\pi (\nu_0 + \Delta\nu)t - (a_0 + \Delta a)x] \},$$

или

$$y = 2A \cos 2\pi (\nu_0 t - a_0 x) \cos 2\pi (\Delta\nu t - \Delta a x). \quad (21.1)$$

Это выражение определяет, как известно, *модулированную волну* со средней частотой ν_0 . *Несущая волна* описывается выражением

$$\cos 2\pi (\nu_0 t - a_0 x); \quad (21.2)$$

амплитуда несущей волны равна

$$2A \cos 2\pi (\Delta\nu t - \Delta a x) \quad (21.3)$$

и медленно меняется с частотой $\Delta\nu$, характеризующей *модуляцию*.

Фазовая скорость несущей волны

$$V = \frac{\nu_0}{a_0}. \quad (21.4)$$

Модуляция же распространяется со скоростью, определяемой отношением $\Delta\nu/\Delta a$, и в пределе, когда $\Delta\nu$ стремится к нулю, скорость модуляции равна величине

$$U_g = \frac{\partial\nu}{\partial a}, \quad (21.5)$$

называемой *групповой скоростью*. Точно так же понятие групповой скорости определяется в случае диспергирующей среды, т. е. в случае, когда частота ν представляет собой некоторую функцию волнового числа a : $\nu = \nu(a)$. Однако если среда характеризуется затуханием, то волновое число, как было показано выше, становится комплексным или чисто мнимым, и групповая скорость уже не имеет ясного физического смысла.

При равном нулю коэффициенте поглощения получаем

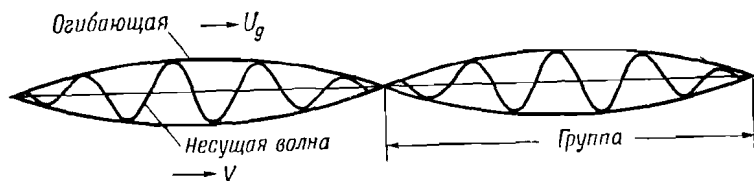
$$\begin{aligned} U_g &= \frac{\partial\nu}{\partial a} = d \frac{\partial\omega}{\partial k} = d \frac{\partial}{\partial k} \left(2 \sqrt{\frac{U''}{M}} \sin \frac{k}{2} \right) = \\ &= 2d \sqrt{\frac{U''}{M}} \frac{1}{2} \cos \frac{k}{2} = d \sqrt{\frac{U''}{M}} \cos \frac{k}{2} = U_e. \end{aligned} \quad (21.6)$$

Таким образом, в отсутствие поглощения *групповая скорость совпадает со скоростью распространения энергии*. Однако, в то время как при наличии поглощения понятие групповой скорости теряет смысл, скорость распространения энергии сохраняет свое физическое содержание.

Процесс, описываемый выражением (21.1), можно представить как распространение элементарной волны типа (21.2) с частотой ν_0 и волновым числом $a_0 = 1/\lambda_0$, но имеющей модулированную амплитуду, закон изменения которой определяется для всех моментов времени соотношением (21.3). Если не рассматривать колебаний с частотой несущей волны и исследовать только изменение средних амплитуд, то можно констатировать, что кривая, описывающая распределение амплитуд, согласно формуле (21.3), движется в пространстве с групповой скоростью U_g . Однако при детальном исследовании движения нужно учитывать, что элементарные волны перемещаются внутри огибающей (21.3) с фазовой скоростью V (фиг. 60). Подобное явление можно наблюдать при образовании „кругов“ на воде, когда в нее бросают камни. Можно было бы привести довольно много аналогичных примеров,

но, хотя описанный выше случай и является весьма частным, полученные для него результаты, вообще говоря, во многом не зависят ни от формы волнового пакета, ни от характера огибающей. Эти результаты сводятся к следующим положениям: кривая, описывающая распределение амплитуд, перемещается без искажений с вполне определенной скоростью; отсутствие деформаций огибающей связано, очевидно, с отсутствием затухания волн.

С другой стороны, отсутствие искажений имеет место только в том случае, когда волновой пакет представляет собой суперпозицию монохроматических волн, частоты которых заключены в очень узком интервале. Так, например,



Ф и г. 60.

в предыдущем случае мы имели только две волны с частотами $\nu_0 + \Delta\nu$ и $\nu_0 - \Delta\nu$, заключенными в конечном интервале $2\Delta\nu$. Аналогичные же результаты можно получить, рассматривая волновое образование, состоящее из большего числа волн, при условии, что их частоты также лежат в некотором малом интервале $\Delta\nu$. Другими словами, спектр Фурье такой группы волн должен иметь достаточно малую конечную длину, чтобы в выражении (21.5) отношение $\Delta\nu/\Delta a$ можно было заменить производной $\partial\nu/\partial a$.

Однако существуют и другие волновые образования, спектр Фурье которых простирается в области частот от $-\infty$ до $+\infty$. Для подобных сигналов отношение $\Delta\nu/\Delta a$ уже нельзя заменять производной $\partial\nu/\partial a$ и только что данное определение групповой скорости становится незаконным. Это связано с тем, что кривая, описывающая распределение амплитуд, по мере распространения волны деформируется, причем эта деформация с течением времени становится все более и более заметной.

Эти общие замечания можно иллюстрировать некоторыми примерами, используя обратные преобразования Фурье.

Пусть $C(t)$ — четная функция времени, а $B(\nu)$ — соответствующий ей спектр частот

$$C(t) = C(-t).$$

Тогда обратные преобразования Фурье (при условии, конечно, сходимости интегралов) будут иметь вид

$$C(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} B(\nu) \cos 2\pi\nu t \, d\nu, \quad (21.7)$$

$$B(\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} C(t) \cos 2\pi\nu t \, dt,$$

откуда, в частности, следует, что $B(\nu)$ также является четной функцией

$$B(\nu) = B(-\nu).$$

Взаимная связь, которая существует между функциями $C(t)$ и $B(t)$, коротко может быть выражена словами: *если сигнал $C(t)$ имеет спектр частот $B(\nu)$, то сигнал $B(t)$ будет иметь спектр частот $C(\nu)$.*

Используя функцию $C(t)$ для описания модуляции несущей волны частоты ν_0 , получаем новую четную функцию

$$C_1(t) = C(t) \cos 2\pi\nu_0 t. \quad (21.8)$$

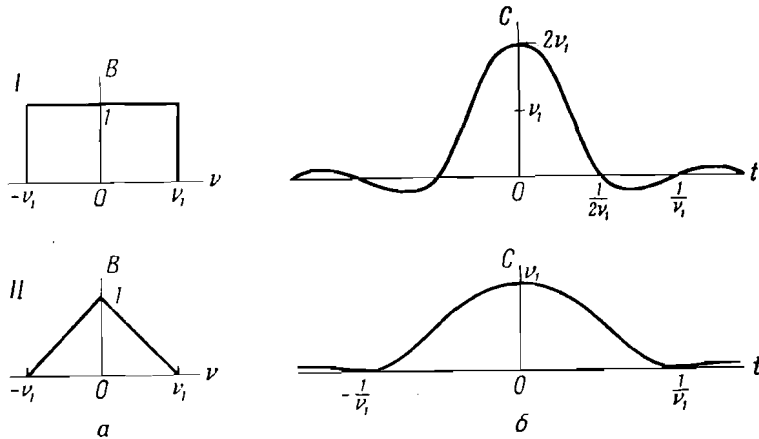
Найдем спектр сигнала $C_1(t)$, описываемого функцией (21.8). Согласно (21.7) и учитывая, что функция $B(\nu)$ четная, получаем

$$B_1(\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} C_1(t) \cos 2\pi\nu t \, dt = \int_{-\infty}^{+\infty} C(t) \cos 2\pi\nu_0 t \cos 2\pi\nu t \, dt =$$

$$= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} C(t) [\cos 2\pi(\nu_0 + \nu)t + \cos 2\pi(\nu_0 - \nu)t] \, dt =$$

$$= \frac{1}{2} [B(\nu_0 + \nu) + B(\nu_0 - \nu)] = \frac{1}{2} [B(\nu + \nu_0) + B(\nu - \nu_0)], \quad (21.9)$$

т. е. $B_1(\nu)$ также является четной функцией. Если известен спектр $B(\nu)$ начального сигнала $C(t)$, симметричного относительно вертикальной оси, проходящей через начало координат O , то, как следует из (21.9), спектр $B_1(\nu)$ можно определить, находя полусумму ординат кривых, получаемых из кривых $B(\nu)$ параллельным переносом относительно оси частот на величину $\pm \nu_0$.



Фиг. 61. а — спектр; б — огибающая сигнала (модулированная волна).

Приведем два примера сигнала $C(t)$ и его трансформанты Фурье $B(\nu)$ (фиг. 61).

I. Прямоугольный спектр

$$B(\nu) = \begin{cases} 1 & \text{при } |\nu| < \nu_1, \\ 0 & \text{при } |\nu| > \nu_1 \end{cases}$$

получается для сигнала

$$C(t) = 2\nu_1 \frac{\sin 2\pi\nu_1 t}{2\pi\nu_1 t}. \quad (21.10)$$

II. Треугольный спектр

$$B(\nu) = \begin{cases} 1 - \frac{|\nu|}{\nu_1} & \text{при } |\nu| < \nu_1, \\ 0 & \text{при } |\nu| > \nu_1 \end{cases}$$

получается для сигнала

$$C(t) = \nu_1 \left(\frac{\sin \pi\nu_1 t}{\pi\nu_1 t} \right)^2. \quad (21.11)$$

Спектр сигналов $C(t)$ конечен, но во времени они, наоборот, простираются от $-\infty$ до $+\infty$, хотя и имеют при $t=0$ ярко выраженный максимум. Обратные же им сигналы, описываемые функциями $B(t)$, будут конечны во времени (прямоугольный сигнал и треугольный сигнал), но спектр их частот будет неограничен. Покажем, что сигнал, спектр которого конечен, распространяется таким же образом, как и модулированная волна, определяемая соотношением (21.1). Будем предполагать, как это было сделано выше [см. формулу (21.8)], что зависимость от времени амплитуды несущей волны с частотой ν_0 определяется функцией $C(t)$, имеющей спектр $B(\nu)$, а движение точки решетки с абсциссой $x=0$ описывается функцией вида $C_1(t)$. Найдем выражение, описывающее движение произвольной точки, имеющей абсциссу x . Для этого в формуле, описывающей движение точки с $x=0$, нужно заменить νt на $[\nu t - a(\nu)x]$, где волновое число $a(\nu) = 1/\lambda$, соответствующее рассматриваемой среде, является функцией частоты ν .

Учитывая соотношения (21.7) и выражение (21.8) для сигнала при $x=0$, получаем, подставляя, согласно (21.9), вместо $B_1(\nu)$ ее выражение через функцию $B(\nu)$

$$\begin{aligned} C_1(t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} B_1(\nu) \cos 2\pi\nu t d\nu = 2 \int_0^{+\infty} B_1(\nu) \cos 2\pi\nu t d\nu = \\ &= \int_0^{\infty} [B(\nu + \nu_0) + B(\nu - \nu_0)] \cos 2\pi\nu t d\nu. \end{aligned} \quad (21.12)$$

Рассмотрим теперь приведенные выше примеры I и II. Предположим, что

$$\nu_0 > \nu_1,$$

и введем новую переменную μ

$$\nu = \nu_0 + \mu.$$

Как легко видеть, первый член суммы $[B(\nu + \nu_0)]$ в обоих случаях при интегрировании дает нуль, и мы получаем

$$C_1(t) = \int_{-\nu_1}^{+\nu_1} B(\mu) \cos 2\pi(\nu_0 + \mu)t d\mu. \quad (21.13)$$

Это выражение определяет закон движения точки с абсциссой $x=0$; для точки, расположенной на расстоянии x от начала координат, движение будет определяться функцией

$$C_1(t, x) = \int_{-\nu_1}^{\nu_1} B(\mu) \cos 2\pi[(\nu_0 + \mu)t - a(\nu_0 + \mu)x] d\mu. \quad (21.14)$$

Если ν_1 считать малой величиной, то, ограничиваясь вторым членом разложения в ряд Тейлора, можно написать

$$a(\nu_0 + \mu) \approx a(\nu_0) + \mu \left(\frac{\partial a}{\partial \nu} \right)_0, \quad |\mu| < \nu_1, \quad (21.15)$$

откуда

$$(\nu_0 + \mu)t - a(\nu_0 + \mu)x = \nu_0 t - a(\nu_0)x + \mu \left[t - \left(\frac{\partial a}{\partial \nu} \right)_0 x \right].$$

Подставляя теперь в (21.14) косинус суммы в виде разности произведений косинусов и синусов и учитывая, что функция $B(\nu)$ четная, находим

$$C_1(t, x) = \cos 2\pi[\nu_0 t - a(\nu_0)x] \int_{-\nu_1}^{+\nu_1} B(\mu) \cos \mu \left[t - \left(\frac{\partial a}{\partial \nu} \right)_0 x \right] d\mu$$

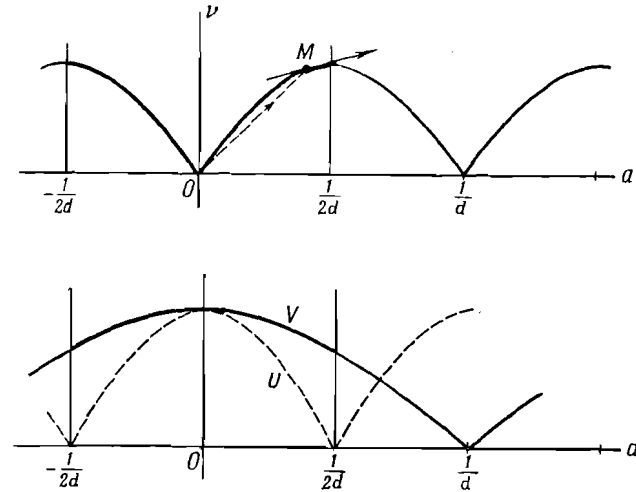
или

$$C_1(t, x) = \cos 2\pi[\nu_0 t - a(\nu_0)x] C \left[t - \left(\frac{\partial a}{\partial \nu} \right)_0 x \right]. \quad (21.16)$$

Таким образом, мы получили уже отмеченный выше результат: элементарные волны распространяются с фазовой скоростью, а огибающая $C \left[t - \left(\frac{\partial a}{\partial \nu} \right)_0 x \right]$ модулированной волны распространяется без искажений с групповой скоростью, определяемой соотношением (21.5).

Приведенное доказательство предполагает ограниченность спектра, а также достаточную малость по абсолютной величине граничных частот $\pm \nu_1$, что позволяет пренебречь в (21.15) дальнейшими членами разложения; в то же время сигналы, имеющие бесконечный спектр частот, в процессе распространения всегда будут в той или иной степени деформироваться.

Эти результаты иллюстрированы кривыми на фиг. 62. Верхняя кривая, представляющая собой уже знакомый нам график функции $\nu = \nu(a)$, аналогична кривой, изображенной на фиг. 5 и относящейся к цепочке одинаковых частиц, каждая из которых взаимодействует только со смежными



Фиг. 62. Угловой коэффициент прямой OM равен V ; угловой коэффициент касательной в точке M равен U .

частицами. Фазовая скорость $V = \nu/a$, соответствующая некоторой точке M на этой кривой, равна тангенсу угла наклона полупрямой, проведенной из начала координат в данную точку, а групповая скорость $u = \partial \nu / \partial a$ равна тангенсу угла наклона касательной к кривой $\nu = \nu(a)$ в точке M . Две нижние кривые на фиг. 62 представляют изменение фазовой скорости V и групповой скорости U в зависимости от волнового числа a . Кривая для фазовой скорости V не имеет никаких особенностей в точках $a = \pm 1/2d$ (о значении этих точек см. § 2), тогда как групповая скорость на границах основного интервала обращается в нуль, что вполне соответствует характеру движения для этих точек, которое, как уже было указано, может рассматриваться как стоячая волна (см. § 2, 4 и 9).

§ 22. Характеристический импеданс

Импеданс какой-либо механической системы определяется в данной точке как отношение силы, действующей на эту точку, к ее скорости. Для периодических структур, которые мы будем изучать, т. е. для решеток, состоящих из периодически повторяющихся ячеек, мы определим характеристический импеданс (в предположении монохроматической волны) как отношение силы к скорости на входе или выходе элементарной ячейки. Если монохроматическая волна распространяется вдоль неограниченной структуры, то характеристический импеданс оказывается одним и тем же для всех ячеек. Это остается справедливым также и для ограниченной линии при условии расположения на ее концах некоторого источника, способного выделять или поглощать энергию и выбранного таким образом, что все процессы в линии протекают во всех точках, кроме ее концов, так, как если бы она была бесконечной. Очевидно, что характеристический импеданс ограниченной линии равен импедансу, на который нужно ее нагрузить, чтобы она вела себя как бесконечная линия без отражения.

В этом параграфе мы будем рассматривать только случай механической решетки из одинаковых частиц, каждая из которых взаимодействует только со смежными частицами. При этих условиях характеристический импеданс Z определяется следующим соотношением:

$$f_{n, n+1} = -Z \dot{y}_n \quad (22.1)$$

где через $f_{n, n+1}$ обозначена сила, действующая со стороны $(n+1)$ -й частицы на n -ю частицу, а через \dot{y}_n — скорость n -й частицы.

Используя полученные ранее соотношения (20.1) и (20.8)

$$\begin{aligned} y_n &= Ae^{i(\omega t - kn)}, \\ f_{n, n+1} &= U''(y_{n+1} - y_n) = U''y_n(e^{-ik} - 1), \\ \dot{y}_n &= i\omega y_n, \end{aligned}$$

находим, согласно формуле (22.1),

$$Zi\omega = U''(1 - e^{-ik}) = U''(1 - \cos k + i \sin k). \quad (22.2)$$

Считая импеданс Z комплексным и разбивая его на действительную и мнимую части

$$Z = Z_r + iZ_i, \quad (22.3)$$

получаем из (22.2) выражения для Z_i и Z_r

$$\begin{aligned} Z_i &= \frac{U''}{\omega}(\cos k - 1) = -\frac{2U''}{\omega} \sin^2 \frac{k}{2} = -\sqrt{U''M} \sin \frac{k}{2}, \\ Z_r &= \frac{U''}{\omega} \sin k = \frac{2U''}{\omega} \sin \frac{k}{2} \cos \frac{k}{2} = \sqrt{U''M} \cos \frac{k}{2}, \end{aligned} \quad (22.4)$$

поскольку

$$\omega = 2\sqrt{\frac{U''}{M}} \sin \frac{k}{2}.$$

Если учесть выражение для скорости распространения энергии U_e , полученное в предыдущем параграфе, то легко найти связь, существующую между U_e и действительной частью характеристического импеданса $\text{Re } Z$,

$$Z_r = \frac{M}{d} U_e. \quad (22.5)$$

Можно заметить, что величина Z_r всегда положительна, поскольку внутри основного интервала изменения переменной k ($-\pi, +\pi$), $\cos(k/2)$ всегда больше нуля.

Вводя новую, существенно положительную величину

$$C = U''(1 - \cos k),$$

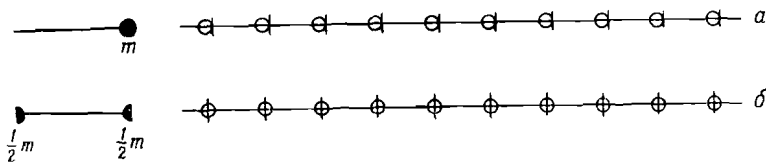
находим, что $Z_i = -C/\omega$ и, следовательно,

$$\begin{aligned} f_{n, n+1} &= -Z \dot{y}_n = -Z_r \dot{y}_n - iZ_i \dot{y}_n = -Z_r \dot{y}_n + i \frac{C}{\omega} \dot{y}_n = \\ &= -Z_r \dot{y}_n - \frac{C}{i\omega} \dot{y}_n = Z_r \dot{y}_n - C y_n. \end{aligned} \quad (22.6)$$

При этих условиях величинам Z_r и Z_i можно дать физическую интерпретацию. Сила, действующая на n -ю частицу, складывается из двух членов: первый соответствует силе трения (с коэффициентом Z_r), а второй — упругой силе (с коэффициентом упругости $C = \omega Z_i$).

Этот метод определения характеристического импеданса обладает некоторым неудобством, поскольку с самого начала мы предположили, что каждая элементарная ячейка содержит только одну частицу, расположенную на одном из ее

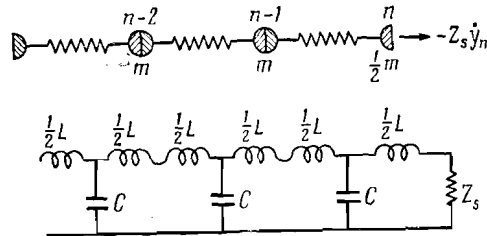
концов. Поэтому при определении импеданса второго конца ячейки встречаются определенные трудности, связанные с тем, что на этом конце нет материальной частицы, к которой могла бы быть приложена сила; понятие скорости при этом также теряет смысл. Таким образом, выбранная нами ячейка



Фиг. 63. а — асимметричная цепочка; б — симметричная цепочка. Слева изображена элементарная ячейка.

несимметрична и не позволяет достаточно просто определить понятие характеристического импеданса.

Указанные затруднения можно обойти, определяя элементарную ячейку структуры несколько иначе. Будем считать,



Фиг. 64.

что элементарная ячейка имеет ту же длину d , равную расстоянию между соседними частицами, но включает в себя уже не одну частицу, а две половины ее, расположенные на разных концах ячейки. Определенная таким образом ячейка будет уже, как легко видеть, симметричной.

Эти способы разбиения структуры на элементарные ячейки приведены на фиг. 63. Вверху изображен асимметричный способ разбиения, внизу — симметричный. Вертикальными черточками в обоих случаях отмечены границы ячеек. На фиг. 64 изображены две структуры с симметричными ячей-

ками, нагруженные характеристическим импедансом Z_s : вверху — механическая система, внизу — электрическая.

Попытаемся найти величину импеданса Z_s правого конца какой-либо элементарной ячейки, ограниченной слева половиной $(n-1)$ -й частицы, а справа — половиной n -й частицы. Сила, действующая на n -ю частицу со стороны $(n-1)$ -й частицы, равна $U''(y_{n-1} - y_n)$, причем предполагается, что она действует на частицу с половинной массой, расположенную на правом конце рассматриваемой ячейки. Так как с другой стороны на частицу действует еще сила, равная $-Z_s \dot{y}_n$, то уравнение движения n -й частицы можно записать в виде

$$U''(y_{n-1} - y_n) - Z_s \dot{y}_n = \frac{1}{2} M \ddot{y}_n. \quad (22.7)$$

Предполагается, что сила, с которой $(n+1)$ -я частица действует на n -ю частицу, приложена к n -й полумассе, образующей левый конец ячейки, смежной рассматриваемой. Если написать теперь уравнение движения для этой половины частицы и сложить его с уравнением (22.7), то придем к полученному выше уравнению движения n -й частицы массы M [см. уравнение (8.8), записанное для случая $m=1$]. Пропорциональные импедансу члены взаимно сокращаются, так как они входят в уравнения с разными знаками. Следовательно, решение для y_n будет иметь тот же вид, что и прежде.

Подставляя выражение $y_n = A e^{i(\omega t - kn)}$ в уравнение (22.7), получаем

$$U''(e^{ik} - 1) - i\omega Z_s = \frac{1}{2} M (i\omega)^2 = -\frac{1}{2} M \omega^2; \quad (22.8)$$

это соотношение позволяет определить величину импеданса Z_s .

Как легко убедиться, Z_s вызывает только силу трения, т. е. этот импеданс — величина действительная, так как упругая сила автоматически уравновешивается. Действительно, если учесть, что частота

$$\omega = 2 \sqrt{\frac{U''}{M}} \sin \frac{k}{2},$$

то из соотношения (22.8)

$$Z_s = \frac{U''}{\omega} \sin k = \sqrt{U'' M} \cos \frac{k}{2} = Z_r. \quad (22.9)$$

Импеданс другого конца элементарной ячейки можно получить совершенно аналогичным способом. Уравнение движения для половины частицы, расположенной слева, имеет вид

$$U''(y_n - y_{n-1}) + Z_s \dot{y}_{n-1} = \frac{1}{2} M \ddot{y}_{n-1},$$

а соотношение (22.8) заменяется следующим:

$$U''(e^{-ik} - 1) + i\omega Z_s = -\frac{1}{2} M \omega^2,$$

из которого, если учесть, что $\omega = 2 \sqrt{U''/M} \sin(k/2)$, получаем

$$Z_s = \frac{U''}{\omega} \sin k = Z_r. \quad (22.10)$$

Итак, если цепочка из одинаковых частиц ограничена n -й частицей (массы M) справа, то нужно рассматривать асимметричные ячейки, состоящие из одной частицы, которая расположена на правом конце ячейки. Если мы хотим теперь, чтобы все частицы колебались так же, как и в случае безграничной цепочки, то ее необходимо нагрузить на свободном конце импедансом $Z_r + iZ_s$; Z_r , как и прежде, будет соответствовать силе трения, а Z_i — силе упругости. Если решетка ограничена n -й частицей слева, то нужно рассматривать асимметричные элементарные ячейки, состоящие из одной частицы, которая расположена на левом конце ячейки.

Если же на правом или левом конце расположена n -я частица с массой, равной $1/2 M$, то необходимо рассматривать симметричные ячейки. Чтобы частицы конечной решетки колебались так же, как если бы решетка была неограниченной, к крайней частице, имеющей половинную массу, нужно приложить некоторую силу, определяемую рассмотренным выше импедансом Z_s . Эта сила носит характер силы трения, поскольку упругая сила точно уравновешивается силой инерции граничной частицы половинной массы.

Используя эти результаты, рассмотрим электрический фильтр нижних частот, изображенный на фиг. 64. Пользуясь классическим соответствием

$$M \rightarrow L, \quad \frac{1}{U''} \rightarrow C,$$

находим

$$Z_s = \sqrt{\frac{L}{C}} \cos \frac{k}{2}, \quad (22.11)$$

где L и C означают, как обычно, величины коэффициента самоиндукции и емкости элементарной ячейки. Заметим, что поскольку в выражение для импеданса Z_s входит только отношение L/C , то под L и C можно понимать также коэффициент самоиндукции и емкость соответственно, приходящиеся на единицу длины. Импеданс электрических линий будет в дальнейшем предметом тщательного изучения.

Понятие *потока энергии*, протекающего вдоль решетки, было рассмотрено в § 20 [см. соотношение (20.9)]. Он определяется формулой

$$\Phi = -\operatorname{Re} f_{n, n+1} \cdot \operatorname{Re} \dot{y}_n = -\frac{1}{2} \operatorname{Re} (f_{n, n+1} \dot{y}_n^*).$$

Но, как было показано,

$$f_{n, n+1} = -Z \dot{y}_n$$

и, следовательно,

$$\Phi = \frac{1}{2} \operatorname{Re} (Z \dot{y}_n \dot{y}_n^*) = \frac{1}{2} Z_r |\dot{y}_n|^2. \quad (22.12)$$

Это соотношение связывает поток энергии с действительной частью характеристического импеданса. Отсюда, в частности, следует второе определение действительной части характеристического импеданса, которое можно получить, исходя из соотношения (22.12).

Для бесконечно большой длины волны волны полученные здесь формулы сводятся к обычным соотношениям, относящимся к сплошным средам. Этот предельный переход уже был рассмотрен в § 9, где было показано, что в пределе

$$\epsilon = dU'' \quad (\text{модуль упругости}), \quad (9.3)$$

$$\rho = \frac{M}{d} \quad (\text{плотность}),$$

$$V_\infty = d \sqrt{\frac{U''}{M}} = \sqrt{\frac{\epsilon}{\rho}} \quad (\text{фазовая скорость}). \quad (9.3a)$$

Точно так же можно найти, что

$$U_{g, \infty} = V_\infty, \\ Z_r = \sqrt{MU''} = \sqrt{\epsilon \rho}. \quad (22.13)$$

Если среда не обладает дисперсией, то скорость V постоянна и, следовательно,

$$U_g = \frac{\partial \nu}{\partial a} = \frac{\nu}{a} = V,$$

т. е. групповая и фазовая скорости равны друг другу. Соотношение же (22.13), определяющее характеристический импеданс, совпадает с обычным выражением для Z .

§ 23. Соединение двух решеток

Результаты, полученные в предыдущих параграфах, позволяют нам в случае, если взаимодействие осуществляется только между смежными частицами, рассмотреть поведение волн в месте соединения двух решеток, каждая из которых состоит из одинаковых частиц, расположенных на равных расстояниях друг от друга.

Пусть каждая из этих двух решеток характеризуется соответственно фазовыми скоростями W_1 и W_2 , групповыми скоростями U_1 и U_2 , потоками энергии Φ_1 и Φ_2 и характеристическими импедансами Z_1 и Z_2 . Обозначим, наконец, через A_1 и A_2 амплитуды колебаний в месте соединения, а через T их отношение

$$A_2 = TA_1. \quad (23.1)$$

В дальнейшем мы будем использовать полученное выше соотношение (22.12), связывающее поток энергии с импедансом. Запишем его в несколько ином виде. Учитывая, что $|\dot{y}_n| = \omega A$, и подставляя это значение для модуля скорости в (22.12), получаем

$$\Phi = \frac{1}{2} Z_r \omega^2 A^2. \quad (23.2)$$

Соединим теперь указанные выше структуры таким образом, чтобы место соединения совпадало с одной из границ элементарной ячейки для каждой из двух рассматриваемых систем. Обозначая через Φ_1 и Φ_2 величины потока энергии, протекающего вдоль каждой из решеток, можно написать

$$\Phi_1 = \frac{1}{2} Z_{r1} \omega_1^2 A_1^2, \quad (23.3)$$

$$\Phi_2 = \frac{1}{2} Z_{r2} \omega_2^2 A_2^2. \quad (23.4)$$

Мы будем предполагать, что частицы обеих решеток колеблются с одинаковой частотой ($\omega_1 = \omega_2$). Достаточным условием отсутствия потерь энергии в месте соединения, а также отсутствия отраженной волны является равенство потоков энергии

$$\Phi_1 = \Phi_2 \quad (23.5)$$

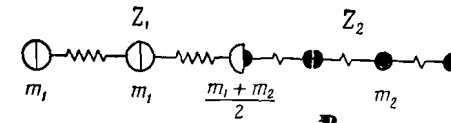
или, так как $\omega_1 = \omega_2$,

$$Z_{r1} A_1^2 = Z_{r2} A_2^2,$$

что равносильно условию

$$\frac{Z_{r1}}{Z_{r2}} = T^2.$$

Для решеток, элементарная ячейка которых состоит из одной частицы, отношение амплитуд T можно легко определить, задаваясь каким-либо конкретным характером связи.



Фиг. 65.

Предположим, что решетка разбита на симметричные ячейки и соединение выбрано таким образом, что половина крайней частицы одной решетки связана с половиной крайней частицы другой решетки, как это изображено на фиг. 65. Поскольку обе эти половины перемещаются как единое целое, необходимо, чтобы

$$A_1 = A_2 \quad \text{или} \quad T = 1. \quad (23.6)$$

Таким образом, предположение об отсутствии отраженной волны и потерь энергии в месте соединения приводит к соотношению

$$Z_1 = Z_2, \quad (23.7)$$

выражающему равенство характеристических импедансов двух этих структур. В предыдущем параграфе было дано выражение для характеристического импеданса решетки [см. выражение (22.13)] в зависимости от ее параметров, из которого следует, что в случае структур из неодинаковых частиц

условие равенства характеристических импедансов выполняется только в том случае, когда эти структуры характеризуются разными значениями модуля упругости.

Вообще говоря, соединение решеток приводит к отражению волн, и можно вычислить зависимость коэффициента отражения от параметров решеток. При наличии отражения нужно рассматривать три волны: падающую с амплитудой A_1 , проходящую с амплитудой A_2 и, наконец, отраженную волну с амплитудой A_3 . Потоки энергии, соответствующие этим трем волнам, будут равны

$$\begin{aligned}\Phi_1 &= \frac{1}{2} Z_{r_1} \omega^2 A_1^2, \\ \Phi_2 &= \frac{1}{2} Z_{r_2} \omega^2 A_2^2, \\ \Phi_3 &= \frac{1}{2} Z_{r_1} \omega^2 A_3^2.\end{aligned}\quad (23.8)$$

если учесть, что падающая и отраженная волны распространяются в первой решетке, а проходящая — во второй.

По определению, коэффициент отражения R от места соединения равен

$$R = \frac{A_3}{A_1}. \quad (23.9)$$

С другой стороны, потоки энергии, определяемые выражением (23.8), должны удовлетворять двум соотношениям. Первое выражает закон сохранения энергии

$$\Phi_1 = \Phi_2 + \Phi_3, \quad (23.10)$$

а второе означает, что две связанные половины граничных частиц перемещаются как одно целое

$$A_2 = A_1 + A_3. \quad (23.11)$$

Из соотношения (23.10) получаем

$$Z_{r_1} A_1^2 = Z_{r_2} A_2^2 + Z_{r_1} A_3^2$$

или

$$\left(\frac{A_2}{A_1}\right)^2 = \frac{Z_{r_1}}{Z_{r_2}} \left[1 - \left(\frac{A_3}{A_1}\right)^2\right]. \quad (23.12)$$

С другой стороны, из соотношения (23.11)

$$\left(\frac{A_2}{A_1}\right)^2 = 1 + 2 \frac{A_3}{A_1} + \left(\frac{A_3}{A_1}\right)^2. \quad (23.13)$$

Приравнявая правые части выражений (23.12) и (23.13), получаем уравнение второй степени для $R = A_3/A_1$, позволяющее найти коэффициент отражения R ,

$$\left(\frac{A_3}{A_1}\right)^2 \left(1 + \frac{Z_{r_1}}{Z_{r_2}}\right) + 2 \frac{A_3}{A_1} + 1 - \frac{Z_{r_1}}{Z_{r_2}} = 0 \quad (23.14)$$

или

$$(R + 1) \left[R + 1 + \frac{Z_{r_1}}{Z_{r_2}} (R - 1) \right] = 0. \quad (23.15)$$

Решение

$$R = -1 \quad (23.16)$$

является тривиальным: оно соответствует случаю, когда падающая и отраженная волны находятся точно в противофазе, так что частица, помещенная в месте соединения решеток, покоится, а амплитуда проходящей волны равна нулю, в чем легко убедиться, подставляя в соотношение (23.11) значение $A_3 = -A_1$.

Другое решение уравнения (23.15)

$$R = \frac{Z_{r_1} - Z_{r_2}}{Z_{r_1} + Z_{r_2}} \quad (23.17)$$

дает коэффициент отражения для амплитуд. Коэффициент отражения для интенсивностей равен

$$R' = |R|^2.$$

Коэффициент прохождения для амплитуд имеет значение

$$T = \frac{A_2}{A_1} = \frac{A_2 + A_3 - A_3}{A_1} = \frac{A_2 - A_3}{A_1} + \frac{A_3}{A_1} = 1 + R = \frac{2Z_{r_1}}{Z_{r_1} + Z_{r_2}},$$

а для интенсивностей —

$$T' = (T)^2 = 4 \frac{(Z_{r_1})^2}{(Z_{r_1} + Z_{r_2})^2} = \frac{Z_{r_1}}{Z_{r_2}} (1 - R^2).$$

§ 24. Общее определение характеристического импеданса

Выше мы дали определение характеристического импеданса в случае решетки, каждая ячейка которой включает в себя лишь одну частицу, причем характер взаимодействия предполагался таким, что каждая из частиц взаимодействует

только со смежными частицами. Сейчас мы обобщим это определение на случай решеток, ячейка которых, как и прежде, включает в себя лишь одну частицу, но радиус взаимодействия между частицами предполагается уже произвольным. При этом мы будем использовать результаты, полученные в § 8 и 10.

Потенциальная энергия такой решетки определяется формулой (8.5)

$$U = U_0 + \sum_n \sum_{p>0} [(y_{n+p} - y_n) U'_p + \frac{1}{2} (y_{n+p} - y_n)^2 U''_p].$$

Плотность потенциальной энергии равна потенциальной энергии элементарной ячейки, отнесенной к ее длине d . Так как для монохроматической волны движение каждой частицы является гармоническим, то в среднем за период колебаний имеем

$$\overline{(y_{n+p} - y_p)} = 0$$

и, следовательно, для средней плотности потенциальной энергии получаем выражение

$$\bar{E}_{\text{пот.}} = \frac{1}{2d} \sum_{p>0} U''_p \overline{(y_n - y_{n+p})^2}. \quad (24.1)$$

В случае монохроматической волны, распространяющейся вправо,

$$y_n = A e^{i(\omega t - kn)}$$

и

$$\begin{aligned} \overline{(y_n - y_{n+p})^2} &= \frac{1}{2} \text{Re} (y_n - y_{n+p})(y_n - y_{n+p})^* = \\ &= \frac{A^2}{2} \text{Re} (1 - e^{-ikp})(1 - e^{ikp}) = A^2 (1 - \cos kp), \end{aligned} \quad (24.2)$$

так что в результате выражение для средней плотности потенциальной энергии принимает вид

$$\bar{E}_{\text{пот.}} = \frac{A^2}{2d} \sum_{p>0} U''_p (1 - \cos kp). \quad (24.3)$$

Аналогично для средней плотности кинетической энергии получаем, учитывая полученное выше соотношение (20.5), а также выражение (10.1),

$$\bar{E}_{\text{кин.}} = \frac{M}{4d} A^2 \omega^2 = \frac{A^2}{2d} \sum_{p>0} U''_p (1 - \cos kp). \quad (24.4)$$

Таким образом, окончательно имеем

$$\bar{E}_{\text{кин.}} = \bar{E}_{\text{пот.}} = \frac{1}{2} \bar{E} = \frac{A^2}{2d} \sum_{p>0} U''_p (1 - \cos kp), \quad (24.5)$$

где \bar{E} — средняя за период плотность полной энергии.

Тот факт, что взаимодействие распространяется на большие расстояния, усложняет вычисление потока энергии. Попытаемся найти выражение для распространяющегося вправо потока энергии, учитывая влияние всех ячеек, находящихся слева от некоторой данной частицы, которую мы выберем за начало отсчета ($n=0$). Мы можем найти силы, действующие со стороны частиц с отрицательными n ($n < 0$) на взаимодействующие с ними частицы, расположенные справа ($n > 0$). Сила $f_{n, n+p}$, действующая со стороны $(n+p)$ -й частицы на n -ю частицу, равна

$$f_{n, n+p} = U''_p (y_{n+p} - y_n).$$

Здесь приняты прежние обозначения, а индекс, указывающий номер частицы в ячейке, опущен, поскольку в случае одноатомной решетки каждая элементарная ячейка состоит только из одной частицы.

Средний за период поток энергии, соответствующий этой силе, определяется выражением

$$-\overline{f_{n, n+p} \cdot \dot{y}_n} = -\frac{1}{2} \text{Re} (f_{n, n+p} \cdot \dot{y}_n^*). \quad (24.6)$$

Знак минус связан с тем, что величина $f_{n, n+p}$ представляет силу, действующую со стороны $(n+p)$ -ой частицы на n -ю частицу, а не наоборот.

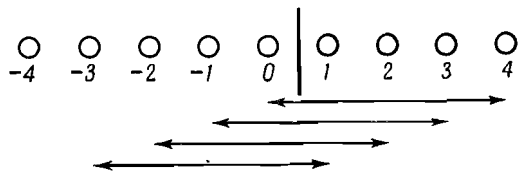
Правую часть соотношения (24.6) легко найти; действительно, учитывая известные выражения для y_n и y_{n+p} , получаем

$$\frac{1}{2} \operatorname{Re}(f_{n, n+p} \cdot \dot{y}_n^*) = \frac{A^2 U''}{2} \operatorname{Re}(e^{-ikp} - 1)(i\omega)^* = \\ = -\frac{1}{2} U'' A^2 \omega \sin kp,$$

и, таким образом, формула (24.6) принимает вид

$$-f_{n, n+p} \cdot \dot{y}_n^* = \frac{1}{2} U'' A^2 \omega \sin kp. \quad (24.7)$$

Поскольку каждая из частиц $n=0, -1, -2, \dots, -p+1$ взаимодействует с частицами, находящимися справа



Фиг. 66.

от нулевой частицы (фиг. 66), то в выражение для потока энергии, проходящего вдоль решетки через узел, в котором находится нулевая частица, входят p членов вида (24.7). Поэтому полный поток энергии будет определяться суммой p членов вида (24.7)

$$\Phi = \sum_p \frac{1}{2} U'' A^2 \omega p \sin kp, \quad (24.8)$$

а скорость распространения энергии U_e , согласно соотношению (20.11), будет равна

$$U_e = \frac{\Phi}{E} = \frac{\sum_p \frac{1}{2} U'' A^2 \omega p \sin kp}{\frac{M}{2d} A^2 \omega^2} = \frac{d}{M\omega} \sum_p U'' p \sin kp. \quad (24.9)$$

Легко убедиться, что полученное значение совпадает с групповой скоростью U_g . Действительно, по определению,

$$U_g = \frac{\partial v}{\partial |a|} = 2\pi d \frac{\partial v}{\partial k},$$

так как $k = 2\pi ad$. Учитывая теперь, что $\omega = 2\pi\nu$, запишем

$$U_g = 2\pi d \frac{\partial \omega}{\partial k} \frac{1}{2\pi} = d \frac{\partial \omega}{\partial k} = \frac{d}{2\omega} \frac{\partial \omega^2}{\partial k}.$$

Используя соотношение (10.1)

$$\omega^2 = \frac{2}{M} \sum_p U''_p (1 - \cos kp),$$

получаем

$$\frac{\partial \omega^2}{\partial k} = \frac{2}{M} \sum_p U''_p p \sin kp,$$

откуда окончательно имеем

$$U_g = \frac{d}{2\omega} \frac{2}{M} \sum_p U''_p p \sin kp = \frac{d}{M\omega} \sum_p U''_p p \sin kp = U_e, \quad (24.10)$$

что и требовалось доказать.

Выше мы определили характеристический импеданс при помощи соотношения

$$f_n = -Z \dot{y}_n, \quad (24.11)$$

где f_n — величина силы, действующей на n -ю частицу, а \dot{y}_n — ее скорость. Теперь необходимо учитывать, что на каждую из частиц действуют силы со стороны многих частиц и, следовательно, данное выше определение характеристического импеданса (24.11) становится неверным, так как оно не дает правильной величины характеристического импеданса, на который нужно было бы нагрузить оборванную справа на n -й частице решетку, чтобы отраженная волна отсутствовала. Для получения характеристического импеданса в данном случае необходимо скомбинировать импедансы, соответствующие первым L частицам от границы решетки. На путь, которому при этом надо следовать, указывает соотношение (23.2); в соответствии с ним мы положим, что

$$\Phi = \frac{1}{2} Z A^2 \omega^2, \quad (24.12)$$

где Z — характеристический импеданс, который, как легко видеть, всегда действителен. Тот факт, что Z представляет собой комбинацию импедансов, соответствующих различным граничным частицам, хотя и неявно, учитывается в этой

формуле, так как при вычислении полного потока энергии мы должны принимать во внимание большой радиус взаимодействия между частицами.

Заметим, что соотношение (24.12) эквивалентно соотношению

$$\Phi = \frac{1}{2} Z \overline{|y_n|^2}, \quad (24.13)$$

в чем легко убедиться, учитывая выражение для среднего значения скорости.

Это соотношение мы и примем в качестве определения характеристического импеданса одномерной решетки. Такая точка зрения не приводит ни к каким противоречиям с полученными выше результатами.

Определив поток Φ в задачах, относящихся к ограниченным структурам, а также связанных с соединением двух решеток, можно рассматривать только частицы, расположенные в граничной области; импеданс Z действителен, элементарная ячейка выбирается из соображений удобства.

Данное выше определение характеристического импеданса позволяет найти необходимые условия для того, чтобы от границы решетки не было отражения: решетка должна быть нагружена на свободном конце системой импедансов, результирующий импеданс которой должен быть равен характеристическому импедансу решетки. Однако это условие никоим образом не является достаточным, и картина, которая здесь имеет место, весьма схожа с картиной, рассмотренной нами в § 8 и 10, где обсуждался вопрос о стационарном равновесии.

Если элементарная ячейка решетки состоит из нескольких частиц различных сортов, задача усложняется, но ее можно рассмотреть по аналогии с предыдущей: средняя плотность кинетической и потенциальной энергий ищется как сумма энергий различных частиц, образующих элементарную ячейку, деленная на ее длину d ; поток энергии Φ в месте соединения двух ячеек вычисляется с учетом вклада, даваемого всеми частицами ячейки. Определив таким образом поток энергии и среднюю плотность полной энергии, можно, используя соотношение (20.11), найти скорость распространения энергии, которая в случае структур, характеризующихся отсутствием затухания, равна групповой скорости [см. формулу (21.5)].

Кривая зависимости $v(a)$ частоты от волнового числа в граничных точках $a = \pm 1/2d$ основного интервала имеет всегда горизонтальную касательную. При этом групповая скорость $d\omega/da$ равна нулю, что вполне соответствует данной выше интерпретации волн в этом случае как стоячих волн. Мы уже отмечали это при изучении решетки NaCl для волн, соответствующих частотам ω_1 и ω_2 , которые являются границами полос пропускания (см. гл. 4).

Определение характеристического импеданса становится все более трудным, и его физический смысл постепенно теряется. Он может, как указывалось выше, принимать различные значения в зависимости от характера распределения Z между частицами последней ячейки. Вообще говоря, значение Z определяет необходимые условия, но никоим образом не достаточные для того, чтобы отражение не имело места.

В заключение подчеркнем важность таких понятий, как поток энергии, плотность энергии, скорость распространения энергии, а также понятия групповой и фазовой скоростей распространения. Эти понятия были взяты из теоретической физики и могут быть обобщены на случай двух и трех измерений. Например, для электромагнитных волн поток энергии в наиболее общем случае определяется через вектор Умова — Пойнтинга.

Понятие характеристического импеданса, или волнового сопротивления, заимствовано из электротехники. Им постоянно пользуются при изучении одномерных структур, характеризующихся взаимодействием между смежными элементами, например в задачах о фильтрах, кабелях и электрических линиях. Распространение этого понятия на системы, характеризующиеся дальними взаимодействиями, встречается, как было показано, определенные трудности. Обобщение же его на случай двух и трех измерений носит, несмотря на ряд интересных примеров, довольно искусственный характер¹⁾.

¹⁾ См. Schelkunoff, *Electromagnetic Waves*, Chap. XII, New York, 1943.

**ПРОБЛЕМА ГРАНИЦ
И ОГРАНИЧЕННЫЕ ПЕРИОДИЧЕСКИЕ
СТРУКТУРЫ**

§ 25. Введение. Полиномы Гегенбауэра

Как известно, производящая функция полиномов Лежандра имеет вид

$$(1 - 2xh + h^2)^{-1/2},$$

поэтому, обозначая через P_n полином n -го порядка, можно записать

$$(1 - 2xh + h^2)^{-1/2} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x) h^n \text{ при } |x|, |h| < 1.$$

Обобщая вид производящей функции полиномов Лежандра, Гегенбауэр пришел к обобщенным полиномам, известным под названием полиномов Гегенбауэра и обозначаемым через $C_n^\nu(x)$. Их производящая функция имеет вид

$$(1 - 2xh + h^2)^{-\nu},$$

где ν — любое рациональное положительное число. Таким образом,

$$(1 - 2xh + h^2)^{-\nu} = \sum_{n=0}^{\infty} C_n^\nu(x) h^n \text{ при } |x|, |h| < 1.$$

Полиномы $C_n^\nu(x)$ удовлетворяют следующему рекуррентному соотношению:

$$(n + 1) C_{n+1}^\nu(x) - 2(n + \nu) x C_n^\nu(x) + (n - 1 + 2\nu) C_{n-1}^\nu(x) = 0, \quad (25.1)$$

а также дифференциальному уравнению¹⁾

$$(1 - x^2) \frac{d^2 y}{dx^2} - (2\nu + 1) x \frac{dy}{dx} + n(n + 2\nu) y = 0.$$

¹⁾ См., например, M. Parodi, Cours d'Analyse appliquée, fasc. IV, Centre de Documentation universitaire, Paris, 1953.

Кроме того, они ортогональны с весом $(1 - x^2)^{\nu-1/2}$ на интервале $(-1, +1)$; иначе говоря,

$$\int_{-1}^{+1} (1 - x^2)^{\nu-1/2} C_m^\nu(x) C_n^\nu(x) dx = 0$$

при $m \neq n$.

Полагая $\nu = 1/2$, приходим к полиномам Лежандра и известным соотношениям, которым они удовлетворяют.

При $\nu = 1$ получаем полиномы Гегенбауэра $C_n^1(x)$, наиболее существенные свойства которых мы сейчас укажем, поскольку эти полиномы играют важную роль при изучении ограниченных периодических структур. Отметим, что полиномы $C_n^1(x)$ иногда называют электросферическими полиномами¹⁾. Это название дано Гюе и Обером, которые встретились с ними в теории электрометра.

При $\nu = 1$ рекуррентное соотношение (25.1) принимает вид

$$C_{n+1}^1(x) - 2xC_n^1(x) + C_{n-1}^1(x) = 0, \quad (25.2)$$

причем

$$C_0^1(x) = 1, \quad C_1^1(x) = 2x,$$

что непосредственно следует из разложения производящей функции в ряд по возрастающим степеням h .

Степень такого полинома равна порядку полинома, и все члены его имеют одинаковую четность; его нули действительны и заключены в интервале $(-1, +1)$, как это следует из соотношений ортогональности, которым эти полиномы удовлетворяют. Например,

$$C_2^1(x) = 4x^2 - 1, \quad C_3^1(x) = 8x^3 - 4x,$$

$$C_4^1(x) = 16x^4 - 12x^2 + 1.$$

Полагая $x = \cos \theta$, при $|x| < 1$ получаем

$$C_1^1(\cos \theta) = 2 \cos \theta = \frac{\sin 2\theta}{\sin \theta},$$

$$C_2^1(\cos \theta) = 4 \cos^2 \theta - 1 = \frac{\sin 3\theta}{\sin \theta}$$

¹⁾ См., например, M. Parodi, Application des polynômes électrosphériques à l'étude des systèmes oscillants à un grand nombre de degrés de liberté (Mém. Sc. phys., Paris, 1944).

и вообще

$$C_n^1(\cos \theta) = \frac{\sin(n+1)\theta}{\sin \theta}, \quad (25.3)$$

что легко доказать методом индукции.

Аналогично, полагая $x = \operatorname{ch} \theta$, при $|x| > 1$ получаем

$$C_n^1(\operatorname{ch} \theta) = \frac{\operatorname{sh}(n+1)\theta}{\operatorname{sh} \theta}. \quad (25.4)$$

Из выражения (25.3) непосредственно следует, что полином $C_n^1(x)$ имеет n нулей внутри интервала $(-1, +1)$ при значениях аргумента

$$x_k = \cos \frac{k\pi}{n+1}, \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

Для этих полиномов можно получить выражение в виде детерминанта, которое пригодится нам в дальнейшем.

Полагая произвольно $C_{-1}^1(x) = 0$, можно написать ряд последовательных соотношений

$$\begin{aligned} C_n^1 - 2xC_{n-1}^1 + C_{n-2}^1 &= 0, \\ C_{n-1}^1 - 2xC_{n-2}^1 + C_{n-3}^1 &= 0, \\ \dots & \\ C_2^1 - 2xC_1^1 &= -C_0^1 = -1, \\ C_1^1 &= 2xC_0^1 = 2x. \end{aligned} \quad (25.5)$$

Эти соотношения можно рассматривать как систему алгебраических уравнений относительно неизвестных $C_1^1(x)$, $C_2^1(x)$... $C_n^1(x)$. Детерминант, составленный из коэффициентов при неизвестных, очевидно, равен единице; в результате элементарных преобразований получаем выражение для полинома $C_n^1(x)$ в виде детерминанта n -го порядка

$$C_n^1(x) = \begin{vmatrix} 2x & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 2x & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 2x & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 2x \end{vmatrix}. \quad (25.6)$$

Укажем, наконец, что полиномы $C_n^1(x)$ можно выразить как функции корней некоторого уравнения второй степени. Действительно, рассмотрим рекуррентное соотношение

$$C_{n+2}^1 - 2xC_{n+1}^1 + C_n^1 = 0 \quad (25.7)$$

и будем искать решение для полиномов $C_n^1(x)$ в виде

$$C_n^1(x) = r^n.$$

Подставляя это решение в (25.7), получаем для неизвестного r уравнение второй степени, определяющее r как функцию x ,

$$r^2 - 2xr + 1 = 0.$$

Его корнями будут

$$r_1 = x + \sqrt{x^2 - 1}, \quad r_2 = x - \sqrt{x^2 - 1}.$$

Таким образом, общее решение (25.7) будет

$$C_n^1(x) = A(x + \sqrt{x^2 - 1})^n + B(x - \sqrt{x^2 - 1})^n, \quad (25.8)$$

где значения величин A и B определяются, исходя из известных выражений для первых двух полиномов $C_0^1(x) = 1$ и $C_1^1(x) = 2x$; учитывая это, получаем систему

$$\begin{aligned} 1 &= A + B, \\ 2x &= A(x + \sqrt{x^2 - 1}) + B(x - \sqrt{x^2 - 1}), \end{aligned}$$

откуда

$$A = \frac{x + \sqrt{x^2 - 1}}{2\sqrt{x^2 - 1}}, \quad B = \frac{-x + \sqrt{x^2 - 1}}{2\sqrt{x^2 - 1}}.$$

Итак, окончательно имеем

$$C_n^1(x) = \frac{(x + \sqrt{x^2 - 1})^{n+1} - (x - \sqrt{x^2 - 1})^{n+1}}{2\sqrt{x^2 - 1}} = \frac{r_1^{n+1} - r_2^{n+1}}{r_1 - r_2}. \quad (25.9)$$

Отметим, что, полагая в выражении (25.9) $x = \operatorname{ch} \theta$ или $x = \cos \theta$ в зависимости от того $|x| > 1$ или $|x| < 1$, получаем либо формулу (25.3), либо (25.4).

условие разрешимости которой приводит к

$$C_n^1(x) = \begin{vmatrix} 2x & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 2x & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 2x \end{vmatrix} = 0,$$

где

$$\frac{\frac{2T}{a} - \mu\omega^2}{\frac{T}{a}} = -2x.$$

Как легко видеть, этот детерминант представляет собой не что иное, как полином Гегенбауэра $C_n^1(x)$ порядка n . Следовательно, существует n различных значений x

$$x = \cos \frac{k'\pi}{n+1}, \quad k' = 1, 2, \dots, n$$

и соответственно n собственных частот системы, равных

$$\nu_{k'} = \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{T}{a\mu}} \cos \frac{k'\pi}{2(n+1)}, \quad k' = 1, 2, \dots, n$$

или

$$\nu_k = \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{T}{a\mu}} \sin \frac{k\pi}{2(n+1)}, \quad k = 1, 2, \dots, n. \quad (26.2)$$

Мы получили, что число различных собственных частот системы снова равно числу степеней свободы, т. е. числу подвижных частиц системы.

Нормальные типы колебаний, соответствующие собственной частоте ν_k , имеют, как легко убедиться, вид

$$y_p = A_k \sin \frac{pk\pi}{n+1} \cos \left[2 \sqrt{\frac{T}{a}} \sin \frac{k\pi}{2(n+1)} t - \varphi_k \right],$$

$$p = 1, 2, \dots, n,$$

где A_k и φ_k — некоторые постоянные, значения которых зависят от номера k .

В более общем виде движение системы можно описать формулой

$$y_p = \sum_{k=1}^n A_k \sin \frac{pk\pi}{n+1} \cos \left[2 \sqrt{\frac{T}{a}} \sin \frac{k\pi}{2(n+1)} t - \varphi_k \right].$$

Попытаемся теперь сделать переход к непрерывной структуре.

Вернемся к выражению (26.2) для собственных частот системы. Замечая, что

$$a = \frac{l}{n+1}, \quad \mu = \frac{\rho l}{n+1},$$

его можно записать в виде

$$\nu_k = \frac{1}{\pi} \frac{n+1}{l} \sqrt{\frac{T}{\rho}} \sin \frac{k\pi}{2(n+1)}, \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

Устремим теперь n к бесконечности. Тогда в пределе получим

$$\nu_k = \frac{k}{2l} \sqrt{\frac{T}{\rho}}, \quad k = 1, 2, \dots$$

Это хорошо известное соотношение, которое легко получается из уравнения в частных производных, описывающего движение колеблющейся струны. При $k=1$ получаем частоту основной гармоники

$$\nu = \frac{1}{2l} \sqrt{\frac{T}{\rho}}.$$

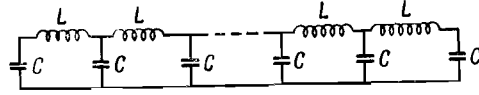
Задача, которую мы рассматривали вначале, представляет собой не что иное, как задачу о поперечных колебаниях цепочки, состоящей из одинаковых частиц, расположенных на равных расстояниях друг от друга, причем предполагалось, что крайние частицы упруго связаны с двумя фиксированными точками, а каждая из частиц взаимодействует только со смежными частицами.

Если бы мы не имели в виду осуществление предельного перехода к непрерывной струне, то можно было бы обсудить эту задачу, вводя только коэффициент пропорциональности k между силой и разностью смещений $y_p - y_{p-1}$, что в случае малых смещений всегда эквивалентно предположению о том, что силы, действующие между частицами, пропорциональны изменению расстояния между ними. Уравнения движения при этом будут иметь вид (26.1), с той лишь разницей, что входящее в них отношение T/a нужно заменить на величину k .

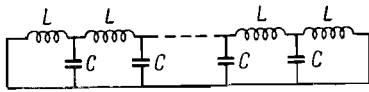
Очевидно, что полученные таким образом уравнения справедливы при тех же предположениях о характере взаимодействия и для малых продольных колебаний цепочки частиц. При этом величины y_p представляют уже малые продольные смещения частиц от своего положения равновесия,

изображенные на фиг. 70—72. Чтобы получить их, достаточно обратиться к соответствиям, рассмотренным в § 12.

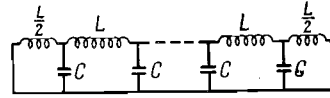
Результаты, полученные для механических систем, непосредственно переносятся на электрические системы; так,



Фиг. 70.



Фиг. 71.



Фиг. 72.

например, получаем, что собственные частоты заключены в интервале $(0, 1/\pi \sqrt{1/LC})$. Наконец, заметим, что с помощью полиномов Гегенбауэра $C_n^1(x)$ можно также найти собственные частоты фильтра верхних частот, который аналогичен фильтру, представленному на фигуре 17, но состоит из конечного числа элементарных ячеек.

§ 27. Другая точка зрения на фильтр

Только что рассмотренные нами системы, как механические, так и электрические, имели n степеней свободы и n собственных частот, значения которых заключены в некотором конечном интервале, причем величина этого интервала не зависит от числа n элементарных ячеек, образующих данную систему.

Рассмотрим для простоты цепочку частиц, изображенную на фиг. 63, и предположим, что крайняя левая частица совершает гармонические колебания с некоторой заданной частотой, т. е. задано ее смещение $y = Y \cos 2\pi\nu t$. Если частота колебания совпадает с одной из собственных частот системы, то наблюдается резонанс. Предположим теперь, что число элементарных ячеек, из которых состоит рассматриваемая система, неограниченно возрастает. Тогда число соб-

ственных частот также неограниченно возрастает, и так как все они должны быть заключены внутри интервала, имеющего постоянную конечную величину, то расстояние между ними стремится к нулю. Таким образом, мы переходим к системе, собственные частоты которой образуют непрерывную последовательность и заключены в ограниченном интервале. Следовательно, колебания крайней левой частицы с частотой, лежащей внутри этого интервала, должны приводить к эффектам гораздо более значительным, чем в случае, когда частота колебаний лежит вне этого интервала, т. е. мы снова приходим к понятию фильтра.

В качестве иллюстрации вышеизложенного рассмотрим движение последней частицы механической системы, представленной на фиг. 69, в том случае, когда к частице, расположенной на левом конце системы, приложена сила, изменяющаяся по закону

$$f = kA \cos \omega t = \operatorname{Re} kAe^{i\omega t}.$$

Соответствующие уравнения движения будут таковы:

$$\begin{aligned} \frac{\mu}{2} \ddot{y}_1 + k(y_1 - y_2) &= kAe^{i\omega t}, \\ \mu \ddot{y}_p + k(-y_{p-1} + 2y_p - y_{p+1}) &= 0, \\ \frac{\mu}{2} \ddot{y}_n + k(-y_{n-1} + y_n) &= 0. \end{aligned} \tag{27.1}$$

Стационарные решения этих уравнений можно искать в виде $y_p = A_p e^{i\omega t}$. Полагая $2x = -2 + (\mu/k)\omega^2$, приходим к системе линейных уравнений, определяющих неизвестные A_p ,

$$\begin{aligned} xA_1 + A_2 &= -A, \\ A_{p-1} + 2xA_p + A_{p+1} &= 0, \\ A_{n-1} + xA_n &= 0, \end{aligned} \tag{27.2}$$

Если ввести новые величины x_1 и x_2 :

$$2 - \frac{M_1}{k} \omega^2 = -2x_1,$$

$$2 - \frac{M_2}{k} \omega^2 = -2x_2,$$

то условие разрешимости системы (28.2) можно представить в виде

$$\begin{vmatrix} 2x_1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 2x_2 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 2x_1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 2x_2 \end{vmatrix} = 0,$$

где слева стоит детерминант $2m$ -го порядка.

Умножая каждую строку, которая содержит элементы с x_1 на $\sqrt{x_2}$, каждую строку, которая содержит элементы с x_2 , на $\sqrt{x_1}$ и деля столбцы, содержащие x_1 , на $\sqrt{x_1}$, а столбцы, содержащие x_2 , на $\sqrt{x_2}$, полученный выше детерминант можно представить в виде

$$\begin{vmatrix} 2\sqrt{x_1x_2} & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 2\sqrt{x_1x_2} & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 2\sqrt{x_1x_2} \end{vmatrix} =$$

$$= C_{2m}^1 (\sqrt{x_1x_2}) = \frac{\sin(2m+1)\theta}{\sin\theta},$$

где

$$\sqrt{x_1x_2} = \cos\theta.$$

Отсюда легко видеть, что система уравнений (28.2) имеет нетривиальные решения при значениях величин x_1 и x_2 , удовлетворяющих соотношению

$$\sqrt{x_1x_2} = \cos_{2m+1}^{\lambda\pi}, \quad \lambda = 1, 2, \dots, 2m,$$

и, следовательно, собственные частоты рассматриваемой системы из $2m$ частиц определяются следующим соотношением:

$$\left(2 - \frac{M_1}{k} \omega^2\right) \left(2 - \frac{M_2}{k} \omega^2\right) = 4 \cos^2 \frac{\lambda\pi}{2m+1},$$

где теперь уже $\lambda = 1, 2, \dots, m$, поскольку при целых положительных p ($1 \leq p \leq m$)

$$\cos^2 \frac{p\pi}{2m+1} = \cos^2 \left(\frac{2m+1-p}{2m+1} \pi \right).$$

Уравнение для определения собственных частот можно записать в виде

$$\frac{M_1 M_2}{k^2} \omega^4 - \frac{2\omega^2}{k} (M_1 + M_2) + 4 \sin^2 \frac{\lambda\pi}{2m+1} = 0,$$

$$\lambda = 1, 2, \dots, m,$$

и, таким образом, для собственных частот получаем две группы значений:

$$\omega_+^2 = k \left[\frac{1}{M_1} + \frac{1}{M_2} + \sqrt{\left(\frac{1}{M_1} + \frac{1}{M_2}\right)^2 - \frac{4}{M_1 M_2} \sin^2 \frac{\lambda\pi}{2m+1}} \right],$$

$$\omega_-^2 = k \left[\frac{1}{M_1} + \frac{1}{M_2} - \sqrt{\left(\frac{1}{M_1} + \frac{1}{M_2}\right)^2 - \frac{4}{M_1 M_2} \sin^2 \frac{\lambda\pi}{2m+1}} \right]. \quad (28.3)$$

Эти выражения аналогичны выражениям (13.6) с той лишь разницей, что в данном случае стоящий под радикалом синус может принимать лишь дискретные значения. Частоты ω_+ и ω_- расположены на верхней и нижней ветвях кривой $\nu = \nu(k)$, изображенной на фиг. 49.

Заметим, что предыдущие выражения для частот снова позволяют найти значения граничных частот ω_1 , ω_2 и ω_3 , которые были уже получены нами в § 5 в предположении, что $M_1 > M_2$. С другой стороны, рассуждая аналогично тому, как это делалось в § 27, для случая ограниченной системы также можно ввести понятие полосового фильтра.

В только что рассмотренном примере мы предполагали, что крайние частицы решетки принадлежали к различным типам частиц. Рассмотрим случай, когда они принадлежат к одному типу частиц. При этом полное число частиц нечетно, т. е.

$$n = 2m + 1.$$

Тогда, полагая, что масса крайних частиц равна, например, M_1 , и сохраняя принятые выше обозначения, легко получить, что условие разрешимости соответствующей системы уравне-

Полагая $y_p = A_p e^{i(\omega t - \varphi)}$ и обозначая

$$-2x_1 = 2 - \frac{M_1}{k} \omega^2, \quad -2x_2 = 2 - \frac{M_2}{k} \omega^2,$$

находим условие разрешимости системы уравнений для амплитуд A_p :

$$\begin{vmatrix} 2x_1 + 1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 2x_2 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 2x_1 + 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Представим стоящий в левой части детерминант в виде четырех известных детерминантов

$$\begin{aligned} & \sqrt{\frac{x_1}{x_2}} C_{2m+1}^1(\sqrt{x_1 x_2}) + C_{2m}^1(\sqrt{x_1 x_2}) + \\ & + \sqrt{\frac{x_2}{x_1}} C_{2m}^1(\sqrt{x_1 x_2}) + \sqrt{\frac{x_2}{x_1}} C_{2m-1}^1(\sqrt{x_1 x_2}) = \\ & = \frac{x_1 \sin(2m+1)\theta + 2\sqrt{x_1 x_2} \sin(2m+1)\theta + x_2 \sin 2m\theta}{\sin \theta \cos \theta}, \end{aligned}$$

где

$$\sqrt{x_1 x_2} = \cos \theta.$$

Отсюда после ряда элементарных преобразований получаем уравнение для определения собственных частот системы

$$\frac{2[\sqrt{x_1} \sin(m+1)\theta + \sqrt{x_2} \sin m\theta][\sqrt{x_1} \cos(m+1)\theta + \sqrt{x_2} \cos m\theta]}{\sin \theta \cos \theta} = 0. \quad (28.8)$$

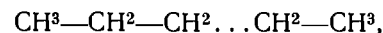
§ 29. Приложение полиномов Гегенбауэра $C_n^1(x)$ к изучению „зигзагообразных“ структур; собственные частоты колебаний цепочек молекул парафинов

Изучение малых колебаний цепочки со свободными концами, состоящей из n частиц с одинаковыми массами μ , расположенных вдоль некоторой прямой на равных расстояниях друг от друга, представляет несколько академический интерес.

Тем не менее некоторые физики, как, например, Леннард-Симонс¹⁾, использовали эту модель для определения соб-

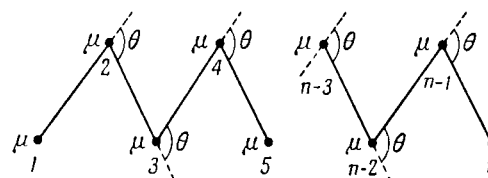
¹⁾ Lennard-Simmons, Societas Scientiarum Fennica, Comm. phys. math., 8, 295 (1936).

ственных частот длинных углеродных цепочек



предполагая, что их можно уподобить некоторой последовательности колеблющихся масс (соответствующих радикалам), расположенных так, как это указано на фиг. 68.

Результаты, полученные в этом предположении, могут дать только весьма приближенное отражение действительности не столько в силу предположения о том, что частицы, представляющие радикалы, идентичны, что в общем законно, сколько потому, что, как показывает рентгеноструктурный



Фиг. 73.

анализ, эти алифатические цепочки должны быть уподоблены последовательности частиц, расположенных в вершинах плоской „зигзагообразной“ кривой (фиг. 73).

Оставаясь в рамках предположения о том, что все радикалы могут быть представлены в виде одинаковых частиц, покажем, как можно определить собственные частоты подобных структур.

Итак, мы будем предполагать, что система состоит из n одинаковых частиц с массой μ , расположенных, как это показано на фиг. 73, таким образом, что угол между двумя прямыми, проведенными из точки, в которой находится какая-либо частица, по направлению к двум смежным с ней частицам, равен $\pi - \theta$. Обозначая через l_i изменение расстояния между i -й и $(i+1)$ -й частицами, напишем уравнения движения в предположении, что потенциальная энергия системы зависит только от взаимного расстояния между частицами, пренебрегая, таким образом, зависимостью потенциальной энергии от угла θ , которая, кстати говоря, относительно слаба.

Напишем для каждой частицы уравнение, описывающее ее движение вдоль оси xx' , совпадающей с прямой, соединяющей две соседние рассматриваемые частицы.

Обозначая через x_i и x_{i+1} малые смещения вдоль оси xx' i -й и $(i+1)$ -й частиц соответственно, а через k -коэффициент пропорциональности между силой и смещением, можно написать

$$\begin{aligned}\mu \ddot{x}_i + k [l_{i-1} \cos \theta - l_i] &= 0, \\ \mu \ddot{x}_{i+1} + k [l_i - l_{i+1} \cos \theta] &= 0,\end{aligned}$$

или

$$\mu [\ddot{x}_{i+1} - \ddot{x}_i] + k [2l_i - (l_{i-1} + l_{i+1}) \cos \theta] = 0.$$

Отсюда, замечая, что $x_{i+1} - x_i = l_i$, получаем окончательно

$$\mu \ddot{l}_i + k [2l_i - (l_{i-1} + l_{i+1}) \cos \theta] = 0,$$

так что система уравнений, описывающих колебания рассматриваемой системы, будет иметь вид

$$\begin{aligned}\mu \ddot{l}_1 + k [2l_1 - l_2 \cos \theta] &= 0, \\ \dots \dots \dots \\ \mu \ddot{l}_i + k [2l_i - (l_{i-1} + l_{i+1}) \cos \theta] &= 0, \\ \dots \dots \dots \\ \mu \ddot{l}_{n-1} + k [2l_{n-1} - l_{n-2} \cos \theta] &= 0.\end{aligned} \quad (29.1)$$

Полагая теперь $l_i = L_i e^{i(\omega t - \varphi)}$, приходим к системе линейных однородных уравнений относительно неизвестных L_1, L_2, \dots, L_{n-1}

$$\begin{aligned}(2k - \mu\omega^2) L_1 - k \cos \theta L_2 &= 0, \\ \dots \dots \dots \\ -k \cos \theta L_{i-1} + (2k - \mu\omega^2) L_i - k \cos \theta L_{i+1} &= 0, \\ \dots \dots \dots \\ -k \cos \theta L_{n-2} + (2k - \mu\omega^2) L_{n-1} &= 0.\end{aligned} \quad (29.2)$$

Условие разрешимости системы (29.2) имеет вид

$$C_{n-1}^1(x) = 0,$$

где

$$2x = -\frac{2k - \mu\omega^2}{k \cos \theta}.$$

Поэтому собственные частоты рассматриваемой системы равны

$$\nu_\lambda = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{2k}{\mu}} \sqrt{1 + \cos \theta \cos \frac{\lambda\pi}{n}}, \quad \lambda = 1, 2, \dots, (n-2). \quad (29.3)$$

Следует указать, что величина $(1/2\pi) \sqrt{2k/\mu}$ представляет собой собственную частоту колебаний двух соседних частиц массы μ . Эту частоту, так же как и величину угла θ , можно найти экспериментально. Таким образом, оказывается возможным, разумеется при условии справедливости сделанных предположений, определить все собственные частоты рассматриваемой углеродной цепочки. В упомянутой выше работе Пароди можно найти сравнение экспериментальных и теоретических результатов. Укажем также на важную работу Барриоля и Шапелля¹⁾, в которой эта задача решается с учетом зависимости потенциальной энергии от угла θ . Только что описанный метод вычисления собственных частот алифатических цепочек можно использовать также для определения собственных частот циклических углеводородов, таких, например, как циклопентан, циклогексан и т. п.

Поскольку все радикалы имеют одинаковые массы, то их можно заменить материальными частицами с той же самой массой, расположенными в вершинах правильного многоугольника. Сохраняя предположение, сделанное выше относительно потенциальной энергии, обозначим через k константу связи, а через θ полный угол между двумя последовательными связями; в качестве переменных выберем изменение расстояния между двумя соседними частицами. Предполагая, что частицы испытывают вблизи положения равновесия гармонические колебания частоты ω , и обозначая через L_i амплитуды этих колебаний, получаем систему n линейных уравнений относительно L_i

$$\begin{aligned}-kL_n \cos \theta + L_1(2k - m\omega^2) - kL_2 \cos \theta &= 0, \\ -kL_1 \cos \theta + L_2(2k - m\omega^2) - kL_3 \cos \theta &= 0, \\ \dots \dots \dots \\ -kL_{n-1} \cos \theta + L_n(2k - m\omega^2) - kL_1 \cos \theta &= 0.\end{aligned} \quad (29.4)$$

1) См. Barriol, Chappelle, Journ. de Phys., 8, 8 (1947).

Таким образом, вычисление собственных частот сводится к нахождению корней уравнения

$$\begin{vmatrix} x & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \\ 1 & x & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & x & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & x \end{vmatrix} = 0,$$

где
$$x = -\frac{2k - m\omega^2}{k \cos \theta}.$$

Этот детерминант n -го порядка обращается в нуль при

$$x = -2,$$

$$x_p = -2 \cos \frac{2p\pi}{n}, \quad p = 1, 2, \dots, (n-1).$$

Полагая

$$\nu_0 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{2k}{m}},$$

где ν_0 представляет собой собственную частоту колебаний двух соседних частиц с массой m , получаем, что собственные частоты системы равны

$$\nu = \nu_0 \sqrt{1 - \cos \theta}, \quad \nu_p = \nu_0 \sqrt{1 - \cos \theta \cos \frac{2\pi p}{n}} \quad (29.5)$$

при $p = 1, 2, \dots, (n-1).$

Поскольку, как уже было указано, величина ν_0 известна, то можно определить и все собственные частоты рассматриваемой циклической цепочки.

Заметим, наконец, что изложенный выше метод может быть использован также для вычисления собственных частот циклических цепочек, состоящих из двух типов частиц соответственно с массами m и M , расположенных попеременно в вершинах правильного многоугольника. Предполагая, что полное число частиц n четно, и сохраняя прежние обозначения, можно показать¹⁾, что в рамках сделанных выше

¹⁾ См. M. Parodi, Compt. Rend., 231, 609 (1950)

предположений собственные частоты этих систем определяются из соотношения

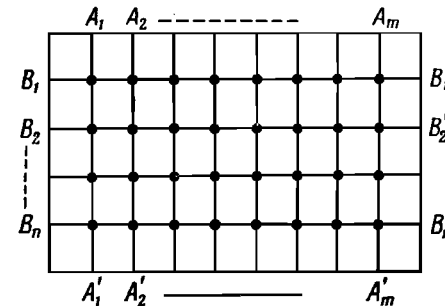
$$\frac{(2k - m\omega^2)(2k - M\omega^2)}{k^2 \cos^2 \theta} = 4 \cos^2 \frac{2\lambda\pi}{n}, \quad (29.6)$$

$$\lambda = 0, 1, 2, \dots, (n-1).$$

§ 30. Обобщение

Как было показано Резерфордом²⁾, полученные выше результаты можно распространить на случай двух и трех измерений.

Рассмотрим, например, двумерную решетку, образованную из одинаковых частиц с массой M , которые расположены,



Фиг. 74.

как это показано на фиг. 74, на равных расстояниях d друг от друга в узлах сетчатой структуры, состоящей из n горизонтальных и m вертикальных рядов.

Предположим, что смещения частиц от своего положения равновесия малы, а силы пропорциональны изменению взаимного расстояния между соседними частицами (константа пропорциональности равна k).

Тогда, полагая

$$-2x = \frac{4k - M\omega^2}{k},$$

²⁾ См. D. E. Rutherford, Proc. Roy. Soc. Edinburgh, 42, 154 (1943—1949).

где ω — частота колебаний, можно показать, что значения x , позволяющие определить собственные частоты системы, равны

$$x = \cos \frac{\lambda\pi}{m+1} + \cos \frac{\mu\pi}{n+1}, \quad (30.1)$$

$$\lambda = 1, 2, \dots, m, \quad \mu = 1, 2, \dots, n$$

в случае, если крайние частицы каждого ряда упруго связаны с фиксированными точками $A_1, A'_1 \dots A_m, A'_m$ и $B_1, B'_1 \dots B_n, B'_n$. Если же крайние частицы каждого ряда свободны, то соответствующие значения величины x будут равны

$$x = \cos \frac{\lambda\pi}{m} + \cos \frac{\mu\pi}{n}, \quad (30.2)$$

$$\lambda = 1, 2, \dots, m,$$

$$\mu = 1, 2, \dots, n.$$

Применение этих методов расчета в других случаях можно найти в указанной выше работе Резерфорда.

ДВУМЕРНЫЕ РЕШЕТКИ

§ 31. Прямые и обратные двумерные решетки

Изучение двумерных решеток встречается на своем пути такого же рода трудности, как и изучение трехмерных решеток. Однако поскольку двумерные решетки легче себе представить, то мы считаем целесообразным до перехода к трехмерному случаю рассмотреть случай двух измерений. Изучению двумерных систем и посвящается настоящая глава.

Вначале мы рассмотрим плоскую решетку из одинаковых частиц, расположенных на равных расстояниях друг от друга вдоль прямых, параллельных двум заданным прямым Δ_1 и Δ_2 , образующим между собой угол θ . Затем мы распространим полученные результаты на более сложные структуры.

Решетка, которую мы будем рассматривать, представлена на фиг. 75, где частицы изображены светлыми кружками. Заметим, что расстояние d_1 между двумя соседними частицами, расположенными вдоль прямой, параллельной Δ_1 , не обязательно равно расстоянию d_2 между двумя соседними частицами, расположенными вдоль прямой, параллельной направлению Δ_2 .

Мы будем определять решетку заданием двух так называемых *базисных векторов* \mathbf{d}_1 и \mathbf{d}_2 , выходящих из точки, в которой находится одна из частиц решетки; эту точку мы будем называть „началом решетки“. Тогда любую точку решетки можно определить заданием вектора $\mathbf{r}_{l_1 l_2}$, проведенного из начала решетки в рассматриваемую точку. Этот вектор можно представить в виде разложения по базисным векторам

$$\mathbf{r}_{l_1 l_2} = l_1 \mathbf{d}_1 + l_2 \mathbf{d}_2, \quad (31.1)$$

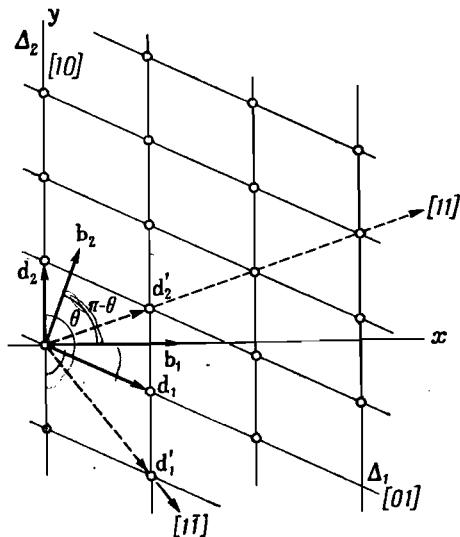
где l_1 и l_2 — целые числа.

Очевидно, что система базисных векторов не является единственной; с таким же успехом мы могли бы взять

в качестве такой системы векторы \mathbf{d}'_1 и \mathbf{d}'_2 (см. фиг. 75). В общем случае в качестве системы базисных векторов можно выбрать любую пару линейно независимых векторов \mathbf{d}''_1 и \mathbf{d}''_2 , определяемых при помощи соотношений

$$\begin{aligned} \mathbf{d}''_1 &= m_1 \mathbf{d}_1 + n_1 \mathbf{d}_2 \\ \mathbf{d}''_2 &= m_2 \mathbf{d}_1 + n_2 \mathbf{d}_2 \end{aligned} \quad \frac{m_1}{m_2} \neq \frac{n_1}{n_2}, \quad (31.2)$$

где m_1 , m_2 , n_1 и n_2 — такие целые числа, что площадь ячейки, построенной на векторах \mathbf{d}''_1 и \mathbf{d}''_2 , равна площади



Фиг. 75.

ячейки, построенной на векторах \mathbf{d}_1 и \mathbf{d}_2 . В противном случае рассматриваемая простая решетка преобразуется в решетку с базисом, представляющую собой структуру, которая будет определена в § 37.

Векторы \mathbf{d}''_1 и \mathbf{d}''_2 соответствуют вектору $n\mathbf{d}$ (n — целое), который можно было бы ввести в случае одномерных решеток. Там мы полагали $n=1$, т. е. за базисный вектор выбирали отличный от нуля вектор, имеющий наименьшую длину.

Решетка, образованная из частиц одного сорта, расположенных на равных расстояниях друг от друга вдоль двух семейств прямых, параллельных двум заданным направлениям, полностью определяется заданием базисных векторов \mathbf{d}_1 и \mathbf{d}_2 . Такая решетка носит название *прямой решетки*.

Каждой прямой решетке можно привести в соответствие решетку, называемую *обратной решеткой*, которая в качестве системы базисных векторов имеет векторы \mathbf{b}_1 и \mathbf{b}_2 , определяемые из соотношений

$$(\mathbf{b}_i \cdot \mathbf{d}_k) = \delta_{ik} \quad \begin{matrix} i = 1, 2, \\ k = 1, 2. \end{matrix} \quad (31.3)$$

где δ_{ik} — символ Кронекера

$$\delta_{ik} = \begin{cases} 0 & i \neq k, \\ 1 & i = k. \end{cases} \quad (31.4)$$

Причину, которая привела к термину „обратная решетка“ легко понять из следующих простых соображений. Рассмотрим прямоугольную систему координат (Ox , Oy), начало которой совпадает с началом решетки. Тогда векторы \mathbf{d}'_1 и \mathbf{d}'_2 могут быть определены заданием их декартовых координат

$$\begin{aligned} \mathbf{d}'_1 &= (d_{1x}, d_{1y}), \\ \mathbf{d}'_2 &= (d_{2x}, d_{2y}) \end{aligned} \quad (31.5)$$

или, в матричной записи, заданием матрицы

$$D = \begin{pmatrix} d_{1x} & d_{1y} \\ d_{2x} & d_{2y} \end{pmatrix}. \quad (31.6)$$

Аналогично система базисных векторов обратной решетки определяется матрицей

$$B = \begin{pmatrix} b_{1x} & b_{1y} \\ b_{2x} & b_{2y} \end{pmatrix}, \quad (31.7)$$

в которой элементы с одинаковыми вторыми индексами в отличие от матрицы D образуют строку, а не столбец, поскольку в соответствии с правилами умножения матриц и определением скалярного произведения векторы \mathbf{d}_1 и \mathbf{d}_2 должны записываться в виде столбца, а векторы \mathbf{b}_1 и \mathbf{b}_2 — в виде строки. Отсюда, учитывая условие (31.3), непосред-

ственно получаем, что матрица B обратна матрице D . Действительно,

$$DB = \begin{pmatrix} d_{1x} & d_{1y} \\ d_{2x} & d_{2y} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{1x} & b_{2x} \\ b_{1y} & b_{2y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\mathbf{d}_1 \cdot \mathbf{b}_1) & (\mathbf{d}_1 \cdot \mathbf{b}_2) \\ (\mathbf{d}_2 \cdot \mathbf{b}_1) & (\mathbf{d}_2 \cdot \mathbf{b}_2) \end{pmatrix}$$

или

$$DB = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I, \quad (31.8)$$

где I — единичная матрица. Таким образом, получаем

$$B = D^{-1}, \quad (31.9)$$

что и объясняет происхождение термина „обратная решетка“.

Из соотношения (31.3) следует, что векторы

$$\mathbf{b}_1 \perp \mathbf{d}_2, \quad \mathbf{b}_2 \perp \mathbf{d}_1, \quad (31.10)$$

а также, что

$$(\mathbf{b}_1 \cdot \mathbf{d}_1) = 1 = |b_1| |d_1| \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = |b_1| |d_1| \sin \theta, \quad (31.11)$$

$$(\mathbf{b}_2 \cdot \mathbf{d}_2) = 1 = |b_2| |d_2| \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = |b_2| |d_2| \sin \theta,$$

где θ — угол между векторами \mathbf{d}_1 и \mathbf{d}_2 .

Площадь элементарной ячейки прямой решетки, т. е. площадь параллелограмма, построенного на векторах \mathbf{d}_1 и \mathbf{d}_2 , равна

$$S_d = [\mathbf{d}_1 \mathbf{d}_2] = |d_1| |d_2| \sin \theta, \quad (31.12)$$

а площадь элементарной ячейки обратной решетки —

$$S_b = [\mathbf{b}_1 \mathbf{b}_2] = |b_1| |b_2| \sin \theta. \quad (31.13)$$

Перемножая соответственно правые и левые части соотношений (31.12) и (31.13) и учитывая (31.11), получаем правило

$$S_d S_b = |d_1| |d_2| \sin \theta |b_1| |b_2| \sin \theta =$$

$$= |d_1| |d_2| \sin \theta \frac{\sin \theta}{|d_1| \sin \theta |d_2| \sin \theta} = 1; \quad (31.14)$$

величины площади элементарных ячеек прямой и обратной решеток обратны друг другу. Это, впрочем, следует также уже из соотношения (31.9).

