

Ф. КЛЕЙН

НЕЕВКЛИДОВА
ГЕОМЕТРИЯ

Цена 6 руб., перепл. 1 р.

ОНТИ-ИКИП-СССР-1935



FELIX KLEIN

VORLESUNGEN
ÜBER NICHT-EUKLIDISCHE
GEOMETRIE

FÜR DEN DRUCK NEU BEARBEITET

von

W. ROSEMANN

BERLIN
VERLAG VON JULIUS SPRINGER

1928

Ф. К Л Е Й Н

НЕЕВКЛИДОВА ГЕОМЕТРИЯ

ПЕРЕВОД
Н. К. БРУШЛИНСКОГО

*„Утверждено Наркомпросом РСФСР
в качестве учебного пособия
для университетов“*

ОБЪЕДИНЕННОЕ НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО НКТП СССР
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ ОБЩЕТЕХНИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ И НОМОГРАФИИ
МОСКВА 1936 ЛЕНИНГРАД

Т 24-4-34

ТКК № 92

ПРЕДИСЛОВИЕ К НЕМЕЦКОМУ ИЗДАНИЮ

Когда Феликс Клейн задумал опубликовать важнейшие из своих автографированных лекций, он решил начать с неевклидовой геометрии и с помощью молодого геометра д-ра Роземана предварительно подвергнуть старый текст основательной переработке в целом и в деталях. Эта работа оказалась много продолжительней, чем ожидалось сначала. Самому Клейну уже не довелось дожить до ее окончания. Правда, он в ежедневных, более года продолжавшихся совещаниях со своим молодым сотрудником продумал, пересмотрел и привел в порядок весь материал вплоть до мельчайших подробностей; но самую разработку текста он должен был предоставить д-ру Роземану. К моменту смерти Клейна первые главы книги были уже в гранках; все же потребовалась многолетняя и самоотверженная работа со стороны д-ра Роземана для того, чтобы на основе первоначальной программы подготовить к печати рукопись и провести ее через печать. Поэтому в этой книге участие и заслуги, а также и ответственность д-ра Роземана должны оцениваться гораздо выше, чем это обычно делается по отношению к сотрудникам.

Наряду с д-ром Зейфартом, который с тонким пониманием прочитал рукопись и корректуру, надлежит принести особую благодарность проф. Гопфу за окончательную отделку книги; он не только помогал своими критическими замечаниями при просмотре значительной части рукописи и корректур, но даже взял на себя окончательную разработку некоторых важных отделов, близких к области его работы. Далее, проф. Салковский любезно согласился прочесть большую часть последней корректуры. Наконец, нельзя не поблагодарить издательство, терпение и предупредительность которого существенно помогли преодолеть все возникавшие трудности.

Издатель.

Геттинген, октябрь 1927 г.

Из первоначальных автографированных лекций (появившихся в 1892 г. в обработке Шиллинга и в 1893 г. в почти неизменном виде вторым изданием) опущены многие параграфы. Но зато здесь прибавлено „Введение в основы проективной геометрии“ (гл. I и II). Далее и в остальной части книги пришлось

ввести много нового материала в связи с новейшим развитием математики, так что лекции получили совсем новый вид.

Обе первые главы изложены весьма подробно для того, чтобы облегчить понимание дальнейших отделов книги; читатель, уже знакомый с проективной геометрией, может начинать чтение прямо с § 6 второй главы. Глава III дает теорию проективных преобразований, оставляющих инвариантным некоторый образ второй степени, теорию, которая необходима для понимания неевклидовых движений и может быть пропущена начинающим при первом чтении. Читатель, который хочет изучать неевклидову геометрию в объеме, выходящем за пределы этой книги, найдет исчерпывающие литературные указания в книге Зоммервиля „Bibliography of non-euclidean geometry, including the theorie of parallels, the foundation of geometry and space of n dimensions“, London 1911. Далее укажем еще на книгу Клейна „Vorlesungen über die Entwicklung der Mathematik im 19. Jahrhundert“¹⁾, Берлин 1927, в качестве дополнения к историческим замечаниям, встречающимся во многих местах в этих лекциях.

Ради наглядности в книгу введено много чертежей. Черт. 31 и 236 заимствованы из „Теории функций“ Гурвица-Куранта, черт. 62—64 из „Теории автоморфных функций“ Фрике-Клейна.

В. Розман.

Ганновер, октябрь 1927 г.

¹⁾ Русский перевод этой книги выходит из печати в 1936 г. в издании ОНТИ.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие	5
-----------------------	---

ПЕРВАЯ ЧАСТЬ

ВВЕДЕНИЕ В ПРОЕКТИВНУЮ ГЕОМЕТРИЮ

Глава 1. Основы проективной геометрии	11
§ 1. Аффинные, однородные и проективные координаты	11
§ 2. Соотношения связности проективных образов; односторонность проективной плоскости	22
§ 3. Линейные однородные подстановки	27
§ 4. Проективные преобразования	32
§ 5. n -мерные многообразия	41
§ 6. Проективные координаты прямой и проективные координаты плоскости; принцип двойственности	44
§ 7. Двойные отношения	51
§ 8. Мнимые элементы	57
Глава II. Образы второй степени	64
§ 1. Полярные преобразования относительно образов второго порядка и класса	64
§ 2. Соответствие между невырождающимися образами второго порядка и второго класса	71
§ 3. Классификация образов второго порядка	74
§ 4. Классификация образов второго класса; связь с классификацией образов второго порядка	84
§ 5. Прямые линии на невырождающихся поверхностях второго порядка	89
§ 6. Превращения образов второй степени при непрерывном изменении коэффициентов; классификация этих образов	92
Глава III. Проективные преобразования, переводящие образ второй степени самого в себя	109
§ 1. Одномерный случай	109
§ 2. Двумерный случай	114
§ 3. Трехмерный случай	128

ВТОРАЯ ЧАСТЬ

ПРОЕКТИВНОЕ МЕРООПРЕДЕЛЕНИЕ

Глава IV. Внесение евклидовой метрики в проективную систему	147
§ 1. Основные метрические формулы евклидовой геометрии	147
§ 2. Исследование метрических формул; две круговые точки и шаровой круг	150
§ 3. Евклидова метрика как проективное отношение к фундаментальным образам	156

§ 4. Замена круговых точек и шарового круга действительными образцами	160
§ 5. Метрика в связке прямых и в связке плоскостей; сферическая и эллиптическая геометрии	164
Глава V. Введение проективных координат, независимое от евклидовой геометрии	173
§ 1. Построение четвертых гармонических элементов	173
§ 2. Введение координат в одномерной области	177
§ 3. Введение координат на плоскости и в пространстве	181
Глава VI. Проективные мероопределения	183
§ 1. Невырождающиеся мероопределения	183
§ 2. Вырождающиеся мероопределения	198
§ 3. Двойственность	204
§ 4. Твердые преобразования	206
Глава VII. Соотношения между эллиптической, евклидовой и гиперболической геометриями	209
§ 1. Особое положение трех геометрий	209
§ 2. Превращение эллиптической геометрии в евклидову и далее в гиперболическую геометрию	210
§ 3. Истолкование эллиптической и гиперболической геометрий как геометрий на евклидовой сфере действительного и мнимого радиусов	212
§ 4. Вывод формул эллиптической и гиперболической геометрий из формул геометрии на евклидовой сфере	214
§ 5. Сумма углов треугольника и его площадь	220
§ 6. Евклидова и обе неевклидовы геометрии как системы мероопределений, применимых к внешнему миру	226
Глава VIII. Специальное исследование обеих неевклидовых геометрий	232
§ 1. Эллиптическая и гиперболическая геометрии на прямой линии	232
§ 2. Эллиптическая геометрия плоскости	235
§ 3. Гиперболическая геометрия плоскости	243
§ 4. Теория кривых второй степени в плоской неевклидовой геометрии	250
§ 5. Эллиптическая геометрия пространства	255
§ 6. Клиффордовы поверхности	264
§ 7. Гиперболическая геометрия пространства	272
Глава IX. Проблема пространственных форм	278
§ 1. Пространственные формы плоской евклидовой геометрии	278
§ 2. Пространственные формы плоских эллиптической и гиперболической геометрий	288
§ 3. Пространственные формы трехмерных геометрий	294
ТРЕТЬЯ ЧАСТЬ	
ОТНОШЕНИЙ НЕЕКЛИДОВОЙ ГЕОМЕТРИИ К ДРУГИМ ОБЛАСТЯМ	
Глава X. История неевклидовой геометрии; отношения к аксиоматике и к дифференциальной геометрии	296
§ 1. „Начала“ Евклида и попытки доказательства аксиомы о параллельных	296
§ 2. Аксиоматическое обоснование гиперболической геометрии	299
§ 3. Основы теории поверхностей	302

§ 4. Связь плоской неевклидовой геометрии с теорией поверхностей	307
§ 5. Расширение дифференциально-геометрической точки зрения, произведенное Риманом	314
§ 6. Конформные отображения неевклидовой плоскости	318
§ 7. Внедрение проективной геометрии	329
§ 8. Дальнейшее построение неевклидовой геометрии, в частности дифференциальной геометрии	330
Глава XI. Обзор применений неевклидовой геометрии	333
§ 1. Гиперболические движения пространства и плоскости и линейные подстановки комплексного переменного	333
§ 2. О применениях пространственной гиперболической геометрии к теории линейных подстановок	336
§ 3. Автоморфные функции, униформизация и неевклидово мероопределение	338
§ 4. Замечания о применении неевклидова мероопределения в топологии	343
§ 5. Приложения проективного мероопределения в специальной теории относительности	344
Предметный указатель	349

ПЕРВАЯ ЧАСТЬ

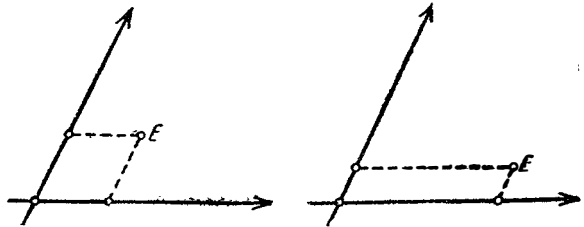
ВВЕДЕНИЕ В ПРОЕКТИВНУЮ ГЕОМЕТРИЮ

Глава I

ОСНОВЫ ПРОЕКТИВНОЙ ГЕОМЕТРИИ

§ 1. Аффинные, однородные и проективные координаты

А. Аффинные координаты. При изложении геометрических соотношений мы будем пользоваться аффинными, однородными и проективными координатами. Простейшую координатную систему на прямой линии мы получим, если будем определять точку посредством ее положительного или отрицательного расстояния x от начала координат; при этом мы устанавливаем единицу расстояния посредством точки с координатой 1. На плоскости и в пространстве мы будем пользоваться декартовыми координатами, оси которых могут образовывать между собой произвольные углы, и будем определять точку посредством значений координат соответственно x , y или x , y , z .



Черт. 1.

Мы получим непосредственное обобщение этого определения, если единицы расстояния на осях координат возьмем произвольными (черт. 1, справа); следовательно, они не будут уже конгруэнтными, как на черт. 1, слева. Однозначно установить это новое координатоопределение мы можем тем, что выберем произвольную точку на прямой, на плоскости или в пространстве в качестве *единичной точки* и припишем ей соответственно координаты $x=1$, $x=y=1$ или $x=y=z=1$. Эта точка определяет тогда, например в случае плоскости, с помощью двух параллелей к осям единичные отрезки и одновременно положительные направления на координатных осях. Мы будем называть эти

координаты *аффинными параллельными координатами* ¹⁾. Они были введены в геометрию Декартом (Descartes, 1596—1650) и Ферма (Fermat, 1608—1665) ²⁾ и получили в XVIII столетии всеобщее распространение в особенности благодаря работам Эйлера (Euler, 1707—1783).

В. Однородные координаты. В геометрии выяснилась на практике полезность введения *бесконечно удаленных или несобственных элементов*. Именно, мы приписываем всякой паре параллельных прямых (как на плоскости, так и в пространстве) бесконечно удаленную (несобственную) точку пересечения. В этой фразе не содержится никакого утверждения; мы вводим только новый оборот речи, позволяющий значительно упростить многие предложения, потому что теперь, например, на плоскости нам уже не приходится делать различия между пересекающимися и не пересекающимися между собой прямыми, так как на основании нашего условия *всякая пара прямых на плоскости имеет* (собственную или несобственную) *точку пересечения*.

Несобственные геометрические образы не могут быть заданы с помощью аффинных координат. Поэтому мы введем новое координатоопределение, положив прежде всего для случая прямой линии аффинную координату:

$$x = \frac{x_1}{x_2},$$

так что всякой определенной точке соответствует уже не одна, а две координаты x_1 и x_2 . При этом всякой точке соответствует бесчисленное множество систем значений, которые все могут быть представлены в виде $(\rho x_1, \rho x_2)$, где ρ обозначает произвольную не равную нулю постоянную. Мы устанавливаем, что x_1 и x_2 принимают все конечные значения за единственным исключением системы значений $x_1=0, x_2=0$; всякой дозволенной системе значений соответствует тогда определенная точка x прямой, которая, в частности для значений $x_1=x, x_2=0$, является несобственной точкой. Таким образом введенные координаты называются *однородными координатами*. В то время как аффинные координаты охватывают только собственные точки, однородные координаты доставляют также и бесконечно удаленную точку. Следовательно, при пользовании однородными координатами область собственных точек расширяется путем присоединения бесконечно удаленной точки. Мы будем называть прямую *аффинной прямой*, если мы ограничиваемся рассмотрением ее собственных точек, в то время как прямую, расширенную присое-

¹⁾ Слово „аффинный“ было введено впервые Эйлером, а затем вновь Мебиусом. Ср. Euler, *Introductio in analysin infinitorum*, Лозанна 1748, т. II, гл. XVIII, разд. 442. Далее, Moebius, *Der barycentrische Calcul*, Лейпциг 1827, стр. X и 195.

²⁾ Ср. E. Müller, *Die verschiedenen Koordinatensysteme*, *Enzyklopädie d. math. Wiss.*, т. III, AB 7, стр. 609.

динением бесконечно удаленной точки, будем называть *проективной прямой*.

На плоскости положение вещей совершенно аналогичное. Положим именно:

$$x = \frac{x_1}{x_3}, \quad y = \frac{x_2}{x_3}.$$

Всякой системе значений $(x_1 : x_2 : x_3)$ за единственным исключением системы $(0 : 0 : 0)$ соответствует однозначно некоторая точка плоскости; в частности при $x_3 = 0$ мы получаем несобственные точки. Обратно, всякая точка доставляет бесчисленное множество систем значений, которые все могут быть представлены в виде $(\rho x_1 : \rho x_2 : \rho x_3)$. Совершенно так же, как и в случае прямой линии, мы назовем плоскость *аффинной плоскостью*, если мы ограничиваемся рассмотрением лишь собственных точек, а после ее расширения путем присоединения бесконечно удаленных точек — *проективной плоскостью*.

Аналогичным образом мы получаем однородные координаты пространства, полагая:

$$x = \frac{x_1}{x_4}, \quad y = \frac{x_2}{x_4}, \quad z = \frac{x_3}{x_4}.$$

Также и здесь мы будем различать *аффинное* и *проективное пространства*.

Наглядным рассмотрением проективных образов мы займемся в следующих параграфах.

При пользовании однородными координатами *уравнения прямых и плоскостей* получают особенно простой вид. Уравнением прямой на плоскости в аффинных координатах является уравнение:

$$u_1x + u_2y + u_3 = 0 \quad (u_1 \text{ или } u_2 \neq 0).$$

При пользовании однородными координатами оно принимает однородный вид:

$$u_1x_1 + u_2x_2 + u_3x_3 = \sum_1^3 u_\lambda x_\lambda = 0.$$

В частности уравнение $0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + u_3x_3 = 0$ ($u_3 \neq 0$) удовлетворяется координатами всех бесконечно удаленных точек; следовательно, уравнение $u_3x_3 = 0$ или, проще, $x_3 = 0$ представляет собою уравнение бесконечно удаленных точек. Так как это — уравнение линейное, то целесообразно *совокупность всех бесконечно удаленных точек плоскости считать прямой линией*. Легко видеть, что тогда не только всякая пара прямых определяет однозначно точку их пересечения, но также и всякая пара точек однозначно определяет соединяющую их прямую. Так как при пользовании однородными координатами уравнение $x_3 = 0$ также имеет определенный смысл, то нужно лишь требовать, чтобы в уравнении $u_1x_1 + u_2x_2 + u_3x_3 = 0$ все u_i одновременно не

равнялись нулю. Совершенно так же обстоит дело для плоскости в пространстве.

В заключение этих рассуждений мы приведем некоторые элементарные формулы, которые выявляют соотношения между аффинным и однородным способами записи. При этом мы будем писать приводимые формулы слева в аффинных, а справа в однородных координатах. На плоскости уравняем прямой, проходящей через две данные точки y_1, y_2 и z_1, z_2 (аффинные координаты) или соответственно $y_1:y_2:y_3$ и $z_1:z_2:z_3$ (однородные координаты), является следующее уравнение в текущих координатах x_1, x_2 или соответственно $x_1:x_2:x_3$:

$$\left| \begin{array}{ccc} x_1 & x_2 & 1 \\ y_1 & y_2 & 1 \\ z_1 & z_2 & 1 \end{array} \right| = 0, \quad \left| \begin{array}{ccc} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{array} \right| = 0.$$

Потому что, во-первых, эти уравнения, будучи линейными относительно переменных x_1, x_2 или $x_1:x_2:x_3$, изображают прямую; во-вторых, координаты обеих данных точек удовлетворяют уравнению, так как при подстановке этих координат две строчки в определителе совпадают. Аналогичным образом получаем, что в пространстве уравнение плоскости, проходящей через три данные точки $y_1, y_2, y_3, z_1, z_2, z_3$ и t_1, t_2, t_3 или соответственно $y_1:y_2:y_3:y_4; z_1:z_2:z_3:z_4$ и $t_1:t_2:t_3:t_4$, будет:

$$\left| \begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & x_3 & 1 \\ y_1 & y_2 & y_3 & 1 \\ z_1 & z_2 & z_3 & 1 \\ t_1 & t_2 & t_3 & 1 \end{array} \right| = 0, \quad \left| \begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ z_1 & z_2 & z_3 & z_4 \\ t_1 & t_2 & t_3 & t_4 \end{array} \right| = 0.$$

При пользовании однородными координатами прямая на плоскости, проходящая через две данные точки $y_1:y_2:y_3$ и $z_1:z_2:z_3$, может быть изображена также в следующей параметрической форме:

$$\left. \begin{array}{l} \rho x_1 = \lambda_1 y_1 + \lambda_2 z_1, \\ \rho x_2 = \lambda_1 y_2 + \lambda_2 z_2, \\ \rho x_3 = \lambda_1 y_3 + \lambda_2 z_3 \end{array} \right\} \text{ или } \rho x_i = \lambda_1 y_i + \lambda_2 z_i \quad (i=1, 2, 3).$$

λ_1 и λ_2 обозначают здесь два параметра, которые принимают всевозможные действительные значения за единственным исключением системы $0:0$. Всякому отношению $\lambda_1:\lambda_2$ соответствует некоторая определенная точка $x_1:x_2:x_3$; совокупность всех таких точек образует прямую линию. Доказательство этого получается

посредством подстановки параметрических формул в вышеприведенное уравнение рассматриваемой прямой:

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda_1 y_1 + \lambda_2 z_1 & \lambda_1 y_2 + \lambda_2 z_2 & \lambda_1 y_3 + \lambda_2 z_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix} = \\ = \lambda_1 \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix} + \lambda_2 \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix} = \lambda_1 \cdot 0 + \lambda_2 \cdot 0 = 0.$$

Аналогичным образом получаем: с помощью однородных координат плоскость, проходящая через три данные точки в пространстве $y_1:y_2:y_3:y_4$, $z_1:z_2:z_3:z_4$ и $t_1:t_2:t_3:t_4$, может быть изображена следующими параметрическими уравнениями:

$$\rho x_i = \lambda_1 y_i + \lambda_2 z_i + \lambda_3 t_i \quad (i = 1, 2, 3, 4).$$

Точно так же прямая в пространстве, проходящая через две данные точки $y_1:y_2:y_3:y_4$ и $z_1:z_2:z_3:z_4$, может быть представлена в виде:

$$\rho x_i = \lambda_1 y_i + \lambda_2 z_i \quad (i = 1, 2, 3, 4);$$

потому что все такие точки лежат в плоскостях, проходящих через две данные точки $y_1:y_2:y_3:y_4$ и $z_1:z_2:z_3:z_4$ и произвольную третью точку пространства.

Приведенные формулы показывают преимущество, которое получается вследствие применения теории определителей в геометрии. Заслуга систематического введения определителей в геометрию принадлежит Гессе¹⁾ (Hesse, 1811—1874). Он познакомился с теорией определителей у своего учителя Якоби (Jacobi, 1804—1851), сделавшего много существенного в этой области²⁾.

С. Проективные координаты. Проективные координаты, которые (как мы сейчас увидим) являются дальнейшим обобщением однородных координат, мы рассмотрим прежде всего для случая прямой. Мы будем исходить из аффинной координаты x прямой и введем проективные координаты, которые обозначим x_1 и x_2 , как целые линейные функции x :

$$\begin{aligned} \rho x_1 &= a_{11}x + a_{12}, \\ \rho x_2 &= a_{21}x + a_{22}, \end{aligned} \quad D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0, \quad \rho \neq 0.$$

¹⁾ Ср. Hesses Ges. Werke, в котором геометрические теоремы систематически доказываются с помощью определителей. В качестве примера можно указать „Über Determinanten und ihre Anwendung in der Geometrie, insbesondere auf Kurven vierter Ordnung“, „Crelles Journal“, т. 49, стр. 243, 264, 1855; вновь переиздано в „Hesses Ges. Werken“, 1897, стр. 319.

²⁾ Ср. Jacobi, Über die Bildung und die Eigenschaften der Determinanten, Journal f reine und angew. Math., т. 22, 1841, стр. 285—318. Вновь переиздано Штеккелем в „Ostwalds Klassiker der exakten Wissenschaften“, № 77, 1913.

В силу этого всякой собственной точке x без исключения ставится в соответствие определенное отношение $x_1 : x_2$. Обратно, чтобы выразить аффинную координату x как функцию проективных координат $x_1 : x_2$, мы образуем уравнение:

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{a_{11}x + a_{12}}{a_{21}x + a_{22}} \quad \text{или} \quad x = \frac{a_{22}x_1 - a_{12}x_2}{a_{11}x_2 - a_{21}x_1} = \frac{\begin{vmatrix} x_1 & a_{12} \\ x_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & x_1 \\ a_{21} & x_2 \end{vmatrix}}.$$

(Если бы D равнялось нулю, то правая часть этого уравнения не зависела бы от x_1 и x_2 .) Следовательно, мы приходим к выводу, что всякой системе значений $x_1 : x_2$, за единственным исключением системы $0 : 0$, соответствует однозначно некоторая точка x , которая, в частности для системы значений $x_1 : x_2 = a_{11} : a_{21}$, является несобственной точкой нашей прямой. Значит, проективные координаты дают, так же как и однородные, все точки проективной прямой.

Важную роль играют те точки, в которых одна из двух проективных координат обращается в нуль. Это происходит с координатой x_1 в точке $x = -a_{12} : a_{11}$, а с координатой x_2 в точке $x = -a_{22} : a_{21}$. Эти точки не могут совпадать, так как определитель $D \neq 0$. Мы их назовем *фундаментальными точками* A_1 и A_2 *нашего проективного координатоопределения*; по-предыдущему они имеют координаты $x_1 : x_2 = 0 : 1$ и $x_1 : x_2 = 1 : 0$. Непосредственно видно, что новое определение координат является обобщением того определения координат, которое нас привело от аффинных координат к однородным; потому что эти последние координаты получаются, если четырем коэффициентам $a_{\kappa\lambda}$ дать значения $a_{12} = a_{21} = 0$, $a_{11} = a_{22} = 1$. Геометрически в этом специальном случае первая фундаментальная точка A_1 является началом координат: $x = -a_{12} : a_{11} = 0 : 1$, в то время как вторая фундаментальная точка A_2 становится несобственной точкой: $x = -a_{22} : a_{21} = 1 : 0$. Поэтому можем сказать следующее: *однородными координатами прямой является тот специальный случай проективных координат, при котором одна из фундаментальных точек сдвигается в бесконечно удаленную точку.*


Проективная система координат еще не определяется однозначно посредством задания обеих фундаментальных точек A_1 и A_2 . Для однозначного определения нужно еще к *фундаментальным точкам* A_1 и A_2 присоединить так называемую *единичную точку* E , которая определяется уравнением $x_1 = x_2$; в аффинных координатах эта точка дается уравнением:

$$a_{11}x + a_{12} = a_{21}x + a_{22} \quad \text{или} \quad x = -\frac{a_{12} - a_{22}}{a_{11} - a_{21}}.$$

Заданием этих трех точек проективные координаты определяются уже однозначно (черт. 2).

Уравнения, посредством которых осуществляется переход от одной проективной системы координат к другой, мы получим следующим образом. Пусть две проективные системы координат $x_1 : x_2$ и $\bar{x}_1 : \bar{x}_2$ определяются уравнениями:

$$\begin{aligned} \rho x_1 &= a_{11}x + a_{12}, & \bar{\rho} \bar{x}_1 &= \bar{a}_{11}x + \bar{a}_{12}, \\ \rho x_2 &= a_{21}x + a_{22}, & \bar{\rho} \bar{x}_2 &= \bar{a}_{21}x + \bar{a}_{22}, \end{aligned}$$



Черт. 2.

причем определители D и \bar{D} обеих подстановок отличны от нуля. Искомые преобразования мы получим путем исключения переменного x в следующем виде:

$$\begin{aligned} \bar{\rho} \bar{x}_1 &= \{\bar{a}_{11}a_{22} - \bar{a}_{12}a_{21}\}x_1 + \{\bar{a}_{12}a_{11} - \bar{a}_{21}a_{12}\}x_2, \\ \bar{\rho} \bar{x}_2 &= \{\bar{a}_{21}a_{22} - \bar{a}_{22}a_{21}\}x_1 + \{\bar{a}_{22}a_{11} - \bar{a}_{11}a_{12}\}x_2. \end{aligned}$$

Определитель этой подстановки является произведением определителей D и \bar{D} и, значит, отличен от нуля. Следовательно, переход от одной проективной системы координат к другой осуществляется с помощью линейной однородной подстановки с отличным от нуля определителем. Обратно, всякая подобная подстановка переводит данную проективную систему координат в некоторую другую проективную систему координат.

На плоскости мы определим проективные координаты $x_1 : x_2 : x_3$ точно так же, как линейные функции аффинных координат x, y :

$$\begin{aligned} \rho x_1 &= a_{11}x + a_{12}y + a_{13}, \\ \rho x_2 &= a_{21}x + a_{22}y + a_{23}, \\ \rho x_3 &= a_{31}x + a_{32}y + a_{33}, \end{aligned} \quad D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \neq 0.$$

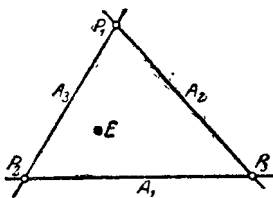
Посредством приравнивания нулю этих трех функций мы получим три прямые A_1, A_2, A_3 , которые мы назовем *фундаментальными прямыми* рассматриваемого проективного определения координат (черт. 3). Так как определитель $D \neq 0$, то эти три прямые не проходят через одну точку, а определяют некоторый треугольник. Вершины этого треугольника P_1, P_2, P_3 имеют координаты $1 : 0 : 0, 0 : 1 : 0$ и $0 : 0 : 1$. Далее, путем разрешения системы уравнений, рассматривая ρ, x, y как неизвестные, а x_i и a_{ik} как данные, получаем:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} x_1 & a_{12} & a_{13} \\ x_2 & a_{22} & a_{23} \\ x_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}, \quad y = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & x_1 & a_{13} \\ a_{21} & x_2 & a_{23} \\ a_{31} & x_3 & a_{33} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}.$$

В силу приведенных формул каждой собственной точке плоскости ставится в соответствие определенная система значений $x_1 : x_2 : x_3$; обратно, посредством всякой системы значений $x_1 : x_2 : x_3$ (причем не все три координаты равны нулю) определяется некоторая собственная или несобственная точка плоскости. Уравнение прямой линии принимает следующую однородную форму:

$$u_1x_1 + u_2x_2 + u_3x_3 = 0,$$

причем мы предполагаем, что не все коэффициенты u_i равны нулю. В частности уравнения $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$ являются уравнениями фундаментальных прямых A_1 , A_2 , A_3 . Если мы возьмем в качестве прямой A_3 бесконечно удаленную прямую, то мы получим однородную систему координат, что доказывается таким же образом, как и в случае прямой линии. Следовательно, *системой однородных координат на плоскости является та система проективных координат, в которой одна из фундаментальных прямых совпадает с бесконечно удаленной прямой плоскости.*



Черт. 3.

Для однозначного геометрического определения проективной системы координат нужно помимо *фундаментального треугольника*, составленного из трех прямых A_1 , A_2 , A_3 , задать еще *единичную точку* E с координатами $x_1 = x_2 = x_3$ (черт. 3). Единичная точка может лежать как внутри, так и вне фундаментального треугольника, она не должна только принадлежать самим фундаментальным прямым. Итак, система проективных координат на плоскости однозначно определяется заданием четырех точек, именно, трех вершин фундаментального треугольника и единичной точки E . Две различные проективные системы координат переходят одна в другую посредством линейного однородного преобразования переменных; обратно, всякое такое преобразование переводит данную проективную систему в некоторую другую; также и здесь доказательство совершенно аналогично доказательству для случая прямой.

В пространстве в основу проективной системы координат кладется тетраэдр и некоторая точка, принятая за единичную; следовательно, пространственная система координат определяется заданием пяти точек, из которых никакие четыре не должны лежать в одной плоскости. Все остальное совершенно аналогично случаю плоскости. Посредством введения проективных координат устраняется бывшее до сих пор особым положение несобственных элементов, которые при пользовании однородными координатами все же известным образом выделялись. Выяснением наглядного смысла этого факта мы займемся ближе в § 2.

Легко видеть, что установленные на стр. 14 и 15 формулы для однородных координат остаются в силе и для произвольных

проективных координат. В заключение мы отметим, что с проекттивными координатами на прямой и на плоскости мы уже встречались. Именно, при *параметрическом задании прямой*, проходящей через две точки y и z :

$$\rho x_i = \lambda_1 y_i + \lambda_2 z_i$$

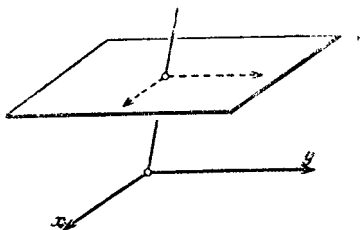
(стр. 14), всякой точке прямой линии соответствует система значений $\lambda_1 : \lambda_2$; эти системы значений совпадают с введенными нами проекттивными координатами на прямой. Аналогичное имеет место и в случае параметрического задания плоскости:

$$\rho x_i = \lambda_1 y_i + \lambda_2 z_i + \lambda_3 t_i.$$

D. Связь между аффинными и проекттивными координатами. Будем рассматривать систему значений тернарной области (x, y, z) как аффинные координаты в пространстве. Далее, проведем прямую через каждую точку $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$ аффинного пространства и начало координат. На этой прямой лежат все точки с координатами:

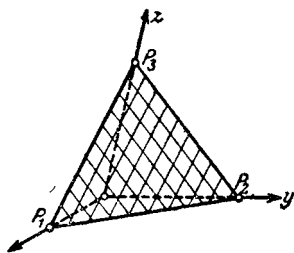
$$x = \lambda \bar{x}, y = \lambda \bar{y}, z = \lambda \bar{z},$$

и только они, причем λ — переменный параметр, изменяющийся от $-\infty$ до $+\infty$. Следовательно, отношения трех координат $\bar{x} : \bar{y} : \bar{z}$ однозначно определяют одну и только одну такую прямую; в то же время, обратно, всякая прямая такого рода дает одну и только одну систему значений $x : y : z$. Поэтому мы можем рассматривать аффинные координаты точек пространства как однородные координаты прямых линий, проходящих через начало координат. Здесь мы имеем расширение понятия координат, так как до сих пор мы пользовались координатами только для определения точек, но не прямых (ср. стр. 44). Чтобы перейти от координат прямых к точечным координатам, мы пересечем рассматриваемый пучок прямых плоскостью, не проходящей через начало координат. Каждой точке этой плоскости мы припишем те однородные координаты, которые по-предыдущему имеет проходящая через нее прямая. Возьмем сначала в качестве плоскости сечения плоскость $z = 1$ (черт. 4). Точка этой плоскости, имеющая аффинные пространственные координаты $x, y, 1$, получит тогда следующие однородные координаты: $x_1 : x_2 : x_3 = x : y : 1$. Вместе с тем мы получим в рассматриваемой плоскости некоторую аффинную параллельную систему координат (оси которой изображены пунктиром на черт. 4), так как отношения $x_1 : x_3$ и $x_2 : x_3$ дают аффинные координаты этой плоскости.



Черт. 4.

Если мы придадим плоскости сечения другое положение, то мы получим в ней, как это легко показать, проективную систему координат, фундаментальными прямыми которой являются линии пересечения с координатными плоскостями пространства (черт. 5). Совершенно аналогичным образом мы можем получить проективную систему координат на прямой из аффинной системы координат на плоскости.



Черт. 5.

Е. Обзор развития геометрии. Приведенный ход идей исторически осуществлялся следующим образом. Древние и средние века знали только *синтетическую геометрию*, которая ограничивалась непосредственным рассмотрением геометрических образов. В синтетическую геометрию несобственные точки были введены Дезаргом (Desargues, 1593—1661). Он рассматривал в 1639 г. параллельные прямые как

прямые, проходящие через одну и ту же бесконечно удаленную точку, и уже применял метод проекций для доказательства геометрических теорем¹⁾.

Около 1600 г. появляется аналитическая геометрия (см. стр. 12), которая широчайшим образом пользуется вспомогательным средством — понятием координат. (Было бы лучше говорить не об аналитической и синтетической геометрии, а об аналитических и синтетических методах; потому что определенные части геометрии, как, например, проективная геометрия, могут излагаться с одинаковым успехом как аналитически, так и синтетически.) Так как новые методы дали возможность решить с помощью анализа многочисленные задачи, которые представляли непреодолимые трудности для синтетических методов, то аналитические методы получили большой перевес над синтетическими. Все эти аналитические исследования относились к аффинным соотношениям.

Около 1800 г. произошел новый сдвиг. В 1794 г. в Париже в связи с французской революцией была основана Политехническая школа (Ecole Polytechnique). Организатором математической части в этом учебном заведении был геометр Монж (Monge, 1746—1818), который, делая упор прежде всего на технические приложения, дал систематическое изложение начертательной геометрии. Из его учеников выделялся Понселе (Poncelet, 1788—1867), который должен быть назван *основателем синтетической проективной геометрии*. Он учился в Политехнической школе и во время русского похода попал в плен. В 1813 г. в Саратове он читал математические лекции офицерам, своим товарищам по плену. В этих лекциях ему удалось дать поразительно простые доказательства старых теорем с помощью

¹⁾ Desargues, Oeuvres, т. I, Париж 1864, стр. 105; об этом и о последующем развитии геометрии см. Kötter, Die Entwicklung der syntetischen Geometrie, Jahresber. d. D. M. V., т. 5, 1901, особенно стр. 5 и 6.

методов проективной геометрии. Свои исследования он собрал в книге „Трактат о проективных свойствах фигур“ („*Traité des propriétés projectives des figures*“), первое издание которой появилось в Париже в 1822 г. ¹⁾ Эта работа, многочисленные новые идеи которой положили основание дальнейшему развитию геометрии, осуществляет *переход от старой синтетической геометрии к новой* ²⁾. Правда, „Трактат“ местами не всегда логически безупречен, так как Понселе иногда пользуется инстинктивно заключениями, которые вообще не могут быть обоснованы логически ³⁾. Тем более поразительно, что он всегда получает правильные результаты. В своей дальнейшей жизни Понселе занялся технической механикой, творцом которой он собственно и является. Так, например, в 1851 г. он был представителем Франции на Первой всемирной выставке (в Лондоне). К концу своей жизни он опять вернулся к проективной геометрии, которую тем временем Шаль (Chasles, 1793—1880) продвинул вперед не вполне в направлении Понселе. Их расхождения выразились в острой переписке, которую Понселе приложил ко второму изданию своего „Трактата“, вышедшему в 1865 г.

Начавшееся с „Трактата“ Понселе движение перебросилось в Германию и развивалось далее, с одной стороны, аналитиками Мебиусом (Möbius, 1790—1868) и Плюккером (Plücker, 1801—1868) и, с другой стороны, синтетиками Штейнером (Steiner, 1796—1863) и Штаудтом (von Staudt, 1798—1867). Оба первых исследователя придали аналитическое оформление синтетическому ходу идей Понселе (*аналитическая проективная геометрия*). Так, в частности, Мебиус ⁴⁾ в своей работе „Барическое исчисление, новое вспомогательное средство для аналитического изложения геометрии“ („*Der baryzentrische Calcul, ein neues Hilfsmittel zur analytischen Behandlung der Geometrie*“, Leipzig 1827) установил специальный случай проективных координат. Эта работа принадлежит к числу чрезвычайно легко написанных математических книг, и уже по одному этому ее чтение следует настоятельно рекомендовать. Мебиус снабжает три неподвижные точки плоскости некоторыми определенными массами. При надлежащем распределении этих масс (которые могут быть также и отрицательными) центр тяжести системы может находиться в любой точке плоскости. Если мы увеличим или уменьшим все три

¹⁾ Предисловие к первому изданию начинается следующими словами: „Эта работа является результатом исследований, произведенных мной весной 1813 г. в плену у русских; лишенный каких бы то ни было книг и пособий и угнетенный несчастьями своей родины и своими собственными, я не мог придать этой работе желаемого совершенства“.

²⁾ Ср. Kötter, стр. 127.

³⁾ В качестве примера мы укажем на „принцип непрерывности“, которым наряду с другими Понселе пользовался при разработке проективной геометрии в комплексной области; ср. Kötter, стр. 121 и следующие.

⁴⁾ Жизнеописание и оценка работ Мебиуса имеется в „Möbius Ges. Werke“, 1885, т. 1, предисловие Бальцера.

массы в одинаковое число раз, то центр тяжести будет находиться в той же точке, что и раньше. Следовательно, каждой точке плоскости однозначно соответствует определенное отношение этих трех масс, которые мы можем рассматривать как однородные точечные координаты. Эти координаты являются специальным случаем проективных координат, так как в них уравнением бесконечно удаленной прямой всегда будет уравнение $x_1 + x_2 + x_3 = 0$. Совершенно аналогичным образом Мебиус устанавливает координаты для случая пространства с помощью четырех данных точек. Мебиус пользуется для установления своих координат *чисто механическим принципом*, который отличается большой наглядностью. Подобные физические представления сыграли исключительную роль в качестве эвристического средства во многих областях математики.

Общие проективные координаты были впервые введены Плюккером в 1829 г.¹⁾ В той же работе он дает также простой принцип, посредством которого осуществляется переход от аффинных координат к однородным координатам отношений. Плюккер, который и в области физики составил себе имя²⁾, задержался в конце своего курса обучения (1823—1824) в Париже и там познакомился с исследованиями французских геометров. Его отношение к другим математикам нелегко выяснить, так, как он весьма мало следил за современной ему литературой. Так, например, ему осталось, повидимому, неизвестным барицентрическое исчисление Мебиуса.

В дальнейшем развитии проективной геометрии принимали участие кроме немцев еще англичане (стр. 31) и итальянцы (стр. 44). *Научные успехи не связаны с какой-нибудь одной страной, но с течением времени переходят от одного народа к другому*, который затем уже с новой точки зрения продвигает вперед старые проблемы.

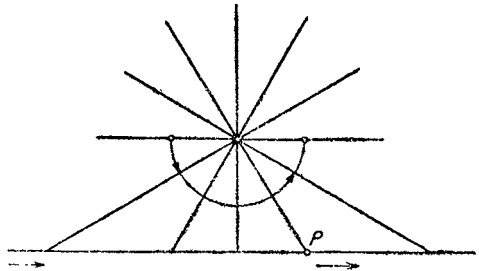
§ 2. Соотношения связности проективных образов; односторонность проективной плоскости

Мы перейдем теперь к выяснению наглядной стороны наших предыдущих рассмотрений о проективных многообразиях. Аффинная прямая является неограниченной в обоих направлениях; как бы далеко мы по ней ни продвигались в одном из двух направлений, скажем, направо, мы никогда не достигнем такой точки, которая лежала бы в противоположном направлении, значит, налево, от исходной точки нашего движения. Наоборот, на проективной прямой бесконечно удаленная точка соединяет обе стороны прямой линии так, что она становится уже замкнутой линией. В самом деле, если мы будем двигаться по проективной прямой,

¹⁾ Plücker, Über ein neues Koordinatensystem, „Crelles Journal“, т. 5, стр. 1—36, 1829. Вновь переиздано в „Plücker's Ges. Math. Abh.“, 1895, стр. 124—158.

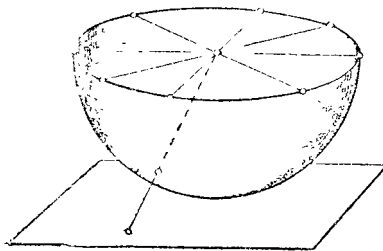
²⁾ Жизнеописание и научная оценка работ Плюккера имеется в Göttinger Abh., т. 16, 1872, Clebsch, Zum Gedächtnis an Julius Plücker. Вновь переиздано в „Plücker's Ges. Math. Abh.“, 1895.

например, все время направо, то мы перейдем за бесконечно удаленную точку и вернемся опять в исходную точку с другой стороны, значит, слева (черт. 6). Мы уясним это проще всего, если пересечем прямую линией пучком прямых, центр которого не лежит на самой прямой. Тогда каждой точке прямой линии, включая и бесконечно удаленную точку, соответствует одна и только одна прямая пучка; при этом мы здесь говорим о прямых, а не о полупрямых. Если мы будем вращать какую-нибудь прямую линией пучка, то после поворота на 180° мы вернемся к исходной прямой. Совершенно такое же перемещение мы имеем и на проективной прямой. Поэтому ясно, что проективная прямая является замкнутой линией. Если мы опишем около центра пучка окружность, то точки проективной прямой отобразятся на точки полуокружности (черт. 6); при этом бесконечно удаленной точке прямой соответствуют две концевые точки полуокружности. Мы можем поэтому получить на полуокружности те же соотношения, что и на проективной прямой, если будем считать тождественными обе ее концевые точки, что можно представить себе осуществленным, например, так: путем надлежащего искривления полуокружности концевые точки накладываются одна на другую.



Черт. 6.

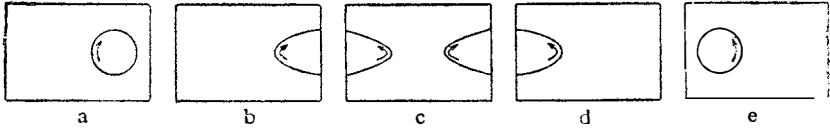
Совершенно аналогичным образом аффинная плоскость и аффинное пространство неограниченно простираются во всех направлениях, в то время как проективная плоскость и проективное пространство являются замкнутыми в себе вследствие присоединения несобственных элементов. В случае плоскости мы можем сделать более наглядными имеющиеся здесь соотношения, ставя в соответствие точкам плоскости прямые связки, центр которой не лежит на самой плоскости; также и здесь имеет место взаимно однозначное соответствие между точками плоскости и прямыми связки. Описав около центра этой связки шаровую поверхность, мы можем отобразить точки проективной плоскости на точки одного из полушарий; на черт. 7 нами выбрано для этого нижнее полушарие. При этом всякой бесконечно удаленной точке плоскости соответствуют две крайние точки нашего полушария, друг другу диаметрально противоположные, вследствие этого мы должны, как и выше



Черт. 7.

остаток текста не читался полностью из-за разрыва в оригинале.

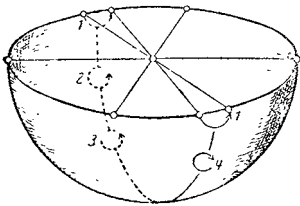
в случае прямой, всякие две такие крайевые точки считать тождественными. Разумеется, в отличие от случая прямой теперь уже не удастся путем наложения осуществить попарное совмещение всех этих точек; но для всех рассуждений достаточно пользоваться следующим соглашением: если мы попадем в какую-нибудь крайевую точку полушария, то одновременно мы находимся и в диаметрально противоположной точке. После отождествления диаметрально противоположных точек полушария мы



Черт. 8.

получаем замкнутую поверхность, так как ведь уже нигде нет крайевых точек поверхности.

Замкнутая в себе проективная плоскость обладает следующими замечательными свойствами. Будем исходить из некоторого круга, взятого с определенным направлением обхода, и переведем его с помощью непрерывной деформации через бесконечно удаленную прямую. Для этого мы прежде всего переведем круг, изображенный на черт. 8, *a*, в эллипс и, оставив



Черт. 9.

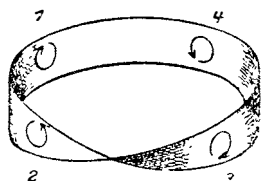
неподвижной его левую вершину, будем неограниченно удалять направо его правую вершину. В результате мы получим параболу, касающуюся бесконечно удаленной прямой (черт. 8, *b*). Затем мы эту параболу переведем в гиперболу, которая, как известно, пересекает бесконечно удаленную прямую в двух точках; путем деформации мы приближаем левую ветвь гиперболы к исходному кругу (черт. 8, *c*). Далее мы проделываем все эти операции в обратном порядке с правой ветвью гиперболы, которую мы переводим через бесконечно удаленную прямую, причем получаем последовательно опять параболу, эллипс и, наконец, круг (черт. 8, *d* и 8, *e*). Подробное рассмотрение чертежей показывает, что при этой операции направление обхода на круге изменилось на обратное.

То же явление можно наблюдать, рассматривая на полушарии с отождествленными диаметрально противоположными точками края движение через этот край достаточно малого круга с определенным направлением обхода (черт. 9); притом здесь имеется то преимущество, что этот круг не обязательно нужно искривлять, как на проективной плоскости. Мы будем исходить из небольшого круга, находящегося на передней стороне нашего полушария вблизи точки 1 (черт. 9), и будем передвигать этот

круг через границу полушария. В силу нашего соглашения об отождествлении диаметрально противоположных точек края мы получим при этом передвижении две отдельные части круга, из которых одна лежит на передней части полушария, а другая на задней части (№ 1 на черт. 9). Далее, передвинем весь этот круг через край (№ 2) и будем его постепенно передвигать опять на переднюю часть полушария (№ 3, 4). Мы непосредственно видим, что при этой операции направление обхода на круге изменилось на обратное.

На привычных для нас поверхностях в пространстве мы не наблюдаем подобного явления; так, например, если мы будем передвигать на шаре достаточно малый круг с определенным направлением обхода, то мы получим, вернувшись в исходное положение, всегда прежнее направление обхода. Простейшей поверхностью, на которой имеет место то же самое явление, как и на проективной плоскости, является *лист (или пояс) Мебиуса*. Чтобы получить эту поверхность, нужно вырезать из бумаги длинный и узкий прямоугольник, согнуть его, сблизив концы, повернуть один из них на 180° и в таком положении их склеить (черт. 10). Если мы будем передвигать небольшой круг по листу Мебиуса, то мы получим изменение направления обхода на обратное, как и в случае проективной плоскости.

Мы можем также охарактеризовать рассматриваемую разницу между шаром и листом Мебиуса еще следующим образом. Именно, шаровая поверхность имеет две стороны, внутреннюю и внешнюю, в то время как лист Мебиуса имеет только одну сторону. Действительно, если мы будем красить последнюю поверхность, начиная с какого-нибудь места, и будем все время увеличивать закрашенную область, то в конце концов вся поверхность окажется закрашенной полностью, в то время как в случае шаровой поверхности окажется закрашенной только внешняя сторона. Поэтому шаровая поверхность называется *двусторонней поверхностью*, а лист Мебиуса — *односторонней*. На всех односторонних поверхностях можно путем надлежащего перемещения круга изменить направление его обхода на обратное; напротив, на двусторонних поверхностях это невозможно. Пользуясь этой новой терминологией, мы можем сказать, что *проективная плоскость является односторонней поверхностью*.



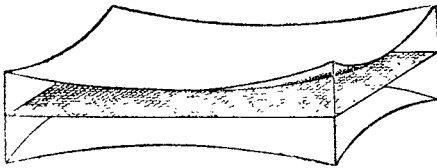
Черт. 10.

Всякой односторонней поверхности можно поставить в соответствие некоторую определенную двустороннюю поверхность путем наложения на первую такой двусторонней поверхности, которая покрывала бы данную поверхность подобно слою краски. Читатель может сделать это построение для листа Мебиуса. При этом покрывающая поверхность будет двусторонней, потому что одна ее сторона все время обращена и прилегает к односторонней поверхности, в то время как другая лежит свободно

в пространстве¹⁾. В соответствии с этим мы можем накрыть проективную плоскость очень плоским двуполостным гиперboloидом, обе полости которого примыкают с обеих сторон к плоскости (черт. 11). Притом двуполостный гиперboloид является двусторонним; потому что, если мы его переведем путем непрерывной деформации через бесконечно удаленную плоскость, то мы сможем его деформировать в обычную шаровую поверхность.

Тот факт, что существуют поверхности, имеющие только одну сторону, был установлен, независимо друг от друга, Мебиусом и Листингом (Listing) в 1858 г.²⁾; в то время как Листинг опубликовал это открытие в 1862 г.³⁾, Мебиус сделал это только в 1865 г., но подробнее⁴⁾. Вследствие этого последняя работа оказалась эффективнее, она впервые вызвала интерес к односторонним поверхностям. Односторонность проективной плоскости была установлена в процессе переписки между Шлэфли (Schläfli) и Клейном (Klein)⁵⁾.

Односторонность проективной плоскости находит свое выражение в том, что мы можем двумерную фигуру путем непрерывной деформации перевести через бесконечно удаленную область в зеркальное изображение исходного положения этой фигуры. Рассмотренное выше изменение направления обхода круга на обратное является специальным случаем этого свойства; для выявления



Черт. 11.

изменения ориентации достаточно проделать указанную операцию над треугольником. На проективной прямой и в проективном пространстве уже нет подобного положения вещей. Проще всего в этом убедиться, рассматривая для случая прямой отрезок, ограниченный двумя точками, а для случая пространства — тетраэдр. Поэтому проективная прямая и проективное пространство являются двусторонними в противоположность проективной плоскости.

В заключение этих соображений сделаем еще следующее замечание. После введения проективных координат бесконечно

¹⁾ На этом основании в старой литературе односторонние поверхности назывались *двойными*, а двусторонние поверхности — *простыми поверхностями*; эта терминология исходит как раз из того обстоятельства, что из односторонней поверхности можно получить обыкновенную посредством двойного накрывания.

²⁾ Ср. Stäckel, Die Entdeckung der einseitigen Flächen, „Math. Ann.“, т. 52, стр. 598, 1899.

³⁾ Listing, Der Census der räumlichen Komplexe, Göttinger Abh., т. 10, 1862.

⁴⁾ Moebius, Über die Bestimmung des Inhaltes eines Polyeders. Sächsische Ber., Math.-Phys. Klasse, т. 17, стр. 31, 1865. Вновь переиздано в Moebius Ges. Werke, т. 2, стр. 473.

⁵⁾ Ср. Klein, „Math. Ann.“, т. 7, 1874. Вновь переиздано в Klein Ges. Abh., т. II, 1922, стр. 64, 65.

Постоянные $c_{\lambda\mu}$ могут иметь, как и переменные x , произвольные комплексные значения. В силу предыдущей подстановки каждой системе значений $(x'_1, x'_2, \dots, x'_n)$ соответствует однозначно другая система значений $(x''_1, x''_2, \dots, x''_n)$, и так как по условию $D \neq 0$, то и, наоборот, всякой системе значений $(x''_1, x''_2, \dots, x''_n)$ однозначно соответствует некоторая система $(x'_1, x'_2, \dots, x'_n)$.

Совокупность всех линейных однородных подстановок обладает тем свойством, что всякие две такие подстановки, произведенные одна за другой, дают в результате некоторую третью подстановку такого же типа, т. е. принадлежащую к рассматриваемой совокупности подстановок. Для примера рассмотрим случай $n=2$. Две подстановки:

$$\begin{aligned} x_1 &= c_{11}x'_1 + c_{12}x'_2, & x''_1 &= \bar{c}_{11}x''_1 + \bar{c}_{12}x''_2, \\ x_2 &= c_{21}x'_1 + c_{22}x'_2, & x''_2 &= \bar{c}_{21}x''_1 + \bar{c}_{22}x''_2, \end{aligned}$$

будучи произведены одна за другой, дают:

$$\begin{aligned} x_1 &= (c_{11} \cdot \bar{c}_{11} + c_{12} \cdot \bar{c}_{21}) \cdot x''_1 + (c_{11} \cdot \bar{c}_{12} + c_{12} \cdot \bar{c}_{22}) \cdot x''_2, \\ x_2 &= (c_{21} \cdot \bar{c}_{11} + c_{22} \cdot \bar{c}_{21}) \cdot x''_1 + (c_{21} \cdot \bar{c}_{12} + c_{22} \cdot \bar{c}_{22}) \cdot x''_2, \end{aligned}$$

следовательно, опять-таки линейную однородную подстановку. Ее коэффициенты выражаются через коэффициенты обеих исходных подстановок известным образом с помощью правила умножения матриц (строки первой подстановки на столбцы второй).

Отсюда следует, что определитель полученной подстановки равен произведению определителей исходных подстановок. Так как оба эти определителя по условию отличны от нуля, то определитель полученной подстановки также не равен нулю. Эти соотношения имеют место и в случае n переменных. Напишем обе исходные подстановки в виде:

$$x_x = \sum_{\lambda=1}^n c_{x\lambda} x'_\lambda, \quad x''_\mu = \sum_{\nu=1}^n \bar{c}_{\mu\nu} x''_\nu.$$

Произведя одну подстановку за другой, получим:

$$x_x = \sum_{\lambda=1}^n c_{x\lambda} \sum_{\nu=1}^n \bar{c}_{\lambda\nu} x''_\nu = \sum_{\lambda=1}^n \sum_{\nu=1}^n c_{x\lambda} \bar{c}_{\lambda\nu} x''_\nu = \sum_{\nu=1}^n \left(\sum_{\lambda=1}^n c_{x\lambda} \bar{c}_{\lambda\nu} \right) x''_\nu,$$

откуда получается то же заключение, что и в случае $n=2$.

Далее, совокупность всех линейных однородных подстановок с не равным нулю определителем обладает тем свойством, что в ней для каждой подстановки имеется соответствующая так

называемая обратная подстановка, которая, будучи скомбинирована с первой подстановкой, дает тождественную подстановку:

$$x_1 = x_1'', \quad x_2 = x_2'', \quad \dots, \quad x_n = x_n''.$$

Если данная подстановка имеет вид: $x = \sum_{\lambda} c_{x\lambda} x'_{\lambda}$, то обратной подстановкой является $x'_{\lambda} = \sum_{\lambda} \frac{C_{\lambda x}}{D} x_{\lambda}$; при этом $C_{\lambda x}$ является минором элемента $c_{x\lambda}$ в определителе D .

Итак, линейные однородные подстановки с отличным от нуля определителем обладают следующими двумя свойствами: в совокупности таких подстановок содержатся, с одной стороны, все подстановки, которые могут быть получены путем комбинирования каких-нибудь двух подстановок нашей системы, и, с другой стороны, подстановки, являющиеся обратными по отношению к подстановкам нашей системы. Всякая система подстановок, обладающая этими двумя свойствами, называется *группой* подстановок. Что второе свойство не является следствием первого, видно на примере системы подстановок, которая прибавляет к произвольному целому положительному числу любое другое целое положительное число; эта система по нашему определению не является группой, так как хотя первое свойство здесь выполнено, но второе не выполнено. *В процессе развития математики понятие группы получило основное значение и теперь имеет такую же важность, как, например, понятие функции.*

Понятие группы появилось впервые в математике в теории подстановок, в частности в теории алгебраических уравнений Галуа (Galois), а затем в теории инвариантов линейных подстановок. Понятие группы было поставлено в центр геометрических исследований примерно в 1871 г. работами Клейна и Ли (Lie), которые ознакомились с важностью понятия группы у К. Жордана (Camille Jordan) в Париже¹⁾.

В. Когрессиентность и контрагредиентность. Разнообразные ряды переменных, встречающихся в геометрических исследованиях, различаются по роду подстановок, с помощью которых они преобразуются. Два особенно простых случая представляют для нас выдающийся интерес. Прежде всего назовем два ряда переменных:

$$x_1 x_2 \dots x_n, \quad y_1 y_2 \dots y_n$$

когредиентными, если они всегда преобразуются с помощью подстановки с одинаковыми коэффициентами:

$$x_x = \sum_{\lambda=1}^n c_{x\lambda} x'_{\lambda}, \quad y_x = \sum_{\lambda=1}^n c_{x\lambda} y'_{\lambda} \quad (x = 1, 2, \dots, n).$$

¹⁾ Cp. Math. Enzyklopädie, III, AB 4 b, G. F a n o. Kontinuierliche geometrische Gruppen, стр. 292.

рядов переменных, но не о контрагredientности одного ряда в себе; то же замечание относится и к понятию когredientности рядов переменных.

Понятия когredientности и контрагredientности были заимствованы из теории инвариантов, которая оказала большое влияние на геометрические исследования. Теоретико-инвариантное оформление геометрии сделано в основном двумя англичанами, Кэли (Cauley, 1821—1895) и Сильвестром (Sylvester, 1814—1897), из которых последнему и принадлежит введение терминов: инвариант, когredientность и контрагredientность. Воззрения этих исследователей получили широкое распространение с помощью учебников Сальмона (Salmon, 1819—1904), а затем после перевода Фидлера (в новейшее время Дингельдея и Коммереля) нашли себе всеобщее распространение и в Германии. Далее следует отметить немецкую теоретико-инвариантную школу, основанную Клебшем (Clebsch, 1833—1872). Позднее Клейн в своей Эрлангенской программе (1872) определил геометрию прямо как применение теории инвариантов¹⁾.

В заключение мы докажем следующее предложение, которое нам понадобится в дальнейшем (стр. 54 и 160). *Если сделать линейную однородную подстановку, то определитель, составленный из n когredientных рядов переменных, умножится на определитель этой подстановки.* В случае $n = 2$ определитель, о котором идет речь, имеет вид:

$$D = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} = x_1 y_2 - x_2 y_1,$$

причем x_1, x_2 и y_1, y_2 являются когredientными переменными. Если произведем линейную однородную подстановку, то получим:

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} c_{11}x'_1 + c_{12}x'_2 & c_{21}x'_1 + c_{22}x'_2 \\ c_{11}y'_1 + c_{12}y'_2 & c_{21}y'_1 + c_{22}y'_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x'_1 & x'_2 \\ y'_1 & y'_2 \end{vmatrix}.$$

Совершенно так же доказывается это и в случае произвольного n :

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ y_1 & y_2 & \dots & y_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ t_1 & t_2 & \dots & t_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sum_{\lambda} c_{1\lambda} x'_{\lambda} & \dots & \sum_{\lambda} c_{m\lambda} x'_{\lambda} \\ \sum_{\lambda} c_{1\lambda} y'_{\lambda} & \dots & \sum_{\lambda} c_{n\lambda} y'_{\lambda} \\ \dots & \dots & \dots \\ \sum_{\lambda} c_{1\lambda} t'_{\lambda} & \dots & \sum_{\lambda} c_{n\lambda} t'_{\lambda} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} c_{11} & \dots & c_{1n} \\ c_{21} & \dots & c_{2n} \\ \dots & \dots & \dots \\ c_{n1} & \dots & c_{nn} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x'_1 & \dots & x'_n \\ y'_1 & \dots & y'_n \\ \dots & \dots & \dots \\ t'_1 & \dots & t'_n \end{vmatrix},$$

чем и доказано наше утверждение.

¹⁾ Klein, Vergleichende Betrachtungen über neuere geometrische Forschungen (Эрлангенская программа), Ges. Abh., т. I, стр. 460. Имеется русский перевод Д. М. Синцова, напечатанный в Изданиях Ф.-М. о-ва при Казанском университете (2-я серия, т. 5, 1896), под названием: „Сравнительное обозрение новейших геометрических исследований“.

§ 4. Проективные преобразования

А. Проективные, свободно-аффинные и центрально-аффинные преобразования. Для нас представляет большой интерес выяснить геометрический смысл рассмотренных в предыдущем параграфе линейных подстановок. Рассмотрим $x_1 : x_2$, $x_1 : x_2 : x_3$ и $x_1 : x_2 : x_3 : x_4$ как однородные координаты соответственно на прямой, на плоскости и в пространстве. Подстановки мы будем писать в виде:

$$\rho x_\lambda = \sum_{\lambda=1}^{n+1} c_{\lambda\lambda'} x_{\lambda'}, \quad D = |c_{\lambda\lambda'}| \neq 0,$$

причем n обозначает размерность ($n=1, 2$ или 3), а x принимает значения от 1 до $n+1$. Мы ввели множитель пропорциональности $\rho \neq 0$ для того, чтобы отметить, что мы имеем дело с отношениями $x_1 : x_2 : \dots : x_n$, а не с самими значениями переменных. Преобразования, определенные такими подстановками, называются *коллинеациями*¹⁾ или *проективными преобразованиями*. Они обладают тем свойством, что все точки, лежащие на одной прямой или плоскости, преобразуются так, что после преобразования опять образуют прямую или соответственно плоскость, т. е. прямая или плоскость переходит в силу этих преобразований опять же в прямую или соответственно в плоскость. Можно показать, что коллинеации (в действительной области) являются наиболее общими преобразованиями, обладающими этим свойством; напротив, в комплексной области мы имеем несколько иное положение вещей (см. стр. 62).

Теперь выявляется непосредственно смысл определенных в предыдущем параграфе когredientных и контрагredientных переменных. Именно: координаты двух точек являются когredientными переменными; напротив, коэффициенты u_x , которые входят в уравнение любой прямой или плоскости:

$$u_1 x_1 + u_2 x_2 + \dots + u_{n+1} x_{n+1} = 0 \quad (n=2 \text{ или } 3),$$

контрагredientны по отношению к x_x . Смысл этого заключается в следующем. При проективном преобразовании, например, пространства всякая плоскость E переходит в некоторую новую плоскость E' . В силу изложенного в третьем параграфе коэффициенты u'_x плоскости E' получаются из коэффициентов u_x плоскости E посредством подстановки, которая контрагredientна подстановке, преобразующей переменные x_x . Поэтому мы можем весьма просто вычислять новые коэффициенты с помощью этой подстановки.

Чтобы установить уравнения проективных преобразований в аффинных координатах (мы ограничимся случаем простран-

¹⁾ Слово „коллинеация“ Мёбиус ввел в геометрию по совету своего друга филолога Вейске. Ср. Möbius, Der barycentrische Calcul, 1827, предисловие, стр. XII.

ства), мы исключим прежде всего множитель пропорциональности ρ из линейной однородной подстановки:

$$\frac{x_1}{x_4} = \frac{c_{11} \frac{x'_1}{x_4} + c_{12} \frac{x'_2}{x_4} + c_{13} \frac{x'_3}{x_4} + c_{14}}{c_{41} \frac{x'_1}{x_4} + c_{42} \frac{x'_2}{x_4} + c_{43} \frac{x'_3}{x_4} + c_{44}}, \quad \frac{x_2}{x_4} = \dots, \quad \frac{x_3}{x_4} = \dots$$

Обозначим далее соответственно через x, y, z и x', y', z' аффинные координаты $\frac{x_1}{x_4}, \frac{x_2}{x_4}, \frac{x_3}{x_4}$, и $\frac{x'_1}{x_4}, \frac{x'_2}{x_4}, \frac{x'_3}{x_4}$, тогда мы получим:

$$x = \frac{c_{11}x' + c_{12}y' + c_{13}z' + c_{14}}{c_{41}x' + c_{42}y' + c_{43}z' + c_{44}}, \quad y = \dots, \quad z = \frac{c_{31}x' + c_{32}y' + c_{33}z' + c_{34}}{c_{41}x' + c_{42}y' + c_{43}z' + c_{44}}.$$

Следовательно, в аффинных координатах проективные преобразования изображаются дробными неоднородными линейными подстановками, причем знаменатели у всех дробей одинаковы.

Особую роль играют те проективные преобразования, которые переводят бесконечно удаленную область самое в себя. В случае пространства такие преобразования получаются из общего проективного преобразования посредством условия:

$$c_{41} = 0, \quad c_{42} = 0, \quad c_{43} = 0, \quad c_{44} = 1,$$

как показывает рассмотрение вышеприведенных формул. Эти преобразования, которые называются *аффинными преобразованиями* изображаются в аффинных координатах (которые мы для удобства письма здесь обозначим также через x_1, x_2, \dots, x_n), посредством линейных (вообще говоря, неоднородных) подстановок:

$$x_i = c_{i1}x'_1 + c_{i2}x'_2 + \dots + c_{in}x'_n + c_i, \quad D = |c_{ij}| \neq 0 \quad (n = 1, 2 \text{ или } 3).$$

Аффинное преобразование, у которого все свободные члены c_i равны нулю, и которое поэтому переводит начало координат само в себя, называется *центрально-аффинным*. В противном случае преобразование называется *свободно-аффинным*. Легко видеть, что всякое свободно-аффинное преобразование может быть составлено из центрально-аффинного преобразования и параллельного переноса.

Проективные преобразования данной размерности образуют группу, так как линейные однородные подстановки, посредством которых они могут быть изображены, обладают этим свойством. Точно так же *аффинные преобразования образуют группу*. Группа, которая целиком содержится в другой группе, называется ее *подгруппой*. Следовательно, можно сказать, что *аффинные преобразования образуют подгруппу группы проективных преобразований*. Аффинные преобразования могут быть выделены из всех

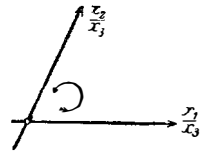
проективных преобразований посредством требования переводить бесконечно удаленную область самое в себя. Легко видеть далее, что центрально-аффинные преобразования в свою очередь образуют подгруппу группы аффинных преобразований. Эта группа может быть охарактеризована тем, что ее преобразования переводят начало координат само в себя.

В. Знак определителя подстановки. Определитель подстановки проективного преобразования может быть как положительным, так и отрицательным. При четном n , следовательно, в частности в случае плоскости, это различие не существенно, потому что в этом случае определитель меняет знак, если мы помножим все постоянные $c_{\lambda\mu}$ на -1 ; само же проективное преобразование от этого не изменится, так как дело идет только об отношениях переменных x_λ . Следовательно, при четном n мы можем одно и то же проективное преобразование с одинаковым правом изобразить как подстановкой с положительным определителем, так и с отрицательным. Напротив, при нечетном n (следовательно, в частности в случаях прямой и пространства) определитель проективного преобразования имеет однозначно-определенный знак, так что нам приходится делать различие между проективными преобразованиями с положительным определителем и с отрицательным. *На прямой линии и в пространстве проективные преобразования распадаются на два различных семейства, которые нельзя непрерывно перевести одно в другое; напротив, в случае плоскости проективные преобразования образуют одно-связное многообразие, так как в этом случае мы можем всякую данную подстановку непрерывно перевести в тождественную подстановку так, чтобы определитель при этом никогда не обратился в нуль.*

Геометрически это различие означает следующее. Проективное преобразование на прямой линии либо изменяет направление всех отрезков на обратное, либо сохраняет его без изменения; притом это происходит у всех отрезков одновременно, так как проективное преобразование является взаимно однозначным и непрерывным преобразованием. Может показаться, что аналогичным образом и на плоскости следует различать два типа проективных преобразований, смотря по тому, меняют ли они или не меняют направление обхода контура, выходящего из начала координат в положительном направлении $\frac{x_1}{x_3}$ -оси и вращающегося по положительной части $\frac{x_2}{x_3}$ -оси в начало координат (черт. 12); но проективная плоскость является односторонней поверхностью (см. стр. 25), и на ней оба различных направления обхода могут быть непрерывно переведены друг в друга, так что в действительности здесь нет никакой разницы между двумя рассмотренными типами проективных преобразований. В пространстве мы имеем опять такое же положе-

ние вещей, как и на прямой. Следовательно, свойство проективных преобразований распадается для случая прямой и пространства на два различных семейства, а для случая плоскости, напротив, образуют одно связное многообразие, находится в связи с тем, что плоскость является односторонней в противоположность двусторонней прямой и пространству.

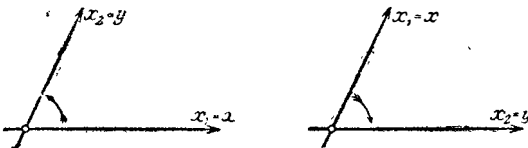
Если мы перейдем от проективных преобразований к аффинным, то мы получим и для случая плоскости распадение всех аффинных преобразований на преобразования с положительным определителем и преобразования с отрицательным определителем. Это происходит потому, что при аффинных преобразованиях геометрические фигуры уже не могут быть передвинуты через бесконечно удаленную прямую; плоскость, так сказать, разрезана вдоль бесконечно удаленной прямой, вследствие чего нарушена ее односторонность. Мы можем следующим образом сформулировать различие между аффинными преобразованиями с положительным и отрицательным определителем. Можно известным образом различать как на прямой, так и на плоскости и в пространстве два типа систем аффинных координат, которые изображены рядом на черт. 13—15. При аффинном преобразовании оси старой системы координат переходят в новые прямые, точно так же пересекающиеся в одной точке (при этом в случае прямой линии положительное направление



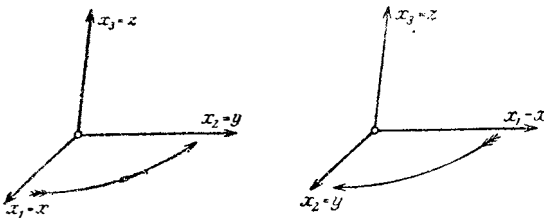
Черт. 12.



Черт. 13.



Черт. 14.



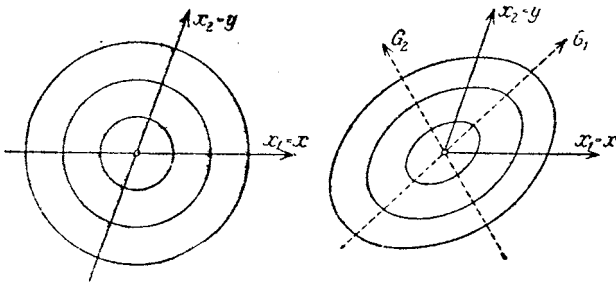
Черт. 15.

при аффинных преобразованиях геометрические фигуры уже не могут быть передвинуты через бесконечно удаленную прямую; плоскость, так сказать, разрезана вдоль бесконечно удаленной прямой, вследствие чего нарушена ее односторонность. Мы можем следующим образом сформулировать различие между аффинными преобразованиями с положительным и отрицательным определителем. Можно известным образом различать как на прямой, так и на плоскости и в пространстве два типа систем аффинных координат, которые изображены рядом на черт. 13—15. При аффинном преобразовании оси старой системы координат переходят в новые прямые, точно так же пересекающиеся в одной точке (при этом в случае прямой линии положительное направление

переходит либо опять в положительное направление, либо в прежнее отрицательное). При аффинных преобразованиях с положительным определителем старая система координат принадлежит к тому же типу, как и система, образованная из новых осей; напротив, при преобразовании с отрицательным определителем эти системы принадлежат к различным типам.

С. Наглядное изображение проективных преобразований. Начнем с рассмотрения аффинных преобразований, причем ограничимся преобразованиями центрально-аффинными, так как свободно-аффинные преобразования получаются из них путем

добавочного параллельного переноса. Посредством элементарных рассмотрений мы получаем: при центрально-аффинных преобразованиях прямой линии $x_1 = c_{11} x'_1$, $c_{11} \neq 0$ все отрезки, выходящие из начала координат, увеличиваются или уменьшаются в одинаковое число раз. (При этом, если c_{11} положительно, то положительное направление не меняется, а при отрицательном c_{11} оно переходит в прежнее отрицательное направление.) При центрально-аффинных преобразованиях плоскости семейство концентрических окружностей с центром в начале координат переходит в семейство подобных и подобно расположенных эллипсов (черт. 16; на нем G_1 и G_2 изображают образы старых координатных осей). Аналогичным образом в пространстве семейство концентрических шаров с центром в начале координат переходит в семейство подобных и подобно расположенных эллипсоидов.

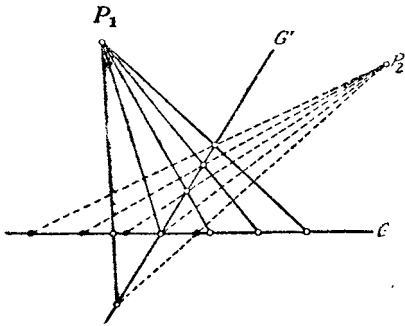


Черт. 16.

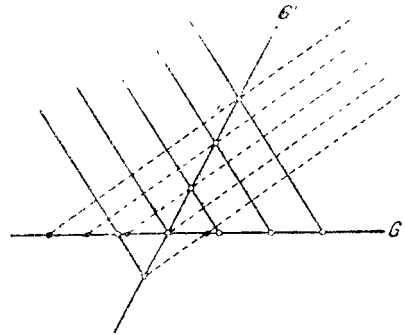
Обратимся теперь к рассмотрению *проективных преобразований*, которые, как мы увидим, могут быть получены геометрически очень простым способом посредством проекций. Для этого мы проведем через какую-нибудь точку данной прямой G вспомогательную прямую G' и спроектируем все точки прямой G на прямую G' посредством центральной проекции из произвольной точки плоскости P_1 (черт. 17). Далее произведем еще второе проектирование, посредством которого точки прямой G' спроектируются опять на прямую G . В силу этого каждой точке прямой G будет поставлена в соответствие некоторая другая точка этой же прямой. Легко показать, что две такие проекции действительно определяют проективное преобразование. Это преобразование обязательно имеет действительную неподвижную точку, чего, как это мы скоро увидим, в общем случае может и не быть. Если мы хотим получить общее проективное преобразование, то нам придется пользоваться уже не двумя, а тремя проекциями, причем мы сначала спроектируем G на G' из точки P_1 , затем G' на вторую вспомогательную прямую G'' из точки P_2 и, наконец, G'' спроектируем назад на G из точки P_3 .

Если мы будем пользоваться только параллельными проекциями, то мы получим указанным путем аффинные преобразования

прямой G (черт. 18). Если, в частности, точка пересечения прямых G и G' совпадает с началом координат прямой G , то мы получим центрально-аффинные преобразования; если же она совпадает с бесконечно удаленной точкой прямой G' т. е. если G и G' параллельны, то проективное преобразование вырождается в конгруэнтное скольжение прямой G по самой себе (черт. 19).



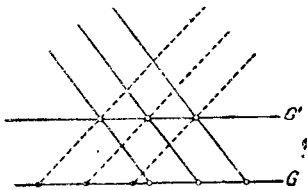
Черт. 17.



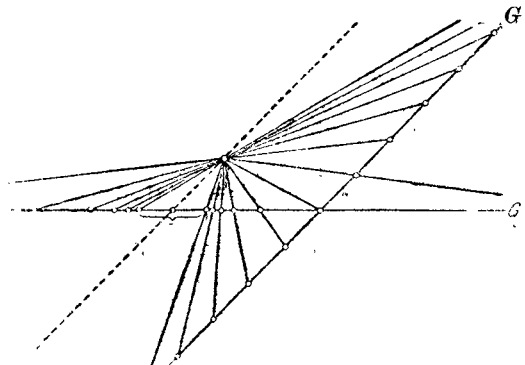
Черт. 18.

Проективные преобразования плоскости могут быть получены посредством проекций аналогичным образом.

С помощью этого построения мы можем рассмотреть наглядные свойства проективных преобразований для случаев прямой и плоскости. В первом случае мы построим на прямой шкалу из равноотстоящих точек и отобразим проективно эти точки.



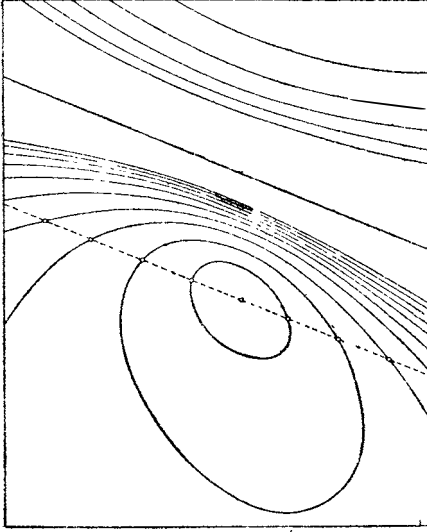
Черт. 19.



Черт. 20.

Для этого мы прежде всего спроектируем указанный ряд точек с помощью параллельной проекции на прямую G' (черт. 20); тогда мы получим на G' также шкалу из равноотстоящих точек, которые мы спроектируем с помощью центральной проекции опять на прямую G , вследствие чего и получим желаемую шкалу. Легко видеть, что при этом бесконечно удаленная точка (в общем случае) отобразится в собственную точку. По мере того как мы приближаемся к образу бесконечно удаленной точки, образы точек нашей равномерной шкалы все более и более сгущаются;

наконец отдельные точки лягут настолько близко друг к другу, что мы уже не в состоянии изобразить их на чертеже. Эта проективная шкала будет играть основную роль в гл. V. — В случае плоскости аналогичные соображения показывают, что проективное преобразование плоскости переводит бесконечно удаленную прямую, вообще говоря, в собственную прямую. На черт. 21 изображены проективные образы семейства концентрических кругов. Круги достаточно малого радиуса отображаются в эллипсы, переходящие затем в параболу и далее в гиперболы, которые все более и более приближаются с обеих сторон к прямой, являющейся образом бесконечно удаленной прямой, так что в пределе обе ветви дают эту прямую. — В случае пространства соответствующие рассуждения приходится проводить аналитически, причем получаются следующие результаты.



Черт. 21.

Семейства концентрических шаров при проективном преобразовании отображаются в семейство эллипсоидов, которые затем переходят через эллиптический параболоид в двуполостные гиперболоиды; обе полости этих гиперболоидов все более и более приближаются к образу бесконечно удаленной плоскости, давая его в пределе (ср. черт. 11 на стр. 26).

Д. Неподвижные точки проективного преобразования. Мы называем неподвижной точкой данного преобразования такую точку, которая переходит сама в себя. В случае центрально-аффинного преобразования всегда существует подобная точка, именно начало координат. Мы покажем, что и в случае свободно-аффинного преобразования всегда существует неподвижная точка; иногда, впрочем, она может быть бесконечно удаленной. Для случая прямой свободно-аффинные преобразования имеют вид:

$$x_1 = c_{11} x_1' + c_1, \quad c_{11} \neq 0.$$

Следовательно, искомая неподвижная точка определяется уравнением:

$$x_1 = c_{11} x_1 + c_1 \quad \text{или} \quad x_1 = \frac{c_1}{1 - c_{11}}.$$

Если $c_{11} \neq 1$, т. е. если преобразование не вырождается в чистый перенос, мы получаем собственную неподвижную точку.

встретиться тот исключительный случай, что для некоторых из корней ρ_k имеется не одна, а бесчисленное множество таких систем, линейно зависимых между собой. Но в общем случае для каждого ρ_k получается одна и только одна система значений $x_1 : x_2 : \dots : x_{n+1}$. Следовательно, вообще говоря, проективное преобразование прямой, плоскости или пространства имеет соответственно 2, 3 или 4 неподвижных точки. Но в частных случаях некоторые из неподвижных точек могут между собою совпадать или иметь комплексно сопряженные координаты (если мы ограничиваемся рассмотрением действительной области, то эти неподвижные точки приходится считать несуществующими).

Наконец, возможны еще случаи вырождения, когда неподвижные точки заполняют целые прямые или даже плоскости, все точки которых остаются неподвижными¹⁾. Из свойств действительности корней кубического уравнения следует, что действительное проективное преобразование плоскости всегда имеет по крайней мере одну неподвижную точку. Напротив, на прямой линии и в пространстве все неподвижные точки могут быть комплексными.

Эти рассуждения нуждаются еще в существенном дополнении, ибо на стр. 38 мы видели, что аффинные преобразования, которые являются специальным случаем проективных преобразований, имеют только единственную неподвижную точку. Это различие в полученных результатах обуславливается тем, что аффинные преобразования имеют еще неподвижные точки, которые, однако, всегда являются несобственными и потому при пользовании аффинными координатами остаются незамеченными. В самом деле, на прямой линии все аффинные преобразования переводят бесконечно удаленную точку самое в себя; она, следовательно, и является искомой второй неподвижной точкой. Если в общем случае собственная неподвижная точка также удаляется в бесконечность, бесконечно удаленная точка становится двойной неподвижной точкой проективного преобразования. Аффинные преобразования плоскости или пространства переводят бесконечно удаленную прямую, или соответственно плоскость, самое в себя и поэтому определяют на этой прямой или плоскости некоторое проективное преобразование, которое по предыдущему, вообще говоря, имеет две или соответственно три неподвижные точки. Но это дает вместе с (вообще говоря) собственной неподвижной точкой, найденной нами для всякого аффинного преобразования, как раз три или соответственно четыре неподвижных точки, которые в общем случае должно иметь всякое проективное преобразование.

¹⁾ Из произведенного перечисления мы видим, что число различных типов проективных преобразований весьма велико; точную классификацию можно получить с помощью вейерштрассовой теории элементарных делителей. Наглядные примеры проективных преобразований будут даны в гл. III.

§ 5. n -мерные многообразия

В процессе предыдущих исследований мы познакомились с целым рядом существенных различий в геометрической природе прямой, плоскости и пространства. Так, например, проективная прямая и проективное пространство оказались двусторонними; проективная плоскость, в противоположность им, односторонней. Мы лучше всего уясним себе внутреннюю причину этого замечательного различия, если перейдем от специальных размерностей 1, 2 и 3 к случаю n -мерного многообразия.

Прежде всего мы назовем *точкой аффинного n -мерного многообразия* всякую систему конечных значений переменных x_1, x_2, \dots, x_n . С этим понятием мы не связываем *никаких наглядных представлений*. Ведь, окружающее нас пространство внешнего мира имеет только три взаимно перпендикулярных направления, и ни один человек не может воспринять с помощью своих органов чувств большее число взаимно перпендикулярных направлений. Точнее говоря, мы исходим из аналитических оснований и только называем отдельные операции геометрическими терминами аналогично тому, как мы это привыкли делать в геометрии в случае 1, 2 и 3 измерений. В результате этого мы получаем то преимущество, что аналитические операции оживляются благодаря аналогии с наглядными соотношениями, существующими в окружающем нас внешнем мире. В настоящее время этот прием находит широкое применение во многих дисциплинах; в качестве примера укажем на математическую физику, в которой совокупность n компонент, описывающих состояния (фазы) физической системы, рассматривается как точка n -мерного фазового пространства.

Построение n -мерной аффинной геометрии производится следующим абстрактным путем; прежде всего мы называем, как это было сказано выше, точкой n -мерного аффинного многообразия, которое мы будем обозначать M_n , всякую систему значений x_1, x_2, \dots, x_n ¹⁾. Совокупность всех точек, координаты которых удовлетворяют линейному уравнению:

$$u_1x_1 + u_2x_2 + \dots + u_nx_n + u_{n+1} = 0,$$

в котором не все первые n коэффициентов u_x равны нулю, представляет собой $(n-1)$ -мерное многообразие M_{n-1} , которое мы будем называть *гиперплоскостью*; при этом мы считаем тождественными два уравнения, у которых все коэффициенты пропорциональны между собой.

Если два различных линейных уравнения (две гиперплоскости) не имеют ни одной общей системы конечных значений, т. е. если эти два уравнения противоречивы, то мы будем называть эти гиперплоскости параллельными. В противном случае они имеют ∞^{n-2} общих систем значений, которые образуют

¹⁾ Некоторые авторы вместо n -мерного многообразия говорят n -мерное пространство; но мы, следуя Риману, слово пространство будем применять только к трехмерным многообразиям (ср. гл. X, § 5).

$(n - 2)$ -мерное многообразие M_{n-2} . Если три различные гиперплоскости, из которых никакие две не являются параллельными, являются линейно независимыми (т. е. все три гиперплоскости не проходят через одно и то же многообразие M_{n-2}), то их общие системы значений образуют M_{n-3} и т. д., пока мы не получим, наконец, в результате пересечения n непараллельных гиперплоскостей M_{n-1} , не проходящих через одно и то же M_1 одну единственную точку, т. е. M_0 . Полученные таким образом n различных типов многообразий M_{n-1}, \dots, M_1, M_0 мы назовем *основными геометрическими образами*. Итак, мы видим, как с помощью этих представлений, благодаря аналогии с геометрическими отношениями, оживляется *теория линейных уравнений с n неизвестными*.

Аналогично аффинной n -мерной геометрии может быть построена с помощью однородных координат *проективная n -мерная геометрия*.

Мы назовем точкой n -мерного проективного многообразия R_n всякую систему значений $x_1 : x_2 : \dots : x_{n+1}$ за единственным исключением системы $0 : 0 : \dots : 0$. Далее, мы назовем совокупность систем значений, удовлетворяющих линейному однородному уравнению:

$$u_1x_1 + u_2x_2 + \dots + u_{n+1}x_{n+1} = 0,$$

в котором не все u_x равны нулю, проективной гиперплоскостью R_{n-1} и т. д.

Полученные таким путем основные образы n -мерной геометрии мы можем представить также в параметрической форме. Именно: M_0 , т. е. отдельная точка, определяется координатами $\lambda_i x_i$; прямая линия состоит из точек, координаты которых имеют вид $\lambda_1 x_i + \lambda_2 y_i$, где x и y — две различные точки этой прямой; координаты точек плоскости могут быть изображены в виде $\lambda_1 x_i + \lambda_2 y_i + \lambda_3 z_i$, где x, y и z — три точки этой плоскости и т. д.; наконец, гиперплоскость может быть изображена аналогичным образом посредством n лежащих на ней точек. Читателю рекомендуется сравнить эти факты с аналогичными фактами на стр. 15.

Если мы хотим перейти от проективного n -мерного многообразия к соответствующему аффинному многообразию, нам достаточно положить последнюю переменную x_{n+1} равной единице, т. е. исключить все системы значений, у которых последняя переменная равна нулю или, выражаясь геометрически, считать несобственными всеми все точки некоторой определенной гиперплоскости.

Итак, мы определили совершенно абстрактным путем аффинные и проективные n -мерные многообразия. Они резко отличаются в этом отношении от 1-, 2- и 3-мерных многообразий, так как для этих последних возможно и наглядное представление. Современной аксиоматике по необходимости приходится иметь дело исключительно с абстрактными определениями; назначением этой дисциплины как раз и является выявление логических связей, поэтому из нее по возможности изгоняется все

наглядное, чтобы не просмотреть никаких логических связей, обладающих наглядной очевидностью. Однако не подлежит никакому сомнению, что геометрия сверх того имеет целью наглядное понимание геометрических соотношений. „Геометра создает именно радость формы“, говорит Клебш в своем некрологе Плюккеру¹⁾. Но развитие геометрии в последние десятилетия привело к тому, что в Германии на передний план выступили исследования абстрактно логические, в то время как созданные соответствующих наглядных представлений отступило на задний план. Именно поэтому в настоящей книге совершенно исключительное внимание обращается на наглядную сторону геометрии.

Предыдущие соображения могут быть непосредственно распространены, что читатель легко может сделать сам, на случай n -м-ного многообразия. При этом, в частности, получается тот замечательный результат, что четно-мерные многообразия существенно отличаются от нечетно-мерных. Так, например, проективные многообразия четного числа измерений являются односторонними; напротив того, многообразия нечетного числа измерений — двусторонними²⁾ (ср. стр. 25 и 26). Далее проективные преобразования многообразия при четном n образуют одно единственное семейство, в то время как при нечетном n они распадаются на два различных семейства (стр. 34 и 35). Наконец, действительное проективное преобразование при четном n имеет всегда по крайней мере одну действительную неподвижную точку, в то время как в случае нечетного n проективное преобразование может не иметь ни одной действительной неподвижной точки (стр. 40). Это различие мы еще проследим в будущем на дальнейших примерах.

В последующем мы ограничимся по преимуществу размерностями 1, 2 и 3, так как большинство теорем непосредственно обобщаются на случай любого n . Лишь тогда мы будем рассматривать случай произвольного n , когда без этого не удастся выявить различие исследуемых свойств для первых трех размерностей.

Систематическое рассмотрение n -мерных многообразий было впервые проведено Грассманом (Grassmann) в 1844 г. в его книге „Наука об экстенсивных величинах или учение о протяженности, новая математическая дисциплина“, первая часть: Линейное учение о протяженности (Die Wissenschaft der extensiven Größen oder die Ausdehnungslehre, eine neue mathematische Disziplin, Erster Teil: Die lineale Ausdehnungslehre).

Грассман в этой книге рассматривает в очень абстрактной форме n -мерные аффинные многообразия. Впрочем отдельные

¹⁾ Clebsch, Zum Gedächtnis an Julius Plücker, Göttinger Abh., т. 15. Вновь переиздано в „Plücker's Ges. Math. Abh.“, 1895, стр. XIII.

²⁾ Это означает: Если мы n -мерную фигуру переведем через бесконечно удаленную гиперплоскость n -мерного проективного многообразия, то мы можем при нечетном n совместить ее с ее исходным положением, а при четном n — с ее зеркальным образом.

предложения, относящиеся к тому же кругу идей, встречались уже и до Грассмана у различных авторов¹⁾. В 1862 г. появилось второе переработанное издание книги Грассмана под более простым заглавием: „Учение о протяженности“, в которой рассматривались дальнейшие (нелинейные) задачи, но которое было написано столь же абстрактно, так что потребовалось много времени для того, чтобы полный глубокого значения ход мыслей, изложенных в этой книге, получил всеобщее распространение. Между тем основы n -мерной геометрии разрабатывались самостоятельно другими исследователями²⁾. Прежде всего мы назовем здесь английского математика Кэли, занимавшегося этим с 1844 г., которому мы обязаны также введением в геометрию теоретико-инвариантной точки зрения (см. стр. 31). Больших успехов, достигнутых итальянскими математиками в теории n -мерных многообразий, мы в этой книге касаться не можем.

§ 6. Проективные координаты прямой и проективные координаты плоскости; принцип двойственности

А. Проективные координаты прямой на плоскости. Введем на плоскости систему проективных координат $x_1 : x_2 : x_3$. Тогда уравнением любой прямой на этой плоскости будет:

$$u_1 x_1 + u_2 x_2 + u_3 x_3 = 0.$$

Всякая прямая определяется однозначно заданием отношений коэффициентов, входящих в ее уравнение $u_1 : u_2 : u_3$. Поэтому мы можем эти величины рассматривать как однородные координаты прямой линии на плоскости. В самом деле, всякая система значений $u_1 : u_2 : u_3$, за единственным исключением системы $0 : 0 : 0$, дает единственную прямую, и обратно, всякая прямая определяет однозначно систему значений $u_1 : u_2 : u_3$ при заданной системе координат. В частности три фундаментальные прямые $x_1 = 0$, $x_2 = 0$ и $x_3 = 0$ имеют соответственно координаты $1 : 0 : 0$, $0 : 1 : 0$ и $0 : 0 : 1$; прямая линия, проходящая через вершину P_1 и определенная уравнением $u_2 x_2 + u_3 x_3 = 0$, имеет координаты $0 : u_2 : u_3$ и т. д. Отметим особо, что при линейной однородной подстановке переменных x , т. е. при проективном преобразовании, переменные u всегда преобразуются посредством контрагredientной подстановки (см. стр. 32).

Мы будем называть введенные нами координаты $u_1 : u_2 : u_3$ *координатами прямой*. Координаты прямой дают нам первый пример совершенно нового понимания координат, введенного в геометрию Пюккером в 1829 г. В то время как до Пюккера лишь точки определялись координатами, Пюккер рассматривал для произвольных геометрических образов любые постоянные,

¹⁾ Ср. Math. Enzyklopädie, II, C. Segre, Mehrdimensionale Räume, стр. 773.

²⁾ Ср. Math. Enzyklopädie, II, C. Segre, Mehrdimensionale Räume, стр. 774.

однозначно их определяющие, как координаты этих образов. В качестве таких образов прежде всего брались прямые, плоскости, окружности и шаровые поверхности. Поэтому мы получаем наряду с до сих пор рассмотренной точечной геометрией еще *геометрии прямых и плоскостей и затем геометрии окружностей, шаровых поверхностей* и т. д., вследствие чего возникает множество задач совершенно нового типа. Но в настоящей книге мы будем рассматривать в качестве элементов пространства кроме точек только прямые, плоскости и гиперплоскости.

Вернемся теперь к координатам прямой и рассмотрим *совокупность всех прямых линий, координаты которых удовлетворяют уравнению*:

$$u_1 \bar{x}_1 + u_2 \bar{x}_2 + u_3 \bar{x}_3 = 0.$$

В этом уравнении мы рассматриваем u_i как переменные, а \bar{x}_i как данные постоянные. Мы утверждаем, что все прямые, координаты которых удовлетворяют этому уравнению, проходят через точку, имеющую в заданной системе точечных координат координаты $\bar{x}_1 : \bar{x}_2 : \bar{x}_3$. В самом деле, всякая прямая $u_1 : u_2 : u_3$, координаты которой удовлетворяют уравнению, имеет в текущих точечных координатах $\xi_1 : \xi_2 : \xi_3$ уравнение:

$$\bar{u}_1 \xi_1 + \bar{u}_2 \xi_2 + \bar{u}_3 \xi_3 = 0.$$

Но это уравнение по условию удовлетворяется значениями:

$$\xi_1 = \bar{x}_1, \quad \xi_2 = \bar{x}_2, \quad \xi_3 = \bar{x}_3,$$

что и требовалось доказать. Следовательно, мы получаем два друг другу соответствующих предложения:

Если мы рассматриваем $x_1 : x_2 : x_3$ как проективные координаты точки, то уравнение

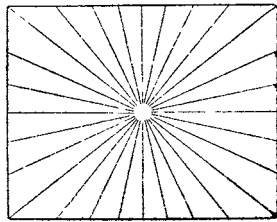
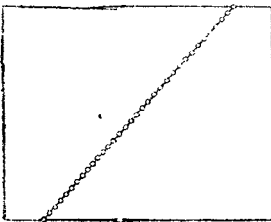
$$u_1 x_1 + u_2 x_2 + u_3 x_3 = 0$$

изображает при данных постоянных u_1, u_2, u_3 все точки, лежащие на прямой $u_1 : u_2 : u_3$ (черт. 22, слева).

Если мы рассматриваем $u_1 : u_2 : u_3$ как проективные координаты прямой, то уравнение

$$u_1 x_1 + u_2 x_2 + u_3 x_3 = 0$$

изображает при данных постоянных x_1, x_2, x_3 все прямые, проходящие через точку $x_1 : x_2 : x_3$ (черт. 22, справа).



Черт. 22.

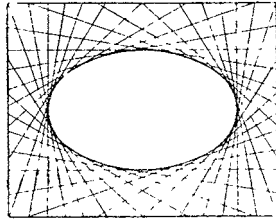
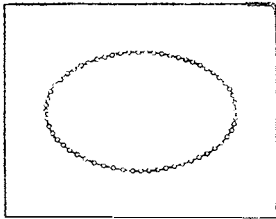
Иными словами: если прямая $u_1:u_2:u_3$ проходит через точку $x_1:x_2:x_3$, то непременно удовлетворяется уравнение:

$$u_1x_1 + u_2x_2 + u_3x_3 = 0.$$

Для уравнений любой n -й степени, как и для линейных уравнений, можно привести подобные же соображения. Именно мы получим:

Если мы свяжем точные координаты плоскости $x_1:x_2:x_3$ уравнением n -й степени, то получим непрерывную совокупность точек, которую будем называть *кривой n -го порядка* (черт. 23, слева).

Если мы свяжем координаты прямой $u_1:u_2:u_3$ уравнением n -й степени, то получим непрерывную совокупность прямых, которую будем называть *кривой n -го класса* (черт. 23, справа).



Черт. 23.

Всякой кривой какого-нибудь порядка соответствует определенная кривая некоторого класса, и, обратно; именно: совокупность касательных к кривой данного порядка образует кривую некоторого класса, в то время как, с другой стороны, огибающая кривой данного класса является кривой некоторого порядка. Но мы должны остерегаться отождествлять кривые некоторого порядка с кривыми некоторого класса. Правда, мы можем рассматривать данную плоскую кривую и как точечный образ и как образ, составленный из прямых, но при этом в первом случае образ составлен только из точек, а во втором только из прямых. Число, дающее порядок данной плоской кривой, вообще говоря, не совпадает с числом, дающим ее класс.

В. Проективные координаты плоскости. Уравнением плоскости в пространстве в проективных координатах является уравнение:

$$u_1x_1 + u_2x_2 + u_3x_3 + u_4x_4 = 0.$$

Из соображений, подобных приведенным на стр. 45, следует, что мы можем рассматривать отношения $u_1:u_2:u_3:u_4$ как *однородные координаты плоскости*. Совокупность плоскостей, координаты которых удовлетворяют данному линейному уравнению, образует связку плоскостей, т. е. мы получаем все плоскости, проходящие через данную точку пространства. Следовательно, приведенное выше уравнение изображает при переменных x уравнение плоскости в точечных координатах, а при перемен-

ных u — уравнение точки в плоскостных координатах. Соответствующим образом мы получаем для уравнения n -й степени:

Если мы свяжем точечные координаты пространства $x_1 : x_2 : x_3 : x_4$ уравнением n -й степени, то мы получим непрерывную совокупность точек, которую будем называть *поверхностью n -го порядка*.

Если мы свяжем плоскостные координаты пространства $u_1 : u_2 : u_3 : u_4$ уравнением n -й степени, то мы получим непрерывную совокупность плоскостей, которую будем называть *поверхностью n -го класса*.

При этом касательные плоскости к поверхности данного порядка образуют соответствующую поверхность некоторого класса; в то время как, наоборот, огибающая поверхности данного класса образует соответствующую поверхность некоторого порядка¹⁾.

Эти рассуждения легко переносятся на случай n -мерного многообразия. Если уравнением данной гиперплоскости является уравнение:

$$u_1 x_1 + u_2 x_2 + \dots + u_{n+1} x_{n+1} = 0,$$

то мы можем рассматривать отношения $u_1 : u_2 : \dots : u_{k+1}$, как однородные координаты этой гиперплоскости.

В процессе развития геометрии координаты прямой появились впервые у Пюккера в его „Аналитическо-геометрических исследованиях“, т. II, 1831 г.²⁾ Уже в предисловии к этому тому он указывает также и на плоскостные координаты. Но оперирование с плоскостными координатами доставляло Пюккеру значительные затруднения, так как в его распоряжении не имелось вспомогательных средств теории определителей. Подробнее он останавливается на плоскостных координатах в своей „Системе пространственной геометрии“ 1846 („System der Geometrie des Raumes“).

С. Двойственность на плоскости. В предыдущих рассуждениях мы писали рядом (слева и справа) некоторые предложения, обладающие замечательной симметрией. В случае плоскости мы можем перейти от одного из таких предложений к другому путем замены переменных x переменными u , а переменных u переменными x и, кроме того, путем надлежащей перестановки слов „точка“ и „прямая“. Слово „надлежащая“ здесь означает, что, например, выражение „точки, лежащие на данной прямой“, должно быть заменено выражением „прямые, проходящие через данную точку“ (ср. предложение стр. 47).

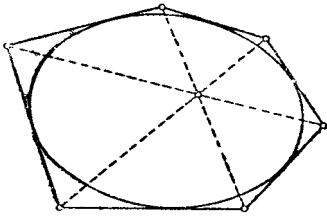
¹⁾ Нашему наглядному представлению, которое основано по преимуществу на зрении, точечный образ кажется первичным, тогда как плоскостной образ — вторичным построением. Напротив, слепому, который получает представление о форме поверхности путем наложения на нее рук, т. е. путем построения касательных плоскостей, понятие плоскостного образа должно казаться более первичным.

²⁾ Plücker, Analytisch-geometrische Entwicklungen, т. II, Эссен 1831. Первая часть: О новом способе изображения кривых с помощью уравнений.

Чтобы избавиться от необходимости делать „надлежащую“ перестановку, некоторые авторы пользуются словом „инцидентный“ и формулируют оба приведенные выше выражения следующим образом: „точки, инцидентные данной прямой“ и соответственно „прямые инцидентные данной точке“. Если пользоваться этим способом выражения, то упомянутая симметрия предложений выявится особенно отчетливо. Пары подобного рода соответствующих друг другу предложений, которые называются *взаимно двойственными*, могут быть приведены в большом количестве. Мы ограничимся в качестве примера *теоремой Паскаля* (Pascal) и *теоремой Брианшона* (Brianchon):

Теорема Брианшона о шестиугольнике, описанном около конического сечения:

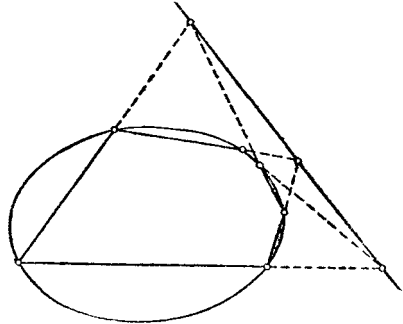
В шестиугольнике, образованном какими-нибудь шестью прямыми кривой второго класса, три прямые, соединяющие противоположные вершины, пересекаются в одной точке (черт. 24).



Черт. 24.

Теорема Паскаля о шестиугольнике, вписанном в коническое сечение:

В шестиугольнике, образованном какими-нибудь шестью точками кривой второго порядка, три точки пересечения противоположных сторон лежат на одной прямой (черт. 25).



Черт. 25.

Дальнейшее развитие этих мыслей приводит нас к столь же замечательному ¹⁾, как и важному „*принципу двойственности*“: В проективной геометрии на плоскости путем надлежащей перестановки слов:

точка \rightarrow прямая,
прямая \rightarrow точка,

мы можем непосредственно получить из всякой геометрической

¹⁾ Установление принципа двойственности, который с нашей теперешней точки зрения оказывается не таким уж глубоким, представляло в свое время существенное научное достижение. Это видно, например, из того, что прошло около 150 лет после отыскания теоремы Паскаля, прежде чем была установлена теорема Брианшона, которая с помощью принципа двойственности из нее непосредственно вытекает.

теоремы новую, совершенно другую теорему. Читатель должен приобрести известный навык в подобных „переводах“, чтобы в дальнейшем легко осуществлять переход к двойственному предложению. В евклидовой геометрии (в противоположность проективной геометрии) принцип двойственности имеет место далеко не всегда.

Так, например, в евклидовой геометрии из двух следующих взаимно двойственных предложений:

Через две различные точки проходит одна и только одна прямая.

Две различные прямые пересекаются в одной и только в одной точке.

левое выполнено, в то время как правое не выполнено.

Обоснование принципа двойственности может быть осуществлено различными путями ¹⁾. Самый принцип был установлен в 1822 г. французским геометром Понселе ²⁾. Он исходил из того, что с помощью данного конического сечения каждой точке плоскости (рассматриваемой как проективная плоскость) может быть однозначно поставлена в соответствие некоторая определенная прямая, именно ее поляр, и обратно, всякой прямой будет однозначно соответствовать определенная точка — соответствующий ей полюс (эти полярные преобразования мы будем еще рассматривать в гл. II). Если теперь доказана геометрическая теорема, в которой идет речь только о точках пересечения прямых, или о прямых, соединяющих точки, т. е. выражаясь современным языком, теорема проективной геометрии, то из нее следует с помощью полярных преобразований другая теорема, двойственная первой. В противоположность Понселе Жергон (Gergonne) дал *аксиоматическое обоснование* принципа двойственности. Для этого достаточно показать, что все аксиомы проективной геометрии взаимно двойственны; потому что тогда, если некоторое предложение вытекает из этих аксиом, то одновременно из них вытекает также и соответствующее двойственное предложение. Наконец Пюккер обосновал принцип двойственности *аналитически* следующим образом ³⁾. Если мы, например, доказали теорему Паскаля посредством аналитических выкладок, то мы можем произвести те же выкладки, заменив всюду переменные x переменными u , и наоборот, и затем истолковать результат этих выкладок новым способом. Следовательно, мы получаем из всякого аналитического вычисления два различных геометрических предложения: одно из них является истолкованием этого вычисления в точечных координатах, другое — истолкованием соответствующего вычисления в коор-

¹⁾ Ср. K ö t t e r, Die Entwicklung der synthetischen Geometrie, Jahresber. d. D. M. V., т. 5, стр. 160—169, 1901. Закон двойственности.

²⁾ P o n s e l e t, Traité des propriétés projectives des figures, 1822.