В случае одномерной решетки длина элементарной ячейки равна d ; длина же элементарной ячейки в пространстве частот

или в пространстве волновых чисел $a = 1/\lambda$ равна $1/d$, т. е. совпадает с длиной ячейки обратной решетки. Таким образом, прямая решетка характеризует пространственную периодичность среды, тогда как обратная решетка характеризует периодичность частоты волн, распространяющихся в этой среде.

Аналогичные результаты будут получены и для двумерных структур.

Пользуясь терминологией тензорного анализа, можно сказать, что базисные векторы \mathbf{d}_1 и \mathbf{d}_2 прямой решетки по сути дела играют роль единичных ковариантных векторов в косоугольной системе координат, а векторы \mathbf{b}_1 и \mathbf{b}_2 — единичных контравариантных векторов¹⁾.

Принятие векторов \mathbf{d}_1 и \mathbf{d}_2 за единичные векторы, определяющие косоугольную систему координат, в целом ряде случаев существенно упрощает задачу. При этом любой вектор \mathbf{r} определяется его проекциями ξ_1 и ξ_2 на направления векторов \mathbf{d}_1 и \mathbf{d}_2

$$\mathbf{r} = \xi_1 \mathbf{d}_1 + \xi_2 \mathbf{d}_2. \quad (31.15)$$

Таким образом, косоугольная в декартовой системе координат Ox, Oy ячейка трансформируется при переходе в систему координат ξ_1, ξ_2 в квадратную ячейку, так как в системе координат $\xi_1 \xi_2$ вектор \mathbf{d}_1 имеет координаты

$$\xi_1 = 1, \quad \xi_2 = 0,$$

а вектор \mathbf{d}_2 —

$$\xi_1 = 0, \quad \xi_2 = 1.$$

С другой стороны, учитывая соотношение (31.3), определяющее векторы \mathbf{b}_i , и умножая скалярно правую и левую части соотношения (31.15), например, на \mathbf{b}_1 , можно легко получить

$$(\mathbf{r} \cdot \mathbf{b}_1) = \xi_1 (\mathbf{d}_1 \cdot \mathbf{b}_1) + \xi_2 (\mathbf{d}_2 \cdot \mathbf{b}_1) = \xi_1,$$

так что в общем случае

$$\xi_1 = (\mathbf{r} \cdot \mathbf{b}_1), \quad \xi_2 = (\mathbf{r} \cdot \mathbf{b}_2). \quad (31.16)$$

¹⁾ См. L. Brillouin, *Lect. enseurs en Mécanique et en Élasticité*, Paris, 1938, p. 27, 97, 101, 105; см. также J. A. Stratton, *Electromagnetic Theory*, New York, 1941, p. 39. (См. перевод: Дж. Страттон, *Теория электромагнетизма*, ОГИЗ — Гостехиздат, 1948, гл. 1.)

Прямая линия (которая в случае трех измерений переходит в плоскость) определяется уравнением

$$(\mathbf{a} \cdot \mathbf{r}) = a_1 x + a_2 y = c$$

или

$$\alpha_1 \xi_1 + \alpha_2 \xi_2 = c, \quad (31.17)$$

где

$$\alpha_1 = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{d}_1), \quad \alpha_2 = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{d}_2),$$

в чем легко непосредственно убедиться, подставляя в первое уравнение $\mathbf{r} = \xi_1 \mathbf{d}_1 + \xi_2 \mathbf{d}_2$.

Аналогичным образом вектор \mathbf{a} можно записать в виде

$$\mathbf{a} = \alpha_1 \mathbf{b}_1 + \alpha_2 \mathbf{b}_2. \quad (31.18)$$

Действительно, полагая

$$\mathbf{a} = \eta_1 \mathbf{b}_1 + \eta_2 \mathbf{b}_2$$

и умножая правую и левую части сначала на \mathbf{d}_1 , а потом на \mathbf{d}_2 , получаем

$$\eta_1 = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{d}_1) = \alpha_1, \quad \eta_2 = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{d}_2) = \alpha_2.$$

Вектор \mathbf{a} перпендикулярен прямой, определяемой уравнением (31.17), а отношение $c/|a|$ соответствует расстоянию δ от этой прямой до начала координат.

Координаты ξ_1 и ξ_2 любого узла решетки из точечных частиц принимают лишь целые значения l_1 и l_2 и поэтому произвольный узел решетки определяется заданием вектора

$$\mathbf{r} = l_1 \mathbf{d}_1 + l_2 \mathbf{d}_2. \quad (31.19)$$

Вектор \mathbf{h} , который определяет узлы обратной решетки, выражается следующим образом:

$$\mathbf{h} = h_1 \mathbf{b}_1 + h_2 \mathbf{b}_2, \quad (31.20)$$

где h_1 и h_2 — целые.

Если в уравнение (31.17) вместо вектора \mathbf{a} подставить вектор \mathbf{h} , то оно будет определять семейство параллельных прямых (перпендикулярных вектору \mathbf{h}), зависящих от параметра c , причем некоторые из них, как мы сейчас убедимся, проходят через бесконечное число узлов прямой решетки,

Учитывая соотношение (31.16), можно записать уравнение прямых этого семейства в виде

$$(\mathbf{h} \cdot \mathbf{r}) = h_1 (\mathbf{b}_1 \cdot \mathbf{r}) + h_2 (\mathbf{b}_2 \cdot \mathbf{r}) = h_1 \xi_1 + h_2 \xi_2 = c. \quad (31.21)$$

Полагая $c = 0$, получаем прямую, проходящую через те узлы, для которых

$$h_1 l_1 + h_2 l_2 = 0.$$

Это соотношение удовлетворяется, в частности, при

$$l_1 = h_2, \quad l_2 = -h_1.$$

Другие прямые этого семейства при соответствующем выборе параметра c будут, очевидно, проходить через другие ряды узлов решетки.

Найдем теперь расстояние от начала координат до ближайшего ряда семейства или, иначе говоря, определим наименьшее отличное от нуля значение параметра $|c|$. Поскольку величины h_1 и h_2 , так же как ξ_1 и ξ_2 , равны целым положительным или отрицательным числам, то параметр c , соответствующий какому-либо ряду решетки, также равен целому числу. Если величины h_1 и h_2 не содержат общих множителей и вектор \mathbf{h} принимает свое наименьшее возможное значение, то параметр

$$|c| = 1;$$

это его наименьшее значение.

Следовательно, расстояние между двумя проходящими через узлы решетки прямыми семейства, определяемого парой целых чисел (h_1, h_2) , равно

$$\delta = \frac{1}{|h|}. \quad (31.22)$$

Другими словами, узел (h_1, h_2) обратной решетки определяет семейство рядов узлов прямой решетки. Эти семейства рядов перпендикулярны вектору \mathbf{h} и расположены на равных расстояниях $1/|h|$ друг от друга; их можно обозначить символом (h_1, h_2) . Таким образом, мы приходим к обозначениям Браве для кристаллографических плоскостей. Так, например, на фиг. 75 семейство [10] состоит из вертикальных рядов, семейство [01] — из рядов, параллельных вектору \mathbf{d}_1 , семейство [11] — из рядов, параллельных

вектору \mathbf{d}'_2 , и, наконец, семейство $[1\bar{1}]$ — из рядов, параллельных вектору \mathbf{d}'_1 .

В дальнейшем для получения наиболее наглядных результатов мы будем рассматривать либо прямую, либо обратную решетку в зависимости от физических свойств изучаемых объектов.

§ 32. Периодические функции двух или трех переменных

Под периодической функцией двух или трех переменных понимают функцию двух или трех независимых переменных, периодичную по каждой из переменных, взятых в отдельности.

В этом параграфе будут рассматриваться только периодические функции двух переменных; их наиболее важные свойства мы сейчас укажем. Функции трех независимых переменных, встречающиеся при изучении трехмерных структур, имеют аналогичные свойства.

Теория периодических функций существенно упрощается в том случае, если произвольную функцию $F(x, y)$, периодичную по x и y , можно представить в виде произведения двух функций $F_1(x)$ и $F_2(y)$, периодичных соответственно по переменным x и y . Однако такое представление функции $F(x, y)$ возможно только в очень частных случаях.

Рассмотрим, например, функцию $F(x, y)$, заданную следующим образом:

$$F(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{при } x \text{ и } y \text{ целых,} \\ 0 & \text{при всех других значениях } x \text{ и } y. \end{cases} \quad (32.1)$$

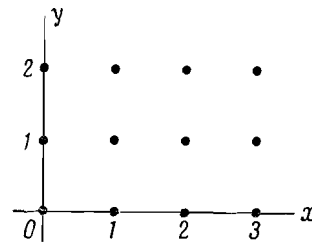
Эта функция в декартовой системе координат (Ox, Oy) представлена на фиг. 76, где точками отмечены те значения координат, при которых значение $F(x, y)$ отлично от нуля.

Рассмотрим функции

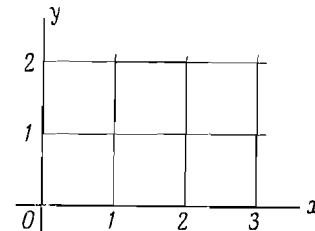
$$F_1(x) = \begin{cases} 1 & \text{при целых значениях } x, \\ 0 & \text{при нецелых значениях } x; \end{cases} \quad (32.2)$$

$$F_2(y) = \begin{cases} 1 & \text{при целых значениях } y, \\ 0 & \text{при нецелых значениях } y. \end{cases}$$

Одна из них периодична по x , другая — по y , и, следовательно, произведение этих функций также является периодической функцией $F(x, y)$, но уже двух переменных. В этом случае указанное представление возможно.



Фиг. 76.



Фиг. 77.

Рассмотрим теперь функцию, определяемую следующим соотношением:

$$F(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{при } x \text{ или } y \text{ целых,} \\ 0 & \text{при } x \text{ и } y \text{ нецелых.} \end{cases} \quad (32.3)$$

Эта функция графически представлена на фиг. 77. Горизонтальные и вертикальные линии, проведенные в плоскости x, y , соответствуют тем значениям переменных, при которых функция $F(x, y)$ отлична от нуля.

Докажем, что в этом случае нельзя представить функцию $F(x, y)$ в виде произведения двух функций, каждая из которых зависит только от одной переменной.

Действительно, предположим противное, т. е. что при всех значениях переменных x и y функцию $F(x, y)$ можно записать в виде

$$F(x, y) = F_1(x) F_2(y). \quad (32.4)$$

Если два произвольных значения x_1 и y_1 не равны целым числам, то

$$F_1(x_1) F_2(y_1) = 0,$$

откуда

$$F_1(x_1) = 0 \text{ либо } F_2(y_1) = 0. \quad (32.5)$$

Предположим, что $F_2(y_1) = 0$. Тогда, полагая x равным целому числу n , будем иметь

$$F_1(n) F_2(y_1) = 0, \quad (32.6)$$

что противоречит данному выше определению функции $F(x, y)$.

Предположение, что $F_1(x_1) = 0$, также приводит к противоречию. Таким образом, утверждение доказано.

Некоторыми авторами рассматривались функции вида

$$F(x, y) = F_1(x) + F_2(y). \quad (32.7)$$

Примером, указывающим на возможность подобного разложения, может служить функция

$$F(x, y) = \begin{cases} 2 & \text{при } x \text{ и } y \text{ целых,} \\ 1 & \text{при } x \text{ или } y \text{ целых,} \\ 0 & \text{при всех других значениях } x \text{ и } y, \end{cases} \quad (32.8)$$

которую можно представить в виде суммы двух периодических по x и y функций, определенных соотношением (32.2).

Приведенные выше примеры являются весьма частными и могут представлять практический интерес только в очень редких случаях.

Покажем теперь, что периодическую функцию двух переменных можно разложить в двойной ряд Фурье и что это можно сделать, опираясь на введенное в предыдущем параграфе понятие обратной решетки.

Пусть $F(x, y)$ — некоторая периодическая функция, принимающая одно и то же значение в узлах прямой решетки, определенных векторами

$$\mathbf{r} = (x, y) \text{ и } \mathbf{r}' = \mathbf{r} + l_1 \mathbf{d}_1 + l_2 \mathbf{d}_2, \quad (32.9)$$

где l_1 и l_2 — целые. При переходе к косоугольным координатам ξ_1 и ξ_2 , определяемым соотношением (31.15), функция $F(x, y)$ переходит в функцию $f(\xi_1, \xi_2)$, периодическую по переменным ξ_1 и ξ_2 , с периодом, равным единице. Эта функция может быть представлена в виде разложения в двойной ряд Фурье с комплексными членами

$$F(x, y) = f(\xi_1, \xi_2) = \sum_{h_1, h_2} C_{h_1, h_2} e^{2\pi i (h_1 \xi_1 + h_2 \xi_2)}, \quad (32.10)$$

где h_1 и h_2 целые.

Коэффициенты C_{h_1, h_2} находятся, как известно, следующим образом: правая и левая части предыдущего соотношения умножаются на

$$e^{-2\pi i (h'_1 \xi_1 + h'_2 \xi_2)},$$

где h'_1 и h'_2 — целые, и интегрируются по переменным ξ_1 и ξ_2 от нуля до единицы. В результате получаем

$$\begin{aligned} & \int_0^1 \int_0^1 f(\xi_1, \xi_2) e^{-2\pi i (h'_1 \xi_1 + h'_2 \xi_2)} d\xi_1 d\xi_2 = \\ & = \sum_{h_1, h_2} C_{h_1, h_2} \int_0^1 \int_0^1 e^{2\pi i [(h_1 - h'_1) \xi_1 + (h_2 - h'_2) \xi_2]} d\xi_1 d\xi_2. \end{aligned}$$

При $h_1 \neq h'_1$, $h_2 \neq h'_2$ интегралы, стоящие в правой части этого равенства, обращаются в нуль. Член же с $h'_1 = h_1$; $h'_2 = h_2$ отличен от нуля и, как легко видеть, равен единице. Отсюда получаем

$$C_{h_1, h_2} = \int_0^1 \int_0^1 f(\xi_1, \xi_2) e^{-2\pi i (h_1 \xi_1 + h_2 \xi_2)} d\xi_1 d\xi_2. \quad (32.11)$$

Коэффициенты C_{h_1, h_2} , вообще говоря, комплексны, т. е. определяют как амплитуду, так и фазу.

Переходя теперь снова к функции $F(x, y)$ и учитывая соотношение (31.21), получаем

$$F(x, y) = \sum_{h_1, h_2} C_{h_1, h_2} e^{2\pi i (\mathbf{h} \cdot \mathbf{r})} = \sum_{h_1, h_2} C_{h_1, h_2} e^{2\pi i [h_1 (\mathbf{b}_1 \cdot \mathbf{r}) + h_2 (\mathbf{b}_2 \cdot \mathbf{r})]}, \quad (32.12)$$

где вектор обратной решетки

$$\mathbf{h} = h_1 \mathbf{b}_1 + h_2 \mathbf{b}_2.$$

Периодичность ряда, стоящего в правой части (32.12), может быть установлена непосредственной проверкой. Действительно, если учесть соотношения (31.20) и (31.3), то легко получить, что

$$\begin{aligned} (\mathbf{h} \cdot \mathbf{r}') &= [\mathbf{h} \cdot (\mathbf{r} + l_1 \mathbf{d}_1 + l_2 \mathbf{d}_2)] = \\ &= (\mathbf{h} \cdot \mathbf{r}) + h_1 l_1 (\mathbf{b}_1 \cdot \mathbf{d}_1) + h_2 l_2 (\mathbf{b}_2 \cdot \mathbf{d}_2) = \\ &= (\mathbf{h} \cdot \mathbf{r}) + h_1 l_1 + h_2 l_2. \end{aligned}$$

Подставляя теперь это выражение в (32.12) и учитывая, что $l_1 h_1 + l_2 h_2$ — целое число, получаем, что значение указанного ряда не меняется при замене $(\mathbf{h} \cdot \mathbf{r})$ на $(\mathbf{h} \cdot \mathbf{r}')$; это и доказывает его периодичность.

При переходе в интеграле (32.11) к переменным x и y следует помнить, что ξ_1 и ξ_2 являются косоугольными координатами и что, следовательно, квадрат модуля вектора \mathbf{r} равен

$$|\mathbf{r}|^2 = x^2 + y^2 = |d_1|^2 \xi_1^2 + 2(\mathbf{d}_1 \cdot \mathbf{d}_2) \xi_1 \xi_2 + |d_2|^2 \xi_2^2. \quad (32.13)$$

С другой стороны, площади S_d ячейки прямой решетки соответствует в пространстве переменных ξ единичная площадь и, таким образом,

$$dx dy = S_d d\xi_1 d\xi_2, \quad (32.14)$$

где

$$S_d = |d_1| |d_2| \sin \theta.$$

В результате получаем

$$C_{h_1 h_2} = \frac{1}{S_d} \int_0^{d_1} \int_0^{d_2} F(x, y) e^{-2\pi i (\mathbf{h} \cdot \mathbf{r})} dx dy. \quad (32.15)$$

Разложению (32.12) можно дать физическую интерпретацию: периодическая функция представляется в виде разложения на плоские волны, каждая из которых соответствует ряду решетки, причем эти ряды определяются узлами \mathbf{h} обратной решетки. В случае трехмерных структур этим рядам соответствуют кристаллографические плоскости. Коэффициенты $C_{h_1 h_2}$ разложения периодической функции $F(x, y)$, которая может быть представлена в виде произведения периодических функций $F_1(x), F_2(y)$, обладают весьма специфическими свойствами

$$C_{h_1 h_2} = C_{h_1} C_{h_2}, \quad \text{где } C_{h_j} = \int_0^1 f_j(\xi_j) e^{-2\pi i h_j \xi_j} d\xi_j \quad (j=1, 2).$$

Очевидно, что это соотношение не имеет места в общем случае, однако оно относится по крайней мере к совокупности коэффициентов C .

Случай, когда функцию $F(x, y)$ можно представить в виде суммы двух функций $F_1(x) + F_2(y)$, является еще более

частным, поскольку он приводит, как легко видеть, к обращению в нуль всех коэффициентов C , за исключением $C_{h_1 0}$ и $C_{0 h_2}$. При этом все наклонные ряды частиц не играют никакой роли и не должны приниматься во внимание.

Чтобы подчеркнуть важность высказанных соображений, заметим, что при рассмотрении отражения рентгеновских лучей от кристалла экспериментально можно определить только модули $|C_{h_1 h_2}|$ коэффициентов разложения функции плотности электронов в кристалле в двойной ряд Фурье. Однако в ряде случаев соображения симметрии позволяют определить фазовый угол, что дает возможность построить периодическую функцию, представляющую собой среднюю плотность электронов в кристалле.

§ 33. Зоны в двумерных решетках

При изучении одномерных решеток мы видели, что частота является периодической функцией волнового числа и что, следовательно, при заданном значении частоты существует неопределенность в выборе волнового числа и направления распространения. Чтобы обойти эту трудность, мы ввели понятие основного интервала, который симметричен относительно начала координат и равен по величине периоду частоты, и рассматривали только волновые числа, заключенные в этом интервале. Введем новое понятие *зоны*¹⁾, которое будет использоваться в настоящей главе. Указанный выше основной интервал мы будем называть *первой зоной*. *Вторая зона* в одномерном случае будет состоять из двух интервалов, расположенных симметрично по отношению к первой зоне, причем величина каждого из них равна половине периода функции $\nu(a)$. Зоны более высоких порядков определяются аналогичным образом. На фиг. 78 представлено расположение зон в случае одномерной решетки.

Распространим теперь понятие „зоны“ на случай двумерных решеток. Эти зоны должны быть определены в обратной решетке, поскольку, как мы сейчас покажем, именно она

1) Понятие зоны ввел Бриллюэн. Оно получило широкое распространение в теории твердого тела и, в частности, в теории металлов под названием „зон Бриллюэна“. Первая зона называется основной зоной Бриллюэна. — *Прим. ред.*

характеризует периодичность частоты как функции волнового числа.

Рассмотрим плоскую волну, распространяющуюся в двумерном пространстве. Она имеет вид

$$\psi = Ae^{i(\omega t - 2\pi l_1 x - 2\pi l_2 y)}. \quad (33.1)$$

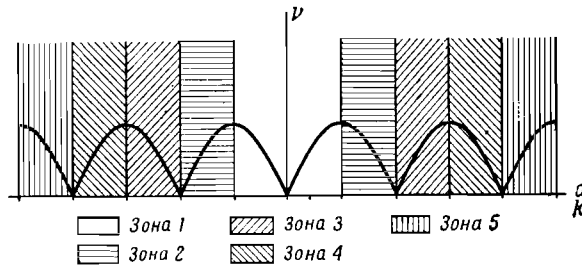
Обозначая через \mathbf{a} вектор с компонентами (a_1, a_2) и через \mathbf{r} вектор с компонентами (x, y) , можем записать

$$\psi = Ae^{i[\omega t - 2\pi(\mathbf{a} \cdot \mathbf{r})]}, \quad (33.2)$$

причем

$$|\mathbf{a}|^2 = |a_1|^2 + |a_2|^2 = \frac{1}{\lambda^2},$$

где вектор \mathbf{a} определяет направление распространения, а его величина обратно пропорциональна длине волны.



Фиг. 78.

В случае дискретной структуры функция ψ определена только в тех точках \mathbf{r} , где находятся частицы, т. е. только в узлах $\mathbf{r}_{l_1 l_2}$ прямой решетки. Поскольку l_1 и l_2 — целые числа, то

$$2\pi(\mathbf{a} \cdot \mathbf{r}_{l_1 l_2}) = 2\pi(\mathbf{a} \cdot l_1 \mathbf{d}_1) + 2\pi(\mathbf{a} \cdot l_2 \mathbf{d}_2) = l_1 k_1 + l_2 k_2, \quad (33.3)$$

где

$$k_1 = 2\pi(\mathbf{a} \cdot \mathbf{d}_1), \quad k_2 = 2\pi(\mathbf{a} \cdot \mathbf{d}_2). \quad (33.4)$$

Таким образом, выражение (33.2) принимает вид

$$\psi = Ae^{i(\omega t - k_1 l_1 - k_2 l_2)}, \quad (33.5)$$

откуда следует, что при замене k_1 и k_2 на k'_1 и k'_2 , где k'_i определяется соотношением

$$k'_i = k_i + 2\pi m_i \quad (33.6)$$

(здесь m_i — целые числа, а $i = 1, 2$), ни характер движения, ни значение частоты не изменяются. Итак, мы снова сталкиваемся с неопределенностью в выборе величин k_1 и k_2 , подобно тому как это имело место при рассмотрении одномерных структур. Величинам k'_1 и k'_2 , определяемым соотношением (33.6), мы можем сопоставить некоторый новый вектор \mathbf{a}' , равный

$$\mathbf{a}' = \mathbf{a} + m_1 \mathbf{b}_1 + m_2 \mathbf{b}_2, \quad (33.7)$$

поскольку, как следует из определения векторов \mathbf{b}_i ,

$$\begin{aligned} k'_1 &= 2\pi(\mathbf{a}' \cdot \mathbf{d}_1) = 2\pi(\mathbf{a} \cdot \mathbf{d}_1) + 2\pi m_1(\mathbf{b}_1 \cdot \mathbf{d}_1) + \\ &\quad + 2\pi m_2(\mathbf{b}_2 \cdot \mathbf{d}_1) = k_1 + 2\pi m_1, \\ k'_2 &= 2\pi(\mathbf{a}' \cdot \mathbf{d}_2) = 2\pi(\mathbf{a} \cdot \mathbf{d}_2) + 2\pi m_1(\mathbf{b}_1 \cdot \mathbf{d}_2) + \\ &\quad + 2\pi m_2(\mathbf{b}_2 \cdot \mathbf{d}_2) = k_2 + 2\pi m_2. \end{aligned} \quad (33.8)$$

Направление распространения определяется теперь вектором \mathbf{a}' , который, как и длина волны, является функцией m_1 и m_2 [см. (33.7)].

Итак, различные векторы \mathbf{a}' соответствуют одному заданному вектору \mathbf{a} ; некоторые векторы \mathbf{a}' указаны на фиг. 79, где изображена обратная решетка.

Приведенные рассуждения показывают, что частота ν волн в двумерной решетке является периодической функцией вектора \mathbf{a} в обратной решетке с базисными векторами \mathbf{b}_1 и \mathbf{b}_2 .

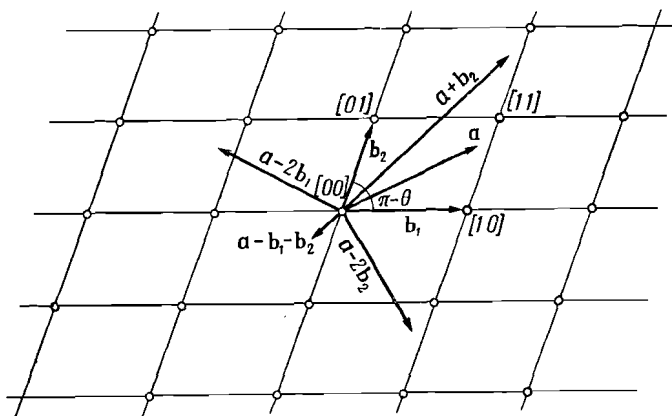
Попытаемся определить теперь основную область, в которой должен быть задан вектор \mathbf{a} .

Считая, что вектор \mathbf{a} выходит из начала решетки, можно было бы ограничить область его изменения первой элементарной ячейкой обратной решетки, т. е. параллелограммом, вершины которого, как это показано на фиг. 79, расположены в точках [00], [01], [10], [11]. Однако при этом возникают два затруднения. Во-первых, при таком определении выделяются направления распространения, которые составляют с вектором \mathbf{b}_1 угол, меньший чем $\pi - \theta$, и, во-вторых, данной волне не обязательно соответствует наибольшее возможное

значение длины волны, что не согласуется с условием, которое мы приняли при рассмотрении одномерных задач.

Чтобы обойти эти затруднения, основную зону можно определить подобно тому, как это было сделано в случае одномерных структур.

Прежде всего положение зоны выбирают таким образом, чтобы ее центр совпадал с началом обратной решетки. Границы зоны являются прямыми, проходящими через середины

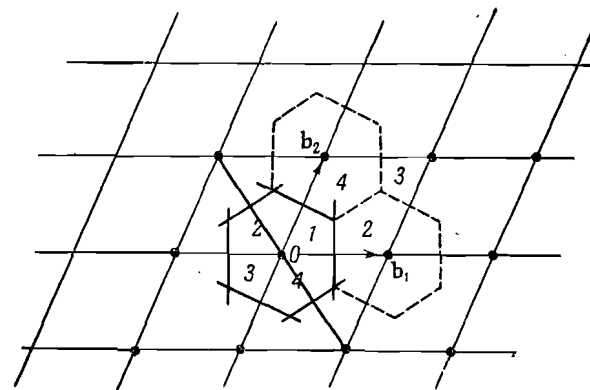


Фиг. 79.

отрезков, соединяющих центр обратной решетки с различными узлами, и перпендикулярные этим отрезкам. Эти прямые образуют совокупность многоугольников, центры которых совпадают с началом обратной решетки. Область, ограниченная наименьшим по площади многоугольником, построенным таким образом, и будет представлять собой первую зону. Она не зависит от выбора системы базисных векторов и позволяет рассматривать произвольные направления распространения. Более того, такое определение приводит к рассмотрению для заданной волны наименьшего по величине вектора \mathbf{a} (или, что то же, наибольшей длины волны λ). Наконец, полный период распространения, соответствующий некоторому направлению, целиком укладывается внутри зоны. Однако неопределенность на границах зоны, имеющая место в одномерном случае, здесь также остается.

Принципы построения первой зоны поясняет фиг. 80. Площадь ее равна площади элементарной ячейки обратной решетки, в чем легко убедиться, разбивая эти обе площади на части, которые отмечены на фиг. 80 одинаковыми цифрами, и сравнивая тождественные элементы.

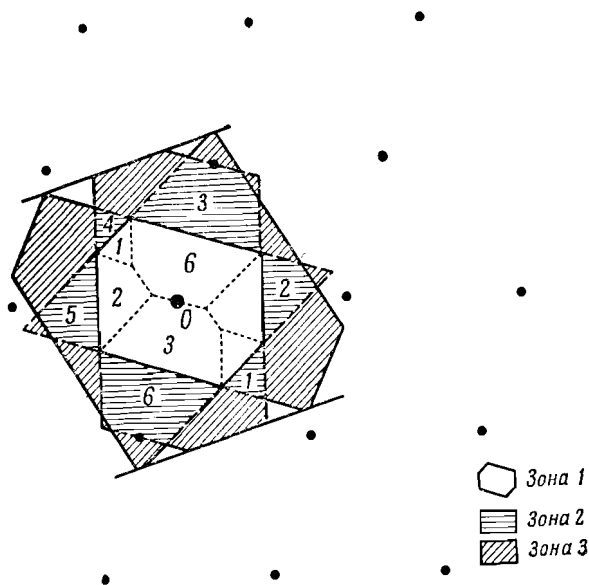
Построение второй зоны, а также зон высшего порядка более сложно. Они должны быть ограничены прямыми, проходящими через середины отрезков, соединяющих начало



Фиг. 80.

обратной решетки с ее различными узлами, и перпендикулярными этим отрезкам, причем ни одна из этих прямых не должна проходить внутри зоны. Важность такого определения будет ясна из дальнейшего. Предположим, в частности, что волна распространяется в сплошной среде, характеризуемой малым периодическим возмущением, таким образом, что конец ее волнового вектора \mathbf{a} лежит на одной из указанных выше прямых, перпендикулярных отрезкам, соединяющим начало обратной решетки с различными ее узлами. В этом случае, как мы увидим, кривая, представляющая собой зависимость частоты от функции $|a|$, испытывает разрыв. Указанный выбор зон приводит к непрерывности функции ν во всей области, за исключением границ этих зон. Этот результат полностью аналогичен результату, полученному нами при изучении одномерных структур (см. § 17).

Вторая, третья и зоны более высокого порядка определяются подобно тому, как это делалось в случае первой зоны. Так, например, вторая зона представляет собой область, заключенную между наименьшим и непосредственно следующим за ним по величине многоугольником, причем сторонами



Фиг. 81. Границами зон являются линии, которые делят пополам отрезки, соединяющие начало O с различными узлами обратной решетки, и перпендикулярны этим отрезкам.

этого многоугольника опять являются перпендикуляры к отрезкам, соединяющим начало решетки с различными узлами. Третья зона будет ограничена внешней границей второй зоны и следующим многоугольником. Принципы построения этих зон ясны из фиг. 81. Вообще n -я зона представляет собой область, заключенную между n -м и $(n+1)$ -м многоугольниками, построенными указанным выше способом. Следует заметить, что внутренняя граница $(n+1)$ -й зоны совпадает с внешней границей n -й зоны и имеет ряд общих точек с $(n-1)$ -й зоной.

Площадь каждой зоны равна площади элементарной ячейки обратной решетки, в чем можно убедиться, разбивая каждую зону на части, находящиеся в разных ячейках, и сравнивая тождественные элементы частей зоны и частей ячеек между собой. Волновые векторы, концы которых расположены внутри соответствующих подобластей различных зон, приводят к одной и той же функции ψ , поскольку различные функции ψ отличаются в данном случае только множителем $e^{i2\pi m}$, где m — целое. Таким образом, различные соответствующие друг другу подобласти могут рассматриваться как эквивалентные. Расположение этих подобластей показано на фиг. 81.

Во всех случаях площадь каждой зоны равна площади элементарной ячейки обратной решетки. Это выполняется для всех рассмотренных нами простейших случаев. Сейчас мы приведем общее доказательство этого положения, идея которого принадлежит Дешампу.

Обратная решетка определяется заданием двух непараллельных переносов T_1 и T_2 , соответствующих векторам \mathbf{b}_1 и \mathbf{b}_2 . Совокупность операторов переноса

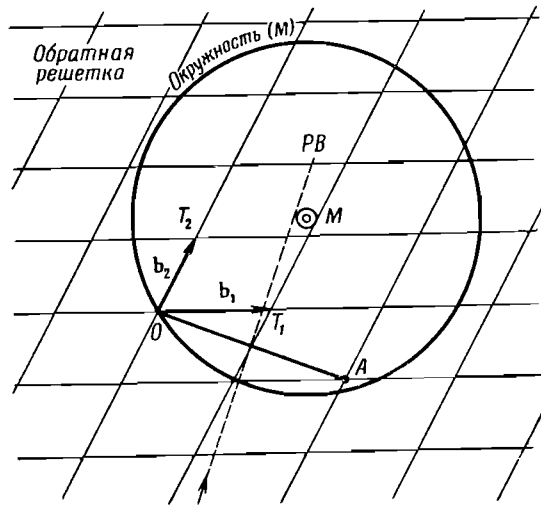
$$T = T_1^n T_2^p, \quad (33.9)$$

где n и p — целые положительные или отрицательные числа, образует абелеву группу G . Действуя таким оператором на начало решетки, получаем некоторый узел обратной решетки R .

Чтобы получить зоны различного порядка с центрами в точке O , проведем совокупность прямых, проходящих через середины векторов, соединяющих эту точку с различными узлами обратной решетки, и перпендикулярных этим векторам. В некоторые точки плоскости можно перейти из начала непрерывным путем, т. е. не пересекая ни одной из указанных выше прямых: эти узлы расположены в первой зоне. Ко второй зоне принадлежат все узлы, к которым можно перейти, пересекая одну и только одну из этих прямых; к третьей — те, к которым можно перейти, пересекая две прямых, и т. д. Эти определения находятся в соответствии со схемой расположения зон, изображенной на фиг. 81.

Определим теперь свойства точек, расположенных в различных зонах или на их границах. Пусть M — произвольная

точка плоскости, а P — некоторая точка обратной решетки. Введем две функции точки M : $j_p(M)$ и $k_p(M)$, зависящие также от положения точки P . Определим их следующим образом: функция $j_p(M)$ представляет собой число $(j-1)$ узлов обратной решетки, заключенных внутри окружности (M)



Фиг. 82.

с центром в точке M и проходящей через точку P , а функция $k_p(M)$ — число $(k+1)$ узлов обратной решетки, расположенных точно на окружности (M).

Рассмотрим сначала функции $j_0(M)$ и $k_0(M)$, соответствующие началу O обратной решетки. Очевидно, что $k_0(M)$ представляет собой число прямых, на которых может находиться точка M . Функция $k_0(M)$ равна нулю, если точка M находится внутри зоны, равна единице, если точка M находится на прямой, и равна двум, если точка M находится на пересечении двух прямых. Вообще функция $k_0(M)$ отлична от нуля, если точка M находится на общей границе двух зон.

Функция $j_0(M)$ может изменяться только в том случае, когда один или несколько узлов обратной решетки R входят в область, ограниченную окружностью (M), или выходят

из нее; это сводится к тому, что для достижения точки M необходимо пересечь одну или несколько указанных выше прямых. Точнее, функция $j_0(M)$ возрастает на число единиц, равное числу прямых, пересекаемых точкой M при ее удалении вдоль радиуса от точки O . Однако поскольку для первой зоны $j_0(M)=1$, то оказывается, что $j_0(M)$ представляет собой просто порядок зоны, в которой расположена точка M [если только точка M находится внутри зоны, а не на ее границе, поскольку в этом случае функция $k_0(M)=0$]. Если функция $k_0(M)$ отлична от нуля, то, как легко видеть, точка M находится на границе зон

$$j, j+1, j+2, \dots, j+k.$$

Теперь установим следующую теорему.

Любая точка M может быть переведена в некоторую зону Z_i или на ее границу при помощи операции переноса G , определяемой соотношением (33.9); в первом случае существует только один возможный перенос, тогда как во втором случае — по крайней мере два.

Определим операцию переноса G при помощи вектора \vec{PO} , где P — некоторый узел обратной решетки R .

Эта операция переводит точку M в точку N . Очевидно, что

$$j_0(N) = j_p(M), \quad k_0(N) = k_p(M). \quad (33.10)$$

Точка N находится внутри зоны Z_i , если

$$j_p(M) = l, \quad k_p(M) = 0, \quad (33.11)$$

и на границе зоны Z_i , если

$$j_p(M) \leq l \leq j_p(M) + k_p(M), \quad k_p(M) \neq 0. \quad (33.12)$$

Таким образом, определение операции переноса G сводится к нахождению точек P , удовлетворяющих условиям (33.11) или (33.12). Для этого разобьем все узлы обратной решетки R на классы в зависимости от их расстояния от точки M (если несколько узлов находятся на одном и том же расстоянии от этой точки, то мы их будем относить к одному классу).

Пусть теперь точка P_i принадлежит к i -му классу. Если не существует других точек, расположенных на том же расстоянии от M , то мы будем иметь

$$MP_{i-1} < MP_i < MP_{i+1}; \quad (33.13)$$

эта точка P_i удовлетворяет соотношению (33.11) и она единственна. Мы говорим, что M — регулярная точка i -го порядка; в этом случае существует единственный перенос, переводящий точку M внутрь зоны Z_i .

Предположим теперь, что точка P_i принадлежит к классу из $(k+1)$ точек, расположенных на одинаковом расстоянии от точки M ,

$$MP_{i-1} < MP_i = MP_{i+1} = \dots = MP_{i+k} < MP_{i+k+1}, \quad (33.14)$$

где

$$j \leq i \leq j+k.$$

Для всех точек класса имеем

$$j_p(M) = j; \quad k_p(M) = k,$$

что эквивалентно условиям (33.12). В этом случае мы говорим, что M — особая точка i -го порядка, а число переносов, принадлежащих к группе G и переводящих точку M на границу зоны Z_i , равно $k+1$.

Рассмотрим теперь элементарную ячейку D решетки R , например ячейку, представляющую собой параллелограмм, построенный на векторах \mathbf{b}_1 и \mathbf{b}_2 , выходящих из точки O . В эту ячейку включается, очевидно, как область, заключенная внутри параллелограмма, так и его границы. Любую точку плоскости можно перевести с помощью операции переноса G внутрь ячейки D . Это положение справедливо для всех точек зоны Z_i ; обратно, согласно только что доказанной теореме, любую точку ячейки D при условии, что она является регулярной, можно перевести в зону Z_i , применив операцию переноса G . Таким образом, между точками зоны Z_i и регулярными точками i -го порядка ячейки D существует взаимно однозначное соответствие.

Рассмотрим теперь особые точки i -го порядка ячейки D . Они расположены на конечном числе отрезков, принадлежащих прямым, проходящим через середины векторов, соединяющих два различных узла решетки R , и перпендикулярным этим векторам. Эти отрезки делят ячейку D на конечное число многоугольников, содержащих регулярные точки. Поскольку точка i -го порядка P_i , соответствующая точке M , может меняться, только если точка M становится особой, то каждый из этих регулярных многоугольников

можно как целое перевести в зону Z_i при помощи операции переноса G .

Это доказывает, что суммарная площадь различных многоугольников, которые образуют зону Z_i , равна площади элементарной ячейки D .

Этот результат можно получить иначе. Определим понятие „расстояния“ (PM) между некоторой произвольной точкой P плоскости и узлом P решетки. Это понятие основано на рассмотрении функций $j_p(M)$ и $k_p(M)$.

Если P является единственным узлом решетки, расположенным на окружности (M) , то

$$k_p(M) = 0$$

и мы полагаем

$$(PM) = j_p(M).$$

Разность $(PM) - 1$ равна числу узлов решетки, находящихся внутри окружности (M) .

Предположим теперь, что на окружности (M) , кроме точки P , находятся еще $k_p(M)$ узлов решетки. В этом случае мы будем говорить, что расстояние (PM) является многозначной функцией

$$k_p(M) \neq 0, \quad (PM) = j_p(M), j_p(M) + 1, \dots, j_p(M) + k_p(M).$$

Пользуясь этими определениями, можно сказать, что зона i -го порядка Z_i представляет собой совокупность узлов, находящихся на „расстоянии“ i от начала

$$(OM) = j_0(M) = i.$$

„Расстояние“ (OM) является однозначной функцией для точек M , находящихся внутри зоны, и многозначной функцией для точек, находящихся на ее границе: двухзначной, если точка M лежит на одной из прямых, трехзначной, если она лежит на пересечении двух прямых, и т. д.

Для доказательства сформулированной выше теоремы мы разделили все узлы P решетки R в зависимости от их „расстояния“ (PM) от точки M на ряд классов и использовали вектор \vec{PO} для перевода точки M внутрь зоны Z_i или, если функция (PM) неоднозначна, на ее границу. Ячейка D решетки представляет основную область группы переносов G , и любую точку M плоскости можно перевести внутрь ячейки D при помощи одного и только одного переноса G .

§ 34. Распространение волн в двумерных непрерывных структурах при наличии периодического возмущения

Приступим к изучению распространения волн в двумерных неоднородных структурах, характеризуемых периодичностью в двух независимых направлениях. Аналогичная задача в случае одномерной решетки была рассмотрена в § 17. Здесь этот вопрос будем изучать более детально.

Рассмотрим решетку, определенную системой двух базисных векторов \mathbf{d}_1 и \mathbf{d}_2 , абсолютные величины которых равны соответственно периодам структуры в двух рассматриваемых направлениях. Произвольная точка первой элементарной ячейки может быть определена заданием некоторого вектора

$$\mathbf{r} = \xi_1 \mathbf{d}_1 + \xi_2 \mathbf{d}_2 \quad \begin{array}{l} 0 < \xi_1 < 1, \\ 0 < \xi_2 < 1 \end{array}$$

[см. формулу (31.15)], а любая точка решетки — заданием вектора \mathbf{r}' , проведенного из начала решетки в эту точку. Этот вектор представляет собой сумму вектора, определяющего положение соответствующей точки в первой ячейке, и вектора, определяющего начало ячейки, в которой находится рассматриваемая точка, т. е.

$$\mathbf{r}' = (\xi_1 \mathbf{d}_1 + \xi_2 \mathbf{d}_2) + l_1 \mathbf{d}_1 + l_2 \mathbf{d}_2.$$

Обратную решетку, базисные векторы \mathbf{b}_1 и \mathbf{b}_2 которой определяются из соотношения

$$(\mathbf{b}_i \cdot \mathbf{d}_k) = \delta_{ik},$$

можно построить методом, указанным в § 31. Подчеркнем, что в этой плоскости \mathbf{b}_1 , \mathbf{b}_2 задается волновой вектор, определяющий направление распространения волны в прямой решетке; частота этой волны является функцией волнового вектора.

Двумерное волновое уравнение в случае сплошной среды, характеризуемой периодическим возмущением, имеет следующий общий вид:

$$\Delta \psi - \frac{1}{V^2} \ddot{\psi} = 0, \quad (34.1)$$

где Δ — двумерный оператор Лапласа, ψ — искомая волновая функция, а V — фазовая скорость, являющаяся периодической функцией двух переменных с периодами d_1 и d_2 . Волновая функция ψ является функцией двух пространственных переменных x и y и времени t . Мы предполагаем, что от времени она зависит гармонически, т. е.

$$\psi = u(x, y) e^{i\omega t}. \quad (34.2)$$

Функция $u(x, y)$ определяется из уравнения

$$\Delta u + \frac{\omega^2}{V^2} u = 0. \quad (34.3)$$

С другой стороны, в случае двумерной однородной и изотропной среды волновое уравнение имеет вид

$$\Delta u_0 + \frac{\omega_0^2}{V_0^2} u_0 = 0, \quad (34.4)$$

где u_0 — координатная часть волновой функции, а V_0 — постоянная, зависящая только от параметров рассматриваемой среды.

Как легко видеть, это уравнение допускает решение

$$u_0 = A e^{-2\pi i (\mathbf{a} \cdot \mathbf{r})}, \quad (34.5)$$

где

$$4\pi^2 |a|^2 = \frac{\omega_0^2}{V_0^2}, \quad |a|^2 = \frac{\nu_0^2}{V_0^2}. \quad (34.6)$$

Оно представляет собой плоскую волну, которую можно рассматривать либо как обычную акустическую волну, либо как электромагнитную; оба эти типа волн характеризуются в случае однородной среды постоянной скоростью распространения.

До сих пор мы предполагали, что решетка бесконечна во всех направлениях и волновой вектор \mathbf{a} изменяется непрерывно. Для ограниченной решетки, напротив, компоненты вектора \mathbf{a} могут принимать лишь дискретный ряд значений. Вместо ограниченной решетки удобно рассматривать *циклическую решетку* (Борн, 1912 г), т. е. такую неограниченную решетку, в которой все явления в точности повторяются при изменении вектора \mathbf{r} на величину $G_1 \mathbf{d}_1 + G_2 \mathbf{d}_2$, где G_1 и G_2 — некоторые целые числа. Для этой решетки компо-

ненты вектора \mathbf{a} вдоль направлений \mathbf{d}_1 и \mathbf{d}_2 могут принимать значения, равные соответственно

$$\frac{f_1}{G_1|d_1|} \text{ и } \frac{f_2}{G_2|d_2|},$$

где f_1 и f_2 — целые положительные или отрицательные числа.

Циклическая решетка эквивалентна ограниченной решетке (D), поверхность которой совпадает с поверхностью параллелограмма, построенного на векторах $G_1\mathbf{d}_1$ и $G_2\mathbf{d}_2$; область (D) называется *областью циклической периодичности*. К этим вопросам мы вернемся ниже (см. § 45).

Ограничившись случаем циклической решетки, рассмотрим задачу о распространении волн в среде, характеризуемой периодической структурой. Считая периодическое возмущение достаточно малым, мы будем решать задачу методом возмущений.

Положим, что

$$\begin{aligned} u &= u_0 + \varepsilon u_1, \\ \omega^2 &= \omega_0^2 + \varepsilon k_1, \\ \frac{1}{V^2} &= \frac{1}{V_0^2} + \varepsilon f, \end{aligned} \quad (34.7)$$

а волновой вектор \mathbf{a} имеет заданное направление и величину.

Величины u , $1/V^2$ и ω^2 являются функциями вектора \mathbf{a} в обратной решетке и вектора \mathbf{r} в прямой решетке. Величина ε предполагается достаточно малой, чтобы по крайней мере в первом приближении можно было бы пренебречь членами, пропорциональными ε^2 и ε^3 и т. д. по сравнению с членами первого порядка по ε . Наконец, функция f предполагается периодической, причем ее среднее значение в области (D) равно нулю, т. е.

$$\frac{1}{V_0^2} = \overline{\left(\frac{1}{V^2}\right)}.$$

Подставляя выражения для u , $1/V^2$ и ω^2 из (34.7) в волновое уравнение (34.3), получаем с точностью до величин первого порядка по ε включительно

$$\Delta u + \frac{\omega^2}{V^2} u = 0 = \Delta u_0 + \frac{\omega_0^2}{V_0^2} u_0 + \varepsilon \left[\Delta u_1 + \frac{\omega_0^2}{V_0^2} u_1 + \left(\frac{k_1}{V_0^2} + \omega_0^2 f \right) u_0 \right]. \quad (34.8)$$

Нулевое приближение получим, пренебрегая всеми членами, пропорциональными ε . В этом случае уравнение в точности совпадает с волновым уравнением для однородной и изотропной среды; решение его было приведено выше [формула (34.5)]. Поправку первого порядка к нулевому приближению можно получить, приравняв в уравнении (34.8) нулю член, пропорциональный ε . Таким образом, получаем следующее неоднородное уравнение:

$$\Delta u_1 + \frac{\omega_0^2}{V_0^2} u_1 = - \left(\frac{k_1}{V_0^2} + \omega_0^2 f \right) u_0. \quad (34.9)$$

Однородное уравнение, соответствующее (34.9), полностью аналогично уравнению для нулевого приближения и допускает решение в виде

$$u_1 = B e^{-2\pi i (\mathbf{a}'' \cdot \mathbf{r})}, \quad (34.10)$$

где

$$4\pi^2 |\mathbf{a}''|^2 = \frac{\omega_0^2}{V_0^2} = 4\pi^2 |\mathbf{a}|^2, \quad |\mathbf{a}''|^2 = |\mathbf{a}|^2. \quad (34.11)$$

Чтобы получить решение неоднородного уравнения, разложим, следуя изложенному в § 32 методу, периодическую функцию f в двойной ряд Фурье. Таким образом, получаем

$$f = \sum_{m_1} \sum_{m_2} C_{m_1 m_2} e^{2\pi i (m_1 \xi_1 + m_2 \xi_2)}; \quad (34.12)$$

в этом разложении коэффициенты $C_{m_1 m_2}$, вообще говоря, комплексны и включают в себя фазовый множитель; определяются они согласно общим правилам и, как легко видеть, $C_{00} = 0$.

Величины ξ_1 и ξ_2 представляют собой координаты узла в прямой решетке, а m_1 и m_2 — некоторые целые числа.

Учитывая выражение (32.12) и замечая, что

$$\begin{aligned} (\mathbf{b}_1 \cdot \mathbf{r}) &= (\mathbf{b}_1 \cdot \xi_1 \mathbf{d}_1) + (\mathbf{b}_1 \cdot \xi_2 \mathbf{d}_2) = \xi_1, \\ (\mathbf{b}_2 \cdot \mathbf{r}) &= (\mathbf{b}_2 \cdot \xi_1 \mathbf{d}_1) + (\mathbf{b}_2 \cdot \xi_2 \mathbf{d}_2) = \xi_2, \end{aligned} \quad (34.13)$$

можно выразить f как функцию векторов обратной решетки.

Таким образом,

$$f = \sum_{m_1} \sum_{m_2} C_{m_1 m_2} e^{2\pi i [m_1 (\mathbf{b}_1 \cdot \mathbf{r}) + m_2 (\mathbf{b}_2 \cdot \mathbf{r})]}, \quad (34.14)$$

Подставляя это выражение для f в уравнение (34.9) и полагая для удобства

$$\mathbf{a}'_{m_1 m_2} = \mathbf{a} - m_1 \mathbf{b}_1 - m_2 \mathbf{b}_2, \quad (34.15)$$

получаем, учитывая (34.5), уравнение

$$\Delta u_1 + \frac{\omega_0^2}{V_0^2} u_1 = -A \left[\frac{k_1}{V_0^2} e^{-2\pi i (\mathbf{a} \cdot \mathbf{r})} + \omega_0^2 \sum C_{m_1 m_2} e^{-2\pi i (\mathbf{a}'_{m_1 m_2} \cdot \mathbf{r})} \right] = R(r). \quad (34.16)$$

Это неоднородное уравнение типа

$$\Delta u_1 + \frac{\omega_0^2}{V_0^2} u_1 = R(r),$$

как известно, допускает ограниченные решения только в том случае, если стоящая в правой части функция ортогональна всем решениям соответствующего однородного уравнения. В случае циклической решетки это эквивалентно условию

$$\iint_{(D)} u_1^* R(r) d\sigma = 0,$$

где интегрирование проводится по области циклической периодичности (D) , а u_1^* — величина, комплексно сопряженная выражению (34.10), или условно

$$\iint_{(D)} R(r) e^{2\pi i (\mathbf{a}'' \cdot \mathbf{r})} d\sigma = 0, \quad (34.17)$$

где \mathbf{a}'' в соответствии с соотношением (34.11) — некоторый вектор, модуль которого $|\mathbf{a}''| = |\mathbf{a}|$.

Если это условие выполняется, то решение уравнения (34.16) имеет вид

$$u_1 = \sum_{m_1} \sum_{m_2} B_{m_1 m_2} e^{-2\pi i (\mathbf{a}'_{m_1 m_2} \cdot \mathbf{r})}, \quad (34.18)$$

где коэффициенты $B_{m_1 m_2}$ могут быть выражены, как мы сейчас увидим, через уже известные величины,

Предварительно заметим, что полученное решение можно записать в другом виде, который позволит выяснить его общий характер. Положим

$$u_1 = e^{-2\pi i (\mathbf{a} \cdot \mathbf{r})} F(r),$$

где

$$F(r) = \sum_{m_1} \sum_{m_2} B_{m_1 m_2} e^{2\pi i [m_1 (\mathbf{b}_1 \cdot \mathbf{r}) + m_2 (\mathbf{b}_2 \cdot \mathbf{r})]}.$$

Решение ψ можно рассматривать как плоскую волну

$$\psi = e^{i\omega t} (u_0 + \epsilon u_1) = e^{2\pi i [v t - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{r})]} A(r),$$

амплитуда которой

$$A(r) = A + \epsilon F(r)$$

представляет собой периодическую функцию в прямой решетке.

Условие (34.17) приводит к необходимости рассматривать два случая:

1. Среди всех векторов \mathbf{a}'' , абсолютная величина которых равна величине вектора \mathbf{a} , не существует других векторов \mathbf{a}'' (кроме самого вектора \mathbf{a}), совпадающих с одним из векторов $\mathbf{a}'_{m_1 m_2}$, т. е.

$$\mathbf{a}'' \neq \mathbf{a}'_{m_1 m_2} \text{ при любых } m_1 \text{ и } m_2.$$

Роль вектора \mathbf{a} при этом должна быть рассмотрена особо.

2. Один из векторов \mathbf{a}'' может совпадать точно (или приближенно) с каким-либо из векторов $\mathbf{a}'_{m_1 m_2}$, т. е.

$$\mathbf{a}'' \approx \mathbf{a}'_{m_1 m_2}, \text{ где } \mathbf{a}'_{m_1 m_2} = \mathbf{a} - m_1 \mathbf{b}_1 - m_2 \mathbf{b}_2$$

или

$$|\mathbf{a}'_{m_1 m_2}| \approx |\mathbf{a}|.$$

В этом случае роль векторов \mathbf{a} и \mathbf{a}'' [см. (34.17)] также следует рассмотреть особо.

Случай $\mathbf{a} \neq \mathbf{a}'_{m_1 m_2}$. Напишем сначала условие ортогональности для вектора \mathbf{a} . Имеем

$$\iint_{(D)} e^{2\pi i (\mathbf{a} \cdot \mathbf{r})} \left\{ \frac{k_1}{V_0^2} e^{-2\pi i (\mathbf{a} \cdot \mathbf{r})} + \omega_0^2 \sum C_{m_1 m_2} e^{-2\pi i (\mathbf{a}' \cdot \mathbf{r})} \right\} d\sigma = 0,$$

откуда

$$\frac{k_1}{V_0^2} \int_{(D)} \int d\sigma = 0,$$

поскольку выражение

$$\mathbf{a} - \mathbf{a}'_1 = m_1 \mathbf{b}_1 + m_2 \mathbf{b}_2 \quad (m_1, m_2 - \text{целые})$$

равно нулю при $m_1 = m_2 = 0$, коэффициент $C_{00} = 0$ и вклад, даваемый членами суммы, для которых значения m_1 или m_2 отличны от нуля, также равен нулю.

Рассмотрим теперь условие ортогональности для остальных векторов \mathbf{a}'' ; все они отличны от вектора \mathbf{a} , а также от векторов \mathbf{a}_{m_1, m_2} при любых значениях m_1 и m_2 , т. е.

$$|\mathbf{a}''| \neq |\mathbf{a}'_{m_1, m_2}|.$$

Таким образом, ни один из векторов \mathbf{a}' не может быть равен по абсолютной величине вектору \mathbf{a} . Отсюда следует, что условие ортогональности автоматически выполняется для всех векторов \mathbf{a}'' , отличных от \mathbf{a} , поскольку все интегралы по области (D) при этом равны нулю.

Окончательно условие ортогональности можно записать в виде

$$\frac{k_1}{V_0^2} \int_{(D)} \int d\sigma = 0,$$

или

$$k_1 = 0; \quad (34.19)$$

это означает, что в рассмотренном выше случае среднее возмущение, относящееся к невозмущенной волне, равно нулю.

Теперь, учитывая, что $k_1 = 0$, можно искать решение уравнения (34.16) в виде разложения типа (34.18). Так как

$$\Delta u_1 + \frac{\omega_0^2}{V_0^2} u_1 = \sum \frac{-\omega_{m_1, m_2}^2 + \omega_0^2}{V_0^2} B_{m_1, m_2} e^{-2\pi i (\mathbf{a}'_{m_1, m_2} \cdot \mathbf{r})},$$

где

$$4\pi^2 |\mathbf{a}'_{m_1, m_2}| = \frac{\omega_{m_1, m_2}^2}{V_0^2}, \quad (34.20)$$

то уравнение (34.16) принимает вид

$$\begin{aligned} \sum \frac{-\omega_{m_1, m_2}^2 + \omega_0^2}{V_0^2} B_{m_1, m_2} e^{-2\pi i (\mathbf{a}'_{m_1, m_2} \cdot \mathbf{r})} = \\ = -A\omega_0^2 \sum C_{m_1, m_2} e^{-2\pi i (\mathbf{a}'_{m_1, m_2} \cdot \mathbf{r})}. \end{aligned} \quad (34.21)$$

Приравнявая друг другу коэффициенты при одинаковых экспоненциальных множителях, получаем

$$\frac{\omega_0^2 - \omega_{m_1, m_2}^2}{V_0^2} B_{m_1, m_2} = -A\omega_0^2 C_{m_1, m_2} \quad (34.22)$$

или

$$B_{m_1, m_2} = -\frac{A\omega_0^2 V_0^2}{\omega^2 - \omega_{m_1, m_2}^2} C_{m_1, m_2}. \quad (34.23)$$

Поскольку $|\mathbf{a}'_{m_1, m_2}| \neq |\mathbf{a}|$, то значения ω_{m_1, m_2} всегда отличны от ω_0 и, следовательно, коэффициенты B_{m_1, m_2} конечны.

В заключение заметим, что в рассматриваемом случае поправка первого приближения к частоте равна нулю, поскольку $k_1 = 0$; поправка же первого порядка к решению отлична от нуля и равна u_1 . Выражение для нее дается рядом (34.18), коэффициенты которого мы только что определили. Эта поправка приводит к слабому искажению формы волны.

Возвращаясь ко второму представлению общего решения волнового уравнения, мы видим, что в выражении для $A(\mathbf{r})$ один из коэффициентов превышает все остальные, имеющие порядок величины ϵ .

Случай $\mathbf{a} = \mathbf{a}'_{n_1, n_2}$. Предположим, что среди всех отличных от \mathbf{a} векторов \mathbf{a}'' существует один вектор, совпадающий при некоторых значениях m_1, m_2 (например, при $m_1 = n_1, m_2 = n_2$) с одним из векторов \mathbf{a}'_{m_1, m_2} . Тогда имеем

$$|\mathbf{a}'_{n_1, n_2}| = |\mathbf{a}|, \quad \mathbf{a}'_{n_1, n_2} = \mathbf{a} - n_1 \mathbf{b}_1 - n_2 \mathbf{b}_2. \quad (34.24)$$

Таким образом, оказывается, что существуют два значения вектора \mathbf{a} , одинаково хорошо описывающих движение; иначе говоря, существуют два различных решения, описывающих невозмущенное движение. Эти вырожденные решения аналогичны решениям, полученным нами для одномерной решетки при $a = \pm 1/2d$, и переходят в них.

В этом случае решение u_0 можно записать в виде линейной комбинации двух экспонент, каждая из которых соответствует одному из частных решений

$$u_0 = Ce^{-2\pi i (\mathbf{a} \cdot \mathbf{r})} + C'e^{-2\pi i (\mathbf{a}'_{n_1 n_2} \cdot \mathbf{r})}, \quad (34.25)$$

где C и C' — два произвольных коэффициента, к определению которых мы вернемся позднее. Как будет показано ниже, член с $\mathbf{a}'_{n_1 n_2}$ соответствует отраженной волне при отражении, удовлетворяющем условию Брэгга.

Подставляя выражение (34.25) для решения u_0 в уравнение (34.9) и учитывая разложение (34.14) для функции f , получаем

$$\begin{aligned} \Delta u_1 + \frac{\omega_0^2}{V_0^2} u_1 = & -\frac{k_1}{V_0^2} \left(Ce^{-2\pi i (\mathbf{a} \cdot \mathbf{r})} + C'e^{-2\pi i (\mathbf{a}'_{n_1 n_2} \cdot \mathbf{r})} \right) - \\ & - \omega_0^2 \left\{ \sum CC_{m_1 m_2} e^{-2\pi i [(\mathbf{a} - m_1 \mathbf{b}_1 - m_2 \mathbf{b}_2) \cdot \mathbf{r}] } + \right. \\ & \left. + \sum C'C_{m_1 m_2} e^{-2\pi i [(\mathbf{a}'_{n_1 n_2} - m_1 \mathbf{b}_1 - m_2 \mathbf{b}_2) \cdot \mathbf{r}] } \right\}, \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} \Delta u_1 + \frac{\omega_0^2}{V_0^2} u_1 = & - \left\{ \left(\frac{k_1 C}{V_0^2} + \omega_0^2 C' C_{-n_1 - n_2} \right) e^{-2\pi i (\mathbf{a} \cdot \mathbf{r})} + \right. \\ & \left. + \omega_0^2 \sum_{\substack{m_1 \neq -n_1 \\ m_2 \neq -n_2}} C' C_{m_1 m_2} e^{-2\pi i [(\mathbf{a}'_{n_1 n_2} - m_1 \mathbf{b}_1 - m_2 \mathbf{b}_2) \cdot \mathbf{r}] } \right\} - \\ & - \left\{ \left(\frac{k_1 C'}{V_0^2} + \omega_0^2 C C_{n_1 n_2} \right) e^{-2\pi i (\mathbf{a}'_{n_1 n_2} \cdot \mathbf{r})} + \right. \\ & \left. + \omega_0^2 \sum_{\substack{m_1 \neq n_1 \\ m_2 \neq n_2}} C C_{m_1 m_2} e^{-2\pi i (\mathbf{a}'_{m_1 m_2} \cdot \mathbf{r})} \right\}. \quad (34.26) \end{aligned}$$

Две суммы, стоящие в правой части предыдущего соотношения, не приводят ни к каким затруднениям при исследовании условия ортогональности, поскольку вклад, даваемый ими в интеграл, равен нулю. Действительно, после умножения на $e^{2\pi i (\mathbf{a}'' \cdot \mathbf{r})}$ в этих суммах не будет ни одной экспоненты с показателем, равным нулю. Остается рассмотреть роль членов с экспонентами

$$e^{-2\pi i (\mathbf{a} \cdot \mathbf{r})} \quad \text{и} \quad e^{-2\pi i (\mathbf{a}'_{n_1 n_2} \cdot \mathbf{r})}.$$

После этого, как мы сейчас убедимся, можно будет определить параметр k_1 .

Если вектор \mathbf{a}'' отличен от векторов \mathbf{a} и $\mathbf{a}'_{n_1 n_2}$, то вклад этих членов в интеграл (34.17) равен нулю. Рассмотрим случай, когда вектор \mathbf{a}'' равен одному из этих векторов.

При $\mathbf{a}'' = \mathbf{a}$ условие ортогональности принимает вид

$$\begin{aligned} \iint_{(D)} e^{2\pi i (\mathbf{a} \cdot \mathbf{r})} \left\{ \left(\frac{k_1 C}{V_0^2} + \omega_0^2 C' C_{-n_1 - n_2} \right) e^{-2\pi i (\mathbf{a} \cdot \mathbf{r})} + \right. \\ \left. + \left(\frac{k_1 C'}{V_0^2} + \omega_0^2 C C_{n_1 n_2} \right) e^{-2\pi i (\mathbf{a}'_{n_1 n_2} \cdot \mathbf{r})} \right\} d\sigma = 0, \end{aligned}$$

или

$$\left(\frac{k_1 C}{V_0^2} + \omega_0^2 C' C_{-n_1 - n_2} \right) \iint_{(D)} d\sigma = 0,$$

поскольку в силу различия направлений векторов \mathbf{a} и \mathbf{a}' интеграл от второго члена равен нулю.

Итак, соотношение между k_1 , C и C' имеет вид

$$\frac{k_1 C}{V_0^2} + \omega_0^2 C' C_{-n_1 - n_2} = 0. \quad (34.27a)$$

Положим теперь $\mathbf{a}'' = \mathbf{a}'_{n_1 n_2}$. Получим

$$\begin{aligned} \iint_{(D)} e^{2\pi i (\mathbf{a}'_{n_1 n_2} \cdot \mathbf{r})} \left\{ \left(\frac{k_1 C}{V_0^2} + \omega_0^2 C' C_{-n_1 - n_2} \right) e^{-2\pi i (\mathbf{a} \cdot \mathbf{r})} + \right. \\ \left. + \left(\frac{k_1 C'}{V_0^2} + \omega_0^2 C C_{n_1 n_2} \right) e^{-2\pi i (\mathbf{a}'_{n_1 n_2} \cdot \mathbf{r})} \right\} d\sigma = 0, \end{aligned}$$

или аналогично предыдущему

$$\left(\frac{k_1 C'}{V_0^2} + \omega_0^2 C C_{n_1 n_2} \right) \iint_{(D)} d\sigma = 0.$$

Отсюда получаем второе соотношение между k_1 , C и C'

$$\frac{k_1 C'}{V_0^2} + \omega_0^2 C C_{n_1 n_2} = 0. \quad (34.27b)$$

Соотношения (34.27a) и (34.27b) образуют систему линейных однородных уравнений относительно неизвестных C и C' . Если эта система допускает существование нетривиаль-

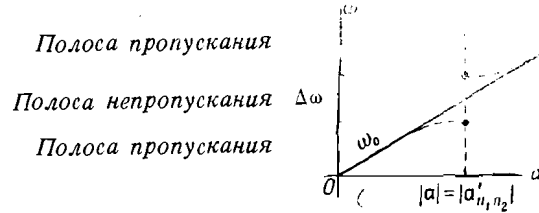
ных решений, то из нее можно определить отношение коэффициентов C и C' . Для этого необходимо, чтобы

$$\begin{vmatrix} \frac{k_1}{V_0^2} & \omega_0^2 C_{-n_1, -n_2} \\ \omega_0^2 C_{n_1, n_2} & \frac{k_1}{V_0^2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{k_1}{V_0^2} & \omega_0^2 C_{n_1, n_2}^* \\ \omega_0^2 C_{n_1, n_2} & \frac{k_1}{V_0^2} \end{vmatrix} = 0. \quad (34.28)$$

Заметим, что так как функция f действительна, то $C_{-n_1, -n_2} = C_{n_1, n_2}^*$. Разрешая предыдущее соотношение относительно k_1 , находим

$$k_1 = \pm \omega_0^2 V_0^2 |C_{n_1, n_2}|. \quad (34.29)$$

Мы получили два значения k_1 , для которых можно определить отношение C'/C . Зная это отношение, можно определить коэффициенты B_{m_1, m_2} , входящие в выражение для разложения (34.18) функции u_1 .



Фиг. 83.

Из этого обсуждения следует, что в рассмотренном случае уже первое приближение дает поправку к частоте, поскольку

$$\omega^2 = \omega_0^2 + \epsilon k_1 = \omega_0^2 \pm \epsilon \omega_0^2 V_0^2 |C_{n_1, n_2}|. \quad (34.30)$$

Кроме того, в выражении для разложения волн, соответствующих этим частотам, с учетом поправки u_1 имеются два члена (C и C') вместо одного в первом случае, превышающие все остальные, которые имеют порядок ϵ .

В заключение заметим, что так же, как и в первом случае, возмущение слабо, если значение вектора \mathbf{a} не слишком близко к значению одного из векторов \mathbf{a}'_{n_1, n_2} . Однако в противоположном случае возмущение волны возрастает и при

$\mathbf{a} = \mathbf{a}'_{n_1, n_2}$ частота может принимать два значения, каждое из которых соответствует одному из значений k_1 , определяемых формулой (34.29). В то время как для невозмущенной волны частота является линейной функцией $|\mathbf{a}|$, что на фиг. 83 соответствует прямой линии, для возмущенной волны зависимость частоты от $|\mathbf{a}|$ существенным образом меняется. Кривая зависимости частоты от $|\mathbf{a}|$ для случая $\mathbf{a} = \mathbf{a}'_{n_1, n_2}$ изображена на фиг. 83 штрихами. При определенном значении вектора \mathbf{a} кривая испытывает разрыв; по мере же удаления от точки разрыва искажение уменьшается.

§ 35. Парциальные волны для второго случая и брэгговское отражение

Предполагая в дальнейшем остановиться на переходе непрерывной кривой в разрывную в окрестности точки разрыва, мы сейчас сравним условия, относящиеся к случаю $\mathbf{a} = \mathbf{a}'_{n_1, n_2}$, с формулой Брэгга для отражения рентгеновских лучей от кристаллографических плоскостей кристалла.

Брэгг показал, что рентгеновские лучи могут селективно отражаться от кристаллографических плоскостей кристаллической решетки при условии, если длина волны, расстояние между кристаллографическими плоскостями и направление распространения удовлетворяют некоторым условиям. Как мы сейчас увидим, полученное Брэггом условие полностью эквивалентно условию

$$|\mathbf{a}| = |\mathbf{a}'_{n_1, n_2}| \quad (35.1)$$

для величин n_1 и n_2 , определяющих в случае плоской решетки ряды атомов (ряды, которым в случае трех измерений соответствуют кристаллографические плоскости). Условие (35.1) соответствует условию, полученному в § 34 при рассмотрении случая $\mathbf{a} = \mathbf{a}'_{n_1, n_2}$.

Рассмотрим вектор обратной решетки

$$\mathbf{B} = n_1 \mathbf{b}_1 + n_2 \mathbf{b}_2,$$

который определяет, как известно, некоторое направление в обратной двумерной решетке и перпендикулярный этому направлению ряд частиц в прямой решетке. Предположим, что отражение обусловлено этим рядом частиц и что

соотношение (35.1) выполняется. Мы покажем сейчас, что это соотношение аналогично условию Брэгга. Обозначим через \mathbf{a}_0 такой вектор \mathbf{a} , для которого выполняется соотношение (35.1), а через \mathbf{a}'_0 — вектор $\mathbf{a}'_{n_1 n_2}$. Тогда получим

$$\mathbf{a}'_0 = \mathbf{a}_0 - \mathbf{V}, \quad (35.2)$$

$$|\mathbf{a}'_0| = |\mathbf{a}_0|, \quad (35.1)$$

откуда

$$|\mathbf{a}'_0|^2 = |\mathbf{a}_0|^2 = |\mathbf{a}_0 - \mathbf{V}|^2 = |\mathbf{a}_0|^2 - 2(\mathbf{a}_0 \cdot \mathbf{V}) + |\mathbf{V}|^2,$$

$$|\mathbf{a}_0|^2 = |\mathbf{a}'_0|^2 = |\mathbf{a}'_0 + \mathbf{V}|^2 = |\mathbf{a}'_0|^2 + 2(\mathbf{a}'_0 \cdot \mathbf{V}) + |\mathbf{V}|^2.$$

Поскольку $|\mathbf{a}_0| = |\mathbf{a}'_0|$, то

$$|\mathbf{V}|^2 = 2(\mathbf{a}_0 \cdot \mathbf{V}) = -2(\mathbf{a}'_0 \cdot \mathbf{V})$$

или

$$|\mathbf{a}_0| \cos(\widehat{\mathbf{a}_0, \mathbf{V}}) = -|\mathbf{a}'_0| \cos(\widehat{\mathbf{a}'_0, \mathbf{V}}) = \frac{1}{2} |\mathbf{V}|. \quad (35.3)$$

Так как векторы \mathbf{a}_0 и \mathbf{a}'_0 отличаются только по направлению, но не по величине, то

$$\cos(\widehat{\mathbf{a}_0, \mathbf{V}}) = -\cos(\widehat{\mathbf{a}'_0, \mathbf{V}});$$

это равенство показывает, что угол между векторами \mathbf{a}_0 и \mathbf{V} равен углу между векторами \mathbf{a}'_0 и $-\mathbf{V}$. С другой стороны, из (35.3) следует, что концы векторов \mathbf{a}_0 и \mathbf{a}'_0 лежат на перпендикулярах к серединам векторов \mathbf{V} и $-\mathbf{V}$.

Поскольку проекция вектора \mathbf{a}_0 на направление вектора \mathbf{V} равна $|\mathbf{V}|/2$, то

$$|\mathbf{a}_0| \cos \varphi = \frac{1}{\lambda} \cos \varphi = \frac{|\mathbf{V}|}{2} = \frac{\delta}{2\delta},$$

где λ — длина волны, соответствующая \mathbf{a}_0 , δ — расстояние между кристаллографическими плоскостями, перпендикулярными \mathbf{V} , а φ — угол между \mathbf{a}_0 и \mathbf{V} . Отсюда получаем

$$\lambda = 2\delta \cos \varphi. \quad (35.4)$$

Рассмотрим теперь фиг. 84, где изображено семейство рядов частиц, а также направление падающего (вектор \mathbf{a}_0) и соответствующего ему отраженного (вектор \mathbf{a}'_0) луча. Элементарная теория отражения Брэгга заключается в следующем:

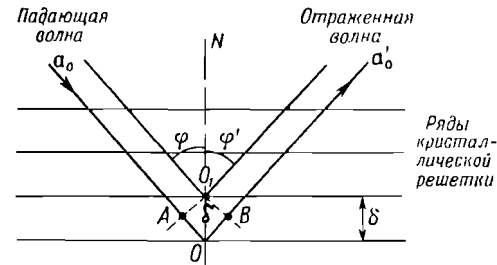
1. Углы φ и φ' должны быть равны между собой, что обеспечивает одинаковое отражение для каждого ряда решетки.

2. Волны, отраженные двумя последовательно расположенными рядами, должны находиться в фазе, что сводится к требованию

$$\text{Путь } AOB = 2\delta \cos \varphi = m\lambda, \quad (35.5)$$

где m — целое.

Это соотношение и носит название „условие Брэгга“. Легко видеть, что оно полностью совпадает с условием (35.4), если положить $m = 1$.



Фиг. 84. Брэгговское отражение.

С другой стороны, если через n_1 и n_2 мы условимся обозначать целые числа, которые характеризуют вектор \mathbf{V} для случая $m = 1$, то очевидно, что другие векторы \mathbf{V}_m могут быть определены в обратной решетке следующим образом:

$$\mathbf{V}_m = mn_1 \mathbf{b}_1 + mn_2 \mathbf{b}_2;$$

учет этих векторов приводит к необходимости рассматривать в прямой решетке другие ряды атомов, расположенные на расстоянии δ_m друг от друга, где

$$\delta_m = \frac{1}{|\mathbf{V}_m|} = \frac{1}{m|\mathbf{V}|} = \frac{\delta}{m}.$$

Учитывая теперь эти ряды подобно тому, как это было сделано выше, можно получить общее условие (35.5).

Вышизложенное показывает, что рассмотренный ранее случай, $\mathbf{a} = \mathbf{a}'_{n_1 n_2}$, в котором волна характеризуется наличием

двух составляющих, в точности соответствует условию отражения Брэгга: падающая волна $C(\mathbf{a}_0)$ может отразиться от ряда атомов, что приводит к появлению волны $C'(\mathbf{a}'_0)$, имеющей большую амплитуду.

§ 35. Исследование явлений в окрестности точки разрыва

Рассмотрим теперь такую область изменения вектора \mathbf{a} , где он лишь приблизительно удовлетворяет условию Брэгга, т. е. область, в которой

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_0 + \eta \mathbf{B}, \quad (36.1)$$

где η — некоторый малый параметр. Тогда

$$\begin{aligned} \mathbf{a}' &= \mathbf{a} - \mathbf{B} = \mathbf{a}_0 - \mathbf{B} + \\ &+ \eta \mathbf{B} = \mathbf{a}'_0 + \eta \mathbf{B}, \end{aligned} \quad (36.2)$$

где \mathbf{a}_0 и \mathbf{a}'_0 — векторы, рассмотренные в предыдущем параграфе и точно удовлетворяющие условию Брэгга. Векторы же \mathbf{a} и \mathbf{a}' удовлетворяют условию Брэгга только приближенно, с точностью до величины порядка η (фиг. 85).

Учитывая соотношение (35.3), с точностью до величин первого порядка по η включительно получаем

$$|\mathbf{a}|^2 = |\mathbf{a}_0|^2 + 2\eta(\mathbf{a}_0 \cdot \mathbf{B}), \quad (36.3)$$

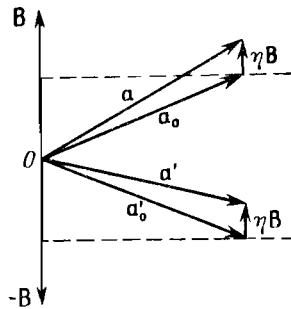
$$|\mathbf{a}'|^2 = |\mathbf{a}'_0|^2 + 2\eta(\mathbf{a}'_0 \cdot \mathbf{B}) = |\mathbf{a}_0|^2 - 2\eta(\mathbf{a}_0 \cdot \mathbf{B}).$$

Введем теперь следующие обозначения:

$$\frac{\omega_0^2}{V_0^2} = 4\pi^2 |\mathbf{a}_0|^2,$$

$$\frac{\omega_a^2}{V_0^2} = 4\pi^2 |\mathbf{a}|^2 = \frac{\omega_0^2}{V_0^2} + 8\pi^2 \eta (\mathbf{a}_0 \cdot \mathbf{B}), \quad (36.4)$$

$$\frac{\omega_{a'}^2}{V_0^2} = 4\pi^2 |\mathbf{a}'|^2 = \frac{\omega_0^2}{V_0^2} - 8\pi^2 \eta (\mathbf{a}_0 \cdot \mathbf{B})$$



Фиг. 85.

и положим, как и прежде [см. формулу (34.5)], что

$$u_0 = C e^{-2\pi i (\mathbf{a} \cdot \mathbf{r})} + C' e^{-2\pi i (\mathbf{a}' \cdot \mathbf{r})} \quad (36.5)$$

и

$$u = u_0 + \varepsilon u_1, \quad (36.6)$$

$$\frac{1}{V^2} = \frac{1}{V_0^2} + \varepsilon f.$$

В соответствии с формулой (34.7) частота ω изменения обоих членов в выражении для u_0 определяется из соотношения

$$\omega^2 = \omega_0^2 + \varepsilon k_1.$$

Эту частоту нельзя смешивать с ω_a и $\omega_{a'}$, которые представляют собой частоты волн соответственно (C) и (C') , в невозмущенной среде. Частота ω — это общая частота обеих волн в среде при наличии периодического возмущения.

Учитывая соотношения (36.4), можно написать, что

$$\begin{aligned} \Delta u_0 &= \Delta [C e^{-2\pi i (\mathbf{a} \cdot \mathbf{r})} + C' e^{-2\pi i (\mathbf{a}' \cdot \mathbf{r})}] = \\ &= -4\pi^2 |\mathbf{a}|^2 C e^{-2\pi i (\mathbf{a} \cdot \mathbf{r})} - 4\pi^2 |\mathbf{a}'|^2 C' e^{-2\pi i (\mathbf{a}' \cdot \mathbf{r})} = \\ &= -\frac{\omega_0^2}{V_0^2} u_0 - 8\pi^2 \eta (\mathbf{a}_0 \cdot \mathbf{B}) [C e^{-2\pi i (\mathbf{a} \cdot \mathbf{r})} - C' e^{-2\pi i (\mathbf{a}' \cdot \mathbf{r})}]. \end{aligned} \quad (36.7)$$

В этом выражении для Δu_0 член, пропорциональный η , отражает тот факт, что условие Брэгга выполняется только приближенно.

Заметим, что η и ε представляют собой два параметра, которые характеризуют величину возмущения и которые можно считать одного порядка малости; в дальнейшем их отношение мы будем обозначать через h

$$h = \frac{\eta}{\varepsilon}. \quad (36.8)$$

Вернемся теперь к уравнению (34.8). Группируя снова члены одного порядка малости и приравнявая полученное выражение нулю, получаем

$$\begin{aligned} \Delta u_1 + \frac{\omega_0^2}{V_0^2} u_1 &= \\ &= -\left(\frac{k_1}{V_0^2} - \omega_0^2 f \right) [C e^{-2\pi i (\mathbf{a} \cdot \mathbf{r})} + C' e^{-2\pi i (\mathbf{a}' \cdot \mathbf{r})}] + \\ &+ 8\pi^2 h (\mathbf{a}_0 \cdot \mathbf{B}) [C e^{-2\pi i (\mathbf{a} \cdot \mathbf{r})} - C' e^{-2\pi i (\mathbf{a}' \cdot \mathbf{r})}]. \end{aligned} \quad (36.9)$$

Это уравнение отличается от (34.9) лишь слагаемым, стоящим в правой части и пропорциональным h . Решение его находится тем же способом, что и в § 34 (случай $\mathbf{a} = \mathbf{a}'_{n_1 n_2}$): функция f разлагается в двойной ряд Фурье, после чего члены группируются подобно тому, как это делалось в уравнении (34.26).

Существенную роль играют только члены

$$\left\{ \frac{k_1 C}{V_0^2} + \omega_0^2 C' C_{-n_1, -n_2} - 8\pi^2 h (\mathbf{a}_0 \cdot \mathbf{B}) C \right\} e^{-2\pi i (\mathbf{a} \cdot \mathbf{r})}, \quad (36.10)$$

$$\left\{ \frac{k_1 C'}{V_0^2} + \omega_0^2 C C_{n_1, n_2} + 8\pi^2 h (\mathbf{a}_0 \cdot \mathbf{B}) C' \right\} e^{-2\pi i (\mathbf{a}' \cdot \mathbf{r})},$$

поскольку при подстановке правой части уравнения (36.9) в соотношение ортогональности интеграл от всех членов, за исключением этих двух, равен нулю.

Первый из этих членов приводит к соотношению между C и C' , аналогичному (34.27а), если для u_1 взять решение $e^{-2\pi i (\mathbf{a} \cdot \mathbf{r})}$ уравнения без правой части. Это соотношение имеет вид

$$\frac{k_1 C}{V_0^2} + \omega_0^2 C' C_{-n_1, -n_2} - 8\pi^2 h (\mathbf{a}_0 \cdot \mathbf{B}) C = 0. \quad (36.11a)$$

Из второго члена, если в качестве решения для u_1 взять $e^{-2\pi i (\mathbf{a}' \cdot \mathbf{r})}$, получаем

$$\frac{k_1 C'}{V_0^2} + \omega_0^2 C C_{n_1, n_2} + 8\pi^2 h (\mathbf{a}_0 \cdot \mathbf{B}) C' = 0. \quad (36.11b)$$

Условие разрешимости системы этих уравнений имеет вид

$$\begin{vmatrix} \frac{k_1}{V_0^2} - 8\pi^2 h (\mathbf{a}_0 \cdot \mathbf{B}) & \omega_0^2 C_{-n_1, -n_2}^* \\ \omega_0^2 C_{n_1, n_2} & \frac{k_1}{V_0^2} + 8\pi^2 h (\mathbf{a}_0 \cdot \mathbf{B}) \end{vmatrix} = 0, \quad (36.12)$$

откуда

$$\frac{k_1}{V_0^2} = \pm \sqrt{\omega_0^4 |C_{n_1, n_2}|^2 + [8\pi^2 h (\mathbf{a}_0 \cdot \mathbf{B})]^2}. \quad (36.13)$$

Полагая в этой формуле $h = 0$, получаем условие Брэгга и результаты, приведенные выше,

Если же значение h велико, то

$$\frac{k_1}{V_0^2} = \pm 8\pi^2 h (\mathbf{a}_0 \cdot \mathbf{B}), \quad h \gg 1 \quad (36.14)$$

и, согласно соотношению (36.4),

$$\frac{\omega^2}{V_0^2} = \frac{\omega_0^2}{V_0^2} + \epsilon \frac{k_1}{V_0^2} = \frac{\omega_0^2}{V_0^2} \pm \epsilon 8\pi^2 h (\mathbf{a}_0 \cdot \mathbf{B}) = \begin{cases} \frac{\omega_a^2}{V_0^2} \\ \frac{\omega_{a'}^2}{V_0^2} \end{cases}.$$

Таким образом, оказывается, что вектор \mathbf{a} должен лежать в одной зоне, а вектор \mathbf{a}' — в другой. Значения частоты ω лежат на переходной кривой, изображенной на фиг. 83 пунктиром.

Приведенное в § 34 и 36 обсуждение показывает, что функция $\nu(\mathbf{a})$ разрывна только в том случае, если конец вектора \mathbf{a} лежит на одном из перпендикуляров к середине различных векторов обратной решетки. Этот результат полностью подтверждает правило выбора последовательных зон, принятое нами в § 33. Примеры конфигурации первой зоны были даны различными авторами, однако общее правило построения зон, а также их полное изучение в случае двумерной и трехмерной решеток принадлежит Бриллюэну.

§ 37. Примеры зон в случае двух измерений

В § 34—36 рассматривались основные черты теории отражения рентгеновских лучей от кристаллов. Эти лучи распространяются в решетке со скоростью, равной скорости света в пустоте; наличие же атомов и молекул может слегка изменять характер распространения. Величина вносимого возмущения пропорциональна плотности электронов в кристалле, а вид уравнения, определяющего характер распространения, сходен с видом уравнения (34.8), где поправочный член f пропорционален электронной плотности.

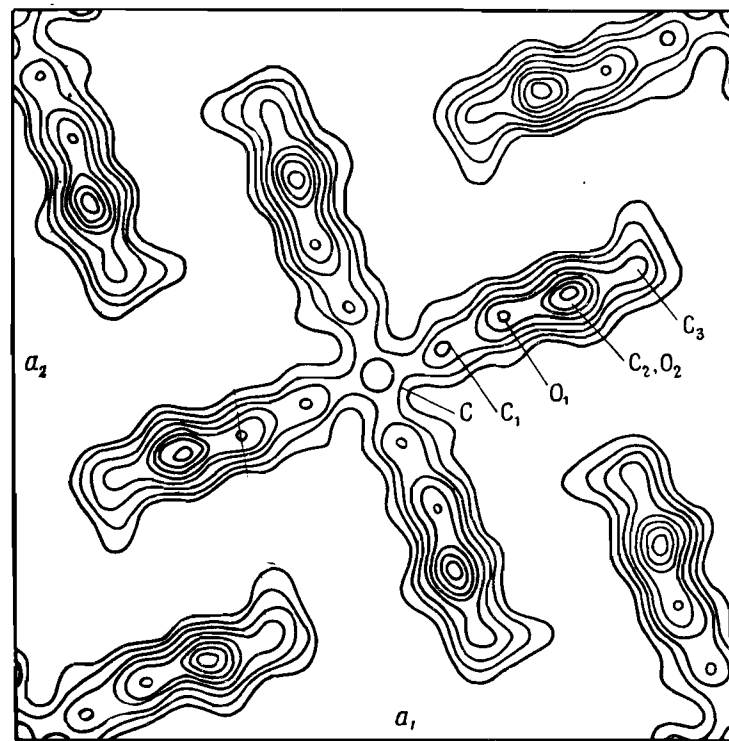
В кристаллической структуре, где атомы в прямой решетке расположены упорядоченно, каждое ядро окружено электронным облаком, которое может частично перекрываться с другими электронными облаками, окружающими

соседние атомы. Электронную плотность при этом можно представить некоторой периодической функцией с периодом, равным периоду решетки; эту функцию можно разложить в ряд Фурье, подобно тому, как это было сделано в § 34 [формула (34.14)]. Как легко видеть, в полученные там соотношения (34.30) и (36.13) входят только абсолютные значения $|C_{m,m_2}|$ коэффициентов разложения. Таким образом, из интерпретации всех опытов по изучению распространения волн в кристаллах определяются только модули коэффициентов разложения Фурье, но не их фазы. Фазы часто можно определить из соображений симметрии, а также из некоторых известных общих характеристик рассматриваемой кристаллической структуры. Таким образом, можно найти все коэффициенты разложения пространственного заряда в ряд Фурье и определить отсюда характер его распределения в кристаллической решетке. На фиг. 86 приведена схема подобного распределения, полученная на основании экспериментальных данных.

Таковы основы метода, о котором упоминалось в конце § 32. Как правило, необходимо определять *все* коэффициенты C_m разложения и практически нет таких реальных решеток, для которых бы выполнялось одно из условий (32.4) или (32.7); в исключительных случаях некоторые из коэффициентов могут обращаться в нуль, однако такое положение осуществляется довольно редко.

В § 35 указывалось, что между условием разрывности кривой $\nu = \nu(\mathbf{a})$ и условием отражения Брэгга существует связь, которую можно интерпретировать подобно тому, как мы интерпретировали связь, существующую между полосами пропускания и полосами непропускания одномерной структуры. Пусть задано некоторое направление распространения, соответствующее вектору \mathbf{a} , и пусть частота волны ν зависит от величины $|\mathbf{a}|$. Если для этого направления частота соответствует полосе пропускания, то волны, обладающие этой частотой и бегущие в направлении вектора \mathbf{a} , смогут распространяться в структуре; таким образом, будет иметь место лишь частичное отражение от поверхности кристалла. Если же частота соответствует полосе непропускания, т. е. лежит в интервале, аналогичном указанному на фиг. 83, то распространение такой волны в кристалле будет невозможно и она полностью отразится от его поверхности.

Элементарная теория отражения Брэгга (см. фиг. 84) позволяет предсказывать отражение только для одного какого-либо значения частоты, тогда как в результате наших

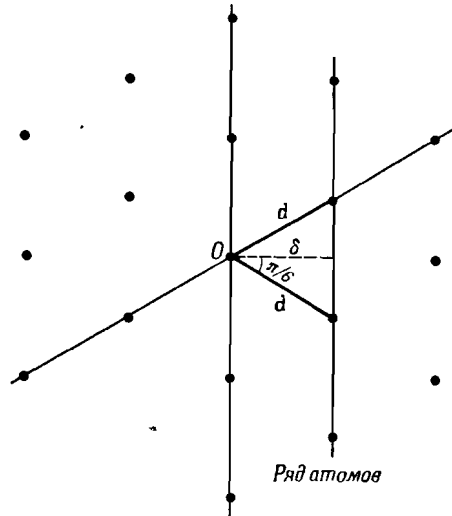


Фиг. 86. Кристаллическая структура пентаэритрола тетраацетата $C - (CH_2O - CO - CH_2)_4$.

Показано расположение атомов углерода и кислорода, полученное из разложения Фурье, коэффициенты которого определяются на основании результатов исследования дифракции рентгеновских лучей (Гудвин и Харди).

обсуждений можно рассматривать отражение для всех частот, соответствующих полосе непропускания ширины $\Delta\nu$. Заметим, что для рентгеновских лучей искажение волн кристаллической решеткой чрезвычайно мало, поскольку для идеального кристалла ширина $\Delta\nu$ полосы непропускания очень мала,

Все сказанное выше относится к двумерным решеткам, тогда как отражение рентгеновских лучей наблюдается в трехмерных структурах. Довольно хорошим примером двумерной задачи является рассматриваемое в квантовой механике отражение электронов от кристаллов, подтверждающее волновую природу электрона. Действительно, в многочисленных экспериментах (Дэвиссон и Джермер) отражение



Фиг. 87. Гексагональная решетка.

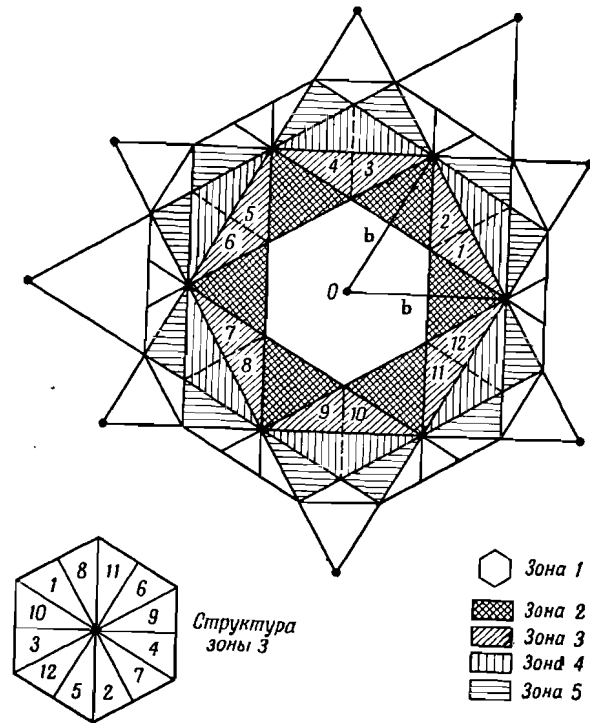
$$\delta = 0,8660 d = \frac{\sqrt{3}}{2} d.$$

происходит от поверхности кристалла, и электронные волны не могут проникать в глубь его.

Сейчас мы приведем несколько примеров прямых и обратных двумерных решеток и уточним конфигурации соответствующих зон.

Если задана прямая решетка, то лучше всего построить соответствующую ей обратную решетку, используя соотношение (31.22). Для этого в прямой решетке определяют расстояния δ между параллельными рядами узлов. Проводя теперь отрезок длиной $1/\delta$ в направлении, перпендикулярном соответствующим рядам, получают вектор обратной решетки. На фиг. 87 приведен метод построения решетки в случае

гексагональной структуры, прямая решетка которой определяется заданием двух базисных векторов \mathbf{d} , образующих между собой угол $\pi/3$. Обратная решетка также будет



Фиг. 88. Расположение зон в гексагональной решетке.

гексагональной. Она получается из прямой путем поворота на угол $\pi/6$; модуль ее базисных векторов равен

$$|b| = \frac{2}{\sqrt{3}} \frac{1}{|d|}.$$

Структура пяти первых зон обратной решетки изображена на фиг. 88; построение шестой зоны, а также зон более высокого порядка можно провести аналогичным образом. Площадь каждой зоны A_b равна площади первой

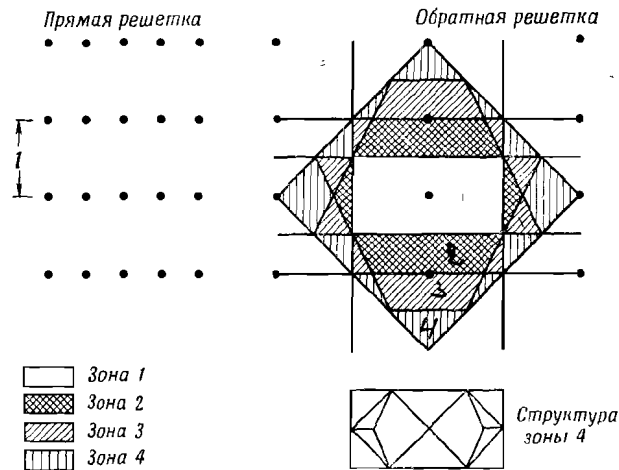
зоны, а также площади параллелограмма, построенного на базисных векторах \mathbf{b} ,

$$A_b = |b|^2 \sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2} |b|^2 = \frac{2}{\sqrt{3}} \frac{1}{|d|^2};$$

площадь же элементарной ячейки прямой решетки равна

$$A_d = |d|^2 \sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2} |d|^2 = \frac{1}{A_b}.$$

Любую зону можно свести к первой зоне, разбивая ее на подобласти и применяя к ним соответствующие операции



Фиг. 89. Прямоугольная решетка.

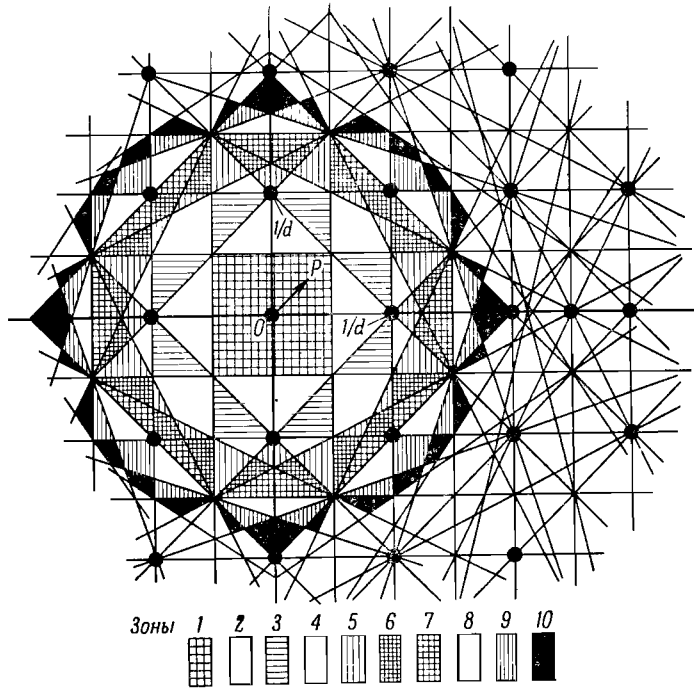
переноса G , эквивалентные некоторым векторам обратной решетки. Таким образом, получаем мозаичную структуру, полностью совпадающую с первой зоной, для второй зоны это очевидно; для третьей зоны его иллюстрирует фиг. 88, на которой изображено разбиение зоны на подобласти, которые путем переносов, выбранных соответствующим образом, можно свести к мозаичной структуре, полностью совпадающей с первой зоной. Аналогичную операцию разбиения на подобласти и переноса можно провести также для зон более высокого порядка.

Выше мы уже рассматривали другие примеры косоугольных решеток; соответствующие структуры представлены на фиг. 75, 79 и 81. На фиг. 89 изображена прямоугольная решетка и структура четырех первых ее зон; площадь каждой из них равна площади первой зоны. Операции переноса G , соответствующие выбранным надлежащим образом векторам обратной решетки, позволяют свести различные подобласти любой зоны к мозаичной структуре, полностью совпадающей с первой зоной. Подобная операция сведения четвертой зоны к первой иллюстрируется на фиг. 89.

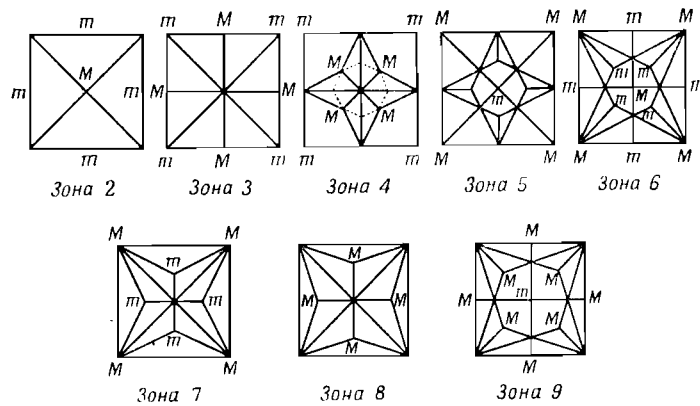
Квадратная структура приведена на фиг. 90 и 91, взятых из опубликованной в 1930 г. работы Бриллюэна; фиг. 91 иллюстрирует разбиение различных зон на подобласти и сведение их к первой.

В нашем изложении мы основывались на предположении о периодичности функции f , введенной в § 34. В некоторых задачах может оказаться, что симметрия этой функции возмущения (представляющей, например, плотность электронов) может быть ниже симметрии атомной решетки, а период функции отличен от периода решетки. В подобных случаях структура зон должна соответствовать периоду и симметрии функции f , а не периоду и симметрии решетки. Такое положение может иметь место, когда для изолированных атомов каждое из отдельных электронных облаков само по себе характеризуется определенной структурой (атомы в состояниях P, D, \dots) и не является сферически симметричным (S -состояние).

Используя понятие зон, большую часть результатов, полученных в первых главах для одномерных структур, можно непосредственно распространить на случай двух измерений. Пронумерованные цифрами 1, 2, 3, ... зоны соответствуют интервалам, обозначенным на фиг. 78 теми же цифрами. Частота ν в одномерном случае была периодической функцией с периодом $1/d$, и касательная к кривой зависимости $\nu(a)$ на границах первой зоны была горизонтальна. Для двух измерений функция $\nu(\mathbf{a})$ зависит от переменных a_x и a_y (компонент вектора \mathbf{a}) и на границе первой зоны ее нормальная производная должна обращаться в нуль. Для двумерных решеток также можно построить карту, характеризующую изменение частоты ν в зависимости от \mathbf{a} , проводя в плоскости $a_x a_y$ семейство кривых, вдоль каждой из

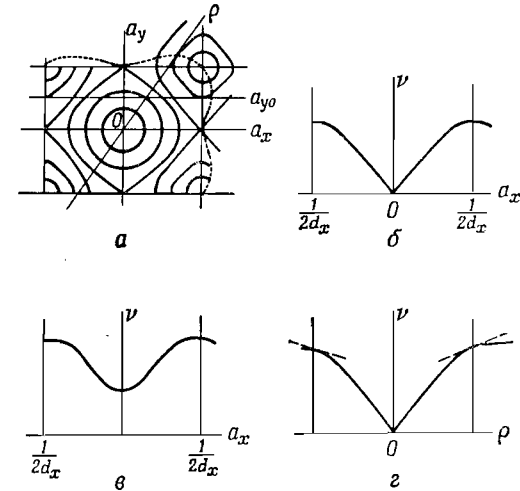


Фиг. 90. Расположение зон в квадратной решетке.



Фиг. 91. Сведение различных зон к первой зоне в случае квадратной решетки.

которых частота сохраняет постоянное значение. Одна из таких карт представлена на фиг. 92. *а*. Сечение этой карты вдоль оси a_x позволяет получить кривую (фиг. 92, *б*), аналогичную кривым, рассмотренным в гл. 1—3; сечение вдоль прямой a_{y0} , параллельной оси a_x , приводит к кривой, изображенной на фиг. 92, *в* (касательная горизонтальна в центре



Фиг. 92. *а* — место точек, где $\partial\nu/\partial\rho = 0$; *б* — разрез по линии $a_y = 0$; *в* — разрез по линии $a_{y0} \neq 0$; *г* — разрез по линии $O\rho$.

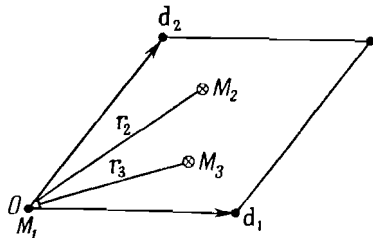
и на границах зоны). Наконец, радиальное сечение вдоль прямой $O\rho$ приводит к кривой (фиг. 92, *г*), касательная к которой на границах зоны уже не является горизонтальной.

Пунктир на фиг. 92, *а* представляет собой геометрическое место точек, в которых производная по радиусу $\partial\nu/\partial\rho$ обращается в нуль. Эта кривая отличается от совпадающей с границей зоны кривой, представляющей собой геометрическое место точек, в которых нормальная производная обращается в нуль. Об этом необходимо постоянно помнить, чтобы не смешивать эти два различными определения производной функции $\nu(\mathbf{a})$.

На фиг. 92 качественно представлен характер кривых в случае прямоугольной (d_x, d_y) одноатомной решетки,

частицы которой могут испытывать колебания около своего положения равновесия. Эта задача полностью соответствует системам, обладающим свойствами фильтров нижних частот, которые мы рассматривали в гл. 3. Значения фазовой скорости различны для направлений Ox и Oy , и предельная частота меняется при перемещении вдоль границы первой зоны, т. е. она зависит как от направления распространения, так и от структуры решетки.

На фиг. 93 изображена многоатомная решетка, элементарная ячейка которой состоит из нескольких атомов. Подобная структура называется *решеткой с базисом*, где термин „базис“ означает совокупность векторов $\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3, \dots, \mathbf{r}_n$, определяющих положение частиц M_2, M_3, \dots, M_n в ячейке по отношению к частице M_1 , взятой за начальную. Этот тип структуры является обобщением изображенной на фиг. 58 одномерной модели, для которой, как было указано,



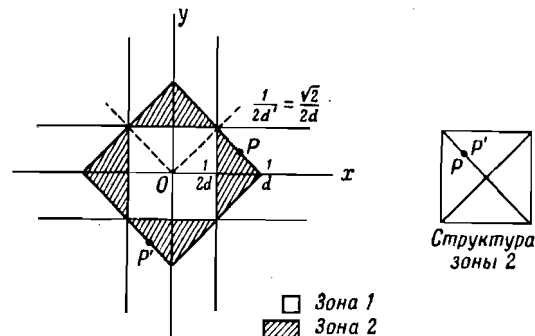
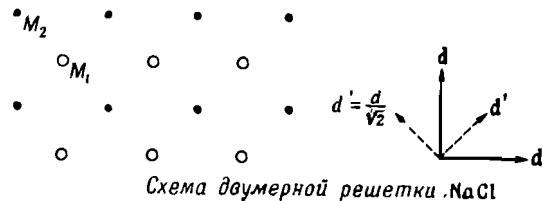
Фиг. 93. Решетка с базисом.

кривая $v = v(\mathbf{a})$ состоит из N ветвей: одной акустической и $N - 1$ оптических. В данном случае получаем N поверхностей, проектирующихся вертикально на первую зону. Сечение этих поверхностей плоскостью, перпендикулярной плоскости зоны, приводит к кривым, которые полностью аналогичны кривым на фиг. 13 и 20, полученным для одномерных решеток.

Решетку хлористого натрия можно рассмотреть точно таким же образом, как это было сделано в гл. 4. Если массы частиц M_1 и M_2 различны, то структура представляет собой, как показано на фиг. 94, гранецентрированную решетку. Эта решетка с базисом строится на двух ортогональных векторах, обозначенных на фиг. 94 через \mathbf{d} . Форма двух первых зон показана внизу на фиг. 94. Когда $M_1 = M_2$, структура резко меняет характер и превращается в простую квадратную решетку с базисными векторами \mathbf{d}' , повернутыми относительно векторов \mathbf{d} на угол $\pi/4$ и имеющими абсолютную величину

$$|\mathbf{d}'| = \frac{|\mathbf{d}|}{\sqrt{2}}.$$

В первой зоне этой квадратной структуры объединяются две первые зоны гранецентрированной структуры. Если масса $M_1 = M_2$, то частота $v(\mathbf{a})$ является однозначной функцией вектора \mathbf{a} во всей первой зоне. Если же масса M_1 становится отличной от M_2 , то четыре треугольные подобласти, на которые можно разбить вторую зону, следует перенести



Фиг. 94.

в первую зону так, чтобы они ее полностью перекрывали. Функция $v(\mathbf{a})$ при этом становится внутри первой зоны гранецентрированной решетки уже однозначной: каждому значению вектора \mathbf{a} соответствуют два значения частоты v . Границы этих зон вдоль осей x и y равны соответственно $\pm 1/2d$ и $\pm 1/d$. Заметим, что в направлении, составляющем с осями угол 45° , границы этих двух зон совпадают. Операция переноса треугольных подобластей второй зоны в первую показывает, что в новом представлении две различные точки, например P и P' , сливаются в одну. Поскольку в силу симметрии значение частоты, соответствующей точкам P и P' , очевидно, одинаково, то, следовательно,

вдоль диагонали квадрата функция $\nu(\mathbf{a})$ непрерывна. Итак, две ветви функции $\nu(\mathbf{a})$ непрерывны во всех точках первой зоны, за исключением ее границ.

Если элементарная ячейка состоит из N частиц, то функция $\nu(\mathbf{a})$ имеет N ветвей, когда область изменения вектора \mathbf{a} охватывает первую зону. Если же, как в только что рассмотренном случае, область изменения \mathbf{a} охватывает N зон, то функция $\nu(\mathbf{a})$ становится однозначной.

Непрерывную периодическую структуру можно рассматривать как предельный случай рассмотренных структур, в котором число образующих элементарную ячейку частиц $N \rightarrow \infty$. Функция $\nu(\mathbf{a})$ при этом будет иметь либо бесконечное число ветвей, если область изменения вектора \mathbf{a} охватывает первую зону, либо только одну ветвь, если область изменения \mathbf{a} охватывает всю плоскость. Эта задача была рассмотрена в § 34 и 36. Для однородной среды с постоянными свойствами для всех векторов \mathbf{a} на плоскости функция

$$\nu = W |\mathbf{a}|$$

однозначна. Наличие периодического возмущения приводит к тому, что функция $\nu(\mathbf{a})$ становится разрывной вдоль линий, представляющих границы различных зон и соответствующих брэгговскому отражению (см. § 33 и 35). С увеличением возмущения положение точек разрыва остается неизменным, а возрастает лишь величина разрыва функции $\nu(\mathbf{a})$. Все подобласти любой зоны путем соответствующего переноса вида $h_1 \mathbf{b}_1 + h_2 \mathbf{b}_2$ можно свести к мозаичной структуре, полностью совпадающей с первой зоной. Сводя область изменения вектора \mathbf{a} к первой зоне, получаем, что каждая зона высшего порядка соответствует одной из ветвей функции $\nu(\mathbf{a})$.

Таким образом, как мы уже отмечали, из экспериментов следует, что реальный кристалл представляет собой систему рядов (или плоскостей), в которой ни одно из семейств не пропущено. Отсюда следует, что как разложения в ряд Фурье, рассмотренных в § 32, так и системы линий разрыва, представляющих границы зон, являются полными.

ТРЕХМЕРНЫЕ РЕШЕТКИ

§ 38. Прямые и обратные трехмерные решетки

Обычно трехмерную решетку рассматривают в косоугольной системе координат; ее элементарная ячейка имеет форму параллелепипеда. За систему базисных векторов выбирают три некопланарных вектора $\mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2, \mathbf{d}_3$, проведенных из начала решетки в три узла, в которых расположены частицы решетки; эти векторы определяют первую элементарную ячейку структуры. За систему базисных векторов также можно выбрать любую другую систему векторов, удовлетворяющих соотношению

$$\begin{aligned} \mathbf{d}'_1 &= \alpha_{11} \mathbf{d}_1 + \alpha_{12} \mathbf{d}_2 + \alpha_{13} \mathbf{d}_3, \\ \mathbf{d}'_2 &= \alpha_{21} \mathbf{d}_1 + \alpha_{22} \mathbf{d}_2 + \alpha_{23} \mathbf{d}_3, \\ \mathbf{d}'_3 &= \alpha_{31} \mathbf{d}_1 + \alpha_{32} \mathbf{d}_2 + \alpha_{33} \mathbf{d}_3, \end{aligned} \quad (38.1)$$

где величины α_{ik} — целые положительные или отрицательные числа, причем такие, что детерминант, составленный из коэффициентов α_{ik} , отличен от нуля. Это требование является условием линейной независимости векторов $\mathbf{d}'_1, \mathbf{d}'_2, \mathbf{d}'_3$, или, иначе говоря, условием некопланарности системы базисных векторов.

Кроме того, как и в случае двумерных систем, эти векторы \mathbf{d}'_i должны быть выбраны таким образом, чтобы объем построенной на них элементарной ячейки был равен объему элементарной ячейки, построенной на векторах \mathbf{d}_i ($i = 1, 2, 3$).

Произвольная точка структуры определяется заданием вектора

$$\mathbf{R}_{l_1 l_2 l_3} = l_1 \mathbf{d}_1 + l_2 \mathbf{d}_2 + l_3 \mathbf{d}_3, \quad (38.2)$$

где l_1, l_2 и l_3 — целые числа, а точка, находящаяся внутри элементарной ячейки, — заданием вектора

$$\mathbf{r} = \xi_1 \mathbf{d}_1 + \xi_2 \mathbf{d}_2 + \xi_3 \mathbf{d}_3, \quad (38.3)$$

где $|\xi_i| < 1$.

Все же другие точки пространства, занимаемого решеткой, будут определяться вектором, который является суммой вектора, характеризующего ячейку, где находится эта точка, и вектора, определяющего положение ее в элементарной ячейке.

Обратная решетка определяется так же, как и в случае двумерных структур. Ее базисные векторы $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3$ должны удовлетворять условию

$$(\mathbf{b}_i \cdot \mathbf{d}_k) = \delta_{ik}, \quad (38.4)$$

аналогичному соотношению (31.3).

С другой стороны, волновому вектору \mathbf{a} волны, распространяющейся в прямой решетке, в обратной решетке соответствует представление, аналогичное случаю двух измерений.

Наконец, правилу о том, что площади элементарных ячеек прямой и обратной решеток двумерных структур по величине обратны друг другу, в случае трехмерных структур соответствует правило: объемы элементарных ячеек прямой и обратной решеток по величине обратны друг другу, т. е.

$$V_a V_b = 1. \quad (38.5)$$

На основании того, что вектор \mathbf{b}_3 перпендикулярен векторам \mathbf{d}_1 и \mathbf{d}_2 [см. соотношение (38.4)], можно написать

$$\mathbf{b}_3 = k [\mathbf{d}_1 \mathbf{d}_2]. \quad (38.6)$$

Так как

$$(\mathbf{b}_3 \cdot \mathbf{d}_3) = 1,$$

то, заменяя \mathbf{b}_3 его выражением через \mathbf{d}_1 и \mathbf{d}_2 из (38.6), получаем

$$1 = k (\mathbf{d}_3 [\mathbf{d}_1 \mathbf{d}_2]) = k V_a, \quad (38.7)$$

откуда

$$k = \frac{1}{V_a}.$$

Таким образом, соотношение (38.6) принимает вид

$$\mathbf{b}_3 = \frac{1}{V_a} [\mathbf{d}_1 \mathbf{d}_2]. \quad (38.8)$$

Аналогично можно получить

$$\begin{aligned} \mathbf{b}_1 &= \frac{1}{V_a} [\mathbf{d}_2 \mathbf{d}_3], \\ \mathbf{b}_2 &= \frac{1}{V_a} [\mathbf{d}_3 \mathbf{d}_1]. \end{aligned} \quad (38.9)$$

Как легко показать,

$$\mathbf{d}_3 = \frac{1}{V_b} [\mathbf{b}_1 \mathbf{b}_2]; \quad \mathbf{d}_1 = \frac{1}{V_b} [\mathbf{b}_2 \mathbf{b}_3]; \quad \mathbf{d}_2 = \frac{1}{V_b} [\mathbf{b}_3 \mathbf{b}_1]. \quad (38.10)$$

Из этих соотношений следует, что

$$1 = (\mathbf{b}_3 \cdot \mathbf{d}_3) = \frac{([\mathbf{d}_1 \mathbf{d}_2] \cdot [\mathbf{b}_1 \mathbf{b}_2])}{V_a V_b}.$$

Если в числителе стоящего справа отношения выразить входящие туда векторы через их декартовы составляющие и соответствующим образом сгруппировать полученные члены, то его можно представить в виде

$$(\mathbf{d}_1 \cdot \mathbf{b}_1)(\mathbf{d}_2 \cdot \mathbf{b}_2) - (\mathbf{d}_2 \cdot \mathbf{b}_1)(\mathbf{d}_1 \cdot \mathbf{b}_2),$$

откуда следует, что числитель равен единице; таким образом

$$V_a V_b = 1.$$

Сформулируем теорему, аналог которой в случае двух измерений выражается соотношением (31.22); каждый вектор, определяющий некоторый узел обратной решетки, перпендикулярен бесконечному семейству параллельных плоскостей прямой решетки, проходящих через узлы этой решетки (кристаллографических плоскостей).

Пусть вектор

$$\mathbf{H} = h_1 \mathbf{b}_1 + h_2 \mathbf{b}_2 + h_3 \mathbf{b}_3, \quad (38.11)$$

где h_1, h_2, h_3 — целые числа, определяет некоторый узел обратной решетки, а вектор

$$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{H}}{|\mathbf{H}|} \quad (38.12)$$

является единичным вектором в направлении \mathbf{H} . Векторное уравнение плоскости, перпендикулярной \mathbf{H} , можно записать в виде

$$(\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}) = \frac{(\mathbf{H} \cdot \mathbf{r})}{|\mathbf{H}|} = c, \quad (38.13)$$

где параметр c определяет расстояние от начала координат до этой плоскости.

Если одна из таких плоскостей проходит через некоторый узел прямой решетки, определяемый вектором $\mathbf{R}_{l_1 l_2 l_3}$, то

$$\frac{(\mathbf{H} \cdot \mathbf{R}_{l_1 l_2 l_3})}{|\mathbf{H}|} = \frac{h_1 l_1 + h_2 l_2 + h_3 l_3}{|\mathbf{H}|} = c; \quad (38.14)$$

в этом можно непосредственно убедиться, заменяя векторы \mathbf{H} и $\mathbf{R}_{l_1 l_2 l_3}$ их выражениями (38.2) и (38.11). Заметим, что числитель отношения, входящего в (38.14), также равен целому числу m . Расстояние между кристаллографическими плоскостями прямой решетки, перпендикулярными вектору \mathbf{H} , определяется наименьшим возможным изменением величины, стоящей в правой части соотношения (38.14). Поскольку числитель стоящего там отношения равен целому числу m , то его наименьшее отличное от нуля значение равно единице, и, следовательно, расстояние между кристаллографическими плоскостями, перпендикулярными вектору \mathbf{H} , будет равно

$$\delta = \frac{1}{|\mathbf{H}|} \quad (38.15)$$

при условии, что входящие в соотношение (38.14) члены имеют наименьшие возможные значения. Таким образом, мы приходим к результатам, которые аналогичны результатам, полученным в конце § 31.

Эту теорему можно также сформулировать следующим образом: расстояние между кристаллографическими плоскостями, перпендикулярными некоторому заданному направлению \mathbf{n} , обратно пропорционально расстоянию между началом решетки и узлом обратной решетки, находящейся на наименьшем расстоянии от начала в направлении вектора \mathbf{n} . Аналогичную теорему можно доказать и для обратной решетки.

Плотность точек на кристаллографической плоскости пропорциональна величине $\delta = 1/|\mathbf{H}|$; при условии соответствующей замены обозначений этот результат, очевидно, также может быть перенесен на обратную решетку.

Для прямой решетки произвольный вектор может быть записан в виде

$$\mathbf{r} = \xi_1 \mathbf{d}_1 + \xi_2 \mathbf{d}_2 + \xi_3 \mathbf{d}_3; \quad (38.16)$$

тогда, как легко убедиться,

$$\xi_1 = (\mathbf{b}_1 \cdot \mathbf{r}); \quad \xi_2 = (\mathbf{b}_2 \cdot \mathbf{r}); \quad \xi_3 = (\mathbf{b}_3 \cdot \mathbf{r}).$$

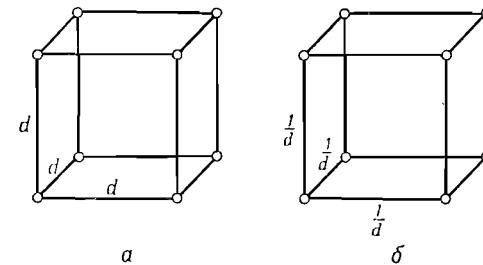
Аналогично, если в обратной решетке задан вектор

$$\mathbf{H} = \eta_1 \mathbf{b}_1 + \eta_2 \mathbf{b}_2 + \eta_3 \mathbf{b}_3, \quad (38.17)$$

то

$$\eta_1 = (\mathbf{d}_1 \cdot \mathbf{H}); \quad \eta_2 = (\mathbf{d}_2 \cdot \mathbf{H}); \quad \eta_3 = (\mathbf{d}_3 \cdot \mathbf{H}).$$

Прежде чем приступить к изучению распространения волн в трехмерных структурах, приведем несколько примеров



Фиг. 95. a — кубическая решетка; δ — обратная кубическая решетка.

трехмерных решеток и рассмотрим соответствующие им обратные решетки.

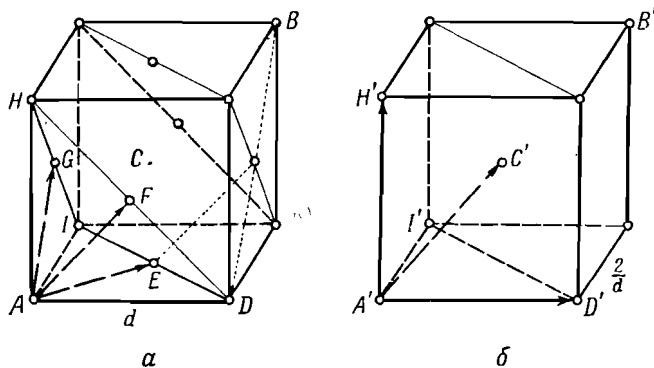
Наименее сложной трехмерной решеткой является, без сомнения, изображенная на фиг 95, a простая кубическая решетка. В этом случае

$$(\mathbf{d}_i \cdot \mathbf{d}_k) = \begin{cases} d^2 & i = k, \\ 0 & i \neq k, \end{cases}$$

где d — длина одной из сторон куба.

Из соотношений (38.9) получаем, что обратная решетка имеет подобную же структуру и характеризуется базисными векторами \mathbf{b}_i , параллельными векторам \mathbf{d}_i , причем $|\mathbf{b}_i| = 1/d$. На фиг. 95, b изображена обратная решетка, которая также представляет собой куб.

Только что рассмотренная нами простая кубическая решетка не встречается в природе, однако существует довольно много производных от нее структур. Рассмотрим, например, гранецентрированную кубическую решетку, изображенную на фиг. 96, а. Она характеризуется тем, что, кроме вершин элементарного куба, атомы располагаются еще и в центрах граней этого куба. В качестве *элементарной ячейки* такой



Фиг. 96. а — гранецентрированная кубическая решетка; б — объемноцентрированная кубическая решетка.

решетки выбирается параллелепипед, построенный на векторах \vec{AE} , \vec{AF} и \vec{AG} . Объем элементарной ячейки $V_a = d^3/4$, где, как обычно, через d обозначена длина одной из сторон куба. Определенная таким образом ячейка содержит только один атом, обозначенный буквой A . Все же другие частицы могут рассматриваться как принадлежащие к таким же смежным ячейкам.

Легко убедиться, что вектор, проведенный в любой узел решетки, можно представить в виде линейной комбинации трех основных векторов. Так, например, сумма этих векторов определяет положение узла B , а вектор $\vec{AE} + \vec{AF} - \vec{AG}$ — положение узла D .

Заметим, что выбрать в качестве элементарной ячейки куб со стороной d было бы нелогично, поскольку при этом элементарная ячейка содержала бы четыре атома вместо одного. Однако если расположенные на гранях куба атомы

отличаются от атомов, расположенных на его вершинах, то такую ячейку можно выбрать при условии, что структура будет рассматриваться как кубическая решетка с базисом (A, E, F, G) .

Для получения решетки, обратной гранецентрированной решетке, достаточно вспомнить, что вектор, проведенный в некотором заданном направлении из начала обратной решетки в ближайший от него узел, перпендикулярен семейству кристаллографических плоскостей прямой решетки, а его величина обратна расстоянию между этими плоскостями.

Расстояние между кристаллографическими плоскостями прямой решетки, перпендикулярными направлению AD , равно $d/2$. Следовательно, точка D' обратной решетки расположена в этом направлении на расстоянии $2/d$ от узла A' , выбранного за начало решетки (фиг. 96, б). Аналогично можно получить, что узлы I' и H' обратной решетки лежат на прямых, проходящих через начало решетки A' и параллельных прямым соответственно AI и AH ; эти узлы отстоят от начала решетки также на $2/d$. С другой стороны, имеется только одно семейство кристаллографических плоскостей прямой решетки, расстояние между которыми превышает $d/2$. Оно состоит из плоскостей, параллельных плоскости, проходящей через узлы D, E, I, G, H, F , и, следовательно, перпендикулярных прямой AB ; расстояние между двумя соседними плоскостями этого семейства равно

$$\delta = \frac{1}{3} AB = \frac{1}{3} \sqrt{3}d = \frac{d}{\sqrt{3}}.$$

Этому семейству кристаллографических плоскостей, изображенных на фиг. 96, а, соответствует точка C' обратной решетки, лежащая внутри куба, построенного на векторах $\vec{A'D'}$, $\vec{A'I'}$, $\vec{A'H'}$. Если B' — вершина куба, противоположная вершине A' , то точка C' лежит на прямой $A'B'$ и ее расстояние от точки A' равно

$$\frac{1}{\delta} = \frac{\sqrt{3}}{d} = \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{2}{d} = \frac{\sqrt{3}}{2} b,$$

где $b = 2/d$.

Итак, точка C' совпадает с центром куба, построенного на векторах $\vec{A'D'}$, $\vec{A'I'}$, $\vec{A'H'}$, и, следовательно, обратная

решетка представляет собой *объемноцентрированную кубическую решетку*. Таким образом, решеткой, обратной границентрированной кубической решетке, является объемноцентрированная кубическая решетка.

Подобным же методом легко установить, что решеткой, обратной объемноцентрированной кубической решетке, будет границентрированная кубическая решетка.

В качестве *элементарной ячейки* в случае объемноцентрированной кубической решетки выбирают параллелепипед, построенный на векторах $\overrightarrow{A'D'}$, $\overrightarrow{A'H'}$, $\overrightarrow{A'C'}$; его объем V_b равен половине объема куба, т. е.

$$V_b = \frac{1}{2} \left(\frac{2}{a} \right)^3 = \frac{4}{a^3} = \frac{1}{V_a}.$$

В работах, посвященных изучению кристаллических структур, и в частности в работе Эвальда, можно найти другие примеры, относящиеся к рассматриваемому вопросу.

§ 39. Зоны в трехмерных структурах; построение Эвальда

Рассмотрение, проведенное в гл. 7, может быть без изменений перенесено на случай трех измерений. Понятие площади S_a и S_b при этом следует заменять понятием объема V_a и V_b , которые, как было показано, удовлетворяют соотношению (38.5), а понятие ряда частиц в прямой решетке — понятием кристаллографической плоскости, определяемой уравнением (38.14). С другой стороны, периодическую функцию трех переменных можно разложить в тройной ряд Фурье точно таким же образом, как это было сделано в § 32 в случае плоской задачи. Коэффициенты разложения $C_{h_1 h_2 h_3}$ будут зависеть уже от трех индексов, принимающих целые значения. Для удобства мы часто будем обозначать их просто через C_h .

Чтобы установить периодическую зависимость частоты ν от волнового вектора \mathbf{a} , можно рассуждать точно так же, как в § 33. Поскольку этот вопрос является весьма существенным, мы кратко повторим эти рассуждения.

Произвольный узел решетки определяется заданием вектора

$$\mathbf{R} = l_1 \mathbf{d}_1 + l_2 \mathbf{d}_2 + l_3 \mathbf{d}_3, \quad (39.1)$$

где l_1, l_2, l_3 — целые числа, а $\mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2, \mathbf{d}_3$ — базисные векторы решетки. Произвольная точка пространства, занимаемого решеткой, определяется вектором

$$\mathbf{r} = \xi_1 \mathbf{d}_1 + \xi_2 \mathbf{d}_2 + \xi_3 \mathbf{d}_3, \quad (39.2)$$

где ξ_1, ξ_2, ξ_3 — проекции вектора \mathbf{r} на направления базисных векторов $\mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2, \mathbf{d}_3$.

Распространяющаяся в решетке волна может наблюдаться только в узлах, определяемых вектором \mathbf{R} . Ее можно описать с помощью функции

$$\psi = A e^{2\pi i (\nu t - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{R}))}, \quad (39.3)$$

где \mathbf{a} — волновой вектор, который следует рассматривать как направленную величину, связанную с обратной решеткой.

Точно такое же движение может быть описано с помощью вектора

$$\mathbf{a}'_h = \mathbf{a} + h_1 \mathbf{b}_1 + h_2 \mathbf{b}_2 + h_3 \mathbf{b}_3, \quad (39.4)$$

где h_1, h_2, h_3 — целые числа, так как

$$\begin{aligned} (\mathbf{a}'_h \cdot \mathbf{R}) &= (\mathbf{a} \cdot \mathbf{R}) + h_1 (\mathbf{b}_1 \cdot \mathbf{R}) + h_2 (\mathbf{b}_2 \cdot \mathbf{R}) + h_3 (\mathbf{b}_3 \cdot \mathbf{R}) = \\ &= (\mathbf{a} \cdot \mathbf{R}) + h_1 l_1 + h_2 l_2 + h_3 l_3 = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{R}) + m, \end{aligned}$$

где m — целое.

Таким образом, поскольку при замене вектора \mathbf{a} на любой вектор \mathbf{a}'_h характер движения остается неизменным, частота ν должна быть периодической функцией волнового вектора \mathbf{a} с периодом, равным периодам $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3$ обратной решетки.

В силу этой периодичности мы, как и прежде, можем разбить область изменения волнового вектора \mathbf{a} на ряд подобластей или зон, внутри каждой из которых его величина определена однозначно. Мы видим, что используемый здесь метод полностью аналогичен тому, который применялся в § 33 при изучении двумерных структур. Первая зона определяется как многогранник наименьшего объема с центром, совпадающим с началом O обратной решетки, ограниченный плоскостями, проходящими через середины векторов решетки. Его объем V_b равен объему элементарной ячейки обратной решетки, и любая точка пространства обратной решетки

может быть перенесена внутрь первой зоны при помощи переноса ее вдоль вектора

$$\mathbf{H} = h_1 \mathbf{b}_1 + h_2 \mathbf{b}_2 + h_3 \mathbf{b}_3.$$

Зоны более высокого порядка окружают первую зону и могут быть построены методом, аналогичным построению в случае двумерных структур. Соответствующие примеры приведены в дальнейшем.

Выбор плоскостей, ограничивающих зоны, основывается на рассуждениях, подобных использованным в § 34 и 36 в случае двумерных структур. В самом деле, теория распространения волн в сплошной среде при наличии малых периодических возмущений полностью аналогична теории, разработанной выше в случае двух измерений. Необходимо снова различать два случая.

1. Все векторы \mathbf{a}'_n таковы, что

$$|\mathbf{a}'_n| \neq |\mathbf{a}|. \quad (39.5)$$

2. Для некоторого вектора \mathbf{a}'_n или \mathbf{a}'_n

$$|\mathbf{a}'_n| \approx |\mathbf{a}|,$$

где векторы \mathbf{a}'_n определяются соотношением (39.4).

Случай 2 имеет место тогда, когда можно найти два вектора \mathbf{a}'_n и \mathbf{a} , длина которых почти одинакова, а разность

$$\mathbf{a}'_n - \mathbf{a} = \mathbf{H} = h_1 \mathbf{b}_1 + h_2 \mathbf{b}_2 + h_3 \mathbf{b}_3 \quad (39.6)$$

представляет собой вектор обратной решетки.

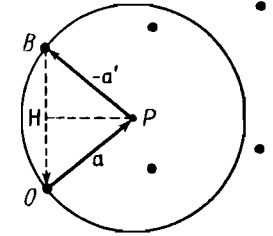
В § 35 мы дали геометрическую интерпретацию этому условию и показали, что оно эквивалентно условию Брэгга для отражения рентгеновских лучей от кристаллов. Подобное же положение имеет место и в настоящем случае при условии, конечно, что понятие ряда частиц заменено понятием кристаллографической плоскости.

Эвальдом была дана другая интерпретация. Пусть \mathbf{a} — вектор, проведенный из точки O обратной решетки в точку P . Опишем сферу радиуса $|\mathbf{a}|$ с центром в точке P .

Если окажется, что эта сфера проходит через вторую точку B обратной решетки или в окрестности этой точки, то, как мы сейчас увидим, функция $\nu(\mathbf{a})$ будет разрывна.

Действительно, в этом случае существует некоторый вектор \mathbf{a}'_n , удовлетворяющий соотношению (39.6), и, следовательно, уже невозможно определить, какой из двух векторов \mathbf{a} и \mathbf{a}'_n следует выбрать для описания движения частиц решетки. Поскольку волны, соответствующие $\nu = \nu(\mathbf{a})$ и $\nu = \nu(\mathbf{a}'_n)$, характеризуются различными направлениями распространения, то приходится допустить, что движение определяется суперпозицией двух указанных волн, одна из которых соответствует падающей волне, а другая отраженной (или волне Брэгга). Таким образом, для одного и того же значения $|\mathbf{a}|$ мы получаем два значения частоты, что соответствует разрыву кривой $\nu = \nu(\mathbf{a})$.

Обратная решетка



Фиг. 97.

Заметим, что, когда имеет место брэгговское отражение, конец вектора \mathbf{a} находится в плоскости, проходящей через середину вектора \mathbf{H} , соединяющего узлы O и B обратной решетки, и перпендикулярной к нему. Это замечание позволяет указать правило построения зон: через середины отрезков, соединяющих начало решетки с различными ее узлами, проводятся плоскости, перпендикулярные этим отрезкам. Наименьший многогранник, содержащий внутри себя начало решетки, образует первую зону. Область, заключенная между границей первой зоны и границей следующего по величине многогранника, охватывающего наименьший многогранник, образует вторую зону. Аналогичным же образом определяются зоны более высоких порядков.

§ 40. Общие результаты, относящиеся к распространению волн в трехмерных периодических структурах

Изучению распространения волн в сплошной среде при наличии малых периодических возмущений были посвящены § 34—36, в которых рассматривался случай двух измерений. Полученные там результаты без труда могут быть распространены также и на аналогичные трехмерные структуры.

Рассмотрим вначале задачу, не предполагая малости периодических возмущений; в следующих параграфах мы приведем ряд примеров, относящихся к этому общему случаю.

В случае трех измерений волновое уравнение имеет вид

$$\Delta\psi + \frac{\omega^2}{V^2}\psi = 0. \quad (40.1)$$

Поскольку мы хотим рассматривать распространение волн в периодической среде, то будем считать, что

$$\frac{1}{V^2} = F(\mathbf{r}), \quad (40.2)$$

где функция $F(\mathbf{r})$ периодична по трем направлениям, определяемым базисными векторами $\mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2, \mathbf{d}_3$ прямой решетки, т. е.

$$F(\mathbf{r}) = F(\mathbf{r} + n_1\mathbf{d}_1 + n_2\mathbf{d}_2 + n_3\mathbf{d}_3),$$

где n_1, n_2, n_3 — целые числа.

Поскольку базисные векторы \mathbf{b}_i обратной решетки удовлетворяют соотношению

$$(\mathbf{b}_i \cdot \mathbf{d}_k) = \delta_{ik},$$

то разложение функции $F(\mathbf{r})$ в тройной ряд Фурье можно представить в виде

$$F = \sum C_{m_1 m_2 m_3} e^{2\pi i [m_1(\mathbf{b}_1 \cdot \mathbf{r}) + m_2(\mathbf{b}_2 \cdot \mathbf{r}) + m_3(\mathbf{b}_3 \cdot \mathbf{r})]}. \quad (40.3)$$

Используя разложение в ряд Фурье, решение уравнения (40.1), как будет показано ниже, можно представить также в виде

$$\psi = A(\mathbf{r}) e^{2\pi i [\nu t - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{r})]}, \quad (40.4)$$

где функция $A(\mathbf{r})$ периодична по \mathbf{r} и равна

$$A(\mathbf{r}) = \sum A_{m_1 m_2 m_3} e^{2\pi i [m_1(\mathbf{b}_1 \cdot \mathbf{r}) + m_2(\mathbf{b}_2 \cdot \mathbf{r}) + m_3(\mathbf{b}_3 \cdot \mathbf{r})]}. \quad (40.5)$$

Этот результат, обычно известный под названием теоремы Блоха, представляет собой обобщение на трехмерный случай теоремы Флоке, используемой в теории уравнения Маттье, к которому приводят одномерные задачи.

Подставляя выражение (40.5) для функции $A(\mathbf{r})$ в соотношение (40.4), получаем

$$\psi = e^{i\omega t} \sum A_{m_1 m_2 m_3} e^{-2\pi i (\mathbf{a}'_{m_1 m_2 m_3} \cdot \mathbf{r})}, \quad (40.6)$$

где

$$\mathbf{a}'_{m_1 m_2 m_3} = \mathbf{a} - m_1 \mathbf{b}_1 - m_2 \mathbf{b}_2 - m_3 \mathbf{b}_3. \quad (40.7)$$

Три последних члена в правой части этого равенства определяют некоторый узел обратной решетки.

Подставляя теперь выражение (40.6) для функции ψ в волновое уравнение, получаем соотношение, связывающее ω и \mathbf{a} . Действительно, так как

$$\Delta e^{-2\pi i (\mathbf{a}'_{m_1 m_2 m_3} \cdot \mathbf{r})} = -4\pi^2 |\mathbf{a}'_{m_1 m_2 m_3}|^2 e^{-2\pi i (\mathbf{a}'_{m_1 m_2 m_3} \cdot \mathbf{r})},$$

то

$$\Delta\psi = -4\pi^2 \sum A_{m_1 m_2 m_3} |\mathbf{a}'_{m_1 m_2 m_3}|^2 e^{-2\pi i (\mathbf{a}'_{m_1 m_2 m_3} \cdot \mathbf{r})} e^{i\omega t}.$$

С другой стороны,

$$\frac{\omega^2}{V^2} \psi = \omega^2 F(\mathbf{r}) e^{i\omega t} \sum A_{m_1 m_2 m_3} e^{-2\pi i (\mathbf{a}'_{m_1 m_2 m_3} \cdot \mathbf{r})}.$$

Таким образом, подставляя полученные выражения в уравнение (40.1) и сокращая на экспоненциальную функцию времени, получаем с учетом соотношения (40.7)

$$\begin{aligned} & -4\pi^2 \sum_{m_i} A_{m_1 m_2 m_3} |\mathbf{a}'_{m_1 m_2 m_3}|^2 e^{-2\pi i (\mathbf{a}'_{m_1 m_2 m_3} \cdot \mathbf{r})} = \\ & = -\omega^2 \sum_{n_i} C_{n_1 n_2 n_3} e^{2\pi i \sum n_i (\mathbf{b}_i \cdot \mathbf{r})} \sum_{p_i} A_{p_1 p_2 p_3} e^{-2\pi i [(\mathbf{a} \cdot \mathbf{r}) - \sum p_i (\mathbf{b}_i \cdot \mathbf{r})]}. \end{aligned} \quad (40.8)$$

Вводя в правую часть предыдущего соотношения новые индексы суммирования $m_1 m_2 m_3$, где

$$m_i = n_i + p_i, \quad (40.9)$$

получаем

$$\begin{aligned} & \frac{4\pi^2}{\omega^2} \sum_{m_i} A_{m_1 m_2 m_3} |\mathbf{a}'_{m_1 m_2 m_3}|^2 e^{-2\pi i (\mathbf{a}'_{m_1 m_2 m_3} \cdot \mathbf{r})} = \\ & = \sum_{m_i} \sum_{p_i} C_{m_1 - p_1, m_2 - p_2, m_3 - p_3} A_{p_1 p_2 p_3} e^{-2\pi i (\mathbf{a}'_{m_1 m_2 m_3} \cdot \mathbf{r})} \end{aligned} \quad (40.10)$$

Следует заметить, что поскольку разложение (40.3) представляет действительную функцию F , то коэффициенты разложения должны удовлетворять соотношению

$$C_{-n} = C_n^*.$$

Таким образом, уравнение для определения собственных значений *симметрично* по всем $|a'_m|^2$ и имеет решение

$$v^2 = f(\dots |a'_m|^2 \dots). \quad (40.16)$$

При указанных выше условиях мы получаем следующие общие результаты.

а) Частота v является периодической функцией вектора \mathbf{a} с периодами \mathbf{b}_1 , \mathbf{b}_2 и \mathbf{b}_3 , так как замена вектора \mathbf{a} на какой-нибудь другой вектор \mathbf{a}'_m приводит лишь к замене обозначения вектора \mathbf{a} , тогда как полная совокупность векторов \mathbf{a}'_m остается неизменной. Кстати говоря, этот результат представляется очевидным уже из выражения (40.6) для функции ψ . Действительно, все векторы \mathbf{a}'_m входят туда совершенно одинаковым образом, так что ни одному из них нельзя приписать какого-либо выделенного значения.

б) Замена вектора \mathbf{a} на $-\mathbf{a}$ приводит к одинаковому изменению всех векторов, поскольку

$$\begin{aligned} -\mathbf{a}'_m &= -(\mathbf{a} - m_1 \mathbf{b}_1 - m_2 \mathbf{b}_2 - m_3 \mathbf{b}_3) = \\ &= -\mathbf{a} + m_1 \mathbf{b}_1 + m_2 \mathbf{b}_2 + m_3 \mathbf{b}_3 = (-\mathbf{a})'_{-m}. \end{aligned} \quad (40.17)$$

Отсюда следует, что двум волнам, распространяющимся в противоположных направлениях, соответствует одно и то же значение частоты.

в) Функция v *симметрична* по всем векторам \mathbf{a}'_m и не зависит от направления этих векторов, т. е. определяется только их абсолютными значениями $|a'_m|$. Это оправдывает использованный нами выше метод определения границ зон, который основан только на существовании определенного соотношения между длинами векторов \mathbf{a}'_m

$$|\mathbf{a}| = |a'_m|.$$

Например, определение первой зоны можно дать следующим образом. Из всех векторов \mathbf{a}'_m , входящих в разложение

(40.6), выбираем в качестве параметра вектор с наименьшей абсолютной величиной $|\mathbf{a}|$. Этот специальный вектор служит для определения волны, но каждому значению \mathbf{a} соответствует бесконечное число волн с частотами, определяемыми из уравнения (40.14), первый член в котором является детерминантом бесконечного порядка.

В следующей главе мы снова вернемся к детерминантам бесконечного порядка в связи с изучением уравнения Матье. Это уравнение, встречающееся при рассмотрении одномерных задач, приводит к выражению, в точности совпадающему с (40.14). Его детальное исследование провели для ряда частных случаев Хилл и Уиттекер. Большой интерес представляет распространение результатов, полученных Хиллом, на случай трех измерений. Однако этот вопрос еще не вполне изучен.

Вернемся теперь опять к задаче о распространении волн в среде, характеризуемой малыми периодическими возмущениями.

41. Распространение волн в однородной и изотропной средах при наличии малого периодического возмущения

Аналогичную двумерную задачу мы рассматривали в § 34. Будем считать, что функция $1/V^2$ отличается от постоянной на малую периодически изменяющуюся величину, т. е. будем полагать, как и прежде

$$\frac{1}{V^2} = \frac{1}{V_0^2} + \varepsilon f. \quad (41.1)$$

Периодическую функцию f можно представить в виде разложения в ряд Фурье

$$f = \sum c_{n_1, n_2, n_3} e^{2\pi i \sum m_i (\mathbf{b}_i \cdot \mathbf{r})}, \quad (41.2)$$

причем $c_{000} = 0$.

Тогда коэффициенты разложения C_{n_1, n_2, n_3} функции

$$F|\mathbf{r}| = 1/V^2$$

в ряд Фурье будут равны

$$C_{n_1, n_2, n_3} = \frac{1}{V_0^2} \delta_{0n_1} \delta_{0n_2} \delta_{0n_3} + \varepsilon c_{n_1, n_2, n_3} \quad (41.3)$$

или

$$C_{000} = \frac{1}{V_p^2} \quad (\text{конечный коэффициент}), \quad (41.4)$$

$$C_{n_1 n_2 n_3} = \varepsilon c_{n_1 n_2 n_3} \quad (\text{бесконечно малый коэффициент}).$$

Итак, мы получаем, что в детерминанте (40.14) [или (40.15)] конечны только элементы, расположенные на его главной диагонали, все же остальные элементы оказываются бесконечно малыми.

Разложим этот детерминант в ряд по степеням ε . Диагональный член

$$\prod_m \left(\frac{C_{000}}{|a'_m|^2} - \frac{1}{v^2} \right), \quad (41.5)$$

который можно записать в виде

$$\prod_m \left(\frac{1}{v_m^2} - \frac{1}{v^2} \right), \quad (41.6)$$

где

$$\frac{1}{v_m^2} = \frac{C_{000}}{|a'_m|^2} = \frac{1}{V_0^2 |a'_m|^2},$$

не будет зависеть от ε .

Следующий член разложения будет пропорционален ε^2 . Чтобы получить его, нужно в предыдущем произведении заменить диагональные элементы, расположенные в столбце с индексом p и строке с индексом n , на недиагональные элементы с индексами (n, p) и (p, n) , и просуммировать полученное произведение. Согласно правилу вычисления детерминантов, перед этим произведением следует поставить знак минус. Таким образом, второй член разложения равен

$$\begin{aligned} & -\varepsilon^2 \sum_{n, p} \prod_{\substack{m \neq n \\ m \neq p}} \left(\frac{1}{v_m^2} - \frac{1}{v^2} \right) \frac{c_{n-p} c_{n-p}^*}{|a'_n|^2 |a'_p|^2} = \\ & = -\varepsilon^2 V_0^4 \sum_{n, p} \prod_{\substack{m \neq n \\ m \neq p}} \left(\frac{1}{v_m^2} - \frac{1}{v^2} \right) \frac{|c_{n-p}|^2}{v_n^2 v_p^2}. \quad (41.7) \end{aligned}$$

Этот метод вычисления оказывается достаточно простым, если рассматривать частный детерминант (40.15). Выпишем член, соответствующий $n=0$ и $p=1$,

$$\begin{aligned} & \dots \left(\frac{C_0}{|a'_{-2}|} - \frac{1}{v^2} \right) \left(\frac{C_0}{|a'_{-1}|^2} - \frac{1}{v^2} \right) \times \\ & \times \left(-\varepsilon^2 \frac{c_{-1} c_1}{|a'_0|^2 |a'_1|^2} \right) \left(\frac{C_0}{|a'_2|^2} - \frac{1}{v^2} \right) \dots \end{aligned}$$

Пренебрегая в разложении детерминанта членами, пропорциональными $\varepsilon^3, \varepsilon^4, \dots$, и складывая выражения (41.6) и (41.7), уравнение (40.14) можно привести к виду

$$D=0 = \sum_{m, p} \prod_{\substack{m \neq n \\ m \neq p}} \left(\frac{1}{v_m^2} - \frac{1}{v^2} \right) \left[\left(\frac{1}{v_n^2} - \frac{1}{v^2} \right) \left(\frac{1}{v_p^2} - \frac{1}{v^2} \right) - \varepsilon^2 V_0^4 \frac{|c_{n-p}|^2}{v_n^2 v_p^2} \right]. \quad (41.8)$$

Первое приближение получим, очевидно, приравняв нулю произведение (41.6) диагональных членов. В этом случае

$$v = v_m. \quad (41.9)$$

Это, однако, справедливо лишь до тех пор, пока величины v_n и v_p не очень близки одна к другой. Таким образом, могут иметь место два случая:

1. Все величины v_n отличны от v_p или, иначе говоря, все $|a'_n|^2$ отличны от $|a'_p|^2$,

$$v_n \neq v_p, \quad |a'_n|^2 \neq |a'_p|^2. \quad (41.10)$$

2. В исключительных случаях может оказаться, что величины v_n и v_p настолько близки друг к другу, что члены, стоящие в квадратных скобках выражения (41.8), имеют один и тот же порядок малости

$$v_n \approx v_p, \quad |a'_n|^2 \approx |a'_p|^2. \quad (41.11)$$

При этом уже нельзя пренебречь членами порядка ε^2 . Действительно, если выбрать значение частоты v , близкое к v_n и v_p , то произведение

$$\left(\frac{1}{v_n} - \frac{1}{v^2} \right) \left(\frac{1}{v_p} - \frac{1}{v^2} \right)$$

становится очень малым и необходимо учитывать поправки порядка ε^2 . Здесь уже нужно учитывать оба слагаемых в выражении (41.8), т. е. необходимо писать

$$\left(\frac{1}{v_n^2} - \frac{1}{v^2}\right) \left(\frac{1}{v_p^2} - \frac{1}{v^2}\right) - \varepsilon^2 V_0^4 \frac{|c_{n-p}|^2}{v_n^2 v_p^2} = 0. \quad (41.12)$$

Это уравнение соответствует случаю $\mathbf{a} = \mathbf{a}'_{n,n_3}$, рассмотренному в § 34 и 36. Чтобы яснее показать это, примем прежние обозначения и выберем один из двух векторов, например \mathbf{a}'_n , за вектор \mathbf{a} , что всегда возможно в силу полной равноправности всех векторов \mathbf{a}'_n . Тогда соотношения (41.11) можно записать следующим образом:

$$v_m = v_0, \quad |\mathbf{a}'_n| = |\mathbf{a} - n_1 \mathbf{b}_1 - n_2 \mathbf{b}_2 - n_3 \mathbf{b}_3| \approx |\mathbf{a}|. \quad (41.13)$$

Теперь эти результаты легко сравнить с результатами, полученными в § 36. Обозначим через \mathbf{a}_0 вектор, для которого соотношение (41.13) выполняется точно, и положим

$$|\mathbf{a}_0 - \mathbf{B}| = |\mathbf{a}_0|, \quad \mathbf{B} = n_1 \mathbf{b}_1 + n_2 \mathbf{b}_2 + n_3 \mathbf{b}_3. \quad (41.14)$$

Тогда предыдущее соотношение (41.13) можно записать в виде

$$\begin{aligned} \mathbf{a} &= \mathbf{a}_0 + \eta \mathbf{B}, \\ \mathbf{a}_n &= \mathbf{a}_0 - \mathbf{B} + \eta \mathbf{B}, \end{aligned} \quad (41.15)$$

где η — малая величина. Эти равенства соответствуют соотношениям (36.1) и (36.2) и приводят к выражениям, аналогичным (36.3) и (36.4),

$$\begin{aligned} |\mathbf{a}|^2 &= |\mathbf{a}_0|^2 + 2\eta(\mathbf{a}_0 \cdot \mathbf{B}), \\ |\mathbf{a}'_n|^2 &= |\mathbf{a}_0|^2 - 2\eta(\mathbf{a}_0 \cdot \mathbf{B}) \end{aligned} \quad (41.16)$$

или

$$\begin{aligned} v^2 &= v_0^2 + 2\eta V_0^2 (\mathbf{a}_0 \cdot \mathbf{B}), \\ v_n^2 &= v_0^2 - 2\eta V_0^2 (\mathbf{a}_0 \cdot \mathbf{B}). \end{aligned} \quad (41.17)$$

С учетом этих соотношений уравнение (41.12) можно записать в виде

$$\begin{aligned} \left[\frac{1}{v^2} + \frac{2\eta}{v_0^4} V_0^2 (\mathbf{a}_0 \cdot \mathbf{B}) - \frac{1}{v^2} \right] \left[\frac{1}{v_0^2} - \frac{2\eta}{v_0^4} V_0^2 (\mathbf{a}_0 \cdot \mathbf{B}) - \frac{1}{v^2} \right] - \\ - \varepsilon^2 V_0^4 \frac{|c_n|^2}{v_n^2 v^2} = 0 \end{aligned}$$

или, заменяя произведение $v_n^2 v^2$ на v_0^4 (что вполне законно), в виде

$$\left(\frac{1}{v^2} - \frac{1}{v_0^2}\right)^2 - \frac{4\eta^2}{v_0^8} V_0^4 (\mathbf{a}_0 \cdot \mathbf{B})^2 - \varepsilon^2 V_0^4 \frac{|c_n|^2}{v_0^4} = 0. \quad (41.18)$$

Пологая $h = \eta/\varepsilon$, имеем

$$\frac{1}{v^2} = \frac{1}{v_0^2} \pm \varepsilon \frac{V_0^2}{v_0^4} \sqrt{v_0^4 |c_n|^2 + [2h(\mathbf{a}_0 \cdot \mathbf{B})]^2}. \quad (41.19)$$

Полученное выражение в точности совпадает с (36.13); действительно, мы имели

$$\omega^2 = \omega_0^2 + \varepsilon k_1, \quad (34.7)$$

$$k_1 = \pm 4\pi^2 V_0^2 \sqrt{v_0^4 |c_n|^2 + [2h(\mathbf{a}_0 \cdot \mathbf{B})]^2}, \quad (36.13)$$

или

$$v^2 = v_0^2 + \frac{\varepsilon}{4\pi^2} k_1,$$

$$\frac{1}{v^2} = \frac{1}{v_0^2} - \frac{\varepsilon}{4\pi^2 v_0^4} k_1,$$

что полностью совпадает с (41.19).

Таким образом, развитый в § 40 общий метод приводит к результатам, которые полностью согласуются с исходными предположениями, обсужденными в § 34 и 36. Из приведенного рассмотрения ясно, что случай 1 характеризуется тем, что один из коэффициентов A , фигурирующих в разложении (40.6), превышает все остальные; мы будем обозначать его так же, как и в § 34, через A_{000} . В случае 2 оба коэффициента A имеют одинаковый порядок величины и в соответствии с соотношением (41.14) мы будем один из них обозначать через A_{000} , а другой — через $A_{n_1 n_2 n_3}$.

Положения, касающиеся структуры зон, развитые в § 34 и 36, находят здесь более полное обоснование.

§ 42. Общие замечания, относящиеся к распространению волн в дискретных структурах

Для двумерного случая в § 37 было уточнено, что следует понимать под решеткой с базисом (см. фиг. 93). Аналогичное же определение может быть дано и для трехмерных

структур. Решетка определяется тремя векторами $\mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2, \mathbf{d}_3$, причем в каждой элементарной ячейке, построенной на векторах $\mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2, \mathbf{d}_3$, содержится N частиц M_1, M_2, \dots, M_N , положение которых по отношению к начальному узлу элементарной ячейки определяется векторами

$$\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3, \dots, \mathbf{r}_N.$$

Если $N=1$, то получаем одноатомную решетку, элементарная ячейка которой содержит всего один атом. В этом случае удобно положить $\mathbf{r}_1=0$, что соответствует положению рассматриваемого атома в начальном узле ячейки.

В общем случае произвольная частица решетки может быть определена заданием вектора

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_j + n_1 \mathbf{d}_1 + n_2 \mathbf{d}_2 + n_3 \mathbf{d}_3, \quad (42.1)$$

где n_1, n_2, n_3 — целые числа. Этот вектор определяет j -й атом, находящийся в ячейке (n_1, n_2, n_3) .

Для одномерного случая в § 17 был изложен общий метод изучения распространения волн в решетке с базисом. Аналогичный же метод может быть использован и для трехмерного случая. Каждому j -му типу частиц можно сопоставить волну вида

$$\psi_j = A_j' e^{2\pi i [\mathbf{v}t - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{r})]}. \quad (42.2)$$

Однако, как и в § 33, более удобно считать, что экспоненциальный множитель $e^{-2\pi i (\mathbf{a} \cdot \mathbf{r}_j)}$ включен в комплексную амплитуду A_j , и описывать все j волн при помощи одной и той же экспоненты, но с разными амплитудами

$$e^{i(\omega t - n_1 k_1 - n_2 k_2 - n_3 k_3)}, \quad (42.3)$$

где

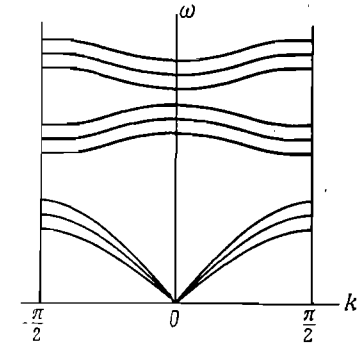
$$k_i = 2\pi (\mathbf{a} \cdot \mathbf{d}_i) \quad \text{при } i=1, 2, 3.$$

При этом движение частиц j -го типа будет описываться функцией

$$\begin{aligned} \psi_j &= A_j e^{i(\omega t - n_1 k_1 - n_2 k_2 - n_3 k_3)}, \\ A_j &= A_j' e^{-2\pi i (\mathbf{a} \cdot \mathbf{r}_j)}. \end{aligned} \quad (42.4)$$

Таким образом, мы ввели N постоянных A_1, A_2, \dots, A_N , которые включают в себя фазы движения различных частиц по отношению к частице, принятой условно за начальную,

Как и для одномерной задачи, движение будет определяться N уравнениями. Подставляя в них выражения (42.4), получаем систему из N линейных однородных уравнений для определения неизвестных A_j . Однако поскольку неизвестные A_j являются векторными величинами, т. е. каждая из них определяется заданием трех компонент, то окончательно мы будем иметь линейную однородную систему, состоящую из $3N$ уравнений. Требуя, чтобы система этих уравнений допускала нетривиальные решения, получим уравнение $3N$ -й степени относительно ω^2 . Таким образом, каждому значению вектора \mathbf{a} соответствует $3N$ значений частоты. Этот результат схематически изображен на фиг. 98.



Фиг. 98.

Число ветвей кривой $\nu(\mathbf{a})$ равно утроенному числу частиц, заключенных в элементарной ячейке.

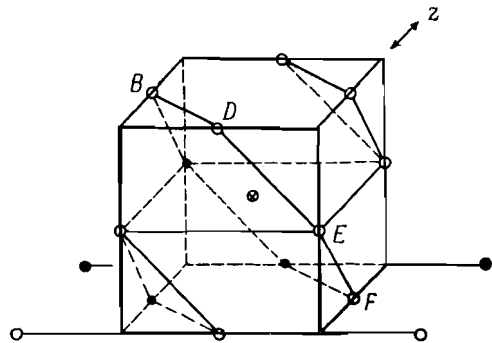
Непрерывную периодическую структуру следует рассматривать как предельный случай дискретной структуры при $N \rightarrow \infty$. Неопределенность в выборе волнового вектора \mathbf{a} устраняется, если область его изменения ограничить первой зоной.

§ 43. Исследование некоторых трехмерных структур и их зон

В § 38 мы рассмотрели гранецентрированную и объемноцентрированную решетки (см. фиг. 96) и установили, что они обратны друг другу.

Особенно важным является случай гранецентрированной кубической решетки, поскольку она является одной из возможных структур, соответствующих компактной упаковке шаров. Эта решетка представлена на фиг. 96, a . Если к ней применить операцию переноса на величину $1/2d$ параллельно оси, то получится гранецентрированная кубическая решетка, изображенная на фиг. 99. Рассматривая эту структуру

в направлении, обозначенном стрелкой, и выбирая диагональ OZ в качестве вертикальной оси, получаем гексагональную решетку, изображенную на фиг. 100 и 101.



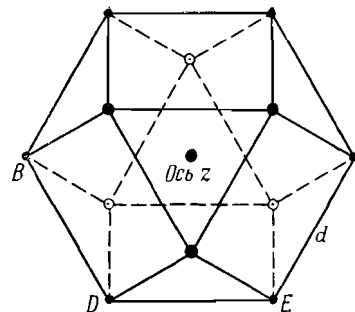
Фиг. 99. Кубическая гранецентрированная решетка.

Это одна из возможных структур, получающихся при упаковке одинаковых шаров таким образом, чтобы расстояния от центрального шара до двенадцати соседних были одинаковыми, что имеет место при

$$\frac{c}{d} = 2 \sqrt{\frac{2}{3}} = 1,633, \quad (43.1)$$

т. е. когда вертикальное расстояние c между точками A и B немного меньше расстояния $BE = d\sqrt{3} = 1,732 d$. Рассматриваемая структура переходит сама в себя при вертикальном переносе на величину $\frac{3}{2}c$.

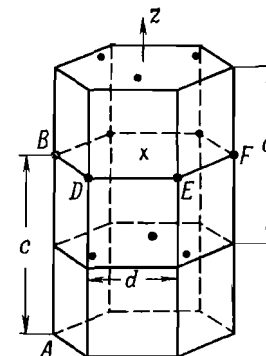
При плотной упаковке шаров возможна и другая структура, которая изображена на фиг. 102 и 103. Плотность упаковки в этой структуре та же, что и в кубической гранецентрированной решетке. Сравнивая фиг. 101 и 102, легко видеть, что в первом случае нижние и верхние атомы симметричны относительно центра ячейки, а во втором нижние атомы расположены точно под верхними и что структура переходит сама в себя при вертикальном переносе на величину c . Это замечание показывает, что гексагональная решетка, схематически представленная на фиг. 102 и 103, не является простой решеткой Бравэ, построенной



- 1
- 2
- ○ ○ 3

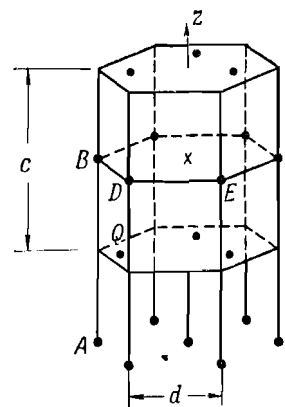
Фиг. 100. Кубическая гранецентрированная решетка.

1—узлы на главной горизонтальной плоскости; 2—узлы на верхней плоскости; 3—узлы на нижней плоскости.



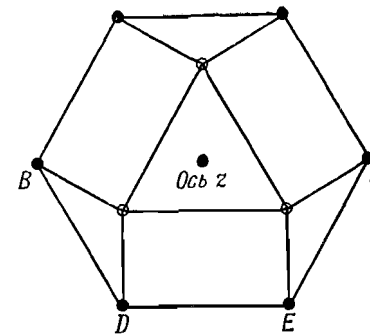
Фиг. 101. Гексагональная решетка.

× — центр ячейки.



Фиг. 102. Гексагональная решетка с плотной упаковкой.

× — центр ячейки.



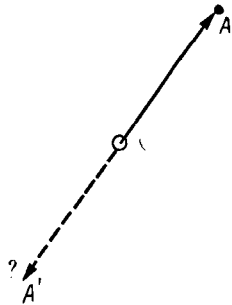
Фиг. 103. Гексагональная решетка с плотной упаковкой.

1—узлы на главной горизонтальной плоскости; 2—узлы на верхней и нижней плоскостях.

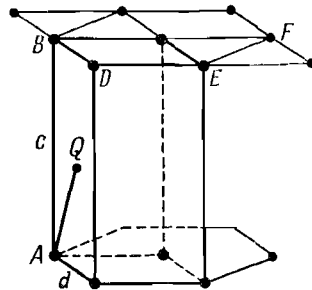
на трех векторах \mathbf{d}_1 , \mathbf{d}_2 , \mathbf{d}_3 , а представляет собой решетку с базисом, определение которой было дано в § 37 (см. фиг. 93).

Дадим критерий, позволяющий отличать простые решетки Бравэ от решеток с базисом, если решетки состоят только из одного типа частиц.

Возьмем вектор \vec{OA} , соединяющий частицу O с частицей A , и построим вектор $\vec{OA'}$, направленный противоположно ему (см. фиг. 104). Если решетка является простой



Фиг. 104.



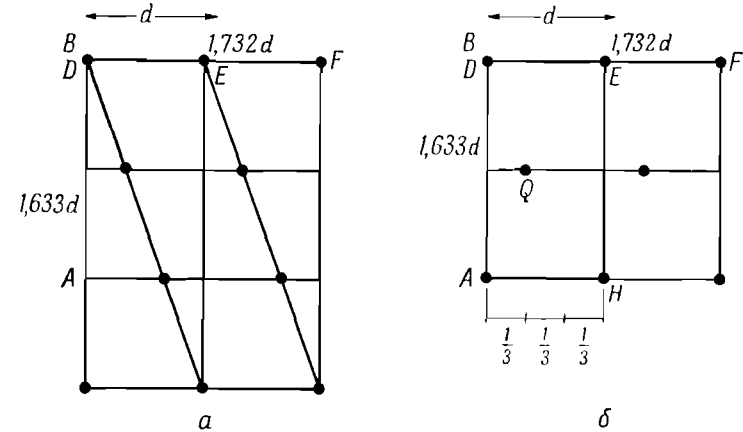
Фиг. 105. Гексагональная решетка с плотной упаковкой.

решеткой Бравэ, то в точке A' тоже должен находиться атом (как на фиг. 100 и 101); если же в точке A' атома нет (как на фиг. 102 и 103), то это будет решетка с базисом. Таким образом, гранецентрированные кубические структуры, имеющие вид решеток с базисом, в действительности являются простыми решетками Бравэ. Напротив, гексагональная решетка не удовлетворяет этому условию и поэтому является структурой с базисом. В ее элементарную ячейку входят два атома, что легко видеть на фиг. 105, где AQ является базисным вектором. В этой решетке с базисом, так же как в гранецентрированной кубической решетке на фиг. 101,

$$AB = c = 1,633d, \quad BF = 1,732d.$$

Обе структуры можно спроектировать, как указано на фиг. 106, на вертикальную плоскость, проходящую через DF .

При определении обратной решетки атомы, входящие внутрь элементарной ячейки, не рассматриваются и все построение проводится только с помощью основных векторов \mathbf{d}_1 , \mathbf{d}_2 и \mathbf{d}_3 . Например, при построении решетки, обратной гексагональной решетке (см. фиг. 105), не принимаются во внимание расположенные на высоте $c/2$ точки Q и рассматриваются

Фиг. 106. a — кубическая гранецентрированная решетка; b — гексагональная решетка.

только плоскости решетки, проходящие через точки, лежащие на высоте 0 и c . Горизонтальная проекция этой структуры аналогична плоской структуре (см. фиг. 87), обратная решетка которой со стороной

$$b = \frac{2}{\sqrt{3}d} \quad (43.2)$$

представлена на фиг. 88. Из вертикальной проекции решетки (см. фиг. 106, b) можно видеть, что элементарной ячейкой является прямоугольник $ABEH$ со сторонами

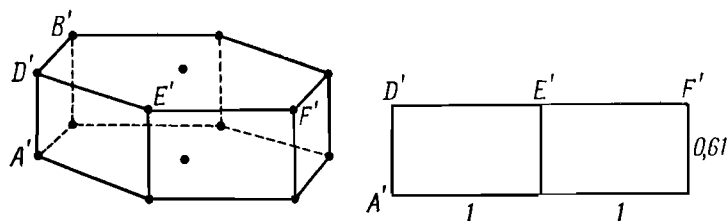
$$BE = \frac{\sqrt{3}}{2}d, \quad AB = c = 2\sqrt{\frac{2}{3}}d. \quad (43.3)$$

Проведенное рассмотрение показывает, что обратная решетка гексагональной структуры также является гексагональной решеткой, но только сплюснутой (фиг. 107; на фигуре дана также вертикальная проекция этой решетки).

Перейдем теперь к исследованию зон.

Простая кубическая решетка. Обратная решетка тоже является простой кубической. Понятие об ее зонах дает фиг. 108, *a, в, д*, где отмечены поверхности, ограничивающие первые четыре зоны. Сведение к первой зоне подобластей высших зон показано на фиг. 108, *б, г, e*, где изображена трехмерная структура, получающаяся при параллельном переносе этих подобластей внутрь куба.

Гранецентрированная кубическая решетка. Обратная решетка является объемноцентрированной кубической. На фиг. 109 приведен вид первой зоны, форма ее совпадает



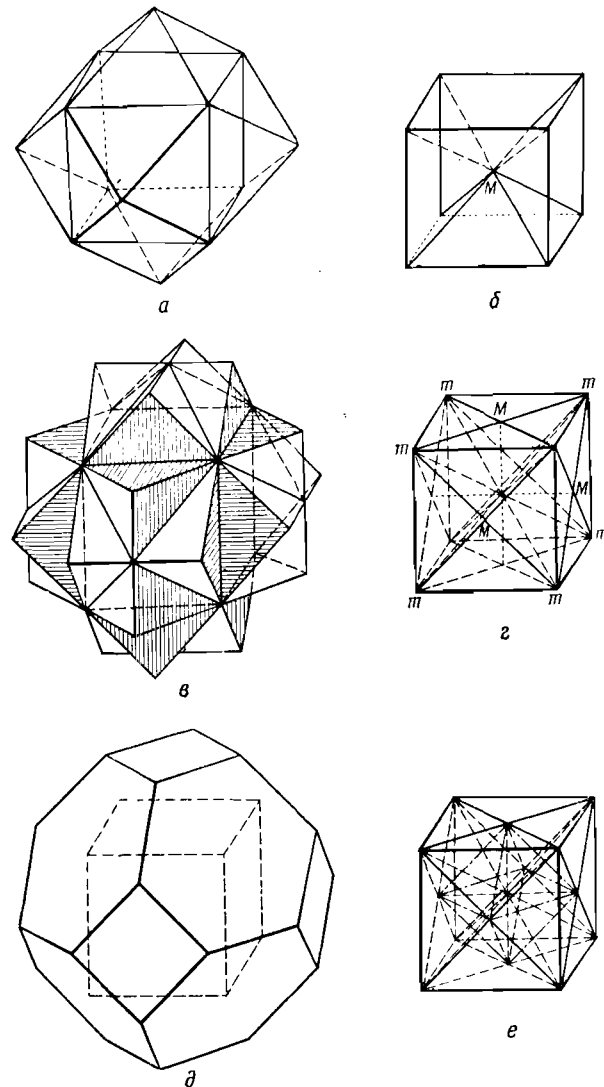
Фиг. 107. Гексагональная решетка с плотной укладкой.

с формой четвертой зоны простой кубической решетки. Элементарная ячейка прямой решетки объемом $\frac{1}{4}d^3$ включает четыре точки. Объем первой зоны и каждой элементарной ячейки обратной решетки равен $4/d^3$.

Объемноцентрированная кубическая решетка. Обратная решетка — гранецентрированная кубическая. На фиг. 110 изображена первая зона, аналогичная второй зоне простой кубической решетки. Объем элементарной ячейки прямой решетки равен $\frac{1}{2}d^3$, и, следовательно, объем первой зоны обратной решетки будет $2/d^3$. Вторая зона имеет вид, представленный на фиг. 109.

Гексагональная решетка с произвольными значениями параметров d и c имеет, как видно из фиг. 107, гексагональную обратную решетку с параметрами $2/\sqrt{3}d$ и $1/c$. Первые две ее зоны приведены на фиг. 111.

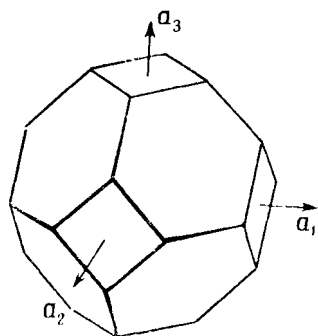
Вернемся теперь к вопросу о переходе от непрерывной среды к дискретной решетке. Пусть имеется однородная изотропная среда, в которой распространяются какие-либо волны



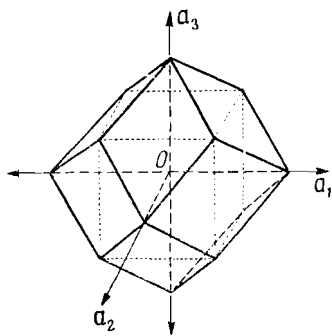
Фиг. 108. Кубическая решетка. Зоны 1, 2, 3 и 4.

a—первая зона—центральный куб; вторая зона—пространство между центральным кубом и додекаэдром; *б*—сведение второй зоны к первой; *в*—третья зона—пространство между додекаэдром и наружной поверхностью; *г*—сведение третьей зоны к первой; *д*—четвертая зона—пространство между границей третьей зоны и новой наружной поверхностью; *е*—сведение четвертой зоны к первой.

(например, продольные упругие волны). Предположим теперь, что в эту среду введено малое периодическое возмущение, имеющее структуру гранецентрированной кубической решетки.

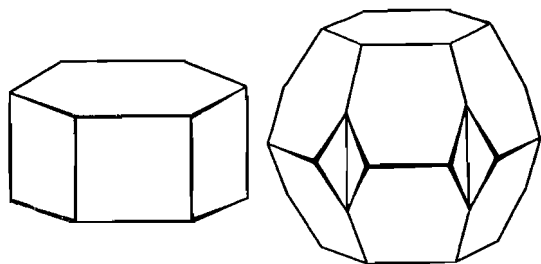


Фиг. 109. Кубическая гранецентрированная решетка. Первая зона.



Фиг. 110. Кубическая объемноцентрированная решетка. Первая зона.