³⁾ P l ü c k e r, Analytisch-geometrische Entwicklungen, т. II, Эссен 1831. Вторая часть: Принцип двойственности, § 1, стр. 242—251.

динахах прямой. Все эти методы доказательства не применимы в евклидовой геометрии, так как в ней вследствие отсутствия несобственных элементов отсутствует симметрия.

Д. Двойственность в пространстве. Подобно тому как был установлен принцип двойственности на проективной плоскости, мы можем установить принцип двойственности и в проективном пространстве. Так как здесь точке $x_1 : x_2 : x_3 : x_4$ соответствует плоскость $u_1 : u_2 : u_3 : u_4$, то пространственная двойственность дается схемой:

точка \rightarrow плоскость,
 прямая \rightarrow прямая,
 плоскость \rightarrow точка.

Прямая линия является двойственной самой себе, так как она может рассматриваться и как линия, соединяющая две точки, и двойственным образом как пересечение двух плоскостей. Обоснование принципа двойственности может быть произведено совершенно так же, как и на плоскости. В качестве примера мы приведем два следующих элементарных предложения:

Три плоскости, не проходящие все через одну прямую, пересекаются в одной и только в одной точке.

Три точки, не лежащие все на одной прямой, определяют собой одну и только одну плоскость.

Аналогичным образом устанавливается принцип двойственности и для высших размерностей. В случае n -мерного проективного многообразия точке P_0 соответствует гиперплоскость P_{n-1} , прямой P_1 соответствует P_{n-2} , плоскости P_2 соответствует P_{n-3} и т. д. В четно-мерных многообразиях не существует образов двойственных самим себе; наоборот, в нечетно-мерных они всегда имеются (например прямая линия в пространстве).

Е. Двойственное в себе построение проективной геометрии. Значение пюккеровых координат прямой, плоскости и гиперплоскости заключается в том, что они позволяют построить аналитическую геометрию вполне двойственным образом. В качестве примера мы приведем следующее. *Прямолинейный ряд точек* состоит из всех точек, лежащих на некоторой прямой. Его можно представить (см. стр. 14) в параметрической форме:

$$\rho x_i = \lambda_1 y_i + \lambda_2 z_i.$$

На плоскости прямолинейному ряду точек соответствует *пучок прямых*, состоящий из всех прямых, проходящих через некоторую точку. Если две таких прямых имеют координаты соответственно u_i и v_i , то мы можем уравнения всех прочих прямых пучка написать в виде:

$$\rho \varphi_i = \lambda_1 u_i + \lambda_2 v_i,$$

причем φ_i обозначают координаты отдельных прямых пучка.

В самом деле, уравнения в точечных координатах обеих прямых u и v будут:

$$u_1 x_1 + u_2 x_2 + u_3 x_3 = 0, \quad v_1 x_1 + v_2 x_2 + v_3 x_3 = 0$$

(причем x_i являются переменными, u_i и v_i постоянными). Тогда те значения $x_1: x_2: x_3$, которые одновременно удовлетворяют обоим уравнениям и, значит, дают точку пересечения обеих прямых, будут также удовлетворять уравнению:

$$(\lambda_1 u_1 + \lambda_2 v_1) x_1 + (\lambda_1 u_2 + \lambda_2 v_2) x_2 + (\lambda_1 u_3 + \lambda_2 v_3) x_3 = 0.$$

Но изображаемая этим уравнением прямая имеет указанные выше координаты: $\rho\varphi_1 = \lambda_1 u_i + \lambda_2 v_i$ ¹⁾. В пространстве прямолинейному ряду точек соответствует пучок плоскостей, который состоит из всех плоскостей, проходящих через некоторую прямую. Аналитически мы можем изобразить пучок плоскостей таким же образом, как и пучок прямых, только u_i и v_i будут теперь плоскостными координатами. Последовательное двойственное противопоставление рассмотренных здесь образов (впрочем чисто синтетическое) впервые было проведено Штейнером в его работе „Систематическое исследование взаимной зависимости геометрических образов“ и т. д. (Steiner, Systematische Entwicklung der Abhängigkeiten geometrischer Gestalten voneinander. . . , 1832).

§ 7. Двойные отношения

А. Элементарные свойства. В наших дальнейших рассуждениях важную роль будут играть двойные отношения. Из элементарной математики известно, что *двойным отношением четырех точек X, Y, Z, T , лежащих на одной прямой, называется частное:*

$$DV\{XYZT\} = \frac{XZ}{YZ} : \frac{XT}{YT},$$

причем XZ, YZ и т. д. обозначают взятые с надлежащими знаками длины различных отрезков, определяемых на прямой четырьмя точками X, Y, Z, T .

Если в частности двойное отношение имеет значение -1 , то говорят, что четыре точки находятся в *отношении гармоническом*.

Если даны четыре точки X, Y, Z, T без установления порядка их следования, то их можно расположить 24 различными способами.

Легко доказать следующие предложения:

Двойное отношение остается неизменным, если поменять местами первую и вторую пары точек: $DV\{XYZT\} = DV\{ZTXY\}$.

¹⁾ Доказательство можно также провести двойственно к соответствующему доказательству на стр. 14—15.

Двойное отношение остается неизменным, если переставить обе точки каждой из двух пар: $DV\{XYZT\} = DV\{YXTZ\}$.

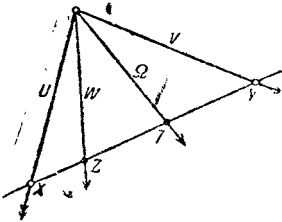
Двойное отношение принимает обратное значение, если переставить точки только одной пары: $DV\{XYZT\} = 1 : DV\{YXZT\} = 1 : DV\{XYTZ\}$ и т. д.

С помощью подобных предложений можно показать, что 24 возможных расположения четырех точек распадаются по четыре на группы, дающие одну и ту же величину двойного отношения, так что четыре точки (взятые без определенного порядка) определяют только шесть, вообще говоря, различных, двойных отношений¹⁾. Если же мы еще укажем, как должны эти четыре точки распадаться на пары, то мы можем образовать только восемь расположений, которые имеют следующее значение:

$$\begin{aligned} DV\{XYZT\} &= \lambda : \mu, & DV\{ZTX Y\} &= \lambda : \mu, \\ DV\{XYTZ\} &= \mu : \lambda, & DV\{ZTYX\} &= \mu : \lambda, \\ DV\{YXTZ\} &= \lambda : \mu, & DV\{TZYX\} &= \lambda : \mu, \\ DV\{YXZT\} &= \mu : \lambda, & DV\{TZXY\} &= \mu : \lambda, \end{aligned}$$

причем через $\lambda : \mu$ мы обозначили: $DV\{XYZT\}$. Следовательно двойное отношение двух пар точек может принимать только два значения, именно $\lambda : \mu$ и обратное ему $\mu : \lambda$.

Далее, мы напомним о том, что двойное отношение четырех прямых или четырех плоскостей, входящих в пучок, равно двойному отношению четырех точек, являющихся точками пересечения прямой (не проходящей через центр или соответственно через ось нашего пучка) с четырьмя рассматриваемыми элементами этого пучка²⁾ (черт. 26).



Черт. 26.

Двойные отношения рассматривались уже в древности, например у Паппа (Pappus). Особенное значение они получили в новейших исследованиях, в которых приходится иметь дело с проективными преобразованиями, так как двойные отношения остаются

инвариантными при этих преобразованиях (ср. стр. 54). Систематически их рассматривали в частности Понселе³⁾ и Мебиус⁴⁾.

§. В. Двойное отношение четырех точек на прямой. Для дальнейших исследований нам понадобится следующее аналитическое представление двойных отношений. Введем на прямой линии проективную систему координат и возьмем две точки

¹⁾ Ср. таблицу: Möbius, Der barycentrische Calcul, стр. 249, 1827.

²⁾ Теорема Паппа. Ср. Kötter, Die Entwicklung der synthetischen Geometrie, Jahresber. d. D. M. V., т. 5, стр. 12, 1901.

³⁾ Poncelet, Traité des propriétés projectives des figures, 1822.

⁴⁾ Möbius, Der barycentrische Calcul, 1827.

X и Y с координатами $x_1 : x_2$ и $y_1 : y_2$. Тогда прочие точки прямой могут быть представлены в виде:

$$\rho \tilde{z}_1 = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 y_1, \quad \rho \tilde{z}_2 = \lambda_1 x_2 + \lambda_2 y_2.$$

Вместо этого, мы можем написать:

$$\rho \tilde{z}_1 = x_1 + r y_1, \quad \rho \tilde{z}_2 = x_2 + r y_2,$$

так как дело идет только об отношениях ξ_x . Вследствие этого каждой точке прямой поставлено в соответствие значение $r = \lambda_2 : \lambda_1$, которое в частности для точки X равно нулю, а для точки Y равно ∞ . Возьмем теперь еще две точки Z и T на этой прямой, т. е. дадим r два определенных значения λ и μ :

$$z_1 : z_2 = (x_1 + \lambda y_1) : (x_2 + \lambda y_2),$$

соответственно

$$t_1 : t_2 = (x_1 + \mu y_1) : (x_2 + \mu y_2).$$

Тогда частное $\lambda : \mu$ будет равно *двойному отношению четырех точек, X, Y, Z, T , взятых в указанном порядке*:

$$\frac{\lambda}{\mu} = DV\{XYZT\}.$$

Чтобы доказать это утверждение, выразим рассматриваемое отношение через координаты четырех точек X, Y, Z, T . Из вышеприведенных уравнений

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 + \lambda y_1}{x_2 + \lambda y_2}, \quad \frac{t_1}{t_2} = \frac{x_1 + \mu y_1}{x_2 + \mu y_2},$$

следует:

$$\frac{\lambda}{\mu} = \frac{\begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} y_1 & t_1 \\ y_2 & t_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x_1 & t_1 \\ x_2 & t_2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix}}.$$

Это выражение может быть составлено известным способом из четырех миноров матрицы:

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & t_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & t_2 \end{vmatrix}.$$

Рассмотрим прежде всего тот случай, когда вторая фундаментальная точка $x_2 = 0$ нашего координатоопределения является бесконечно удаленной точкой прямой (рассматриваемой как аффинная прямая). Если мы перейдем к аффинным координатам

$x = x_1 : x_2$, $y = y_1 : y_2$, $z = z_1 : z_2$, $t = t_1 : t_2$, то рассматриваемое отношение примет вид:

$$\frac{\lambda}{\mu} = \frac{\begin{vmatrix} x_1 : x_2 & z_1 : z_2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} y_1 : y_2 & t_1 : t_2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x_1 : x_2 & t_1 : t_2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} y_1 : y_2 & z_1 : z_2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{(x-z)(y-t)}{(x-t)(y-z)} = \frac{z-x}{z-y} \cdot \frac{t-x}{t-y}.$$

Но это выражение равно частному:

$$\frac{\lambda}{\mu} = \frac{XZ}{YZ} : \frac{XT}{YT} = DV \left\{ XYZT \right\},$$

так что в этом специальном случае наше утверждение доказано.

Далее, при линейных однородных подстановках перед каждым из четырех определителей, посредством которых выражается наше двойное отношение, появится в качестве множителя определитель подстановки (см. стр. 31), и эти множители сократятся. Если мы будем рассматривать подстановки как проективные преобразования, то из предыдущего получится, что двойное отношение четырех точек остается неизменным, если мы произведем проективное преобразование прямой и затем вычислим двойное отношение образов наших четырех точек. Если же мы будем истолковывать подстановки, как введение новой системы координат, то получим, что двойное отношение четырех точек на прямой, будучи вычислено в двух различных проективных системах координат, дает одно и тоже значение; следовательно, значение двойного отношения не зависит от выбора проективной системы координат. Этим наше предложение доказано в общем случае.

Всякая величина, остающаяся неизменной при преобразованиях данной группы, называется *инвариантом* этой группы. Следовательно, двойное отношение четырех точек на прямой является инвариантом группы проективных преобразований этой прямой. Большой интерес представляет аналитическое строение этого инварианта. Именно, казалось бы, что уже отношение двух определителей является инвариантом; но подобное выражение при пользовании однородными координатами не представляет собой геометрической величины, так как оно при равнозначущих координатах x_1, x_2 и $\rho x_1, \rho x_2$ имеет, вообще говоря, разное значение. Вследствие этого приходится перейти к двойному отношению четырех определителей, которое уже не зависит от выбора произвольного множителя пропорциональности ρ .

Для случая многомерных многообразий мы можем вычислить двойное отношение четырех точек на прямой совершенно аналогичным образом. Двойное отношение четырех точек с координатами: $x_i, y_i, (x_i + \lambda y_i), (x_i + \mu y_i)$ будет также и здесь равно $\lambda : \mu$. Легко показать, что это двойное отношение будет также инвариантом по отношению к группе проективных преобразований n -мерного многообразия.

С. Двойное отношение в пучке прямых и плоскостей. Те же соображения, как и для прямолинейных рядов точек, могут быть приведены и для двойственных образов, именно для пучков прямых и плоскостей. Следовательно, четырем прямым или, соответственно, четырем плоскостям U, V, W, Ω пучка с координатами:

$$u_i, v_i, \rho w_i = u_i + \bar{\lambda} v_i, \rho \omega_i = u_i + \bar{\mu} v_i$$

нужно приписать двойное отношение $DV\{UVW\Omega\} = \bar{\lambda} : \bar{\mu}$. С помощью координат рассматриваемых прямых и плоскостей мы можем выразить это двойное отношение, например, в следующей форме:

$$\frac{\bar{\lambda}}{\bar{\mu}} = DV\{UVW\Omega\} = \frac{\begin{vmatrix} u_1 & w_1 \\ u_2 & w_2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} v_1 & \omega_1 \\ v_2 & \omega_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} u_1 & \omega_1 \\ u_2 & \omega_2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} v_1 & w_1 \\ v_2 & w_2 \end{vmatrix}}$$

Точно так же и здесь двойное отношение является инвариантом группы проективных преобразований и не зависит от выбора проективной системы координат.

Чтобы доказать, что это определение двойного отношения четырех прямых или соответственно плоскостей пучка совпадает с элементарным определением, достаточно показать совпадение двойного отношения четырех точек X, Y, Z, T , лежащих на одной прямой, с двойным отношением четырех прямых или, соответственно, плоскостей пучка, проходящих через эти точки (черт. 26): $DV\{XYZT\} = DV\{UVW\Omega\}$, при этом двойное отношение понимается в нашем смысле. Мы ограничимся доказательством для случая пучка прямых, так как оно переносится без всяких затруднений на случай пучка плоскостей. Пусть координатами четырех точек X, Y, Z, T будут:

$$x_i, y_i, z_i = x_i + \lambda y_i, t_i = x_i + \mu y_i,$$

а координатами четырех прямых U, V, W, Ω :

$$u_i, v_i, w_i = u_i + \bar{\lambda} v_i, \omega_i = u_i + \bar{\mu} v_i.$$

Так как прямые U и V проходят соответственно через точки X и Y , то (стр. 45—46) должны удовлетворяться следующие уравнения:

$$\sum_r u_r x_r = 0, \quad \sum_r v_r y_r = 0.$$

Далее, прямые W и Ω тогда и только тогда проходят соответственно через точки Z и Y , когда удовлетворяются два уравнения:

$$\sum_r (u_r + \bar{\lambda} v_r) (x_r + \lambda y_r) = \sum_r u_r x_r + \lambda \sum_r u_r y_r + \bar{\lambda} \sum_r v_r x_r + \bar{\lambda} \lambda \sum_r v_r y_r = 0.$$

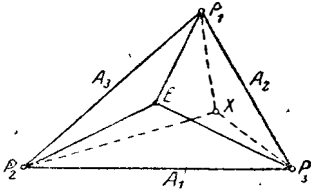
$$\sum_r (u_r + \bar{\mu} v_r) (x_r + \mu y_r) = \sum_r u_r x_r + \mu \sum_r u_r y_r + \bar{\mu} \sum_r v_r x_r + \bar{\mu} \mu \sum_r v_r y_r = 0.$$

Так как $\sum_r u_r x_r = 0$, и точно так же $\sum_r v_r y_r = 0$, то отсюда получаем:

$$\begin{aligned} \lambda \sum_r u_r y_r &= -\bar{\lambda} \sum_r v_r x_r, \\ \mu \sum_r u_r y_r &= -\bar{\mu} \sum_r v_r x_r, \end{aligned} \quad \text{или} \quad \frac{\lambda}{\mu} = \frac{\bar{\lambda}}{\bar{\mu}}.$$

Итак, действительно оба рассматриваемых двойных отношения равны между собой, как бы ни были расположены относительно друг друга четыре точки и четыре прямые.

D. Определение проективных координат с помощью двойных отношений. В заключение мы отметим, что двойными отношениями можно воспользоваться для очень простого определения проективных координат точки; для случая плоскости рассмотрим это ближе. Для этого случая проективная система координат определяется тремя прямыми A_1, A_2, A_3 и единичной точкой E (стр. 18). Чтобы определить проективные координаты произвольной точки X , соединим каждую вершину фундаментального треугольника с двумя остальными вершинами и затем с точками E и X (черт. 27). Тогда из каждой вершины



Черт. 27.

будут выходить четыре прямые, из которых три являются неподвижными, в то время как четвертая меняется с изменением положения точки X . Эти прямые определяют следующие три двойных отношения:

$$\begin{aligned} m_1 &= DV\{A_2 A_3 (P_1 E) (P_1 X)\}, \\ m_2 &= DV\{A_3 A_1 (P_2 E) (P_2 X)\}, \\ m_3 &= DV\{A_1 A_2 (P_3 E) (P_3 X)\}, \end{aligned}$$

которые переходят друг в друга при циклической подстановке индексов.

Таким образом для каждой точки X мы получаем три числа m_1, m_2, m_3 , и в то же время, обратно, два любых из этих чисел однозначно определяют некоторую точку. Числа m_1, m_2, m_3 связаны, как легко показать, следующим уравнением:

$$m_1 \cdot m_2 \cdot m_3 = 1.$$

Соотношениями, которые связывают три двойных отношения с проективными координатами $x_1 : x_2 : x_3$, имеющими тот же фундаментальный треугольник, являются соотношения:

$$m_1 = \frac{x_3}{x_2}, \quad m_2 = \frac{x_1}{x_3}, \quad m_3 = \frac{x_2}{x_1}.$$

Итак, мы убеждаемся, что теория двойных отношений дает возможность ввести прямым геометрическим путем проективные координаты, не прибегая к обходному пути использования аффинных координат.

§ 8. Мнимые элементы

Введение комплексных чисел в алгебру имеет своим основанием ту наглядность, которую приобретает при этом теория уравнений. Именно, если ограничиваться только действительными числами, то мы можем утверждать лишь то, что всякое уравнение n -й степени имеет не более n корней; вследствие этого мы вынуждены во всех исследованиях делать различие между уравнениями с 0, 1, 2, . . . , и наконец с n корнями. Напротив, если допустить комплексные числа, то мы можем утверждать, что (при надлежащем подсчете кратных корней) всякое уравнение n -й степени имеет в точности n корней. Это же самое основание говорит за то, чтобы допустить комплексные координаты также и в геометрию. Тогда всякая кривая n -го порядка будет иметь всегда n точек пересечения (при условии надлежащего подсчета кратных точек) с любой прямой. Так, например, окружность имеет со своей касательной две общие слившиеся точки, а с прямой, не пересекающей ее в обычном смысле, — две общие точки с комплексными координатами. Далее, предложение: „проективное преобразование n -мерного многообразия имеет, вообще говоря, $(n+1)$ неподвижную точку“ будет верно лишь при допущении точек с комплексными координатами (стр. 43). Итак, основание к введению в геометрию мнимых элементов оказывается тем же, что и к введению бесконечно удаленных или несобственных элементов — именно, достижение единства геометрических теорем и доказательств.

А. Введение мнимых точек. Мнимые точки мы вводим абстрактно; именно, мы рассматриваем всякую систему значений (x_1, x_2, \dots, x_n) или $(x_1 : x_2 : \dots : x_{n+1})$ как мнимую точку соответственно в аффинном или в проективном n -мерном многообразии, если эти значения или соответственно отношения этих значений¹⁾ не все являются действительными. Конечно, таким образом введенные мнимые элементы дают абстрактное, ненаглядное расширение геометрии, но их введение вполне оправдано тем, что они доставляют упрощение и придают единство геометрическим предложениям и доказательствам. Всего мы получаем на прямой линии, на плоскости и в пространстве ∞^2 , ∞^4 и ∞^6 точек, среди которых действительными являются соответственно ∞^1 , ∞^2 и ∞^3 точек. Эта сокращенная запись имеет следующий смысл. На прямой линии все действительные точки определяются посредством одного действительного параметра, все мнимые точки посредством двух действительных параметров. Мы подчеркиваем,

¹⁾ Так, например, отношения $i : i : i : \dots : i$ определяют действительную точку $1 : 1 : 1 : \dots : 1$.

что при таком подсчете параметров мы будем всегда рассматривать только *действительные* (а не комплексные) параметры. Среди чисел обычно различают действительные, (чисто) мнимые и комплексные числа. В геометрии этого различия мы делать не будем, и будем называть мнимым всякий геометрический образ, у которого не все координаты являются действительными.

Для случая прямой ($n=1$) вся мнимая область разбивается совокупностью действительных точек на две части, которые взаимно комплексно сопряжены. Если же размерность больше единицы, то мнимая область является связным множеством. Так, например, мы можем уже в случае аффинной плоскости непрерывно перевести точку $x=i, y=i$ в „комплексно-сопряженную“ точку $x=-i, y=-i$, не вступая в действительную область; для этого достаточно, например, заставить пробежать все чисто мнимые значения от $+i$ через нуль до $-i$ сначала первую координату x , а затем вторую y .

В. Мнимые элементы на плоскости. Основные образы мы определяем, так же как на стр. 41—42, посредством линейных уравнений, только теперь все величины могут принимать и комплексные значения. Мы рассмотрим по порядку имеющиеся здесь соотношения для всех действительных и мнимых основных образов плоскости и пространства.

1. *На плоскости*¹⁾ *на всякой действительной прямой лежит* ∞^1 действительных и ∞^2 мнимых точек.

2. *На плоскости через каждую действительную точку проходит* ∞^1 действительных и ∞^2 мнимых прямых; потому что если мы проведем через действительную точку какие-нибудь две действительные прямые u и v , то все остальные прямые, проходящие через эту точку, могут быть представлены в виде: $\rho_k^2 = = u_k + \lambda v_k$, причем при действительных λ мы получим действительные прямые, при комплексных λ — мнимые прямые.

3. *На плоскости на всякой мнимой прямой лежит* ∞^2 мнимых точек, но только *одна единственная действительная точка*, именно та точка, которая является общей для данной прямой и для соответствующей комплексно-сопряженной прямой.

4. *На плоскости через всякую мнимую точку проходит* ∞^2 мнимых прямых, но только *одна единственная действительная прямая*, именно прямая, соединяющая данную точку с соответствующей комплексно-сопряженной точкой.

При доказательстве теорем 3 и 4 мы можем ограничиться доказательством только теоремы 4, так как из нее посредством принципа двойственности получается доказательство теоремы 3. Прежде всего заметим, что если через мнимую точку $\rho_k^2 = = x_k + iy_k$ вообще проходит какая-нибудь прямая, то на этой прямой обязательно лежит также комплексно-сопряженная точка

¹⁾ В этих предложениях дело идет о действительной, а не о мнимой плоскости в пространстве.

$\rho \xi_k = x_k - iy_k$; но две точки определяют единственную прямую. Следовательно, остается только показать, что полученная таким образом прямая всегда является действительной. Точки этой прямой могут быть представлены в виде:

$$\rho \xi_k = x_k + iy_k + \lambda(x_k - iy_k) = (1 + \lambda)x_k + i(1 - \lambda)y_k.$$

В частности для значений параметра $\lambda = 1$ и $\lambda = -1$ мы получаем точки:

$$\rho \xi_k = 2x_k \quad \text{и} \quad \rho \xi_k = 2iy_k.$$

Так как дело идет только об отношениях ξ_k , то обе эти точки являются действительными и могут быть представлены также в виде:

$$\rho \xi_k = x_k \quad \text{и} \quad \rho \xi_k = y_k.$$

Далее, эти точки не могут совпадать, так как в противном случае имело бы место соотношение:

$$\sigma y_k = x_k,$$

из которого следует, что исходная точка:

$$\rho \xi_k = x_k + iy_k = \sigma y_k + iy_k = (\sigma + i)y_k$$

не является мнимой, а является действительной. Этим наше доказательство приведено к концу.

С. Мнимые элементы в пространстве. Аналогичным образом в пространстве имеют место следующие предложения:

1. В пространстве на всякой действительной плоскости лежит ∞^2 действительных и ∞^4 мнимых точек; далее, на всякой действительной плоскости лежит ∞^2 действительных и ∞^4 мнимых прямых.

2. В пространстве на всякой действительной прямой лежит ∞^4 действительных и ∞^2 мнимых точек; далее, через всякую действительную прямую проходит ∞^4 действительных и ∞^2 мнимых плоскостей.

3. В пространстве через всякую действительную точку проходит ∞^3 действительных и ∞^4 мнимых плоскостей; далее, через всякую действительную точку проходит ∞^2 действительных и ∞^4 мнимых прямых.

4. В пространстве на всякой мнимой плоскости лежит ∞^4 мнимых и ∞^1 действительных точек; далее, на всякой мнимой плоскости лежит ∞^4 мнимых прямых, но только одна единственная действительная прямая; эта прямая содержит все действительные точки рассматриваемой мнимой плоскости и является линией пересечения этой плоскости с соответствующей комплексно-сопряженной плоскостью.

5. С мнимыми прямыми в пространстве положение сложнее, так как в пространстве приходится различать два рода мнимых прямых. Эта классификация связана с определением пар комплексно-сопряженных прямых. Прямой комплексно-сопряженной

по отношению к данной прямой, проходящей через две заданные точки y и z :

$$\rho x_x = \lambda_1 y_x + \lambda_2 z_x = \lambda_1 (y'_x + iy''_x) + \lambda_2 (z'_x + iz''_x) \quad (x=1, 2, 3, 4),$$

называется прямой, проходящей через две точки, являющиеся комплексно-сопряженными по отношению к точкам y и z :

$$\rho x_x = \lambda_1 \bar{y}_x + \lambda_2 \bar{z}_x = \lambda_1 (y'_x - iy''_x) + \lambda_2 (z'_x - iz''_x) \quad (x=1, 2, 3, 4).$$

Легко видеть, что тогда также и все прочие точки обеих прямых будут попарно комплексно-сопряженными. Можно определить комплексно-сопряженные прямые также двойственным образом, как оси комплексно-сопряженных пучков плоскостей. Всякая действительная прямая сама себе комплексно сопряжена. Что касается мнимых прямых, то среди них следует различать два типа. Именно, всякая данная мнимая прямая имеет со своей комплексно-сопряженной прямой либо одну, либо ни одной общей точки. В первом случае мы будем называть прямую *слабомнимой*, так как она имеет одну действительную точку, во втором случае — *сильномнимой*; примером слабомнимой прямой является всякая мнимая прямая, проходящая через действительную точку. В качестве примера сильномнимой прямой мы приведем прямую, проходящую через две мнимые точки $1:i:0:0$ и $0:0:1:i$. В самом деле, эта прямая не может иметь ни одной действительной точки, потому что в противном случае прямая, проходящая через комплексно-сопряженные точки $1:-i:0:0$ и $0:0:1:-i$, также проходила бы через эту действительную точку и четыре мнимые точки, приведенные выше, лежали бы в одной плоскости, что невозможно, так как определитель составленный из их координат, отличен от нуля:

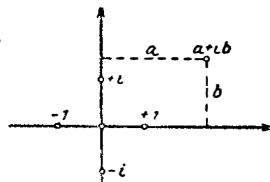
$$\begin{vmatrix} 1 & i & 0 & 0 \\ 1 & -i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & i \\ 0 & 0 & 1 & -i \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & i \\ 1 & -i \end{vmatrix}^2 = -4 \neq 0.$$

На основании предыдущего мы можем классифицировать прямые линии в пространстве по числу их действительных точек; так как прямая в пространстве является действительной, слабомнимой или сильномнимой в зависимости от того, имеет ли она ∞^1 , одну или ни одной действительной точки. В силу двойственности эти прямые принадлежат соответственно ∞^1 , одной или ни одной действительной плоскости. В пространстве имеется ∞^4 действительных, ∞^7 слабомнимых и ∞^8 сильномнимых прямых.

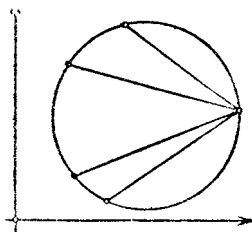
6. В пространстве через всякую мнимую точку проходит ∞^4 мнимых и ∞^1 действительных плоскостей; далее, через всякую мнимую точку проходит ∞^4 мнимых прямых, но только одна единственная действительная прямая; эта прямая является

линией пересечения ∞^1 действительных плоскостей и, с другой стороны, линией, соединяющей рассматриваемую мнимую точку с соответствующей ей комплексно-сопряженной точкой.

D. Наглядное изображение мнимых точек прямой линии на числовой плоскости и на числовой сфере. До сих пор мы рассматривали мнимые элементы только аналитически. Для случая прямой линии мнимым точкам можно дать также наглядное истолкование следующим образом: мы определяем точки прямой линии с помощью аффинной координаты $x + yi$ и известным образом истолковываем это комплексное переменное на гауссовой числовой плоскости, изображая на одной из координатных осей значения x , а на другой — значения y (черт. 28). Таким путем мы получаем взаимно однозначное отображение всех действительных и мнимых точек прямой на действительные точки плоскости, так что мы можем наглядно истолковывать на гауссовой числовой плоскости всякий факт, касающийся мнимых точек прямой линии. Так, например, всякие четыре точки прямой определяют действительное или комплексное двойное отношение с помощью выражения, приведенного на стр. 53. Имеет место следующее предложение: *Двойное отношение четырех точек прямой тогда и только тогда является действительным, когда четыре соответствующие точки на гауссовой числовой плоскости лежат на одной окружности*; при этом прямая линия рассматривается здесь как специальный случай

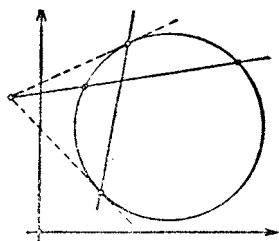


Черт. 28.



Черт. 29.

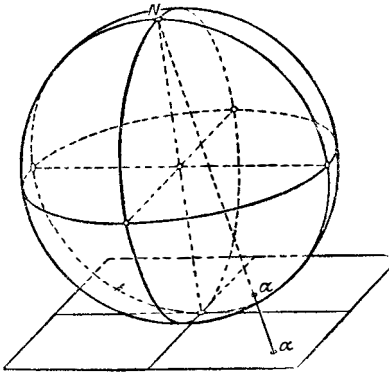
окружности. Если четыре точки лежат на одной окружности, то искомое двойное отношение равняется двойному отношению четырех лучей, соединяющих произвольную пятую точку окружности с этими четырьмя точками (черт. 29). Если в частности эти четыре точки находятся в гармоническом отношении, то прямая, соединяющая точки одной из пар, всегда проходит через полюс прямой, соединяющей точки другой пары (черт. 30). (О понятии полюса см. гл. II, § 1.)



Черт. 30.

Так как в области комплексных чисел существует только одно единственное бесконечно большое число, то нам приходится присоединять к гауссовой числовой плоскости только одну бесконечно удаленную точку, в то время как в случае проективной плоскости нам приходилось присоединять целую бесконечно удаленную прямую. Мы здесь еще раз подчеркнем, что

введение бесконечно удаленных элементов не является воспроизведением действительности, но является (в известных пределах) произвольным соглашением. Различие обеих трактовок обуславливается тем, что в проективной геометрии бесконечно удаленная область плоскости переходит при ранее рассмотренных нами проективных преобразованиях в прямую линию, в то время как в областях, в которых приходится иметь дело с комплексными числами, как, например, в теории функций, на первом плане стоят преобразования посредством обратных радиусов-векторов, отображающие бесконечно удаленную область плоскости



Черт. 31.

в одну точку. Чтобы наглядно представить рассмотренное положение вещей, вообразим себе сферу, касающуюся гауссовой числовой плоскости в начале координат, и спроектируем точки числовой плоскости посредством *стереографической проекции* на эту сферу (черт. 31). Вследствие этого каждой точке α числовой плоскости будет поставлена в соответствие определенная точка сферы, которая на черт. 31 также обозначена через α . В частности, бесконечно удаленной точке гауссовой числовой плоскости будет

соответствовать точка, именно северный полюс N нашей сферы. Если приходится иметь дело с вычислениями, то целесообразно радиус сферы взять равным $1/2$, потому что в этом случае окружность единичного радиуса отобразится как раз на экватор сферы. В силу предыдущих соображений мы получили взаимно однозначное отображение всех действительных и мнимых точек прямой на действительные точки сферы. На этой числовой сфере мы можем воспроизвести те же рассуждения (например о двойных отношениях), как и на гауссовой числовой плоскости.

Е. Антиколлинеации. Вследствие введения мнимых элементов мы можем теперь надлежащим образом обобщить все прежние рассуждения. Но для этого необходимы еще некоторые модификации. Так, например, теорема о том, что проективные преобразования являются наиболее общими преобразованиями, переводящими всякий основной образ опять же в основной образ такого же типа, не будет справедлива в комплексной области, потому что здесь этим свойством обладают также так называемые *антиколлинеации*:

$$x_\lambda = \sum_{\lambda} c_{\lambda\lambda} \bar{x}'_\lambda = \sum_{\lambda} c_{\lambda\lambda} (y'_\lambda - iz'_\lambda),$$

в которых x_λ являются линейными функциями не величин $x'_\lambda = y'_\lambda + iz'_\lambda$, но соответствующих им комплексно-сопряженных вели-

чин $x'_\lambda = y'_\lambda - iz'_\lambda$. Антиколлинеацию можно получить, сделав сначала обычное проективное преобразование, а затем заменив каждую точку ее комплексно-сопряженной точкой (в действительной области последнее преобразование является тождественным). Отсюда сразу получается, что антиколлинеации переводят всякий основной образ опять в основной образ такого же типа.

Г. Исторические замечания. Повидимому, впервые комплексные числа встречаются у Кардана (Cardano) при решении кубического уравнения¹⁾. В 1748 г. Эйлер находит известное соотношение: $e^{ix} = \cos x + i \sin x$ и выясняет основное значение комплексных чисел для теории функций. В начале XIX столетия устанавливается геометрическая интерпретация комплексных чисел на гауссовой числовой плоскости, благодаря чему с комплексных чисел снимается до тех пор присущая им мистическая окраска. Интерпретация на числовой сфере впервые встречается у Римана²⁾.

В геометрии мнимые элементы рассматривались впервые Повселе в 1822 г.³⁾. Но для их введения он не пользуется координатами, как это делаем теперь мы, а пользуется „принципом непрерывности“, плохо поддающимся логическому обоснованию (ср. стр. 21). Наглядное истолкование мнимых элементов было впервые дано Штаудтом в 1856 г.⁴⁾; это истолкование было обобщено позднее в одной из работ Клейна⁵⁾.

¹⁾ Ср. Klein, *Elementarmathematik vom höheren Standpunkte aus*, 3, изд., т. I, стр. 61 и сл. 1924.

²⁾ Neumann C., *Vorlesungen über Riemanns Theorie der Abelschen Integrale*, 1865. Ср. Klein, *Ges. Math. Abh.*, т. III, стр. 518.

³⁾ Poncelet, *Traité des propriétés projectives des figures*, 1822.

⁴⁾ Staудt, *Beiträge zur Geometrie der Lage*, первая тетрадь, Нюрнберг 1856.

⁵⁾ Klein, *Zur Interpretation der komplexen Elemente in der Geometrie*, „*Math. Ann.*“, т. 22 или *Ges. Abh.*, т. I, стр. 402.

ГЛАВА II

ОБРАЗЫ ВТОРОЙ СТЕПЕНИ

§ 1. Полярные преобразования относительно образов второго порядка и класса

А. Определение образов второго порядка и класса. Для построения неевклидовой геометрии теория образов второго порядка имеет основное значение. Эти геометрические образы определяются требованием, чтобы однородные координаты их точек удовлетворяли данному уравнению второй степени:

$$\sum_{\lambda} a_{\lambda\lambda} x_{\lambda} x_{\lambda} = 0 \quad (a_{\lambda\lambda} = a_{\lambda\lambda});$$

причем здесь λ пробегает независимо друг от друга все значения от 1 до $n + 1$, где n — размерность рассматриваемого многообразия. Эти уравнения имеют для $n = 1$ и $n = 2$ следующий вид:

$$a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2 = 0,$$

и, соответственно,

$$a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + a_{22}x_2^2 + 2a_{23}x_2x_3 + a_{33}x_3^2 = 0.$$

Для $n = 1$ образ второго порядка является парой точек; для $n = 2$ — кривой, которую обычно называют коническим сечением; для $n = 3$ — поверхностью. Коэффициенты $a_{\lambda\lambda}$ могут принимать любые значения, только они не должны все одновременно равняться нулю. Могущие здесь встретиться случаи вырождения мы ближе рассмотрим в § 3.

Наряду с образами второго порядка мы будем рассматривать также *кривые и поверхности второго класса*¹⁾ (ср. стр. 46 и 47):

$$\sum_{\lambda} a_{\lambda\lambda} u_{\lambda} u_{\lambda} = 0 \quad (a_{\lambda\lambda} = a_{\lambda\lambda}).$$

Так как мы допускаем для коэффициентов $a_{\lambda\lambda}$ все системы значений за единственным исключением системы $0, 0, \dots, 0$, то и здесь также могут встретиться многочисленные случаи вырождения. Образы второго класса мы рассмотрим ближе в § 2 и § 4; в частности, мы увидим там, что, вообще говоря, касательные к

¹⁾ На прямой образы второго порядка и второго класса совпадают.

кривой второго порядка образуют кривую второго класса и касательные плоскости к поверхности второго порядка образуют поверхность второго класса.

Если все отношения коэффициентов $a_{x\lambda}$ или $a_{\lambda x}$ имеют действительные значения, то мы говорим о действительном образе второго порядка или соответственно второго класса; если же, напротив, эти отношения хотя бы частично комплексны, то мы называем соответствующий образ мнимым.

В. Полярное преобразование относительно данного образа второго порядка. Пересечем кривую или поверхность второго порядка

$$\sum_{x,\lambda} a_{x\lambda} x_x x_\lambda = 0$$

прямой линией

$$\rho x_i = x'_i + \mu y'_i,$$

проходящей через две данные точки x' и y' . Точки пересечения определяются уравнением:

$$\sum_{x,\lambda} a_{x\lambda} (x'_x + \mu y'_x) (x'_\lambda + \mu y'_\lambda) = 0$$

или

$$\sum a_{x\lambda} x'_x x'_\lambda + \mu \sum a_{x\lambda} (x'_x y'_\lambda + y'_x x'_\lambda) + \mu^2 \sum a_{x\lambda} y'_x y'_\lambda = 0.$$

Так как, далее,

$$\sum a_{x\lambda} (x'_x y'_\lambda + y'_x x'_\lambda) = 2 \sum a_{x\lambda} x'_x y'_\lambda,$$

причем в обоих случаях x и λ пробегают все значения от 1 до $n + 1$, то мы получаем окончательно:

$$\sum a_{x\lambda} x'_x x'_\lambda + 2\mu \sum a_{x\lambda} x'_x y'_\lambda + \mu^2 \sum a_{x\lambda} y'_x y'_\lambda = 0.$$

Это уравнение, квадратное относительно μ , определяет два значения μ_1 и μ_2 , которые после подстановки в параметрическое уравнение прямой дают координаты искомых точек пересечения.

Особый интерес представляет тот случай, когда две пары точек с координатами:

$$x_i, y_i, x'_i + \mu_1 y'_i, x'_i + \mu_2 y'_i$$

находятся в гармоническом отношении. Так как двойное отношение этих четырех точек, взятых в указанном порядке, равняется $\mu_1 : \mu_2$, то в рассматриваемом случае $\mu_1 : \mu_2 = -1$, откуда $\mu_1 = -\mu_2$. Но это может иметь место тогда и только тогда, когда коэффициент при первой степени μ в квадратном уравнении, установленном для μ , обращается в нуль:

$$\sum a_{x\lambda} x'_x y'_\lambda = 0.$$

Следовательно, это уравнение является условием, которому должны удовлетворять координаты обеих точек x и y , если эти точки находятся в гармоническом отношении с точками пере-

сечения соединяющей их прямой и рассматриваемого конического сечения.

Будем теперь рассматривать y как данную неподвижную точку и построим на каждой прямой, проходящей через y , четвертую гармоническую к двум точкам пересечения с кривой или поверхностью и к самой точке y . Совокупность этих четвертых гармонических точек x определяется уравнением:

$$\sum a_{\lambda} x_{\lambda} y_{\lambda} = 0;$$

в этом уравнении a_{λ} и y_{λ} рассматриваются как постоянные, а x_{λ} — как переменные. Далее, это уравнение является линейным в переменных x_{λ} ; для случая пространства мы его можем написать, например, в следующем виде:

$$\sum_{\lambda} a_{1\lambda} y_{\lambda} \cdot x_1 + \sum_{\lambda} a_{2\lambda} y_{\lambda} \cdot x_2 + \sum_{\lambda} a_{3\lambda} y_{\lambda} \cdot x_3 + \sum_{\lambda} a_{4\lambda} y_{\lambda} \cdot x_4 = 0.$$

Вследствие этого четвертые гармонические точки x при неподвижной точке y образуют в случае конического сечения на плоскости прямую, а в случае поверхности второго порядка в пространстве — плоскость. Эта прямая линия называется *полярной точки y по отношению к данному коническому сечению*, а плоскость — *полярной плоскостью* (или также *полярной*) *точки y по отношению к данной поверхности второго порядка*; сама точка y называется соответствующим ей *полюсом*. Уравнение поляры можно получить непосредственно из уравнения соответствующего образа второго порядка. Так, например, для случая плоскости коническому сечению:

$$a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + 2a_{23}x_2x_3 = 0$$

соответствует полярное уравнение:

$$a_{11}x_1y_1 + a_{22}x_2y_2 + a_{33}x_3y_3 + a_{12}(x_1y_2 + x_2y_1) + \\ + a_{13}(x_1y_3 + x_3y_1) + a_{23}(x_2y_3 + x_3y_2) = 0.$$

Совершенно такой же закон образования имеет место и для высших размерностей. Мы можем изобразить полярные преобразования в легко обозримом виде, если будем пользоваться прямолинейными или соответственно плоскостными координатами поляр; потому что в силу приведенного выше уравнения $\sum a_{\lambda} x_{\lambda} y_{\lambda} = 0$, в котором x_{λ} являются текущими координатами, точке y ставится в соответствие поляр с координатами:

$$\rho u_{\lambda} = \sum_{\lambda} a_{\lambda} y_{\lambda}.$$

В предыдущих рассуждениях предполагалось, что точка y не выбрана так, что все координаты u_{λ} поляры обращаются в нуль.

В пространстве подобное положение вещей:

$$\sum a_{1\lambda} y_\lambda = \sum a_{2\lambda} y_\lambda = \sum a_{3\lambda} y_\lambda = \sum a_{4\lambda} y_\lambda = 0,$$

может случиться по теории линейных однородных уравнений лишь тогда, когда определитель:

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

рассматриваемого образа равен нулю; точно такая же закономерность имеет место и для других размерностей. Образ второго порядка, для которого определитель D равен нулю, мы будем называть *вырождающимся*. Сначала мы будем иметь дело исключительно с невырождающимися образами и лишь позднее перейдем к рассмотрению вырождающихся образов. В заключение мы можем сформулировать следующее предложение: *Относительно любой невырождающейся кривой (соответственно поверхности) второго порядка каждой точке плоскости (соответственно пространства) соответствует определенная полярная плоскость (соответственно полярная плоскость).*

С. Полярные преобразования относительно образов второго класса. Аналогичные рассуждения могут быть проведены двойственным образом для кривых и поверхностей второго класса:

$$\sum_{x,\lambda} \alpha_{x\lambda} u_x u_\lambda = 0.$$

Пересечем образ второго класса пучком прямых или соответственно плоскостей:

$$\rho u_i = u'_i + \mu v'_i.$$

Те прямые или плоскости, которые принадлежат одновременно и пучку и данному образу второго класса, определяются уравнением:

$$\sum_{x,\lambda} \alpha_{x\lambda} (u'_x + \mu v'_x) (u'_\lambda + \mu v'_\lambda) = 0$$

или

$$\sum_{x,\lambda} \alpha_{x\lambda} u'_x u'_\lambda + 2\mu \sum_{x,\lambda} \alpha_{x\lambda} u'_x v'_\lambda + \mu^2 \sum_{x,\lambda} \alpha_{x\lambda} v'_x v'_\lambda = 0.$$

Если мы, в частности, выберем u' и v' так, чтобы

$$\sum_{x,\lambda} \alpha_{x\lambda} u'_x v'_\lambda = 0,$$

то двойное отношение u' , v' и двух выделенных прямых кривой второго класса или плоскостей поверхности второго класса будет равняться -1 . Следовательно, если мы возьмем прямую или

соответственно плоскость v неподвижной, то координаты четвертых гармонических элементов u будут удовлетворять уравнению:

$$\sum \alpha_{\kappa\lambda} u_{\kappa} v_{\lambda} = 0;$$

например, в случае пространства оно может быть написано следующим образом:

$$\sum_{\lambda} \alpha_{1\lambda} v_{\lambda} \cdot u_1 + \sum_{\lambda} \alpha_{2\lambda} v_{\lambda} \cdot u_2 + \sum_{\lambda} \alpha_{3\lambda} v_{\lambda} \cdot u_3 + \sum_{\lambda} \alpha_{4\lambda} v_{\lambda} \cdot u_4 = 0.$$

В случае плоскости последняя сумма отсутствует. Это уравнение является линейным в переменных u_{κ} и, следовательно, определяет собой соответственно все прямые или плоскости, проходящие через некоторую определенную точку. Итак, каждой прямой или плоскости v ставится в соответствие относительно рассматриваемого образа второго класса некоторая точка с координатами:

$$\rho x_{\kappa} = \sum_{\lambda} \alpha_{\kappa\lambda} v_{\lambda},$$

которая называется *полюсом этой прямой или плоскости*; сама же прямая или плоскость называется соответствующей ей *полярной* или *полярной плоскостью* (или тоже полярной).

Также и здесь мы должны предполагать, если хотим, чтобы каждой прямой или плоскости соответствовал определенный полюс, что определитель данной кривой или поверхности второго класса не равен нулю или, другими словами, что не имеет места *случай вырождения*.

Так как мы можем рассматривать всякий невырождающийся образ второго порядка также и как образ второго класса (ср. § 2), то, переходя от точек к рассмотрению соответствующих касательных к этому образу, мы получаем для всякого такого образа два различных полярных преобразования. Но можно показать с помощью формул § 2, что оба эти полярные преобразования совпадают между собой.

Д. Основные теоремы о полярных преобразованиях. Теперь мы установим *некоторые предложения о полярных преобразованиях*. При этом мы ограничимся образами второго порядка; для полярных преобразований относительно образов второго класса имеют место двойственные предложения. Прежде всего имеем: если точка y лежит на самой кривой или поверхности:

$$\sum \alpha_{\kappa\lambda} y_{\kappa} y_{\lambda} = 0,$$

то уравнение соответствующей полярны:

$$\sum \alpha_{\kappa\lambda} x_{\kappa} y_{\lambda} = 0$$

необходимо удовлетворяется, если подставить вместо текущих координат x_{κ} величины y_{κ} . Следовательно, полярная точка кривой или соответственно полярная плоскость точки поверхности проходит через эту самую точку. Из формул стр. 65

следует, что такая полярка не пересекает кривую или поверхность, а касается ее¹⁾. Итак, *поляркой точки кривой или поверхности является соответственно касательная или касательная плоскость в этой точке.*

Далее, установим основное предложение о полярных преобразованиях: *Если точка y лежит на поляре точки x , то точка x лежит на поляре точки y* (черт. 32); потому что, в самом деле, если точка x лежит на поляре точки y :

$$\sum a_{\lambda\lambda} x_{\lambda} \bar{y}_{\lambda} = 0,$$

то имеем:

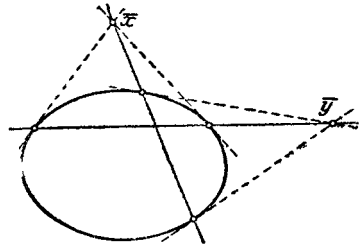
$$\sum a_{\lambda\lambda} \bar{x}_{\lambda} \bar{y}_{\lambda} = 0,$$

причем \bar{x}_{λ} и \bar{y}_{λ} являются постоянными; тогда точка \bar{y} должна также лежать на поляре точки x :

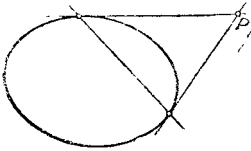
$$\sum a_{\lambda\lambda} x_{\lambda} \bar{x}_{\lambda} = 0,$$

Так как уравнение этой полярки удовлетворяется значениями $x_{\lambda} = \bar{y}_{\lambda}$.

Из этого предложения можно получить *простой способ построения полярки и полярных плоскостей.* Для этого в первом случае мы проводим из данного полюса P обе касательные к коническому сечению; тогда искомой поляркой будет прямая, соединяющая точки прикосновения (черт. 33). Это построение для рассматриваемого на чертеже эллипса может быть только тогда осуществлено в действительной области, когда полюс лежит вне конического сечения. Если же он лежит внутри конического сечения, то обе касательные будут комплексно-сопряженными и будут определять собой также комплексно-сопряженные точки прикосновения; но соединяющая их прямая является уже действительной и изображает искомую полярку. Для этого случая мы ниже дадим построение, также осуществимое в действительной области (см. сноску на стр. 70). В пространстве для построения полярной плоскости мы, аналогичным



Черт. 32.



Черт. 33.

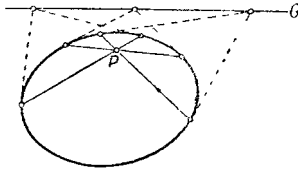
¹⁾ Именно, если x'_i — координаты точки на кривой и y'_i — координаты какой-нибудь другой точки на соответствующей поляре, то в уравнении:

$$\sum a_{\lambda\lambda} x'_{\lambda} x'_{\lambda} + 2\mu \sum a_{\lambda\lambda} x'_{\lambda} y'_{\lambda} + \mu^2 \sum a_{\lambda\lambda} y'_{\lambda} y'_{\lambda} = 0$$

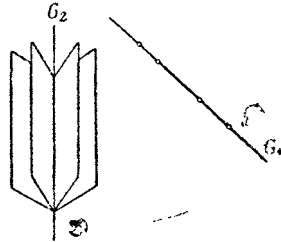
(стр. 67) первая сумма обращается в нуль, так как точка x лежит на самой кривой, а вторая сумма обращается в нуль, так как y' лежит на поляре точки x' . Приведенное уравнение, которое определяет точки пересечения прямой, соединяющей x' и y' , с нашей кривой, сводится, следовательно, к уравнению $\mu^2 = 0$, так что x' является единственной точкой пересечения обоих образов.

образом, проводим через данный полюс всевозможные касательные плоскости к поверхности второго порядка. Все точки прикосновения этих плоскостей находятся в одной плоскости, которая и является искомой полярной плоскостью.

Наконец, отметим следующее предложение: *Если мы на плоскости будем передвигать полюс по прямой линии G , то соответствующая полярная плоскость будет вращаться около некоторой точки P ; при этом P является полюсом прямой G ¹⁾* (черт. 34).



Черт. 34.



Черт. 35.

Если мы в пространстве будем передвигать полюс по прямой G_1 , то соответствующая полярная плоскость будет вращаться около некоторой другой прямой G_2 (черт. 35). В самом деле, точкам прямой:

$$p_i^2 = x_i + ky_i$$

соответствуют полярны:

$$p_{i\lambda} = \sum_{\lambda} a_{i\lambda} (x_{\lambda} + ky_{\lambda}) = \sum_{\lambda} a_{i\lambda} x_{\lambda} + k \sum_{\lambda} a_{i\lambda} y_{\lambda}.$$

Следовательно, мы получаем на плоскости все прямые пучка, определяемого точкой пересечения обеих прямых $\sum_{\lambda} a_{i\lambda} x_{\lambda} = 0$ и

$\sum_{\lambda} a_{i\lambda} y_{\lambda} = 0$; а в пространстве все плоскости пучка плоскостей,

определяемого линией пересечения обеих плоскостей $\sum_{\lambda} a_{i\lambda} x_{\lambda} = 0$

и $\sum_{\lambda} a_{i\lambda} y_{\lambda} = 0$. Читатель легко может доказать сам, что в слу-

чае плоскости точка P является полюсом прямой G . В случае пространства обе друг другу соответствующие прямые G_1 и G_2 называются *сопряженными полярными*. Если мы будем передвигать полюс не по прямой G_1 , а по прямой G_2 , то соответствующая плоскость будет вращаться около G_1 . Аналогичными рассуждениями мы можем установить: *Если мы в пространстве будем передвигать полюс по плоскости E , то соответствующая полярная плоскость будет вращаться около точки P ; при этом P является полюсом плоскости E .*

¹⁾ Из этого предложения можно получить действительное построение полярны, соответствующей точке, лежащей внутри конического сечения.

На плоскости в силу полярного преобразования относительно невырождающегося конического сечения каждой точке ставится в соответствие ее поляр, и каждой прямой — ее полюс. В пространстве в силу полярного преобразования относительно невырождающейся поверхности второго порядка каждой точке ставится в соответствие полярная плоскость, каждой прямой — сопряженная прямая и каждой плоскости — полюс. Аналогичные соотношения имеют место и для n -мерного многообразия.

Основные свойства поляр конического сечения (для случая точки, находящейся вне его) были известны уже Апполонию (Apollonius). Дальнейшее развитие теории поляр связано прежде всего с именами французских геометров Дезарга (Desargues, 1593—1661), Хира (De la Hire, 1640—1718) и Монжа (Monge, 1746—1818)¹⁾.

§ 2. Соответствие между невырождающимися образами второго порядка и второго класса

Невырождающуюся поверхность второго порядка:

$$\sum_{\lambda, \mu} a_{\lambda\mu} x_{\lambda} x_{\mu} = 0 \quad (D = |\ a_{\lambda\lambda} \ | \neq 0)$$

мы можем рассматривать как поверхность второго класса, если будем ее мыслить порожденной не ее точками, а ее касательными плоскостями. Естественно возникает задача о получении из уравнения данной поверхности второго порядка уравнения соответствующей поверхности второго класса. Возьмем какую-нибудь касательную плоскость u и обозначим координаты прикосновения через x_i . Тогда прежде всего должно удовлетворяться уравнение:

$$u_1 x_1 + u_2 x_2 + u_3 x_3 + u_4 x_4 = 0,$$

потому что точка прикосновения лежит на касательной плоскости. Далее, плоскость u является полярной плоскостью точки x , так как она касается поверхности в этой точке (см. стр. 68—69). Следовательно, имеют место соотношения (см. стр. 66):

$$\rho u_i = \sum_{\lambda} a_{i\lambda} x_{\lambda} \quad (i = 1, 2, 3, 4).$$

Из этих пяти уравнений исключим четыре величины ρ, x_1, x_2, x_3, x_4 . Для этого напомним наши уравнения в следующем виде:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4 - u_1\rho = 0,$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + a_{24}x_4 - u_2\rho = 0,$$

$$a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + a_{34}x_4 - u_3\rho = 0,$$

$$a_{41}x_1 + a_{42}x_2 + a_{43}x_3 + a_{44}x_4 - u_4\rho = 0,$$

$$u_1x_1 + u_2x_2 + u_3x_3 + u_4x_4 = 0.$$

¹⁾ Cp. K ö t t e r, Die Entwicklung der synthetischen Geometrie, Jahresber. d. D. M. V., т. 5, стр. 45, 1901.

Эти уравнения являются линейными и однородными относительно x_1, x_2, x_3, x_4, ρ , и потому только тогда имеют решения, отличные от тривиального $0, 0:0:0:0$, когда определитель системы равняется нулю:

$$D_1 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & u_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & u_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & u_3 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & u_4 \\ u_1 & u_2 & u_3 & u_4 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Этот определитель мы будем называть *окаймленным с помощью u_i определителем из коэффициентов $a_{\lambda\lambda}$* . Если мы его развернем по переменным u_i , то получим:

$$D_1 = A_{11}u_1^2 + A_{12}u_1u_2 + A_{13}u_1u_3 + A_{14}u_1u_4 + \\ + A_{41}u_4u_1 + A_{42}u_4u_2 + A_{43}u_4u_3 + A_{44}u_4^2 = \sum_{\lambda\lambda} A_{\lambda\lambda}u_\lambda u_\lambda;$$

при этом $A_{\lambda\lambda}$ обозначают взятые с надлежащими знаками миноры элементов $a_{\lambda\lambda}$ в определителе D из коэффициентов $a_{\lambda\lambda}$. Полученное уравнение является условием, которому должны удовлетворять координаты u_i плоскости, если эта плоскость касается данной поверхности $\sum_{\lambda,\lambda} a_{\lambda\lambda} x_\lambda x_\lambda = 0$. Придавая u_i всевозможные значения, удовлетворяющие этому уравнению, мы получим совокупность всех касательных плоскостей. Следовательно, уравнение $D_1=0$ является *искмым уравнением поверхности второго класса*. Итак, действительно, данной невырождающейся поверхности второго порядка соответствует поверхность именно второго же класса¹⁾. По известному предложению теории определителей²⁾ (для определителей n -го порядка) определитель, составленный из миноров $A_{\lambda\lambda}$, равняется $(n-1)$ -й степени исходного определителя; следовательно:

$$\begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & A_{14} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ A_{41} & A_{42} & A_{43} & A_{44} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}^3$$

Отсюда вытекает, что если данная поверхность второго порядка не является вырождающейся, то также и соответствующая поверхность второго класса не будет вырождаться³⁾.

Такие же рассуждения могут быть проведены с надлежащими видоизменениями и для плоскости. Окаймленный опре-

¹⁾ Для поверхностей более высокого порядка подобное совпадение между порядком и классом, вообще говоря, уже не имеет места.

²⁾ См., например, Kowalewsky, Einführung in die Determinantentheorie, 2. Aufl., Лейпциг 1925. (См. также Ф. В. Каган, Основания теории определителей, стр 191, Одесса 1922. *Ред.*)

³⁾ Это предложение вытекает из доказываемой на стр. 87 теоремы без применения указанной теоремы об определителях.

делитель, обращение в нуль которого даст уравнение соответствующей кривой второго класса, в этом случае имеет вид:

$$D_1 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & u_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & u_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & u_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 & 0 \end{vmatrix} = \sum_{x,\lambda} A_{x\lambda} u_x u_\lambda = 0.$$

Аналогично этому всякая невырождающаяся поверхность второго класса:

$$\sum_{x,\lambda} a_{x\lambda} u_x u_\lambda = 0 \quad (\Delta = |a_{x\lambda}| \neq 0)$$

двойственным образом определяет собой соответствующую поверхность второго порядка. Пусть x является точкой поверхности второго порядка; она лежит в некоторой плоскости u поверхности второго класса. Тогда прежде всего должно удовлетворяться уравнение:

$$u_1 x_1 + u_2 x_2 + u_3 x_3 + u_4 x_4 = 0,$$

потому что плоскость u содержит точку x . Далее, точка x является полюсом плоскости u , так как она лежит на поверхности второго порядка. Следовательно, имеют место соотношения (см. стр. 68):

$$\rho x_i = \sum_{\lambda} a_{i\lambda} u_\lambda \quad (i=1, 2, 3, 4).$$

Из этих пяти уравнений исключим четыре величины ρ, u_1, u_2, u_3, u_4 ; так же как и на стр. 71 мы получим:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & x_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & x_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & x_3 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & x_4 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Этот определитель мы будем называть *окаймленным с помощью x_i определителем* из $a_{x\lambda}$. Мы его можем представить в следующем виде:

$$\Delta_1 = \sum_{x,\lambda} \bar{A}_{x\lambda} x_x x_\lambda,$$

причем $\bar{A}_{x\lambda}$ обозначают взятые с надлежащими знаками миноры элементов $a_{x\lambda}$ в определителе Δ из коэффициентов $a_{x\lambda}$. Уравнение $\Delta_1 = 0$ является *искомым уравнением поверхности второго порядка*.

Указанный способ окаймления определителя может быть применен два раза: первый раз для перехода от *невырождающейся* поверхности второго порядка к поверхности второго класса и второй — для перехода от полученной поверхности второго класса опять к соответствующей поверхности второго порядка. Геометрические соотношения, имеющиеся между поверхностями второго порядка и класса, внушают предположение, что мы при этом вернемся к исходной поверхности второго порядка; это

действительно имеет место, как мы аналитически докажем в § 4. Напротив, в случае *вырождающегося* образа положение вещей уже другое, как это показывает в случае пространства конус, а в случае плоскости пара действительных прямых (ср. схему в § 4).

Уравнение конического сечения в координатах прямой встречается впервые у Пюккера в его „Аналитико-геометрических исследованиях“, 1829 г. Само же понятие кривой некоторого класса было установлено уже в работах школы Монжа. В 1832 г. Пюккер и Гессе одновременно установили уравнение поверхности второго класса, соответствующей данной поверхности второго порядка.

§ 3. Классификация образов второго порядка

А. Классификация поверхностей второго порядка по рангам их определителей. До сих пор мы ограничивались рассмотрением лишь тех образов второго порядка:

$$\sum a_{\lambda\lambda} x_{\lambda} x_{\lambda} = 0,$$

у которых определитель D не равнялся нулю. Теперь же мы допустим для коэффициентов $a_{\lambda\lambda}$ любые *действительные или комплексные* значения за исключением системы значений $(0:0:\dots:0)$. Вследствие этого получается целый ряд новых возможностей, которыми мы сейчас и займемся. Мы будем рассматривать лишь случай пространства; перенесение наших рассуждений на случай любых размерностей не представляет никаких затруднений (ср. раздел D). По стр. 66 полярная плоскость точки y имеет в текущих координатах x_i уравнение:

$$x_1 \cdot \sum a_{1x} y_x + x_2 \cdot \sum a_{2x} y_x + x_3 \cdot \sum a_{3x} y_x + x_4 \cdot \sum a_{4x} y_x = 0.$$

Точки y , для которых соответствующая полярная плоскость является неопределенной, даются четырьмя уравнениями:

$$\sum a_{1x} y_x = 0, \quad \sum a_{2x} y_x = 0, \quad \sum a_{3x} y_x = 0, \quad \sum a_{4x} y_x = 0,$$

где $a_{\lambda\lambda}$ —данные постоянные, а y_x —искомые неизвестные. При решении этой системы надо различать, согласно теории линейных однородных уравнений, в зависимости от свойств определителя

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix},$$

следующие пять случаев:

1. Определитель D не равен нулю. В этом случае *вообще не существует ни одной точки*, координаты которой удовлетворяли бы нашим четырем уравнениям.

2. Определитель D равен нулю, но существует по крайней мере один минор третьего порядка, отличный от нуля. В этом случае существует *одна единственная точка*, координаты которой удовлетворяют нашей системе.

3. Определитель D равен нулю, и все миноры третьего порядка также, но существует по крайней мере один минор второго порядка, отличный от нуля. В этом случае *существует целая прямая из точек*, координаты которых удовлетворяют нашей системе уравнений.

4. Определитель D равен нулю, и все миноры второго порядка также, но существует по крайней мере один минор первого порядка (т. е. один из элементов $a_{\lambda\lambda}$), отличный от нуля. В этом случае существует *целая плоскость из точек*, координаты которых удовлетворяют нашим уравнениям.

5. В пятом случае все миноры первого порядка равны нулю, т. е. все коэффициенты уравнения поверхности равны нулю; но этот случай мы исключаем, так как он не имеет никакого геометрического смысла.

В теории линейных уравнений наивысший порядок отличного от нуля минора называется *рангом* соответствующего определителя. Следовательно, в четырех интересующих нас случаях определитель рассматриваемой поверхности имеет ранг, соответственно равный 4, 3, 2 и 1. С помощью теории определителей можно доказать, что *при проективных преобразованиях ранг данной поверхности остается неизменным*. Это предложение можно усмотреть и непосредственно геометрически, так как характеризующиеся рангом различные вырождения полярного преобразования не могут переходить друг в друга при проективных преобразованиях.

Итак, ранг определителя является характеристическим числом рассматриваемого образа второго порядка, инвариантным при проективных преобразованиях.

Отмеченные точки, для которых полярная плоскость является неопределенной, лежат на самой рассматриваемой поверхности. В самом деле, уравнение поверхности можно написать в виде:

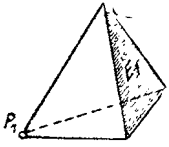
$$x_1 \cdot \sum a_{1\lambda} x_{1\lambda} + x_2 \cdot \sum a_{2\lambda} x_{2\lambda} + x_3 \cdot \sum a_{3\lambda} x_{3\lambda} + x_4 \cdot \sum a_{4\lambda} x_{4\lambda} = 0;$$

так как для отмеченных точек все четыре суммы обращаются в нуль, то это уравнение удовлетворяется координатами отмеченных точек. *Вместе с тем всякая точка, не лежащая на поверхности, всегда имеет определенную полярную плоскость.*

В. Отнесение поверхности второго порядка к полярному тетраэдру. Чтобы определить вид различного типа поверхностей с рангами определителей 4, 3, 2 и 1, мы прежде всего отнесем уравнение поверхности к координатному тетраэдру, у которого одна из вершин P_1 не лежит на поверхности, а противоположная координатная плоскость E_1 является полярной плоскостью точки

P_1 (которая, по-предыдущему, всегда существует) (черт. 36). Мы утверждаем, что при таком выборе системы координат коэффициенты:

$$a_{12} = a_{21}, \quad a_{13} = a_{31}, \quad a_{14} = a_{41}$$



Черт. 36.

в уравнении поверхности будут равняться нулю, так что координата x_1 будет входить только в один член, именно в $a_{11}x_1^2$. В самом деле, в рассматриваемой системе координат точка P_1 с координатами $1:0:0:0$ должна иметь полярную плоскость $x_1=0$. Но уравнение полярной плоскости точки P_1 в текущих координатах x_i имеет вид:

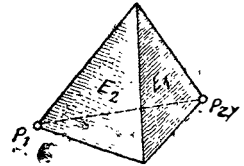
$$\sum a_{\lambda\lambda} x_\lambda y_\lambda = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4 = 0,$$

как это получается, если подставить в общее полярное уравнение координаты точки P_1 . Так как это уравнение должно иметь вид $x_1=0$, то коэффициенты a_{12} , a_{13} , a_{14} должны равняться нулю, что и требовалось доказать.

Если поверхность в рассматриваемой системе координат имеет уравнение:

$$a_{11}x_1^2 = 0 \quad (a_{11} \neq 0)$$

и, следовательно, является дважды взятой координатной плоскостью E_1 , то мы это уравнение больше не преобразуем. Если, напротив, в уравнении имеются еще другие члены, следовательно, оно имеет вид: $a_{11}x_1^2 + F(x_2, x_3, x_4) = 0$, то обязательно существует в плоскости E_1 точка P_2 , не принадлежащая поверхности, так как уравнение не всегда удовлетворяется при $x_1=0$. Мы вводим новый координатный тетраэдр, имеющий точки P_1 и P_2 своими вершинами, а соответствующие им полярные плоскости — противоположащими координатными плоскостями $x_1=0$ и $x_2=0$ (черт. 37.) Это всегда возможно, так как по теореме на стр. 70 полярная плоскость E_1 содержит точку P_2 , а полярная плоскость E_2 — точку P_1 . Посредством таких же рассуждений, как и выше, можно убедиться в том, что в полученной системе координат уравнение поверхности может содержать также и координату x_2 только в члене $a_{22}x_2^2$.



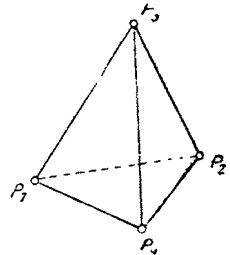
Черт. 37.

Если, в частности, уравнение принимает вид:

$$a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 = 0 \quad (a_{11} \neq 0, a_{22} \neq 0),$$

то поверхность является парой плоскостей, пересекающихся по координатному ребру $x_1=0, x_2=0$, т. е. по линии пересечения двух координатных плоскостей E_1 и E_2 . В этом случае мы уравнение больше не преобразуем. Если, напротив, в уравнении имеются еще и другие члены: $a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + F(x_3, x_4) = 0$, то на

координатном ребре $x_1=0, x_2=0$ обязательно существует точка P_3 , не принадлежащая поверхности. Мы вводим тогда новый координатный тетраэдр, имеющий точки P_1, P_2 и P_3 своими вершинами, а соответствующие полярные плоскости E_1, E_2 и E_3 противоположащими координатными плоскостями $x_1=0, x_2=0$ и $x_3=0$ (черт. 38). Из этого вытекает, что также и четвертая вершина P_4 координатного тетраэдра должна являться полюсом противоположащей координатной плоскости E_4 . В полученной таким образом системе координат уравнение поверхности содержит также и координаты x_3 и x_4 только в квадратах. Следовательно, получается либо уравнение:



Черт. 38.

$$a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 = 0 \quad (a_{11} \neq 0, a_{22} \neq 0, a_{33} \neq 0),$$

либо

$$a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 + a_{44}x_4^2 = 0 \quad (a_{11} \neq 0, a_{22} \neq 0, a_{33} \neq 0, a_{44} \neq 0).$$

В первом случае мы получаем конус с вершиной в точке $0:0:0:1$. В самом деле, поверхность имеет с плоскостью $x_4=0$ общие точки:

$$x_4 = 0, \quad a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 = 0.$$

Возьмем одну из этих точек $\bar{x}_1:\bar{x}_2:\bar{x}_3:0$, ее координаты, следовательно, удовлетворяют уравнению:

$$a_{11}\bar{x}_1^2 + a_{22}\bar{x}_2^2 + a_{33}\bar{x}_3^2 = 0.$$

Всякая точка, лежащая на прямой, соединяющей две точки $0:0:0:1$ и $\bar{x}_1:\bar{x}_2:\bar{x}_3:0$, имеет координаты $\lambda\bar{x}_1:\lambda\bar{x}_2:\lambda\bar{x}_3:1$. Но все эти значения координат удовлетворяют уравнению рассматриваемой поверхности, которая, следовательно, действительно является конусом. Второе из полученных уравнений определяет невырождающуюся поверхность второго порядка, так как соответствующий определитель отличен от нуля, а именно равняется $a_{11}a_{22}a_{33}a_{44} \neq 0$.

Определители рассмотренных четырех типов поверхностей имеют соответственно ранги 1, 2, 3 и 4:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} \end{vmatrix}.$$

Так как ранг определителя не меняется при проективном преобразовании и уравнение всякой поверхности второго порядка может быть приведено к одному из выше перечисленных видов, то мы получаем следующую важную теорему: *Уравнение произвольной поверхности второго порядка:*

$$\sum \bar{a}_{x\lambda} x_\lambda x_\lambda = 0$$

можно привести посредством введения надлежащей системы координат к одному и только одному из следующих четырех канонических видов в зависимости от ранга соответствующего определителя:

Ранг определителя	Канонический вид уравнения поверхности	
4	$a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 + a_{44}x_4^2 = 0$	$a_{xx} \neq 0$
3	$a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 = 0$	
2	$a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 = 0$	
1	$a_{11}x_1^2 = 0$	

Соответствующие поверхности в указанном порядке являются: невырождающейся поверхностью второго порядка, конусом второго порядка, парой плоскостей и дважды взятой плоскостью. Относительно этих поверхностей каждой точке пространства ставится в соответствие определенная полярная плоскость, за исключением: вершины конуса, точек линии пересечения пар плоскостей и, наконец, точек самой дважды взятой плоскости; для этих исключительных точек соответствующая полярная плоскость неопределенна.

Координатный тетраэдр, при отнесении к которому уравнение поверхности принимает канонический вид, называется, по характеру его построения, полярным тетраэдром, соответствующим данной поверхности.

Далее, четыре канонические формы можно преобразовать к сумме квадратов:

$$\begin{aligned} \bar{x}_1^2 + \bar{x}_2^2 + \bar{x}_3^2 + \bar{x}_4^2 &= 0, \\ \bar{x}_1^2 + \bar{x}_2^2 + \bar{x}_3^2 &= 0, \\ \bar{x}_1^2 + \bar{x}_2^2 &= 0, \\ \bar{x}_1^2 &= 0 \end{aligned}$$

посредством (вообще говоря, комплексного) проективного преобразования:

$$\sqrt{a_{11}}x_1 = \bar{x}_1, \quad \sqrt{a_{22}}x_2 = \bar{x}_2, \quad \sqrt{a_{33}}x_3 = \bar{x}_3, \quad \sqrt{a_{44}}x_4 = \bar{x}_4,$$

сводящегося к введению новой единичной точки.

Следовательно, две произвольные поверхности второго порядка, детерминанты которых имеют одинаковый ранг, всегда могут быть преобразованы друг в друга посредством проективных (вообще говоря, комплексных) преобразований; напротив, если определители имеют различный ранг, это невозможно. Итак, относительно комплексных проективных преобразований существует только четыре различных типа поверхностей второго порядка.

С. Дальнейшая классификация действительных поверхностей второго порядка. Мы сейчас уточним рассмотренную классификацию. При этом мы ограничимся только *действительными поверхностями*, $\sum a_{\lambda\lambda} x_\lambda x_\lambda = 0$, т. е. случаем, когда все $a_{\lambda\lambda}$ — действительные числа. Из предыдущих исследований следует, что уравнение такой поверхности можно всегда привести посредством *действительных* преобразований к каноническому виду, указанному в таблице на стр. 78. Напротив, вообще говоря, оказывается невозможным привести его посредством действительных преобразований к указанной далее сумме квадратов; но его легко можно преобразовать посредством этих преобразований к уравнениям следующего вида¹⁾:

$$\begin{aligned} \pm x_1^2 \pm x_2^2 \pm x_3^2 \pm x_4^2 &= 0, & \pm x_1^2 \pm x_2^2 &= 0, \\ \pm x_1^2 \pm x_2^2 \pm x_3^2 &= 0, & \pm x_1^2 &= 0. \end{aligned}$$

Посредством надлежащего введения новых переменных: $x_\lambda = x'_\lambda$, что сводится к перестановке индексов и умножению в случае нужды всех членов уравнения на -1 , мы можем свести эти уравнения к следующим восьми случаям:

$$\begin{aligned} x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 &= 0, & x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 &= 0, & x_1^2 + x_2^2 &= 0, & x_1^2 &= 0. \\ x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_4^2 &= 0, & x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 &= 0, & x_1^2 - x_2^2 &= 0, \\ x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 - x_4^2 &= 0, \end{aligned}$$

На стр. 82 мы докажем геометрически, что соответствующие поверхности не могут быть преобразованы одна в другую посредством действительных проективных преобразований. Следовательно, уравнение данной действительной поверхности второго порядка может быть преобразовано посредством действительных линейных подстановок в одно и только в одно из вышеперечисленных восьми уравнений.

Абсолютную величину разности между числом положительных и отрицательных членов назовем *сигнатурой* рассматриваемой поверхности. Например, в случаях:

$$\begin{aligned} x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 &= 0, \\ x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_4^2 &= 0, \\ x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 - x_4^2 &= 0 \end{aligned}$$

сигнатура равняется соответственно 4, 2 и 0. Так как поверхности с разными сигнатурами не могут быть преобразованы друг в друга посредством действительных проективных преобразований, то это число является инвариантом группы *действительных* проективных преобразований, точно так же как ранг определителя является инвариантом всех (и комплексных) проективных преобразований.

¹⁾ При этом могут встретиться всевозможные комбинации знаков.

Это положение вещей находит свое аналитическое выражение в законе инерции квадратичных форм ¹⁾. Этот закон утверждает, что две чисто квадратичные формы от n переменных:

$$F_1 = \pm x_1^2 \pm x_2^2 \pm \dots \pm x_n^2, \quad F_2 = \pm x'_1{}^2 \pm x'_2{}^2 \pm \dots \pm x'_n{}^2$$

тогда и только тогда могут быть преобразованы одна в другую посредством действительной линейной однородной подстановки $x_i = \sum_x c_{ix} x'_x$ с отличным от нуля определителем, когда в обеих формах совпадает число положительных (а, значит, также и отрицательных) членов. Поэтому всякая данная квадратичная форма $\sum a_{\lambda\lambda} x_\lambda x_\lambda$ от четырех переменных может быть преобразована посредством действительной линейной однородной подстановки в одну из следующих 14 форм:

Ранг=4	Ранг=3	Ранг=2	Ранг=1
$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2$	$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$	$x_1^2 + x_2^2$	x_1^2
$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_4^2$	$x_1^2 + x_2^2 - x_3^2$	$x_1^2 - x_2^2$	$-x_1^2$
$x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 - x_4^2$	$x_1^2 - x_2^2 - x_3^2$	$-x_1^2 - x_2^2$	
$x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 - x_4^2$	$-x_1^2 - x_2^2 - x_3^2$		
$-x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 - x_4^2$			

Невырождающаяся квадратичная форма, которая может быть преобразована в сумму квадратов со сплошь положительными или сплошь отрицательными знаками, является, соответственно, *положительно* или *отрицательно определенной*, т. е. она может принимать только положительные или только отрицательные значения, если переменные принимают действительные значения и не все одновременно обращаются в нуль. Прочие формы называются *неопределенными*. Если мы опять вернемся от квадратичных форм к квадратичным уравнениям, то некоторые из рассмотренных случаев совпадут между собой, как, например:

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 0 \quad \text{и} \quad -x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 - x_4^2 = 0,$$

так что из 14 случаев останется только восемь, рассмотренных ранее.

В следующей таблице мы приводим поверхности, соответствующие различным видам уравнения. В таблице приводятся также и дальнейшие подразделения уже с точки зрения аффинной геометрии, именно: принимается во внимание характер пересечения различных поверхностей с бесконечно удаленной плоскостью. Читатель может легко провести сам относящиеся сюда рассуждения. Названия различных типов поверхностей будут оправданы ниже.

¹⁾ Доказательство закона инерции имеется во многих учебниках; см., например, K o w a l e w s k y, Einführung in die Determinantentheorie, 2-е изд., Лейпциг 1925. Мы предпочитаем для интересующих нас здесь уравнений провести доказательство геометрически (ср. стр. 82 и 95).

Классификация действительных поверхностей второго порядка¹⁾

- I. Ранг определителя равен 4: *Собственные поверхности второго порядка.*
1. $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 0$. *Нулевые поверхности.*
 2. $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_4^2 = 0$. *Овальные поверхности.*
 - а) Эллипсоиды.
 - б) Эллиптические параболоиды.
 - в) Двуполостные гиперболоиды.
 3. $x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 - x_4^2 = 0$. *Кольцеобразные поверхности.*
 - а) Однополостные гиперболоиды.
 - б) Гиперболические параболоиды.
- II. Ранг определителя равен 3: *Конические поверхности второго порядка.*
1. $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0$. *Нулевые конусы.*
 - а) Нулевой конус.
 - б) Нулевой цилиндр.
 2. $x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 0$. *Обычные конусы.*
 - а) Конус.
 - б) Эллиптический цилиндр.
 - в) Параболический цилиндр.
 - г) Гиперболический цилиндр.
- III. Ранг определителя равен 2: *Пары плоскостей.*
1. $x_1^2 + x_2^2 = 0$. *Комплексно-сопряженные пары плоскостей.*
 - а) Пересекающиеся мнимые плоскости.
 - б) Параллельные мнимые плоскости.
 2. $x_1^2 - x_2^2 = 0$. *Действительные пары плоскостей.*
 - а) Пересекающиеся плоскости.
 - б) Параллельные плоскости.
 - в) Одна плоскость конечная, другая бесконечно удаленная, следовательно, не существующая с точки зрения аффинной геометрии.
- IV. Ранг определителя равен 1: *Дважды взятые плоскости.*
1. $x_1^2 = 0$.
 - а) Дважды взятая конечная плоскость.
 - б) Дважды взятая бесконечно удаленная плоскость; с точки зрения аффинной геометрии не существует.

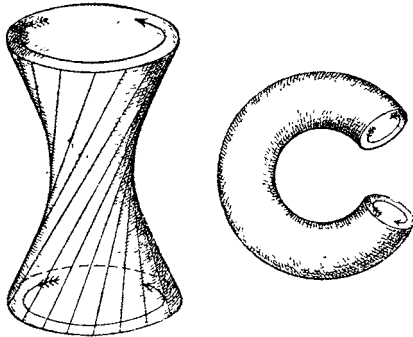
¹⁾ Эта классификация содержит три рубрики.

Римские цифры — классификация относительно группы *комплексных проективных преобразований*: инвариантное свойство поверхности — *ранг соответствующего определителя*.

Арабские цифры — дальнейшая классификация относительно группы *действительных проективных преобразований*: инвариантное свойство поверхности — *сигнатура*.

Латинские буквы — дальнейшая классификация относительно группы *аффинных преобразований*: инвариантное свойство поверхности — *характер пересечения поверхности с бесконечно удаленной плоскостью*.

В настоящей таблице, которая будет иметь основное значение для дальнейших рассуждений, мы различаем среди невырождающихся поверхностей второго порядка нулевые, овальные и кольцеобразные поверхности. Прилагательное „нулевая“ отмечает то обстоятельство, что подобная поверхность не содержит ни одного действительного куска; невырождающаяся нулевая поверхность не содержит вообще ни одной действительной точки, нулевой же конус — только одну, именно вершину, которая при указанном виде уравнения имеет координаты $0:0:0:1$ ¹⁾. Смысл термина *овальная поверхность* делается ясным сам собой, если мы подумаем, например, об эллипсоиде,



Черт. 39.

который принадлежит к этому типу. Наконец, термин *кольцеобразная поверхность* оправдывается тем, что подобная поверхность имеет такую же связность, как и кольцо (поверхность тора); это мы сейчас выясним на примере однополостного гиперboloида. Если мы разрежем однополостный гиперboloид вдоль бесконечно удаленной плоскости, приблизим оба возникших вследствие этого края на конечное расстояние и склеим

их опять (после надлежащего скручивания поверхности) таким же образом, как они примыкали друг к другу раньше, то мы получим как раз кольцо (поверхность тора) (черт. 39). Мы еще не привели доказательства того важного факта, что канонические уравнения, приведенные в таблице, не могут быть преобразованы друг в друга посредством действительных линейных подстановок.

Это утверждение геометрически непосредственно очевидно; именно: невырождающаяся нулевая поверхность не содержит ни одной действительной точки и потому не может быть переведена посредством действительных преобразований в овальные или кольцеобразные поверхности. Далее, утверждение верно и для двух последних типов поверхностей, так как на кольцеобразных поверхностях имеются действительные прямые (ср. § 5), а на овальных их нет. Аналогичным образом мы поступаем и в случае конусов и пар плоскостей, заметив, что нулевой конус имеет только одну действительную точку, а пара комплексно-сопряженных плоскостей содержит только одну единственную действительную прямую.

¹⁾ Термином „мнимые поверхности“ мы здесь не можем пользоваться, так как под ним мы понимаем (стр. 65) поверхности, уравнения которых не могут быть написаны в действительной форме.

D. Соответствующая классификация кривых и систем точек второго порядка. Совершенно таким же образом, как в пространстве, мы можем классифицировать образы второго порядка для случаев плоскости и прямой. Мы получаем в результате следующие две таблицы:

Классификация действительных кривых второго порядка

I. Ранг определителя равен 3: *Собственные кривые второго порядка.*

1. $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0$. *Нулевые конические сечения.*
 2. $x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 0$. *Овальные конические сечения.*

- a) Эллипсы.
 b) Параболы.
 c) Гиперболы.

II. Ранг определителя равен 2: *Пары прямых.*

1. $x_1^2 + x_2^2 = 0$. *Пары комплексно-сопряженных прямых.*

- a) Пересекающиеся мнимые прямые.
 b) Параллельные мнимые прямые.

2. $x_1^2 - x_2^2 = 0$. *Пары действительных прямых.*

- a) Пересекающиеся прямые.
 b) Параллельные прямые.
 c) Одна прямая конечная, другая бесконечно удаленная, следовательно, не существующая с аффинной точки зрения.

III. Ранг определителя равен 1: *Дважды взятые прямые.*

1. $x_1^2 = 0$.

- a) Дважды взятая конечная прямая.
 b) Дважды взятая бесконечно удаленная прямая; с аффинной точки зрения не существует.

Классификация действительных систем точек второго порядка

I. Ранг определителя равен 2: *Пары точек.*

1. $x_1^2 + x_2^2 = 0$. *Пары комплексно-сопряженных точек.*
 2. $x_1^2 - x_2^2 = 0$. *Пары действительных точек.*

- a) Обе точки конечны.
 b) Одна точка конечная, другая бесконечно удаленная, следовательно, с аффинной точки зрения не существует.

II. Ранг определителя равен 1: *Дважды взятые точки.*

1. $x_1^2 = 0$.

- a) Дважды взятая конечная точка.
 b) Дважды взятая бесконечно удаленная точка; с аффинной точки зрения не существует.

Е. Исторические замечания о классификации образов второго порядка. Теория образов второго порядка развивалась следующим путем. Для случая плоскости уравнения второго порядка рассматривались уже основателями метода координат. Соответствующие исследования в пространстве были произведены (в прямоугольных декартовых координатах) в 1748 г. Эйлером в его „Introductio in analysin infinitorum“. Значение теории определителей для классификации образов второго порядка было впервые выяснено Коши (Cauchy, 1829), Якоби (1833) и Гессе (1833); классификация поверхностей по их рангу была сделана Плюккером в 1832 г. В 1842 г. Плюккер относит поверхность второго порядка к полярному тетраэдру; само же понятие полярного тетраэдра имеется уже в „Трактате“ Понселе. В 1846 г. Плюккер ввел классификацию поверхностей второго порядка на основании закона инерции квадратичных форм, который в общем виде был установлен Сильвестром только в 1852 г.

§ 4. Классификация образов второго класса; связь с классификацией образов второго порядка

А. Классификация поверхностей второго класса. Совершенно таким же образом, как поверхности второго порядка, мы сейчас будем классифицировать поверхности второго класса:

$$\sum \alpha_{\lambda\lambda} u_{\lambda} u_{\lambda} = 0.$$

Нам приходится различать в зависимости от ранга соответствующего определителя четыре типа полярных преобразований. Если ранг определителя равняется 4, то не существует ни одной плоскости, у которой полюс являлся бы неопределенным; если ранг равняется 3, то существует одна единственная плоскость такого рода, если ранг равняется 2 — целый пучок плоскостей и, наконец, если ранг равняется 1 — целая связка плоскостей. Притом эти отмеченные плоскости принадлежат самой поверхности второго класса. Посредством отнесения поверхности к полярному тетраэдру мы можем привести уравнения четырех указанных типов поверхностей соответственно к следующим формам:

$$\begin{aligned} \alpha_{11}u_1^2 + \alpha_{22}u_2^2 + \alpha_{33}u_3^2 + \alpha_{44}u_4^2 &= 0 \\ \alpha_{11}u_1^2 + \alpha_{22}u_2^2 + \alpha_{33}u_3^2 &= 0 \\ \alpha_{11}u_1^2 + \alpha_{22}u_2^2 &= 0 \\ \alpha_{11}u_1^2 &= 0 \end{aligned} \quad (\alpha_{xx} \neq 0).$$

Первое из этих уравнений изображает невырождающуюся поверхность второго класса, так как соответствующий определитель $\Delta = \alpha_{11}\alpha_{22}\alpha_{33}\alpha_{44}$ отличен от нуля. Второе уравнение изображает совокупность плоскостей, охватывающих коническое сечение, лежащее в плоскости $u_1 : u_2 : u_3 : u_4 = 0 : 0 : 0 : 1$. Доказательство проводится двойственно к тому доказательству (стр. 77), в котором мы доказывали, что уравнение $\alpha_{11}x_1^2 + \alpha_{22}x_2^2 + \alpha_{33}x_3^2 = 0$

Классификация действительных поверхностей второго класса

- I. Ранг определителя равен 4: Собственные поверхности второго класса.
1. $u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 + u_4^2 = 0$. Нулевые поверхности второго класса.
 2. $u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 - u_4^2 = 0$. Овальные поверхности второго класса.
 - а) Эллипсоиды.
 - б) Эллиптические параболоиды.
 - с) Двуполостные гиперboloиды.
 3. $u_1^2 + u_2^2 - u_3^2 - u_4^2 = 0$. Кольцеобразные поверхности второго класса.
 - а) Однополостные гиперboloиды.
 - б) Гиперболические параболоиды.
- II. Ранг определителя равен 3: Кривые второго класса.
1. $u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 = 0$. Нулевые кривые второго класса.
 - а) Соответствующая кривая второго порядка лежит в конечной плоскости.
 - б) Соответствующая кривая второго порядка лежит в бесконечно удаленной плоскости.
 2. $u_1^2 + u_2^2 - u_3^2 = 0$. Овальные кривые второго класса.
 - а) Соответствующая кривая второго порядка лежит в бесконечно удаленной плоскости. Соответствующая кривая второго порядка лежит в конечной плоскости и является
 - б) эллипсом,
 - с) параболой,
 - д) гиперболой.
- III. Ранг определителя равен 2: Пары точек.
1. $u_1^2 + u_2^2 = 0$. Пары комплексно-сопряженных точек.
 - а) Обе точки конечны.
 - б) Обе точки лежат в бесконечно удаленной плоскости.
 2. $u_1^2 - u_2^2 = 0$. Пары действительных точек.
 - а) Обе точки конечны.
 - б) Обе точки лежат в бесконечно удаленной плоскости.
 - с) Одна точка конечная, другая бесконечно удаленная.
- IV. Ранг определителя равен 1: Дважды взятые точки.
1. $u_1^2 = 0$.
 - а) Дважды взятые конечные точки.
 - б) Дважды взятые бесконечно удаленные точки.

Эта таблица построена совершенно так же, как и таблица для действительных поверхностей второго порядка на стр. 81. Мы имеем и здесь три рубрики, которые дают классификацию относительно комплексных проективных, действительных проективных и, наконец, аффинных преобразований. В обеих таблицах число различных возможных случаев всюду одинаково.

В. Соотношения между различными типами поверхностей второго порядка и класса. В приведенной таблице содержится утверждение, что нулевые, овальные и кольцеобразные поверхности, рассмотренные как образы второго класса, имеют ту же сигнатуру, что и соответствующие образы второго порядка. Докажем это; в самом деле, поверхности второго класса:

$$\alpha_{11}u_1^2 + \alpha_{22}u_2^2 + \alpha_{33}u_3^2 + \alpha_{44}u_4^2 = 0$$

по стр. 73 соответствует поверхность второго порядка:

$$\begin{vmatrix} \alpha_{11} & 0 & 0 & 0 & x_1 \\ 0 & \alpha_{22} & 0 & 0 & x_2 \\ 0 & 0 & \alpha_{33} & 0 & x_3 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha_{44} & x_4 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & 0 \end{vmatrix} = \alpha_{22}\alpha_{33}\alpha_{44}x_1^2 + \alpha_{11}\alpha_{33}\alpha_{44}x_2^2 + \\ + \alpha_{11}\alpha_{22}\alpha_{44}x_3^2 + \alpha_{11}\alpha_{22}\alpha_{33}x_4^2 = 0.$$

Так как мы сейчас рассматриваем невырождающиеся поверхности (следовательно, коэффициенты α_{11} , α_{22} , α_{33} , α_{44} отличны от нуля), то мы можем предыдущее уравнение разделить почленно на произведение $\alpha_{11}\alpha_{22}\alpha_{33}\alpha_{44}$:

$$\frac{x_1^2}{\alpha_{11}} + \frac{x_2^2}{\alpha_{22}} + \frac{x_3^2}{\alpha_{33}} + \frac{x_4^2}{\alpha_{44}} = 0.$$

Из этого уравнения непосредственно следует, что, например, поверхности второго класса $u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 - u_4^2 = 0$ соответствует овальная поверхность второго порядка и т. д., что и требовалось доказать. Если мы от предыдущего уравнения поверхности второго порядка опять перейдем к уравнению поверхности второго класса, то мы получим:

$$\begin{vmatrix} \alpha_{22}\alpha_{33}\alpha_{44} & 0 & 0 & 0 & u_1 \\ 0 & \alpha_{11}\alpha_{33}\alpha_{44} & 0 & 0 & u_2 \\ 0 & 0 & \alpha_{11}\alpha_{22}\alpha_{44} & 0 & u_3 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha_{11}\alpha_{22}\alpha_{33} & u_4 \\ u_1 & u_2 & u_3 & u_4 & 0 \end{vmatrix} = \alpha_{11}^2\alpha_{22}^2\alpha_{33}^2\alpha_{44}^2 \{ \alpha_{11}u_1^2 + \alpha_{22}u_2^2 + \\ + \alpha_{33}u_3^2 + \alpha_{44}u_4^2 \} = 0,$$

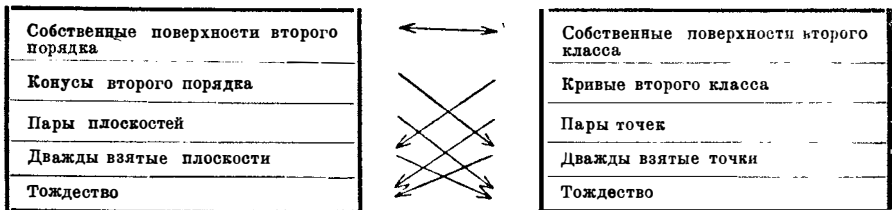
т. е. то самое уравнение, из которого мы исходили. Этим мы одновременно доказали предложение, сформулированное на стр. 74.

Для *вырождающихся* поверхностей второго порядка и класса закон соответствия не так прост. Из установленного выше уравнения следует, что кривым второго класса (для случая $\alpha_{44} = 0$) соответствует в качестве точечного образа дважды взятая плоскость $x_4^2 = 0$; эта плоскость является как раз той, в которой лежит соответствующее коническое сечение (рассматриваемое как точечный образ). Для пар точек и для дважды взятых

точек получается аналогичным образом тождество $0=0$; следовательно, в этих случаях соответствующий точечный образ остается неопределенным.

Если, с другой стороны, мы будем исходить из поверхностей второго порядка, то мы получим, что конусу соответствует дважды взятая точка $u_2^2=0$, изображающая вершину конуса. Мы хотим особенно подчеркнуть, что конусу соответствует не совокупность его касательных плоскостей, но совокупность всех плоскостей, проходящих через его вершину (ср. стр. 103). Для пар плоскостей и дважды взятых плоскостей в качестве уравнения поверхности второго класса также получается тождество $0=0$.

Эти соотношения можно иллюстрировать следующей схемой:



Следовательно, между вырождающимися поверхностями второго порядка и второго класса уже нет взаимно однозначного соответствия. Поверхность второго класса, соответствующая данной поверхности второго порядка, уже не приводит опять к исходной поверхности второго порядка, но приводит к тождеству. Это несовершенство будет устранено на стр. 100 и 107 путем введения новой точки зрения.

С. Соответствующие исследования для случая плоскости. Классификация образов второго порядка для случая других размерностей производится совершенно так же. Мы приведем еще таблицу для кривых второго класса на плоскости. (На прямой линии нет различия между образами второго порядка и класса.)

Классификация действительных кривых второго класса

I. Ранг определителя равен 3: *Собственные кривые второго класса.*

1. $u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 = 0$.

Нулевые кривые второго класса.

2. $u_1^2 + u_2^2 - u_3^2 = 0$.

Овальные кривые второго класса.

- a) Эллипсы.
- b) Параболы.
- c) Гиперболы.

II. Ранг определителя равен 2: *Пары точек.*

1. $u_1^2 + u_2^2 = 0$.

Пары комплексно-сопряженных точек

a) Обе точки конечны.

b) Обе точки лежат на бесконечно удаленной прямой.

2. $u_1^2 - u_2^2 = 0$.

Пары действительных точек.

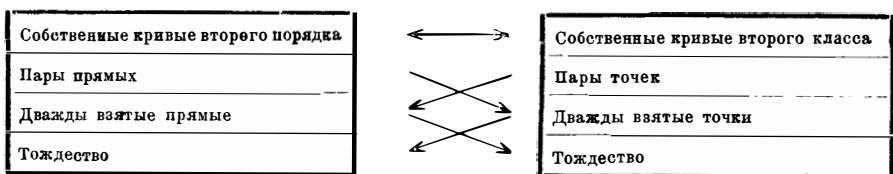
- a) Обе точки конечны.
- b) Обе точки лежат на бесконечно удаленной прямой.
- c) Одна точка конечная, другая бесконечно удаленная.

III. Ранг определителя равен 1: *Дважды взятые точки.*

1. $u_1^2 = 0$.

- a) Дважды взятая конечная точка.
- b) Дважды взятая бесконечно удаленная точка.

Соответствие между кривыми второго порядка и второго класса изображается следующей схемой:



§ 5. Прямые линии на невырождающихся поверхностях второго порядка

На поверхностях второго порядка имеются действительные и мнимые прямые, с теорией которых нам нужно познакомиться для дальнейшего. Начнем с кольцеобразных поверхностей, на которых, как это уже должно быть известно из аналитической геометрии, имеются два семейства действительных прямых. Уравнение кольцеобразной поверхности, будучи отнесено к надлежащему действительному полярному тетраэдру, имеет вид:

$$x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 - x_4^2 = 0.$$

Это уравнение мы можем написать также в виде:

$$(x_1 + x_3)(x_1 - x_3) + (x_2 + x_4)(x_2 - x_4) = 0.$$

Введем теперь новый действительный координатный тетраэдр посредством подстановки:

$$\begin{aligned} \rho y_1 &= x_1 + x_3, & \rho y_2 &= x_2 + x_4, \\ \rho y_3 &= x_1 - x_3, & \rho y_4 &= -x_2 + x_4, \end{aligned} \quad D = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -4;$$

в новой системе координат уравнение поверхности примет следующий простой вид:

$$y_1 y_3 - y_2 y_4 = 0.$$

Такой координатный тетраэдр мы будем называть *касательным тетраэдром* данной поверхности. Прежде всего отметим, что четыре его ребра, именно:

$$P_3P_4 : \begin{cases} y_1=0, \\ y_2=0, \end{cases} \quad P_2P_3 : \begin{cases} y_1=0, \\ y_4=0, \end{cases} \quad P_1P_4 : \begin{cases} y_2=0, \\ y_3=0, \end{cases} \quad P_1P_2 : \begin{cases} y_3=0, \\ y_4=0, \end{cases}$$

принадлежат поверхности, так как уравнение поверхности удовлетворяется указанными значениями. (Эти ребра на черт. 41 изображены более толстыми линиями.) Далее, его вершины являются полюсами его граней; именно: уравнение полярной плоскости точки y в текущих координатах ξ_x (относящихся к касательному тетраэдру) имеет теперь вид:

$$y_3 \cdot \xi_1 - y_4 \cdot \xi_2 + y_1 \cdot \xi_3 - y_2 \cdot \xi_4 = 0,$$

и отсюда вытекает, что, например, точке $y_1:y_2:y_3:y_4=1:0:0:0$ соответствует полярная плоскость $\xi_3=0$ и т. д. Так как вершины тетраэдра лежат на самой рассматриваемой поверхности, то его грани касаются ее, и притом грань $P_2P_3P_4$ — в точке P_3 , грань $P_1P_3P_4$ — в P_4 , грань $P_1P_2P_4$ — в P_1 и грань $P_1P_2P_3$ — в P_2 . Отсюда вытекает, далее, что ребра P_1P_3 и P_2P_4 являются полярно сопряженными относительно рассматриваемой поверхности (черт. 41).

Положив

$$y_1 = \lambda y_4, \quad \lambda y_3 = y_2,$$

мы удовлетворим уравнению поверхности, каково бы ни было значение λ . При фиксированном λ первое уравнение изображает плоскость, проходящую через линию пересечения плоскостей $y_1=0$ и $y_4=0$, т. е. через ребро P_2P_3 . Аналогичным образом второе уравнение изображает плоскость, проходящую через ребро P_1P_4 . Обе эти плоскости пересекаются по прямой, имеющей общую точку как с ребром P_2P_3 , так и с ребром P_1P_4 . Если мы заставим λ пробегать все действительные значения от $-\infty$ до $+\infty$, то мы получим целое семейство действительных прямых¹⁾, из которых каждая принадлежит нашей поверхности и пересекает оба ребра P_2P_3 и P_1P_4 (черт. 42). Если мы придадим λ комплексное значение, то получим мнимую прямую, обладающую такими же свойствами.

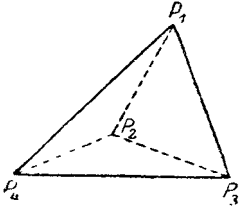
Точно так же можно удовлетворить уравнению нашей поверхности, положив:

$$y_1 = \mu y_2, \quad \mu y_3 = y_4.$$

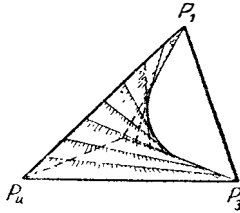
Эта система уравнений дает нам второе семейство прямых, из которых каждая принадлежит поверхности и пересекает ребра P_3P_4 и P_1P_2 (черт. 43). Из четырех ребер тетраэдра,

¹⁾ Эти прямые, лежащие на поверхности второго порядка, называются также *образующими* этой поверхности.

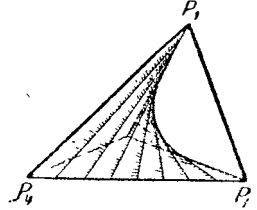
лежащих на поверхности, два, именно P_1P_2 и P_3P_4 , принадлежат первому семейству прямых, а два — P_1P_4 и P_2P_3 — второму семейству. Этими двумя семействами прямых исчерпываются все прямые, лежащие на кольцеобразной поверхности, так как легко показать, что поверхность должна вырождаться в пару плоскостей, если на ней имеются еще другие прямые. Оба эти семей-



Черт. 41.

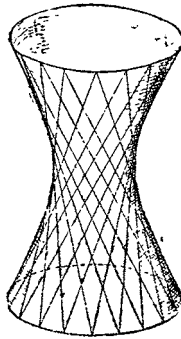


Черт. 42.

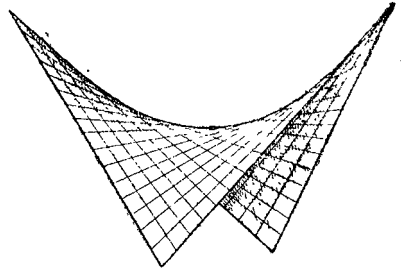


Черт. 43.

ства обладают тем свойством, что всякие две прямые, принадлежащие одному семейству, не пересекаются, в то время как, наоборот, всякая прямая первого семейства пересекает всякую прямую второго семейства. Через каждую точку поверхности проходит по одной прямой из каждого семейства; для действительных точек обе эти прямые действительные, для мнимых точек — мнимые; в обоих случаях дело идет о паре прямых, по которым касательная плоскость в рассматриваемой точке поверхности пересекается с самой поверхностью. Доказательство этих предположений известно



Черт. 44.



Черт. 45.

из элементов аналитической геометрии в пространстве. Все эти факты наглядно изображены на черт. 44 (однополостный гиперболоид) и черт. 45 (гиперболический параболоид).

На овальных и нулевых поверхностях точно так же имеются два семейства прямых, обладающих теми же свойствами, что и семейства прямых на кольцеобразных поверхностях; это непосредственно вытекает из того, что овальные и нулевые поверхности могут быть переведены в кольцеобразные посредством комплексных проективных преобразований. Разумеется, все эти прямые являются уже не действительными, а мнимыми. Чтобы рассмотреть этот случай ближе, мы отнесем овальные и нуле-

вые поверхности к соответствующему действительному полярному тетраэдру:

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_4^2 = 0, \quad | \quad x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 0,$$

и напомним эти уравнения в форме:

$$\begin{array}{l|l} (x_1 + ix_3)(x_1 - ix_3) + & (x_1 + ix_3)(x_1 - ix_3) + \\ + (x_2 + ix_4)(x_2 - ix_4) = 0, & + (x_2 + ix_4)(x_2 - ix_4) = 0. \end{array}$$

Затем введем новый (уже частично мнимый) координатный тетраэдр посредством подстановки:

$$\begin{array}{l|l} \rho y_1 = x_1 + ix_3, & \rho y_1 = x_1 + ix_3, \\ \rho y_2 = x_2 + ix_4, & \rho y_2 = x_2 + ix_4, \\ \rho y_3 = x_1 - ix_3, & \rho y_3 = x_1 - ix_3, \\ \rho y_4 = -x_2 + ix_4, & \rho y_4 = -x_2 + ix_4, \end{array} \quad \begin{array}{l} D = -4i; \\ D = 4; \end{array}$$

тогда уравнения обоих типов поверхностей примут вид:

$$y_1 y_3 - y_2 y_4 = 0.$$

По этим уравнениям мы можем заключить, как и раньше, что соответствующие поверхности имеют два семейства прямых, обладающих известными свойствами. В частности, отметим особо, что на овальных поверхностях через каждую действительную точку проходят две комплексно-сопряженные прямые, получающиеся в результате пересечения поверхности соответствующей касательной плоскостью.

Чтобы сделать это более наглядным, рассмотрим ближе касательный тетраэдр, к которому мы после указанной подстановки отнесли овальные и нулевые поверхности. В случае овальных поверхностей касательный тетраэдр состоит из двух действительных плоскостей $y_2 = 0$ и $y_4 = 0$ и двух комплексно-сопряженных плоскостей $y_1 = 0$ и $y_3 = 0$. Вследствие этого два ребра $P_1 P_3$ и $P_2 P_4$, по которым пересекаются обе пары плоскостей, являются также действительными; эти ребра на основании стр. 90 полярно сопряжены относительно нашей поверхности. Далее, вершины P_2 и P_4 , в которых действительное ребро $P_2 P_4$ пересекает обе действительные плоскости, также являются действительными; обе эти точки лежат на самой поверхности и являются точками прикосновения обеих действительных плоскостей. Из этих рассуждений вытекает простое построение искомого тетраэдра. Мы берем на овальной поверхности две произвольные действительные точки P_2 и P_4 и проводим соответствующие действительные касательные плоскости $y_4 = 0$ и $y_2 = 0$ (черт. 46). Эти плоскости пересекаются по второму действительному ребру тетраэдра $P_1 P_3$. Чтобы получить также и

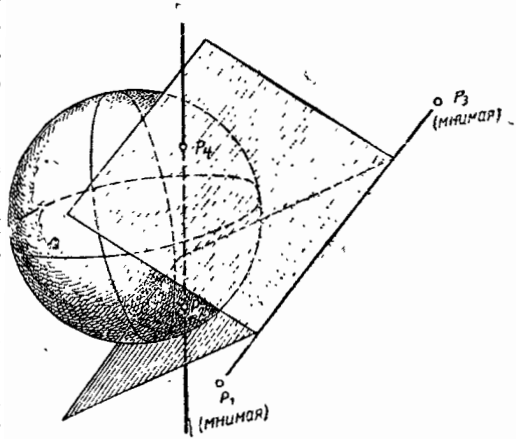
мнимые элементы тетраэдра, рассмотрим четырехсторонник из обеих пар комплексно-сопряженных прямых, лежащих на поверхности и выходящих соответственно из действительных точек P_2 и P_4 ; эти пары прямых являются линиями пересечения касательных плоскостей $y_4=0$ и $y_2=0$ с нашей овальной поверхностью. Полученные прямые пересекаются попарно в мнимых точках P_1 и P_3 , лежащих на втором действительном ребре тетраэдра.

Теперь искомый тетраэдр определен полностью.

В случае нулевых поверхностей все плоскости касательного тетраэдра являются мнимыми. Два ребра P_2P_4 и P_1P_3 , по которым пересекаются обе пары комплексно-сопряженных плоскостей, будут действительными; эти прямые полярно сопряжены относительно рассматриваемой поверхности. Напротив, остальные четыре ребра тетраэдра и все его вершины являются мнимыми, так как они лежат на самой нулевой поверхности.

Выясним теперь, какого типа прямые лежат на трех различных поверхностях второго порядка. На кольцеобразных поверхностях через каждую действительную точку проходят две действительные прямые. Из уравнений стр. 90 следует, что должны иметься еще мнимые прямые. Так как ни через одну точку не может проходить более двух прямых, то эти мнимые прямые не имеют ни одной действительной точки и, следовательно, являются сильномнимыми (см. стр. 60). Наконец, комплексно-сопряженные сильномнимые прямые всегда принадлежат к одному и тому же семейству, так как прямые различных семейств всегда имеют общую точку.

На овальных поверхностях через каждую из ∞^2 действительных точек проходят две комплексно-сопряженные, слабо-мнимые прямые. Ими и исчерпываются все прямые; следовательно, на овальных поверхностях нет ни действительных, ни сильно-мнимых прямых. (В случае кольцеобразных поверхностей ∞^2 действительных точек определяют только два однопараметрических семейства прямых, так что в этом случае должны существовать еще другие прямые.) Далее, в случае овальных поверхностей комплексно-сопряженные прямые принадлежат к различным семействам, так как две прямые из одного и того же семейства не пересекаются.



Черт. 46.

Наконец, на нулевых поверхностях имеются только сильно-мнимые прямые, так как на этих поверхностях нет ни одной действительной точки. Далее, по тем же причинам, как и в случае кольцеобразных поверхностей, комплексно-сопряженные прямые принадлежат к одному и тому же семейству.

Эти результаты, которые легко получить также путем аналитических выкладок, мы сведем вместе в следующей таблице:

	Действительные	Слабо-мнимые прямые	Сильно-мнимые прямые	Комплексно-сопряженные прямые лежат
Кольцеобразные поверхности	Имеются	—	Имеются	В одном и том же семействе
Овальные поверхности	—	Имеются	—	В разных семействах
Нулевые поверхности	—	—	Имеются	В одном и том же семействе

Из этой таблицы видно, что кольцеобразные поверхности имеют много общего с нулевыми, в то время как овальные поверхности стоят особняком. Причина этого заключается в том, что в уравнении овальной поверхности имеется нечетное число отрицательных членов, в то время как в случае остальных поверхностей их — четное число (именно: два или нуль). Различные типы мнимых прямых на поверхностях второго порядка были впервые рассмотрены Штаудтом в 1856 г.¹⁾

Аналогичные рассуждения могут быть проведены также и для многообразий высших размерностей²⁾. Если число измерений n четно: $n = 2q$, то основные образы³⁾ высшей размерности, лежащие на невырождающейся гиперповерхности второго порядка, имеют размерность $q - 1$; эти основные образы, которые могут быть и мнимыми, образуют только одно единственное семейство. Наглядным примером для этого случая может служить только $n = 2$, т. е. плоскость, где на конических сечениях лежит одно единственное семейство точек. Если же, напротив, n нечетно: $n = 2q + 1$, то основные образы высших размерностей указанного рода имеют размерность q ; но эти основные образы образуют уже два различных семейства, как это мы видели на примере поверхностей в трехмерном пространстве.

Если перейти к исследованиям в действительной области, то получается, что размерности действительных образов, лежащих на гиперповерхности, равняются целым числам, меньшим как числа положительных, так и числа отрицательных членов в соответствующем уравнении гиперповерхности $\Sigma \pm x_i^2 = 0$. Так, например, на нулевых поверхностях вообще не имеется никаких

¹⁾ „Beiträge zur Geometrie der Lage“.

²⁾ Ср. Enzyklopädie, III C 7; Segre, Mehrdimensionale Räume, стр. 851.

³⁾ Основные образы n -мерного многообразия были определены на стр. 41—42.

действительных основных образов; на овальных поверхностях имеются действительные точки и на кольцеобразных поверхностях — как действительные точки, так и прямые. Эта теорема является геометрическим эквивалентом закона инерции квадратичных форм, как это мы видели для случая пространства на стр. 82.

§ 6. Превращения образов второй степени при непрерывном изменении коэффициентов; классификация этих образов

Различные образы второго порядка не являются изолированными один от другого, но могут быть превращаемы друг в друга многочисленными способами. Так, например, кольцеобразную поверхность:

$$a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 - a_{33}x_3^2 - a_{44}x_4^2 = 0$$

(где все a являются положительными числами) можно превра-



Черт. 47.

тить посредством непрерывного изменения параметра a_{44} в конус:

$$a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 - a_{33}x_3^2 = 0,$$

а, затем, посредством дальнейшего непрерывного изменения, в овальную поверхность:

$$a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 - a_{33}x_3^2 + a_{44}x_4^2 = 0.$$

Далее, мы можем обратить в нуль два коэффициента, например a_{22} и a_{44} , и, таким образом, превратить кольцеобразную поверхность в пару действительных плоскостей:

$$a_{11}x_1^2 - a_{33}x_3^2 = 0,$$

а затем опять вернуться к кольцеобразным поверхностям. Аналогичным образом можно поступать с соответствующими уравнениями образов второго класса.

А. Превращения на прямой линии. В случае прямой линии возможно только одно единственное превращение, именно: превращение пары действительных точек:

$$a_{11}x_1^2 - a_{22}x_2^2 = 0$$

через дважды взятую точку

$$a_{11}x_1^2 = 0$$

в пару комплексно-сопряженных точек:

$$a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 = 0$$

(ср. таблицу на стр. 83). Это превращение иллюстрирует черт. 47, причем комплексно-сопряженные точки мы изображаем

на гауссовой числовой прямой. Мы получаем такое превращение, например, тогда, когда переводим секущую окружности через касательную в прямую, не имеющую с окружностью общих действительных точек.

В. Превращения на плоскости. На плоскости будем исходить из овального конического сечения:

$$a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 - a_{33}x_3^2 = 0,$$

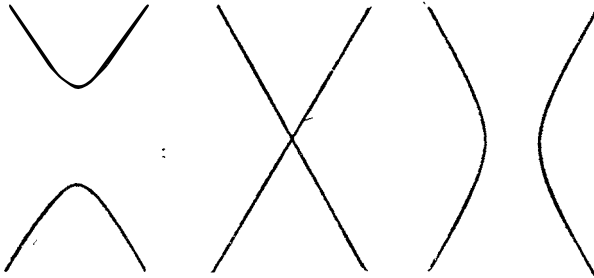
которое превратим в пару действительных прямых:

$$a_{11}x_1^2 - a_{33}x_3^2 = 0,$$

а затем опять в овальное коническое сечение:

$$a_{11}x_1^2 - a_{22}x_2^2 - a_{33}x_3^2 = 0.$$

Это превращение иллюстрировано черт. 48. Проще всего его получить посредством небольших параллельных сдвигов в обе



Черт. 48.

стороны касательной плоскости к однополостному гиперболоиду, который, как мы знаем, пересекается этой касательной плоскостью по паре действительных прямых. Прделаем, далее, опять то же превращение, рассматривая при этом кривую уже как кривую второго класса. На черт. 49 мы видим, как сначала действительные прямые овальной кривой второго класса переходят в часть (обозначенную на черт. буквой *A*) того пучка прямых, центром которого является точка пересечения пары прямых. Но овальные кривые второго класса имеют также и мнимые прямые; некоторые из этих прямых становятся при рассматриваемом предельном переходе действительными и составляют часть *B* пучка прямых, изображенную на нашем чертеже отдельно (справа) от части *A*. Остальные прямые остаются мнимыми и составляют мнимую часть *C* нашего пучка прямых. Следовательно, паре действительных прямых соответствует в качестве образа второго класса целый пучок прямых, проходящих через точку пересечения данной пары прямых. При дальнейшем изменении, как раз наоборот, прямые частей пучка *A* и *C* превращаются в мнимые прямые кривой второго класса, в то время как прямые линии части *B* переходят в ее действительные прямые.

Это рассмотрение отчетливо показывает те преимущества, которые приносит с собой применение мнимых элементов, потому что при ограничении только действительными элементами мы бы получили совершенно непонятный скачок от прямой части *A* к прямой части *B*.

Теперь рассмотрим превращение овального конического сечения:

$$a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 - a_{33}x_3^2 = 0,$$

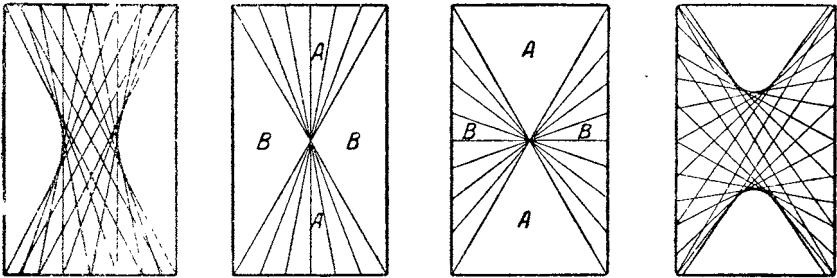
в пару комплексно-сопряженных прямых:

$$a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 = 0,$$

и, далее, в нулевое коническое сечение:

$$a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 = 0.$$

Это превращение происходит так, что овальное коническое сечение стягивается в точку (черт. 50); при этом мнимые части кривой



Черт. 49.

все более и более приближаются к паре определенных комплексно-сопряженных прямых, проходящих через эту действительную точку. Следовательно, при проведении предельного перехода овальная кривая превращается в эту пару прямых. Затем эти прямые превращаются в нулевую кривую, причем действительная точка исчезает. Рассматриваемое превращение можно получить также, переводя плоскость, пересекающую некоторую сферу, сначала в касательную плоскость, а затем в плоскость, не пересекающую сферы по действительной кривой; при этом касательная плоскость пересекает сферу по паре комплексно-сопряженных прямых, проходящих через точку прикосновения. Читатель может продумать это превращение сам для соответствующей кривой второго класса.



Черт. 50.

До сих пор мы рассматривали только превращения, получающиеся при непрерывном изменении коэффициентов *уравнения кривой второго порядка* (но притом мы рассматривали это превращение как для кривой второго порядка, так и для кривой второго класса). Теперь же мы рассмотрим соответствующие

превращения для *уравнений кривой второго класса*. Будем исходить прежде всего из овальной кривой второго класса:

$$\alpha_{11}u_1^2 + \alpha_{22}u_2^2 - \alpha_{33}u_3^2 = 0,$$

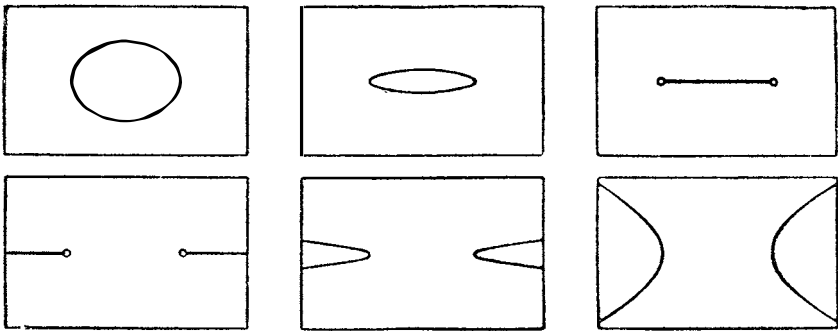
которую превратим в пару действительных точек:

$$\alpha_{11}u_1^2 - \alpha_{33}u_3^2 = 0,$$

а затем опять в овальную кривую:

$$\alpha_{11}u_1^2 - \alpha_{22}u_2^2 - \alpha_{33}u_3^2 = 0.$$

На черт. 51 это превращение изображается для соответствующей кривой второго порядка. Овальная кривая сначала делится все более и более сжатой, пока ее действительная часть не



Черт. 51.

сплющится в дважды взятый отрезок, который мы обозначим буквой *A*; остальные действительные точки этой прямой (часть *B*) являются предельным положением мнимых точек нашей кривой. Затем именно часть *B* превращается в действительную часть овальной кривой, в то время как часть *A* превращается в ее мнимую часть. Превращения соответствующей кривой второго класса изображены на черт. 52. Мы из него видим, как при предельном переходе кривая второго класса вырождается в два пучка прямых.

В заключение рассмотрим превращение овальной кривой второго класса:

$$\alpha_{11}u_1^2 + \alpha_{22}u_2^2 - \alpha_{33}u_3^2 = 0$$

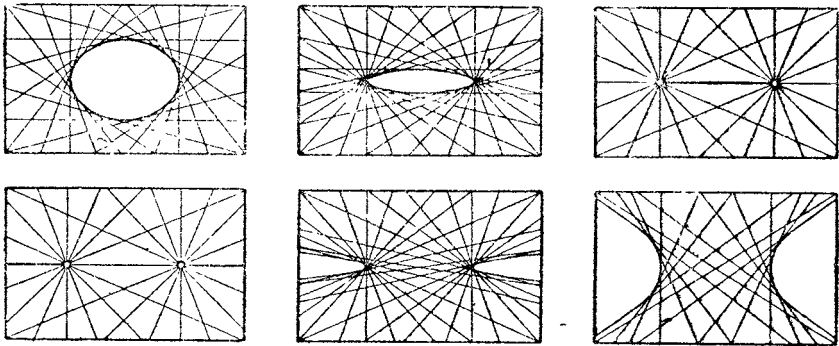
в пару комплексно-сопряженных точек:

$$\alpha_{11}u_1^2 + \alpha_{22}u_2^2 = 0,$$

а затем в нулевую кривую:

$$\alpha_{11}u_1^2 + \alpha_{22}u_2^2 + \alpha_{33}u_3^2 = 0.$$

При этом превращении соответствующая кривая второго порядка все теснее и теснее прилегает с обеих сторон к дважды взятой



Черт. 52.

действительной прямой, определяемой двумя комплексно-сопряженными точками (черт. 53), пока, наконец, в пределе с ней не сливается. В дальнейшем эта дважды взятая прямая превращается в нулевую кривую. Превращения соответствующей кривой



Черт. 53.

второго класса происходят соответствующим образом. Эти последние превращения представляют для дальнейшего особую важность, так как с их помощью можно обе неевклидовы геометрии непрерывно перевести в евклидову геометрию.

С. Соединение понятий кривой второго порядка и класса в понятие кривой второй степени. При наших превращениях мы получали для каждого вырождающегося образа второго порядка вполне определенный соответствующий образ второго класса и обратно, в то время как раньше (стр. 89) такое соответствие осуществлялось не всегда. Так, например, мы получили при превращении, изображенном на черт. 51, вырождающийся образ, который в качестве кривой второго порядка состоит из прямой линии, в то время как соответствующая кривая второго класса является парой пучков прямых с центрами на рассматриваемой прямой. Совершенно такое же положение вещей мы имеем и в случае превращения, изображенного на черт. 53, только здесь центры обоих пучков являются комплексно-сопряженными. Этот выродившийся образ мы будем называть для краткости прямой линией с двумя отмеченными действительными или комплексно-сопряженными точками. Мы ограничились рассмотрением превращений при изменении одного коэффициента. Если мы таким же образом будем изменять два коэффициента, то мы сможем получить также и прямую с дважды

взятой отмеченной точкой. Для этого достаточно, например, на черт. 48 производить превращения так, чтобы пара прямых слилась в одну прямую.

До сих пор мы рассматривали данную кривую либо как кривую второго порядка, либо как кривую второго класса. Теперь мы будем объединять оба эти способа возникновения кривой, рассматривая кривую порожденной как ее точками, так и ее касательными, и будем называть этот образ *кривой второй степени*. Тогда вырождающийся образ второй степени на плоскости будет лишь тогда однозначно определен, когда будет указано, как этот образ рассматривается, с одной стороны, в качестве кривой второго порядка, а с другой — в качестве кривой второго класса. Мы получим все возможные случаи, рассмотрев, какие из вырождений совместимы друг с другом. Этим путем мы приходим к следующему объединению понятий кривой второго порядка и второго класса:

Классификация действительных кривых второй степени

Общие кривые (5)	
1. Нулевые кривые 2. Овальные кривые	
2 Прямые, 1 точка (4)	1 прямая, 2 точки (4)
3. Действительные прямые 4. Комплексно-сопряженные прямые	5. Действительные точки 6. Комплексно-сопряженные точки
1 Прямая, 1 точка (3)	
7. Все действительно	

При этом отмеченные точки лежат на соответствующих прямых, и обратно. Читателю рекомендуется сравнить эту классификацию с обеими таблицами на стр. 83 и 88—89. Дальнейших подразделений с аффинной точки зрения мы не даем, так как мы будем рассматривать только проективные свойства. Числа, стоящие в таблице в скобках, обозначают число параметров, определяющих на плоскости соответствующий образ. Общие кривые второго порядка мы называем *невырождающимися*; об-

разы, стоящие во втором ряду и определяемые четырьмя параметрами — *однократно вырождающимися*; наконец, образы, стоящие в третьем ряду, — *двукратно вырождающимися*. В случае вырождающегося образа соответствующее уравнение, связывающее его точечные координаты, как и уравнение, связывающее его прямолинейные координаты, имеют определитель, равный нулю (эти-то уравнения и определяют рассматриваемую кривую как определенную кривую второго порядка или второго класса). Следовательно, введенные здесь определения вполне согласуются с определениями вырождающихся и невырождающихся образов, данными на стр. 67.

Общая кривая второй степени однозначно определяется заданием ее уравнения либо в точечных, либо в прямолинейных координатах, потому что от одного из этих уравнений мы можем непосредственно перейти к другому по § 2 (ср. также стр. 87). В случае вырождающихся образов мы имеем иное положение вещей. Так, например, пара комплексно-сопряженных точек на плоскости определяется в прямолинейных координатах *одним* уравнением:

$$u_1^2 + u_2^2 = 0,$$

в то время как при пользовании точечными координатами необходимы *два* уравнения:

$$x_1^2 + x_2^2 = 0; \quad x_3 = 0.$$

Следовательно, здесь пара точек фигурирует как пересечение пары комплексно-сопряженных прямых с действительной прямой. Двойственное положение вещей имеет место для случая пары прямых с действительной точкой пересечения. Наконец, для определения двукратно вырождающихся образов нам необходимы два уравнения как в точечных, так и в прямолинейных координатах.

Возникает задача об установлении полученного взаимного соответствия между кривыми второго порядка и класса также и аналитическим путем. Ведь на стр. 89 мы получили при определении кривой второго класса, которая соответствует дважды взятой прямой, тривиальное равенство $0 = 0$, а не уравнение пары действительных или комплексно-сопряженных точек или, наконец, дважды взятой точки. Но прежний результат обуславливается тем, что мы тогда не делали надлежащего предельного перехода. Чтобы получить указанное соответствие, будем исходить из невырождающейся кривой второго порядка:

$$a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 = 0,$$

причем a_{33} может быть как больше, так и меньше нуля; ей соответствует, как мы знаем, кривая второго класса:

$$a_{22}a_{33}u_1^2 + a_{11}a_{33}u_2^2 + a_{11}a_{22}u_3^2 = 0.$$

Ограничимся рассмотрением только невырождающихся кривых: $a_{33} = \kappa a_{22}$, $\kappa \neq 0$. Их уравнения имеют вид:

$$\kappa a_{22}^2 u_1^2 + \kappa a_{22} a_{11} u_2^2 + a_{11} a_{22} u_3^2 = 0,$$

или

$$\kappa a_{22} u_1^2 + \kappa a_{11} u_2^2 + a_{11} u_3^2 = 0.$$

Если мы в системе этих кривых перейдем к пределу: $\lim a_{33} = = \lim \kappa a_{22} = 0$, $a_{11} \neq 0$, то мы получим:

$$\kappa u_2^2 + u_3^2 = 0.$$

Эта пара точек является в зависимости от характера предельного перехода, т. е. от значения κ , парой действительных или комплексно-сопряженных точек, лежащих на рассматриваемой дважды взятой прямой. Если мы хотим получить дважды взятую точку, то нам нужно исходить из невырождающейся прямой с коэффициентом $a_{33} = a_{22}^2$:

$$a_{22}^2 u_1^2 + a_{11} a_{22}^2 u_2^2 + a_{11} a_{22} u_3^2 = 0$$

или

$$a_{22}^2 u_1^2 + a_{11} a_{22} u_2^2 + a_{11} u_3^2 = 0.$$

Если мы в системе этих кривых перейдем к пределу $\lim a_{33} = = \lim a_{22}^2 = 0$, то получим:

$$u_3^2 = 0,$$

следовательно, дважды взятую точку. Итак, мы видим, что действительно уравнению дважды взятой прямой в точечных координатах соответствует в прямолинейных координатах уравнение пары точек или дважды взятой точки.

Совершенно такие же рассуждения можно провести также и для кривых второго класса и показать, что дважды взятой точке соответствует пара прямых или дважды взятая прямая, причем прямые проходят через эту точку.

Эти результаты можно объединить вместе следующим образом: *если задан некоторый определенный предельный переход, приводящий к данному вырождению, то всякой вырождающейся кривой второго порядка соответствует некоторая кривая второго класса, и наоборот; вместо этого предельного перехода мы можем также с самого начала пользоваться несколькими уравнениями, однозначно определяющими кривую второго порядка и соответствующую ей кривую второго класса, т. е. кривую второй степени.*

Д. Превращения в пространстве. В пространстве число возможных превращений уже весьма велико. Мы ограничимся тремя превращениями, причем будем исходить от кольцеобразных поверхностей (в этом случае оба однопараметрические семейства прямых являются действительными) и в заключение затем рассмотрим еще одно превращение, имеющее большую важность для дальнейшего.

Будем исходить из кольцеобразной поверхности:

$$a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 - a_{33}x_3^2 - a_{44}x_4^2 = 0,$$

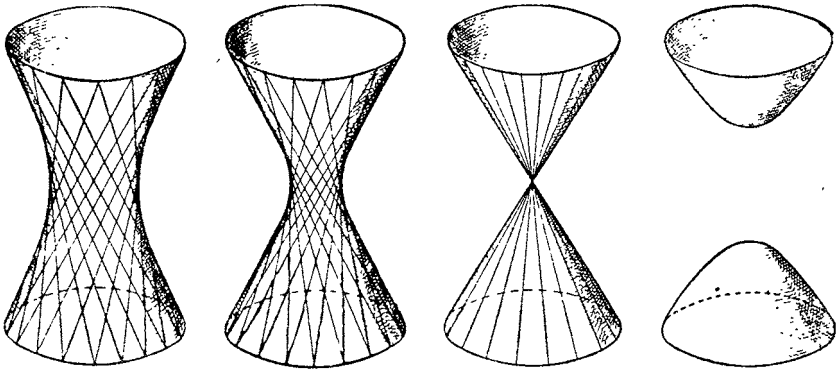
которая превращается в конус:

$$a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 - a_{33}x_3^2 = 0,$$

а затем в овальную поверхность:

$$a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 - a_{33}x_3^2 + a_{44}x_4^2 = 0.$$

При этом сначала горловой эллипс кольцеобразной поверхности стягивается в одну точку, вершину конуса, после чего конус, разрываясь в вершине, превращается в овальную поверхность



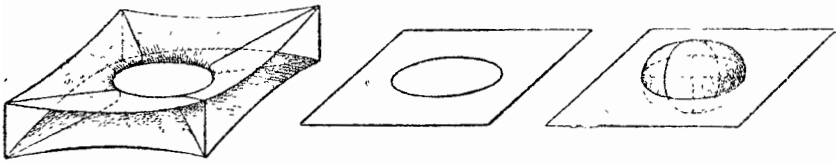
Черт. 54.

(черт. 54). Притом оба семейства прямых кольцеобразной поверхности переходят в образующие конуса, именно: прямолинейные образующие кольцеобразной поверхности сливаются попарно (одна из первого семейства, другая из второго) в некоторую образующую конуса. В дальнейшем каждая из образующих конуса опять распадается на пару прямых, но теперь уже эта пара является парой комплексно-сопряженных прямых.

Если рассмотрим это же превращение для соответствующего образа второго класса, то получим сначала из кольцеобразной поверхности всю связку плоскостей, проходящих через вершину конуса; при этом действительные плоскости переходят в те плоскости связки, которые пересекают внутренность конуса, в то время как часть мнимых плоскостей переходит в остальные действительные плоскости связки, а другая часть — в мнимые плоскости связки; при дальнейшем превращении именно действительные плоскости последнего типа из нашей связки распадаются в действительные плоскости овальной поверхности второго класса.

До сих пор мы рассматривали поверхности только как образы, составленные из их точек или из их касательных плоскостей. С таким же успехом мы можем рассматривать их как образы из их касательных и выяснять, что будет происходить с этими

касательными при рассматриваемом превращении. Рассмотрение черт. 54 показывает, что при этом получается, с одной стороны, совокупность касательных к конусу, а с другой — пучок прямых, проходящих через вершину конуса. Этот пучок образует двумерное многообразие, остальные прямые — трехмерное; прямые пучка мы можем рассматривать как касательные в вершине конуса.



Черт. 55.

В качестве второго превращения мы рассмотрим следующее. Будем исходить из кольцеобразной поверхности:

$$\alpha_{11}u_1^2 + \alpha_{22}u_2^2 - \alpha_{33}u_3^2 - \alpha_{44}u_4^2 = 0,$$

которую превратим в плоскую кривую второго класса:

$$\alpha_{11}u_1^2 + \alpha_{22}u_2^2 - \alpha_{33}u_3^2 = 0,$$

а затем в овальную поверхность:

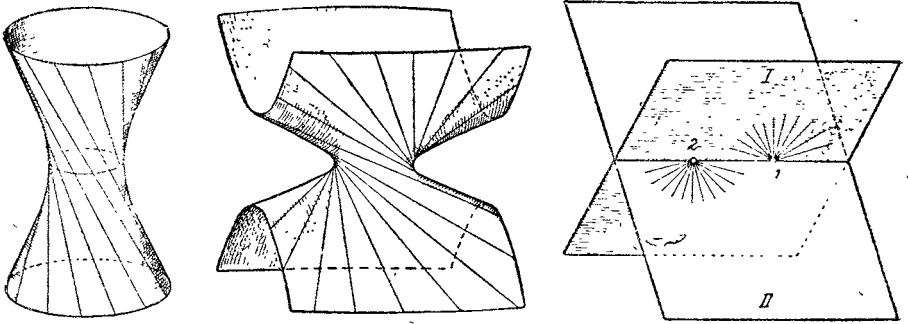
$$\alpha_{11}u_1^2 + \alpha_{22}u_2^2 - \alpha_{33}u_3^2 + \alpha_{44}u_4^2 = 0.$$

На черт. 55 это превращение изображено для случая соответствующей поверхности второго порядка. Кольцеобразная поверхность второго порядка все более и более сплющивается, пока, наконец, ее действительная часть не переходит в дважды взятую внешнюю часть овальной кривой. Далее, как раз внутренняя часть овальной кривой, раздваиваясь, превращается в действительную часть некоторой овальной поверхности. При этом превращении оба семейства прямых кольцеобразной поверхности переходят в касательные к плоской кривой, причем две прямые из различных семейств сливаются попарно в одну касательную. В дальнейшем при переходе к овальной поверхности касательные опять распадаются, но уже в пары комплексно-сопряженных прямых.

Если мы рассмотрим это превращение для соответствующей поверхности второго класса, то получим из кольцеобразной поверхности второго класса все возможные пучки плоскостей, проходящих через все касательные к плоской кривой. Касательные к кольцеобразной поверхности переходят, во-первых, во всевозможные прямые пространства, пересекающие овальную кривую или касающиеся ее, и, кроме того; во-вторых, во все прямые, лежащие в плоскости кривой.

Третье превращение мы сначала опишем наглядно. Будем исходить из однополостного гиперболоида; одну из осей горлового эллипса оставим неизменной, в то время как другую ось будем все время уменьшать (черт. 56), так же как и мнимую

ось гиперboloида. Тогда обе ветви контурной гиперболы, дающие на нашем чертеже очертание однополостного гиперboloида, будут делаться все уже и уже, пока, наконец, не превратятся в две полупрямые, лежащие на линии пересечения двух плоскостей на черт. 56, справа. Мы получаем вследствие этого пару плоскостей, на линии пересечения которых отмечены две точки, именно: обе вершины горлового эллипса, лежащие на концах



Черт. 56.

неизменной оси. Этот геометрический образ мы будем называть *двойной парой*. Превращение однополостного гиперboloида:

$$a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 - a_{33}x_3^2 - a_{44}x_4^2 = 0$$

в двойную пару аналитически осуществляется путем стремления к нулю коэффициентов a_{22} и a_{44} :

$$a_{11}x_1^2 - a_{33}x_3^2 = 0.$$

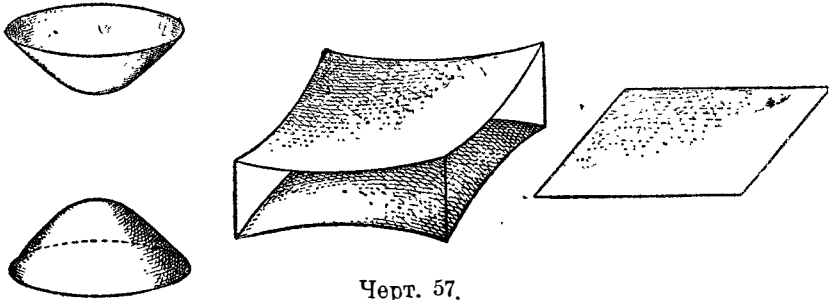
Посредством непрерывного продолжения этого превращения мы получаем снова кольцеобразную поверхность:

$$a_{11}x_1^2 - a_{22}x_2^2 - a_{33}x_3^2 + a_{44}x_4^2 = 0.$$

Двойная пара еще не определяется однозначно своим уравнением в точечных координатах, если не дано одновременно соответствующее уравнение в плоскостных координатах. При превращении соответствующей поверхности второго класса мы получаем две связки плоскостей, проходящих через обе отмеченные точки; среди этих плоскостей, в частности, находятся все плоскости, проходящие через линию пересечения обеих плоскостей. Следовательно, двойная пара не определяется однозначно ни как точечный, ни как плоскостной образ, но лишь как соединение этих обоих образов. Для ее определения необходимо как уравнение в точечных, так и уравнение в плоскостных координатах. В качестве образа, составленного из прямых, двойная пара представляет собой, как это легко видеть, совокупность прямых, пересекающих отмеченную прямую.

Особый интерес представляет образ, который возникает при этом превращении из обоих семейств прямых кольцеобразной

поверхности. Пока поверхность еще не выродилась, прямолинейные образующие на черт. 56 представляются касательными к контурной гиперболе. При переходе же к двойной паре мы получаем четыре пучка прямых. Если обозначить обе плоскости цифрами *I* и *II*, а обе точки двойной пары цифрами 1 и 2, то изображенное на черт. 56 семейство прямых переходит в пучки *I* 1 и *II* 2, а другое семейство — в пучки *I* 2 и *II* 1. Подобные



Черт. 57.

„скрещенные пучки“ играют важную роль в линейных геометрических исследованиях. Для дальнейшего нам особенно важно следующее превращение, переводящее овальную поверхность:

$$\alpha_{11}u_1^2 + \alpha_{22}u_2^2 + \alpha_{33}u_3^2 - \alpha_{44}u_4^2 = 0$$

в нулевое коническое сечение:

$$\alpha_{11}u_1^2 + \alpha_{22}u_2^2 + \alpha_{33}u_3^2 = 0,$$

а затем в нулевую поверхность:

$$\alpha_{11}u_1^2 + \alpha_{22}u_2^2 + \alpha_{33}u_3^2 + \alpha_{44}u_4^2 = 0.$$

Овальная поверхность, которую мы будем себе представлять как двуполостный гиперболоид, прижимается при этом с обеих сторон все теснее и теснее к плоскости нулевого конического сечения, пока, наконец, не превращается в нее (черт. 57); в дальнейшем она, раздвигаясь, превращается в нулевую поверхность. Это превращение является мнимым образом превращения, изображенного на черт. 55. В дальнейшем с его помощью мы будем переводить неевклидовы геометрии в евклидову.

Е. Объединение понятий поверхности второго порядка и класса в понятие поверхности второй степени. В силу предыдущих соображений мы объединим в случае пространства (как раньше в случае плоскости) понятия поверхности второго порядка и второго класса и соответствующего образа, составленного из касательных, в понятие поверхности второй степени. При этом вырождающаяся поверхность второй степени рассматривается однозначно определенной лишь тогда, когда указано, как вырождается этот образ в качестве точечного, прямолинейного и плоскостного образа. Мы получаем вследствие этого следующую классификацию образов второй степени в пространстве (см. таблицу на стр. 107).

Классификация действительных поверхностей второй степени

	Общие поверхности (9)	
	1. Нулевые поверхности 2. Овальные поверхности 3. Кольцеобразные поверхности	
Конусы (8)	2 плоскости, 1 прямая, 2 точки (8)	Конические сечения (8)
4. Вершина действительная, конус нулевой 5. Вершина действительная, конус действительный	6. Плоскости действительные, точки действительные 7. Плоскости действительные, точки комплексно-сопряженные 8. Плоскости комплексно-сопряженные, точки действительные 9. Плоскости комплексно-сопряженные, точки комплексно-сопряженные	10. Плоскость действительная, коническое сечение нулевое 11. Плоскость действительная, коническое сечение овальное
2 плоскости, 1 прямая, 1 точка (7)	1 плоскость, 2 прямые, 1 точка (7)	1 плоскость, 1 прямая, 2 точки (7)
12. Плоскости действительные 13. Плоскости комплексно-сопряженные	14. Прямые действительные 15. Прямые комплексно-сопряженные	16. Точки действительные 17. Точки комплексно-сопряженные
	1 плоскость, 1 прямая, 1 точка (6)	
	18. Все действительно	

Эта таблица не требует никаких дальнейших пояснений ввиду обстоятельных объяснений, сделанных к соответствующей таблице для случая плоскости. Отметим только, что образы, определяемые 9, 8, 7 и 6 параметрами, называются соответственно *невыврождающимися, одно-, двух- и трехкратно вырождающимися*. Для однозначного определения вырождающихся образов приходится пользоваться вообще несколькими уравнениями: так, например, нулевое коническое сечение пространства имеет следующие уравнения соответственно в точечных и плоскостных координатах:

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0; \quad x_4 = 0, \quad \text{соответственно} \quad u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 = 0.$$

Аналогичным образом обстоит дело с другими вырождающимися образами¹⁾.

¹⁾ Приведенная здесь классификация образов второй степени, имеющая основное значение для последующих рассмотрений, была в существенном известна уже Клебшу (Clebsch-Lindemann, Vorlesungen über Geometrie). Полный обзор всех случаев имеется у Sommerville, Classification of Geometries with Projective Metric, Proceedings of the Edinburgh Math. Soc., т. 2, 1910.

Глава III

ПРОЕКТИВНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ, ПЕРЕВОДЯЩИЕ ОБРАЗ
ВТОРОЙ СТЕПЕНИ САМОГО В СЕБЯ

Мы введем в гл. VI некоторое мероопределение на основе каждого из образов второй степени, приведенных в трех таблицах на стр. 83 (прямая линия), на стр. 100 (плоскость) и на стр. 107 (пространство). Среди этих мероопределений в качестве специальных случаев найдут место евклидово и неевклидовы мероопределения (геометрии). При этом проективные преобразования, переводящие самого в себя положенный в основу мероопределения образ второй степени, окажутся (вообще говоря) твердыми перемещениями относительно этого мероопределения. Поэтому мы разовьем сейчас теорию этих проективных преобразований, чтобы в свое время иметь ее под рукой.

§ 1. Одномерный случай

А. Комплексные проективные преобразования, переводящие невырождающийся образ самого в себя. Прежде всего рассмотрим проективные преобразования, переводящие на прямой линии пару действительных или комплексно-сопряженных точек:

$$x_1^2 - x_2^2 = 0, \quad | \quad x_1^2 + x_2^2 = 0$$

самое в себя; проективные преобразования могут быть как действительными, так и комплексными. Мы будем писать рядом (слева и справа) формулы для обеих пар точек, чтобы иметь возможность проводить оба вычисления одновременно.

Нам приходится здесь различать два возможных случая в зависимости от того, переходит ли каждая точка пары сама в себя или же обе точки между собой переставляются. Соответствующие типы проективных преобразований мы будем называть *собственными* и *несобственными проективными преобразованиями* данной пары точек в себя¹). С аналитической стороны уравнение пары точек:

$$x_1^2 - x_2^2 = (x_1 + x_2)(x_1 - x_2) = 0, \quad | \quad x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + ix_2)(x_1 + ix_2) = 0,$$

¹ В дальнейшем мы будем часто говорить просто о собственных и несобственных проективных преобразованиях; но необходимо подчеркнуть, что это выражение имеет смысл только по отношению к данному квадратичному остающемуся инвариантным образу; различие между проекттивными преобразованиями с положительными и с отрицательными определителями (стр. 34) имеет совсем другую природу.

будет переходить само в себя в первом случае тогда, когда каждое из уравнений:

$$x_1 + x_2 = 0 \text{ и } x_1 - x_2 = 0, \quad | \quad x_1 + ix_2 = 0 \text{ и } x_1 - ix_2 = 0$$

будет преобразовываться само в себя, а во втором случае тогда, когда будет переходить:

$$\begin{array}{l} x_1 + x_2 = 0 \text{ в } x_1 - x_2 = 0, \\ x_1 - x_2 = 0 \text{ в } x_1 + x_2 = 0, \end{array} \quad | \quad \begin{array}{l} x_1 + ix_2 = 0 \text{ в } x_1 - ix_2 = 0, \\ x_1 - ix_2 = 0 \text{ в } x_1 + ix_2 = 0. \end{array}$$

После элементарных выкладок получаем следующие уравнения:

Собственные проективные преобразования пары действительных точек в себя:

$$\begin{array}{l} \rho x_1 = c_{11}x'_1 + c_{21}x'_2, \\ \rho x_2 = c_{21}x'_1 + c_{11}x'_2, \end{array} \quad D = \begin{vmatrix} c_{11} & c_{21} \\ c_{21} & c_{11} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Собственные проективные преобразования пары комплексно-сопряженных точек в себя:

$$\begin{array}{l} \rho x_1 = c_{11}x'_1 - c_{21}x'_2, \\ \rho x_2 = c_{21}x'_1 + c_{11}x'_2, \end{array} \quad D = \begin{vmatrix} c_{11} - c_{21} & \\ & c_{21} \ c_{11} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Несобственные проективные преобразования пары действительных точек в себя:

$$\begin{array}{l} \rho x_1 = c_{11}x'_1 - c_{21}x'_2, \\ \rho x_2 = c_{21}x'_1 - c_{11}x'_2, \end{array} \quad D = \begin{vmatrix} c_{11} - c_{21} & \\ & c_{21} - c_{11} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Несобственные проективные преобразования пары комплексно-сопряженных точек в себя:

$$\begin{array}{l} \rho x_1 = c_{11}x'_1 + c_{21}x'_2, \\ \rho x_2 = c_{21}x'_1 - c_{11}x'_2, \end{array} \quad D = \begin{vmatrix} c_{11} & c_{21} \\ & c_{21} - c_{11} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Так как дело идет только об отношениях величин x_i и c_{ik} , то как собственные, так и несобственные проективные преобразования образуют однопараметрическое семейство. Проективные преобразования первого типа образуют группу, в то время как второго типа — не образуют (так как два несобственных преобразования, приведенные одно за другим, дают в результате собственное проективное преобразование). Напротив, оба типа проективных преобразований, взятые вместе, также образуют группу, которая содержит в качестве подгруппы группу собственных проективных преобразований и которая может быть названа вследствие своего строения *смешанной группой*.

Несобственные проективные преобразования могут быть получены из собственных путем комбинирования последних с каким-нибудь специальным несобственным проективным преобразованием, например с $\rho x'_1 = x'_1, \rho x'_2 = -x'_2$. Поэтому во многих случаях мы можем ограничиться рассмотрением только собственных проективных преобразований.

В. Действительные проективные преобразования. В предыдущих рассуждениях все коэффициенты c_{ik} могли иметь произвольные комплексные значения. Теперь мы обратимся к *действительным проективным преобразованиям* и, следовательно, будем предполагать, что все коэффициенты действительны. Тогда,

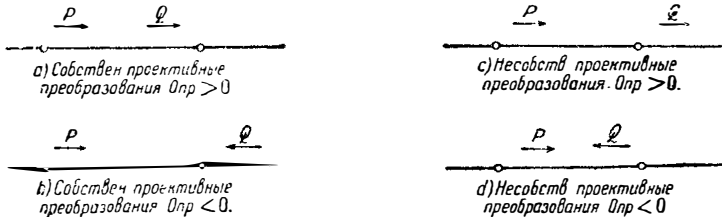
в случае пары комплексно-сопряженных точек, определители собственных проективных преобразований всегда будут положительными, несобственных — всегда отрицательными. Напротив, в случае пары действительных точек определители как собственных, так и несобственных проективных преобразований могут быть и больше и меньше нуля. Следовательно, мы получаем в случае пары комплексно-сопряженных точек два, а в случае пары действительных точек четыре различных типа действительных проективных преобразований.

Геометрически эти типы различаются, как легко показать, следующим образом. В случае пары комплексно-сопряженных



Черт. 58.

точек собственные проективные преобразования переводят всякий отрезок P в отрезок Q , направленный точно таким же образом (черт. 58, а), в то время как при несобственных проективных преобразованиях имеет место изменение направления на обратное (черт. 58, б). В случае пары действительных точек прямая линия разбивается обеими неподвижными точками на два с точки зрения проективной геометрии равноправных отрезка.



Черт. 59.

При собственных проективных преобразованиях с положительным определителем каждый из этих отрезков переходит сам в себя; при этом направление сохраняется (черт. 59, а). При собственных проективных преобразованиях с отрицательным определителем оба отрезка меняются местами и направление меняется на обратное (черт. 59, б). При несобственных проективных преобразованиях с положительным определителем оба отрезка точно также меняются местами, но направление сохраняется (черт. 59, с). Наконец, при несобственных проективных преобразованиях с отрицательным определителем каждый из двух отрезков переходит сам в себя, а направление меняется на обратное (черт. 59, д). Доказательство этих предложений получается из того, что во-первых, проективные преобразования с положи-

тельным или отрицательным определителем соответственно оставляют неизменным или изменяют направление отрезка (стр. 34); во вторых, мы знаем, что собственные проективные преобразования переводят каждую неподвижную точку самое в себя, в то время как несобственные меняют их местами. Отсюда в силу непрерывности непосредственно получаются приведенные выше результаты.

С. Проективные преобразования, переводящие дважды взятую точку самое в себя. Аналогичным образом рассмотрим еще проективные преобразования прямой линии, переводящие дважды взятую (следовательно, действительную) точку:

$$x_1^2 = 0$$

самое в себя. Общее проективное преобразование:

$$\begin{cases} \rho x_1 = c_{11}x'_1 + c_{12}x'_2, \\ \rho x_2 = c_{21}x'_1 + c_{22}x'_2, \end{cases} \quad \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{vmatrix} \neq 0,$$

переводит ее в $c_{11}x'_1 + c_{12}x'_2 = 0$. Поэтому для того, чтобы дважды взятая точка оставалась неподвижной, необходимо, чтобы $c_{12} = 0$.

Наиболее общее проективное преобразование дважды взятой точки самой в себя:

$$\begin{cases} \rho x_1 = c_{11}x'_1, \\ \rho x_2 = c_{21}x'_1 + c_{22}x'_2, \end{cases} \quad \begin{vmatrix} c_{11} & 0 \\ c_{21} & c_{22} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Мы, следовательно, получаем в этом случае двухпараметрическую группу, в то время как в случае двух пар точек мы получали только однопараметрическую группу. *Вообще, если число параметров положенного в основу квадратичного образа (стр. 100—101 и 107—108) уменьшается на единицу, то число параметров соответствующего проективного преобразования увеличивается на единицу.*

Чтобы получить наглядное представление о проективном преобразовании, переводящем дважды взятую точку $x_1^2 = 0$ самое в себя, примем за эту точку бесконечно удаленную точку прямой и перейдем к аффинным координатам $x = x_2 : x_1$ и $x' = x'_2 : x'_1$. Тогда уравнение рассматриваемых преобразований принимает вид:

$$x = \frac{c_{21}}{c_{11}} + \frac{c_{22}}{c_{11}} x', \quad c_{11}c_{22} \neq 0.$$

При $c_{11} = \pm c_{22}$ эти преобразования представляют собой обычные евклидовы движения и зеркальные отображения на прямой линии: для $c_{11} = +c_{22}$ каждая точка смещается на некоторый постоянный отрезок, для $c_{11} = -c_{22}$ имеет место еще зеркальное отображение точек прямой. Если же $c_{11} \neq \pm c_{22}$, то мы получаем преобразования подобия, которые, кроме того, соответственно увеличивают или уменьшают каждый отрезок в определенное число раз.

D. Непрерывное превращение различных случаев друг в друга. Системы формул, которые мы получили для случая пары действительных и комплексно-сопряженных точек, могут быть объединены в одну единственную систему.

Собственные проективные преобразования:

$$\begin{aligned} \rho x_1 &= c_{11}x'_1 - \varepsilon c_{21}x'_2, \\ \rho x_2 &= c_{21}x'_1 + c_{11}x'_2; \end{aligned}$$

Несобственные проективные преобразования:

$$\begin{aligned} \rho x_1 &= c_{11}x'_1 + \varepsilon c_{21}x'_2, \\ \rho x_2 &= c_{21}x'_1 - c_{11}x'_2; \end{aligned}$$

причем ε мы полагаем равным -1 для пары действительных точек и $+1$ для пары комплексно-сопряженных точек. Это объединение вполне согласуется с тем, что уравнения рассматриваемых образов второго порядка могут быть написаны в следующем, общем для обоих образов виде:

$$x_1^2 + \varepsilon x_2^2 = 0,$$

где ε имеет то же значение, что и выше; легко показать, что вышеприведенное проективное преобразование оставляет это уравнение инвариантным.

Теперь мы можем пару действительных точек непрерывно перевести в дважды взятую точку, а затем в пару комплексно-сопряженных точек посредством непрерывного изменения ε от -1 до 0 , а затем до $+1$ (черт. 47, стр. 95). При этом соответствующие проективные преобразования точно так же непрерывно переходят друг в друга.

При $\varepsilon = 0$ мы получаем:

$$\begin{aligned} \rho x_1 &= c_{11}x'_1, & \rho x_1 &= c_{11}x'_2, \\ \rho x_2 &= c_{21}x'_1 + c_{11}x'_2, & \rho x_2 &= c_{21}x'_1 - c_{11}x'_2, \end{aligned}$$

следовательно, *однопараметрическую подгруппу* рассмотренной на стр. 112 двухпараметрической группы, оставляющей инвариантной дважды взятую точку $x_1^2 = 0$; эту подгруппу мы можем выделить из всей группы с помощью требования $c_{11} = \pm c_{22}$. Итак, мы получаем при предельном переходе только *часть* проективных преобразований, оставляющих инвариантной дважды взятую точку, именно евклидовы параллельные сдвиги и зеркальные отображения, но не самые общие преобразования подобия. При этом при предельном переходе от пары действительных точек к дважды взятой точке из четырех типов действительных проективных преобразований два типа пропадают, так как один из двух отрезков, на которые прямая была разбита парой действительных точек, теперь исчезает.

При дальнейшем превращении в пару комплексно-сопряженных точек оба оставшиеся типа проективных преобразований сохраняются.

§ 2. Двумерный случай

А. Комплексные проективные преобразования, переводящие невырождающийся образ сам в себя. Овальные и нулевые кривые на плоскости, будучи отнесены к надлежащему полярному треугольнику, определяются уравнениями:

<p><i>Овальная кривая:</i></p> $x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 =$ $= x_1^2 + (x_2 + x_3)(x_2 - x_3) = 0.$		<p><i>Нулевая кривая:</i></p> $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 =$ $= x_1^2 + (x_2 + ix_3)(x_2 - ix_3) = 0.$
--	--	---

Последующие выкладки приобретут особо простой вид, если посредством преобразования:

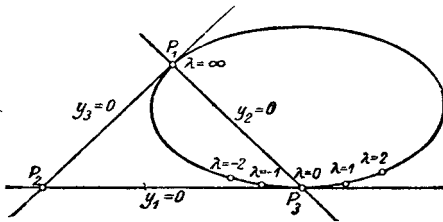
$\rho y_1 = x_2 + x_3,$ $\rho y_2 = x_1, \quad D = -2,$ $\rho y_3 = -x_2 + x_3,$		$\rho y_1 = x_2 + ix_3,$ $\rho y_2 = x_1, \quad D = -2i,$ $\rho y_3 = -x_2 + ix_3,$
--	--	---

привести эти уравнения к следующей форме:

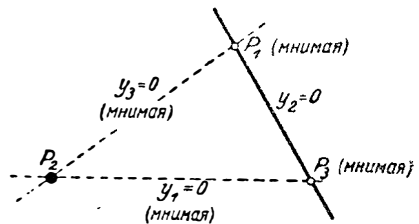
$$y_2^2 - y_1 y_3 = 0,$$

которую мы будем называть *тангенциальной формой уравнения* конического сечения.

При указанном преобразовании кривая оказывается отнесенной к так называемому *касательному* (или *тангенциальному*)



Черт. 60.



Черт. 61.

треугольнику, состоящему из двух касательных к кривой и линии, соединяющей точки прикосновения (черт. 60). В самом деле, кривая имеет с прямой $y_1=0$ общую дважды взятую точку $y_1:y_2:y_3=0:0:1$ и точно так же с прямой $y_3=0$ общую дважды взятую точку $y_1:y_2:y_3=1:0:0$. Следовательно, обе прямые $y_1=0$ и $y_2=0$ являются касательными к кривой, в то время как прямая $y_2=0$ проходит через указанные точки прикосновения. В случае овальной поверхности таким образом определенный треугольник является целиком действительным (черт. 60). В случае нулевой кривой он состоит из одной действительной точки и одной действительной прямой, не проходящей через эту точку; эта точка и прямая являются полюсом и полярой относительно рассматриваемой нулевой кривой. Две другие точки (а также и прямые) являются взаимно комплексно-сопряженными (черт. 61).

Чтобы установить уравнения проективных преобразований, переводящих коническое сечение $y_2^2 - y_1 y_3 = 0$ само в себя, мы употребим следующий прием. Прежде всего заметим, что уравнение: $y_2^2 - y_1 y_3 = 0$ удовлетворяется, если положить

$$\frac{y_1}{y_2} = \lambda = \frac{\lambda_1}{\lambda_2}, \quad \frac{y_2}{y_3} = \lambda = \frac{\lambda_1}{\lambda_2}$$

или, иначе,

$$\rho y_1 = \lambda_1^2, \quad \rho y_2 = \lambda_1 \lambda_2, \quad \rho y_3 = \lambda_2^2.$$

В силу этого параметрического представления каждой точке конического сечения ставится во взаимно однозначное соответствие некоторое значение $\lambda = \lambda_1 : \lambda_2$; если придавать λ все действительные и комплексные значения, то мы получим все точки конического сечения. В частности, в случае овальной кривой мы будем получать при действительных значениях параметра действительные же точки кривой (черт. 60).

Если коническое сечение при некотором проективном преобразовании переходит само в себя, то каждому значению параметра $\lambda = \lambda_1 : \lambda_2$ соответствует некоторое новое значение параметра $\lambda' = \lambda'_1 : \lambda'_2$. Мы утверждаем, что *это соответствие выражается линейной подстановкой:*

$$\lambda = \frac{\alpha \lambda' + \beta}{\gamma \lambda' + \delta} \quad (\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0).$$

Доказательство этого мы получаем следующим образом. При общем проективном преобразовании $\rho y_z = \sum_{\lambda} c_{z\lambda} y_{\lambda}'$ кривая $y_2^2 - y_1 y_3 = 0$ переходит в:

$$(c_{21}y'_1 + c_{22}y'_2 + c_{23}y'_3)^2 - (c_{11}y'_1 + c_{12}y'_2 + c_{13}y'_3)(c_{31}y'_1 + c_{32}y'_2 + c_{33}y'_3) = 0.$$

Следовательно, рассматриваемая кривая остается инвариантной тогда и только тогда, т. е. вышеприведенное уравнение тогда и только тогда принимает вид: $y_2^2 - y_1 y_3 = 0$, когда коэффициенты $c_{\lambda\lambda}$ проективного преобразования удовлетворяют следующим пяти условиям:

$$c_{21}^2 = c_{11}c_{31}, \quad 2c_{21}c_{22} = c_{11}c_{32} + c_{12}c_{31},$$

$$c_{23}^2 = c_{13}c_{33}, \quad 2c_{22}c_{23} = c_{12}c_{33} + c_{13}c_{32},$$

$$c_{22}^2 + 2c_{21}c_{23} = c_{11}c_{33} + c_{12}c_{32} + c_{13}c_{31}.$$

Далее, значение параметров $\lambda = \frac{\lambda_1}{\lambda_2}$ и $\lambda' = \frac{\lambda'_1}{\lambda'_2}$ определяются уравнениями:

$$\rho y_1 = \lambda_1^2, \quad \rho y_2 = \lambda_1 \lambda_2, \quad \rho y_3 = \lambda_2^2, \quad \rho y'_1 = \lambda'^2_1, \quad \rho y'_2 = \lambda'_1 \lambda'_2, \quad \rho y'_3 = \lambda'^2_2,$$

и претерпевают, следовательно, при рассматриваемом проективном преобразовании $\rho y_x = \sum_{\lambda} c_{x\lambda} y'_\lambda$ конического сечения подстановку:

$$\rho \lambda_1^2 = c_{11} \lambda_1'^2 + c_{12} \lambda_1' \lambda_2' + c_{13} \lambda_2'^2,$$

$$\rho \lambda_1 \lambda_2 = c_{21} \lambda_1'^2 + c_{22} \lambda_1' \lambda_2' + c_{23} \lambda_2'^2,$$

$$\rho \lambda_2^2 = c_{31} \lambda_1'^2 + c_{32} \lambda_1' \lambda_2' + c_{33} \lambda_2'^2,$$

причем $c_{x\lambda}$ удовлетворяют приведенным выше пяти условиям. Путем почленного деления мы получаем из первых двух уравнений:

$$\frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \lambda = \frac{c_{11} \lambda_1'^2 + c_{12} \lambda_1' + c_{13}}{c_{21} \lambda_1'^2 + c_{22} \lambda_1' + c_{23}}.$$

Аналогичное уравнение можно получить путем почленного деления последних двух уравнений; легко видеть, что обе таким образом полученные подстановки для λ в силу установленных выше условий для коэффициентов являются тождественными между собой. Вообразим теперь числитель и знаменатель вышеприведенной дроби разложенными на линейные множители и предположим сначала, что дробь нельзя сократить ни на какой линейный множитель. Но тогда обейм точкам λ' , для которых обращается в нуль один из линейных множителей числителя и для которых по нашему предположению не обращается в нуль знаменатель, будет соответствовать точка $\lambda=0$, что невозможно, так как проективное преобразование ставит в соответствие каждой точке λ одну и только одну точку λ' .

Из этого противоречия следует, что дробь всегда можно сократить на линейный множитель, чем и доказано наше утверждение ¹⁾. Линейную подстановку

$$\lambda = \frac{\alpha \lambda' + \beta}{\gamma \lambda' + \delta} \quad (\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0)$$

при пользовании однородными координатами: $\lambda = \lambda_1 : \lambda_2$ и $\lambda' = \lambda_1' : \lambda_2'$ можно записать в виде:

$$\alpha \lambda_1 = \alpha \lambda_1' + \beta \lambda_2', \quad (\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0).$$

$$\alpha \lambda_2 = \gamma \lambda_1' + \delta \lambda_2'$$

Если же теперь мы опять вернемся с помощью формул, приведенных на стр. 115, от значений параметров λ и λ' к точечным

¹⁾ Этот результат с точки зрения теории функций может быть получен следующим образом: преобразование является аналитическим и взаимно однозначным для всех действительных и комплексных значений λ , и, следовательно, линейным.

координатам y_x и y'_x , то мы получим следующую подстановку:

$$\begin{aligned} \rho^2 y_1 &= \sigma^2 \lambda_1^2 = (\alpha \lambda'_1 + \beta \lambda'_2)^2 = \rho \{ \alpha^2 y'_1 + 2\alpha\beta y'_2 + \beta^2 y'_3 \}, \\ \rho^2 y_2 &= \sigma^2 \lambda_1 \lambda_2 = (\alpha \lambda'_1 + \beta \lambda'_2) (\gamma \lambda'_1 + \delta \lambda'_2) = \rho \{ \alpha \gamma y'_1 + (\alpha\delta + \beta\gamma) y'_2 + \beta\delta y'_3 \}, \\ \rho^2 y_3 &= \sigma^2 \lambda_2^2 = (\gamma \lambda'_1 + \delta \lambda'_2)^2 = \rho \{ \gamma^2 y'_1 + 2\gamma\delta y'_2 + \delta^2 y'_3 \}. \end{aligned}$$

Установленные здесь формулы ставят в соответствие каждой точке конического сечения $y_2^2 - y_1 y_3 = 0$ некоторую другую точку этого же конического сечения. Итак, проективные преобразования, оставляющие инвариантным коническое сечение: $y_2^2 - y_1 y_3 = 0$, имеют вид:

Проективные преобразования конического сечения $y_2^2 - y_1 y_3 = 0$ в самого себя:

$$\begin{aligned} \rho y_1 &= \alpha^2 y'_1 + 2\alpha\beta y'_2 + \beta^2 y'_3, \\ \rho y_2 &= \alpha\gamma y'_1 + (\alpha\delta + \beta\gamma) y'_2 + \beta\delta y'_3, & (\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0). \\ \rho y_3 &= \gamma^2 y'_1 + 2\gamma\delta y'_2 + \delta^2 y'_3. \end{aligned}$$

Так как дело идет лишь об отношениях $\alpha : \beta : \gamma : \delta$, то эти проективные преобразования образуют группу, зависящую от шести действительных или трех комплексных параметров. Определитель этой подстановки, как показывает простое вычисление, равен $(\alpha\delta - \beta\gamma)^3$ и никогда не может равняться нулю в силу соотношения $\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$.

В. Действительные проективные преобразования. До сих пор в этом параграфе мы рассматривали действительные и мнимые элементы как равноправные. Если мы теперь захотим принять во внимание различия в отношении действительности, то мы должны рассматривать овалы и нулевые кривые отдельно. Поэтому прежде всего установим, какие проективные преобразования переводят овальную кривую $x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 0$ самое в себя. Если мы вернемся опять с помощью формул, приведенных на стр. 114, от y_x к x_x , то мы получим преобразования:

$$\rho(x_2 + x_3) = \alpha^2(x'_2 + x'_3) + 2\alpha\beta x'_1 + \beta^2(-x'_2 + x'_3) \text{ и т. д.}$$

Отсюда получаются, после приведения членов в надлежащий порядок и введения множителя 2 в коэффициент пропорциональности:

Проективные преобразования овального конического сечения $x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 0$ в себя (первая форма):

$$\begin{aligned} \rho x_1 &= 2(\alpha\delta + \beta\gamma)x'_1 + 2(\alpha\gamma - \beta\delta)x'_2 + 2(\alpha\gamma + \beta\delta)x'_3, \\ \rho x_2 &= 2(\alpha\beta - \gamma\delta)x'_1 + (\alpha^2 - \beta^2 - \gamma^2 + \delta^2)x'_2 + (\alpha^2 + \beta^2 - \gamma^2 - \delta^2)x'_3, \\ \rho x_3 &= 2(\alpha\beta + \gamma\delta)x'_1 + (\alpha^2 - \beta^2 + \gamma^2 - \delta^2)x'_2 + (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2)x'_3, \\ D &= 8(\alpha\delta - \beta\gamma)^3 \neq 0. \end{aligned}$$

Для дальнейших исследований (стр. 126—127) нам понадобится еще другая форма этих уравнений, которая получается с помощью подстановки:

$$\alpha = d + c, \quad \beta = a - b, \quad \gamma = a + b, \quad \delta = d - c$$

(после отбрасывания множителя 2).

Проективные преобразования овального конического сечения $x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 0$ в себя (вторая форма):

$$\begin{aligned} \rho x_1 &= (a^2 - b^2 - c^2 + d^2) x'_1 + 2(ac + bd) x'_2 + 2(ad + bc) x'_3, \\ \rho x_2 &= 2(ac - bd) x'_1 + (-a^2 - b^2 + c^2 + d^2) x'_2 + 2(-ab + cd) x'_3, \\ \rho x_3 &= 2(ad - bc) x'_1 + 2(ab + cd) x'_2 + (a^2 + b^2 + c^2 + d^2) x'_3, \\ D &= (-a^2 + b^2 - c^2 + d^2)^3 \neq 0. \end{aligned}$$

Для нулевых кривых посредством таких же рассуждений (или же посредством замены x_3 и x'_3 на ix_3 и ix'_3) получаем:

$$\begin{aligned} \rho x_1 &= 2(\alpha\delta + \beta\gamma) x'_1 + 2(\alpha\gamma - \beta\delta) x'_2 + 2i(\alpha\gamma + \beta\delta) x'_3, \\ \rho x_2 &= 2(\alpha\beta + \gamma\delta) x'_1 + (a^2 - \beta^2 - \gamma^2 + \delta^2) x'_2 + i(a^2 + \beta^2 - \gamma^2 - \delta^2) x'_3, \\ \rho x_3 &= 2i(-\alpha\beta - \gamma\delta) x'_1 + i(-a^2 + \beta^2 - \gamma^2 + \delta^2) x'_2 + (a^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2) x'_3. \end{aligned}$$

Определитель преобразования равняется $D = 8(\alpha\delta - \beta\gamma)^3 \neq 0$; это проще всего установить путем сравнения с определителем проективного преобразования овальной кривой в себя. Если мы хотим добиться того, чтобы действительные проективные преобразования, содержащиеся в предыдущих формулах, получались бы при действительных значениях параметров, то нам приходится сделать еще подстановки:

$$\alpha = d - ic, \quad \beta = -b - ia, \quad \gamma = b - ia, \quad \delta = d + ic.$$

После отбрасывания множителя 2 мы получаем:

Проективные преобразования нулевого конического сечения $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0$ в себя¹⁾

$$\begin{aligned} \rho x_1 &= (-a^2 - b^2 + c^2 + d^2) x'_1 + 2(-ac + bd) x'_2 + 2(ad + bc) x'_3, \\ \rho x_2 &= 2(-ac - bd) x'_1 + (a^2 - b^2 - c^2 + d^2) x'_2 + 2(-ab + cd) x'_3, \\ \rho x_3 &= 2(-ad + bc) x'_1 + 2(-ab - cd) x'_2 + (-a^2 + b^2 - c^2 + d^2) x'_3, \\ D &= (a^2 + b^2 + c^2 + d^2)^3 \neq 0. \end{aligned}$$

Вместе с тем мы получаем следующий результат: *Каждое нулевое и каждое овальное коническое сечение определяет собой*

¹⁾ Эти подстановки играют в математике очень важную роль; они называются *тройничными ортогональными подстановками*.

группу из ∞^6 мнимых и ∞^3 действительных проективных преобразований ¹⁾, оставляющих его инвариантным. Группа из ∞^6 мнимых проективных преобразований образует в обоих случаях одно связное семейство. Группа из ∞^3 действительных проективных преобразований нулевого конического сечения в себя также обладает этим свойством (так как для нулевой кривой определитель всегда положителен при действительных a, b, c, d), в то время как соответствующая группа для овального конического сечения распадается на два отдельных многообразия: $D = (-a^2 + b^2 - c^2 + d^2)^2 > 0$ и $< 0^2$).

Геометрически оба типа действительных проективных преобразований овальной кривой различаются следующим образом. Проективная плоскость является односторонней поверхностью, на которой группа всех действительных проективных преобразований образует одно связное семейство (стр. 34). При преобразованиях из подгруппы тех действительных проективных преобразований, которые оставляют инвариантным овальное коническое сечение, никакая точка, лежащая внутри конического сечения, не может перейти в точку, лежащую вне его; потому что через внутреннюю точку проходят две комплексно-сопряженные касательные к овальной кривой, через внешнюю — две действительные, и эти касательные, так же как и соответствующие точки, не могут перейти друг в друга при рассматриваемых действительных проективных преобразованиях. Но внутренняя область овального конического сечения является обыкновенным, простым образом ограниченным куском плоскости, который уже отнюдь не является односторонним, как вся проективная плоскость ³⁾. Поэтому мы здесь можем различать (как и в случаях прямой линии и пространства) два типа проективных преобразований, так как два противоположных направления обхода здесь уже не могут быть непрерывно переведены друг в друга. Позднее (ср. гл. VI, § 4) мы будем называть полученные таким образом два типа проективных преобразований *движениями* или *зеркальными отображениями*, в зависимости от того, сохраняется ли при этих преобразованиях направление обхода или же оно меняется на обратное.

В противоположность этому действительная проективная плоскость не разбивается нулевым коническим сечением, вследствие чего в этом случае односторонность сохраняется, и соответствующие проективные преобразования образуют одно связное

¹⁾ Это означает (стр. 57—58), что подобные проективные преобразования зависят от шести или, соответственно, от трех *действительных* параметров.

²⁾ Определители D , знаки которых здесь фигурируют, относятся к приведенному в тексте специальному параметрическому изображению; если мы допустим также и другие параметрические изображения, то знак определителя D , соответствующего данному проективному преобразованию, согласно стр. 34 будет неопределенным.

³⁾ Внешняя область точно так же, как и вся проективная плоскость, является односторонней.

семейство. В смысле только что введенной терминологии это означает, что *всякое проективное преобразование нулевого конического сечения в себя является движением*; зеркальные отображения здесь отсутствуют.

С. Инвариантные элементы. Для наглядного понимания проективных преобразований, переводящих данное коническое сечение само в себя, мы будем классифицировать эти преобразования прежде всего по элементам, оставляемым ими инвариантными. Начнем с доказательства следующего предложения:

При проективном преобразовании конического сечения в себя остаются инвариантными либо все точки, либо две точки, либо, наконец, одна дважды взятая точка конического сечения. В самом деле, при таком проективном преобразовании значения параметра $\lambda = \lambda_1: \lambda_2$ точек кривой претерпевают линейную подстановку (см. стр. 115):

$$\lambda = \frac{\alpha\lambda' + \beta}{\gamma\lambda' + \delta} \quad (\alpha\delta - \beta\gamma) \neq 0,$$

так что искомые неподвижные точки определяются уравнением: $\lambda' = \lambda$ или $\gamma\lambda' - (\alpha - \delta)\lambda - \beta = 0$. Но исследование этого уравнения, которое читатель легко может произвести сам, дает: *приведенная линейная подстановка определяет два различных значения λ , переходящих сами в себя, если $(\alpha - \delta)^2 + 4\beta\gamma \neq 0$. Если $(\alpha - \delta)^2 + 4\beta\gamma = 0$, но β или $\gamma \neq 0$, то существует одно единственное (дважды взятое) значение такого рода. Если же, наконец, $\beta = \gamma = \alpha - \delta = 0$, то подстановка является тождеством $\lambda = \lambda'$, переводящим все значения λ сами в себя¹⁾.* Этим наше предложение доказано.

Если, в частности, проективные преобразования, оставляющие инвариантными овальное или нулевое коническое сечение действительными, то в случае двух инвариантных точек конического сечения обе эти точки должны быть либо комплексно-сопряженными, либо обе действительными, в то время как дважды взятая точка обязательно должна быть действительной. В случае овальной кривой при действительном проективном преобразовании $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ будут также действительными, и потому здесь могут встретиться все три случая. Напротив, в случае нулевой кривой никаких действительных неподвижных точек не может быть (следовательно, в частности, и дважды взятой неподвижной точки), так как нулевая кривая не имеет ни одной действительной точки. Сопоставим все вместе: *действительное проективное преобразование овального конического сечения в себя, не являющееся тождеством, имеет либо две действительные, либо две комплексно-сопряженные, либо, наконец, одну дважды взятую неподвижную точку на инвариантном коническом сечении. Напротив, действительные проективные преобразования нулевого*

¹⁾ При этом мы отметим, что в случае $\gamma = 0$ значение $\lambda = \infty$ переходит само в себя; это значение необходимо считать допустимым, так как отношение $\lambda = \lambda_1: \lambda_2 = 1:0$ определяет точку кривой, являющуюся равноправной с другими точками кривой.

конического сечения, не являющиеся тождеством, всегда имеют две комплексно-сопряженные неподвижные точки. Никаких других неподвижных точек на коническом сечении нет.

В общем случае, в котором имеются две различные неподвижные точки на кривой, касательные в этих точках и соединяющая их прямая должны переходить сами в себя. Эти три прямые определяют собой так называемый *инвариантный треугольник проективного преобразования*, который частично может состоять и из мнимых элементов¹⁾. Точка пересечения обеих касательных является третьей неподвижной точкой, которую, вообще говоря, должно иметь всякое проективное преобразование плоскости (см. стр. 40). Если при проективном преобразовании на коническом сечении остается неподвижной дважды взятая точка, то инвариантный треугольник вырождается в (трижды взятую) прямую с лежащей на ней (трижды взятой) точкой.

При рассматриваемых проективных преобразованиях *кроме исходного конического сечения остаются инвариантными еще и другие кривые*. Чтобы их определить, введем проективные координаты, относящиеся к инвариантному треугольнику, причем предположим, что этот треугольник не вырождается. В этой системе координат наши проективные преобразования принимают следующий простой вид:

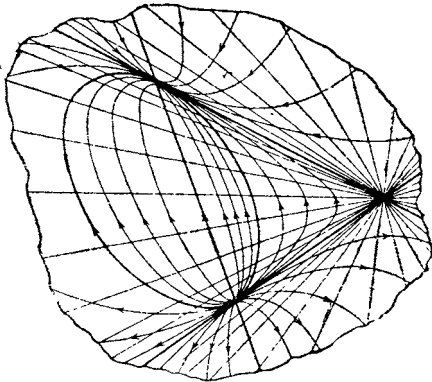
$$\rho y_1 = c_{11} y_1', \quad \rho y_2 = c_{22} y_2', \quad \rho y_3 = c_{33} y_3' \quad (D = c_{11} c_{22} c_{33} \neq 0),$$

так как только в этом случае каждая из трех прямых: $y_1 = 0$, $y_2 = 0$, $y_3 = 0$ переходит сама в себя. С помощью обращения приведенного на стр. 114 доказательства мы получаем, что при указанной системе координат инвариантное коническое сечение должно иметь уравнение $y_2^2 - k y_1 y_3 = 0$, где k — определенная постоянная, зависящая от выбора единичной точки. При указанном проективном преобразовании эта кривая переходит в $c_{22}^2 y_2'^2 - k c_{11} c_{33} y_1' y_3' = 0$. Следовательно, она остается инвариантной тогда и только тогда, когда коэффициенты проективного преобразования удовлетворяют еще условию: $c_{22}^2 - c_{11} c_{33} = 0$. Но тогда не только рассматриваемая кривая $y_2^2 - k y_1 y_3 = 0$ переходит сама в себя, но и всякая кривая вида $y_2^2 - k y_1 y_3 = 0$. Все эти конические сечения касаются обеих координатных прямых в тех же точках, как исходная инвариантная кривая. Это семейство кривых выглядит весьма различно в зависимости от свойств действительности инвариантного треугольника (ср. черт. 62 и 63).

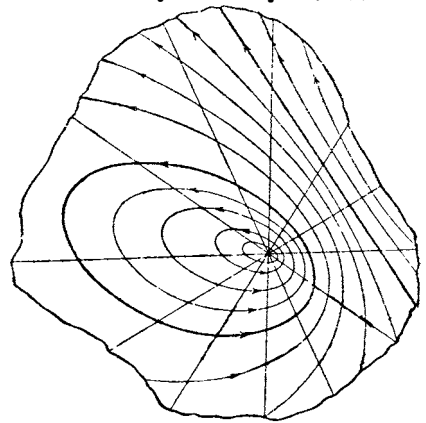
Если в случае овального конического сечения обе лежащие на нем неподвижные точки действительны, то все составные части инвариантного треугольника также будут действительными

¹⁾ Инвариантный треугольник проективного преобразования является касательным треугольником данного конического сечения, который, однако, в случае овальной кривой может обладать другими свойствами действительности, чем рассмотренный на стр. 114 касательный треугольник (ср. стр. 122).

(черт. 62, на котором овальное коническое сечение и рассматриваемый инвариантный треугольник изображены более толстыми линиями). Семейство кривых здесь выглядит так: исходное инвариантное коническое сечение (изображенное на чертеже в виде эллипса), расширяясь все более и более, переходит в параболу, а затем в гиперболы, которые в конце концов вырождаются в пару прямых, именно в пару инвариантных касательных нашего проективного преобразования. В остальных двух вертикальных углах, образованных парой касательных, опять имеем гиперболы, которые, делаясь все уже и уже, дают



Черт. 62.



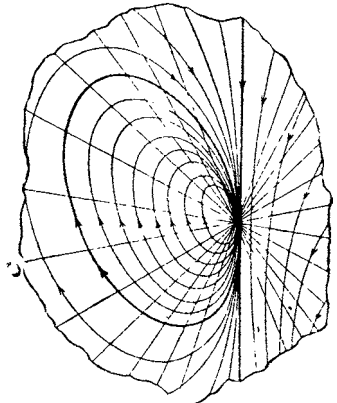
Черт. 63.

в пределе своими действительными точками часть прямой, соединяющей обе инвариантные точки конического сечения¹⁾. Далее, другая часть этой прямой, раздваиваясь, превращается в эллипсы, которые, расширяясь, переходят в исходную инвариантную кривую. К выяснению смысла других прямых, приведенных на черт. 62, мы перейдем в разделе D.

Если обе неподвижные точки овальной кривой являются комплексно-сопряженными, то мы получаем семейство кривых, изображенное на черт. 63. В этом случае в инвариантном треугольнике действительными являются только прямая, соединяющая обе комплексно-сопряженные неподвижные точки конического сечения, и противоположащая ей вершина, являющаяся ее полюсом. Рассматриваемое семейство состоит прежде всего из эллипсов, которые окружают неподвижную точку, лежащую внутри овальной кривой; далее эллипсы переходят в параболу, а затем в гиперболы, которые все теснее и теснее прилегают к прямой, соединяющей обе комплексно-сопряженные неподвижные точки, пока, наконец, в пределе с ней не сливаются.

¹⁾ Остальная часть прямой линии является предельным положением для мнимых точек кривой.

Между рассмотренными случаями находится случай дважды взятой неподвижной точки. Посредством надлежащего изменения предыдущих рассуждений можно получить тот результат, что все проективные преобразования, оставляющие инвариантным овальную кривую с дважды взятой неподвижной точкой, одновременно оставляют инвариантными также и все конические сечения, касающиеся в рассматриваемой неподвижной точке овальной кривой. Это семейство кривых имеет вид, указанный на черт. 64, не требующем никаких дальнейших пояснений вследствие предыдущих рассуждений. Если уравнением исходного конического сечения является уравнение $y_2^2 - y_1y_3 = 0$, а дважды взятой неподвижной точкой — точка $1:0:0$, то эти кривые определяются уравнением $y_2^2 - y_1y_3 + ky_3^2 = 0$; потому что единственной общей точкой каждой из этих кривых с данным коническим сечением является точка $y_3 = 0, y_2 = 0$.



Черт. 64.

В случае действительных проективных преобразований нулевой кривой в себя, не являющихся тождеством, всегда имеется пара комплексно-сопряженных неподвижных точек (см. стр. 120 — 121). Рассматриваемое семейство кривых всегда имеет вид, указанный на черт. 63; только в этом случае все действительные кривые равноправны: никакая из них не является отмеченной.

Д. Проективные преобразования как вращения. С помощью рассуждений предыдущего раздела можно легко выяснить наглядный смысл рассматриваемых проективных преобразований. Исследуем сначала проективные преобразования овальной кривой с двумя действительными неподвижными точками на ней. Уравнения этих преобразований, будучи отнесены к соответствующему инвариантному треугольнику, имеют следующий вид:

$$\rho y_1 = c_{11}y'_1, \quad \rho y_2 = c_{22}y'_2, \quad \rho y_3 = c_{33}y'_3 \quad (D = c_{11}c_{22}c_{33} \neq 0, \quad c_{22}^2 = c_{11}c_{33}).$$

Без ограничения общности мы можем предположить, что $c_{22} = 1$. Тогда для $c_{11} > 1, c_{33} = \frac{1}{c_{11}}$ получается множество проективных преобразований, непрерывно переводимых в тождественное $c_{11} = 1, c_{33} = 1$; аналогично этому второе множество получается при $0 < c_{11} < 1, c_{33} = \frac{1}{c_{11}}$. Напротив, в случае $c_{11} < 0$ проективные преобразования уже не могут быть переведены непрерывно в тождественное, так как значение $c_{11} = 0$ исключено. Два первых типа проективных преобразований можно получить, заставляя

непрерывно скользить точки плоскости из их исходного положения вдоль кривых рассмотренного семейства либо в направлении стрелок (черт. 62), либо в противоположном направлении, причем в каждый момент движения мы будем иметь некоторое проективное преобразование рассматриваемого типа. Напротив, если $c_{11} < 0$, то мы получаем зеркальные отображения (ср. стр. 119), которые мы сейчас ближе рассматривать не будем.

Чтобы выяснить, насколько сдвигаются отдельные точки при данном преобразовании, мы проведем через точку пересечения обеих касательных прямую и будем к ней применять все время одно и то же преобразование. Если эта прямая пересекает внутреннюю часть конического сечения, то она при последовательном применении этого преобразования будет неограниченно приближаться (например, в направлении, указанном стрелкой, черт. 62) к одной из касательных, никогда ее не достигая. (На чертеже те прямые, которые уж слишком близки к касательной, не изображены.) Если мы затем будем применять обратное проективное преобразование, то прямая будет приближаться аналогичным образом к другой касательной. При этом в случае действительных проективных преобразований точки прямой никогда не выйдут из угла, в котором лежит внутренняя часть овального конического сечения. Чтобы выяснить, как будут преобразовываться точки в смежном углу, проведем в нем вторую прямую, также проходящую через точку пересечения касательных, и будем к ней применять, как и в предыдущем случае, одно и то же проективное преобразование сначала в одном, а затем в другом направлении; при этом опять прямая будет неограниченно приближаться к одной из двух касательных. Следовательно, при рассматриваемых проективных преобразованиях всякая такая прямая вращается либо в направлении стрелок, либо в противоположном направлении, неограниченно приближаясь к одной из касательных, вследствие чего мы можем составить себе примерное представление о движении всех точек плоскости.

Соответствующие рассмотрения можно провести и в других случаях. Получающиеся результаты изображены на черт. 63 и 64. Мы особенно подчеркнем, что в случае проективных преобразований с дважды взятой действительной неподвижной точкой (черт. 64) имеется лишь одна единственная касательная, которая и является предельным положением для рассматриваемых прямых. Напротив, в случае проективных преобразований с комплексно-сопряженными неподвижными точками (черт. 63) в качестве предельного положения прямых мы получаем две комплексно-сопряженные касательные; здесь действительные точки плоскости двигаются по замкнутым кривым, которые ими пробегаются при достаточно большом числе повторений данного проективного преобразования как угодно много раз. Поэтому такие проективные преобразования заслуживают название *вращений* вокруг неподвижной точки, не лежащей на инвариантной кривой.

В переносном смысле это название можно применять также и к другим типам проективных преобразований, хотя эти последние, казалось бы, не имеют никакого сходства с евклидовыми вращениями (см., однако, примечание 1 на стр. 163). Теперь сопоставим вместе последние результаты следующим образом: Действительное проективное преобразование овального конического сечения в себя является либо движением, либо зеркальным отображением; можно различать три различные вида движений в зависимости от того, лежит ли центр вращения внутри, на контуре или вне овального конического сечения. Напротив, действительное проективное преобразование нулевого конического сечения в себя всегда является движением, которое может быть рассматриваемо, как вращение вокруг действительной неподвижной точки проективного преобразования.

Е. Проективные преобразования, переводящие данный вырождающийся образ в себя. Такие же рассмотрения как для невырождающихся конических сечений, могут быть проведены также и для всех вырождающихся образов таблицы на стр. 100. Но мы ограничимся рассмотрением только пары комплексно-сопряженных точек:

$$u_1^2 + u_2^2 = 0 \quad \text{или} \quad x_1^2 + x_2^2 = 0, \quad x_3 = 0,$$

так как в этом случае соответствующие проективные преобразования находятся, как мы это сейчас увидим, в замечательном отношении к евклидовой геометрии.

Проективные преобразования, оставляющие инвариантной данную пару комплексно-сопряженных точек, определяются следующими уравнениями:

Собственные проективные преобразования пары комплексно-сопряженных точек в себя:

$$\begin{aligned} \rho x_1 &= c_{11}x'_1 - c_{21}x'_2 + c_{13}x'_3, \\ \rho x_2 &= c_{21}x'_1 + c_{11}x'_2 + c_{23}x'_3, \\ \rho x_3 &= c_{33}x'_3, \end{aligned}$$

Несобственные проективные преобразования пары комплексно-сопряженных точек в себя:

$$\begin{aligned} \rho x_1 &= c_{11}x'_1 + c_{21}x'_2 + c_{13}x'_3, \\ \rho x_2 &= c_{21}x'_1 - c_{11}x'_2 + c_{23}x'_3, \\ \rho x_3 &= c_{33}x'_3, \end{aligned}$$

как это получается путем сравнения с формулами на стр. 110. Следовательно, мы получаем две четырехпараметрические группы, что соответствует тому факту, что пара комплексно-сопряженных точек требует для своего определения одним параметром меньше, чем невырождающаяся кривая (см. стр. 112).

Чтобы выяснить наглядное значение этих преобразований, удобнее перейти к аффинным координатам, приняв прямую, соединяющую обе комплексно-сопряженные точки пары, за бесконечно удаленную прямую. Если мы образуем отношения $x_1 : x_3$ и $x_2 : x_3$ и введем аффинные координаты $x = x_1 : x_3$ и

$y = x_2 : x_3$, для краткости обозначив $c_{13} : c_{33} = m$, $c_{23} : c_{33} = n$, то получим:

$$\begin{array}{l|l} x = \frac{c_{11}}{c_{33}} x' - \frac{c_{21}}{c_{33}} y' + m, & x = \frac{c_{11}}{c_{33}} x' + \frac{c_{21}}{c_{33}} y' + m, \\ y = \frac{c_{21}}{c_{33}} x' + \frac{c_{11}}{c_{33}} y' + n; & y = \frac{c_{21}}{c_{33}} x' - \frac{c_{11}}{c_{33}} y' + n. \end{array}$$

Определитель из коэффициентов при x' и y' имеет значение:

$$D = \frac{c_{11}^2 + c_{21}^2}{c_{33}^2}, \quad \Bigg| \quad D = - \frac{c_{11}^2 + c_{21}^2}{c_{33}^2}.$$

Следовательно, для действительных значений параметров определитель собственного проективного преобразования всегда положителен, несобственного — всегда отрицателен. Если, в частности, определитель собственного проективного преобразования равен $+1$ или же несобственного -1 :

$$c_{33}^2 = c_{11}^2 + c_{21}^2, \quad \Bigg| \quad c_{33}^2 = c_{11}^2 + c_{21}^2,$$

то мы получаем относительно прямоугольной системы координат x' , y' или движения, или зеркальные отображения евклидовой геометрии. Их мы привыкли изображать в следующем виде:

$$\begin{array}{l|l} x = \cos \varphi \cdot x' - \sin \varphi \cdot y' + m, & x = \cos \varphi \cdot x' + \sin \varphi \cdot y' + m, \\ y = \sin \varphi \cdot x' + \cos \varphi \cdot y' + n, & y = \sin \varphi \cdot x' - \cos \varphi \cdot y' + n. \end{array}$$

Непосредственно ясно, что эти формулы равносильны предыдущим. Если определитель D не равен ± 1 , то мы получаем преобразования подобия евклидовой плоскости, которые оставляют неизменными углы между двумя прямыми, но умножают расстояния между всякими двумя точками на не зависящий от пары точек множитель $\sqrt{|D|}$. Следовательно, евклидовы движения и зеркальные отображения плоскости обладают тем свойством, что они оставляют инвариантной пару комплексно-сопряженных точек $x_1^2 + x_2^2 = 0$, $x_3 = 0$ на бесконечно удаленной прямой. Самые общие проективные преобразования, обладающие этим свойством, являются преобразованиями подобия. Позднее мы увидим, что проективные преобразования невырождающегося конического сечения дают аналогичным образом движения в неевклидовых геометриях.

Г. Превращение различных случаев друг в друга. По § 6 гл. II мы можем превратить овальную кривую в пару комплексно-сопряженных точек, а затем в нулевую кривую (черт. 53), путем непрерывного изменения параметра ε в уравнении $u_1^2 + u_2^2 + \varepsilon u_3^2 = 0$ или, что сводится к тому же, в уравнении $x_1^2 + x_2^2 + \frac{1}{\varepsilon} x_3^2 = 0$ от его отрицательных значений до нуля и, далее, к его положительным значениям. При этом соответствующие проективные преобразования будут также непрерывно переходить

друг в друга. Чтобы проследить за этим аналитически, мы введем также и в уравнения проективных преобразований параметр ε , положив его соответственно равным -1 , 0 и $+1$ для исходной овальной кривой, пары комплексно-сопряженных точек и конечной нулевой кривой. Тогда мы можем проективные преобразования овальной кривой (стр. 118, вторая форма) и нулевой кривой (стр. 118) изобразить вместе в следующем виде:

$$\begin{aligned} \rho x_1 &= (-\varepsilon a^2 - b^2 + \varepsilon c^2 + d^2) x'_1 + 2(-\varepsilon ac + bd) x'_2 + 2(ad + bc) x'_3, \\ \rho x_2 &= 2(-\varepsilon ac - bd) x'_1 + (\varepsilon a^2 - b^2 - \varepsilon c^2 + d^2) x'_2 + 2(-ab + cd) x'_3, \\ \rho x_3 &= 2\varepsilon(-ad + bc) x'_1 + 2\varepsilon(-ab - cd) x'_2 + (-\varepsilon a^2 + b^2 - \varepsilon c^2 + d^2) x'_3, \\ D &= (\varepsilon a^2 + b^2 + \varepsilon c^2 + d^2)^3 \neq 0. \end{aligned}$$

Определенные этими уравнениями преобразования оставляют инвариантным коническое сечение $x_1^2 + x_2^2 + \frac{1}{\varepsilon} x_3^2 = 0$ также и при любом действительном $\varepsilon \neq 0$, потому что достаточно обозначить величину $a\sqrt{|\varepsilon|}$ опять через a и $c\sqrt{|\varepsilon|}$ через c , чтобы путем сравнения с формулами для проективного преобразования нулевого ($\varepsilon > 0$) или овального ($\varepsilon < 0$) конического сечения в себя (стр. 118 и 117) убедиться, что таким образом полученные подстановки действительно оставляют инвариантным уравнение $x_1^2 + x_2^2 + \frac{1}{\varepsilon} x_3^2 = 0$.

При $\varepsilon = 0$ получаются проективные преобразования:

$$\begin{aligned} \rho x_1 &= (-b^2 + d^2) x'_1 + 2bdx'_2 + 2(ad + bc) x'_3, \\ \rho x_2 &= -2bdx'_1 + (-b^2 + d^2) x'_2 + 2(-ab + cd) x'_3, \\ \rho x_3 &= (b^2 + d^2) x'_3, \\ D &= (b^2 + d^2)^3 \neq 0, \end{aligned}$$

которые, как легко видеть, оставляют инвариантной пару комплексно-сопряженных точек $x_1^2 + x_2^2 = 0$, $x_3 = 0$. В аффинных координатах эти уравнения имеют вид:

$$\begin{aligned} x &= \frac{-b^2 + d^2}{b^2 + d^2} x' + \frac{2bd}{b^2 + d^2} y' + m, \\ y &= \frac{-2bd}{b^2 + d^2} x' + \frac{-b^2 + d^2}{b^2 + d^2} y' + n; \end{aligned}$$

они изображают движения евклидовой геометрии, отнесенные к прямоугольной системе координат x' , y' . Вместе с тем мы одновременно получаем рациональное представление евклидовых движений.

Надо отметить, что при произведенном предельном переходе $\varepsilon \rightarrow 0$ для достаточно близких к нулю отрицательных значений ε

определитель $D = (\epsilon a^2 + b^2 + \epsilon c^2 + d^2)^3$ положителен (мы предполагаем, что либо b , либо $d \neq 0$, вследствие чего проективное преобразование при предельном переходе $\epsilon \rightarrow 0$ не делается неопределенным). Следовательно, мы объединили *движения* овальной кривой в себе с проективными преобразованиями кривой и можем теперь переводить их непрерывно друг в друга через *движения евклидовой геометрии*.

Если мы хотим аналогичным образом получить также и зеркальные отображения евклидовой геометрии, то нам нужно проективные преобразования овальной и нулевой кривой объединить вместе следующим образом:

$$\rho x_1 = (-a^2 - \epsilon b^2 + c^2 + \epsilon d^2) x'_1 + 2(-ac + \epsilon bd) x'_2 + 2(-ad - bc) x'_3,$$

$$\rho x_2 = 2(-ac - \epsilon bd) x'_1 + (a^2 - \epsilon b^2 - c^2 + \epsilon d^2) x'_2 + 2(ab - cd) x'_3,$$

$$\rho x_3 = 2\epsilon(ad - bc) x'_1 + 2\epsilon(ab + cd) x'_2 + (-a^2 + \epsilon b^2 - c^2 + \epsilon d^2) x'_3,$$

$$D = (a^2 + \epsilon b^2 + c^2 + \epsilon d^2)^3 \neq 0.$$

При отрицательных ϵ мы получаем из этих формул зеркальные отображения овальной кривой в себя (вторая форма), при $\epsilon = 0$ — зеркальные отображения евклидовой геометрии, а при положительных ϵ — проективные преобразования нулевой кривой в себя. Только теперь параметры обозначены иначе, чем на стр. 117 и 118, именно: в первом случае ρ заменено через $-\rho$ (значит, теперь мы получаем зеркальное отображение уже с положительным определителем), а в последнем случае a и c заменены через $-a$ и $-c$.

§ 3. Трехмерный случай

А. Комплексные проективные преобразования, переводящие невырождающийся образ сам в себя; сдвиги. Уравнения трех невырождающихся поверхностей второй степени относительно соответствующего полярного тетраэдра имеют вид:

Гольцеобразная поверхность:

$$x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 - x_4^2 = 0.$$

Овальная поверхность:

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_4^2 = 0.$$

Нулевая поверхность:

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 0.$$

Произведем теперь так же, как и на стр. 89 и 92, преобразования:

$$\rho y_1 = x_1 + x_3,$$

$$\rho y_2 = x_2 + x_4,$$

$$\rho y_3 = x_1 - x_3,$$

$$\rho y_4 = -x_2 + x_4,$$

$$D = -4;$$

$$\rho y_1 = x_1 + ix_3,$$

$$\rho y_2 = x_2 + x_4,$$

$$\rho y_3 = x_1 - ix_3,$$

$$\rho y_4 = -x_2 + x_4,$$

$$D = -4i;$$

$$\rho y_1 = x_1 + ix_3,$$

$$\rho y_2 = x_2 + ix_4,$$

$$\rho y_3 = x_1 - ix_3,$$

$$\rho y_4 = -x_2 + ix_4,$$

$$D = 4.$$

Вследствие этого уравнения трех поверхностей примут общий для всех трех поверхностей вид:

$$y_1 y_3 - y_2 y_4 = 0.$$

Этому уравнению мы можем удовлетворить, положив

$$\frac{y_1}{y_4} = \frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \lambda, \quad \frac{y_2}{y_3} = \frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \lambda,$$

и

$$\frac{y_1}{y_2} = \frac{\mu_1}{\mu_2} = \mu, \quad \frac{y_4}{y_3} = \frac{\mu_1}{\mu_2} = \mu$$

или же объединяя вместе эти формулы следующим симметрическим образом:

$$\rho y_1 = \lambda_1 \mu_1, \quad \rho y_2 = \lambda_1 \mu_2, \quad \rho y_3 = \lambda_2 \mu_2, \quad \rho y_4 = \lambda_2 \mu_1.$$

С геометрической стороны задание величин λ и μ определяет некоторую определенную образующую из первого семейства прямых и некоторую определенную образующую из второго. Обе эти прямые пересекаются в некоторой точке, которая, следовательно, однозначно определяется значениями параметров λ и μ .

Если теперь рассматриваемая поверхность остается инвариантной при проективном преобразовании, то всякая прямая, лежащая на поверхности, должна переходить в некоторую прямую такого же рода. Так как на поверхности имеется два непрерывных семейства прямых, то с самого начала мы можем различать два типа проективных преобразований: *собственные проективные преобразования*, которые переводят каждое из двух семейств прямых само в себя, и *несобственные проективные преобразования*, которые переставляют между собой оба семейства¹⁾. Как в случае собственных, так и в случае несобственных проективных преобразований каждой действительной или мнимой прямой λ первого семейства ставится во взаимно однозначное соответствие некоторая прямая λ' из первого семейства или соответственно прямая μ' из второго семейства. Посредством

¹⁾ Также и здесь различие между собственными и несобственными проективными преобразованиями имеет смысл только относительно данного инвариантного квадратичного образа (ср. сноску на стр. 109). Вообще мы можем всегда в нечетно-мерных многообразиях (например на прямой и в пространстве) различать подобные собственные и несобственные проективные преобразования, тогда как в четно-мерных многообразиях (например на плоскости) в комплексной области получается только одно единственное связанное семейство проективных преобразований данного квадратичного образа в себя; потому что основные образы высшей размерности, лежащие на невырождающейся гиперповерхности второй степени, образуют в случае четно-мерных многообразий одно единственное семейство, в то время как в случае нечетно-мерных — два различных семейства (ср. стр. 94); поэтому в последнем случае оба семейства могут при рассматриваемых проективных преобразованиях либо переставляться между собой, либо нет, тогда как в случае четной размерности эта возможность различия отпадает.

таких же рассуждений, как и в случае плоскости (стр. 115), получается, что эти значения выражаются с помощью линейной функции с отличным от нуля определителем. Следовательно, мы имеем:

Уравнения собственного проективного преобразования:

$$\lambda = \frac{\alpha\lambda' + \beta}{\gamma\lambda' + \delta}, \quad \mu = \frac{a\mu' + b}{c\mu' + d} \quad \begin{matrix} (\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0), \\ (ad - bc \neq 0). \end{matrix}$$

Уравнения несобственного проективного преобразования:

$$\mu = \frac{\alpha\lambda' + \beta}{\gamma\lambda' + \delta}, \quad \lambda = \frac{a\mu' + b}{c\mu' + d} \quad \begin{matrix} (\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0), \\ (ad - bc \neq 0). \end{matrix}$$

На стр. 131 и 132 мы увидим, что всякое подобное преобразование поверхности в себя однозначно определяет соответствующее проективное преобразование всего пространства.

Рассмотрим сначала собственные проективные преобразования. Всякое преобразование этого вида мы можем составить из двух особенно построенных проективных преобразований, именно:

$$\lambda = \frac{\alpha\lambda' + \beta}{\gamma\lambda' + \delta}, \quad \mu = \mu' \quad \text{и} \quad \lambda' = \lambda'', \quad \mu' = \frac{a\mu'' + b}{c\mu'' + d}.$$

При первом из проективных преобразований каждая из образующих второго семейства переходит сама в себя, тогда как образующие первого семейства сдвигаются так, что их точки скользят по образующим второго семейства (ср. черт. 65, на котором изображена одна из образующих первого семейства и ее образ). Аналогичным образом при втором из проективных преобразований все точки поверхности скользят по образующим первого семейства, все прямые которого переходят сами в себя (черт. 66). Оба эти типа проективных преобразований мы будем называть *сдвигами соответственно первого и второго рода*. Итак, всякое собственное проективное преобразование может быть получено посредством одного сдвига первого рода и последующего за ним одного сдвига второго рода.

Из определения сдвигов непосредственно следует, что два сдвига, произведенные в обратном порядке, дают тот же самый результат. Вследствие этого безразлично, какой из сдвигов мы произведем сначала. Две операции, обладающие этим свойством, называются между собой *перестановочными* (коммутативными).

В противоположность этому два сдвига, принадлежащие одному и тому же роду, вообще говоря, между собой не перестановочны, потому что, если мы произведем два сдвига:

$$\lambda = \frac{\alpha\lambda' + \beta}{\gamma\lambda' + \delta}, \quad \lambda'' = \frac{\alpha'\lambda'' + \beta'}{\gamma'\lambda'' + \delta'},$$

сначала в указанном порядке, а затем в обратном¹⁾, то мы получим, вообще говоря, различные результаты.

Несобственные проективные преобразования мы можем ближе не рассматривать, так как они непосредственно получаются из собственных:

$$\lambda = \frac{\alpha\lambda' + b}{c\lambda' + d}, \quad \mu = \frac{a\mu' + \beta}{\gamma\mu' + \delta}$$

путем комбинации с каким-нибудь специальным несобственным проективным преобразованием, например с таким:

$$\lambda' = \mu'', \quad \mu' = \lambda''.$$

До сих пор проективные преобразования невырождающейся поверхности в себя мы рассматривали только на самой поверхности. Распространение их на все пространство производится таким же путем, как и в случае плоскости (стр. 116—117). Собственные проективные преобразования:

$$\lambda = \frac{\alpha\lambda' + \beta}{\gamma\lambda' + \delta}, \quad \mu = \frac{a\mu' + b}{c\mu' + d} \quad \begin{matrix} (\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0), \\ (ad - bc \neq 0), \end{matrix}$$

определяются в однородных координатах: $\lambda = \lambda_1 : \lambda_2$ и $\mu = \mu_1 : \mu_2$, уравнениями:

$$\begin{aligned} \sigma\lambda_1 &= \alpha\lambda'_1 + \beta\lambda'_2, & \tau\mu_1 &= a\mu'_1 + b\mu'_2, \\ \sigma\lambda_2 &= \gamma\lambda'_1 + \delta\lambda'_2, & \tau\mu_2 &= c\mu'_1 + d\mu'_2. \end{aligned}$$

Пользуясь формулами стр. 129, отсюда получаем:

Общее собственное проективное преобразование поверхности $y_1y_3 - y_2y_4 = 0$ в себя:

$$ry_1 = \alpha ay'_1 + ab y'_2 + \beta by'_3 + \beta ay'_4,$$

$$ry_2 = \alpha cy'_1 + ad y'_2 + \beta dy'_3 + \beta cy'_4,$$

$$ry_3 = \gamma cy'_1 + \gamma dy'_2 + \delta dy'_3 + \delta cy'_4,$$

$$ry_4 = \gamma ay'_1 + \gamma by'_2 + \delta by'_3 + \delta ay'_4,$$

$$D = (\alpha\delta - \beta\gamma)^2 (ad - bc)^2 \neq 0.$$

Что определитель действительно имеет указанный вид, проще всего показать следующим образом. При сдвиге первого рода мы имеем:

$$\mu = \mu', \quad \text{следовательно, } b = c = 0, \quad a = d \neq 0.$$

¹⁾ Для этого в вышеприведенной формуле надо заменить $\alpha : \beta : \gamma : \delta$ через $\alpha' : \beta' : \gamma' : \delta'$, и наоборот.

Точно так же при сдвиге второго рода:

$$\lambda = \lambda', \text{ следовательно, } \beta = \gamma = 0, \quad \alpha = \delta \neq 0.$$

Если мы эти специальные значения подставим в вышеприведенное уравнение, то получим:

Сдвиги первого рода поверхности $y_1y_3 - y_2y_4 = 0$ в себя:

$$\rho y_1 = \alpha y'_1 + \beta y'_4,$$

$$\rho y_2 = \alpha y'_2 + \beta y'_3,$$

$$\rho y_3 = \gamma y'_2 + \delta y'_3,$$

$$\rho y_4 = \gamma y'_1 + \delta y'_4,$$

$$D_1 = (\alpha\delta - \beta\gamma)^2 \neq 0;$$

Сдвиги второго рода поверхности $y_1y_3 - y_2y_4 = 0$ в себя:

$$\rho y_1 = \alpha y'_1 + b y'_2,$$

$$\rho y_2 = c y'_1 + d y'_2,$$

$$\rho y_3 = d y'_3 + c y'_4,$$

$$\rho y_4 = b y'_3 + a y'_4,$$

$$D_2 = (ad - bc)^2 \neq 0.$$

Если оба эти сдвига мы произведем один за другим, то получим приведенное выше проективное преобразование. В самом деле, коэффициенты результирующего преобразования по стр. 28 получаются посредством правила умножения детерминантов (строки первого преобразования на столбцы второго):

$$\begin{vmatrix} \alpha & 0 & 0 & \beta \\ 0 & \alpha & \beta & 0 \\ 0 & \gamma & \delta & 0 \\ \gamma & 0 & 0 & \delta \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a & b & 0 & 0 \\ c & d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d & c \\ 0 & 0 & b & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha a & \alpha b & \beta b & \beta a \\ \alpha c & \alpha d & \beta d & \beta c \\ \gamma c & \gamma d & \delta d & \delta c \\ \gamma a & \gamma b & \delta b & \delta a \end{vmatrix}.$$

Но отсюда следует, что определитель общего проективного преобразования имеет вышеприведенный вид [так как определитель первого сдвига равен $D_1 = (\alpha\delta - \beta\gamma)^2$, а второго $D_2 = (ad - bc)^2$]. Аналогичным образом можно получить *уравнения несобственных проективных преобразований в точечных координатах*. Но их можно получить также путем комбинирования собственных проективных преобразований со специальным несобственным преобразованием:

$$\sigma\lambda_1 = \mu'_1, \quad \sigma\lambda_2 = \mu'_2, \quad \tau\mu_1 = \lambda'_1, \quad \tau\mu_2 = \lambda'_2.$$

В точечных координатах эти уравнения уже известным нам образом принимают следующий вид:

Специальное несобственное проективное преобразование поверхности $y_1y_3 - y_2y_4 = 0$:

$$\rho\sigma\tau y_1 = \sigma\tau\lambda_1\mu_1 = \mu'_1\lambda'_1 = \rho y'_1, \quad \rho y_1 = y'_1,$$

$$\rho\sigma\tau y_2 = \sigma\tau\lambda_1\mu_2 = \mu'_1\lambda'_2 = \rho y'_4, \quad \rho y_2 = y'_4,$$

$$\rho\sigma\tau y_3 = \sigma\tau\lambda_2\mu_2 = \mu'_2\lambda'_2 = \rho y'_3, \quad \rho y_3 = y'_3,$$

$$\rho\sigma\tau y_4 = \sigma\tau\lambda_2\mu_1 = \mu'_2\lambda'_1 = \rho y'_2, \quad \rho y_4 = y'_2,$$

ИЛИ $D = -1.$

Основные результаты этого раздела могут быть резюмированы следующим образом: *Всякая невырождающаяся поверхность второй степени определяет ∞^{12} собственных и ∞^{12} несобственных (вообще говоря комплексных) преобразований ¹⁾, переводящих поверхность самое в себя. Всякое собственное проективное преобразование может быть разложено одним и только одним способом на два сдвига. Несобственные проективные преобразования могут быть получены путем комбинирования собственных преобразований с каким-нибудь специальным несобственным проективным преобразованием.*

В. Действительные проективные преобразования. До сих пор все переменные и коэффициенты могли иметь произвольные комплексные значения. Для исследований в действительной области нам приходится принимать во внимание различия между отдельными невырождающимися поверхностями второй степени с точки зрения группы действительных проективных преобразований. Докажем теперь предложение: *оба сдвига, на которые может быть разложено всякое (не являющееся тождественным) собственное действительное проективное преобразование, в случае кольцеобразной и нулевой поверхности всегда являются действительными, в случае же овальной поверхности, напротив, — всегда комплексно-сопряженными.*

Доказательство получается с помощью того, установленного на стр. 93 факта, что каждое из двух семейств прямолинейных образующих нулевой или кольцеобразной поверхности комплексно сопряжено само себе, тогда как в случае овальной поверхности оба семейства взаимно комплексно сопряжены. Именно из определения сдвига вытекает, что это соотношение между обоими семействами прямых на поверхности существует также и между семействами сдвигов. Пусть теперь A является проективным преобразованием, составленным из сдвигов S_1 и S_2 соответственно первого и второго типа, следовательно, в символической записи $A = S_1 S_2$. Тогда $\overline{A} = \overline{S_1} \overline{S_2}$, причем \overline{A} , $\overline{S_1}$, $\overline{S_2}$ обозначают комплексно-сопряженные преобразования по отношению к A , S_1 , S_2 .