Тогда функция $\nu(\mathbf{a})$ на границах зон станет разрывной. Вместо того чтобы рассматривать вектор \mathbf{a} во всем пространстве, мы можем ограничить область его изменения первой зоной,



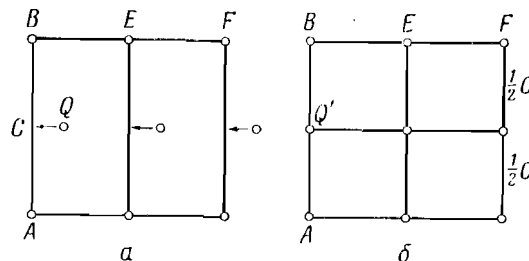
Фиг. 111. Гексагональная решетка. Первая и вторая зоны.

поскольку каждую зону высшего порядка можно разбить на подобласти и соответствующими переносами свести к структуре, полностью совпадающей с первой зоной. Каждая зона дает, таким образом, непрерывную ветвь функции $\nu(\mathbf{a})$ в первой зоне, так что в общем случае функция $\nu(\mathbf{a})$ предста-

вляется бесконечным семейством непрерывных ветвей. Наш результат поэтому аналогичен тем выводам, которые в одномерном случае привели бы к фиг. 59.

При увеличении возмущения атомы в структуре стремятся занять место в узлах гранецентрированной кубической решетки. При этом все верхние ветви кривой $\nu = \nu(\mathbf{a})$ бесконечно возрастают и исчезают. Единственной остающейся ветвью является нижняя ветвь, так что фиг. 59 сводится к фиг. 5, б. Аналогичный переход рассматривался в конце § 16.

Можно рассмотреть подобную задачу для гексагональной структуры с плотной упаковкой. Периодичность тогда имеет



Фиг. 112.

гексагональную структуру, но в каждой ячейке находятся две частицы. Тот же переход дает в пределе две ветви функции $\nu(\mathbf{a})$, а получающаяся кривая аналогична кривой для одномерной решетки хлористого натрия (см. фиг. 53).

В § 16 нами был рассмотрен переход от случая, когда массы M_1 и M_2 различны, к случаю одинаковых масс. Этот переход поясняется на фиг. 53. Таким же образом можно исследовать переход, схематически изображенный на фиг. 112 (от *a* к *б*) и состоящий в выпрямлении вертикальных цепочек атомов, что переводит гексагональную решетку с плотной упаковкой в простую гексагональную решетку Браве с высотой ячейки $1/2C$. Объем получающейся элементарной ячейки равен половине объема ячейки первоначальной решетки. В то же время объем первой зоны становится в 2 раза больше, поскольку сама зона в 2 раза выше, чем в исходной структуре, изображенной на фиг. 111.

В этой первой зоне функция $\nu(\mathbf{a})$ имеет одну ветвь, однако, когда появляется возмущение, выражающееся в

зигзагообразности вертикальных атомных линий, эта единственная ветвь функции $\psi(\mathbf{a})$ расщепляется и в первой зоне появляются две ветви.

Рассматриваемый переход в направлении оси z точно соответствует переходу, описанному в случае решетки Борна.

§ 44. Зоны в прямой решетке. Основы метода Вигнера — Зейтца

Вернемся к изучавшейся в § 40 задаче о распространении волн в трехмерной периодической среде.

Как и выше [см. соотношение (40.4)], предположим, что общее решение может быть записано в виде

$$\psi = A(\mathbf{r}) e^{2\pi i [\nu t - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{r})]},$$

где амплитуда $A(\mathbf{r})$ является периодической функцией в прямой решетке. Функцию $A(\mathbf{r})$ можно тогда определить либо

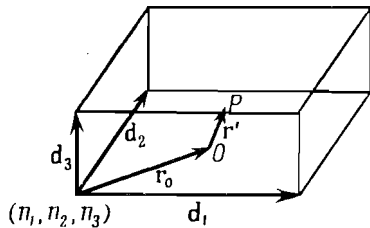
внутри элементарной ячейки (\mathbf{d}), либо внутри ограниченной замкнутой поверхностью области, объем которой равен объему элементарной ячейки (\mathbf{d}).

Это положение является отправной точкой метода Вигнера — Зейтца, применяемого в теории твердого тела. Изложим его основные особенности.

Разложим вектор \mathbf{r} , характеризующий точку P ячейки (n_1, n_2, n_3) , на сумму нескольких векторов

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \mathbf{r}' + n_1 \mathbf{d}_1 + n_2 \mathbf{d}_2 + n_3 \mathbf{d}_3, \quad (44.1)$$

где \mathbf{r}_0 — вектор, определяющий положение некоторой точки O первой ячейки относительно ее начала. Вектор $n_1 \mathbf{d}_1 + n_2 \mathbf{d}_2 + n_3 \mathbf{d}_3$ определяет положение начала ячейки (n_1, n_2, n_3) относительно начала решетки, а вектор \mathbf{r}' соединяет рассматриваемую точку P с точкой O ячейки (n_1, n_2, n_3) . Вектор \mathbf{r}' всегда, как можно видеть из фиг. 113, находится внутри ячейки или эквивалентного объема.



Фиг. 113.

Найдем теперь выражение ψ как функции \mathbf{r}' . Прежде всего имеем

$$(\mathbf{a} \cdot \mathbf{r}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{r}_0) + (\mathbf{a} \cdot \mathbf{r}') + n_1 (\mathbf{a} \cdot \mathbf{d}_1) + n_2 (\mathbf{a} \cdot \mathbf{d}_2) + n_3 (\mathbf{a} \cdot \mathbf{d}_3). \quad (44.2)$$

Обозначим

$$2\pi (\mathbf{a} \cdot \mathbf{d}_i) = k_i, \quad i = 1, 2, 3 \quad (44.3)$$

и

$$A(\mathbf{r}) = A(\mathbf{r}_0 + \mathbf{r}') = e^{2\pi i [(\mathbf{a} \cdot \mathbf{r}_0) + (\mathbf{a} \cdot \mathbf{r}')] } A''(\mathbf{r}') \quad (44.4)$$

и предположим, что величина $A''(\mathbf{r}')$ определена только в первой ячейке.

Подставляя это выражение для $A(\mathbf{r})$ в (40.4), получаем

$$\psi = A''(\mathbf{r}') e^{i[\omega t - n_1 k_1 - n_2 k_2 - n_3 k_3]}. \quad (44.5)$$

Это выражение описывает волновую функцию в первой ячейке, причем амплитуда $A''(\mathbf{r}')$ функции ψ не зависит от n_1, n_2, n_3 .

Заметим сразу же, что соотношение (44.5) переносит на случай непрерывной среды определение волновой функции, данное в § 40 для дискретной среды.

Выбор первой ячейки является, очевидно, произвольным, поскольку выбор базисных векторов прямой решетки также произволен. Вигнер и Зейтц определили эту элементарную ячейку так же, как определяются зоны в обратной решетке, а именно как многогранник, гранями которого являются плоскости, которые перпендикулярны отрезкам, соединяющим выбранный за начало координат узел решетки с соседними узлами, и проходят через середины этих отрезков. Такой способ построения зоны схематически изображен на фиг. 114 для случая двух измерений.

Условие непрерывности функции ψ и требование отсутствия каких-либо разрывов на границе зоны в прямой решетке приводит к необходимости выполнения некоторых условий.

Предположим, что конец вектора \mathbf{r}' определяет точку границы. Вектор \mathbf{r} , определяющий аналогичную точку соседней ячейки (фиг. 114), с учетом определения зон можно представить в виде

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}' + n_1 \mathbf{d}_1 + n_2 \mathbf{d}_2 + n_3 \mathbf{d}_3, \quad (44.6)$$

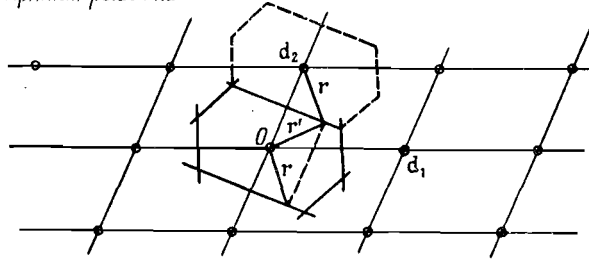
где параметры n_1, n_2, n_3 — небольшие целые числа, которые для первой зоны равны $0, \pm 1$.

Введем условие непрерывности функции ψ и ее нормальной производной в точке, определяемой \mathbf{r}' . Непрерывность ψ на границе обеспечивается условием

$$A''(\mathbf{r}') = A''(\mathbf{r}) e^{-i(n_1 k_1 + n_2 k_2 + n_3 k_3)}, \quad (44.7)$$

Подобное же соотношение вводится для обеспечения непрерывности нормальной производной.

Прямая решетка



Фиг. 114. Зоны Вигнера — Зейтца.

В случае очень больших длин волн величины k_1, k_2, k_3 , так же как и числа n_1, n_2, n_3 , малы, так что на границе можно приближенно положить

$$A''(\mathbf{r}') = A''(\mathbf{r}). \quad (44.8)$$

Можно пользоваться уже этим первым приближением, но часто бывает необходимо делать дополнительно упрощающее предположение, поскольку многогранная форма границ зон Вигнера — Зейтца сильно затрудняет расчет. Это предположение состоит в замене многогранной поверхности первой зоны сферой радиуса R , имеющей тот же объем. Тогда соответствующие друг другу точки, определяемые векторами \mathbf{r} и \mathbf{r}' , заменяются в ячейке диаметрально противоположными точками $\pm \mathbf{r}'$, а условие непрерывности принимает вид

$$A''(\mathbf{r}') = A''(-\mathbf{r}'), \quad (44.9)$$

$$\frac{\partial A''}{\partial R} = 0.$$

Конечно, подобный подход возможен лишь в случае больших длин волн. Отыскание поправок для коротких волн встречает серьезные затруднения.

§ 45. Распределение частот в реальном кристалле

Изложенные в предыдущих параграфах результаты представляют большой интерес, поскольку они играют существенную роль в большом числе задач теоретической физики. Мы не ставим своей целью рассмотрение всех этих вопросов и остановимся лишь на одном наиболее типичном, а именно рассмотрим теорию теплоемкости твердых тел.

Резюмируем сначала некоторые основные положения.

Для всех типов волн (упругих, электромагнитных или волн де-Бройля), распространяющихся в среде с периодической структурой, функция $\psi(\mathbf{a})$, связывающая ψ с волновым вектором \mathbf{a} , испытывает разрыв непрерывности, когда вектор \mathbf{a} оканчивается на плоскости, представляющей собой границу какой-либо зоны. Эти плоскости играют одну и ту же роль для всех волн, какова бы ни была их природа; в случае электромагнитных волн, например, разрывность функции $\psi(\mathbf{a})$ является прямой причиной селективного отражения рентгеновских лучей (пятна Брэгга — Лауэ). Благодаря своим общим свойствам эти плоскости выбираются в качестве границ зон, определенных в предыдущих параграфах. Отметим, что в данном кристалле форма зон одинакова для всех типов волн.

Упругие деформации, например, распространяются в кристаллической решетке в виде упругих волн; свойства этих волн изучались в гл. 2—4 и были обобщены на случай трех измерений. Предположим, что имеется решетка с базисом, причем ее элементарная ячейка содержит N атомов. Удобнее всего представить волны, ограничивая область изменения волнового вектора \mathbf{a} только первой зоной; тогда каждому значению \mathbf{a} соответствует $3N$ различных типов волн, из которых три являются акустическими, а остальные $3(N-1)$ — оптическими. Для $N=3$ схематические кривые приведены на фиг. 98. Три акустические волны соответствуют трем обычным волнам, распространяющимся в изотропном твердом теле, — одной продольной и двум поперечным. В идеальной анизотропной непрерывной среде три колебания взаимно

перпендикулярны друг другу, но ни одно из них не имеет чисто поперечного продольного характера. В кристаллической решетке с дискретной структурой для данного волнового вектора \mathbf{a} также существуют три различные акустические волны, но их свойства сложнее, чем в случае непрерывной среды. Ниже мы будем обозначать через (l) продольные волны, а через (t_1, t_2) поперечные, хотя такие названия не соответствуют точно свойствам волн в кристаллической структуре.

Гексагональная решетка, даже состоящая из частиц одного типа, является, как мы видели, решеткой с базисом, и ей соответствуют три акустические ветви и три ветви с более высокими частотами, которые мы назовем оптическими ветвями. Напротив, монокристаллическая структура типа кубической гранцентрированной или объемноцентрированной решетки не имеет базиса, и на каждую ее ячейку приходится один атом. Благодаря этому остаются только три акустические ветви, а оптические ветви исчезают.

Объем первой зоны равен объему V_b элементарной ячейки обратной решетки. Если V_d — объем элементарной ячейки прямой решетки, то

$$V_b = \frac{1}{V_d}. \quad (45.1)$$

Выше мы предполагали кристаллическую решетку неограниченной. Рассмотрим теперь, к чему приводят конечные размеры кристалла, объем которого обозначим через V . Пусть кристалл состоит, например, из одной грамм-молекулы или из N молекул, где N — число Авогадро

$$N = 6,06 \cdot 10^{23} \text{ молекул/г-моль}. \quad (45.2)$$

Мы уточним, таким образом, введенное в § 34 понятие циклической решетки.

Для общности результатов предположим, что структура является решеткой с базисом, причем элементарная ячейка прямой решетки образована s атомами одной молекулы.

Типы колебаний такой ограниченной структуры зависят не только от свойств аналогичной бесконечной решетки, но и от граничных условий. Во все задачи теории упругости эти условия обычно вносят большие затруднения. Так, в непрерывной изотропной среде они приводят к комбинациям всех типов волн: например, продольная волна, падающая на

плоскую границу, дает отраженную продольную волну, но может также вызвать и поперечные отраженные волны. В случае идеального изотропного твердого тела можно представить себе граничные условия, устраняющие эти поперечные волны (идеальная плоская и твердая границы), но в случае кристаллических решеток этого сделать уже нельзя.

Поэтому Борн весьма остроумно ввел новый тип граничных условий, названных им циклическими условиями, о которых мы упоминали в § 34. Рассматривается бесконечная среда, не имеющая границ, в которой могут свободно распространяться волны, и в ней выбирается конечный объем V , имеющий форму параллелепипеда,

$$0 \leq x \leq L_1, \quad 0 \leq y \leq L_2, \quad 0 \leq z \leq L_3, \quad V = L_1 L_2 L_3. \quad (45.3)$$

После этого накладывается требование, чтобы волновая функция принимала одинаковые значения в точках

$$(x, y, z) \text{ и } (x + n_1 L_1, y + n_2 L_2, z + n_3 L_3),$$

где n_1, n_2, n_3 — произвольные целые числа:

$$\psi(x, y, z) = \psi(x + n_1 L_1, y + n_2 L_2, z + n_3 L_3). \quad (45.4)$$

Так как волна имеет вид

$$\psi = e^{i\omega t - 2\pi i(a_1 x + a_2 y + a_3 z)} \quad (45.5)$$

и n_1, n_2, n_3 — целые числа, то

$$a_1 = \frac{m_1}{L_1}, \quad a_2 = \frac{m_2}{L_2}, \quad a_3 = \frac{m_3}{L_3}, \quad (45.6)$$

где m_1, m_2, m_3 — тоже целые числа.

Кристалл возбуждается на собственной частоте, когда волновой вектор \mathbf{a} оканчивается в точке с координатами (a_1, a_2, a_3) , определяемыми соотношениями (45.6). Число таких точек в единице объема обратной решетки равно L_1, L_2, L_3 , поскольку расстояния между ними по осям Ox, Oy и Oz равны соответственно $1/L_1, 1/L_2$ и $1/L_3$.

В объеме V содержится очень большое число атомов: оно равно sN ($N = 6,06 \cdot 10^{23}$). С другой стороны, размеры параллелограмма L_1, L_2 и L_3 намного больше размеров d_1, d_2, d_3 элементарной ячейки решетки, так что число точек, представляющих собственные колебания и определяемых соотношениями (45.6), очень велико. Среднее число

изображающих точек, заключенных в элементе объема $d\tau$ пространства (a_1, a_2, a_3) , равно

$$dn = L_1 L_2 L_3 d\tau = V d\tau.$$

Учитывая это, рассмотрим некоторое направление распространения волны \mathbf{a} и малый конус около этого направления с углом раствора $d\Omega$. Число волновых векторов, оканчивающихся в этом конусе между сферами радиусов r и $r + dr$, равно

$$dn = L_1 L_2 L_3 r^2 dr d\Omega = Vr^2 dr d\Omega, \quad (45.7)$$

где

$$r = |a| = \frac{1}{\lambda}. \quad (45.8)$$

Отсюда получаем

$$dn = V d\Omega \frac{1}{\lambda^2} d\left(\frac{1}{\lambda}\right) = V d\Omega \frac{v^2}{W^2} d\left(\frac{v}{W}\right),$$

где W — фазовая скорость волн рассматриваемого типа.

Согласно данному в § 21 определению групповой скорости U , можно записать

$$W = \frac{v}{|a|}, \quad U = \frac{\partial v}{\partial |a|}, \quad \frac{1}{U} = \frac{d}{dv} \left(\frac{v}{W} \right), \quad (45.9)$$

тогда выражение для dn примет вид

$$dn = V d\Omega \frac{v^2 dv}{W^2 U}. \quad (45.10)$$

Нужно отметить, что в кристаллической решетке как групповая, так и фазовая скорости зависят от частоты v и от ориентации конуса. В идеальном изотропном твердом теле скорости не зависят от ориентации, и выражение (45.10) можно проинтегрировать по всем направлениям распространения. Тогда, заменяя $d\Omega$ на 4π , получаем

$$dn = 4\pi V \frac{v^2 dv}{W^2 U}. \quad (45.11)$$

Отметим, что из уравнения (45.7) в случае решетки без базиса ($s=1$; один атом на ячейку прямой решетки) можно получить очень общий результат: при циклических условиях для каждого типа упругих волн полное число собственных колебаний точно равно N , т. е. числу атомов в объеме V .

В этом легко убедиться, замечая, что полное число колебаний данного типа можно получить, интегрируя соотношение (45.7) по всей первой зоне, объем которой равен V_b , а именно

$$n = \int dn = V \int r^2 dr d\Omega = V V_b = \frac{V}{V_a} = N, \quad (45.12)$$

где использовано соотношение (45.1).

Это очень существенный результат теории зон.

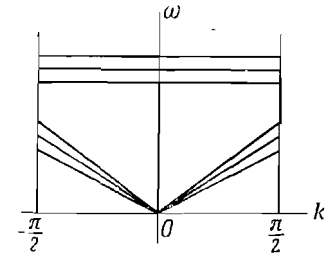
Нужно отметить, что в случае решетки с базисом отношение V/V_a в предыдущей формуле равнялось бы числу молекул N , находящихся в объеме V .

Легко представить себе простые структуры, позволяющие уточнить физический смысл циклических условий. Циклическую решетку образует, например, электрический фильтр из n идентичных ячеек, в котором последняя ячейка связана с первой. Другим примером могут служить магнетроны: магнетрон с трапециевидными резонаторными полостями аналогичен решетке Борна с циклическими условиями для хлористого натрия.

Рассмотрим теперь, как можно упростить эти общие рассуждения в применении к идеальному изотропному твердому телу. Слово „идеальное“ употребляется здесь для того, чтобы напомнить о несколько искусственном характере наших предположений. То, что мы называем изотропным твердым телом, в действительности представляет собой совокупность очень маленьких беспорядочно ориентированных кристаллов, так что идеальное твердое тело может представлять только некоторые средние свойства кристалла.

При изложении теории теплоемкости твердого тела мы будем пользоваться следующими упрощающими предположениями.

а) Предположим, что кривые на фиг. 98 можно заменить прямыми, как показано на фиг. 115. Таким образом, оптические ветви будут соответствовать только одной частоте



Фиг. 115.

(вместо области частот конечной ширины), а *акустические волны* будут иметь *постоянную* фазовую скорость

$$W = U = \text{const.} \quad (45.13)$$

б) *Заменим первую зону сферой*. При этом не надо забывать об общем результате, полученном в начале этого параграфа, а именно, что структура зон не зависит от природы рассматриваемых волн. В частности, мы должны считать, что эта зона является сферической для всех акустических волн, как продольных, так и поперечных.

Если через R обозначить радиус этой сферы и предположить, что соотношение (45.12) остается справедливым, то для ее объема получаем

$$V_b = \frac{4}{3} \pi R^3 = \frac{1}{V_d} = \frac{N}{V}, \quad (45.14)$$

где V_d — объем ячейки прямой решетки, N — число молекул в полном объеме V .

Для того чтобы удовлетворить требованиям общей теории, мы должны считать, что для всех типов волн величина R одинакова, т. е. одинакова предельная длина волны $\lambda_{\text{мин}}$.

$$R = |a|_{\text{макс.}} = \frac{1}{\lambda_{\text{мин}}}.$$

Следовательно,

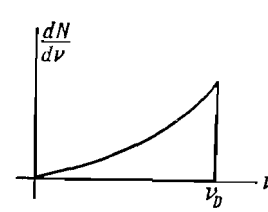
$$\lambda_{\text{мин.}} = \left(\frac{4\pi V}{3N} \right)^{1/3}. \quad (45.15)$$

Акустическим волнам с таким значением λ соответствуют различные предельные частоты в зависимости от того, какие волны рассматриваются — продольные (l) или поперечные (t). Обозначив соответственно через W_l и W_t фазовые скорости этих волн, получаем для предельных частот выражения

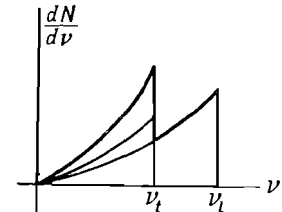
$$\begin{aligned} \nu_{l, \text{ пред.}} &= W_l \left(\frac{3N}{4\pi V} \right)^{1/3}, \\ \nu_{t, \text{ пред.}} &= W_t \left(\frac{3N}{4\pi V} \right)^{1/3}. \end{aligned} \quad (45.16)$$

Близкие, хотя и несколько отличные результаты были получены Дебаем в теории теплоемкости твердых тел. Когда Дебай опубликовал свою работу, теория зон была еще

мало известна, хотя многие ее положения были уже получены Борном. По существу Дебай рассматривал решетки без базиса; с другой стороны, он не видел необходимости



Фиг. 116.



Фиг. 117.

введения одинаковой минимальной длины волны и различных типов упругих волн. Им была введена одна предельная частота

$$\nu_D = \left(\frac{1}{W_l^3} + \frac{2}{W_t^3} \right)^{-1/3} \left(\frac{9N}{4\pi V} \right)^{1/3}. \quad (45.17)$$

Дебай рассуждал следующим образом. Исходя из уравнения (45.11) и полагая

$$V_l = W_l = \text{const}, \quad W_t = U_t = \text{const},$$

вычислим общее число колебаний, соответствующее интервалу частот $(\nu, \nu + d\nu)$, для всех типов акустических волн (т. е. для одной продольной и двух поперечных)

$$dn_l + 2dn_t = 4\pi V \nu^2 d\nu \left[\frac{1}{W_l^3} + \frac{2}{W_t^3} \right]. \quad (45.18)$$

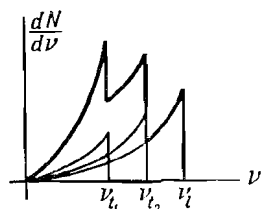
Интегрируя по ν в пределах от 0 до ν_D и полагая, что полное число колебаний равно $3N$, находим

$$3N = \frac{4}{3} \pi V \nu_D^3 \left[\frac{1}{W_l^3} + \frac{2}{W_t^3} \right],$$

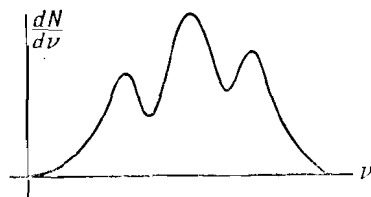
что точно совпадает с соотношением (45.17).

Слабым местом теории Дебая является то, что она не учитывает условия (45.12), и хотя в ней полное число колебаний равно $3N$, однако распределение их между продольными и поперечными волнами (N и $2N$) в расчет не принимается. Спектры колебаний $dN_0/d\nu$ [см. уравнение (45.11)],

полученные соответственно по теории Дебая, показаны на фиг. 116, и по теории, изложенной в данной книге, — на фиг. 117. Истинный спектр частот по нашей теории обозначен на фиг. 117 жирной линией, которая является суммой ординат двух кривых. На фиг. 118 тот же спектр



Фиг. 118.



Фиг. 119.

представлен для случая анизотропной среды. Появление разрывной кривой связано с заменой первой зоны сферой.

При более последовательном расчете получается кривая, изображенная на фиг. 119, где разрывы исчезают. Непрерывность этой кривой связана с тем, что в этом случае для данного типа волны нет единой предельной частоты для всех направлений распространения.

§ 46. Энергия теплового возбуждения твердого тела. Характеристические температуры

Для простоты будем рассматривать случай структуры без базиса, когда твердое тело можно представить как совокупность $3N$ гармонических осцилляторов. Согласно волновой механике, энергия гармонического осциллятора, колеблющегося с частотой ν , выражается формулой Планка

$$u_\nu = \frac{h\nu}{e^{h\nu/kT} - 1} + \frac{h\nu}{2}, \quad (46.1)$$

где k — постоянная Больцмана, h — постоянная Планка, а T — абсолютная температура. Нужно отметить, что в первоначальной теории Планка отсутствовало слагаемое $h\nu/2$. Развитие теории показало необходимость введения этого члена, он представляет энергию осциллятора при абсолютном нуле.

На каждое упругое колебание, как продольное, так и поперечное, имеющее частоту ν , приходится энергия u_ν , откуда следует, что полная энергия твердого тела при температуре T равна

$$U_T = \sum_{m=l, t_1, t_2} \int_0^{\nu_m} u_\nu dn_m, \quad (46.2)$$

где верхним пределом интегрирования является предельная частота ν_m , соответствующая типу волны, обозначаемому индексом m .

Обычно предельным частотам ставят в соответствие характеристические температуры рассматриваемого твердого тела. Первое определение этих температур было дано Дебаем. Единственной рассмотренной им предельной частоте ν_D он поставил в соответствие характеристическую температуру θ_D , определяемую выражением

$$\theta_D = \frac{h\nu_D}{k}. \quad (46.3)$$

В нашей теории нужно вводить две характеристические температуры, поскольку акустическим продольным и поперечным волнам соответствуют две различные предельные частоты [см. (45.16)]. Эти температуры выражаются следующим образом:

$$\begin{aligned} \theta_l &= \frac{h\nu_l}{k} = \frac{hW_l}{k} \left(\frac{3N}{4\pi V} \right)^{1/3}, \\ \theta_t &= \frac{h\nu_t}{k} = \frac{hW_t}{k} \left(\frac{3N}{4\pi V} \right)^{1/3}. \end{aligned} \quad (46.4)$$

Отсюда с учетом уравнений (45.11), (46.1) и (46.2) полную энергию твердого тела при температуре T можно записать в виде

$$U_T = \sum_{m=l, t_1, t_2} \frac{4\pi V}{W_m^2} \int_0^{\nu_m} \nu^2 d\nu \left[\frac{h\nu}{e^{h\nu/kT} - 1} + \frac{1}{2} h\nu \right] \quad (46.5)$$

Производя замену переменных

$$\xi = \frac{h\nu}{kT}, \quad \xi_m = \frac{h\nu_m}{kT} = \frac{\theta_m}{T},$$

получаем

$$U_T = \sum_{m=l, t_1, t_2} \frac{4\pi V (kT)^4}{W_m^2} \frac{\xi_m^3}{h^3} \int_0^{\xi_m} d\xi \left(\frac{1}{e^\xi - 1} + \frac{1}{2} \right), \quad (46.6)$$

где интеграл может быть вычислен приближенными методами. Если ввести функцию Дебая

$$D(x) = \frac{3}{x^3} \int_0^x \left(\frac{1}{e^\xi - 1} + \frac{1}{2} \right) \xi^3 d\xi, \quad (46.7)$$

то коэффициент, входящий в выражение для U_T ,

$$\frac{4\pi V (kT)^4}{W_m^3} \frac{h^3}{h^3} \quad (46.8)$$

примет вид

$$\begin{aligned} \frac{4\pi V (kT)^4}{W_m^3} \frac{\xi_m^3}{h^3} \frac{1}{3} &= \frac{4\pi V (kT)^4}{3W_m^3} \frac{h^3 v_m^3}{h^3 k^3 T^3} = \\ &= \frac{4\pi V}{3} \frac{v_m^3}{W_m^3} kT = \frac{4\pi V}{3} kT \left(\frac{3N}{4\pi V} \right) = NkT = RT, \end{aligned}$$

где R — газовая постоянная, так что окончательно имеем

$$U_T = \sum_m U_{T,m} = RT \sum_{l, t_1, t_2} D\left(\frac{\theta_m}{T}\right).$$

Если поперечные волны одинаковы, то

$$U_T = RT \left[D\left(\frac{\theta_l}{T}\right) + 2D\left(\frac{\theta_t}{T}\right) \right]. \quad (46.9)$$

Аналогичный расчет показывает, что предположение Дебая приводит к выражению

$$U_T = 3RTD\left(\frac{\theta_D}{T}\right). \quad (46.10)$$

Вообще говоря, формула (46.9) более точна, чем (46.10). Однако во многих случаях обе характеристические температуры θ_l и θ_t близки к θ_D и для очень высоких и очень низких температур обе теории дают удовлетворительные результаты.

Для очень высоких температур справедлива классическая термодинамика, где применимо правило равномерного распределения энергии по степеням свободы. При больших значениях T получаем

$$\begin{aligned} u_v &= kT \left(\frac{\xi}{e^\xi - 1} + \frac{1}{2} \xi \right) = kT \left(\frac{\xi}{\xi + \frac{1}{2} \xi^2 + \dots} + \frac{1}{2} \xi \right) \approx \\ &\approx kT \left(1 + \frac{\xi}{2} - \frac{\xi}{2} \right) = kT; \quad (46.11) \end{aligned}$$

иными словами, энергия каждого осциллятора равна kT . Так как в обеих изложенных теориях общее число степеней свободы равно $3N$, полную энергию твердого тела при высоких температурах можно записать в виде

$$U_T = 3NkT = 3RT, \quad (46.12)$$

тогда для теплоемкости при постоянном объеме получаем закон Дюлонга и Пти

$$c = \frac{\partial U_T}{\partial T} = 3R.$$

Легко видеть, что этот результат можно получить из выражения для энергии U_T (46.9) или (46.10), так как для больших значений T функция Дебая $D(x) \rightarrow 1$ ¹⁾.

Исследуем теперь, что дает изложенная теория при низких температурах

$$T \ll \theta_l, \theta_D, \theta_t.$$

При выполнении этого условия отношение $\theta_m/T \gg 1$, так что верхний предел интегрирования x в выражении (46.7) для функции Дебая очень велик. Тогда можно положить

$$D(x) = \frac{3}{x^3} \int_0^\infty \frac{\xi^3 d\xi}{e^\xi - 1} + \frac{3}{8} x; \quad (46.13)$$

здесь мы интегрируем до бесконечности только первое слагаемое, поскольку интеграл от второго слагаемого расходуется на верхнем пределе. Численная величина интеграла

¹⁾ См., например, L. Brillouin, Les Tenseurs en mécanique et en élasticité, Paris, 1938, p. 328.

в (46.13) хорошо известна и равна $\pi^4/15$. Таким образом, для больших значений x

$$D(x) = \frac{\pi^4}{5x^3} + \frac{3}{8}x.$$

Окончательное выражение для U_T при низких температурах имеет вид

$$U_T = \sum_m \left[RT \frac{3}{8} \frac{\theta_m}{T} + RT \frac{\pi^4}{5} \left(\frac{T}{\theta_m} \right)^3 \right],$$

или

$$U_T = \frac{3}{8} R(\theta_l + 2\theta_t) + RT \frac{\pi^4}{5} \left[\left(\frac{T}{\theta_l} \right)^3 + 2 \left(\frac{T}{\theta_t} \right)^3 \right]. \quad (46.14)$$

Первое слагаемое постоянно и не дает вклада в величину теплоемкости $c = \partial U_T / \partial T$. Таким образом, при низких температурах теплоемкость при постоянном объеме изменяется пропорционально T^3 .

Легко видеть, что теория Дебая приводит практически к тем же результатам; действительно, она дает

$$U_T = \frac{3\pi^4}{5} RT \left(\frac{T}{\theta_D} \right)^3 + \text{const.} \quad (46.15)$$

Впрочем, нужно отметить, что эта постоянная отлична от постоянного члена, входящего в выражение (46.14).

Поскольку

$$\frac{1}{\theta_l^3} + \frac{2}{\theta_t^3} = \frac{1}{\theta_D^3}, \quad (46.16)$$

то, как видно из сравнения соотношений (46.3), (46.4) и (46.17), по теории Дебая при низких температурах мы получим для теплоемкости то же выражение, что и выше.

Все вышеизложенные результаты справедливы для структур без базиса.

Предположим, что в конечном объеме V заключена одна грамм-молекула. Пусть элементарная ячейка решетки с базисом содержит, например, одну молекулу из s атомов. Полная энергия U_T будет тогда равна сумме энергий акустических продольных и поперечных волн, а также энергии оптических волн, которые, как мы предполагали, имеют $3(s-1)$ постоянных частот ν_i .

Вводя новые характеристические температуры

$$\theta_i = \frac{h\nu_i}{k}, \quad i = 1, 2, \dots, (s-1), \quad (46.17)$$

получаем

$$U_T = RT \left[D \left(\frac{\theta_l}{T} \right) + 2D \left(\frac{\theta_t}{T} \right) \right] + R \sum_{i=1}^{3s-3} \left(\frac{\theta_i}{e^{\theta_i/T} - 1} + \frac{1}{2} \theta_i \right). \quad (46.18)$$

Отсюда при очень низких температурах для теплоемкости при постоянном объеме снова получаем закон T^3 .

В случае очень высоких температур

$$c = 3R + R \lim_{T \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^{3s-3} \frac{(\theta_i/T)^2 e^{\theta_i/T}}{(e^{\theta_i/T} - 1)^2}.$$

Так как каждый член суммы стремится к единице, то в пределе получаем закон Неймана

$$c = 3Rs; \quad (46.19)$$

при $s=1$ он переходит в закон Дюлонга и Пти.

Можно показать, что этот результат имеет место и в том случае, когда элементарная ячейка содержит p молекул, что наблюдается, в частности, у окиси цинка ¹⁾.

§ 47. Тепловое расширение и энтропия твердого тела

Заканчивая исследование твердого тела, мы вычислим его энтропию, ограничиваясь случаем структуры без базиса.

Введем с этой целью в рассмотрение радиационное давление акустических волн, которое вызвано отклонениями от закона Гука. Выражение для давления акустических волн получили Рэлей и Л. Бриллюэн; для волн типа m оно имеет вид

$$p_m = \frac{U_m}{V} \left(\frac{1}{3} - \frac{V}{W_m} \frac{\partial W_m}{\partial V} \right), \quad (47.1)$$

¹⁾ См., например, M. Parodi, Recherches dans l'infrarouge lointain par la methode des rayons restants, Paris, 1938, p. 60.

где U_m — полная энергия, связанная с рассматриваемыми волнами, фазовая скорость которых равна W_m , а V — объем, занимаемый телом.

Для электромагнитного излучения в вакууме

$$p_m = \frac{1}{3} \frac{U_m}{V},$$

поскольку в этом случае отсутствует член $\partial W_m / \partial V$.

Равенство (47.1) можно записать в виде

$$p_m = - \frac{U_m}{\theta_m} \frac{\partial \theta_m}{\partial V}, \quad (47.2)$$

так как, учитывая (46.4), получаем

$$\begin{aligned} \frac{\partial \ln \theta_m}{\partial V} &= \frac{1}{\theta_m} \frac{\partial \theta_m}{\partial V} = \frac{\partial}{\partial V} \left[\ln \frac{h}{k} W_m - \frac{1}{3} \ln \frac{4\pi V}{3N} \right] = \\ &= \frac{1}{W_m} \frac{\partial W_m}{\partial V} - \frac{1}{3V} \end{aligned}$$

или

$$- \frac{V}{\theta_m} \frac{\partial \theta_m}{\partial V} = \frac{1}{3} - \frac{V}{W_m} \frac{\partial W_m}{\partial V}.$$

Внешнее давление p должно уравниваться внутренним давлением, которое является суммой усилий, вызванных взаимодействием молекул, $f(V)$ и радиационного давления, связанного с волнами теплового движения, т. е.

$$p = f(V) + \sum_m p_m. \quad (47.3)$$

Если действующее на тело внешнее давление равно нулю, то это суммарное давление тоже должно обращаться в нуль, так что

$$f(V) = - \sum_m p_m.$$

Таким образом, можно считать, что радиационное давление вызывает тепловое расширение.

Полную энергию твердого тела можно выразить как

$$U = F(V) + U_l + U_t + U_s, \quad (47.4)$$

если положить

$$F(V) = - \int f(V) dV.$$

Работа, совершаемая при малых изменениях dV и dT , равна

$$dW = p dV = f dV - \sum_m \frac{U_m}{\theta_m} \frac{\partial \theta_m}{\partial V} dV,$$

или, заменяя U_m с помощью формулы (46.9),

$$dW = f dV - RT \sum_m \left[D \left(\frac{\theta_m}{T} \right) \frac{1}{\theta_m} \frac{\partial \theta_m}{\partial V} dV \right]. \quad (47.5)$$

С другой стороны, изменение энергии

$$\begin{aligned} dU &= \frac{\partial U}{\partial V} dV + \frac{\partial U}{\partial T} dT = -f dV + \\ &+ \sum_m \frac{\partial U_m}{\partial V} dV + \sum_m \frac{\partial U_m}{\partial T} dT, \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} dU &= -f dV + R \sum_m \left[D' \left(\frac{\theta_m}{T} \right) \frac{\partial \theta_m}{\partial V} dV + \right. \\ &+ D \left(\frac{\theta_m}{T} \right) dT - \frac{\theta_m}{T} D' \left(\frac{\theta_m}{T} \right) dT \left. \right]. \quad (47.6) \end{aligned}$$

Так как поглощенное телом количество теплоты равно

$$dQ = dU + dW,$$

то для изменения энтропии получаем выражение

$$dS = \frac{dQ}{T} = \frac{dU + dW}{T}. \quad (47.7)$$

Заменяя величины dU и dW их значениями из (47.5) и (47.6), запишем

$$\begin{aligned} dS &= \frac{R}{T} \sum_m \left\{ D \left(\frac{\theta_m}{T} \right) dT + D \left(\frac{\theta_m}{T} \right) \frac{T}{\theta_m} \frac{\partial \theta_m}{\partial V} dV + \right. \\ &+ D' \left(\frac{\theta_m}{T} \right) \left[\frac{\partial \theta_m}{\partial V} dV - \frac{\theta_m}{T} dT \right] \left. \right\}, \end{aligned}$$

или, заменяя $(\partial \theta_m / \partial V) dV$ на $d\theta_m$,

$$dS = R \sum_m \left(\frac{D'(\theta_m/T)}{T} - \frac{D(\theta_m/T)}{\theta_m} \right) (d\theta_m - \frac{\theta_m}{T} dT).$$

Полагая $X_m = \theta_m/T$, получаем окончательно

$$dS = R \sum_m \left[D'(X_m) - \frac{D(X_m)}{X_m} \right] dX_m.$$

Проведенное выше преобразование свидетельствует о том, что величина dS является полным дифференциалом. Это означает, что рассматриваемое нами твердое тело удовлетворяет принципу Карно.

Из выражения для dS следует

$$\frac{dS}{dX_m} = R \left[D'(X_m) - \frac{D(X_m)}{X_m} \right]. \quad (47.8)$$

В явном виде эту зависимость можно выразить, вводя функцию Дебая

$$D(X_m) = \frac{3}{X_m^3} \int_0^{X_m} \frac{\xi^3 d\xi}{e^\xi - 1} + \frac{3}{8} X_m.$$

В результате получаем

$$\frac{dS}{dX_m} = R \left[-\frac{9}{X_m^4} \int_0^{X_m} \frac{\xi^3 d\xi}{e^\xi - 1} + \frac{3}{e^{X_m} - 1} - \frac{3}{X_m^4} \int_0^{X_m} \frac{\xi^3 d\xi}{e^\xi - 1} \right],$$

или

$$\frac{dS}{dX_m} = \frac{3R}{e^{X_m} - 1} - \frac{12R}{X_m^4} \int_0^{X_m} \frac{\xi^3 d\xi}{e^\xi - 1}. \quad (47.9)$$

Интересно отметить, что выражение (47.9) совпадает с результатом, к которому приводит волновая механика для энтропии нашей системы гармонических осцилляторов. Действительно, квантовая механика позволяет провести статистическое вычисление энтропии. Распределению n квантов энергии $h\nu$ (полная энергия $nh\nu$) между g резонаторами соответствует энтропия

$$S = kg \left[\left(1 + \frac{n}{g}\right) \ln \left(1 + \frac{n}{g}\right) - \frac{n}{g} \ln \frac{n}{g} \right]. \quad (47.10)$$

Так как наиболее вероятным является то распределение, при котором каждый резонатор обладает средней энергией, определяемой по формуле Планка, то

$$u_\nu = \frac{h\nu}{e^{h\nu/kT} - 1} = \frac{nh\nu}{g}, \quad \xi = \frac{h\nu}{kT} \quad (47.11)$$

и

$$\frac{n}{g} = \frac{1}{e^\xi - 1}, \quad 1 + \frac{n}{g} = \frac{e^\xi}{e^\xi - 1}.$$

Число осцилляторов с частотой ν (в интервале $d\nu$) определяется из выражения (45.11). Будем считать, что величина g равна этому числу. Тогда для волн типа m имеем

$$g = V \frac{4\pi\nu^2 d\nu}{W^3}. \quad (47.12)$$

Интегрируя по ν в пределах от 0 до ν_m , получаем полную энтропию твердого тела

$$S = \sum_{m=l, t_1, t_2} S_m, \quad (47.13)$$

где

$$S_m = 3Nk \left(\frac{T}{\theta_m} \right)^3 \int_0^{\theta_m/T} \left[\frac{e^\xi}{e^\xi - 1} \ln \frac{e^\xi}{e^\xi - 1} - \frac{1}{e^\xi - 1} \ln \frac{1}{e^\xi - 1} \right] \xi^2 d\xi.$$

Полагая снова $X_m = \theta_m/T$ и группируя члены, после простых преобразований получаем наконец

$$S_m = \frac{3R}{X_m^3} \int_0^{X_m} \left[\frac{\xi e^\xi}{e^\xi - 1} - \ln(e^\xi - 1) \right] \xi^2 d\xi. \quad (47.14)$$

Интегрируя по частям, можно избавиться от интеграла, содержащего логарифм; действительно

$$-\int_0^{X_m} \ln(e^\xi - 1) \xi^2 d\xi = -\frac{X_m^3}{3} \ln(e^{X_m} - 1) + \frac{1}{3} \int_0^{X_m} \frac{e^\xi}{e^\xi - 1} \xi^3 d\xi.$$

Тогда

$$S = \sum_m \left[-R \ln(e^{X_m} - 1) + \frac{4R}{X_m^3} \int_0^{X_m} \frac{e^\xi \xi^3 d\xi}{e^\xi - 1} \right]. \quad (47.15)$$

Для сравнения этого выражения с выражением (47.9) продифференцируем его по X_m ; тогда получим

$$\begin{aligned} \frac{dS}{dX_m} &= -\frac{Re^{X_m}}{e^{X_m} - 1} - \frac{12R}{X_m^4} \int_0^{X_m} \frac{e^\xi \xi^3 d\xi}{e^\xi - 1} + \frac{4Re^{X_m}}{e^{X_m} - 1} = \\ &= \frac{3Re^{X_m}}{e^{X_m} - 1} - \frac{12R}{X_m^4} \int_0^{X_m} \frac{e^\xi \xi^3 d\xi}{e^\xi - 1}. \end{aligned} \quad (47.16)$$

Запишем это выражение в виде

$$\frac{dS}{dX_m} = 3R \left[\frac{1}{e^{X_m} - 1} + 1 \right] - \frac{12R}{X_m^4} \int_0^{X_m} \left(\frac{1}{e^{\xi} - 1} + 1 \right) \xi^3 d\xi;$$

легко видеть, что оно полностью совпадает с соотношением (47.9). Действительно, второе слагаемое под знаком интеграла дает после интегрирования

$$- \frac{12R}{X_m^4} \left[\frac{\xi^4}{4} \right]_0^{X_m} = -3R.$$

Этот член сокращается с соответствующим слагаемым в квадратных скобках, благодаря чему и получаем снова (47.9).

Подводя итог, следует сказать, что изложенная теория вполне удовлетворительна, тогда как выражение для внутреннего давления по теории Дебая, в которой вводится только одна характеристическая температура, не согласуется с точным выражением (47.2).

Более полное изложение теории твердого тела можно найти в работе Бриллюэна¹⁾, где приведено, в частности, доказательство соотношения (47.1). Здесь же мы хотели только показать возможность введения в эту теорию понятия зон и указать на поправки к теории Дебая, состоящие, как отметил Борн, во введении двух характеристических температур вместо одной.

ЛИТЕРАТУРА ПО ТЕОРИИ ЗОН

1. Brillouin L., Quantenstatistik, Berlin, 1931.
2. Brillouin L., Structure des corps solides, Paris, 1937.
3. Mott N. F., Jones H., Theory of Metals and Alloys, Oxford, New York, 1936.
4. Seitz F., Modern Theory of Solids, N. Y., 1940. (См. перевод: Зейтц Ф., Современная теория твердого тела, М. — Л., 1949.)
5. Parodi M., Recherches dans l'infrarouge lointain par la méthode des rayons restants, Paris, 1938.
6. Bloch F., Zs. f. Phys., 52, 555 (1928).
7. Morse P. M., Phys. Rev., 35, 1310 (1930).

8. Peierls R., Ann. d. Phys., 4, 121 (1930).
9. Brillouin L., Journ. Phys., 1, 377 (1930); 3, 565 (1932); 4, 1, 333 (1933); 7, 401 (1936).
10. Jones H., Proc. Roy. Soc., 144A, 225 (1934); 147A, 396 (1934).
11. Jones H., Mott N. F., Skinner H. W. B., Phys. 45, 379 (1934).
12. Slater J. C., Phys. Rev., 45, 794 (1934).
13. Hund F., Zs. tech. Phys., 16, 331, 494 (1935); Zs. f. Phys., 99, 119 (1936).
14. Peierls R., Ann. Inst. Henri Poincaré, 5, 177 (1935).
15. Seitz F., Ann. Math., 37, 17 (1936).
16. Bouckaert L. P., Smoluchowski R., Wigner E., «Theory of Brillouin Zones and Symmetry Properties of Wave Functions in Crystals», Phys. Rev., 50, 58 (1936).
17. Herring C., Phys. Rev., 52, 361, 365 (1937).
18. Chodorow M. I., Manning M. F., Phys. Rev., 52, 731 (1937).
19. Bieberbach L., «Ueber die Inhaltsgleichheit der Brillouinsche Zonen» [Monatshefte f. Math. u. Phys., 48, 509 (1939)].
20. Houston W. V., Rev. Mod. Phys., 20, 161 (1948).
21. Slater J. C., Phys. Rev., 84, 179 (1951).
22. Katz E., Phys. Rev., 85, 495 (1952).

¹⁾ См. примечание на стр. 257.

УРАВНЕНИЕ МАТЬЕ И СВЯЗАННЫЕ С НИМ ПРОБЛЕМЫ

§ 48. Общие замечания

Изучая распространение волн в сплошной среде с периодической структурой, мы разобрали в § 40 некоторые свойства общего решения этой задачи и обсудили ряд примеров. Наиболее известным из этого круга задач является случай одномерной структуры, для которой уравнение (40.1) сводится к следующему уравнению:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \omega^2 F(x) \psi = 0, \quad (48.1)$$

$$\psi = e^{i\omega t} u(x).$$

Если предположить, что функция $F(x)$ периодична по x с периодом d и состоит только из одного члена с косинусом, то (48.1) принимает форму уравнения Матъе. При этих условиях рассмотренное ранее разложение (40.3) принимает вид

$$F(x) = C_0 + C_1 e^{2\pi i(x/d)} + C_1 e^{-2\pi i(x/d)} = C_0 + 2C_1 \cos \frac{2\pi x}{d}. \quad (48.2)$$

До сих пор исследование подобных уравнений проводилось только в предположении, что коэффициент C_1 очень мал и создает лишь малые возмущения, т. е. можно было положить

$$F = C_0 + \epsilon f,$$

где ϵ — очень малый параметр. Теперь мы снова возвратимся к этой задаче, считая, что величина коэффициентов C_0 и C_1 произвольна.

Для облегчения исследования приведем уравнение Матъе к каноническому виду, произведя замену переменной

$$\xi = \frac{\pi x}{d}, \quad (48.3)$$

благодаря чему возмущающая функция будет иметь период не d , а π . Теперь после исключения гармонической зависимости от времени получаем следующее уравнение для u :

$$\frac{d^2 u}{dx^2} + (\eta + \gamma \cos 2\xi) u = 0,$$

где

$$\eta = \omega^2 \frac{d^2}{\pi^2} C_0 = 4v^2 d^2 C_0; \quad \gamma = 8v^2 d^2 C_1. \quad (48.4)$$

С уравнениями такого типа впервые встретился Матъе при изучении колебаний эллиптической мембраны. Они встречаются также в задаче о колебаниях жидкой поверхности эллиптической формы и вообще при изучении колебательных или волновых процессов с эллиптическими граничными условиями, как, например, в задаче о распространении акустических или электромагнитных волн в волноводах эллиптического сечения.

В следующих параграфах мы перечислим многие важные физические и технические проблемы, в которых уравнение Матъе играет существенную роль¹⁾.

Флоке установил, что общее решение уравнения (48.4) имеет вид

$$u(\xi) = D_1 A(\xi) e^{\mu \xi} + D_2 B(\xi) e^{-\mu \xi}, \quad (48.5)$$

где D_1 и D_2 — произвольные постоянные, а $A(\xi)$ и $B(\xi)$ — периодические функции с периодом π . Учитывая снова временной фактор $e^{i\omega t}$, получаем, что решение для ψ представляет собой суперпозицию двух волн, распространяющихся в противоположных направлениях, одна из которых затухает, а другая нарастает.

Если рассматривать только одну из этих волн, то можно положить

$$u = A(\xi) e^{\mu \xi}, \quad (48.6)$$

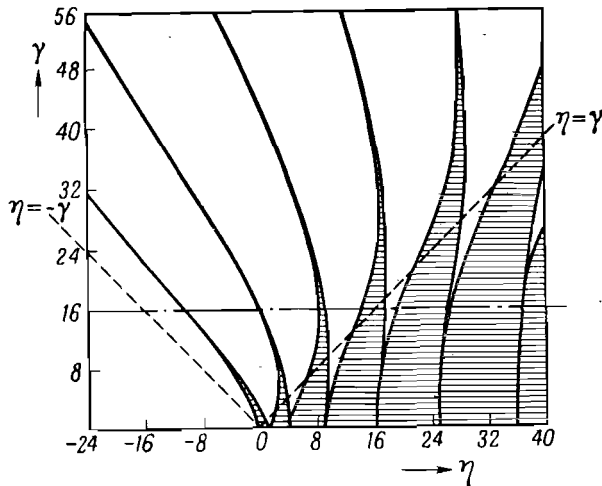
где период $A(\xi)$ равен π , что соответствует общему решению, полученному в § 40 [равенство (40.4)].

¹⁾ Везде в тексте параметры уравнения Матъе обозначаются через η и γ . Эти же параметры Матъе обозначает как R и $\pm 2h^2$, Стрэтт — как λ и $2h^2$, Стрэтт и Ван-дер-Поль — как $4\omega^2$ и $4a^2$ и, наконец, Уиттекер и Хамберт — как a и $16q$.

Выше везде предполагалось, что решение существует действительно в виде волны, т. е. что параметр

$$\mu = i\beta = i\frac{k}{\pi}, \quad \mu\xi = i\beta\xi = i\frac{kx}{d} = i2\pi\alpha x,$$

и отыскивалось соответствующее значение частоты ω . Сейчас мы поступаем наоборот: предполагая частоту заданной, пы-



Фиг. 120.

таемся определить характеристический показатель экспоненты μ .

При этом могут встретиться различные случаи:

а) μ — чисто мнимое число, т. е.

$$\mu = i\beta, \quad (48.7a)$$

что соответствует незатухающим гармоническим волнам.

б) μ — комплексное или действительное число, т. е.

$$\mu = \alpha + i\beta, \quad (48.7b)$$

что дает затухающие волны.

Заметим, что соотношения (48.4) показывают, что пропорциональные ω^2 параметры η и γ растут с увеличением частоты, в то время как их отношение остается постоянным.

Основные результаты, к которым приводит изучение уравнения (48.4), иллюстрированы на фиг. 120, где по осям

координат отложены величины η и γ . Незаштрихованным областям соответствуют те пары значений η и γ , для которых величина μ комплексна или действительна, т. е. волна затухает, а заштрихованным, напротив, — те значения параметров, при которых μ — чисто мнимое число, т. е. затухание отсутствует.

Применяя техническую терминологию, можно сказать, что незаштрихованные области соответствуют полосам пропускания (или поглощения), а заштрихованные — полосам пропускания.

Плоскость $\eta\gamma$ на фиг. 120 удобно разбить на три области, проведя прямые

$$\eta = \gamma, \quad \eta = -\gamma,$$

которые, как увидим ниже, можно принять за новые координатные оси.

При неограниченном возрастании γ и при $\eta > -\gamma$ заштрихованные области сужаются, превращаясь в пределе в прямые, параллельные направлению $\eta = -\gamma$. Любая прямая, параллельная оси η и достаточно от нее удаленная, пересекается этими прямыми в точках с абсциссой

$$\eta = -\gamma + (2n+1)\sqrt{2\gamma} \quad (n \text{ — целое}). \quad (48.8)$$

При всех $\eta < -\gamma$ распространяющиеся волны существовать не могут. В табл. 3 приведены условия, характеризующие природу волн.

Таблица 3

$\eta < -\gamma$	μ — действительное или комплексное число	Полосы непропускания
$-\gamma < \eta < \gamma$	μ — действительное или комплексное число μ — чисто мнимое число	Полосы непропускания Существуют узкие полосы пропускания
$\eta > \gamma$	μ — действительное или комплексное число μ — чисто мнимое число	Узкие полосы непропускания Существуют широкие полосы пропускания

На границах заштрихованных и незаштрихованных областей действительная часть μ обращается в нуль

$$\operatorname{Re} \mu = 0. \quad (48.9)$$

Ось η соответствует значению параметра $\gamma = 0$, что имеет место в случае однородной бесконечной среды без периодической структуры. Положительная полуось η проходит только через заштрихованные области, поскольку из уравнения (48.4) при условии распространения получаем

$$C_0 = \frac{1}{V_0^2}, \quad \eta = \frac{4\pi^2 d^2}{V_0^2} > 0. \quad (48.10)$$

В области, непосредственно прилегающей к оси η , значение $\gamma \ll \eta$, что приводит к появлению малых возмущений. Две кривые, ограничивающие заштрихованные области, начинаются всегда в точках оси η с абсциссой

$$\eta = n^2 \quad (n - \text{целое}) \quad (48.11)$$

и имеют в этих точках касание $(n - 1)$ -го порядка, так что граничные кривые

при $n = 1$ начинаются в одной точке;

при $n = 2$ имеют, кроме того, общую вертикальную касательную;

при $n = 3$ имеют общую вертикальную касательную и одинаковую кривизну и т. д.

Исследование граничных кривых, к которому мы еще вернемся, было впервые проведено Матье.

§ 49. Общее исследование уравнения Матье

Выше мы отмечали, что полученное Флоке общее решение уравнения Матье можно представить в виде (48.5). Для получения полной картины достаточно исследовать любой из экспоненциальных факторов, входящих в (48.5), что привело бы к рассмотрению свободных волн типа (48.6). Выбор действительной комбинации этих факторов будет соответствовать стоячей волне. Этот тип решения и используется обычно при численном исследовании уравнения Матье.

Кривые, отделяющие области, в которых параметр μ является чисто мнимым, от областей с комплексным или действительным μ , соединяются, как уже отмечалось, попарно в точках на оси η с абсциссой $\eta = n^2$ (n — целое). Эти точки соответствуют случаю, когда при $\gamma = 0$ уравнение имеет периодические решения

$$\cos m\xi, \quad \sin m\xi,$$

причем

$$\mu_0 = im = i\sqrt{\eta} = in \quad (n - \text{целое}).$$

В более общем случае, когда η не равно квадрату целого числа, но $\gamma = 0$, уравнение Матье также имеет периодические решения вида

$$\cos m\xi, \quad \sin m\xi, \quad (49.1)$$

где

$$\mu_0 = im = i\sqrt{\eta}.$$

Функции $A(\xi)$, $B(\xi)$ сводятся тогда просто к постоянным, а наше решение приводится к общему виду (48.5) с помощью формул Эйлера

$$\cos m\xi = \frac{e^{im\xi} + e^{-im\xi}}{2}, \quad \sin m\xi = \frac{e^{im\xi} - e^{-im\xi}}{2i};$$

из первой формулы

$$D_1 = D_2 = \frac{1}{2},$$

а из второй

$$D_1 = -D_2 = \frac{1}{2i}.$$

Будем называть обобщенными функциями Матье решения уравнения (48.4), которые при $\gamma = 0$ сводятся к (49.1), а при всех $\gamma \neq 0$ могут быть разложены по степеням γ . Примем для этих функций обозначения

$$C_m(\gamma, \xi), \quad S_m(\gamma, \xi). \quad (49.2)$$

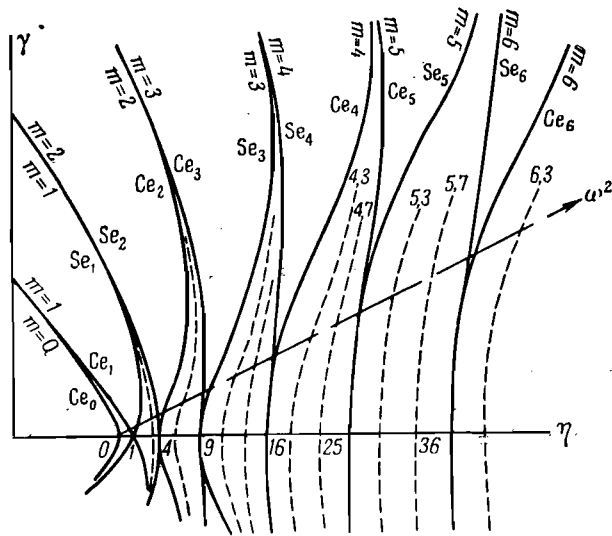
Обе эти функции соответствуют одному и тому же значению m и, следовательно, μ , зависящему от η и γ .

$$\mu = im = f(\eta, \gamma), \quad (49.3)$$

причем m стремится к $\sqrt{\eta}$, когда $\gamma \rightarrow 0$.

При m целых Ce_m и Se_m — периодические функции; в предельном случае $m=0$ решение Ce_0 сводится к 1.

Как ясно видно из фиг. 121, каждому значению μ (или m), лежащему в заштрихованной области, в плоскости (η, γ) соответствует определяемая соотношением (49.3) кривая (Γ_m) ,



Фиг. 121.

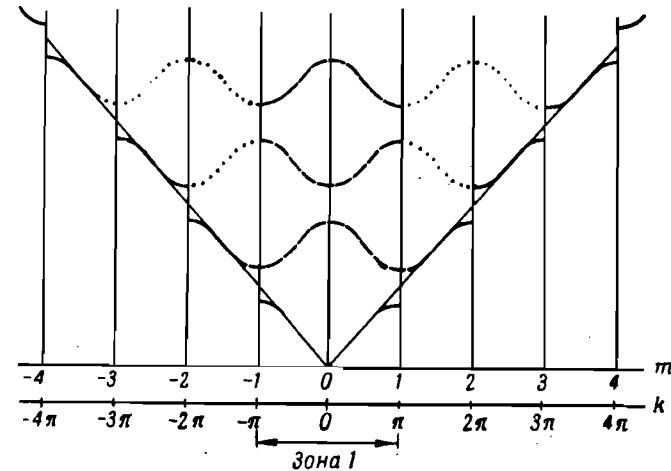
любой точке которой можно сопоставить две функции Ce_m и Se_m . Исключение представляют собой кривые, ограничивающие заштрихованные области, каждой из которых, как видно из фиг. 121, соответствует только одна из этих функций. Граничные кривые (Γ_m) выходят попарно из точек оси абсцисс $\eta = m^2 = 1, 4, 9, 16$, причем одной из них соответствует функция Ce_m , а другой — Se_m . Каждое из этих решений уравнения Матье связано с другим непериодическим решением.

С помощью фиг. 121 можно сделать важные выводы о распространении волн в периодической среде, характеризуемой коэффициентами C_0 и C_1 . Как следует из (48.4),

параметры η и γ пропорциональны ν^2 , а отношение их остается постоянным

$$\frac{\eta}{\gamma} = \frac{C_0}{2C_1}. \quad (49.4)$$

Это соотношение определяет прямую, отмеченную на фиг. 121 индексом ω^2 , которая выходит из начала координат и пересекает кривые (Γ_m) , соответствующие различным m . Перемещаясь вдоль этой прямой, мы последовательно будем



Фиг. 122.

попадать в области, соответствующие полосам непропускания или пропускания.

На фиг. 122 схематически изображена кривая, характеризующая зависимость частоты от m .

Соответствие между употребляемыми здесь обозначениями и обозначениями, использованными в предыдущих главах, вытекает из соотношений (48.6) и (49.3):

$$i\mu = -\frac{k}{\pi} = -m. \quad (49.5)$$

Очевидно, величина $+m\pi$ играет роль введенного ранее параметра k .

Вместо того чтобы рассматривать, как это делается в случае однородной невозмущенной среды, всю область изменения k (или m), в которой определена непрерывная кривая $\nu(k)$, мы в случае возмущенной среды ограничимся лишь малыми значениями $|k|$ и перенесем все ветви разрывной кривой $\nu(k)$ в первую зону ($-\pi \leq k \leq \pi$). Отсюда получаем следующий важный результат: *если возмущение увеличивается, т. е. если C_1 растет, то положение разрывов не меняется, но величина этих разрывов возрастает.*

Общая теория уравнения Матье полностью изложена Уиттекером и Ватсоном¹⁾, которые привели в своей книге ряд важных результатов, связанных с применением бесконечных определителей (см. § 40).

Уиттекер и Ватсон рассмотрели уравнение Хилла, являющееся обобщением уравнения Матье и имеющее следующий вид:

$$\frac{d^2 u}{dx^2} + J(x)u = 0, \quad (49.6)$$

где $J(x)$ — периодическая функция x с периодом π . Такое уравнение, записанное здесь для случая одного измерения, рассматривалось в гл. 7.

Обозначения, используемые в тексте, связаны с обозначениями, принятыми Уиттекером и Ватсоном¹⁾ следующим образом:

$$d \rightarrow \pi, \quad b = \frac{1}{d} \rightarrow \frac{1}{\pi}, \quad 2\pi a \rightarrow i\mu, \quad (49.7)$$

$$\omega^2 C_n \rightarrow \theta_n, \quad \omega^2 F \rightarrow J.$$

Теперь ясно, что уравнение (49.6) совпадает с уравнением (48.1).

Исследование, проведенное в § 40 и 41, привело к рассмотрению детерминанта, вид которого определяется в трехмерном случае уравнением (40.14), а в одномерном — уравнением (40.15).

В принятых обозначениях этот последний детерминант записывается в виде

$$D = |D_{mp}| = \left| \frac{C_{m-p}}{(a - mb)^2} - \frac{1}{\sqrt{2}} \delta_{mp} \right|, \quad (49.8)$$

в обозначениях Уиттекера и Ватсона

$$D_{mp} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\frac{\omega^2 C_{m-p}}{(i\mu - 2m)^2} - \delta_{mp} \right] = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\frac{\theta_{m-p}}{(i\mu - 2m)^2} - \delta_{mp} \right]. \quad (49.9)$$

Уиттекер и Ватсон вводят иной детерминант, смысл которого будет ясен ниже.

Функция $J(x)$ предполагается четной и имеющей период π , так что ее разложением Фурье будет

$$J(x) = \theta_0 + 2 \sum_{m=1}^{\infty} \theta_m \cos 2mx, \quad (49.10)$$

причем ряд коэффициентов θ_m предполагается абсолютно сходящимся.

Полагая $\theta_{-m} = \theta_m$, ищем решение уравнения Хилла в виде

$$u = e^{\mu x} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} b_m e^{i2mx}, \quad (49.11)$$

где неизвестными являются b_m и μ .

Подставляя в уравнение Хилла выражение для $J(x)$ и $u(x)$, получаем систему линейных уравнений относительно неизвестных b_m

$$(\mu + 2mi)^2 b_m + \sum_{p=-\infty}^{+\infty} \theta_p b_{m-p} = 0 \quad (49.12)$$

при $m = \dots -2, -1, 0, 1, 2, \dots$

Разделив каждое из этих уравнений на $\theta_0 - 4m^2$, получим условие совместности в виде

$$\Delta(i\mu) = 0.$$

Здесь $\Delta(i\mu)$ — бесконечный детерминант, элементами которого являются

$$A_{mm} = \frac{(i\mu - 2m)^2 - \theta_0}{4m^2 - \theta_0}, \quad A_{mp} = -\frac{\theta_{m-p}}{4m^2 - \theta_0} \text{ при } m \neq p. \quad (49.13)$$

Однако детерминант $\Delta(i\mu)$ является лишь полусходящимся, поскольку его диагональные элементы не сходятся абсолютно. Поэтому Уиттекер вводит абсолютно сходящийся детерминант $\Delta_1(i\mu) = |B_{mp}|$, разделив уравнения системы (49.12)

¹⁾ Whittaker, Watson, Modern Analysis, Cambridge, 1920, Chap. IX, § 19—41.

соответственно на $(i\mu - 2m)^2 - \theta_0$; элементы этого детерминанта имеют вид

$$B_{mp} = -\frac{\theta_{m-p}}{(2m - i\mu)^2 - \theta_0} \quad (m \neq p); \quad B_{mm} = 1. \quad (49.14)$$

Сходимость этого детерминанта обеспечена, очевидно, абсолютной сходимостью ряда коэффициентов θ_m , за исключением тех значений μ , при которых знаменатель элемента B_{mp} обращается в нуль.

Отметим, что элементы $\Delta_1(i\mu)$ допускают общее представление

$$B_{mp} = \frac{-\theta_{m-p} + \delta_{mp}(2m - i\mu)^2}{-\theta_0 + (2m - i\mu)^2} = v^2 D_{mp} \omega^2 C_0 - (2m - i\mu)^2.$$

Из второй формы записи видна отмеченная выше связь с элементами детерминанта (49.8).

Между детерминантами $\Delta(i\mu)$ и $\Delta_1(i\mu)$ существует соотношение

$$\Delta(i\mu) = -\Delta_1(i\mu) \frac{\sin \frac{\pi}{2}(i\mu + \sqrt{\theta_0}) \sin \frac{\pi}{2}(i\mu - \sqrt{\theta_0})}{\sin^2\left(\frac{\pi}{2}\sqrt{\theta_0}\right)}. \quad (49.15)$$

Кроме того, можно показать, что

$$\Delta_1(i\mu) = 1 + k \left[\operatorname{ctg} \frac{\pi}{2}(i\mu + \sqrt{\theta_0}) - \operatorname{ctg} \frac{\pi}{2}(i\mu - \sqrt{\theta_0}) \right]$$

и, следовательно,

$$\Delta(i\mu) = -\frac{\sin \frac{\pi}{2}(i\mu - \sqrt{\theta_0}) \sin \frac{\pi}{2}(i\mu + \sqrt{\theta_0})}{\sin^2\left(\frac{\pi}{2}\sqrt{\theta_0}\right)} + 2k \operatorname{ctg} \left(\frac{\pi}{2}\sqrt{\theta_0}\right). \quad (49.16)$$

Постоянная k определяется из формулы

$$\Delta_1(0) = \Delta(0) = 1 + 2k \operatorname{ctg} \left(\frac{\pi}{2}\sqrt{\theta_0}\right).$$

Окончательно получаем

$$\Delta(i\mu) = \Delta(0) - \frac{\sin^2\left(\frac{\pi}{2}i\mu\right)}{\sin^2\left(\frac{\pi}{2}\sqrt{\theta_0}\right)}. \quad (49.17)$$

Итак, детерминант уравнения Хилла обращается в нуль, если удовлетворяется уравнение

$$\sin^2\left(\frac{\pi}{2}i\mu\right) = \Delta(0) \sin^2\left(\frac{\pi}{2}\sqrt{\theta_0}\right). \quad (49.18)$$

Получив отсюда значение μ , можно найти коэффициенты b_m , определяющие $u(x)$.

Этот результат интересен, в частности, тем, что он получен для уравнения Хилла, являющегося более общим, чем уравнение Матье. В наших обозначениях [см. (49.7)] уравнение Уиттекера (49.18) принимает вид

$$\sin^2(\pi^2 a) = \Delta(0) \sin^2 \frac{\pi \omega}{2} \sqrt{C_0} = \Delta(0) \sin^2\left(\frac{\pi^2 v}{V_0}\right). \quad (49.19)$$

Полученное общее соотношение связывает частоту v и волновое число a в случае одномерной структуры, периодической по x с периодом π . Легко видеть, что v является периодической функцией a с периодом $1/d = 1/\pi$, причем при $\Delta(0) > 1$ функция $v(a)$ разрывна.

Совпадение этих выводов с результатами гл. 3 очевидно.

Выше мы предполагали, что $J(x)$ является четной функцией. Однако изложенный метод применим и при более общих предположениях, только и при этом необходимым условием является абсолютная сходимость ряда коэффициентов θ_m .

§ 50. Практические методы исследования уравнения Хилла

1. Случай ступенчатой кривой. Как уже указывалось выше, уравнение Хилла получается из уравнения Матье при замене в нем члена с косинусом произвольной периодической функцией $f(x)$; иначе говоря, уравнение Хилла можно записать в виде

$$\frac{d^2 u}{dx^2} + [\eta + \gamma f(x)] u = 0. \quad (50.1)$$

Ряд общих результатов был получен в этой области Стрэттом.

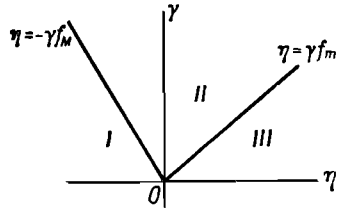
Предположим, что интеграл от функции $f(x)$, взятый по ее периоду, равен нулю, т. е.

$$\overline{f(x)} = 0,$$

и обозначим f_M и f_m абсолютные значения $f(x)$ соответственно в максимуме и минимуме. Разобьем плоскость (фиг. 123) (η, γ) на три области прямыми

$$\eta = -\gamma f_M, \quad \eta = \gamma f_m. \quad (50.2)$$

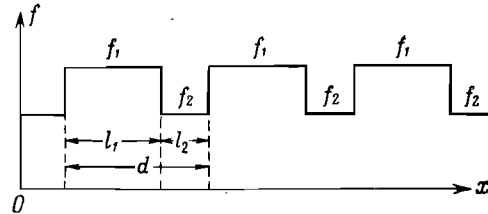
В области I значение μ комплексно; в области II μ в общем комплексно, однако эта область пересекается узкими полосами, внутри которых μ является чисто мнимым; в области же III, где μ , вообще говоря, чисто мнимо, существуют узкие полосы комплексного μ .



Фиг. 123.

Эти же результаты можно получить на простом примере, для которого вычисления могут быть доведены до конца.

Рассмотрим функцию $f(x)$, принимающую попеременно лишь два значения: f_1 на интервале l_1 и f_2 на интервале l_2 .



Фиг. 124.

Такая функция приводит к уравнению типа (50.1), в котором $f(x)$ выражается кривой, изображенной на фиг. 124,

$$\begin{aligned} \eta + \gamma f_1 &= \eta_1 = -\chi_1^2 \quad \text{при} \quad -l_1 < x < 0, \\ \eta + \gamma f_2 &= \eta_2 = -\chi_2^2 \quad \text{при} \quad 0 < x < l_2. \end{aligned} \quad (50.3)$$

На интервале $(-l_1, 0)$ уравнение имеет общее решение вида

$$u = Ae^{\chi_1 x} + Be^{-\chi_1 x}, \quad (50.4)$$

а на интервале $(0, l_2)$ —

$$u = Ce^{\chi_2 x} + De^{-\chi_2 x}. \quad (50.5)$$

С другой стороны, общее решение можно представить в форме, которую предложил Флоке [см. (48.5)]. Выберем одну из экспонент, входящих в это решение, например

$$u = A(x) e^{\mu x}, \quad (50.6)$$

где $A(x)$ — периодическая функция с периодом $l_1 + l_2 = d$. Очевидно, что

$$u(x) = e^{\mu d} u(x - d). \quad (50.7)$$

Отсюда следует, что решение на интервале $l_2 < x < l_1 + l_2 = d$, длина которого равна l_1 , может быть записано в виде

$$u(x) = Ae^{\mu d} e^{\chi_1(x-d)} + Be^{\mu d} e^{-\chi_1(x-d)}. \quad (50.8)$$

Теперь задача сводится к определению коэффициентов A , B , C и D , которые можно найти из условия непрерывности функции $u(x)$ и ее первой производной du/dx на границах интервала $(0, l_2)$.

Учитывая эти условия, получаем соотношения при $x = 0$

$$A + B = C + D,$$

$$A\chi_1 - B\chi_1 = C\chi_2 - D\chi_2, \quad (50.9)$$

при $x = l_2$

$$Ae^{\mu d - \chi_1 l_1} + Be^{\mu d + \chi_1 l_1} = Ce^{\chi_2 l_2} + De^{\chi_2 l_2},$$

$$A\chi_1 e^{\mu d - \chi_1 l_1} - B\chi_1 e^{\mu d + \chi_1 l_1} = C\chi_2 e^{\chi_2 l_2} - D\chi_2 e^{-\chi_2 l_2}.$$

Эти уравнения представляют собой линейную однородную систему относительно коэффициентов A , B , C и D , условием совместности которой является:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ \chi_1 & -\chi_1 & \chi_2 & -\chi_2 \\ e^{\mu d - \chi_1 l_1} & e^{\mu d + \chi_1 l_1} & e^{\chi_2 l_2} & e^{-\chi_2 l_2} \\ \chi_1 e^{\mu d - \chi_1 l_1} & -\chi_1 e^{\mu d + \chi_1 l_1} & \chi_2 e^{\chi_2 l_2} & -\chi_2 e^{-\chi_2 l_2} \end{vmatrix} = 0. \quad (50.10)$$

Полагая $Y = e^{\mu d}$, после простых выкладок приходим к уравнению

$$Y^2 - 2Y \left[\text{ch } \chi_1 l_1 \text{ ch } \chi_2 l_2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\chi_1}{\chi_2} + \frac{\chi_2}{\chi_1} \right) \text{sh } \chi_1 l_1 \text{ sh } \chi_2 l_2 \right] + 1 = 0, \quad (50.11)$$

которое имеет два решения

$$Y_1 = e^{\mu d}, \quad Y_2 = e^{-\mu d},$$

произведение которых

$$Y_1 Y_2 = 1,$$

а сумма

$$\begin{aligned} Y_1 + Y_2 &= e^{\mu d} + e^{-\mu d} = 2 \operatorname{ch} \mu d = \\ &= 2 \left[\operatorname{ch} \chi_1 l_1 \operatorname{ch} \chi_2 l_2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\chi_1}{\chi_2} + \frac{\chi_2}{\chi_1} \right) \operatorname{sh} \chi_1 l_1 \operatorname{sh} \chi_2 l_2 \right]. \end{aligned}$$

Окончательно получаем

$$\operatorname{ch} \mu d = \operatorname{ch} \chi_1 l_1 \operatorname{ch} \chi_2 l_2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\chi_1}{\chi_2} + \frac{\chi_2}{\chi_1} \right) \operatorname{sh} \chi_1 l_1 \operatorname{sh} \chi_2 l_2. \quad (50.12)$$

Если предположить, что функция $f(x)$ везде постоянна, то $\chi_1 = \chi_2$ и решением будет

$$\mu d = \chi_1 l_1 + \chi_2 l_2.$$

Уравнение (50.12) можно рассматривать как частный случай более общего выражения. Предположив, что χ_1 и χ_2 могут быть действительными и чисто мнимыми, некоторые из гиперболических функций в (50.12) можно заменить на обычные тригонометрические.

Рассмотрим, в частности, задачу Ван-дер-Поля и Стрэтта, которой соответствует $l_1 = l_2 = \pi/2$.

Как и в уравнении Матъе, период d равен π , а

$$\begin{aligned} \eta_1 &= \eta + \gamma, \\ \eta_2 &= \eta - \gamma. \end{aligned} \quad (50.13)$$

В зависимости от соотношения между η и γ могут иметь место два случая:

1) $\eta > \gamma > 0$.

При этом η_1 и η_2 положительны и

$$\chi_1 l_1 = \frac{1}{2} \pi \chi_1 = \frac{\pi}{2} \sqrt{-\eta_1} = i x_1,$$

$$\chi_2 l_2 = \frac{1}{2} \pi \chi_2 = \frac{\pi}{2} \sqrt{-\eta_2} = i x_2,$$

$$\mu = i \mu' = i 2 \pi a,$$

Вместо уравнения (50.12) получаем

$$\cos \pi \mu' = \cos x_1 \cos x_2 - \frac{1}{2} \left(\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1} \right) \sin x_1 \sin x_2. \quad (50.14)$$

2) $\eta < \gamma > 0$. При этом $\eta_1 > 0$, $\eta_2 < 0$ и

$$\frac{\pi}{2} \chi_1 = \frac{\pi}{2} \sqrt{-\eta_1} = i x_1,$$

$$\frac{\pi}{2} \chi_2 = \frac{\pi}{2} \sqrt{-\eta_2} = x_3.$$

Уравнение (50.12) принимает вид

$$\cos \pi \mu' = \cos x_1 \operatorname{ch} x_3 - \frac{1}{2} \left(\frac{x_1}{x_3} - \frac{x_3}{x_1} \right) \sin x_1 \operatorname{sh} x_3. \quad (50.15)$$

Представляет интерес исследование поведения выражений (50.12) или (50.14) и (50.15) на плоскости (η, γ) и, в частности, определение тех областей, где μ имеет действительное или чисто мнимое значение.

Рассмотрим три случая:

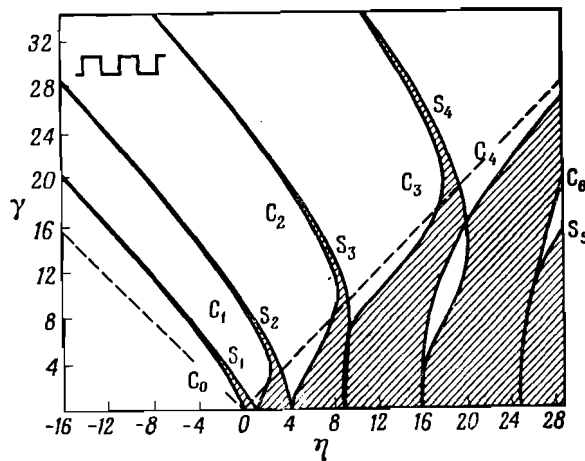
- а) $\operatorname{ch} \mu d \geq 1$ $\mu = \mu_0$, где μ_0 действительно,
 б) $-1 \leq \operatorname{ch} \mu d \leq +1$ $\mu = i \mu'$, где μ' действительно, (50.16)
 в) $-1 \geq \operatorname{ch} \mu d$ $\mu = \mu_0 + i \pi$.

В случае „б“ волны распространяются без затухания, иначе говоря, этот случай соответствует полосам пропускания. На фиг. 125 области, в которых выполняется это условие, заштрихованы.

При условиях „а“ и „б“ в силу фактора $e^{\pm \mu x}$, входящего в (50.6), получаем экспоненциально затухающие волны, распространяющиеся в первом случае направо, а во втором — налево и отличающиеся только фазой на разных частях интервала (l_1, l_2) . Соответствующие им области на фиг. 125 не заштрихованы.

Фиг. 125 и построенная для уравнения Матъе фиг. 120 в общем совпадают, с тем лишь исключением, что на фиг. 125 кривые, образующие границу областей, могут пересекаться. Эти границы соответствуют значениям $\mu = 0$ и $\mu = i \pi$. Мы обозначим их через C_0, C_1, C_2, \dots и S_0, S_1, S_2, \dots в согласии с обозначением функций Матъе Se_m и $Se_{m\pi}$.

В исследовании Ван-дер-Поля и Стрэтта охвачена вся область изменения параметров η и γ . Рассматривая такую же задачу, Крониг и Пэнни ограничились случаем, когда $\eta_1 < 0$



Фиг. 125.

и велико по абсолютной величине, а l_1 очень мало; η_2 , наоборот, предполагалось положительным, а l_2 близким к d .

В этом случае

$$\chi_1 \approx \sqrt{\frac{2c}{l_1 l_2}}, \quad \chi_2 = i\alpha,$$

где c и α — заданные постоянные. Уравнение (50.12) переходит тогда в уравнение

$$\operatorname{ch} \mu d = \operatorname{ch} \chi_1 l_1 \cos \alpha l_2 + \frac{\chi_1^2 - \alpha^2}{2\alpha \chi_1} \operatorname{sh} \chi_1 l_1 \sin \alpha l_2. \quad (50.17)$$

Однако, поскольку

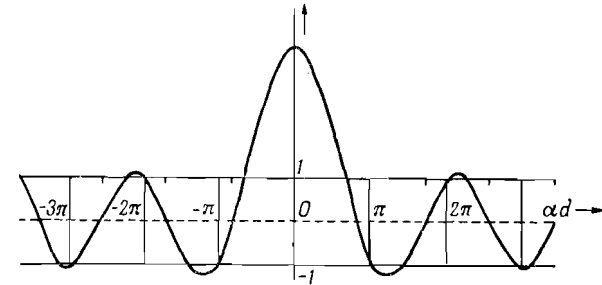
$$\begin{aligned} \operatorname{ch} \chi_1 l_1 &\approx 1, \\ \frac{\chi_1^2 - \alpha^2}{2\alpha \chi_1} \operatorname{sh} \chi_1 l_1 &\approx \frac{l_1}{2\alpha} (\chi_1^2 - \alpha^2) \approx \frac{c}{\alpha l_2}, \end{aligned}$$

это уравнение принимает вид

$$\operatorname{ch} \mu d = \cos \alpha d + \frac{c}{\alpha d} \sin \alpha d. \quad (50.18)$$

На фиг. 126 представлена зависимость правой части этого уравнения от αd . Легко видеть, что прямые $\operatorname{ch} \mu d = \pm 1$ разбивают фиг. 126 на области, соответствующие условиям „а“, „б“ и „в“ [см. (50.16)].

В § 49 по методу Уиттекера было получено общее соотношение, связывающее частоту ν и волновое число a . При этом делалось предположение, что ряд из коэффициентов $\theta_n = \omega^2 C_n$ разложения Фурье функции $J(x)$ сходится абсолютно.



Фиг. 126.

Это соотношение имеет вид (49.18)

$$\sin^2 \pi a d = \Delta(0) \sin^2 \frac{\pi \nu d}{V_0},$$

где $\Delta(0)$ не зависит от a и ν , а

$$\frac{1}{V_0^2} = \left(\frac{1}{V^2} \right).$$

Рассматриваемая функция Ван-дер-Поля и Стрэтта не удовлетворяет условиям Уиттекера; в частности, здесь не обеспечивается абсолютная сходимость ряда из ее коэффициентов Фурье. Соотношение (49.16) следует поэтому заменить другим.

Рассмотрим уравнение (50.14)

$$\cos 2\pi a d = \cos x_1 \cos x_2 - \frac{1}{2} \left(\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1} \right) \sin x_1 \sin x_2.$$

Используя соотношения

$$x_1 = -i \frac{\pi}{2} \sqrt{-(\eta + \gamma)}, \quad x_2 = -i \frac{\pi}{2} \sqrt{\gamma - \eta}$$

и учитывая выражение (48.4) для η и γ , можно записать

$$x_1 = \frac{\omega d}{V_1} = \frac{\pi \nu d}{V_1}, \quad x_2 = \frac{\omega d}{V_2} = \frac{\pi \nu d}{V_2}, \quad (d = \pi)$$

так что уравнение (50.14) принимает вид

$$\cos 2\pi ad = \cos(x_1 + x_2) + \left(1 - \frac{x_1^2 + x_2^2}{2x_1x_2}\right) \sin x_1 \sin x_2$$

или

$$1 - \frac{x_1^2 + x_2^2}{2x_1x_2} = -\frac{(x_1 - x_2)^2}{2x_1x_2} = \frac{(V_2 - V_1)^2}{2V_1V_2}. \quad (50.19)$$

Заменяя $\cos 2\pi ad$ через $1 - 2 \sin^2 \pi ad$, получаем соотношение

$$\sin^2 \pi ad = \sin^2 \left[\left(\frac{1}{V_1} + \frac{1}{V_2} \right) \frac{\pi \nu d}{2} \right] + \frac{(V_2 - V_1)^2}{4V_1V_2} \sin \frac{\pi \nu d}{V_1} \sin \frac{\pi \nu d}{V_2}, \quad (50.20)$$

которое отличается от общего соотношения (49.16). Для очень малых возмущений можно записать

$$\frac{1}{V_1} = \frac{1}{V_0} (1 + \varepsilon), \quad -\frac{1}{V_2} = \frac{1}{V_0} (1 - \varepsilon), \\ \frac{(V_2 - V_1)^2}{4V_1V_2} = \varepsilon^2 + \dots,$$

что приводит к выражению того же вида, что и соотношение Уиттекера:

$$\sin^2 \pi ad = \sin^2 \left(\frac{\pi \nu d}{V_0} \right) + (\varepsilon^2 + \dots) \sin^2 \left(\frac{\pi \nu d}{V_0} \right) = \\ = (1 + \varepsilon^2 + \dots) \sin^2 \left(\frac{\pi \nu d}{V_0} \right).$$

На этом примере видно, что при желании использовать результаты этого автора следует соблюдать некоторую осторожность.