Но A является действительным преобразованием; поэтому $A = \overline{A}$ и, следовательно, $S_1 S_2 = \overline{S_1} \overline{S_2}$. Отсюда в силу однозначности разложения A вытекает, что

$$\text{или } S_1 = \overline{S_1}, \quad S_2 = \overline{S_2}, \quad \text{или } S_1 = \overline{S_2}, \quad S_2 = \overline{S_1}.$$

Для нулевых и кольцеобразных поверхностей каждое из обоих семейств сдвигов комплексно сопряжено само себе, так

¹⁾ То-есть проективные преобразования зависят от 12 (существенных) параметров; в самом деле, при определении проективных преобразований дело идет только об отношениях $a:b:c:d$ и $\alpha:\beta:\gamma:\delta$, так что проективные преобразования зависят от 2·3 комплексных, следовательно, от 12 действительных параметров.

что для них должен иметь место первый случай; для овальных же поверхностей оба семейства сдвигов взаимно комплексно сопряжены, поэтому для них имеет место второй случай; этим наше утверждение доказано полностью.

Разумеется, это доказательство могло быть проведено также и аналитически с помощью ранее (стр. 132) установленных формул для сдвигов. Но при этом получились бы громоздкие формулы, с которыми мы вследствие этого не хотим иметь дела, тем более, что позднее в интересующих нас случаях мы получим гораздо более простые формулы (ср. стр. 261 и следующие, а также гл. IX, § 1 и гл. XI, § 1). При этом нам потребуются уравнения обоих семейств сдвигов только в случае нулевых поверхностей. Чтобы их получить, мы переходим (совершенно так же, как и в случае плоскости) от введенных в предыдущем разделе A координат y_i к координатам x_i с помощью подстановок, приведенных на стр. 128, и соответствующим образом полагаем, например, в случае сдвигов первого типа:

$$a_1 = \alpha + \delta, \quad a_2 = \beta - \gamma, \quad a_3 = i(-\alpha + \delta), \quad a_4 = -i(\beta + \gamma).$$

Вследствие этого мы получаем ¹⁾:

Проективные преобразования нулевой поверхности $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 0$ в самое себя:

Сдвиги первого типа:

$$\rho x_1 = a'_1 x'_1 - a_2 x'_2 - a_3 x'_3 - a_4 x'_4,$$

$$\rho x_2 = a'_2 x'_1 + a_1 x'_2 + a_4 x'_3 - a_3 x'_4,$$

$$\rho x_3 = a'_3 x'_1 - a_4 x'_2 + a_1 x'_3 + a_2 x'_4,$$

$$\rho x_4 = a'_4 x'_1 + a_3 x'_2 - a_2 x'_3 + a_1 x'_4,$$

$$D = (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2)^2 \neq 0;$$

Сдвиги второго типа:

$$\rho x_1 = a'_1 x'_1 - a'_2 x'_2 - a'_3 x'_3 - a'_4 x'_4,$$

$$\rho x_2 = a_2 x'_1 + a'_1 x'_2 - a'_4 x'_3 + a'_3 x'_4,$$

$$\rho x_3 = a'_3 x'_1 + a'_4 x'_2 + a_1 x'_3 - a_2 x'_4,$$

$$\rho x_4 = a'_4 x'_1 - a'_3 x'_2 + a_2 x'_3 + a'_1 x'_4,$$

$$D = (a_1'^2 + a_2'^2 + a_3'^2 + a_4'^2)^2 \neq 0.$$

Так как дело идет только об отношениях x_i , то каждое из двух семейств сдвигов зависит от трех параметров; путем же комбинирования этих сдвигов мы получаем ∞^6 действительных проективных преобразований нулевой поверхности в себя.

Несобственные действительные проективные преобразования мы можем получить посредством комбинирования собственных преобразований с каким-нибудь специальным несобственным проективным преобразованием (например с приведенным на стр. 132). Это проективное преобразование всегда действительно, так как во всех трех случаях оно имеет приведенные ниже уравнения.

¹⁾ Проективные преобразования нулевой поверхности в себя имеют особую важность и называются также еще *кватернарными ортогональными подстановками* (ср. сноску на стр. 118).

Специальное несобственное проективное преобразование кольцеобразной, овальной или нулевой поверхности:

$$x_1^2 + x_2^2 \pm x_3^2 \pm x_4^2 = 0;$$

$$\rho x_1 = x'_1, \quad \rho x_2 = -x'_2, \quad \rho x_3 = x'_3, \quad \rho x_4 = x'_4 \quad (D = -1).$$

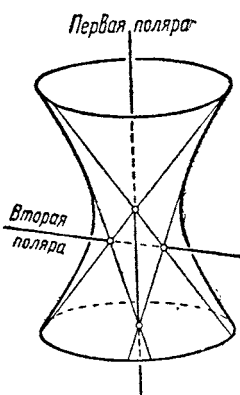
Во всех трех случаях собственные действительные проективные преобразования имеют всегда положительный определитель, несобственные же—всегда отрицательный. Первые мы будем в дальнейшем называть *движениями*, вторые—*зеркальными отображениями*. В случае проективных преобразований *овальной или нулевой поверхности* этим и исчерпываются все различные возможности. В частности, отметим, что внутренняя область овальной поверхности никогда не может перейти при действительном проективном преобразовании во внешнюю область (ср. соответствующее доказательство для случая плоскости). Напротив, *кольцеобразные поверхности* разбивают действительное проективное пространство на две равноправные части; существуют действительные проективные преобразования поверхности в себя как переводящие каждую из этих частей в себя, так и переставляющие обе эти части между собой. Каждое из этих проективных преобразований может иметь и положительный и отрицательный определитель, вследствие чего (совершенно так же, как и в случае пары действительных точек на прямой) всего получаются *четыре различных типа проективных преобразований*. Но подробное рассмотрение этого завело бы нас слишком далеко.

С. Инвариантные элементы. *В этом разделе мы ограничимся собственными действительными проективными преобразованиями, при которых каждое из двух семейств прямолинейных образующих переходит само в себя. По теореме, приведенной на стр. 120, при всяком определенном проективном преобразовании в каждом семействе остаются инвариантными либо две, либо одна¹⁾, либо, наконец, все прямолинейные образующие. Здесь мы ограничимся рассмотрением лишь общего случая, когда в каждом семействе остаются инвариантными две образующие. Остальные случаи могут быть рассматриваемы как вырождения этого.*

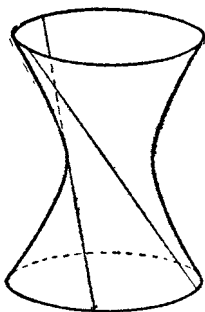
В указанном общем случае четыре, остающиеся инвариантными прямые поверхности образуют косоугольный четырехсторонник, который мы дополним до тетраэдра, присоединив две прямые, соединяющие противоположные вершины; при этом присоединенные прямые являются полярно сопряженными относительно поверхности. Вследствие этого мы получаем *инвариантный тетраэдр*, вершины, ребра и грани которого при рассматриваемом проективном преобразовании переходят сами в себя.

¹⁾ Этот случай может встретиться (по причине действительности) только на кольцеобразной поверхности.

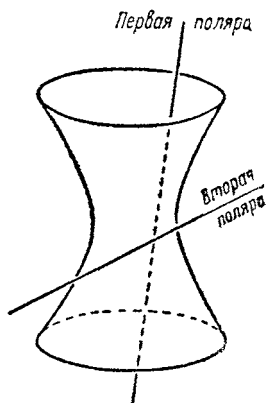
Теперь мы (точно так же, как и в случае плоскости) отнесем уравнения данного собственного проективного преобразования к соответствующему инвариантному тетраэдру. Прежде всего уравнение рассматриваемой инвариантной поверхности в подобной системе координат имеет вид: $y_1y_3 - \bar{k}y_2y_4 = 0$, где \bar{k} — зависящая от выбора единичной точки постоянная. Проективное преобразование, оставляющее инвариантной каждую грань инвариантного тетраэдра, должно иметь следующий специальный вид: $\rho y_1 = c_{11}y'_1$, $\rho y_2 = c_{22}y'_2$, $\rho y_3 = c_{33}y'_3$, $\rho y_4 = c_{44}y'_4$ ($D = c_{11}c_{22}c_{33}c_{44} \neq 0$), так как только в этом случае координатные плоскости будут переходить сами в себя. Подобным же образом, как и в случае плоскости, мы можем, далее, заключить, что проективное преобразование тогда и только тогда оставляет инвариантной данную поверхность, когда его коэффициенты удовлетворяют условию



Черт. 67.



Черт. 68.

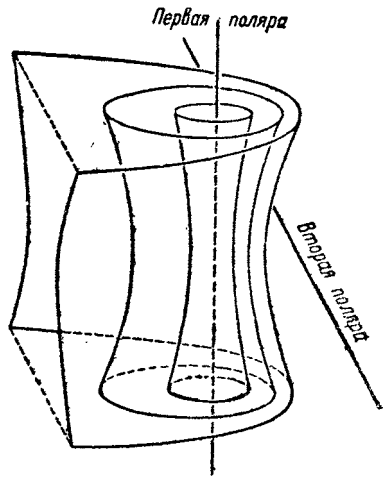


Черт. 69.

$c_{11}c_{33} - c_{22}c_{44} = 0$. Но в этом случае проективное преобразование оставляет инвариантной не только положенную в основу всего рассмотрения поверхность, но и всякую поверхность вида: $y_1y_3 - ky_2y_4 = 0$.

Перейдем теперь к рассмотрению различных возможностей, могущих здесь представиться. Для кольцеобразных поверхностей нам приходится различать три случая; потому что, во-первых, при действительных проективных преобразованиях обе инвариантные образующие как в первом, так и во втором семействе могут быть действительными; во-вторых, эти образующие могут быть действительными в одном семействе и комплексно-сопряженными в другом; наконец, в-третьих, обе пары образующих могут быть комплексно-сопряженными. В первом случае все составные части соответствующего тетраэдра будут действительными (черт. 67), во втором случае действительными будут только образующие одного из семейств (черт. 68) и в третьем — действительны будут только полярно сопряженные

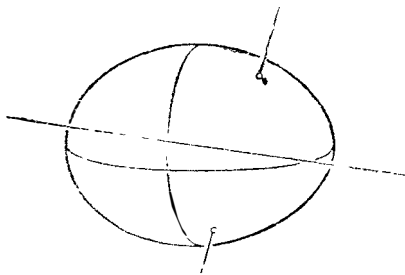
прямые (первая и вторая поляры на черт. 69). Вид соответствующего семейства поверхностей мы приведем только для последнего случая (черт. 70). Мы получаем сначала тесно прилегающие к первой поляре однополостные гиперболоиды, которые затем, расширяясь, переходят в основную поверхность и, далее, в гиперболический параболоид. С другой стороны к этому параболоиду примыкают также однополостные гиперболоиды (на черт. 70 не изображенные); мы можем их получить посредством такого преобразования пространства, которое поменяло бы местами первую поляру и вторую, оставляя при этом инвариантным гиперболический параболоид. Следовательно, эти гиперболоиды окружают вторую поляру таким же образом, как ранее рассмотренные — первую; именно: они становятся все уже и уже, пока, наконец, не превращаются во вторую поляру.



Черт. 70.

В случае *овальных поверхностей* все инвариантные тетраэдры обладают одинаковыми свойствами

действительности; потому что в этом случае при действительных проективных преобразованиях инвариантными остаются всегда две мнимые прямые из одного семейства и соответствующие комплексно-сопряженные прямые, лежащие в другом семействе (стр. 93). Вид соответствующего инвариантного тетраэдра мы



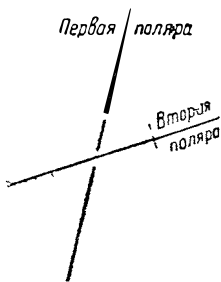
Черт. 71.

уже выяснили на стр. 92: он имеет два действительных ребра, два лежащие на поверхности действительных вершины и две действительные грани, касающиеся поверхности в этих вершинах (черт. 71). Соответствующее семейство поверхностей имеет следующий вид. Прежде всего отметим, что поверхности семейства касаются обеих действительных граней инвариантного тетраэдра в двух действительных

неподвижных точках первой поляры. Далее, лежащий внутри поверхности отрезок поляры, раздуваясь, превращается в эллипсоид, который, постепенно расширяясь, переходит в исходную поверхность. Затем задняя часть эллипсоида, изображенного на черт. 71, все более и более отодвигается от наблюдателя, в результате чего получается эллиптический параболоид, который потом превращается в двуполостные гиперболоиды. Эти же

последние превращаются в пару плоскостей, определяемую второй полярной и обеими действительными точками на первой полярной. Далее, мы получаем опять двуполостные гиперболоиды, которые, делаясь все уже и уже, превращаются, наконец, во вторую часть первой полярной, лежащую вне исходной поверхности.

Инвариантный тетраэдр *нулевой поверхности* всегда обладает такими же свойствами действительности, как тетраэдр в третьем случае кольцеобразных поверхностей, т. е. действительными у него являются только обе сопряженные полярные (черт. 72). Соответствующее семейство поверхностей всегда имеет вид, приведенный на черт. 70, только теперь никакая из действительных поверхностей не является отмеченной, тогда как в прежнем случае таковой была исходная кольцеобразная поверхность.



Черт. 72.

В предыдущем разделе мы доказали, что оба сдвига, на которые разлагается всякое собственное действительное проективное преобразование невырождающейся поверхности, в случае кольцеобразной и нулевой поверхности являются действительными, в случае же овальной поверхности, напротив, мнимыми. Это мы можем сделать сейчас геометрически наглядным. В случае сдвига первого типа все образующие второго семейства (стр. 130) и (вообще говоря) две образующие первого семейства (стр. 135) остаются на месте. Отсюда следует, что и точки последних двух образующих (каждая в отдельности) остаются на месте.

Вследствие этого при таком сдвиге всякая точка пространства должна двигаться по прямой, определяемой самой рассматриваемой точкой и обеими неподвижными образующими¹⁾. Совершенно так же обстоит дело и со сдвигами второго типа. Но непосредственно ясно, что в случае кольцеобразной и нулевой поверхности в соответствующем семействе инвариантных поверхностей имеются действительные прямые такого рода (ср., например, черт. 70), тогда как в случае овальных поверхностей (черт. 71) этого нет, так что в этом случае не может быть действительных сдвигов. Далее имеем: рассматриваемые проективные преобразования, соответствующие черт. 70, можно получить, сдвигая точки пространства сначала вдоль прямых одного семейства образующих нашей поверхности, а затем вдоль прямых другого семейства. Каждое из этих семейств характеризуется тем, что оно содержит все прямые, пересекающие две определенные сопряженные сильномнимые прямые пространства.

¹⁾ В линейчатой геометрии совокупность этих пересекающих прямых называется *линейной конгруэнцией*; обе соответствующие неподвижные прямые называются *ведущими прямыми этой конгруэнции*.

D. Вращения и винтообразные движения. Приведенные на стр. 136 собственные проективные преобразования поверхности: $y_1y_3 - k y_2y_4 = 0$ в себя могут быть также написаны в следующем простом виде:

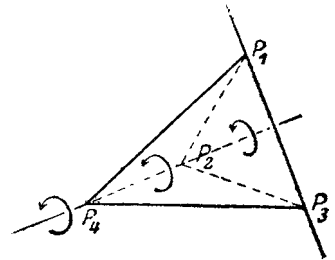
$$\rho y_1 = e^{i\varphi} y'_1, \quad \rho y_2 = e^{i\psi} y'_2, \quad \rho y_3 = e^{-i\varphi} y'_3, \quad \rho y_4 = e^{-i\psi} y'_4,$$

потому что тогда будет выполнено условие $c_{11}c_{33} - c_{22}c_{44} = 0$, которому должны удовлетворять коэффициенты проективного преобразования. Это проективное преобразование может быть расчленено на два этапа; именно: сначала мы будем менять только φ , полагая при этом $\psi = 0$, а затем будем менять ψ , полагая $\varphi = 0$:

$$\text{I} \begin{cases} \rho y_1 = e^{i\varphi} y'_1, \\ \rho y_2 = y'_2, \\ \rho y_3 = e^{-i\varphi} y'_3, \\ \rho y_4 = y'_4, \end{cases} \quad \text{II} \begin{cases} \rho y'_1 = y''_1, \\ \rho y'_2 = e^{i\psi} y''_2, \\ \rho y'_3 = y''_3, \\ \rho y'_4 = e^{-i\psi} y''_4. \end{cases}$$

потому что, с одной стороны, путем комбинирования этих двух проективных преобразований получается общее собственное проективное преобразование, а, с другой стороны, каждое из них оставляет инвариантной исходную поверхность.

При проективном преобразовании I всякая плоскость $y_2 : y_4 = \lambda$ переходит в $y'_2 : y'_4 = \lambda$, т. е. сама в себя, так что каждая точка осматривается в плоскости, определяемой самой рассматриваемой точкой и координатной осью P_1P_3 , уравнения которой являются уравнения $y_2 = 0, y_4 = 0$. Далее, каждая точка прямой P_2P_4 остается инвариантной. Эти проективные преобразования схематически изображены на черт. 73. При этом проективные преобразования, получающиеся в плоскостях, проходящих через P_1P_3 , совпадают с преобразованиями, рассмотренными на стр. 124 и названными там вращениями, причем центром вращения является точка пересечения плоскости с прямой P_2P_4 . Поэтому мы будем называть рассматриваемые проективные преобразования (*пространственными вращениями*) *вращениями вокруг оси P_2P_4* .



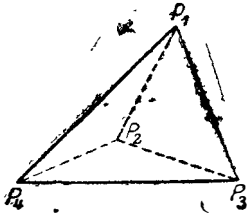
Черт. 73.

При этих проективных преобразованиях прямая P_1P_3 переходит сама в себя. В окрестности этой прямой точки пространства представляются двигающимися почти параллельно этой прямой. Поэтому проективное преобразование I может быть с таким же правом названо не вращением вокруг P_2P_4 , а поступательным движением вдоль P_1P_3 . В самом деле, каждое из этих названий отмечает определенное свойство рассматриваемого проективного преобразования, так как в окрестности

P_2P_4 оно выглядит, как вращение, в окрестности P_1P_3 , напротив, как поступательное движение.

Аналогичным образом проективное преобразование Π можно назвать вращением вокруг прямой P_1P_3 , либо поступательным движением вдоль прямой P_2P_4 .

В разделе А мы показали, что всякое проективное преобразование общей поверхности второй степени с невырождающимся инвариантным тетраэдром, может быть получено путем комбинирования двух сдвигов, из которых один происходит вдоль прямых инвариантного тетраэдра P_1P_2 , P_3P_4 , а другой — вдоль прямых P_1P_4 , P_2P_3 (черт. 74), причем эти четыре прямые лежат на самой исходной поверхности. Теперь же мы выяснили, что всякое такое преобразование может быть получено путем вращения вокруг прямой P_1P_3 (т. е. поступательного движения вдоль прямой P_2P_4) и последующего за ним вращения вокруг прямой P_2P_4 (т. е. поступательного движения вдоль прямой P_1P_3); при этом прямые P_1P_3 и P_2P_4 являются полярно сопряженными относительно исходной поверхности.



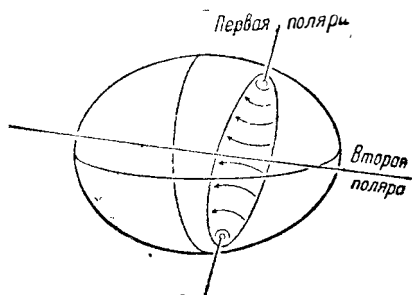
Черт. 74.

Разложение собственного проективного преобразования на два вращения (точно так же, как и на два сдвига) является всегда выполнимым только в комплексной области.

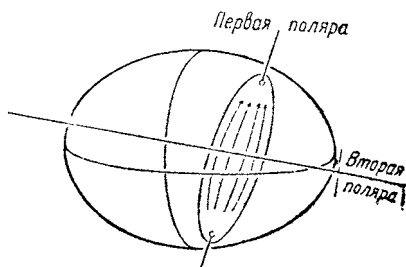
Теперь мы будем *учитывать свойства в действительной области* и выясним прежде всего, в каких случаях *действительное* проективное преобразование может быть разложено на два *действительных* вращения. Обе сопряженные поляры инвариантного тетраэдра, являющиеся осями наших вращений, будут (см. стр. 136) для кольцеобразных поверхностей в первом и в третьем случае действительными (черт. 67 и 69), напротив, во втором случае — мнимыми (черт. 68); для овальных и нулевых поверхностей эти обе оси всегда действительны (черт. 71 и 72). Далее, легко показать, что рассматриваемые вращения будут действительными или мнимыми в зависимости от того, являются ли соответствующие оси действительными или мнимыми. Итак, мы получаем: *При действительных проективных преобразованиях кольцеобразной поверхности в себя оба соответствующих вращения в зависимости от типа проективного преобразования будут либо действительными, либо мнимыми; напротив, при действительных преобразованиях овальной и нулевой поверхности они всегда действительны.*

Пути, по которым двигаются точки пространства при определенном вращении, могут быть легко получены. Мы произведем соответствующие исследования только для случаев овальных и нулевых поверхностей. При определенном собственном проективном преобразовании овальной поверхности в себя остаются инвариантными две сопряженные поляры (черт. 71). При этом мы в соответствии со стр. 135 исключим тот предельный случай,

когда эти полярны касаются поверхности. Тогда внутри овальной поверхности существуют остающиеся инвариантными определенными эллипсоиды, которые касаются исходной инвариантной поверхности в обеих точках пересечения поверхности с первой полярной (стр. 137). При вращениях вокруг этой полярны точки двигаются (как это изображено на черт. 75) по эллипсам, которые получаются от пересечения указанных поверхностей плоскостями, проходящими через вторую полярну. Аналогичным образом при вращениях вокруг второй полярны точки двигаются по эллипсам, которые получаются при пересечении указанных поверхностей с плоскостями, проходящими через первую полярну (черт. 76); при этом отдельные точки неограниченно приближаются к одной из двух неподвижных точек на первой полярне, никогда



Черт. 75.

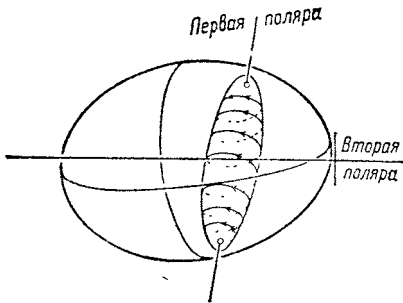


Черт. 76.

ее не достигая. В рассматриваемой части пространства первое вращение носит характер евклидова вращения, тогда как второе вращение, напротив, носит характер поступательного движения.

Соответствующие результаты получаются и в случае проективных преобразований нулевой поверхности в себя. При отдельном вращении каждая поверхность семейства, изображенного на черт. 70, переходит сама в себя. При вращении вокруг первой полярны точки пространства двигаются по коническим сечениям, получающимся от пересечения рассматриваемой поверхности пучком плоскостей, проходящих через вторую полярну. Следовательно, в окрестности первой полярны точки двигаются по эллипсам, окружающим эту полярну. На гиперболическом параболоиде получаются параболы, а на следующих за ним гиперболоидах — гиперболы. Наконец, мы получаем вторую полярну, которая при рассматриваемом вращении остается инвариантной. При вращении вокруг второй полярны получается обратная картина; в окрестности первой полярны точки двигаются по гиперболам, в окрестности второй — по эллипсам. При этом особенно ясно видно, что в окрестности одной полярны рассматриваемое вращение имеет характер евклидова вращения, тогда как в окрестности другой полярны, напротив, оно имеет характер евклидова поступательного движения.

Эти рассуждения могут быть продолжены еще следующим образом. Всякое собственное преобразование овальной и нулевой поверхности можно получить, произведя сначала вращение вокруг первой, а затем вокруг второй поляр (т. е. поступательное движение вдоль первой поляр). Мы можем этот результат получить также при одновременном выполнении обоих вращений,

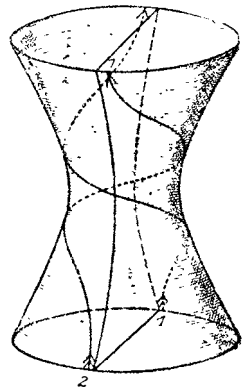


Черт. 77.

вследствие чего возникает так называемое *винтообразное движение* (аналогично тому, как в евклидовой геометрии комбинация вращения вокруг некоторой оси с поступательным движением вдоль этой оси дает винтообразное движение). Отдельные точки пространства движутся при этом по винтовым линиям, лежащим на соответствующих инвариантных поверхностях. В случае овальной поверхности эти винтовые линии обегают эллипсоиды бесчисленное множество раз, приближаясь неограниченно к обеим неподвижным точкам, но никогда их не достигая (черт. 77). Непосредственно ясно, как можно получить эти кривые путем комбинации кривых черт. 75 и 76. В случае нулевых поверхностей точки пространства движутся аналогичным образом по винтовым линиям, лежащим на кольцеобразных поверхностях черт. 70. Эти винтовые линии могут быть, в частности, замкнутыми кривыми, как это показано на черт. 78 для одной из них. Притом эта винтовая линия асимптотически приближается к отмеченной гиперболе и образует вследствие этого с точки зрения проективной геометрии замкнутую кривую. К этой винтовой линии мы еще вернемся на стр. 271, где мы познакомимся с удобным способом ее изображения.

Е. Проективные преобразования, оставляющие инвариантным вырождающийся образ. На стр. 126 мы видели, что евклидовы движения плоскости оставляют инвариантной определенную пару комплексно-сопряженных точек на бесконечно удаленной прямой. Аналогично этому евклидовы движения в пространстве обладают свойством оставлять инвариантным некоторое определенное нулевое коническое сечение. Для доказательства найдем те проективные преобразования, которые переводят нулевое коническое сечение:

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0, \quad x_4 = 0 \quad \text{или} \quad u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 = 0$$



Черт. 78.

в себя. Путем сравнения с соответствующими формулами для случая плоскости (стр. 118) мы находим, что эти проективные преобразования имеют следующий вид¹⁾:

$$\begin{aligned} \rho x_1 &= (-a^2 - b^2 + c^2 + d^2) x'_1 + 2(-ac + bd) x'_2 + 2(ad + bc) x'_3 + c_{14} x'_4, \\ \rho x_2 &= 2(-ac - bd) x'_1 + (a^2 - b^2 - c^2 + d^2) x'_2 + 2(-ab + cd) x'_3 + c_{24} x'_4, \\ \rho x_3 &= 2(-ad + bc) x'_1 + 2(-ab - cd) x'_2 + (-a^2 + b^2 - c^2 + d^2) x'_3 + c_{34} x'_4, \\ \rho x_4 &= c_{44} x'_4. \end{aligned}$$

Если мы перейдем к аффинным координатам: $x = x_1 : x_4$, $y = x_2 : x_4$, $z = x_3 : x_4$, и положим, далее, $1 : c_{44} = p$ (c_{44} всегда $\neq 0$), то получим уравнения этих преобразований в виде:

$$\begin{aligned} x &= p(-a^2 - b^2 + c^2 + d^2) x' + 2p(-ac + bd) y' + 2p(ad + bc) z' + \bar{c}_{14}, \\ y &= 2p(-ac - bd) x' + p(a^2 - b^2 - c^2 + d^2) y' + 2p(-ab + cd) z' + \bar{c}_{24}, \\ z &= 2p(-ad + bc) x' + 2p(-ab - cd) y' + p(-a^2 + b^2 - c^2 + d^2) z' + \bar{c}_{34}. \end{aligned}$$

Определитель из коэффициентов при x' , y' и z' имеет значение:

$$D = p^3 \{a^2 + b^2 + c^2 + d^2\}^3.$$

Если этот определитель равен $+1$ или -1 , то

$$p = \frac{1}{a^2 + b^2 + c^2 + d^2} \quad \text{или} \quad p = \frac{-1}{a^2 + b^2 + c^2 + d^2},$$

и преобразования, как легко видеть, дают соответственно евклидовы движения или зеркальные отображения относительно прямоугольной системы координат x' , y' , z' ; если же определитель имеет произвольное значение, то мы получаем преобразование подобия.

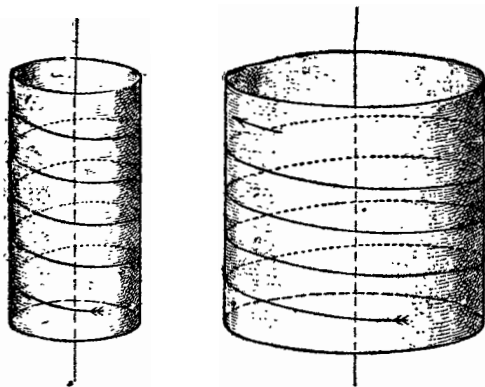
Итак, евклидовы движения и зеркальные отображения пространства обладают свойством оставлять инвариантным коническое сечение $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0$, $x_4 = 0$, лежащее на бесконечно удаленной плоскости. Самыми общими проективными преобразованиями, обладающими этим свойством, являются преобразования подобия. (Ср. соответствующее предложение для случая плоскости, стр. 126).

Совершенно таким же образом можно было бы рассмотреть проективные преобразования, оставляющие инвариантным какой-нибудь другой из вырождающихся образов, приведенных на стр. 107. Но эти исследования для дальнейшего имеют лишь второстепенное значение.

¹⁾ Девять коэффициентов при x'_1 , x'_2 и x'_3 определяют тройничную ортогональную подстановку.

Г. Превращение различных случаев друг в друга. На стр. 106 мы видели, что овальные поверхности могут быть непрерывно превращаемы в нулевое коническое сечение, а затем в нулевые поверхности. При этом соответствующие проективные преобразования будут также переходить друг в друга. Аналитически мы можем это показать таким же образом, как и в случае плоскости (см. стр. 126 и следующие), объединяя вместе все соответствующие формулы посредством введения параметра ε в одну единственную формулу. Если мы положим $\varepsilon=0$, то получим опять лишь движения и зеркальные отображения евклидовой геометрии, а не общие преобразования подобия, которые оставляют инвариантным соответствующее нулевое коническое сечение.

Интересно выяснить геометрически, каким образом проективные преобразования овальной и нулевой поверхности в себя превращаются в движения и зеркальные отображения евклидовой



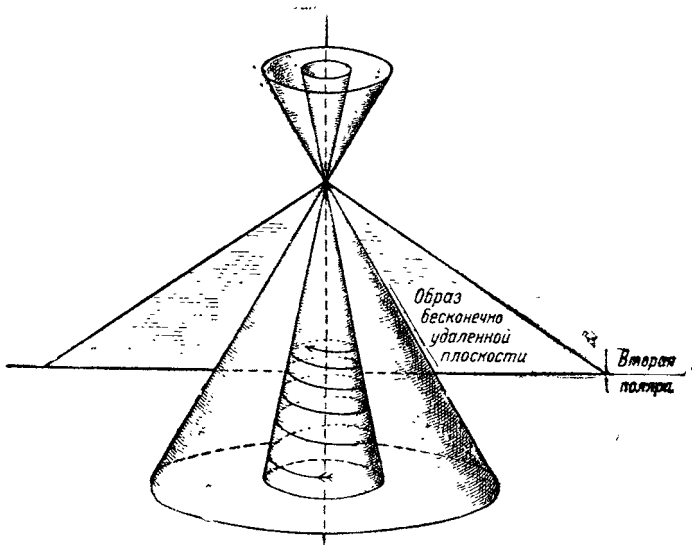
Черт. 79.

геометрии; мы это сделаем для движений, соответствующих трем образам. Общее собственное проективное преобразование нулевой поверхности в себя мы можем всегда в действительной области разложить как на два сдвига, так и на два вращения, в то время как в случае овальных поверхностей возможно разложение только на два вращения. Для движений евклидовой геометрии существует также только эта последняя возможность раз-

ложения. Здесь мы известным образом можем каждое движение пространства получить посредством винтового движения, т. е. посредством вращения вокруг определенной оси G и одновременного поступательного движения вдоль этой оси. С проективной точки зрения мы можем рассматривать поступательное движение тоже как вращение вокруг лежащей в бесконечно удаленной плоскости оси G' , определяемой плоскостью, перпендикулярной к G . Обе эти прямые G и G' полярно сопряжены относительно нулевого конического сечения (т. е. точка, в которой конечная прямая G пересекает бесконечно удаленную плоскость, является полюсом прямой G' относительно нулевого конического сечения). Относительно этих двух осей имеют место такие же факты, как и в случае невырождающихся поверхностей. Вращения вокруг прямой G могут рассматриваться также, как сдвиги вдоль бесконечно удаленной оси G' , и вращения вокруг бесконечно удаленной оси G , — как сдвиги вдоль конеч-

ной прямой G . Единственное отличие от случая невырождающихся поверхностей заключается в том, что теперь в силу вырождения исходного образа поляра всегда лежит в определенной плоскости. Вследствие этого и происходит, что группа евклидовых движений имеет более простое строение, чем соответствующая группа для невырождающихся поверхностей; именно: каждое из ∞^6 евклидовых движений с самого начала распадается на вращение вокруг точки и на поступательное движение.— свойство, которым проективные преобразования невырождающихся поверхностей не обладают.

При винтовых движениях евклидовой геометрии точки пространства двигаются по винтовым линиям, лежащим на цилиндрах



Черт. 80.

с общей осью. Сначала винтовые линии выются весьма близко от оси, затем их расстояние от оси делается все больше и больше (черт. 79). Отчетливое представление о характере этого движения в окрестности бесконечно удаленной плоскости мы получим, сделав преобразование, переводящее бесконечно удаленную плоскость в конечную (черт. 80). Теперь винтовые линии лежат уже на конусах, которые сначала весьма тесно прилегают к винтовой оси, затем все более и более расширяются и наконец в пределе превращаются в дважды взятый образ бесконечно удаленной плоскости. Отдельные винтовые линии, лежащие на конусах, неограниченно приближаются к вершине конусов, никогда их не достигая.

При чисто поступательном движении точки пространства двигаются по образующим конусов (эти образующие могут быть

получены посредством пересечения пучком плоскостей, проходящих через первую полярю); при чистом вращении точки пространства двигаются по замкнутым эллипсам (именно эллипсам, которые могут быть получены посредством пересечения пучком плоскостей, проходящих через вторую полярю). Следовательно, мы получаем положение вещей, совершенно аналогичное тому, которое имеется в случае овальных и нулевых поверхностей. Читатель может сам преобразовать инвариантные эллипсоиды на черт. 75—77 в двуполостные гиперboloиды и убедиться в том, что эти фигуры постепенно могут быть переведены в фигуры черт. 80 и двух соответствующих. Чтобы осуществить такое же превращение для черт. 70, нужно горловые эллипсы, изображенных слева гиперboloидов, стянуть в одну точку, именно — в вершину будущих конусов; но это превращение не столь наглядно, как предыдущее.

ВТОРАЯ ЧАСТЬ

ПРОЕКТИВНОЕ МЕРООПРЕДЕЛЕНИЕ

Глава IV

ВНЕСЕНИЕ ЕВКЛИДОВОЙ МЕТРИКИ В ПРОЕКТИВНУЮ СИСТЕМУ

§ 1. Основные метрические формулы евклидовой геометрии

В первой части этой книги мы познакомились с основами проективной геометрии. В ней совсем не фигурируют метрические понятия, как, например, понятие длины или угла, так как они не являются инвариантными по отношению к группе проективных преобразований, которые там рассматривались. Настоящая глава показывает, каким образом в проективную систему могут быть внесены понятия евклидовой геометрии. Мы начнем с установления некоторых метрических формул, которые нам понадобятся для дальнейшего.

А. Формулы расстояния. Мы введем на прямой линии аффинную систему координат, в которой единичный отрезок равен единице длины. Тогда расстояние между двумя точками x и x' будет $r = x - x'$ или, если мы введем однородные координаты: $x = x_1 : x_2$ и $x' = x'_1 : x'_2$,

$$r = \frac{x_1}{x_2} - \frac{x'_1}{x'_2} = \frac{x_1 x'_2 - x_2 x'_1}{x_2 x'_2}.$$

На плоскости и в пространстве мы будем пользоваться прямоугольной декартовой системой координат, в которой единичные отрезки по всем осям равняются единице длины (ср. стр. 11). Тогда расстояние между двумя точками x, y и x', y' на плоскости будет: $r = \pm \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2}$. Если ввести однородные координаты: $x = x_1 : x_3, y = x_2 : x_3$, то мы получим:

$$r = \pm \frac{\sqrt{(x_1 x'_3 - x_3 x'_1)^2 + (x_2 x'_3 - x_3 x'_2)^2}}{x_3 x'_3}.$$

Аналогично этому в пространстве расстояние между двумя точками x, y, z и x', y', z' выражается так:

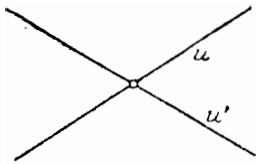
$$r = \pm \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2}.$$

При введении однородных координат $x = x_1 : x_4$, $y = x_2 : x_4$, $z = x_3 : x_4$, мы отсюда получаем:

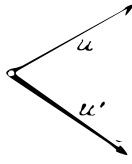
$$r = \pm \frac{\sqrt{(x_1 x'_4 - x_4 x'_1)^2 + (x_2 x'_4 - x_4 x'_2)^2 + (x_3 x'_4 - x_4 x'_3)^2}}{x_4 x'_4}.$$

В элементарной геометрии r всегда рассматривают, как положительное. Но такой выбор одного значения корня в комплексной области плоскости и пространства, которую мы теперь будем рассматривать, не может быть сделан, так что в этом случае мы будем рассматривать r как двuzначную функцию.

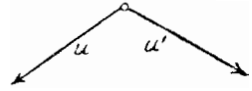
В. Формулы угла. Аналогичным образом мы установим формулы угла между двумя прямыми на плоскости или двумя



Черт. 81.



Черт. 82.



Черт. 83.

плоскостями в пространстве. В случае плоскости мы будем определять прямые уравнениями:

$$u_1 x + u_2 y + u_3 = 0$$

и

$$u'_1 x + u'_2 y + u'_3 = 0,$$

или координатами:

$$u_1 : u_2 : u_3$$

и

$$u'_1 : u'_2 : u'_3.$$

При определении угла ω между двумя прямыми нужно иметь в виду, что мы будем это делать для прямых, а не для полупрямых; следовательно, угол между двумя прямыми имеет вид, указанный на черт. 81, а не на черт. 82 и 83. За положительное вращение на евклидовой плоскости мы принимаем вращение против часовой стрелки и определяем угол между двумя прямыми u и u' как величину положительного вращения, совмещающего прямую u с прямой u' . Если мы после выполнения этого вращения прямую u еще повернем на угол π , то обе прямые опять-таки совпадут; следовательно, по нашему определению угол определяется лишь с точностью до числа, кратного π . Далее, искомым угол ω равняется углу между прямыми $u_1 x + u_2 y = 0$ и $u'_1 x + u'_2 y = 0$, проходящими через начало координат и параллельными данным прямым. Следовательно, в формулу угла обе координаты u_3 и u'_3 не входят. После простых выкладок мы

получаем для тригонометрических функций угла следующие выражения:

$$\cos \omega = \pm \frac{u_1 u'_1 + u_2 u'_2}{\sqrt{u_1^2 + u_2^2} \cdot \sqrt{u'^2_1 + u'^2_2}},$$

$$\sin \omega = \pm \frac{u_1 u'_2 - u_2 u'_1}{\sqrt{u_1^2 + u_2^2} \cdot \sqrt{u'^2_1 + u'^2_2}},$$

$$\operatorname{tg} \omega = \frac{u_1 u'_2 - u_2 u'_1}{u_1 u'_2 + u_2 u'_1}.$$

В выражениях для $\cos \omega$ и $\sin \omega$ знак остается неопределенным, так как в противном случае угол определялся бы с точностью до числа, кратного 2π , что противоречит нашему определению угла. Однако знаки перед $\cos \omega$ и $\sin \omega$ должны выбираться согласованным образом; т. е. если задана определенная система значений $\cos \omega = p$, $\sin \omega = q$, то кроме этой системы допустима лишь система значений $\cos \omega = -p$, $\sin \omega = -q$. Получающиеся вследствие этого в области $0 \leq \omega < 2\pi$ два значения для ω отличаются друг от друга на π , что согласуется с нашим определением угла. Две системы значений: $\cos \omega = -p$, $\sin \omega = q$ и $\cos \omega = p$, $\sin \omega = -q$, дают величину смежного угла. Для $\operatorname{tg} \omega$ неопределенности в знаке уже нет; и в самом деле, ω определяется значением тангенса лишь с точностью до числа, кратного π .

Аналогичным образом в пространстве для угла между двумя плоскостями $u_1 : u_2 : u_3 : u_4$ и $u'_1 : u'_2 : u'_3 : u'_4$ получаются формулы:

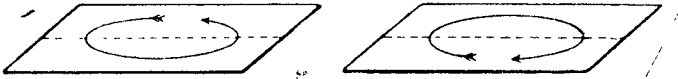
$$\cos \omega = \pm \frac{u_1 u'_1 + u_2 u'_2 + u_3 u'_3}{\sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2} \cdot \sqrt{u'^2_1 + u'^2_2 + u'^2_3}},$$

$$\sin \omega = \pm \frac{\sqrt{(u_1 u'_2 - u_2 u'_1)^2 + (u_1 u'_3 - u_3 u'_1)^2 + (u_2 u'_3 - u_3 u'_2)^2}}{\sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2} \cdot \sqrt{u'^2_1 + u'^2_2 + u'^2_3}},$$

$$\operatorname{tg} \omega = \pm \frac{\sqrt{(u_1 u'_2 - u_2 u'_1)^2 + (u_1 u'_3 - u_3 u'_1)^2 + (u_2 u'_3 - u_3 u'_2)^2}}{u_1 u'_1 + u_2 u'_2 + u_3 u'_3}.$$

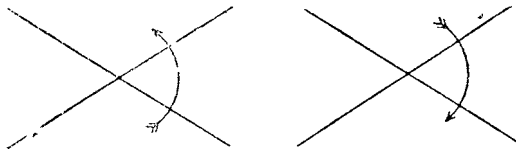
В выражение для $\operatorname{tg} \omega$ входит квадратный корень, так что в пространстве и для тангенса приходится брать двойной знак. Геометрически это соответствует тому, что в пространстве нельзя положить никакое определенное направление вращения в основу исчисления углов, потому что, если мы выберем для этого на какой-нибудь плоскости положительное направление вращения (черт. 84, слева) и перевернем эту плоскость так, чтобы она опять совпала со своим прежним направлением (черт. 84, справа), то направление вращения при новом положении плоскости будет как раз противоположно направлению вращения при старом положении. Поэтому при определении угла между двумя пло-

скостями приходится рассматривать как равноправные оба направления вращения, указанные на черт. 85, т. е. уже нельзя делать различия между данным углом и его смежным. Этой неопределенности как раз и соответствует двойной знак при $\operatorname{tg} \omega$



Черт. 84.

В соответствии с этим мы можем произвольно распоряжаться знаками при $\cos \omega$ и $\sin \omega$; следовательно, теперь мы получаем в интервале $0 \leq \omega < 2\pi$, вообще говоря, четыре различных значения для ω , а не два, как в случае плоскости. Расстояниями



Черт. 85.

между двумя точками и углами между двумя прямыми или плоскостями еще не исчерпываются все метрические понятия. В качестве дальнейших примеров укажем на расстояние точки от прямой

или от плоскости или же на угол между прямой и плоскостью; вообще всякий раз, когда даны два каких-нибудь основных образа, мы можем всегда образовать соответствующее метрическое понятие. Но все эти понятия можно свести к рассмотренным двум основным понятиям, так что мы можем для наших целей ограничиться приведенными выше формулами.

§ 2. Исследование метрических формул; круговые точки и шаровой круг

В элементарной геометрии при рассмотрении расстояний и углов ограничиваются только действительными элементами. Введение мнимых элементов вносит совершенно новые взаимоотношения, которые будут иметь для нас основное значение, так как с их помощью особенно просто осуществляется переход к неевклидовым геометриям.

А. Рассмотрение формул расстояния. На плоскости мы получили для расстояния между двумя точками формулу:

$$r = \pm \frac{\sqrt{(x_1x'_3 - x_3x'_1)^2 + (x_2x'_3 - x_3x'_2)^2}}{x_3x'_3}$$

Ее числитель обращается в нуль, если $(x_1x'_3 - x_3x'_1)^2 + (x_2x'_3 - x_3x'_2)^2 = 0$. Возьмем определенную точку P с координатами: $x_1 : x_2 : x_3$, ($x_3 \neq 0$). Тогда все точки $x'_1 : x'_2 : x'_3$ ($x'_3 \neq 0$) плоскости, координаты которых удовлетворяют этому уравнению,

будут находиться на нулевом расстоянии от точки P . Но это уравнение распадается на

$$\begin{cases} x_1x'_3 - x_3x'_1 = i(x_2x'_3 - x_3x'_2), \\ x_1x'_3 - x_3x'_1 = -i(x_2x'_3 - x_3x'_2), \end{cases} \text{ или } \begin{cases} -x_3x'_1 + ix_3x'_2 + (x_1 - ix_2)x'_3 = 0, \\ -x_3x'_1 - ix_3x'_2 + (x_1 + ix_2)x'_3 = 0; \end{cases}$$

так как величины $x_1 : x_2 : x_3$ являются постоянными, то каждое из этих уравнений линейно относительно текущих координат $x'_1 : x'_2 : x'_3$ и изображает прямую, проходящую через точку P . Если мы перейдем к аффинным координатам $x' = x'_1 : x'_3$ и $y' = x'_2 : x'_3$, то эти уравнения примут следующий вид:

$$-x' + iy' + \text{const.} = 0, \quad -x' - iy' + \text{const.} = 0.$$

Полученные прямые называются *изотропными прямыми* или *минимальными прямыми*¹⁾. Итак, на плоскости через каждую собственную²⁾ действительную или мнимую точку P проходят две особенные прямые линии, все собственные точки которых находятся на нулевом расстоянии от точки P . Отсюда следует, далее, что и для всякой другой пары собственных точек на минимальной прямой расстояние между ними также равно нулю, так что измерение длин на такой прямой невозможно.

Совокупность минимальных прямых распадается (как это вытекает из соответствующих аффинных уравнений) на два семейства параллельных между собой прямых. Следовательно, с проективной точки зрения мы можем рассматривать два семейства как два пучка прямых, центры которых лежат на бесконечно удаленной прямой. Оба эти центра называются *минимальными круговыми точками плоскости*³⁾. Проще всего их определить как точки пересечения прямых $x + iy = 0$ и $x - iy = 0$ с бесконечно удаленной прямой. В однородных координатах $x = x_1 : x_3$; $y = x_2 : x_3$ они могут быть определены уравнениями:

$$x_1^2 + x_2^2 = 0, \quad x_3 = 0$$

или координатами $1 : i : 0$ и $1 : -i : 0$. Мы хотим особенно подчеркнуть, что (как это видно из формулы расстояния) *все собственные точки плоскости находятся на неопределенном (а не на бесконечно большом) расстоянии от обеих круговых точек*. Поэтому, когда круговые точки называют, как это часто случается, „бесконечно удаленными“ круговыми точками, это не должно вводить в заблуждение.

¹⁾ Термин „изотропные“ отмечает то обстоятельство, что оба семейства этих прямых остаются инвариантными при движениях евклидовой геометрии (ср. стр. 155), следовательно, их направления остаются неизменными (*ὅσος τρίπος*—равное направление). Второе название, „минимальные прямые“ отмечает то обстоятельство, что всякий конечный отрезок такой прямой имеет нулевую длину.

²⁾ Точка, прямая или плоскость называется *собственной*, если она не является бесконечно удаленной (ср. стр. 12).

³⁾ Как это мы увидим на стр. 156, все круги плоскости проходят через обе эти точки.

Приведенное выше определение изотропных прямых теперь можно сформулировать следующим образом: *прямая является изотропной, если она проходит через круговую точку*. С точки зрения этой формулировки нужно рассматривать *бесконечно удаленную прямую тоже как изотропную*; она отличается от остальных прямых тем, что проходит через обе (а не через одну) круговые точки.

В пространстве имеет место аналогичное положение вещей. Формула расстояния между двумя точками здесь имеет вид:

$$r = \pm \frac{\sqrt{(x_1x'_4 - x_4x'_1)^2 + (x_2x'_4 - x_4x'_2)^2 + (x_3x'_4 - x_4x'_3)^2}}{x_4x'_4}.$$

Координаты точек, находящихся на нулевом расстоянии от данной собственной точки $x_1 : x_2 : x_3 : x_4$ ($x_4 \neq 0$), удовлетворяют следующему уравнению:

$$(x_1x_4 - x_4x'_1)^2 + (x_2x_4 - x_4x'_2)^2 + (x_3x_4 - x_4x'_3)^2 = 0, \quad x_4 \neq 0, x_4 \neq 0.$$

В аффинных координатах это уравнение имеет вид:

$$(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2 = 0$$

и, следовательно, изображает нулевой конус с вершиной в рассматриваемой точке. Итак, *в пространстве через каждую собственную точку проходят не две, а ∞^1 минимальных прямых*, именно, образующих указанного конуса. Всякие два таких конуса, соответствующие различным точкам пространства, могут быть совмещены друг с другом посредством параллельного перенесения. Поэтому все они пересекают бесконечно удаленную плоскость по одному и тому же нулевому коническому сечению, которое называется *мнимым шаровым кругом пространства*¹⁾. Проще всего его определить как сечение конуса $x^2 + y^2 + z^2 = 0$ бесконечно удаленной плоскостью. В однородных координатах его уравнениями являются:

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0, \quad x_4 = 0.$$

Совершенно так же, как и на плоскости, расстояние между всякими двумя собственными точками на любой минимальной прямой равняется нулю, в то время как расстояние любой точки шарового круга от собственных точек пространства неопределенно. С точки зрения проективной геометрии мы можем теперь называть прямую изотропной, если она имеет по крайней мере одну общую точку с шаровым кругом; тогда, в частности, все бесконечно удаленные прямые будут рассматриваться как изотропные.

¹⁾ Это нулевое коническое сечение может быть определено тем, что через него проходят все шары пространства.

В. Исследование формул углов. Аналогичным образом, как для расстояния, мы сейчас рассмотрим формулы для угла. На плоскости угол ω между двумя прямыми $u_1 : u_2 : u_3$ и $u'_1 : u'_2 : u'_3$ определяется формулами:

$$\cos \omega = \pm \frac{u_1 u'_1 + u_2 u'_2}{\sqrt{u_1^2 + u_2^2} \sqrt{u'^2_1 + u'^2_2}}, \quad \sin \omega = \pm \frac{u_1 u'_2 - u_2 u'_1}{\sqrt{u_1^2 + u_2^2} \sqrt{u'^2_1 + u'^2_2}}.$$

Если числитель $\cos \omega$ равен нулю, то обе прямые, как легко видеть, находятся в гармоническом отношении с обеими изотропными прямыми, соответствующими их точке пересечения. Если же обращается в нуль числитель $\sin \omega$, то имеет место $u_1 : u_2 = u'_1 : u'_2$, и обе прямые оказываются параллельными. Наконец, если в нуль обращается знаменатель, то для случая $u^2_1 + u^2_2 = 0$ прямая u является изотропной, а для случая $u'^2_1 + u'^2_2 = 0$ — прямая u' , потому что по стр. 101 приведенные условия представляют собой уравнение пары круговых точек в прямолинейных координатах; та из прямых, координаты которой удовлетворяют этому уравнению, должна проходить через одну из двух круговых точек, т. е. должна быть изотропной.

Дальнейшие исследования будут протекать несколько иначе, чем в случае формул расстояния, так как величина угла ω дается тригонометрическими функциями. Мы ограничимся рассмотрением случая, когда ни одна из двух прямых не является бесконечно удаленной. Прежде всего, если обе прямые изотропны и параллельны между собой:

$$u_1 = \varepsilon i u_2, \quad u'_1 = \varepsilon i u'_2, \quad \varepsilon = \pm 1,$$

то как числитель, так и знаменатель $\cos \omega$ и $\sin \omega$ равняются нулю. Следовательно, параллельные изотропные прямые образуют между собой неопределенный угол. Напротив, если обе прямые изотропны и различного рода, т. е. если одна прямая проходит через первую, а другая через вторую круговую точку: $u_1 = \varepsilon i u_2$, $u'_1 = -\varepsilon i u'_2$, $\varepsilon = \pm 1$, то получаем $\cos \omega = \infty$, $\sin \omega = \infty$; отсюда из теоретико-функциональных соображений (мы ведь сейчас не ограничиваемся действительной областью) следует $\omega = \infty^1$. Итак, две непараллельные изотропные (собственные) прямые образуют между собой бесконечно большой угол. Аналогичным образом находим: угол между (собственной) изотропной прямой и неизотропной прямой бесконечно велик. Напротив, если ни одна из двух прямых неизотропна, то мы всегда получаем определенный конечный угол. В частности, угол равняется нулю тогда и только тогда, когда обе прямые параллельны; далее,

¹⁾ $\cos \omega$ и $\sin \omega$ являются целыми трансцендентными функциями, не обращающимися, следовательно, в бесконечность ни при каком конечном значении ω ; поэтому если $\cos \omega$ и $\sin \omega$ неограниченно возрастают при некотором изменении ω , то аргумент ω при этом изменении должен стремиться к бесконечности.

прямые взаимно перпендикулярны, если они находятся в гармоническом отношении к обеим изотропным прямым, проходящим через их точку пересечения.

В пространстве формулы угла между двумя плоскостями имеют вид:

$$\cos \omega = \pm \frac{u_1 u'_1 + u_2 u'_2 + u_3 u'_3}{\sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2} \cdot \sqrt{u'^2_1 + u'^2_2 + u'^2_3}},$$

$$\sin \omega = \pm \frac{\sqrt{(u_1 u'_2 - u_2 u'_1)^2 + (u_1 u'_3 - u_3 u'_1)^2 + (u_2 u'_3 - u_3 u'_2)^2}}{\sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2} \cdot \sqrt{u'^2_1 + u'^2_2 + u'^2_3}}.$$

Если числитель $\cos \omega$ равняется нулю, то обе рассматриваемые плоскости находятся в гармоническом отношении с двумя плоскостями, проходящими через их линию пересечения касательно к шаровому кругу, потому что уравнение, о котором идет речь, может быть получено посредством приравнивания нулю полярной формы шарового круга $u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 = 0$ (ср. стр. 67). Если равняется нулю числитель $\sin \omega$, то обе плоскости пересекаются (если они вообще не совпадают) по изотропной прямой. Доказательство получается следующим образом. Если прежде всего либо все u_1, u_2, u_3 , либо все u'_1, u'_2, u'_3 одновременно равняются нулю, т. е. одна из двух плоскостей совпадает с бесконечно удаленной плоскостью, то наше утверждение очевидно; если же этого нет, то линия пересечения двух рассматриваемых плоскостей параллельна линии пересечения проходящих через начало координат плоскостей: $u_1 x_1 + u_2 x_2 + u_3 x_3 = 0$ и $u'_1 x_1 + u'_2 x_2 + u'_3 x_3 = 0$, параллельных исходным плоскостям. Последние две плоскости, в частности, могут совпадать; тогда исходные плоскости параллельны между собой и, значит, пересекаются по бесконечно удаленной прямой. Если и этого нет, то проходящие через начало координат плоскости пересекаются по конечной прямой, точки которой удовлетворяют условию:

$$x_1 : x_2 : x_3 = \left| \begin{array}{cc} u_2 & u_3 \\ u'_2 & u'_3 \end{array} \right| : - \left| \begin{array}{cc} u_1 & u_3 \\ u'_1 & u'_3 \end{array} \right| : \left| \begin{array}{cc} u_1 & u_2 \\ u'_1 & u'_2 \end{array} \right|.$$

Вследствие обращения в нуль числителя $\sin \omega$ отсюда получается: $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0$, т. е. точки прямой пересечения лежат на изотропной прямой. Наконец, если знаменатель равняется нулю, то координаты одной или обеих плоскостей удовлетворяют уравнению шарового круга; следовательно, рассматриваемые плоскости либо являются бесконечно удаленными, либо касаются шарового круга: *такие плоскости называются изотропными.*

Для величины ω отсюда получаются следующие предложения: *две параллельные изотропные (собственные) плоскости образуют между собой неопределенный угол. Непараллельные изотропные (собственные) плоскости и, точно так же, изотропная (собственная) плоскость с неизотропной плоскостью образуют*

между собой бесконечно большой угол. Напротив, если никакая из двух плоскостей неизотропна, мы всегда получаем определенный конечный угол. В частности, угол равняется нулю тогда и только тогда, когда плоскости, не будучи сами изотропными, пересекаются по изотропной прямой. Далее, две плоскости взаимно перпендикулярны, если они находятся в гармоническом отношении к двум изотропным плоскостям, проходящим через их линию пересечения. Мы особенно подчеркнем, что в комплексной области пространства обращение в нуль угла не является критерием параллельности двух плоскостей.

С. Круговые точки и шаровой круг. Предыдущие рассуждения показали, что евклидовы формулы расстояния на плоскости и в пространстве тесно связаны с некоторым однократно вырождающимся квадратичным образом, именно или с парой круговых точек или с мнимым шаровым кругом¹⁾. На прямой линии соответствующую роль играет (считаемая дважды) бесконечно удаленная точка, которую мы также можем рассматривать как вырождающийся квадратичный образ (ср. таблицу на стр. 83). Эти так называемые „фундаментальные образы“ имеют основное значение для всей евклидовой метрики. Так, например, уже в гл. III мы видели, что евклидовы движения и преобразования подобия оставляют инвариантными эти фундаментальные образы. Это предложение мы можем теперь доказать следующим, очень простым способом. Именно, так как при движениях и зеркальных отображениях все длины сохраняются, то при них совокупность минимальных прямых (на которых, ведь, каждый отрезок имеет нулевую длину) должна переходить сама в себя. Это же имеет место и в случае преобразований подобия, при которых все длины умножаются на постоянный множитель. Но тогда и элементы, являющиеся общими для всех минимальных прямых, должны переходить сами в себя при рассматриваемых преобразованиях: эти элементы как раз и образуют пару круговых точек и шаровой круг.

В заключение мы хотим еще оправдать термины „мнимые круговые точки плоскости“ и „мнимый шаровой круг пространства“. В обычных прямоугольных декартовых координатах уравнения круга и шаровой поверхности имеют вид:

$$\text{Круг: } x^2 + y^2 + 2Ax + 2By + C = 0.$$

$$\text{Шар: } x^2 + y^2 + z^2 + 2Ax + 2By + 2Cz + D = 0.$$

В однородных координатах эти уравнения принимают следующий вид:

$$\text{Круг: } x_1^2 + x_2^2 + 2Ax_1x_3 + 2Bx_2x_3 + Cx_3^2 = 0.$$

$$\text{Шар: } x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2Ax_1x_4 + 2Bx_2x_4 + 2Cx_3x_4 + Dx_4^2 = 0.$$

Точки пересечения круга с бесконечно удаленной прямой $x_3 = 0$

¹⁾ Читатель может сам найти место, которое эти квадратичные образы занимают в таблицах на стр. 100 и 107.

или, соответственно, линия пересечения шара с бесконечно удаленной плоскостью $x_4=0$ определяются уравнениями:

$$x_3 = 0, \quad x_1^2 + x_2^2 = 0, \quad \text{или} \quad x_4 = 0, \quad x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0.$$

Итак, всякий круг плоскости проходит через обе круговые точки и всякий шар пространства проходит через шаровой круг. Это предложение еще раз показывает нам, что фундаментальные образы находятся на неопределенном расстоянии от всякой собственной точки: потому что, проведем ли мы вокруг собственной точки окружность или шар радиусом 0,001 мм, или 1 см, или 1 км всегда эта кривая или поверхность пройдет как раз через фундаментальный образ.

Приведенное предложение можно обратить следующим образом: *всякая кривая второго порядка, проходящая через обе круговые точки является кругом, и всякая поверхность второго порядка, содержащая шаровой круг, является шаром.* Потому что, как легко показать, уравнения этих образов второго порядка должны иметь приведенный выше вид. При этом круги или шары могут еще вырождаться, если мы ограничимся только действительными кривыми или поверхностями, в пару комплексно-сопряженных прямых или в нулевой конус, проходящие через отмеченные элементы. Эти образы, которые имеют только одну единственную действительную точку, можно рассматривать так же, как круг или шар нулевого радиуса. Наконец, мы можем получить еще бесконечно удаленную прямую или плоскость (т. е. круг или шар бесконечно большого радиуса).

§ 3. Евклидова метрика как проективное отношение к фундаментальным образам

Исследования § 2 показывают, что метрические формулы связаны с проективными отношениями к фундаментальным образам. Так, например, обращение в нуль числителя в выражении расстояния между двумя точками на плоскости:

$$r = \frac{\sqrt{(x_1x_3 - x_3x_1)^2 + (x_2x_3 - x_3x_2)^2}}{x_3x_3},$$

означает, что обе точки лежат на одной прямой с одной из двух круговых точек и т. д. Эти важные свойства метрических формул мы хотим еще более подчеркнуть, написав их в виде, непосредственно выявляющем указанные отношения.

А. Выражение евклидова угла с помощью двойного отношения. Начнем с преобразования формулы угла между двум прямыми u и u' на плоскости; новое выражение для угла послужит основой дальнейших исследований в неевклидовой геометрии. Проведем через точку пересечения данных прямых u и u' соответствующие минимальные прямые J и J' и определим двойное отношение таким образом полученных четырех прямых. По стр. 51 уравнение пучка прямых, проходящих

через точку пересечения u и u' в текущих координатах x , имеет вид: $\Sigma u_i x_i + \lambda \Sigma u'_i x_i = 0$. Обе прямые этого пучка, проходящие через обе круговые точки $1:i:0$ и $1:-i:0$, определяются уравнениями:

$$u_1 \cdot 1 + u_2 \cdot i + u_3 \cdot 0 + \lambda_1 (u'_1 \cdot 1 + u'_2 \cdot i + u'_3 \cdot 0) = 0$$

и

$$u_1 \cdot 1 - u_2 \cdot i + u_3 \cdot 0 + \lambda_2 (u'_1 \cdot 1 - u'_2 \cdot i + u'_3 \cdot 0) = 0.$$

Но отсюда для двойного отношения четырех рассматриваемых прямых получается выражение:

$$DV \{uu'JJ'\} = \frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \frac{u_1 + iu_2}{u_1 - iu_2} \cdot \frac{u'_1 - iu'_2}{u'_1 + iu'_2}.$$

С другой стороны, для угла из формул, приведенных на стр. 149, получается:

$$\begin{aligned} e^{-i\omega} = \cos \omega - i \sin \omega &= \pm \frac{u_1 u'_1 + u_2 u'_2 - i(u_1 u'_2 - u_2 u'_1)}{\sqrt{u_1^2 + u_2^2} \cdot \sqrt{u_1'^2 + u_2'^2}} = \\ &= \pm \frac{(u_1 + iu_2)(u'_1 - iu'_2)}{\sqrt{u_1^2 + u_2^2} \sqrt{u_1'^2 + u_2'^2}} = \pm \frac{\sqrt{u_1 + iu_2} \cdot \sqrt{u_1 - iu_2}}{\sqrt{u_1 - iu_2} \cdot \sqrt{u_1 + iu_2}}. \end{aligned}$$

Следовательно, мы получаем: $e^{-2i\omega} = DV$, или $-2i\omega = \ln DV$, или

$$\omega = \frac{i}{2} \ln DV.$$

Итак, евклидов угол между двумя прямыми на плоскости может рассматриваться как помноженный на $\frac{i}{2}$ логарифм двойного отношения, определяемого сторонами угла и обеими проходящими через их точку пересечения изотропными прямыми. Этот прекрасный результат был впервые получен Лагерром (Laguerres) в 1853 г. в одной его юношеской работе¹⁾. Но он долго оставался незамеченным, вероятно, потому, что геометры привыкли к той мысли, что метрика и проективная геометрия никак не связаны друг с другом. Значение предложения Лагерра заключается в том, что с его помощью можно легко распространить метрические понятия евклидовой геометрии на случай неевклидовой геометрии (ср. гл. VI).

Сравним полученный результат с некоторыми известными свойствами угла. Прежде всего, покажем, что полученная формула дает для случая действительных прямых всегда действительное значение. В самом деле, двойное отношение двух действительных элементов с двумя комплексно-сопряженными по абсолютной величине равняется единице. Поэтому мы можем положить $DV = e^{i\varphi}$, где φ — действительное число. Но отсюда получается,

¹⁾ Laguerre, Note sur la théorie des foyers, „Nouvelles Annales de Math.“, т. 12, стр. 64.

что $\omega = \frac{i}{2} \ln(e^{i\varphi}) = -\frac{\varphi}{2}$, т. е. является действительным числом, что и требовалось доказать. Далее, полученная формула правильно дает период угла: потому что логарифм числа определен лишь с точностью до $2ki\pi$, так что $\omega = \frac{i}{2} \{ \ln DV + 2ki\pi \}$, где

k — произвольное положительное или отрицательное целое число. Но отсюда вытекает, что и само ω определяется лишь с точностью до числа кратного π , что и требовалось доказать. Наконец, мы еще хотим доказать, что обе прямые взаимно перпендикулярны, если рассматриваемое двойное отношение равно -1 . В самом деле, в этом случае мы получаем $\omega = \frac{i}{2} \ln(-1) = \frac{i}{2} (2k+1)i\pi$,

т. е. — $\frac{\pi}{2}$, увеличенное на произвольное число, кратное π .

Из найденного выражения для евклидова угла ω непосредственно получается, что при евклидовых движениях и преобразованиях подобия ω остается инвариантным; потому что при этих преобразованиях обе круговые точки переходят сами в себя, так что рассматриваемые минимальные прямые опять переходят в минимальные прямые. Поэтому, если мы будем определять величину угла, образованного двумя данными прямыми до и после преобразования, то мы получим одно и то же значение, так как двойное отношение остается инвариантным при проективных преобразованиях.

Совершенно такие же рассуждения, как для угла между двумя прямыми на плоскости, можно произвести для угла между двумя плоскостями в пространстве. При этом получается предложение: *евклидов угол между двумя плоскостями равенется умноженному на $\frac{i}{2}$ логарифму двойного отношения, определяемого обеими рассматриваемыми плоскостями и двумя изотропными плоскостями, проходящими через их линию пересечения*.

В. Соответствующее преобразование формулы евклидова расстояния¹⁾. Формула расстояния плоской евклидовой геометрии:

$$r = \pm \frac{\sqrt{(x_1x'_3 - x_3x'_1)^2 + (x_2x'_3 - x_3x'_2)^2}}{x_3x'_3},$$

не может быть выражена таким элегантным образом с помощью двойного отношения, как формула угла. Но чтобы и здесь получить такое ее написание, которое подчеркивало бы проективное отношение понятия расстояния к круговым точкам, мы изберем следующий путь. Обращение в нуль числителя в формуле расстояния означает, что обе точки x и x' лежат на одной прямой с одной из двух круговых точек. Так как круговые

¹⁾ Для построения неевклидовой геометрии этот раздел является излишним.

точки имеют однородные координаты $1:i:0$ и $1:-i:0$, то эти условия можно также написать в виде:

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x'_1 & x'_2 & x'_3 \\ 1 & i & 0 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{и} \quad \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x'_1 & x'_2 & x'_3 \\ 1 & -i & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Точно так же, обращение в нуль знаменателя означает, что одна или обе точки лежат на бесконечно удаленной прямой, следовательно, на прямой, соединяющей обе круговые точки. Эти условия можно также написать в виде:

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ 1 & i & 0 \\ 1 & -i & 0 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{и} \quad \begin{vmatrix} x'_1 & x'_2 & x'_3 \\ 1 & i & 0 \\ 1 & -i & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Так как обращение в нуль этих выражений имеет тот же смысл, как и обращение в нуль числителя и знаменателя в формуле расстояния, то естественно предположить, что

$$r = \pm c \frac{\sqrt{\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x'_1 & x'_2 & x'_3 \\ 1 & i & 0 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x'_1 & x'_2 & x'_3 \\ 1 & -i & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ 1 & i & 0 \\ 1 & -i & 0 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x'_1 & x'_2 & x'_3 \\ 1 & i & 0 \\ 1 & -i & 0 \end{vmatrix}},$$

Путем перемножения определителей и сравнения со старой формулой расстояния мы убеждаемся в справедливости нашего предположения; при этом мы находим, что неизвестный ранее множитель c имеет значение -4 .

Но таким образом полученное выражение еще не вполне приспособлено к введению однородных координат; ведь если мы возьмем координаты круговых точек в форме, равноправной прежней $k_1:ik_1:0$ и $k_2:-ik_2:0$, то мы получим вместо множителя -4 другой множитель. Это происходит по той причине, что в выражении для r координаты круговых точек входят не в нулевом измерении (как входят, например, координаты $x_1:x_2:x_3$ и $x'_1:x'_2:x'_3$). Чтобы определить этот множитель, обозначим координаты круговых точек через $\xi_1:\xi_2:\xi_3$ и $\xi'_1:\xi'_2:\xi'_3$ и напишем формулу расстояния в предполагаемом нами виде:

$$r = \pm c \frac{\sqrt{(xx'\xi)(xx'\xi')}}{(x\xi\xi')(x'\xi\xi')},$$

где $(\alpha\beta\gamma)$ обозначает определитель:

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix}$$

Далее, рассмотрим две точки $a_1 : a_2 : a_3$ и $a_1' : a_2' : a_3'$, которые отстоят друг от друга на расстоянии, равном единице; тогда мы получим:

$$1 = \pm c \frac{\sqrt{(aa'\xi)(aa'\xi')}}{(a\xi\xi')(a'\xi\xi')}.$$

После подстановки получающегося отсюда значения для c мы находим окончательную формулу:

$$r = \pm \frac{\sqrt{(xx'\xi)(xx'\xi')}}{\sqrt{(aa'\xi)(aa'\xi')}} \cdot \frac{(a\xi\xi')(a'\xi\xi')}{(x\xi\xi')(x'\xi\xi')}.$$

В этом выражении уже все тройки переменных входят в нулевом измерении, так что различные равноправные между собой системы значений дают одно и то же число в качестве расстояния r .

Если мы выполним произвольное проективное преобразование, то все определители в выражении для r умножатся на определитель соответствующей подстановки (стр. 31). Но эти множители попарно сокращаются, так что полученное выражение остается инвариантным при произвольном проективном преобразовании. Геометрически этот результат означает следующее. В основании наших соображений лежало шесть точек: во-первых, две круговые точки; во-вторых, две точки, ограничивающие единичный отрезок, и, наконец, в-третьих, две точки, между которыми определяется расстояние. При произвольном проективном преобразовании эти точки перейдут, вообще говоря, в шесть других точек. Если мы полученное выражение r составим сначала для первых шести точек, а затем для вторых шести точек, то мы получим в силу инвариантности этого выражения одно и то же значение для r . Особенно просто обстоит дело, если мы ограничиваемся проективными преобразованиями, оставляющими инвариантными обе круговые точки, и как до, так и после преобразования рассматриваем эту пару точек как фундаментальный образ. Легко видеть, что при этом в общем случае мы получаем преобразование подобия (единичные отрезки могут перейти в произвольные другие отрезки); если же мы потребуем еще, чтобы единичные отрезки переходили бы в отрезки той же длины, то мы получим движения и зеркальные отображения евклидовой геометрии.

§ 4. Замена круговых точек и шарового круга действительными образами

В евклидовой геометрии мы до сих пор не можем наглядно рассматривать те замечательные метрические отношения, которые господствуют относительно изотропных элементов, так как эти последние являются мнимыми элементами. Чтобы все же сделать наглядными имеющиеся здесь соотношения, мы про-

изведем на плоскости или, соответственно, в пространстве следующее мнимое проективное преобразование:

$$x_1 = x'_1, \quad x_2 = ix'_2, \quad x_3 = x'_3, \quad \text{или же } x_1 = x'_1, \quad x_2 = x'_2, \quad x_3 = ix'_3, \quad x_4 = x'_4;$$

в аффинных координатах оно имеет вид:

$$x = x', \quad y = iy', \quad \text{или, соответственно, } x = x', \quad y = y', \quad z = iz'.$$

При этом проективном преобразовании обе круговые точки $x_1^2 + x_2^2 = 0, x_3 = 0$ переходят в пару действительных точек: $x_1^2 - x_2^2 = 0, x_3 = 0$, а мнимый шаровой круг $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0, x_4 = 0$ переходит в овальную кривую $x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 0, x_4 = 0$. Следовательно, изотропные прямые и плоскости евклидовой геометрии (частично) отображаются на действительные прямые и плоскости, так что мы теперь можем наглядно рассматривать господствующие относительно них метрические соотношения. Рассматриваемое мнимое отображение евклидовой геометрии, которое в действительной области определяет совершенно новую метрику, мы будем называть *псевдоевклидовой геометрией*: она получает особенное значение вследствие ее применения в специальной теории относительности (ср. гл. XI, § 5).

Мы займемся сначала плоской псевдоевклидовой геометрией. Для этого введем прямоугольную декартову систему координат x, y ; вместо нее будем частично пользоваться однородными координатами $x = x_1 : x_3, y = x_2 : x_3$.

Формула расстояния в евклидовой геометрии имеет вид:

$$r = \pm \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2}.$$

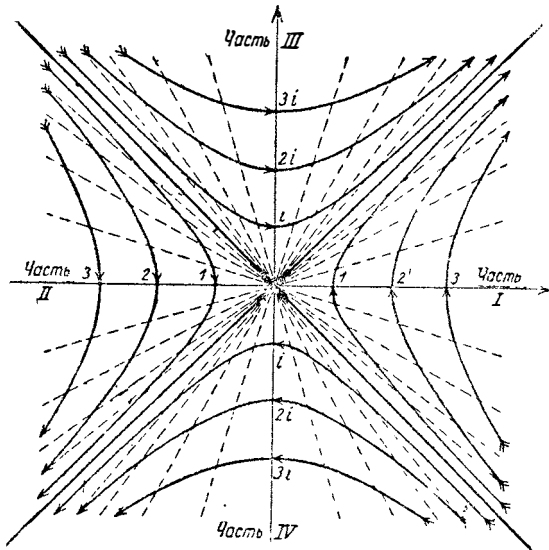
При указанном преобразовании из нее получается формула расстояния псевдоевклидовой геометрии:

$$r = \pm \sqrt{(x - x')^2 - (y - y')^2}.$$

Совершенно такой же результат мы получим, если в формуле расстояния, выведенной на стр. 160, мы подставим вместо координат круговых точек следующие значения: $\xi_1 : \xi_2 : \xi_3 = 1 : 1 : 0$ и $\tilde{\xi}_1 : \tilde{\xi}_2 : \tilde{\xi}_3 = -1 : 1 : 0$. Из приведенной формулы расстояния следует (таким же образом, как и в случае евклидовой геометрии), что через всякую собственную действительную точку плоскости проходят две *действительные* изотропные прямые, на которых все пары собственных точек имеют нулевое расстояние. Совокупность всех изотропных прямых состоит из двух семейств прямых, параллельных биссектрисам координатных углов. С проективной точки зрения мы можем рассматривать оба эти семейства как два пучка прямых, проходящих через фундаментальные точки $1 : 1 : 0$ и $1 : -1 : 0$.

Точки плоскости, имеющие в псевдоевклидовой геометрии одно и то же расстояние от начала координат, определяются уравнением $x^2 - y^2 = \text{const.}$ и образуют, следовательно, равно-

сторонние гиперболы (черт. 86). Плоскость разбивается на четыре части (обозначенные на черт. 86 через *I*, *II*, *III* и *IV*) обеими изотропными, проходящими через начало координат прямыми и бесконечно удаленной прямой. Точки в *I* и *II* частях имеют действительное расстояние от начала координат (так как здесь $x > y$); напротив, точки в *III* и *IV* частях имеют мнимое



Черт. 86.

расстояние от начала координат (так как здесь $x < y$). Границами между этими частями являются обе изотропные прямые, проходящие через начало координат. На них расстояние всех конечных точек от начала координат равняется нулю. В самом деле, чем меньше мы будем брать абсолютную величину расстояния (будет ли оно действительным или чисто мнимым), тем теснее будут прилегать гиперболы к изотропным прямым.

Собственные преобразования, оставляющие инвариантной каж-

дую из двух фундаментальных точек псевдоевклидовой геометрии, определяются в аффинных координатах (как в этом легко убедиться путем сравнения с формулами на стр. 110) следующими уравнениями:

$$\begin{aligned} x &= c_{11}x' + c_{21}y' + p, \\ y &= c_{21}x' + c_{11}y' + q, \end{aligned} \quad c_{11}^2 - c_{21}^2 \neq 0.$$

Мы здесь рассмотрим только соответствующие центрально-аффинные преобразования, переводящие начало координат само в себя, т. е. положим параллельные сдвиги p и q равными нулю. Полученные таким образом преобразования, вообще говоря, являются преобразованиями подобия; если мы хотим получить твердые преобразования, то мы должны, сверх того, положить определители равными $+1$ или -1 . Такие собственные проективные преобразования с определителем $+1$ мы будем называть *вращениями*; они определяются уравнениями:

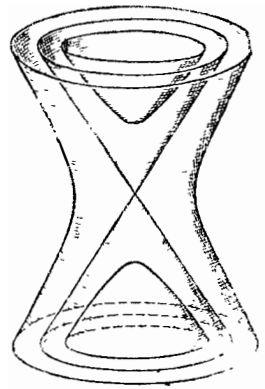
$$\begin{aligned} x &= c_{11}x' + c_{21}y', \\ y &= c_{21}x' + c_{11}y', \end{aligned} \quad c_{11}^2 - c_{21}^2 = 1.$$

В литературе по теории относительности предпочитают пользоваться следующим видом этих уравнений:

$$x = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} x' + \frac{u}{\sqrt{1-u^2}} y', \quad y = \frac{u}{\sqrt{1-u^2}} x' + \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} y';$$

там эти преобразования называются *преобразованиями Лоренца* (Lorenz) (ср. гл. XI, § 5).

Таким образом полученные вращения геометрически имеют следующий характер: отдельные точки двигаются по изображенным на черт. 86 гиперболам, при этом каждая из указанных на чертеже прямых при некотором определенном вращении переходит, например в направлении стрелок, в следующую за ней прямую; эти прямые тем более сгущаются, чем ближе мы подходим к обоим изотропным прямым, и поэтому, начиная с некоторой прямой, уже не могут быть изображены на чертеже. Отсюда отчетливо видно, что вращения евклидовой геометрии вблизи изотропных прямых совершенно теряют характер действительных вращений, потому что, как бы долго мы ни вращали прямую, мы никогда не перейдем определенного положения, именно изотропной прямой⁴⁾. Итак, точки из I или II части никогда не перейдут в точки III или IV части.



Черт. 87.

Из этих соображений получается также, что изотропная прямая образует с неизотропной прямой бесконечно большой угол, потому что, в самом деле, мы можем вращение вокруг точки пересечения производить сколь угодно долго без того, чтобы неизотропная прямая перешла в изотропную. Далее, мы видим, что угол между двумя параллельными изотропными прямыми является неопределенным, так как две такие прямые мы можем перевести одну в другую посредством любого вращения, сопровождаемого надлежащим параллельным перенесением.

Аналогичным образом может быть рассмотрена пространственная псевдоевклидова геометрия. Через каждую конечную точку здесь проходит целый действительный конус изотропных прямых. Поверхностями постоянного расстояния от данной точки являются внутри соответствующего изотропного конуса двуполостные гиперboloиды, а вне изотропного конуса — однополостные гиперboloиды (черт. 87). Изотропный конус вместе с бесконечно

⁴⁾ На стр. 124 мы назвали проективные преобразования, оставляющие инвариантным овальное коническое сечение плоскости, также вращениями, если на этом коническом сечении имеются при этом две действительные неподвижные точки, хотя казалось бы, что такие вращения не имеют никакого сходства с евклидовыми вращениями. Однако мы видим теперь, что в комплексной области евклидовы движения обнаруживают подобные же отношения, так что указанное название может считаться оправданным.

удаленной плоскостью разбивает все пространство на три области (в случае плоскости мы получали четыре области). Точки внутри конуса имеют чисто мнимое расстояние от вершины конуса, напротив, точки вне конуса — действительное. Следовательно, обе области не могут быть переведены друг в друга посредством действительных вращений вокруг вершины конуса.

§ 5. Метрика в связке прямых и в связке плоскостей; сферическая и эллиптическая геометрии

А. Метрика в связке. Для дальнейших исследований метрические соотношения в связке прямых и плоскостей будут играть важную роль. Будем исходить из обычной прямоугольной декартовой системы координат x_1, x_2, x_3 и рассмотрим совокупность всех плоскостей и прямых, проходящих через начало координат. Две такие плоскости $u_1:u_2:u_3:0$ и $u_1':u_2':u_3':0$ образуют между собой угол ω , определяемый по стр. 149 формулами:

$$\cos \omega = \pm \frac{u_1 u_1' + u_2 u_2' + u_3 u_3'}{\sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2} \sqrt{u_1'^2 + u_2'^2 + u_3'^2}},$$

$$\sin \omega = \pm \frac{\sqrt{(u_1 u_2' - u_2 u_1')^2 + (u_1 u_3' - u_3 u_1')^2 + (u_2 u_3' - u_3 u_2')^2}}{\sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2} \sqrt{u_1'^2 + u_2'^2 + u_3'^2}}.$$

Для дальнейшего мы, кроме того, вычислим еще угол, образованный двумя прямыми, проходящими через начало координат. Прямую подобного рода проще всего определить заданием координат x_1, x_2, x_3 какой-нибудь лежащей на ней точки, потому что по стр. 19 отношениями этих точечных координат можно пользоваться как однородными координатами рассматриваемой прямой. Далее, угол между двумя прямыми $x_1:x_2:x_3$ и $x_1':x_2':x_3'$ равняется углу между двумя плоскостями, перпендикулярными к этим прямым и проходящими через начало координат. Из элементарной аналитической геометрии известно, что обе эти плоскости имеют плоскостные координаты $u_1:u_2:u_3:u_4=x_1:x_2:x_3:0$ и $u_1':u_2':u_3':u_4'=x_1':x_2':x_3':0$. Следовательно, искомый угол между двумя прямыми $x_1:x_2:x_3$ и $x_1':x_2':x_3'$ определяется формулами:

$$\cos \omega = \pm \frac{x_1 x_1' + x_2 x_2' + x_3 x_3'}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} \sqrt{x_1'^2 + x_2'^2 + x_3'^2}},$$

$$\sin \omega = \pm \frac{\sqrt{(x_1 x_2' - x_2 x_1')^2 + (x_1 x_3' - x_3 x_1')^2 + (x_2 x_3' - x_3 x_2')^2}}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} \sqrt{x_1'^2 + x_2'^2 + x_3'^2}}.$$

Таким образом полученные формулы можно исследовать привычным для нас способом, что мы предоставляем сделать самому читателю. При этом согласно прежнему определению (стр. 154), мы будем называть изогранными те плоскости связки, которые касаются мнимого шарового круга евклидова простран-

ства; далее, согласно стр. 152, изотропными прямыми будут называться те прямые, которые проектируют точки шарового круга из центра связки.

Фундаментальное коническое сечение евклидова пространства изображается в геометрии связки тем нулевым конусом, который проходит через коническое сечение, имея вершину в центре связки; его уравнением в указанной прямоугольной декартовой системе координат является уравнение:

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0.$$

Этот нулевой конус мы будем называть фундаментальным образом метрики связки. Легко видеть, что он переходит сам в себя при всех евклидовых движениях связки вокруг своего центра. Аналогичным образом, как и в случае евклидовой геометрии плоскости и пространства (ср. стр. 157—158), мы можем относительно нулевого конуса определить угол между двумя плоскостями (соответственно, двумя прямыми) связки посредством двойного отношения. Именно имеют место предложения:

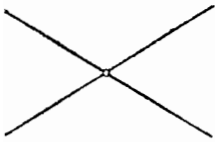
Угол между двумя плоскостями связки равняется умноженному на $\frac{i}{2}$ логарифму двойного отношения, определяемого обеими рассматриваемыми плоскостями и проходящими через их линию пересечения изотропными плоскостями.

Угол между двумя прямыми связки равняется умноженному на $\frac{i}{2}$ логарифму двойного отношения, определяемого обеими рассматриваемыми прямыми и лежащими в их плоскости изотропными прямыми.

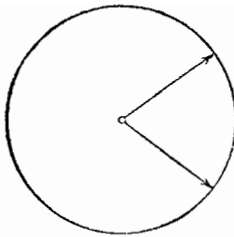
В приведенных формулах и предложениях сейчас же бросается в глаза полная симметрия. Она является следствием принципа двойственности, имеющего место в связке, по которому, как легко видеть, прямая линия (в связке) является двойственной плоскости. *В то время как закон двойственности не имеет места в евклидовой метрике на плоскости и в пространстве, он существует в евклидовой метрике связки.* Внутренняя причина этого заключается в том, что в первых двух случаях метрика основана на недвойственно выродившемся фундаментальном образе ¹⁾, тогда как фундаментальный образ метрики связки вообще не вырождается (для геометрии связки конус является самым общим квадратичным образом; напротив, в геометрии пространства он является однократно вырождающимся).

¹⁾ Обе круговые точки или соответственно шаровой круг изображаются *одним* уравнением в прямолинейных или плоскостных координатах, но *двумя* уравнениями в точечных координатах (ср. стр. 101 и 108). Отсюда непосредственно вытекает, что указанные образы не являются двойственными самим себе. На плоскости паре круговых точек соответствует в силу двойственности пара прямых; в пространстве шаровому кругу соответствует конус.

В. Связь с геометрией на сфере. В элементарной геометрии прямые связки обычно определяют не так, как они определены в предыдущем разделе А. Именно: для этого описывают вокруг центра связки сферу единичного радиуса и определяют прямые и плоскости связки посредством соответствующих точек и больших кругов на сфере. Таким образом метрика связки заменяется мероопределением сферы, т. е. *сферической геометрией* и сферической тригонометрией. При этом отображении каждой прямой связки соответствуют две точки сферы, тогда как, наоборот, каждой точке сферы соответствует одна и только одна прямая. Следовательно, отображение прямых на точки сферы не является однозначным, но однодвузначным, в то время как отображение плоскостей связки на большие круги сферы является взаимно однозначным.



Черт. 88.



Черт. 89.

Вследствие этого угол между двумя проходящими через центр шара прямыми определяется иначе, чем в геометрии связки,

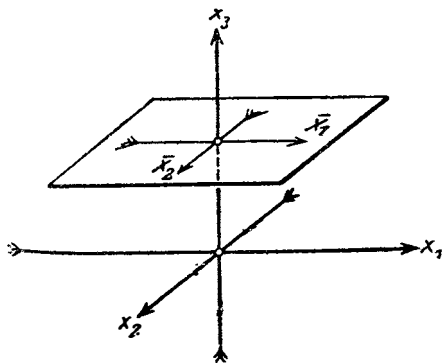
потому что в сферической геометрии мы имеем дело с полупрямыми (черт. 89), а не с прямыми, как в геометрии связки (черт. 88); но угол между полупрямыми определяется уже не с точностью до знака и числа, кратного π , т. е. $\pm \omega + n\pi$, а с точностью до знака и числа, кратного 2π , т. е. $\pm \omega + 2n\pi$. Напротив, угол между двумя плоскостями остается определенным лишь с точностью до знака и числа, кратного π , т. е. $\pm \omega + n\pi$, так как нормаль к плоскости является прямой, а не полупрямой. Другое определение угла между двумя полупрямыми получает свое аналитическое выражение с помощью координат точек сферы $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1$. Вследствие этого приведенные на стр. 164 формулы для угла между двумя прямыми теперь принимают следующий вид:

$$\cos \omega = \pm (x_1 x'_1 + x_2 x'_2 + x_3 x'_3),$$

$$\sin \omega = \pm \sqrt{(x_1 x'_2 - x_2 x'_1)^2 + (x_1 x'_3 - x_3 x'_1)^2 + (x_2 x'_3 - x_3 x'_2)^2}.$$

В формуле для $\cos \omega$ мы можем взять либо положительный, либо отрицательный знак. Из рассмотрения специального случая, в котором обе полупрямые $x_1 : x_2 : x_3$ и $x'_1 : x'_2 : x'_3$ совпадают: $\cos \omega = \pm (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) = \pm 1$, следует, что мы должны выбрать положительный знак. Напротив, в формуле для $\sin \omega$ фигурирует квадратный корень, так что здесь знак остается неопределенным. Но этими формулами ω определяется с точностью до знака и числа, кратного 2π , т. е. $\pm \omega + n\pi$, что и требовалось доказать.

С. Эллиптическая геометрия. Прямые и плоскости связки можно определять не только посредством пересечения с концентрическим шаром, но и посредством пересечения с проективной плоскостью E , не проходящей через центр связки. Тогда всякая прямая связки будет определяться одной и только одной точкой на E и точно так же всякая плоскость связки будет определяться одной и только одной прямой на E , так что здесь в обоих случаях мы имеем взаимно однозначное соответствие. Мы будем понимать, так же как и в сферической геометрии, под расстоянием между двумя точками на E величину угла, определяемого соответствующими прямыми связки. Этим в плоскости E устанавливается новая метрика, которая имеет совершенно другие законы, чем евклидова метрика. По причинам, с которыми мы познакомимся позднее, эту метрику называют *эллиптической геометрией на плоскости*.



Черт. 90.

Из этого простого отображения мы можем уже сейчас получить целый ряд предложений эллиптической геометрии, которые будут иметь важное значение для дальнейшего. Прежде всего, мы видим, что в эллиптической геометрии *нет бесконечно удаленных точек*, потому что все действительные точки проективной плоскости находятся друг от друга на конечном расстоянии, так как соответствующие прямые связки образуют конечный угол. Далее следует, что в эллиптической геометрии *не существует параллельных* прямых, т. е. прямых, не пересекающих друг друга, так как всякие две прямые (так же, как и в проективной геометрии) всегда имеют общую точку. Затем эллиптическая плоскость имеет такую же связность, как и проективная плоскость, и является *поэтому односторонней поверхностью*. Прямые линии являются *замкнутыми линиями*, длина которых при однократном обходе равняется π (но не 2π , т. е. она не равна длине большого круга на сфере). Мы напишем рядом два предложения:

В эллиптической геометрии длина пути, который должна пройти точка, чтобы вернуться в свое исходное положение, равняется π .

В эллиптической геометрии величина вращения, которое нужно произвести, чтобы совместить прямую с ее исходным положением, равняется π .

Следовательно, длина отрезка в эллиптической геометрии определена лишь с точностью до знака и числа, кратного π , совершенно так же, как и величина угла.

Чтобы установить формулы расстояния и угла в эллиптической геометрии, мы будем исходить из пространственной прямоугольной декартовой системы координат x_1, x_2, x_3 с началом в центре связки. Плоскость, в которой мы строим эллиптическую геометрию, пусть определяется уравнением $x_3 = 1$. Отдельные точки этой плоскости мы будем определять аффинными координатами \bar{x}_1 и \bar{x}_2 , которые могут просто совпадать с соответствующими прежними пространственными координатами x_1 и x_2 этой точки: $\bar{x}_1 = x_1$, $\bar{x}_2 = x_2$ (черт. 90). Отсюда следует, что две точки \bar{x}_1, \bar{x}_2 и \bar{x}'_1, \bar{x}'_2 в эллиптической геометрии имеют расстояние:

$$\cos \omega = \pm \frac{\bar{x}_1 \bar{x}'_1 + \bar{x}_2 \bar{x}'_2 + 1}{\sqrt{\bar{x}_1^2 + \bar{x}_2^2 + 1} \sqrt{\bar{x}'_1^2 + \bar{x}'_2^2 + 1}},$$

$$\sin \omega = \pm \frac{\sqrt{(\bar{x}_1 \bar{x}'_2 - \bar{x}_2 \bar{x}'_1)^2 + (\bar{x}_1 - \bar{x}'_1)^2 + (\bar{x}_2 - \bar{x}'_2)^2}}{\sqrt{\bar{x}_1^2 + \bar{x}_2^2 + 1} \sqrt{\bar{x}'_1^2 + \bar{x}'_2^2 + 1}}.$$

Если мы для того, чтобы охватить все точки проективной плоскости, перейдем к однородным координатам, то мы опять получим старые формулы. Следовательно, мы получаем, отбросив черту наверху:

Расстояние двух точек $x_1 : x_2 : x_3$ и $x'_1 : x'_2 : x'_3$ в плоской эллиптической геометрии:

$$\cos \omega = \pm \frac{x_1 x'_1 + x_2 x'_2 + x_3 x'_3}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} \sqrt{x'^2_1 + x'^2_2 + x'^2_3}},$$

$$\sin \omega = \pm \frac{\sqrt{(x_1 x'_2 - x_2 x'_1)^2 + (x_1 x'_3 - x_3 x'_1)^2 + (x_2 x'_3 - x_3 x'_2)^2}}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} \cdot \sqrt{x'^2_1 + x'^2_2 + x'^2_3}}.$$

Аналогичным образом получается:

Угол между двумя прямыми $u_1 : u_2 : u_3$ и $u'_1 : u'_2 : u'_3$ в плоской эллиптической геометрии:

$$\cos \omega = \pm \frac{u_1 u'_1 + u_2 u'_2 + u_3 u'_3}{\sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2} \sqrt{u'^2_1 + u'^2_2 + u'^2_3}},$$

$$\sin \omega = \pm \frac{\sqrt{(u_1 u'_2 - u_2 u'_1)^2 + (u_1 u'_3 - u_3 u'_1)^2 + (u_2 u'_3 - u_3 u'_2)^2}}{\sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2} \sqrt{u'^2_1 + u'^2_2 + u'^2_3}}.$$

При отображении связки на эллиптическую плоскость фундаментальный конус $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0$ связки (x_1, x_2, x_3 обозначают декартовы прямоугольные координаты) отображается в нулевое коническое сечение $\bar{x}_1^2 + \bar{x}_2^2 + 1 = 0$ плоскости. Если мы перейдем к однородным координатам $\bar{x}_1 = \bar{x}'_1 : \bar{x}_3$ и $\bar{x}_2 = \bar{x}'_2 : \bar{x}'_3$, то его уравнение примет вид: $\bar{x}'_1{}^2 + \bar{x}'_2{}^2 + \bar{x}'_3{}^2 = 0$. Следовательно, фундаментальным образом плоской эллиптической геометрии

является нулевое коническое сечение $\bar{x}_1^2 + \bar{x}_2^2 + \bar{x}_3^2 = 0$. Мы называем прямую эллиптической плоскости изотропной, если она касается нулевого конического сечения, — точку, если она лежит на самом нулевом коническом сечении, потому что такая прямая или точка является образом изотропной плоскости или, соответственно, изотропной прямой связки. Путем непосредственного перенесения из евклидовой геометрии получаются следующие предложения:

В эллиптической геометрии расстояние между двумя различными точками обращается в нуль тогда и только тогда, когда обе точки лежат на одной изотропной прямой, но ни одна из точек сама не является изотропной.

В эллиптической геометрии угол между двумя различными прямыми обращается в нуль тогда и только тогда, когда обе прямые пересекаются в изотропной точке, но ни одна из прямых сама не является изотропной.

Евклидовы движения связки вокруг своего центра отображаются в движения эллиптической геометрии, которые обладают свойством оставлять инвариантными все эллиптически измеренные расстояния и углы плоскости. Далее, эти движения переводят фундаментальное коническое сечение само в себя аналогично тому, как евклидовы движения связки оставляют инвариантным нулевой конус.

Так как фундаментальное коническое сечение, будучи рассматриваемо как плоский образ, является невырождающейся кривой второй степени, которая двойственна самой себе, то эллиптическая метрика должна быть также двойственна самой себе, как это уже, впрочем, следует из рассмотрения приведенных выше формул (ср. стр. 165 и 204 и след.). Вследствие этого в эллиптической геометрии мы можем говорить не только о взаимно перпендикулярных прямых, но также, двойственным образом, и о точках с взаимно перпендикулярным расстоянием. Такие точки соответствуют взаимно перпендикулярным прямым связки; они находятся друг от друга на расстоянии $\frac{\pi}{2}$ и делят замкнутую прямую на два равных отрезка. Легко можно получить следующие предложения (ср. стр. 154):

Точки с взаимно перпендикулярным расстоянием находятся в гармоническом отношении с обеими точками пересечения соединяющей их прямой и фундаментального конического сечения.

Прямые с взаимно перпендикулярным углом находятся в гармоническом отношении с обеими касательными фундаментального конического сечения, проходящими через точку их пересечения.

Путем сравнения с соответствующими предложениями геометрии связки (стр. 165) мы находим, что в эллиптической

геометрии угол между двумя прямыми и расстояние между двумя точками выражаются посредством двойных отношений следующим образом:

В эллиптической геометрии расстояние между двумя точками равняется умноженному на $\frac{i}{2}$ логарифму двойного отношения, определяемого этими точками и двумя изотропными точками на соединяющей их прямой.

В эллиптической геометрии угол между двумя прямыми равняется умноженному на $\frac{i}{2}$ логарифму двойного отношения, определяемого этими прямыми и двумя изотропными прямыми, проходящими через точку их пересечения.

Теперь на основании этих соотношений мы можем определить эллиптическую геометрию абстрактным образом, отметив в какой-нибудь плоской прямоугольной декартовой системе координат $x = x_1 : x_3$, $y = x_2 : x_3$ нулевое коническое сечение

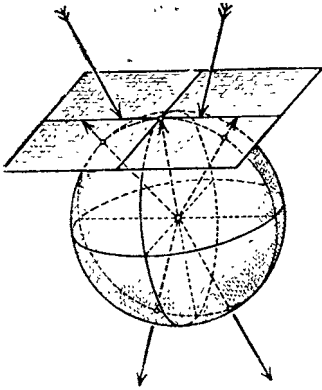
$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0$$

в качестве фундаментального образа и положив угол между двумя прямыми, а также расстояние между двумя точками, равным вышеприведенному выражению через двойное отношение. Обобщение этого определения на случай произвольного квадратичного образа приведет нас в гл. VI к общему проективному мероопределению.

В заключение мы хотим еще раз подчеркнуть, что эллиптическая геометрия может быть получена с помощью элементарных соображений из евклидовой геометрии пространства. Эта связь между обеими геометриями осуществляется тем, что эллиптическая геометрия изображает мероопределение в бесконечно удаленной плоскости евклидовой геометрии: потому что, в то время как всякая собственная плоскость евклидовой геометрии имеет только две общие точки с мнимым шаровым кругом пространства, именно две соответствующие круговые точки, бесконечно удаленная плоскость содержит весь шаровой круг целиком, так что фундаментальный образ этой плоскости состоит из нулевого конического сечения, которое и служит для определения эллиптической геометрии. Так как в евклидовой геометрии обычно не имеют дела с бесконечно удаленными точками, то мы здесь определяли бесконечно удаленные точки посредством выходящих из начала координат лучей, т. е. перешли от эллиптической геометрии к метрике связки.

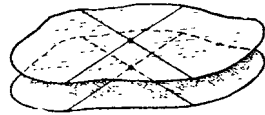
Д. Связь между эллиптической и сферической геометриями. Сферическая геометрия на шаре и эллиптическая геометрия на плоскости должны быть тесно связаны друг с другом, так как обе они являются отображением метрики связки. В самом деле, мы можем получить из сферической геометрии шара эллиптическую геометрию на плоскости, спроектировав точки

сферы из ее центра на плоскость (черт. 91). При этом две диаметрально противоположные точки сферы будут соответствовать одной и только одной точке плоскости, что объясняется тем обстоятельством, что отображение прямых связки на точки сферы является одно-двузначным, тогда как на точки плоскости —



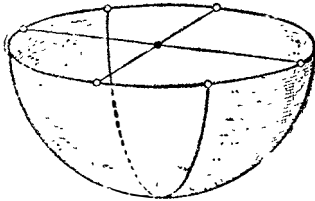
Черт. 91.

одно-однозначным отображением. Чтобы, обратно, из эллиптической геометрии на плоскости получить сферическую геометрию на шаре, мы прежде всего одностороннюю эллиптическую плоскость накроем соответствующей двусторонней поверхностью (см. стр. 26). Эту накрывающую поверхность мы мыслим себе состоящей из двух связанных

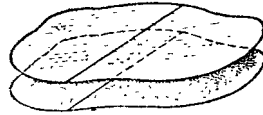


Черт. 92.

между собой листов, из которых один расположен непосредственно над эллиптической плоскостью, а другой — непосредственно под ней. Таким образом полученную двустороннюю поверхность мы можем теперь без всяких затруднений отобразить взаимно однозначно на сферу. Другим способом мы можем получить это отображение эллиптической плоскости на сферу,



Черт. 93.



Черт. 94.

рассматривая всякие две диаметрально противоположные точки сферы как тождественные; еще проще — ограничиться рассмотрением нижнего полушария и сделать из него замкнутую поверхность, отождествив диаметрально противоположные точки края (ср. черт. 7, стр. 24).

Существенное отличие эллиптической геометрии от сферической заключается в следующем. В сферической геометрии на шаре большие круги пересекаются всегда в *двух точках*; в соответствии с этим две прямые линии на дважды накрытой эллиптической плоскости имеют также две общие точки, из которых одна лежит на ее верхнем листе, а другая на нижнем

(черт. 92). Напротив, в эллиптической геометрии плоскости обе эти точки совпадают в одну, так что в эллиптической геометрии (так же, как и в проективной) две прямые пересекаются *в одной и только в одной точке*. Далее, с указанным различием связано то, что в сферической геометрии шар разбивается замкнутой линией на две части, тогда как в эллиптической геометрии существуют замкнутые линии, например прямые, не разбивающие плоскости. В самом деле, на полушарии с отождествленными диаметрально противоположными краевыми точками обе части поверхности, лежащие по разные стороны полукруга, связаны между собой посредством отождествленных краевых точек (черт. 93). То же самое имеет место и на замкнутой эллиптической плоскости. Напротив, на дважды покрытой проективной плоскости опять имеет место распадение (черт. 94). Дважды пробегаемая производящая разбиение прямая частично идет по верхнему, частично по нижнему листу; вследствие этого расщепления получаются две части: во-первых, правая часть верхнего листа, связанная с левой частью нижнего листа, и, во-вторых, левая часть верхнего листа, связанная с правой частью нижнего листа (ср. черт. 94). Относительно этих различий раньше господствовала полная неясность; поэтому в соответствующей литературе имеется много неверных предложений.