2. Обобщение. Метод, только что примененный для решения уравнения Хилла со ступенчатой функцией, был обобщен Бриллюэном¹⁾. Рассмотрим уравнение

$$y'' + F(x)y = 0, \quad (50.21)$$

¹⁾ L. Brillouin, Quart. of Appl. Math., 6, № 2, 167 (1948); 7, № 4, 363 (1950).

в котором $F(x)$ — заданная функция. Если $u(x)$ и $v(x)$ — два линейно независимых решения уравнения (50.21), то его общий интеграл можно представить в виде

$$y(x) = Au(x) + Bv(x), \quad (50.22)$$

где A и B — постоянные.

Очевидно, что

$$uv'' = vu'' = -Fuv,$$

и, следовательно,

$$uv' - u'v = \text{const.}$$

Примем такую нормировку решений u и v , чтобы

$$uv' - u'v = 1.$$

Рассмотрим теперь уравнение Хилла

$$y'' + J(x)y = 0, \quad (50.23)$$

в котором функция $J(x)$ с периодом π определяется через функцию $F(x)$

$$J(x) = \begin{cases} F(x) & -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}, \\ F(x - \pi) & \frac{\pi}{2} < x < 3\frac{\pi}{2}, \\ \dots & \dots \\ F(x - n\pi) & n\pi - \frac{\pi}{2} < x < n\pi + \frac{\pi}{2} \quad (\text{при } n \text{ целом}). \end{cases} \quad (50.24)$$

Согласно теореме Флоке, существуют два независимых решения $y_1(x)$ и $y_2(x)$ уравнения (50.23), обладающие следующими свойствами:

$$y_1(x + \pi) = e^{-\mu\pi} y_1(x) = \xi y_1(x), \\ y_2(x + \pi) = e^{\mu\pi} y_2(x) = \xi^{-1} y_2(x), \quad (50.25)$$

где

$$\xi = e^{-\mu\pi}.$$

Рассмотрим сейчас используемый на практике метод вычисления множителя ξ (или μ) с помощью $y_1(x)$. В интервале $(-\pi/2 < x < +\pi/2)$ функцию $y_1(x)$ можно записать в форме (50.22) с постоянными A и B

$$y_1(x) = Au + Bv.$$

Согласно (50.25), в интервале $(\pi/2 < x < 3\pi/2)$ соответствующими коэффициентами являются величины $A\xi$ и $B\xi$. Учитывая непрерывность $y_1(x)$ и $y_1'(x)$ при $x = \pi/2$, получаем

$$\begin{aligned} Au_1 + Bv_1 &= \xi Au_2 + \xi Bv_2, \\ Au_1' + Bv_1' &= \xi Au_2' + \xi Bv_2', \end{aligned} \quad (50.26)$$

где

$$u_1 = u\left(\frac{\pi}{2}\right), \quad u_2 = u\left(-\frac{\pi}{2}\right), \quad v_1 = v\left(\frac{\pi}{2}\right), \quad v_2 = v\left(-\frac{\pi}{2}\right).$$

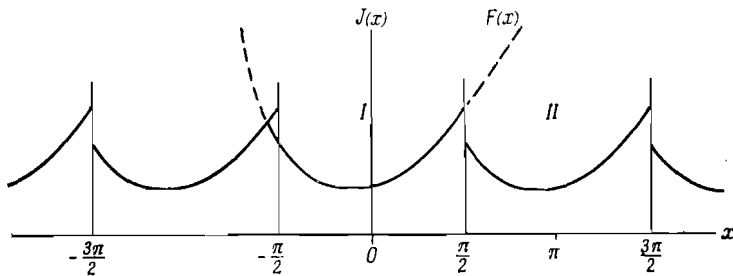
Эти уравнения образуют линейную однородную систему относительно A и B , условием разрешимости которой является

$$\begin{vmatrix} u_1 - \xi u_2 & v_1 - \xi v_2 \\ u_1' - \xi u_2' & v_1' - \xi v_2' \end{vmatrix} = 0, \quad (50.27)$$

или

$$\xi^2 + \xi(u_1'v_2 + u_2'v_1 - u_1v_2' - u_2v_1') + 1 = 0,$$

где учтена нормировка функций u и v в точках $x = \pm\pi/2$.



Фиг. 127. Периодическая функция $J(x)$.

Уравнение (50.27) позволяет вычислить коэффициенты Флоке ξ и ξ^{-1} , произведение которых

$$\xi\xi^{-1} = 1,$$

а сумма

$$\xi + \xi^{-1} = 2 \operatorname{ch} \mu\pi = -u_1'v_2 - u_2'v_1 + u_1v_2' + u_2v_1'. \quad (50.28)$$

Отсюда получаем с учетом нормировки

$$\begin{aligned} 4 \operatorname{sh}^2\left(\frac{\mu\pi}{2}\right) &= 2 \operatorname{ch} \mu\pi - 2 = \\ &= -(u_1 - u_2)(v_1' - v_2') + (u_1' - u_2')(v_1 - v_2). \end{aligned} \quad (50.29)$$

Из этого уравнения определяется параметр μ , а соотношения (50.26) дают возможность вычислить A и B ; зная же функцию $y_1(x)$, можно определить и интеграл уравнения Хилла (50.23).

Важными особенностями отличается случай, когда функции

$$F(x), J(x) \text{ — четные.} \quad (50.30)$$

Тогда в качестве $u(x)$ выбираем четную функцию, а в качестве $v(x)$ — нечетную

$$\begin{aligned} u(x) &= u(-x), & u_2 &= u_1, & u_2' &= -u_1', \\ v(x) &= -v(-x), & v_2 &= -v_1, & v_2' &= v_1'. \end{aligned} \quad (50.31)$$

При этом условии уравнение (50.28) превращается в

$$\operatorname{ch} \mu\pi = u_1'v_1' + u_1v_1, \quad (50.32)$$

откуда

$$\operatorname{sh}^2\frac{\mu\pi}{2} = u_1'v_1. \quad (50.33)$$

Применим теперь эти общие результаты к некоторым частным примерам. Первый пример:

$$F(x) = a - b^2x^2. \quad (50.34)$$

Решение уравнения (50.21) можно искать в виде ряда

$$\begin{aligned} u(x) &= 1 + u_2x^2 + \dots + u_{2n}x^{2n} + \dots, \\ v(x) &= x + v_3x^3 + \dots + v_{2n+1}x^{2n+1} + \dots \end{aligned} \quad (50.35)$$

Подставляя эти выражения в уравнение (50.21), получаем рекуррентные соотношения

$$2u_2 + a = 0, \quad (2n+2)(2n+1)u_{2n+2} + au_{2n} - b^2u_{2n-2} = 0, \quad (50.36)$$

$$6v_3 + a = 0, \quad (2n+3)(2n+2)v_{2n+3} + av_{2n+1} - b^2v_{2n-1} = 0,$$

причем функции $u(x)$ и $v(x)$ должны быть нормированы. Рассмотрим два частных случая:

$a = -b$. При этом предположении получаем

$$\begin{aligned} u(x) &= e^{bx^{2/2}}, \\ v(x) &= e^{bx^{2/2}} I(x), \end{aligned} \quad (50.37)$$

где $I(x) = \int_0^x e^{-by^2} dy$;

$a = -3b$. Простые вычисления дают

$$\begin{aligned} u(x) &= e^{-bx^{2/2}} + 2bx e^{bx^{2/2}} I(x), \\ v(x) &= x e^{bx^{2/2}}. \end{aligned} \quad (50.38)$$

В обоих этих случаях функция $F(x)$ является непрерывной на границах $\pm \pi/2$ интервала $(-\pi/2, +\pi/2)$, также непрерывна и функция $J(x)$, хотя ее производная терпит разрывы в точках $x = \pm \pi/2$.

Возвращаясь к уравнениям (50.32) и (50.33), легко видеть, что задача Хилла решена. Действительно, в первом случае ($a = -b$)

$$\operatorname{sh}^2 \frac{\mu\pi}{2} = u_1' v_1 = b \frac{\pi}{2} e^{b\pi^2/4} I\left(\frac{\pi}{2}\right), \quad (50.39)$$

а во втором ($a = -3b$)

$$\operatorname{sh}^2 \frac{\mu\pi}{2} = \frac{b\pi^2}{4} + b\pi e^{b\pi^2/4} I\left(\frac{\pi}{2}\right) + b^2 \frac{\pi^3}{4} e^{b\pi^2/4} I\left(\frac{\pi}{2}\right). \quad (50.40)$$

Методом Уиттекера эти результаты не могли быть получены.

В качестве второго примера рассмотрим функции Бесселя, которые являются решением уравнения

$$z \frac{d}{dz} \left(z \frac{dy}{dz} \right) + (z^2 - n^2) y = 0. \quad (50.41)$$

При n нецелых

$$y(z) = AJ_n(z) + BJ_{-n}(z), \quad (50.42)$$

где $J_n(z)$ — функция Бесселя первого рода порядка n . Проведя в уравнении (50.41) замену переменных

$$x = \ln z, \quad z = e^x, \quad (50.43)$$

находим

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + (e^{2x} - n^2) y = 0. \quad (50.44)$$

Решение этого уравнения имеет вид

$$y(x) = AJ_n(e^x) + BJ_{-n}(e^x). \quad (50.45)$$

Положив в (50.44) при n нецелых

$$F(x) = e^{2x} - n^2,$$

получим уравнение Хилла (50.23), которое можно решить с помощью выражений (50.18) или (50.29).

3. Исследование уравнения Хилла методом Бриллюэна — Вентцеля — Крамерса. Покажем теперь, что приближенное решение уравнения Хилла (50.23) можно получить методом Бриллюэна — Вентцеля — Крамерса, если только функция $F(x)$ мало отличается от некоторого среднего значения.

Перепишем уравнение (50.21) в форме

$$y'' + G^2(x) y = 0, \quad (50.46)$$

где

$$F(x) = G^2(x),$$

и рассмотрим функцию

$$y = G^{-1/2} e^{iS} \quad \text{при} \quad S = \int_0^x G(x) dx. \quad (50.47)$$

Легко видеть, что она удовлетворяет уравнению

$$\frac{y''}{y} = \frac{3}{4} \left(\frac{G'}{G} \right)^2 - \frac{1}{2} \frac{G''}{G} - G^2, \quad (50.48)$$

откуда следует, что функция $y(x)$, определенная в (50.47), представляет собой приближенное решение уравнения (50.46), если двумя первыми слагаемыми правой части уравнения (50.48) можно пренебречь, т. е. если

$$\frac{G'}{G^2} \sim \varepsilon, \quad \frac{G''}{G^3} \sim \varepsilon^2, \quad \varepsilon \ll 1. \quad (50.49)$$

Функция $y(x)$ будет являться точным решением (50.46) в том случае, если $G(x)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{3}{4} \left(\frac{G'}{G} \right)^2 - \frac{1}{2} \frac{G''}{G} = 0, \quad (50.50)$$

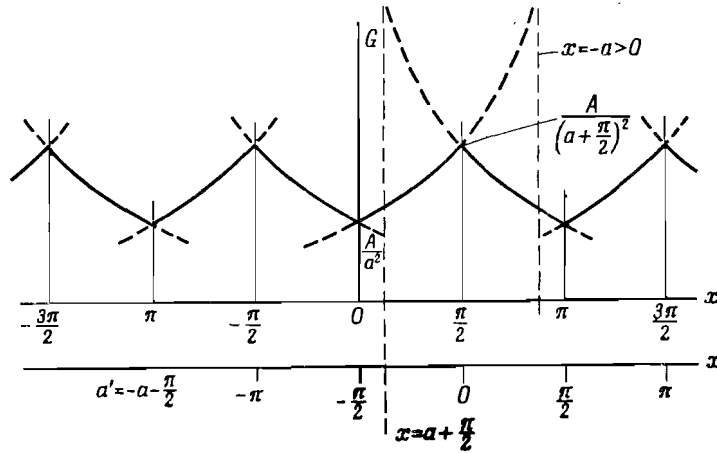
т. е. если

$$G(x) = \frac{A}{(x+a)^2}, \quad (50.51)$$

где a и A — постоянные.

Этому выражению для $G(x)$ соответствуют, как легко видеть, два нормированных решения:

$$u = (2iG)^{-1/2} e^{-iS}, \quad v = (2iG)^{-1/2} e^{+iS}. \quad (50.52)$$



Фиг. 128.

Рассмотрим частный случай, когда функция $G(x)$ задана в виде (фиг. 128)

$$G(x) = \frac{A}{[a + |x|^2]} \begin{cases} a < 0 \\ |a| > \frac{\pi}{2}. \end{cases} \quad (50.53)$$

Функция $G(x)$ — четная; ее производная терпит разрыв первого порядка в начале координат

$$G'(+0) = -G'(-0).$$

С другой стороны, при $x > 0$

$$-S(-x) = S(x) = \int_0^x G(y) dy = \frac{Ax}{a(a+x)}.$$

Для упрощения выберем в качестве $v(x)$ нечетную функцию

$$v = G^{-1/2} \sin S = \frac{a + |x|}{A^{1/2}} \sin S, \quad (50.54)$$

$$v' = -\frac{1}{2} G^{-3/2} G' \sin S + G^{-1/2} \cos S.$$

Отметим, что функции $v(x)$ и $v'(x)$ непрерывны в начале координат.

В качестве четной функции $u(x)$ возьмем

$$u = G^{-1/2} (\cos S \pm k \sin S),$$

$$u' = -\frac{1}{2} G^{-3/2} G' (\cos S \pm k \sin S) + G^{-1/2} (-\sin S \pm k \cos S), \quad (50.55)$$

причем знак „плюс“ берется, когда x принадлежит интервалу $(0, \pi/2)$, знак „минус“ — когда x находится в интервале $(-\pi/2, 0)$. Величина k в этом выражении просто произвольная постоянная.

Функция $u(x)$ непрерывна в начале координат, в то время как функция $u'(x)$ при произвольном k терпит разрыв: $u'(+0) = -u'(-0)$. Однако функцию u' можно сделать непрерывной, выбрав k таким образом, чтобы $u'(0) = 0$; для этого необходимо, чтобы

$$k = \frac{G'(+0)}{2G^2(0)} = -\frac{a}{A}.$$

При этих условиях имеем

$$u = \frac{a + |x|}{A^{1/2}} \left[\cos S \mp \frac{a}{A} \sin S \right], \quad (50.56)$$

$$u' = \frac{1}{A^{1/2}} \left[\frac{|x|}{a + |x|} \cos S - \frac{A^2 + a(a + |x|)}{A(a + |x|)} \sin S \right].$$

Теперь легко убедиться в том, что выбранные таким образом функции $u(x)$ и $v(x)$ нормированы.

Рассматривая уравнение Хилла, которое соответствует функции $G(x)$, определенной в (50.53), можно с помощью формул (50.54) и (50.56) вычислить введенный Флоке параметр μ .

Соотношение (50.33) дает

$$\text{sh}^2\left(\frac{\mu\pi}{2}\right) = u_1' v_1 = \frac{|x|}{A} \sin S_1 \cos S_1 - \sin^2 S_1 \frac{A^2 + a(a + |x|)}{A^2};$$

отсюда при

$$x = \frac{\pi}{2}, \quad S_1 = \frac{A \frac{\pi}{2}}{a \left(a + \frac{\pi}{2} \right)}$$

получаем

$$\operatorname{sh}^2 \left(\frac{\mu\pi}{2} \right) = \frac{\pi}{2A} \sin S_1 \cos S_1 - \frac{A^2 + a^2 + \frac{a\pi}{2}}{A^2} \sin^2 S_1. \quad (50.57)$$

Таким образом, параметр μ определен, т. е. уравнение Хилла решено.

По поводу предыдущей формулы следует заметить, что она не меняется при замене a на

$$a' = -a - \frac{\pi}{2}.$$

Она остается также справедливой во всех случаях, когда вид рассматриваемой функции $G(x)$ не меняется при замене угловых координат максимумов кривой на координаты ее минимумов (см. фиг. 128).

Выше предполагалось, что функция $F(x)$ точно удовлетворяет равенству $F(x) = G^2(x)$, где

$$G(x) = \frac{A}{(a+x)^2}.$$

Рассмотрим теперь случай, когда функция $F(x)$ несколько отличается от этого значения и может быть представлена в виде

$$F(x) = G^2(x) - \epsilon H(x), \quad (50.58)$$

где ϵ — малая величина.

Будем искать решение уравнения (50.21) методом последовательных приближений, полагая

$$y = y_0 + \epsilon y_1 + \epsilon^2 y_2 + \dots$$

После подстановки этого разложения в (50.21) получим, приравнявая нулю коэффициенты при одинаковых степенях ϵ ,

$$y_0'' + G^2(x) y_0 = 0, \quad (50.59a)$$

$$y_1'' + G^2(x) y_1 = H(x) y_0(x), \quad (50.59б)$$

$$y_2'' + G^2(x) y_2 = H(x) y_1(x), \quad (50.59в)$$

.....

В качестве решений уравнения (50.59a), которое совпадает с (50.46), можно взять функции u и v , определенные выше соотношениями (50.52). После этого легко найти решение $y_1(x)$ уравнений (50.59б) и (50.59в).

Уравнение (50.59б) дает

$$y_1 = u_0 \int_0^x Y_0 v_0' dx - v_0 \int_0^x Y_0 u_0' dx, \quad (50.60)$$

причем

$$Y_0 = \int_0^x H(x) y_0(x) dx.$$

Предположим теперь, что мы выбрали

$$G(x) = \frac{A}{[a+|x|]^2}$$

и взяли решения u_0 и v_0 из формул (50.54) и (50.56). Поскольку

$$u_1' + G^2 u_1 = H u_0,$$

$$v_1' + G^2 v_1 = H v_0,$$

то, полагая

$$U_0 = \int_0^x H u_0 dx, \quad V_0 = \int_0^x H v_0 dx, \quad (50.61)$$

получим

$$u_1 = u_0 \int_0^x U_0 v_0' dx - v_0 \int_0^x U_0 u_0' dx \quad (\text{четная функция}),$$

$$v_1 = u_0 \int_0^x V_0 v_0' dx - v_0 \int_0^x V_0 u_0' dx \quad (\text{нечетная функция}). \quad (50.62)$$

Нормированные решения первого приближения записываются в виде

$$u = u_0 + \epsilon u_1 \quad (\text{четная функция}),$$

$$v = v_0 + \epsilon v_1 \quad (\text{нечетная функция}).$$

Очевидно, что, повторяя последовательно эту операцию, можно получить решение уравнения (50.51) нужного

приближения. Полученный результат можно использовать для решения соответствующего уравнения Хилла (50.23).

Следует отметить, что изложенный выше метод применим также и для всех других известных решений уравнения (50.21).

4. Уравнение Хилла, содержащее $\delta(x)$ -функцию Дирака. В этом случае можно положить

$$F(x) = -B\delta(x) \quad \text{при} \quad B = \text{const}, \quad (50.63)$$

где

$$\delta(x) = \begin{cases} 0 & \text{для } x \neq 0 \\ \infty & \text{для } x = 0, \end{cases} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x) dx = 1. \quad (50.64)$$

Из уравнения (50.21) сразу получаем

$$y'' = \begin{cases} 0 & \text{для } x \neq 0 \\ B\delta(x)y(x) & \text{для } x = 0 \end{cases}$$

или после интегрирования ($a = \text{const}$)

$$y = \begin{cases} a & \text{для } x < 0 \\ a + By(0) & \text{для } x > 0. \end{cases} \quad (50.65)$$

В качестве u и v можно выбрать два следующих нормированных решения:

$$u = 1 + \frac{1}{2}B|x| \quad (\text{четная функция}), \quad (50.66)$$

$$v = x \quad (\text{нечетная функция}).$$

Теперь по формуле (50.33) можно определить параметр Флоке μ , а именно

$$\text{sh}^2\left(\frac{\mu\pi}{2}\right) = (u'v)_{x=\pi/2} = \left(\frac{1}{2}Bx\right)_{x=\pi/2} = \frac{\pi}{4}B. \quad (50.67)$$

Этот же результат можно получить, совершая предельный переход в формулах, полученных в п. 1.

Действительно, мы рассматривали функцию

$$J(x) = \begin{cases} -\chi_1^2 & \text{для } -l_1 < x < 0 \\ -\chi_2^2 & \text{для } 0 < x < l_2, \end{cases} \quad (50.68)$$

где $l_1 + l_2 = \pi$, и получили выражение [см. (50.12)]

$$\text{ch } \mu\pi = \text{ch } \chi_1 l_1 \text{ch } \chi_2 l_2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\chi_1}{\chi_2} + \frac{\chi_2}{\chi_1} \right) \text{sh } \chi_1 l_1 \text{sh } \chi_2 l_2. \quad (50.69)$$

Предположим, что $\chi_1 = 0$, а χ_2 неограниченно возрастает, так что при $l_2 \rightarrow 0$ произведение $l_2 \chi_2^2 \rightarrow B$, где B — постоянная. Тогда

$$\text{ch } \mu\pi = 1 + \frac{B}{2} l_1. \quad (50.70)$$

Поскольку $l_2 = 0$ и $l_1 = \pi$, это выражение точно совпадает с (50.67).

5. Сравнение методов Бриллюэна и Уиттекера. Как мы уже отмечали, метод Уиттекера применим только в том случае, если ряд, образованный из коэффициентов Фурье функции $J(x)$, сходится абсолютно. Этот метод исключает рассмотрение всех разрывных функций $J(x)$, поскольку модули их коэффициентов убывают, как $1/n$. Однако его можно использовать, если $J(x)$ — непрерывная функция с разрывной производной.

В качестве примера можно привести функцию

$$F(x) = G^2(x) = \frac{A^2}{[a + |x|]^2}. \quad (50.71)$$

рассмотренную выше. На интервале $(-\pi/2, +\pi/2)$ эта функция меняется в пределах от A^2/a^4 до $A^2/[a + (\pi/2)]^4$. Соответствующую периодическую функцию $G(x)$ можно разложить в ряд Фурье, поэтому к ней метод Уиттекера применим. Для этой функции мы и проведем сравнение методов Уиттекера и Бриллюэна.

Предположим для простоты, что изменения функции малы, т. е. будем рассматривать значения

$$|a| \gg \frac{\pi}{2},$$

и обозначим

$$A = Va^2. \quad (50.72)$$

Проведем разложение в ряд по малому параметру

$$\varepsilon = \frac{\pi}{2a} \ll 1.$$

В решение, полученное в п. 3 [см. (50.57)], входит величина S_1 , равная в данном случае

$$S_1 = \frac{A \frac{\pi}{2}}{a \left(a + \frac{\pi}{2} \right)} = \frac{B \frac{\pi}{2}}{1 + \frac{\pi}{2a}} = \frac{B\pi}{2} \left[1 - \frac{\pi}{2a} + \left(\frac{\pi}{2a} \right)^2 - \dots \right]. \quad (50.73)$$

Ограничиваясь в разложении членами первого порядка малости по $\pi/2a$, получаем

$$\begin{aligned} \sin S_1 &= \sin \frac{\pi B}{2} - B \frac{\pi^2}{4a} \cos \frac{\pi B}{2} + \dots, \\ \cos S_1 &= \cos \frac{\pi B}{2} + B \frac{\pi^2}{4a} \sin \frac{\pi B}{2}. \end{aligned}$$

Подставляя это выражение в уравнение (50.57), заметим, что членом второго порядка $a[a + (\pi/2)]/Ba^4$, входящим в коэффициент при $\sin^2 S_1$, можно пренебречь, поскольку он мал по сравнению с единицей. По этой же причине пренебрегаем членом $(\pi/2A) \sin S_1 \cos S_1$, поскольку $A \sim a^2$. Тогда

$$\begin{aligned} \operatorname{sh}^2 \frac{\mu\pi}{2} &= -\sin^2 S_1 = -\sin^2 \frac{\pi B}{2} + 2B \frac{\pi^2}{4a} \sin \frac{\pi B}{2} \cos \frac{\pi B}{2} = \\ &= -\sin^2 \frac{\pi B}{2} + B \frac{\pi^2}{4a} \sin \pi B. \end{aligned} \quad (50.74)$$

Отметим, что отброшенные члены порядка $1/a^2$ можно было бы сохранить, однако в методе Уиттекера это привело бы к серьезным затруднениям.

Решим сначала поставленную задачу методом Уиттекера. Разложение Фурье периодической функции $J(x)$, соответствующей $F(x)$, имеет вид

$$J(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \theta_n e^{i2nx}, \quad (50.75)$$

где

$$\theta_n = \theta_{-n} = \frac{B^2}{\pi} \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} \frac{e^{-i2nx}}{\left[1 + \frac{|x|}{a} \right]^4} dx = \operatorname{Re} \frac{2B^2}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{e^{-i2nx}}{\left(1 + \frac{x}{a} \right)^4} dx,$$

откуда получаем

$$\theta_0 = \frac{2B^2}{3\pi} \left[1 - \left(1 + \frac{\pi}{2a} \right)^{-3} \right] = B^2 \left[1 - \frac{\pi}{a} + \frac{10}{3} \left(\frac{\pi}{2a} \right)^2 + \dots \right], \quad (50.76)$$

$$\theta_n = \theta_{-n} = \frac{2B^2}{\pi a n^2} \left[1 - (-1)^n + (-1)^n \frac{5\pi}{2a} \right].$$

Сравнивая (50.76) и (50.73), легко видеть, что в первом приближении

$$S_1 \approx \frac{\pi}{2} \theta_0^{1/2}, \quad (50.77)$$

а коэффициенты $\theta_n (= \theta_{-n})$ убывают как $1/n^2$, что обусловлено видом $J(x)$. Кроме того, видно, что эти коэффициенты первого порядка по $1/a$.

Формулу Уиттекера (49.18) можно теперь записать в виде

$$\operatorname{sh}^2 \left(\frac{\mu\pi}{2} \right) = -\Delta_1(0) \sin^2 \left(\frac{\pi}{2} \theta_0^{1/2} \right).$$

Как будет показано ниже, с точностью до величин порядка $1/a^2$ значение $\Delta_1(0) \approx 1$; отсюда следует

$$\operatorname{sh}^2 \left(\frac{\mu\pi}{2} \right) = -\sin^2 \left(\frac{\pi}{2} \theta_0^{1/2} \right) = -\sin^2 S_1. \quad (50.78)$$

Таким образом, оба метода дают совпадающие результаты.

Рассмотрим теперь, с какой точностью выполняется равенство $\Delta_1(0) = 1$. Как известно,

$$\Delta_1(0) = |B_{mp}|,$$

где

$$B_{mm} = 1, \quad B_{mp} = \frac{\theta_{m-p}}{\theta_0 - 4m^2} \quad \text{при } m \neq p, \quad (50.79)$$

т. е. все диагональные элементы равны единице, а недиагональные — пропорциональны θ_{m-p} и, согласно (50.76), имеют такой же порядок малости, как и $1/a$. Оценить такой детерминант можно следующим образом. В первую очередь образуем произведение всех диагональных элементов, которое, очевидно, равно единице. Затем выпишем слагаемые, образованные произведениями всех диагональных элементов, кроме двух [с индексами (n, n) и (m, m)], замененных элементами B_{nm} и B_{mn} . Затем образуем произведения всех диагональных элементов, кроме трех [с индексами (n, n) , (m, m) и (p, p)], которые заменим на элементы B_{nm} , B_{mp} , B_{pm} и т. д.

В результате получаем

$$\Delta_1(0) = |B_{mp}| = 1 - \sum_{n,m} B_{nm} B_{mn} + \sum_{n,m,p} B_{nm} B_{mp} B_{pn} - \dots \quad (50.80)$$

Правило образования членов этого разложения очевидно. Легко видеть, что слагаемые в (50.80) расположены по возрастающим степеням $1/a$ и пропорциональны $1/a^2$, $1/a^3$ и т. д. Поскольку мы пренебрегали всеми членами порядка $1/a^2$ и выше, ясно, что можно положить $\Delta_1(0) = 1$.

Иногда возникает дополнительная трудность, связанная с тем, что разность $\theta_0 - 4m^2$ может быть малой (порядка $1/a$) и детерминант принимает очень большое значение. Благодаря этому метод Уиттекера нельзя применить при параметрах, близких к полюсам детерминанта. Отметим, однако, что в точке $\theta_0 = 4m^2$, являющейся для детерминанта полюсом второго порядка, $\sin^2[(\pi/2)\theta_0^{1/2}]$ имеет нуль второго порядка, что устраняет особенность.

Эта трудность отсутствует в нашем методе, который может быть использован для рассмотрения многочисленных задач, сводящихся к уравнению Хилла.

§ 51. Генератор с самовозбуждением

Рассмотрим электрическую цепь, состоящую из индуктивности L и емкости C . Обозначим через Q заряд, имеющийся в конденсаторе в момент t ; величина заряда удовлетворяет, как известно, уравнению

$$L \frac{d^2 Q}{dt^2} + \frac{Q}{C} = 0. \quad (51.1)$$

Отсюда находим собственную частоту колебаний системы при постоянных L и C : $\omega = 1/\sqrt{LC}$.

Предположим теперь, что емкость изменяется по закону

$$\frac{1}{C} = A + B \cos \omega_1 t, \quad (51.2)$$

где A и B — положительные постоянные ($B < A$), а ω_1 — заданная частота. Тогда уравнение (51.1) принимает следующую форму:

$$\frac{d^2 Q}{dt^2} + \frac{1}{L} (A + B \cos \omega_1 t) Q = 0. \quad (51.3)$$

Полагая $u = Q$ и $\xi = 1/2\omega_1 t$, приведем это уравнение к форме уравнения Матье

$$\frac{d^2 u}{d\xi^2} + (\eta + \gamma \cos 2\xi) u = 0, \quad (51.4)$$

где

$$\eta = \frac{4A}{L\omega_1^2}, \quad \gamma = \frac{4B}{L\omega_1^2}, \quad (51.5)$$

с общим решением вида (48.5)

$$u = D_1 A(\xi) e^{\mu\xi} + D_2 B(\xi) e^{-\mu\xi}. \quad (51.6)$$

Показатель экспоненты μ является чисто мнимым в областях, заштрихованных на фиг. 120, и действительным или комплексным в незаштрихованных областях.

Таким образом:

1. В заштрихованных областях

$$\mu = i\beta, \quad (51.7a)$$

что дает устойчивые колебания с постоянной средней амплитудой.

2. В незаштрихованных областях

$$\mu = \alpha + i\beta, \quad (51.7b)$$

т. е. имеют место неустойчивые колебания. Одно из слагаемых в (51.6) неограниченно возрастает, другое убывает до нуля, когда $\xi \rightarrow \infty$.

Анализ фиг. 120 позволяет полностью определить процессы, происходящие в системе.

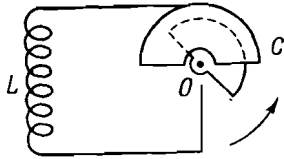
Если зависимость емкости от времени имеет вид не синусоиды, а зубчатой кривой, то характер колебаний можно получить из анализа фиг. 125.

Пример цепи с переменной емкостью приведен на фиг. 129. Подобное устройство было предложено в конце прошлого века для осуществления самовозбуждающегося генератора высокой частоты¹⁾.

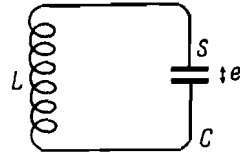
¹⁾ Такие генераторы были осуществлены Л. И. Мандельштамом и Н. Д. Папалекси в 1933 г. и были названы параметрическими генераторами. Параметрические генераторы не получили широкого распространения из-за низкого к. п. д. Описание параметрического генератора см. в книге Л. И. Мандельштам и др., «Новые исследования по теории нелинейных колебаний», Радиоиздат, 1936. — Прим. ред.

Генератор с самовозбуждением можно получить также, периодически меняя индуктивность. Такую систему можно осуществить, например, соединяя последовательно обмотки статора и ротора и замыкая цепь на фиксированную емкость.

Самовозбуждение будет иметь место, если удовлетворить условиям неустойчивости, так как именно этот случай соответствует колебаниям с нарастающей амплитудой. Отметим, что амплитуда неустойчивых колебаний может сначала уменьшаться до нуля и только потом начнется ее увеличение,



Ф и г. 129.



Ф и г. 130.

причем со временем амплитуда может стремиться к постоянной величине. Такое поведение обусловлено тем, что влияние нелинейных членов, которым мы пренебрегали при выводе уравнения колебаний в системе, впоследствии может стать существенным, и вследствие этого используемое нами уравнение перестанет описывать происходящие в системе явления.

В приведенном выше примере из электротехники величины L и C всегда положительны и

$$\eta > \gamma > 0, \quad (51.8)$$

что аналогично случаю, рассмотренному в п. 1 § 50 [уравнение (50.14)], соответствующим областям на фиг. 120, 123, 126, в которых устойчивость является правилом, а неустойчивость — исключением.

На фиг. 120 легко заметить, что первая область неустойчивости (или самовозбуждения), имеющая форму буквы V, начинается близко от точки $\eta = 1$ на оси абсцисс, т. е. можно положить

$$\frac{4A}{L\omega_1^2} \approx 1.$$

Полагая

$$A = \frac{1}{C_0}, \quad \omega_0^2 = \frac{1}{LC_0},$$

где ω_0 — собственная частота контура (L, C_0), предыдущее выражение можно переписать в виде

$$\frac{4A}{L\omega_1^2} = \frac{4}{LC_0\omega_1^2} = \frac{4\omega_0^2}{\omega_1^2} \approx 1. \quad (51.9)$$

Таким образом, самовозбуждение будет иметь место в том случае, если частота ω_0 будет равна половине частоты возбуждения ω_1 .

Этот результат был получен из элементарных соображений в предположении малого изменения емкости ($B \ll A$) еще до создания полной теории явления. Мы воспроизведем здесь этот элементарный вывод для плоского конденсатора, емкость которого меняется при изменении расстояния между пластинами.

Известно, что

$$\frac{1}{C} = \frac{4\pi}{S} e, \quad (51.10)$$

где S — площадь пластин. Если $\sigma = Q/S$ — поверхностная плотность заряда на пластинах, то сила, действующая на единицу площади, равна

$$f = S \cdot 2\pi\sigma^2 = \frac{4\pi}{S} Q^2 = \frac{Q^2}{2Ce}. \quad (51.11)$$

Предположим, что расстояние e изменяется по закону

$$e = e_0 + b \cos \omega_1 t;$$

тогда

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_0} + \frac{4\pi b}{S} \cos \omega_1 t \left(\frac{1}{C_0} = \frac{4\pi e_0}{S} \right). \quad (51.12)$$

Если изменение расстояния между пластинами b мало, то частота колебаний в цепи будет близка к ω_0 . Квадрат количества электричества Q^2 меняется при этом с удвоенной частотой

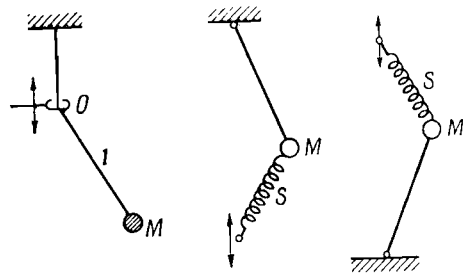
$$Q = A \cos(\omega_0 t + \varphi), \\ Q^2 = A^2 \cos^2(\omega_0 t + \varphi) = \frac{A^2}{2} [1 + \cos 2(\omega_0 t + \varphi)]. \quad (51.13)$$

С другой стороны, работа, совершаемая за одно колебание внешней силой, изменяющей расстояние между пластинами, равна

$$W = \oint f de \approx -\frac{b\omega_1 A^2}{2C_0 e_0} \oint \cos^2(\omega t + \varphi) \sin \omega_1 t dt =$$

$$= -\frac{b\omega_1 A^2}{4C_0 e_0} \oint \cos 2(\omega_0 t + \varphi) \sin \omega_1 t dt; \quad (51.14)$$

она отлична от нуля только при $\omega_1 = 2\omega_0$. Если это условие выполняется, то совершаемая работа может иметь разный знак



Фиг. 131.

в зависимости от фазы φ , причем, когда эта работа положительна, амплитуда колебаний возрастает и имеет место самовозбуждение (неустойчивый режим). Таков в основном физический смысл условия (51.9).

Физическая интерпретация условий появления самовозбуждения в окрестности точек $\eta = 4, 9, \dots, n^2$, т. е. при

$$\frac{4A}{L\omega_1^2} = \frac{4}{LC_0\omega_1^2} = 4\frac{\omega_0^2}{\omega_1^2} = n^2 \quad (51.15)$$

или

$$2\omega_0 = n\omega_1,$$

несколько сложнее и требует рассмотрения гармоник колебаний, которые возникают при изменении емкости.

Можно привести примеры механических самовозбуждающихся осцилляторов; на фиг. 131 изображены некоторые модели таких осцилляторов.

В этих устройствах масса M — аналог индуктивности, L — всегда положительна, однако коэффициенты A и B , вхо-

дящие в выражение для возвращающей силы, — аналога $1/C$ — в отличие от только что рассмотренной задачи могут становиться отрицательными. В частности, это имеет место для обращенного маятника. При изучении колебаний обращенного маятника снова приходим к рассмотрению трех областей, указанных на фиг. 120 и 125. Особенно интересна область выше прямых $\eta = -\gamma$ и $\eta = \gamma$: очевидно, что неустойчивый маятник можно превратить в устойчивый выбором периодических возмущений нужной частоты.

Можно было бы сослаться и на другие примеры — движение прямого или обращенного маятника, точка подвеса которого смещается периодически в вертикальном направлении с частотой ω_1 , колебания пружин, натяжение которых периодически изменяется, и т. д.

§ 52. Свободные электроны в металлах

В волновой механике движение электронов в поле с потенциалом $P(x, y, z)$ описывается уравнением Шредингера

$$\Delta\psi + k^2(F - P)\psi = 0,$$

$$k^2 = \frac{8\pi^2 m}{h^2}, \quad (52.1)$$

где h — постоянная Планка. В кристаллической решетке потенциал P создается положительными зарядами ионов, расположенных в узлах решетки, и отрицательным облаком электронов, расположенных между ионами. Такой потенциал является периодической функцией трех переменных с периодами d_1, d_2, d_3 , определяемыми структурой кристалла.

Уравнение (52.1) аналогично изучавшемуся в § 40 уравнению (40.1)

$$\Delta\psi + H(\mathbf{r})\psi = 0,$$

где [см. (40.2)]

$$H = \frac{\omega^2}{V^2} = \omega^2 F.$$

В нашем случае

$$H = k^2 [E - P(\mathbf{r})], \quad (52.2)$$

где E — энергия электронов, а P — периодический потенциал.

Теория, изложенная в § 40, применима целиком к задаче свободных электронов и приводит к обычным правилам определения зон. Структура зон не зависит от частных

физических предположений о природе рассматриваемых волн — она одинакова как для электронных волн Шредингера, так и для упругих и электромагнитных волн. Некоторые авторы не придают должного значения этому весьма общему результату и основывают определение зон на правилах, зависящих от физической природы рассматриваемых волн. Результатом этого являются выводы, несовместимые с математической постановкой задачи.

Как уже указывалось в § 32 и 37, другим источником ошибок может быть чрезмерное упрощение задачи, в частности предположение

$$P(\mathbf{r}) = P_1(x) + P_2(y) + P_3(z). \quad (52.3)$$

Это предположение не представляет практического интереса, так как не известно ни одного кристалла, потенциал которого можно было бы представить в таком виде, хотя бы в качестве первого приближения. Если бы существовала структура, для которой уравнение (53.3) было бы приемлемо, то большая часть пятен Брэгга при рентгеноструктурном анализе должна была бы исчезнуть; остались бы лишь те пятна, которые вызываются отражением на малом числе плоскостей, параллельных координатным плоскостям. Однако такая картина никогда не наблюдалась.

Корректная постановка физической задачи связана с существованием периодического потенциала, допускающего разложение в тройной ряд Фурье, содержащий все коэффициенты $A_{m_1 m_2 m_3}$, и с существованием полного семейства кристаллографических плоскостей с индексами (m_1, m_2, m_3) .

Для волн классического типа задача о малом возмущении рассматривалась в § 41 в предположении, что

$$F = \frac{1}{V_0^2} = \frac{1}{V_0^2} + \varepsilon f = C_{000} + \varepsilon f,$$

$$H = \frac{\omega^2}{V_0^2} + \varepsilon \omega^2 f.$$

Рассмотрим вопрос об электронных волнах, предположив, что средний потенциал в кристалле равен нулю (это сводится к выбору решетки с нулевой энергией), и полагая

$$P = \varepsilon \varphi,$$

$$H = k^2(E - \varepsilon \varphi). \quad (52.4)$$

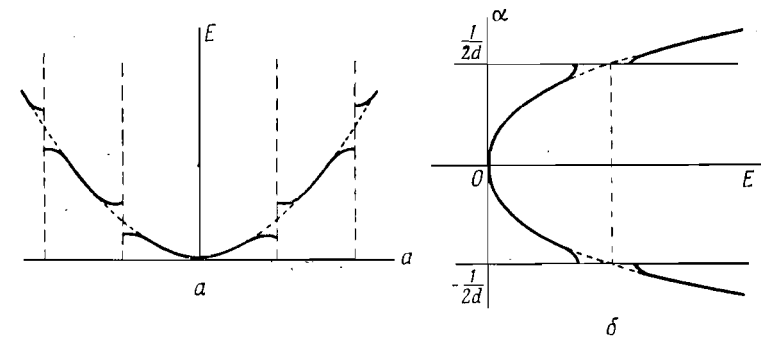
С другой стороны, частота электронных волн определяется соотношением Планка

$$E = h\nu. \quad (52.5)$$

Переход от задачи упругих волн к задаче электронных волн можно совершить, используя соотношение

$$\left(\frac{\omega^2}{V_0^2}\right)_{\text{упр.}} = \omega^2 C_{000} = (hk^2 \nu)_{\text{эл.}}, \quad (52.6)$$

где индекс „упр.“ означает, что данное выражение имеет место для упругих волн, а индекс „эл.“, — что выражение имеет место для электронных волн.



Фиг. 132.

Кривая, определяющая для классических невозмущенных волн функцию $\nu(a)$, которая задавалась соотношением

$$\frac{\omega}{V_0} = 2\pi |a| \quad (52.7)$$

и имела форму буквы V, в нашем случае превращается в кривую параболического типа

$$hk^2 \nu = 4\pi^2 |a|^2. \quad (52.8)$$

Малые возмущения приводят к излому этой кривой на границах зон и появлению разрывов, что видно из фиг. 132, где изображена зависимость энергии E от $|a|$.

Нужно, однако, отметить, что в действительности эта задача намного сложнее, чем может показаться из нашего изложения, поскольку периодический потенциал P неизвестен

и, как уже отмечалось выше, определяется распределением ионов и электронов. Предположим, что мы сделали некоторые допущения относительно P , после чего удалось решить уравнение (52.1) и найти функцию ψ , определяющую среднюю электронную плотность. Потенциал P , полученный из этой электронной плотности, должен совпадать с первоначально заданным нами значением.

Таким образом, решение уравнения (52.1) является лишь этапом разрешения очень сложной проблемы самосогласованного поля, поставленной Хартри.

ЛИТЕРАТУРА

1. Mathieu P., Cours de Mathématique physique, 1873, p. 122.
2. Humbert P., Fonctions de Lamé et Mathieu, Paris, 1926.
3. Whittaker, Watson, Modern Analysis, Cambridge, 1920, p. 404.
4. Strutt M. J. O., Ann. Phys., 84, 485 (1927); 85, 129 (1928); 86, 319 (1928).
5. Van der Pol B., Strutt M. J. O., Phil. Mag., 5, 18 (1928).
6. Brillouin L., Quantenstatistik, Berlin, 1931, p. 271.
7. Kronig R. de L., Penney W. G., Proc. Roy. Soc., 130, 499 (1931).
8. Stratton J. A., Electromagnetic Theory, New York, 1941. (См. перевод: Страттон Дж., Теория электромагнетизма, М.—Л., 1948).
9. Brillouin L., Electrical Communications, avril, 1938.
10. Strutt M. J. O., Math. Ann. 101, 559 (1929).
11. Morse P. M., Phys. Rev., 35, 1310 (1930).
12. Brillouin L., Quart. Appl. Mathem., 6, 167 (1948); 7, 364 (1950).
13. Parodi M., Compt. Rend., 13, janvier, 1941.

МАТРИЧНАЯ АЛГЕБРА И РАСПРОСТРАНЕНИЕ ВОЛН ВДОЛЬ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЛИНИЙ

§ 53. Общие замечания

В гл. 1 мы отмечали, что первые работы по теории волновых процессов были посвящены распространению сигнала по цепочке точечных частиц, и лишь позднее началось изучение распространения волн в сплошных средах. Как мы уже подчеркивали, весьма важный вклад в задачи, относящиеся к дискретным структурам, сделал Кельвин, который ввел понятие предельной частоты. До Кельвина рассматривались только акустические волны. Затем теория была распространена на электромагнитные волны и сравнительно недавно на электронные волны; на эти типы волн были перенесены свойства, открытые для акустических волн. Наконец, метод Лагранжа, позволяющий перейти от дискретной струны к непрерывной, был использован Пупином в его работах о нагруженном телефонном кабеле. Замечательные работы Кельвина, основная из которых изложена в § 2, позволили ему создать современные представления о структуре оптических сред. Винсент сконструировал соответствующую оптическим средам механическую структуру и показал, что структура оптических сред обладает свойствами механического полосового фильтра. Кэмпбелл перенес эту схему на электрические явления, что послужило отправной точкой для изобретения электрических фильтров.

Для всех ученых прошлого века было обычным утверждение, что все типы волн, независимо от их физической природы, должны иметь общие свойства. Впоследствии эта концепция, казалось, была забыта. Действительно, физики развили теорию электромагнитных волн для света и рентгеновских лучей, а потом очень тщательно теоретически изучили при помощи волновой механики распространение электронных волн в кристаллах, причем часто не замечали, что

существенная часть их результатов уже была получена, когда создавалась теория распространения рентгеновских лучей в кристаллах. Инженеры-электротехники, со своей стороны, разработали блестящую теорию распространения волн в электрических линиях, кабелях, фильтрах и т. д., но не обращали внимания на то обстоятельство, что многие их важные результаты уже были получены физиками — теоретиками (ср. § 13 и 14). Сравнительно недавно ожила практическая акустика, особенно в работах электриков, которые, занимаясь изучением различных цепей, перенесли в область электрических явлений многие механические проблемы. Тем самым были вновь установлены все аналогии, существовавшие между проблемами, относящимися к колебаниям и распространению волн ¹⁾. Авторы этих работ шли при этом путем, обратным пути своих предшественников — Пупина и Кэмпбелла, исходивших из механических моделей при изучении электрических линий и фильтров. Так, сравнительно недавно инженеры, изучая распространение волн вдоль железнодорожного состава, свели эту задачу к электрической (прохождение импульса через фильтр) и выразили затем полученные результаты в механических обозначениях.

Эти работы основаны на теории распространения волн вдоль электрических линий и фильтров, которую мы рассмотрим в данной главе.

Число физиков-теоретиков, которые хорошо знакомы с указанными вопросами и понимают, насколько инженерное искусство опередило теорию, весьма невелико. У инженеров в свою очередь наблюдается тенденция полагать, что все волновые проблемы могут быть сведены к задаче о распространении волн вдоль электрической линии, что не вполне верно.

¹⁾ Необходимо заметить, что желание авторов рассматривать аналогию между различными дискретными линейными структурами только в рамках идеи периодичности значительно сузило постановку вопроса о фильтрах. Поэтому в область рассмотрения не попали такие весьма важные для современной радиотехники, и в частности для дальней многоканальной связи схемы, как цепочки фильтров, составленные из неоднородных ячеек. Интересующиеся найдут освещение этих вопросов, например, в книге: С. С. Коган, Теория и расчет фильтров для установок дальней связи, М., 1950 г., или в сборнике статей „Расчет фильтров по методу Кауэра“, М., 1936. — *Прим. ред.*

В гл. 5 мы уже обсуждали важность введения понятия характеристического импеданса — основного понятия при изучении одномерных структур типа электрических или механических линий и фильтров. Однако обобщить это понятие на случай большего числа измерений затруднительно. Выше уже указывалось, что в случае двумерных или трехмерных структур для электромагнитных волн более удобным является понятие потока энергии, характеризующегося вектором Умова — Пойнтинга, и аналогичное понятие в волновой механике.

Сравнительно недавние исследования в волновой механике указывают на возросшее значение матричной алгебры и на тот интерес, который представляет ее использование для решения ряда задач о распространении волн. Независимо такие же выводы были сделаны в очень интересных электротехнических работах. Как мы увидим, теорию матриц легко можно использовать для исследования прохождения волн через электрические фильтры. Кроме того, можно указать на один пример из классической физики, в котором используются обратные матрицы, играющие важную роль в теории спина; поэтому в следующей главе мы рассмотрим связь между теорией фильтров и теорией волн Паули — Дирака для электрона, обладающего спином.

Вопросы, связанные с распространением волн вдоль электрических линий, которые будут рассматриваться ниже, можно сопоставить с аналогичными вопросами из области механики, поэтому для дальнейшего мы приведем таблицу соответствующих друг другу основных электрических и механических величин (см. табл. 4).

Электрические линии, которые мы будем рассматривать, схематически представлены на фиг. 134 и 139 в виде ряда прямоугольников, соединенных проводниками, причем каждый прямоугольник представляет собой некоторую электрическую цепь. С обеих сторон каждого прямоугольника изображены по две пары клемм, от которых отходят проводники, символизирующие связь между прямоугольниками. На этих клеммах отмечаются ток и напряжение, имеющиеся на входе или выходе каждого прямоугольника, причем совокупность данных о токе и напряжении, относящихся к паре клемм, определяет физическую связь между двумя соседними прямоугольниками.

У рассматриваемой задачи имеется аналог в механике, если каждый прямоугольник представляет собой механическое устройство; причем в механике связь между ними осуществляется только через один проводник (стержень или нить, соединяющая один прямоугольник с другим). Тем не менее связь по-прежнему задается двумя физическими величинами, например скоростью движения нити (аналог электрическому току) и ее натяжением (аналог разности потенциалов). Таким образом, имеется полное соответствие между обеими задачами, а приведенная ниже табл. 4 позволяет легко переходить от одной задачи к другой.

Таблица 4

Электрические величины	Механические величины
Электрический заряд	Смещение или координата
" ток	Скорость
Производная по времени от электрического тока	Ускорение
Коэффициент самоиндукции	Масса
" взаимной индукции	Не имеет непосредственного эквивалента, и встречается только в задачах со связями, где используются обобщенные координаты Лагранжа
Энергия магнитного поля	Кинетическая энергия
" электрического поля	Потенциальная
Емкость (C)	Коэффициент упругости $\left(\frac{1}{C}\right)$
Разность потенциалов	Натяжение

Однако, как уже отмечалось, в некоторых случаях при переходе встречаются затруднения. Так, например, коэффициент взаимной индукции не имеет непосредственного механического аналога. Тем не менее общее выражение для кинетической энергии, уже давно используемое в аналитической механике, по форме совпадает с выражением (54.2) для энергии магнитного поля, учитывающим взаимную индукцию.

Такая форма записи кинетической энергии встречается в механике в задачах с наложенными связями, когда при определении положения точечной массы вместо обычных координат вводят обобщенные координаты Лагранжа.

Подчеркнем, что существуют и другие препятствия для указанного перехода, связанные с областью значений, которые могут принимать различные величины. Так, в § 11 и 12 указывалось, что в теории электричества емкость — величина положительная, в то же время в механике коэффициент упругости может быть и положительным, и отрицательным.

Итак, если общая схема и теория явления одинаковы для всех проблем распространения, то для каждой из них все же существуют некоторые ограничивающие условия, которые всегда должны учитываться.

Рассмотрим теперь электрические линии, образованные соединением *идентичных* цепей. Эти сколь угодно сложные цепи должны удовлетворять следующим условиям.

1. *Они должны быть линейными.* Это значит, что в цепи можно включать сопротивления, собственные индуктивности, взаимные индуктивности и емкости, но в них запрещается вводить выпрямители, катушки с железными сердечниками и вообще любые нелинейные элементы. Отрицательные сопротивления можно принимать в рассмотрение лишь при условии работы на прямолинейном участке их характеристики.

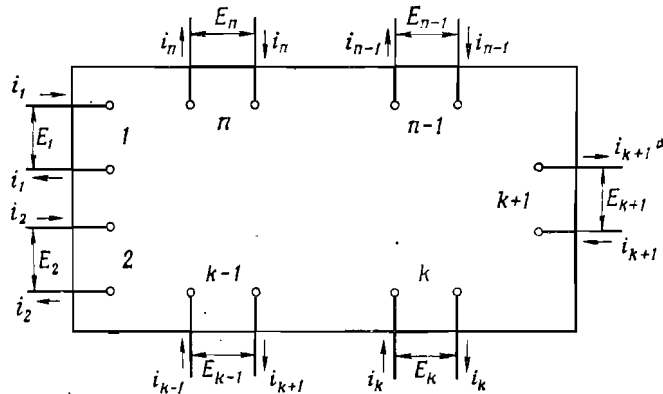
2. *Они должны быть пассивными,* т. е. другими словами, не должны содержать в себе никаких источников тока. Если в рассмотрение вводятся электродвижущие силы, то они должны всегда находиться вне цепи.

На фиг. 133 схематически изображена цепь, которая может являться составной частью линии. Она изображена в виде прямоугольника с четным числом попарно пронумерованных клемм (мы пока никак не ограничиваем их число). Электродвижущие силы всегда прикладываются между парой клемм с одним номером, причем если к клеммам k -й пары приложена гармоническая электродвижущая сила E_k определенной частоты, то ей соответствует ток i_k той же частоты. Ниже мы будем везде выбирать знаки E_k и i_k таким образом, чтобы величина

$$\operatorname{Re} E_k i_k^*$$

была равна мощности, подводимой к цепи,

Предположим еще, что рассматриваемая цепь является элементарной, т. е. что ее нельзя разбить на несколько не связанных между собой цепей. Примем, наконец, что количество клемм сведено к минимуму; так, например, две или более пар клемм, соединенных последовательно, следует заменять одной парой, к которой приложена электродвижущая сила, равная сумме заданных электродвижущих сил.



Фиг. 133.

В первых параграфах этой главы мы введем основные понятия и систематизируем обозначения матричной алгебры. После этого будет рассмотрена роль, которую играет характеристический импеданс в распространении волн вдоль линии.

Полученные результаты мы затем перенесем на случай, когда составляющие линию элементы становятся бесконечно малыми. Это позволит нам выяснить некоторые аналогии, которые имеют место между изучаемым кругом вопросов и проблемой спина электрона, возникающей в волновой механике.

§ 54. Выражение для энергии

Рассмотрим электрическую цепь, принадлежащую к только что определенному типу, и предположим, что после сведения к минимуму числа клемм их осталось n пар. К этим парам

клемм приложены электродвижущие силы $E_1, E_2 \dots E_n$, причем некоторые из них могут быть равны нулю; это означает, что соответствующие клеммы накоротко замкнуты. Вне зависимости от внутренних элементов цепи мы выберем в качестве переменных величин количества электричества q_k , подведенные к различным парам клемм. Эти переменные являются независимыми, поскольку цепь элементарна в определенном выше смысле, а число пар клемм сведено к минимуму. Выбранные соответствующим образом величины q_k образуют полную совокупность независимых переменных, однако для этого иногда надо число действующих клемм дополнить добавочными клеммами, к которым приложены нулевые электродвижущие силы.

При этих условиях мы образуем сейчас три однородные квадратичные формы, представляющие три вида энергии, запасенной в цепи.

Если Q_α — заряд конденсаторов цепи (номер конденсатора обозначается индексом α), то полная электростатическая энергия выражается формулой

$$E_e = \frac{1}{2} \sum_{\alpha} \frac{Q_{\alpha}^2}{C_{\alpha}}, \quad (54.1)$$

где C_{α} — емкость конденсатора α .

Аналогично, если \dot{Q}_{α} — сила тока, протекающего через индуктивность α , то полная магнитная энергия равна

$$E_m = \frac{1}{2} \sum_{\alpha} L_{\alpha} \dot{Q}_{\alpha}^2 + \sum_{\alpha > \beta} M_{\alpha\beta} \dot{Q}_{\alpha} \dot{Q}_{\beta} = \frac{1}{2} \sum_{\alpha, \beta} M_{\alpha\beta} \dot{Q}_{\alpha} \dot{Q}_{\beta}, \quad (54.2)$$

где $L_{\alpha} = M_{\alpha\alpha}$ — коэффициент самоиндукции индуктивности α , $M_{\alpha\beta} = M_{\beta\alpha}$ — коэффициент взаимной индукции индуктивностей α и β ($\alpha \neq \beta$). Если же, наконец, Q_{α} — количество электричества, протекающее через сопротивление α , то полная рассеянная энергия равна

$$\Phi = \sum_{\alpha} R_{\alpha} \dot{Q}_{\alpha}^2. \quad (54.3)$$

Так как все элементы цепи предполагаются линейными, то количество электричества Q_{α} является линейной функцией q_k . т. е.

$$Q_{\alpha} = \sum_k a_{\alpha k} q_k, \quad (54.4)$$

где $a_{\alpha k}$ — постоянные,

Подставляя это выражение в уравнение (54.1) для электростатической энергии, получаем

$$E_e = \frac{1}{2} \sum_{\alpha} \frac{1}{C_{\alpha}} \left(\sum_k a_{\alpha k} q_k \sum_j a_{\alpha j} q_j \right) = \frac{1}{2} \sum_{k,j} c_{kj} q_k q_j, \quad (54.5)$$

где

$$c_{kj} = \sum_{\alpha} \frac{a_{\alpha k} a_{\alpha j}}{C_{\alpha}} = c_{jk}. \quad (54.6)$$

Аналогично

$$E_m = \frac{1}{2} \sum_{\alpha, \beta} M_{\alpha\beta} \left(\sum_j a_{\alpha j} \dot{q}_j \sum_k a_{\beta k} \dot{q}_k \right) = \frac{1}{2} \sum_{j,k} m_{jk} \dot{q}_j \dot{q}_k, \quad (54.7)$$

где

$$m_{jk} = \sum_{\alpha\beta} M_{\alpha\beta} a_{\alpha j} a_{\beta k} = m_{kj}. \quad (54.8)$$

Для рассеянной энергии получаем таким же образом

$$\Phi = \sum_{\alpha} R_{\alpha} \left(\sum_j a_{\alpha j} \dot{q}_j \sum_k a_{\alpha k} \dot{q}_k \right) = \sum_{j,k} r_{jk} \dot{q}_j \dot{q}_k, \quad (54.9)$$

где

$$r_{jk} = \sum_{\alpha} R_{\alpha} a_{\alpha j} a_{\alpha k} = r_{kj}. \quad (54.10)$$

Коэффициенты c_{kj} , m_{kj} и r_{jk} являются функциями параметров цепи, они однородны относительно величин индуктивностей, сопротивлений и величин, обратных емкостям. Кроме того, они симметричны относительно индексов j и k .

В обобщенных координатах электрические уравнения цепи имеют следующий вид:

$$E_k = \sum_i (m_{ki} \ddot{q}_i + r_{ki} \dot{q}_i + c_{ki} q_i), \quad (54.11)$$

где величина E_k представляет внешнюю электродвижущую силу, приложенную к цепи между клеммами k . Работа dW , совершаемая над цепью за время dt , равна

$$\begin{aligned} dW &= \sum_k E_k \dot{q}_k dt = \sum_k \sum_i (m_{ki} \ddot{q}_i + r_{ki} \dot{q}_i + c_{ki} q_i) \dot{q}_k dt = \\ &= \sum_{i,k} (m_{ki} \dot{q}_k d\dot{q}_i + r_{ki} \dot{q}_i \dot{q}_k dt + c_{ki} q_i dq_k), \end{aligned}$$

т. е.

$$dW = dE_m + dE_e + \Phi dt,$$

Эта формула показывает, что введенная в цепь энергия превращается там в энергию магнитную, электрическую и энергию рассеяния Φdt .

Пусть теперь частота всех источников, питающих цепь, равна ω ; тогда

$$i_k = \dot{q}_k = I_k e^{j\omega t}, \quad E_k = V_k e^{j\omega t} \quad (j = \sqrt{-1}), \quad (54.12)$$

где фаза колебаний учитывается комплексными амплитудами I_k и V_k . Тогда уравнение (54.11) можно представить в виде

$$V_k = \sum_i \zeta_{ki} I_i, \quad (54.13)$$

полагая

$$\zeta_{ki} = m_{ki} j \omega + r_{ki} + \frac{c_{ki}}{j \omega} \xi_{ik},$$

где величины ζ_{ki} однородны относительно импедансов.

§ 55. Определение четырехполюсника и его уравнение

Назовем четырехполюсником цепь, к которой можно прикладывать только две электродвижущие силы и которая соответственно имеет две пары наружных клемм. Поскольку у цепи существуют внутренние элементы, четырехполюсник может иметь и другие клеммы, но к ним должны быть приложены только нулевые электродвижущие силы

$$E_k = 0 \quad \text{при } k \neq 1, 2. \quad (55.1)$$

При этих условиях электрические уравнения четырехполюсника будут иметь вид

$$\begin{aligned} \sum_i \zeta_{1i} I_i &= V_1, \\ \sum_i \zeta_{2i} I_i &= V_2, \\ \sum_i \zeta_{ki} I_i &= 0 \quad \text{при } k = 3, 4 \dots n. \end{aligned} \quad (55.2)$$

В силу сделанных предположений число этих уравнений равно числу неизвестных, т. е. равно n , и детерминант,

составленный из коэффициентов при неизвестных, отличен от нуля. Тогда, разрешив систему, получаем

$$\begin{aligned} I_1 &= \chi_{11}V_1 + \chi_{12}V_2, \\ I_2 &= \chi_{21}V_1 + \chi_{22}V_2, \\ I_k &= \chi_{k1}V_1 + \chi_{k2}V_2 \quad \text{при } k = 3, 4, \dots, n. \end{aligned} \quad (55.3)$$

Простые вычисления позволяют показать, что вследствие симметрии детерминанта $|\zeta_{ik}|$

$$\chi_{ki} = \chi_{ik}.$$

Токи I_k не представляют для нас интереса, поэтому из n соотношений (55.3) оставим только два первых уравнения. Разрешив их относительно V , получим

$$\begin{aligned} V_1 &= z_{11}I_1 + z_{12}I_2, \\ V_2 &= z_{21}I_1 + z_{22}I_2, \end{aligned} \quad (55.4)$$

причем $z_{12} = z_{21}$.

Выше мы предположили, что напряжения V_i и токи I_i имеют такой знак, чтобы $\text{Re } E_i \dot{q}_i^*$ представляла собой

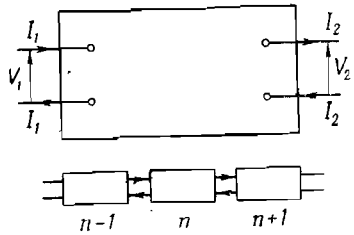
мощность, подводимую к системе. В теории электрических линий и фильтров обычно используют несколько иное определение, отличающееся изменением знака у тока I_2 , т. е. положительные значения выбраны так, как на фиг. 134. Подставляя вместо I_1 и I_2 новые токи

$$I'_1 = I_1, \quad I'_2 = -I_2 \quad (55.5)$$

и отбрасывая в их обозначениях штрихи, получаем уравнения (55.4) в форме

$$\begin{aligned} V_1 &= z_{11}I_1 - z_{12}I_2, \\ V_2 &= z_{21}I_1 - z_{22}I_2, \end{aligned} \quad (55.6)$$

которая особенно часто применяется при исследовании четырехполюсников.



Фиг. 134.

Вообще говоря, представляет интерес такая запись этих уравнений, в которой данные на входе (I_1, V_1) являются функцией данных на выходе (I_2, V_2), т. е.

$$\begin{aligned} V_1 &= a_1V_2 + bI_2, \\ I_1 &= cV_2 + a_2I_2, \end{aligned} \quad (55.7)$$

где

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{z_{11}}{z_{12}}, \quad a_2 = \frac{z_{22}}{z_{12}}, \\ b &= \frac{z_{11}z_{22} - z_{12}^2}{z_{12}}, \quad c = \frac{1}{z_{12}}, \end{aligned} \quad (55.8)$$

учитывая, что

$$z_{12} = z_{21}.$$

Отметим, что входящие в (55.7) постоянные не независимы, так как связаны очевидным соотношением

$$a_1a_2 - bc = 1. \quad (55.9)$$

§ 56. Матричное представление четырехполюсника

Чтобы пользоваться теорией матриц и получить более симметричные формулы, будем обозначать разность потенциалов и ток на выходе четырехполюсника буквами со штрихами, а эти же величины на входе — без штрихов:

электродвижущая сила

$$\text{на входе } V_1 = x_1,$$

$$\text{на выходе } V_2 = x'_1;$$

ток

$$\text{на входе } I_1 = x_2,$$

$$\text{на выходе } I_2 = x'_2.$$

Положительные значения этих величин указаны на фиг. 134. Соотношения (55.7) принимают теперь вид

$$x_1 = a_{11}x'_1 + a_{12}x'_2, \quad (56.2)$$

$$x_2 = a_{21}x'_1 + a_{22}x'_2,$$

где

$$\begin{aligned} a_{11} &= a_1, \quad a_{12} = b, \\ a_{21} &= c, \quad a_{22} = a_2, \end{aligned} \quad (56.3)$$

Квадратная таблица, образованная коэффициентами a_{ij} , определяет характеризующую четырехполюсник матрицу $A = (a_{ij})$, элементы которой зависят только от параметров цепей, входящих в четырехполюсник, и от частоты ω . Заметим, что детерминант матрицы A равен единице; действительно,

$$|a| = \det A = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = a_1a_2 - bc = 1. \quad (56.4)$$

Уравнения (56.2) можно разрешить относительно (x'_1, x'_2) , так что величины на выходе будут определяться величинами на входе (x_1, x_2) , а именно:

$$\begin{aligned} x'_1 &= b_{11}x_1 + b_{12}x_2, \\ x'_2 &= b_{21}x_1 + b_{22}x_2, \end{aligned} \quad (56.5)$$

где

$$\begin{aligned} b_{11} &= \frac{a_{22}}{|a|} = a_{22}, & b_{12} &= -\frac{a_{12}}{|a|} = -a_{12}, \\ b_{21} &= -\frac{a_{21}}{|a|} = -a_{21}, & b_{22} &= \frac{a_{11}}{|a|} = a_{11}. \end{aligned} \quad (56.6)$$

Тем самым рассматриваемому четырехполюснику можно поставить в соответствие другую матрицу B с элементами b_{ij} , детерминант которой, как легко проверить, равен единице:

$$|B| = |b_{ij}| = |b| = 1.$$

Соотношения (56.2) и (56.5) точно совпадают с известными формулами теории матриц. Действительно, если начальная величина X определяется заданием N компонент $x_1x_2 \dots x_N$, то матрица

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nn} \end{pmatrix},$$

являющаяся таблицей из N^2 чисел, определяет линейное преобразование величины X , переводя ее в величину X' с компонентами $x'_1x'_2 \dots x'_N$. Новые компоненты x'_k выражаются через x_j с помощью соотношения

$$x'_k = \sum_j b_{kj}x_j \quad \text{при } k, j = 1, 2, \dots, N.$$

Если положить

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_N \end{pmatrix}, \quad X' = \begin{pmatrix} x'_1 \\ x \\ \vdots \\ x'_N \end{pmatrix},$$

то предыдущее равенство символически можно записать в виде

$$X' = BX.$$

Словами это соотношение выражают следующим образом: матрица X' получается в результате действия оператора B на исходную матрицу X .

В рассматриваемом случае

$$\begin{aligned} X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} &= AX' = A \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{pmatrix}, & X' = \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{pmatrix} &= BX = B \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \\ & & B &= A^{-1}. \end{aligned} \quad (56.7)$$

Матрица $B = A^{-1}$ называется обратной матрице A .

Если задан четырехполюсник, то ему можно поставить в соответствие две матрицы, обратные друг другу и имеющие определенный смысл: матрицей A следует пользоваться при исследовании волн, распространяющихся через четырехполюсник справа налево, а матрицей B , наоборот, в случае, если волны распространяются слева направо.

Возвращаясь к формулам (56.2) и (56.5), можно видеть, что коэффициенты a_{11}, b_{11}, a_{22} и b_{22} — безразмерные числа, a_{12} и b_{12} — импедансы, а a_{21} и b_{21} — величины, обратные импедансам (полные проводимости).

§ 57. Последовательное соединение двух четырехполюсников. Умножение матриц

Присоединим четырехполюсники C и D друг к другу, как показано на фиг. 135, образовав тем самым четырехполюсник F . Найдем свойства полученной цепи. Обозначая

через (c_{ij}) и (d_{ij}) матрицы, аналогичные рассмотренной в предыдущем параграфе матрице (b_{ij}) , можно записать

$$\begin{aligned} x''_i &= \sum_j d_{ij} x'_j = \sum_j d_{ij} \left(\sum_k c_{jk} x_k \right) = \\ &= \sum_k x_k \left(\sum_j d_{ij} c_{jk} \right) = \sum_k f_{ik} x_k, \end{aligned} \quad (57.1)$$

где

$$f_{ik} = \sum_j d_{ij} c_{jk}.$$

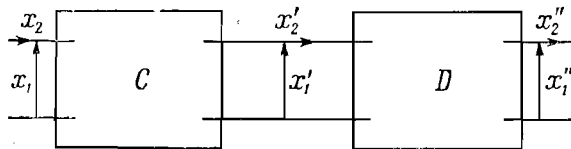
Коэффициенты f_{ik} являются элементами матрицы $F = (f_{ik})$; полагая

$$X'' = \begin{pmatrix} x''_1 \\ x''_2 \end{pmatrix},$$

можно записать символически

$$X'' = FX.$$

Итак, элементы матрицы F определяются по тем же фор-



Фиг. 135.

мулам, что и элементы произведения матрицы D слева на матрицу C , т. е.,

$$F = DC. \quad (57.2)$$

Следовательно, для распространяющейся слева направо волны характеристическая матрица четырехполюсника, образованного последовательным соединением четырехполюсников C и D , равна произведению соответствующих им матриц C и D .

Порядок сомножителей в формуле (57.2) является существенным. Физически это связано с известным фактом: при подсоединении при монтаже четырехполюсника C перед D результат, вообще говоря, получается иной, чем при подсоединении четырехполюсника C после D . Математически

это обстоятельство выражается некоммутативностью матричного произведения

$$\sum_j c_{ij} d_{jk} = CD \neq DC = \sum_j d_{ij} c_{jk}. \quad (57.3)$$

Для распространяющейся справа налево волны характеристическая матрица изображенного на фиг. 135 четырехполюсника из C и D имеет вид

$$\mathcal{F} = CD.$$

В предыдущем параграфе мы определили, что матрицы A и B обратны одна другой. Непосредственным вычислением легко проверить, что

$$AB = BA = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbf{1}, \quad (57.4)$$

где $\mathbf{1}$ — единичная матрица.

Напомним, наконец, что для любой матрицы

$$A\mathbf{1} = \mathbf{1}A = A \quad (57.5)$$

и что детерминант матрицы P , являющейся произведением матриц R и S , равен

$$|P| = |R| \cdot |S| = |S| \cdot |R|. \quad (57.6)$$

§ 58. Обратные и обращенные четырехполюсники и соответствующие им преобразования

Если два включенные в цепь (фиг. 135) четырехполюсника таковы, что не вызывают никакого изменения в распределении электродвижущих сил и токов, то говорят, что каждый из четырехполюсников *обращен* другому. Если A — характеристическая матрица первого четырехполюсника, а B — второго, то должно выполняться соотношение

$$AB = \mathbf{1} = BA. \quad (58.1)$$

Очевидно, что в этом случае порядок расположения четырехполюсников не имеет никакого значения.

Учитывая, что детерминанты матриц A и B равны единице, и используя соотношение (56.6), можно показать, что

элементы двух обратных четырехполюсников должны удовлетворять соотношениям

$$\begin{aligned} a_{11} &= b_{22}, & a_{12} &= -b_{12}, \\ a_{21} &= -b_{21}, & a_{22} &= b_{11}. \end{aligned} \quad (58.2)$$

Отсюда видно, что построить четырехполюсник, обратный данному, можно лишь единственным образом, поскольку это построение предполагает использование индуктивностей, взаимоиндуктивностей, а также сопротивлений, имеющих знак, противоположный знаку соответствующих параметров данного четырехполюсника. Для построения обратного четырехполюсника необходимо, в частности, использовать отрицательные сопротивления, а осуществить их хотя и не невозможно, но довольно трудно.

Под четырехполюсником, обращенным по отношению к данному, понимают четырехполюсник, полученный из исходного при изменении знаков токов и направления распространения. Замена четырехполюсника на обращенный не эквивалентна просто изменению направления распространения, так как в последнем случае все сводится только к замене входа на выход.

Определим теперь характеристическую матрицу R обращенного четырехполюсника, если задана исходная матрица B . Применение матрицы B дает

$$\begin{aligned} x'_1 &= b_{11}x_1 + b_{12}x_2, \\ x'_2 &= b_{21}x_1 + b_{22}x_2. \end{aligned}$$

Замена входа на выход означает переход к матрице (a_{ij}) , обратной матрице (b_{ij}) , т. е.

$$\begin{aligned} x'_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2, \\ x'_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2. \end{aligned}$$

Изменяя знаки токов, получаем

$$\begin{aligned} x'_1 &= a_{11}x_1 - a_{12}x_2, \\ x'_2 &= -a_{21}x_1 + a_{22}x_2. \end{aligned}$$

Итак, матрица $R = (r_{ij})$ задается соотношением

$$\begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} \\ r_{21} & r_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} - a_{12} & \\ -a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{22} & b_{12} \\ b_{21} & b_{11} \end{pmatrix}, \quad (58.3)$$

где учтено равенство (56.6) и то обстоятельство, что детерминант $|a|$ равен единице. Очевидно,

$$|r_{ij}| = |a_{ij}| = |b_{ij}| = 1. \quad (58.4)$$

Легко видеть, что для перехода от матрицы B к матрице R достаточно поменять местами безразмерные величины b_{11} и b_{22} , тогда как элементы b_{12} (импеданс) и b_{21} (полная проводимость) остаются на своих местах с прежними знаками. Поскольку в матрице R обращенного четырехполюсника фигурирует импеданс того же знака, что и в матрице прямого четырехполюсника, входящие в него сопротивления остаются положительными.

Мы будем называть четырехполюсник *обратимым* (или симметричным), если он совпадает со своим обращенным четырехполюсником; для этого необходимо, чтобы

$$\begin{aligned} R &= B, \\ b_{11} &= b_{22}. \end{aligned}$$

Поскольку детерминант B равен единице, то

$$b_{11} = b_{22} = \sqrt{1 + b_{12}b_{21}}.$$

Следовательно, характеристическая матрица симметричного четырехполюсника зависит только от двух параметров и имеет вид

$$B = \begin{pmatrix} \sqrt{1 + b_{12}b_{21}} & b_{12} \\ b_{21} & \sqrt{1 + b_{12}b_{21}} \end{pmatrix}.$$

§ 59. Матрицы четырехполюсников и группа C_2

В предыдущем параграфе было отмечено, что матрицы, которые используются в теории четырехполюсников и с которыми мы снова встретимся в следующих главах, образуют группу двухрядных квадратных матриц с единичным детерминантом.

Эта группа удовлетворяет следующим условиям:

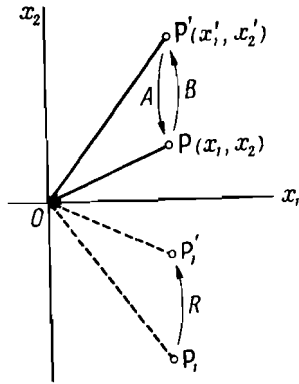
- 1) все матрицы группы являются двухрядными квадратными матрицами с единичным детерминантом;
- 2) каждой матрице соответствует обратная матрица, также являющаяся элементом группы;

3) матрица, образованная произведением двух матриц, также принадлежит к группе;

4) в группе существует единичная матрица I .

Группа, образованная матрицами четырехполюсников, является подгруппой хорошо известной математикам группы C_2 , которая используется в теории спина и в релятивистской квантовой механике.

К этой группе матриц мы пришли, излагая теорию электрических четырехполюсников. Небезынтересно сравнить данное нами определение с классическим геометрическим определением, которым пользуются в математике.



Фиг. 136.

Рассмотрим две комплексные переменные величины x_i и x'_i , изобразив их на фиг. 136 в виде двух пар действительных величин. На плоскости с прямоугольными координатными осями Ox_1 и Ox_2 точкам с координатами (x_1, x_2) и (x'_1, x'_2) можно сопоставить соответственно два вектора P и P' . Тогда смысл соотношений (56.7) таков: матрица A переводит вектор P' в вектор P , в то время как обратная ей матрица B совершает операцию перевода P в вектор P' (фиг. 136).

Найдем теперь геометрический смысл введенного нами понятия произведения двух матриц.

Возвращаясь к формулам (57.1) и (57.2), нетрудно видеть, что они определяют два последовательных преобразования; первое переводит вектор P в вектор P' с помощью матрицы C , а второе — вектор P' в P'' с помощью матрицы D .

Геометрическая операция, соответствующая симметричному четырехполюснику (см. § 58), в теории матриц не рассматривалась. Представить ее можно следующим образом.

Пусть векторы P_1 и P'_1 симметричны соответственно векторам P и P' относительно оси Ox_1 . Нетрудно видеть, что матрица R [см. формулу (58.3)] определяет преобразо-

вание, позволяющее перейти от вектора P_1 к P'_1 . Тогда матрица, представляющая симметричный четырехполюсник, характеризуется тем, что матрица R , переводящая вектор P_1 в P'_1 , совпадает с матрицей, преобразующей вектор P в P' .

Введем теперь понятие осей матрицы. Пусть имеются два вектора P и P' , где P' получается в результате действия оператора B на вектор P . Направления этих векторов, вообще говоря, не совпадают. Найдем теперь условие, при котором их направления будут совпадать, то есть

$$P' = \xi P$$

или

$$\begin{aligned} x'_1 &= \xi x_1 = b_{11}x_1 + b_{12}x_2, \\ x'_2 &= \xi x_2 = b_{21}x_1 + b_{22}x_2. \end{aligned} \quad (59.1)$$

Эта линейная однородная система уравнений относительно x_1 и x_2 имеет нетривиальное решение только при условии

$$\begin{vmatrix} b_{11} - \xi & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} - \xi \end{vmatrix} = 0. \quad (59.2)$$

Уравнение (59.2) служит уравнением для собственных значений матрицы B . Каждое из двух значений ξ , являющихся решением этого уравнения, определяет ось матрицы B .

Ориентация этих осей находится подстановкой значения ξ , являющегося решением (59.2), в уравнение (59.1). Соответствующие угловые коэффициенты осей определяются соотношением

$$S = \frac{x'_2}{x'_1} = \frac{x_2}{x_1} = \frac{b_{21} + b_{22}S}{b_{11} + b_{12}S} \quad (59.3)$$

или

$$b_{12}S^2 + (b_{11} - b_{22})S - b_{21} = 0. \quad (59.4)$$

Смысл, который эти величины имеют в теории четырехполюсников, будет выяснен ниже.

Определив оси OY_1 и OY_2 матрицы преобразования и ее собственные значения (ξ_1, ξ_2) , можно дать этим характеристикам простое геометрическое толкование. Геометрическое преобразование, которое матрица совершает на плоскости, сводится к растяжению в ξ_1 раз вдоль оси OY_1 и в ξ_2 раз вдоль оси OY_2 .

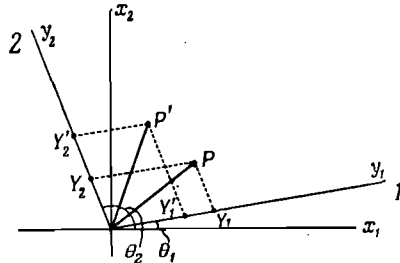
Любой вектор \mathbf{P} можно разложить на компоненты Y_1 и Y_2 по осям матрицы; умножая их соответственно на ξ_1 и ξ_2 , получаем компоненты вектора \mathbf{P}' , являющегося преобразованием вектора \mathbf{P} ,

$$Y'_1 = \xi_1 Y_1, \quad Y'_2 = \xi_2 Y_2. \quad (59.5)$$

Если оси матрицы OY_1 и OY_2 выбрать в качестве координатных осей, то легко видеть, что относительно этих осей матрица перехода приобретает диагональную форму

$$\begin{pmatrix} \xi_1 & 0 \\ 0 & \xi_2 \end{pmatrix}.$$

Все сказанное выше относится к матрице (b_{ij}) , обратной (a_{ij}) . Можно показать, что последняя имеет те же оси,



Фиг. 137. 1 — 1-я ось. Собственное значение ξ_1 ; $\operatorname{tg} \theta_1 = S_1$; 2 — 2-я ось. Собственное значение ξ_2 ; $\operatorname{tg} \theta_2 = S_2$.

что и (b_{ij}) , но ее собственные значения равны ξ_1^{-1} и ξ_2^{-1} . Это обстоятельство хорошо иллюстрирует тот факт, что матрица (a_{ij}) определяет преобразование перехода от вектора \mathbf{P}' к вектору \mathbf{P} .

Получим соотношения, связывающие Y_1 , Y_2 с x_1 , x_2 . В обозначениях фиг. 137

$$\begin{aligned} x_1 &= Y_1 \cos \theta_1 + Y_2 \cos \theta_2, \\ x_2 &= Y_1 \sin \theta_1 + Y_2 \sin \theta_2, \end{aligned} \quad (59.6)$$

где

$$\begin{aligned} S_1 &= \operatorname{tg} \theta_1, \\ S_2 &= \operatorname{tg} \theta_2, \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} x_2 &= y_1 + y_2, & y_1 &= Y_1 \sin \theta_1, \\ x_1 &= \frac{1}{S_1} y_1 + \frac{1}{S_2} y_2, & y_2 &= Y_2 \sin \theta_2. \end{aligned} \quad (59.7)$$

Здесь S_1 и S_2 — корни уравнения (59.4), определяющие наклон осей матрицы (b_{ij}) . Эти соотношения будут использованы в теории четырехполюсника.

Только что выясненная геометрическая интерпретация позволяет установить простую теорему: *две матрицы, оси которых совпадают, коммутируют друг с другом*

$$DC = CD. \quad (59.8)$$

Действительно, при разложении по общим осям OY_1 и OY_2 преобразование сводится к простому алгебраическому умножению

$$Y'_1 = \xi_{1C} \xi_{1D} Y_1 = \xi_{1D} \xi_{1C} Y_1,$$

$$Y'_2 = \xi_{2C} \xi_{2D} Y_2 = \xi_{2D} \xi_{2C} Y_2,$$

где (ξ_{1C}, ξ_{2C}) и (ξ_{1D}, ξ_{2D}) — собственные значения матриц C и D .

§ 60. Характеристический или волновой импеданс четырехполюсника

В гл. 5 мы детально изучили понятие характеристического импеданса в применении к одномерной механической решетке. Характеристический импеданс равен механическому импедансу ячейки, если частицы, входящие в нее, колеблются так же, как в случае распространения простой волны через неограниченную решетку. Здесь мы дадим аналогичное определение характеристического импеданса четырехполюсника.

Обозначим через z' импеданс, на который замкнут четырехполюсник (см. фиг. 138), так что

$$x'_1 = z' x'_2, \quad (60.1)$$

и будем называть z' *выходным импедансом*.

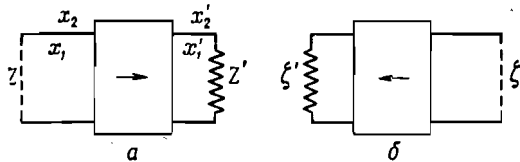
Подставляя это значение x'_1 в уравнение (56.2), получаем, учитывая соотношение (56.6),

$$\begin{aligned} x_1 &= (a_{11} z' + a_{12}) x'_2 = (b_{22} z' - b_{12}) x'_2, \\ x_2 &= (a_{21} z' + a_{22}) x'_2 = (-b_{21} z' + b_{11}) x'_2. \end{aligned} \quad (60.2)$$

Четырехполюсник, замкнутый справа на импеданс z' , слева замыкается на импеданс z (входной импеданс), причем

$$z = \frac{x_1}{x_2} = \frac{b_{22}z' - b_{12}}{-b_{21}z' + b_{11}}. \quad (60.3)$$

Такие же выкладки можно проделать и для обращенного четырехполюсника (см. фиг. 138). Обозначая через ζ и ζ'



Фиг. 138. *a* — прямой четырехполюсник; *b* — обращенный четырехполюсник.

соответственно его входной и выходной импедансы и учитывая соотношение (58.3), определяющее матрицы обращенного четырехполюсника, получаем, что

$$\zeta = -\frac{b_{11}\zeta' - b_{12}}{b_{21}\zeta' - b_{22}}. \quad (60.4)$$

Характеристический импеданс получаем при условии, что $z = z'$, или, что то же, $\zeta = \zeta'$. (60.5)

В этом случае величину z , которую мы будем обозначать теперь через Z , называют характеристическим импедансом для прямого направления распространения, а ζ — характеристическим импедансом для обратного направления.