ВВЕДЕНИЕ ПРОЕКТИВНЫХ КООРДИНАТ, НЕЗАВИСИМОЕ ОТ ЕВКЛИДОВОЙ ГЕОМЕТРИИ

На стр. 170 мы определили эллиптическую геометрию, отметив особо некоторое коническое сечение и введя относительно него мероопределение. Прежде чем обобщить этот процесс, нам придется преодолеть следующее затруднение. При определении нулевого конического сечения и введении основанного на нем мероопределения мы пользовались координатами. Но эти координаты определялись в гл. I с помощью евклидовой геометрии, так что эллиптическая геометрия при указанном введении мероопределения оказывается построенной на основе евклидовой геометрии. Чтобы избавиться от этой зависимости, мы хотим показать, что *проективные координаты могут быть определены чисто проективно, совершенно независимо от евклидовой метрики.*

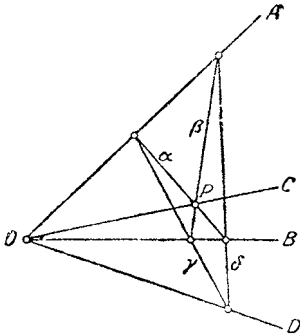
При этом мы придаем особенное значение тому факту, что *при введении координат нам не придется обязательно иметь дело со всем проективным пространством, но, напротив, во всех исследованиях мы можем ограничиться любой конечной частью пространства, например комнатой, в которой мы находимся.*

Подобное ограничение представляет прежде всего принципиальный интерес, так как оно указывает на то, что, применяя геометрию к эмпирическому пространству, мы не в праве делать каких-либо утверждений о произвольно далеких частях пространства; в частности, споры о существовании или несуществовании параллельных с самого начала лишены всякого смысла (ср. стр. 227).

§ 1. Построение четвертых гармонических элементов

Для решения поставленной задачи нам потребуется так называемое *построение четырехсторонника*. Будем исходить от трех данных прямых A , B и C какого-нибудь пучка и возьмем на прямой C (играющей среди этих трех прямых особую роль) произвольную точку P , через которую проведем две новых прямых α и β (черт. 95). Эти прямые вместе с прямыми A и B определяют четыре точки пересечения: αA , βA , αB , βB , которые мы

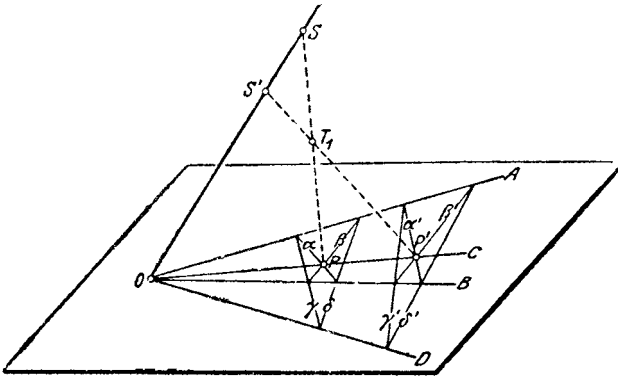
соединим попарно (αA с βB и αB с βA) прямыми γ и δ . Точка их пересечения $\gamma\delta$ определяет тогда в нашем пучке прямую D , которую мы будем называть четвертой гармонической к прямой C относительно прямых A и B ¹⁾.



Черт. 95.

Мы утверждаем, что прямая D однозначно определяется прямыми A , B и C и, следовательно, не зависит от того, как именно проведено построение (т. е. не зависит от выбора P , α и β).

Прежде всего ясно, что приведенное построение может быть полностью выполнено внутри выбранной нами конечной части пространства, если только точка O взята в этой части. Читатель может легко убедиться сам, что и в последующем доказательстве мы будем пользоваться лишь элементами, лежащими внутри этой части. Вообразим себе в данной плоскости два различных построения четвертого гармонического луча: $OABCP\alpha\gamma\delta D$ и $OABCP'\alpha'\gamma'\delta' D'$ (черт. 96). Мы сейчас докажем, что D всегда совпадает с D' . Для этого предположим, что оба построения не перекрываются друг другом, а располагаются так, как это



Черт. 96.

указано на черт. 96, и что точка P лежит между O и P' . Далее, возьмем на произвольной прямой G , проходящей через O и не лежащей в плоскости A , B , C , две точки S и S' так, чтобы S' лежала между O и S , и будем проектировать первое построение из точки S , а второе из точки S' . Возникающие при этом плоскости мы будем обозначать, так же как и соответствующие

¹⁾ Гармонические элементы были нами определены аналитически в § 7 гл. I; легко показать, что оба эти определения совпадают.

прямые, через $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ и $\alpha', \beta', \gamma', \delta'$. В силу нашего предположения о расположении точек P, P', S, S' проектирующие прямые и плоскости пересекаются внутри части пространства между прямой G и плоскостью A, B, C . С помощью этого приема, который был указан Рейе (Reyes у Prosper) ¹⁾ (впрочем, в несколько другой форме), мы добиваемся того, что все элементы нашего доказательства лежат внутри имеющейся в нашем распоряжении части пространства.

Прямые SP и $S'P'$ пересекаются в некоторой точке T_1 , лежащей в пределах нашей комнаты. Через эту точку проходят четыре плоскости $\alpha, \beta, \alpha', \beta'$. Вследствие этого в ней пересекаются также и прямые $\alpha\alpha'$ и $\beta\beta'$. Аналогичным образом мы получаем, что и четыре следующие прямые так же попарно пересекаются в соответствующих точках: $\alpha\alpha'$ и $\gamma\gamma'$ в T_2 , $\alpha\alpha'$ и $\delta\delta'$ в T_3 , $\beta\beta'$ и $\gamma\gamma'$ в T_4 , $\beta\beta'$ и $\delta\delta'$ в T_5 . Пересекаются ли прямые $\gamma\gamma'$ и $\delta\delta'$, мы еще не знаем.

Далее, три точки T_1, T_2 и T_3 лежат на прямой $\alpha\alpha'$, а три точки T_1, T_4 и T_5 —на прямой $\beta\beta'$. Следовательно, эти пять точек лежат в одной плоскости, проходящей через точку T_1 . В этой же плоскости лежат также четыре прямые $\alpha\alpha', \beta\beta', \gamma\gamma'$ и $\delta\delta'$, образующие четырехсторонник. Отсюда следует, что мы можем рассматривать первое построение четвертого гармонического луча как проекцию этого четырехсторонника из точки S и точно так же второе построение—как проекцию того же четырехсторонника из точки S' ; но отсюда тотчас получается, что прямые $\gamma\delta$ и $\gamma'\delta'$ должны пересекаться, вследствие чего, как и утверждалось, обе прямые D и D' должны между собой совпадать.

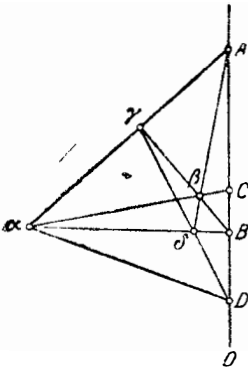
Наша теорема пока доказана лишь в том предположении, что оба построения K и K' не перекрываются в указанной области. Если это предположение не выполнено, то мы проектируем построение K' из какой-нибудь точки S , не лежащей в плоскости A, B, C , затем пересекаем проектирующую связку произвольной плоскостью и, наконец, проектируем фигуру, получившуюся в этой плоскости, из новой точки S' опять на исходную плоскость; полученную в результате этого построения фигуру назовем K'' . Посредством надлежащего выбора точек S и S' мы всегда можем добиться того, чтобы обе фигуры K и K'' , лежащие в плоскости A, B, C , уже больше не перекрывались; тогда предыдущее доказательство применимо к построениям K и K'' , откуда следует, что наше утверждение справедливо также и для построений K и K' . Этим наша теорема доказана в самом общем случае.

Аналогичным образом можно доказать, что три плоскости пучка A, B и C позволяют однозначно построить *четвертую гармоническую плоскость*. Для этого достаточно спроектировать приведенное на стр. 174 построение из какой-нибудь точки, не лежащей в исходной плоскости.

¹⁾ „Sur la géométrie non-euclidienne“, „Math. Annalen“, т. 29, стр. 154.

Все последующее доказательство также непосредственно переносится на этот случай.

Наконец, мы хотим еще сформулировать соответствующую теорему для прямолинейных рядов точек. Пусть заданы три точки A, B и C , лежащей на одной прямой O ; проведем через C произвольную прямую (черт. 97) и возьмем на ней две новых точки α и β . Эти точки определяют вместе с точками A и B четыре прямые αA и βA , αB и βB , из которых αA и βB пересекаются в точке γ , а αB и βA в точке δ . Соединяющая их прямая



Черт. 97.

$\gamma\delta$ определяет тогда на прямой O точку D , которую мы будем называть *четвертой гармонической к точке C относительно точек A и B* ¹⁾. Точка D не зависит от выбора прямой $\alpha\beta$ и точек α и β , но зависит только от положения точек A, B и C . Необходимо подчеркнуть, что четвертая гармоническая точка может оказаться и вне рассматриваемой конечной области, — неприятное обстоятельство, которое не могло иметь места при соответствующих построениях для пучков прямых и плоскостей.

Далее, из наших рассмотрений следует: четыре гармонические точки прямой при проектировании из не лежащей на этой прямой точки (или, соответственно, из не пересекающей эту прямую оси) дадут четыре гар-

монических элемента соответствующего пучка прямых (или плоскостей), потому что черт. 95 (построение четвертых гармонических прямых) и черт. 97 (построение четвертых гармонических точек) тождественны.

Для дальнейшего будет существенным тот факт, что соответствующие друг другу элементы A и B разделяются другой парой элементов C и D .

Для доказательства наших трех теорем нам приходилось во всех случаях выходить из плоскости в пространство. Вообще невозможно доказать теорему о четвертых гармонических точках или четвертых гармонических прямых только с помощью плоских проективных аксиом, следовательно, выход в пространство отнюдь не является искусственным приемом, но безусловно необходим для проведения доказательства. На этот замечательный факт впервые указал Клейн в 1873 г.²⁾; он был особенно подчеркнут Гильбертом (Hilbert) в 1899 г.³⁾.

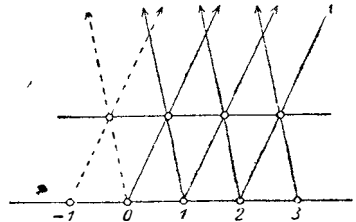
¹⁾ Ср. сноску на стр. 174.

²⁾ Klein, Über die sogenannte nichteuklidische Geometrie, „Math. Ann.“, т. 6, стр. 136; вновь переиздано в „Ges. Abh.“, т. 1, стр. 334.

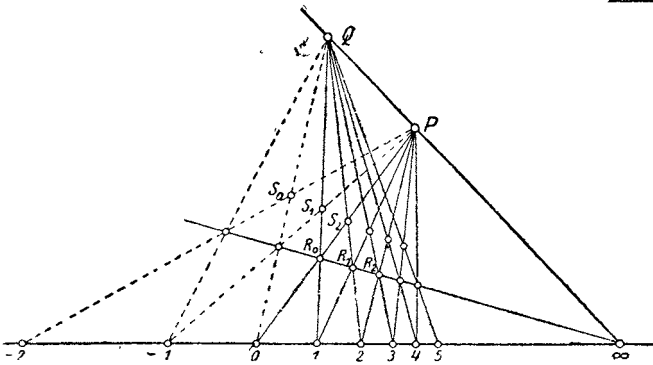
³⁾ Hilbert, Grundlagen der Geometrie, 5-е изд., 1923, стр. 83 (русский перевод: Д. Г и л ь б е р т, Основания геометрии, Изд. „Сеятель“, Петроград 1923).

§ 2. Введение координат в одномерной области

В евклидовой геометрии строят метрическую шкалу, т. е. последовательность равноотстоящих точек на прямой линии, путем выбора определенного отрезка и последовательного откладывания этого отрезка с помощью циркуля на прямой. Тот же результат мы можем получить также (как это показывает приведенное на черт. 98 построение) исключительно посредством проведения параллельных линий; следовательно, метрические представления для установления подобной шкалы не обязательны. Чтобы освободиться, далее, также и от применения параллелей и дать чисто проективное построение, мы подвергнем черт. 98 проективному отображению. Для этого возьмем на прямой линии три точки (например лежащие в пределах нашей комнаты), которым припишем значения 0, 1 и ∞ так, чтобы точка с значением 1 лежала между двумя другими точками (черт. 99). Через точку ∞ проведем произвольную прямую, которая будет являться образом бесконечно удаленной прямой черт. 98; вследствие этого на указанной прямой будут пересе-



Черт. 98.

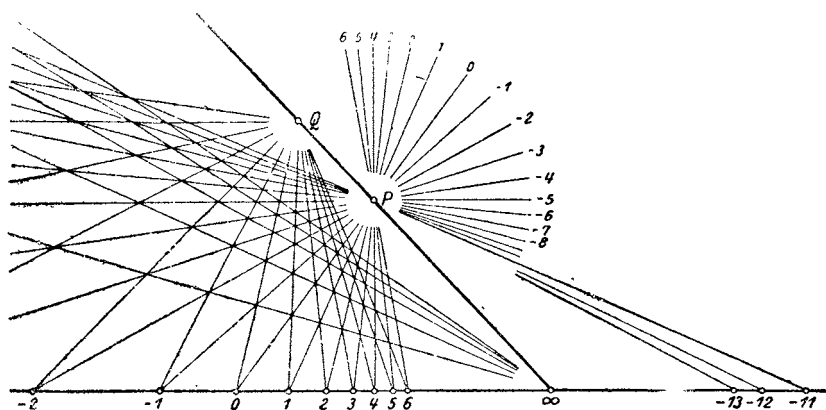


Черт. 99.

каться образы параллельных прямых черт. 98. Далее, проведем через точку ∞ еще третью прямую, которая будет соответствовать верхней горизонтальной прямой на черт. 98. Остальные построения черт. 99 получаются путем проведения прямых сначала через точку P, а затем через точку Q. Таким образом мы можем поставить в соответствие каждому целому положительному числу некоторую определенную точку между исходными точками 0 и ∞ ; эти точки все более и более сгущаются по мере того, как мы приближаемся к точке ∞ . Если мы продол-

за другом гармонических точек. Но этим же свойством обладают также прямые черт. 99, проходящие через точку Q . Отсюда следует, что эти прямые, проходящие через P и, соответственно, через Q , должны пересекаться на рассматриваемой прямой, что и требовалось доказать. На нашем черт. 99 имеются еще многочисленные точки пересечения прямых; для них можно доказать аналогичным образом аналогичные факты.

Числовая шкала, построенная нами на прямой линии, обладает тем недостатком, что мы ее не можем продолжать произвольно далеко, так как не все точки прямой лежат в имеющейся

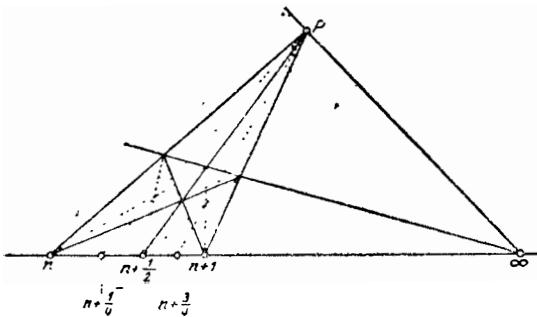


Черт. 101.

в нашем распоряжении части пространства. Этой неприятности мы можем избежать путем перехода к пучку прямых, например, спроектировав нашу точечную шкалу из какой-нибудь точки части пространства, имеющейся в нашем распоряжении. Посредством этого мы получаем в указанном пучке прямых также гармоническую шкалу, так как соответствующие построения тождественны. Но в пучке прямых мы можем построения четвертых гармонических прямых продолжать произвольно далеко также и для целых отрицательных чисел, вследствие чего каждому целому положительному или отрицательному числу будет поставлена в соответствие некоторая прямая пучка (черт. 101). Мы видим, как при возрастании соответствующих чисел прямые линии неограниченно приближаются к прямой ∞. На черт. 101 это построение переносится вновь на прямолинейный точечный ряд, причем точки с большими по абсолютной величине числами опять попадают в рассматриваемую нами область. Соответствующие рассуждения можно провести также и для случая пучка плоскостей.

Далее, возникает задача поставить во взаимно однозначное соответствие элементы нашей шкалы не только целым, но и произвольным действительным числам. При этом мы сначала

ограничимся прямолинейным рядом точек. Начнем с того, что „разделим пополам“ (посредством указанного на черт. 102 способа) отрезки между числами n и $n + 1$, причем точка $n + \frac{1}{2}$ является четвертой гармонической для точки ∞ относительно точек n и $n + 1$ ¹⁾. Из факта, указанного на стр. 176 следует, что точка $n + \frac{1}{2}$ лежит между точками n и $n + 1$. Таким же образом мы можем „разделить пополам“ отрезок между n и $n + \frac{1}{2}$ и отрезок между $n + \frac{1}{2}$ и $n + 1$ (черт. 102), вследствие чего полу-



Черт. 102.

чим точки $n + \frac{1}{4}$ и $n + \frac{3}{4}$. Если мы будем продолжать этот процесс, то мы поставим в соответствие всякой дроби со знаменателем, равным степени двух: $\frac{p}{2^n}$ (где p и n — целые числа), определенную точку нашей числовой прямой. Эти дроби называются *двоичными дробями*.

Теперь уже не представляет никакого затруднения распространить наше соответствие также и на все прочие действительные числа. Пусть дано определенное действительное число x , которое не является ни целым числом, ни двоичной дробью. Будем исходить прежде всего из двух целых чисел, между которыми содержится x ; затем разделим этот интервал пополам и выясним, к какому из двух новых полученных интервалов принадлежит x . Если мы будем неограниченно продолжать этот процесс, то мы получим две бесконечные последовательности двоичных дробей, неограниченно приближающихся сверху и снизу к данному числу x . Далее, мы определяем на нашей числовой прямой две бесконечные последовательности точек, соответствующие указанным числовым последовательностям. Обе эти последовательности точек сходятся к одной и той же точке²⁾, которой мы, естественно, приписываем координату x .

Посредством нашего процесса, который распадался на три этапа (целые числа, двоичные дроби, произвольные действитель-

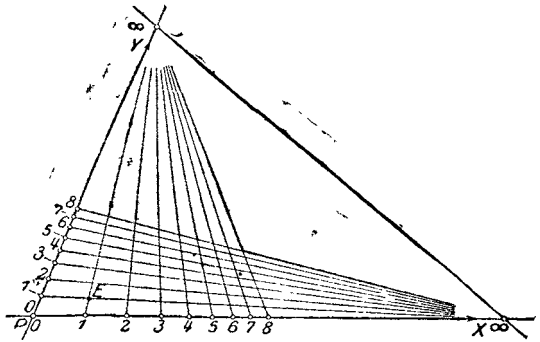
¹⁾ Читатель может произвести сам соответствующее построение на черт. 98.

²⁾ Совпадение предельных точек обеих последовательностей является следствием аксиомы непрерывности в геометрии; мы здесь не хотим входить в разбор тех возможностей, которые получаются при отказе от этой аксиомы.

ные числа), мы ввели на прямой линии некоторую систему координат. Легко видеть, что подобный процесс можно применять также к пучку прямых и к пучку плоскостей. Все эти координатоопределения однозначно определяются заданием трех элементов, которым мы приписываем числа 0 , 1 и ∞ ¹⁾.

§ 3. Введение координат на плоскости и в пространстве

Соответствующее координатоопределение на плоскости и в пространстве теперь может быть произведено уже известным образом. На плоскости мы проводим через некоторую точку P (нулевую точку системы координат) две прямые (ось X и ось Y) и на каждой из этих прямых выбираем по точке ∞ (черт. 103). Наконец, мы выбираем внутри получившегося треугольника точку E в качестве единичной точки, которая определяет посредством прямых, соединяющих ее с обеими точками ∞ , единичные точки на осях, и производим на обеих осях указанное в предыдущем параграфе построение метрической шкалы. Про-



Черт. 103.

извольная точка, лежащая внутри треугольника, определяется тогда значениями координат x и y , которые в свою очередь определяются на осях посредством проведения соответствующих прямых, соединяющих ее с точками ∞ . Мы хотим еще отметить, что черт. 103 является проективным отображением квадратной сетки, например шахматной доски, что делается особенно наглядным, если мы выкрасим отдельные поля попеременно в черный и белый цвет (черт. 104).

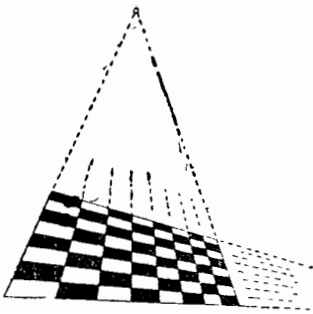
Аналогичным образом мы поступаем в пространстве, выбрав какой-нибудь тетраэдр с лежащей внутри него единичной точкой за координатный и определяя отдельные точки пространства значениями координат, которые в свою очередь определяются на осях путем проведения плоскостей, проходящих через эту точку и две точки ∞ на осях (черт. 105).

Введенные здесь координаты обладают тем свойством, что *координаты точек, лежащих на прямой линии плоскости (или, соответственно, на плоскости пространства), удовлетворяют линейному уравнению*. Доказательство этого получается без всяких затруднений и поэтому может быть здесь опущено. Вследствие

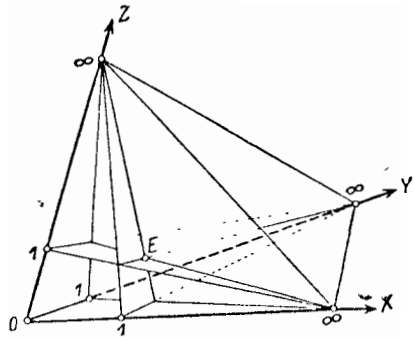
¹⁾ Построение, которое мы производим в этом параграфе, тесно связано с так называемыми *сетями Мебиуса* (Möbius, Der barocentrische Calcul, 1827).

этого свойства *новые координаты являются тождественными с рассмотренными ранее проективными координатами.*

С помощью этих соображений мы можем теперь нашу геометрию заданной конечной области, например нашей комнаты, расширить до общей проективной геометрии, как это мы сейчас сделаем подробнее для случая плоскости. Для этого мы назовем „идеальными точками“ две системы значений координат, которым не соответствует никакая точка нашей комнаты. Далее, мы поставим в соответствие двум прямым, не пересекающимся в нашей области, в качестве точки пересечения ту идеальную точку, координаты которой получаются путем совместного решения уравнений обеих прямых. Наконец, мы назовем идеальной прямой линейное уравнение, которое не удовлетворяется координатами никаких точек, лежащих внутри нашей комнаты, и т. д.



Черт. 104.



Черт. 105.

Если мы введем однородные координаты, то получим вследствие этого проективную геометрию, которая непрерывно продолжает геометрические отношения, существующие в нашей комнате.

В заключение мы хотим еще раз подчеркнуть тот основной результат наших рассуждений, что *наше координатоопределение было введено без привлечения метрических представлений и независимо от аксиом о параллельных.* Этот принципиально важный шаг был подготовлен уже Штаудтом в его „Геометрии положения“. Однако, несмотря на то, что в этой работе имеются все вспомогательные средства для чисто проективного введения координат, Штаудт все же возвращается при определении координат к метрическим представлениям. Чисто проективное введение координат было произведено окончательно Клейном в 1871 г.; правда, в то время Клейн не думал, что он вводит нечто новое, так как все материалы он нашел у Штаудта и предполагал, что этот последний сделал и окончательный шаг, что на самом деле не подтвердилось¹⁾.

¹⁾ Ср. Клейн, „Ges. Abh.“, т. I, стр. 241 и далее стр. 251, 303, 306, 330.

ПРОЕКТИВНЫЕ МЕРООПРЕДЕЛЕНИЯ ¹⁾

§ 1. Невырождающиеся мероопределения

Проективной геометрии, которую мы можем мыслить построенной так, как это было сделано в предыдущих главах, мы можем навязать евклидово мероопределение, отметив в качестве фундаментального образа на плоскости нулевую пару точек: $x_1^2 + x_2^2 = 0$, $x_3 = 0$, а в пространстве — нулевое коническое сечение: $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0$, $x_4 = 0$ и определив относительно этих образов метрические понятия согласно гл. IV ²⁾.

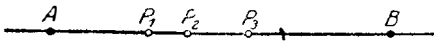
Аналогичным образом естественно можно строить метрику на основе произвольного образа второй степени, который, в частности, может вырождаться. Вследствие таких построений мы получаем большое число новых мероопределений, которые мы будем называть вырождающимися или невырождающимися в зависимости от вида положенного в основу квадратичного образа („фундаментального образа“). Все эти мероопределения с логической точки зрения являются равноправными с евклидовой геометрией. Но мы их сначала будем намеренно называть лишь *мероопределениями*, а не геометриями, так как не все они применяются к измерениям во внешнем мире. Позднее же мы выделим среди них те, которые применяются на практике, и будем их называть геометриями; мы, значит, следуем здесь первоначальному словупотреблению, по которому геометрия означала землемерие.

¹⁾ Для этой главы мы укажем в качестве литературы на работы Клейна, „Über die sogenannte nichteuklidische Geometrie“, „Math. Ann.“, т. 4, 1871; вновь переиздано в „Ges. Math. Abh.“, т. I, стр. 254. Краткое изложение развития проективной метрики имеется на стр. 303 и сл.; ср. также Клейн, „Ges. Math. Abh.“, т. I, стр. 50.

²⁾ Правда, при этом мы получаем только проективный образ привычной нам евклидовой геометрии, т. е. той евклидовой геометрии, которая соответствует отношениям предметов внешнего мира. Однако, так как этот проективный образ соответствует взаимнооднозначным образом собственно евклидовой геометрии, то мы будем называть получающееся нашим способом мероопределение также евклидовым. Далее, мы еще раз укажем на то, что при введении евклидова мероопределения пользование комплексной областью является лишь аналитическим вспомогательным средством, потому что, например, двум действительным точкам всегда соответствует действительное расстояние, которое только устанавливается с помощью вычислений в комплексной области.

Теперь отчетливо выявляется строение геометрии с аналитической стороны. Чисто проективные свойства получаются при изучении линейных соотношений, тогда как следующее за ними введение какой-нибудь метрики можно представить как выделение некоторой квадратичной формы.

А. Определение расстояний и углов с помощью двойных отношений. На прямой линии невырождающимся квадратичным образом является (стр. 83) пара точек, которую мы в качестве фундаментального образа кладем в основу мероопределения на прямой. Две точки P_1 и P_2 , между которыми нужно установить



Черт. 106.

расстояние, определяют вместе с двумя фундаментальными точками двойное отношение DV . В соответствии со стр. 157 и 170 мы определим расстояние E между двумя точками P_1 и P_2 как логарифм этого двойного отношения, умноженный на некоторую постоянную c :

$$E = c \cdot \ln DV.$$

Постоянная расстояний c при данном мероопределении одинакова для всех пар точек.

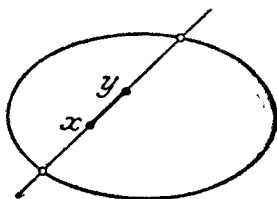
Убедимся в том, что из этого определения вытекают известные нам свойства расстояний. Прежде всего при указанном определении знак расстояния остается неопределенным, потому что двойное отношение двух пар точек кроме значения $\frac{\lambda}{\mu}$ может принимать еще только обратное значение $\frac{\mu}{\lambda}$ (стр. 52), но

$\ln \frac{\mu}{\lambda} = -\ln \frac{\lambda}{\mu}$. Так как, далее, логарифм любого числа определен лишь с точностью до числа кратного $2\pi i$, то наше расстояние имеет период $2\pi i$, — многозначность, с которой мы уже встречались в случае евклидова угла. Далее, мы находим, что длина отрезка $\overline{12}$, увеличенная на длину отрезка $\overline{23}$, равняется длине отрезка $\overline{13}$, т. е.: $\overline{12} + \overline{23} = \overline{13}$, потому что, как легко показать, $DV\{P_1P_2AB\} \cdot DV\{P_2P_3AB\} = DV\{P_1P_3AB\}$, причем через A и B мы обозначаем обе фундаментальные точки (черт. 106). Далее, расстояние точки от самой себя (вообще говоря) равняется нулю; $\overline{11} = 0$, так как $DV\{P_1P_1AB\} = 1$, если P_1 не совпадает ни с A , ни с B . Наконец, отметим еще, что $\overline{12} = -2i$, так как имеет место соотношение: $DV\{P_1P_2AB\} = 1 : DV\{P_2P_1AB\}$. В этих теоремах знак расстояния определяется указанным порядком следования точек; периоды входят таким же образом, как и в случае евклидова угла.

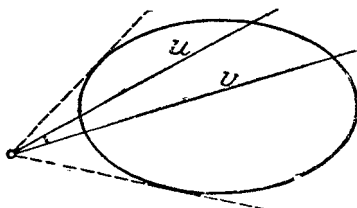
Рассмотренное двойное отношение четырех точек обладает свойством оставаться инвариантным при произвольных проективных преобразованиях. В частности, значит, оно остается неизменным при таких проективных преобразованиях, которые переводят

основной образ сам в себя. Подобные преобразования мы будем называть „твердыми“ преобразованиями рассматриваемого мероопределения, так как при них остаются неизменными все длины, а фундаментальные точки переходят сами в себя. В существовании этих ∞^1 твердых преобразований мы и усматриваем основание того, что наши новые мероопределения в известном смысле равноправны с евклидовой геометрией.

Аналогичные соображения могут быть приведены для пучков прямых и плоскостей. Также и здесь мы выделяем два элемента пучка в качестве фундаментальных. Два других элемента, угол между которыми подлежит определению, вместе с двумя фундаментальными элементами определяют двойное отношение DV .



Черт. 107.



Черт. 108.

Углом W между двумя рассматриваемыми элементами мы называем тогда умноженный на постоянную c' логарифм этого двойного отношения:

$$W = c' \cdot \ln DV.$$

Постоянная углов c' также является неизменной для данного мероопределения.

На плоскости в качестве фундаментального образа мы пользуемся коническим сечением, которое сначала будем предполагать невырождающимся. Расстояние между двумя точками x и y мы определяем путем нахождения двух точек пересечения соединяющей их прямой с фундаментальным образом (черт. 107). Случай, когда эта прямая касается конического сечения, — этот случай мы будем называть изотропным — мы сначала исключим из рассмотрения. Мы рассматриваем теперь обе точки пересечения как фундаментальные и устанавливаем расстояние между исходными точками точно так же, как и раньше, посредством логарифма двойного отношения, определяемого этими четырьмя точками. При этом постоянная расстояний c , стоящая множителем при логарифме, должна быть при данном мероопределении одинакова для всех прямых.

Двойственным образом мы определяем угол между двумя прямыми u и v путем проведения из точки их пересечения двух касательных к коническому сечению (черт. 108). Случай, когда точка пересечения лежит на самом коническом сечении, — его мы будем называть изотропным, — мы пока тоже исключим. Выделив эти две касательные в качестве фундаментальных, мы

можем определить угол между исходными прямыми совершенно так же посредством логарифма двойного отношения. Постоянная углов c' должна быть при данном мероопределении одинакова для всех пучков прямых; от постоянной c , фигурирующей в формуле расстояния, она совершенно не зависит.

Эти определения вполне созвучны с приведенными на стр. 170 предложениями эллиптической геометрии на плоскости.

В *пространстве* в качестве фундаментального образа мы берем какую-нибудь невырождающуюся поверхность второй степени. Расстояние между двумя точками мы определяем путем нахождения двух точек пересечения соединяющей их прямой с фундаментальной поверхностью, после чего искомое расстояние находится по возникшему на этой прямой мероопределению. Аналогичным образом определяется угол между двумя плоскостями путем проведения через линию их пересечения двух касательных плоскостей к фундаментальной поверхности, после чего искомый угол находится по возникшему в пучке плоскостей мероопределению. Случай, когда прямая, соединяющая две точки (или соответственно линия пересечения двух плоскостей), касается нашей поверхности, нами пока исключается.

Таким же способом получают невырождающиеся проективные мероопределения и в случае многообразий произвольной размерности.

Среди этих мероопределений евклидова геометрия не находится. В самом деле, мы уже видели на стр. 155 и сл., что ее фундаментальный образ однократно вырождается; поэтому мы с ней встретимся лишь в следующем параграфе. Но уже сейчас интересно отметить следующее: фундаментальный образ плоской евклидовой геометрии, как образ второго порядка, состоит из *одной* дважды взятой прямой, а как образ второго класса — из *пары* точек. Вследствие этого евклидовы углы определяются так же, как и в случае невырождающихся мероопределений, так как из всякой (собственной) точки выходят *две* фундаментальные прямые, тогда как выражение для расстояния имеет совершенно другой характер, в соответствии с тем фактом, что на всякой (собственной) прямой лежит только *одна единственная* фундаментальная точка. Аналогичные вырождения имеют место и в пространственной евклидовой геометрии и (как это показывают таблицы на стр. 100 и 107) также во всех других случаях вырождающихся мероопределений.

В. Аналитические выражения расстояний и углов. Теперь нам предстоит выразить приведенные определения расстояний и углов с помощью координат соответствующих точек, прямых или плоскостей. Начнем со случая *прямой линии*, на которой мы вводим (гл. V) проективные координаты $x_1 : x_2$ и выбираем невырождающийся образ второй степени:

$$\Omega_{xx} = \sum a_{x\lambda} x_\lambda x_\lambda = a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2 = 0, \quad (D = |a_{x\lambda}| \neq 0)$$

в качестве фундаментального образа, причем $a_{x\lambda} = a_{\lambda x}$. Это урав-

нение определяет пару точек, имеющих следующие координаты:

$$\frac{x'_1}{x'_2} = -\frac{a_{12}}{a_{11}} + \frac{1}{a_{11}} \sqrt{a_{12}^2 - a_{11} a_{22}}, \quad \frac{x''_1}{x''_2} = -\frac{a_{12}}{a_{11}} - \frac{1}{a_{11}} \sqrt{a_{12}^2 - a_{11} a_{22}}.$$

Обозначим координаты точек, между которыми определяется расстояние, через $y_1 : y_2$ и $z_1 : z_2$. Тогда это расстояние относительно данного фундаментального образа по стр. 184 равняется:

$$E(y, z) = c \cdot \ln DV \{y, z, x', x''\} = c \cdot \ln DV \{x', x'', y, z\}.$$

Чтобы определить величину указанного двойного отношения, выгоднее исходить из выражения двойного отношения, приведенного последним, которое по стр. 52 имеет такое же значение, как и первое. Определим точку прямой линии координатами $\rho x_i = y_i + \mu z_i$. Тогда оба значения параметра μ' и μ'' , соответствующие фундаментальным точкам x' и x'' , найдутся путем подстановки в фундаментальное уравнение:

$$\begin{aligned} \sum a_{\lambda\lambda} (y_\lambda + \mu z_\lambda) (y_\lambda + \mu z_\lambda) = \\ = a_{11} (y_1 + \mu z_1)^2 + 2 a_{12} (y_1 + \mu z_1) (y_2 + \mu z_2) + a_{22} (y_2 + \mu z_2)^2 = 0. \end{aligned}$$

Если мы расположим члены по степеням μ , то получим, как и на стр. 65:

$$\sum a_{\lambda\lambda} y_\lambda y_\lambda + 2\mu \sum a_{\lambda\lambda} y_\lambda z_\lambda + \mu^2 \sum a_{\lambda\lambda} z_\lambda z_\lambda = 0.$$

Это уравнение мы можем также написать в виде:

$$\Omega_{yy} + 2\mu \Omega_{yz} + \mu^2 \Omega_{zz} = 0;$$

величины Ω являются постоянными, так как $a_{\lambda\lambda}$, y_i и z_i заданы. Если мы вычислим оба корня μ' и μ'' приведенного уравнения и составим частное $\mu' : \mu''$, которое по стр. 53 равно искомому войному отношению, то получим:

$$E(y, z) = c \cdot \ln DV = c \cdot \ln \frac{\mu'}{\mu''} = c \cdot \ln \frac{\Omega_{yz} + \sqrt{\Omega_{yz}^2 - \Omega_{yy}\Omega_{zz}}}{\Omega_{yz} - \sqrt{\Omega_{yz}^2 - \Omega_{yy}\Omega_{zz}}}.$$

Если мы переставим оба корня μ' и μ'' , то двойное отношение примет обратное значение, и вследствие этого расстояние изменит знак. Фигурирующие в двойном отношении корни мы можем в случае прямой линии преобразовать к следующему простому виду:

$$\Omega_{yz}^2 - \Omega_{yy}\Omega_{zz} = (y_1 z_2 - z_1 y_2)^2 (a_{12}^2 - a_{11} a_{22}),$$

которым мы воспользуемся на стр. 199.

Такие же рассуждения, как для прямой линии, могут быть сделаны также и для *пучков прямых и плоскостей*. Если уравнения обеих фундаментальных прямых или плоскостей имеют вид:

$$\Phi_{uu} = \sum a_{\lambda\lambda} u_\lambda u_\lambda = a_{11} u_1^2 + 2a_{12} u_1 u_2 + a_{22} u_2^2 = 0 \quad (\Delta = |a_{\lambda\lambda}| \neq 0),$$

то угол между двумя элементами v и w определяется соотношением:

$$W(v, w) = c' \cdot \ln \frac{\Phi_{vw} + \sqrt{\Phi_{vw}^2 - \Phi_{vv} \cdot \Phi_{ww}}}{\Phi_{vw} - \sqrt{\Phi_{vw}^2 - \Phi_{vv} \cdot \Phi_{ww}}}.$$

В случае плоскости мы получаем такие же формулы, как и в случае прямой линии или как в случае пучка прямых. Мы здесь также вводим проективные координаты $x_1 : x_2 : x_3$ и выделяем определенное невырождающееся коническое сечение:

$$\Omega_{xx} = \sum a_{x\lambda} x_\lambda x_\lambda = 0 \quad (D = |a_{x\lambda}| \neq 0)$$

в качестве фундаментального образа. Обозначим координаты точек, между которыми определяется расстояние, через y_i и z_i . Тогда точки соединяющей их прямой будут иметь координаты $y_i + \mu z_i$. Рассуждения, аналогичные прежним, приводят опять к тому же выражению для расстояния между двумя точками y и z :

$$E(y, z) = c \cdot \ln \frac{\Omega_{yz} + \sqrt{\Omega_{yz}^2 - \Omega_{yy} \Omega_{zz}}}{\Omega_{yz} - \sqrt{\Omega_{yz}^2 - \Omega_{yy} \Omega_{zz}}}.$$

Если прямая, соединяющая обе точки, изотропна, т. е. если она касается фундаментального конического сечения, то $\Omega_{yz}^2 - \Omega_{yy} \Omega_{zz} = 0$ (так как в этом случае $\mu' = \mu''$), так что

$E(y, z) = c \cdot \ln \frac{\Omega_{yz}}{\Omega_{yz}}$. Следовательно, расстояние между двумя точками, лежащими на изотропной прямой, равняется $c \cdot \ln 1 = 0$, если ни одна из точек y или z не совпадает с точкой прикосновения; напротив, если это имеет место, следовательно если Ω_{yz} обращается в нуль, то расстояние является неопределенным.

Формулы для угла между двумя прямыми получаются двойственным путем. Пусть уравнением фундаментального конического сечения в прямолинейных координатах является уравнение:

$$\Phi_{uu} = \sum a_{x\lambda} u_x u_\lambda = 0.$$

Тогда мы получаем для угла между двумя прямыми v и w следующую формулу:

$$W(v, w) = c' \cdot \ln \frac{\Phi_{vw} + \sqrt{\Phi_{vw}^2 - \Phi_{vv} \Phi_{ww}}}{\Phi_{vw} - \sqrt{\Phi_{vw}^2 - \Phi_{vv} \Phi_{ww}}}.$$

Если обе прямые пересекаются на самом коническом сечении, то угол между ними обращается в нуль (в предположении, что ни одна из прямых сама не является изотропной).

Также и в пространстве для расстояния между двумя точками или соответственно для угла между двумя плоскостями получаются в точности такие же формулы, только теперь все индексы пробегает значения от 1 до 4.

Полученные формулы мы можем написать еще в другом виде. Как известно, имеет место соотношение:

$$\ln a = 2i \operatorname{arccos} \frac{a+1}{2\sqrt{a}}.$$

Из него вытекает, как это легко показать, что

$$E(y, z) = 2ic \cdot \operatorname{arccos} \frac{\Omega_{yz}}{\sqrt{\Omega_{yy}\Omega_{zz}}}.$$

Наконец, мы еще можем написать расстояние в виде арксинуса:

$$E(y, z) = 2ic \cdot \operatorname{arcsin} \frac{\sqrt{-\frac{\Omega_{yz}^2}{\Omega_{yy}\Omega_{zz}} + \frac{\Omega_{yy}\Omega_{zz}}{\Omega_{yy}\Omega_{zz}}}}{\sqrt{\frac{\Omega_{yy}\Omega_{zz}}{\Omega_{yy}\Omega_{zz}}}}.$$

Такие же преобразования мы можем сделать и для формул углов¹⁾. В дальнейшем во многих случаях мы будем предполагать, что уравнения фундаментальных образов даны не в общем виде: $\sum a_{\lambda\lambda} x_\lambda x_\lambda = 0$, а в виде суммы квадратов (стр. 79—83). Тогда полученные формулы чрезвычайно упрощаются. В случае прямой для пары комплексно-сопряженных или пары действительных точек мы будем иметь уравнение:

$$x_1^2 + \epsilon x_2^2 = 0 \quad (\epsilon = \pm 1).$$

Тогда

$$\Omega_{yy} = y_1^2 + \epsilon y_2^2, \quad \Omega_{yz} = y_1 z_1 + \epsilon y_2 z_2, \quad \Omega_{zz} = z_1^2 + \epsilon z_2^2,$$

так что для расстояния между двумя точками получаются следующие формулы:

$$\begin{aligned} E(y, z) &= 2ic \cdot \operatorname{arccos} \frac{y_1 z_1 + \epsilon y_2 z_2}{\sqrt{(y_1^2 + \epsilon y_2^2)(z_1^2 + \epsilon z_2^2)}} = \\ &= 2ic \cdot \operatorname{arcsin} \frac{(y_1 z_2 - z_1 y_2) \sqrt{\epsilon}}{\sqrt{(y_1^2 + \epsilon y_2^2)(z_1^2 + \epsilon z_2^2)}}. \end{aligned}$$

Аналогичным образом на плоскости для нулевой или овальной кривой имеем уравнение:

$$x_1^2 + x_2^2 + \epsilon x_3^2 = 0 \quad (\epsilon = \pm 1).$$

Тогда, например, арккосинус-формула принимает вид:

$$E(y, z) = 2ic \cdot \operatorname{arccos} \frac{y_1 z_1 + y_2 z_2 + \epsilon y_3 z_3}{\sqrt{(y_1^2 + y_2^2 + \epsilon y_3^2)(z_1^2 + z_2^2 + \epsilon z_3^2)}}.$$

Мы особенно отметим, что полученная формула имеет такое же строение, как рассмотренное в гл. IV выражение для евклидова угла между двумя прямыми или плоскостями. Далее, если мы положим $2ic = 1$, то она совпадает с формулой расстояния между двумя точками x и x'' в плоской евклидовой геометрии (стр. 168).

¹⁾ Читатель может убедиться сам, что эти формулы расстояния или соответственно угла определены также лишь с точностью до знака и числа, кратного $2\pi i$ (ср. стр. 184).

С. Эллиптическое и гиперболическое мероопределения на прямой линии. Мы теперь обратимся к *наглядному рассмотрению* установленных мероопределений. При этом мы с самого начала будем принимать во внимание *свойства действительности фундаментальных образов*. Мероопределение на прямой линии называют *эллиптическим или гиперболическим*¹⁾ в зависимости от того, положена ли в основу пара комплексно-сопряженных или действительных точек. Промежуточное мероопределение между двумя названными (при котором фундаментальным образом является дважды взятая точка) называется *параболическим*; это вырождающееся мероопределение мы будем рассматривать на стр. 198.

Начнем с рассмотрения *эллиптического мероопределения*, фундаментальные точки которого комплексно сопряжены. Двойное отношение двух действительных точек к двум комплексно-сопряженным фундаментальным точкам, как легко вычислить, по модулю равно единице, так что соответствующий логарифм является чисто мнимым¹⁾. Поэтому, если мы хотим, чтобы действительным точкам соответствовали действительные же расстояния, мы должны приписать постоянной *с чисто мнимое значение* ic , где c — действительное отличное от нуля число. Тогда две любые действительные точки на проективной прямой будут находиться друг от друга на действительном конечном расстоянии. Притом это расстояние определено лишь с точностью до знака и числа, кратного $2\pi ic = -2\pi c$; этот период как раз равняется общей длине прямой линии при однократном ее обходе, вследствие чего становится понятным смысл многозначности расстояния в эллиптической геометрии.

Соответствующий двумерный случай нами уже рассматривался в гл. IV, где мы путем проектирования получали плоскую эллиптическую геометрию из евклидовой геометрии связки или из сферической геометрии. Совершенно так же мы можем получить эллиптическую геометрию прямой путем проектирования точек окружности радиуса $r = 2c$ из ее центра на прямую линию, причем в качестве длины отрезка на этой прямой рассматривается евклидова длина соответствующей дуги окружности. На черт. 109 этим простым способом построена шкала из равноотстоящих точек на эллиптически измеряемой прямой. Здесь

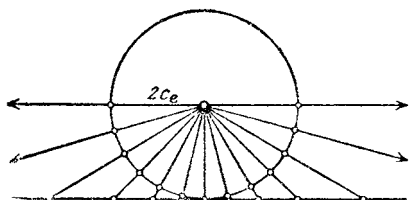
¹⁾ Эти введенные *Клейном* названия примакают к обычному словупотреблению в геометрии. Так, например, точки поверхности называются гиперболическими, эллиптическими или параболическими в зависимости от того, являются ли соответствующие главные касательные действительными, мнимыми или совпадающими. Таким же образом Штейнер классифицирует инволюции и т. д. Klein, „Ges. Math. Abh.“, т. I, стр. 258.

²⁾ Потому что имеет место формула: $\log(x+iy) = \log|r| + i\varphi$, причем r и φ обозначают модуль и аргумент числа $x+yi$:

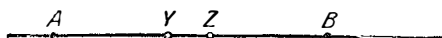
$$r = |x+iy| = \sqrt{x^2+y^2} \quad \text{и} \quad \varphi = \arg(x+iy) = \arctg \frac{y}{x}.$$

наглядно видно, что длина всей замкнутой прямой при однократном обходе как раз равняется $\pi r = 2\pi c$.

При *гиперболическом мероопределении* обе фундаментальные точки A и B являются действительными. Две действительные точки Y и Z относительно точек A и B имеют всегда действительное двойное отношение, притом это двойное отношение отрицательно или положительно в зависимости от того, разделяется ли пара точек Y, Z парой точек A, B (черт. 110) или нет (черт. 110). Во втором случае логарифм двойного отношения (не считая мнимого периода) является действи-



Черт. 109.



Черт. 110.



Черт. 111.

тельным, в первом же, напротив, комплексным. Следовательно, если мы хотим, чтобы расстояние между двумя точками на прямой, лежащими в одном из двух отрезков AB (черт. 110), было действительным, то мы должны взять постоянную c также *действительной*: $c = c_h$, где c_h — действительное отличное от нуля число. Тогда расстояние между двумя различными действительными точками Y и Z , не совпадающими ни с одной из двух фундаментальных точек, будет действительным или комплексным, смотря по тому, лежат ли они обе в одном из отрезков AB (черт. 110) или же нет (черт. 111).

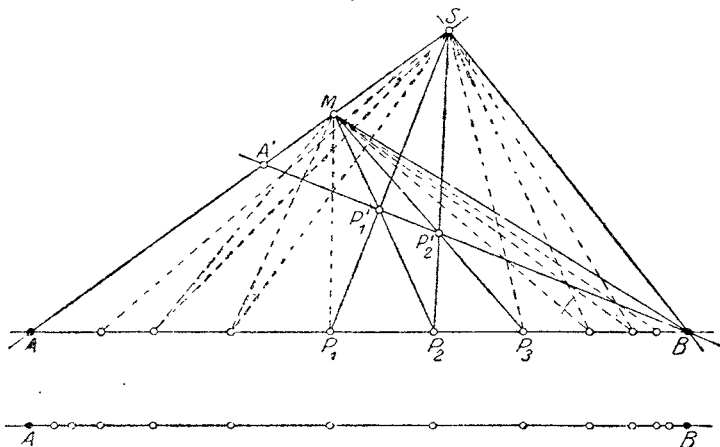
Если мы будем откладывать в смысле гиперболического мероопределения один и тот же отрезок в обе стороны от произвольной действительной точки P , не совпадающей ни с одной из двух фундаментальных точек, то мы получим нижнюю шкалу черт. 112. Так как подобные последовательности равноотстоящих (в смысле гиперболического мероопределения) точек часто встречаются, то мы на черт. 112 приводим соответствующее простое построение. При этом A и B обозначают фундаментальные точки нашего мероопределения, P_1 и P_2 — концевые точки данного отрезка. Мы проводим через одну из фундаментальных точек, например через B , прямую (на чертеже она обозначена $A'B$) и проектируем четыре данные точки из произвольной точки S на эту прямую; тогда $DV\{P_1P_2AB\} = DV\{P_1'P_2'A'B\}$. Прямая, соединяющая точки P_2 и P_1' , пересекает прямую AS в некоторой точке M . Мы проектируем теперь четыре получившиеся точки из M опять на исходную прямую. Тогда мы получаем:

$$DV\{P_1'P_2'A'B\} = DV\{P_2P_3AB\},$$

и, следовательно,

$$DV\{P_1P_2AB\} = DV\{P_2P_3AB\},$$

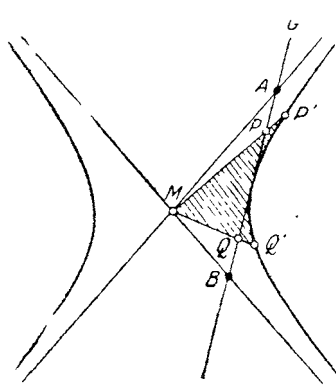
откуда непосредственно следует, что отрезки P_1P_2 и P_2P_3 конгруэнтны в смысле рассматриваемого гиперболического мероопределения. Построение дальнейших точек производится аналогичным образом и изображено на чертеже пунктиром.



Черт. 112.

Из этого построения видно, что гиперболически конгруэнтные отрезки делаются все меньше и меньше (в смысле евклидовой геометрии) по мере приближения к обеим фундаментальным точкам A и B и никогда не достигают этих точек. Поэтому

расстояние фундаментальных точек от исходной точки P в смысле гиперболического мероопределения бесконечно велико. Все точки, лежащие вне рассматриваемого отрезка AB , имеют комплексное расстояние от точки P . Если мы будем проходить в единицу времени всегда одно и то же в смысле гиперболического мероопределения расстояние по прямой, то мы никогда не достигнем фундаментальных точек. Поэтому все точки вне рассматриваемого отрезка могут рассматриваться как недостижимые или несобственные. При этом мы еще раз подчеркнем, что расстояния между двумя



Черт. 113.

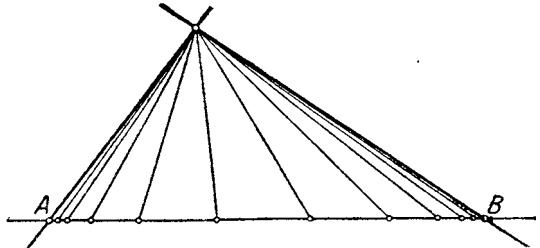
несобственными точками, из которых ни одна не совпадает с фундаментальной, является действительным конечным расстоянием. Далее, в гиперболическом мероопределении действительное расстояние между собственными точками (в противоположность эллиптической геометрии) определено однозначно с точностью до знака, потому что период расстояния является здесь кратным $2i\pi c$, так что мы имеем только одно единственное действительное значение.

Гиперболическое мероопределение на прямой линии мы можем сделать наглядным, подобно тому как мы это сделали для эллиптического (черт. 109), следующим способом, пригодность которого легко установить аналитически. Мы проектируем точки гиперболы из центра M на прямую G (черт. 113) и рассматриваем в качестве гиперболически измеренной длины отрезка PQ на прямой G евклидову площадь треугольника $MP'Q'$ (на черт. 113 заштрихованного). При этом обе фундаментальные точки гиперболического мероопределения являются точками пересечения прямой G с асимптотами гиперболы. Соответствующим образом и в случае эллиптической геометрии мы могли бы пользоваться не длиной дуги окружности, а площадью соответствующего сектора, которая отличается лишь множителем от длины дуги; в случае же гиперболического мероопределения приходится пользоваться только площадью и нельзя воспользоваться длиной дуги.

В заключение мы хотим еще раз подчеркнуть, что, несмотря на различие между эллиптическим и гиперболическим мероопределениями в действительной области, с алгебраической точки зрения эти мероопределения являются тождественными. Мы положили в случае эллиптического мероопределения $c = ic_n$, а в случае гиперболического $c = c_n$, следовательно, обе постоянные связаны соотношением:

$$c_e = -ic_n.$$

Д. Эллиптическое и гиперболическое мероопределения в пучке прямых и плоскостей. Здесь опять мы назовем мероопределение эллиптическим или гиперболическим в зависимости от того, будут ли оба фундаментальных элемента комплексно-сопряженными или действительными. Притом эти мероопределения являются непосредственно проекциями соответствующих мероопределений на прямой линии (черт. 109—эллиптическое мероопределение, черт. 114—гиперболическое мероопределение). При этом в случае эллиптического мероопределения мы можем сделать как угодно



Черт. 114.

много обходов вокруг центра пучка (в действительной области) путем повторного откладывания одного и того же угла, тогда как в случае гиперболического мероопределения при таких же повторных откладываниях мы будем неограниченно приближаться к фундаментальным прямым. Если мы будем исходить из прямоугольной системы координат и возьмем уравнение фундаментальных элементов в виде $u_1^2 + u_2^2 = 0$,

то мы получим при $c' = \frac{ia}{2}$ как раз евклидову метрику угла.

Е. Эллиптическое и гиперболическое мероопределения на плоскости. Невырождающееся мероопределение на плоскости будем называть *эллиптическим* или *гиперболическим* в зависимости от того, будет ли соответствующее фундаментальное коническое сечение нулевым или овальным. Евклидово мероопределение рассмотрим позднее, так как оно является вырождающимся.

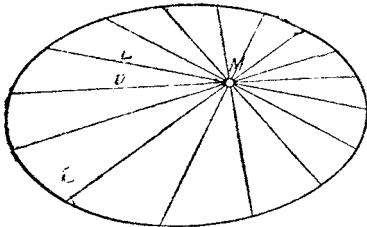
Начнем с *плоского эллиптического мероопределения*, при котором фундаментальное коническое сечение является нулевым. В этом случае мы припишем постоянным s и s' чисто мнимые значения для того, чтобы расстояние между двумя действительными точками (или соответственно угол между двумя действительными прямыми) было действительным (ср. стр. 190). В частности, постоянную расстояния мы положим равной $s = ic$; напротив, постоянную углов мы положим равной $\frac{i}{2}$, чтобы изме-

рение углов совпадало с евклидовым. Все расстояния между действительными точками проективной плоскости будут тогда действительными и конечными, так что в действительной области не будет никаких бесконечно удаленных точек. Со всеми этими обстоятельствами мы уже познакомились в § 5 гл. IV.

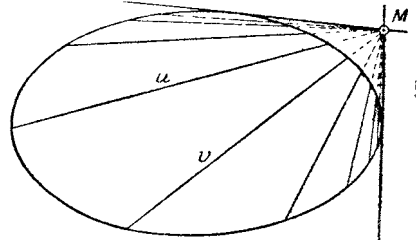
Наоборот, если фундаментальное коническое сечение является овальным, то мы получаем *плоское гиперболическое мероопределение*, с которым мы до сих пор еще не встречались. Овальная кривая разбивает действительную проективную плоскость на две различных области, которые мы можем назвать внутренней и внешней; при этом мы называем внешней ту область, из всех точек которой можно провести две действительных касательных к коническому сечению, в то время как касательные из точек внутренней области являются комплексно-сопряженными. На прямых линиях плоскости получается гиперболическое, выродившееся или, наконец, эллиптическое мероопределение в зависимости от того, пересекает ли прямая коническое сечение в двух действительных точках, в одной действительной или ни в одной действительной точке. Постоянную s мы берем также действительной, как и при гиперболическом мероопределении на прямой: $s = s_r$. Если мы находимся внутри конического сечения, то мы можем неограниченно много раз откладывать (в смысле нашего мероопределения) данный отрезок по любой прямой, никогда не выходя за пределы конического сечения. Следовательно, точки фундаментального конического сечения недостижимы при конечной скорости (ср. стр. 193) и играют ту же роль, что и бесконечно удаленные точки в плоской евклидовой геометрии. Точки внешней области фундаментального конического сечения находятся на комплексном расстоянии от точек внутренней области и потому также могут рассматриваться как идеальные точки. Мы отметим еще, что расстояние между двумя идеальными точками внешней области является действительным. Если мы находимся в этой области, то мы можем, наоборот, рассматривать точки внутренней области и границу как идеальные, но

в дальнейшем мы ограничимся тем случаем, когда мы находимся во внутренней области, так как только этот случай (как выяснится в дальнейшем) является существенным для приложений.

Пусть теперь заданы две прямые u и v , пересекающие внутреннюю область овального конического сечения. Метрика углов в определяемом ими пучке будет эллиптической, вырождающейся или гиперболической, смотря по тому, лежит ли центр пучка M внутри, на самом коническом сечении или же вне его. В первом случае мы можем вокруг центра пучка сделать как угодно много обходов путем повторного откладывания одного и того же угла, произведенного достаточно много раз (черт. 115, в котором угол между двумя прямыми u и v взят равным $\frac{\pi}{8}$, так что после восьмикратного откладывания мы опять приходим

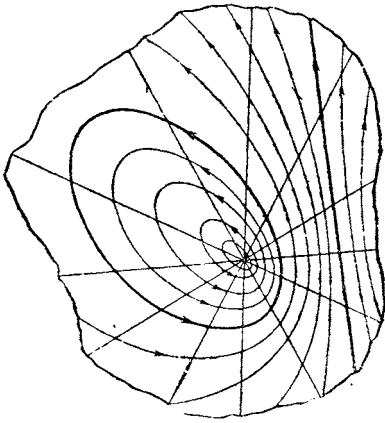


Черт. 115.

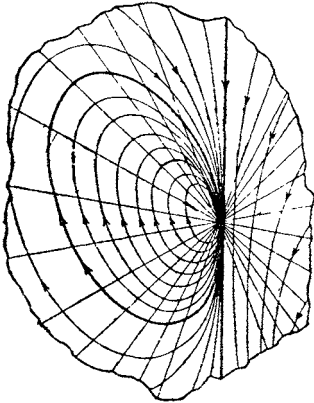


Черт. 116.

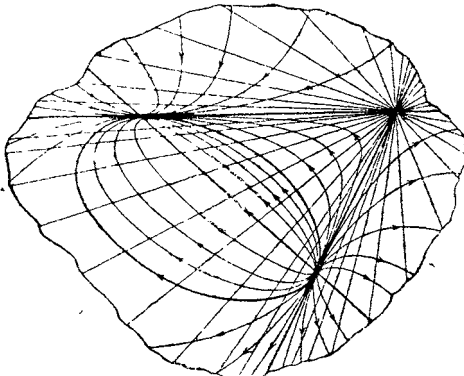
к первой прямой). Напротив, во втором случае прямые неограниченно приближаются к касательным фундаментального конического сечения (черт. 116; прямые в непосредственной близости к касательным на нем уже не изображены), при этом все эти прямые пересекают достижимую нами область. Наконец, в предельном случае, в котором точка пересечения M прямых линий лежит на самом коническом сечении, соответствующий угол всегда равен нулю (ср. стр. 188 и затем соответствующее доказательство на стр. 188 для двух точек, лежащих на изотропной прямой; неопределенным углом не может быть, так как мы предполагаем, что обе прямые пересекают внутреннюю область конического сечения). Так как в этом случае также и все остальные (в смысле гиперболической геометрии собственные) прямые, проходящие через точку M , образуют между собою нулевые углы, то здесь уже невозможно построение, подобное построениям в двух других случаях (но оно возможно, если положить в основу движения, ср. черт. 118). Если мы находимся во внешней области фундаментального конического сечения, то имеют место аналогичные факты; этот случай читатель может разобрать сам. Мы должны взять постоянную углов чисто мнимой, если хотим, чтобы угол между двумя прямыми, пересекающимися внутри конического сечения, был действительным; в дальнейшем мы ее возьмем (в соответствии с евклидовым измерением углов) равной $\frac{i}{2}$.



Черт. 117. Окружности в эллиптической геометрии. Собственные окружности в гиперболической геометрии.



Черт. 118. Предельные окружности (гороциклы) в гиперболической геометрии.



Черт. 119. Сверхкруги (гиперциклы) в гиперболической геометрии.

Мы получим особенно ясное представление о рассмотренных нами мероопределениях, если изобразим на чертеже *кривые постоянного расстояния от данной точки z* ; эти кривые мы будем рассматривать как окружности относительно данного мероопределения. Так как расстояние между двумя точками y и z на основании арксинус-формулы (стр. 189) зависит только от выражения $\Omega_{yz} \cdot \sqrt{\Omega_{yy} \Omega_{zz}}$, то мы получим уравнение кривой, приравняв это выражение постоянной k :

$$\Omega_{yz}^2 = k^2 \Omega_{yy} \Omega_{zz} \quad (\Omega_{zz} \neq 0),$$

причем z_i рассматриваются как постоянные, а y_i как переменные. Если мы рассмотрим точки пересечения конического сечения, определяемого этим уравнением, с фундаментальным коническим сечением $\Omega_{yy} = 0$ (y_i — переменные), то мы найдем, что их координаты удовлетворяют уравнению $\Omega_{yz}^2 = 0$. Это уравнение является уравнением дважды взятой полярной точки z относительно фундаментального конического сечения. Следовательно, четыре точки пересечения, которые, вообще говоря, имеют два конических сечения, в нашем случае парно совпадают; указанные окружности с центром в точке z касаются фундаментального конического сечения в двух точках, именно в точках пересечения с полярной точки z (ср. черт. 119, на котором точки пересечения являются действительными).

В этих рассмотрениях мы предполагали, что точка z не лежит на самом фундаментальном коническом сечении, потому что иначе Ω_{zz} равнялось бы нулю, так что *все* точки плоскости, не лежащие на касательной в точке z , имели бы *одно и то же*, именно бесконечно большое расстояние от точки z . В этом случае мы обобщим определение окружности следующим образом. Мы можем написать приведенное выше уравнение окружности $\Omega_{yz}^2 = k^2 \Omega_{yy} \Omega_{zz}$, вследствие того, что z_i являются постоянными, в виде $\Omega_{yz}^2 = k_1^2 \Omega_{yy}$, причем это уравнение изображает семейство кривых также и в случае $\Omega_{zz} = 0$. Поэтому мы будем говорить, что кривая, определяемая уравнением

$$\Omega_{yz}^2 = k_1^2 \cdot \Omega_{yy}$$

во всех случаях является „окружностью с центром в точке z “. Если в частности $\Omega_{zz} = 0$, то каждой точке z будет соответствовать опять-таки однопараметрическое семейство кривых. При этом обе точки прикосновения, которые, вообще говоря, имеет окружность с фундаментальной кривой, в данном случае сливаются в одну точку, именно в точку z (ср. черт. 118).

На стр. 122 мы уже рассматривали вид указанного семейства кривых. В случае *эллиптического мероопределения* концентрические окружности вокруг данной точки всегда имеют вид, указанный на черт. 117, только отмеченное на нем толстой линией коническое сечение не играет никакой особой роли¹⁾. В случае *гиперболического мероопределения* концентрические круги, напротив, имеют различный вид в зависимости от того, лежит ли их центр во внутренней области (черт. 117), на самом фундаментальном коническом сечении (черт. 118) или во внешней области (черт. 119); в первом случае мы имеем круги с центром в собственной точке, в последних двух — в несобственной точке. Обычно эти три типа кругов в случае гиперболического мероопределения называют *собственно кругами* (черт. 117), *предельными кругами* или *гороциклами* (черт. 118) и *сверхкругами или гиперциклами* (черт. 119). Семейство предельных кругов (черт. 118) может быть получено посредством наглядного приближения центра кругов к фундаментальной кривой.

Среди рассматриваемых кривых во всех случаях имеется некоторая прямая, именно поляра соответствующего центра, которую мы получаем при значении $k=0$ или $k_1=0$. Так как определяемая постоянной k окружность (как это видно из арккосинус-формулы, стр. 189) имеет радиус $2ic \cdot \arccos k$, то мы получаем в случае $\Omega_{zz} \neq 0$ для радиуса этой выделенной окружности значение ipc (при сделанном нами выборе значения для постоянной c мы получим, следовательно, в случае эллиптической геометрии действительный радиус pc , и, напротив, в случае гиперболической геометрии — мнимый радиус ipc). Если мы

¹⁾ Это коническое сечение отмечено толстой линией, потому что тот же самый чертеж служит одновременно для наглядного изображения положения вещей в случае гиперболического мероопределения.

положим в уравнении рассматриваемых окружностей $k=1$, то мы получим круг нулевого радиуса (ср. стр. 156), т. е. геометрическое место точек, отстоящих от z на нулевом расстоянии; этот круг состоит из двух, проходящих через точку z комплексно-сопряженных или действительных прямых, касающихся конического сечения и, следовательно, изотропных. Далее, мы получаем при $k=\infty$ круг бесконечно большого радиуса, именно само фундаментальное коническое сечение (ср. сноску на стр. 153).

Дальнейшие геометрические предложения плоской эллиптической и гиперболической геометрии будут рассматриваться в гл. VIII.

Ф. Эллиптическое и гиперболическое мероопределения в пространстве. В пространстве нам приходится различать в случае невырождающихся мероопределений три различных возможности в зависимости от того, будет ли фундаментальная поверхность нулевой, овальной или кольцеобразной. В первом случае мы получаем *эллиптическую геометрию пространства*, в которой все точки проективного пространства находятся на конечном расстоянии друг от друга. Во втором случае мы получаем *гиперболическую геометрию*, причем обычно мы будем считать себя находящимися внутри овальной поверхности; тогда точки самой этой поверхности и точки вне ее мы будем рассматривать как идеальные, т. е. как недостижимые. Наконец, в третьем случае мы получаем некоторое мероопределение, не имеющее особого названия и для дальнейшего имеющее лишь второстепенное значение.

Посредством таких же рассуждений, как и в случае плоскости, получается, что в эллиптической геометрии пространства существует только один тип шаровых поверхностей. Напротив, в гиперболической геометрии приходится различать три различных типа в зависимости от того, лежит ли центр внутри фундаментальной поверхности, на ней самой или, наконец, вне ее; эти три типа мы будем называть *собственно шарами, предельными шарами или горосферами и сверхшарами или гиперсферами*.

§ 2. Вырождающиеся мероопределения

Аналогично случаю невырождающихся образов можно обосновать проективное мероопределение на одном из произвольных вырождающихся образов, перечисленных в трех таблицах на стр. 83 (прямая линия), стр. 100 (плоскость) и стр. 107 (пространство). Если мы будем принимать во внимание различия с точки зрения действительности получающихся образов, то вместе с невырождающимися мероопределениями *всего мы получим на прямой линии 3, на плоскости 7 и в пространстве 18 различных мероопределений*¹⁾.

¹⁾ Подробная классификация всех этих мероопределений, а также мероопределений для случая n -мерного многообразия имеется в работе Sommerville, Classification of Geometries with Projektive Metric, Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society, т. 2, 1910. Принимая во внимание дальнейшие возможные разделения на собственные и несобственные области и т. д., Саммервиль получает в случае n -мерного многообразия всего 3^n различных мероопределений.

А. Прямая линия. На прямой линии, как это видно из таблицы на стр. 83, существует только один единственный выражающийся образ, именно дважды взятая точка, которую мы и положим в основу мероопределения в качестве фундаментального образа. Так как в этом случае обращающийся в нуль определитель уравнения:

$$\Omega_{xx} = a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2 = 0$$

имеет вид: $D = a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = 0$, то по стр. 189 $\Omega_{yz}^2 - \Omega_{yy}\Omega_{zz} = 0$. Поэтому выражение, которое мы установили для расстояния на стр. 187, принимает значение $c \cdot \ln 1 = 0$. Несмотря на это мы и в этом случае можем получить пригодное к употреблению мероопределение. Для этого мы начнем с рассмотрения мероопределения, основанного на паре точек $\Omega_{xx} = \sum a_{x\lambda} x_\lambda x_\lambda = 0$, $D = |a_{x\lambda}| \neq 0$. В этом случае выражение для расстояния между двумя точками y и z (см. стр. 189) может быть написано в виде:

$$E(y, z) = 2ic \arcsin \frac{(y_1z_2 - z_1y_2) \sqrt{a_{11}a_{22} - a_{12}^2}}{\sqrt{\Omega_{yy}\Omega_{zz}}}$$

Теперь мы сближаем обе фундаментальные точки, причем a_{12}^2 неограниченно приближается к значению $a_{11} \cdot a_{22}$. Тогда выражение $\Omega_{xx} = a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2$ превращается в квадрат линейного выражения $\sqrt{a_{11}} \cdot x_1 + \sqrt{a_{22}} \cdot x_2$, так что

$$\sqrt{\Omega_{yy}} = \sqrt{a_{11}} \cdot y_1 + \sqrt{a_{22}} \cdot y_2 \quad \text{и} \quad \sqrt{\Omega_{zz}} = \sqrt{a_{11}} \cdot z_1 + \sqrt{a_{22}} \cdot z_2$$

Далее, так как при предельном переходе аргумент арксинуса становится сколь угодно малым, то мы можем заменить арксинус этим самым аргументом. Тогда мы получим:

$$E(y, z) = 2ic \sqrt{a_{11}a_{22} - a_{12}^2} \cdot \frac{y_1z_2 - z_1y_2}{(\sqrt{a_{11}} \cdot y_1 + \sqrt{a_{22}} \cdot y_2)(\sqrt{a_{11}} \cdot z_1 + \sqrt{a_{22}} \cdot z_2)}$$

Стремящийся к нулю множитель $2i \sqrt{a_{11}a_{22} - a_{12}^2}$ мы объединяем с постоянной c (которой мы приписываем все большие и большие значения) в новую конечную постоянную k . Вследствие этого мы получаем для расстояния следующую формулу:

$$E(y, z) = k \frac{y_1z_2 - z_1y_2}{(\sqrt{a_{11}} \cdot y_1 + \sqrt{a_{22}} \cdot y_2)(\sqrt{a_{11}} \cdot z_1 + \sqrt{a_{22}} \cdot z_2)}$$

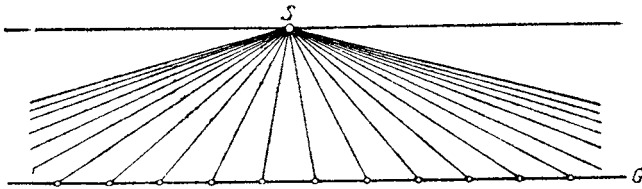
При этом дважды взятая точка, положенная в основу нашего мероопределения, определяется уравнением $\Omega_{xx} \{ \sqrt{a_{11}} \cdot x_1 + \sqrt{a_{22}} \cdot x_2 \}^2 = 0$ и, следовательно, имеет координаты: $x_1 : x_2 = -\sqrt{a_{22}} : \sqrt{a_{11}}$.

Если мы в качестве фундаментальной точки возьмем бесконечно удаленную точку нашей прямой, т. е. положим $a_{11} = 0$, то мы получим:

$$E(y, z) = \frac{k}{a_{22}} \cdot \frac{y_1 z_2 - z_1 y_2}{y_2 z_2},$$

следовательно, как раз то выражение, посредством которого определяется (см. стр. 147) расстояние в евклидовой геометрии¹⁾.

В. Пучок прямых и плоскостей. Такие же рассуждения, как и для случая прямой линии, мы можем произвести также и для пучка прямых и плоскостей и тем самым установить в нем параболическое мероопределение. Если мы в смысле этого мероопределения будем повторно откладывать в пучке один и тот же угол, то мы будем неограниченно приближаться к фундаментальной прямой, которая в этом случае всегда является действительной (черт. 120, который получается посредством пере-



Черт. 120.

несения евклидова мероопределения прямой G на пучок прямых с центром в точке S). Аналогичные обстоятельства имеют место и в пучке плоскостей. Теперь нам становится понятной внутренняя причина того, что *в евклидовой геометрии расстояния изображаются алгебраическими выражениями, углы же, напротив, трансцендентными*. Именно: для расстояния мероопределение является вырождающимся, тогда как для углов этого нет; трансцендентность в первом случае устраняется с помощью произведенного выше предельного перехода.

С. Плоскость. На плоскости, как это видно из таблицы на стр. 100, существуют семь различных квадратичных образов; мы сейчас рассмотрим по порядку соответствующие мероопределения.

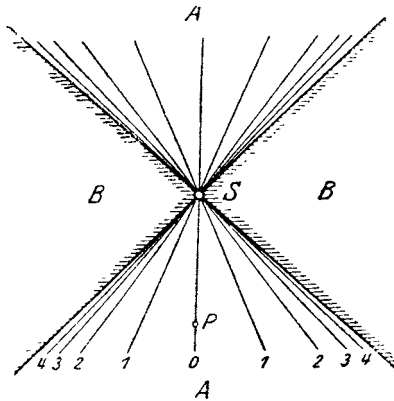
Случаи 1 и 2 таблицы (*нулевая и овальная кривые*) мы уже рассмотрели раньше.

В случае 3 фундаментальный образ состоит из *двух действительных прямых и соответствующей точки пересечения* S

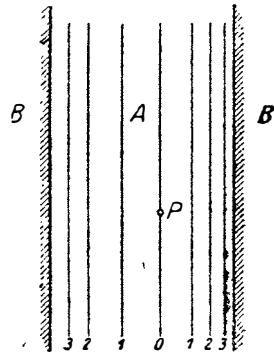
¹⁾ Этот результат мы могли бы получить также путем применения канонических уравнений фундаментальных образов непосредственно из арксинус-формулы стр. 189, заставляя ε стремиться к нулю (читатель должен еще принять во внимание, что тогда фундаментальным образом являлась точка $x_1^2 = 0$, теперь же точка $x_2^2 = 0$). Мы избрали в тексте общий путь, а не этот, чтобы получить формулу для случая произвольного фундаментального образа.

(черт. 121). На прямых линии плоскости, не проходящих через S , мы получаем гиперболическое мероопределение. Прямые, проходящие через точку S , нужно рассматривать как изотропные; в самом деле, в прямолинейных координатах фундаментальный образ изображается уравнением пучка этих прямых.

Если мы находимся в вертикальных углах A , образованных фундаментальными прямыми (черт. 121), то точки вертикальных углов B для нас недостижимы; их расстояния от точек, находящихся в углах A , являются комплексными. Точки самих фундаментальных прямых находятся на бесконечно большом расстоянии от точек, взятых в углах A и B . Для всех пучков прямых плоскости, за исключением пучка с центром в точке S , получается параболическое мероопределение; фундаментальным эле-



Черт. 121.

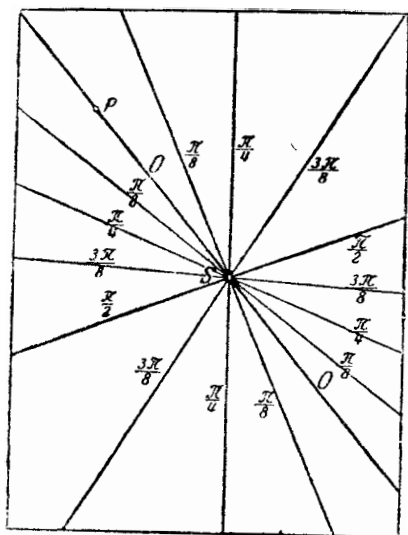


Черт. 122.

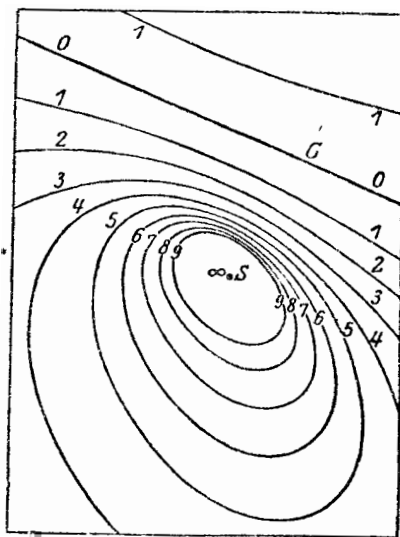
ментом является прямая, соединяющая центр пучка с точкой S . Семейство концентрических окружностей вокруг какой-нибудь точки P (черт. 121) вырождается в пучок прямых, проходящих через точку S . В частности, точки прямой PS имеют нулевое расстояние от точки P , за единственным исключением точки S , для которой расстояние PS является неопределенным. На черт. 121 изображены окружности вокруг точки P с радиусами $0, 1, 2, 3, 4$; окружности больших радиусов неограниченно сгущаются (с евклидовой точки зрения) около обеих фундаментальных прямых. Интересен также чертеж, который мы получим, если возьмем за точку S какую-нибудь бесконечно удаленную точку аффинной плоскости. Тогда мы получим некоторое мероопределение внутри параллельной полосы (черт. 122); точки на краю и вне этой полосы для нас недостижимы. На черт. 122 изображены концентрические окружности вокруг точки P с радиусами $0, 1, 2, 3$ для этого случая.

В случае 4 мы имеем две комплексно-сопряженные прямые с действительной точкой пересечения S . Соответствующее мероопределение определено для всех действительных точек проективной плоскости за единственным исключением точки S .

На всех действительных прямых, не проходящих через точку S , имеет место эллиптическое мероопределение; прямые, проходящие через самую точку S , надо рассматривать как изотропные. Для пучков прямых (за исключением пучка с центром в точке S) получается параболическое мероопределение: фундаментальным элементом является прямая, соединяющая центр пучка с точкой S . Это мероопределение потому заслуживает быть отмеченным особо, что оно дает *двойственный образ евклидовой геометрии*; в самом деле, в таком двойственном образе все прямые имеют конечные длины, тогда как все углы вокруг любой точки являются бесконечно большими. Посредством дуализации евклидовых предложений мы можем непосредственно получить теорию



Черт. 123.



Черт. 124.

этого мероопределения в развернутом виде. Так, например, в евклидовой геометрии окружность определяется как геометрическое место точек, равноудаленных от данной точки. Двойственный образ должен быть кривой второго класса, которая определяется как геометрическое место прямых, образующих один и тот же угол с данной прямой. В евклидовой геометрии первый образ является обычной окружностью, тогда как второй образ — кривой *первого* класса, т. е. вырождается в пучок прямых, центр которого лежит на бесконечно удаленной прямой. Наоборот, в рассмотренном здесь двойственном образе евклидовой геометрии вырождающимися являются как раз „*круги расстояний*“; именно: они являются теми кривыми первого порядка, т. е. прямыми, которые проходят через действительную точку пересечения S обеих комплексно-сопряженных фундаментальных прямых (черт. 123). Напротив, „*круги углов*“ не вырождаются и имеют вид, указанный

на черт. 124; при этом мы изображаем кривые второго класса посредством соответствующих им кривых второго порядка.

Рассмотрим теперь ближе черт. 123. Точки прямой PS (за единственным исключением точки S) имеют нулевое расстояние от точки P . Если мы будем переходить от прямой PS к другим прямым, то расстояние точек этих прямых от точки P будет все увеличиваться, пока оно, наконец, не достигнет своего максимального значения $\frac{\pi}{2}$ для точек прямой, отмеченной на

черт. 123 более толстой линией. С „кругами углов“ дело обстоит иначе. На черт. 124 изображены „круги углов“, соответствующие прямой G . Прямая G образует сама с собой угол, равный нулю. Если мы будем увеличивать этот угол, то сначала мы получим гиперболы, которые затем превратятся в параболу и далее в эллипсы, все теснее и теснее окружающие фундаментальную точку S . Прямые, проходящие через самую точку S , образуют бесконечно большой угол с прямой G . Аналитически можно легко установить, что черт. 124 является проективным образом семейства концентрических евклидовых кругов. Пусть читатель ясно себе представит, что все приведенные выше отношения являются как раз образом двойственным евклидовой геометрии.

В случае 5 фундаментальный образ состоит из *действительной прямой с двумя лежащими на ней действительными точками*. На всех прямых плоскости, за исключением самой фундаментальной прямой, имеет место параболическое мероопределение, в то время как углы, вообще говоря, измеряются гиперболически. Это мероопределение мы уже рассматривали в § 4 гл. IV и назвали его там *псевдоевклидовой геометрией*; в частности мы там попутно рассмотрели систему соответствующих кругов (черт. 86, стр. 162).

В случае 6 мы исходим из *действительной прямой с двумя лежащими на ней комплексно-сопряженными точками*. Мы получаем евклидову геометрию, в которой длины измеряются, вообще говоря, параболически, а углы, напротив, эллиптически.

Наконец, в случае 7 мы имеем *действительную прямую с лежащей на ней действительной же точкой*. В этом случае мы получаем как для прямых, так и для пучков прямых, вообще говоря, параболическое мероопределение.

D. Пространство; заключительные замечания. Подобные же рассуждения, как и на плоскости, могут быть произведены также и в пространстве. Но продумать эти мероопределения мы предоставляем самому читателю, потому что для дальнейшего нам изо всех многочисленных вырождающихся мероопределений понадобится только одно единственное, именно — хорошо нам известная евклидова геометрия (ср. стр. 209). Напротив, для более глубоких исследований, касающихся обобщения римановых геометрий (ср. гл. X, § 5), изучение вырождающихся проективных мероопределений представляет совершенно особый интерес; но в рамках этой книги мы не можем входить в указанные исследования.

§ 3. Двойственность

В проективной геометрии принцип двойственности имеет место без всяких ограничений. Мы уже знаем, что при введении евклидова мероопределения он теряет свою силу, в то время как в эллиптической геометрии, рассмотренной нами в гл. IV, он сохраняется (ср. стр. 169). Как же обстоит дело в случае других проективных мероопределений?

Прежде всего рассмотрим еще раз эллиптическое мероопределение, в основу которого кладется данное в проективной плоскости нулевое коническое сечение. При этом мы должны положить постоянную расстояния $c = ic$, равной постоянной углов $c' = \frac{i}{2}$

(ср. стр. 193)¹⁾, если хотим получить полную двойственность, потому что в противном случае формула расстояния между двумя точками не будет двойственно соответствовать формуле угла между двумя прямыми. Так как, далее, выражение для угла и выражение для расстояния получают совершенно двойственным образом из заданного фундаментального конического сечения, то ясно, что принцип двойственности в эллиптическом мероопределении должен иметь место без всяких ограничений, точно так же, как и в проективной геометрии. Положение вещей будет особенно наглядным, если мы введем проективную систему координат таким образом, чтобы уравнение фундаментального конического сечения имело вид $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0$. Именно в этом случае соответствующее уравнение в прямолинейных координатах получается просто посредством того, что мы x_i заменяем через u_i , — обстоятельство, которое не имеет места при употреблении другой системы координат. Вследствие этого мы можем, например, при условии пользования указанной системой координат получить из формулы расстояния формулу угла, заменив x_i через u_i , в то время как при пользовании другими системами координат предварительно еще надо перейти от уравнения фундаментального конического сечения в точечных координатах (по стр. 73) к соответствующему уравнению в координатах прямой (ср. формулы расстояния и угла на стр. 188 и 189).

В случае гиперболического мероопределения мы находим в комплексной области такие же соотношения двойственности, как и в случае эллиптического мероопределения, так как оба эти мероопределения в комплексной области действительны между собой. Напротив, если мы ограничимся действительной областью, то мы получим далеко идущие различия, потому что здесь мы уже не можем постоянную расстояния c взять

¹⁾ В гл. IV, на стр. 167, мы взяли радиус $r = 2c$, пара, на котором мы построили эллиптическую геометрию, равным единице, т. е. действительно положили $c_e = \frac{1}{2}$.

равной постоянной углов c' , так как здесь мы имеем $c=c_h$ и $c'=\frac{i}{2}$ (стр. 194—196). Вследствие этого в *гиперболической метрике двойственность полностью разрушена*. В самом деле, если мы, возьмем, например, уравнение фундаментального конического сечения в виде $x_1^2+x_2^2-x_3^2=0$ или в виде $u_1^2+u_2^2-u_3^2=0$ и положим $c_h=\frac{1}{2}$, то мы получим для расстояния E между двумя точками y и z или соответственно для угла W между двумя прямыми v и w (ср. стр. 189) следующие выражения:

$$\cos(iE) = \frac{y_1z_1 + y_2z_2 - y_3z_3}{\sqrt{y_1^2 + y_2^2 - y_3^2} \sqrt{z_1^2 + z_2^2 - z_3^2}} = \operatorname{ch} E^1),$$

$$\cos W = \frac{v_1w_1 + v_2w_2 - v_3w_3}{\sqrt{v_1^2 + v_2^2 - v_3^2} \sqrt{w_1^2 + w_2^2 - w_3^2}};$$

но отсюда вытекает, что значения E и W будут совершенно различными, даже если мы возьмем $y_i=v_i$ и $z_i=w_i$.

В евклидовой геометрии фундаментальный образ уже не является двойственным самому себе, так как он в точечных координатах изображается двумя уравнениями, а в прямолинейных координатах лишь одним уравнением, например, в случае плоскости уравнениями:

$$x_1^2 + x_2^2 = 0, \quad x_3 = 0$$

и соответственно $u_1^2 + u_2^2 = 0$.

Поэтому и основанная на этом образе метрика с самого начала не является двойственной. Посредством дуализации евклидовой геометрии мы получаем совсем другое мероопределение, в основу которого положен двойственный аналог пары комплексно-сопряженных точек, именно — пара комплексно-сопряженных прямых; это мероопределение мы уже рассматривали на стр. 201—202.

Соответствующие рассуждения могут быть проведены также и в случае других мероопределений. Охватывая вместе все эти случаи, мы можем сказать следующее: *для того чтобы мероопределение было двойственным в себе, нужно, во-первых, чтобы его фундаментальный образ был сам себе двойственным, и, во-вторых, чтобы его постоянная расстояния совпадала с его постоянной углов. Если это не выполнено, то существует другое мероопределение, которое двойственным образом соответствует рассматриваемому мероопределению.*

¹⁾ Определение $\operatorname{ch} E$ находится на стр. 216.

§ 4. Твердые преобразования

А. Твердые преобразования и преобразования подобия. В предыдущих рассмотрении мы познакомились с большим числом различных мероопределений. Теперь возникает задача о нахождении *твердых преобразований* этих мероопределений, т. е. тех преобразований, при которых вся метрика остается неизменной.

Прежде всего эти преобразования должны переводить прямые опять в прямые и плоскости опять же в плоскости, следовательно, они должны быть проективными преобразованиями. Так как, далее, для рассматриваемых мероопределений все бесконечно удаленные точки должны переводиться также в бесконечно удаленные точки, *то твердые преобразования являются проективными преобразованиями фундаментального образа себя.*

Теперь читателю становится понятной причина подробного рассмотрения этих проективных преобразований в гл. III: благодаря произведенному нами введению метрических понятий находящиеся там исследования теперь значительно оживляются и становятся более наглядными.

В дальнейших исследованиях будет наблюдаться существенное различие между вырождающимися и невырождающимися мероопределениями. Именно, в случае невырождающихся мероопределений *всякое* проективное преобразование, оставляющее инвариантными фундаментальный образ, является твердым преобразованием, потому что при этих мерораспределениях расстояния и углы определяются посредством двойных отношений, инвариантных относительно группы проективных преобразований. Напротив, в случае вырождающихся мероопределений существуют еще другого типа проективные преобразования фундаментального образа в себя, при которых длины и углы умножаются на определенный постоянный множитель. Эти преобразования, которые нам уже хорошо знакомы из евклидовой геометрии, называются *преобразованиями подобия.*

Как мы видели на стр. 112, число параметров проективных преобразований вырождающегося квадратичного образа в себя возрастает на единицу, если степень вырождения образа повышается на единицу; появляющиеся при этом преобразования (чего мы не будем доказывать) как раз и являются преобразованиями подобия; вследствие этого число параметров всех твердых преобразований в случае различных мероопределений, относящихся к одной и той же размерности, одинаково для всех этих мероопределений. Так, на прямой линии мы получаем ∞^1 , на плоскости ∞^3 и в пространстве — ∞^6 твердых преобразований; в случае n -мерного многообразия это число параметров равняется $\frac{n(n+1)}{2}$, как это легко установить посредством надлежащего подсчета.

В. Движения и зеркальные отображения. При более подробном рассмотрении твердых преобразований нужно различать *движения* и *зеркальные отображения*: движения могут быть сведены посредством непрерывного видоизменения к тождественному преобразованию; для зеркальных отображений это невозможно. В соответствии с рассмотрениями гл. III мы сформулируем еще следующие предложения (причем мы ограничиваемся действительной областью).

В случае эллиптического мероопределения на прямой линии или в пространстве существует соответственно ∞^4 или ∞^6 движений и столько же зеркальных отображений. Напротив, в плоском эллиптическом мероопределении существует ∞^5 движений, но совсем отсутствуют зеркальные отображения. Вообще первый случай имеет место при нечетном числе измерений, второй — при четном числе измерений. Отсутствие зеркальных отображений в случае плоского эллиптического мероопределения было впервые замечено Штуди (Study)¹⁾.

В случае гиперболического мероопределения на прямой линии, как мы видели на стр. 111, имеются четыре различных типа преобразований. Если мы ограничимся теми преобразованиями, которые переводят собственные точки опять же в собственные точки, то тогда останутся только два типа, именно движения и зеркальные отображения (собственно) гиперболического мероопределения на прямой линии. В случае гиперболического мероопределения на плоскости и в пространстве существует соответственно ∞^8 и ∞^6 движений и столько же зеркальных отображений.

Третье невырождающееся мероопределение, возможное в пространстве, основанное на кольцеобразной поверхности как на фундаментальном образе, мы здесь разбирать не будем.

В качестве примера отношений, возникающих в случае вырождающегося мероопределения, мы укажем на евклидову геометрию (ср. гл. III, стр. 112, 125 и 142). Выделение движений и зеркальных отображений из общих преобразований подобия при аффинном способе письма производится путем приравнивания определителей $+1$ или соответственно -1 . Аналогичные обстоятельства имеют место и в случае остальных однократно вырождающихся мероопределений. Если же фундаментальный образ является многократно вырождающимся образом, то тогда получается не одно, а несколько подобных уравнений.

С. Порождение движений с помощью специальных преобразований. Из гл. III нам известны, далее, следующие предложения о движениях.

Каждое движение плоского эллиптического мероопределения является вращением. Всякое движение плоского гиперболического мероопределения можно также рассматривать как вращение; только теперь уже приходится различать три различных

¹⁾ „Math. Ann.“, т. 39, 1891. Ср. Klein, „Ges. Abh.“, т. I, стр. 282.

случая, смотря по тому, лежит ли центр вращения внутри, на самом или вне фундаментального конического сечения. Во всех случаях точки плоскости двигаются по окружностям (черт. 117—119, стр. 196).

Каждое движение пространственного эллиптического мероопределения может быть получено посредством двух следующих один за другим сдвигов; это разложение на сдвиги определено однозначно. Далее, всякое движение мы можем получить посредством двух следующих друг за другом вращений вокруг двух прямых G_1 и G_2 , которые полярно сопряжены относительно фундаментальной поверхности; эти вращения могут рассматриваться также как параллельные перенесения вдоль прямой G_2 или G_1 . Наконец, всякое движение может рассматриваться как винтовое движение вдоль G_1 или G_2 . В случае пространственного гиперболического мероопределения имеют место такие же обстоятельства, только там разложение движения на два (действительных) сдвига уже невозможно.

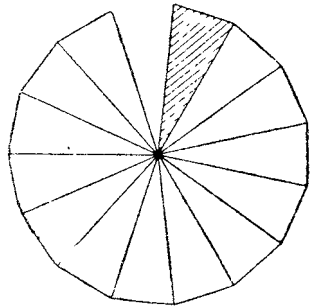
Дальнейшие предложения о твердых преобразованиях мы будем рассматривать в гл. VIII.

СООТНОШЕНИЯ МЕЖДУ ЭЛЛИПТИЧЕСКОЙ, ЕВКЛИДОВОЙ И ГИПЕРБОЛИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИЯМИ

§ 1. Особое положение трех геометрий

В предыдущей главе мы познакомились с целым рядом мероопределений, которые все *логически равноправны* с евклидовой геометрией. Однако большая часть этих мероопределений обладает строением, делающим их непригодными к *практическим применениям во внешнем мире*. В самом деле, мы, естественно, будем требовать, чтобы движения в применяемом к внешнему миру мероопределении совпадали с хорошо нам известными движениями твердого тела.

Вообразим себе подобное тело, ограниченное двумя пересекающимися плоскостями (например деревянный клин), в некотором определенном исходном положении покоя, изображенном на черт. 125 штриховкой. Будем теперь вращать это тело вокруг линии пересечения обеих ограничивающих плоскостей так, чтобы вторая плоскость совместилась с положением первой плоскости до вращения. Опыт нам показывает, что мы всегда после конечного числа вращений такого рода возвращаемся в положение, близкое к исходному положению, а затем даже переходим через него. Но это свойство не имеет места в случае гиперболического или параболического измерения углов, так как в этих случаях мы никогда не можем перейти через некоторое предельное положение при повторном откладывании равных между собой углов (ср. черт. 114 и 120). *Следовательно, в случае мероопределения, применимого к внешнему миру, как пространственная, так и плоская метрика углов должна быть эллиптической.* Но это требование выполняется лишь в случае трех мероопределений, которые мы в предыдущих рассмотренных называли *эллиптическим, параболическим или евклидовым и гиперболическим мероопределениями*; при этом в случае гиперболического мероопределения мы должны ограничиться *внутренней областью фундаментальной кривой или, соответственно, поверх-*



Черт. 125.

ности, а в случае параболического мероопределения — теми точками, которые не принадлежат самому фундаментальному образу.

Вследствие указанного различия эллиптическое и гиперболическое мероопределения обычно противопоставляются евклидовой геометрии в качестве *неевклидовых мероопределений*. Так как эти три мероопределения играют весьма важную роль, то во всем последующем мы ограничимся изучением только их одних. В настоящей главе мы будем говорить исключительно об общих соотношениях, связывающих друг с другом эти три мероопределения, а затем, в гл. VIII, будем изучать отдельно свойства эллиптического и гиперболического мероопределений.

Возникающий, далее, вопрос о том, какое из трех таким образом выделенных мероопределений „имеет место во внешнем мире“, мы рассмотрим в § 6 этой главы. Ответ будет гласить, что разрешение этого вопроса невозможно при помощи средств, имеющихся в нашем распоряжении в настоящее время. Именно: измерения во внешнем мире так же хорошо совместимы с неевклидовыми мероопределениями, как и с евклидовой геометрией. В силу этого мы можем назвать неевклидовы мероопределения, в согласии со стр. 183, также неевклидовыми *геометриями*.

§ 2. Превращение эллиптической геометрии в евклидову и далее в гиперболическую геометрию

Квадратичные образы, на которых основываются проективные мероопределения, могут быть непрерывно превращаемы друг в друга (см. § 6 гл. II); тогда и соответствующие мероопределения будут превращаться друг в друга. Мы ограничимся рассмотрением превращения плоской эллиптической геометрии в евклидову и затем в гиперболическую геометрию. Для этого мы будем исходить от нулевого конического сечения:

$$u_1^2 + u_2^2 + a_{33}u_3^2 = 0 \quad \text{или} \quad x_1^2 + x_2^2 + \frac{1}{a_{33}}x_3^2 = 0,$$

превратим его в пару комплексно-сопряженных точек:

$$u_1^2 + u_2^2 = 0 \quad \text{или} \quad x_1^2 + x_2^2 = 0, \quad x_3 = 0,$$

и, далее, в овальное коническое сечение (ср. стр. 99, черт. 53):

$$u_1^2 + u_2^2 - a_{33}u_3^2 = 0 \quad \text{или} \quad x_1^2 + x_2^2 - \frac{1}{a_{33}}x_3^2 = 0.$$

Для того чтобы однозначно установить данное мероопределение, мы должны задать кроме фундаментального образа еще значение соответствующей постоянной расстояний s и постоянной углов c' , которые являются множителями перед логарифмами двойных отношений. В эллиптическом мероопределении постоянная расстояний s является чисто мнимой, именно, она равна ic_0 (стр. 194); в евклидовой геометрии s бесконечно велико (стр. 200); наконец, в гиперболическом мероопределении она действительна, именно равна s_n (стр. 194). Следовательно, если мы

заставим стремиться постоянную α_{33} от положительных значений к нулю и затем заставим ее пробегать отрицательные значения, то мы должны одновременно постоянную расстояний c превратить из чисто мнимой в бесконечно большую и затем в действительную. Это проще всего сделать, положив $2c = \frac{1}{\sqrt{-\alpha_{33}}}$ или

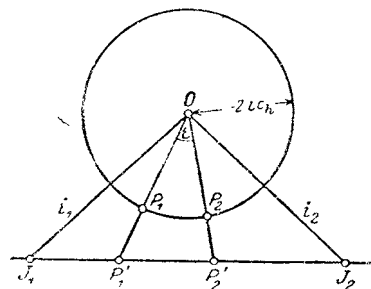
$\alpha_{33} = \frac{-1}{4c^2}$. В самом деле, тогда для положительных и отрицательных значений α_{33} получаются соответственно мнимые и действительные значения c , тогда как для $\alpha_{33} = 0$ получается бесконечно большое c . Множитель 2 мы вводим по причине, с которой мы познакомимся дальше (стр. 213).

С подобными затруднениями не приходится встречаться при установлении постоянной углов c' , так как она всегда является чисто мнимой. Поэтому мы можем выбрать c' постоянной; особенно удобно значение $c' = \frac{i}{2}$, так как тогда сумма углов во всех пучках лучей будет равняться 2π . Это различие между обеими постоянными c и c' связано с тем, что промежуточный образ обладает разными свойствами в зависимости от того, рассматриваем ли мы его как кривую некоторого порядка или как кривую некоторого класса. Именно: в первом случае он состоит из *одной* дважды взятой прямой, во втором случае — из *двух* комплексно-сопряженных точек; вследствие этого при рассматриваемом превращении мероопределение для расстояний вырождается (т. е. становится параболическим), в то время как мероопределение для углов остается эллиптическим.

Так как евклидова геометрия может быть непрерывно превращена указанным образом в эллиптическое и гиперболическое мероопределения, то *теоремы евклидовой геометрии образуют переход от теорем эллиптического мероопределения к соответствующим теоремам гиперболического мероопределения*, с чем мы уже познакомились на многочисленных примерах. Так, например, в действительной эллиптической геометрии существует только один род точек, в евклидовой геометрии — два рода (именно: собственные и бесконечно удаленные точки) и в гиперболической геометрии — три рода (именно: точки, лежащие внутри, на самом и вне фундаментального конического сечения). В связи с этим в этих трех мероопределениях имеются соответственно один, два и три рода кругов, которые различаются по роду точки, являющейся их центром (см. стр. 197 и сл.). В евклидовой геометрии эти два рода кругов являются кругами конечного и бесконечно большого радиуса; в последнем случае мы получаем прямую линию, т. е. круг, центром которого является бесконечно удаленная точка. Мы скоро познакомимся еще с другими группами предложений подобного рода, выявляющими промежуточное положение евклидовой геометрии между эллиптическим и гиперболическим мероопределениями.

§ 3. Истолкование эллиптической и гиперболической геометрий как геометрий на евклидовой сфере действительного и мнимого радиусов

Эллиптическое мероопределение на плоскости, как мы уже это видели на стр. 167, находится в тесной связи с геометрией на сфере, потому что если мы спроектируем точки сферы радиуса $2c_e$ и господствующее на ней мероопределение из центра сферы на касательную плоскость (ср. черт. 91, стр. 171), то мы получим в результате эллиптическое мероопределение с постоянной расстояния, равной ic_e , и с постоянной углов, равной $\frac{i}{2}$. Так как в эллиптической геометрии постоянную углов мы полагаем вообще равной $\frac{i}{2}$, то эллиптическая геометрия одно-



Черт. 126.

значно определяется заданием величины $2c_e$, которую вследствие указанной выше связи называют *радиусом кривизны рассматриваемого эллиптического мероопределения*.

Но с алгебраической точки зрения эллиптическое и гиперболическое мероопределения тождественны. При этом постоянные расстояний c_e и c_h эллиптической и, соответственно, гиперболической геометрии связаны между собой соотношением $c_e = -ic_h$ (стр. 193 и сл.). Вследствие этого возникает предположение, что гиперболическое мероопределение с постоянной расстояния c_h тождественно с геометрией на евклидовой сфере мнимого радиуса $-2ic_h$.

Это предположение действительно оправдывается. Пусть уравнением мнимой сферы является уравнение:

$$x^2 + y^2 + z^2 = -4c_h^2;$$

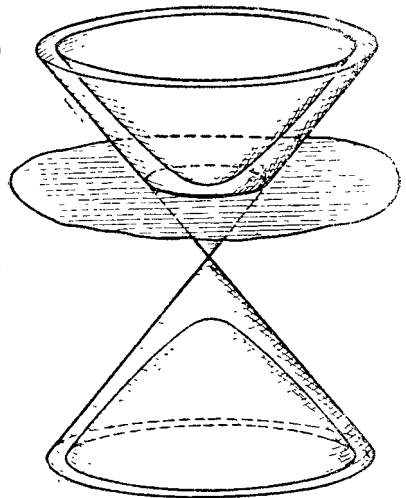
спроектируем точки этой сферы из ее центра на касательную плоскость: $z = +2ic_h$.

Фундаментальным образом евклидовой геометрии связки (на которой основывается метрика сферы) является изотропный конус $x^2 + y^2 + z^2 = 0$ с вершиной в центре сферы. Этот конус пересекает касательную плоскость по фундаментальному кругу $x^2 + y^2 = 4c_h^2$ с радиусом $2c_h$. Далее, сферическое расстояние между двумя точками P_1 и P_2 на мнимой сфере равно умноженному на радиус сферы $-2ic_h$ углу ϵ , под которым эти точки видны из центра сферы (ср. схематический черт. 126, изображающий пересечение нашего построения плоскостью E , проходящей через три точки O , P_1 и P_2 ; при этом мнимые элементы изображены как действительные; горизонтальная прямая является линией пересечения плоскости E с касательной плоскостью к сфере). Рассматриваемый угол ϵ (который измеряется в смысле евклидовой

геометрии) равняется $\frac{i}{2} \ln DV$, притом под DV понимается двойное отношение двух лучей OP_1 и OP_2 с двумя изотропными прямыми i_1 и i_2 , получающимися от пересечения плоскости E с изотропным конусом. Но двойное отношение этих четырех прямых равно двойному отношению, определяемому двумя лежащими в касательной плоскости образами P'_1, P'_2 точек P_1 и P_2 и двумя изотропными точками J_1, J_2 , являющимися точками пересечения прямой $P'_1 P'_2$ с указанным выше фундаментальным кругом. Следовательно, измеренное на сфере расстояние $-2ic_h \cdot \frac{i}{2} \ln LV = +c_h \ln DV$ между двумя точками P_1 и P_2 совпадает с расстоянием между их образами P'_1 и P'_2 , которое получается, если положить в основу гиперболического мероопределения с постоянной расстояния c_h фундаментальный круг $x^2 + y^2 = 4c_h^2$.

Получившиеся соотношения полезно сделать более наглядными путем их отображения на действительную область. Для этой цели мы произведем преобразование координат $z = iz$ и рассмотрим получившийся вследствие этого действительный образ только что разобранной проекции. Сфере теперь будет соответствовать двуполостный гиперboloид:

$$x^2 + y^2 - z^2 = -4c_h^2$$



Черт. 127.

(который метризован уже не в смысле евклидовой геометрии); рассматриваемая касательная плоскость $z = 2c_h$

касается верхней полости нашего гиперboloида (черт. 127). Фундаментальное коническое сечение $x^2 + y^2 = 4c_h^2$ будет теперь получаться путем пересечения асимптотического конуса $x^2 + y^2 - z^2 = 0$ гиперboloида с нашей касательной плоскостью. Из ∞^4 мнимых точек сферы при нашем изображении ∞^3 точек отображаются в действительные точки, и притом это будут как раз те точки, которые проектируются в действительные точки, лежащие внутри фундаментального конического сечения $x^2 + y^2 = 4c_h^2$.

Вследствие описанного положения вещей в гиперболической геометрии, так же как и в случае эллиптической, величину $-2ic_h$ обычно называют *радиусом кривизны*. Если мы будем неограниченно увеличивать радиус кривизны эллиптической или гиперболической геометрии, то сферы непрерывно превратятся в (действительную) плоскость; при этом рассмотренное нами мероопре-

деление на сфере превращается в евклидову геометрию, что лишний раз выявляет промежуточное положение евклидовой геометрии. Вместо постоянной $c = ic_2 = c_4$ можно характеризовать различные геометрии также заданием величины $-\frac{1}{4c^2} = \frac{1}{4c_2^2} = -\frac{1}{4c_4^2}$.

Последнее выражение можно назвать (как это обычно делают в теории поверхностей — ср. гл. X, § 3) *кривизной или мерой кривизны рассматриваемой геометрии*. Однако вследствие такого названия у многих математиков и в особенности у философов составилось ошибочное представление, что эллиптически или гиперболически метризованная плоскость и лежащие на ней прямые как-то „искривлены“; при избранном нами проективном введении эллиптического и гиперболического мероопределения становиться непосредственно ясной несостоятельность этого представления.

По этой причине выражение $-\frac{1}{4c^2}$ лучше называть просто *метрической постоянной* рассматриваемой геометрии. С помощью этого термина мы можем коротко сформулировать следующее предложение: *метрическая постоянная эллиптической геометрии положительна, евклидовой геометрии — равна нулю и гиперболической геометрии — отрицательна*.

В заключение мы укажем еще на то, что истолкование гиперболической геометрии как геометрии на сфере мнимого радиуса является лишь абстрактным приемом. Именно в гл. 1 мы распространили (действительную) геометрию на комплексную область путем рассмотрения аналитических операций, соответствующих различным геометрическим понятиям, также и в комплексной области. Следовательно, при таком понимании в геометрии не существует никаких сфер мнимого радиуса; скорее этот способ выражения является лишь сокращенным обозначением определенных аналитических операций. Однако в следующем параграфе мы покажем, что, несмотря на это, с помощью подобных выводов (в основу которых положены все же определенные аналитические соотношения) мы можем получить новые предложения о действительных образах, но при этом всегда требуется величайшая осторожность (ср. замечания на стр. 219 о площади в гиперболической геометрии).

§ 4. Вывод формул эллиптической и гиперболической геометрий из формул геометрии на евклидовой сфере

Теперь нам предстоит вывести наиболее удобным образом многочисленные формулы обеих неевклидовых геометрий. Путь, которым мы воспользуемся, заключается в следующем. Известные теоремы сферической геометрии на евклидовой сфере радиуса $2c_2$ можно непосредственно перенести (ср. начало предыдущего параграфа) на плоскую эллиптическую геометрию с радиусом кривизны $2c_2$. Если принять во внимание, что с алгебраической точки зрения эллиптическая и гиперболическая геометрии

между собой тождественны — связь, которую в предыдущем параграфе мы пояснили более наглядным образом посредством истолкования гиперболического мероопределения как геометрии на сфере мнимого радиуса, — то можно ожидать, что формулы, доказанные для эллиптической геометрии, сохраняют свою силу и для гиперболической, если только параметру $c = ic$, теперь приписать значение $c = c_n$. Что это действительно имеет место, мы покажем прежде всего посредством строгих выводов тригонометрических формул.

А. Тригонометрические формулы. Рассмотрим на евклидовой сфере радиуса $2c$ сферический треугольник; чтобы избежать необходимости рассматривать различные случаи, возникающие вследствие того, что три точки на сфере определяют несколько треугольников, мы ограничимся рассмотрением достаточно малой области сферы. В сферической тригонометрии обычно характеризуют длины A, B, C сторон треугольника посредством углов α, b, c , под которыми эти стороны видны из центра сферы; следовательно, $A = 2c_a, B = 2c_b, C = 2c_c$. Поэтому, если α, β, γ — углы треугольника, то „сферическая теорема синусов“ $\sin \alpha : \sin b = \sin \beta : \sin \alpha$ при переходе к длинам A, B, C принимает вид:

$$\sin \frac{A}{2c} : \sin \frac{B}{2c} = \sin \alpha : \sin \beta.$$

Если теперь мы спроектируем точки сферы и господствующее на ней мероопределение из центра сферы на какую-нибудь плоскость, то мы получим на этой последней эллиптическую геометрию. Она основывается на нулевом коническом сечении, которое получается в результате пересечения плоскости с изотропным конусом, имеющим вершину в центре сферы; при этом постоянная расстояний $c = ic$ и постоянная углов $c' = \frac{i}{2}$. Так как при этом проектировании все метрические

соотношения на сфере переносятся без изменения на плоскость, то между сторонами A, B и противолежащими углами α, β треугольника в рассматриваемой эллиптической геометрии также имеет место указанное выше соотношение. Что означает этот факт аналитически? Чтобы определить фундаментальное коническое сечение эллиптической плоскости, мы введем на плоскости проективную систему координат, относительно которой фундаментальное коническое сечение (как на стр. 210) имеет уравнение:

$$\Omega_{xx} = x_1^2 + x_2^2 + 4c^2 x_3^2 = x_1^2 + x_2^2 - 4c^2 x_3^2.$$

Если, далее, вершины ξ, η, ζ треугольника имеют координаты $\xi_1 : \xi_2 : \xi_3, \eta_1 : \eta_2 : \eta_3, \zeta_1 : \zeta_2 : \zeta_3$, то A, B, α, β зависят в соответствии с формулами расстояния и угла от ξ_i, η_i, ζ_i и $c = ic$; так, например (ср. стр. 189):

$$A = 2ic \cdot \arccos \frac{\xi_1 \eta_1 + \xi_2 \eta_2 - 4c^2 \xi_3 \eta_3}{\sqrt{(\xi_1^2 + \xi_2^2 - 4c^2 \xi_3^2)(\eta_1^2 + \eta_2^2 - 4c^2 \eta_3^2)}} = F(\xi, \eta, \zeta; c).$$

Аналогичным образом B , α , β являются некоторыми функциями ξ , η , ζ , c :

$$\begin{aligned} B &= G(\xi, \eta, \zeta; c), \\ \alpha &= f(\xi, \eta, \zeta; c), \\ \beta &= g(\xi, \eta, \zeta; c). \end{aligned}$$

Между этими функциями, как мы видели выше, для всякого чисто мнимого значения $c = ic_e$ имеет место соотношение:

$$\begin{aligned} \sin \frac{1}{2ic} F(\xi, \eta, \zeta; c) : \sin \frac{1}{2ic} G(\xi, \eta, \zeta; c) = \\ = \sin f(\xi, \eta, \zeta; c) : \sin g(\xi, \eta, \zeta; c). \end{aligned}$$

Все эти функции являются *аналитическими*, как почти все функции, встречающиеся при обычных ограничениях в геометрии. Известная из теории аналитических функций теорема, которую можно назвать „принципом аналитического постоянства“, утверждает, что уравнение между аналитическими функциями, имеющее место в *некоторой произвольной области* изменения переменных, будет иметь место и для *всех* значений переменных, коль скоро функции для этих значений еще являются аналитическими. Поэтому наше последнее уравнение будет справедливым, если мы (не меняя ξ , η , ζ) припишем величине c *действительные* значения. Введем теперь известные гиперболические функции $\text{sh } \varphi$ и $\text{ch } \varphi$ с помощью соотношений:

$$\begin{aligned} \text{ch } \varphi &= \frac{1}{2} (e^\varphi + e^{-\varphi}) = \cos i\varphi = 1 + \frac{\varphi^2}{2!} + \frac{\varphi^4}{4!} + \frac{\varphi^6}{6!} + \dots \\ \text{sh } \varphi &= \frac{1}{2} (e^\varphi - e^{-\varphi}) = -i \sin i\varphi = \frac{\varphi}{1!} + \frac{\varphi^3}{3!} + \frac{\varphi^5}{5!} + \dots \end{aligned}$$

В силу определения эти функции удовлетворяют условию:

$$\text{ch}^2 \varphi - \text{sh}^2 \varphi = \cos^2 i\varphi + \sin^2 i\varphi = 1,$$

которым мы часто будем пользоваться. Теперь мы можем приведенное выше уравнение в случае действительного $c = c_h$ написать в следующем виде:

$$\begin{aligned} \text{sh} \frac{1}{2c_h} F(\xi, \eta, \zeta; c_h) : \text{sh} \frac{1}{2c_h} G(\xi, \eta, \zeta; c_h) = \\ = \sin f(\xi, \eta, \zeta; c_h) : \sin g(\xi, \eta, \zeta; c_h). \end{aligned}$$

Но это уравнение имеет простой геометрический смысл. Рассмотрим *тот же* треугольник ξ , η , ζ , как и раньше, но определим теперь *гиперболическое* мероопределение на проективной плоскости, выделив на ней овальное коническое сечение:

$$x_1^2 + x_2^2 - 4c_h^2 x_3^2 = x_1^2 + x_2^2 - 4c^2 x_3^2 = 0,$$

в качестве фундаментального образа и взяв $c_h = c$ в качестве

постоянной расстояния; тогда $F(\xi, \eta, \zeta; c_h)$, $G(\xi, \eta, \zeta; c_h)$, $f(\xi, \eta, \zeta; c_h)$, $g(\xi, \eta, \zeta; c_h)$ будут давать как раз величины соответствующих сторон и углов треугольника, измеренных в смысле этой гиперболической геометрии, потому что формулы расстояний и углов (например, приведенное для F выражение) имеют место одновременно и в эллиптической и в гиперболической геометриях. Вместе с тем, если A, B, α, β в только что введенной гиперболической геометрии имеют те же значения, как и раньше в эллиптической, то

$$\operatorname{sh} \frac{A}{2c_h} : \operatorname{sh} \frac{B}{2c_h} = \sin \alpha : \sin \beta.$$

Этот пример вывода одной из формул гиперболической тригонометрии достаточен, чтобы сделать ясным указанный в начале этого параграфа принцип. Всякая формула сферической тригонометрии одновременно изображает формулу эллиптической тригонометрии; если же в ней заменить величину $2c_s$ радиуса мнимым числом $-2ic_h$, то получится формула гиперболической тригонометрии.

Отсюда, между прочим, непосредственно вытекает замечательное свойство формул сферической тригонометрии оставаться действительными при чисто мнимых значениях радиуса. Это было уже давно замечено, и поэтому наряду с обычной (действительной) сферической тригонометрией рассматривали (действительную) „псевдосферическую“ тригонометрию как тригонометрию на евклидовой сфере мнимого радиуса (ср. гл. X, § 4).

Наряду с только что рассмотренной теоремой синусов мы рассмотрим еще некоторые другие тригонометрические формулы. „Теорема косинусов“ сферической тригонометрии:

$$\cos a = \cos b \cdot \cos c + \sin b \cdot \sin c \cdot \cos \alpha$$

в случае эллиптической геометрии имеет вид:

$$\cos \frac{A}{2c_s} = \cos \frac{B}{2c_s} \cdot \cos \frac{C}{2c_s} + \sin \frac{B}{2c_s} \cdot \sin \frac{C}{2c_s} \cdot \cos \alpha,$$

а в случае гиперболической:

$$\operatorname{ch} \frac{A}{2c_h} = \operatorname{ch} \frac{B}{2c_h} \cdot \operatorname{ch} \frac{C}{2c_h} - \operatorname{sh} \frac{B}{2c_h} \cdot \operatorname{sh} \frac{C}{2c_h} \cdot \cos \alpha.$$

В частности, для прямоугольного треугольника с углом $\alpha = \frac{\pi}{2}$ отсюда следует аналог пифагоровой теоремы:

$$\cos \frac{A}{2c_s} = \cos \frac{B}{2c_s} \cdot \cos \frac{C}{2c_s}$$

или, соответственно:

$$\operatorname{ch} \frac{A}{2c_h} = \operatorname{ch} \frac{B}{2c_h} \cdot \operatorname{ch} \frac{C}{2c_h}.$$

Далее, мы получаем (в прямоугольном треугольнике) в соответствии с евклидовым определением синуса:

$$\sin \beta = \sin \frac{B}{2c_e} : \sin \frac{A}{2c_e}$$

или:

$$\sin \beta = \operatorname{sh} \frac{B}{2c_h} : \operatorname{sh} \frac{A}{2c_h}$$

Вообще мы получаем из всякой формулы сферической тригонометрии соответствующую формулу эллиптической или гиперболической тригонометрии, заменив величины a, b, c соответственно через $\frac{A}{2c_e}, \frac{B}{2c_e}, \frac{C}{2c_e}$ или через $\frac{iA}{2c_h}, \frac{iB}{2c_h}, \frac{iC}{2c_h}$ и оставив буквы α, β, γ неизменными.

В. Предельный переход к евклидовой геометрии. Эллиптическое или гиперболическое мероопределение непрерывно переходит в евклидову геометрию, если неограниченно увеличивать постоянную c_e или, соответственно, c_h (ср. стр. 210 и 213). При этом формулы эллиптической и гиперболической тригонометрий превращаются в формулы евклидовой тригонометрии. В самом деле, если мы, например, в теореме синусов эллиптической тригонометрии разложим в степенные ряды стоящие в левой части синусы, то мы получим:

$$\left\{ \frac{A}{1!2c_e} - \frac{A^3}{3!2^3c_e^3} + \frac{A^5}{5!2^5c_e^5} - \dots \right\} : \left\{ \frac{B}{1!2c_e} - \frac{B^3}{3!2^3c_e^3} + \frac{B^5}{5!2^5c_e^5} - \dots \right\} = \\ = \sin \alpha : \sin \beta.$$

Если мы, далее, помножим делимое и делитель в левой части уравнения на $2c_e$ и затем перейдем к пределу при $c_e = \infty$, то мы, действительно, получим:

$$A : B = \sin \alpha : \sin \beta.$$

Аналогичные предельные переходы можно произвести также и в случае других формул, например в случае аналога пифагоровой теоремы.

С. Формулы длины окружности и площади круга. Рассмотренный в этом параграфе метод может быть применен также и к другим формулам, отличным от чисто тригонометрических, что приводит к новым теоремам эллиптической и гиперболической геометрий.

В качестве примера мы прежде всего выведем формулы *длины окружности и площади круга*. Будем опять исходить из сферы радиуса $2c_e$ в евклидовом пространстве и проведем на ней круг, радиус которого на сфере равняется r , тогда как в евклидовом пространстве радиус этого круга будет равняться длине l (черт. 128 изображает сечение через центр сферы, пер-

пендикулярное к плоскости рассматриваемого круга). Тогда $l = 2c_e \sin \frac{r}{2c_e}$, поэтому для длины окружности L мы получаем:

$$L = 4\pi c_e \sin \frac{r}{2c_e}$$

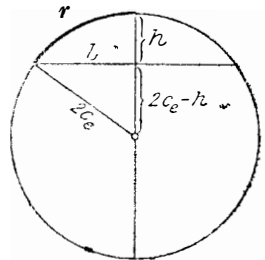
Далее, мера площади J рассматриваемого шарового сегмента $J = 4\pi c_e h$, причем h обозначает высоту этого сегмента. Но мы имеем $\cos \frac{r}{2c_e} = \frac{2c_e - h}{2c_e}$ или $h = 4c_e \sin^2 \frac{r}{4c_e}$. Отсюда следует:

$$J = 16\pi c_e^2 \sin^2 \frac{r}{4c_e}$$

Если мы спроектируем известным уже образом сферу на эллиптическую плоскость с радиусом кривизны $2c_e$, то наш круг перейдет в некоторый круг радиуса r эллиптической плоскости.

Итак, в эллиптической геометрии длина L окружности и площадь J круга радиуса r имеют следующие значения:

$$L = 4\pi c_e \cdot \sin \frac{r}{2c_e}, \quad J = 16\pi c_e^2 \cdot \sin^2 \frac{r}{4c_e}$$



Черт. 128.

Чтобы отсюда получить для гиперболической геометрии значение L , мы примем во внимание то, что L определяется известным образом как предел периметров вписанных в окружность правильных n -угольников и что вычисление этих периметров элементарным образом сводится к тригонометрическим формулам. Поэтому наш старый процесс может быть применен и здесь. Мы просто заменяем c_e через ic_h и получаем, таким образом, для длины окружности в гиперболической геометрии следующее выражение:

$$L = 4\pi ic_h \cdot \text{sh} \frac{r}{2ic_h}$$

Аналогичным образом мы получаем, пока формально, для площади круга выражение:

$$J = 16\pi ic_h^2 \cdot \text{sh}^2 \frac{r}{4ic_h}$$

относительно справедливости этой последней формулы возникает некоторое затруднение; мы еще совсем не знаем, как в гиперболической геометрии определяется „площадь“ фигуры. В то время как в случае эллиптической геометрии это определение естественно получается на основе ее связи со сферической геометрией, для случая гиперболической геометрии мы познакомимся с подобной возможностью значительно позже (в гл. X и

дифференциально-геометрических соображений)¹⁾. Вследствие этого мы еще не в состоянии сейчас выяснить, дает ли переход через мнимое в этом случае желаемый результат (ср. стр. 214). Но можно показать, что позднейшее определение допускает только что примененный способ вывода и что поэтому полученная формула площади круга справедлива.

Если мы опять оба неевклидова мероопределения превратим в евклидову геометрию, заставив c_e или c_h неограниченно возрастать, то мы получим из этих формул длину евклидовой окружности и площадь евклидова круга, потому что, например:

$$\begin{aligned} L &= \lim_{c_e \rightarrow \infty} \left[4\pi c_e \cdot \sin \frac{r}{2c_e} \right] = \\ &= \lim_{c_e \rightarrow \infty} 4\pi c_e \cdot \left\{ \frac{r}{1! 2c_e} - \frac{r^3}{3! 2^3 c_e^3} + \dots \right\} = \\ &= \lim_{c_e \rightarrow \infty} 4\pi \left\{ \frac{r}{1! 2} - \frac{r^3}{3! 8c_e^2} + \dots \right\} = 2\pi r. \end{aligned}$$

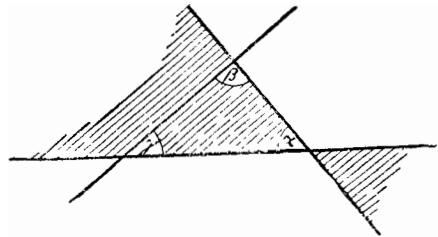
В евклидовой геометрии производная площади круга πr^2 по радиусу равняется длине окружности $2\pi r$; это же соотношение имеет место и в случае эллиптического и гиперболического мероопределений, как это непосредственно видно из полученных формул. Далее, мы хотим еще отметить, что в эллиптическом мероопределении длина окружности и площадь круга радиуса r меньше, а в гиперболическом определении больше, чем длина окружности и площадь круга того же радиуса r в евклидовой геометрии; поэтому можно в известном смысле сказать: в эллиптическом мероопределении вокруг любой точки имеется меньше площади, а в гиперболическом мероопределении больше площади, чем в евклидовой геометрии.

§ 5. Сумма углов треугольника и его площадь

А. Эллиптическая геометрия. Вся эллиптическая плоскость имеет конечную площадь, которая, как это видно из связи между сферической и эллиптической геометриями, равняется $8\pi c_e^2$. Рассмотрим теперь треугольник с углами α , β и γ (черт. 129):

¹⁾ В гл. X, § 4 мы увидим, что (и в случае $c=c_h$) кусок неевклидовой плоскости с мерой кривизны $-\frac{1}{4c^2}$ может быть конгруэнтно отображен на действительный кусок поверхности в евклидовом пространстве, которая также имеет кривизну $K = -\frac{1}{4c^2}$; известным образом определенная на этой поверхности „площадь“ фигуры, зависящая аналитически от K , может быть перенесена не только в эллиптическом случае ($K > 0$), но также и в гиперболическом ($K < 0$) на рассматриваемую неевклидову плоскость. Относительно элементарного определения понятия площади в неевклидовой геометрии см., например, Dehn, Über den Inhalt sphärischer Dreiecke, „Math. Ann.“, т. 60, 1905.

при этом мы рассматриваем α , β и γ как абсолютные величины углов, следовательно, как положительные числа. Площадь двуугольника, образованного обеими сторонами угла α (на черт. 129 этот двуугольник заштрихован), имеет величину $\frac{\alpha}{\pi} \Delta$, причем Δ обозначает площадь всей эллиптической плоскости, потому что искомая площадь двуугольника относится ко всей площади плоскости, как α : π . Совершенно таким же образом оба других двуугольника, образованные сторонами углов β и γ , имеют величины $\frac{\beta}{\pi} \Delta$ и $\frac{\gamma}{\pi} \Delta$. Рассмо-



Черт. 129.

трённые три дву угольника покрывают внешнюю область треугольника однократно, а внутреннюю трехкратно. Следовательно, выражение $\frac{\alpha}{\pi} \Delta + \frac{\beta}{\pi} \Delta + \frac{\gamma}{\pi} \Delta - \Delta$ дает двойную площадь рассматриваемого треугольника. *Итак, площадь треугольника с углами α , β и γ имеет в эллиптической геометрии величину:*

$$J = \frac{\Delta}{2\pi} \left(\alpha + \beta + \gamma - \pi \right) = 4c_c^2 \left(\alpha + \beta + \gamma - \pi \right).$$

Так как мы рассматриваем только абсолютные величины углов и площадей, то отсюда вытекает, что в эллиптической геометрии для всякого действительного треугольника величина $\alpha + \beta + \gamma - \pi$ всегда больше нуля, или, другими словами: *сумма углов треугольника в эллиптической геометрии всегда больше π* . Выражение $\alpha + \beta + \gamma - \pi$ в эллиптической геометрии, как и в сферической, называется *избытком* рассматриваемого треугольника. Вместе с тем мы получили следующее предложение: *в эллиптической геометрии площадь треугольника равна его избытку, умноженному на квадрат радиуса кривизны.*

В. Гиперболическая геометрия. Если мы, как и в предыдущем параграфе, заменим c через $-ic$, то мы получим для случая гиперболической геометрии:

$$J = -4c_h^2 (\alpha + \beta + \gamma - \pi) = 4c_h^2 (\pi - \alpha - \beta - \gamma).$$

Но при этом опять возникает такое же затруднение, как и в случае площади круга (стр. 219). Мы еще совершенно не знаем, как определяется площадь в гиперболической геометрии, и потому не можем выяснить, дает ли переход через мнимую область нужные нам формулы. Но можно показать, что этот переход действительно дает то, что требуется, так что из приведенной

выше формулы (так как и в гиперболическом случае площадь положительна) можно вывести следующее заключение: *в гиперболической геометрии сумма углов треугольника всегда меньше π* . Выражение $\pi - \alpha - \beta - \gamma$, пропорциональное площади, называется *недостатком* рассматриваемого треугольника. Далее, из нашей формулы для J получается предложение: *в гиперболической геометрии площадь треугольника не может превзойти $4c_h^2\pi$* . В треугольнике, имеющем такую максимальную площадь, все углы должны равняться нулю, что возможно только тогда, когда этот треугольник вписан в фундаментальное коническое сечение гиперболической геометрии (ср. стр. 195); подобные треугольники, вершины которых в смысле гиперболической геометрии являются бесконечно удаленными точками, называются *асимптотическими* треугольниками.

Так как предложение о сумме углов треугольника гиперболической геометрии играет исключительно важную роль, то мы приведем еще другое его доказательство, независимое от площади треугольника. Для этого достаточно показать, что для произвольного треугольника, вершины которого являются собственными точками в смысле гиперболической геометрии, имеет место соотношение:

$$S = \sin(\alpha + \beta + \gamma) > 0,$$

потому что тогда сумма углов должна лежать в одной из бесчисленного множества попарно *неперекрывающихся* областей $2n\pi < \alpha + \beta + \gamma < (2n+1)\pi$, где n — целое число. Но так как все рассматриваемые треугольники, а, следовательно, также и суммы их углов, могут быть непрерывно переведены друг в друга, то приходится рассматривать (при обычном измерении углов) только одну из этих областей и притом, как это легко показать, именно область между 0 и π , что и требовалось доказать.

Далее:

$$S = \sin(\alpha + \beta + \gamma) = \sin \alpha \cdot \cos \beta \cdot \cos \gamma + \sin \beta \cdot \cos \alpha \cdot \cos \gamma + \\ + \sin \gamma \cdot \cos \alpha \cdot \cos \beta - \sin \alpha \cdot \sin \beta \cdot \sin \gamma.$$

Выразив $\sin \beta$ и $\sin \gamma$ при помощи теоремы синусов (стр. 217) через $\sin \alpha$ ¹⁾:

$$\sin \beta = \sin \alpha \cdot \frac{\text{sh } B}{\text{sh } A}, \quad \sin \gamma = \sin \alpha \cdot \frac{\text{sh } C}{\text{sh } A},$$

мы получим:

$$S = \sin \alpha \cdot \left\{ \cos \beta \cdot \cos \gamma + \frac{\text{sh } B}{\text{sh } A} \cos \alpha \cos \gamma + \right. \\ \left. + \frac{\text{sh } C}{\text{sh } A} \cos \alpha \cdot \cos \beta - \sin^2 \alpha \frac{\text{sh } B \cdot \text{sh } C}{\text{sh}^2 A} \right\}.$$

¹⁾ Постоянную расстояния c_h мы без ограничения общности можем положить равной $1/2$.

Заменим в скобках $-\sin^2\alpha$ через $\cos^2\alpha - 1$ (тогда α, β и γ будут фигурировать в них только под знаком косинуса) и воспользуемся теоремой косинусов (стр. 217):

$$\cos \alpha = \frac{\operatorname{ch} B \cdot \operatorname{ch} C - \operatorname{ch} A}{\operatorname{sh} B \cdot \operatorname{sh} C}, \quad \cos \beta = \dots, \quad \cos \gamma = \dots;$$

мы получим:

$$S = \frac{\sin \alpha}{\sin^2 A \cdot \operatorname{sh} B \cdot \operatorname{sh} C} \{ (\operatorname{ch} A \cdot \operatorname{ch} C - \operatorname{ch} B) (\operatorname{ch} A \cdot \operatorname{ch} B - \operatorname{ch} C) + \\ + (\operatorname{ch} B \cdot \operatorname{ch} C - \operatorname{ch} A) (\operatorname{ch} A \cdot \operatorname{ch} B - \operatorname{ch} C) + \\ + (\operatorname{ch} B \cdot \operatorname{ch} C - \operatorname{ch} A) (\operatorname{ch} A \cdot \operatorname{ch} C - \operatorname{ch} B) + \\ + (\operatorname{ch} B \cdot \operatorname{ch} C - \operatorname{ch} A)^2 - \operatorname{sh}^2 B \cdot \operatorname{sh}^2 C \}.$$

Заменив в скобках $\operatorname{sh}^2 B$ на $\operatorname{ch}^2 B - 1$, $\operatorname{sh}^2 C$ на $\operatorname{ch}^2 C - 1$ и воспользовавшись тождеством:

$$(\operatorname{ch} x - \operatorname{ch} y) (\operatorname{ch} y - \operatorname{ch} z) + (\operatorname{ch} z - \operatorname{ch} x) (\operatorname{ch} y - \operatorname{ch} z) + (\operatorname{ch} z - \operatorname{ch} x) (\operatorname{ch} x - \operatorname{ch} y) + \\ + (\operatorname{ch} z - \operatorname{ch} x)^2 - (\operatorname{ch}^2 y - 1) (\operatorname{ch}^2 z - 1) = \\ = (\operatorname{ch} x - 1) (\operatorname{ch} y - 1) (\operatorname{ch} z - 1) (\operatorname{ch} x + \operatorname{ch} y + \operatorname{ch} z + 1),$$

мы получим формулу:

$$S = \frac{\sin \alpha}{\sin A} \cdot \frac{(\operatorname{ch} A - 1) (\operatorname{ch} B - 1) (\operatorname{ch} C - 1)}{\operatorname{sh} A \cdot \operatorname{sh} B \cdot \operatorname{sh} C} (\operatorname{ch} A + \operatorname{ch} B + \operatorname{ch} C + 1).$$

Но из нее непосредственно вытекает, что $S > 0$ (так как при $x > 0$, как известно, $\operatorname{sh} x > 0$ и $\operatorname{ch} x > 1$), что и требовалось доказать.

С. Евклидова геометрия. В то время как в эллиптической геометрии сумма углов больше π , а в гиперболической геометрии меньше π , в евклидовой геометрии она как раз равна π , чем опять подтверждается промежуточное положение евклидовой геометрии. Формула площади треугольника становится в предельном случае евклидовой геометрии неопределенной, так как в пределе c_1 и c_2 бесконечно велики, так что избыток или, соответственно, недостаток равен нулю. Тем не менее, при условии искусственного выполнения предельного перехода можно получить из неевклидовой формулы площади евклидову формулу.

Д. Обобщение на случай высших размерностей. Аналогичные исследования для случая трехмерных геометрий приводят к совершенно другому результату. Рассмотрим тетраэдр и определим величины его трехгранных углов при вершинах $\alpha_1^0, \alpha_2^0, \alpha_3^0, \alpha_4^0$ и его двугранных углов при ребрах $\alpha_1^1, \dots, \alpha_6^1$ следующим образом. Построим вокруг вершины или, соответственно, вокруг какой-нибудь точки ребра сферу достаточно малого радиуса; тогда искомой величиной угла назовем меру площади части сферы, лежащей внутри измеряемого угла, деленную на меру площади всей сферы. Так, например, прямой трехгранный угол

имеет величину $1/8$, тогда как две взаимно перпендикулярные плоскости образуют двугранный угол при некотором ребре величиной в $1/4$. Если в эллиптическом пространстве рассмотреть разбиение пространства на части плоскостями граней тетраэдра (которое соответствует указанному на черт. 129 на стр. 221 разбиению плоскости), то мы получим после вычисления, аналогично проведенному для случая плоскости, следующее соотношение:

$$\sum_{i=1}^6 \alpha_i^1 - \sum_{i=1}^4 \alpha_i^0 = 1,$$

причем объем тетраэдра из этой формулы выпадает. Эту формулу можно перенести на случай гиперболической геометрии (так как сформулированный для двумерного случая принцип перехода от эллиптической к гиперболической геометрии сохраняет свою силу также и для многообразий высших размерностей), а посредством предельного перехода — и на случай евклидовой геометрии; так как постоянная расстояния c не входит в эту формулу, то эта последняя остается при этом неизменной¹⁾. Следовательно, в пространстве не существует предположения, аналогичного предположениям, связывающим на плоскости площадь треугольника с его сферическим избытком или с его гиперболическим недостатком; напротив, в пространстве „обобщенная сумма углов“ $W = \sum_i \alpha_i^0 - \sum_i \alpha_i^1$ во всех геометриях имеет одну и ту же величину — 1.

Интересно выяснить, как эти предположения — впрочем, без изменения элементарного метода доказательства — обобщаются на случай n -мерной геометрии и как при этом получается установленная нами разница между случаями $n=2$ и $n=3$ ²⁾. Мы проводим через $n+1$ точек n -мерного многообразия все гиперплоскости, проходящие через каждые n из этих точек, и называем получившийся образ n -мерным симплексом. Если через α'_i обозначить подобно предыдущему определенные углы при r -мерных

¹⁾ Проще всего доказать эту формулу для каждой из трех геометрий, в частности и для евклидовой, построением сфер вокруг каждой из четырех вершин; для всех четырех сфер надо написать формулы, связывающие избытки треугольников с их площадями, и скомбинировать полученные таким образом формулы. Удивительно, что эта простая теорема о сумме углов тетраэдра почти неизвестна даже в случае евклидовой геометрии, несмотря на то, что уже в 1783 г. она была доказана де-Гюа (de Gua) в его работе „Propositions nouvelles et non moins utiles que curieuses, sur le tétraèdre, „Hist. Acad. R. des Sc.“, Париж 1783 (появилась в 1786 г.), а в 1837 г. Брианшон (Brianchon) распространил ее на случай полиэдров в своей работе „Théorème nouveau sur les polyèdres, „Journ. de l'Es Polyt.“, т. 25, 1837.

²⁾ Poincaré, Sur la généralisation d'un théorème élémentaire de Géométrie, C. R., т. 140, 1905, Dehn, Die Eulersche Formel in Zusammenhang mit dem Inhalt in der nichteuklidischen Geometrie, „Math. Ann.“, т. 61, 1905. Hopf, Die curvatura integra Clifford-Kleinscher Raumformen, „Nachr. v. d. Ges. d. Wiss. Göttingen“, Math.-phys. Kl., 1925.

гранях такого симплекса, то в случае нечетного n только что указанное для $n=3$ предложение обобщается таким образом, что во всех трех геометриях для обобщенной суммы углов:

$$W = \sum_{r=0}^{n-2} (-1)^r \sum_i \alpha_i^r = \sum_i \alpha_i^0 - \sum_i \alpha_i^1 + \dots + (-1)^{n-2} \sum_i \alpha_i^{n-2},$$

имеет место формула:

$$W = -\frac{n-1}{2}.$$

Если же n четно, то обобщением доказанной для $n=2$ на стр. 221 формулы является в эллиптической геометрии с постоянной расстояния c , следующая формула:

$$J = (2c_e)^n \left\{ W - \frac{n-1}{2} \right\} \cdot \frac{K_n}{2},$$

причем через K_n обозначена мера площади n -мерной евклидовой единичной сферы¹⁾, а через J —объем рассматриваемого симплекса. Отсюда получается посредством предельного перехода $c_e \rightarrow \infty$ для евклидовой геометрии:

$$W = \frac{n-1}{2},$$

и, далее, посредством (также и здесь дозволенной) подстановки $c_e = ic_h$ для гиперболической геометрии:

$$J = i^n (2c_h)^n \left\{ W - \frac{n-1}{2} \right\} \cdot \frac{K_n}{2} = (-1)^{\frac{n}{2}} (2c_h)^n \left\{ W - \frac{n-1}{2} \right\} \frac{K_n}{2}.$$

Так как J всегда больше нуля, то при четном n в эллиптической геометрии должно быть всегда: $W > \frac{n-1}{2}$. Напротив того, в гиперболической геометрии приходится различать два случая:

если n имеет вид $4m+2$, следовательно, $\frac{n}{2}$ нечетно, то $W < \frac{n-1}{2}$,

если же $n=4m$, следовательно, $\frac{n}{2}$ четно, то $W > \frac{n-1}{2}$. Итак, мы

получаем следующий результат: при четном n обобщенная сумма углов W n -мерного симплекса в евклидовой геометрии постоянна; в эллиптической геометрии она имеет „избыток“; наконец, в гиперболической геометрии она имеет „недостаток“ или „избыток“, смотря по тому, имеет ли n вид $n=4m+2$ или $n=4m$.

1) Для нечетного n : $K_n = \frac{2}{\left(\frac{n-1}{2}\right)!} \pi^{\frac{n+1}{2}}$; для четного n :

$K_n = \frac{2^n \left(\frac{n}{2}-1\right)!}{(n-1)!} \pi^{\frac{n}{2}}$; ср. P. H. Schoute, *Mehrdimensionale Geometrie II* (Sammlung Schubert 36), стр. 288 и сл.

§ 6. Евклидова и обе неевклидовы геометрии как системы мероопределений, применимых к внешнему миру

В заключение этой главы мы хотим заняться выяснением того, какое из установленных в предыдущей главе мероопределений допускает практические применения к окружающему нас внешнему миру. По этому вопросу существует огромная, полная взаимных противоречий философская и всякая другая литература. Но мы в рамках этой книги оставим в стороне все эти философские рассуждения и будем рассматривать поставленный вопрос как *чисто естественнонаучный физический вопрос* следующим образом. Геометрия образует сеть понятий, с которыми она затем оперирует логически. Правда, побуждение к установлению этого образования понятий исходит из непосредственного рассмотрения внешнего мира; но раз мы уже испытали такое побуждение, дальше мы уже можем развивать геометрию на аксиоматических основах совершенно независимо от окружающего нас внешнего мира. Вопрос о том, какая именно определенная геометрия имеет место во внешнем мире, равносильна вопросу о том, можем ли мы указать в мире опыта чувственно воспринимаемые предметы, которые таким образом поставлены в соответствие геометрическим понятиям, что все соотношения, существующие между этими понятиями, изображались бы ими с достаточной точностью. Следовательно, дело идет просто о том вопросе, в какую именно сеть понятий укладывается окружающий нас мир опыта.

С этой точки зрения под прямой линией лучше всего понимать путь достаточно тонкого *светового луча*, который на своем пути не наталкивается ни на какое материальное препятствие; плоскость же пусть определяется теми световыми лучами, которые все выходят из одной точки и пересекают другой, непроходящий через эту точку световой луч. Впрочем, эти наши соглашения усеяны неточностями; так, например, световой луч никогда не бывает точной прямой, но является целым световым пучком, в котором происходят сложные колебания по законам физики.

Но подобные неточности никогда не могут быть совершенно устранены в мире опыта.

Мы знаем, что световые лучи в достаточно малой области удовлетворяют с достаточной для наших целей точностью всем предположениям о прямых проективной геометрии. Чтобы перейти, далее, к метрической геометрии, мы воспользуемся понятием *твердого тела* и потребуем, чтобы движения практически применимого мероопределения совпадали с хорошо известными движениями этого тела во внешнем мире. По § 1 настоящей главы это требование удовлетворяется кроме евклидовой геометрии еще эллиптическим и гиперболическим мероопределениями, которые вследствие этого выделяются среди всех прочих мероопределений.

Сюда же примыкает затронутый уже в § 1 вопрос о том, какое из трех таким образом выделенных мероопределений имеет место во внешнем мире. Мы там подчеркнули (впрочем, не обосновывая этого, что мы сделаем сейчас), что на этот вопрос невозможно ответить, так как все три мероопределения одинаково хорошо изображают имеющиеся во внешнем мире соотношения; или, другими словами: *с нашими теперешними знаниями мы не можем выяснить, имеет ли место во внешнем мире эллиптическое, евклидово или гиперболическое мероопределение.*

Это утверждение энергично оспаривалось многими авторами и продолжает оспариваться и сейчас. Большой частью ему противопоставляются различные философские рассуждения, как, например, такое, что из чисто априорного воззрения известно, что в мире опыта для данной прямой должна существовать одна и только одна параллельная прямая, проходящая через данную точку, так что во внешнем мире должна иметь место евклидова геометрия. Эти возражения мы с самого начала вкорме уничтожаем тем, что исходим при применениях геометрии ко внешнему миру из физических представлений. Вследствие этого наш вопрос не может быть разрешен с помощью чистого воззрения, но только с помощью надлежащих физических опытов.

Так как три рассматриваемые геометрии имеют совершенно различное строение, то на первый взгляд кажется возможным исконую разницу получить на основе измерений в мире опыта. Так, например, в эллиптической, евклидовой и гиперболической геометриях сумма углов треугольника соответственно больше, равна и меньше 180° (§ 5), но вследствие несовершенства наших измерительных приборов мы никогда не можем установить, что сумма углов треугольника в точности равняется 180° ; мы можем лишь установить, что она, например, заключена между $179^\circ 59'$ и $180^\circ 01'$ — результат, который оставляет совершенно открытым вопрос о том, какая из трех геометрий имеет место во внешнем мире. Правда, посредством продолжающегося улучшения наших измерительных приборов мы можем все более и более уменьшать интервал ошибок наших измерений, однако мы никогда не получим точной величины, хотя бы интервал ошибок и был очень мал. Так как мы, как мы это уже видели на стр. 210, можем как угодно приблизить эллиптическое и гиперболическое мероопределения к евклидовой геометрии, то мы получаем следующее замечательное предложение. *Если бы во внешнем мире имела место евклидова геометрия, то мы никогда бы не могли этого строго доказать, потому что неизбежный интервал ошибок нашего измерения в этом случае оставляет еще возможность наличия как эллиптического, так и гиперболического мероопределений. Напротив, если во внешнем мире имеет место эллиптическое или гиперболическое мероопределение, то это обязательно обнаружится с помощью достаточно точных*

средств наблюдения, потому что если бы мы сделали интервал ошибок достаточно малым, то возможность двух других мероопределений была бы исключена.

Подобные соображения были известны уже основоположникам неевклидовой геометрии (ср. гл. X). Так, говорят, что Гаусс во время произведенного им измерения королевства Ганновер с невозможной точностью измерил сумму углов наибольшего горамы Большой Гаген, Брокен и Инзельсберг. Однако ему не удалось найти интересующее нас отклонение от 180° ¹⁾. Лобачевский привлекает уже астрономические соображения для разрешения этого вопроса²⁾. Наконец, Больяи, (Johann Bolyai) анализирует эти соображения Лобачевского³⁾.

Подробное изложение этих обстоятельств с учетом более новых достижений астрономии имеется в очень интересной работе Шварцшильда (Schwarzschild, Über das zulässige Krümmungsmass des Raumes⁴⁾), которую мы здесь кратко изложим. Расстояние неподвижной звезды от Земли определяется с помощью надлежащего астрономического измерения угла, под которым видна с этой звезды земная орбита. Эту величину, называемую параллаксом рассматриваемой звезды, мы находим в предположении, что имеет место евклидова геометрия. Зная параллакс, мы можем при наличии того же предположения легко вычислить искомое расстояние от звезды до Земли. Но в этом способе содержится произвольное допущение, так как мы совершенно не знаем, справедлива ли гипотеза Евклида; некоторые отклонения от нее, которые еще полностью ускользают от наших наблюдений при измерениях в солнечной системе, в случае расстояний до неподвижных звезд могут оказаться весьма значительными. Поэтому мы должны в порядке проверки произвести вычисления расстояния до звезды, положив в основу произвольную геометрию, и только тогда мы сможем выяснить с помощью надлежащих рассуждений, какая из геометрий имеет место и вместе с тем, каково истинное расположение звезд.

Мы уже видели на стр. 212 и 214, что рассматриваемые геометрии однозначно определяются заданием радиуса кривизны

¹⁾ (в этом измерении в гауссовом наследстве не осталось прямых свидетельств. Однако о возможности подобного измерения Гаусс пишет в письме от 8 ноября 1824 г. к Тауринусу: „Если бы неевклидова геометрия была истинной и соответствующая ей постоянная находилась бы в известном отношении к величинам, лежащим в области наших измерений на земле или на небе, то ее можно было бы определить из опыта“. (Gauss Werke, Bd. X, 2; Stäckel, Gauss als Geometer, (стр. 33.) Дальнейшие сведения имеются в книге Sartorius von Waltershausen, Gauss zum Gedächtniss, Лейпциг 1856, стр. 53 и 81.

²⁾ Лобачевский, О началах геометрии. 1829—1830.

³⁾ Ср. Stäckel, Wolfgang und Johann Bolyai „Geometrische Untersuchungen“. первая часть, Лейпциг 1913, стр. 151—157.

⁴⁾ Vierteljahrsschrift der Astronomischen Gesellschaft. 1899, стр. 337. Имеется русский перевод: К. Шварцшильд, О допустимой мере кривизны пространства, „Новые идеи в математике“. Сб. III, изд. „Образование“ ССПБ, 1913.

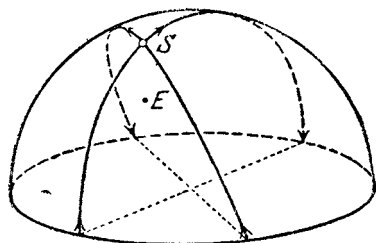
$R=2c$, или $-2ic$; в случае евклидовой геометрии радиус кривизны становится бесконечно большим. Нетрудно показать, что в случае гиперболического строения внешнего мира все звезды должны иметь параллаксы, превышающие величину $p = \frac{r}{2c}$, причем r обозначает радиус земной орбиты. Но существует много звезд, имеющих параллакс, меньший, чем $0,05''$. Отсюда вытекает: *если во внешнем мире имеет место гиперболическая геометрия, то ее радиус кривизны (взятый по абсолютной величине) должен быть четырех миллионов радиусов земной орбиты или $6 \cdot 10^{19}$ см.*

Если же, напротив, приписать внешнему миру эллиптическую структуру, то пространство придется рассматривать как конечное и замкнутое в себе; световой луч будет описывать тогда замкнутую кривую длины πR . Если мы в виде пробы придадим радиусу кривизны R небольшое значение, например в 30 000 радиусов земной орбиты, то в силу имеющихся измерений параллаксов вокруг Земли оказалось бы бедное звездами пространство, в то время как на более далеком расстоянии от нее звезды скопились бы исключительно густо, и некоторые из них отстояли бы друг от друга лишь на расстоянии 40 радиусов земной орбиты. Но тогда в этой части пространства происходили бы столкновения гораздо чаще, чем мы это наблюдаем. Если мы в противоположность этому сделаем весьма правдоподобное допущение, что все звезды в среднем находятся друг от друга на одинаковом расстоянии, то мы получим для радиуса кривизны значения примерно в 160 миллионов радиусов земной орбиты. При таком радиусе кривизны световой луч употребил бы около 8 000 лет на путь вокруг вселенной (длина пути равняется πR). Мы можем радиусу кривизны приписать и несколько меньшее значение, не впадая в противоречие с опытом, как это было выше, и можем утверждать, что, *сделав предположение об эллиптическом строении внешнего мира, мы не приходим ни к какому противоречию с опытными данными астрономии и физики, если мы возьмем радиус кривизны не менее чем в 100 миллионов радиусов земной орбиты, или $1,5 \cdot 10^5$ см.*

Но допущению эллиптического строения внешнего мира противоречит на первый взгляд следующее обстоятельство. Так как свет через конечный промежуток времени (при нашем допущении примерно через 8 000 лет) опять возвращается в исходную точку, то мы должны видеть, например, наше Солнце с противоположной стороны в качестве так называемого *антисолнца*. Это последнее не уступало бы в яркости настоящему Солнцу. Чтобы сделать более наглядным наше утверждение, обратимся к аналогичным обстоятельствам в случае двумерной эллиптической геометрии, которую мы будем рассматривать обычным образом на полушарии с отождествленными диаметрально противоположными точками края. Пусть на черт. 130 точка S изображает Солнце, а E — Землю. Лучи, исходящие из Солнца, от его

не обращенной к нам стороны, сначала являются расходящимися, т. е. яркость Солнца все время уменьшается. Но по истечении некоторого определенного промежутка времени лучи становятся сходящимися, так что яркость Солнца возрастает. Следовательно, яркость Солнца и антисолнца должна быть одинаковой, так как малая дуга (изображающая зрачок наблюдателя), перпендикулярная направлению лучей, совершенно одинаковым образом освещена узким пучком лучей, расходящихся от Солнца, и пучком сходящихся лучей, идущих с противоположной стороны¹⁾.

Чтобы преодолеть эту трудность, Шварцшильд допускает *поглощение света в мировом пространстве*, которое ослабляет силу света при однократном обходе вокруг вселенной примерно на



Черт. 130.

40 классов звездных величин. Это допущение весьма вероятно с физической и астрономической точек зрения и являлось бы вполне достаточным для того, чтобы сделать невозможным наше наблюдение антисолнца. Но в противоположность этому Гарцер (Garzer)²⁾ указывает еще на то, что Солнце и мы не остаемся в пространстве неподвижными, но движемся примерно со скоростью 30 км/сек . Если бы свет по истечении 8 000 лет снова вер-

нулся к исходному положению, где в свое время находилось Солнце, то мы были бы уже очень удалены от этой точки и потому видели бы ее с яркостью лишь в 2,7 (это примерно яркость Сириуса), даже если бы не было никакого поглощения света при его обходе вокруг вселенной. Антисолнце все время двигалось бы за нами с такой же скоростью, как и наша солнечная система. Но так как подобная звезда до сих пор еще не обнаружена, то Гарцер принимает потерю яркости в 13 классов звездных величин при одном обходе вокруг вселенной, что является достаточным для того, чтобы мы не могли видеть антисолнца.

Все эти соображения, хотя и интересны, но весьма ненадежны. Это вполне естественно, так как мы лишь в последнее время вышли со своими измерениями за тесные пределы нашей солнечной системы. При этом Гарцер пользуется следующим сравнением. Пока геодезисты измеряют лишь малые куски земной поверхности, они не приходят к противоречию, делая предположения, что Земля является плоскостью; если же приходится

¹⁾ Особенно ярко эту мысль выразил Гельмгольц, который по этому поводу говорил, что в эллиптической геометрии мы должны были бы видеть перед собой свой собственный затылок.

²⁾ Garzer, Die Sterne und der Raum, Jahresber. d. D. M. V., т. 17, стр. 237, 1908. Имеется русский перевод: П. Гарцер, Звезды и пространство, „Новые идеи в математике“, Сб. III, изд., „Образование“ СПб, 1913.

иметь дело с измерением больших кусков, то необходимо рассматривать Землю (во втором приближении) как сферу. В старые годы людям казалось сначала очень удивительным, что можно вернуться в ту же самую точку, если идти по земной поверхности все время вперед, — представление, сделавшееся в настоящее время для нас вполне привычным. Совершенно такое же обстоятельство может представиться, если мы перейдем от измерений в солнечной системе к измерениям в системе неподвижных звезд. Впрочем, необходимость этого (как это было в случае измерения на земной поверхности) до сих пор еще не представилась; но очень легко себе вообразить, что подобный момент может наступить не в очень отдаленном будущем.

Во всяком случае, эти рассуждения показывают нам, что ко внешнему миру евклидова геометрия подходит с такой большой степенью точности, *что мы на земной поверхности и в области нашей солнечной системы можем без всяких сомнений исходить из предположения о справедливости гипотезы Евклида, не впадая в противоречие с опытом*, потому что, например, чтобы построить на прямой линии согласное с предыдущим эллиптическое мероопределение, мы должны взять евклидов круг, касающийся нашей прямой, с радиусом, не меньшим чем $1,5 \cdot 10^{21}$ см, и затем спроектировать мероопределение этого круга из его центра на прямую (ср. черт. 191 стр. 191); но этот круг уклоняется от нашей прямой на расстоянии 170 000 км всего лишь на 1 мм!

Глава VIII

СПЕЦИАЛЬНОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ОБЕИХ НЕЕВКЛИДОВЫХ ГЕОМЕТРИЙ

В настоящей главе мы рассмотрим особо обе неевклидовы геометрии, которые мы выделили как единственные (кроме евклидовой геометрии), применимые ко внешнему миру, из большого числа возможных мероопределений. Евклидову геометрию мы будем привлекать сюда лишь для того, чтобы ее (предполагаемые известными) теоремы сравнивать с соответствующими теоремами эллиптической и гиперболической геометрий. В этих последних нас в первую очередь будет интересовать *действительная собственная* область, так как, ведь, только о ней одной идет речь при могущих встретиться приложениях к окружающему нас пространству; если мы все-таки будем пользоваться несобственными или даже мнимыми элементами, то мы будем делать это исключительно для того, чтобы на этом обходном пути более удобным образом достигать желаемых результатов, касающихся действительных собственных образов. При этом частично дело будет идти лишь о том, чтобы собрать вместе уже известные нам теоремы, доказательства которых мы не будем приводить, так как многие сюда относящиеся вещи нам уже сделались привычными вследствие наших прежних исследований.

§ 1. Эллиптическая и гиперболическая геометрии на прямой линии

А. Эллиптическая прямая. Прямая эллиптической геометрии является *замкнутой* линией длины $2c_1\pi$ (ср. стр. 190). Расстояние $E(x, y)$ между двумя точками x и y определяется, во-первых, лишь с точностью до числа кратного $2c_1\pi$ и, во-вторых, лишь с точностью до знака, так что наряду с числом a , содержащимся между 0 и $2c_1\pi$, рассматриваемое расстояние будет давать также число $2c_1\pi - a$, лежащее в этом же интервале. Для каждой точки x существует одна и только одна точка \bar{x} , для которой оба эти числа, дающие расстояние, равняются друг другу; для этих точек $E(x, \bar{x}) = c_1\pi$, поэтому двойное отношение точек x, \bar{x} и двух фундаментальных точек равняется -1 , т. е. точки x и \bar{x} находятся в гармоническом отношении к фундаментальным точкам; точки x

и \bar{x} называются взаимно „перпендикулярными“ или „ортogonalными“ (ср. стр. 169). Арккосинус-формула для E (ср. стр. 189) показывает, что в этом случае $\Omega_{xx} = 0$.

Всякие две точки определяют два отрезка. Каждый из этих отрезков имеет одну и только одну центральную точку. При этом центральные точки обоих отрезков взаимно перпендикулярны. Эти предложения мы можем (как и все свойства эллиптической прямой) получить из геометрии евклидова пучка прямых, если имеющуюся там метрику перенесем посредством проектирования из центра пучка на эллиптическую прямую (ср. черт. 109, стр. 191). Для дальнейших приложений нам понадобятся еще координаты обеих центральных точек. Пусть x и y — данные точки; найдем те точки $\lambda x + \mu y$, для которых $E(x, \lambda x + \mu y) = E(\lambda x + \mu y, y)$. Это требование равносильно (если мы нормируем координаты $x_1 : x_2$ и $y_1 : y_2$ точек x и y посредством умножения на соответствующие постоянные множители K_x, K_y таким образом, чтобы $\Omega_{xx} = \Omega_{yy} = 1$), как это видно из арккосинус-формулы на стр. 189, с уравнением:

$$\Omega_{x, \lambda x + \mu y} = \pm \Omega_{\lambda x + \mu y, y}$$

т. е.

$$\lambda \Omega_{xx} + \mu \Omega_{xy} = \pm \lambda \Omega_{xy} \pm \mu \Omega_{yy}$$

или, так как $\Omega_{xx} = \Omega_{yy} = 1$,

$$(\lambda \pm \mu) (\Omega_{xy} \pm 1) = 0.$$

Второй множитель не может обратиться в нуль, так как в противном случае из $\Omega_{xy} = \pm 1$ в соединении с $\Omega_{xx} = \Omega_{yy} = 1$ следовало бы, что обе исходные точки совпадают. Значит, $\lambda = \pm \mu$, т. е. искомыми точками являются $m = x + y, m' = x - y$. Если мы откажемся от нормирования, то, так как при произвольных x_i и y_i нормирующими множителями являются:

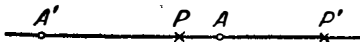
$$K_x = \frac{1}{\sqrt{\Omega_{xx}}} \quad \text{и} \quad K_y = \frac{1}{\sqrt{\Omega_{yy}}},$$

получим следующее предложение: центральные точки отрезков, определенные точками с координатами x_i и y_i , имеют координаты:

$$\frac{x_i}{\sqrt{\Omega_{xx}}} + \frac{y_i}{\sqrt{\Omega_{yy}}} \quad \text{и} \quad \frac{x_i}{\sqrt{\Omega_{xx}}} - \frac{y_i}{\sqrt{\Omega_{yy}}}.$$

Группа эллиптических твердых преобразований распадается на два однопараметрических семейства: движения, которые оставляют направление прямой неизменным и сами образуют группу, и зеркальные отображения, которые меняют направление прямой на обратное (ср. стр. 207). Группа движений изоморфна

группе вращений окружности¹⁾. Всякое движение не имеет ни одной неподвижной точки; напротив, всякое зеркальное отображение имеет две неподвижные точки A и A' , взаимно ортогональные друг к другу (черт. 131), что читатель легко может доказать сам как аналитическим, так и геометрическим способом. Всякое зеркальное отображение может быть рассматриваемо как „зеркальное отражение“ от каждой из двух неподвижных точек, потому что если P — произвольная точка, а P' — ее образ, т. е. точка,



Черт. 131.

в которую переходит P при нашем отображении, то отрезки AP и AP' между собой равны; точно так же $A'P = A'P'$. Примером этого слу-

жит (при положенной в основу в качестве фундаментального образа паре точек $x_1^2 + x_2^2 = 0$) преобразование: $\rho x_1 = x_2'$, $\rho x_2 = -x_1'$ с неподвижными точками $1:0$ и $0:1$.

В. Гиперболическая прямая. Прямая *гиперболической* геометрии является *открытой* (т. е. неограниченной, незамкнутой) линией бесконечно большой длины; при этом мы здесь, естественно, понимаем под „гиперболической прямой“ только один из двух отрезков, на которые разбивается проективная (замкнутая) прямая фундаментальными точками рассматриваемого гиперболического мероопределения. Действительное расстояние $E(x, y)$ между точками x и y определяется однозначно с точностью до знака. В собственной области не имеется ортогональных пар точек, так как эти последние должны разделяться фундаментальными точками. Две точки определяют *один* единственный отрезок. Всякий отрезок имеет одну и только одну лежащую на нем центральную точку. Это доказывается так же, как и в случае эллиптической геометрии; другая встречающаяся здесь центральная точка, равно удаленная от x и от y , является несобственной точкой, так как она ортогональна собственной центральной точке.

Группа твердых преобразований собственной области в себя распадается на два семейства так же, как и в случае эллиптической геометрии (см. стр. 206—207). Всякое движение не имеет ни одной неподвижной точки; всякое зеркальное отображение имеет *одну* неподвижную точку. *Группа твердых преобразований изоморфна группе евклидовых твердых перемещений*; вообще гиперболическая и евклидова геометрии несущественно отличаются друг от друга на (действительной, собственной) прямой, потому что обе эти геометрии, как читатель может убедиться сам, могут быть отображены друг на друга посредством точечного взаимно однозначного отображения, сохраняющего длины.

¹⁾ Две группы подстановок \mathfrak{U} и \mathfrak{V} называются *изоморфными*, если подстановкам A_1, A_2, \dots из \mathfrak{U} поставлены во взаимно однозначное соответствие подстановки B_1, B_2, \dots из \mathfrak{V} посредством такого закона $A_i \rightarrow B_i$ ($i=1, 2, \dots$), что из $A_m \rightarrow B_m$ и $A_n \rightarrow B_n$ всегда следует $A_m A_n \rightarrow B_m B_n$, т. е. если эти группы являются тождественными с точки зрения абстрактной теории групп.

§ 2. Эллиптическая геометрия плоскости

А. Общие замечания; двойственность. Местом действия эллиптической геометрии является вся проективная плоскость; „бесконечно удаленных“ элементов совершенно не существует (стр. 167). Так как в проективной плоскости всякая пара прямых имеет точку пересечения, то *параллельных прямых* не существует. На всякой прямой господствует описанное выше мероопределение, причем все прямые имеют одинаковую длину $2c, \pi$. Все точки, ортогональные к точке P (т. е. точки, удаленные от точки P на расстояние c, π), образует прямую, поляру точки P относительно фундаментального конического сечения (стр. 197). Так как в эллиптической геометрии существует по стр. 204 полная двойственность между измерениями углов и отрезков (если постоянной расстояний приписать значение $\frac{i}{2}$, равное постоянной углов), то здесь можно для всякого предложения построить *двойственное* ему предложение, переставив слова „точка“ и „отрезок“ со словами „прямая“ и „угол“. В качестве примера приведем прежде всего следующие предложения:

Прямые, перпендикулярные к прямой p , проходят через полюс P этой прямой p .

Из всякой точки $A \neq P$ можно опустить один и только один перпендикуляр на p , именно прямую, соединяющую точки A и P .

Всякие две прямые имеют общий перпендикуляр, именно поляру их точки пересечения.

Точки, перпендикулярные к точке P , лежат на поляре p этой точки P .

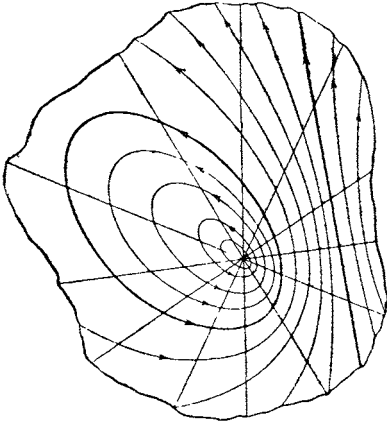
На всякой прямой $a \neq p$ существует одна и только одна перпендикулярная к P точка, именно точка пересечения прямых a и p .

Всякие две точки имеют общую перпендикулярную точку, именно полюс соединяющей их прямой.

С дальнейшими подобными примерами мы еще познакомимся.

В. Движения. Твердые преобразования образуют одно единственное семейство; имеются только движения, зеркальные отображения отсутствуют (стр. 207). При всяком движении (по крайней мере) одна точка остается неподвижной; движения являются *вращениями* вокруг этой точки (стр. 125). Если мы ближе рассмотрим подгруппу вращений вокруг данной неподвижной точки A и будем производить вращения *непрерывно*, то получим: каждая точка двигается по „окружности“ с центром в точке A (черт. 132, изображенное более толстой линией коническое сечение не играет здесь никакой особой роли); при этом окружность определяется как геометрическое место точек, равно удаленных от точки A ; мы видели на стр. 121 и 196, что эти окружности являются теми коническими сечениями, которые

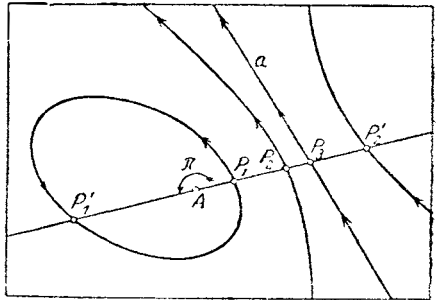
касаются (нулевого) фундаментального конического сечения в точках прикосновения выходящих из точки A касательных. К окружностям, в частности, принадлежит по стр. 197 дважды



Черт. 132.

взятая поляр a точки A . Этот факт получает теперь следующее кинематическое значение. При рассматриваемом движении точек всякая точка P после вращения на угол π попадает в некоторую точку P' , которая расположена на прямой PA таким образом, что отрезки PA и AP' между собой равны (черт. 133). На этом чертеже изображено, как точка P_1 при вращении на угол π перемещается по дуге эллипса (если мы на мгновение ради наглядности будем рассматривать этот чертеж с евклидовой точки зрения) в точку P'_1 ; соответствующим образом точка P_2

переходит в точку P'_2 по дуге гиперболы. Напротив, точка P_3 движется по поляр a точки A и, выполнив вращение, опять возвращается к своему исходному положению. Совершенно то же самое имеет место и для всех прочих точек поляр a , так что все точки этой последней уже после вращения на угол π переходят сами в себя. Если мы повторим это перемещение еще раз, то после вращения на 2π также и другие точки плоскости придут в исходное положение. Наблюдающееся здесь свойство движения переводить прямую, но не всю плоскость, точно самое в себя представляет для нас нечто необычное; в евклидовой, и, как это мы увидим дальше, в гиперболической геометрии такое обстоятельство не может иметь места. В этих последних геометриях только *зеркальные отображения* (которые не могут быть непрерывно получены из исходного положения покоя) обладают аналогичным свойством. И действительно, наше эллиптическое вращение на угол π имеет большое сходство с зеркальным отображением: именно — всякая прямая, проходящая через точку A , переходит сама в себя, при этом точки каждой из этих прямых таким образом между собой переставляются, что результатом этого является зеркальное отображе-

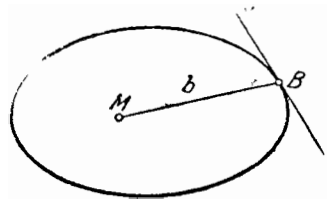


Черт. 133.

ние, что результатом этого является зеркальное отображе-

ние прямой на себя, как мы его описали на стр. 234; то обстоятельство, что мы его теперь можем непрерывно получить из положения покоя, обуславливается тем, что точки во время движения покидают рассматриваемую прямую. Поэтому мы можем наше вращение на угол π назвать также *зеркальным отображением* и только должны иметь в виду, что в эллиптической геометрии плоскости зеркальные отображения являются собственными движениями.

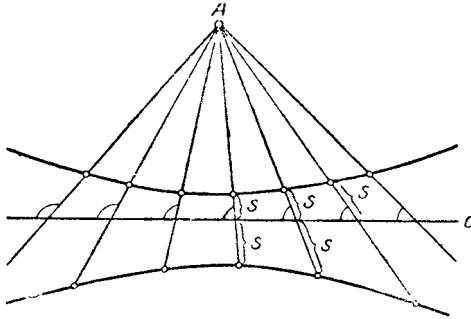
С. Некоторые предложения из теории кругов. Мы воспользуемся свойством зеркального отображения переводить точно одну и только одну прямую само в себя, чтобы доказать одно простое предложение и, таким образом, показать на примере, как изучение твердых преобразований способствует выяснению геометрических свойств фигур. Это предложение заключается в следующем: „всякая касательная к окружности перпендикулярна к радиусу, проведенному в ее точку прикосновения“. Доказательство: при зеркальном отображении относительно прямой b , соединяющей центр окружности с точкой прикосновения B касательной t (черт. 134), каждая точка прямой b остается неподвижной; следовательно, окружность с центром в точке M переходит, как линия постоянного расстояния от неподвижной точки M , сама в себя, так как зеркальное отображение сохраняет длины. То же самое имеет место и для прямой t , так как она является единственной прямой, проходящей через неподвижную точку B , которая не имеет других общих точек с окружностью. Оба смежных угла, образованных прямыми MB и t , меняются местами, так как в противном случае все точки прямой t оставались бы неподвижными, и, следовательно, оба угла равняются $\frac{\pi}{2}$, что и требовалось доказать.



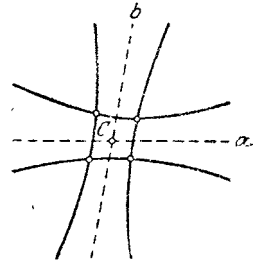
Черт. 134.

На основании указанного свойства касательных к окружности получается, что семейство концентрических окружностей с центром в точке A может быть охарактеризовано также как семейство *ортогональных траекторий к прямой, перпендикулярным к прямой a* , являющейся полярной центра A относительно фундаментального конического сечения. Далее, получаем: если мы восставим к какой-нибудь прямой a перпендикуляры (которые все проходят через полюс A прямой a) и на всех этих перпендикулярах отложим равные между собой отрезки s (черт. 135), то мы получим круг с центром в точке A , или, короче: *окружности с центром в точке A являются кривыми постоянного расстояния от прямой a* . При этом здесь надо иметь в виду следующее: если откладывать на перпендикулярах к прямой a отрезки длины s по обе стороны от a , то получится не две линии, а только одна единственная, именно *окружность с*

центром в точке A и радиусом $s, \pi - s$, которая превращается в дважды взятую прямую a , если s заставить стремиться к нулю (ср. черт. 135). Посредством обоих указанных свойств в евклидовой геометрии определяются не круги, а прямые, параллельные прямой a . Это различие играло важную роль в истории неевклидовой геометрии (ср. гл. I, § 1). Приведенный на черт. 135 вид окружности, которая при малом s тесно прилегает с обеих сторон к прямой a , делает очевидным тот факт, что в



Черт. 135.



Черт. 136.

эллиптической геометрии два круга могут иметь четыре действительные точки пересечения. Достаточно рассмотреть две прямые a и b (черт. 136), чтобы убедиться, что две окружности с центрами в полюсах A и B этих прямых с радиусами $s, \pi - s$ (причем s достаточно мало) пересекаются в четырех точках в окрестности точки пересечения C прямых a и b^1).

В заключение отметим еще следующее предложение: *все касательные к окружности образуют постоянный угол с некоторой определенной прямой a* ; эта прямая, которая может рассматриваться как выродившийся круг, является полярной центра окружности A относительно фундаментального конического сечения. Подобный „круг углов“ мы уже рассматривали на стр. 202—203 при дуализации евклидовой геометрии; в эллиптической геометрии круг углов является просто совокупностью касательных к кругу расстояний.

Д. Теоремы о конгруэнтности. Предыдущие несколько запутанные факты делают тяжеловесными формулировку и *доказательство теорем о конгруэнтности* треугольников. Здесь нужно прежде всего принять во внимание, что три точки вследствие замкнутости прямых определяют всегда четыре треугольника. Но из них, вообще говоря, всегда можно (именно, если ни одна из вершин не ортогональна двум другим вершинам)

¹⁾ В евклидовой геометрии два круга всегда имеют общими обе круговые точки (ср. стр. 156). Это обстоятельство, лежащее в основе того факта, что два круга пересекаются не более, чем в двух действительных точках, в эллиптической геометрии не имеет места.

выделить тот „отмеченный“ треугольник, стороны которого меньше ϵ . После этого вводят следующее определение: два (отмеченные) треугольника называются конгруэнтными, если один из них посредством твердого преобразования можно наложить на другой.

Тогда можно доказать следующие четыре теоремы о конгруэнтности:

Два треугольника конгруэнтны, если у них две стороны и заключенный между ними угол одинаковы.

Два треугольника конгруэнтны, если у них все три стороны соответственно одинаковы.

Два треугольника конгруэнтны, если у них два угла и общая сторона этих углов одинаковы.

Два треугольника конгруэнтны, если у них все три угла соответственно одинаковы.

Для доказательства достаточно произвести исследования, аналогичные исследованиям на стр. 237, где мы определяли угол между касательной к окружности и радиусом; но здесь всегда надо соблюдать осторожность, так как (как это мы видели на стр. 238) может при случае оказаться четыре точки, имеющие от двух данных точек A и B заданные расстояния соответственно α и β и так как две точки всегда определяют два отрезка.

Мы укажем также еще на то, что через три точки проходит *четыре* круга (ср. стр. 242).

Е. Теоремы о точках пересечения в треугольнике¹⁾. Изучение этих теорем особенно интересно, так как в них очень хорошо проявляется двойственность эллиптической метрики. Мы начнем с *теорем о биссектрисах и серединах сторон*:

В эллиптической геометрии шесть биссектрис сходятся по три в четырех точках; эти точки являются *центрами вписанного и трех вневписанных кругов*. Шесть точек, в которых биссектрисы треугольника пересекают его стороны, лежат по три на четырех прямых.

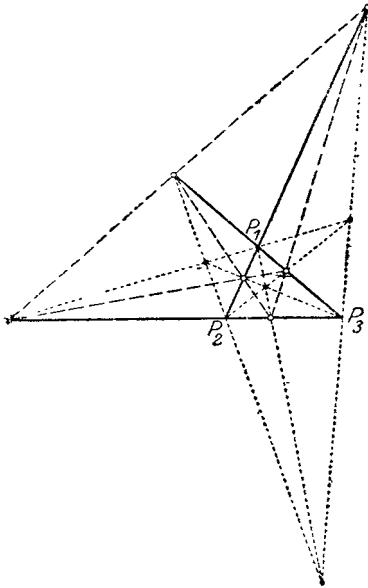
В эллиптической геометрии шесть серединных точек сторон треугольника лежат по три на четырех прямых; эти прямые образуют постоянные углы с касательными каждого из четырех описанных кругов. Шесть медиан сходятся по три в четырех точках.

Мы можем сделать обе группы теорем более наглядными с помощью схематического черт. 137, который, разумеется, в каждом

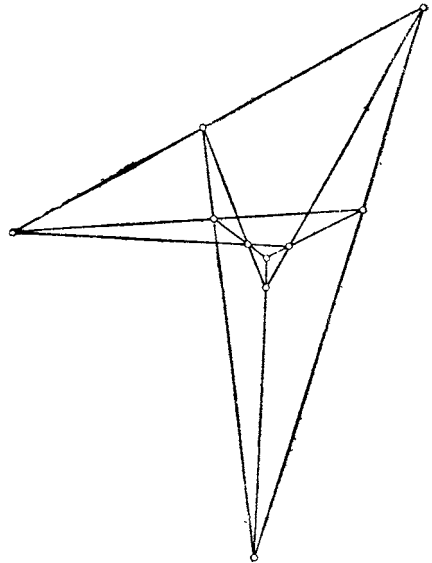
¹⁾ Ср. Coolidge, The elements of non-euclidean geometry, Oxford, Clarendon Press, 1909.

из двух случаев должен рассматриваться по-разному¹⁾. Мы ограничимся доказательством группы теорем, написанных слева, так как доказательство теорем, написанных справа, происходит двойственным образом.

Возьмем рассматриваемый треугольник за координатный треугольник проективной системы координат. Тогда три стороны P_2P_3 , P_1P_3 и P_1P_2 будут иметь прямолинейные координаты $1:0:0$ соответственно $0:1:0$ и $0:0:1$.



Черт. 137.



Черт. 138.

Пусть фундаментальное коническое сечение определяется уравнением:

$$\sum a_{\lambda\lambda} u_{\lambda} u_{\lambda} = 0.$$

Тогда по стр. 233 шесть биссектрис будут иметь координаты²⁾:

¹⁾ Более толстые линии изображают стороны треугольника. В теореме о биссектрисах мы рассматриваем всякие две пунктирные линии, проходящие через вершины треугольника, как биссектрисы, четыре черные точки—как центры вписанных и невписанных кругов, шесть белых точек—как точки пересечения биссектрис со сторонами треугольника и четыре прерывистые прямые—как соединяющие их прямые. В теореме о серединах сторон шесть белых точек мы рассматривали как середины сторон, четыре прерывистые прямые—как соединяющие их прямые, шесть пунктирных прямых—как медианы и четыре черные точки—как их точки пересечения.

²⁾ Приведенное на стр. 233 доказательство для случая середины отрезка может быть распространено на случай высших размерностей. Посредством дуализации тогда получается соответствующее доказательство для случая биссектрис углов.

$$\text{Биссектрисы, проходящие через} \left\{ \begin{array}{l} P_1 \quad 0 \quad : \frac{1}{\sqrt{a_{22}}} \quad : \frac{\varepsilon_1}{\sqrt{a_{33}}}, \\ P_2 \quad \frac{\varepsilon_2}{\sqrt{a_{11}}} \quad : \quad 0 \quad \frac{1}{\sqrt{a_{33}}}, \quad \varepsilon_1, \varepsilon_2 \text{ и } \varepsilon_3 \text{ равняются} \\ P_3 \quad \frac{1}{\sqrt{a_{11}}} \quad : \quad \frac{\varepsilon_3}{\sqrt{a_{22}}} \quad : 0. \quad +1 \text{ или } -1. \end{array} \right.$$

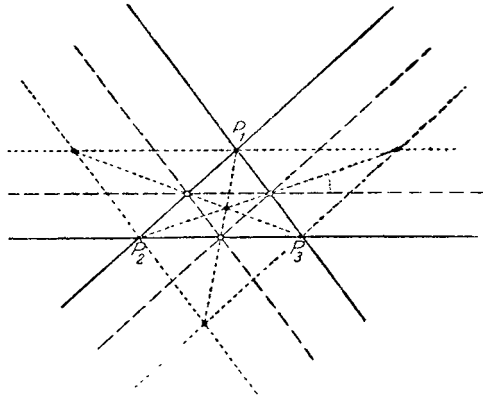
Определенные этими формулами прямые будут проходить через одну точку, если определитель

$$D = \frac{1 + \varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon_3}{\sqrt{a_{11} a_{22} a_{33}}}$$

равняется нулю; это будет иметь место, если $\varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon_3 = -1$, — требование, которое выполнено как раз для четырех возможных комбинаций. Координаты получающихся вследствие этого точек пересечения имеют вид:

$$\varepsilon_1 \sqrt{a_{11}} : \varepsilon_2 \sqrt{a_{22}} : \varepsilon_3 \sqrt{a_{33}},$$

$$\varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon_3 = -1.$$



Черт. 139.

Далее, мы получаем в качестве точечных координат точек пересечения, которые получаются от пересечения биссектрис с противоположными сторонами, следующие выражения:

$$\text{Точки пересечения биссектрис со сторонами} \left\{ \begin{array}{l} P_2 P_3 \quad 0 \quad : \sqrt{a_{22}} \quad : -\varepsilon_1 \sqrt{a_{33}}, \\ P_1 P_3 \quad -\varepsilon_2 \sqrt{a_{11}} \quad : \quad 0 \quad : \sqrt{a_{33}}, \quad \varepsilon_1, \varepsilon_2, \text{ и } \varepsilon_3 \text{ равняются} \\ P_1 P_2 \quad \sqrt{a_{11}} \quad : -\varepsilon_3 \sqrt{a_{22}} \quad : 0, \quad \text{ются } +1 \text{ или } -1. \end{array} \right.$$

Такое же рассмотрение определителя, как и выше, показывает, что эти точки по три лежат на одной прямой.

Мы заметим, что эти теоремы при надлежащем употреблении „бесконечно удаленных“ элементов могут быть перенесены на случай евклидовой геометрии¹⁾. Так, например, в теореме о медианах приходится рассматривать бесконечно удаленную точку

¹⁾ Ср. также статьи Шульке (Schülke) в журнале „Zeitschrift für math. und naturwiss. Unterricht aller Schulgattungen“, стр. 201, 1923 и стр. 12, 1926.

стороны треугольника как вторую серединную точку этой стороны (черт. 139). Это соображение дает нам прекрасный пример того, как при переходе к евклидовой геометрии от двойственных предложений эллиптической геометрии остаются одни развалины. (Отметим еще, что указанные предложения будут выполнены также и в гиперболической геометрии, если мы привлечем к рассмотрению несобственные элементы.)

Далее укажем еще на то, что мы получим особенно правильную фигуру, если удалим из черт. 137 три стороны треугольника (черт. 138). Именно, тогда через каждую указанную выше точку пересечения будут проходить три прямые линии, тогда как, обратно, на каждой прямой будут лежать три точки пересечения. Подобную фигуру мы будем называть *плоской конфигурацией*.

Далее, мы приведем *теорему о перпендикулярах, восстановленных из середин сторон треугольника, и ее двойственный аналог*, которые могут быть доказаны таким же способом, как и теорема о биссектрисах и медианах:

В эллиптической геометрии перпендикуляры, восстановленные из шести серединных точек сторон треугольника, сходятся по три в четырех точках; эти точки равноудалены от всех трех вершин треугольника и *являются, следовательно, центрами описанных кругов*.

В эллиптической геометрии шесть точек биссектрис, ортогональных к соответствующим вершинам треугольника, лежат по три на четырех прямых; эти прямые образуют со всеми тремя сторонами треугольника равные углы.

Теорема о высотах евклидовой геометрии в эллиптической геометрии выглядит следующим образом:

Во всяком треугольнике эллиптической геометрии, в котором ни одна из вершин не является полюсом противоположащей стороны, три высоты пересекаются в одной единственной точке.

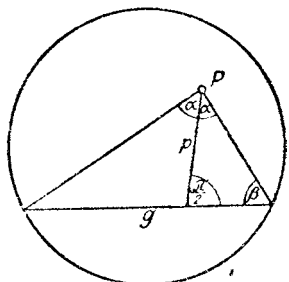
Во всяком треугольнике эллиптической геометрии, в котором ни одна из сторон не является полярной противоположащей вершины, три точки на сторонах, ортогональные к противоположащим вершинам, лежат на одной прямой.

Г. Заключительные замечания. Наиболее удобным вспомогательным средством для нахождения соотношений в эллиптической геометрии плоскости является указанная на стр. 167 и сл. связь между эллиптической геометрией и хорошо нам известной геометрией на поверхности шара; для этого достаточно, повторим это еще раз, отождествить всякую пару диаметрально противоположных точек сферы, чтобы получить конгруэнтный

образ эллиптической плоскости. В связи с этим мы напомним о предложениях, которые мы получили в § 4 гл. VII посредством использования этой связи. Далее мы подчеркнем еще тот, полученный на стр. 221, результат, что в эллиптической геометрии сумма углов треугольника всегда больше π ; теорема, которая имеет очень большое значение как с исторической, так и с принципиальной стороны (ср. стр. гл. X, § 1).

§ 3. Гиперболическая геометрия плоскости

А. Общие замечания; параллельные линии. В то время как в мнимой области эллиптическая и гиперболическая геометрии являются тождественными (ср. стр. 193), в действительной области между ними обнаруживаются интересные и важные различия. При этом гиперболическая геометрия в некоторых отношениях проще, так как в противоположность эллиптической геометрии, местом действия которой является вся сложная с точки зрения связности *проективная* плоскость, — *собственная область* гиперболической геометрии (следовательно, внутренняя область овальной фундаментальной кривой) имеет такую же простую связность, как и плоскость евклидовой геометрии. Но, с другой стороны, то обстоятельство, что нам приходится теперь рассматривать лишь *часть плоскости* как собственную, привносит с собой некоторые усложнения, так как в связи с этим приходится рассматривать теперь множество различных случаев, проходящих через всю гиперболическую геометрию и совершенно не встречающихся в эллиптической геометрии¹⁾.



Черт. 140.

Мы начнем с выяснения важнейшего относящегося сюда вопроса о точке пересечения двух прямых. Здесь приходится различать три случая: точка пересечения двух прямых (которая на проективной плоскости всегда имеется) может лежать либо внутри фундаментального конического сечения, либо вне его, либо, наконец, на нем самом. *В первом случае* с точки зрения собственной действительной гиперболической геометрии прямые имеют *одну* общую точку; *во втором случае* они не имеют *ни одной* общей точки, *в третьем случае* они имеют общую точку, которая в рассматриваемом мероопределении должна считаться „бесконечно удаленной“; поэтому мы такие прямые будем называть *параллельными*; угол между ними равняется нулю (см. стр. 195). Следовательно, в противоположность евклидовой геометрии здесь имеется еще новая возможность, именно существование пар пря-

¹⁾ Но эллиптическая геометрия проще в том отношении, что в (действительной) гиперболической метрике принцип двойственности не имеет места (ср. стр. 204).

мых, указанных во втором случае. Но также и в третьем случае имеется существенное отличие от евклидовой геометрии: для всякой прямой g имеются всегда две параллельные прямые, проходящие через любую данную, не лежащую на ней точку P (черт. 140). Они являются (аналогично евклидовым параллелям) предельным положением прямых, проходящих через точку P и пересекающих прямую g . Обозначенные через α на черт. 140 углы, которые, как легко видеть, равны между собой, называются *углами параллельности*. Их величину легко вычислить, потому что в прямоугольном треугольнике на черт. 140 (как это получается по стр. 218 путем сравнения с соответствующими предложениями сферической тригонометрии) имеет место следующая формула:

$$\operatorname{ch} \frac{p}{2c_k} = \frac{\cos \beta}{\sin \alpha},$$

или, так как здесь $\beta = 0$:

$$\sin \alpha = \frac{1}{\operatorname{ch} \frac{p}{2c_k}}.$$

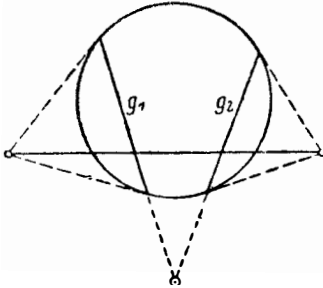
Следовательно, угол параллельности α зависит только (не считая зависимости от заданной константы c_k) от расстояния p точки P от прямой g . Эта теорема играла важную роль в истории неевклидовой геометрии.

В. О перпендикулярных прямых. Несколько большее соответствие с евклидовой геометрией, чем в случае пары параллельных прямых, мы получим в случае пары перпендикулярных прямых. Перпендикулярными прямыми мы назовем, как и в эллиптической геометрии, всякие две прямые, из которых каждая проходит через полюс другой¹⁾. Отсюда следует: в каждой точке любой прямой можно восстановить один перпендикуляр; два перпендикуляра, восстановленные в двух точках одной и той же прямой, не пересекаются; из каждой точки, лежащей вне данной прямой, можно опустить один и только один перпендикуляр; при этом основание этого перпендикуляра будет также собственной точкой, так как она и лежащий вне кривой полюс нашей прямой (гармонически) разделяются парой точек фундаментальной кривой.

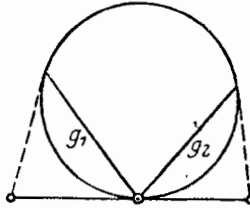
Все же и здесь имеются отличия от евклидовой геометрии. Две непараллельные прямые имеют в точности один общий перпендикуляр, именно полюсу их общей несобственной точки (черт. 141, на котором полюса построены как прямая, соединяющая полюсы обеих прямых для того, чтобы выявить соответствие с двумя помещенными рядом чертежами). Напротив, для двух параллельных и для двух пересекающихся прямых не существует ни одной (собственной) прямой, одновременно перпендикулярной

¹⁾ Следовательно, обе прямые на черт. 32, стр. 69, взаимно перпендикулярны в смысле метрики, определенной изображенным на чертеже коническим сечением.

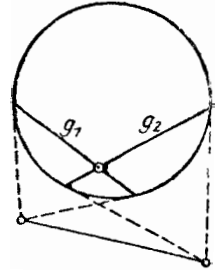
к обоим данным прямым¹⁾; именно, в первом случае поляра точки пересечения является касательной к фундаментальному коническому сечению (черт. 142), в то время как во втором случае она находится целиком вне конического сечения (черт. 143).



Черт. 141.

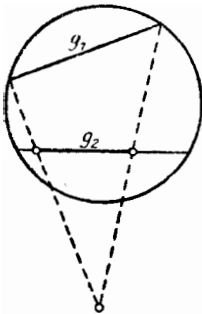


Черт. 142.

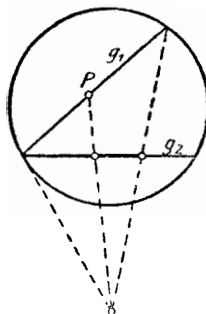


Черт. 143.

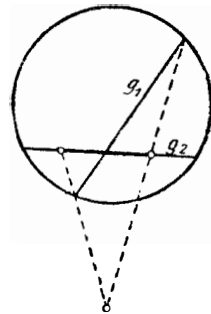
С вопросом об общем перпендикуляре тесно связан вопрос о *кратчайшем расстоянии* между двумя непересекающимися в собственной области прямыми; если эти последние не параллельны, то, как легко можно показать, это кратчайшее расстояние существует, и притом оказывается как раз отрезком, перпендикулярным к обоим данным прямым; напротив, если идти



Черт. 144.



Черт. 145.



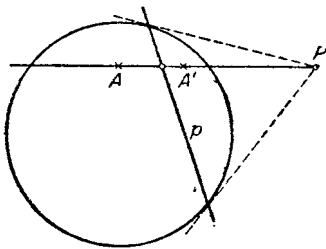
Черт. 146.

в одном из двух направлений по какой-нибудь прямой, то расстояния от тех параллелей, которые проходят через соответствующую этому направлению бесконечно удаленную точку, монотонно убывают, асимптотически приближаясь к нулю, что опять-таки находится в противоречии с евклидовой геометрией. В заключение отметим еще один в такой же степени непривычный для нас факт. Ортогональная проекция прямой g_1 на прямую g_2 только тогда имеет бесконечную длину, если g_1 и g_2 па-

¹⁾ Поэтому в старых (элементарно-геометрических) учебниках гиперболической геометрии, авторы которых не пользуются в своем изложении понятием проективной плоскости, три типа пар прямых классифицируются следующим образом: 1) пересекающиеся прямые, 2) параллельные прямые, 3) прямые с общим перпендикуляром.

раллельны; но даже и в этом случае проекция одной из полу-прямых, на которые прямая g_1 разбивается произвольной точкой P , будет всегда конечной длины; доказательство этого факта непосредственно получается из черт. 144—146.

С. Зеркальные отображения. Перейдем теперь к рассмотрению *твердых преобразований*; по стр. 207 они распадаются на два семейства: движения и зеркальные отображения. Среди этих последних, которыми мы сейчас вкратце и займемся, важнейшими являются *зеркальные отражения*; при всяком зеркальном отражении некоторая точка P , лежащая вне фундаментальной кривой, и ее поляр p (ось нашего зеркального отражения) остаются точечно неподвижными, и всякая точка A переставляется с той точкой A' , которая гармонически разделяет вместе с точкой A точку P и точку пересечения поляр p



Черт. 147.

с прямой PA ; тогда AA' будет перпендикулярно p , и отрезки Ap и $A'p$ будут равны между собой. (черт. 147). Этим название „зеркальное отражение“ вполне оправдывается. То обстоятельство, что в противоположность эллиптическому случаю, зеркальные отражения не могут быть получены непрерывно (в действительной области) из исходного положения покоя, геометрически ясно из того, что при зеркальном отражении направление

обхода фундаментальной кривой меняется на обратное. Всякое зеркальное отображение может быть составлено из одного зеркального отражения и одного движения. Комбинация двух зеркальных отражений является некоторым движением; иногда бывает полезно сводить изучение движения к изучению соответствующих зеркальных отражений.

D. Движения; их классификация по неподвижным элементам; окружности. Для более близкого изучения движений целесообразно их классифицировать (как это уже делалось на стр. 125) по их неподвижным элементам. Мы имеем либо

1) во внутренней области некоторую неподвижную точку, во внешней — неподвижную прямую (полярю неподвижной точки), на самой кривой — неподвижную пару комплексно-сопряженных точек (черт. 148); или

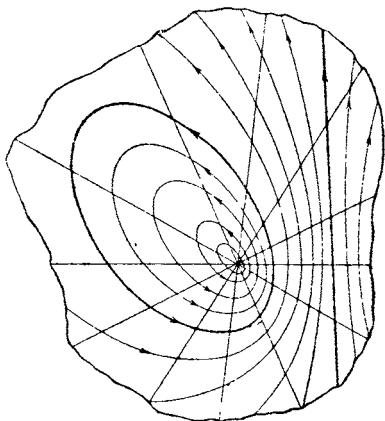
2) во внутренней области — некоторую неподвижную прямую, во внешней — неподвижную точку (ее полюс), на самой кривой неподвижную пару действительных точек (черт. 149); или

3) некоторую дважды считаемую точку на самой кривой, остающуюся неподвижной вместе со своей касательной, причем больше уже не имеется ни одного неподвижного элемента (черт. 150).

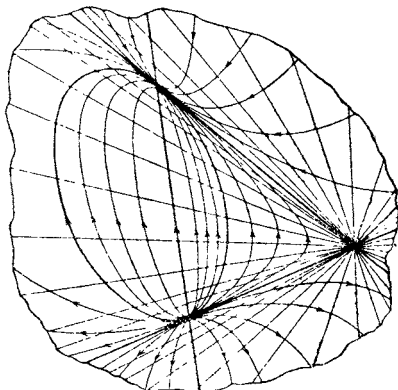
Рассмотрим прежде всего (случай первый) *всю группу* движений, оставляющих инвариантной некоторую данную лежащую во внутренней области точку P : она состоит из вращений вокруг

точки P , причем всякая окружность с центром в P , т. е. всякая кривая постоянного расстояния от точки P , переходит сама в себя; общий вид этого семейства окружностей был обстоятельно рассмотрен на стр. 122¹⁾; они покрывают собственную гиперболическую плоскость точно таким образом, как семейство концентрических окружностей евклидовой геометрии евклидову плоскость, и вообще рассматриваемые вращения ни в чем не отличаются от евклидовых вращений.

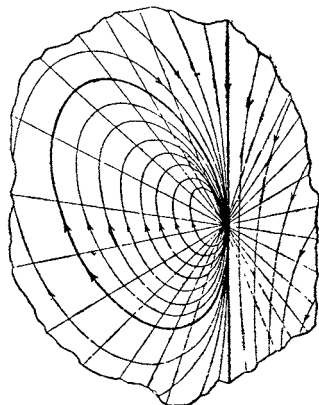
Во втором случае мы получаем также некоторую однопараметрическую группу. При движениях этой группы точки движутся по гиперциклам с (несобственным) центром P (см. стр. 197) или (если говорить только о собственных элементах) по „линиям постоянного расстояния“ от движущейся по самой себе прямой p ; именно: гиперциклы с центром в P являются одновременно линиями постоянного расстояния от полярной p точки P (что доказывается так же, как в эллиптической геометрии), и они в то же время являются ортогональными траекториями к прямым, перпендикулярным к прямой p . Отличие от эллиптического случая заключается в том, что теперь точки, удаленные от прямой p на постоянное расстояние a , образуют две линии, потому что хотя для нас всякий гиперцикл является замкнутым коническим сечением, но для жителей гиперболической плоскости он распадается на две отдельные открытые линии, так как он имеет две бесконечно удаленные точки. Рассмотренные здесь движения имеют большое сходство с параллельными переносами



Черт. 148.



Черт. 149.



Черт. 150.

¹⁾ Здесь мы интересуемся только окружностями, лежащими внутри фундаментального конического сечения.

евклидовой геометрии, только здесь траектории, за одним единственным исключением, являются не прямыми, а кривыми линиями. Полного аналога евклидовым движениям не существует.

В предельном третьем случае, при котором неподвижная точка движения лежит *на самой* фундаментальной кривой, мы укажем прежде всего на возможность следующего не слишком глубоко лежащего заблуждения. В то время как в обоих предыдущих случаях в силу инвариантности (действительных и мнимых) расстояний при рассматриваемых движениях само собой разумелось, что всякий круг с центром в неподвижной точке переходит сам в себя, теперь еще далеко не ясно, не может ли круг с центром, являющимся бесконечно удаленной точкой P (стр. 197), т. е. коническое сечение, четырежды касающееся в точке P фундаментальной прямой, перейти в *другой* гороцикл такого же рода, так как все подобные гороциклы имеют бесконечно большие радиусы. И в самом деле, среди движений, оставляющих инвариантной точку P , имеются и такие, которые оставляют инвариантной еще и вторую точку Q , а вместе с тем и всю прямую PQ , следовательно, движения, которые принадлежат к нашему второму случаю и которые, разумеется, сдвигают всякий соответствующий точке P гороцикл из его исходного положения. Чтобы получить вращения рассматриваемого гороцикла в себе, нам надо из группы *всех* движений, оставляющих инвариантной точку P , выделить подгруппу, преобразований, соответствующих третьему случаю, при которых точка P является *единственной* неподвижной точкой фундаментальной кривой. Что при этих преобразованиях всякий гороцикл с центром в точке P действительно переходит сам в себя, проще всего доказать с помощью того обстоятельства, что всякое подобное преобразование может быть составлено из двух зеркальных отражений с осями, проходящими через точку P^1 ; но при всяком подобном зеркальном отражении каждый из наших гороциклов является своим собственным образом, так как его отличная от точки P точка пересечения с осью остается неподвижной вместе с этой осью.

Итак, в то время как группа движений с неподвижной точкой P зависит только от одного параметра, если точка P лежит внутри или вне фундаментальной кривой, в предельном случае (когда точка P лежит на самой фундаментальной кривой) эта группа зависит от *двух* параметров. Это повышение числа параметров не является для нас новым; именно: *пучок прямых* с центром в точке P претерпевает в первом и во втором случае соответственно эллиптическое и гиперболическое преобразование с парой касательных в качестве фундаментального образа; в пре-

¹⁾ Именно, если A и A' — две отличные от P точки фундаментальной кривой, то существует как единственное движение этой кривой в себе, переводящее A в A' и оставляющее инвариантной только точку P , так и единственное проективное преобразование, составленное из двух зеркальных отображений указанного вида, которое вызывает это движение.

дельном случае остающиеся неподвижными прямые пучка образуют *дважды считаемую* касательную в точке P ; преобразования пучка соответствуют евклидовым движениям прямой *с включением преобразований подобия*; но среди этих последних только твердые евклидовы перемещения пучка дают преобразование фундаментальной кривой в себя, при которых точка P является единственной неподвижной точкой. Всего яснее выявляются эти обстоятельства, если выразить проективные преобразования кривой в себя посредством линейных подстановок действительного переменного λ (ср. стр. 115); если тогда точка P принадлежит значению параметра $\lambda = \infty$, то мы выделим из группы всех подстановок $\lambda = a\lambda' + b$ (которая кроме точки P оставляет инвариантной еще точку, соответствующую значению $\lambda = \frac{b}{1-a}$)

желаемую подгруппу посредством равенства $a=1$.

Е. Заключительные замечания. Мы лишь вкратце остановимся на целом ряде дальнейших предложений, которые доказываются аналогично тому, как это делалось в эллиптической геометрии. В гиперболической геометрии две окружности также могут пересекаться в четырех точках, как это видно на примере двух гиперциклов, являющихся линиями постоянного расстояния от двух пересекающихся прямых; но все же если ни один из двух кругов не является гиперциклом, то они пересекаются не более чем в двух точках. Это следует из того факта, что в случае собственного круга или предельного круга перпендикуляр, восставленный из середины хорды, всегда проходит через центр, как это читатель может доказать сам с помощью зеркального отражения относительно перпендикуляра, опущенного из центра на хорду.

Далее, теоремы о конгруэнтности доказываются без всякого труда, так как встречающиеся в эллиптическом случае затруднения здесь отпадают, как это было уже упомянуто на стр. 242. Также и здесь имеет место теорема, что два треугольника с одинаковыми углами конгруэнтны. Теоремы о точках пересечения в треугольнике точно так же легко переносятся на гиперболический случай; только рассматриваемые элементы могут частично оказаться несобственными. В заключение мы укажем еще на существенное отличие гиперболической геометрии от эллиптической и евклидовой. В то время как там сумма углов треугольника больше π или соответственно равна π , в гиперболической геометрии она всегда меньше π (стр. 221—222). В частности, здесь имеются треугольники с как угодно малой суммой углов, потому что в асимптотическом треугольнике с попарно параллельными сторонами (стр. 222) все углы равны нулю, так что сумма углов собственного треугольника может быть как угодно мала, если только стороны взять достаточно большими.

§ 4. Теория кривых второй степени в плоской неевклидовой геометрии ¹⁾

Единственные образы, которые мы до сих пор рассматривали на неевклидовой плоскости, были точки, прямые и окружности. Теперь мы рассмотрим вкратце следующие по сложности образы, именно кривые второго порядка.

Образы второго порядка мы будем определять независимо от положенного в основу мероопределения посредством того требования, чтобы проективные координаты их точек удовлетворяли однородному уравнению второй степени. Вместо этого можно дать также соответствующие геометрические определения.

Мы начнем с классификации кривых второго порядка в рассматриваемых трех геометриях, причем мы будем предполагать, что кривые не вырождаются ни в пару прямых, ни в дважды взятую прямую. Эта классификация получается с помощью вейерштрассовой теории элементарных делителей. Мы ограничимся лишь наглядным изложением результатов, причем в скобках мы будем указывать число тех точек и касательных рассматриваемых кривых, которые принадлежат одновременно и фундаментальному образу.

В *эллиптической геометрии* существует два типа кривых второго порядка:

1. *Эллипс* (четыре мнимые точки, четыре мнимые касательные).
2. *Окружность* (две дважды взятые мнимые точки и касательные).

В *евклидовой геометрии* существует четыре различных типа ²⁾.

1. *Гипербола* (две дважды считааемые действительные точки и четыре мнимые касательные).
2. *Эллипс* (две дважды считааемые мнимые точки и четыре мнимые касательные).
3. *Парабола* (четырежды считааемая действительная точка и касательная).
4. *Окружность* (две дважды взятые мнимые точки и две дважды взятые мнимые касательные).

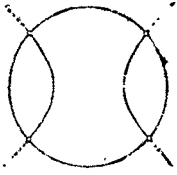
В *гиперболической геометрии* мы получаем 11 различных типов ³⁾, изображенных на черт. 151 — 161; при этом фундаментальный образ изображается всегда окружностью одного и того же радиуса (если на одно мгновение рассматривать эти чертежи с евклидовой точки зрения).

После этих сопоставлений мы можем кривые второго порядка в обеих неевклидовых геометриях распределить по трем различным классам:

¹⁾ Ср. Coolidge, The element of non-euclidean geometry, Oxford, Clarendon Press, 1909.

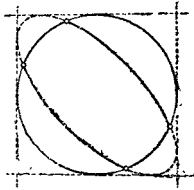
²⁾ Мы должны напомнить, что бесконечно удаленная прямая считается дважды взятой, так что всякая ее точка пересечения с рассматриваемой кривой должна иметь кратность или 2, или 4.

³⁾ Здесь приводятся лишь те конические сечения, которые по крайней мере частично содержат собственные точки.



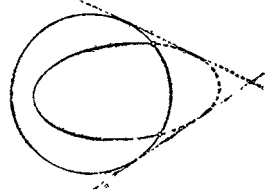
Черт. 151.

1. Выпуклая гипербола (четыре действительных точки, четыре мнимых касательных).



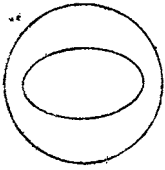
Черт. 152.

2. Вогнутая гипербола (четыре действительных точки, четыре действительных касательных).



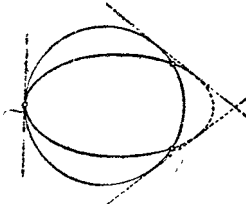
Черт. 153.

3. Полугипербола (две действительных и две мнимых точки, две действительных и две мнимых касательных).



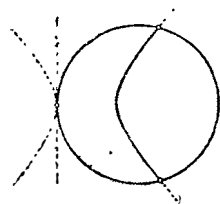
Черт. 154.

4. Эллипс (четыре мнимых точки, четыре мнимых касательных).



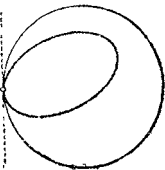
Черт. 155.

5. Вогнутая гиперболическая парабола (две совпавших и две различных действительных точки, две совпавших и две различных действительных касательных).



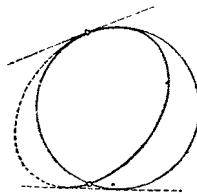
Черт. 156.

6. Выпуклая гиперболическая парабола (две совпавших и две различных действительных точки, две совпавших и две различных мнимых касательных).



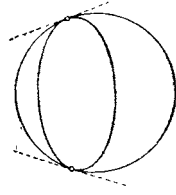
Черт. 157.

7. Эллиптическая парабола (две совпавших и две мнимых точки, две совпавших и две мнимых касательных).



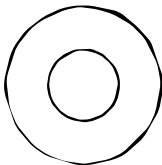
Черт. 158.

8. Соприкасающаяся парабола (три совпавших точки и касательных, одна действительная точка и одна действительная касательная).



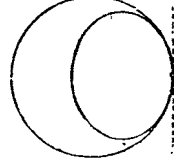
Черт. 159.

9. Окружность с центром вне фундаментального конического сечения (две пары совпавших действительных точек пересечения и касательных).



Черт. 160.

10. Окружность с центром внутри фундаментального конического сечения (две пары совпавших мнимых точек пересечения и касательных).



Черт. 161.

11. Окружность с центром на фундаментальном коническом сечении (четыре совпавших действительных точек пересечения и четыре совпавших действительных касательных).

А. Кривые с четырьмя различными фундаментальными точками и касательными. Эти кривые мы будем называть *центральными коническими сечениями*, так как они, как это мы сейчас увидим, имеют определенные *центры*.

В. Кривые, имеющие либо одну дважды считаемую и две различные, либо одну трижды считаемую фундаментальную точку или соответственно касательную. Эти образы мы будем называть *параболами*.

С. Кривые, имеющие либо две дважды считаемые, либо одну четырежды считаемую фундаментальную точку или соответственно касательную. Эти образы, которые мы будем называть *окружностями*, точно так же имеют один центр, но, кроме того, обладают еще и другими свойствами симметрии. (Мы их не будем причислять к „центральных“ коническим сечениям.)

Сейчас мы приведем некоторые предложения из *теории центральных конических сечений*, так как мы здесь получаем особенно простые соотношения. Следовательно, мы ограничиваемся в эллиптической геометрии лишь эллипсами, а в гиперболической геометрии — выпуклыми гиперболами, вогнутыми и гиперболами, полугиперболами и эллипсами. Для теории этих конических сечений основное значение имеет теорема о том, что *рассматриваемое коническое сечение и фундаментальная кривая всегда однозначно определяют треугольник, который относительно этих кривых является полярным треугольником*. Исследования в действительной области показывают, что этот полярный треугольник в случае эллиптической геометрии всегда действителен; в гиперболической же геометрии в случае выпуклой или вогнутой гиперболы он также действителен, тогда как в случае полугиперболы он частично является мнимым. В системе координат, основанной на этом полярном треугольнике, уравнения фундаментального конического сечения или, соответственно, центральной кривой второго порядка принимают следующий простой вид:

$$\bar{a}_{11}x_1^2 + \bar{a}_{22}x_2^2 + \bar{a}_{33}x_3^2 = 0; \bar{a}_{ii} \neq 0; \text{ соотв. } \bar{b}_{11}x_1^2 + \bar{b}_{22}x_2^2 + \bar{b}_{33}x_3^2 = 0; \bar{b}_{ii} \neq 0.$$

Теперь рассмотрим следующие взаимно двойственные предложения:

В эллиптической и гиперболической геометриях вершины полярного треугольника, который центральное коническое сечение имеет общим с фундаментальной кривой, являются *центрами центрального конического сечения*. Каждый из таких центров делит пополам все отрезки, оп-

В эллиптической и гиперболической геометриях стороны полярного треугольника, который центральное коническое сечение имеет общим с фундаментальной кривой, являются *осями центрального конического сечения*. Каждая из таких осей делит пополам все углы, образованные

ределяемые проходящими через него прямыми и коническим сечением; соответствующая вторая серединная точка лежит всегда на противоположной стороне полярного треугольника.

касательными к коническому сечению, выходящими из лежащей на ней точки; соответствующая вторая биссектриса всегда проходит через противоположную вершину полярного треугольника.

Доказательство мы приведем только для предложения, стоящего слева. Всякая прямая, проходящая через вершину $1:0:0$ полярного треугольника, имеет уравнение $x_2:x_3=\lambda$. Две точки пересечения с коническим сечением $b_{11}x_1^2 + b_{22}x_2^2 + b_{33}x_3^2 = 0$ имеют координаты:

$$x_1 : x_2 : x_3 = + \sqrt{-(\lambda^2 b_{22} + b_{33})} : \lambda \sqrt{b_{11}} : \sqrt{b_{11}}$$

и

$$y_1 : y_2 : y_3 = - \sqrt{-(\lambda^2 b_{22} + b_{33})} : \lambda \sqrt{b_{11}} : \sqrt{b_{11}},$$

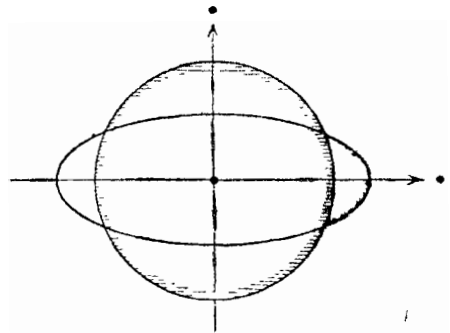
причем корни всюду берутся положительные. Но середина отрезка x, y по стр. 233 имеет координаты:

$$0 : 2\lambda \sqrt{b_{11}} : 2\sqrt{b_{11}} = 0 : \lambda : 1 \quad \text{и} \quad 2\sqrt{-(\lambda^2 b_{22} + b_{33})} : 0 : 0 = 1 : 0 : 0,$$

так как в этом случае $\Omega_{xx} = \Omega_{yy}$. Следовательно, эти точки имеют как раз то самое положение, как это утверждается в нашей теореме.