Обе величины, Z и $-\zeta$, являются корнями одного и того же уравнения, которое можно получить из (60.3) или (60.4),

$$b_{21}z^2 + (b_{22} - b_{11})z - b_{12} = 0. \quad (60.6)$$

Сравнивая уравнения (60.3) и (59.4), получаем соотношения

$$Z = \frac{1}{S_1}, \quad \zeta = -\frac{1}{S_2},$$

из которых следует, что характеристические импедансы обратны угловым коэффициентам осей матрицы (см. фиг. 137).

Часто для характеристических импедансов используют другие обозначения:

$$Z = k_1, \quad \zeta = k_2. \quad (60.7)$$

Для симметричного четырехполюсника $b_{11} = b_{22}$, и оба характеристических импеданса равны

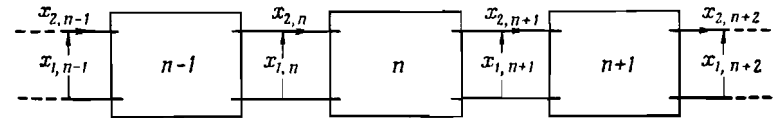
$$Z = \zeta = \sqrt{\frac{b_{12}}{b_{21}}}.$$

В этом случае оси, изображенные на фиг. 137, симметричны относительно координатных осей OX_1 и OX_2 .

Для цепочки из идентичных четырехполюсников один из характеристических импедансов соответствует монохроматической волне, распространяющейся слева направо, другой — распространению волны справа налево.

§ 61. Распространение волны вдоль цепочки четырехполюсников

Рассмотрим бесконечную линию из идентичных четырехполюсников, образующих цепочку (фиг. 139). Распространение монохроматической волны вдоль такой линии характеризуется тем, что при переходе от n -го четырехполюсника



Фиг. 139.

к $n+1$ -му напряжение и ток умножаются на одну и ту же комплексную величину ξ :

$$\begin{aligned} x_{1,n+1} &= \xi x_{1n}, \\ x_{2,n+1} &= \xi x_{2n}. \end{aligned} \quad (61.1)$$

Складывая эти выражения с выражениями (56.5), получаем однородную линейную систему относительно $x_{1,n}$ и $x_{2,n}$

$$\begin{aligned} \xi x_{1n} &= b_{11}x_{1n} + b_{12}x_{2n}, \\ \xi x_{2n} &= b_{21}x_{1n} + b_{22}x_{2n}, \end{aligned} \quad (61.2)$$

условием разрешимости которой является

$$\begin{vmatrix} b_{11} - \xi & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} - \xi \end{vmatrix} = \xi^2 - (b_{11} + b_{22})\xi + 1 = 0, \quad (61.3)$$

поскольку детерминант $|b_{ij}| = 1$.

Уравнение (61.3), позволяющее найти величину ξ как функцию параметров четырехполюсника, является не чем иным, как уравнением для собственных значений матрицы (b_{ij}) , и, следовательно, искомые величины ξ равны ее собственным значениям. Корнями уравнения (61.3) будут

$$\xi_1, \xi_2 = \frac{1}{2}(b_{11} + b_{22}) \pm \sqrt{\frac{(b_{11} + b_{22})^2}{4} - 1}. \quad (61.4)$$

Распространение без затухания имеет место в том случае, если

$$|\xi| = 1, \quad \xi = e^{j\beta} \quad (j = \sqrt{-1}).$$

Если $|\xi| < 1$, то распространение слева направо происходит с затуханием, если же $|\xi| > 1$, то затухают волны, распространяющиеся справа налево.

Чтобы вернуться к прежним обозначениям, положим в общем случае

$$\xi = e^{\gamma} = e^{\alpha + j\beta}$$

(γ — постоянная распространения).

Поскольку произведение двух корней ξ_1 и ξ_2 равно единице, можно записать

$$\begin{aligned} \xi_1 &= e^{-\gamma} = e^{-\alpha - j\beta}, \\ \xi_2 &= e^{\gamma} = e^{\alpha + j\beta}, \\ \frac{\xi_1 + \xi_2}{2} &= \operatorname{ch} \gamma = \frac{1}{2}(b_{11} + b_{22}). \end{aligned} \quad (61.5)$$

Здесь α — постоянная затухания четырехполюсника, а β — фазовый сдвиг, создаваемый им в бесконечной линии. При $\alpha = 0$ волны распространяются без затухания, когда, как уже отмечалось,

$$\xi_1 = e^{-j\beta}, \quad \xi_2 = e^{j\beta}. \quad (61.6)$$

Если $\alpha \neq 0$ и, скажем, положительно, то решение ξ_1 соответствует распространению слева направо, а решение ξ_2 — распространению справа налево; это непосредственно видно,

если учесть множитель $e^{j\omega t}$, который мы все время опускали.

Предположим, что вдоль всей линии имеет место стационарное распределение токов, подчиняющееся уравнениям (61.1), (61.3) и (61.6). В любой точке сочленения элементов цепочки отношение напряжения x_1 к току x_2 постоянно, что, согласно (61.1), соответствует некоторому импедансу

$$Z = \frac{x_{1n}}{x_{2n}} = \frac{b_{12}}{\xi - b_{11}} = \frac{\xi - b_{22}}{b_{21}}. \quad (61.7)$$

Два решения ξ_1 и ξ_2 для различных направлений распространения в линии дают два возможных значения $Z = z_1$ и $Z = z_2$. Легко проверить, что z_1 и z_2 совпадают с характеристическими импедансами, рассмотренными в предыдущем параграфе,

$$z_1 = k_1 = Z, \quad z_2 = -k_2 = -\zeta.$$

Представим теперь ограниченный отрезок линии, содержащий четырехполюсники $n, n+1, \dots, n+p$, который замкнут справа на импеданс Z . Поскольку все процессы происходят при этом так же, как если бы линия не была ограничена справа, то импеданс такого отрезка слева, на входе, опять равен Z , причем, если весь отрезок сводится к одному четырехполюснику, мы снова приходим к случаю, изображенному на фиг. 138, а. Если же левый конец отрезка линии замкнут на импеданс ζ , то отрезок можно рассматривать как линию, неограниченную слева и представляющую собой для распространяющейся справа волны импеданс ζ . Для одного четырехполюсника этому соответствует схема на фиг. 138, б.

Это рассуждение, которое приводит к разложению волны на две составляющие, распространяющиеся вдоль линии в противоположных направлениях, эквивалентно геометрическим схемам, рассмотренным в § 59 и приводящим к точно таким же вычислениям. Приведем простой пример.

Рассмотрим отрезок линии, содержащий n идентичных четырехполюсников, и, предположив, что на левом конце этого отрезка имеется напряжение x_{10} и ток x_{20} , найдем напряжение x_{1n} и ток x_{2n} на выходе n -го четырехполюсника.

Геометрически эту задачу можно сформулировать следующим образом: задаваясь начальными координатами (x_{10}, x_{20})

§ 62. Применение теории к симметричному четырехполюснику

Выражение (60.6) определяет импедансы четырехполюсника как функции параметров входящих в него электрических цепей. В случае симметричного четырехполюсника, характеризуемого условием $b_{11} = b_{22}$, это соотношение упрощается и характеристические импедансы становятся равными

$$Z = \zeta = \sqrt{\frac{b_{12}}{b_{21}}}. \quad (62.1)$$

Тогда уравнения (61.14) принимают вид

$$\begin{aligned} x_{1n} &= \operatorname{ch}(n\gamma) x_{10} - Z \operatorname{sh}(n\gamma) x_{20}, \\ x_{2n} &= -\frac{1}{Z} \operatorname{sh}(n\gamma) x_{10} + \operatorname{ch}(n\gamma) x_{20}. \end{aligned} \quad (62.2)$$

Из общего выражения для характеристического импеданса симметричного четырехполюсника [соотношение (62.1)] следует, что этот импеданс представляет собой среднее геометрическое импедансов четырехполюсника в разомкнутой и короткозамкнутой цепи. Действительно, для разомкнутой цепи $z' = \infty$ и из уравнения (60.3) $z = -b_{22}/b_{21}$, тогда как при коротком замыкании ($z' = 0$) получаем $z = -b_{12}/b_{11}$. Сделанное выше замечание является очевидным, если учесть, что $b_{11} = b_{22}$.

Для произвольного четырехполюсника импедансы

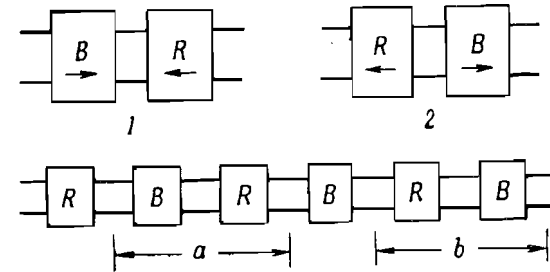
$$z_{I1} = \sqrt{\frac{b_{12}b_{22}}{b_{21}b_{11}}}, \quad z_{I2} = \sqrt{\frac{b_{12}b_{11}}{b_{21}b_{22}}}, \quad (62.3)$$

которые называются *кажущимися импедансами*, представляют собой средние геометрические импедансов четырехполюсников в разомкнутой и короткозамкнутой цепях для двух различных направлений. Как мы только что показали, они равны, если четырехполюсник симметричен.

Кажущиеся импедансы, определенные выше, не связаны непосредственно со свойствами цепей из одинаковых четырехполюсников. Мы сейчас уточним это, показав, что они представляют собой в действительности характеристические импедансы цепи из симметричных четырехполюсников, каждый из которых состоит из четырехполюсника с матрицей B ,

соединенного с обращенным четырехполюсником с матрицей R . Такая цепь схематически изображена на фиг. 141.

Отметим, что эта задача допускает два подхода в зависимости от того, рассматривается ли основной элемент цепи как состоящий из совокупности (B, R) или из совокупности (R, B) . Рассмотрим первый случай.



Ф и г. 141.

Характеристическая матрица совокупности (B, R) равна произведению RB характеристических матриц входящих в нее четырехполюсников

$$RB = \begin{pmatrix} r_{11}b_{11} + r_{12}b_{21} & r_{11}b_{12} + r_{12}b_{22} \\ r_{21}b_{11} + r_{22}b_{21} & r_{21}b_{12} + r_{22}b_{22} \end{pmatrix}. \quad (62.4)$$

Используя для элементов r_{ik} соотношение (58.3), окончательно получаем

$$RB = \begin{pmatrix} b_{11}b_{22} + b_{12}b_{21} & 2b_{12}b_{22} \\ 2b_{11}b_{21} & b_{11}b_{22} + b_{12}b_{21} \end{pmatrix}. \quad (62.5)$$

Эта матрица полностью соответствует симметричному четырехполюснику, поскольку ее диагональные элементы равны. В таком случае существует *только один* характеристический импеданс, который, согласно (62.1), равен корню квадратному из отношения недиагональных элементов и, следовательно, совпадает с первым из кажущихся импедансов z_{I1} . Комбинация (R, B) приводит ко второму кажущемуся импедансу z_{I2} .

В электротехнике кажущимся импедансам часто уделяют большое внимание, хотя они не соответствуют основным свойствам матрицы преобразования B .

§ 63. Полосы пропускания и полосы непропускания в цепях четырехполюсников

Выше мы отметили, что в зависимости от того, отлична от нуля или нет величина α , волны в цепи четырехполюсников распространяются с затуханием или без него [см. (61.5)].

Если $\alpha = 0$, то затухание отсутствует, и из уравнения (61.5)

$$\xi_1, \xi_2 = \cos \beta \pm j \sin \beta \quad (63.1)$$

или, как было показано выше [уравнение (61.4)],

$$\xi_1, \xi_2 = \frac{1}{2} (b_{11} + b_{22}) \pm \sqrt{\frac{(b_{11} - b_{22})^2}{4} - 1}.$$

Если положить $b = \frac{1}{2} (b_{11} + b_{22})$, то получим

$$\xi_1, \xi_2 = b \pm \sqrt{b^2 - 1} = b \pm j \sqrt{1 - b^2} \quad (j = \sqrt{-1}). \quad (63.2)$$

Из сравнения (63.1) и (63.2) следует, что затухание будет отсутствовать, если число b действительно:

$$\cos \beta = b, \quad -1 < b < 1. \quad (63.3)$$

Отметим, впрочем, что эти общие условия распространения без затухания можно получить, исходя из соотношения (61.5); действительно, полагая в нем $\alpha = 0$, имеем

$$\operatorname{ch} \gamma = \operatorname{ch} j\beta = \cos \beta = \frac{1}{2} (b_{11} + b_{22}).$$

Поскольку коэффициенты b_{ij} зависят от частоты, условия (63.3) позволяют определить полосы пропускания.

Если цепи, образованные четырехполюсниками, не содержат активных сопротивлений, то все коэффициенты ζ_{ik} из (54.13), так же как и коэффициенты χ_{ik} и z_{ik} из уравнений (55.3) и (55.4), являются чисто мнимыми. Отсюда вытекает, что параметры b и c из (55.8) чисто мнимы. Следовательно, элементами характеристической матрицы четырехполюсника, в котором отсутствуют сопротивления, будут:

$$b_{11} \quad b_{12} \quad b_{21} \quad b_{22},$$

причем

$$b_{12} = j\beta_{12}, \quad b_{21} = j\beta_{21}, \quad (63.4)$$

а b_{11} , b_{22} , β_{12} и β_{21} действительны.

При этих предположениях можно утверждать, что волна будет распространяться без затухания, если коэффициенты b_{11} , b_{22} действительны и

$$-2 \leq b_{11} + b_{22} \leq 2. \quad (63.5)$$

Если цепи содержат активные сопротивления, то первое из этих условий следует заменить условием (63.3), которое предполагает, что сумма $b_{11} + b_{22}$ действительна, т. е. что b_{11} и b_{22} комплексно сопряжены ($b_{11} = b_{22}^*$).

В общем случае можно сказать, что распространение происходит без затухания, если

$$1) |b_{11} + b_{22}| \leq 2;$$

2) во всех цепях отсутствуют активные сопротивления или положительные и отрицательные сопротивления взаимно компенсируются.

Из соотношений (60.6) и (61.7) следует, что характеристические импедансы четырехполюсника равны

$$Z = \frac{\zeta - b_{22}}{b_{21}} = \frac{1}{b_{21}} \left[b_{11} - b_{21} \pm j \sqrt{1 - \frac{(b_{11} + b_{22})^2}{4}} \right]. \quad (63.6)$$

Если четырехполюсник симметричен ($b_{11} = b_{22}$), то это выражение упрощается:

$$Z = \pm j \frac{\sqrt{1 - \frac{(b_{11} + b_{22})^2}{4}}}{b_{21}}.$$

Легко видеть, что при выполнении условия распространения без затухания (63.3) и числитель и знаменатель этого выражения становятся чисто мнимыми, так что импеданс Z действителен. Таким образом, в случае симметричного четырехполюсника импеданс Z является действительным в полосе пропускания и чисто мнимым для всех других частот. Однако этот вывод не распространяется на случай несимметричного четырехполюсника.

Замечание. Формулы, полученные в предыдущих параграфах, являются более общими, чем формулы, полученные из уравнений распространения волн в дискретных структурах, образованных из одинаковых элементов. В зависимости от характера рассматриваемой проблемы смысл величин, обозначаемых в этих формулах через x_1, x_2 , может

быть различен, однако в общих чертах эти явления протекают одинаково. Ниже мы рассмотрим совершенно иные вопросы, которые, однако, в точности сводятся к только что обсуждаемой схеме.

§ 64. Отраженные волны в линиях, замкнутых на импеданс ζ_0

Рассмотрим цепь, состоящую из четырехполюсников с характеристическими импедансами Z и ζ , левый конец которой замкнут на импеданс ζ_0 , играющий роль нулевого четырехполюсника, так что

$$-\zeta_0 = \frac{x_{10}}{x_{20}}. \quad (64.1)$$

Волна, распространяющаяся налево, должна частично отражаться. Возвращаясь к обозначениям § 61, мы определим коэффициент отражения с помощью соотношения

$$\rho = \frac{y_{10}}{y_{20}}.$$

Таким образом,

$$\rho = \frac{-x_{10} + z_2 x_{20}}{x_{10} - z_1 x_{20}} = \frac{z_2 + \zeta_0}{-\zeta_0 - z_1} = \frac{\zeta - \zeta_0}{\zeta_0 + Z}, \quad (64.2)$$

поскольку

$$z_1 = Z, \quad z_2 = -\zeta.$$

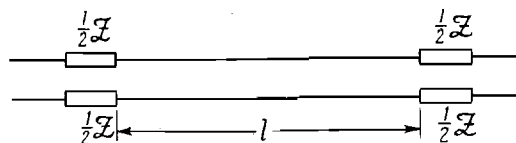
Отсюда следует, что отражение от места соединения двух цепей четырехполюсников будет отсутствовать, если они будут иметь одинаковые характеристические импедансы. В противном случае наблюдается либо частичное отражение волн, если их частоты находятся в полосе пропускания линии, по которой идут волны, либо их полное отражение, если частоты лежат в полосе непропускания этой линии. Отсутствие отражения при равенстве характеристических импедансов тесно связано с теоремой о коммутирующих матрицах, приведенной в конце § 59. Если характеристические импедансы равны, то характеристические матрицы четырехполюсников имеют одинаковые направления осей и коммутируют. Таким образом, если при перемене порядка четырехполюсников свойства линии не изменяются, т. е. если комбинации (C, D) и (D, C) четырехполюсников C и D приводят к одинаковым резуль-

татам, то от места их соединения не будет никакого отражения.

Все эти выводы являются обобщением результатов, установленных в первых главах.

§ 65. Линии, нагруженные двухполюсниками

Успешное изучение таких линий еще раз подчеркивает эффективность матричного метода. Эти линии состоят обычно из двух проводников, нагруженных, как показано на фиг. 142, через равные расстояния l импедансами $1/2 \mathfrak{Z}$. Такая система аналогична случаю, рассмотренному в § 11, где вдоль двух



Фиг. 142.

проводников располагались равные индуктивности. Здесь мы не будем уточнять природу элементов, из которых образованы импедансы $1/2 \mathfrak{Z}$, хотя и предположим, что среди этих элементов нет активных сопротивлений, т. е. что \mathfrak{Z} чисто мнимое число:

$$\mathfrak{Z} = jZ', \quad (65.1)$$

где Z' — действительное число.

Для двухполюсников, образованных из конечного числа элементов и не содержащих отрезков непрерывных линий, зависимость импеданса от частоты ν подчиняется закону

$$Z' = \frac{(\omega^2 - \omega_2^2)(\omega^2 - \omega_4^2) \dots}{(\omega^2 - \omega_1^2)(\omega^2 - \omega_3^2) \dots} L\omega, \quad (65.2)$$

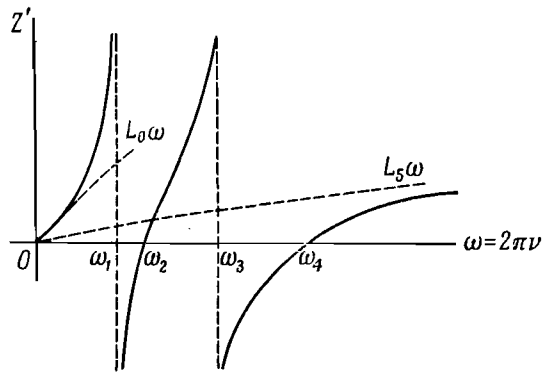
где

$$\omega = 2\pi\nu,$$

$$\omega_1 < \omega_2 < \omega_3 < \omega_4 \dots$$

Общий вид кривой зависимости Z' от частоты в случае двух резонансов напряжений ω_2 и ω_4 и двух резонансов токов ω_1 и ω_3 приведен на фиг. 143. Число этих точек

может быть при желании увеличено, поскольку можно строить двухполюсники с любым количеством ветвей кривой $Z'(\omega)$. Наиболее часто встречающиеся типы двухполюс-



Фиг. 143.

ников представлены на фиг. 144, причем цепи на фиг. 144, а таковы, что

$$L_1 C_1 \omega_1^2 = 1, \quad L_3 C_3 \omega_3^2 = 1,$$

а для цепей на фиг. 144, б

$$L_2 C_2 \omega_2^2 = 1, \quad L_4 C_4 \omega_4^2 = 1.$$

Схема с последовательным соединением весьма удобна, если нужно фиксировать точки ω_1 и ω_3 , а схема с параллельным соединением — если нужно фиксировать точки ω_2 и ω_4 .

Предположим теперь, что на низких частотах двухполюсник пропускает ток и работает, как индуктивность $L_0 = L_1 + L_3$, а на очень высоких частотах сводится к импедансу L_5 (или к параллельному соединению L_0 , L_2 и L_4).

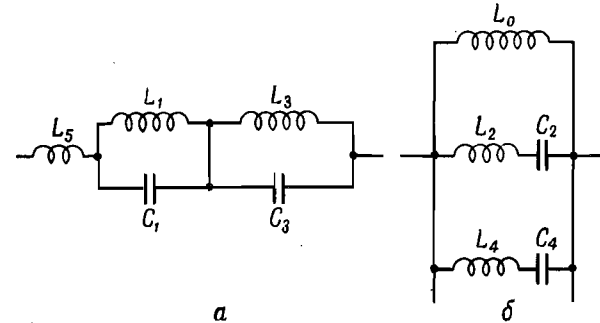
Рассматривая линию, составленную из двухполюсников такого типа, можно сразу же отметить следующее.

1) В точках резонанса токов ω_1 и ω_3 импеданс двухполюсников бесконечен и линия ничего не пропускает. Эти точки лежат в полосе непропускания нагруженной линии.

2) В точках резонанса напряжения ω_2 и ω_4 двухполюсники представляют нулевой импеданс и линия пропускает сигнал

полностью, как если бы она была ненагружена. Эти точки лежат в полосе пропускания.

3) На очень низких частотах линия ведет себя так, как если бы она была нагружена катушками с индуктивностью L_0 . Поэтому мы должны наблюдать: а) полосу пропускания для низких частот при нагрузке L_0 ; б) полосы пропускания для средних и высоких частот, когда наблюдаются резонансы двухполюсников.



Фиг. 144.

Полосы пропускания разделены полосами непропускания; поскольку между существованием этих полос и свойствами двухполюсников существует тесная связь, то эти полосы пропускания и непропускания называются *полосами двухполюсников*. Кроме этих полос, как мы увидим, существуют и так называемые *структурные полосы*, которые в основном зависят от длины элемента l , и уже потом от природы нагрузочных двухполюсников. Применение теории матриц позволит нам сейчас получить некоторые сведения об этих полосах.

На линиях, нагруженных двухполюсниками, мы должны различать сами двухполюсники и отрезки линии, соединяющие их. Матрица (b_{ij}) , характеризующая отрезок непрерывной линии, получается из уравнений (61.14) или, точнее говоря, из соотношений (62.3), поскольку мы должны считать, что оба характеристических импеданса равны

$$\xi = \zeta = k. \quad (65.3)$$

При этих условиях матрица (b_{ij}) получается из соотношений (62.3) после замены в них n на l , если положить, что γ представляет собой постоянную распространения, деленную на единицу длины. В отсутствие сопротивления получаем

$$\gamma = j\beta. \quad (65.4)$$

Итак, отрезок линии эквивалентен симметричному четырех- полюснику с матрицей

$$\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \operatorname{ch} \gamma l & -k \operatorname{sh} \gamma l \\ -\frac{1}{k} \operatorname{sh} \gamma l & \operatorname{ch} \gamma l \end{pmatrix}. \quad (65.5)$$

С другой стороны, легко видеть непосредственно, что матрица, представляющая два двухполюсника $1/2 \mathfrak{Z}$, имеет вид

$$\begin{pmatrix} b'_{11} & b'_{12} \\ b'_{21} & b'_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - \mathfrak{Z} & \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (65.6)$$

Отсюда, наконец, получаем матрицу, представляющую полный элемент линии (отрезок + двухполюсник),

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} b'_{11} & b'_{12} \\ b'_{21} & b'_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} \operatorname{ch} \gamma l + \frac{\mathfrak{Z}}{k} \operatorname{sh} \gamma l, & -\mathfrak{Z} \operatorname{ch} \gamma l - k \operatorname{sh} \gamma l \\ -\frac{1}{k} \operatorname{sh} \gamma l & \operatorname{ch} \gamma l \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (65.7)$$

Полосы пропускания рассматриваемой нагруженной линии можно получить из соотношения (63.5), откуда

$$|B_{11} + B_{22}| \leq 2. \quad (65.8)$$

Второе обязательное условие выполняется автоматически, поскольку \mathfrak{Z} и γ являются чисто мнимыми. Подставляя вместо B_{11} и B_{22} их значения из (65.7), получаем окончательно

$$|\cos B| = \left| \operatorname{ch} \gamma l + \frac{\mathfrak{Z}}{2k} \operatorname{sh} \gamma l \right| = \left| \cos \beta l - \frac{Z'}{2k} \sin \beta l \right| \leq 1, \quad (65.9)$$

где через $\gamma = lB$ обозначена постоянная распространения; взятая для полного элемента нагруженной линии. Границы области пропускания получаем, полагая

$$|\cos B| = \left| \cos \beta l - \frac{Z'}{2k} \sin \beta l \right| = 1. \quad (65.10)$$

Рассматривая это условие, мы определим сейчас два типа полос пропускания, упоминавшиеся выше.

а) *Полосы двухполюсников.* Внутри этих полос лежит точка с таким значением частоты, при которой Z' обращается в нуль (иначе говоря, резонансная частота двухполюсника). Действительно, при $Z' = 0$ условие (65.9) всегда удовлетворяется. По обе стороны от этой частоты Z' принимает либо положительные, либо отрицательные значения, а ширина полосы пропускания определяется из условия (65.9).

б) *Структурные полосы.* Точку такой полосы мы получим, положив

$$\beta l = \frac{\omega l}{W} = N\pi, \quad \beta = \frac{\omega}{W}, \quad (65.11)$$

где N — целое число, а W — фазовая скорость. Тогда

$$\sin \beta l = 0, \quad \cos B = \cos \beta l = \pm 1,$$

и условие (65.10) удовлетворяется.

Точка, определяемая из (65.11), соответствует одной из границ полосы.

Если двухполюсник с импедансом \mathfrak{Z} ведет себя на этой частоте как индуктивность ($Z' > 0$), то полоса пропускания простирается в сторону больших частот, если же он ведет себя как емкость ($Z' < 0$), то полоса пропускания соответствует более низким частотам по сравнению с той, которая определяется из (65.11). Докажем это утверждение.

Полоса пропускания ограничена значениями B , равными

$$B_1 = \beta l = N\pi, \quad \cos B_1 = \pm 1$$

и

$$B_2 = (N + 1)\pi, \quad \cos B_2 = -\cos N\pi = \mp 1.$$

Предположим, что ширина полосы ϵ мала, что соответствует случаю двухполюсников, импеданс которых \mathfrak{Z} достаточно велик по модулю. На второй границе полосы

$$\beta l = N\pi + \epsilon;$$

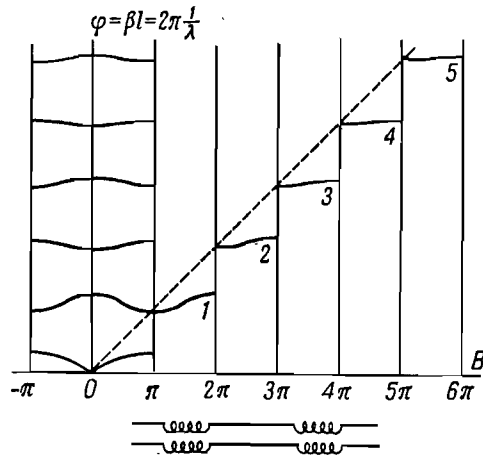
и должно выполняться соотношение

$$\begin{aligned} \cos(N+1)\pi &= -\cos N\pi = \cos(N\pi + \varepsilon) - \frac{Z'}{2k} \sin(N\pi + \varepsilon) = \\ &= \cos N\pi - \frac{Z'}{2k} \cos N\pi \cdot \varepsilon. \end{aligned}$$

В результате

$$\varepsilon = \frac{4k}{Z'}. \quad (65.12)$$

Эта величина мала, если модуль $|Z'|$ велик по сравнению с характеристическим импедансом линии k . Знаки ε и Z'



Фиг. 145.

одинаковы, что доказывает сделанное выше утверждение о положении полосы пропускания относительно ее границы, определяемой уравнением (65.11).

Применим теперь изложенную теорию к двум простым примерам.

1) *Линия, нагруженная индуктивностями.* Обозначим через L_0 коэффициент самоиндукции линии; тогда

$$Z' = L_0\omega.$$

Единственный нуль получается при $\omega = 0$; это хорошо знакомая полоса пропускания двухполюсника на низких частотах.

Структурные полосы расположены в области больших частот и лежат между значениями частоты

$$\omega = \frac{N\pi W}{l} \quad \text{и} \quad \omega = (N\pi + \varepsilon) \frac{W}{l}, \quad (65.13)$$

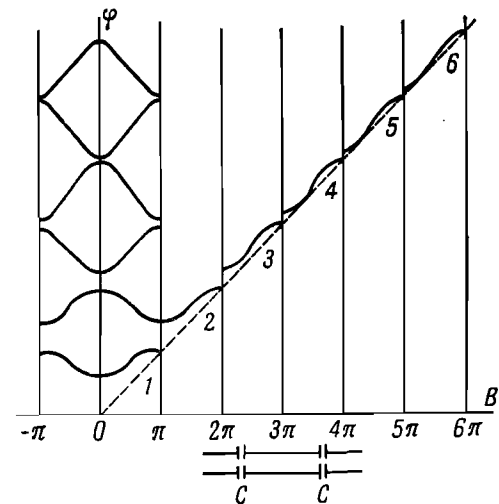
где

$$\varepsilon = \frac{4k}{L_0\omega} = \frac{4kl}{L_0N\pi W} = \frac{4}{N\pi} \frac{L_s}{L_0}, \quad (65.14)$$

а через L_s и C_s обозначены соответственно индуктивность и емкость отрезка линии длины l ; действительно,

$$k = \sqrt{\frac{L_s}{C_s}}, \quad W = \frac{1}{\sqrt{L_s C_s}}. \quad (65.15)$$

По мере повышения частоты полосы пропускания становятся все более узкими. Эти результаты схематически представлены



Фиг. 146.

на фиг. 145, где по оси ординат отложена величина βl , пропорциональная частоте, а по оси абсцисс — угол B . Здесь имеется уже встречавшаяся нам неопределенность; можно положить, что угол B бесконечно увеличивается, но более удобно всегда вычитать из него величину, кратную 2π ,

чтобы полученное значение всегда лежало в интервале $(-\pi, +\pi)$. Таким образом, существует два эквивалентных представления результатов, но первое позволяет проследить, как исчезает действие нагрузочных катушек, когда их коэффициент самоиндукции $L_0 \rightarrow 0$. Все ветви разрывной кривой при этом сглаживаются и сливаются с прямой $\beta l = B$, соответствующей ненагруженной линии. Эти результаты близки к тем, которые были получены в конце гл. 4.

2) *Линия, нагруженная конденсаторами.* Совершенно аналогично проводится рассмотрение линии, нагруженной конденсаторами общей емкостью C_0 . Этот случай представлен на фиг. 146.

Здесь

$$Z' = -\frac{1}{C_0 \omega}, \quad \varepsilon = \frac{4k}{Z'} = -4kC_0 \omega, \quad (65.16)$$

где ε — ширина структурных полос. Полосы двухполюсников исчезают, так как Z' обращается в нуль только при $\omega = \infty$. *Верхние* границы структурных полос даются формулой

$$\omega = \frac{N\pi W}{l}. \quad (65.17)$$

На фиг. 146 этим полосам соответствуют кривые, расположенные слева от прямой $\beta l = B$; полосы эти постепенно вытягиваются и почти полностью соединяются.

§ 66. Линии, нагруженные четырехполюсниками

Эта задача подобна предыдущей с той лишь разницей, что двухполюсники заменены на четырехполюсники.

Характеристическая матрица четырехполюсников (b'_{ij}) в общем виде определена уравнением (61.14), а матрица (b_{ij}) , определяющая отрезки линии длины l , имеет вид (65.5). Таким образом,

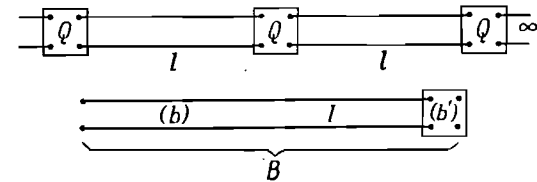
$$\begin{pmatrix} b'_{11} & b'_{12} \\ b'_{21} & b'_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \zeta e^{\gamma l} + Z e^{-\gamma l} & -2Z\zeta \operatorname{sh} \gamma l \\ -2 \operatorname{sh} \gamma l & Z e^{\gamma l} + \zeta e^{-\gamma l} \end{pmatrix} \frac{1}{Z + \zeta}, \quad (66.1)$$

где Z и ζ — характеристические импедансы четырехполюсника, а γ — его постоянная распространения (мы предпола-

гаем для общности $Z \neq \zeta$; четырехполюсник не симметричный). Кроме того,

$$\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \operatorname{ch} \gamma l & -k \operatorname{sh} \gamma l \\ -\frac{1}{k} \operatorname{sh} \gamma l & \operatorname{ch} \gamma l \end{pmatrix}, \quad (66.2)$$

где k — характеристический импеданс линии, а γ — постоянная распространения, деленная на единицу длины.



Фиг. 147.

Матрица B , представляющая (см. фиг. 147) элемент линии (отрезок линии + четырехполюсник), получается перемножением этих двух матриц:

$$B = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b'_{11} & b'_{12} \\ b'_{21} & b'_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = \frac{1}{Z + \zeta} \begin{pmatrix} \mathcal{A}_1 & \mathcal{A}_3 \\ \mathcal{A}_2 & \mathcal{A}_4 \end{pmatrix},$$

где $\mathcal{A}_1 = \frac{2Z\zeta}{k} \operatorname{sh} \gamma l \operatorname{sh} \gamma l + \operatorname{ch} \gamma l [Z e^{-\gamma l} + \zeta e^{\gamma l}]$,

$$\mathcal{A}_2 = -2 \operatorname{sh} \gamma l \operatorname{ch} \gamma l - \left(\frac{Z}{k} e^{\gamma l} + \frac{\zeta}{k} e^{-\gamma l} \right) \operatorname{sh} \gamma l,$$

$$\mathcal{A}_3 = -k \operatorname{sh} \gamma l [Z e^{-\gamma l} + \zeta e^{\gamma l}] - 2Z\zeta \operatorname{sh} \gamma l \operatorname{ch} \gamma l,$$

$$\mathcal{A}_4 = 2k \operatorname{sh} \gamma l \operatorname{sh} \gamma l + \operatorname{ch} \gamma l [Z e^{\gamma l} + \zeta e^{-\gamma l}]. \quad (66.3)$$

Предположим теперь, что в четырехполюсник не входят сопротивления; это приводит к условиям

$$\begin{aligned} b'_{11}, b'_{22} & \text{— действительные числа,} \\ b'_{12}, b'_{21} & \text{— чисто мнимые числа,} \end{aligned} \quad (66.4)$$

налагающим некоторые ограничения на импедансы Z и ζ .

В полосе пропускания цепочки из четырехполюсников постоянная γ' — чисто мнимая величина ($\gamma' = j\beta'$), откуда, с учетом (66.4), следует

$$Z = \zeta^*. \quad (66.5)$$

В полосе непропускания той же цепочки из четырехполюсников

постоянная γ' — действительная величина ($\gamma' = \alpha'$),

$$Z \text{ и } \zeta \text{ — чисто мнимые величины.} \quad (66.6)$$

Эти условия соответствуют произвольному четырехполюснику. Если он симметричен, то, как известно, его характеристические импедансы равны, причем они являются действительными величинами в полосе пропускания и чисто мнимыми в полосе непропускания; все эти результаты были получены в § 63.

Рассмотрим нагруженную линию, элемент которой характеризуется матрицей $B = (B_{ij})$ [см. выражение (66.3)]. Условие, определяющее положение полосы пропускания, имеет вид

$$|\cos B| = \frac{1}{2} |B_{11} + B_{22}| = \\ = \left| \operatorname{ch} \gamma' \operatorname{ch} \gamma l + \frac{k + (Z\zeta/k)}{Z + \zeta} \operatorname{sh} \gamma' \operatorname{sh} \gamma l \right| \leq 1, \quad (66.7)$$

где $\gamma = j\beta$, поскольку линия не содержит сопротивлений.

В этом случае полосы пропускания также могут быть разбиты на два класса — *полосы четырехполюсников* и *структурные полосы*.

Найдем сначала полосы, связанные с четырехполюсниками. Если частота лежит в полосе пропускания цепочки из четырехполюсников, то

$$\gamma = j\beta, \quad \gamma' = j\beta'.$$

Согласно соотношению (66.5), положим

$$\begin{aligned} Z &= Z_r + jZ_i, \\ \zeta &= Z_r - jZ_i, \end{aligned} \quad (66.8)$$

где Z_r и Z_i — действительные числа. При этих условиях получаем

$$|\cos B| = \left| \cos \beta' \cos \beta l - \frac{k^2 + Z_r^2 + Z_i^2}{2kZ_r} \sin \beta' \sin \beta l \right| \leq 1. \quad (66.9)$$

Из этой полосы пропускания цепочки из четырехполюсников мы можем найти полосы пропускания линии, нагруженной четырехполюсниками; поэтому условия

$$\frac{k^2 + Z_r^2 + Z_i^2}{2kZ_r} = \pm 1, \quad \cos B = \cos(\beta' \pm \beta l) \quad (66.10)$$

являются решением (66.7). Для более подробного изучения этих областей нужно найти выражение для характеристического импеданса в зависимости от частоты.

Если четырехполюсники симметричны, то $Z_i = 0$ и условия (66.10) сводятся к соотношению

$$Z_r = \pm k, \quad (66.11)$$

которое означает, что нагруженная линия обладает полосами пропускания, включающими все частоты из полосы пропускания цепочки из четырехполюсников, характеристический импеданс которых (действительный) равен импедансу линии. В этом случае в точках соединения четырехполюсников и линии не будет никакого отражения.

Если частота находится далеко внутри области непропускания четырехполюсников, то импедансы Z и ζ будут чисто мнимыми:

$$Z = jZ', \quad \zeta = j\zeta', \quad (66.12)$$

а постоянная распространения γ' — действительной величиной: $\gamma' = \alpha'$.

Тогда формула (66.7) принимает вид

$$|\cos B| = \left| \operatorname{ch} \alpha' \cos \beta l + \frac{k^2 - Z'\zeta'}{k(Z' + \zeta')} \operatorname{sh} \alpha' \sin \beta l \right| \leq 1. \quad (66.13)$$

Это соотношение, вообще говоря, не выполняется. Однако могут существовать структурные полосы по соседству с частотами, для которых $\cos B = 0$, т. е.

$$\operatorname{ctg} \beta l = \frac{Z'\zeta' - k^2}{k(Z' + \zeta')} \operatorname{th} \alpha'. \quad (66.14)$$

В заключение мы воспользуемся этим результатом, чтобы еще раз показать, к какому упрощению приводит матричный метод. Сейчас мы увидим, как можно другим путем получить некоторые результаты гл. 8.

Для симметричных четырехполюсников неравенство (66.7), определяющее полосы пропускания, имеет вид

$$\left| \operatorname{ch} \gamma' \operatorname{ch} \gamma l + \frac{1}{2} \left(\frac{k}{Z} + \frac{Z}{k} \right) \operatorname{sh} \gamma' \operatorname{sh} \gamma l \right| \leq 1, \quad (66.15)$$

поскольку $Z = \zeta$. Если в этом соотношении положить

$$\begin{aligned} \gamma' &= \chi_1 l_1, & \gamma l &= \chi_2 l_2, \\ k &= \chi_1, & Z &= \chi_2, \end{aligned} \quad (66.16)$$

то получим в точности уравнение (50.12), встречавшееся нам при изучении уравнения Хилла (см. § 50). Теория этого уравнения приводит нас к рассмотрению детерминанта четвертого порядка, эквивалентного детерминанту матрицы (66.3). Только что проведенное нами исследование является важным обобщением случаев, рассмотренных в § 50.

ЛИТЕРАТУРА

- Brillouin L., Rev. gén. Eléc., 39, 3 (1936), 42, 771, 803 (1937).
 Pipes L. A., El. Eng., 56, 1177 (1937).
 Parodi M., Introduction à l'étude des reseaux électriques, Paris, 1948.

НЕПРЕРЫВНЫЕ ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ ЛИНИИ

§ 67. Переход от линии четырехполюсников к непрерывной линии

До сих пор мы изучали только линии, состоящие из конечных элементов, каждому из которых соответствовало конечное преобразование с матрицей (b_{ij}) . Если бы четырехполюсник был бесконечно малым, то он совершал бы бесконечно малое преобразование, так что величины на его выходе имели бы почти то же значение, что и на входе, а соответствующая ему матрица (b_{ij}) мало отличалась бы от единичной. Обозначим через dz бесконечно малый элемент линии; соответствующая этому элементу матрица (b_{ij}) может быть записана в виде

$$b_{ij} = \begin{pmatrix} 1 + \epsilon_{11} dz & \epsilon_{12} dz \\ \epsilon_{21} dz & 1 + \epsilon_{22} dz \end{pmatrix}. \quad (67.1)$$

Обозначая через

$$(\epsilon_{ij}) = \begin{pmatrix} \epsilon_{11} & \epsilon_{12} \\ \epsilon_{21} & \epsilon_{22} \end{pmatrix},$$

можно также записать

$$(b_{ij}) = e^{(\epsilon_{ij}) dz}, \quad (67.2)$$

откуда легко получить выражение (67.1), если в разложении экспоненты ограничиться двумя первыми членами.

Согласно общему правилу, детерминант $|b_{ij}|$ должен быть равен единице, для чего необходимо, чтобы

$$\epsilon_{11} = -\epsilon_{22}, \quad (67.3)$$

так как тогда условие $|b_{ij}| = 1$ будет выполняться в первом порядке. Матрица (b_{ij}) , действуя на совокупность двух величин x_1 и x_2 , переводит их в величины

$$x'_1 = x_1 + dx_1, \quad x'_2 = x_2 + dx_2,$$

что записывается в виде

$$\begin{aligned} x'_1 &= b_{11}x_1 + b_{12}x_2 = x_1 + dx_1 = x_1 + (\varepsilon_{11}x_1 + \varepsilon_{12}x_2) dz, \\ x'_2 &= b_{21}x_1 + b_{22}x_2 = x_2 + dx_2 = x_2 + (\varepsilon_{21}x_1 + \varepsilon_{22}x_2) dz. \end{aligned} \quad (67.4)$$

Отсюда следует ($\varepsilon_{11} = -\varepsilon_{22}$)

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dz} &= \varepsilon_{11}x_1 + \varepsilon_{12}x_2, \\ \frac{dx_2}{dz} &= \varepsilon_{21}x_1 + \varepsilon_{22}x_2 \end{aligned} \quad (67.5)$$

или в матричной записи

$$\frac{dX}{dz} = (\varepsilon_{ij}) X,$$

где

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

Если четырехполюсник симметричен, то должно выполняться равенство $b_{11} = b_{22}$. Тогда, учитывая (67.3), получаем

$$\varepsilon_{11} = \varepsilon_{22} = 0. \quad (67.6)$$

Именно такое положение имеет место в телеграфии: кабель определяется следующими параметрами: сопротивлением R , самоиндукцией L , емкостью C и сопротивлением утечки G (рассчитанными на единицу длины). Тогда

$$\frac{dV}{dz} = (R + i\omega L) I, \quad \frac{dI}{dz} = (G + i\omega C) V,$$

где V и I обозначают соответственно напряжение и ток. Эти соотношения можно записать в форме

$$\frac{dx_1}{dz} = \varepsilon_{12}x_2, \quad \frac{dx_2}{dz} = \varepsilon_{21}x_1, \quad (67.7)$$

положив

$$\begin{aligned} \varepsilon_{11} &= \varepsilon_{22} = 0, \\ \varepsilon_{12} &= R + i\omega L, \quad \varepsilon_{21} = G + i\omega C. \end{aligned} \quad (67.8)$$

Первое из этих соотношений показывает, что кабель можно рассматривать как состоящий из бесконечно малых симметричных четырехполюсников.

Вернемся к общему случаю и рассмотрим, как можно исследовать распространение волн вдоль линии, образованной несимметричными бесконечно малыми четырехполюсниками.

Как и в случае конечных четырехполюсников, такое исследование проводится с помощью приведения матрицы к ее осям. Если через γ обозначить постоянную распространения, деленную на единицу длины, то монохроматическая волна, распространяющаяся в данном направлении, определяется соотношением

$$\frac{dx_1}{dz} = \gamma x_1, \quad \frac{dx_2}{dz} = \gamma x_2. \quad (67.9)$$

Учитывая уравнения (67.5), получаем систему

$$\begin{aligned} (\varepsilon_{11} - \gamma) x_1 + \varepsilon_{12} x_2 &= 0, \\ \varepsilon_{21} x_1 + (\varepsilon_{22} - \gamma) x_2 &= 0 \end{aligned} \quad (67.10)$$

с условием разрешимости

$$\begin{vmatrix} \varepsilon_{11} - \gamma & \varepsilon_{12} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} - \gamma \end{vmatrix} = \gamma^2 - \varepsilon_{11}^2 - \varepsilon_{12}\varepsilon_{21} = 0,$$

откуда

$$\gamma = \pm \sqrt{\varepsilon_{11}^2 + \varepsilon_{12}\varepsilon_{21}}. \quad (67.11)$$

Итак, постоянная распространения γ , которая является, вообще говоря, комплексной величиной, представляет собой решение уравнения для собственных значений матрицы (ε_{ij}) . Характеристический импеданс линии принимает значения k_1 и k_2 , причем k_1 соответствует распространению волны слева направо ($-\gamma$), а k_2 — распространению справа налево ($+\gamma$):

$$\begin{aligned} k_1 &= \frac{x_1}{x_2} = \frac{\varepsilon_{12}}{\gamma - \varepsilon_{11}} = \frac{\gamma + \varepsilon_{11}}{\varepsilon_{21}}, \\ -k_2 &= \frac{x_1}{x_2} = \frac{-\varepsilon_{12}}{\gamma + \varepsilon_{11}} = \frac{-\gamma + \varepsilon_{11}}{\varepsilon_{21}}. \end{aligned} \quad (67.12)$$

В случае бесконечно малого симметричного четырехполюсника ($\varepsilon_{11} = \varepsilon_{22} = 0$) получаем

$$\gamma = \pm \sqrt{\varepsilon_{12}\varepsilon_{21}}.$$

откуда характеристический импеданс линии

$$k = \frac{x_1}{x_2} = \frac{\varepsilon_{12}}{\gamma} = \pm \sqrt{\frac{\varepsilon_{12}}{\varepsilon_{21}}} \quad (67.13)$$

имеет одинаковую величину для обоих направлений распространения.

§ 68. Примеры непрерывных линий, представляемых четырехполюсниками

Рассмотрим теперь несколько типов линий, которые могут быть представлены цепочками бесконечно малых четырехполюсников.

а) *Линии с экспоненциально меняющимися параметрами.* Многие практические задачи (экспоненциальные электрические линии, экспоненциальные рупоры громкоговорителей) сводятся к уравнениям, аналогичным уравнениям непрерывных линий, параметры которых меняются экспоненциально с расстоянием. Эти задачи очень тесно связаны с теорией линий бесконечно малых асимметричных четырехполюсников.

Действительно, положив в уравнениях (67.5)

$$\begin{aligned} x_1 &= X_1 e^{\varepsilon_{11} z}, & x_2 &= X_2 e^{-\varepsilon_{11} z}, \\ A_{12} &= \varepsilon_{12} e^{-2\varepsilon_{11} z}, & A_{21} &= \varepsilon_{21} e^{2\varepsilon_{11} z}, \end{aligned} \quad (68.1)$$

получим

$$\frac{dX_1}{dz} = A_{12} X_2, \quad \frac{dX_2}{dz} = A_{21} X_1. \quad (68.2)$$

Эти новые уравнения определяют распространение волны вдоль экспоненциальной линии, характеризуемой параметрами A_{12} и A_{21} .

Так как линия, определяемая матрицей (ε_{ij}) , допускает частные решения в виде волн

$$x_1 = x_{10} e^{\pm \gamma z}, \quad x_2 = x_{20} e^{\pm \gamma z},$$

где γ определяется из (67.11), то уравнения экспоненциальной линии (68.2) допускают решения

$$X_1 = X_{10} e^{(-\varepsilon_{11} \pm \gamma) z}, \quad X_2 = X_{20} e^{(\varepsilon_{11} \pm \gamma) z}, \quad (68.3)$$

причем два знака перед γ соответствуют двум направлениям распространения.

Итак, в экспоненциальной линии волна распространяется с постоянной γ , определяемой из (67.11), и, кроме того, преобразуется в отношении $e^{\varepsilon_{11} z}$, т. е. явления происходят так же, как в обычной линии с постоянными параметрами, но добавляется преобразование, при котором получающиеся величины умножаются на экспоненциальную функцию длины z .

В качестве примера рассмотрим экспоненциальную линию без потерь, параметры которой L и C (отнесенные к единице длины) выражаются следующим образом:

$$L = L_0 e^{-2\varepsilon_{11} z}, \quad C = C_0 e^{+2\varepsilon_{11} z},$$

где ε_{11} — действительная постоянная величина. Обозначая через X_1 и X_2 комплексные амплитуды напряжения и тока, получаем, опуская общий множитель $e^{i\omega t}$,

$$\frac{dX_1}{dz} = i\omega L X_2, \quad \frac{dX_2}{dz} = i\omega C X_1.$$

Эти уравнения аналогичны уравнениям (68.2) и допускают решения типа (68.3), подстановка которых в уравнения для X_1 и X_2 приводит к линейной и однородной системе относительно величин X_{10} и X_{20} :

$$\begin{aligned} (-\varepsilon_{11} \pm \gamma) X_{10} &= i\omega L_0 X_{20}, \\ (\varepsilon_{11} \pm \gamma) X_{20} &= i\omega C_0 X_{10}. \end{aligned}$$

Из условия разрешимости получаем

$$\gamma^2 = \varepsilon_{11}^2 - \omega^2 L_0 C_0; \quad (68.4)$$

это уравнение совпадает с (67.11). Легко видеть, что линия ведет себя, как фильтр верхних частот с предельной частотой

$$\omega_0 = \frac{\varepsilon_{11}}{\sqrt{L_0 C_0}},$$

так как для частот $\omega < \omega_0$ постоянная γ действительна, что приводит к затуханию, а для частот $\omega > \omega_0$ постоянная γ — чисто мнимая величина. Характеристический импеданс линий меняется как $e^{-2\varepsilon_{11} z}$, а фазовая скорость волн, частоты которых лежат выше предельной частоты, равна

$$\frac{1}{\sqrt{L_0 C_0 \left(1 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2}\right)}}.$$

б) *Линия с произвольно меняющимися параметрами.* Пусть коэффициенты ϵ_{11} ($= -\epsilon_{22}$), ϵ_{12} и ϵ_{21} являются произвольными функциями пространственной координаты z .

Положим

$$\varphi = \int_0^z \epsilon_{11} dz, \quad (68.5)$$

а также

$$x_1 = X_1 e^\varphi, \quad x_2 = X_2 e^{-\varphi} \quad (68.6)$$

и

$$A_{12} = \epsilon_{12} e^{-2\varphi}, \quad A_{21} = \epsilon_{21} e^{2\varphi}. \quad (68.7)$$

В результате уравнение (67.5) примет вид

$$\frac{dX_1}{dz} = A_{12}(z) X_2, \quad \frac{dX_2}{dz} = A_{21}(z) X_1. \quad (68.8)$$

Найдем матрицу, представляющую четырехполюсник, эквивалентный линии конечной длины z . Поставим эту задачу следующим образом: пусть матрица $b(z)$ выражает величины на выходе (в точке z) как функции величин на входе ($z=0$), т. е.

$$\begin{aligned} x_1(z) &= b_{11}(z) x_1(0) + b_{12}(z) x_2(0), \\ x_2(z) &= b_{21}(z) x_1(0) + b_{22}(z) x_2(0). \end{aligned} \quad (68.9)$$

К рассматриваемому отрезку длиной z добавим еще элемент dz , тогда по правилу умножения матриц получаем

$$b(z+dz) = b(dz) b(z) = [1 + (\epsilon_{ij} dz)] b(z), \quad (68.10)$$

где учтено выражение (67.1) для $b(dz)$.

В развернутом виде это соотношение записывается следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{db_{11}}{dz} &= \epsilon_{11} b_{11} + \epsilon_{12} b_{21}, \\ \frac{db_{21}}{dz} &= \epsilon_{21} b_{11} + \epsilon_{22} b_{21}, \\ \frac{db_{12}}{dz} &= \epsilon_{11} b_{12} + \epsilon_{12} b_{22}, \\ \frac{db_{22}}{dz} &= \epsilon_{21} b_{12} + \epsilon_{22} b_{22}. \end{aligned} \quad (68.11)$$

Мы получили две пары уравнений типа (67.5); решение этих систем и определит искомый четырехполюсник, эквивалентный линии.

Легко видеть, что имеет место соотношение

$$b_{11} b_{22} - b_{12} b_{21} = \text{const.}$$

Чтобы убедиться в этом, достаточно продифференцировать это выражение и заменить в полученном соотношении производные db_{ij}/dz их значениями из (68.11).

Постоянные интегрирования мы выберем таким образом, чтобы удовлетворялось соотношение

$$b_{11} b_{22} - b_{12} b_{21} = 1.$$

в) *Линии с постоянными параметрами.* Как известно, если все величины ϵ_{ij} постоянны, решением являются волны, постоянная распространения γ которых определяется из выражения (67.11), а характеристические импедансы k_1 и k_2 — из выражения (67.12). При $z=0$ находим начальное значение матрицы b :

$$b(0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Найдем для каждой из двух пар b_{11} , b_{21} и b_{12} , b_{22} линейные комбинации экспоненциальных множителей $e^{\pm \gamma z}$, которые удовлетворяют начальным условиям и выражению (67.12), а именно:

$$\begin{aligned} b_{11} &= \frac{1}{k_1 + k_2} (k_2 e^{\gamma z} + k_1 e^{-\gamma z}), \\ b_{12} &= \frac{-k_1 k_2}{k_1 + k_2} (e^{\gamma z} - e^{-\gamma z}), \\ b_{21} &= \frac{-1}{k_1 + k_2} (e^{\gamma z} - e^{-\gamma z}), \\ b_{22} &= \frac{1}{k_1 + k_2} (k_1 e^{\gamma z} + k_2 e^{-\gamma z}). \end{aligned} \quad (68.12)$$

Матрица $[b_{ij}(z)]$ имеет детерминант, равный единице, и соответствует, вообще говоря, конечному асимметричному четырехполюснику, причем она совпадает с матрицей, к которой приводят уравнения (61.14).

С помощью полученных выше величин $b_{ij}(z)$ можно определить значения ϵ_{ij} . Для этого достаточно обратиться

вновь к системам (68.11), положив в них $z=0$; в результате получаем

$$\begin{aligned} \varepsilon_{11} &= \frac{k_2 - k_1}{k_1 + k_2} \gamma, & \varepsilon_{21} &= -\frac{k_1 k_2}{k_1 + k_2} 2\gamma, \\ \varepsilon_{12} &= \frac{-1}{k_1 + k_2} 2\gamma, & \varepsilon_{22} &= \frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2} \gamma = -\varepsilon_{11}. \end{aligned} \quad (68.13)$$

Если $k_1 = k_2$ (случай обычной линии), то $\varepsilon_{11} = 0$. При этом линия образует симметричный четырехполюсник, и мы снова приходим к формулам (66.2), полученным для отрезка простой линии.

Линия имеет нулевое сопротивление, если (см. § 64)

$$\begin{aligned} \varepsilon_{11} &\text{— действительная величина,} \\ \varepsilon_{12} \text{ и } \varepsilon_{21} &\text{— чисто мнимые величины.} \end{aligned} \quad (68.14)$$

§ 69. Непрерывные периодические линии. Уравнения Матъе и Хилла

Самый общий пример непрерывной периодической линии дается уравнениями (67.5), если предположить, что коэффициенты ε_{ij} являются периодическими функциями z с периодом L . Общее решение этих уравнений представляет собой суперпозицию двух частных решений, записанных в форме Флоке:

$$\begin{aligned} x_1(z) &= e^{\pm \gamma z} f_1(z), \\ x_2(z) &= e^{\pm \gamma z} f_2(z), \end{aligned} \quad (69.1)$$

где $f_1(z)$ и $f_2(z)$ — две периодические функции с периодом L . Частными случаями этого примера являются уравнения Матъе и Хилла.

Уравнение Хилла получается из матрицы

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & c \\ \frac{1}{c} F(z) & 0 \end{pmatrix}, \quad (69.2)$$

где функция $F(z)$ периодична по z с периодом L . Действительно, уравнения (67.5) дают

$$\frac{dx_1}{dz} = cx_2, \quad \frac{dx_2}{dz} = \frac{1}{c} F(z)x_1,$$

откуда следует уравнение в форме Хилла

$$\frac{d^2 x_1}{dz^2} = F(z)x_1. \quad (69.3)$$

Уравнение Матъе получается, если в качестве $F(z)$ взять синус или косинус.

Исследуя матрицу (69.2), можно заметить, что случай уравнения Хилла соответствует линии, образованной симметричными элементами, которые не обязательно должны удовлетворять условию отсутствия сопротивлений. Однако если функция $F(z)$ действительна, а $c = i$, то уравнение Хилла соответствует линии из элементов, в составе которых отсутствуют сопротивления. Как мы сейчас покажем, к уравнению Хилла можно свести ряд более общих примеров.

Положим, например, в задаче, рассмотренной в § 68, б,

$$\begin{aligned} \varphi &= \int \varepsilon_{11} dz, \\ x_1 &= X_1 e^{\varphi}, & x_2 &= X_2 e^{-\varphi}, \\ A_{12} &= \varepsilon_{12} e^{-2\varphi}, & A_{21} &= \varepsilon_{21} e^{2\varphi}; \end{aligned}$$

тогда получаем

$$\frac{dX_1}{dz} = A_{12}X_2, \quad \frac{dX_2}{dz} = A_{21}X_1, \quad (69.4)$$

причем ε_{11} , ε_{12} и ε_{21} — периодические функции z с периодом L . При сдвиге на величину L , равную периоду, φ увеличивается на величину I :

$$\varphi(z + L) = \varphi(z) + I,$$

где

$$I = \int_0^L \varepsilon_{11} dz, \quad (69.5)$$

причем I обращается в нуль только в том случае, если $\varepsilon_{11} = 0$. Амплитуды A_{12} и A_{21} при таком преобразовании умножаются соответственно на e^{-2I} и e^{2I} .

Из уравнений (69.4) получаем

$$\frac{d}{dz} \left(\frac{1}{A_{12}} \frac{dX_1}{dz} \right) = A_{21}X_1,$$

Введем новую переменную

$$z' = \int A_{12} dz. \quad (69.6)$$

Тогда предыдущее уравнение принимает вид

$$\frac{d^2 X_1}{dz'^2} = \frac{A_{21}}{A_{12}} X_1.$$

Таким образом, мы приходим к уравнению Хилла, если функция

$$F = \frac{A_{21}}{A_{12}} = \frac{\varepsilon_{21}}{\varepsilon_{12}} e^{4z}$$

периодична с периодом L . Это может иметь место только в том случае, если $I=0$, т. е. если среднее значение ε_{11} за период равно нулю.

Итак, уравнения, которые соответствуют периодической линии, образованной бесконечно малыми необратимыми четырехполюсниками, можно свести к типу Хилла только в том случае, если *отрезок такой линии длины L можно представить как симметричный четырехполюсник.*

Если это условие выполнено, то непрерывная линия может быть сведена к линии, составленной из идентичных симметричных четырехполюсников.

§ 70. Нормировка матриц (ε_{ij}) . Матрицы Паули

Изучение непрерывных линий привело нас к матрицам

$$\varepsilon_{ij} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} \\ \varepsilon_{21} & -\varepsilon_{11} \end{pmatrix}, \quad (70.1)$$

которые обладают тем свойством, что их квадрат является диагональной матрицей

$$(\varepsilon_{ij})^2 = \begin{pmatrix} \varepsilon_{11}^2 + \varepsilon_{12}\varepsilon_{21} & 0 \\ 0 & \varepsilon_{11}^2 + \varepsilon_{12}\varepsilon_{21} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -|\varepsilon_{ij}| & 0 \\ 0 & -|\varepsilon_{ij}| \end{pmatrix}, \quad (70.2)$$

где через $|\varepsilon_{ij}|$ обозначен детерминант.

В таком случае естественно подобрать множитель $E(z)$, который бы нормировал матрицу так, чтобы ее квадрат был

равен единичной матрице. Если это выполнено, то можно записать

$$(\varepsilon_{ij})^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad |\varepsilon_{ij}| = -1, \quad (70.3)$$

$$(\varepsilon_{ij}) = \begin{pmatrix} \sqrt{1 - \varepsilon_{12}\varepsilon_{21}} & \varepsilon_{12} \\ \varepsilon_{21} & -\sqrt{1 - \varepsilon_{12}\varepsilon_{21}} \end{pmatrix}.$$

Мы должны теперь ввести $E(z)$ явным образом в общие уравнения распространения, а именно:

$$\frac{dx_1}{dz} = E(z)(\varepsilon_{11}x_1 + \varepsilon_{12}x_2),$$

$$\frac{dx_2}{dz} = E(z)(\varepsilon_{21}x_1 + \varepsilon_{22}x_2). \quad (70.4)$$

Обозначив через x матрицу, состоящую из одного столбца с элементами x_1 и x_2 , эти уравнения можно представить в символической форме

$$\frac{dx}{dz} = E(z)(\varepsilon_{ij})x. \quad (70.5)$$

Учитывая условие нормировки, согласно которому

$$(\varepsilon_{ij})^2 = 1, \quad \varepsilon_{ij} = (\varepsilon_{ij})^{-1}, \quad (70.6)$$

перепишем уравнение (70.5) в виде

$$\frac{1}{E(z)}(\varepsilon_{ij})\frac{dx}{dz} = x \quad (70.7)$$

или

$$\frac{1}{E(z)}\left(\varepsilon_{11}\frac{dx_1}{dz} + \varepsilon_{12}\frac{dx_2}{dz}\right) = x_1,$$

$$\frac{1}{E(z)}\left(\varepsilon_{21}\frac{dx_1}{dz} + \varepsilon_{22}\frac{dx_2}{dz}\right) = x_2. \quad (70.8)$$

Из этих уравнений следует, что оператор

$$\frac{1}{E(z)}(\varepsilon_{ij})\frac{d}{dz} = 1. \quad (70.9)$$

Предположим теперь, что $E(z)$ и ε_{ij} постоянны, и возведем оператор $[1/E(z)](\varepsilon_{ij})d/dz$ в квадрат, причем при

сделанных предположениях можно менять порядок операций d/dz и (ϵ_{ij}) , так что

$$\left[\frac{1}{E} (\epsilon_{ij}) \frac{d}{dz} \right] \left[\frac{1}{E} (\epsilon_{ij}) \frac{d}{dz} \right] = \frac{1}{E^2} (\epsilon_{ij})^2 \frac{d^2}{dz^2} = \frac{1}{E^2} \frac{d^2}{dz^2}. \quad (70.10)$$

Это означает, что

$$\frac{1}{E^2} \frac{d^2 x}{dz^2} = x. \quad (70.11)$$

Мы снова получили обычное уравнение распространения волн, поскольку всегда подразумевается, что x_1 и x_2 периодичны по t с периодом, соответствующим частоте ω .

Все эти результаты относятся к одномерному случаю распространения вдоль линии, но мы можем записать аналогичные уравнения для изотропного пространства трех измерений z_1, z_2, z_3 . Введем три матрицы $(\epsilon)_1, (\epsilon)_2$ и $(\epsilon)_3$ и коэффициент E (матрицы и коэффициент — постоянные) и запишем соотношение

$$\sum_i (\epsilon)_i \frac{\partial x}{\partial z_i} = Ex, \quad (70.12)$$

где x всегда является матрицей с одним столбцом. Оператор, аналогичный рассмотренному выше оператору (70.9), будет

$$\sum_i (\epsilon)_i \frac{\partial}{\partial z_i} = E. \quad (70.13)$$

Возведем это равенство в квадрат и заметим, что оно сводится к

$$\sum_i \frac{\partial^2}{\partial z_i^2} = E^2 \quad (70.14)$$

и ведет к волновому уравнению

$$\Delta x = E^2 x, \quad (70.15)$$

если выполнены условия

$$\begin{aligned} (\epsilon)_i^2 &= 1, \\ (\epsilon)_i (\epsilon)_k + (\epsilon)_k (\epsilon)_i &= 0 \quad \text{при } i \neq k. \end{aligned} \quad (70.16)$$

Первое из этих условий соответствует нормировке (70.3), а второе отражает некоммутативность матриц $(\epsilon)_i$. Условиям (70.16) удовлетворяют, очевидно, матрицы Паули

$$(\epsilon)_1 = \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix}, \quad (\epsilon)_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (\epsilon)_3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (70.17)$$

Можно показать, что все другие решения (70.16) являются линейными комбинациями этих трех матриц.

Матрицы Паули эрмитовы; в нашем рассмотрении эта новая характеристика встречается впервые. Две первые из них симметричны в том смысле, как это понималось выше при классификации четырехполосников, а третья матрица несимметрична. Это соответствует тому, что в волновой механике матрицы Паули связаны с магнитным моментом электрона, спин которого направлен по оси z_3 .

Использованный нами метод аналогичен методу, использованному Дираком при линеаризации волнового уравнения релятивистского электрона. Мы не можем, однако, перейти здесь к проблеме уравнения Дирака, поскольку для этого нужно ввести матрицы четвертого ранга, удовлетворяющие, впрочем, условиям (70.16). Задачу, тесно связанную с уравнением Дирака, мы рассмотрим в следующем параграфе.

§ 71. Трехфазные и многофазные электрические линии

Матрицы, ранг которых выше двух, появляются при изучении многофазных электрических линий.

Рассмотрим, например, шестиполосник, внутри которого находится электрическая цепь с линейными характеристиками (фиг. 148), и предположим, что он включен в трехфазную линию. Тогда шестиполосник характеризуют четыре величины на входе (v, i, V, I) и четыре на выходе (v', i', V', I').

Положим

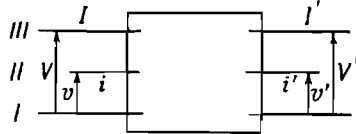
$$\begin{aligned} x_1 &= v, & x'_1 &= v', \\ x_2 &= i, & x'_2 &= i', \\ x_3 &= V, & x'_3 &= V', \\ x_4 &= I, & x'_4 &= I', \end{aligned} \quad (71.1)$$

В силу линейности системы между этими переменными существуют соотношения вида

$$x'_i = \sum_k b_{ik} x_k, \quad (71.2)$$

определяющие четырехрядную квадратную матрицу (b_{ik}).

В общем случае, если рассматривается линия, состоящая из $(2n + 1)$ проводов, и в нее включена цепь, имеющая $2(2n + 1)$ клемм, то получающаяся линейная система характеризуется матрицей порядка $2n$. Теория этих многополюсников увела бы нас слишком далеко ¹⁾. Общие теоремы, которые в случае четырехполюсников требуют, чтобы детерминант $|b_{ik}|$



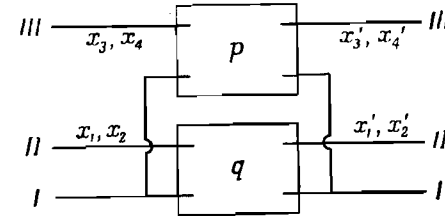
Фиг. 148.

был равен 1, для трехфазного шестиполюсника приводят к системе шести уравнений, имеющих другой вид и приводящих к иным условиям. Так, при изучении четырехполюсников мы видели, что после приведения матрицы к ее осям получаются монохроматические волны, распространяющиеся в двух направлениях с одинаковыми постоянными распространения в силу равенства единице детерминанта $|b_{ij}|$. В случае шестиполюсников при приведении матрицы к ее осям также получаются монохроматические волны, но шесть дополнительных условий не дают возможности найти простые соотношения, связывающие четыре возможных типа волн, или хотя бы выяснить, какие из этих волн распространяются направо, а какие — налево.

¹⁾ Теория распространения волн в многофазных линиях и многополюсных фильтрах развита в работах: П. Е. Краснушкин, Journ. of Phys., 9, No. 5, 439 (1945); Докторская диссертация, МГУ, 1945 г.; ЖТФ, 17, вып. 6, 705 (1947).

Волновые процессы в таких структурах могут быть представлены в виде спектра нормальных волн, характеризуемого собственными значениями матрицы звена фильтра. Эти процессы аналогичны явлениям, происходящим при распространении электромагнитных и акустических волн в трубах, и характеризуются явлениями фильтрации волн, пространственными биениями и т. д. Если число полюсов фильтра стремится к бесконечности, то из многофазных линий путем предельного перехода можно получить волноводы. — Прим. ред.

Мы оставим в стороне эти общие вопросы и рассмотрим только шестиполюсник, образованный из двух четырехполюсников. Обозначая через p четырехполюсник, подсоединенный к проводам I и III, а через q — подсоединенный



Фиг. 149.

к проводам I и II, как показано на фиг. 149, получаем

$$\begin{aligned} x'_1 &= q_{11}x_1 + q_{12}x_2, & x'_3 &= p_{11}x_3 + p_{12}x_4, \\ x'_2 &= q_{21}x_1 + q_{22}x_2, & x'_4 &= p_{21}x_3 + p_{22}x_4. \end{aligned} \quad (71.3)$$

Соответствующий шестиполюсник представляется матрицей

$$(b_{ij}) = \begin{pmatrix} q_{11} & q_{12} & 0 & 0 \\ q_{21} & q_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p_{11} & p_{12} \\ 0 & 0 & p_{21} & p_{22} \end{pmatrix}. \quad (71.4)$$

На фиг. 150 изображена аналогичная схема, в которой выходные концы перекрещены; соответствующая ей матрица равна

$$(b'_{ij}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & p_{11} & p_{12} \\ 0 & 0 & p_{21} & p_{22} \\ q_{11} & q_{12} & 0 & 0 \\ q_{21} & q_{22} & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (71.5)$$

Предположим теперь, что четырехполюсники становятся исчезающе малыми, так что матрицы p и q принимают форму

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 + \pi_{11} dz & \pi_{12} dz \\ \pi_{21} dz & 1 + \pi_{22} dz \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} q_{11} & q_{12} \\ q_{21} & q_{22} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 + \chi_{11} dz & \chi_{12} dz \\ \chi_{21} dz & 1 + \chi_{22} dz \end{pmatrix}, \\ \pi_{11} &= -\pi_{22}, \quad \chi_{11} = -\chi_{22}. \end{aligned} \quad (71.6)$$

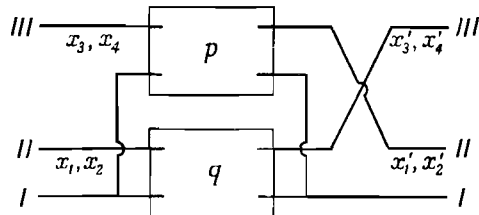
Матрица (b_{ij}) [см. (71.4)] примет следующий вид

$$(b_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + dz \begin{pmatrix} \chi_{11} & \chi_{12} & 0 & 0 \\ \chi_{21} & \chi_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \pi_{11} & \pi_{12} \\ 0 & 0 & \pi_{21} & \pi_{22} \end{pmatrix}.$$

Четырехполюсники являются симметричными, если

$$\chi_{11} = \pi_{11} = 0.$$

Используя разложение (71.7), можно записать уравнения (71.2) в виде линейных дифференциальных уравнений первого порядка по x_1, x_2, x_3, x_4 , имеющих форму уравнений Дирака.



Фиг. 150.

Вводится совокупность четырех независимых матриц, которые могут рассматриваться как образованные из матриц Паули. Эти матрицы эрмитовы и могут быть записаны в диагональной форме

$$\begin{pmatrix} \gamma_1 & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \gamma_2 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \gamma_3 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -\gamma_1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -\gamma_2 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & -\gamma_3 & \dots \end{pmatrix}. \quad (71.8)$$

Другими словами, каждой волне, распространяющейся в некотором направлении с постоянной распространения $+\gamma_i$, соответствует такая же волна, распространяющаяся в обратном направлении с постоянной $-\gamma_i$ ¹⁾.

¹⁾ L. Brillouin, Journ. de Phys., 8, 401 (1936).

ПРИЛОЖЕНИЕ ПОЛИНОМОВ ГЕГЕНБАУЭРА $C_n^1(x)$ К ИЗУЧЕНИЮ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ФИЛЬТРОВ

§ 72. Введение

Выше мы отмечали интерес, который представляют полиномы Гегенбауэра $C_n^1(x)$ при изучении граничных явлений в электрических и механических системах одного или нескольких измерений. С помощью этого математического аппарата, особенно удобного при исследовании периодических систем, мы получим сейчас некоторые результаты, уже встречавшиеся при рассмотрении цепочки из четырехполюсников¹⁾.

В дальнейшем мы будем считать, что токи и напряжения на входе и выходе четырехполюсников удовлетворяют условиям, сформулированным в гл. 10. Обозначим через (V_1, I_1) и (V_2, I_2) напряжение и ток соответственно на входе и выходе четырехполюсника (фиг. 151). Как известно [см. формулу (56.2)], в стационарном режиме эти величины связаны соотношениями

$$V_1 = a_{11}V_2 + a_{12}I_2, \quad (72.1)$$

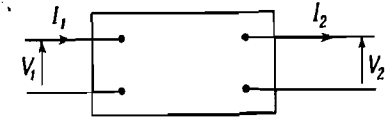
$$I_1 = a_{21}V_2 + a_{22}I_2, \quad (72.2)$$

где

$$a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = 1. \quad (72.2)$$

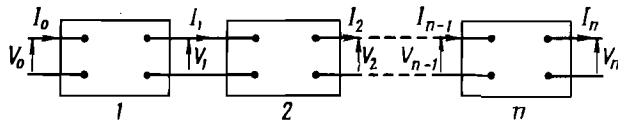
Рассмотрим цепочку, образованную одинаковыми четырехполюсниками, и попытаемся определить напряжение и ток

¹⁾ M. Parodi, Mémorial des sciences physiques, fasc., 47, Paris, 1944.



Фиг. 151.

в произвольной точке линии (фиг. 152) в зависимости от постоянных четырехполюсника a_{ij} и полиномов Гегенбауэра



Фиг. 152.

$C_n^1(x)$, а также попытаемся показать, как можно определить понятие характеристического импеданса при помощи этих функций.

§ 73. Выражение для тока и напряжения в произвольной точке цепочки из четырехполюсников

Преобразуем сначала уравнение четырехполюсника (72.1) к более удобной для рассматриваемого случая форме. Выясним, существует ли такое значение величины x , при котором выражение $V_0 - xI_0$ пропорционально величине $V_1 - xI_1$, причем будем предполагать, что токи и напряжения связаны соотношениями (72.1). Имеем

$$\begin{aligned} V_0 - xI_0 &= a_{11}V_1 + a_{12}I_1 - x(a_{21}V_1 + a_{22}I_1) = \\ &= (a_{11} - xa_{21})V_1 + (a_{12} - xa_{22})I_1, \end{aligned} \quad (73.1)$$

откуда, учитывая условие пропорциональности

$$\frac{a_{11} - xa_{21}}{1} = \frac{a_{12} - xa_{22}}{-x}, \quad (73.2)$$

получаем

$$a_{21}x^2 - (a_{11} - a_{22})x - a_{12} = 0. \quad (73.3)$$

Заметим, что, если в этом уравнении относительно x заменить величины a_{ij} через соответствующие им, согласно соотношению (56.6), величины b_{ij} , то оно точно совпадает с уравнением для характеристического импеданса, полученным в предыдущей главе. Ниже мы еще вернемся к этому вопросу.

Пусть x_1 и x_2 — корни этого уравнения, которым соответствуют две функции: $V_0 - x_1I_0$ и $V_0 - x_2I_0$, умножающиеся на постоянное число при переходе от входа рассма-

триваемой ячейки к ее выходу. Обозначим через η общую величину отношений (73.2):

$$\eta = \frac{a_{11} - xa_{21}}{1} = \frac{a_{12} - xa_{22}}{-x}. \quad (73.4)$$

Двум корням уравнения x_1 и x_2 соответствуют два значения η :

$$\begin{aligned} \eta_1 &= a_{11} - x_1a_{21} = -\frac{a_{12}}{x_1} a_{21}, \\ \eta_2 &= a_{11} - x_2a_{21} = a_{21} - \frac{a_{12}}{x_2}; \end{aligned} \quad (73.5)$$

как легко видеть, уравнение для η имеет вид

$$\eta^2 - (a_{11} + a_{22})\eta + 1 = 0. \quad (73.6)$$

Итак, два уравнения четырехполюсника (72.1) могут быть приведены к форме

$$\begin{aligned} V_0 - x_1I_0 &= \eta_1(V_1 - x_1I_1), \\ V_0 - x_2I_0 &= \eta_2(V_1 - x_2I_2). \end{aligned} \quad (73.7)$$

Уравнения (73.7) можно рассматривать как рекуррентные формулы, описывающие преобразование совокупности

$$V_0 - x_iI_0 \quad (i = 1, 2)$$

при переходе через четырехполюсник.

На выходе n -го четырехполюсника напряжение V_n и ток I_n будут связаны с величинами V_0 и I_0 соотношениями

$$\begin{aligned} V_0 - x_1I_0 &= \eta_1^n (V_n - x_1I_n), \\ V_0 - x_2I_0 &= \eta_2^n (V_n - x_2I_n). \end{aligned} \quad (73.8)$$

Замечая, что $\eta_1\eta_2 = 1$, непосредственным подсчетом получаем

$$\begin{aligned} V_n &= \frac{x_1\eta_1^n - x_2\eta_2^n}{x_1 - x_2} V_0 - x_1x_2 \frac{\eta_1^n - \eta_2^n}{x_1 - x_2} I_0, \\ I_n &= \frac{\eta_1^n - \eta_2^n}{x_1 - x_2} V_0 - \frac{x_2\eta_1^n - x_1\eta_2^n}{x_1 - x_2} I_0. \end{aligned} \quad (73.9)$$

Другими словами, ансамбль четырехполюсников 1, 2, ..., n характеризуется матрицей

$$T = \begin{pmatrix} \frac{x_1 \eta_1^n - x_2 \eta_2^n}{x_1 - x_2} & -x_1 x_2 \frac{\eta_1^n - \eta_2^n}{x_1 - x_2} \\ \frac{\eta_1^n - \eta_2^n}{x_1 - x_2} & -\frac{x_2 \eta_1^n - x_1 \eta_2^n}{x_1 - x_2} \end{pmatrix}. \quad (73.10)$$

Соотношения (73.5) дают

$$x_1 - x_2 = -\frac{\eta_1 - \eta_2}{a_{21}},$$

$$\frac{x_1}{a_{11} - \eta_1} = \frac{x_2}{a_{11} - \eta_2} = \frac{x_1 - x_2}{-(\eta_1 - \eta_2)}.$$

С другой стороны, из (73.3) следует

$$x_1 x_2 = -\frac{a_{12}}{a_{21}},$$

что можно переписать в виде

$$\frac{x_1 x_2}{x_1 - x_2} = \frac{a_{12}}{\eta_1 - \eta_2}.$$

С учетом этих соотношений матрицу T можно записать следующим образом:

$$T = \begin{pmatrix} \frac{(a_{11} - \eta_1) \eta_1^n - (a_{11} - \eta_2) \eta_2^n}{-(\eta_1 - \eta_2)} & -a_{12} \frac{\eta_1^n - \eta_2^n}{\eta_1 - \eta_2} \\ -a_{21} \frac{\eta_1^n - \eta_2^n}{\eta_1 - \eta_2} & \frac{(a_{11} - \eta_2) \eta_1^n - (a_{11} - \eta_1) \eta_2^n}{\eta_1 - \eta_2} \end{pmatrix},$$

или

$$(73.11)$$

$$T = \begin{pmatrix} -a_{11} \frac{\eta_1^n - \eta_2^n}{\eta_1 - \eta_2} + \frac{\eta_1^{n+1} - \eta_2^{n+1}}{\eta_1 - \eta_2} & -a_{12} \frac{\eta_1^n - \eta_2^n}{\eta_1 - \eta_2} \\ -a_{21} \frac{\eta_1^n - \eta_2^n}{\eta_1 - \eta_2} & a_{11} \frac{\eta_1^n - \eta_2^n}{\eta_1 - \eta_2} - \frac{\eta_1^{n-1} - \eta_2^{n-1}}{\eta_1 - \eta_2} \end{pmatrix}.$$

В записанную таким образом матрицу T легко ввести полиномы Гегенбауэра $C_n^1(x)$.

Величины η_1 и η_2 являются корнями уравнения (73.6). Положив

$$a_{11} + a_{22} = 2x,$$

и используя приведенные выше свойства полиномов $C_n^1(x)$ [см. § 25, уравнение (25.9)], получаем

$$\frac{\eta_1^n - \eta_2^n}{\eta_1 - \eta_2} = C_{n-1}^1(x).$$

Следовательно, матрица (73.11) имеет вид

$$T = \begin{pmatrix} -a_{11} C_{n-1}^1(x) + C_n^1(x) & -a_{12} C_{n-1}^1(x) \\ -a_{21} C_{n-1}^1(x) & a_{11} C_{n-1}^1(x) - C_{n-2}^1(x) \end{pmatrix}. \quad (73.12)$$

Ее можно упростить, полагая $a_{11} + a_{22} = 2x = 2 \operatorname{ch} \theta$. Тогда после простых выкладок находим

$$T = \begin{pmatrix} \frac{-a_{11} \operatorname{sh} n\theta + \operatorname{sh}(n+1)\theta}{\operatorname{sh} \theta} & -a_{12} \frac{\operatorname{sh} n\theta}{\operatorname{sh} \theta} \\ -a_{21} \frac{\operatorname{sh} n\theta}{\operatorname{sh} \theta} & \frac{a_{11} \operatorname{sh} n\theta - \operatorname{sh}(n-1)\theta}{\operatorname{sh} \theta} \end{pmatrix} = (t_{ij}). \quad (73.13)$$

Легко проверить, что T является матрицей четырехполюсника. Действительно,

$$t_{11} t_{22} - t_{12} t_{21} =$$

$$= (a_{11} C_{n-1}^1 - C_n^1)(-a_{11} C_{n-1}^1 + C_n^1) - a_{12} a_{21} (C_{n-1}^1)^2;$$

откуда с учетом рекуррентных соотношений для функции $C_n^1(x)$ и того факта, что детерминант $|a_{ij}|$ равен единице, получаем

$$t_{11} t_{22} - t_{12} t_{21} = (C_{n-1}^1)^2 - C_n^1 C_{n-2}^1.$$

Подставляя в правую часть выражение полиномов Гегенбауэра в зависимости от θ , находим, как легко убедиться непосредственным подсчетом,

$$t_{11} t_{22} - t_{12} t_{21} = \frac{\operatorname{sh}^2 n\theta - \operatorname{sh}(n+1)\theta \operatorname{sh}(n-1)\theta}{\operatorname{sh}^2 \theta} = 1.$$

§ 74. Характеристические импедансы

Теперь поставим перед собой аналогичную задачу в случае фильтра, образованного из конечного числа n ячеек, полагая, что последний четырехполюсник замкнут на произвольный импеданс ρ (фиг. 153).

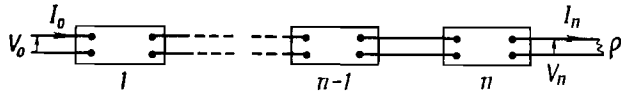
Из записи матрицы T в форме (73.12) видно, что величины V_n и I_n являются линейными функциями полиномов Гегенбауэра $C_n^1(x)$; это означает, что они удовлетворяют тем же рекуррентным соотношениям, что и полиномы $C_n^1(x)$. Другими словами, для V_n и I_n справедливы соотношения

$$\begin{aligned} V_{k+1} - 2xV_k + V_{k-1} &= 0, \\ I_{k+1} - 2xI_k + I_{k-1} &= 0, \end{aligned} \quad (74.1)$$

причем

$$a_{11} + a_{22} = 2x.$$

Отметим, кстати, что эти соотношения позволяют изложить свойства фильтров с помощью непрерывных дробей.



Ф и г. 153.