Чтобы сделать более наглядными обе рассматриваемые теоремы, мы изображаем на черт. 162 фундаментальный образ в виде окружности (на одно мгновение мы рассматриваем этот чертеж с евклидовой точки зрения), а центральное коническое сечение — в виде вогнутой гиперболы. Общий полярный треугольник состоит из двух взаимно перпендикулярных прямых черт. 162 и из (с евклидовой точки зрения) бесконечно удаленной прямой. Из центров лишь один лежит внутри фундаментального конического сечения; два других являются несобственными точками. Аналогичным образом выпуклая гиперболоид и эллипс гиперболической геометрии имеют также один единственный собственный центр. В эллиптической геометрии, напротив, все три центра являются собственными точками.

Далее, мы хотим обратить внимание на то, что центр и противоположащая ось являются полюсом и полярной относительно



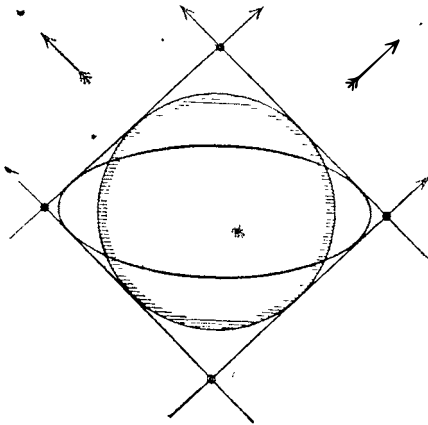
Черт. 162. Три центра и три оси вогнутой гиперболы

фундаментального конического сечения; следовательно, все точки оси ортогональны противоположащему центру.

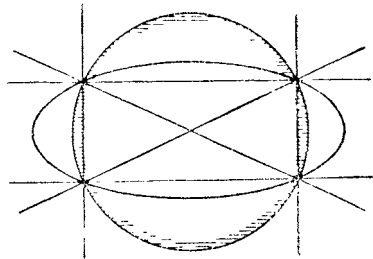
В евклидовой геометрии фокусы конического сечения могут быть определены как точки пересечения обеих пар касательных, проведенных к коническому сечению из обеих круговых точек. Эти касательные определяют четыре точки пересечения, из которых, однако, только две являются действительными; обе мнимые точки пересечения при элементарном рассмотрении не принимаются во внимание. Это нас приводит к следующим двум определениям:

Центральное коническое сечение эллиптической и гиперболической геометрий определяет вместе с фундаментальным образом четыре касательные (их общие касательные). Шесть точек пересечения этих четырех касательных называются *фокусами* (черт. 163).

Центральное коническое сечение эллиптической и гиперболической геометрий определяет вместе с фундаментальным образом четыре точки (их точки пересечения). Шесть прямых, соединяющих эти четыре точки пересечения, называются *фокусными линиями* (черт. 164).



Черт. 163. Шесть фокусов вогнутой гиперболы.



Черт. 164. Шесть фокальных линий вогнутой гиперболы.

Далее, мы приведем без доказательства следующие предложения:

В эллиптической и гиперболической геометриях на всякой оси центрального конического сечения лежат два фокуса.

В эллиптической и гиперболической геометриях сумма

В эллиптической и гиперболической геометриях через всякий центр центрального конического сечения проходят две фокусные линии.

В эллиптической или гиперболической геометрии сум-

расстояний действительных точек *эллипса* от двух действительных фокусов, лежащих на одной и той же оси, является постоянной.

В гиперболической геометрии разность расстояний действительных точек каждой из *трех гипербол* от двух действительных фокусов, лежащих на одной и той же оси, является постоянной.

ма углов, образованных действительными касательными *эллипса* или соответственно *выпуклой гиперболы* с двумя действительными фокусными линиями, проходящими через один и тот же центр, является постоянной.

В гиперболической геометрии разность углов, образованных действительными касательными *вогнутой гиперболы* или *полугиперболы* с двумя действительными фокусными линиями, проходящими через один и тот же центр, является постоянной.

§ 5. Эллиптическая геометрия пространства

А. Общие замечания. Пространственная эллиптическая геометрия во многих пунктах столь сходна с плоской эллиптической геометрией, что мы лишь бегло коснемся некоторых вопросов. Таковы, например, предложения об опускании перпендикуляра; только теперь полярной точки является уже плоскость. Также и общий вид семейства концентрических шаров совершенно аналогичен общему виду соответствующего семейства кругов на плоскости: шары с центром в данной точке неограниченно приближаются с возрастанием радиуса к полярной плоскости этой точки и, наконец, покрывают ее дважды; при этом сама полярная плоскость рассматривается как шаровая поверхность радиуса ∞ . Группа вращений, переводящих каждый из шаров этого семейства в себя, выглядит совершенно так же, как и евклидова группа вращений, потому что подстановки переменных x_1, x_2, x_3 , преобразующие форму $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$ в себя, изображают (если мы будем истолковывать x_1, x_2, x_3 как декартовы прямоугольные координаты) евклидовы вращения вокруг точки $0, 0, 0$, в то время как те же подстановки (если мы $x_1 : x_2 : x_3 : x_4$ будем рассматривать как проективные координаты) изображают эллиптические вращения вокруг точки $0:0:0:1$; при этом фундаментальный образ имеет уравнение $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 0$. В самом деле, очевидно, что подстановки, которые переводят в себя первое уравнение, обладают тем же свойством и относительно второго уравнения, если мы дополним их подстановкой $x_4 = x_4'$.

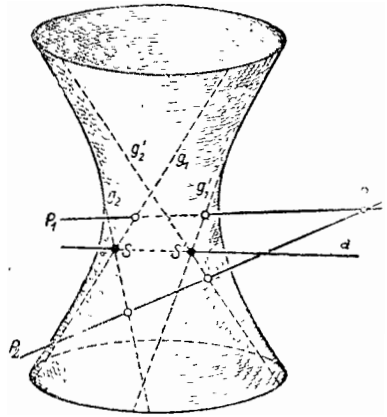
Отличие от случая плоскости заключается в том, что здесь существуют зеркальные отображения (ср. стр. 206); в частности (определенные аналогично тому, как на стр. 236), **зеркальные отображения** здесь уже не являются движениями.

В. Клиффордовы параллели и сдвиги. Важное обстоятельство отличает пространственную эллиптическую геометрию от обеих плоских неевклидовых геометрий и также от пространственной гиперболической геометрии. Оно касается появления известного рода *параллельных прямых*. Правда, в гиперболической геометрии можно определить параллельность двух действительных прямых, называя параллельными всякие две прямые, проходящие через одну и ту же точку фундаментального образа (ср. стр. 243—244), но при этом определении будет потеряно самое прекрасное свойство евклидовых параллелей. Это свойство, наличие которого позволяет построить евклидову геометрию с такой исключительной простотой, заключается в том, что *существуют движения пространства — параллельные сдвиги, — заставляющие одновременно все прямые любого данного семейства параллелей скользить по себе*. В пространственной эллиптической геометрии возможно такое определение параллельности, которое также обладает этим важным свойством.

Обратимся к § 3 гл. III. В соответствии с приведенными там соображениями всякое (действительное) движение эллиптического пространства может рассматриваться как результат двух однозначно определенных (действительных) сдвигов, из которых один является сдвигом первого рода, а другой второго рода¹⁾. При этом сдвиг первого (второго) рода определяется как движение, при котором всякая прямая второго (первого) семейства образующих нулевой фундаментальной поверхности переходит в себя, в то время как в первом (втором) семействе остаются инвариантными две комплексно-сопряженные прямые, и притом точно. Эти две мнимые прямые определяют собой линейную конгруэнцию действительных прямых, т. е. через всякую действительную точку пространства проходит в точности одна действительная прямая, пересекающая обе фиксированные прямые; вследствие этого всякая подобная действительная прямая переходит при сдвиге сама в себя. Все сдвиги подобной конгруэнции прямых в себя образуют непрерывное семейство, чрезвычайно похожее на группу *параллельных сдвигов* евклидова пространства в некотором определенном направлении. На эту аналогию впервые указал английский математик Клиффорд (Clifford) в 1873 г. в сборнике Британской ассоциации; поэтому прямые указанной конгруэнции называются *клиффордовыми параллелями*, а соответствующие сдвиги — *клиффордовыми сдвигами*. При этом две прямые называют параллелями „первого или второго рода“ в зависимости от того, принадлежат ли обе пересекающие их комплексно-сопряженные образующие фундаментальной поверхности к первому или второму семейству образующих, следовательно, в зависимости от того, возможен ли вдоль обеих параллелей сдвиг первого или второго рода. Зна-

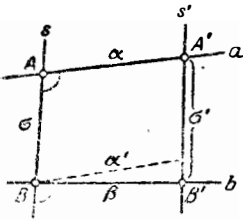
¹⁾ Оба рода сдвигов совершенно равноправны, поэтому их нумерация произвольна.

чит, чтобы получить клиффордову параллель к прямой a , первого (второго) рода, проходящую через точку P надо определить обе точки пересечения S и S' прямой a с фундаментальной поверхностью (черт. 165) и найти обе образующие первого (второго) семейства, которые проходят через точки S и S' . Тогда искомая параллель однозначно определится как та прямая, проходящая через точку P , которая пересекает обе эти образующие первого (второго) рода. Итак, вообще говоря, через точку P проходят две клиффордовы параллели к прямой a ; только если точка P лежит на сопряженной поляре a' прямой a (на черт. 165 это была бы та прямая, которая соединяет точки пересечения прямых g_1 и g_2' с точкой пересечения прямых g_1' и g_2), обе проходящие через точку P параллели сливаются вместе, именно в прямую a' . Далее, из приведенного построения непосредственно вытекает, что клиффордова параллель к прямой a никогда не лежит в одной плоскости с прямой a , но всегда скрещивается с этой прямой.



Черт. 165.

Пусть теперь a, b будут двумя параллелями первого рода и A, B —двумя точками на них, которые соединены отрезком σ (черт. 166); будем непрерывно производить сдвиг первого рода, причем точки A и B , будут пробегать отрезки α и β до точек A' и B' , а отрезок σ перейдет в отрезок σ' ; тогда отрезки σ и σ' будут одинаковой длины. Так как точки, в которых содержащая отрезок σ прямая s пересекает фундаментальную поверхность, перемещаются по образующим второго семейства, то прямая s' , содержащая отрезок σ' , будет параллелью второго рода к прямой s . Если, с другой стороны, мы теперь произведем сдвиг второго рода вдоль s так, чтобы точка A перешла в точку B , то отрезок a' , в который переходит отрезок a , должен лежать своими концами на прямых



Черт. 166.

s и s' и быть параллелью первого рода к прямой a , т. е. принадлежать прямой b , следовательно, α' должен совпадать с β и, значит, α и β должны быть также одинаковой длины. Далее, из выполнимости обоих сдвигов видно, что всякие два угла нашего четырехугольника $ABBA'$, прилегающие к одной и той же стороне, дополняют друг друга до π , потому что отмеченные на черт. 166 углы при сдвиге второго рода приходят в совпадение и, следовательно, являются конгруэнтными

Итак, рассматриваемый четырехугольник обладает всеми свойствами параллелограмма евклидовой геометрии: *всякая пара противоположных сторон имеет одинаковую длину и параллельна* (но необходимо отметить, что одна пара сторон образована параллелями первого рода, другая же — параллелями второго рода); *всякие два соседних угла дополняют друг друга до π* , поэтому сумма всех углов равняется 2π . Существенное отличие от евклидова случая заключается в том, что клиффордов параллелограмм *не является плоским*. Тем не менее ясно, что наш термин „параллельность“ все же оказывается вполне оправданным.

Далее, из только что доказанного равенства $\alpha = \beta$ следует, что при всяком сдвиге длины отрезков, проходящих любыми точками пространства, одинаковы — совершенно так же, как и в евклидовой геометрии. Дальнейшая аналогия получается следующим образом. В нашем параллелограмме $ABB'A'$ мы можем прежде всего угол при вершине A взять прямым; тогда, как это легко можно доказать, угол при вершине B будет также прямым; отсюда следует: *две клиффордовы параллели имеют, вообще говоря, ∞^1 общих перпендикуляров*. Мы можем также сказать, если под расстоянием от точки до прямой будем понимать длину перпендикуляра, опущенного из этой точки на прямую, что *две клиффордовы параллели находятся на постоянном расстоянии друг от друга*. При этом здесь особую роль играют пары сопряженных поляр, которые всегда параллельны; все, т. е. ∞^2 , пересекающие их прямые являются общими перпендикулярами к ним, и каждая точка первой из них находится от каждой точки второй на одном и том же расстоянии с_{еп}. Пусть читатель сам убедится в том, что две непараллельные прямые имеют всегда в точности два общих перпендикуляра¹⁾, так что относительно общих перпендикуляров следует различать три случая возможных пар прямых: 1) непараллельные прямые, 2) параллельные, но не полярно-сопряженные прямые, 3) сопряженные поляры.

Наконец, мы отметим следующие важные факты, которые получаются непосредственно из определений. *Всегда существует в точности один сдвиг первого и один сдвиг второго рода, переводящие данную точку в другую данную точку. Всякий сдвиг не имеет ни одной неподвижной точки. Комбинирование двух сдвигов одного и того же рода дает опять сдвиг того же рода.*

1) Пусть a и b — две непараллельные прямые; a' и b' — их сопряженные поляры. Рассмотрим кольцеобразную поверхность, на которой лежит семейство прямых, пересекающих прямые a , b и a' . Эта поверхность пересекается прямой b' в двух точках; проходящие через них прямые рассматриваемого семейства и являются искомыми перпендикулярами. При этом эти перпендикуляры действительны, так как для точек обеих прямых a и b должны иметься два экстремальных значения расстояния, посредством которых оба перпендикуляра определяются как действительные прямые.

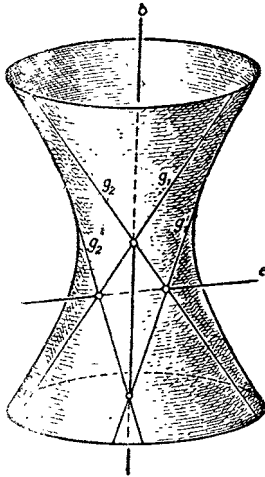
Не представляет никаких затруднений определить клиффордовы параллели посредством формул. Тогда с их помощью рассматриваемые прямые можно определить также и в комплексной области. Так как эллиптическая и гиперболическая геометрии в комплексной области между собой тождественны — ведь различие между ними появляется лишь при учетывании соотношений действительности, — то вследствие этого клиффордовы параллели определяются также и в гиперболической геометрии, но, разумеется, здесь клиффордовы параллели для действительных прямых всегда мнимы. Следовательно, в то время как обычные параллели для действительной прямой, т. е. те прямые, которые имеют одну и ту же бесконечно удаленную точку, в гиперболической геометрии действительны, а в эллиптической геометрии, напротив, мнимы, мы находим, что, наоборот, клиффордовы параллели для действительных прямых в эллиптической геометрии действительны, а в гиперболической геометрии — мнимы. Если мы эллиптическую или гиперболическую геометрию будем непрерывно переводить в евклидову геометрию, то оба типа параллелей перейдут в евклидовы параллели; поэтому в этих последних соединяются свойства обоих рассматриваемых типов параллелей. Так как мы, вообще говоря, ограничиваемся действительными соотношениями (ср. стр. 57—58), то обычные параллели играют роль лишь в гиперболической геометрии, клиффордовы же параллели, напротив, лишь в эллиптической геометрии. Обе геометрии можно построить синтетически, основываясь на теории этих параллелей¹⁾.

С. Произвольные движения, в частности вращения. Рассмотрим теперь общее движение \mathfrak{B} , не являющееся сдвигом. Оно может быть составлено (ср. стр. 130 и 133) из сдвига \mathfrak{S}_1 первого рода вдоль семейства параллелей A_1 и сдвига \mathfrak{S}_2 второго рода вдоль семейства параллелей A_2 . Семействам A_1 и A_2 соответствует по паре образующих g_1, g_1' и g_2, g_2' фундаментальной поверхности (черт. 167). Обе действительные диагонали b и c пространственного четырехугольника, образованного прямыми g_1, g_1', g_2, g_2' , являются сопряженными полярами и принадлежат обе как семейству A_1 , так и семейству A_2 . Они являются (так как прямые g_1, g_1', g_2, g_2' суть единственные неподвижные прямые на поверхности) *единственными действительными прямыми, переходящими при нашем движении сами в себя*. Мы их назовем „осями“ движения.

В случае если существует действительная неподвижная точка, то она должна лежать на одной из осей. Как же может возникнуть неподвижная точка P ? Точка P при сдвиге \mathfrak{S}_1 вдоль проходящей через нее прямой из конгруэнции A_1 передвигается

¹⁾ Hilbert, Neue Begründung der Bolyai-Lobatschewskyschen (d. h. hyperbolischen) Geometrie, „Math. Abh.“, т. 57, 1903; вновь переиздано в Hilbert, Grundlagen der Geometrie, Anhang III. Vogt, Synthetische Theorie der Cliffordschen Parallelen und der linearen Linienörter des elliptischen Raumes, Habilitationsschrift, Карlsruhe 1909.

в некоторую точку P_1 ; при сдвиге \mathcal{S}_2 точка P_1 должна возвратиться вдоль той же прямой опять в точку P ; но это означает: прямые, проходящие через точку P и принадлежащие семействам A_1 и A_2 , совпадают, следовательно, точка P лежит на одной из осей. Но так как эта ось имеет теперь уже три неподвижные точки, то она должна оставаться *точечно* неподвижной; движение является *вращением* вокруг нее, потому что

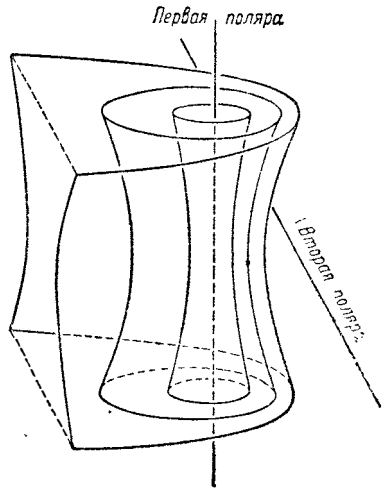


Черт. 167.

всякая перпендикулярная к ней плоскость переходит сама в себя и в каждой из этих плоскостей движение является вращением вокруг точки пересечения с осью вращения. При этом вторая ось, которая принадлежит всем этим плоскостям, переходит сама в себя, — как мы знаем из эллиптической геометрии на плоскости (см. стр. 235 — 236), только тогда *точечно*, когда угол вращения является кратным π . Объединим вместе полученные результаты: *всякое движение, не являющееся сдвигом, имеет две взаимно полярно-сопряженные оси; они являются единственными прямыми, переходящими сами в себя. Если существует неподвижная точка, то одна из осей остается точечно неподвижной, и мы имеем вращение вокруг этой оси. Если угол поворота равен π , то также и вторая ось остается точечно неподвижной, и мы можем получить тот же результат посредством вращения вокруг этой второй оси.*

Как всякое движение, так и вращение может быть составлено из двух сдвигов. Имеет место следующее предложение: *вращение имеет место тогда и только тогда, когда отрезки, проходимые точками при обоих сдвигах, на которые разлагается движение, имеют одинаковую длину.* То, что два сдвига \mathcal{S}_1 и \mathcal{S}_2 , при которых точки проходят отрезки одинаковой длины, всегда порождают вращение, получается следующим образом. Если бы это утверждение *не было* выполнено, то каждый из двух сдвигов \mathcal{S}_1 и \mathcal{S}_2 должен был бы сдвигать обе оси в одном и том же направлении на одинаковые отрезки (потому что, с одной стороны, при всяком сдвиге по стр. 236 отрезки, проходимые всеми точками пространства, имеют одинаковую длину; с другой стороны, каждый из двух сдвигов каждую ось сдвигает в одном и том же направлении, так как в противном случае комбинация сдвигов наверное давала бы вращение). Вместе с тем комбинация сдвига \mathcal{S}_1 и сдвига \mathcal{S}_2^{-1} , обратного сдвигу \mathcal{S}_2 , должна бы оставлять обе оси *точечно* неподвижными, так что движение $\mathcal{V} = \mathcal{S}_1 \cdot \mathcal{S}_2^{-1}$ было бы вращением на угол π . Но это невозможно, так как рассматриваемое движение непрерывно изменяется с изменением отрезка, проходимого точками при сдвиге \mathcal{S}_1 .

Движение без неподвижных точек, не являющееся сдвигом, мы назвали на стр. 142 винтообразным движением. Двухпараметрическая группа всех движений с двумя неподвижными осями переводит в себя каждую из ранее рассмотренных (на стр. 136—137) кольцеобразных поверхностей, имеющих с фундаментальной поверхностью общий тангенциальный тетраэдр, соответствующий этим осям¹⁾ (черт. 168). Эти поверхности, которые называются *клиффордовыми поверхностями* (Клиффорд первый обратил на них внимание математиков), по многим причинам вызывают особый интерес, так что мы посвятим им особый параграф (§ 6).



Черт. 168.

Д. Гамильтоновы кватернионы и группа эллиптических движений пространства. В этом разделе мы вкратце займемся одним изящным вспомогательным средством для аналитического изображения пространственных эллиптических движений, которое особенно удобно при изучении *комбинаций* нескольких движений, т. е. *теоретико-групповых* свойств. Оно заключается в использовании *гамильтоновых кватернионов*. Мы предполагаем их теорию уже известной²⁾ и только напомним их определение и важнейшие свойства.

Кватернион:

$$a = a_1 + a_2i + a_3j + a_4k$$

является гиперкомплексным числом с четырьмя единицами 1, *i*, *j*, *k*, между которыми имеются соотношения:

$$\begin{aligned} i^2 = j^2 = k^2 = -1, \quad ij = -ji = k, \\ jk = -kj = i, \quad ki = -ik = j; \end{aligned}$$

этими соотношениями определяются все действия над кватернионами, так как имеет место ассоциативный и дистрибутивный законы. Компоненты a_1, a_2, a_3, a_4 являются действительными числами. Коммутативный закон умножения здесь не имеет места, т. е., вообще говоря,

$$ab \neq ba.$$

¹⁾ На черт. 168 обе оси обозначены как первая и вторая поляра.

²⁾ Подробно изложение ее имеется в т. I „Elementarmathematik“ Глейна, Берлин, Julius Springer, 1924.

Для всякого кватерниона $a = a_1 + a_2i + a_3j + a_4k$ существует в точности один кватернион $1:a = a^{-1}$, удовлетворяющий уравнению $a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = 1$; он с точностью до действительного множителя совпадает с кватернионом $\bar{a} = a_1 - a_2i - a_3j - a_4k$, называемым кватернионом „сопряженным“ с a . Относительно сопряженных кватернионов имеет место формула $(\overline{ab}) = \bar{b} \cdot \bar{a}$.

Пусть $x = \xi_1 + \xi_2i + \xi_3j + \xi_4k$, $x' = \xi'_1 + \xi'_2i + \xi'_3j + \xi'_4k$ и $a = a_1 + a_2i + a_3j + a_4k$. Рассмотрим теперь уравнение $x = ax'$, выполним умножение в правой части и заменим получившееся таким образом кватерниональное уравнение четырьмя соответствующими уравнениями в компонентах. Тогда мы получим, что ξ_λ являются линейными однородными комбинациями ξ'_λ ; матрицей этой подстановки является матрица:

$$\begin{vmatrix} a_1 - a_2 - a_3 - a_4 & & & \\ a_2 & a_1 - a_4 & a_3 & \\ a_3 & a_4 & a_1 - a_2 & \\ a_4 - a_3 & a_2 & a_1 & \end{vmatrix}.$$

Если же $x = x'a$, то ξ'_λ претерпевают подстановку с матрицей:

$$\begin{vmatrix} a_1 - a_2 - a_3 - a_4 & & & \\ a_2 & a_1 & a_4 - a_3 & \\ a_3 - a_4 & a_1 & a_2 & \\ a_4 & a_3 - a_2 & a_1 & \end{vmatrix}.$$

Но оба типа этих подстановок являются как раз теми подстановками, которые по стр. 134 изображают сдвиги эллиптического пространства соответственно второго и первого рода, если фундаментальный образ имеет уравнение $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 0$.

Это приводит нас к следующему способу аналитического изображения эллиптических движений. Каждой точке $x_1 : x_2 : x_3 : x_4$ эллиптического пространства ставим в соответствие кватернион:

$$x = x_1 + x_2i + x_3j + x_4k;$$

следовательно, каждой точке соответствует бесчисленное множество кватернионов, которые получаются один из другого посредством умножения на действительный отличный от нуля множитель и которые мы будем называть *несущественно отличающимися друг от друга*. Далее, мы можем всякому сдвигу первого или второго рода поставить в соответствие (определенный точно так же лишь с точностью до действительного множителя) кватернион $a = a_1 + a_2i + a_3j + a_4k$; значение компонент получается непосредственно путем сравнения установленных на стр. 134 уравнений сдвига с только что найденными матрицами.

При этом компоненты кватерниона:

$$x = ax' \quad \text{или} \quad x^* = x'a$$

будут являться координатами точки, в которую переходит точка, соответствующая кватерниону x' , при сдвиге второго или первого рода, соответствующем кватерниону a . Из $bx = b(ax') = (ba)x'$ явствует, что при комбинировании двух сдвигов одного и того же рода соответствующие кватернионы перемножаются. *Итак, сдвиги первого и второго рода можно таким образом поставить во взаимно однозначное соответствие с существенно различными кватернионами, что соответствующая группа сдвигов первого и второго рода будет соответствовать группе правого и левого умножения этих кватернионов.* Далее, на основе того, что всякое движение может быть разложено на два сдвига, можем высказать следующую теорему: *всякое произвольное движение может быть изображено посредством кватернионального уравнения $x = ax'b$.*

Вместе с тем мы получили такое представление группы сдвигов, которое дает нам возможность очень удобным образом проследить аналитическим путем комбинирование нескольких движений. Но мы можем также изобразить наглядно геометрически эту группу, установив простую связь с группой евклидовых вращений шара.

Именно, рассмотрим среди всех наших движений, изображаемых уравнениями $x = ax'b$, те движения, которые оставляют неподвижной точку $1:0:0:0$; это будут те движения, для которых $a \cdot 1 \cdot b = ab$ является действительным, так что $b = \gamma a$, причем γ действительно. Поэтому вращения вокруг точки $1:0:0:0$ изображаются уравнениями вида $x = ax'a$; вместе с тем им поставлены во взаимно однозначное соответствие существенно различные между собой кватернионы a , и комбинированию этих движений соответствует кватерниональное умножение, так как $bx = b(ax'a) = (ba)x'$ (см. стр. 261). Но по стр. 255 эллиптические вращения вокруг данной точки ничем не отличаются от евклидовых вращений шара; поэтому мы получаем следующее предложение: *вращениям шара в евклидовой геометрии можно поставить во взаимно однозначное соответствие существенно различные между собой кватернионы и сдвиги каждого из обоих родов так, что соответствующие группы будут между собой изоморфны.* В изоморфизме группы сдвигов и евклидовой группы вращений и заключается упомянутая выше геометрическая возможность наглядного изучения комбинаций эллиптических движений. Знание этого изоморфизма весьма полезно, потому что с его помощью, например, легко определить *конечные*, т. е. состоящие лишь из конечного числа движений, *группы движений* пространственной эллиптической геометрии ¹⁾.

¹⁾ Эти группы играют важную роль в вопросах, рассматриваемых в гл. IX. Ср., например, H. Noth, Zum Clifford-Kleinschen Raumproblem, „Math. Ann.“, т. 95, 1925.

§ 6. Клиффордовы поверхности

А. Их простейшие свойства. Упомянутые на стр. 261 клиффордовы поверхности, имеющие с фундаментальной поверхностью общий касательный тетраэдр, обладают целым рядом весьма интересных и важных свойств, которые открывают совершенно новый круг проблем. Прежде всего резюмируем еще раз то, что нам уже известно о клиффордовых поверхностях из наших прежних рассмотрений, и то, что из них непосредственно вытекает.

Клиффордовы поверхности являются кольцообразными поверхностями второго порядка; прямые каждого из двух семейств прямолинейных образующих на них параллельны между собой; прямые из одного семейства являются параллелями первого рода, прямые из другого семейства — параллелями второго рода. Две любые пары подобных параллелей образуют клиффордов параллелограм. Поэтому прямые обоих семейств пересекаются между собой под постоянным углом θ ; нетрудно видеть, что если положить в основу фундаментальный образ $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 0$, то уравнение

$$\frac{x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 - x_4^2}{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2} = \cos \theta$$

определяет как раз такую клиффордову поверхность. В самом деле, прежде всего, определенная этим уравнением поверхность действительно является клиффордовой поверхностью, так как она имеет с фундаментальным образом общий касательный тетраэдр, образованный четырьмя прямыми $x_1 \pm ix_2 = 0$, $x_3 \pm ix_4 = 0$ (причем возможны все комбинации знаков). Чтобы убедиться в том, что ее образующие пересекаются под углом θ , возьмем на поверхности произвольную точку P , например точку с координатами $0, \cos \frac{\theta}{2}, 0, \sin \frac{\theta}{2}$. Так как уравнение поверхности можно написать в виде:

$$(x_1^2 + x_2^2) \sin^2 \frac{\theta}{2} - (x_3^2 + x_4^2) \cos^2 \frac{\theta}{2} = 0,$$

а следовательно, уравнение полярной плоскости точки $\xi_1 : \xi_2 : \xi_3 : \xi_4$ в виде:

$$(\xi_1 x_1 + \xi_2 x_2) \sin^2 \frac{\theta}{2} - (\xi_3 x_3 + \xi_4 x_4) \cos^2 \frac{\theta}{2} = 0,$$

то уравнение

$$x_2 \sin \frac{\theta}{2} - x_4 \cos \frac{\theta}{2} = 0$$

изображает касательную плоскость в точке P . Поэтому координаты точек проходящей через точку P пары образующих клиффордовой поверхности, т. е. линии пересечения ее с касательной

плоскостью, удовлетворяют (как это получается посредством комбинирования уравнений поверхности и касательной плоскости) уравнению:

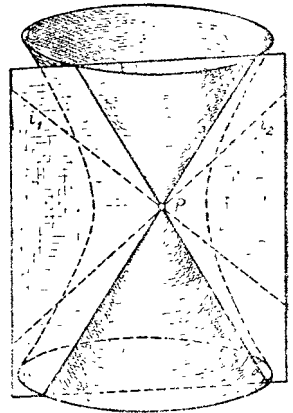
$$x_1^2 \sin^2 \frac{\theta}{2} - x_3^2 \cos^2 \frac{\theta}{2} = 0,$$

которое можно также переписать в виде:

$$\left(x_1 + \operatorname{ctg} \frac{\theta}{2} \cdot x_3\right) \left(x_1 - \operatorname{ctg} \frac{\theta}{2} \cdot x_3\right) = 0.$$

Теперь нам остается только вычислить угол, образованный этими прямыми в рассматриваемой эллиптической геометрии. Для этого найдем прежде всего обе изотропные прямые i_1 и i_2 , лежащие в рассматриваемой касательной плоскости и проходящие через точку P (ср. схематический черт. 169). Если рассматривать значения x_1, x_2, x_3 , которые принимают первые три из четырех пространственных координат x_1, x_2, x_3, x_4 в нашей касательной плоскости, как координаты в этой плоскости, то уравнением линии пересечения ее с фундаментальной поверхностью $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 0$ будет уравнение:

$$x_1^2 \cos^2 \frac{\theta}{2} + x_2^2 + x_3^2 \cos^2 \frac{\theta}{2} = 0;$$



Черт. 169.

так как, далее, точка P имеет в рассматриваемой плоскости координаты $0:1:0$, то ее поляр относительно этого конического сечения определяется уравнением $x_2 = 0$, а поэтому пара касательных из этой точки к коническому сечению определяется уравнением:

$$x_1^2 + x_3^2 = (x_1 + ix_3)(x_1 - ix_3) = 0.$$

Подлежащий определению угол равняется умноженному на $\frac{i}{2}$ логарифму двойного отношения четырех прямых:

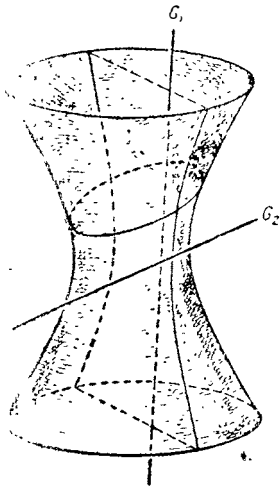
$$x_1 + \operatorname{ctg} \frac{\theta}{2} \cdot x_3 = 0; \quad x_1 - \operatorname{ctg} \frac{\theta}{2} \cdot x_3 = 0; \quad x_1 + ix_3 = 0; \quad x_1 - ix_3 = 0,$$

т. е. равняется:

$$\frac{i}{2} \cdot \ln DV \left(\operatorname{ctg} \frac{\theta}{2}, -\operatorname{ctg} \frac{\theta}{2}, i, -i \right).$$

Но это выражение как раз равно θ , что можно либо вычислить, либо также выяснить без вычисления, если вдуматься в проективное определение угла в евклидовой x_1, x_3 -плоскости, потому что там мы будем иметь дело с величиной угла между двумя прямыми, из которых одна образует с осью x_1 угол $\frac{\theta}{2}$, а другая угол $-\frac{\theta}{2}$.

Клиффордова поверхность может двигаться сама по себе ∞^2 способами; при этом существует в точности одно движение, переводящее любую данную точку в любую другую заданную точку. Среди этих движений существует однопараметрическое



Черт. 170.

семейство вращений с теми прямыми G_1 и G_2 (черт. 170) в качестве осей, принадлежащими обеим конгруэнциям параллелей, к которым принадлежат образующие. Поэтому всякую клиффордову поверхность можно рассматривать двояким образом как поверхность вращения. На ней лежат два семейства кругов; те круги, которые являются кругами вращения относительно одной из осей, могут быть получены путем пересечения поверхности плоскостью, проходящей через другую ось. На черт. 170 изображены два подобных круга. Круг, изображенный на чертеже (рассматриваемом с евклидовой точки зрения) в виде эллипса, возникает при вращении вокруг прямой G_1 и лежит в одной плоскости с прямой G_2 ; наоборот, круг, который

на чертеже имеет вид гиперболы, возникает при вращении вокруг прямой G_2 и лежит в одной плоскости с прямой G_1 .

Следовательно, поверхность может быть получена двояким образом посредством вращения круга вокруг полярной его центра, лежащей в его плоскости; при этом траектория центра будет второй осью вращения.

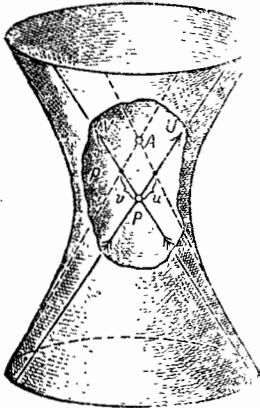
Всеми этими свойствами клиффордовы поверхности сильно напоминают *круглый цилиндр* евклидовой геометрии, потому что этот последний также может быть получен двояким образом посредством вращения круга вокруг некоторой прямой; именно: он может быть получен как посредством вращения его образующей вокруг оси цилиндра (т. е. бесконечно большого круга), так и посредством параллельного перенесения какого-нибудь из его широтных кругов, причем это перенесение может рассматриваться как вращение вокруг бесконечно удаленной прямой.

В. Дифференциальная геометрия клиффордовой поверхности. Аналогия между евклидовым цилиндром и клиффордовыми поверхностями будет еще полнее, если мы рассмотрим геометрию на самих этих поверхностях. Как известно, цилиндр является поверхностью, которая может быть развернута на евклидову плоскость; это означает следующее: если мы вырежем из цилиндра (например сделанного из бумаги) небольшой односвязный кусок, то этот кусок посредством *изгибания* (т. е. без растяжения, следовательно, без изменения длин находящихся на нем кривых) можно так деформировать, чтобы он без складок наложился на плоскость или, как говорят, *развернулся* на плоскость. Посредством такого разворачивания устанавливается сохраняющее длины отображение куска поверхности на кусок плоскости; следовательно, господствующее на поверхности мероопределение полностью совпадает с мероопределением куска евклидовой плоскости, т. е. *геометрия на самой поверхности является евклидовой*. По крайней мере это имеет место, если мы ограничиваемся достаточно малыми кусками поверхности; о различиях, которые возникают, если отбросить это ограничение, и о его значении будем подробно говорить в следующей главе. То, что мы сейчас собираемся доказать, заключается в том, что *клиффордова поверхность*, мероопределение которой пока установлено с помощью геометрии эллиптического пространства, точно так же *обладает евклидовой геометрией*, т. е. что ее можно в малом (*im Kleinen*) отобразить с сохранением длин на евклидову плоскость.

Сначала мы проведем доказательство с помощью понятий и предложений теории поверхностей (ср. гл. X и приведенную там литературу); так как клиффордова поверхность может двигаться сама по себе таким образом, что произвольная ее точка может быть переведена в любую другую точку, то *гауссова кривизна K* этой поверхности должна быть на всей поверхности *постоянной*, так как кривизна является инвариантом отображений, сохраняющих длину. Чтобы вычислить ее значение, рассмотрим на нашей поверхности четырехугольник, составленный из геодезических линий; в подобном четырехугольнике сумма углов $> 2\pi$, $= 2\pi$ или $< 2\pi$ в зависимости от того, будет ли $K > 0$, $= 0$ или < 0 . Но клиффордов параллелограмм как раз и является таким четырехугольником, так как всякая лежащая на поверхности прямая является геодезической линией поверхности; в этом параллелограмме сумма углов равна 2π , следовательно $K = 0$. Но всякая поверхность нулевой кривизны всегда может быть отображена в малом (*im Kleinen*) с сохранением длин на евклидову плоскость. Так как это доказательство предполагает известными много фактов из теории поверхностей, то мы докажем эту теорему, вследствие ее важности, еще раз элементарным и прямым путем, причем мы будем предполагать известным только обычное определение длины дуги кривой.

Введем на поверхности систему координат u, v в окрестности p произвольной точки P нашей поверхности; пусть P будет нулевой

точкой, а проходящие через нее прямолинейные образующие u и v — осями, которым мы припишем определенные направления в качестве положительных (черт. 171). Если точка A принадлежит окрестности p и если проходящие через эту точку A образующие пересекают обе оси в точках, расстояния которых равны (с учетом положительных направлений осей) соответственно числам u и v , то мы называем u , v координатами точки A .



Черт. 171.

Пусть теперь C — дуга кривой на поверхности внутри p и пусть она задана уравнениями в параметрической форме: $u = u(t)$, $v = v(t)$, $t_1 \leq t \leq t_2$. Тогда длина s этой дуги определяется следующим образом: если Δs — длина хорды между точками кривой, соответствующими значениями t и $t + \Delta t$ и

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = s'(t), \text{ то:}$$

$$s = \lim \sum \Delta s = \lim \sum \frac{\Delta s}{\Delta t} \cdot \Delta t = \int s'(t) dt.$$

Введем теперь обычные обозначения:

$$u(t + \Delta t) - u(t) = \Delta u, \quad v(t + \Delta t) - v(t) = \Delta v,$$

причем

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta t} = u'(t) \quad \text{и} \quad \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = v'(t).$$

Тогда (ср. черт. 172, который схематически изображает соотношения на рассматриваемой клиффордовой [поверхности] по теореме косинусов эллиптической геометрии (стр. 217) имеет место следующее равенство:

$$\cos \frac{\Delta s}{2c_e} = \cos \frac{\Delta u}{2c_e} \cdot \cos \frac{\Delta v}{2c_e} - \sin \frac{\Delta u}{2c_e} \cdot \sin \frac{\Delta v}{2c_e} \cdot \cos \theta.$$

При этом θ является здесь углом между образующими U и V клиффордовой поверхности; следовательно, хорда Δs лежит против угла $\pi - \theta$. С помощью разложения в ряд по степеням Δs , Δu и Δv , деления на $\Delta t^2 : 8c_e^2$ и предельного перехода $\Delta t \rightarrow 0$ отсюда получается:

$$s'^2 = u'^2 + 2 \cos \theta \cdot u'v' + v'^2,$$

следовательно:

$$s = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{u'^2 + 2 \cos \theta \cdot u'v' + v'^2} dt.$$

Пусть, с другой стороны, на евклидовой плоскости взята

система координат u, v , причем оси пересекаются между собой под углом θ . Длина \int дуги кривой, определенной уравнениями $u = u(t), v = v(t)$ и $t_1 \leq t \leq t_2$, дается формулой:

$$\int = \int_{t_1}^{t_2} \int'(t) dt,$$

причем $\int'(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \int}{\Delta t}$, а $\Delta \int, \Delta t$ имеет указанный выше смысл. Далее, по теореме косинусов *евклидовой* тригонометрии имеем:

$$\Delta \int^2 = \Delta u^2 + 2 \cos \theta \cdot \Delta u \Delta v + \Delta v^2,$$

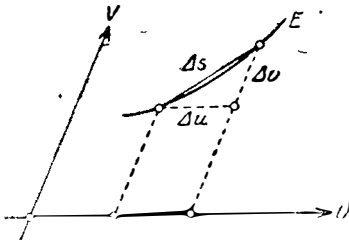
следовательно:

$$\int'^2 = u'^2 + 2 \cos \theta \cdot u'v' + v'^2$$

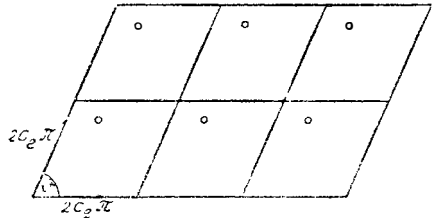
и

$$\int = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{u'^2 + 2 \cos \theta \cdot u'v' + v'^2} dt.$$

Если мы теперь отобразим кусок поверхности p с помощью соотношений $u = u, v = v$ на плоскость, то из предыдущего сле-



Черт. 172.



Черт. 173.

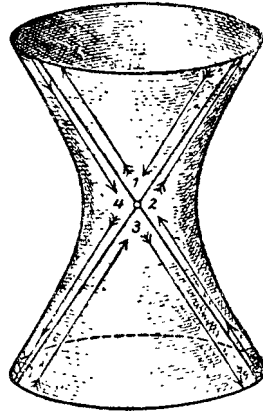
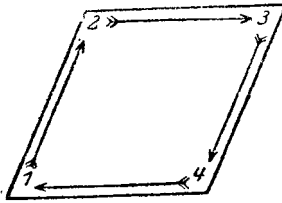
дует (если \int обозначает длину образа дуги C), что $\int = s$, т. е. что отображение сохраняет длину, что и требовалось доказать.

При этом доказательстве мы ограничились отображением лишь некоторой области, теперь мы перейдем к тому, чтобы это отображение распространить на всю поверхность. При этом нужно принять во внимание следующее: если мы возвращаемся после пробега u -оси опять в точку P , то образ движущейся точки в евклидовой плоскости на u -оси не возвратится в свое исходное положение, но попадет в точку, отстоящую от исходного положения на длину $2c_2\pi$, так как это число является длиной u -оси. Вообще в силу определенного равенствами $u = u, v = v$ отображения клиффордской поверхности на плоскость каждой точке поверхности соответствует бесчисленное множество точек плоскости; эти последние получаются одна из другой посредством увеличения или уменьшения u и v -координат на число, кратное $2c_2\pi$. Если m и n произвольные числа, то внутри ромба (черт. 173), определенного неравенствами:

$$m \cdot 2c_2\pi \leq u \leq (m + 1) \cdot 2c_2\pi, \quad n \cdot 2c_1\pi \leq v \leq (n + 1) \cdot 2c_1\pi,$$

лежит, вообще говоря, *в точности один* образ произвольной точки; только в случае, если эта точка поверхности лежит на u или v -оси, она имеет *два* образа в ромбе и притом эти образы являются соответствующими точками на противоположных сторонах. Мы можем установить соответствие между ромбом и клиффордовой поверхностью еще с помощью того, что мы разрежем эту кольцеобразную поверхность вдоль обеих осей (черт. 174, слева) и после надлежащего изгибания так ее наложим на ромб, чтобы оба берега каждого разреза лежали на противоположных сторонах ромба (черт. 174, справа).

С. Геометрия на всей (im Grossen) клиффордовой поверхности. Наше отображение клиффордовой поверхности на евклидову плоскость облегчает более близкое изучение *геометрии на этой поверхности*. При этом мы прежде всего должны уяснить себе следующее обстоятельство. Правда, мы доказали, что геометрия на клиффордовой поверхности в малом совпадает полностью с геометрией евклидовой плоскости. Но это совпадение распространяется — это мы еще раз подчеркнем — только



Черт. 174.

на *окрестность произвольной точки поверхности*. Обе геометрии *в целом* существенно отличаются друг от друга. Если это различие уже очевидно для случая геометрий плоскости и цилиндра, то оно делается еще отчетливее при сравнении обеих этих геометрий с геометрией клиффордовой поверхности, потому что клиффордова поверхность в противоположность двум первым поверхностям является *замкнутой поверхностью*, она имеет *конечную площадь*, равную $4c^2 \pi^2 \sin^2 \theta$, как это показывает отображение на евклидов ромб. Отсюда видно, что *простирающаяся по всей поверхности по малым кускам „евклидова“ геометрия все же не простирается „в бесконечность“*, а отсюда можно заключить обратно, что *не только эллиптическое мероопределение может господствовать в конечном пространстве*. В этом поразительном на первый взгляд факте и заключается основное значение клиффордова открытия. Это-то открытие и побудило Клейна рассматривать все типы связности, которые совместимы с наличием евклидовой или одной из двух неевклидовых геометрий.

Этой интересной и неисчерпываемой в немногих словах проблеме пространственных форм мы посвятим особую главу (гл. IX).

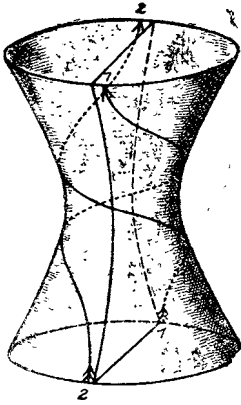
Сейчас мы приведем только некоторые предложения, относящиеся к геометрии клиффордовой поверхности в целом, которые весьма легко получаются с помощью нашего отображения на плоскость. Из сохранения длин следует, например, что геодезические линии на поверхности, т. е. кратчайшие линии, соединяющие две точки, отображаются в прямые линии.

Наше отображение показывает, что через каждую точку проходит бесчисленное множество *замкнутых геодезических линий*, однако, без того, чтобы все геодезические линии были замкнутыми, потому что прямая плоскости тогда и только тогда является образом замкнутой геодезической линии, когда она соединяет между собой две точки, являющиеся образами *одной и той же* точки поверхности. Подобными прямыми будут, например, параллели сторонам ромба; им соответствуют *образующие первого или, соответственно, второго рода* клиффордовой поверхности. Далее, этим свойством обладают параллели диагоналям ромба; с соответствующими им геодезическими линиями мы уже встречались по другому поводу; они образуют оба семейства *кругов вращения*; это следует из того доказанного на стр. 260 факта, что вращения являются теми движениями, которые могут быть составлены из двух сдвигов *одинаковой длины* вдоль образующих семейств прямых. Длина этих окружностей (как показывает теперь евклидова тригонометрия) равна $4c_2 \pi \cdot \sin \frac{\theta}{2}$,

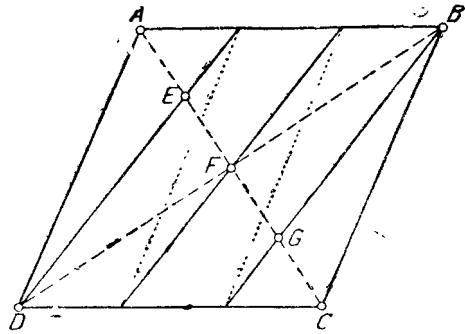
соответственно $4c_2 \pi \cos \frac{\theta}{2}$; их радиус, т. е. радиус вращения поверхности, поэтому равняется (ср. формулы на стр. 219): $c_2 \theta$ или, соответственно, $c_2 (\pi - \theta)$.

Другие геодезические линии клиффордовой поверхности нам также известны; это будут *винтовые линии*, по которым, как бы по указано на стр. 142, движутся при винтообразном движении точки эллиптического пространства. Если мы изображенную там винтовую линию (черт. 175, тождественный с черт. 78 на стр. 142) отобразим на евклидов ромб, то получим фигуру, изображенную на черт. 176. Прерывистая прямая AC является образом изображенного на клиффордовой поверхности круга K_1 , который (будучи рассматриваем с евклидовой точки зрения) имеет вид гиперболы; совершенно аналогично этому прямая DB является образом горлового эллипса, который в положенной здесь в основу эллиптической геометрии изображает некоторый круг K_2 второго семейства кругов. Наконец, сплошная прямая внутри ромба, которая состоит из трех кусков, является образом винтовой линии S . При этом мы должны мыслить соответствующие точки сторон AB и DC , равно как и сторон AD и BC , отождествленными, вследствие чего все четыре вершины сольются в одну единственную точку. Поэтому

три рассмотренных отрезка прямых станут одной замкнутой линией. Теперь легко сравнить течение винтовой линии на обоих чертежах. Круги K_1 и K_2 имеют на клиффордской поверхности две общие точки, через которые проходит также и винтовая линия S ; в ромбе им соответствуют точки $A=B=C=D$ и F .



Черт. 175.



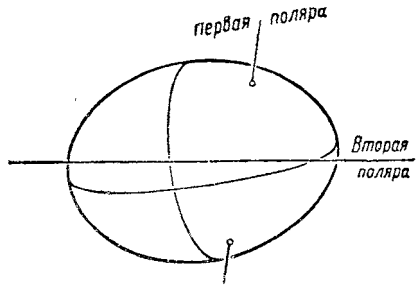
Черт. 176.

Далее, обе (с евклидовой точки зрения) бесконечно удаленные точки круга K_1 отображаются в точки E и G . Эти примеры показывают, насколько облегчается изучение клиффордской поверхности рассмотренным нами сохраняющим длины отображением ее на плоскость.

§ 7. Гиперболическая геометрия пространства

А. Общие замечания. Читатель без труда может установить сам многие геометрические свойства гиперболического пространства, если он вспомнит о наших прежних исследованиях гиперболической плоскости (§ 3), потому что в пространстве положение вещей совершенно аналогично положению вещей на плоскости. Важное различие *прямых*, пересекающихся внутри, вне или на фундаментальной кривой может быть перенесено непосредственно на случай *плоскостей*; в частности, две плоскости будут называться *параллельными*, если они пересекаются по касательной к фундаментальной поверхности. Теоремы об опускании перпендикуляра и проектировании полностью сохраняются. Аналогично трем типам кругов здесь существуют три типа шаровых поверхностей, которые мы будем называть *собственно шарами*, *гиперсферами* и *горосферами* или *предельными сферами* (ср. стр. 198) и которые при заданном центре расположены совершенно подобно тому, как расположены соответствующие семейства кругов.

В. Движения. В противоположность эллиптической геометрии действительные движения здесь уже не могут быть разложены на действительные „сдвиги“ вдоль конгруэнции прямых (ср. стр. 133 и 208). Все же и теперь целесообразно классифицировать движения с точки зрения поведения прямых линий. Мы уже знаем из гл. III, что каждое из двух взаимно комплексно-сопряженных семейств образующих овальной фундаментальной поверхности при всяком движении линейно преобразуется в себя и потому, вообще говоря, имеет две неподвижные прямые; обе взаимно комплексно-сопряженные пары неподвижных прямых пересекаются кроме двух комплексно-сопряженных точек еще в двух действительных неподвижных точках на самой поверхности; две действительные прямые, соединяющие обе пары точек (обозначенные на черт. 177 как первая и вторая полярны), переходят при движении сами в себя. При этом прямая, соединяющая обе действительные точки пересечения, является единственной собственной переходящей в себя прямой, „осью“ этого движения. Вторая из рассматриваемых прямых, пересекающая поверхность в мнимых неподвижных точках, с точки зрения гиперболической геометрии должна рассматриваться как несобственная. Наряду с этим имеется еще предельный случай, в котором каждое из двух семейств образующих имеет дважды взятую неподвижную прямую¹⁾; обе эти взаимно комплексно-сопряженные прямые пересекаются в единственной неподвижной точке поверхности, которая всегда действительна. Так как определенный ею пучок прямых, касающихся поверхности, имеет при надлежащем подсчете *четыре* неподвижных элемента, то *всякая* из этих прямых переходит сама в себя; более же нет ни одной действительной прямой и также ни одной действительной точки, которые остались бы неподвижными.



Черт. 177.

В общем случае мы рассмотрим группу всех движений, соответствующих некоторой неподвижной оси. Это будет двухпараметрическое семейство, которое (ср. стр. 140—141 и 208) может быть получено посредством *вращений* как вокруг этой оси, так и вокруг сопряженной с ней полярны. При этом каждая из ∞^1 овальных поверхностей второго порядка, имеющих с фундаментальной поверхностью общий тетраэдр из соответствующих неподвижных прямых (ср. стр. 137), переходит сама в себя; все эти поверхности касаются фундаментальной поверхности в двух

В общем случае мы рассмотрим группу всех движений, соответствующих некоторой неподвижной оси. Это будет двухпараметрическое семейство, которое (ср. стр. 140—141 и 208) может быть получено посредством *вращений* как вокруг этой оси, так и вокруг сопряженной с ней полярны. При этом каждая из ∞^1 овальных поверхностей второго порядка, имеющих с фундаментальной поверхностью общий тетраэдр из соответствующих неподвижных прямых (ср. стр. 137), переходит сама в себя; все эти поверхности касаются фундаментальной поверхности в двух

¹⁾ Возможность того, что в одном из семейств имеются две различные неподвижные прямые, а в другом две совпадающие, исключается по соображениям действительности.

точках пересечения с (собственной) осью. Они во многих отношениях соответствуют клиффордовым поверхностям эллиптической геометрии: они допускают ∞^2 движений, они двояким образом могут быть рассматриваемы как *поверхности вращения*, причем теперь одно из семейств кругов вращения состоит из гиперциклов; их уравнения можно привести к подобному же виду, как и в случае клиффордовых поверхностей (стр. 264), именно к виду:

$$x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 + x_4^2 = \text{const} \cdot (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_4^2).$$

Естественно возникает предположение, что геометрия самих этих поверхностей также будет *евклидовой геометрией*, и действительно можно показать различными способами, что это так и есть. Все же этот факт не столь замечателен, как в случае клиффордовых поверхностей, потому что поверхность рассматриваемого теперь типа является *открытой* поверхностью и имеет *бесконечно большую* площадь; ведь она является овалльной поверхностью с двумя бесконечно удаленными точками и, следовательно (с точки зрения гиперболической геометрии), выглядит как круглый цилиндр евклидовой геометрии, так что ее евклидова метрика не представляет для нас ничего особенно поразительного.

В предельном случае, в котором ни одна собственная прямая не переходит сама в себя, но все прямые некоторого, касающегося поверхности, пучка остаются неподвижными, все соответствующие центру пучка горосферы при каждом из ∞^2 движений переходят сами в себя ¹⁾.

Разумеется, группы движений можно получить также, рассматривая вместо неподвижных прямых неподвижные точки или неподвижные плоскости. Движения, оставляющие неподвижной некоторую собственную точку, являются *вращениями сферы* и образуют трехпараметрическую группу; они ничем не отличаются, так же как и в случае эллиптической геометрии (стр. 255), от евклидовых вращений сферы. Также и движения с неподвижной точкой вне фундаментального образа или, что сводится к тому же, с неподвижной собственной плоскостью (полярной плоскостью этой неподвижной точки) зависят от трех параметров; каждая из „поверхностей постоянного расстояния“ от неподвижной плоскости, т. е. гиперсферы вокруг неподвижной точки, переходит сама в себя. Эта группа устроена совершенно так же, как группа плоских гиперболических движений, потому что если фундаментальная поверхность определяется уравнением $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_4^2 = 0$ и если $1:0:0:0$ — неподвижная точка ²⁾,

¹⁾ Рекомендуется перенести соображения, относящиеся к плоскому случаю (стр. 248, сноска), сначала на первое семейство образующих нашей поверхности, а затем на второе; зеркальные отображения будут теперь мнимыми.

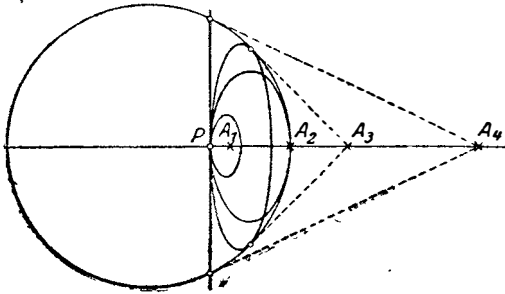
²⁾ Эта точка является теперь несобственной точкой, так как содержащая ее плоскость $x_4 = 0$ не имеет действительного пересечения с фундаментальной поверхностью.

то переменные x_2, x_3, x_4 претерпевают все те и только те подстановки, которые преобразуют форму $x_2^2 + x_3^2 - x_4^2$ самое в себя. Связь с плоскими гиперболическими движениями выявится столь же отчетливо, если рассмотреть связку прямых, проходящих через неподвижную точку: в ней господствует гиперболическое мероопределение, сохраняющееся при движениях; фундаментальным образом является проходящий через неподвижную точку касательный конус к поверхности. Неподвижная плоскость будет по-предыдущему совершенно свободно двигаться в гиперболическом смысле.

В предельном же случае, т. е. при рассмотрении всех движений, оставляющих неподвижной некоторую точку на самой поверхности, вырождение опять приносит повышение числа параметров (ср. случай плоской гиперболической геометрии, стр. 248); мы получаем четырехпараметрическую группу. Она совершенно так же организована (как это показывает опять-таки рассмотрение связки прямых, проходящих через неподвижную точку), как и *группа евклидовых преобразований плоскости со включением преобразований подобия*. Трехпараметрической подгруппе, не содержащей преобразований подобия, т. е. евклидовой плоской группе движений, соответствуют те движения гиперболического пространства, которые оставляют инвариантной всякую соответствующую неподвижной точке предельную сферу; это, подобно случаю плоскости (стр. 248), следует из того, что подобные движения являются как раз теми движениями, которые могут быть составлены из двух зеркальных отображений относительно плоскостей, проходящих через неподвижную точку. Упомянутые выше двухпараметрические, лишенные неподвижных точек группы движений горосфер в себе соответствуют, как легко видеть, группе плоских *евклидовых параллельных сдвигов*.

С. Шаровые поверхности. Параллелизм между движениями, классифицированными по их неподвижным точкам, с одной стороны, и между тремя плоскими геометриями, с другой стороны, делается особенно отчетливым, если мы ближе рассмотрим *геометрию на сферах всех трех типов*. Исключим на одно мгновение случай предельных сфер, тогда мы будем иметь дело со сферами конечного радиуса, причем в случае собственно сферы этот радиус будет действительным, а в случае гиперсферы — комплексным. Длина дуги большого круга, т. е. (собственного или несобственного) круга, лежащего в одной плоскости с центром шара, будет равняться соответствующему центральному углу, умноженному на число, зависящее только от постоянной рассматриваемой метрики и от радиуса. Далее, угол между двумя большими кругами равняется углу между соответствующими проходящими через центр шара плоскостями. Следовательно, мероопределение на сфере совпадает (с точностью до появляющейся при измерении длин постоянной) с мероопределением связки с центром в центре шара. Так как

это мероопределение является соответственно эллиптическим или гиперболическим, то на сфере имеет место такая же геометрия, при этом большие круги играют роль прямых линий совершенно так же, как и в привычной нам сферической геометрии. Посредством предельного перехода отсюда получается такая же связь между геометриями на горосфере и на евклидовой плоскости. Итак, мы получаем следующий резуль-



Черт. 178.

тат: *геометрии на собственной сфере, горосфере и гиперсфере являются соответственно эллиптической, евклидовой и гиперболической.* При этом всякий раз, в противоположность, например, клиффордовым поверхностям, мы имеем модель рассматриваемой геометрии на всем протяжении поверхности, если

только мы будем пренебрегать здесь несущественным различием между геометриями сферы и эллиптической плоскости.

На этих сферах особенно хорошо можно изучать непрерывные превращения трех геометрий друг в друга. Выберем, например, определенную точку P и заставим точку A двигаться от точки P прямолинейно, пересекая поверхность, во внешнюю область. На черт. 178 изображены четыре положения A_1, \dots, A_4 точки A . (Чтобы получить соответствующую пространственную фигуру, достаточно вращать чертеж вокруг горизонтальной прямой; сфера, получающаяся при этом из большого круга черт. 178, будет изображать фундаментальную поверхность.) Построим теперь проходящие через точку P сферы, имеющие в качестве центра одну из точек прямой PA_4 ¹⁾. Если теперь мы будем двигаться из положения A_1 в положение A_2 , а затем в положение A_3 , то, как мы только что доказали, геометрия на рассматриваемых сферах будет непрерывно превращаться из эллиптической в евклидову, а затем в гиперболическую геометрию.

При этом постоянная метрики этих геометрий, т. е. (ср. стр. 211 и 214) обратная величина — $\frac{1}{4c^2}$ квадрата радиуса кри-

¹⁾ Сфера, описанная, например, вокруг точки A_1 (если мы на одно мгновение будем рассматривать нашу фигуру с евклидовой точки зрения), получается посредством вращения маленького эллипса, сфера вокруг (в смысле гиперболической геометрии бесконечно удаленной) точки A_2 получается из эллипса, который четырехкратно касается фундаментального круга, в то время как эллипс, соответствующий сфере вокруг точки A_3 , дважды касается этого круга; наконец, сфера вокруг точки A_4 выражается в дважды взятую плоскость.

визны — $2ic$, разумеется, зависит от радиусов сфер. Если обозначить через a радиус сферы, а через $R(a)$ — радиус кривизны ее геометрии, то найдем после небольшого вычисления в случае, когда a действительно, т. е. когда сфера собственная, что

$$R(a) = 2c_h \cdot \text{sh} \frac{a}{2c_h}.$$

Если сфера является гиперсферой, следовательно, точка A лежит вне фундаментальной поверхности, то a будет комплексным с мнимой частью $c_h \pi i$; если a_1 — его действительная часть, то

$$R(a) = i \cdot 2c_h \cdot \text{ch} \frac{a_1}{2c_h}.$$

В обоих случаях $\lim_{a \rightarrow \infty} R(a) = \infty$, как это и следовало ожидать

для предельных сфер с их евклидовой геометрией. Итак, если центр сферы A удаляется описанным образом от точки P , то

постоянная $\frac{1}{R^2}$ метрики сферы монотонно убывает, начиная с очень больших положительных значений, для сферы с центром в точке A_2 делается равной нулю и затем продолжает убывать далее, пока не достигает, наконец, своего наименьшего значения — $\frac{1}{4c_h^2}$ в тот момент, когда сфера выродится в плоскость;

это минимальное значение равно метрической постоянной самого пространства. Если же центр сферы заставить таким же образом двигаться дальше за точку A_4 , то весь этот процесс повторится в обратном порядке.

Д. Об аналитическом изображении движений. Движения эллиптического пространства мы смогли особенно удобно изобразить аналитически с помощью кватернионов. Для действительной гиперболической геометрии это уже невозможно; тем не менее и здесь существует аналитическое вспомогательное средство, применение которого доставляет хорошее общее обозрение движений и их комбинирования, т. е. их теоретико-групповые свойства; это вспомогательное средство мы найдем (гл. XI) в линейных постановках комплексного переменного.

ПРОБЛЕМА ПРОСТРАНСТВЕННЫХ ФОРМ

§ 1. Пространственные формы плоской евклидовой геометрии

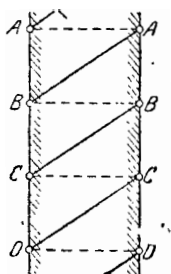
А. Постановка задачи; геометрия цилиндра и конуса. Проблема пространственных форм проистекает из того факта, что посредством метрических соотношений, господствующих в ограниченном куске пространства, геометрия всего пространства еще не определяется однозначно. Например, если мы вырежем из евклидовой плоскости полосу, ограниченную двумя параллельными прямыми, и совместим лежащие друг против друга точки двух ее краев, то получим в результате цилиндр. При этом метрика достаточно малого куска поверхности совершенно не изменится; напротив, геометрия в целом („im Grossen“) сделается совершенно иной.

Займемся этой „геометрией цилиндра“ несколько глубже. При изгибании в круглый цилиндр всякая прямая нашей полосы переходит в зависимости от своего положения по отношению к ограничивающим прямым либо в образующую цилиндра, либо в винтовую линию, либо, наконец, в широтный круг. Эти кривые, являющиеся „геодезическими линиями“¹⁾ цилиндра, мы будем рассматривать как прямые линии геометрии цилиндра. Во всяком достаточно малом куске поверхности они удовлетворяют всем аксиомам евклидовой геометрии; если же мы будем производить рассматривания „im Grossen“, то мы получим совершенно новые соотношения. Потому что две прямые линии, например, образующая и винтовая линия, могут иметь бесчисленное множество точек пересечения; другие же пары прямых, как например образующая и широтный круг, напротив, имеют только одну единственную точку пересечения. Далее, на цилиндре существуют особые прямые линии, имеющие конечную длину, именно широтные круги, тогда как все прочие прямые имеют бесконечно большую длину.

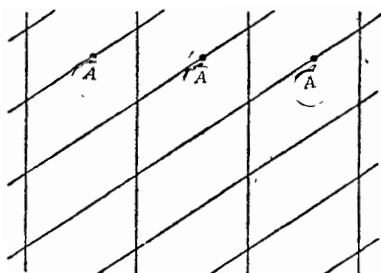
Рассматриваемую геометрию мы можем получить еще следующими способами. Во-первых, мы можем полосу, ограниченную параллельными прямыми, превратить в замкнутую поверхность, не вырезая ее и не производя склеивания краев, а лишь рассматривая как тождественные те краевые точки, которые лежат друг против друга на обеих ограничивающих

¹⁾ Ср. гл. X, стр. 302.

прямых (черт. 179, на котором соответствующие друг другу точки обозначены одинаковыми буквами). В самом деле, посредством этого отождествления можно представить связность и геометрию цилиндра; при этом мы имеем то преимущество, что мы можем всю рассматриваемую поверхность оставить лежащей на плоскости. Чтобы получить второй способ изображения, вообразим себе евклидову плоскость неограниченно наворачивающейся на цилиндр, так что она превращается в „накрывающую поверхность“ (Überlagerungsfläche¹⁾) цилиндра¹⁾. Тогда мы видим, что рассматриваемая геометрия может быть получена путем разбиения плоскости на конгруэнтные полосы и отождествления соответствующих точек этих полос (например, на черт. 180 точек,



Черт. 179.



Черт. 180.

обозначенных буквой А). При первом способе изображения прямая линия (вообще говоря) изображается системой равноотстоящих параллельных отрезков (черт. 179); потому что прямая линия, упирающаяся в краевую точку, опять вступает в эту полосу через соответствующую краевую точку другого края. При последнем способе изображения прямая линия (вообще говоря) изображается системой бесчисленного множества равноотстоящих прямых (черт. 180), так как все эти прямые накрывают одну и ту же кривую на цилиндре.

Предыдущие соображения показывают, что мы можем геометрию, господствующую в некотором ограниченном куске плоскости неограниченно продолжить, вообще говоря, различными способами. Следовательно, задача отыскания целой фигуры по заданному на малом куске мероопределению решается неоднозначно, в противоположность задаче об аналитическом продолжении функции, которое всегда можно производить только единственным образом. Различные геометрии, которые мы получаем при решении нашей задачи, мы будем называть *пространственными формами рассматриваемого мероопределения*. В частности, рассмотренную выше геометрию мы будем называть *двусторон-*

¹⁾ При этом здесь особенно отчетливо выявляется, как прямые евклидовой плоскости переходят в различные типы прямых цилиндрической формы.

ней евклидовой цилиндрической формой¹⁾). Разумеется, проблема пространственных форм существует для всех мероопределений; но мы ограничимся в наших исследованиях лишь случаем евклидовой и обеих неевклидовых геометрий.

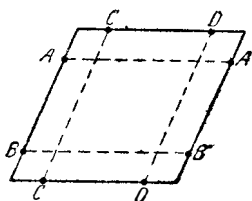
Рассмотрим наряду с цилиндрической формой евклидов конус, на котором „im Kleinen“ также имеет место геометрия евклидовой плоскости. Для этого вырежем из евклидовой плоскости кусок, ограниченный двумя выходящими из одной точки полупрямыми, и согнем его так, чтобы получился круглый конус. Соотношения в случае этой пространственной формы мы можем исследовать таким же образом, как и в случае цилиндрической формы. Но в то время как последняя пространственная форма всюду регулярна, в случае конической формы мы получаем одну особую точку, именно вершину. В соответствующей геометрии эта особенность находит свое выражение в том, что сумма углов вокруг такой точки равняется не 2π , а некоторой другой величине. Точку, которая выделяется таким образом среди других точек в силу структуры соответствующей геометрии, мы будем называть *стигмой*. Ее окрестность не может быть отображена „с сохранением длин“, т. е. с сохранением всех метрических соотношений на *полную окрестность* точки евклидова пространства, следовательно, в ней не имеет места евклидова геометрия. Так как подобные „неоднородные“ пространственные формы, обладающие стигмами, едва ли имеют значение в приложениях геометрии, то мы ограничимся „однородными“ пространственными формами, в которых ни одна точка ничем не выделяется среди других²⁾.

Пространственная форма плоской евклидовой геометрии (соответственно эллиптической или гиперболической геометрий) может быть окончательно определена следующим образом: она является определенным на неограниченной поверхности мероопределением такого рода, что 1) в окрестностях любой точки она совпадает с геометрией куска евклидовой (соответственно эллиптической или гиперболической) плоскости и что 2) на всякой из ее прямых можно откладывать произвольные отрезки от любой точки в любом из двух направлений. Посредством второго требования исключаются неинтересные случаи; так, например, в силу этого требования полученная путем выкидывания какой-нибудь прямой из эллиптической плоскости, всюду регулярная в аффинной x -, y -плоскости в окрестности каждой точки эллиптическая геометрия не является эллиптической пространственной формой. Наличие *замкнутых* прямых со вторым требованием вполне совместимо.

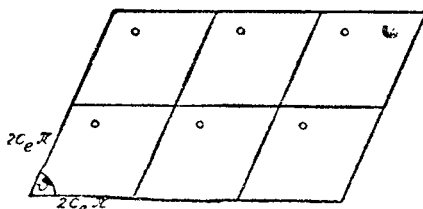
¹⁾ Мы называем эту пространственную форму „двусторонней“, так как несущая ее поверхность является двусторонней; на стр. 287 мы познакомимся еще с *односторонней* цилиндрической формой, принадлежащей соответствующей односторонней поверхности.

²⁾ Многочисленные дальнейшие примеры неоднородных пространственных форм приводятся в книге Killing, Einführung in die Grundlagen der Geometrie, т. I, Падерборн 1893.

В. Пространственная форма клиффордовой поверхности. Наряду с цилиндром и самой евклидовой плоскостью (которую также следует рассматривать как определенную пространственную форму) нам встретилась еще третья двумерная евклидова пространственная форма: клиффордова поверхность (стр. 270). Ее открытие послужило Клейну поводом заняться проблемой пространственных форм, которую поэтому обычно называют *клиффорд-клейновой проблемой пространства*. Все только что сказанное о представлении цилиндрической формы может быть непосредственно перенесено на случай пространственной формы клиффордовой поверхности. Во-первых, мы можем эту пространственную форму представить в виде ромба (стр. 269), причем всякие две крайевые точки, соответствующие друг другу



Черт. 181.



Черт. 182.

указанным на черт. 181 образом, должны рассматриваться как тождественные; при этом все четыре вершины дают одну единственную точку. Во-вторых, мы можем получить клиффордову пространственную форму путем разбиения евклидовой плоскости сетью ромбов (стр. 269), рассматривая соответствующие точки (ср. черт. 182) как тождественные. И наконец, эта пространственная форма может быть изображена клиффордовой поверхностью эллиптического пространства совершенно так же, как мы изображали двустороннюю цилиндрическую форму цилиндром евклидова пространства. Так как клиффордова поверхность имеет связность кольца (стр. 82), то мы будем называть рассматриваемую пространственную форму также *двусторонней кольцевой формой*.

С. Связь с теорией групп. Естественно возникает задача о нахождении *всех* пространственных форм плоской евклидовой геометрии ¹⁾. Решение этой задачи весьма облегчается связью

¹⁾ Эта общая задача исследовалась Клейном и Киллингом; Klein, Zur nichteuclidischen Geometrie, Math. Ann., т. 37, 1890. Вновь переиздано в Klein, Ges. Math. Abh., т. I, стр. 371; Killing, см. выше. Далее, она рассматривалась Гопфом; Hopf, Zum Clifford-Kleinschen Raumproblem, Math., Ann., т. 95, 1925. Но Клейн не обратил внимание на существование односторонней цилиндрической формы, а Киллинг даже — обеих односторонних форм. Результат Киллинга часто излагался также и в современной литературе, ср., например, Coolidge, The elements of non-euclidean geometry, Clarendon Press, 1909, стр. 240. Pasch-Dehn, Vorlesungen über neuere Geometrie, Берлин 1926, стр. 208. Относительно того факта, что существует пять пространственных форм указанного рода, см., например, Гопфа.

между теорией пространственных форм и теорией групп. Для выяснения этого обратимся к представлению цилиндрической формы с помощью накрывающей поверхности (стр. 279). Мы разбили плоскость на конгруэнтные полосы и объявили соответственно расположенные в них точки тождественными. При этом под соответственным расположением точек надо понимать следующее: если (черт. 180) полосы ограничены прямыми параллельными оси y и имеют ширину a , то две точки расположены соответственно, если они могут быть приведены в совмещение посредством перенесения плоскости параллельно оси x на длину, кратную a . Совокупность таких движений, называемых *преобразованиями наложения* цилиндра, образует *группу*; она называется *фундаментальной группой* цилиндра; каждая из полос называется *фундаментальной областью*.

Совершенно аналогично положение вещей и в случае клиффордовой поверхности, как это показывает рассмотрение черт. 182. Также и здесь преобразованиями наложения являются параллельные перенесения плоскости, которые образуют группу; фундаментальной областью здесь является каждый из ромбов.

Получившиеся здесь группы являются *дискретными* группами, т. е. они не зависят непрерывно — в противоположность рассмотренным в гл. III непрерывным группам движений — от непрерывно изменяющихся параметров. Далее, они во всей евклидовой плоскости являются *собственно дискретными*, т. е. не существует никакой предельной точки для точек плоскости, соответствующих друг другу в смысле рассматриваемой группы.

Вообще между подобными группами и пространственными формами имеется следующая связь: *всякая собственно-дискретная группа твердых преобразований, лишенная неподвижных точек (т. е. группа, составленная из некоторых движений и зеркальных отображений) евклидовой плоскости определяет некоторую (однородную) плоскую евклидову пространственную форму посредством того требования, чтобы друг другу соответствующие точки рассматривались как тождественные.* Условие собственно-дискретности является необходимым, так как в случае несобственно-дискретных групп в местах скопления друг другу соответствующих точек нельзя построить никакой фундаментальной области. Далее, условие относительно отсутствия *неподвижных точек* необходимо для того, чтобы исключить возможность появления особенностей (стигм); так, например, группа четырех вращений на угол в 90° вокруг некоторой точки определяет конус, вершина которого соответствует центру вращений и является стигмой.

Д. Установление всех евклидовых пространственных форм. Путем нахождения групп указанного рода мы, следовательно, приходим к различным пространственным формам; *далее, имеет*

место предложение, что таким образом можно получить все плоские евклидовы пространственные формы ¹⁾. Вместе с тем задача об отыскании всех таких пространственных форм в принципе разрешена. Отыскать все эти группы нетрудно, так как группы, содержащие вращения, исключены с самого начала требованием отсутствия неподвижных точек. Движения, принадлежащие возможным группам, — за исключением состоящей только из одного тождественного движения группы, соответствующей самой плоскости, — могут быть изображены (как в этом легко может убедиться читатель) в некоторой прямоугольной системе x, y -координат при употреблении надлежащей единицы длины следующим образом:

Группа „двусторонней цилиндрической формы“.

$$\begin{aligned} 1. \quad x' &= x + n, \\ y' &= y. \end{aligned}$$

Группа „односторонней цилиндрической формы“.

$$\begin{aligned} 3. \quad x' &= x + n, \\ y' &= (-1)^n y; \end{aligned}$$

Группа „двусторонней кольцевой формы“.

$$\begin{aligned} 2. \quad x' &= x + ta + n, \\ y' &= y + tb \end{aligned} \quad (b \neq 0).$$

Группа „односторонней кольцевой формы“.

$$\begin{aligned} 4. \quad x' &= (-1)^n x + at., \\ y' &= y + n \end{aligned} \quad (a \neq 0);$$

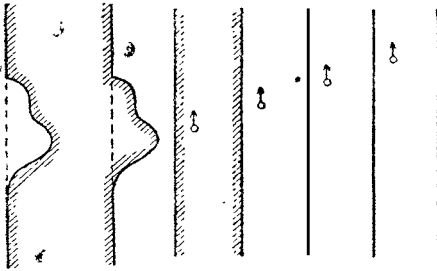
причем a и b являются заданными постоянными, тогда как t и n пробегает все целые числа, вследствие чего и получаются различные движения группы.

Отсюда следует, что всего имеется пять однородных пространственных форм плоской евклидовой геометрии. Мы уже знакомы с обычной евклидовой плоскостью, с двусторонней цилиндрической формой и со специальным случаем двусторонней кольцевой формы. Впервые здесь появляется односторонняя цилиндрическая форма и односторонняя кольцевая форма, которые мы сейчас и рассмотрим.

Для того чтобы охарактеризовать каждую из рассмотренных групп движений, удобнее всего пользоваться опять-таки фундаментальной областью соответствующей группы. Под этим понимается, как мы это уже видели на двух примерах, часть плоскости, которая таким образом воспроизводится при движениях группы, что вся плоскость оказывается покрытой в точности один раз. Разумеется, фундаментальная область еще никоим образом не определяется однозначно соответствующей

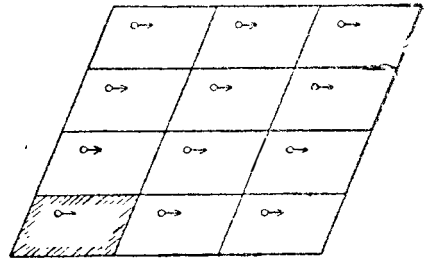
¹⁾ Доказательство этого мы здесь опускаем. Впервые оно было дано Киллингом (Killing, см. выше); новое изложение имеется у Гопфа (Hopf, см. выше).

группой: так, например, из полосы с одной ее стороны можно вырезать совершенно произвольный кусок, если одновременно прибавить в соответствующем месте с другой стороны такой же кусок (черт. 183). Но естественно искать наиболее простой вид, который можно придать фундаментальной области. Для рассмотренных групп фундаментальные области легко определяются. Для групп 1 и 3 мы можем их взять в виде полосы, для групп 2 и 4 в виде параллелограмма (на черт. 184—187 каждая из этих областей изображена штриховкой). Для того чтобы

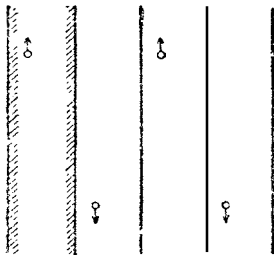


Черт. 183.

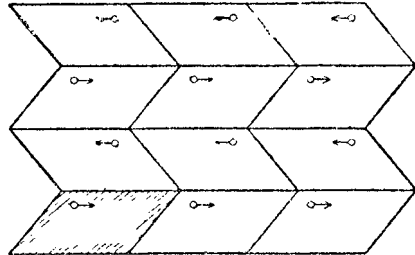
Черт. 184. Двусторонняя цилиндрическая форма.



Черт. 185. Двусторонняя кольцевая форма.



Черт. 186. Односторонняя цилиндрическая форма.

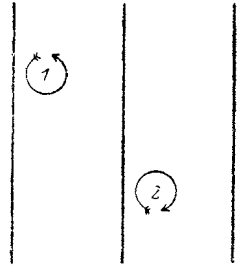


Черт. 187. Односторонняя кольцевая форма.

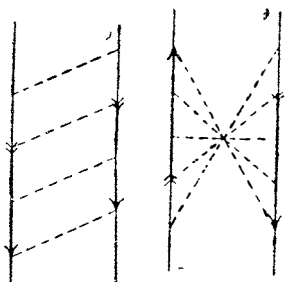
получить соответствующие группы твердых преобразований, достаточно переводить друг в друга фундаментальные области черт. 184—87 посредством евклидовых преобразований. Соответствующие пространственные формы мы получим если будем рассматривать как тождественные те точки, которые получаются одна из другой при этих евклидовых преобразованиях (ср. аналогичные рассмотрения в случае двусторонней цилиндрической формы на стр. 279). Так как среди движений черт. 186 и 187 имеются зеркальные отражения, то соответствующие пространственные формы должны быть односторонними. В самом деле, например, оба изображенные на черт. 188

направления вращения 1 и 2 являются по-предыдущему тождественными; если же мы сдвинем направление вращения 2 в окрестность направления вращения 1, то мы получим друг другу противоположные вращения, чем и определяется односторонность поверхности.

Различные пространственные формы мы можем получить также путем отождествления краевых точек фундаментальной области, поставленных в соответствие друг другу с помощью группы движений, вследствие чего фундаментальная область делается замкнутой поверхностью (черт. 189—192, в которых соответствующие краевые точки соединены прерывистыми линиями). В случае двусторонней цилиндрической формы мы можем также, посредством надлежащего видоизменения фундаментальной области, добиться того, что соответствующими будут являться те краевые точки, которые лежат друг против друга. Далее, мы еще отметим, что четыре вершины

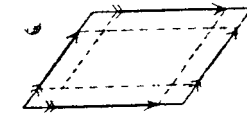


Черт. 188.

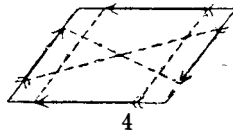


1
Черт. 189. Двусторонняя цилиндрическая форма.

3
Черт. 191. Односторонняя цилиндрическая форма.



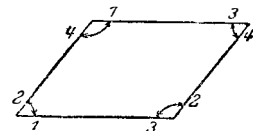
2
Черт. 190. Двусторонняя кольцевая форма.



4
Черт. 192. Односторонняя кольцевая форма.

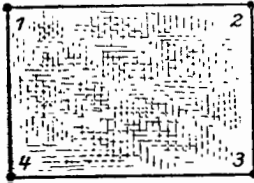
обоих параллелограмов, изображенных на черт. 190 и 192, будут отождествлены в одну единственную точку. Читатель легко может убедиться сам, что эта точка не является стигмой; в самом деле, сумма углов вокруг этой точки равняется 360° (черт. 193, на котором соответствующие друг другу краевые точки фундаментальной области черт. 190 отмечены одинаковыми цифрами).

Наконец, краевые точки фундаментальных областей могут быть действительно отождествлены указанным выше образом, и тогда пространственные формы будут изображаться настоящими замкнутыми поверхностями. Начнем с двусторонней кольцевой формы. Если фундаментальная область является прямоугольником (черт. 194), то мы получаем при указанном выше совмещении сторон 1, 2 и 3, 4 открытую с обоих концов трубку (черт. 195). Такую же операцию мы можем применять также и к параллелограммам; при этом здесь обе склеенные стороны параллелограмма перейдут в винтовую линию на трубке, как в этом

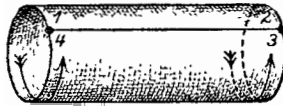


Черт. 193.

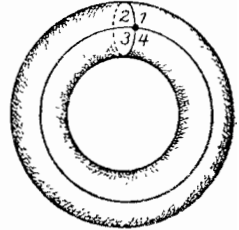
проще всего наглядно убедиться посредством соответствующего склеивания сторон параллелограмма, сделанного из бумаги. Дальнейшее совмещение двух оставшихся сторон невозможно в трехмерном евклидовом пространстве без нарушения метрики ¹⁾.



Черт. 194.

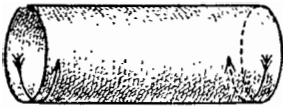


Черт. 195.

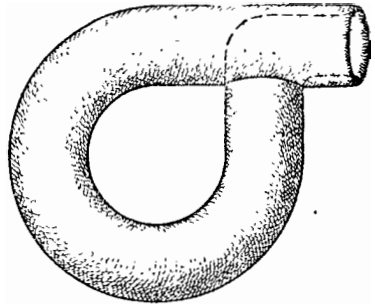


Черт. 196.

Однако мы можем помочь своему воображению тем, что, искривив трубку, согнем ее в кольцо (поверхность тора), но при этом все метрические соотношения искажутся (черт. 196). Следовательно, мы уже не должны на полученном кольце приписывать одинаковую длину кривым равной (с евклидовой точки зрения) длины, но лишь тем кривым, которые



Черт. 197.



Черт. 198.

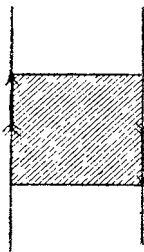
обладали этим свойством до произведенного нами искажающего метрику искривления. Если фундаментальный параллелограмм является ромбом, то получающаяся таким образом геометрия является геометрией клиффордовой поверхности.

¹⁾ В четырехмерном евклидовом многообразии подобное склеивание возможно без нарушения метрических соотношений. Пусть x_1, x_2, x_3, x_4 — прямоугольные декартовы координаты многообразия, тогда подобная поверхность будет изображаться уравнениями:

$$x_1 = \cos \alpha, \quad x_2 = \sin \alpha, \quad x_3 = \cos \beta, \quad x_4 = \sin \beta.$$

Следовательно, евклидова плоскость может быть положена без складок и разрывов на некоторую определенную *конечную* поверхность четырехмерного евклидова многообразия аналогично тому, как мы ее можем наложить на цилиндр в трехмерном евклидовом пространстве. Ср. Killing, Einführung in die Grundlagen der Geometrie, т. I, Падерборн.

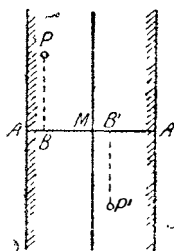
В случае *односторонней кольцевой формы* мы получаем после склеивания двух одинаково направленных сторон параллелограмма трубку, края которой должны быть отождествляемы противоположно тому, как это было сделано в случае двусторонней кольцевой формы (черт. 197). Чтобы эти краевые точки совместить указанным образом, нам придется сначала пропустить трубку через ее собственную стенку¹⁾ (черт. 198); при этом появляется кривая самопересечения поверхности, которая неизбежна в случае односторонних поверхностей без края в трехмерном евклидовом пространстве.



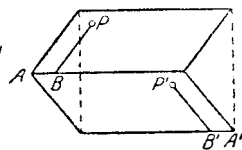
Черт. 199.

Края фундаментальной области *односторонней цилиндрической формы* можно точно так же посредством надлежащего искривления совместить указанным выше способом; при этом опять необходимо появится кривая самопересечения. Полученная поверхность представляет собой простирающийся в бесконечность лист Мебиуса, как в этом легче всего убедиться, если при склеивании краев ограничиться заштрихованной на черт. 199 частью.

Е. Связь между соответствующими друг другу одно- и двусторонними пространственными формами. В заключение мы укажем на то, что каждая из двух односторонних пространственных форм может быть получена также из соответствующей двусторонней формы путем надлежащего отождествления соответствующих друг другу пар точек.



Черт. 200.



Черт. 201.

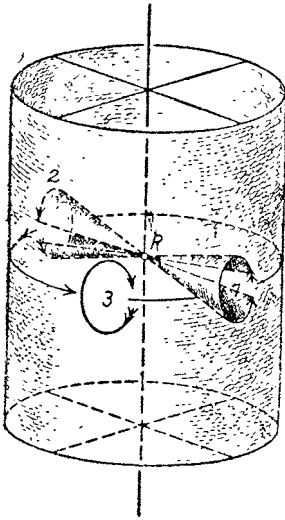
(черт. 200). Непосредственно ясно, что вследствие этого из двусторонней цилиндрической формы получится односторонняя цилиндрическая форма. — В случае кольцевой формы мы исходим из *прямоугольной* фундаментальной области, которую мы прежде всего (чтобы получить соответствие с черт. 187 и 192) посредством вырезания равнобедренного треугольника и прибавления этого треугольника в соответствующем месте противоположного края превращаем в фигуру, изображенную на черт 201.

Начнем с цилиндрической формы. Фундаментальную область мы выберем таким образом, чтобы всякие две краевые точки, лежащие на перпендикулярах к ограничивающим прямым, соответствовали друг другу, а затем будем рассматривать как тождественные такие точки P и P' фундаментальной области, для которых $AB = A'B'$ и $BP = B'P'$

¹⁾ Эта поверхность была приведена Клейном в качестве первого примера односторонней замкнутой поверхности; поэтому мы будем ее называть бутылкой Клейна. Cp. Klein, Über Rimanns Theorie der algebraischen Funktionen und ihre Integrale, Лейпциг 1882; вновь переиздано в Klein, Ges. Math. Abh., т. III, стр. 571.

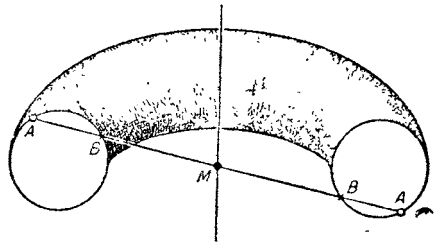
Далее, мы опять рассматриваем как тождественные такие точки P и P' , для которых $AB = A'B'$ и $BP = B'P'$, благодаря чему мы действительно получаем одностороннюю кольцевую форму.

Из этих соображений следует, что мы можем также следующим образом представить односторонние пространственные формы. В случае цилиндрической формы возьмем на оси цилиндра некоторую определенную точку P и будем рассматривать как тождественные такие пары точек цилиндра, которые лежат на



Черт. 202.

одной прямой, проходящей через точку P . Легко видеть, что тогда цилиндр превратится в одностороннюю поверхность, потому что оба направления вращения 1 и 2, определяемые двойным конусом черт. 202, являются тождественными; но с помощью сдвига направления вращения 2 в направлении вращения 3 мы получаем на цилиндре направление вращения, противоположное



Черт. 203.

первому. Для того чтобы перейти от двухсторонней кольцевой формы к односторонней, достаточно попарно отождествить точки по способу, указанному на черт. 203, вследствие чего также получается односторонняя поверхность ¹⁾. — Эти рассуждения потому еще представляют особый интерес, что они показывают нам, что хорошо известная связь между эллиптической и сферической геометрия (стр. 171) не является чем-нибудь необыкновенным, но что аналогичное обстоятельство имеет место также и в случае евклидовых пространственных форм.

§ 2. Пространственные формы плоских эллиптической и гиперболической геометрий

Аналогично случаю евклидовой геометрии ставится проблема однородных пространственных форм и в случаях эллиптической и гиперболической геометрий. Также и здесь можно показать, что задача об отыскании всех пространственных форм равно-

¹⁾ При этом необходимо исходить из такой двухсторонней кольцевой формы, которая в качестве фундаментальной области имеет *прямоугольник*.

сильна с задачей нахождения всех собственно дискретных групп твердых преобразований, не имеющих неподвижных точек. При этом в эллиптическом случае дело идет о преобразованиях сферы ¹⁾, в гиперболическом же — о преобразованиях гиперболической плоскости.

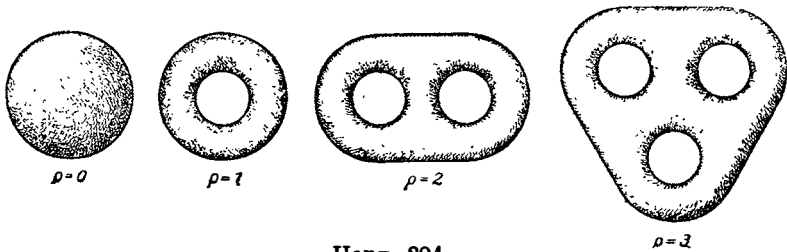
А. Эллиптические пространственные формы. Особенно простые соотношения получаются в случае *плоской эллиптической геометрии*, в которой возможны только две различные пространственные формы, именно: обычная эллиптическая геометрия и сферическая геометрия, взаимоотношения между которыми мы уже рассмотрели на стр. 170—172. Мы еще раз укажем на то, что эти пространственные формы могут быть получены друг из друга таким же образом, как соответствующие друг другу одно- и двусторонние пространственные формы евклидовой геометрии. Обе пространственные формы эллиптической геометрии имеют конечную площадь; аналога неограниченной евклидовой и гиперболической плоскости здесь не существует.

Эллиптическая геометрия получается из сферической посредством отождествления каждой пары диаметрально противоположных точек сферы. То утверждение, что эллиптическая и сферическая геометрии являются единственными существующими здесь пространственными формами, вследствие упомянутых выше предположений равносильно с утверждением, что единственная группа твердых преобразований, обладающих вышеуказанными свойствами, является именно той группой, которая кроме тождественного преобразования содержит еще только преобразование, переводящее каждую точку сферы в диаметрально противоположную ей точку сферы. Справедливость этого последнего утверждения может быть обнаружена следующим образом. Всякое движение сферы в себе имеет обязательно неподвижные точки; поэтому группа, о которой идет речь, может содержать (кроме тождественного преобразования) только *зеркальные отображения*; так как комбинация двух зеркальных отображений является движением, то рассматриваемая группа может содержать только *одно единственное* зеркальное отображение U , повторение которого U^2 должно быть уже тождественным преобразованием. Как легко видеть, существуют только два типа подобных зеркальных отображений: во-первых, зеркальные отображения от проходящих через центр сферы плоскостей, которые должны быть исключены из рассмотрения вследствие наличия неподвижных точек, и, во-вторых, указанное выше преобразование. Этим наше утверждение о существовании всего лишь двух пространственных форм плоской эллиптической геометрии доказано.

¹⁾ Что приходится брать сферу, а не эллиптическую плоскость, видно уже из того, что полученная из эллиптической плоскости сфера не может быть представлена указанным образом как эллиптическая пространственная форма.

В. Гиперболические пространственные формы. В гиперболическом случае ответ на вопрос о пространственных формах не так прост, как в случаях евклидовой и эллиптической геометрии. Именно, в то время как в последних геометриях существует только по *одной* замкнутой двусторонней пространственной форме (именно кольцо и сфера), в гиперболической геометрии существует *бесчисленное множество замкнутых двусторонних, двумерных пространственных форм.*

Чтобы это доказать мы прежде всего напомним важнейшие факты из топологии замкнутых поверхностей ¹⁾. Сфера с приделанными к ней p ручками называется (двусторонней) поверхностью „рода“ p ; посредством топологических преобразований мы можем придать этим поверхностям вид, указанный на черт. 204; в частности сфера и кольцо (поверхность тора) по нашему определению имеют род, равный 0 и 1. Всякая поверхность рода p ($p \geq 1$) может быть превращена в односвязный кусок плоскости (двумерный элемент) путем разрезания вдоль $2p$ надле-

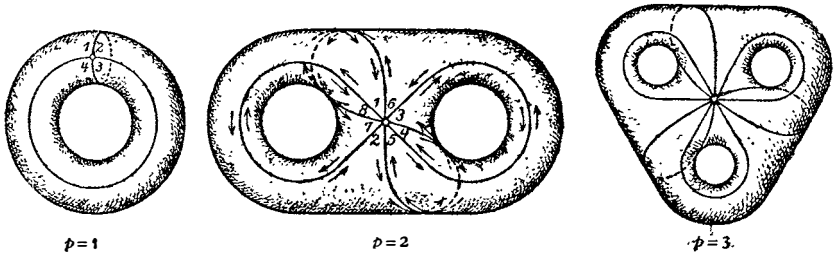


Черт. 204.

жащим образом выбранных, выходящих из некоторой фиксированной точки A , простых замкнутых кривых, которые нигде не пересекаются кроме точки A . Эти кривые изображены на черт. 205 для случаев $p = 1, 2$ и 3 ; для случая $p = 2$ стрелками указан тот путь, который надо проделать, если все время идти вдоль линии разреза. Если мы указанную поверхность расправим, то из точки A получим $4p$ различных краевых точек, а из всякой другой точки кривой разреза — в точности две крайние точки получившегося двумерного элемента. Этот последний можно так растянуть в плоский $4p$ -угольник, что каждой из линий разреза поверхности будут соответствовать две стороны многоугольника, точке A будут соответствовать все вершины, тогда как в остальном отображение поверхности на многоугольник будет взаимно однозначным. На черт. 206 эти многоугольники изображены для случаев $p = 1, 2$ и 3 . Посредством сравнения с черт. 205 можно убедиться, что стороны многоугольника соответствуют друг другу следующим образом. Выберем

¹⁾ Для ориентировки могут служить, например, следующие книги: Klein, *Elementarmathematik*, II; Hurwitz-Courant, *Funktionentheorie* (2. Aufl.); v. Kérékjártó, *Vorlesungen über Topologie*, I; Weyl, *Die Idee der Riemannschen Fläche*.

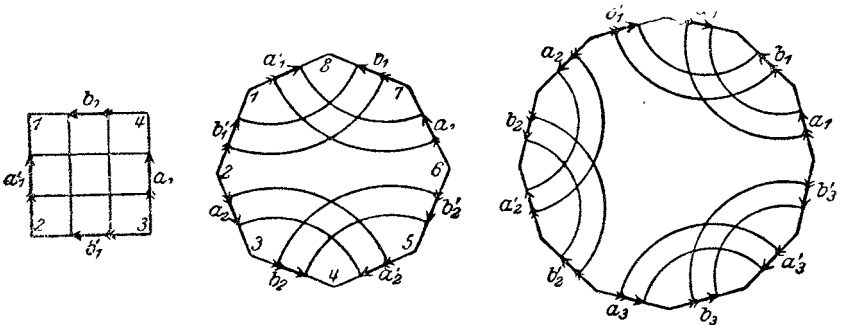
на контуре $4p$ -угольника определенное направление обхода и обозначим стороны многоугольника по порядку буквами $a_1, b_1, a'_1, b'_1, a_2, b_2, a'_2, b'_2, \dots, a_n, b_n, a'_n, b'_n$; тогда для всякого γ стороне a , ставится в соответствие сторона a' , таким образом, что соответствующими направлениями на них являются *противоположные* направления, и то же самое имеет место для сто-



Черт. 205.

рон b' и b (черт. 206). Разумеется указанный процесс может быть произведен также и в обратном порядке. Можно исходить из $4p$ -угольника и превратить его в замкнутую поверхность рода p посредством склеивания его поставленных друг другу в соответствие сторон, как мы это уже привыкли делать для случая $p = 1$ (ср. черт. 194—196 на стр. 286).

Теперь мы утверждаем, что всякая поверхность рода $p \geq 2$ может быть рассматриваема как гиперболическая простран-



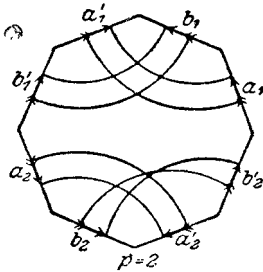
Черт. 206.

ственная форма, т. е. что ее можно снабдить всюду регулярным гиперболическим мероопределением совершенно аналогично тому, как в случае поверхности рода $p = 1$ мы имели евклидову пространственную форму.

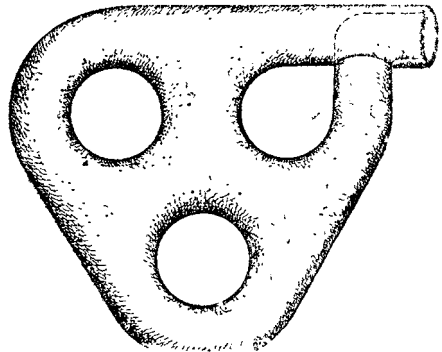
Для того чтобы доказать это, рассмотрим прежде всего произвольный правильный $4p$ -угольник гиперболической плоскости. Вырежем его из плоскости и склеим попарно его стороны указанным выше образом; при этом мы считаем, что гиперболическая метрика не изменяется. Следовательно, она переносится на поверхность рода p ; но надо еще выяснить, будет

ли она регулярна в точках линий разреза, вдоль которых различные стороны многоугольника теперь приклеены друг к другу. В случае точек, отличных от точек A , это, разумеется, имеет место. Критической является лишь сама точка A : здесь надлежащее измерение углов ¹⁾ будет возможно тогда и только тогда, когда сумма углов многоугольника равняется 2π . Значит нам остается только показать, что в гиперболической плоскости существует правильный $4p$ -угольник с суммой углов, равной 2π .

Для этого мы построим вокруг произвольной точки, лежащей внутри фундаментального конического сечения правильный (в смысле гиперболической геометрии) $4p$ -угольник: радиус круга, описанного около этого $4p$ -угольника, пусть будет (с точки зрения гиперболической геометрии) равен r . Если мы



Черт. 207.



Черт. 208.

возьмем r достаточно малым, то сумма углов будет как угодно близка к числу $2\pi(2p-1)$, так как ее отличие от суммы углов евклидова $4p$ -угольника убывает пропорционально мере площади (ср. стр. 221). Если мы радиус будем увеличивать, то сумма углов будет уменьшаться. Если, наконец, r взять бесконечно большим (следовательно, тогда $4p$ -угольник будет вписанным в фундаментальное коническое сечение), то сумма углов сделается равной нулю. Так как сумма углов непрерывно зависит от радиуса r , то для всякого $p \geq 2$ существует определенное значение r , для которого сумма углов в точности равняется 2π ²⁾. Этим наше утверждение полностью доказано.

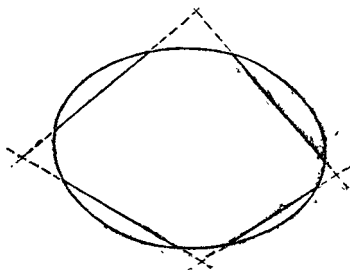
Рассматриваемые гиперболические пространственные формы могут быть представлены также с помощью введенных выше понятий фундаментальной группы и фундаментальной области. Как раньше мы покрывали евклидову плоскость сетью парал-

¹⁾ Измерение длин не представляет никаких затруднений.

²⁾ Поверхности рода нуль здесь выпадают из рассмотрения, так как их нельзя представить с помощью $4p$ -угольника; они не допускают никакого гиперболического мероопределения. Поверхности первого рода также исключаются из рассмотрения, так как ни один четырехугольник гиперболической плоскости не может иметь сумму углов равной 2π .

лелогограмов, точно так же мы можем теперь покрыть гиперболическую плоскость сетью $4p$ -угольников ($p \geq 2$), которые все между собой конгруэнтны и имеют сумму углов, равную 2π . Каждый из этих $4p$ -угольников является фундаментальной областью собственно-дискретной группы гиперболических движений без неподвижных точек, которые переводят сеть в себя и определяют соответствующую пространственную форму (ср. стр. 341). Возможность построения подобной сети и соответствующей группы непосредственно следует из элементарно геометрических соображений.

Посредством легкого видоизменения мы можем получить также *односторонние замкнутые пространственные формы гиперболической геометрии рода p* . Для этого нам надо только какие-нибудь две друг другу соответствующие (черт. 206) стороны склеить в направлении, противоположном тому, как это мы делали раньше (черт. 207). Это является в точности таким же процессом, который мы применяли на черт. 190 и 192 для того, чтобы перейти от двусторонней кольцевой формы к односторонней кольцевой форме. В том, что поверхность в силу этого видоизменения становится односторонней, можно убедиться путем передвижения окружности с определенным направлением обхода через подвергнутую изменению сторону. Если мы рассматриваемый односторонний $4p$ -угольник склеили в замкнутую поверхность, то одна из прежних ручек должна будет сама себя пронизывать (черт. 208) подобно тому, как это мы имели в случае бутылки Клейна (черт. 198).



Черт. 209.

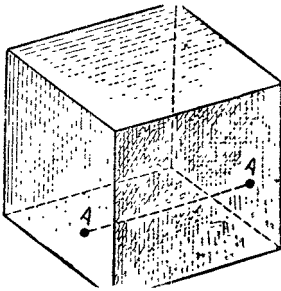
В случае *плоских гиперболических пространственных форм бесконечной протяженности* мы ограничимся одним особенно простым примером. Проведем $2n$ прямых линий, все точки пересечения которых лежат вне фундаментального конического сечения (черт. 209) и надлежащим образом поставим друг другу в соответствие точки таким образом полученных (в смысле гиперболической геометрии) бесконечно длинных отрезков. Посредством надлежащего отождествления краевых точек мы тогда получим, в зависимости от характера закона отождествления, двустороннюю или одностороннюю пространственную форму. Эта последняя в некоторых направлениях неограниченно простирается в бесконечность, тогда как в других направлениях возвращается обратно сама в себя (аналогично цилиндрической форме евклидовой геометрии). Посредством присоединения гиперболически конгруэнтных кусков к рассматриваемой простирающейся в бесконечность фундаментальной области мы получим разбиение всей гиперболической плоскости на конгруэнтные куски, которое может быть продолжено как угодно далеко.

§ 3. Пространственные формы трехмерных геометрий

Пространственные формы трехмерных геометрий аналогичны формам уже определенным для двумерного случая. Также и для них имеют место сформулированные в § 1 и 2 предложения о связи с группами твердых преобразований в евклидовом, гиперболическом и „сферическом“ пространстве. К этому последнему мы сейчас вернемся и скажем, что оно собой представляет.