Согласно первому из соотношений (72.1), для n -го четырехполюсника

$$\frac{1}{a_{12}} V_{n-1} - \frac{a_{11}}{a_{12}} V_n = I_n = \frac{V_n}{\rho} \quad (74.2)$$

или

$$V_{n-1} = \left(a_{11} + \frac{a_{12}}{\rho} \right) V_n = \lambda_1 V_n, \quad (74.3)$$

где

$$\lambda_1 = a_{11} + \frac{a_{12}}{\rho}. \quad (74.4)$$

Из второго соотношения (72.1) получаем для этого же четырехполюсника

$$I_{n-1} = a_{21} V_n + a_{22} I_n = a_{21} \rho I_n + a_{22} I_n,$$

или

$$I_{n-1} = (a_{22} + a_{21} \rho) I_n = \lambda_2 I_n, \quad (74.5)$$

причем

$$\lambda_2 = a_{22} + a_{21} \rho. \quad (74.6)$$

С помощью рекуррентных соотношений (74.1) и формул (74.3) и (74.5) можно найти величины V_{n-2} , V_{n-3} ... и I_{n-2} , I_{n-3} ..., а именно

$$V_{n-1} = \lambda_1 V_n = \lambda_1 C_0^1(x) V_n,$$

поскольку $C_0^1(x) = 1$;

$$\begin{aligned} V_{n-2} &= -V_n + 2xV_{n-1} = (2x\lambda_1 - 1)V_n = \\ &= [\lambda_1 C_1^1(x) - C_0^1(x)], \end{aligned}$$

поскольку $C_1^1(x) = 2x$;

$$\begin{aligned} V_{n-3} &= -V_{n-1} + 2xV_{n-2} = \\ &= -\lambda_1 V_n + 2x[\lambda_1 C_1^1(x) - C_0^1(x)] V_n = \\ &= -\lambda_1 V_n + 2x[2x\lambda_1 - 1] V_n = [-\lambda_1 + 4x^2\lambda_1 - 2x] V_n = \\ &= [\lambda_1(4x^2 - 1) - 2x] V_n = [\lambda_1 C_2^1(x) - C_1^1(x)] V_n, \end{aligned}$$

поскольку $C_2^1(x) = 4x^2 - 1$ и т. д. В общем виде можно записать

$$V_{n-p} = [\lambda_1 C_{p-1}^1(x) - C_{p-2}^1(x)] V_n, \quad (74.7)$$

а также

$$I_{n-p} = [\lambda_2 C_{p-1}^1(x) - C_{p-2}^1(x)] I_n. \quad (74.8)$$

Если V_0 и I_0 — соответственно напряжение и ток на входе первой ячейки, то из (74.7) и (74.8) следует

$$\begin{aligned} V_n &= \frac{V_0}{\lambda_1 C_{n-1}^1(x) - C_{n-2}^1(x)}, \\ I_n &= \frac{I_0}{\lambda_2 C_{n-1}^1(x) - C_{n-2}^1(x)}. \end{aligned} \quad (74.9)$$

Возвращаясь к соотношениям (74.7) и (74.8), получаем общие формулы

$$\begin{aligned} V_{n-p} &= V_0 \frac{\lambda_1 C_{p-1}^1(x) - C_{p-2}^1(x)}{\lambda_1 C_{n-1}^1(x) - C_{n-2}^1(x)}, \\ I_{n-p} &= I_0 \frac{\lambda_2 C_{p-1}^1(x) - C_{p-2}^1(x)}{\lambda_2 C_{n-1}^1(x) - C_{n-2}^1(x)}. \end{aligned} \quad (74.10)$$

Введение импедансов

$$\frac{V_0}{I_0} = Z_0, \quad \frac{V_{n-p}}{I_{n-p}} = Z_{n-p}$$

позволяет записать соотношения (74.10) в виде

$$\begin{aligned} \frac{V_{n-p}}{I_{n-p}} &= Z_{n-p} = \\ &= Z_0 \frac{\lambda_1 C_{p-1}^1(x) - C_{p-2}^1(x)}{\lambda_1 C_{n-1}^1(x) - C_{n-2}^1(x)} \cdot \frac{\lambda_2 C_{n-1}^1(x) - C_{n-2}^1(x)}{\lambda_2 C_{p-1}^1(x) - C_{p-2}^1(x)}. \end{aligned} \quad (74.11)$$

Отсюда видно, что если импеданс ρ на конце фильтра таков, что

$$\lambda_1 = \lambda_2, \quad (74.12)$$

то для произвольного p выполняется условие

$$Z_{n-p} = Z_0. \quad (74.13)$$

Такой импеданс ρ называется *характеристическим импедансом* линии.

Учитывая выражения (74.4) и (74.6) для λ_1, λ_2 , легко показать, что характеристический импеданс является решением уравнения

$$a_{21}\rho^2 - (a_{11} - a_{22})\rho - a_{12} = 0,$$

которое точно совпадает с уравнением (73.3) относительно x , так что введенные выше величины x_1 и x_2 являются характеристическими импедансами фильтра.

Заметим, впрочем, что понятие характеристического импеданса можно было бы ввести и в предыдущем параграфе. Действительно, из уравнений (73.8) следует

$$\frac{Z_n - x_1}{Z_n - x_2} = \frac{Z_0 - x_1}{Z_0 - x_2} \left(\frac{\eta_2}{\eta_1} \right)^n. \quad (74.14)$$

При $Z_0 = x_1$ всегда выполняется равенство $Z_n = x_1$, а при $Z_0 = x_2$ — равенство $Z_n = x_2$, что остается справедливым при любом целом положительном числе n . Итак, если импеданс Z_0 равен одному из значений x_1 или x_2 , то импеданс Z_n при любом n имеет ту же величину, а это доказывает, что x_1 и x_2 являются характеристическими импедансами.

Отметим еще связь, существующую между характеристическими импедансами и взаимными точками преобразования инверсии. Возвращаясь к обозначениям предыдущего параграфа, запишем характеристические импедансы в виде

$$x_1 = Z, \quad x_2 = -\zeta.$$

Тогда, исходя из формулы (73.9), легко вновь получить установленную выше каноническую форму характеристической матрицы распространения через фильтр.

Мы уже выяснили, что η является решением уравнения (73.6), т. е.

$$\eta_1, \eta_2 = \frac{a_{11} + a_{22}}{2} \pm \sqrt{\frac{(a_{11} + a_{22})^2}{4} - 1}.$$

Положив

$$\eta_1 = e^\gamma, \quad \eta_2 = e^{-\gamma},$$

приведем матрицу (73.9) к форме (поскольку $\eta_1\eta_2 = 1$)

$$\frac{1}{Z + \zeta} \begin{pmatrix} Ze^{-n\gamma} + \zeta e^{n\gamma} & -2Z\zeta \operatorname{sh} n\gamma \\ -2 \operatorname{sh} n\gamma & \zeta e^{-n\gamma} + Ze^{n\gamma} \end{pmatrix}, \quad (74.15)$$

совпадающей с канонической формой, полученной выше.

§ 75. Случай симметричных четырехполюсников

В случае симметричных четырехполюсников $a_{11} = a_{22}$, и, как мы сейчас докажем, матрица T тоже симметрична. Из записи T в форме (73.12) следует, что для этого достаточно доказать соотношение

$$-a_{11}C_{n-1}^1(x) + C_n^1(x) = a_{11}C_{n-1}^1(x) - C_{n-2}^1(x) \quad (75.1)$$

или

$$C_n^1 - 2a_{11}C_{n-1}^1 + C_{n-2}^1 = 0, \quad (75.2)$$

совпадающее с рекуррентным соотношением, которому удовлетворяют полиномы $C_n^1(x)$, поскольку

$$a_{11} + a_{22} = 2a_{11}.$$

Характеристические импедансы в рассматриваемом случае равны друг другу, так как уравнение для x сводится к уравнению

$$a_{21}x^2 - a_{12} = 0,$$

откуда

$$x = \pm \sqrt{\frac{a_{12}}{a_{21}}}.$$

С другой стороны, полагая $a_{11} = a_{22} = \text{ch } \theta$, матрицу T [см. уравнение (73.13)] можно представить в форме

$$\begin{pmatrix} \text{ch } n\theta & -a_{12} \frac{\text{sh } n\theta}{\text{sh } \theta} \\ -a_{21} \frac{\text{sh } n\theta}{\text{sh } \theta} & \text{ch } n\theta \end{pmatrix}. \quad (75.3)$$

Поскольку мы положили $a_{11} = \text{ch } \theta$ и

$$a_{11}^2 - a_{12}a_{21} = 1,$$

получаем

$$a_{12} = x \text{ sh } \theta, \quad a_{21} = \frac{1}{x} \text{ sh } \theta.$$

Таким образом, в рассматриваемом случае матрица (75.3) принимает тот же вид, что и матрица (74.15), если в последней в силу симметричности четырехполюсников положить $Z = \zeta (= x)$.

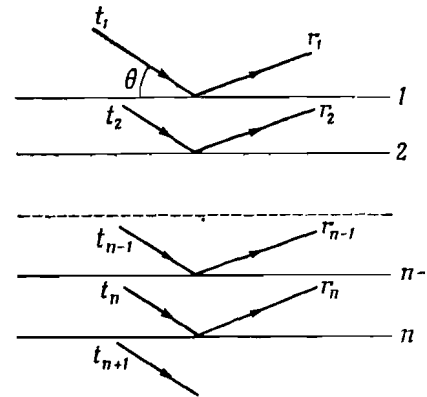
§ 76. Аналогия между теорией электрических фильтров и закономерностями распространения рентгеновских лучей в кристаллах

В § 63 мы отмечали, что методы, используемые нами при изучении электрических фильтров, являются весьма общими и могут быть применены ко всем задачам о распространении волн через непрерывные среды, имеющие периодическую структуру. Так, Бриллюэн указал ¹⁾ на аналогию, которая существует между распространением электрических волн в фильтрах и прохождением рентгеновских лучей через кристаллы, описанным, в частности, в работе Могоэна ²⁾.

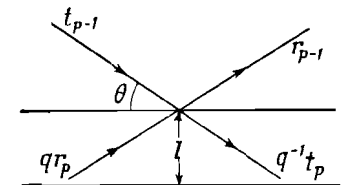
Только что рассмотренное описание электрических фильтров с помощью полиномов Гегенбауэра, как мы сейчас увидим, поясняет это сравнение. Пусть дана кристаллическая пластинка, состоящая из атомных плоскостей 1, 2, ..., n , ..., разделенных равными интервалами l (фиг. 154). Предположим, что под углом θ на нее падает параллельный пучок монохроматических рентгеновских лучей. Каждая плоскость отражает часть излучения; в результате интерферен-

ции интенсивность слабых по отдельности волн, отраженных от последовательных плоскостей, может стать сравнимой с интенсивностью падающей волны. Однако поскольку эта отраженная волна тоже не может свободно распространяться в кристалле, возникают новые отраженные волны, которые, в свою очередь, отражаются, и так до бесконечности. Дарвином был указан способ учета этого эффекта многократного отражения, которым нельзя пренебрегать.

Он отметил, что вся бесконечная совокупность волн, распространяющихся между двумя плоскостями, $(p-1)$ -й и p -й,



Фиг. 154.



Фиг. 155.

может быть представлена в виде двух составляющих, одна из которых (t_p) распространяется по направлению падающего пучка, а другая (r_p) — в обратном направлении. Вычислим амплитуды этих составляющих, заключенных между плоскостями $p-1$ и p . В окрестности плоскости $(p-1)$ эти волны таковы: $q r_p$ и $q^{-1} t_p$, где q — коэффициент, учитывающий изменение фазы при распространении от одной плоскости к другой:

$$q = e^{-i\varphi}, \quad \varphi = \frac{2\pi l \sin \theta}{\lambda},$$

а λ — длина волны (фиг. 155). Пусть, с другой стороны, ρ и τ — коэффициенты отражения и прохождения для отдельной плоскости. Тогда, рассматривая вклад от обеих плоскостей: $(p-1)$ -й и p -й (r , t , ρ и τ — комплексные величины, учитывающие не только абсолютную величину

¹⁾ L. Brillouin, Journ. de Phys., 7, 401 (1936).

²⁾ Mauguin, Journ. de Phys., 7, 233 (1936).

амплитуды, но и фазу), получаем соотношения:

$$r_{p-1} = \rho t_{p-1} + \tau q r_p, \quad (76.1)$$

$$q^{-1} t_p = \rho q r_p + \tau t_{p-1}, \quad (76.2)$$

$$r_p = \rho t_p + \tau q r_{p+1}, \quad (76.3)$$

$$q^{-1} t_{p+1} = \rho q r_{p+1} + \tau t_p. \quad (76.4)$$

Из (76.1) и (76.2) следует

$$r_{p-1} = \rho t_{p-1} + \tau q r_p; \quad r_p = -\frac{\rho}{\tau q} t_{p-1} + \frac{1}{\tau q} r_{p-1},$$

$$t_p = \rho q^2 r_p + \tau q t_{p-1}; \quad t_p = \rho q^2 \left[-\frac{\rho}{\tau q} t_{p-1} + \frac{1}{\tau q} r_{p-1} \right] + \tau q t_{p-1}$$

или

$$t_p = \left(\tau q - \frac{\rho^2 q}{\tau} \right) t_{p-1} + \frac{\rho q}{\tau} r_{p-1}, \quad (76.5)$$

$$r_p = -\frac{\rho}{\tau q} t_{p-1} + \frac{1}{\tau q} r_{p-1}.$$

Таким образом, мы получаем уравнения, совпадающие, по крайней мере по форме, с уравнениями четырехполосника.

Действительно, полагая

$$b_{11} = \tau q - \frac{\rho^2 q}{\tau}, \quad b_{12} = \frac{\rho q}{\tau},$$

$$b_{21} = -\frac{\rho}{\tau q}, \quad b_{22} = \frac{1}{\tau q},$$

получаем

$$t_p = b_{11} t_{p-1} + b_{12} r_{p-1}, \quad (76.6)$$

$$r_p = b_{21} t_{p-1} + b_{22} r_{p-1},$$

где

$$b_{11} b_{22} - b_{12} b_{21} = \frac{1}{\tau q} \left(\tau q - \frac{\rho^2 q}{\tau} \right) + \frac{\rho^2 q}{\tau^2 q} = 1.$$

Если число параллельных плоскостей бесконечно, то условие распространения получается так же, как и раньше, т. е. необходимо

$$a_{11} + a_{22} = \text{действительное число}, \quad \frac{1}{2} |a_{11} + a_{22}| < 1,$$

что дает

$$\tau q + \frac{1}{\tau q} - \frac{\rho^2 q}{\tau} = \text{действительное число}, \quad \frac{1}{2} \left| \tau q + \frac{1}{\tau q} - \frac{\rho^2 q}{\tau} \right| < 1. \quad (76.7)$$

Вычислим теперь амплитуды прошедшей и отраженной волн в предположении, что число параллельных отражающих плоскостей *конечно*. Формулы (76.1) и (76.4) легко приводят к тем же рекуррентным соотношениям между амплитудами прошедших и отраженных волн, а именно

$$\begin{aligned} r_{p-1} - 2\lambda r_p + r_{p+1} &= 0, \\ t_{p-1} - 2\lambda t_p + t_{p+1} &= 0, \end{aligned} \quad (76.8)$$

где

$$2\lambda = \tau q + \frac{1}{\tau q} - \frac{\rho^2 q}{\tau}; \quad (76.9)$$

эта величина является не чем иным, как $b_{11} + b_{22}$. Соотношения (76.8) и (76.9) дают возможность вычислить амплитуды прошедших и отраженных волн. Пусть t_{n+1} — амплитуда волны, прошедшей через всю кристаллическую пластинку. Могэн рассматривал эту волну в плоскости, отстоящей от плоскости n на расстояние l (поскольку она не является атомной плоскостью, мы положим $r_{n+1} = 0$).

Условия прохождения через плоскость n таковы:

$$\begin{aligned} q^{-1} t_{n+1} &= \tau t_n, \\ r_n &= \rho t_n. \end{aligned} \quad (76.10)$$

Применим рекуррентные соотношения с начальными условиями

$$t_{n+1}, \quad r_n = \rho t_n \quad (76.11)$$

и получим

$$t_n = t_{n+1} \frac{1}{\tau q} C_0^1(\lambda),$$

$$t_{n-1} = t_{n+1} \left[\frac{1}{\tau q} 2\lambda - 1 \right] = t_{n+1} \left[\frac{1}{\tau q} C_1^1(\lambda) - C_0^1(\lambda) \right]$$

и т. д. В общем случае

$$t_{n-p} = t_{n+1} \left[\frac{1}{\tau q} C_p^1(\lambda) - C_{p-1}^1(\lambda) \right], \quad (76.12)$$

где C_k^1 является полиномом Гегенбауэра k -го порядка.

Аналогично для отраженной волны получаем

$$r_{n-p} = t_{n+1} \frac{p}{\tau q} C_p^1(\lambda). \quad (76.13)$$

При $p = n - 1$ мы должны получить амплитуду падающей волны

$$t_1 = t_{n+1} \left[\frac{1}{\tau q} C_{n-1}^1(\lambda) - C_{n-2}^1(\lambda) \right],$$

так что t_{n-p} и r_{n-p} можно выразить в зависимости от t_1 , а именно

$$\begin{aligned} t_{n-p} &= t_1 \frac{C_p^1(\lambda) - \tau q C_{p-1}^1(\lambda)}{C_{n-1}^1(\lambda) - \tau q C_{n-2}^1(\lambda)}, \\ r_{n-p} &= t_1 \frac{\rho C_p^1(\lambda)}{C_{n-1}^1(\lambda) - \tau q C_{n-2}^1(\lambda)}. \end{aligned} \quad (76.14)$$

Амплитуды отраженной волны r_1 и прошедшей t_{n+1} будут тогда равны

$$\begin{aligned} r_1 &= t_1 \rho \frac{C_{n-1}^1(\lambda)}{C_{n-1}^1(\lambda) - \tau q C_{n-2}^1(\lambda)}, \\ t_{n+1} &= t_1 \frac{\tau q}{C_{n-1}^1(\lambda) - \tau q C_{n-2}^1(\lambda)}. \end{aligned} \quad (76.15)$$

Могэн показал, что величина λ действительна. Здесь возможны два случая:

1. $|\lambda| > 1$. Полагая $\lambda = \operatorname{ch} \theta$, получаем

$$C_{n-1}^1(\operatorname{ch} \theta) = \frac{\operatorname{sh} n\theta}{\operatorname{sh} \theta}$$

и $C_{n-1}^1(\lambda)$ не может обращаться в нуль.

2. $|\lambda| < 1$. Тогда, полагая $\lambda = \cos \theta$, находим

$$C_{n-1}^1(\cos \theta) = \frac{\sin n\theta}{\sin \theta}.$$

Таким образом, $C_{n-1}^1(\cos \theta)$ обращается в нуль при значениях

$$\theta = \theta_k = \frac{k\pi}{n} \quad k = 1, 2, \dots, (n-1).$$

Ясно, что значения λ , соответствующие распространению без затухания, должны всегда лежать в интервале $-1 < \lambda < +1$. В случае бесконечного числа плоскостей все значения λ ,

заклученные в интервале -1 и $+1$, соответствуют распространению без затухания. Полученные только что результаты подчеркивают аналогию между двумя указанными выше вопросами.

Замечание. Гюттон и Ортюзи¹⁾ указали на возможность осуществления электромагнитных фильтров путем дискретного разбиения волновода на различные участки. Каждый разрыв при переходе от одного участка к другому характеризуется комплексными коэффициентами отражения и пропускания.

Распространение волн в такой системе можно рассмотреть по изложенной выше схеме, рассуждая следующим образом: волновод с одинаковыми и равноотстоящими разрывами непрерывности в случае распространения волн ведет себя так же, как слоистая система, изображенная на фиг. 154, где каждая плоскость определяется коэффициентом пропускания τ и коэффициентом отражения ρ . Поэтому изучение распространения в таком диафрагмированном волноводе может быть точно сведено к задаче о прохождении рентгеновских лучей через кристалл. Полосы пропускания опять определяются уравнением (76.7). Результаты, полученные при рассмотрении двухатомной решетки Борна, позволяют сделать вывод, что при периодическом распределении в волноводе различных разрывов можно получить большее число полос пропускания.

¹⁾ Gutton, Ortusi, *Compt. Rend.*, 216, 67 (1943).

ЗАМЕДЛЯЮЩИЕ ВОЛНОВОДНЫЕ СИСТЕМЫ

§ 77. Введение

В конце предыдущей главы мы отметили, что различные задачи о распространении волн в волноводах можно рассмотреть теми же методами, которые использовались при изучении теории электрических фильтров.

Эта глава посвящена более детальному исследованию свойств электромагнитных волн, распространяющихся в волноводах со скоростью, меньшей скорости света. Важность такого изучения определяется теми многочисленными применениями, которые в последнее время нашли поперечные магнитные волны (типа ТМ) в волноводах линейных ускорителей электронов¹⁾. Для нормальной работы этих установок скорость волны должна быть близка к скорости электронов, а для этого требуется, чтобы фазовая скорость W волны была меньше скорости света c , в противоположность обычному случаю распространения волн в волноводах, когда $W > c$.

Мы рассмотрим сейчас метод исследования подобных вопросов и иллюстрируем его некоторыми частными примерами.

§ 78. Общие уравнения

Предположим, что волны распространяются вдоль оси z , так что зависимость полей от t и z можно представить выражением вида

$$F(x, y, z, t) = f(xy) e^{i\omega t - \gamma z}. \quad (78.1)$$

¹⁾ Замедляющие волноводные системы имеют широкое применение также и в антенной технике. Наиболее старой системой такого рода является волноводный канал типа Уде—Яги. В современных системах, замедляющих волны сантиметрового диапазона, часто применяется гребенчатая структура. Такие системы характеризуются излучением волн, „стекающихся“ вдоль волноводной системы. Теория плазменных волноводов медленных волн разработана Я. Б. Файнбергом [см., напр., Я. Б. Файнберг, Атомная энергия, 6, вып. 4, 431, 447 (1959)]. — *Прим. ред.*

Обозначая компоненты магнитного поля через H_x, H_y, H_z , а компоненты электрического поля через E_x, E_y, E_z , запишем уравнения Максвелла:

$$\begin{aligned} \frac{\partial E_z}{\partial y} + \gamma E_y &= -i\omega\mu_0 H_x, \\ \frac{\partial H_z}{\partial y} + \gamma H_y &= i\omega\varepsilon_0 E_x, \\ -\gamma E_x - \frac{\partial E_z}{\partial x} &= -i\omega\mu_0 H_y, \\ -\gamma H_x - \frac{\partial H_z}{\partial x} &= i\omega\varepsilon_0 E_y, \\ \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} &= -i\omega\mu_0 H_z, \\ \frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} &= i\omega\varepsilon_0 E_z, \\ \operatorname{div} \mathbf{E} &= 0, \quad \operatorname{div} \mathbf{H} = 0, \end{aligned} \quad (78.2)$$

где ε_0 и μ_0 — соответственно диэлектрическая и магнитная проницаемости среды, в которой происходит распространение.

Поперечные компоненты E_x, E_y, H_x и H_y можно выразить как функции E_z и H_z с помощью соотношений, вытекающих из уравнений (78.2),

$$\begin{aligned} k^2 E_x &= -i\omega\mu_0 \frac{\partial H_z}{\partial y} - \gamma \frac{\partial E_z}{\partial x}, \\ k^2 E_y &= +i\omega\mu_0 \frac{\partial H_z}{\partial x} - \gamma \frac{\partial E_z}{\partial y}, \\ k^2 H_x &= -\gamma \frac{\partial H_z}{\partial x} + i\omega\varepsilon_0 \frac{\partial E_z}{\partial y}, \\ k^2 H_y &= -\gamma \frac{\partial H_z}{\partial y} - i\omega\varepsilon_0 \frac{\partial E_z}{\partial x}, \end{aligned} \quad (78.3)$$

где

$$k^2 = \omega^2 \varepsilon_0 \mu_0 + \gamma^2 = \frac{\omega^2}{c^2} + \gamma^2. \quad (78.4)$$

Комбинируя эти соотношения с условиями равенства нулю дивергенции полей (78.2), получаем уравнения

$$\frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_z}{\partial y^2} + k^2 E_z = 0, \quad (78.5)$$

$$\frac{\partial^2 H_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H_z}{\partial y^2} + k^2 H_z = 0, \quad (78.6)$$

которые являются основными уравнениями теории волноводов.

Уравнения (78.5) и (78.6) могут быть разрешены, если заданы граничные условия. Для обычных волноводов, представляющих собой металлические трубы, решением являются:

Волны типа TE (поперечные электрические), для которых

$$E_z = 0,$$

а H_z определяется уравнением (78.6) и граничным условием на стенках волновода

$$\frac{\partial H_z}{\partial n} = 0, \quad (78.7)$$

где $\partial/\partial n$ обозначает производную по нормали к поверхности волновода.

Волны типа TM (поперечные магнитные), для которых

$$H_z = 0, \quad (78.8a)$$

а E_z определяется уравнением (78.5) и граничным условием

$$E_z = 0 \quad (78.8b)$$

на стенках волновода.

В этих двух случаях E_z и H_z являются собственными функциями уравнений (78.5) или (78.6) и соответствуют некоторым собственным значениям $k_p^2 > 0$ ¹⁾.

Согласно соотношению (78.4), получаем критическую частоту волновода

$$\omega_{c_0} = k_p c. \quad (78.9)$$

Если $\omega < \omega_{c_0}$, то

γ — действительная величина и волны затухают; (78.10a)

¹⁾ Волны, волновые числа которых определяются через собственные значения некоторого линейного оператора, называются нормальными волнами. — *Прим. ред.*

если $\omega > \omega_{c_0}$, то

$\gamma = i\beta = i \frac{\omega}{W}$ и волны распространяются в волноводе без затухания. (78.10b)

Во втором случае в силу (78.4)

$$k^2 = \omega^2 \left(\frac{1}{c^2} - \frac{1}{W^2} \right)$$

или

$$\frac{1}{W^2} = \frac{1}{c^2} - \frac{k^2}{\omega^2} < \frac{1}{c^2}$$

и, следовательно,

$$W > c.$$

Эти результаты применимы к волнам, распространяющимся внутри металлических труб произвольного сечения, и, следовательно, для всех таких систем условие $W < c$ удовлетворяться не может.

В следующем параграфе мы изложим метод, позволяющий выяснить природу волн, удовлетворяющих неравенству $W < c$, и получить те граничные условия, которым в этом случае должны удовлетворять поля.

§ 79. Медленные волны. Некоторые примеры

Предположим, что можно получить волны, фазовая скорость которых

$$W < c. \quad (79.1)$$

Здесь по-прежнему применимы соотношения (78.1)—(78.6), но граничные условия должны быть таковы, чтобы

$$\gamma = i \frac{\omega}{W}, \quad W < c, \quad k^2 = -K^2, \quad k = iK, \quad (79.2)$$

$$K^2 = \omega^2 \left(\frac{1}{W^2} - \frac{1}{c^2} \right) > 0.$$

Как следует из уравнений (78.3), (78.5) и (78.6), мы можем классифицировать волны, относя их к одному из двух типов: TE ($E_z = 0$) или TM ($H_z = 0$), которые можно рассматривать отдельно.

Волны типа ТМ соответствуют случаю:

$$H_y = \varepsilon_0 W E_x = \eta \frac{W}{c} E_x = i\omega \frac{\varepsilon_0}{K^2} \frac{\partial E_z}{\partial x}, \quad (79.3)$$

$$-H_x = \varepsilon_0 W E_y = \eta \frac{W}{c} E_y = i\omega \frac{\varepsilon_0}{K^2} \frac{\partial E_z}{\partial x},$$

$$\frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_z}{\partial y^2} - K^2 E_z = 0, \quad \eta = \left(\frac{\varepsilon_0}{\mu_0} \right)^{1/2}. \quad (79.4)$$

Покажем на некоторых частных примерах, какой тип решения при этом получается.

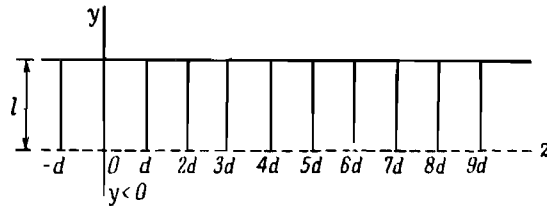
В случае плоских волн получаем

$$E_z = e^{+Ky} \quad \text{или} \quad E_z = e^{-Ky}, \quad (79.5a)$$

либо

$$E_z = \text{ch } Ky \quad \text{или} \quad E_z = \text{sh } Ky. \quad (79.5b)$$

Решение (79.5a) можно использовать при подходящих граничных условиях, заданных, например, в плоскости $y=0$.



Фиг. 156.

Решение (79.5b) используется при двух граничных условиях, заданных на плоскостях $y = \pm b$. Ниже мы укажем, когда такие граничные условия имеют место (фиг. 156 и 157).

Если область пространства, в которой происходит распространение, заключена между двумя параллельными металлическими плоскостями $x=0$ и $x=a$, то можно использовать решения типа

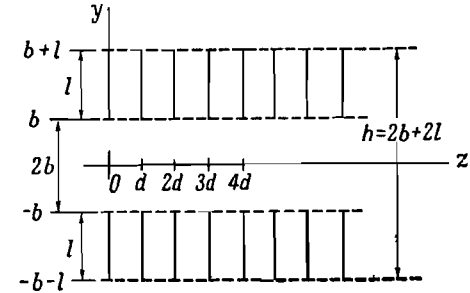
$$E_z = \sin \frac{\pi n x}{a} e^{\pm g y}, \quad (79.6a)$$

$$E_z = \sin \frac{\pi n x}{a} \begin{pmatrix} \text{ch} \\ \text{sh} \end{pmatrix} g y, \quad (79.6b)$$

где

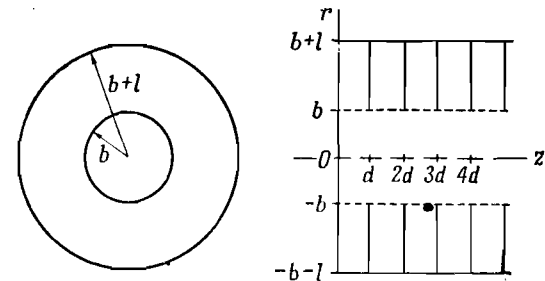
$$g^2 = k^2 + \left(\frac{\pi n}{a} \right)^2, \quad (n - \text{целое}).$$

Решения (79.6a) и (79.6b) соответствуют тем же граничным условиям, что и решения (79.5a) и (79.5b).



Фиг. 157.

Если задача имеет цилиндрическую симметрию, удобно ввести полярные координаты r и θ в плоскости xu .



Фиг. 158.

Тогда уравнения (79.3) и (79.4) принимают следующий вид (фиг. 158):

$$H_0 = \eta \frac{W}{c} E_r = i\omega \frac{\varepsilon_0}{K^2} \frac{\partial E_z}{\partial r}, \quad (79.7)$$

$$-H_r = \eta \frac{W}{c} E_0 = i\omega \frac{\varepsilon_0}{K^2} \frac{1}{r} \frac{\partial E_z}{\partial r},$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial E_z}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 E_z}{\partial \theta^2} - K^2 E_z = 0 \quad (79.8)$$

и имеют решения типа

$$E_z = \cos(n\theta) Z_n(iKr), \quad (79.9)$$

где Z_n — цилиндрическая функция n -го порядка.

Для цилиндрических полых структур в качестве Z_n нужно выбирать только функцию J_n , чтобы избежать разрыва непрерывности на оси. В случае коаксиального кабеля или структуры, содержащей электронный пучок, в области, прилегающей к пучку или центральному проводнику, в качестве решения нужно использовать комбинацию

$$Z_n = AJ_n + BY_n. \quad (79.10)$$

§ 80. Граничные условия. Основная волна

В качестве наиболее простого примера мы найдем граничные условия, которые соответствуют решению (79.5а)

$$E_z = e^{Ky} e^{i\omega t - \gamma z}, \quad y \leq 0, \quad (80.1)$$

полагая, что граница лежит в плоскости $y=0$. Предположим, что выше этой плоскости расположена структура, состоящая из очень большого числа прямых щелей глубины l , образованных металлическими параллельными плоскостями, расположенными в точках

$$z=0, d, 2d, \dots, md, (m+1)d, \dots \quad (80.2)$$

Эти щели простираются от $y=0$ до $y=l$ и закрыты на своей верхней границе (см. фиг. 156)¹⁾.

Уравнения (79.3) и (79.5) при $y \leq 0$ дают

$$\begin{aligned} E_x = 0, \quad E_y = \frac{i\omega}{WK} e^{Ky+i\omega t-\gamma z}, \quad E_z = e^{Ky+i\omega t-\gamma z}, \\ H_x = -\frac{i\omega\epsilon_0}{K} e^{Ky+i\omega t-\gamma z}, \quad H_y = 0, \quad H_z = 0. \end{aligned} \quad (80.3)$$

Внутри щелей, положение которых определено выражением (80.2), эти поля проникают в виде волн, распространяющихся снизу вверх и отражающихся от верхнего закрытого конца щелей. Для определения этих волн запишем снова уравнения

¹⁾ В русской литературе такая структура получила название гребенчатой. — Прим. ред.

(78.3) — (78.6), поменяв в них местами y и z , поскольку изменилось направление распространения:

$$\left. \begin{aligned} k'^2 E_z &= -i\omega\mu_0 \frac{\partial H_y}{\partial x} - \gamma' \frac{\partial E_y}{\partial z}, \\ k'^2 E_x &= i\omega\mu_0 \frac{\partial H_y}{\partial z} - \gamma' \frac{\partial E_y}{\partial x}, \quad k'^2 = \frac{\omega^2}{c^2} + \gamma'^2, \\ k'^2 H_z &= -\gamma' \frac{\partial H_y}{\partial z} + i\omega\epsilon_0 \frac{\partial E_y}{\partial x}, \\ k'^2 H_x &= -\gamma' \frac{\partial H_y}{\partial x} - i\omega\epsilon_0 \frac{\partial E_y}{\partial z}, \\ \frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_y}{\partial z^2} + k'^2 E_y &= 0, \quad \frac{\partial^2 H_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H_y}{\partial z^2} + k'^2 H_y = 0; \end{aligned} \right\} (80.4)$$

общий экспоненциальный множитель при этом равен $e^{i\omega t - \gamma' y}$. Далее будем предполагать, что щели очень узкие, так что выполняется условие

$$d \ll \Lambda = 2\pi \frac{W}{\omega}, \quad (80.5a)$$

где Λ — длина волны в структуре; из (80.5а) получаем

$$d \ll \lambda = 2\pi \frac{c}{\omega},$$

где λ — длина волны в свободном пространстве ($y \leq 0$), или

$$\omega \ll c \frac{2\pi}{d},$$

поскольку $W < c$. Это предположение принято нами на первом этапе из-за упрощений, к которым оно приводит; однако оно не является необходимым, и изложенный ниже метод решения может быть распространен на случай, когда d и λ принимают произвольные значения. В условии (80.5а) содержится предположение, что

$$d \ll l, \quad (80.5b)$$

так как мы будем рассматривать случай, когда длина волны в свободном пространстве порядка l .

На открытой границе каждой щели поля, определенные выражениями (80.3), можно считать не зависящими от z и имеющими то значение, которое они принимают при некотором

среднем значении z , соответствующем данной щели. Рассмотрим, например, щель

$$0 < z < d,$$

поля в которой мы будем считать равными их значениям при $z=0$, т. е. будем пользоваться выражениями (80.3), заменив в них множитель $e^{i\omega t - \gamma z}$ на $e^{i\omega t}$. Законность такого упрощения следует из (80.5а). Внутри щели могут существовать различные типы волн, распространяющихся вдоль оси y :

$$\text{волны типа ТЕМ} \quad E_y = H_y = 0,$$

$$\text{волны типа ТЕ} \quad E_y = 0,$$

$$\text{волны типа ТМ} \quad H_y = 0.$$

Рассмотрим сначала волну типа ТЕМ, которая дает основной вклад. Распространяющаяся волна определяется тогда следующими выражениями:

$$\begin{aligned} E_x = E_y = H_y = H_z = 0, \\ E_z = \pm \frac{H_x}{\eta} = e^{\pm i\omega y/c}, \end{aligned} \quad (80.6a)$$

но вследствие наличия отражающей стенки мы получаем стоячие волны

$$\text{ТЕМ} \begin{cases} E_x = E_y = H_y = H_z = 0, \\ E_z = A \sin \frac{\omega}{c} (y - l), \\ H_x = i\eta A \cos \frac{\omega}{c} (y - l), \\ \eta = \left(\frac{\epsilon_0}{\mu_0}\right)^{1/2}. \end{cases} \quad (80.6b)$$

Другие типы волн даются соотношениями

$$\text{ТЕ:} \quad H_y = \sum_{m \geq 1} B_m \cos \frac{m\pi z}{d} e^{-\gamma'_m y}, \quad (80.7)$$

$$\text{ТМ:} \quad E_y = \sum_{m \geq 1} D_m \sin \frac{m\pi z}{d} e^{-\gamma'_m y},$$

где

$$k'_m = \frac{m\pi}{d}, \quad \gamma_m'^2 = \left(\frac{m\pi}{d}\right)^2 - \frac{\omega^2}{c^2}. \quad (80.8)$$

Из уравнений (80.4) получаем выражения для поперечных компонент поля, направленных по осям Ox и Oz . Волнам типа ТЕ и ТМ (80.7) соответствуют одни и те же значения γ'_m и одинаковые предельные частоты ω_m , которые, как следует из (80.5а), значительно больше ω :

$$\omega_m = c \frac{m\pi}{d} \gg \omega. \quad (80.9)$$

Отсюда вытекает, что коэффициент ослабления очень велик:

$$\gamma'_m \approx \frac{m\pi}{d}. \quad (80.8a)$$

Таким образом, в направлении оси y волны затухают на расстоянии, меньшем ширины щели d ; это обстоятельство является еще одним упрощением, связанным с условием (80.5а).

Найдем теперь условия непрерывности полей в плоскости $y=0$. Волна типа ТЕМ (80.6б) может обеспечить непрерывность компонент E_z и H_x , определяемых из (80.3) при $y=0$:

$$E_z = -A \sin \frac{\omega l}{c} = 1, \quad (80.10)$$

$$H_x = i\eta A \cos \frac{\omega l}{c} = -i \frac{\omega \epsilon_0}{K}.$$

Из (80.10) получаем

$$-i\eta \frac{E_z}{H_x} = \text{tg} \frac{\omega l}{c} = \frac{K\eta}{\omega \epsilon_0} = K \frac{c}{\omega} = \left(\frac{c^2}{W^2} - 1\right)^{1/2}; \quad (80.10a)$$

отсюда можно определить глубину щели l . Волны типа ТМ (80.7) возбуждает только одна компонента поля (при $y=0$)

$$E_y = i \frac{\omega}{WK} = \frac{i}{\left(1 - \frac{W^2}{c^2}\right)^{1/2}}. \quad (80.11)$$

Эти волны внутри щели затухают уже на малом расстоянии, но они абсолютно необходимы для обеспечения непрерывности полей при $y=0$. Мы рассмотрим их в следующем параграфе.

§ 81. Граничные условия. Вторичные волны.

Чтобы остаточное поле (80.11) было непрерывным, мы должны использовать две группы дополнительных полей.

1) Внутри щелей (при $y > 0$) суперпозицию волн типа ТМ [см. (80.7)]

$$E_{sy} = \sum_m D_m \sin \frac{m\pi z}{d} e^{-\gamma'_m y} \quad (81.1)$$

с соответствующими компонентами E_{sz} и H_{sx} , определяемыми из (80.4), (80.8), (80.9),

$$\begin{aligned} k_m &= \frac{m\pi}{d}, \quad \gamma'_m = \left(k_m^2 - \frac{\omega^2}{c^2}\right)^{1/2} \approx \frac{\pi m}{d}, \\ E_{sz} &= - \sum_m \frac{\gamma'_m}{k_m^2} \frac{\partial E_{m, s, y}}{\partial z} \approx - \sum_m D_m \cos \frac{m\pi z}{d} e^{-\gamma'_m y}, \\ H_{sx} &= -i\omega\epsilon_0 \sum_m \frac{1}{k_m^2} \frac{\partial E_{m, s, y}}{\partial z} = \\ &= -i\omega\epsilon_0 \frac{d}{\pi} \sum_m \frac{D_m}{m} \cos \frac{m\pi z}{d} e^{-\gamma'_m y}. \end{aligned} \quad (81.2)$$

2) В свободном пространстве (при $y < 0$) суперпозицию волн, определяемых из (78.1), (80.1), (80.3),

$$\begin{aligned} E_{fy} &= \sum_h F_h \frac{\gamma_h}{K_h} e^{K_h y - \gamma_h z}, \\ E_{fz} &= \sum_h F_h e^{K_h y - \gamma_h z}, \\ H_{fx} &= -i\omega\epsilon_0 \sum_h \frac{F_h}{K_h} e^{K_h y - \gamma_h z}, \end{aligned} \quad (81.3)$$

где

$$\gamma_h = i \frac{\omega}{W_h}, \quad K_h^2 = \frac{\omega^2}{W_h^2} - \frac{\omega^2}{c^2} = -\gamma_h^2 - \frac{\omega^2}{c^2}.$$

Как мы отмечали в § 2, 4 и 40, использование такой суперпозиции является необходимым для всех типов волн, распространяющихся в среде с периодической структурой.

Рассмотрим теперь распространение основной волны с

$$\gamma_0 = i \frac{\omega}{W} = 2\pi i a_0, \quad a_0 = \frac{1}{\Lambda},$$

где Λ — действительная длина волны в периодической структуре. Такая волна не может распространяться одна: она всегда сопровождается совокупностью вторичных волн, которым соответствуют

$$\gamma_h = \gamma_0 + \frac{2\pi i h}{d}, \quad a_h = a_0 + \frac{h}{d}, \quad (81.4)$$

где d — период структуры, а h — целое число, положительное или отрицательное.

В § 80 мы предположили, что щели являются очень узкими [см. условие (80.5)]

$$d \ll \Lambda.$$

Это означает, что

$$a_0 = \frac{1}{\Lambda} \ll \frac{1}{d}$$

и

$$a_h \approx \frac{h}{d}, \quad \gamma_h \approx \frac{2\pi i h}{d}. \quad (81.4a)$$

При этом поле перед данной щелью и ближайшими к ней практически будет определяться основной волной и его можно считать почти постоянным на расстоянии порядка нескольких щелей. Напротив, длина вторичных волн очень мала: d , $1/2d$, $1/3d$, ..., $1/hd$, но эти волны удовлетворяют тому условию, что их фаза принимает практически одинаковые значения на данной щели и на ближайших к ней. Это обстоятельство позволяет получить распределение поля, удовлетворяющее граничным условиям в окрестности данной щели.

Сравнивая (81.4a) и (81.3), получаем

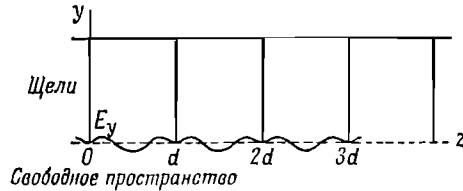
$$K_h \approx \frac{2\pi}{d} |h|, \quad \gamma_h = i \frac{h}{|h|} K_h, \quad (81.5)$$

поскольку условие (80.5a) означает, что $|\gamma_h|$ и K_h много больше ω/c .

Эти дополнительные свободные волны быстро затухают при возрастании y и дают вклад в общее поле лишь вблизи плоскости $y=0$. Эти поля имеют вид

$$\begin{aligned} E_{ry} &= i \sum_{h>0} \left\{ F_h e^{\frac{2\pi h}{d}(y-iz)} - F_{-h} e^{\frac{2\pi h}{d}(y+iz)} \right\}, \\ E_{rz} &= \sum_{h>0} \left\{ F_h e^{\frac{2\pi h}{d}(y-iz)} + F_{-h} e^{\frac{2\pi h}{d}(y+iz)} \right\}, \\ H_{rx} &= -i\omega\epsilon_0 \frac{d}{2\pi} \sum_{h>0} \left\{ \frac{F_h}{h} e^{\frac{2\pi h}{d}(y-iz)} + \frac{F_{-h}}{h} e^{\frac{2\pi h}{d}(y+iz)} \right\}. \end{aligned} \quad (81.6)$$

Прежде чем объединить эти два типа волн, мы должны записать поле в щели [см. (81.2)] в форме разложения типа



Фиг. 159. $m=3$.

(81.6). Такой вопрос не стоит лишь для $m=2p$; эти типы волн в щели не возбуждаются, так как в разложение возбуждающего поля (80.11) входят компоненты только с нечетным индексом

$$E_y = i \frac{\omega}{MK} = i \frac{4}{\pi WK} \sum_p \frac{1}{2p+1} \sin(2p+1) \frac{\pi z}{d}. \quad (81.7)$$

Таким образом, мы будем рассматривать случай нечетных индексов m (фиг. 159). Разложение имеет вид

$$\begin{aligned} \sin(2p+1) \frac{\pi z}{d} &= \frac{1}{2} s_{p0} + \sum_{n \geq 1} s_{pn} \cos \frac{2h\pi z}{d} = \\ &= \sum_{h \leq 0} \frac{1}{2} s_{ph} e^{-2\pi i \frac{hz}{d}}, \end{aligned} \quad (81.8)$$

$$\cos(2p+1) \frac{\pi z}{d} = \sum_{h \geq 1} c_{ph} \sin \frac{2h\pi z}{d},$$

где $0 < z < d$, а

$$\begin{aligned} s_{p-h} &= s_{ph} = \frac{4}{\pi} \frac{2p+1}{(2p+1)^2 - 4h^2}, \\ c_{ph} &= -s_{ph} \frac{2h}{2p+1} = -\frac{4}{\pi} \frac{2h}{(2p+1)^2 - 4h^2}. \end{aligned}$$

Используя разложение (81.1) для волн в щели и сохраняя в нем только члены с нечетным индексом, получаем для волн в щели в плоскости $y=0$

$$\begin{aligned} E_{sy} &= \sum_{p \geq 0} \sum_{h \geq 0} \frac{1}{2} D_{2p+1} s_{ph} e^{-2\pi i \frac{hz}{d}}, \\ E_{sz} &= \sum_{p \geq 0} \sum_{h \geq 0} \frac{1}{2} D_{2p+1} s_{ph} e^{-2\pi i \frac{hz}{d}}, \\ H_{sx} &= \frac{\omega\epsilon_0 d}{2\pi} \sum_{p \geq 0} \sum_{h \geq 0} \frac{D_{2p+1} \cdot 2h}{(2p+1)^2} e^{-2\pi i \frac{hz}{d}}. \end{aligned} \quad (81.9)$$

В той же плоскости $y=0$ для свободных волн имеем

$$\begin{aligned} F_0 &= 0, \\ E_{fy} &= i \sum_{h \geq 0} F_h \frac{h}{|h|} e^{-2\pi i \frac{hz}{d}}, \\ E_{fz} &= \sum_{h \geq 0} F_h e^{-2\pi i \frac{hz}{d}}, \\ H_{fx} &= -i \frac{\omega\epsilon_0 d}{2\pi} \sum_{h \geq 0} \frac{F_h}{|h|} e^{-2\pi i \frac{hz}{d}}. \end{aligned} \quad (81.10)$$

Мы положим $F_0=0$, чтобы не учитывать еще раз составляющую основной волны, которая в неявном виде содержится в выражении (81.7).

Общее результирующее поле волн в щели и свободных волн должно равняться остаточному полю (80.11), для чего необходимо положить

$$E_{sy} + E_{fy} = i \frac{\omega}{WK}, \quad E_{sz} + E_{fz} = 0, \quad H_{sx} + H_{fx} = 0. \quad (81.11)$$

Последним из этих соотношений можно пренебречь, так как магнитные поля H_{sx} и H_{rx} имеют порядок величины d [см. соотношения (80.5) и (80.9)], так что остаются уравнения

$$\begin{aligned} h \neq 0, \quad i \frac{h}{|h|} F_h + \frac{1}{2} \sum_{p \geq 0} D_{2p+1} s_{ph} &= 0, \\ F_h + \frac{i}{2} \sum_{p \geq 0} D_{2p+1} s_{ph} \frac{2h}{2p+1} &= 0, \quad (81.12) \\ h = 0, \quad \frac{1}{2} \sum_{p \geq 0} D_{2p+1} s_{p0} &= i \frac{\omega}{WK}. \end{aligned}$$

Случай $h \geq 0$ и $h < 0$ следует рассматривать отдельно.

Мы ограничимся изложением метода вычислений для $h \geq 0$; тогда

$$\begin{aligned} F_h &= -\frac{i}{2} \sum_{p \geq 0} D_{2p+1} s_{ph} \frac{2h}{2p+1} = \\ &= \frac{i}{2} \sum_{p \geq 0} D_{2p+1} s_{ph} = -F_{-h}, \quad (81.13) \end{aligned}$$

так как $s_{ph} = s_{p-h}$. Равенство (81.13) приводит к уравнениям, связывающим коэффициенты D :

$$\begin{aligned} h > 0, \quad \sum_{p \geq 0} D_{2p+1} \frac{2p+1+2h}{2p+1} s_{ph} &= \\ &= \sum_{p \geq 0} D_{2p+1} \frac{4}{\pi} \frac{1}{2p+1-2h} = 0, \quad (81.14) \\ h = 0, \quad \frac{1}{2} \sum_{p \geq 0} D_{2p+1} s_{ph} &= \frac{2}{\pi} \sum_{p \geq 0} \frac{D_{2p+1}}{2p+1} = i \frac{\omega}{WK}. \end{aligned}$$

Если коэффициенты D_{2p+1} найдены, то из уравнений (81.3) можно определить значения коэффициентов F_h . Обычно значения коэффициентов D очень быстро стремятся к нулю, так что поправочные волны не играют существенной роли.

§ 82. Физические свойства волн

Основная волна, определенная соотношениями (79.2) и (80.10), распространяется со скоростью W , которая, как мы выше предполагали, меньше скорости света c . Однако, как

мы увидим дальше, в некоторых случаях фазовая скорость может становиться и больше c .

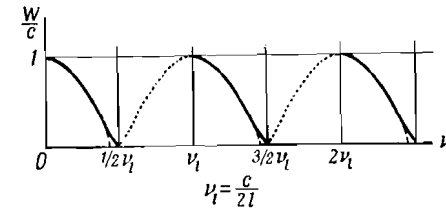
В рассматриваемом случае мы получаем [см. уравнение (80.10a)]

$$\operatorname{tg} \frac{\omega l}{c} = K \frac{c}{\omega} = \left(\frac{c^2}{W^2} - 1 \right)^{1/2}, \quad (82.1)$$

что определяет основную волну и ее фазовую скорость

$$\frac{W}{c} = \frac{1}{\left(1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\omega l}{c} \right)^{1/2}} = \left| \cos \frac{\omega l}{c} \right|. \quad (82.2)$$

Следует отметить ограниченность области применимости этой формулы. *Излагаемая теория пригодна, если только K*



Фиг. 160.

является положительной величиной, т. е. если свободные волны экспоненциально убывают с ростом y ($y > 0$). Отрицательная величина K дает экспоненциально нарастающие волны, а при $K \rightarrow -\infty$ получающееся решение не имеет никакого физического смысла. Это существенное замечание означает, что решения не существует, если

$$\begin{aligned} \frac{\pi}{2} < \frac{\omega l}{c} < \pi, \quad \frac{3\pi}{2} < \frac{\omega l}{c} < 2\pi, \\ \frac{1}{2} \nu_l < y < \nu_l, \quad \frac{3}{2} \nu_l < y < 2\nu_l, \end{aligned}$$

где

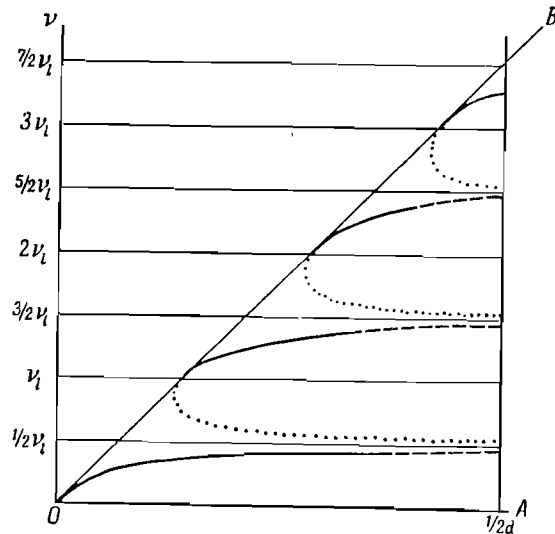
$$\nu_l = \frac{c}{2l}.$$

Это обстоятельство отмечено на фиг. 160 и 161, где ветви кривой, не имеющие физического смысла, обозначены пунктиром. На фиг. 160 приведена зависимость фазовой

скорости от ν , а на фиг. 161 — зависимость ν от волнового числа A :

$$A = \frac{1}{\Lambda} = \frac{1}{W}. \quad (82.3)$$

Предельные значения $1/2\nu_1, 3/2\nu_1, \dots$ соответствуют резонансу напряжений в щелях ($\lambda = 4l, \lambda = 4l/3, \dots$), в то время как точки $\nu_1, 2\nu_1$ соответствуют резонансу токов ($\lambda = 2l, l, \dots$).



Фиг. 161. Угловой коэффициент прямой OB равен c .

Изложенная выше теория основывается на условии (80.5а)

$$\frac{\omega}{W} = 2\pi A \ll \frac{2\pi}{d}.$$

Легко, однако, предсказать, что будет происходить, если величина A увеличивается и приближается к $1/2d$. Как видно из фиг. 161, кривая $\nu(A)$ в пределе имеет горизонтальную касательную. Когда фазовая скорость W становится очень малой, величина A принимает большие значения, поэтому кривая на фиг. 160 будет испытывать искажения в своей нижней части (эти искажения отмечены штрихами). Как было

установлено ранее (см. гл. 1, 2, 4 и 5), групповая скорость U определяется соотношением

$$U = \left| \frac{\partial \nu}{\partial A} \right|. \quad (82.4)$$

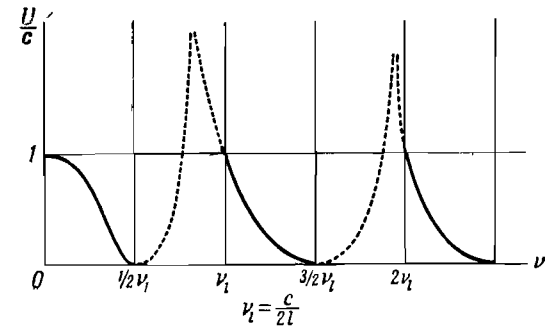
Зависимость U от ν изображена на фиг. 162. Из (82.2) и (82.3) мы получаем, что

$$A = \frac{\nu}{c \left| \cos \frac{\omega l}{c} \right|},$$

откуда

$$\frac{dA}{d\nu} = \frac{\left| \cos \frac{\omega l}{c} + \frac{\omega l}{c} \sin \frac{\omega l}{c} \right|}{c \left| \cos \frac{\omega l}{c} \right|^2}. \quad (82.5)$$

Это выражение при $\omega l / \text{ctg}(\omega l / c) = -1$ обращается в нуль, что соответствует бесконечно большому значению групповой



Фиг. 162.

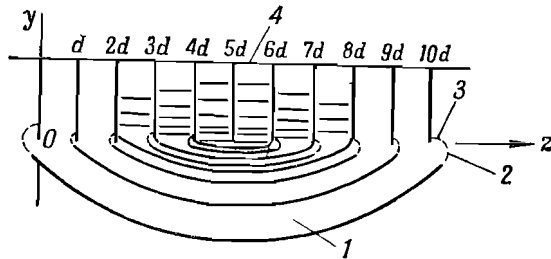
скорости U ; последнее может иметь место лишь на ветвях кривой $\nu(A)$, не имеющих физического смысла.

Роль, которую играют вторичные волны, поясняет фиг. 163. „Свободные“ волны распространяются лишь вблизи плоскости $y=0$ и искривляют силовые линии лишь в непосредственной окрестности плоскости. Вторичные волны в щели также вносят поправки к силовым линиям и так искривляют их, что силовые линии входят в металлические пластины под прямым углом. Волны в щели и свободные

волны быстро ослабевают при возрастании $|y|$. Наиболее существенные поправки в свободном пространстве вносит первая вторичная волна, амплитуда которой составляет $1/10$ амплитуды основной свободной волны и которая, согласно уравнению (81.5), затухает по закону

$$e^{-\frac{2\pi}{d}y}.$$

Такое описание явлений остается справедливым, пока длина основной волны велика: $\Lambda \gg d$. Нужно отметить, что



Фиг. 163. 1 — основная волна в свободном пространстве; 2 — поправки, обусловленные вторичной волной в свободном пространстве; 3 — поправки, обусловленные вторичной волной в щели; 4 — основная волна в щели.

при $\Lambda \rightarrow 2d$ [соотношение (82.3), фиг. 160 и 161] следует серьезно изменить теорию: в этом случае интенсивность и затухание волны, которую мы называли основной, и первой вторичной волны становятся сравнимы, так что сделанные приближения требуют пересмотра.

В общем случае на острых ребрах плоскостей, разделяющих соседние щели, наблюдается заметное сгущение силовых линий, так что поле в этих точках логарифмически расходится; эта расходимость обнаруживается в амплитудах всех высших членов как для свободных волн, так и для волн в щели.

Изложенная нами теория широко применяется, поскольку она позволяет показать существенную роль возмущений поля около щелей, а также вычислить расстояние, на котором основная волна практически не искажается.

§ 83. Волны между двумя системами плоских параллельных щелей

1. Симметричные волны типа ТМ. Проведенное выше исследование задачи с одной плоской границей весьма интересно в том отношении, что оно позволяет перейти к рассмотрению волн между двумя параллельными плоскостями. Эта структура представлена на фиг. 157; ее границами являются плоскости $y = \pm b$, а щели имеют глубину l .

Решение, относящееся к основной волне типа ТМ, дается выражениями (79.6), откуда можно получить два типа этих волн в свободном пространстве ($-b \leq y \leq b$):

симметричную волну

$$E_z = \text{ch} Ky e^{-i\omega t - \gamma z} \quad (83.1a)$$

и антисимметричную волну

$$E_z = \text{sh} Ky e^{i\omega t - \gamma z}. \quad (83.1b)$$

Мы отложим на время случай основной волны типа ТЕМ и рассмотрим симметричную волну типа ТМ, которая представляет большой практический интерес, поскольку она определяет продольное поле в средней плоскости $y=0$. Распределение полей в этой волне дается уравнениями (79.3), из которых следует

$$\begin{aligned} E_z &= \text{ch} Ky e^{i\omega t - \gamma z}, \\ E_y &= \frac{\gamma}{K} \text{sh} Ky e^{i\omega t - \gamma z}, \\ H_x &= -\frac{i\omega\epsilon_0}{K} \text{sh} Ky e^{i\omega t - \gamma z}. \end{aligned} \quad (83.1b)$$

Предполагая, что основная волна в щели аналогична волне, заданной уравнениями (80.6б), и считая, что она должна обеспечивать непрерывность полей E_z и H_x в плоскости $y=b$, получаем при $y=b$ следующие условия, аналогичные (80.10):

$$\frac{H_x}{E_z} = -\frac{l\omega\epsilon_0}{K} \text{th} Kb = \frac{-i\eta}{\text{tg} \frac{\omega l}{c}} = \frac{-i\omega\epsilon_0}{k' \text{tg}(k'l)}, \quad (83.2)$$

где $k' = \omega/c$; условия при $y = -b$ аналогичны.

Из (83.2) следует

$$B \operatorname{cth} B = \frac{b}{l} \Omega \operatorname{tg} \Omega, \quad (83.3)$$

где

$$B = Kb$$

$$\Omega = k'l = \frac{\omega l}{c} = 2\pi \frac{l}{\lambda}.$$

Мы будем различать случаи, когда B — действительная величина и когда B — чисто мнимая величина. В последнем случае $B = l\beta$ и $B \operatorname{cth} B$ заменяется на $\beta \operatorname{ctg} \beta$.

Случай 1. B — действительная величина:

$$\frac{b}{l} \Omega \operatorname{tg} \Omega = B \operatorname{cth} B \geq 1.$$

Тогда

$$K = \frac{B}{b} \text{ действительно,}$$

$$K^2 = \omega^2 \left(\frac{1}{W^2} - \frac{1}{c^2} \right), \quad (83.4)$$

$$\frac{c^2}{W^2} = 1 + K^2 \frac{c^2}{\omega^2} > 1, \quad \frac{W}{c} < 1.$$

В пределе при $B \ll 1$ $W/c \approx 1$.

Случай 2. $B = l\beta$ — чисто мнимая величина:

$$\frac{b}{l} \Omega \operatorname{tg} \Omega = \beta \operatorname{ctg} \beta.$$

Тогда

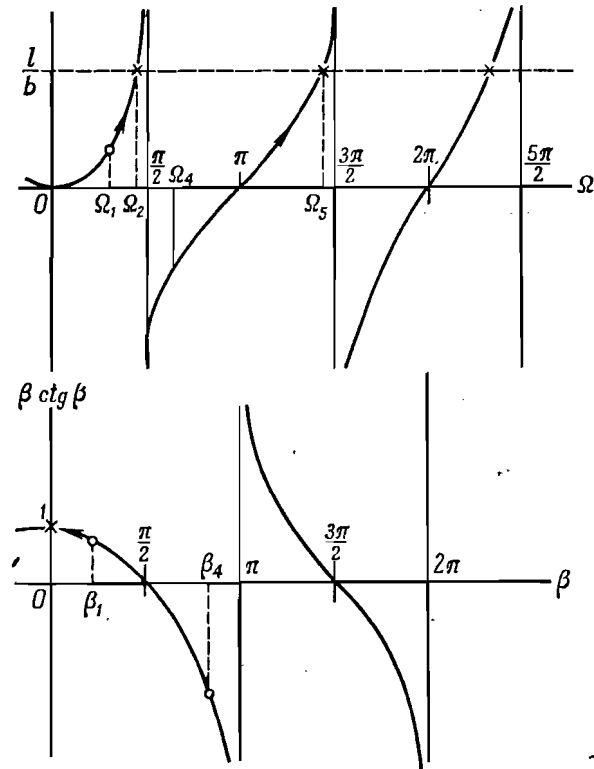
$$K = i \frac{\beta}{b} = ik, \quad K^2 = \omega^2 \left(\frac{1}{c^2} - \frac{1}{W^2} \right), \quad (83.5)$$

$$\frac{c^2}{W^2} = 1 - k^2 \frac{c^2}{\omega^2} < 1, \quad \frac{W}{c} > 1.$$

Поскольку β может принимать произвольные значения в интервале $(-\infty, +\infty)$, необходимо наложить дополнительное условие, чтобы различать случаи, когда нужно использовать первое предположение, а когда — второе. Такое условие можно получить, заметив, что выражение для c^2/W^2 должно быть положительным, откуда следует, что для k приемлемы лишь те значения, при которых

$$0 \leq k \frac{c}{\omega} \leq 1, \quad 0 \leq \frac{kc}{\omega} = \frac{k}{k'} = \frac{\beta l}{\Omega b} \leq 1. \quad (83.6)$$

Эти результаты становятся более наглядными, если обратиться к кривым фиг. 164. В области низких частот величина Ω мала, и легко заметить, что решение не существует,



Фиг. 164.

так как β близко к $\pi/2$ и β/Ω очень велико, что находится в противоречии с (84.6). Действительно, в этой области для существования решения требуется, чтобы B и K имели комплексные значения, в результате чего вместо распространяющейся волны получается затухающая. Таким образом, низкие частоты лежат в области затухания. Нижнюю границу области пропускания получим, если потребуем, чтобы удовлетворилось

условие (83.6), откуда для первой предельной частоты Ω_1 имеем

$$\frac{\beta_1 l}{\Omega_1 b} = 1, \quad \text{ctg } \beta_1 = \text{tg } \Omega_1 \quad (83.7)$$

и, следовательно,

$$\beta_1 = \frac{\pi}{2} - \Omega_1,$$

$$\frac{\beta_1}{\Omega_1} = \frac{\pi}{2\Omega_1} - 1 = \frac{b}{l}; \quad \Omega_1 = \frac{\pi}{2} \frac{l}{b+l} \quad (\text{случай 2}).$$

Согласно (82.3), этому случаю соответствует длина волны λ_1 :

$$\lambda_1 = \frac{2\pi c}{\omega_1} = \frac{2\pi l}{\Omega_1} = 4(b+l) = 2h \quad (h = 2b + 2l). \quad (83.8)$$

При увеличении частоты изображающие точки на обеих кривых фиг. 164 поднимаются вверх от точек β_1 , Ω_1 , отмеченных кружками, пока не достигнут другого граничного значения, определяемого условиями

$$\beta_2 = 0, \quad \beta_2 \text{ctg } \beta_2 = 1, \quad \Omega_2 \text{tg } \Omega_2 = \frac{l}{b}. \quad (83.9)$$

Соответствующие этому граничному значению точки на обеих кривых фиг. 164 отмечены крестиками. Если $\Omega > \Omega_2$, то нужно рассматривать первый случай [соотношения (83.4)], а величина B будет оставаться действительной, пока частота не достигнет граничного значения, определяемого условиями

$$B \rightarrow \infty, \quad \Omega_3 \text{tg } \Omega_3 \rightarrow \infty, \quad \Omega_3 = \frac{\pi}{2}, \quad \omega_3 = \frac{\pi c}{2l}, \quad \lambda_3 = 4l. \quad (83.10)$$

Эти соотношения определяют верхнюю предельную частоту первой полосы пропускания¹⁾.

Вторая полоса пропускания появится, как только снова начнет удовлетворяться условие (83.6), чему соответствуют соотношения, аналогичные (83.7),

$$\frac{\beta_4 l}{\Omega_4 b} = 1, \quad \text{ctg } \beta_4 = \text{tg } \Omega_4, \quad \beta_4 = \frac{3\pi}{2} - \Omega_4, \quad (83.11)$$

$$\Omega_4 = \frac{3\pi}{2} \frac{l}{b+l}, \quad \lambda_4 = \frac{2}{3} h \quad (\text{случай 2}).$$

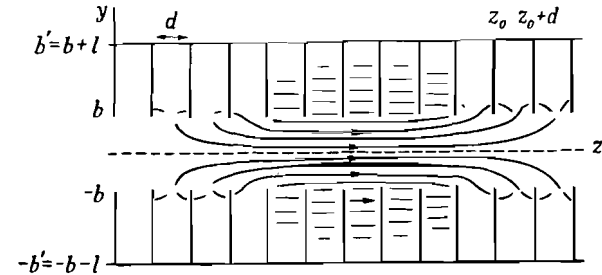
1) Сравнение (83.8) и (83.10) показывает, что рассмотрение основано на предположении $\omega_1 < \omega_3$, или $l < b$. При условии $b < l$ структуры полос пропускания были бы другими.

Таким образом определяется нижняя граница второй полосы пропускания. Когда Ω достигает значения Ω_6 , величина β обращается в нуль, и мы снова возвращаемся к первому случаю. Верхняя граница этой полосы дается выражениями

$$\Omega_6 = \frac{3\pi}{2}, \quad \omega_6 = \frac{3\pi c}{2l}, \quad \lambda_6 = \frac{4l}{3}. \quad (83.12)$$

Аналогичные рассуждения можно провести и для более высоких полос.

Изложенное выше исследование основано на рассмотрении основных волн в свободном пространстве и в щелях. Однако



Фиг. 165.

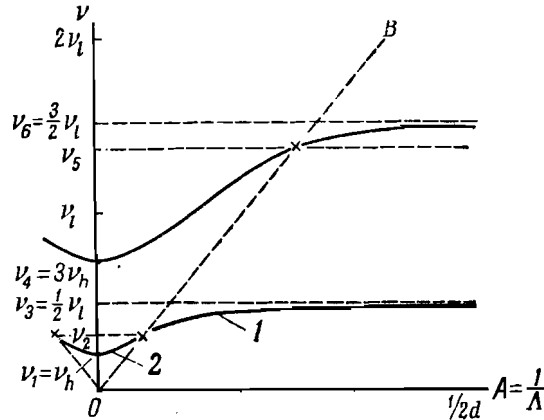
для точного вычисления полей в плоскостях $y = \pm b$ необходимо учитывать еще бесконечное число свободных и щелевых волн. Расчет при этом проводится так же, как и в § 81, нужно только обратить особое внимание на условия случая 2, когда вторичные волны в свободном пространстве распространяются на весь интервал $(-b, +b)$. В случае 1 вторичные свободные волны экспоненциально затухают и оказывают существенное влияние на распределение поля лишь в непосредственной близости от щелей, где они должны изменять форму силовых линий, как показано на фиг. 165. Изучение этих вторичных волн и их влияния на вид основных волн требует особого рассмотрения.

Наши выводы основывались на предположении

$$\nu_h < \frac{1}{2} \nu_l; \quad h = 2b + 2l > 4l, \quad l < b, \quad (83.13)$$

которому соответствуют кривые, изображенные на фиг. 166 и 167. Если бы условие (83.13) не выполнялось, форма этих

кривых была бы другой. Кривые на фиг. 167 представляют зависимость фазовой скорости волны от частоты и аналогичную зависимость для групповой скорости, которая всегда меньше c . Отметим, что на фиг. 167 изображены только две ветви этих кривых, в действительности же их



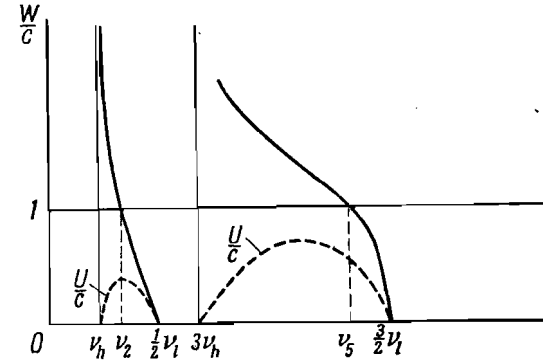
Фиг. 166. 1 — случай, когда $W < c$; 2 — случай, когда $W > c$.

Угловой коэффициент прямой OB равен c , $v_1 = c/2l$ (резонанс напряжения в щелях наступает при $v/v_1 = 1/2, 3/2$; резонанс тока при $v/v_1 = 1, 2$). $v_h = c/2h$ — наименьшая предельная частота для двух параллельных проводников, удаленных друг от друга на расстояние h .

число бесконечно, так как бесконечно число полос пропускания.

Результаты, только что полученные нами, очевидно, аналогичны результатам Кельвина и Винсента, относящимся к механическим структурам с одной резонансной частотой. Как было показано, в этом случае существуют две области пропускания, разделенные полосой непропускания (§ 3, фиг. 3, 13, 14 и 15). В рассматриваемом случае ряд частот, при которых возникает резонанс напряжения в щелях ($v = 1/2v_1, 3/2v_1, 5/2v_1, \dots$), неограничен. Как мы уже отмечали, здесь существуют два бесконечных семейства чередующихся областей поглощения и пропускания.

2. Антисимметричные волны типа ТМ. Только что рассмотренные симметричные волны представляют наибольший интерес с точки зрения ускорения или замедления электронов, поскольку им соответствует в плоскости $y=0$ продольное электрическое поле. Теперь рассмотрим антисимметричные волны типа ТМ, определяемые соотношениями



Фиг. 167.

(83.16). Соответствующее им распределение полей имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} E_z &= \text{sh } Ky e^{i\omega t - \gamma z}, \\ E_y &= \frac{\gamma}{K} \text{ch } Ky e^{i\omega t - \gamma z}, \\ H_x &= -\frac{l\omega\epsilon_0}{K} \text{ch } Ky e^{i\omega t - \gamma z}. \end{aligned} \quad (83.14)$$

Проведя такие же рассуждения, как в начале этого параграфа, и требуя, чтобы основные волны в свободном пространстве и в щелях в плоскости $y=b$ непрерывно переходили друг в друга, получаем условие, заменяющее (83.2),

$$\frac{H_x}{E_z} = -\frac{l\omega\epsilon_0}{K \text{th } Kb} = -\frac{l\omega\epsilon_0}{k' \text{tg } k'l}, \quad k' = \frac{\omega}{c}. \quad (83.15)$$

С другой стороны, соотношения (83.3) и (83.4) переходят для случая 1 в соотношения

$$\begin{aligned} B = Kb > 0 \text{ действительно, } \Omega = k'l = \omega \frac{l}{c}, \\ \frac{b}{l} \Omega \text{tg } \Omega = B \text{th } B \geq 0; \end{aligned} \quad (83.16a)$$

для случая 2 в соотношения

$$\begin{aligned} B &= Kb = i\beta, \\ \frac{b}{l} \Omega \operatorname{tg} \Omega &= -\beta \operatorname{tg} \beta \end{aligned} \quad (83.166)$$

с дополнительным условием, аналогичным (83.6),

$$0 \leq \frac{\beta l}{\Omega b} \leq 1. \quad (83.17)$$

Эти условия несколько отличаются от условий, рассмотренных в случае симметричных волн [см. формулы (83.7)—(83.12)]. При низких частотах, т. е. при малом Ω , мы попадем в область применимости случая 1 [формула (83.16a)], так что

$$\Omega \ll 1, \quad \operatorname{tg} \Omega \approx \Omega, \quad \operatorname{th} B \approx B, \quad \frac{b}{l} \Omega^2 = B^2. \quad (83.18)$$

Для таких низких частот волна почти совпадает с волной типа ТЕМ, поскольку величина K очень мала и составляющей $E_z = \operatorname{sh} Kb$ в этом случае практически можно пренебречь. Скорость этих волн меньше c , но все еще довольно велика, так как уравнение (84.4) дает

$$\Omega \ll 1, \quad \frac{c^2}{W^2} = 1 + K^2 \frac{c^2}{\omega^2} = 1 + \left(\frac{Bl^2}{b\Omega} \right) \approx 1 + \frac{1}{b}. \quad (83.19)$$

Когда Ω возрастает, то увеличивается также и величина B , так что в пределе получаем

$$\Omega = \frac{\pi}{2}, \quad B = \infty, \quad \omega = \omega_3 = \frac{\pi c}{2l}, \quad v_3 = \frac{1}{2} v_l. \quad (83.20)$$

Таким образом, определенная отсюда частота совпадает с предельной частотой ω_3 первой области пропускания для симметричных волн и соответствует резонансу внутри щелей. Если $\Omega > \pi/2$, то величина $\Omega \operatorname{tg} \Omega$ становится отрицательной и частота попадает в область применимости случая 2 [формула (83.166)], причем для значений Ω , близких к $\pi/2$, величина $\beta \operatorname{tg} \beta$ должна быть положительной.

Такое решение всегда можно получить с учетом (83.17), если только $l < b$ (при $\Omega = \pi/2 + \epsilon_1$, $\beta = \pi/2 - \epsilon_2$), но в противоположном случае, когда $l > b$, решение отсутствует. Нижняя граница второй полосы пропускания находится из соотношения

$$\Omega b = \beta l \quad (\text{случай } l > b), \quad (83.21)$$

причем условие (83.17) выполняется. Тогда

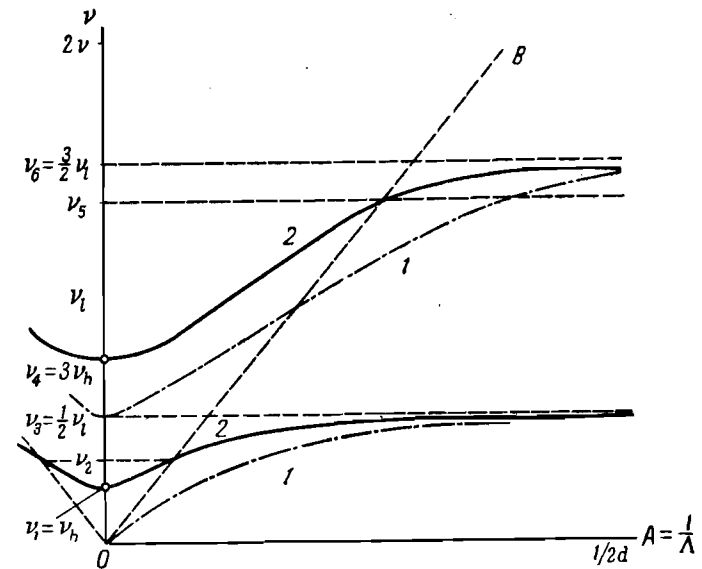
$$\operatorname{tg} \Omega = -\operatorname{tg} \beta, \quad \Omega = \pi - \beta, \quad \beta < \frac{\pi}{2}, \quad \Omega > \frac{\pi}{2}$$

и, следовательно,

$$\begin{aligned} \frac{B}{\Omega} &= \frac{\pi}{\Omega} - 1 = \frac{b}{l}, \quad \Omega = \pi \frac{l}{b+l}, \\ \lambda &= \frac{2\pi l}{\Omega} = 2(b+l) = 2h, \end{aligned} \quad (83.22)$$

$$v = v_h > v_3 = \frac{1}{2} v_l.$$

Возвратимся теперь снова к случаю $l < b$, рассмотренному в начале этого параграфа. Все графики, которые будут



Фиг. 168. 1 — решение для антисимметричных волн; 2 — решение для симметричных волн.

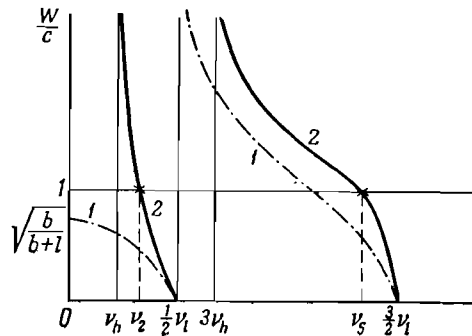
См. подпись к фиг. 166.

даны ниже, построены именно в этом предположении. Рассматривая интервал изменения Ω от $\pi/2$ до $3\pi/2$, нужно отметить, что при $\Omega = \pi$ величина $\beta = 0$ и в области

$\pi < \Omega < 3\pi/2$ применим случай 1. Верхняя граница полосы пропускания

$$\Omega = \frac{3\pi}{2}, \quad B = \infty, \quad \omega = \omega_b \quad (83.23)$$

совпадает с верхней граничной частотой второй полосы пропускания для симметричных волн. Причина этого та же, что



Фиг. 169. 1 — решение для антисимметричных волн; 2 — решение для симметричных волн.

и в случае Ω_3 [см. (83.20)], поскольку обе предельные частоты вызваны вторым резонансом в щелях.

Кривые, соответствующие рассмотренным условиям, приведены на фиг. 168 и 169, которые аналогичны фиг. 166 и 167. Кривые для антисимметричных волн на фиг. 168 и 169 отмечены цифрой 1, а кривые для симметричных волн — цифрой 2.

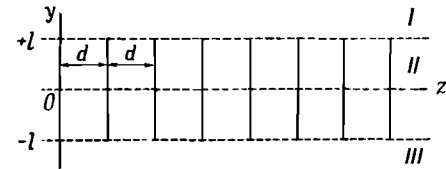
§ 84. Плоская структура с открытыми щелями

Использованный в предыдущих параграфах метод пригоден для решения и других задач. Мы применим его сейчас для исследования свойств плоской структуры с открытыми щелями, схематически изображенной на фиг. 170.

Исследование распространения волн в такой структуре сводится к рассмотрению трех различных типов волн:

- I) волны в свободном пространстве $y \gg l$;
 II) волны в щелях $-l \leq y \leq l$;
 III) волны в свободном пространстве $y \leq -l$.

Решение можно построить из *антисимметричных волн*, дающих поля противоположного знака по обе стороны системы и нулевую составляющую E_z в средней плоскости $y=0$. Фактически, для этого можно использовать два решения, полученные для закрытых щелей, поскольку, не меняя распределения полей, в систему можно ввести плоский провод-



Фиг. 170.

ник, расположенный в плоскости $y=0$. Этот тип волн аналогичен волнам, рассмотренным в § 80—82. Внутри щелей решение имеет вид

$$E_z = A \sin k'y, \quad k' = \frac{\omega}{c}$$

и во всех областях удовлетворяет общему условию

$$E_z(y) = -E_z(-y), \quad (84.2)$$

так, что, например, поле E_z в области I над системой щелей противоположно по знаку полю в области III, расположенной под системой. Свойства антисимметричных волн пояснены на фиг. 160 и 162.

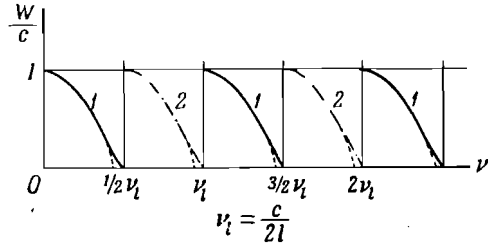
Можно также построить решение из волн с симметричной структурой

$$E_z(y) = E_z(-y), \quad (84.3)$$

которому в щелях соответствует следующее распределение полей, относящихся к основной волне типа ТМ:

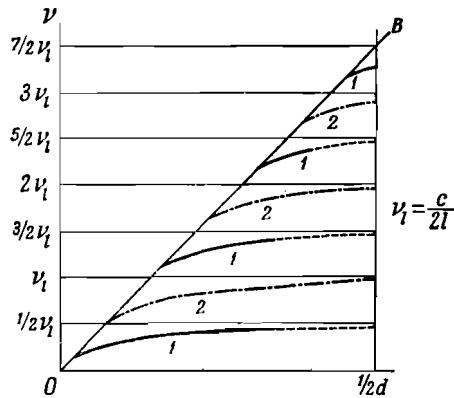
$$\begin{aligned} E_z &= A \cos k'y, \\ E_y &= 0, \\ H_x &= -i\omega\epsilon_0 \frac{A}{k'} \sin k'y. \end{aligned} \quad (84.4)$$

Это распределение заменяет то, которое было задано соотношениями (80.66). Благодаря условию (84.3) достаточно рассматривать поле только в одной из областей I и III.



Фиг. 171. 1 — решение для антисимметричных волн; 2 — решение для симметричных волн.

Мы будем исследовать область III, выбирая основную волну так же, как в § 80 [уравнения (80.1) и (80.3)]. Остается



Фиг. 172. 1 — решение для антисимметричных волн. 2 — решение для симметричных волн.

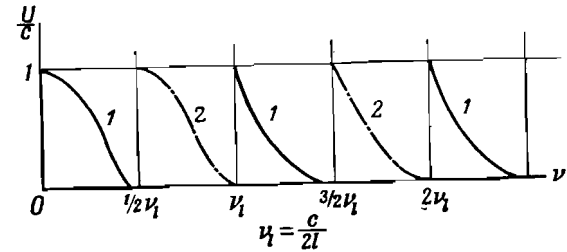
Угловой коэффициент прямой OB равен c .

еще написать условия, аналогичные условиям (80.10), которые должны обеспечивать непрерывность составляющих E_z и H_x в плоскости $y = -l$. О непрерывности E_y мы пока не заботимся, поскольку, следуя изложенному в § 81 методу, это условие можно удовлетворить позднее.

Составляющие E_z и H_x будут непрерывны, если отношение (при $y = -l$)

$$\frac{H_x}{E_z} = -\frac{l\omega\varepsilon_0}{K} = +\frac{l\omega\varepsilon_0 \operatorname{tg} k'l}{k'} \quad (84.5)$$

принимает одно и то же значение в обеих областях. В условии (84.5) первое отношение соответствует волнам в области III уравнение (80.3)], а второе — волнам в щели (84.4). Согласно



Фиг. 173. 1 — решение для антисимметричных волн; 2 — решение для симметричных волн.

условию (84.5), играющему для симметричных волн ту же роль, что и условие (80.10a) для антисимметричных волн,

$$K = -k' \operatorname{ctg} k'l > 0, \quad k' = \frac{\omega}{c}. \quad (84.6)$$

Величина K должна быть положительной, чтобы волны экспоненциально затухали, когда $|y|$ принимает большие значения.

Возвращаясь к соотношению (79.2), можно написать

$$\frac{K^2}{k'^2} = K^2 \frac{c^2}{\omega^2} = \frac{c^2}{\omega^2} - 1,$$

откуда в рассматриваемом случае для антисимметричных волн следует

$$\frac{c^2}{\omega^2} = 1 + \frac{K^2}{k'^2} = 1 + \operatorname{ctg}^2 k'l = \frac{1}{\sin^2 k'l}, \quad \frac{W}{c} = \left| \sin \frac{\omega l}{c} \right|,$$

что заменяет формулу (82.2), применимую к симметричным волнам, где вместо синуса стоял косинус. Соотношение (84.6) при условии, что $K > 0$, позволяет определить *полосы пропускания*:

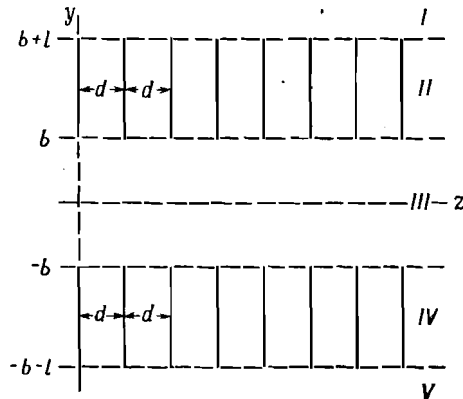
$$\frac{\pi}{2} \leq \frac{\omega l}{c} \leq \pi; \quad \frac{1}{2} \nu_1 \leq \nu \leq \nu_1,$$

$$\frac{3\pi}{2} \leq \frac{\omega l}{c} \leq 2\pi; \quad \frac{3}{2} \nu_1 \leq \nu \leq 2\nu_1.$$

При этих условиях фиг. 160—162 должны быть заменены фиг. 171—173, на которых нанесены кривые, соответствующие различным типам волн. Цифра 1 на кривых снова обозначает решение для антисимметричных волн, а цифра 2 — решение для симметричных волн. Эти решения мы получили в предположении, что длина волны велика по сравнению с шириной щелей d ; в противном случае кривые несколько искажаются, подобно тому как это показано пунктирными линиями.

§ 85. Волны между двумя системами плоских параллельных открытых щелей

Структура, представленная на фиг. 174, совершенно аналогична структуре, рассмотренной в § 83 (см. фиг. 157), за исключением того, что теперь щели открыты.



Фиг. 174.

Исследуя распространение волн типа ТМ, мы будем различать симметричные волны:

$$E_z(y) = E_z(-y), \quad (85.1)$$

антисимметричные волны:

$$E_z(y) = -E_z(-y).$$

Эти волны представляются различными функциями в следующих областях:

I. В свободном пространстве над системой: $y > b+l$.

II. В верхних щелях:

$$b < y < b+l.$$

III. В свободном пространстве между двумя системами щелей:

$$-b < y < b.$$

IV. В нижних щелях:

$$-b-l < y < -b.$$

V. В свободном пространстве под системой: $y < -b-l$.

Две последние области можно не рассматривать, поскольку сведения о поведении распространяющихся там волн можно получить из поведения волн в областях I и II с учетом условий симметрии (85.1).

Начнем с изучения симметричных волн.

В области III будут наблюдаться волны типа (83.1), а в щелях — стоячие волны общего типа (80.66), но в выражения для них должна теперь входить неизвестная фаза φ :

$$\begin{aligned} E_z &= A \cos(k'y + \varphi); & H_x &= -i\eta_0 A \sin(k'y + \varphi), \\ E_y &= 0, & k' &= \frac{\omega}{c}, \quad \eta_0 = \frac{\omega \epsilon_0}{k'} = \epsilon_0 c. \end{aligned} \quad (85.2)$$

Будем предполагать, что над структурой, т. е. в области I, поля имеют экспоненциальный характер:

$$\begin{aligned} E_z &= B e^{-Ky} \\ E_y &= \frac{i\omega}{WK} B e^{-Ky}, \quad H_x = \frac{i\omega \epsilon_0}{K} B e^{-Ky}. \end{aligned} \quad (85.3)$$

Эти соотношения аналогичны соотношениям (79.3), (79.5) и (80.2), за тем исключением, что теперь вместо K входит $-K$, так что амплитуды волн стремятся к нулю, когда $y \rightarrow \infty$. Все эти волны содержат один и тот же общий множитель $e^{i\omega t - \gamma z}$, и K в (85.3) принимает то же значение, что и в (83.1в), поскольку постоянная распространения γ одинакова для всех волн [см. (79.2)].

Удовлетворим теперь условиям непрерывности составляющих E_z и H_x в двух плоскостях $y=b$ и $y=b+l$.

Сравнивая (83.1в) и (85.3), получаем для $y=b$

$$\frac{H_x}{E_z} = -i\omega\varepsilon_0 \frac{\text{th } Kb}{K} = -i\omega\varepsilon_0 \frac{\text{tg}(k'b + \varphi)}{k'}. \quad (85.4)$$

Аналогично, учитывая (85.2) и (85.3), имеем для $y=b+l$

$$\frac{H_x}{E_z} = \frac{l\omega\varepsilon_0}{K} = -\frac{l\omega\varepsilon_0}{k'} \text{tg}(k'b + k'l + \varphi). \quad (85.5)$$

Полагая

$$k'b + \varphi = \psi,$$

получаем

$$\frac{\text{th } Kb}{K} = \frac{\text{tg } \psi}{k'}, \quad -\frac{1}{K} = \frac{\text{tg}(\psi + k'l)}{k'}. \quad (85.6)$$

Обозначив для простоты

$$T = \text{th } Kb, \quad t = \text{tg } k'l,$$

запишем

$$\text{tg}(\psi + k'l) = \frac{\text{tg } \psi + t}{1 - t \text{tg } \psi} = \frac{\frac{k'}{K} T + t}{1 - \frac{k'}{K} t T} = -\frac{k'}{K}$$

или

$$-T \frac{k'}{K} = \frac{t + \frac{k'}{K}}{1 - \frac{k'}{K} t}. \quad (85.7)$$

Так как величина K должна быть положительной, то T меняется от 0 ($K=0$) до 1 ($K=\infty$).

Найдем решения, соответствующие предельным случаям.

Полагая, что K малая величина, получаем

$$T = Kb; \quad -T \frac{k'}{K} = -k'b,$$

и отношение k'/K очень велико. Уравнение (85.7) сводится тогда к следующему:

$$-k'b = -\frac{1}{l} = -\text{ctg } k'l. \quad (85.8)$$

Отсюда, как показано на фиг. 175, находим величины k'_1 , k'_2 , k'_3 .

Предположим теперь, что K очень большая величина; тогда

$$T = 1,$$

$$\frac{k'}{K} \approx 0$$

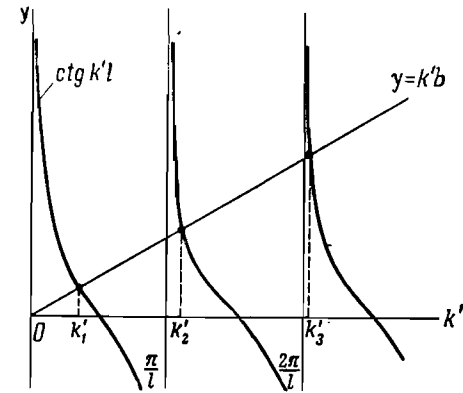
и уравнение (85.7) принимает вид

$$-\frac{k'}{K} = t + \frac{2k'}{K}$$

или

$$t = -2(k'/K), \quad (85.9)$$

где t очень мало. Решениями этого уравнения являются



Фиг. 175.

значения $k'l = n\pi - 2(k'/K)$, где n — целое положительное число, а при $K \rightarrow \infty$

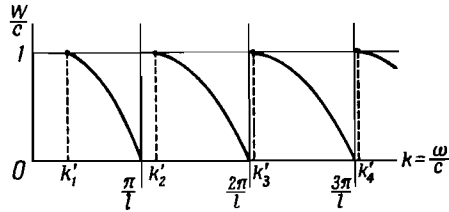
$$k' = \frac{n\pi}{l}. \quad (85.10)$$

С учетом (79.2) из найденных из (85.8) значений k'_1 , k'_2 , k'_3 получаем $K=0$, $W=c$, что соответствует границам полос пропускания. Верхние частоты этих полос, определяемые из соотношения (85.10) при $K \rightarrow \infty$ ($W=0$),

$$\omega = k'c = n \frac{\pi c}{l}, \quad (85.11)$$

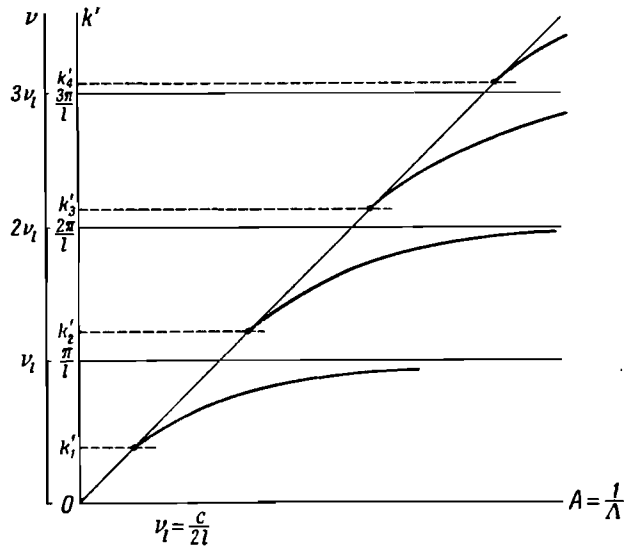
$$\frac{2}{\lambda} = \frac{n}{l}, \quad \nu = n\nu_l,$$

соответствуют резонансам в открытых щелях. Эти результаты суммированы на фиг. 176 и 177.



Фиг. 176.

Аналогичное рассмотрение можно провести для *антисимметричных волн*. В области III используем выражения (83.14), а в областях I и II — выражения (85.3) и (85.2).



Фиг. 177.

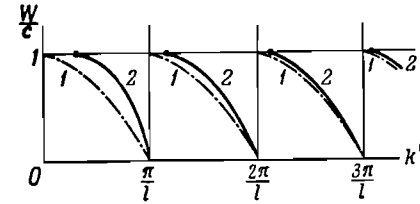
Условие (85.4), обеспечивающее непрерывность полей E_z и H_x в плоскости $y = b$, следует заменить на условие

$$\frac{H_x}{E_z} = -i\omega\epsilon_0 \frac{\text{cth} Kb}{K} = -i\omega\epsilon_0 \frac{\text{tg} \psi}{k'_1}. \quad (85.12)$$

В то же время условие (85.5) остается без изменения. Полагая

$$C = \text{cth} Kb,$$

получаем систему уравнений, аналогичную встречавшейся выше, причем, как следует из сравнения условий (85.5)



Фиг. 178. 1 — решение для антисимметричных волн; 2 — решение для симметричных волн.

и (85.12), C играет роль величины T . Таким образом, получаем соотношение, аналогичное (85.7),

$$-C \frac{k'}{K} = \frac{t + \frac{k'}{K}}{1 - \frac{k'}{K}t}, \quad t = \text{tg} k'l. \quad (85.13)$$

Рассмотрим теперь предельные случаи, определенные формулами (86.8) и (86.9).

$$K \text{ очень мало: } C = \frac{1}{Kb},$$

$$-\frac{k'}{K^2 b} = -\frac{1}{t}, \quad (85.14)$$

где t — малая величина, откуда

$$k'l = \pi, \quad \nu = n\nu_1. \quad (85.14a)$$

K очень велико: $C = 1$, пределы получаются те же, что и для $T = 1$, т. е.

$$k'l = \pi, \quad \nu = n\nu_1. \quad (85.15)$$

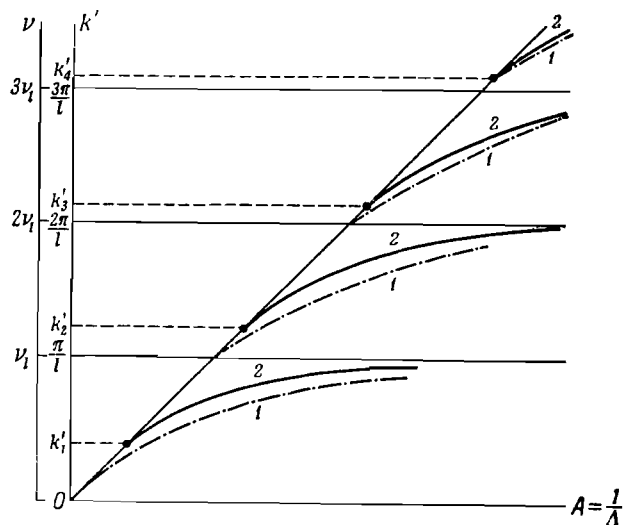
На фиг. 178 и 179 приведены соответствующие кривые для обоих типов волн — антисимметричных (1) и симметричных (2).

Чтобы удостовериться в правильности полученных результатов, рассмотрим следующие предельные случаи:

а) Пусть b бесконечно возрастает. Из фиг. 175 видно, что когда

$$k'_1 = 0, \quad k'_2 = \frac{\pi}{l}, \quad k'_3 = 2 \frac{\pi}{l}, \quad (85.16)$$

кривые 1 и 2 для симметричных и антисимметричных волн на фиг. 179 сливаются. В этом случае кривые фиг. 179



Фиг. 179. 1 — решение для антисимметричных волн; 2 — решение для симметричных волн.

в пересчете на шкалу ν аналогичны кривым фиг. 172. Глубина открытых щелей в структуре, изображенной на фиг. 170, равна l , а на фиг. 174 соответствует $2l$, так что значение по оси ординат на фиг. 179, равное ν_i , соответствует на фиг. 172 значению $\frac{1}{2} \nu_i$.

б) Пусть b стремится к нулю. В этом случае структура, изображенная на фиг. 174, переходит в структуру, изображенную на фиг. 170, а из фиг. 175 следует, что

$$k'_1 = \frac{\pi}{2l}, \quad k'_2 = 3 \frac{\pi}{2l}, \quad k'_3 = 5 \frac{\pi}{2l}. \quad (85.17)$$

Можно показать, что горизонтальные асимптоты кривых для антисимметричных волн (1) переместятся вниз к ординатам

$$\frac{\pi}{2l}, \quad 3 \frac{\pi}{2l}, \quad 5 \frac{\pi}{2l};$$

тогда фиг. 179 будет аналогична фиг. 172.

§ 86. Цилиндрическая структура

Мы ограничимся тем, что приведем лишь ряд общих результатов, относящихся к распространению волн в цилиндрических структурах типа, представленного на фиг. 158. Детальное изучение этого вопроса, как отмечалось в § 79 [см. (79.7) — (79.10)], требует введения функций Бесселя. Метод решения подобен методу, использованному нами в § 80—82, с тем лишь важным отличием, что если рассматриваются цилиндрические волны ($n=0$), то экспоненциальный множитель e^{Ky} заменяется функцией $Z_0(Kr)$, а e^{iKy} — функцией $Z_0(Kr)$. При проведении вычислений задается основная волна в свободном пространстве и так подбирается основная волна в щелях, чтобы на цилиндрической поверхности $r=b$ обеспечивалась непрерывность соответствующих полей E_z и H_θ , откуда следует условие, аналогичное условию (80.10). Нужно отметить, что данная задача существенно упрощается при предположении (80.5)

$$d \ll l, \quad d \ll \Lambda.$$

Кроме того, удобно рассматривать случай

$$b > l,$$

поскольку он соответствует структуре, в которой основная волна на оси цилиндра возмущена слабо.

Как и в случае плоской структуры, исследованной в § 80, вторичные волны очень быстро затухают и исчезают, когда $b-r$ заметно превышает d [ср. (81.4) и (81.5)], т. е. внутри цилиндра радиуса b — ρd (величина ρ порядка нескольких единиц) основная свободная волна практически не возмущена.

Если ввести предположение о независимости волны от угла θ , то получается система последовательных полос пропускания, которые очень близки к полосам, изображенным

на фиг. 166^а и 167, но, разумеется, нижние предельные частоты ν_1 и ν_4 будут другими. Значение этих частот можно получить из следующих физических соображений. Нижняя предельная частота ν_1 для двух систем плоских параллельных щелей точно совпадает с нижней предельной частотой для системы из двух параллельных плоскостей, разделенных расстоянием h . Это легко понять, если учесть, что для этой частоты электрическое поле всюду от $-\infty$ до $+\infty$ параллельно плоскостям. Следовательно, оно перпендикулярно границам щелей, так что их присутствие никак не может влиять на волну.

Совершенно такие же условия и распределение электрического поля для волн типа ТМ получаются в случае цилиндрической структуры в цилиндре радиуса $b + l$ на предельной частоте, когда

$$k_{01} = \frac{2,405}{b+l}, \quad \nu_1 = \frac{ck_{01}}{2\pi} = \frac{c}{\pi h} 2,405, \quad (86.1)$$

поскольку $b+l = 1/2 h$. Величина 2,405 является первым корнем функции Бесселя $J_0(z)$, т. е. той функции, которая, как отмечалось в § 79, входит в этом случае в решение.

Аналогичным образом получаем, что частота ν_4 , соответствующая для системы двух отстоящих друг от друга на h параллельных плоскостей нижней предельной частоте следующего порядка, в случае цилиндра диаметром h должна быть заменена частотой, полученной из соотношения

$$k_{02} = \frac{5,520}{b+l}, \quad \nu_4 = \frac{ck_{02}}{2\pi} = \frac{c}{\pi h} 5,520, \quad (86.2)$$

где величина 5,520 является вторым корнем функции Бесселя $J_0(z)$.

В то время как для структуры с плоскими параллельными щелями

$$\nu_4 = 3\nu_1,$$

для цилиндрической структуры получаем

$$\nu_4 = \frac{5,520}{2,405} \nu_1 = 2,3\nu_1. \quad (86.3)$$

За этим исключением, характер полос пропускания очень близок к характеру полос, изображенных на фиг. 166 и 167.

С другой стороны, в случае структуры с плоскими параллельными щелями мы получили, что верхние предельные частоты полос пропускания совпадают с резонансными частотами щелей

$$\nu_3 = \frac{1}{2} \nu_1, \quad \nu_6 = \frac{3}{2} \nu_1. \quad (86.4)$$

Однако мы отмечали, что некоторые сделанные выше приближения не вполне законны в непосредственной близости от верхних предельных частот [в частности, соотношение (50.5a)]. Аналогичное исследование в случае цилиндрической структуры показывает, что нужно вводить дополнительную поправку, учитывающую цилиндрическую форму щелей. Тем не менее значения, получающиеся для ν_3 и ν_6 из (86.4), по порядку величины дают удовлетворительное приближение.

**ДВИЖЕНИЕ ЭЛЕКТРОНА
В БЕГУЩЕМ ПЕРИОДИЧЕСКОМ ПОЛЕ**

§ 87. Введение

Во многих технических проблемах, например при расчете линейного ускорителя или усилителя на лампе с бегущей волной, основным вопросом является взаимодействие электронов с электромагнитными волнами. Эти задачи изучались в рамках классической механики. Для усилителя на лампе с бегущей волной можно получить систему уравнений, достаточно хорошо учитывающих реакцию электронного пучка на волну. Обычная теория линейного ускорителя основывается на предположении, что волны имеют достаточно большую амплитуду и действуют на относительно слабый пучок, что позволяет пренебречь его реакцией на волну. Классическая теория показывает, что электроны захватываются волной и собираются в группы, которые движутся со скоростью волны¹⁾. На протяжении первого этапа явления, когда электроны захватываются и группируются, волна разбивается на различные составляющие, одна из которых имеет значительно большую амплитуду, чем остальные. В конце концов в ускорителе оказывается деформированная волна с постоянной амплитудой, и вместе с этой волной движутся электроны, сгруппированные в областях малой потенциальной энергии. Рассматриваются различные типы устойчивых решений, но исследование перехода от первого этапа к последнему встречает значительные трудности из-за нелинейности встречающихся уравнений.

При изучении движения электронов методами волновой механики имеет место другая ситуация. Как будет видно ниже, задача, поставленная таким образом, сводится к обоб-

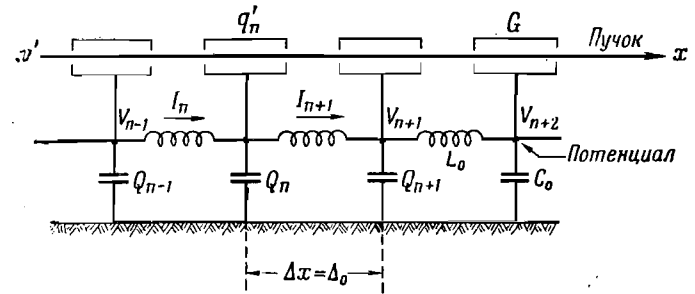
щению уравнения Матье, которое встречается при исследовании движения электронов в поле с постоянным синусоидальным потенциалом.

§ 88. Уравнения задачи в рамках классической механики

Рассмотрим изображенную на фиг. 180 структуру, исследованную с классической точки зрения, например, Бриллюэном¹⁾.

Теория основывается на следующих предположениях:

а) электронный пучок устойчив в поперечном направлении; все электроны движутся в направлении x' х;



Фиг. 180.

б) в момент t все электроны в точке x имеют одну и ту же скорость v .

Ниже будут использованы следующие обозначения:

$L_0 = Ld_0$ — индуктивность секции длины $\Delta x = d_0$,

$C_0 = Cd_0$ — емкость секции длины d_0 ,

I_n — ток в индуктивности L_0 , протекающий по n -й секции,

$q'_n = \rho_n d_0$ — электрический заряд пучка в n -й секции,

v — скорость частиц в пучке,

Q_n — полный заряд n -й емкости,

V_n — разность потенциалов на n -й емкости,

q_n — заряд емкости, вызванный токами, циркулирующими в линии.

¹⁾ См. примечание на стр. 424.

¹⁾ L. Brillouin, Phys. Rev., 74, 90 (1948); Journ. Appl. Phys., 20, 1196 (1949); Proc. Nat. Acad. Sci., 41, 401 (1955).

Если предположить, что потери в линии пренебрежимо малы, то уравнения распространения в ней можно записать в виде

$$\begin{aligned} I_n - I_{n+1} &= \frac{\partial q_n}{\partial t}, \\ L_0 \frac{\partial I_n}{\partial t} &= V_{n-1} - V_n, \\ V_n &= \frac{Q_n}{C_0}, \\ Q &= q_n + q'_n = q_n + \rho_n d_0. \end{aligned} \quad (88.1)$$

Из этих уравнений непосредственно следует

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (I_n - I_{n+1}) &= \frac{1}{L_0} (V_{n-1} + V_{n+1} - 2V_n) = \\ &= \frac{\partial^2 q_n}{\partial t^2} = \frac{\partial^2}{\partial t^2} (C_0 V_n - \rho_n d_0) \end{aligned}$$

или

$$\frac{V_{n-1} + V_{n+1} - 2V_n}{d_0^2} - LC \frac{\partial^2 V_n}{\partial t^2} = -L \frac{\partial^2 \rho_n}{\partial t^2}. \quad (88.2)$$

Предполагая, что длина секции линии мала по сравнению с длиной волны, можно перейти к пределу при $d_0 \rightarrow 0$ и заменить первый член этого уравнения величиной $\partial^2 V_n / \partial x^2$, что дает

$$\frac{\partial^2 V_n}{\partial x^2} - LC \frac{\partial^2 V_n}{\partial t^2} = -L \frac{\partial^2 \rho_n}{\partial t^2}. \quad (88.3)$$

С другой стороны, для того же пучка можно написать закон сохранения заряда

$$\frac{\partial(\rho v)}{\partial t} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}. \quad (88.4)$$

Уравнение движения частицы при этом имеет вид

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{e}{m} \frac{\partial V}{\partial x}, \quad (88.5)$$

где e и m обозначают соответственно заряд и массу частицы.

Распространение волн определяется, таким образом, уравнениями (88.3) — (88.5), причем первое из них можно, опуская индексы, записать в виде

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} - \frac{1}{W_0^2} \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = -L \frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2}, \quad (88.6)$$

где $LCW_0^2 = 1$, а величина W_0 имеет смысл скорости невозмущенной волны.

В этом уравнении последний член представляет реакцию пучка на линию, а обратное влияние линии на пучок определяется уравнением (88.5).

§ 89. Уравнения задачи в рамках волновой механики

В волновой механике уравнение сохранения заряда автоматически выполняется в силу квантового определения плотности заряда и тока, а уравнение движения частицы должно быть заменено уравнением Шредингера

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{2m}{\hbar} \frac{\partial \psi}{\partial t} - \frac{2m}{\hbar^2} eV(x, t) \psi = 0, \quad (89.1)$$

в котором через \hbar обозначена величина $\hbar/2\pi$ (\hbar — постоянная Планка), V — потенциал в данной точке в момент t , учитывающий возмущение, внесенное электромагнитными волнами.

Уравнение (88.6) продолжает оставаться справедливым; в частности, без изменений остается его правая часть, учитывающая связь между электромагнитной волной и электронами.

Величина L представляет индуктивность единицы длины линии и играет роль коэффициента связи. С другой стороны, плотность заряда ρ определяется в волновой механике выражением $e\psi\psi^*$ (звездочка означает комплексно сопряженную величину).

Если для начала предположить, что связь слаба (т. е. величина L мала), то волна будет распространяться со скоростью W , мало отличающейся от W_0 , и можно положить

$$V = V_0 + 2U_0 \cos(\omega't - k'x), \quad (89.2)$$

где

$$\omega' = k'W, \quad W \approx W_0.$$

При этих условиях уравнение (89.1) превращается в уравнение

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{2m}{\hbar} \frac{\partial}{\partial t} + \mathcal{V}_0 + \mathcal{U}_0 e^{i\varphi'} + \mathcal{U}_0 e^{-i\varphi'} \right) \psi(x, t) = 0, \quad (89.3)$$

где

$$\varphi' = \omega' t - k' x, \quad \mathcal{V}_0 = -\frac{2me}{\hbar^2} V_0, \quad \mathcal{U}_0 = -\frac{2me}{\hbar^2} U_0. \quad (89.3a)$$

С этим уравнением мы будем работать; оно аналогично уравнению Матве и сводится к нему, если положить

$$\omega' = 0, \quad W = 0. \quad (89.4)$$

§ 90. Исследование уравнения взаимодействия

Функцию $\psi(x, t)$ можно представить в виде разложения типа

$$\psi(x, t) = \sum_n A_n e^{i(\varphi_0 + n\varphi')} = \sum_n A_n e^{i\varphi_n}, \quad (90.1)$$

где A_n — постоянные, а

$$\varphi_0 = \omega_0 t - k_0 x, \quad \varphi' = \omega' t - k' x,$$

$$\varphi_n = \varphi_0 + n\varphi' = (\omega_0 + n\omega') t - (k_0 + nk') x = \omega_n t - k_n x,$$

причем

$$\omega_n = \omega_0 + n\omega', \quad k_n = k_0 + nk'.$$

Выделяя множитель $e^{i\varphi_0}$, получаем

$$\psi(x, t) = e^{i\varphi_0} u_0(\varphi'), \quad (90.2)$$

где

$$u_0(\varphi') = \sum_n A_n e^{in\varphi'}.$$

Эта функция периодична по φ' с периодом 2π .

Отметим, что с таким же успехом можно было бы записать

$$\psi(x, t) = e^{i\varphi} u_p(\varphi'), \quad (90.3)$$

где p — целое, а

$$\varphi_p = \varphi_0 + p\varphi',$$

$$u_p(\varphi') = \sum_n A_n e^{i(n-p)\varphi'}.$$

причем $u_p(\varphi')$ тоже является периодической функцией φ' .

Соотношения (90.2) и (90.3) можно рассматривать как обобщение теоремы Флоке — Блоха, относящейся к уравнению Матве.

Коэффициенты A_n , входящие в разложение (90.1), должны удовлетворять бесконечной системе линейных уравнений

$$\left(-k_n^2 + \frac{2m}{\hbar} \omega_n + \mathcal{V}_0 \right) A_n + \mathcal{U}_0 (A_{n+1} + A_{n-1}) = 0 \quad (90.4)$$

или

$$[n] A_n + \mathcal{U}_0 (A_{n+1} + A_{n-1}) = 0,$$

где для упрощения мы обозначили

$$[n] = \left(-k_n^2 + \frac{2m}{\hbar} \omega_n + \mathcal{V}_0 \right). \quad (90.4a)$$

Необходимым и достаточным условием того, чтобы эта система имела ненулевое решение, является

$$\Delta = \begin{vmatrix} \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & 0 & \mathcal{U}_0 [-1] & \mathcal{U}_0 & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & 0 & 0 & \mathcal{U}_0 [0] & \mathcal{U}_0 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & 0 & 0 & 0 & \mathcal{U}_0 [+1] & \mathcal{U}_0 & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \mathcal{U}_0 [n] \mathcal{U}_0 & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix} = 0. \quad (90.5)$$

Этот бесконечный детерминант Δ можно рассматривать как обобщение детерминанта Хилла, относящегося к уравнению Матве (ср. § 49).

Разрешая уравнение (90.5), получаем соотношение между ω_0 и k_0 :

$$\Delta = F(\omega_0, k_0) = 0, \quad (90.6)$$

так что каждому значению k_0 будет соответствовать, вообще говоря, бесконечная последовательность решений ω_0 .

В силу сходства соотношений (90.2) и (90.3) можно утверждать, что такое же решение будет и при выборе ω_p и k_p . Впрочем, это непосредственно следует из рассмотрения бесконечного детерминанта Δ : замена ω_0 и k_0 на ω_p и k_p приводит к смещению его элементов на p строк, что не меняет значения бесконечного детерминанта.

Итак, если соотношение (90.6) выполняется, то

$$F(\omega_p, k_p) = F(\omega_0 + p\omega', k_0 + pk') = 0, \quad (90.7)$$

где p — целое.

Такая возможность, в частности, осуществляется, если положить

$$\omega = Wk + f(k), \quad (90.8)$$

где функция $f(k)$ периодична по k с периодом k' , причем

$$W = \frac{\omega'}{k'}.$$

Этот результат легко проверить. Пусть ω_0 является решением (90.8), соответствующим значению величины $k_0 = k$. Рассмотрим

$$\omega = \omega_0 + p\omega', \quad k = k_0 + pk'. \quad (90.9)$$

Условию (90.8) удовлетворяет как пара величин (ω, k) , так и пара (ω_0, k_0) , что и доказывает одновременное выполнение соотношений (90.6) и (90.7).

Если в условии (90.8) положить $W = 0$, то оно приводит к классическому результату, полученному для уравнения Матве.

§ 91. Случай слабой связи

Особый интерес представляет случай слабой связи, когда параметр \mathcal{U}_0 , входящий в уравнение (89.3), является *малым*. Обозначим через A_0 основной коэффициент в разложении (90.1). Пользуясь рекуррентным соотношением (90.4), легко получить, что коэффициент A_n по порядку величины равен $\mathcal{U}_0^n A_0$. Будем решать задачу приближенно и пренебрежем членами со степенями \mathcal{U}_0 , большими или равными третьей. На основании этого, считая величины A_0 и k_0 заданными, можно рассматривать только пять уравнений системы (90.4), соответствующих значениям $n = -2, -1, 0, +1, +2$, откуда определим пять неизвестных A_{-2}, A_{-1}, A_1, A_2 и ω_0 . Таким образом, получаем

$$A_{\pm 1} = \frac{-\mathcal{U}_0 A_0}{[\pm 1] - \frac{\mathcal{U}_0^2}{[\pm 2]}}, \quad A_{\pm 2} = \frac{\mathcal{U}_0^2 A_0}{[\pm 1][\pm 2] - \mathcal{U}_0^2}. \quad (91.1)$$

и

$$[0] - \frac{\mathcal{U}_0^2 [+2]}{[+1][+2] - \mathcal{U}_0^2} - \frac{\mathcal{U}_0^2 [-2]}{[-1][-2] - \mathcal{U}_0^2} = 0, \quad (91.2)$$

где скобки имеют то же значение, что и в (90.4а). В качестве последовательных приближений имеем:

$$[0] = 0, \quad (91.3)$$

в первом порядке

$$[0] - \mathcal{U}_0 \left\{ \frac{1}{[+1]} + \frac{1}{[-1]} \right\} = 0, \quad (91.4)$$

во втором порядке

$$[0] - \mathcal{U}_0^2 \left\{ \frac{1}{[+1]} + \frac{1}{[-1]} \right\} - \mathcal{U}_0 \left\{ \frac{1}{[+1]^2 [+2]} + \frac{1}{[-1]^2 [-2]} \right\} = 0. \quad (91.5)$$

В последнем соотношении имеются члены, пропорциональные \mathcal{U}_0^4 , которые появляются при разложении слагаемых в формуле (91.2). Коэффициент при \mathcal{U}_0^4 всегда содержит ошибку в силу принятого выше приближения.

Исследуем смысл этих приближений. Уравнение (91.3), соответствующее свободным электронам, имеет вид

$$[0] = -k_0 + \frac{2m}{\hbar} \omega_0 + \mathcal{V}_0 = 0;$$

из этого уравнения

$$\omega_0 = \frac{\hbar}{2m} (k_0^2 - \mathcal{V}_0). \quad (91.6)$$

Кривая зависимости ω_0 от k_0 имеет в этом случае параболическую форму (фиг. 181).

Другие условия $[n] = 0$ дают

$$\omega_n = \frac{\hbar}{2m} (k_n^2 - \mathcal{V}_0), \quad (91.7)$$

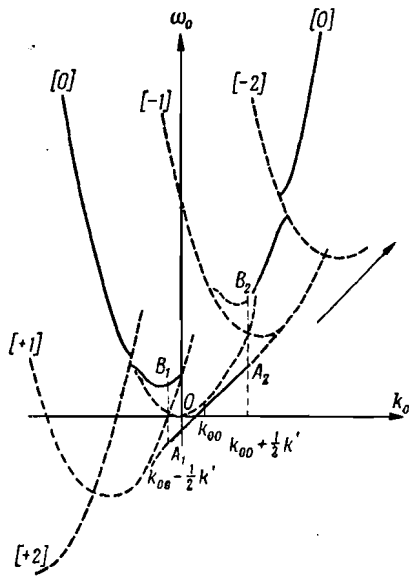
где

$$\omega_n = \omega_0 + n\omega', \quad k_n = k_0 + nk'.$$

Поправка первого приближения существенна только в том случае, если

$$[+1] \approx 0 \quad \text{или} \quad [-1] \approx 0,$$

что имеет место вблизи точек пересечения параболы [0] с параболы [+1] и [-1].



Фиг. 181. Угловой коэффициент направления, отмеченного стрелкой, равен W .

Второе приближение, как мы уже отмечали, неточное, однако оно указывает на существование поправок высших порядков, если

$$[0] \approx 0 \quad \text{и} \quad [+2] \approx 0$$

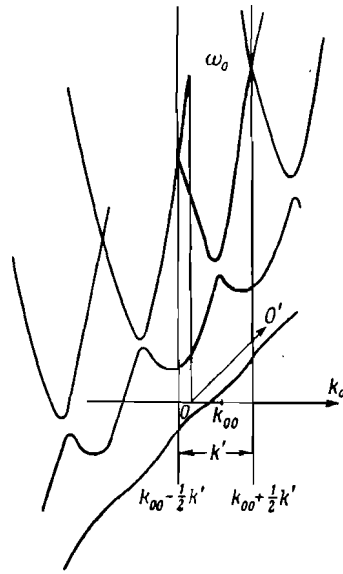
или

$$[0] \approx 0 \quad \text{и} \quad [-2] \approx 0.$$

Эти результаты показаны на фиг. 181.

Параболы [-1], [0] и [+1] пересекаются в точках с абсциссами $k_{00} \pm 1/2 k'$, где

$$k_{00} = \frac{mW}{\hbar}. \quad (91.8)$$



Фиг. 182. Угловой коэффициент прямой OO' равен W .

Это означает, что скорость электронов

$$v_{00} = \frac{\hbar k_{00}}{m} = W. \quad (91.8a)$$

Отсюда видно, что электроны и волны распространяются с одной и той же скоростью.

В нашем рассмотрении кривая [0] играет выделенную роль, а именно роль линии раздела, что несколько искусственно, поскольку в действительности все кривые эквивалентны. Это обстоятельство можно учесть, повторяя периодически кривую [0] путем переноса ее вдоль вектора $\vec{OO'}$ с компонентами ω' и k' и углом наклона W , как это сделано на фиг. 182, где подчеркивается периодичность, содержащаяся в соотношении (90.9).

Так как все эти кривые являются точным повторением одна другой, можно, как это делалось выше, выбрать область изменения переменной так, чтобы исключить это отнюдь не неизбежное повторение. При построении фиг. 181 подразумевались следующие условия.

Область определения k_0 :

$$-\infty < k_0 < \infty. \quad (91.9a)$$

Функция ω_0 разрывна в точках

$$k_{00} + \frac{n}{2} k', \quad (91.9b)$$

где n — положительное или отрицательное целое число.

Фиг. 182 соответствует другому определению; величина k_0 при этом изменяется лишь в области шириной k' , например

$$k_{00} - \frac{1}{2} k' \leq k_0 < k_{00} + \frac{1}{2} k', \quad (91.10)$$

а частота ω_0 терпит разрывы на границах этого интервала.

Рассмотрим теперь определяемую правой частью уравнения (88.6) реакцию электронов на электромагнитную волну. Учитывая соотношение (89.2) и (89.3), запишем уравнение (88.6) в следующей форме:

$$\frac{\hbar^2}{m^2} \mathcal{U}_0 \cos(\omega't - k'x) \omega'^2 \left(\frac{1}{W^2} - \frac{1}{W_0^2} \right) + Le \frac{\partial^2}{\partial t^2} (\psi\psi^*) = 0, \quad (91.11)$$

поскольку

$$k' = \frac{\omega'}{W}, \quad W \neq W_0.$$

Оценим теперь величину $\psi\psi^*$. Мы будем принимать во внимание только те члены, в которые величина \mathcal{U}_0 входит в степени не выше первой, и будем пренебрегать членами \mathcal{U}_0^2 , дающими лишь нелинейные поправки. Фактически это соответствует рассмотрению в выражениях (90.1) и (91.1) только слагаемых с индексом, равным 0 и ± 1 . В таком случае

$$\psi = A_0 e^{i(\omega_0 t - k_0 x)} + A_1 e^{i(\omega_1 t - k_1 x)} + A_{-1} e^{i(\omega_{-1} t - k_{-1} x)},$$

где

$$\omega_1 = \omega_0 + \omega', \quad \omega_{-1} = \omega_0 - \omega', \quad (91.12)$$

$$k_1 = k_0 + k', \quad k_{-1} = k_0 - k',$$

$$A_{\pm 1} = \frac{-\mathcal{U}_0 A_0}{[\pm 1]}.$$

Если мы предположим, что коэффициент A_0 действителен, то действительными будут также и коэффициенты $A_{\pm 1}$. Пользуясь этим приближенным значением для функции ψ , получаем

$$\begin{aligned} \psi\psi^* = & A_0^2 + A_0 A_1^* e^{-i(\omega' t - k' x)} + A_0^* A_1 e^{i(\omega' t - k' x)} + \\ & + A_0 A_{-1}^* e^{i(\omega' t - k' x)} + A_0^* A_{-1} e^{-i(\omega' t - k' x)} + \dots \end{aligned}$$

или

$$\psi\psi^* = A_0^2 + C \cos(\omega' t - k' x),$$

$$C = 2A_0 (A_1 + A_{-1}) = -2A_0^2 \mathcal{U}_0 \left\{ \frac{1}{[+1]} + \frac{1}{[-1]} \right\}. \quad (91.13)$$

Эта величина линейна относительно \mathcal{U}_0 , но квадратична по A_0 .

Из уравнений (91.11) и (91.13) тогда получаем

$$\frac{1}{W^2} = \frac{1}{W_0^2} - \frac{2Le^2 m A_0^2}{\hbar^2} \left\{ \frac{1}{[+1]} + \frac{1}{[-1]} \right\}. \quad (91.14)$$

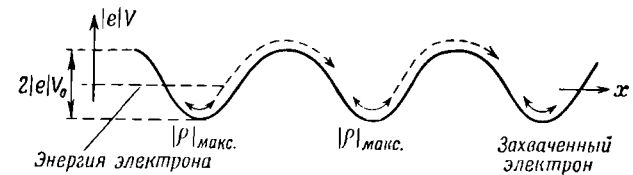
Таким образом, из-за взаимодействия с электронами скорость волны W немного отличается от скорости невозмущенной волны W_0 . Выражения $[+1]$ и $[-1]$ малы

в окрестности разрывов при $k_{00} \pm 1/2 k'$, указанных на кривых фиг. 181. Это обстоятельство указывает на то, что эти разрывы являются следствием несколько более сильного взаимодействия между волнами и электронами.

§ 92. Физическая интерпретация случая слабой связи.

Физическую интерпретацию только что полученных результатов можно дать, сравнивая их с результатами классической теории.

1. Случай захваченного электрона схематически изображен на фиг. 183. Обычно электрон колеблется вблизи



Фиг. 183.

минимума потенциальной энергии и может случайным образом переходить из одного минимума в другой вследствие „туннельного эффекта“. Плотность электричества $|\rho|$ максимальна в минимумах кривой потенциальной энергии и минимальна на ее гребнях. Средняя энергия электрона равна амплитуде кривой потенциальной энергии $2|e|V_0$.

2. Электрон с большой энергией может свободно двигаться через максимумы и минимумы потенциальной энергии, причем вблизи минимумов он движется быстрее, чем вблизи максимумов. В этом случае максимум плотности электричества $|\rho|$ находится в точках с наибольшей потенциальной энергией (фиг. 184).

Эти соображения позволяют указать критерий, при помощи которого можно различать свободные и захваченные электроны. Пользуясь уравнением (89.2), запишем потенциальную энергию электрона в виде

$$eV = -|e|V = -|e|V_0 - |2e|U_0 \cos \varphi',$$

где

$$\varphi' = \omega' t - k' x,$$

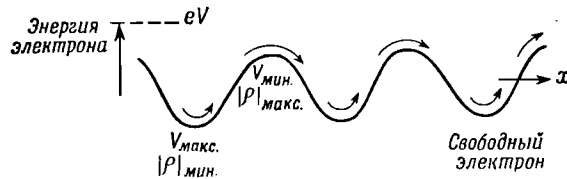
или

$$\frac{2m}{\hbar^2} eV = -\mathcal{V}_0 - 2\mathcal{U}_0 \cos \varphi'. \quad (92.1)$$

Если предположить, что $U_0 > 0$, то и $\mathcal{U}_0 > 0$, тогда можно заметить, что минимумы кривой потенциальной энергии соответствуют значениям

$$\varphi' = 0, \pm 2\pi, \dots, \pm 2n\pi. \quad (92.2)$$

Плотность электронов определяется из (91.13). Различие между свободными и захваченными электронами можно получить, рассматривая знак коэффициента C .



Фиг. 184.

1. Захваченные электроны:

$$C > 0, \text{ плотность } \psi\psi^* \text{ максимальна в точках с наименьшей энергией.} \quad (92.3a)$$

2. Свободные электроны:

$$C < 0, \text{ плотность } \psi\psi^* \text{ минимальна в точках с наименьшей энергией.} \quad (92.3b)$$

В формулу, определяющую C , входят две величины: $[+1]$ и $[-1]$ [см. (90.4a)]. Например, выражение $[+1]$ положительно над параболой, обозначенной на фиг. 181 индексом $[+1]$, и отрицательно под ней. Знак C зависит от положения результирующей кривой по отношению к параболом $[+1]$ и $[-1]$. Нижняя часть результирующей кривой соответствует интервалу

$$k_{00} - \frac{1}{2} k' \leq k_0 \leq k_{00} + \frac{1}{2} k'$$

и расположена под обеими параболом. Так как в этой области выражения $[+1]$ и $[-1]$ меньше нуля, то величина

C вдоль этой кривой положительна, и мы получаем следующие условия:

1) Захваченные электроны:

$$C > 0 \text{ в области } k_{00} - \frac{1}{2} k' \leq k_0 \leq k_{00} + \frac{1}{2} k'. \quad (92.4a)$$

2) Свободные электроны:

$$C < 0 \text{ во всех остальных интервалах изменения } k_0. \quad (92.4b)$$

Знак C на всех других ветвях кривой зависит от знака выражения $\left\{ \frac{1}{[+1]} + \frac{1}{[-1]} \right\}$ и может быть легко определен.

Для захваченного электрона коэффициент $C > 0$ и, как следует из (91.14), $W < W_0$. Таким образом, в случае слабой связи волна тормозится захваченными электронами и ускорится свободными

$$W_{\text{захв.}} < W_0 < W_{\text{своб.}} \quad (92.5)$$

Исследуем теперь более детально, что происходит на отрезке $A_1 B_1$, где

$$k = k_{00} - \frac{1}{2} k'. \quad (92.6)$$

Выражения $[0]$ и $[+1]$ здесь малы, в то время как $[-1]$ принимает большие отрицательные значения. Уравнение (91.4) практически сводится к следующему:

$$[0][+1] = \mathcal{U}_0^2, \quad (92.7)$$

так что в точке $k = k_{00} - \frac{1}{2} k'$, где кривые $[0]$ и $[+1]$ пересекаются, выражения $[0]$ и $[+1]$ принимают одинаковые значения:

$$[0] = [+1] = \pm \mathcal{U}_0. \quad (92.8)$$

Возвращаясь к определению (90.4a) этих скобок и обозначая через ω_0 частоту, соответствующую точке пересечения

$$k = k_{00} - \frac{1}{2} k', \quad \omega = \omega_0, \quad [0] = [+1] = 0,$$

получаем, что точки A_1, B_1 соответствуют значениям

$$\omega = \omega_0 \pm \epsilon, \quad [0] = [+1] = \pm \frac{2m}{\hbar} \epsilon. \quad (92.9)$$

Таким образом, учитывая формулу (89.3), получаем

$$\varepsilon = \frac{\hbar}{2m} \mathcal{U}_0 \quad \text{или} \quad \hbar\varepsilon = |e| U_0. \quad (92.9a)$$

Это соотношение будет использовано ниже. Из (92.6) и (91.14) следует

$$\frac{1}{W^2} - \frac{1}{W_0^2} = \pm \frac{2L e^2 m}{\hbar^2 \mathcal{U}_0} A_0^2 = \pm \frac{L |e|}{U_0} A_0^2.$$

Скорость в точке B_1 (свободные электроны) больше, чем в точке A_1 (захваченные электроны), на величину

$$W_{B_1} - W_{A_1} = \Delta W = \frac{2L |e| W_0^2}{U_0} A_0^2 = \frac{2L |e| W_0^2}{U_0 l}, \quad (92.10)$$

где $A_0^2 l = 1$ в предположении, что в среднем в структуре на длину l приходится один электрон. С другой стороны, если плотность электронов в пучке достаточно мала, легко подсчитать энергию электромагнитной волны в секции структуры длиной d_0 . При этом можно исходить из определения, данного в начале § 88:

$$\bar{\mathcal{E}}_{d_0} = \frac{1}{2} L_0 I^2 + \frac{Q^2}{2C_0} = L_0 I^2, \quad (92.11)$$

где I — ток в линии, а Q — заряд емкости, причем два члена, входящие в (92.11), в среднем равны. Отсюда следует [ср. уравнение (88.5)]

$$L_0 \frac{\partial I}{\partial t} = d_0 \frac{\partial V}{\partial x} = 2d_0 U_0 k' \sin \varphi'$$

или

$$I = \frac{2U_0}{LW_0} \cos \varphi',$$

где $\varphi' = \omega't - k'x$. Таким образом, если пренебрегать зарядом электронов в пучке, средняя потенциальная энергия на единицу длины линии равна

$$\bar{\mathcal{E}} = \frac{1}{d_0} \bar{\mathcal{E}}_{d_0} = L I^2 = \frac{2U_0^2}{LW_0^2}. \quad (92.12)$$

Подставляя эти величины в (92.10), получаем окончательно

$$\frac{\Delta W}{W_0} = 4 \frac{U_0 |e|}{\mathcal{E} l}. \quad (92.13)$$

Это выражение определяет изменение скорости волны при освобождении захваченного электрона (т. е. при переходе $A_1 \rightarrow B_1$). Отсюда можно оценить общее изменение энергии, соответствующее переходу $A_1 \rightarrow B_1$.

Энергия электрона при переходе меняется, согласно (92.9), на величину

$$2\hbar\mathcal{E} = 2|e| U_0. \quad (92.14)$$

Учтем также изменение ΔW скорости волн. Граничное условие требует, чтобы k' было постоянным; если, например, принять, как в уравнении (92.10), циклические условия на длине l , то

$$k' = 2\pi \frac{q}{l}, \quad (92.15)$$

где q — целое, положительное число. Изменение скорости соответствует сдвигу частоты

$$\frac{\Delta \omega'}{\omega'} = \frac{\Delta W}{W}, \quad (92.16)$$

как в теории твердого тела. В технических приложениях, наоборот, частота задана и не должна меняться. Соотношение (92.15) приводит к распределению электронов по уровням энергии:

$$\bar{\mathcal{E}} l = \left(r + \frac{1}{2}\right) \hbar \omega',$$

где r — целое число. Поэтому из (92.13) получаем для энергии, приходящейся на длину l ,

$$\frac{\Delta(\bar{\mathcal{E}} l)}{\bar{\mathcal{E}} l} = \frac{\Delta \omega'}{\omega'} = \frac{\Delta W}{W} = \frac{4|e| U_0}{\mathcal{E} l}. \quad (92.17)$$

Итак, окончательно, для освобождения электрона (т. е. для перехода $A_1 \rightarrow B_1$) требуется энергия, полная величина которой, согласно (92.14) и (92.17), равна

$$\Delta E = 2|e| U_0 + \Delta(\bar{\mathcal{E}} l) = 6|e| U_0. \quad (92.18)$$

Изменение скорости волны требует в целом втрое большей затраты энергии, чем изменение энергии электрона, связанное с переходом электрона из захваченного состояния в свободное состояние.

§ 93. Решение задачи сведением к уравнению Матье

В § 90 мы изложили ряд общих свойств уравнения (89.3), а в § 91 рассмотрели частный случай слабой связи. В более общем случае эту задачу можно исследовать, сведя ее к уравнению Матье. Произведем замену неизвестной функции

$$\Phi(x, t) = e^{i(\omega t - k_0 x)} \Phi(\xi), \quad (93.1)$$

где

$$\xi = \frac{1}{2} \varphi' = \frac{1}{2} (\omega' t - k' x),$$

$$k_{00} = \frac{mW}{\hbar}.$$

Из уравнения (89.1) получаем тогда уравнение для $\Phi(\xi)$

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \xi^2} + \Phi \frac{4}{k'^2} \left(\frac{2m}{\hbar} \omega - k_{00}^2 + \mathcal{V}_0 + 2\mathcal{U}_0 \cos 2\xi \right) = 0, \quad (93.2)$$

которое может быть приведено к классической форме уравнения Матье

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \xi^2} + \Phi (\eta + \gamma \cos 2\xi) = 0,$$

если положить

$$\eta = \frac{4}{k'^2} \left(\frac{2m}{\hbar} \omega - k_{00}^2 + \mathcal{V}_0 \right),$$

$$\gamma = \frac{8\mathcal{U}_0}{k'^2}.$$

Решение уравнения Матье, соответствующее одной из элементарных волн, имеет вид

$$\Phi(\xi) = A(\xi) e^{i\beta \xi}, \quad (93.4)$$

где β — действительная величина, а $A(\xi)$ является периодической функцией с периодом π . Возвращаясь к переменной φ' , можно также записать

$$\Phi = F(\varphi') e^{i \frac{\beta}{2} \varphi'}, \quad (93.5)$$

где теперь функция $F(\varphi')$ периодична по φ' с периодом 2π .

Общее решение для функции $\Phi(x, t)$ мы можем тогда записать в следующей форме:

$$\Phi(x, t) = e^{i \left(\omega + \frac{\beta}{2} \omega' \right) t - i \left(k_0 + \frac{\beta}{2} k' \right) x} F(\omega' t - k' x). \quad (93.6)$$

Сравнивая это выражение с выражением (90.2), видим, что

$$\omega_0 = \omega + \frac{\beta}{2} \omega', \quad k_0 = k_{00} + \frac{\beta}{2} k'. \quad (93.7)$$

С другой стороны, периодическую функцию F можно заменить другой функцией (при целых p)

$$F_p(\varphi') = F(\varphi') e^{-ip\varphi'}$$

и тогда

$$\Phi = F_p(\varphi') e^{i \left(\frac{\beta}{2} + p \right) \varphi'}. \quad (93.8)$$

Из сравнения этого выражения с (90.3) следует

$$\omega_p = \omega + \frac{\beta}{2} \omega' + p\omega' = \omega_0 + p\omega' \quad (93.9)$$

$$k_p = k_{00} + \frac{\beta}{2} k' + pk' = k_0 + pk',$$

что согласуется с результатами, полученными выше.

Такой общий подход позволяет получить ряд результатов, относящихся к случаю сильной связи.

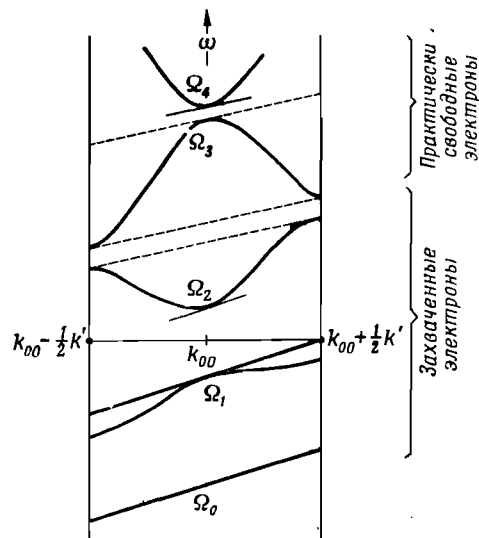
Уравнение Матье позволяет предсказать наличие ряда полос пропускания, в которых величина β действительна (ср. § 48). Для классификации этих полос можно использовать два способа обозначений в зависимости от того, рассматривается ли фиг. 181 или 182.

	Для фиг. 182	Для фиг. 181	
0	$-1 < \beta < 1$	$-1 < \beta < 1$	
1	$-1 < \beta < 1$	$-2 < \beta < -1$ и $1 < \beta < 2$	(93.10)
...
q	$-1 < \beta < 1$	$-q-1 < \beta < -q$ и $q < \beta < q+1$	
...

В левом столбце (93.10) указан номер полосы пропускания. В обоих случаях $\Delta\beta = 2$.

Первый способ обозначений более пригоден для изучения сильной связи (при больших γ). Первые полосы

пропускания очень узки и дают практически постоянное значение для η и, следовательно, для ω , так что зависимость ω



Фиг. Угловой коэффициент прямых, обозначенных буквой Ω , равен W .

от β проявляется лишь в полосах пропускания более высокого порядка. Так, например, полоса пропускания нулевого порядка дает, согласно (93.7) и (93.10),

$$\omega = \Omega_0, \quad \omega_0 = \Omega_0 + \frac{\beta}{2} \omega', \quad k_0 = k_{00} + \frac{\beta}{2} k', \quad (93.11)$$

$$-\frac{1}{2} < \frac{\beta}{2} < \frac{1}{2}.$$

В системе координат (ω_0, k_0) это соответствует отрезку прямой с угловым коэффициентом $W = \omega'/k'$. Структура полос представлена на фиг. 185. Различие между свободными и захваченными электронами сразу же следует из общих свойств уравнения Матве, как видно из следующего:

I. $\eta < -\gamma$. Области пропускания нет:

$$\frac{2m}{\hbar} \omega < k_{00}^2 - \mathcal{V}_0 - 2\mathcal{U}_0. \quad (93.12a)$$

II. $-\gamma < \eta < \gamma$. Узкие полосы пропускания (захваченные электроны):

$$k_{00}^2 - \mathcal{V}_0 - 2\mathcal{U}_0 < \frac{2m}{\hbar} \omega < k_{00}^2 - \mathcal{V}_0 + 2\mathcal{U}_0. \quad (93.12b)$$

III. $\gamma < \eta$. Широкие полосы пропускания (свободные электроны):

$$k_{00}^2 - \mathcal{V}_0 + 2\mathcal{U}_0 < \frac{2m}{\hbar} \omega. \quad (93.12b)$$

Эти результаты могут служить отправной точкой при исследовании задачи в случае сильной связи и совпадают с результатами, полученными выше для слабой связи.

Обратное воздействие на электромагнитную волну [уравнение (88.6)] в случае сильной связи гораздо труднее поддается исследованию, поскольку величину $\psi\psi^*$ уже нельзя представлять функцией $\cos \varphi'$ [см. (91.13)]. В этом случае может играть существенную роль нелинейная деформация волны. Действительно, решение для ψ было построено в предположении, что на электроны действует синусоидальная волна, распространяющаяся с данной скоростью. Однако благодаря реакции электронов волна деформируется, так что в ее спектральном разложении появляются различные гармоники, а такая задача в точном виде решена быть не может.

Для получения приближенного решения этой задачи ее сводят к задаче „самосогласованного поля“, которую можно поставить следующим образом. Электромагнитные волны представляются в виде произвольного разложения, содержащего высшие гармоники; другими словами, вместо простой синусоидальной волны, заданной соотношением (89.2), берется разложение Фурье

$$V = V_0 + \sum_p V_p e^{ip\varphi'}, \quad (93.13)$$

где $\varphi' = \omega't - k'x$, p — целое число. Функция ψ может быть представлена разложением вида (90.1), однако, поскольку в линейные уравнения (90.4) войдут члены высших порядков, в детерминанте Хилла Δ [уравнение (90.5)] присутствуют все недиагональные элементы. Разрешая эту систему

уравнений, можно определить коэффициенты A_n разложения функции ψ и, следовательно, электронную плотность

$$\psi\psi^* = \sum_p B_p e^{i p r}, \quad (93.14)$$

где

$$B_p = \sum_n A_n A_{n-p}^*$$

Подставляя это выражение в (88.6), легко заметить, что форма волны не будет искажаться, если коэффициенты B_p пропорциональны соответствующим коэффициентам V_p :

$$B_p = \alpha V_p. \quad (93.15)$$

При этих условиях уравнение (88.6) для скорости волны точно дает величину W .

На соотношении (93.15) и основывается применяемый метод.

Отметим, что можно сразу записать нелинейное уравнение, описывающее данную задачу. Будем рассматривать волну заданной формы, распространяющуюся с постоянной скоростью:

$$V = V(x - Wt).$$

Тогда уравнение (89.3) принимает следующий вид:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial t^2} \left(\frac{1}{W^2} - \frac{1}{W_0^2} \right) = -L \frac{\partial^2 p}{\partial r^2} = L |e| \frac{\partial^2}{\partial r^2} (\psi\psi^*).$$

Интегрируя это уравнение и опуская члены, противоречащие предположению о наличии стационарной волны, находим

$$V = V_0 + \frac{W_0^2 W^2}{W_0^2 - W^2} L |e| \psi\psi^*.$$

Подставляя теперь это выражение в (89.4), получаем нелинейное уравнение для функции ψ , описывающее данную задачу.

Отметим в заключение, что изложенный только что метод пригоден для решения многих других задач, на которые мы указывали в начале этой главы. В частности, он мог бы быть применен к задаче об упругих волнах в проводниках, которая рассматривалась классическим методом Парментером¹⁾.

¹⁾ Parmenter, Phys. Rev., 89, 990 (1953).

ИМЕННОЙ УКАЗАТЕЛЬ

- | | |
|--|---|
| Баден-Пауэлл (Baden-Powell) 14—17, 23, 24, 31, 47 | Дешамп (Deschamps G.) 179 |
| Барриоль (Barriol) 157 | Джермер (Germer) 204 |
| Бернулли Д. (Bernouilli D.) 12 | Джонс (Jones H.) 264, 265 |
| Бернулли И. (Bernouilli J.) 12 | Дирак (Dirac P. A. M.) 363 |
| Биберах (Bieberbach M. L.) 265 | Дэвиссон (Davisson) 204 |
| Блох Ф. (Bloch F.) 224, 264 | |
| Борн М. (Born M.) 28, 30, 39, 62, 72, 76, 78, 149, 185, 249, 251, 264, 381 | Зейтц (Seitz F.) 244, 264, 265 |
| Бравэ (Bravais) 167 | |
| Бриллюэн Л. (Brillouin L.) 66, 109, 165, 173, 201, 207, 257, 259, 264, 284, 289, 295, 306, 350, 366, 376, 424, 425 | Кальман (Kallman H. E.) 66 |
| Брэгг (Bragg) 195, 196, 203, 223, 304 | Кауэр 308 |
| Букерт Л. (Bouckaert L. P.) 265 | Кац (Katz E.) 265 |
| | Кельвин (Kelvin) 14, 15, 21—25, 28, 50, 145, 307, 406 |
| | Клеро (Clairaut) 13 |
| | Коган С. С. 308 |
| | Коши (Cauchy) 14, 21, 24 |
| | Крамерс (Kramers) 289 |
| | Краснушкин П. Е. 25, 27, 28, 52, 65, 364 |
| | Крониг (Kronig R. de L.) 282, 306 |
| Ван-дер-Поль (Van der Pol) 267, 280, 282, 283, 306 | Кэмпбелл (Campbell) 27, 307, 308 |
| Ватсон (Watson) 274, 275, 306 | Кэнек (Canac) 68 |
| Ваши (Vaschy) 25 | |
| Вентцель (Wentzel) 289 | |
| Вигнер (Wigner E.) 244, 265 | |
| Винсент (Vincent) 24, 25, 27, 39, 406 | Лагранж (Lagrange) 13, 14, 138 |
| Власов А. А. 41 | Лаплас (Laplace) 11, 185 |
| | Леннард-Симонс (Lennard-Simmons) 154 |
| Гегенбауэр (Gegenbauer) 134 | |
| Гудвин (Goodwin) 203 | |
| Гюйе (Guillet) 135 | |
| Гюттон (Gutton) 381 | |
| | Мандельштам Л. И. 299 |
| | Маннинг (Manning M. F.) 265 |
| | Матье (Mathieu P.) 267, 270, 306, 425 |
| Дарвин (Darwin) 377 | Могэн (Mauguin) 376, 379, 380 |
| Дебай (Debye) 252, 253, 255, 256, 258 | Морс Ф. (Morse P. M.) 264, 306 |
| | Мотт (Mott N. F.) 264, 265 |

- Ньютон И. (Newton J.) 11, 12, 14, 48
- Обер (Aubert) 135
Ор্তুзи (Ortusi) 381
- Пайерлс (Peierls R.) 265
Пайпс (Pipes L. A.) 350
Палалекси Н. Д. 299
Пароди М. (Parodi M.) 62, 66, 70, 134, 135, 138, 157, 158, 259, 264, 306, 350, 367
Пирс (Pierce G. W.) 66
Планк (Planck M.) 254, 262, 303, 305
Парментер (Parmenter) 444
Потемкин В. В. 52
Пупин (Pupin) 14, 26, 307, 308
Пэнни (Penney W. G.) 282, 306
- Резерфорд (Rutherford D. E.) 138, 159, 160
Рэлей (Rayleigh) 259
- Скинер (Skinner H. W.) 265
Слэтер (Slater J. C.) 265
Смолуховский (Smoluckowski R.) 265
Соколов А. А. 52
Стрэтт (Strutt M. J.) 267, 277, 280, 282, 283, 306
Стрэттон (Stratton J. A.) 165, 306
Стьюарт (Stewart) 68
- Тамм И. Е. 52
Тейлор (Taylor) 12
Трахтман А. М. 66
- Уиттекер (Whittaker) 229, 267, 274, 275, 283, 295—298, 306
- Файнберг Я. Б. 382
Флоке (Floquet) 224, 267, 270, 279, 286, 291, 358, 429
Фурье (Fourier) 13, 170, 187, 443
- Хамберт (Humbert P.) 267, 306
Харди (Hardy) 203
Хартри (Hartree) 306
Хаустон (Houston W. V.) 265
Херинг (Herring C.) 265
Хилл (Hill) 229, 288
Ходоров (Chodorow M. I.) 265
Хунд (Hund F.) 265
Хэвисайд (Heaviside) 25
- Шапелль (Chapelle) 157.
- Щелкунов (Schelkunoff) 133
- Эвальд (Ewald P. P.) 220
Эйлер Л. (Euler L.) 12, 13

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

- Аналогия акустическая фильтров нижних частот 66
— между магнетроном и циклической решеткой Борна для NaCl 251
— — распространением волн в волноводах и механических структурах 406
— — упругих и электромагнитных волн 25
— — теорией электрических фильтров и теорией распространения рентгеновских лучей в кристаллах 376, 381
— — электрическими и механическими линиями 26, 62, 65, 66, 76, 146, 308
— — электрической линией и одномерной решеткой 61, 74
- Базис решетки 210
Брэгговское отражение 195, 197
- Вектор базисный 161, 162, 184, 205, 213, 217, 238
— волновой 184, 247
— Умова — Пойнтинга 133
- Ветвь акустическая 29, 84, 87, 94, 96, 248
— оптическая 29, 84, 87, 94, 96, 97, 248
- Взаимодействие между частицами, дальнее 41, 50, 129
— — ближнее 33, 47
- Волна бегущая 49, 68, 99
— де Бройля 97
— в щели в волноводе 395, 400
- Волна вторичная 392, 400
— гармоническая 16, 104, 112, 128
— медленная 385
— между системами из плоских щелей 401
— модулированная 110, 114, 116
— несущая 110, 111, 113, 115
— отраженная 98, 126, 192
— — в замкнутых электрических линиях 338
— — — — ограниченных кристаллах 379, 380
— падающая 98, 126, 198
— парциальная 195
— плоская 189
— поперечная 61, 247
— — типа ТЕМ 390
— — типа ТМ и ТЕ в волноводах 384, 386, 390
— — — — антисимметричная 407, 411, 418
— — — — симметричная 401, 413, 415
— продольная 61, 247
— прошедшая 98, 126
— свободная в волноводе 395, 400
— стоячая 20, 49, 117
— упругая 14, 28, 30, 31
— — в проводнике 444
— электронная 204
- Волновод диафрагмированный 381, 382
— — граничные условия 386, 389
— — распространение волн 381
— — медленных волн 382

- Волновое число, основной интервал изменения 18, 19, 32, 35, 40, 81, 90, 91, 117
 Волновой пакет 104, 110, 112
 Волны акустические 277
 — акустической давление 259
- Генератор параметрический 299—303
 Граничные условия в диафрагмированном волноводе 386, 389
 — — кристалле 249
 — — эллиптические 267
- Дисперсия 21, 23, 25, 103
 Дифракция рентгеновских лучей, применение для определения кристаллической структуры 202, 203
- Задача Ван-дер-Поля и Стрэтта 280
 — Хилла 285
 Закон Дюлонга и Пти 257
 — Неймана 259
 — Планка 254
 Зоны Бриллюэна 173, 291
 — в двумерной решетке 173, 201
 — — — определение 176, 228
 — — — построение 176—183, 201
 — в кристалле 247
 — — прямой решетке 244
 — — трехмерной решетке 220, 235, 340
 — — — построение Эвальда 222
 — Вигнера — Зейтца 244
- Импеданс кажущийся 334
 — характеристический 118, 126, 128, 132, 133
 — — линии из четырехполюсников 374
- Импеданс характеристический четырехполюсника 327, 333, 337
 — — — входной 328
 — — — выходной 327
 — — — обратного 328
 — — — симметричного 329, 334
- Кабель коаксиальный 388
 — телефонный 76—78
 Колебания акустические 101
 — оптические 101
 — поперечные 34, 37, 138
 — продольные 33—37, 41, 141
 — упругой струны поперечные 34, 35, 138
 — — — продольные 33, 35, 141
 Компенсаторы, применение в подводной акустике 66
 Координаты обобщенные в электрической линии 313
 Коэффициент адиабатической упругости 11
 — изотермической сжимаемости 11, 48
 — — упругости 11
 — отражения 98, 126, 127
 — поглощения 11
 Кристаллы 247
 — тепловое расширение 259
 — энтропия 259
- Лампа с бегущей волной 417
 Линии двойные 58
 — механические 26, 63
 — трехфазные 59, 61
 — — аналогия с решеткой Борна 61
 — электрические нагруженные 26, 58, 63, 65
 — — — двухполюсниками 339, 341
 — — — емкостями 346
 — — — индуктивностями 344
 — — — четырехполюсниками 346
 — — — непрерывные 351
 — — — из бесконечно малых четырехполюсников 353
 — — — периодические 358

- Линии электрические с постоянными параметрами 357
 — — — произвольно меняющимися параметрами 356
 — — — экспоненциально меняющимися параметрами 354
 — — — трехфазные и многофазные 363, 364
 Линия задержки с компенсацией 66
- Магнетрон 251
 Матрица единичная 164
 — четырехполюсника 318
 — — единичная 321
 — — обратного 322
 — — — обращенного 322
 — — симметричного 323
 — шестиполосника 365
 — элемента линии, нагруженной четырехполюсниками 347
 Матрицы нормировка 360
 — ось 325
 — Паули 360
 — симметричные и несимметричные 363
 — эрмитовы 363
 Метод Бриллюэна 284, 295, 298
 — Бриллюэна — Вентцеля — Крамерса 289
 — Вигнера — Зейтца 244
 — Уиттекера 274, 283, 295, 269
- Огибающая 111, 112, 114, 116
 Осциллятор гармонический 35, 36, 68
 Отражение волн на границе среды 46
 — — связь с полосами пропускания и непропускания 97
 — рентгеновских лучей 195—201, 247
 — — — многократное 377
 — электронов от кристаллов 204
- Парафины, вычисление собственных частот колебаний цепочки молекул 155
- Пентаэритритол тетрацетата, кристаллическая структура 203
 Периодичность в структурах, нарушение 52
 Плоскость кристаллографическая 167, 195, 196, 215
 Плотность энергии 107—109, 128, 129
 Поверхностное натяжение 45, 46
 Показатель преломления 20, 21, 25
 Полиномы Гегенбауэра 7, 134—154, 367
 — — применение при изучении дискретных структур 138, 142
 — — — — — цепочек молекул парафинов 155
 — — — — — электрических фильтров 367
 — — — — — производящая функция 134
 — Лежандра 134
 — — — — — производящая функция 134
 — Чебышева 7
 — электросферические 135
 Полосы двухполюсников 341, 343
 — непропускания 24, 30, 49, 58, 86, 202
 — пропускания 24, 30, 37, 40, 53, 55, 281
 — — и непропускания в диафрагмированных волноводах 404, 408, 410, 413
 — — — — — в нагруженных линиях 341, 342, 348
 — — — — — в цепях четырехполюсников 336
 — — — — — при движении электрона в бегущем периодическом поле 441
 — структурные 341, 343, 345, 348
 — четырехполюсника 348
 Постоянная затухания 20, 30, 39, 49, 87
 Поток энергии 107—109, 123, 124
 Предельная частота в кристалле 252

- Преобразование Фурье, обратное 113
- Распространение волн в кристалле 28—30, 97, 247
 — — — одномерной решетке 11—14, 31
 — — — среде при наличии периодического возмущения 224, 229
 — — — трехмерной решетке 234, 244
 — — — ферромагнитном кристалле 68—70
 — — — электрических линиях 307
 — рентгеновских лучей 97
- Решетка Бравэ 238
 — — обратная 215, 239
 — — двумерная 159, 161
 — — обратная 161, 163, 187, 195, 205, 208, 213
 — — прямая 161, 163, 187, 204, 213
 — из двухатомных молекул, конечная, вычисление собственных частот колебаний 149
 — — — — переход к решетке из одноатомных молекул 87—98
 — кристаллическая 45
 — — одномерная Борна 28—30
 — — — аналогия с трехфазной линией 61
 — из многоатомных молекул 98
 — — простая 162, 236
 — — прямоугольная 206
 — — с базисом 210
 — — — — двумерная 162, 210
 — — — — — трехмерная 233, 238
 — — — — — трехмерная гексагональная 204, 236, 248
 — — — — — с плотной упаковкой 237
 — — — — кубическая гранецентрированная 218, 235
 — — — — — объемноцентрированная 218, 235
 — — — — — простая 217, 219
 — — — — циклическая 185, 248, 249
- Самовозбуждение 298
- Скорость групповая 104, 110—112, 116, 117, 131
 — — — в кристалле 250
 — — — распространения волны 15, 49, 50
 — — — сигнала 104, 110
 — — — энергии 53, 55, 103, 104, 109, 111, 119
 — — — фазовая 16, 17, 20, 21, 24, 47, 103, 104, 111, 117
 — — — в кристалле 250, 252
- Собственные колебания в кристалле 250
 — — значения матрицы 325
- Среда диспергирующая 104, 111
- Среды периодические непрерывные 235, 240
- Структура диафрагмированного волновода, гребенчатая 388
 — — — — плоская с открытыми щелями 410, 422, 423
 — — — — цилиндрическая 421, 422
 — — — зон решетки, гексагональной 205
 — — — — гранецентрированной 211
 — — — — квадратной 208, 211
 — — — — прямоугольной 206
 — — — — непрерывная двумерная, распространение волн при наличии периодического возмущения 184
- Струна непрерывная с периодической структурой 102
 — — упругая 33
 — — эллиптического сечения 35
- Твердое тело, теория теплоемкости 28—30, 247, 251—259
- Телефонная линия, согласование воздушного и подземного кабелей 76—78
- Температура характеристическая 254
- Теория Блоха 224
 — — Флоке 224, 285

- Упаковка шаров плотная 235, 236
- Уравнение взаимодействия 428
 — — — Матве 224, 266, 440
 — — — параметры 267
 — — — периодическое решение 267, 271, 272
 — — — Хилла 274, 284, 294
 — — — практические методы исследования 274, 277, 283, 284, 289, 295—298
- Уравнения канонические электрических линий 333
 — — Максвелла 383
 — — четырехполосника 316
- Ускорители электронов линейные 382, 417
- Условие Брэгга 192, 196, 197, 200
- Условия циклические 185, 249, 251
- Фильтр механический 24, 25
 — — многополосный 364
 — — — — верхних частот 27, 28, 33, 55, 65, 146
 — — — — нижних частот 21, 26, 28, 33, 55, 56, 61, 64
 — — — — акустический 66, 68
 — — — — механический 65, 148
 — — — — электрический 56—61, 66
 — — — — полосовой 24, 27, 33, 37, 55, 65, 70, 151
- Функция волновая, свойства 185
 — — обобщенная Матве 271
 — — периодическая 168—171
 — — собственная 14
- Хлористый натрий, решетка 78
 — — — явление остаточного свечения 84
- Цепи электрические, линейные 314
 — — — — пассивные 314
 — — — — элементарные 312
- Цепочка Винсента 24, 25
 — — — — электрический аналог 27
- Цепочка из двухатомных молекул, продольные колебания 37
 — — — — одномерная конечная 44, 45, 52
 — — — — неограниченная 44, 46, 47
 — — — — связанных осцилляторов, продольные колебания 35
 — — — — с неупругой связью 68—70
 — — — — из четырехполосников 368
- Цепочки алифатические, вычисление собственных частот колебаний 155—158
- Частота критическая 21, 23, 33, 58
 — — — волновода 384
 — — — — максимальная 15, 17, 34, 68
 — — — — предельная 21, 26, 28, 33, 49, 307, 404
 — — — — резонансная 24
 — — — — собственная 12, 35, 37, 138, 143
- Четырехполосник, матричное представление 317
 — — — — обратимый 323
 — — — — обратный 321
 — — — — обращенный 322
 — — — — определение 315
 — — — — полосы пропускания 336
 — — — — непропускания 336
 — — — — симметричный 323
 — — — — соединение последовательное 319
 — — — — уравнение 316
- Число волновое 15, 17, 24
- Шестиполосник 363
 — — — матрица 365
- Электрические цепи 311, 312
- Электрон, взаимодействие с волной 430, 435
 — — — — — движение в бегущем поле, классическое рассмотрение 425
 — — — — — — — — — квантовое рассмотрение 427

Электроны свободные и захваченные 436, 440	Энергия потенциальная 42, 43, 107, 128
— в металлах 303	— твердого тела 254
Энергии плотность 107	Энтропия кристалла 259
— поток 108, 129, 133	— системы гармонических осцилляторов 262
— скорость распространения 109, 130	
Энергия взаимодействия 54	Ячейка элементарная 29, 40, 98, 120, 132, 164, 214, 219, 220, 243, 245
— кинетическая 107, 108, 129, 139	

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие редактора	5
Предисловие авторов	9

*Глава 1.***Распространение упругих волн в одномерной решетке, образованной из точечных частиц. Исторический обзор**

§ 1. Работы XVIII века	11
§ 2. Работы XIX века; Коши, Баден-Пауэлл, Кельвин	14
§ 3. Современные работы	23

*Глава 2.***Распространение волн в одномерных решетках. Качественное рассмотрение и общие выводы**

§ 4. Общие замечания	31
§ 5. Цепочка из свободных частиц	33
§ 6. Продольные колебания цепочки связанных равноотстоящих осцилляторов	35
§ 7. Продольные колебания цепочки двухатомных молекул	37

*Глава 3.***Математическое исследование одномерных решеток, состоящих из одинаковых частиц**

§ 8. Уравнение движения одномерной решетки, состоящей из одинаковых частиц	41
§ 9. Случай взаимодействия только между смежными частицами. Полное решение	47
§ 10. Учет далеких взаимодействий	50
§ 11. Электрический фильтр нижних частот	56
§ 12. Аналогия между электрическими и механическими системами	62

Примечания

- А. Акустический аналог электрических и механических фильтров нижних частот 66
- Б. Пример цепочки связанных осцилляторов, обладающей свойствами рассмотренной в § 6 механической системы. Распространение механического возмущения в цепочке, образованной из магнитов 68

Глава 4.

Математическое изучение более сложных одномерных решеток

- § 13. Уравнения движения решетки хлористого натрия. Одномерный случай 71
- § 14. Электрический аналог одномерной решетки, состоящей из двухатомных молекул 74
- § 15. Детальное изучение решетки хлористого натрия (одномерный случай) 78
- § 16. Переход от решетки, состоящей из двухатомных молекул, к решетке из одноатомных молекул 87
- § 17. Одномерная решетка из многоатомных молекул 98

Глава 5.

Скорость распространения энергии, поток энергии, характеристический импеданс

- § 18. Общие замечания: фазовая скорость 103
- § 19. Об одной теореме из теории функций комплексного переменного 105
- § 20. Плотность энергии, поток энергии, скорость распространения энергии 107
- § 21. Групповая скорость и скорость распространения сигнала 110
- § 22. Характеристический импеданс 118
- § 23. Соединение двух решеток 124
- § 24. Общее определение характеристического импеданса 127

Глава 6.

Проблемы границ и ограниченные периодические структуры

- § 25. Введение. Полиномы Гегенбауэра 134
- § 26. Приложение полиномов Гегенбауэра $C_n^1(x)$ к вычислению собственных частот колебаний ограниченной одноатомной решетки 138

- § 27. Другая точка зрения на фильтр 146
- § 28. Вычисление собственных частот ограниченной решетки, состоящей из двухатомных молекул 149
- § 29. Приложение полиномов Гегенбауэра $C_n^1(x)$ к изучению „зигзагообразных“ структур; собственные частоты колебаний цепочек молекул парафинов 154
- § 30. Обобщение 159

Глава 7.

Двумерные решетки

- § 31. Прямые и обратные двумерные решетки 161
- § 32. Периодические функции двух или трех переменных 168
- § 33. Зоны в двумерных решетках 173
- § 34. Распространение волн в двумерных непрерывных структурах при наличии периодического возмущения 184
- § 35. Парциальные волны для второго случая и брегговское отражение 195
- § 36. Исследование явлений в окрестности точки разрыва 198
- § 37. Примеры зон в случае двух измерений 201

Глава 8.

Трехмерные решетки

- § 38. Прямые и обратные трехмерные решетки 213
- § 39. Зоны в трехмерных структурах; построение Эвальда 220
- § 40. Общие результаты, относящиеся к распространению волн в трехмерных периодических структурах 223
- § 41. Распространение волн в однородной и изотропной средах при наличии малого периодического возмущения 229
- § 42. Общие замечания, относящиеся к распространению волн в дискретных структурах 233
- § 43. Исследование некоторых трехмерных структур и их зон 235
- § 44. Зоны в прямой решетке. Основы метода Вигнера — Зейтца 244
- § 45. Распределение частот в реальном кристалле 247
- § 46. Энергия теплового возбуждения твердого тела. Характеристические температуры 254
- § 47. Тепловое расширение и энергия твердого тела 259

Глава 9.

Уравнение Матье и связанные с ним проблемы

- § 48. Общие замечания 266
- § 49. Общее исследование уравнения Матье 270

- § 50. Практические методы исследования уравнения Хилла . . . 277
 § 51. Генератор с самовозбуждением 298
 § 52. Свободные электроны в металлах 303

Глава 10.

Матричная алгебра и распространение волн вдоль электрических линий

- § 53. Общие замечания 307
 § 54. Выражение для энергии 312
 § 55. Определение четырехполюсника и его уравнение 315
 § 56. Матричное представление четырехполюсника 317
 § 57. Последовательное соединение двух четырехполюсников. Умножение матриц 319
 § 58. Обратные и обращенные четырехполюсники и соответствующие им преобразования 321
 § 59. Матрицы четырехполюсников и группа C_2 323
 § 60. Характеристический или волновой импеданс четырехполюсника 327
 § 61. Распространение волны вдоль цепочки четырехполюсников 329
 § 62. Применение теории к симметричному четырехполюснику 334
 § 63. Полосы пропускания и полосы непропускания в цепях четырехполюсников 336
 § 64. Отраженные волны в линиях, замкнутых на импеданс ζ_0 338
 § 65. Линии, нагруженные двухполюсниками 339
 § 66. Линии, нагруженные четырехполюсниками 346

Глава 11.

Непрерывные электрические линии

- § 67. Переход от линии четырехполюсников к непрерывной линии 351
 § 68. Примеры непрерывных линий, представляемых четырехполюсниками 354
 § 69. Непрерывные периодические линии. Уравнения Матье и Хилла 358
 § 70. Нормировка матриц (ϵ_{ij}) . Матрицы Паули 360
 § 71. Трехфазные и многофазные электрические линии 363

Глава 12.

Приложение полиномов Гегенбауэра $C_n^1(x)$ к изучению электрических фильтров

- § 72. Введение 367
 § 73. Выражение для тока и напряжения в произвольной точке цепочки из четырехполюсников 368
 § 74. Характеристические импедансы 371
 § 75. Случай симметричных четырехполюсников 375
 § 76. Аналогия между теорией электрических фильтров и закономерностями распространения рентгеновских лучей в кристаллах 376

Глава 13.

Замедляющие волноводные системы

- § 77. Введение 382
 § 78. Общие уравнения 382
 § 79. Медленные волны. Некоторые примеры 385
 § 80. Граничные условия. Основная волна 388
 § 81. Граничные условия. Вторичные волны 392
 § 82. Физические свойства волн 396
 § 83. Волны между двумя системами плоских параллельных щелей 401
 § 84. Плоская структура с открытыми щелями 410
 § 85. Волны между двумя системами плоских параллельных открытых щелей 414
 § 86. Цилиндрическая структура 421

Глава 14.

Движение электрода в бегущем периодическом поле

- § 87. Введение 424
 § 88. Уравнения задачи в рамках классической механики 425
 § 89. Уравнения задачи в рамках волновой механики 427
 § 90. Исследование уравнения взаимодействия 428
 § 91. Случай слабой связи 430
 § 92. Физическая интерпретация случая слабой связи 435
 § 93. Решение задачи сведением к уравнению Матье 440
 Именной указатель 445
 Предметный указатель 447

Л. Бриллюэн и М. Пароди
РАСПРОСТРАНЕНИЕ ВОЛН
В ПЕРИОДИЧЕСКИХ СТРУКТУРАХ

Редактор А. К. БУРЦЕВ
Художник Б. Н. Гладков.
Художественный редактор
Е. И. Подмарькова.
Технический редактор А. Г. Резоухова.
Корректор Л. А. Дмитриева

Сдано в производство 25/II 1959 г.
Подписано к печати 5/VIII 1959 г.
Бумага 84×108^{3/32} = 7,2 бум. л. 23,6 печ. л.
Уч.-изд. л. 21,2. Изд. № 2/4046.
Цена 16 р. 85 к. Зак. 201

ИЗДАТЕЛЬСТВО
ИНОСТРАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ.
Москва, Ново-Алексеевская, 52.

Типография № 2 им. Евг. Соколовой
УПП Ленсовнархоза.
Ленинград, Измайловский пр., 29.

ИЗДАТЕЛЬСТВО ИНОСТРАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

Книги по физике

ВЫШЛИ В СВЕТ

- Бринкман Г., **Применение спинорных инвариантов в атомной физике.** Перевод с английского, 94 стр., цена 4 р. 80 к.
- Багавантам С., Венкатарайуду Т., **Теория групп и ее применение к физическим проблемам.** Перевод с английского, 301 стр., цена 11 р. 45 к.
- Буш Г. и Винклер У., **Определение характеристических параметров полупроводников.** Перевод с немецкого, 139 стр., цена 5 р. 65 к.
- Варма А., **Рост кристаллов и дислокации.** Перевод с английского, 216 стр., цена 10 р. 65 к.
- Данлэп У., **Введение в физику полупроводников.** Перевод с английского, 430 стр., цена 19 р. 65 к.
- Инграм Д., **Спектроскопия на высоких и сверхвысоких частотах.** Перевод с английского, 445 стр., цена 17 р. 70 к.
- Мутто И. и Такаги Ю., **Теория явлений упорядочения в сплавах.** Перевод с английского, 130 стр., цена 5 р. 85 к.
- Метеорология и атомная энергия.** Перевод с английского, 259 стр., цена 15 р. 90 к.
- Юз Дональд Дж., **Нейтронные эффективные сечения.** Перевод с английского, 260 стр., цена 10 р. 90 к.
- Рекомбинация носителей тока в полупроводниках.** Сборник статей. Перевод с английского и немецкого, 141 стр., цена 7 р.
- Характеристические потери энергии электронов в твердых телах.** Сборник статей. Перевод с английского и французского, 270 стр., цена 11 р. 10 к.

ИЗДАТЕЛЬСТВО ИНОСТРАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

Книги по физике

ПЕЧАТАЮТСЯ

- Каулинг Т., **Магнитная гидродинамика.** Перевод с английского.
- Кэнциг В., **Сегнетоэлектрики и антисегнетоэлектрики.** Перевод с английского.
- Перлман И., Расмуссен Дж., **Альфа-радиоактивность.** Перевод с английского.
- Таунс Ч. и Шавлов А., **Радиоспектроскопия.** Перевод с английского.
- Вопросы квантовой теории многих тел.** Сборник статей. Перевод с английского.
- Нелинейная квантовая теория поля.** Сборник статей. Перевод с немецкого и английского.
- Физика низких температур.** Перевод с английского и немецкого.
- Строение атомного ядра.** Перевод с английского.
- Гейдон А., **Спектроскопия пламен.** Перевод с английского.

ГОТОВЯТСЯ К ПЕЧАТИ

- Батлер С., **Ядерные реакции срыва.** Перевод с английского.
- Гиршфельдер Дж., Кертисс Ч., Берд Р. **Молекулярная теория газов и жидкостей.** Перевод с английского.
- Копферман О. О., **Ядерные моменты.** Перевод с немецкого.
- Киттель Ч., **Статистическая физика.** Перевод с английского.
- Физика полимеров.** Сборник статей. Перевод с английского, французского и немецкого.
- Рентгеновские лучи.** Перевод с английского и немецкого.
- Теория сверхпроводимости.** Сборник статей. Перевод с английского и немецкого.
- Эйзенбуд Л. и Вигнер Е., **Структура ядра.** Перевод с английского.

16 p. 857c.