С помощью представления посредством фундаментальной области все рассмотрения могут быть проведены элементарным образом также и в трехмерном случае.

В качестве примера однородных пространственных форм трехмерной евклидовой геометрии мы приведем пространственную форму, которая получается, если рассматривать как тождественные лежащие друг против друга краевые точки куба (как, например, обе точки, отмеченные на черт. 210 буквой *A*). Эта пространственная форма имеет *конечную меру*, подобно кольцевой форме плоской евклидовой геометрии.



Черт. 210.

На рассмотрении однородных пространственных форм трехмерных неевклидовых геометрий мы остановимся только вкратце. „Сферическое пространство“, о котором мы говорили, является обобщением шаровой поверхности. Положим в основу евклидово четырехмерное многообразие и введем прямоугольную декартову систему координат x_1, x_2, x_3, x_4 ; тогда сферическое пространство определяется как совокупность тех точек многообразия, координаты которых удовлетворяют уравнению $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 0$. Если отождествить каждую точку сферического пространства с ей диаметрально противоположной точкой, т. е. с точкой с противоположными по знаку координатами, то мы получим эллиптическое пространство. Следовательно, связь между обоими пространствами аналогична связи между сферой и эллиптической плоскостью; долгое время господствовала неясность о необходимости различать эти два пространства¹⁾. Кроме них в противоположность двумерному случаю, существует еще бесчисленное множество других трехмерных эллиптических пространственных форм²⁾; все они являются замкнутыми и имеют конечную меру объема. В отношении гиперболической геометрии мы только подчеркнем, что замкнутая трехмерная гиперболическая пространственная форма с конечной мерой объема до сих пор повидимому еще не найдена.

1) См. Klein, Zur nichteuclidischen Geometrie, Math. Ann., т. 37 1890 или Ges. Abh., I, стр. 353.
 2) Killing, см. выше, стр. 286; Норф, см. выше, стр. 263. У Киллинга перечисление неполно.

При применениях геометрии ко внешнему миру (гл. VII, § 6) следует принять во внимание возможность существования различных однородных пространственных форм. Напротив, неоднородные пространственные формы мы исключаем из рассмотрения, так как неоднородность пространства влечет за собой усложнения, к которым нас отнюдь не принуждают произведенные до сих пор опыты и наблюдения. При этом мы здесь особенно подчеркнем следующее: *из того предположения, что окружающий нас мир имеет евклидову или гиперболическую структуру, никоим образом еще не следует, что этот мир неограниченно простирается в бесконечность*; потому что, например, евклидова геометрия вполне совместима с предположением о конечности мира,—факт, которого раньше не замечали. Эта возможность приписать вселенной при произвольной структуре конечный объем особенно ценна, так как представление о бесконечной ее протяженности, которое сначала рассматривалось как существенное достижение человеческого разума, приносит с собой многочисленные затруднения, например, в задаче о распределении масс. Из этого видно, как глубоко проникают все эти исследования в космологические проблемы.

ТРЕТЬЯ ЧАСТЬ

ОТНОШЕНИЯ НЕЕВКЛИДОВОЙ ГЕОМЕТРИИ К ДРУГИМ ОБЛАСТЯМ

Глава X

ИСТОРИЯ НЕЕВКЛИДОВОЙ ГЕОМЕТРИИ; ОТНОШЕНИЯ К АКСИОМАТИКЕ И К ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ ГЕОМЕТРИИ

§ 1. Начала Евклида и попытки доказательства аксиомы о параллельных

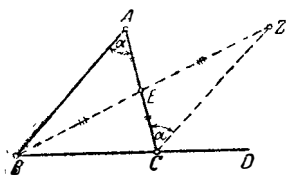
В двух первых частях этой книги мы развили неевклидову геометрию на основе проективной геометрии. Этот путь является наиболее удобным, но исторически неевклидова геометрия развивалась отнюдь не таким образом. Поэтому в настоящей главе мы займемся историей неевклидовой геометрии, причем одновременно познакомимся с многочисленными отношениями неевклидовой геометрии к другим областям математики.

Историю неевклидовой геометрии мы начнем с *Евклида*, жившего примерно за 300 лет до н. э.¹⁾ В первой книге своих „*Начал геометрии*“ он дает следующее определение: *Параллельные прямые суть такие, которые, находясь в одной плоскости и будучи продолжены в обе стороны как угодно далеко, никогда не встречаются.*

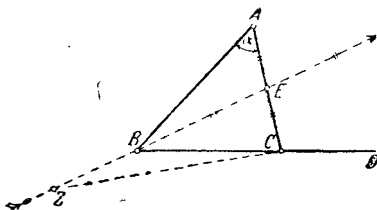
Самой аксиоме о параллельных Евклид придает следующий вид: *Если две прямые линии встречаются с третьей так, что сумма внутренних углов, лежащих по одну сторону третьей, меньше двух прямых углов, то две первые прямые при достаточном продолжении встретятся по ту сторону третьей прямой, на которой сумма внутренних углов меньше двух прямых.*

¹⁾ Из изданий Евклида мы укажем на следующее: Heiberg, *Euclidis Elementa*, Teubner, 1883 (это издание содержит только греческий и латинский тексты); далее, в случае предложений, о которых здесь будет идти речь, можно пользоваться немецким изложением в книге Engel und Stäckel, *Die Theorie der Parallellinien von Euklid bis auf Gauss*, Лейпциг 1895. Для общей ориентировки об Евклиде, роли аксиом и т. д., см. Klein, *Elementarmathematik*, II.

В противоположность другим аксиомам Евклида, которые приведены в чрезвычайно простом виде, формулировка аксиомы о параллельных представляется неестественно сложной. Вследствие этого, начиная с глубокой древности и до новейшего времени, делались многократные попытки построить геометрию, не пользуясь аксиомой о параллельных. Следовательно, во всех этих работах аксиому о параллельных пытались вывести из других аксиом евклидовой геометрии. Теперь мы знаем, что эти попытки с самого начала были обречены на неудачу, потому что в гиперболической геометрии выполнены все аксиомы евклидовой геометрии за исключением аксиомы о параллельных; но отсюда следует, что аксиома о параллельных не может быть выведена из прочих аксиом, так как в противном случае в гиперболической геометрии содержалось бы противоречие. По-



Черт. 211.



Черт. 212.

этому все подобные „доказательства“ покоились на ошибочных заключениях, в которых в более или менее явном виде вместо доказываемой аксиомы вводилась равносильная ей аксиома.

При этом особенное значение имеет следующее обстоятельство. Если опустить аксиому о параллельных, то возможными оказываются три различных геометрии, именно: эллиптическая, евклидова и гиперболическая геометрии. Но Евклид и его последователи всегда пользовались тем явно не высказанным предположением, что прямая линия имеет бесконечную длину и, значит, не является замкнутой в себе ¹⁾. Вследствие этого явно невысказанного предположения возможность эллиптической геометрии исключалась даже и без применения аксиомы о параллельных. Это обстоятельство имеет место, например, при доказательстве теоремы о том, что внешний угол треугольника всегда больше, чем каждый из двух несмежных с ним внутренних углов — теоремы, не имеющей места в эллиптической геометрии. Доказательство этой теоремы Евклид дает с помощью простого геометрического построения ($AE = EC$, $BE = EZ$, черт. 211), откладывая внутренний угол $BAC = a$ от стороны AC внешнего угла ACD . В самом деле, отсюда (наглядным образом) непосредственно следует, что внешний угол больше, чем внутренний.

¹⁾ В гильбертовых „Основаниях геометрии“ возможность эллиптической геометрии исключается посредством аксиом порядка.

Но так как еще не доказано, что прямая линия не является замкнутой, то (логически) остается открытой возможность притти в окрестность точки B с другой стороны при откладывании отрезка $EZ=BE$ (черт. 212), вследствие чего предыдущие заключения отпадают. Однако это последнее построение настолько противоречит наивному воззрению, что оно полностью лежит вне задач, которые поставил себе Евклид при написании своих „Начал“.

Из многочисленных попыток доказать аксиому о параллельных на основе других евклидовых аксиом мы приведем две особенно интересные ¹⁾. Прокл (Proclus), написавший около 400 г. н. э. комментарий к „Началам“ Евклида, предлагает отказаться от евклидова определения параллельных и заменить его определением с помощью равных расстояний от данной прямой. Этот способ определения перешел в большинство учебников XVI и XVII столетий. Но при этом молчаливо предполагается, что *точки одинакового расстояния от данной прямой образуют опять-таки некоторую прямую*, утверждение, которое не может быть доказано без применения аксиомы о параллельных, так как оно несправедливо в эллиптической и гиперболической геометриях (ср. стр. 238 и 247), и которое поэтому должно было бы быть сформулировано как особая аксиома. Эта аксиома равносильна аксиоме о параллельных, так как она, также как и эта последняя, включает случаи эллиптической и гиперболической геометрий.

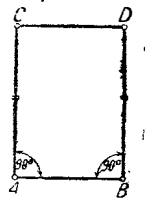
Английский математик Валлис (Wallis, 1616—1703) доказывает аксиому о параллельных, исходя из того предположения, что *для всякого треугольника можно построить в произвольно большом масштабе подобный ему треугольник*. При этом он придерживается того мнения, что это предложение не является новой аксиомой, а может быть выведено из других аксиом Евклида; но на стр. 206 мы видели, что в обеих неевклидовых геометриях не существует преобразования подобия, так что предположение Валлиса точно так же равносильно аксиоме о параллельных.

Новое отношение к аксиоме о параллельных мы находим у итальянского математика иезуита Саккери (Saccheri, 1667—1733). Его книга носит характерное название: „Euclides, ab omni naevo vindicatus, sive conatus geometricus quo stabiliuntur prima ipsa universae geometriae principia“ ²⁾. В этой книге Саккери дает следующее новое направление вопросу о параллельных. Если бы аксиома о параллельных не являлась следствием других аксиом евклидовой геометрии и если бы, следовательно, ее справедли-

¹⁾ Читателю, желающему ближе познакомиться с этими исследованиями, мы укажем на книгу Engel und Stäckel, Die Theorie der Parallellinien von Euklid bis auf Gauss, Лейпциг 1895; в этой книге относящиеся сюда работы приведены в немецком переводе.

²⁾ „Евклид, освобожденный от всякого пятна, или геометрическая попытка обосновать предположения всей геометрии“.

вость оставалась открытой, то углы в прямоугольнике $ABCD$, который имеет прямые углы A и B и в котором, далее, $AC=BD$, могли бы быть либо оба острыми, либо оба тупыми (черт. 213). Если сделать одно из этих предположений, которые Сакъери называет *гипотезами острого и тупого угла*, то из них можно получить дальнейшие геометрические следствия. Для того чтобы доказать справедливость аксиомы о параллельных, в которой Сакъери повидимому не сомневался, надо показать, что каждое из этих двух предположений приводит к противоречию. Это ему удается сделать без затруднений в случае гипотезы тупого угла, которая соответствует эллиптической геометрии (так как в эллиптическом случае сумма углов треугольника больше, чем π). В случае же гипотезы острого угла ему приходится весьма долго заниматься выводением различных следствий из этой гипотезы, причем он получает целый ряд предположений, которые обычно приписывают Лежандру (Legendre), Н. И. Лобачевскому и Больяи (J. Bolyai).



Черт. 213.

На том же пути, как и Сакъери, позднее работал Ламберт (Lambert, 1728—1777), причем ему удалось продвинуться значительно дальше. Его относящаяся сюда работа „Теория параллельных линий“ впервые появилась в печати в 1786 г., уже после его смерти.

Особое значение для дальнейшего развития имел геттингенский математик Кэстнер (Kaestner, 1719—1800). При его участии появилась еще и теперь имеющая значение диссертация его ученика Клюгеля¹⁾ (Klügel, 1739—1812) „Conatum praecipuum theoriæ parallelarum demonstrandi recensio“²⁾, в которой обнаружены ошибки примерно в 30 попытках доказательства аксиомы о параллельных. В конце концов, он приходит к следующему выводу:

„Что аксиома о параллельных выполнена, мы узнаем не путем строгих выводов, а скорее путем опыта и приговора наших глаз“.

§ 2. Аксиоматическое обоснование гиперболической геометрии

В процессе описанного в предыдущем параграфе развития теории параллельных пришли, в конце концов, к предположению, что аксиома о параллельных не может быть доказана на основе других евклидовых аксиом. Решающий шаг вперед, который был сделан в начале XIX столетия, заключается в том открытии, что наряду с евклидовой геометрией имеется еще другая геометрия, именно гиперболическая геометрия, в которой

¹⁾ Клюгель издал широко известный в то время математический словарь, который тогда являлся „Энциклопедией математических наук“.

²⁾ „Критика важнейших попыток доказать аксиому о параллельных“.

для каждой прямой через данную точку проходят две параллели. В то время как Саккери и Ламберт еще пытались найти противоречие в геометриях, в основу которых полагается видоизменение аксиомы о параллельных, ныне, наоборот, стараются полностью построить подобные геометрии и показать, что они так же лишены противоречий, как и евклидова геометрия. Доказательство этого равносильно установлению того, что евклидова аксиома о параллельных не является следствием прочих аксиом. Следовательно, дальнейшее развитие теории параллельных приводит к полному изменению воззрений, которые господствовали ранее. Если отчетливо уяснить себе противоположность этих воззрений, то станет совершенно ясным, почему открывшие неевклидову геометрию математики остались сначала абсолютно непонятыми своими современниками.

Этот период неевклидовой геометрии отмечен тремя крупнейшими именами — именами Гаусса, Н. И. Лобачевского и Больяи.

Гаусс (1777—1855), имя которого мы ставим во главе, говорит о своих исследованиях только в письмах, так как он по сделавшемуся классическим выражению опасался „крика беотийцев“. Из гауссова наследства твердо установлено¹⁾, что Гаусс уже в своей молодости занимался между прочим и аксиомой о параллельных и после долгих колебаний и сомнений, но во всяком случае уже начиная с 1817 г., составил себе ясное представление о гиперболической геометрии. В воспоминании о Гауссе „Gauss Zum Gedächtnis“, написанном непосредственно после смерти Гаусса Сарториусом фон-Вельтерсгаузенем, были опубликованы первые короткие сведения о воззрениях Гаусса; но они остались сначала совершенно незамеченными.

Два других исследователя — русский математик Н. И. Лобачевский (1793—1856) и венгерец Иоганн Больяи (Johann Bolyai, 1802—1860) подробно изложили свои исследования по неевклидовой геометрии в нескольких работах, которые, однако, сначала также оставались совершенно незамеченными. Н. И. Лобачевский был профессором Казанского университета и публиковал свои работы о теории параллельных, начиная с 1829 г.²⁾ Отец Иоганна

¹⁾ Stäckel, Gauss als Geometer; Gass'Werke, т. X, 2, Abh. 4.

²⁾ Н. И. Лобачевским были опубликованы следующие работы о теории параллельных:

1. *Ряд работ на русском языке* в Записках Казанского университета (начиная с 1829 г.); две из этих работ переведены на немецкий язык: N. I. Lobatschewskij, Zwei geometrische Abhandlungen, Лейпциг 1898—99; в этой книге имеется также биография Н. И. Лобачевского.

2. „Géométrie imaginaire“, „Crelles Journ“, т. 17. Одновременно появившееся русское издание переведено на немецкий язык, так как оба текста не вполне тождественны „N. I. Lobatschewskijs imaginäre Geometrie und Anwendung der imaginären Geometrie auf einige Integrale“, Лейпциг 1901.

Больяи, Вольфганг Больяи (1775—1856), был другом юности Гаусса и позднее находился с ним в переписке. Вольфганг Больяи посвятил всю свою жизнь изучению параллельных линий, не достигнув, однако, существенных результатов. Несмотря на то, что он очень отговаривал своего сына заниматься этой проблемой, молодой Больяи с пламенным рвением занялся ею и уже к 1823 г. ему удалось построить гиперболическую геометрию. Его исследования были опубликованы в качестве приложения к написанному по-латыни учебнику его отца¹⁾.

Всеобщее внимание впервые было привлечено к проблеме неевклидовой геометрии в 1869 г. и в следующие за ним годы, когда была опубликована *переписка между Гауссом и Шумахером*, астрономом из Альтоны. Там среди прочего имеется во втором томе на стр. 268 письмо от 12 июля 1831 г., в котором Гаусс подробно излагает свои воззрения на гиперболическую геометрию и, кроме того, сообщает три следующие результата. В гиперболической геометрии существуют треугольники, сумма углов которых произвольно мала (ср. стр. 221). В гиперболической геометрии не существует подобия фигур, но только конгруэнтность фигур (ср. стр. 206). Наконец, он устанавливает выражение для длины окружности в гиперболической геометрии (ср. стр. 219). После издания этой переписки широкие круги математиков познакомились с тем, что Гаусс был убежден в отсутствии противоречий в гиперболической геометрии. Вследствие этого совершенно изменился взгляд на неевклидову геометрию; было собрано все, что имелось в гауссовом наследстве по этому поводу, и были извлечены работы Н. И. Лобачевского и Иоганна Больяи из забвения, в которое они уже начали погружаться. При этом было установлено, что кроме Гаусса, Н. И. Лобачевского и Иоганна Больяи следует отметить еще двух других исследователей, именно Швейкарта и Тауринуса²⁾.

3. „Geometrische Untersuchungen zur Theorie der Parallellinien“, Берлин 1810: совсем небольшая книжка.

4. „Пангеометрия“ (Pangéométrie) 1855, одновременно появилась на русском и французском языках. В этой работе Н. И. Лобачевский дает систематически построенную обработку своих исследований. На немецком языке издано в „Ostwalds Klassikern der exakten Wissenschaften“, т. 130.

Далее, см. „Полное собрание сочинений Н. И. Лобачевского“, Казань 1883 и 1836. Первый том содержит работы на русском языке, второй — на немецком и французском.

¹⁾ Wolfgang Bolyai, Tentamen juventutem studiosam in elementa Matheseos purae introducendi. (Попытка ввести изучающую молодежь в элементы чистой математики), с приложением: Johann Bolyai, Appendix scientiam absolute veram exhibens (Приложение, содержащее абсолютно истинное учение о пространстве), 1832—1833.

Далее, мы здесь укажем на двухтомный труд: Stäckel, Wolfgang und Johann Bolyai: Geometrische Untersuchungen, Лейпциг 1913; в первом томе имеются биографии обоих математиков.

²⁾ Ср. „Gauss Werke“, т. X, 2, Abh., 4, Stäckel, Gauss als Geometer, стр. 31.

Швейкарт был юристом и занимался геометрией в часы досуга. При этом он уже в 1816 г. пришел к независимой от аксиомы о параллельных „астральной (звездной) геометрии“; само название должно было указывать на то, что эта геометрия, быть может, имеет место в области неподвижных звезд. Заметка об исследованиях Швейкарта была послана через Герлинга Гауссу, который оказался весьма сведующим в этой области. Тауринус (Taurinus, 1794—1874) был племянником Швейкарта и также занимался с 1824 г. развитием гиперболической геометрии. Его путь мысли аналогичен пути мысли Сакьери и Ламберта; но под конец он становится на почву евклидовой геометрии и пытается доказать ее справедливость. Это тем более удивительно, что он ясно понимал отсутствие противоречий в гиперболической геометрии, развивая соответствующую ей тригонометрию и применял ее с успехом к целому ряду задач.

Аксиоматические исследования этого периода весьма ненаглядны и крайне трудны для понимания, так что вполне можно говорить о „дебрах дремучего леса исчислений Лобачевского“. Проективное мероопределение, с которым мы познакомились в первой части этой книги, пролагает удобную просеку через этот дремучий лес, так что для понимания неевклидовой геометрии и, в частности, также для доказательства ее непротиворечивости изучение трудных исследований того периода становится совершенно излишним. Тем более мы должны изумляться глубокому уму исследователя, который пробился к ясному конечному результату, не имея перед собой наглядной картины отношений, о которых идет речь.

§ 3. Основы теории поверхностей

Дальнейшее развитие неевклидовой геометрии определяется появлением дифференциально-геометрической точки зрения. В настоящем параграфе мы приведем некоторые предложения из теории поверхностей, необходимые для понимания этой связи.

На всякой поверхности в евклидовом пространстве выделяются некоторые кривые, которые называются *геодезическими линиями*. Они определяются тем свойством, что длина подобной кривой между всякими двумя достаточно близкими точками поверхности меньше, чем длина всех соседних кривых поверхности, соединяющих эти две точки¹⁾. Задача о нахождении геодезических линий методами вариационного исчисления сводится к решению системы весьма сложных дифференциальных уравнений. В случае плоскости геодезические линии, как это видно из их определений, являются прямыми этой плоскости. Под расстоянием, измеренным по поверхности, мы понимаем длину дуги соответствующей геодезической линии.

¹⁾ „Im Grossen“ геодезические линии могут и не обладать этим свойством; пример — сфера и ее большие круги. — Подробнее об этом см., например, B l a s c h k e, Differentialgeometrie, I, § 83.

Мы будем говорить, что две поверхности изгибаемы друг на друга, если можно поставить в соответствие точкам одной из них точки другой таким образом, чтобы (измеренные по поверхности) расстояния между соответствующими парами точек равнялись между собой; следовательно, изгибание одной поверхности на другую является *сохраняющим длины отображением* первой поверхности на вторую. Если мы вообразим небольшой кусок одной поверхности сделанным из нерастяжимого, но идеально гибкого материала, то мы сможем его после надлежащего изгибания положить без складок и разрывов на соответствующий кусок второй поверхности, которую мы мыслим себе абсолютно твердой. Если бы мы это попытались сделать в случае двух произвольных поверхностей, то первая поверхность, вообще говоря, либо разорвалась бы, либо образовала складки.

Особое значение имеют *поверхности, которые могут быть изгибаемы или развертываемы на плоскость* и которые для краткости называют просто *развертывающимися* поверхностями. К их числу, в частности, принадлежат цилиндр и конус. Всякая фигура, нарисованная на развертывающейся поверхности, может быть посредством развертывания наложена на соответствующую фигуру евклидовой плоскости; следовательно, с двумерной точки зрения (т. е., если рассматривать только господствующее на поверхности мероопределение) обе эти фигуры являются конгруэнтными. Поэтому на *развертывающихся* поверхностях точно так же, как и на плоскости, имеет место *евклидова геометрия*, только теперь вместо прямых линий плоскости приходится говорить о геодезических линиях поверхности, так как эти последние переходят при развертывании в прямые линии плоскости. При всех этих исследованиях мы всегда должны ограничиваться достаточно малыми кусками поверхности, потому что „im Grossen“ *развертывающиеся* поверхности, как, например, круглый цилиндр, обладают совсем другой связностью, чем евклидова плоскость (ср. гл. IX).

Мы получим необходимые и достаточные условия того, что две поверхности могут быть изгибаемы одна на другую, если рассмотрим *элемент длины дуги* (линейный элемент) поверхности. Пусть поверхность определяется в прямоугольной декартовой системе координат x, y, z уравнениями:

$$x = F_1(u, v), \quad y = F_2(u, v), \quad z = F_3(u, v),$$

причем все три функции предполагаются непрерывными и по крайней мере дважды дифференцируемыми. Мы выделим на этой поверхности некоторую определенную кривую, если свяжем параметры или „координаты на поверхности“ u и v каким-нибудь уравнением: $\psi(u, v) = 0$. В частности, мы назовем оба семейства кривых $u = \text{const.}$ и $v = \text{const.}$ *координатными кривыми избранного нами представления поверхности*. Если мы произведем преобразование:

$$u' = \varphi_1(u, v), \quad v' = \varphi_2(u, v),$$

с необращающимся в нуль функциональным определителем, то мы получим:

$$x = \overline{F}_1(u', v'), \quad y = \overline{F}_2(u', v'), \quad z = \overline{F}_3(u', v').$$

Эти уравнения изображают ту же самую поверхность, только мы теперь перешли к некоторой другой системе координат.

Длина дуги кривой $\varphi(u, v) = 0$ или $u = f(v)$ на поверхности с концами в точках u_1, v_1 и u_2, v_2 дается интегралом:

$$\begin{aligned} L &= \int ds = \int \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2} = \int \sqrt{E du^2 + 2F du dv + G dv^2} = \\ &= \int_{v_1}^{v_2} \sqrt{E \left(\frac{du}{dv}\right)^2 + 2F \frac{du}{dv} + G} \cdot dv, \end{aligned}$$

причем величины E, F, G являются следующими однозначными определенными функциями от u и v :

$$E = \left(\frac{\partial F_1}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial F_2}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial F_3}{\partial u}\right)^2,$$

$$F = \frac{\partial F_1}{\partial u} \cdot \frac{\partial F_1}{\partial v} + \frac{\partial F_2}{\partial u} \cdot \frac{\partial F_2}{\partial v} + \frac{\partial F_3}{\partial u} \cdot \frac{\partial F_3}{\partial v},$$

$$G = \left(\frac{\partial F_1}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial F_2}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial F_3}{\partial v}\right)^2.$$

Выражение ds называется соответствующим данной поверхности *линейным элементом*; он изображается *квадратным корнем из функции второй степени от дифференциалов координат*. Линейный элемент является однозначно определенным, коль скоро задано определенное представление поверхности. Существенным является то обстоятельство, что *квадратичная форма $ds^2 = E du^2 + 2F du \cdot dv + G dv^2$ всегда бывает положительно определенной* (ср. стр. 80), потому что она по своему определению может быть преобразована к чистой сумме квадратов $ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$.

Теперь мы можем сформулировать условие наложимости двух поверхностей следующим образом: *Две поверхности с линейными элементами:*

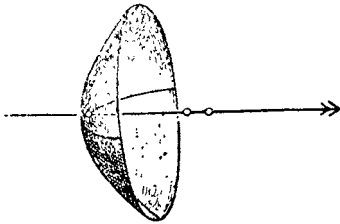
$$ds^2 = E du^2 + 2F du dv + G dv^2 \quad \text{и} \quad ds'^2 = E' du'^2 + 2F' du' dv' + G' dv'^2,$$

тогда и только тогда изгибаемы одна в другую, когда существуют такие две функции: $u' = \varphi_1(u, v)$, $v' = \varphi_2(u, v)$, с помощью которых второе дифференциальное выражение преобразуется в первое: $ds^2 = ds'^2$.

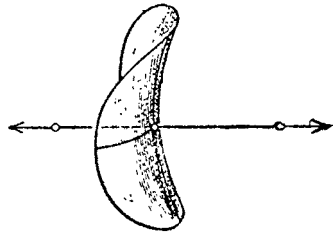
Для наших дальнейших рассуждений особенное значение будет иметь понятие „кривизна“. Если мы проведем через три

точки какой-нибудь плоской кривой окружность и затем заставим эти три точки неограниченно сближаться, то построенный круг будет приближаться к некоторому определенному предельному положению, к так называемому *кругу кривизны*; его радиус называется *радиусом кривизны*, а обратная величина радиуса кривизны называется *кривизной* кривой в рассматриваемой точке.

Если мы проведем через какую-нибудь не особую точку поверхности нормаль к нашей поверхности, то всякая плоскость, проходящая через эту нормаль, будет пересекать поверхность по некоторой плоской кривой, которую называют *нормальным сечением*. Возьмем теперь на поверхности какую-нибудь определенную точку P и рассмотрим все проходящее через нее



Черт. 214.



Черт. 215.

нормальные сечения. Может случиться, что кривизны всех этих нормальных сечений в точке P будут одинаковыми, как это, например, имеет место для всех точек шаровой поверхности; подобную точку мы будем называть *точкой округления* поверхности. В противоположном случае существуют два выделяющихся взаимно перпендикулярных нормальных сечения, кривизны которых в точке P имеют максимальное и минимальное значения. Соответствующие радиусы кривизны R_1 и R_2 называются *главными радиусами кривизны*, а их обратные величины $\frac{1}{R_1}$ и $\frac{1}{R_2}$ — *главными кривизнами* поверхности в рассматриваемой точке. *Кривизной же поверхности в рассматриваемой точке* называется произведение обеих главных кривизн:

$$K = \frac{1}{R_1 \cdot R_2}.$$

Центры обоих главных кругов кривизны для рассматриваемой точки могут лежать как на одной и той же полунормали (черт. 214), так и на различных полунормальных¹⁾ (черт. 215).

¹⁾ На черт. 214 и 215 главные нормальные сечения изображены лежащими в вертикальной и горизонтальной плоскостях. На черт. 215 главный радиус кривизны, соответствующий вертикальному нормальному сечению, идет направо, а соответствующий горизонтальному нормальному сечению, — налево.

Если мы припишем расстоянию точек одной полу нормали от точки P положительный знак, а расстоянию точек другой полу нормали от точки P — отрицательный знак, то в первом случае кривизна будет положительной, а во втором — отрицательной. Поэтому подобные куски поверхности различают как *положительно искривленные* и *отрицательно искривленные*; вместо этих терминов употребляют также термины: *эллиптическая* и *гиперболическая кривизна*. Кусок поверхности с положительной кривизной может быть таким образом приложен к плоскости, что эта плоскость будет касаться поверхности; напротив, в случае куска поверхности отрицательной кривизны это невозможно, так как в этом случае касательная плоскость имеет с поверхностью действительное пересечение.

Переходным случаем между точками поверхности, в которых кривизна положительна или отрицательна, являются точки, в которых один из главных радиусов кривизны обращается в бесконечность; в этих точках поверхность имеет нулевую кривизну и называется в них *параболически искривленной*. Простейшие примеры этого дают плоскости, цилиндры и конусы, которые параболически искривлены во всех регулярных точках поверхности.

Если мы будем изображать поверхности уравнениями, приведенными на стр. 303, и будем пользоваться обозначениями E, F, G , указанными на стр. 304, то мы получим следующее *аналитическое выражение для кривизны*¹⁾:

$$K = \frac{1}{4(EG - F^2)^2} \cdot \{E(E_v G_v - 2F_u G_v + G_u^2) + \\ + G(E_u G_u - 2F_v E_u + E_v^2) + \\ + F(E_u G_v - E_v G_u + 4F_u F_v - 2F_u G_u - 2F_v F_v) + \\ + 2(EG - F^2)(2F_{uv} - E_{vv} - G_{uu})\}.$$

Следовательно, имеет место важная теорема (так называемая „theorema egregium“ теории поверхностей), что кривизна K зависит только от величин E, F, G и их производных. Если, далее, две поверхности могут быть отображены друг на друга с сохранением метрики, то по стр. 304 величины E, F, G для обеих этих поверхностей должны тождественно совпадать при надлежащем выборе системы координатных кривых; но тогда и кривизны этих поверхностей должны тождественно совпадать в соответствующих точках, так как кривизны зависят только от величин E, F, G . Таким образом равенство кривизн в соответствующих точках является необходимым (но, вообще говоря, недостаточным) условием для изгибаемости одной поверхности

¹⁾ „Gauss Werke“, т. IV, Disquisitiones generales circa superficies curvas. S. 236.

на другую. Из этой теоремы, в частности, получается, что все поверхности, могущие быть развернутыми на плоскость, имеют кривизну, всюду равную нулю¹⁾.

Исторически теория кривых поверхностей начинается с Эйлера (Euler, 1707—1783) и Монжа (Monge, 1746—1818)²⁾. В своей работе „Application de l'analyse à la géométrie“ („Применение анализа к геометрии“), впервые появившейся в 1807 г., Монж исследует прежде всего вопрос о развертываемости поверхности на плоскость. Дальнейшие теоремы этого параграфа восходят к Гауссу, знаменитая работа которого „Disquisitiones generales circa superficies curvas“³⁾ появилась в 1828 г. в шестом томе „Göttinger Abhandlungen“.

§ 4. Связь плоской неевклидовой геометрии с теорией поверхностей

Те поверхности, которые во всех своих точках имеют одну и ту же кривизну, называются *поверхностями постоянной кривизны*. Так как они находятся в тесной связи с неевклидовой геометрией, то нам нужно познакомиться с ними ближе. Эти поверхности определяются сложными дифференциальными уравнениями, решения которых до сих пор удалось найти только для простейших специальных случаев⁴⁾. Так, например, могут быть найдены *все поверхности нулевой кривизны*; мы получаем здесь четыре типа: плоскости, цилиндры, конусы и те поверхности, которые могут быть получены движением касательной к данной пространственной кривой. Далее Миндинг (Minding) определил *все поверхности вращения постоянной кривизны*⁵⁾. Из гауссова наследства мы знаем, что уже в 1827 г. Гаусс нашел эти поверхности; но он ничего о них не опубликовал, подобно тому как ничего не опубликовал и о неевклидовой геометрии⁶⁾. Сейчас мы вкратце прореферлируем результаты Миндинга.

Если мы возьмем в качестве оси вращения ось Z и обозначим расстояние точки поверхности от этой оси через r , то

¹⁾ В этом случае (как и вообще всегда в случае поверхностей постоянной кривизны, ср. стр. 310) совпадение кривизн является также и достаточным условием для развертываемости рассматриваемых поверхностей. Значит, все поверхности, имеющие во всех точках нулевую кривизну, могут быть развернуты на плоскость.

²⁾ Ср. замечания о школе Монжа на стр. 20.

³⁾ Общие исследования о кривых поверхностях. Вновь переиздано в „Gauss Werke“ т. IV, стр. 217. Ср., далее, „Gauss Werke“, т. X, 2, Abh. 4; Stäckel, Gauss als Geometer, стр. 103 и сл.

⁴⁾ Литература о поверхностях постоянной кривизны указана в „Enzyklopädie d. Math. Wiss.“, т. III, 3, 1; v. Lilienthal, Besondere Flächen, стр. 333—314.

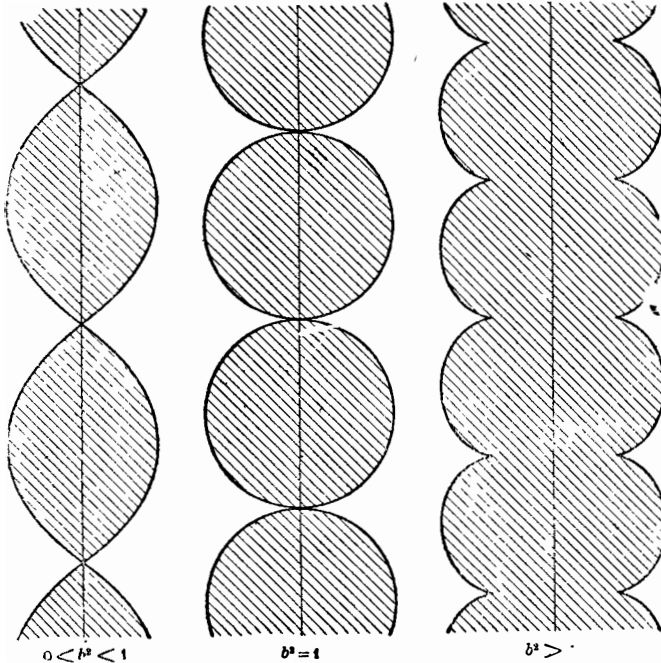
⁵⁾ Minding (профессор в Дерпте), „Crelles Journ.“, т. 19 и 20, 1839—1840.

⁶⁾ Ср. „Gauss Werke“, т. X, 2, Abh. 4; Stäckel, Gauss als Geometer, стр. 109.

кривая, являющаяся меридианом некоторой поверхности постоянной положительной кривизны $\frac{1}{a^2}$, должна иметь уравнение:

$$z = \int \sqrt{\frac{a^2(1-b^2) + r^2}{a^2b^2 - r^2}} dr,$$

причем b обозначает произвольную постоянную. В зависимости от выбора произвольной постоянной b получаются три различных формы меридианных кривых, изображенные на черт. 216. В первом случае соответствующая поверхность состоит из следующих друг за другом веретенообразных частей, в последнем —



Черт. 216.

из расположенных друг под другом подушек, соединяющихся по ребрам возврата¹⁾. Во втором промежуточном случае соответствующая поверхность состоит из цепи следующих друг за другом шаровых поверхностей²⁾.

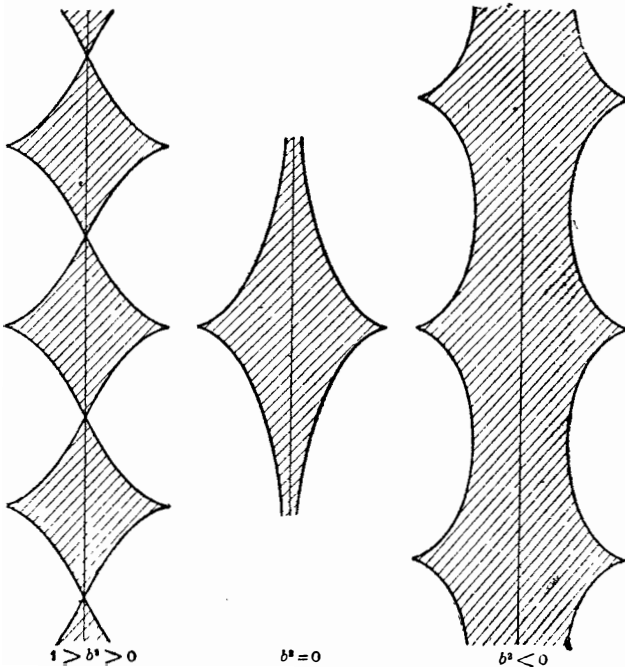
¹⁾ Надо отметить, что части поверхности образуют между собой угол при каждом ребре возврата.

²⁾ b^2 должно быть всегда положительным, так как в противном случае для всех значений r подкоренное количество было бы отрицательным (a^2 положительно). Для $b^2=1$ получается элементарный интеграл. На черт. 216 $a^2=1$, а $b^2=0,64$, $b^2=1$, и $b^2=1,44$; единичный отрезок равняется радиусу круга.

Аналогичное положение вещей мы имеем и в случае поверхностей вращения постоянной отрицательной кривизны $-\frac{1}{a^2}$. Эти поверхности (при тех же предположениях, как и выше) удовлетворяют уравнению:

$$Z = \int \sqrt{\frac{a^2(1-b^2) - r^2}{a^2b^2 + r^2}} dr.$$

Опять-таки в зависимости от выбора b получаются три различных формы (черт. 217). Первая форма состоит из ряда отдель-



Черт 217.

ных частей, примыкающих друг к другу в конической точке, каждая из этих частей, кроме того, имеет посредине ребро возврата. Последняя форма состоит из ряда поставленных друг на друга колец, причем каждые два следующие друг за другом кольца смыкаются между собой вдоль ребра возврата. Вторая форма является промежуточной между двумя уже рассмотренными; она имеет только одно ребро возврата, от которого обе ее части простираются в бесконечность, причем они асимптотически приближаются к оси вращения. Эта последняя поверхность, меридианной кривой которой является хорошо известная трактриса, называется также *псевдосферой*. Мы будем называть эти три

типа (черт. 217) коническим, аperiodическим и кольцеобразным типами¹⁾.

Далее, Миндинг доказал в своих работах, цитированных на стр. 307, что все поверхности одной и той же постоянной кривизны могут быть путем изгибания наложены друг на друга; следовательно, здесь одинаковость кривизны является не только необходимым, но и достаточным условием изгибаемости (ср. сноску 1 на стр. 307). Так, в частности, все поверхности постоянной положительной кривизны $K = \frac{1}{a^2}$ могут быть наложены на сферу радиуса a . Отсюда следует, что на всех поверхностях постоянной кривизны (в достаточно малом куске поверхности) имеет место эллиптическая геометрия, подобно тому, как это происходит на сфере; при этом большим кругам сферы соответствуют геодезические линии поверхности. Это утверждение надо понимать в таком же смысле, как и аналогичное утверждение о наличии евклидовой геометрии на развертывающихся поверхностях (стр. 303).

Если мы аналогичным образом будем изучать геометрию на поверхностях постоянной отрицательной кривизны, то нам прежде всего придется рассматривать треугольники, образованные из геодезических линий. Из результатов Миндинга следует, что формулы, устанавливающие связь между углами и сторонами в подобном треугольнике, могут быть получены просто путем замены в формулах сферической геометрии радиуса r величиной ir (если кривизна нашей поверхности $K = -\frac{1}{r^2}$). Отсюда по стр. 217 непосредственно получается, что на поверхностях постоянной отрицательной кривизны имеет место гиперболическая геометрия. Миндинг опубликовал это предположение в 1839 г. в 19-м томе „журнала Крелля“; в том же самом журнале Н. И. Лобачевский в 1837 г. в 17-м томе опубликовал соответствующие замечания в своей „Géométrie imaginaire“; но на связь между этими двумя результатами впервые было указано

¹⁾ Здесь b^2 должно быть меньше единицы (a^2 опять положительно). Для $b^2=0$ мы получаем элементарный интеграл:

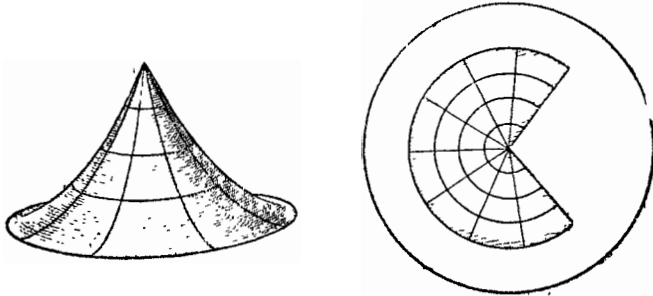
$$z = \int \frac{\sqrt{a^2 - r^2}}{r} dr = a \left(\ln \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} + \cos \varphi \right),$$

причем мы положили $r = a \sin \varphi$; постоянная интегрирования определена так, что при $r = a$, $z = 0$. На черт. 217 $a^2 = 1$, а $b^2 = 0,25$, соответственно $b^2 = 0$ и $b^2 = 0,25$; единичный отрезок равняется расстоянию вершин трактрисы от линии симметрии. Далее, мы отметим замечательную связь между поверхностями вращения постоянной положительной и отрицательной кривизн $+a$ и $-a$, установленную Бельтрами в 1864 г. Рассмотрим семейство поверхностей, получающееся путем всевозможных трансляций вдоль оси вращения некоторой определенной поверхности вращения с неравной нулю кривизной a . Тогда всякая поверхность вращения, ортогонально пересекающая все отдельные поверхности полученного семейства, имеет постоянную кривизну $-a$. Из сферы таким образом получается псевдосфера.

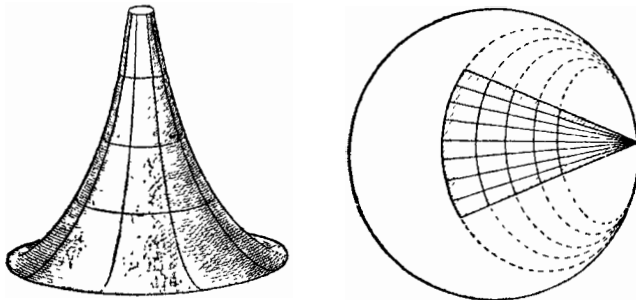
только в 1868 г. итальянским математиком Бельтрами (Beltrami)¹⁾. Впрочем эта связь была известна уже Риману, который в своей диссертационной лекции 1854 г. (ср. стр. 314) исходил из этой связи; но эти римановы исследования были опубликованы только после его смерти одновременно с работой Бельтрами.

Чтобы наглядно рассмотреть связь между гиперболической геометрией и поверхностями постоянной отрицательной кривизны, мы будем отображать рассматриваемые поверхности с сохранением метрики на гиперболическую плоскость; при этом разумеется измерения на поверхностях производятся в смысле пространственной евклидовой геометрии. Начнем с изучения конического типа и рассмотрим ту часть этой поверхности, которая простирается от ребра возврата до конической точки (черт. 218, слева). Этот кусок поверхности мы разрежем вдоль какой-нибудь меридиональной кривой для того, чтобы устранить ту особенную связность, которая присуща нашей поверхности в качестве поверхности вращения, и вообразим себе таким образом полученный кусок наложенным на гиперболическую плоскость. Тогда широтные круги (параллели) нашей поверхности будут изображаться дугами концентрических кругов 1-го рода на гиперболической плоскости, так как все их точки равно удалены от некоторой достижимой точки, именно от конической точки поверхности. Меридианы же перейдут (в качестве ортогональных траекторий к широтным кругам) в прямолинейные лучи, выходящие из центра кругов на гиперболической плоскости; в самом деле, все меридианы встречаются в конической точке поверхности. Вследствие этого мы получаем на гиперболической плоскости образ рассматриваемого куска поверхности, соответствующий образу конуса на евклидовой плоскости (черт. 218, справа). После того как мы перенесли систему широтных кругов и меридианов, уже нетрудно произвольную фигуру поверхности отобразить на соответствующую фигуру гиперболической плоскости, и наоборот. Аналогичным образом мы поступаем при отображении аperiodического и кольцеобразного типа на гиперболическую плоскость, вообразив себе всякий раз изображенные на черт. 219 и 220, слева, куски поверхности разрезанными вдоль одного из меридианов. При этом сами меридианы отображаются в прямые линии гиперболической плоскости, так как они являются геодезическими линиями рассматриваемой поверхности. Широтные же круги отображаются в систему концентрических кругов, описанных в первом случае из некоторой бесконечно удаленной точки, а во втором случае — из некоторой идеальной точки гиперболической плоскости

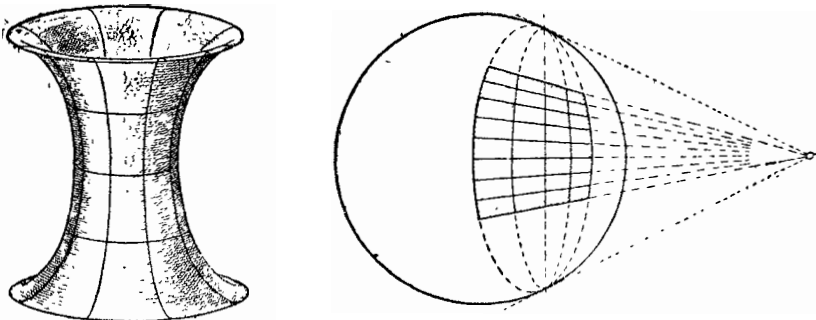
¹⁾ „Saggio di Interpretazione delle Geometria non-euclidea“ (Попытка интерпретации неевклидовой геометрии) „Giornale di Matematiche“, т. 5, 1868. Вновь переиздано в „Opere Mat. di Beltrami“, Милан 1902, т. 1, стр. 374. Характерно, что Бельтрами в начале своей работы защищает занятия неевклидовой геометрии и ссылается при этом на „всепревышающий авторитет“ Гаусса (намек на переписку Гаусса с Шумахером, ср. стр. 301).



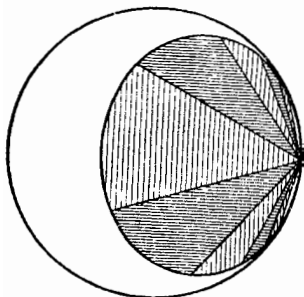
Черт. 218.



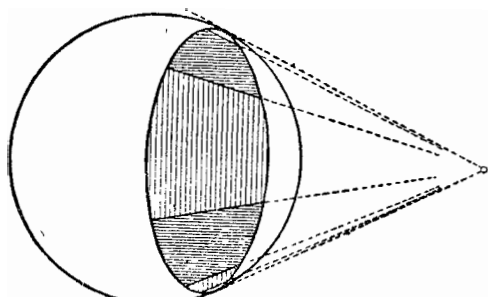
Черт. 219.



Черт. 220.



Черт. 221.



Черт. 222.

(черт. 219 и 220, справа). Следовательно, три типа поверхностей вращения постоянной отрицательной кривизны соответствуют как раз тем трем типам кругов, которые возможны в гиперболической геометрии.

Совершенно так же, как и в случае разворачивания круглого конуса на евклидову плоскость, мы можем и здесь все далее и далее продолжать разворачивать данный кусок поверхности на гиперболическую плоскость. При этом в случае конического типа уже после конечного числа разворачиваний возникнет вторичное покрытие лежащего в гиперболической плоскости рассматриваемого нами куска этой плоскости. В случае аperiодического или кольцеобразного типа мы должны, напротив, бесчисленное множество раз разворачивать поверхность вращения, прежде чем будет покрыт весь соответствующий кусок гиперболической плоскости (черт. 221 и 222); о многократном покрытии этого последнего здесь не может быть и речи. Последний род разворачивания может быть сравним с качением круглого цилиндра по евклидовой плоскости.

Из приведенного выше отображения видно, что всю гиперболическую геометрию в целом невозможно воспроизвести на поверхности вращения постоянной отрицательной кривизны; это происходит потому, что обязательно имеющиеся ребра возврата ставят неодолимую преграду. Можно было бы думать, что существуют другие поверхности постоянной отрицательной кривизны, на которых было бы возможно изображение всей гиперболической геометрии в целом. Но возможность этого была исключена в 1901 г. Гильбертом в его работе „О поверхностях постоянной гауссовой кривизны¹⁾“, в которой он показал, что всякая поверхность постоянной отрицательной кривизны должна иметь в евклидовом пространстве ребро возврата или какие-нибудь другие особенности. *Вместе с тем изображение гиперболической геометрии на поверхностях постоянной отрицательной кривизны является значительно менее полным, чем проективное изображение, из которого мы исходим в нашем изложении.*

В заключение мы обратим внимание еще на следующее обстоятельство. Во всех трех плоских геометриях возможны ∞^3 движений (ср. стр. 207). В соответствии с этим кусочек жести, в точности прилегающий к некоторой определенной поверхности постоянной кривизны, допускает ∞^3 движений по поверхности, не переставая все время полностью прилегать к рассматриваемой поверхности. При этом наш кусочек жести, вообще говоря, не будет уже оставаться твердым телом, а будет известным образом изгибаться, однако, не изменяя своих внутренних метрических свойств. *Поверхности постоянной кривизны являются единственными поверхностями, на которых можно производить указанным образом ∞^3 движений.*

¹⁾ „Transactions of the American Math. Soc.“, т. 2, 1901. Вновь переиздано в Hilbert, Grundlagen der Geometrie в качестве приложения V

. Расширение дифференциально-геометрической точки зрения, произведенное Риманом

Связь между геометрией на поверхности постоянной отрицательной кривизны и гиперболической геометрией, установленная в 1868 г. Бельтрами (ср. стр. 310), тесно связана с значительно далее идущими мыслями, которые были развиты уже в 1854 г. Риманом в его знаменитой диссертационной лекции „О гипотезах, лежащих в основании геометрии“. Эта работа, имеющая исключительное значение для современного развития математики, не предназначалась Риманом для опубликования и потому была напечатана впервые лишь после его смерти в 1868 г. ¹⁾ Из всех присутствовавших на диссертационной лекции Римана, вероятно, Гаусс был единственным, кто вполне понял значение изложенных в ней новых мыслей. Говорят, что хотя он и не высказался по поводу этой лекции, но в глубоком раздумьи отправился домой.

Риман кладёт в основу своих исследований n переменных x_1, x_2, \dots, x_n , из которых каждая может принимать все действительные значения. Совокупность этих систем значений Риман называет *многообразием n измерений*; систему фиксированных значений $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n$ он рассматривает как точку в этом многообразии. При этом Риман намеренно избегает слова „пространство“, потому что позднее он рассматривает данное нам наглядно пространство как специальный случай трехмерного многообразия.

Далее, пусть в рассматриваемом нами многообразии задан *линейный элемент* посредством формулы:

$$ds^2 = \sum a_{\lambda\lambda} dx_\lambda dx_\lambda, \quad a_{\lambda\lambda_1} = a_{\lambda_1\lambda},$$

причем $a_{\lambda\lambda}$ могут быть произвольными функциями переменных x_i , для которых (в соответствии со стр. 304) квадратичная форма должна являться *положительно определенной*. Посредством линейного элемента метрические отношения в соответствующем многообразии устанавливаются следующим образом. Если дана какая-нибудь кривая $x_i = f_i(u)$ ($i = 1, 2, \dots, n$), то длина ее дуги, заключенной между двумя точками u_1 и u_2 , определяется как выражение:

$$L = \int_{u_1}^{u_2} \sqrt{\sum a_{\lambda\lambda} dx_\lambda dx_\lambda} = \int_{u_1}^{u_2} \sqrt{\sum a_{\lambda\lambda} f'_\lambda f'_\lambda} du,$$

которое, после подстановки приведенных выше функций в $a_{\lambda\lambda}$, превращается в интеграл от однозначно определенной функции переменной u . Геодезические линии рассматриваемого многообразия определяются посредством того требования, что для геоде-

¹⁾ Изложено Дедекиндом в тринадцатом томе Göttinger Abh.; вновь переиздано в „Rimmanns Werke“, стр. 272; недавно переиздано вновь Вейлем 2-е изд., Берлин 1921.

зической линии L имеет меньшее значение, чем для любой другой кривой, соединяющей те же точки u_1 и u_2 . Следовательно, они определяются вариационным условием $\delta \int_{u_1}^{u_2} \sqrt{\sum a_{\lambda\lambda} dx_\lambda dx_\lambda} = 0$,

из которого с помощью методов вариационного исчисления получаются соответствующие дифференциальные уравнения системы геодезических линий. Из каждой точки рассматриваемого многообразия выходит $(n - 1)$ -мерная связка подобных геодезических линий, которые соответствуют прямым линиям n -мерной евклидовой геометрии.

Для пояснения изложенного мы вычислим *линейный элемент в неевклидовых геометриях*. Для этого мы будем исходить из прямоугольной декартовой системы координат $x = x_1 : x_3, y = x_2 : x_3$. В качестве фундаментального образа в случае эллиптической геометрии мы возьмем коническое сечение $x_1^2 + x_2^2 + 4c_e^2 x_3^2 = 0$. Постоянную расстояния, стоящую перед логарифмом двойного отношения при проективном мероопределении, мы принимаем равной c_e . Если мы в приведенную на стр. 189 арксинус-формулу для расстояния между двумя точками $y_1 : y_2 : y_3$ и $z_1 : z_2 : z_3$ введем аффинные координаты $y_1 : y_3 = x, y_2 : y_3 = y$ и $z_1 : z_3 = x, z_2 : z_3 = y$, то эта формула примет следующий вид:

$$E = 2c_e \arcsin \frac{\sqrt{4c_e^2(x - \bar{x})^2 + 4c_e^2(y - \bar{y})^2 + (xy - \bar{y}\bar{x})^2}}{\sqrt{x^2 + y^2 + 4c_e^2} \sqrt{\bar{x}^2 + \bar{y}^2 + 4c_e^2}}$$

Если мы возьмем обе точки близкими друг к другу и положим $\bar{x} = x + dx, \bar{y} = y + dy$, то получим следующее выражение для линейного элемента:

$$ds_1 = 2c_e \arcsin \frac{\sqrt{4c_e^2 dx^2 + 4c_e^2 dy^2 + (x dy - y dx)^2}}{\sqrt{x^2 + y^2 + 4c_e^2} \sqrt{(x + dx)^2 + (y + dy)^2 + 4c_e^2}}$$

Во втором из корней, стоящих в знаменателе, мы можем пренебречь дифференциалами по сравнению с конечным выражением $x^2 + y^2 + 4c_e^2$. Далее мы можем, так как дело идет о произвольно малых величинах, заменить синус его аргументом. Вследствие этого мы получим для линейного элемента эллиптической геометрии выражение:

$$\begin{aligned} ds_1 &= 2c_e \frac{\sqrt{4c_e^2 dx^2 + 4c_e^2 dy^2 + (x dy - y dx)^2}}{x^2 + y^2 + 4c_e^2} = \\ &= \frac{\sqrt{dx^2 + dy^2 + \frac{(x dy - y dx)^2}{4c_e^2}}}{1 + \frac{x^2 + y^2}{4c_e^2}} \end{aligned}$$

Если мы всюду заменим величину c_0 величиной $-ic_h$, то мы получим соответствующую формулу гиперболической геометрии. Следовательно, линейный элемент гиперболической геометрии имеет следующий вид:

$$ds_2 = \frac{\sqrt{dx^2 + dy^2 - \frac{(x dy - y dx)^2}{4c_h^2}}}{1 - \frac{x^2 + y^2}{4c_h^2}}.$$

Если мы будем неограниченно увеличивать c_0 или c_h , то мы в обоих случаях получим евклидов линейный элемент:

$$ds_2 = \sqrt{dx^2 + dy^2}.$$

Полученный результат мы можем также сформулировать следующим образом: *если мы будем рассматривать x, y как прямоугольные декартовы координаты евклидовой плоскости и будем определять длины кривых с помощью каждой из трех вышеприведенных формул для линейного элемента, то мы во всех трех случаях получим в качестве геодезических линий определенного нашими формулами риманова многообразия систему прямых, и все метрические соотношения тогда совпадут соответственно с эллиптической, гиперболической и евклидовой геометрией.*

В теории поверхностей для наших рассуждений особое значение имело понятие кривизны, так как эта последняя остается инвариантной при произвольном изгибании поверхности. Для того чтобы перенести это понятие на случай n -кратного многообразия, Риман прежде всего определяет систему геодезически х линий, соответствующих данному многообразию (ср. стр. 314–315); затем он рассматривает некоторую определенную точку P многообразия и две произвольные проходящие через нее геодезические линии, положительные направления которых в этой точке могут быть определены с помощью дифференциалов dx'_i и dx''_i ($i=1, 2, \dots, n$); соответствующий пучок геодезических линий, исходные направления которых в точке P даются посредством $dx_i = \lambda' dx'_i + \lambda'' dx''_i$, образуют тогда некоторое двумерное многообразие, имеющее в рассматриваемой точке некоторую определенную кривизну. Далее, Риман объединяет вместе кривизны всех подобных проходящих через точку P пучков геодезических линий в весьма сложное аналитическое выражение, которое называет *кривизной n -мерного многообразия в рассматриваемой точке*¹⁾.

Понятие поверхностей постоянной кривизны Риман следующим образом распространяет на случай n -мерного многообразия. При определении римановой кривизны, во-первых, играет роль выбор

¹⁾ В современном тензорном анализе римановых многообразий это выражение называется *тензором кривизны*. Между прочим, ср. стр. 214, где указано на те недоразумения, которые возникли, особенно в философской литературе, из-за выражения „кривизна“.

точки P , а, во-вторых, выбор двумерного многообразия геодезических линий, проходящих через точку P . Риман называет многообразиями постоянной кривизны те n -мерные многообразия, у которых кривизна этого двумерного многообразия остается неизменной, если, во-первых, произвольным образом вращать пучок геодезических линий вокруг точки P и, во-вторых, если произвольно перемещать точку P по рассматриваемому многообразию. Это понятие n -мерного многообразия постоянной кривизны является особенно важным результатом рассматриваемой работы Римана. Риман приводит без доказательства выражение для линейного элемента подобного многообразия, с которым мы познакомимся на стр. 333.

В дальнейшем ходе своей работы Риман показывает, что кусок n -мерного многообразия постоянной кривизны допускает ровно столько же движений как и n -мерная гиперплоскость; в обоих случаях число параметров, от которых зависят движения, равняется $\frac{n(n+1)}{2}$ (ср. стр. 206). Напротив, n -мерные многообразия непостоянной кривизны либо совсем не допускают движений, либо допускают их в меньшем числе (ср. стр. 313). Исходя из этой новой точки зрения, Риман переходит к тому, чтобы привлечь к рассмотрению и обычное пространство. Так как наше пространство допускает шестипараметрическую группу движений, посредством которых, во-первых, всякая точка может быть переведена во всякую другую точку и, во-вторых, всякий пучок геодезических линий — во всякий другой такой пучок, то Риман утверждает в обычном пространстве трехмерное многообразие постоянной кривизны. Далее, перед Риманом возникает вопрос, какое именно значение имеет эта постоянная кривизна. Если она равняется нулю, то получается обычная евклидова геометрия; если она отрицательна, то мы получаем гиперболическую геометрию Гаусса, Н. И. Лобачевского и Больяи. О случае же положительной кривизны до Римана еще не думали, или скорее эту возможность с самого начала отбрасывали, так как пространство (как это казалось само собой разумеющимся) рассматривалось бесконечно простирающимся. Риман указывает на то, что хотя пространство и неограниченно, но из его неограниченности отнюдь не следует его бесконечность. Благодаря этому он получает возможность *наряду со случаем отрицательной и нулевой кривизн рассматривать также и случай положительной кривизны и таким образом наряду с евклидовой и гиперболической геометриями поставить еще эллиптическую геометрию*. Думал ли при этом Риман о сферической или уже о самой эллиптической пространственной форме (ср. стр. 170 и сл. гл. IX), из текста его работы с уверенностью сказать нельзя.

Вполне понятно, что риманова диссертационная лекция тотчас по ее опубликовании вызвала всеобщее внимание математиков и что весьма быстро появилось большое число работ, посвященных разбираемым в ней вопросам. Мы здесь особенно укажем

на работы, которые посвящены вопросу о том, *почему линейный элемент ds должен быть квадратным корнем из положительно определенной квадратичной формы*. В самом деле, можно было бы попытаться совершенно таким же образом исходить, например, из корня четвертой степени из какого-нибудь выражения четвертой степени или даже из еще более сложной функции. Этим важным вопросом впервые с успехом занимался выдающийся как в области физики, так и в области физиологии исследователь Гельмгольц (Helmholtz)¹⁾. Так как Гельмгольц не был профессиональным математиком, то понятно, что его исследования не были вполне корректны с математической стороны, на что сильно нападал в особенности Ли (Lie)²⁾. Значение работ Гельмгольца заключается прежде всего в том, что они были прочитаны гораздо более широким кругом публики, чем какая-либо другая работа того времени о неевклидовой геометрии. Так, вскоре после этого развернувшаяся в кругу нематематиков (например, в философском кругу) популярная дискуссия о неевклидовой геометрии основывалась почти исключительно на работах Гельмгольца. В новейшее время гельмгольцева проблема вновь начинает разрабатываться различными исследователями с новых точек зрения³⁾.

§ 6. Конформные отображения неевклидовой плоскости

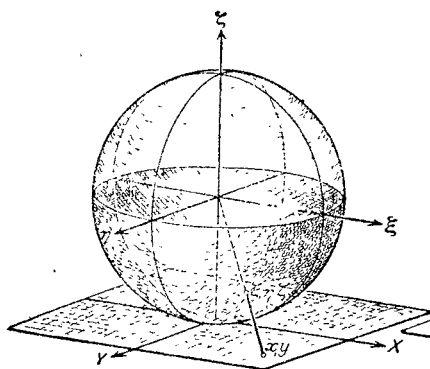
Если две поверхности можно отобразить одну на другую с сохранением длин, то линейный элемент ds одной поверхности в каждой ее точке равняется линейному элементу ds' в соответствующей точке другой поверхности. Особое значение имеет затем так называемое *конформное или сохраняющее углы отображение*, при котором соответствующие друг другу кривые всегда пересекаются под одинаковыми углами. Две поверхности только тогда могут быть конформно отображены друг на друга, когда в соответствующих точках обеих поверхностей $ds = M \cdot ds'$, причем M является какой-нибудь функцией точки; это условие одновременно является и необходимым и достаточным.

1) „Über die tatsächlichen Grundlagen der Geometrie“, лекция, прочитанная в 1868 г. на съезде немецких естествоиспытателей и врачей в Гейдельберге; „Über die Tatsachen die der Geometrie zugrunde liegen“, Göttinger Nachrichten, № 9, 1868. Обе работы переизданы в „Wiss. Abh. von Helmholtz“, т. II, стр. 610, соответственно стр. 618, Лейпциг 1883. В связи с этим мы укажем на третью интересную работу Гельмгольца „Über den Ursprung und die Bedeutung der geometrischen Axiome“, тетрадь 3 популярно-научных лекций Гельмгольца, стр. 21, Брауншвейг 1876.

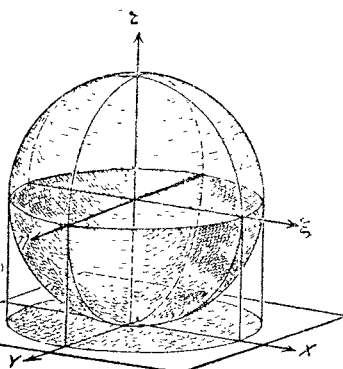
2) Ср., например, Lie, Theorie der Transformationsgruppen, т. III, стр. 437, Лейпциг 1893. Далее, Klein, Gutachten zur Verteilung des Lobatschewsky-Preises, „Math. Ann.“, т. 50, вновь переиздано в „Kleins. Ges. Math. Abh.“, т. I, стр. 384.

3) Например, Weyl, Mathematische Analyse des Raumproblems, 1923. Физическое условие, влекущее за собой появление квадратичной дифференциальной формы, имеется в работе Courant, Bernhard Riemann und die Mathematik der letzter hundert Jahre, „Naturwissenschaften“, 1926, тетрадь 52, стр. 1275 и 1277.

А. Конформное отображение эллиптической и гиперболической плоскостей на сферу. В § 4 мы видели, что эллиптическую и гиперболическую плоскости нельзя отобразить с сохранением длин на одну и ту же поверхность. В противоположность этому конформное отображение является более гибким, так как можно обе плоскости отобразить конформно на одну и ту же поверхность, в качестве которой мы здесь возьмем сферу. При этом мы подчеркнем следующее существенное отличие от обычного конформного отображения. В то время как вообще две друг на друга отображаемые поверхности рассматриваются в евклидовой метрике, здесь обе поверхности мы будем рассматривать в различных метриках, именно: неевклидову плоскость



Черт. 223. Центральная проекция эллиптической плоскости от центра шара на поверхность шара.



Черт. 224. Ортогональная проекция гиперболической плоскости на поверхность шара.

в метрике, соответствующей неевклидовой геометрии, а сферу — в евклидовой метрике.

Для того чтобы получить искомое конформное отображение, мы будем исходить из плоской прямоугольной декартовой системы координат x, y и возьмем уравнение фундаментальной кривой эллиптической или соответственно гиперболической геометрии в виде:

$$x^2 + y^2 + 4c_e^2 = 0, \text{ или соответственно } x^2 + y^2 - 4c_h^2 = 0.$$

Далее, возьмем сферу радиуса $2c_e$ или $2c_h$, касающуюся нашей плоскости в начале координат, и спроектируем точки сферы с помощью центральной проекции из центра сферы или с помощью ортогональной проекции на нашу плоскость (черт. 223 и 224). Тогда нижнее полушарие в первом случае отобразится на всю эллиптическую плоскость, а во втором случае — на внутреннюю область фундаментальной кривой гиперболической геометрии. Мы утверждаем, что отображения являются конформными в указанном выше смысле.

В случае эллиптической геометрии наше утверждение непосредственно вытекает из рассуждений, приведенных на стр. 167 и сл. (ср. также стр. 212), где мы определяли эллиптическую геометрию именно таким способом, поэтому рассматриваемое отображение является сохраняющим длины, а значит и конформным. Связь между точками x, y эллиптической плоскости и соответствующими точками ξ, η, ζ дается следующими уравнениями:

$$\xi = \frac{2c_e x}{\sqrt{4c_e^2 + x^2 + y^2}}, \quad \eta = \frac{2c_e y}{\sqrt{4c_e^2 + x^2 + y^2}}, \quad \zeta = \frac{-4c_e^2}{\sqrt{4c_e^2 + x^2 + y^2}},$$

причем всюду берется положительное значение корня, так как мы плоскость отображаем на нижнее полушарие.

В случае гиперболической геометрии мы проводим доказательство конформности путем вычисления соответствующего линейного элемента. В пространственной декартовой системе координат ξ, η, ζ (ср. черт. 224) уравнением нашей сферы является уравнение: $\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 4c_h^2$. При рассматриваемом проектировании лежащая в гиперболической плоскости точка x, y отображается в следующую точку ξ, η, ζ сферы:

$$\xi = x, \quad \eta = y, \quad \zeta = -\sqrt{4c_h^2 - x^2 - y^2}.$$

Здесь надо брать отрицательное значение корня, так как мы отображаем гиперболическую плоскость на нижнее полушарие. По стр. 316 линейный элемент рассматриваемой гиперболической геометрии имеет следующий вид:

$$ds_3 = \frac{\sqrt{dx^2 + dy^2 - \frac{(x dy - y dx)^2}{4c_h^2}}}{1 - \frac{x^2 + y^2}{4c_h^2}}.$$

Для линейного элемента сферы мы получаем:

$$d\sigma^2 = d\xi^2 + d\eta^2 + d\zeta^2 = \frac{4c_h^2(dx^2 + dy^2) - (x dy - y dx)^2}{4c_h^2 - x^2 - y^2}.$$

Поэтому

$$d\sigma = \frac{\sqrt{4c_h^2 - x^2 - y^2}}{2c_h} ds_3 = -\frac{\zeta}{2c_h} ds_3.$$

Следовательно, рассматриваемое отображение действительно является конформным.

Для дальнейшего существенно, что известная *стереографическая проекция евклидовой плоскости* на сферу (ср. черт. 225) также является конформным отображением. При этом система прямых и кругов на плоскости переходит в систему кругов на сфере. Обозначим, как это указано на черт. 225, пространствен-

ные координаты буквами ξ , η , ζ , а координаты евклидовой плоскости буквами x , y ¹⁾. В силу стереографической проекции координаты соответствующих точек на сфере и на плоскости связаны между собой следующим образом:

$$\xi = \frac{4a^2x}{x^2 + y^2 + 4a^2};$$

$$\eta = \frac{4a^2y}{x^2 + y^2 + 4a^2};$$

$$\zeta = \frac{a(x^2 + y^2 - 4a^2)}{x^2 + y^2 + 4a^2}$$

или

$$\bar{x} = \frac{2a\xi}{a - \zeta}, \quad \bar{y} = \frac{2a\eta}{a - \zeta}.$$

Линейным элементом евклидовой плоскости является $ds_2^2 = d\bar{x}^2 + d\bar{y}^2$. Для соответствующего линейного элемента на сфере мы получаем:

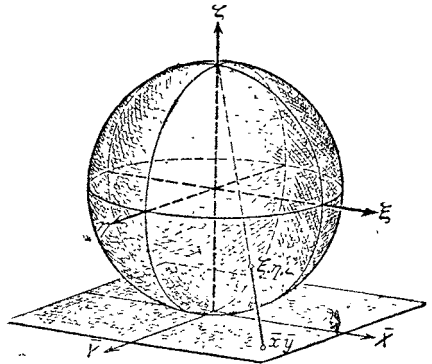
$$ds^2 = d\xi^2 + d\eta^2 + d\zeta^2 = \frac{16a^4(d\bar{x}^2 + d\bar{y}^2)}{(x^2 + y^2 + 4a^2)^2}$$

или

$$d\sigma = \frac{4a^2}{x^2 + y^2 + 4a^2} ds_2 = \frac{a - \zeta}{2a} ds_2.$$

Следовательно, рассматриваемое отображение является конформным.

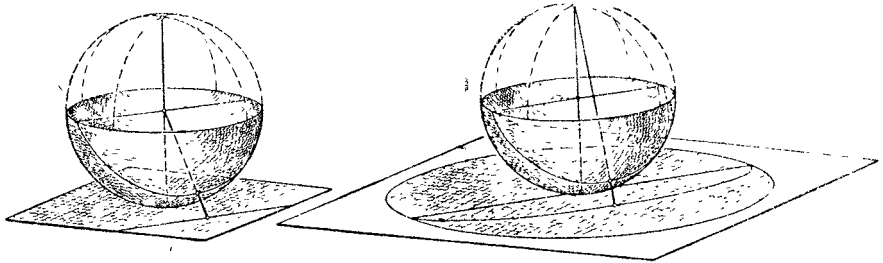
В. Конформное отображение эллиптической и гиперболической плоскостей на евклидову плоскость. Из рассмотренных отображений неевклидовых плоскостей на сферу мы можем непосредственно получить конформное отображение на евклидову плоскость путем конформного отображения указанным образом сначала неевклидовых плоскостей на сферу, а затем — путем конформного отображения с помощью стереографической проекции — сферы на евклидову плоскость (черт. 226 и 227). В обоих случаях образ экватора сферы мы будем называть *главным кругом*; при наших условиях он имеет радиус $4a$, или $4a_b$. Из черт. 226 и 227 видно, что, в силу двух следующих друг за другом проектирований, вся эллиптическая плоскость, а также и собственная область гиперболической плоскости, отобразятся на внутреннюю область главного круга, причем в случае эллиптической геометрии диаметрально противоположные точки периферии главного круга должны рассматриваться как тожде-



Черт. 225. Стереографическая проекция евклидовой плоскости на поверхность шара.

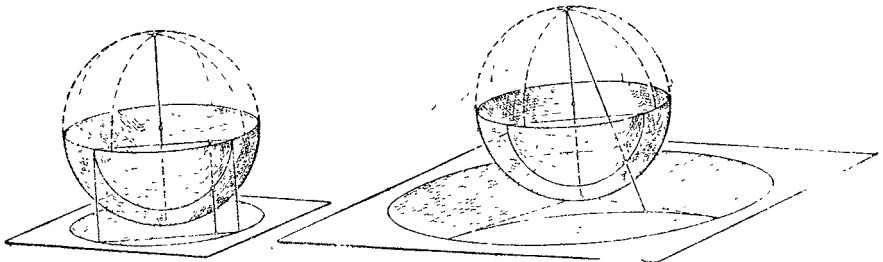
¹⁾ Мы вводим черточки над координатами x , y , чтобы избежать в дальнейшем смешения их с координатами x , y неевклидовой плоскости.

ственные. Прямые линии эллиптической геометрии при первом проектировании переходят в большие круги сферы, которые в свою очередь при втором проектировании переходят в круги евклидовой плоскости, *пересекающие периферию главного круга*



Черт. 226. Центральная проекция эллиптической плоскости. Следующая за ней стереографическая проекция.

в двух диаметрально противоположных точках. Напротив, прямые линии гиперболической геометрии при первом проектировании переходят в ортогонально пересекающие экватор сферы малые круги сферы, которые затем при стереографической про-



Черт. 227. Ортогональная проекция гиперболической плоскости. Следующая за ней стереографическая проекция.

екции переходят в круги евклидовой плоскости, *ортогональные окружности главного круга.*

Простое вычисление ¹⁾ показывает, что благодаря произведенным проектированиям точка x, y эллиптической или гиперболической плоскости отобразится в следующую точку x, y евклидовой плоскости:

<p><i>Эллиптическая геометрия:</i></p> $x = \frac{4c_e x (-2c_e + \sqrt{4c_e^2 + x^2 + y^2})}{x^2 + y^2},$ $y = \frac{4c_e y (-2c_e + \sqrt{4c_e^2 + x^2 + y^2})}{x^2 + y^2}.$	<p><i>Гиперболическая геометрия:</i></p> $x = \frac{4c_h x (2c_h - \sqrt{4c_h^2 - x^2 - y^2})}{x^2 + y^2},$ $y = \frac{4c_h y (2c_h - \sqrt{4c_h^2 - x^2 - y^2})}{x^2 + y^2}.$
--	--

¹⁾ Комбинирование вышеприведенных формул для отдельных проекций.

Соответствующий линейный элемент проще всего вычислить следующим образом. При отображении эллиптической плоскости на сферу мы имеем: $ds_1 = ds$; при следующей за ним стереографической проекции: $ds = \frac{2c_e - \zeta}{4c_e} ds_2 = ds_1$. Если мы подставим в это выражение координаты \bar{x} , \bar{y} евклидовой плоскости, то мы получим:

$$ds_1 = \frac{\sqrt{d\bar{x}^2 + d\bar{y}^2}}{1 + \frac{\bar{x}^2 + \bar{y}^2}{16c_e^2}}$$

Аналогичным образом в случае гиперболической геометрии мы получаем:

$$ds = -\frac{\zeta}{2c_h} ds_3, \quad ds = \frac{2c_h - \zeta}{4c_h} ds_2, \quad ds_3 = \frac{\zeta - 2c_h}{2\zeta} ds_2.$$

Отсюда, после подстановки евклидовых координат \bar{x} , \bar{y} , получается:

$$ds_3 = \frac{\sqrt{d\bar{x}^2 + d\bar{y}^2}}{1 - \frac{\bar{x}^2 + \bar{y}^2}{16c_h^2}}$$

Риман показал в своей диссертационной лекции, что вообще линейный элемент n -мерного многообразия постоянной кривизны может быть приведен к следующему простому виду (стр. 317):

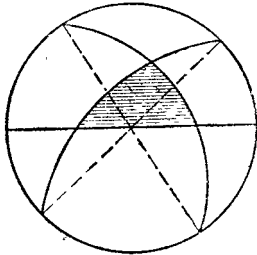
$$ds = \frac{\sqrt{dx_1^2 + dx_2^2 + \dots + dx_n^2}}{1 \pm \frac{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}{\kappa^2}}$$

Поэтому полученное выражение мы будем называть *римановой формой неевклидова линейного элемента*; при этом постоянная κ в двумерном случае является радиусом $4c_e$ или $4c_h$ главного круга.

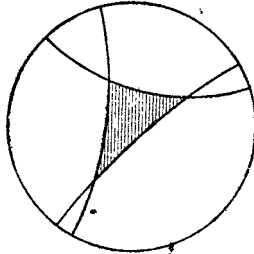
Вместе с тем мы получаем следующее предложение. *Если мы будем рассматривать x , y как прямоугольные декартовы координаты евклидовой плоскости и будем определять с помощью римановой формы неевклидова линейного элемента длины кривых, то мы получим в качестве геодезических линий возникшего вследствие этого риманова многообразия те круги которые пересекают главный круг радиуса $4c_e$ в двух диаметрально противоположных точках, или те круги, которые ортогональны главному кругу радиуса $4c_h$.*

Благодаря этому мы получаем новое истолкование неевклидовой геометрии. При этом в противоположность предыдущему изложению мы отказываемся от изображения неевклидовых прямых посредством прямых проективной плоскости, но сохраняем евклидово измерение углов. Поэтому наше новое истолкование

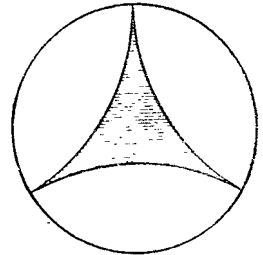
имеет наглядное преимущество перед истолкованием на проективной плоскости для интерпретации тех теорем, в которых особую роль играют углы. В качестве примера мы отображали конформно на черт. 228 и 229 треугольник эллиптической и соответственно гиперболической геометрии на евклидову плоскость. Наглядно видно, что в первом случае сумма углов



Черт. 228.



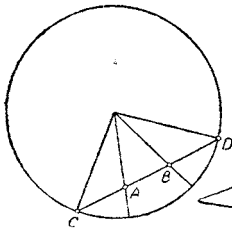
Черт. 229.



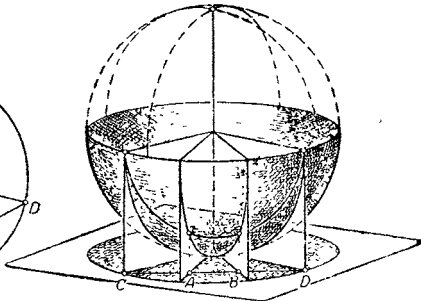
Черт. 230.

больше, во втором меньше, чем 180° . На черт. 230 мы таким же образом изобразили гиперболический треугольник, все углы которого равны нулю.

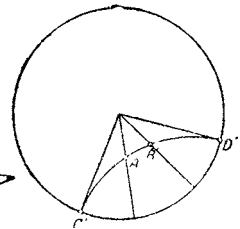
Особое значение имеет то обстоятельство, что измерение длин в этих конформных образах на евклидовой плоскости может производиться также с помощью двойных отношений,



Черт. 231.



Черт. 232.



Черт. 233.

как мы покажем для случая гиперболической геометрии. В гиперболической геометрии длина отрезка AB по стр. 184 равняется (ср. черт. 231) $c_h \cdot \ln DV \{ABCl\}$. Но четыре плоскости, проходящие через перпендикуляр, восстановленный из центра фундаментального круга, и через рассматриваемые четыре точки (черт. 232), определяют в точности такое же двойное отношение. Так как при стереографическом проектировании образы точек A, B, C, D опять-таки лежат в этих плоскостях, то мы получаем: в конформном образе гиперболической геометрии на евклидовой плоскости длина отрезка $A'B'$ равняется $c_h \cdot \ln DV \{abcd\}$, причем a, b, c, d обозначают прямые, проходящие все через центр главного круга и соответственно через четыре точки A', B', C', D' черт. 233.

Рассмотренные факты могут быть непосредственно распространены на случай более высоких размерностей. Поэтому мы можем получить конформный образ пространственной гиперболической геометрии, если будем исходить из главного шара и если в качестве прямых линий и соответственно плоскостей будем рассматривать те дуги окружностей и куски шаровых поверхностей, которые ортогонально пересекают периферию главного шара и лежат внутри этого шара. При этом углы должны измеряться в смысле евклидовой геометрии, а в основу измерения кривых, напротив, следует положить риманову форму линейного элемента; вместо этой последней для измерения длин на „прямой линии“ можно также пользоваться соответствующими двойными отношениями. Совершенно таким же путем мы получим образ пространственной эллиптической геометрии, если будем рассматривать диаметрально противоположные точки сферы как тождественные и будем рассматривать в качестве прямых линий и плоскостей те дуги окружности и куски шаровых поверхностей, которые лежат внутри главной сферы и пересекают ее соответственно в диаметрально противоположных точках или по большому кругу.

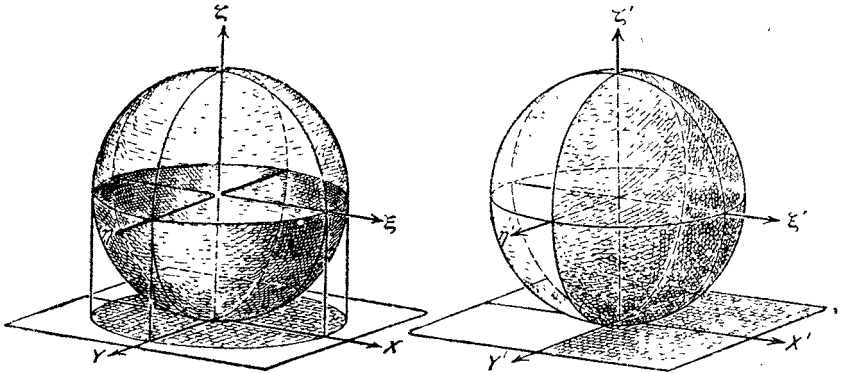
С. Конформные отображения гиперболической геометрии на гауссову числовую плоскость. Для теоретико-функциональных исследований целесообразно рассматривать приведенное выше отображение гиперболической геометрии не как отображение на евклидову плоскость, но как отображение на гауссову числовую плоскость (ср. стр. 61). Тогда точка x, y гиперболической плоскости будет отображаться в следующую точку $\overline{x + iy}$ числовой плоскости:

$$x + iy = \frac{4c_h(x + iy) \{2c_h - \sqrt{4c_h^2 - (x^2 + y^2)}\}}{x^2 + y^2}$$

(ср. соответствующие формулы для случая отображения на евклидову плоскость на стр. 322). Так как главный круг имеет радиус $4c_h$, то мы должны еще произвести преобразование подобия $x = 4c_h \bar{x}$, $y = 4c_h \bar{y}$, если хотим получить отображение на внутреннюю часть единичного круга. Для того чтобы определить длину какого-нибудь отрезка, нам надо воспользоваться приведенным на стр. 324 двойным отношением. Вместо этого, искомую длину мы можем определить также посредством величины $2c_h \ln DV\{A'B'C'D'\}$, причем A', B', C', D' означают комплексные числовые значения изображенных на черт. 233 соответствующих точек (надо принять во внимание, что двойное отношение по стр. 61 всегда действительно), потому что, как это мы докажем на стр. 328 и сл., оба таким образом полученные значения равны между собой.

В дальнейшем в теоретико-функциональных исследованиях будет применяться еще другое отображение, получающееся

вследствии того, что внутренняя область главного круга с помощью линейного преобразования конформно отображается на полуплоскость¹⁾. Мы можем получить это отображение также следующим образом. Прежде всего отобразим точки гипербо-



Черт. 234.

лической плоскости с помощью ортогональной проекции на нижнее полушарие (черт. 234, слева):

$$\xi = x, \quad \eta = y, \quad \zeta = -\sqrt{4c_h^2 - x^2 - y^2}.$$

Затем повернем сферу на 90° вокруг η -оси (черт. 234, справа); вследствие этого точки сферы ξ, η, ζ и соответственно точки x, y гиперболической плоскости отобразятся в следующие точки ξ', η', ζ' :

$$\xi' = -\zeta = +\sqrt{4c_h^2 - x^2 - y^2}, \quad \eta' = \eta = y, \quad \zeta' = \xi = x.$$

Наконец, спроектируем опять точки сферы стереографически из северного полюса на числовую плоскость. При этом по стр. 321 точка сферы ξ, η, ζ отобразится в следующую точку $x' + iy'$ числовой плоскости:

$$x' = \frac{4c_h \xi'}{2c_h - \zeta'} = \frac{4c_h \sqrt{4c_h^2 - x^2 - y^2}}{2c_h - x}, \quad y' = \frac{4c_h \eta'}{2c_h - \zeta'} = \frac{4c_h y}{2c_h - x}.$$

Непосредственно ясно, что при рассматриваемом отображении прямые линии гиперболической плоскости перейдут в те полуокружности, которые ортогональны к прямой, ограничивающей рассматриваемую полуплоскость. Фундаментальный круг гиперболической геометрии отобразится в эту самую прямую. Точка $x = 2c_h, y = 0$ отобразится в бесконечно удаленную точку числовой плоскости.

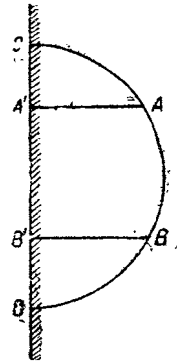
¹⁾ Этим отображением, которое было известно уже Бельтрами, в частности пользовался Пуанкаре в своих теоретико-функциональных работах. В гл. XI мы ближе рассмотрим эти возможные применения неевклидовой геометрии.

Соответствующий линейный элемент мы вычислим следующим образом. При ортогональном проектировании на сферу мы имеем $ds = -\frac{\zeta}{2c_h} ds_3$. При вращении вокруг η -оси линейный элемент не претерпевает никаких изменений: $ds = ds'$. При стереографическом проектировании мы получаем:

$$ds' = \frac{2c_h - \zeta'}{4c_h} ds_2,$$

следовательно,

$$ds_3 = \frac{2c_h - \zeta'}{2\zeta'} ds_2 = \frac{2c_h}{x'} ds_2 = \frac{2c_h \sqrt{dx'^2 + dy'^2}}{x'}.$$



Черт. 235.

Эта чрезвычайно простая форма линейного элемента делает рассматриваемое отображение гиперболической геометрии особенно удобным для многих исследований ¹⁾.

¹⁾ Мы укажем на то, что рассматриваемое отображение гиперболической геометрии на полуплоскость тождественно с координатоопределением, которое определяет точки гиперболической геометрии с помощью значений параметра на фундаментальной кривой. Изобразим фундаментальную кривую относительно прямоугольной декартовой системы координат ξ, η следующими уравнениями:

$$\xi = \frac{2c_h(\lambda^2 - 1)}{\lambda^2 + 1}, \quad \eta = \frac{4c_h \lambda}{\lambda^2 + 1}.$$

Посредством этих уравнений каждой точке фундаментальной кривой ставится однозначно в соответствие определенное значение λ . Через каждую точку x, y плоскости, не лежащей на самой фундаментальной кривой, проходят две касательные к этой кривой, которые касаются ее в точках λ_1 и λ_2 . Так как полярная точка x, y относительно фундаментальной кривой имеет уравнение $x\xi + y\eta = 4c_h$ и так как, далее, точками пересечения этих прямых с нашей кривой являются точки прикосновения проведенных из точки x, y касательных, то λ_1 и λ_2 определяются из уравнения:

$$2c_h(\lambda^2 - 1)x + 4c_h \lambda y = 4c_h(\lambda^2 + 1);$$

следовательно, точке x, y ставятся в соответствие следующие значения λ_1 и λ_2 :

$$\lambda_1 = \frac{y + \sqrt{x^2 + y^2 - 4c_h^2}}{2c_h - x}, \quad \lambda_2 = \frac{y - \sqrt{x^2 + y^2 - 4c_h^2}}{2c_h - x}.$$

С помощью этих соотношений мы можем определять точки гиперболической плоскости посредством соответствующих значений параметров λ_1 и λ_2 . Для точек, лежащих внутри фундаментальной кривой, значения λ_1 и λ_2 будут комплексно-сопряженными, что очевидно также и геометрически. Если мы для этого случая выделим действительную и мнимую часть λ_1 и λ_2 :

$$\lambda_1 = \mu + i\bar{\mu}, \quad \lambda_2 = \mu - i\bar{\mu}, \quad \mu = \frac{y}{2c_h - x}, \quad \bar{\mu} = \frac{\sqrt{4c_h^2 - x^2 - y^2}}{2c_h - x},$$

Если соответствующая гиперболическая прямая отображается на окружность, то мы можем определить длину отрезка AB посредством выражения $c_h \cdot \ln DV(A'B'CD)$, причем A', B', C, D являются указанными на черт. 235 точками прямой, ограничивающей нашу полуплоскость. Доказательство этого получается следующим образом. При отображении гиперболической геометрии на нижнее полушарие мы можем определить длину отрезка посредством двойного отношения четырех прямых, являющихся на черт. 232 перпендикулярами к горизонтальной плоскости в точках A, B, C, D . После вращения вокруг η -оси мы можем пользоваться тем же приемом, так как при этом движении все длины остаются неизменными. Но при стереографической проекции отсюда получается как раз приведенное выше измерение длин. Напротив, если соответствующая отрезку AB прямая переходит не в окружность, а в прямую линию числовой плоскости, то длины удобнее всего вычислять из линейного элемента, потому что в этом случае $dy' = 0$ мы получаем для измерения длин на рассматриваемой прямой следующую формулу:

$$ds_3 = \frac{2c_h dx'}{x'}$$

И, следовательно,

$$L = \int_{x_0}^{x_1} \frac{2c_h}{x'} dx' = \left[2c_h \ln x' \right]_{x_0}^{x_1} = 2c_h \ln \frac{x_1}{x_0}.$$

Вместо этого мы можем (в обоих случаях) определять длину отрезка AB посредством выражения $2c_h \cdot \ln DV\{ABCD\}$, причем A, B, C, D обозначают комплексные числа указанных на черт. 235 соответствующих точек. Если соответствующая прямая отображается опять же на прямую, то доказательство проводится без всяких затруднений; поэтому мы ограничимся только случаем, когда гиперболическая прямая отображается на окружность. Двойное отношение рассматриваемых четырех чисел равняется: $DV = \frac{A-C}{A-D} : \frac{B-C}{B-D}$. Представим наши четыре числа в известной форме $A = r_a \cdot e^{i\alpha}, \dots$, тогда $A - C = r_a e^{i\alpha} - e \cdot e^{i\epsilon}$. Так

то мы получим систему формул, которая с точностью до несущественного множителя $4c_h$ совпадает с формулами, определяющими отображение гиперболической геометрии на полуплоскость. В координатах λ_1 и λ_2 гиперболический линейный элемент принимает следующий простой вид:

$$ds_3 = \frac{4ic_h \sqrt{d\lambda_1 \cdot d\lambda_2}}{\lambda_1 - \lambda_2}.$$

В самом деле, если мы положим $\lambda_1 = \text{const.}$, следовательно, $d\lambda_1 = 0$, то линейный элемент ds_3 обратится в нуль, так как определяемые равенством $\lambda_1 = \text{const}$ прямые являются изотропными; то же самое имеет место и для $\lambda_2 = \text{const}$. Но отсюда следует, что в выражении для линейного элемента $ds^2 = E d\lambda_1^2 + 2F d\lambda_1 d\lambda_2 + G d\lambda_2^2$ величины E и G должны равняться нулю.

как наши четыре комплексные точки лежат на одной окружности, то их двойное отношение будет действительным (ср. стр. 61); значит, оно не изменится, если мы всюду заменим число i числом $-i$; следовательно, мы получаем: $DV = \frac{\bar{A}-\bar{C}}{A-\bar{D}} : \frac{\bar{B}-\bar{C}}{\bar{B}-\bar{D}}$,

причем \bar{A} обозначает число комплексно-сопряженное числу A и т. д. Далее, мы образуем DV^2 посредством перемножения обоих выражений, оно состоит из членов следующего вида:

$$(A-C)(\bar{A}-\bar{C}) = r_\alpha^2 + r_\gamma^2 - 2r_\alpha \cdot r_\gamma \cdot \cos(\alpha - \gamma).$$

По теореме косинусов евклидовой тригонометрии это выражение равняется квадрату отрезка \overline{AC} . Но в прямоугольном треугольнике $\overline{AC}^2 = \overline{DC} \cdot \overline{AC}$ (ср. черт. 235). Если мы поставим это выражение и аналогичные ему выражения в DV^2 , то мы получим

$$DV^2 = \frac{A'C}{A'D} : \frac{B'C}{B'D}.$$

Но это как раз и есть то двойное отношение, посредством которого мы на стр. 328 определяем длину AB ; путем сравнения обоих результатов и получается высказанное утверждение. Так как двойные отношения остаются инвариантными при линейных преобразованиях, то отсюда непосредственно вытекает соответствующее утверждение для конформного отображения гиперболической плоскости на внутренность единичного круга (ср. стр. 325).

Рассматриваемые отображения гиперболической геометрии на числовую плоскость имеют особенное значение для *теории автоморфных функций*, так как в ней посредством введения этого мероопределения получаются существенные упрощения (ср. гл. XI, § 3).

§ 7. Внедрение проективной геометрии ¹⁾

Новейшее и окончательное развитие неевклидовой геометрии опирается на те соображения, на которых построена настоящая книга. Это развитие связано прежде всего с именем английского математика Кэли, опубликовавшего в середине прошлого столетия в „Philosophical Transactions“ ряд работ под названием: „Memoirs upon Quantics“, в которых он собрал вместе все результаты того времени по теории инвариантов. В шестой из этих работ, появившейся в 1859 г., он положил в основу своих исследований вместо евклидовой пары круговых точек произвольный образ второй степени и определил относительно этого

¹⁾ Относительно истории этого вопроса ср. Klein, Vorlesungen über die Entwicklung der Math. im 19. Jahrhundert, т. I, 1926, стр. 174 и сл. Далее ср. соответствующие замечания в „Kleins Ges. Math. Abh.“, т. I, в которых также напечатаны относящиеся сюда работы Клейна.

последнего расстояния и углы таким образом, что если, в частности, в качестве фундаментального образа взять пару круговых точек, то получатся евклидовы формулы. Следовательно, Кэли поступил значительно оригинальнее, чем представители французской школы (ср. стр. 20); в то время как эти последние анализировали данные соотношения евклидовой геометрии (ср. гл. IV), Кэли включил ее понятия в более широкую логическую систему.

Связь его исследований с неевклидовой геометрией в том виде, в каком она была создана Гауссом, Н. И. Лобачевским и Иоганном Больяи, от него ускользнула, так как ему не были известны относящиеся сюда работы. Эта связь впервые была замечена в 1869 г. Клейном; ему при этом пришлось произвести некоторые видоизменения и обобщения соображений Кэли, для того чтобы получить полное совпадение с неевклидовой геометрией.

§ 8. Дальнейшее построение неевклидовой геометрии, в частности дифференциальной геометрии

В заключение этой главы мы хотим указать еще на некоторые дальнейшие обстоятельства, уже выходящие из рамок настоящей книги. Прежде всего Дэн (Dehn) по предложению Гильберта исследовал те возможности, которые возникают, если, отбросив аксиому о параллельных, *ограничить в то же время и предположения о непрерывности*; при этом он пришел к установленной весьма интересной „неархимедовой“ геометрии¹⁾.

Далее, мы укажем на результаты, связанные с именем Штуди (Study)²⁾. Этот последний начиная с 1900 г. пользовался проективным мероопределением как орудием для дальнейших математических исследований; под его влиянием различные его ученики продолжали работать в этом направлении. Его работы встречались с интересными дифференциально-геометрическими исследованиями, начатыми несколько ранее итальянским математиком Бьянки (Bianchi)³⁾. Так как эти исследования являются непосредственным обобщением изложенных в этой главе дифференциально-геометрических вопросов, то мы вкратце прореферлируем некоторые особенно интересные результаты.

Кривизна поверхности в евклидовом пространстве может быть определена следующими тремя различными способами: 1) как внутренний инвариант линейного элемента ds^2 , 2) как произведение обеих главных кривизн (ср. стр. 305) и 3) посредством отношения (полученного с помощью параллелей нормалям поверхности) сферического образа элемента поверхности к этому последнему. В евклидовой геометрии все эти три определения

¹⁾ Dehn, Die Legendreschen Sätze über die Winkelsumme im Dreieck „Math. Ann.“, т. 53, 1900 (см. особенно резюме результатов на стр. 439).

²⁾ Ср. далее указанную литературу.

³⁾ Bianchi-Lukat, Vorlesungen über Differentialgeometrie, 1-е изд., гл. XXII, 1899.

между собой равносильны. При их обобщении на случай неевклидова пространства это уже не имеет места.

Получающаяся по определению 1) величина для поверхности, лежащей в неевклидовом пространстве и рассматриваемой в метрике, соответствующей этой геометрии, называется *абсолютной кривизной* K_a .

Для того чтобы распространить определение 2) на случай неевклидова пространства, мы, как и в случае евклидовой геометрии, проводим нормаль к поверхности в рассматриваемой точке и исследуем сечения поверхности плоскостями, проходящими через нормаль. Кривизна этих кривых (которая определяется аналогично тому, как и в евклидовой геометрии), вообще говоря, имеет два экстремальных значения $\frac{1}{r_1}$ и $\frac{1}{r_2}$. Их произведение называется *относительной кривизной* $K_r = \frac{1}{r_1 r_2}$.

Если теперь $k = \frac{1}{4c_e}$ или $k = -\frac{1}{4c_h}$ будет метрической константой (ср. стр. 214) или (абсолютной) кривизной пространства, то имеет место простое соотношение:

$$K_a = K_r + K.$$

Обобщение же 3) определения кривизны опять приводит к величине K_a ¹⁾.

Мы приведем еще некоторые теоремы, относящиеся к поверхностям с абсолютной кривизной, равной нулю, следовательно, к поверхностям с евклидовой дифференциальной геометрией. Мы уже знаем некоторые из подобных поверхностей: в эллиптической геометрии — клиффордовы поверхности (стр. 267), в гиперболической геометрии — горосферы (ср. стр. 276), равно как и известные „цилиндрообразные“ поверхности (стр. 274). Следующие две теоремы дают полное обозрение всех поверхностей с $K_a = 0$:

*Если мы в эллиптическом пространстве с кривизной $\frac{1}{4c_e^2}$ проведем две кривые K и K' с постоянными κ , но противоположным по знаку кручением $\frac{1}{2c_e}$ и $-\frac{1}{2c_e}$ таким образом, что они в общей точке имеют общую соприкасающуюся плоскость, а затем заставим K претерпевать непрерывные клиффордовы сдвиги вдоль K' , то в результате возникает поверхность с постоянной кривизной, равной нулю; и обратно: всякая подобная поверхность может быть получена таким образом*²⁾. Легко видеть, что среди этих поверхностей содержатся клиффордовы поверхности.

¹⁾ Study, Nachtrag zu dem Aufsatz: Über nichteuclidische und Liniengeometrie, Jahresber. d. D. M. V., 11, 1902.

²⁾ Bianchi-Lukat, см. выше.

В гиперболическом пространстве поверхности, для которых $K_a = 0$, могут быть охарактеризованы следующим образом. Вообразим себе фундаментальную поверхность в виде римановой числовой сферы и в некоторой ее области вообразим себе заданной какую-нибудь аналитическую функцию. Прямые гиперболического пространства, соединяющие точки этой области с образами этих точек, получающимися в силу заданной функции, называются *синектической линейной конгруэнцией*. Имеет место теорема, что подобная конгруэнция допускает ортогональные поверхности и что для этих последних $K_a = 0$; обратно, нормали к поверхности с абсолютной кривизной, равной нулю, всегда образуют синектическую линейную конгруэнцию¹⁾.

¹⁾ Bianchi-Lukat, см. выше, равно как и Study, Über nichteuclidische und Liniengeometrie, Jahresber. d. D. M. V., 11, 1902.

Глава XI

ОБЗОР ПРИМЕНЕНИЙ НЕЕВКЛИДОВОЙ ГЕОМЕТРИИ

В этой заключительной главе мы хотим показать, что неевклидова геометрия представляет большой интерес не только благодаря толкованиям систематической и аксиоматической природы, которые она допускает, но также и из-за того, что она тесно связана с другими областями математики, так что при их рассмотрении она является полезным орудием исследования и находит себе в этих областях плодотворные применения. При этом мы углубимся лишь настолько, чтобы выявить эти связи, а в остальном отошлем к легко доступной относящейся сюда литературе.

§ 1. Гиперболические движения пространства и плоскости и линейные подстановки комплексного переменного

Наиболее важной из этих связей является связь между гиперболической геометрией и теорией функций. Пусть фундаментальная поверхность гиперболической геометрии в пространстве изображается уравнением:

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_4^2 = 0;$$

тогда одно из семейств ее прямолинейных образующих будет изображаться уравнениями:

$$x_1 + ix_2 = \lambda (x_4 - x_3),$$

$$\lambda (x_1 - ix_2) = x_4 + x_3$$

(ср. стр. 89 и сл.); при этом через λ обозначен параметр, пробегающий все комплексные значения (включая и ∞). Следовательно, всякому комплексному значению соответствует некоторая прямая рассматриваемого семейства, а вместе с тем и некоторая действительная точка поверхности, именно точка пересечения этой прямой с соответствующей комплексно-сопряженной прямой.

Рассмотрим ближе таким образом определенное взаимно-однозначное соответствие между всеми комплексными числами и точками нашей овальной поверхности. Если мы перейдем к неоднородным координатам:

$$x = \frac{x_1}{x_4}, \quad y = \frac{x_2}{x_4}, \quad z = \frac{x_3}{x_4}$$

и будем рассматривать x, y, z -пространство как евклидово пространство с прямоугольными декартовыми координатами x, y, z , то наша поверхность будет сферой в этом пространстве. Из приведенных выше уравнений видно, что каждой точке этой сферы поставлено в соответствие комплексное число:

$$\lambda = \frac{x_1 + ix_2}{x_4 - x_3} = \frac{x + iy}{1 - z}.$$

Если мы спроектируем сферу стереографически из ее северного полюса $x=y=0, z=1$ на экваториальную плоскость $z=0$, то точка сферы с координатами x, y, z перейдет в точку плоскости с координатами $a, b, 0$, где

$$a = \frac{x}{1 - z}, \quad b = \frac{y}{1 - z},$$

следовательно,

$$\lambda = a + ib.$$

Итак, мы видим: *обычное в теории функций распределение комплексных чисел на числовой сфере в точности совпадает с распределением значений параметра, вызываемым одним из семейств прямолинейных образующих*¹⁾.

Далее, при движении гиперболического пространства, имеющего в качестве фундаментальной поверхности числовую сферу, λ претерпевает (ср. стр. 130) некоторую линейную подстановку с комплексными коэффициентами и отличным от нуля определителем:

$$\lambda' = \frac{\alpha\lambda + \beta}{\gamma\lambda + \delta} \quad (\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0).$$

Обратно, всякой подобной подстановке соответствует одно и только одно действительное движение, потому что преобразование, претерпеваемое вторым семейством образующих, однозначно определяется преобразованием первого семейства образующих и тем условием, чтобы движение было действительным. В подобном же отношении находятся зеркальные отображения гиперболической геометрии к несобственным подстановкам, которые ставят в соответствие каждому значению λ значение

$$\lambda' = \frac{\alpha\lambda + \beta}{\gamma\lambda + \delta},$$

причем $\bar{\lambda}$ является комплексно-сопряженным числом по отношению к числу λ .

¹⁾ Другое семейство образующих, при надлежащем введении соответствующего параметра, ставит в соответствие каждой точке сопряженное значение $\bar{\lambda} = a - ib$.

Этим связь между гиперболической геометрией и теорией функций уже установлена. *Всякое гиперболическое движение (соответственно зеркальное отображение) дает на фундаментальной сфере некоторую собственную (соответственно несобственную) линейную подстановку; обратно, всякая собственная (соответственно несобственная) линейная подстановка на этой сфере может быть дополнена однозначным образом до гиперболического движения (соответственно зеркального отображения).* Посредством этой связи гиперболические движения пространства и (собственные) линейные подстановки комплексного переменного поставлены друг к другу во взаимно однозначное соответствие таким образом, что обе группы в силу этого соответствия оказываются изоморфными¹⁾. Далее мы видели на стр. 274, что существуют подгруппы группы пространственных гиперболических движений, которые изоморфны группе движений плоской эллиптической, евклидовой или гиперболической геометрии; они получаются, если оставить неподвижной какую-нибудь точку внутри, на самой или вне фундаментальной поверхности. На основе указанной выше связи мы знаем, что должны существовать соответствующие подгруппы группы собственных линейных подстановок; ими мы еще займемся ближе в следующем параграфе.

Но сначала мы еще покажем, каким образом из существования той подгруппы группы линейных подстановок, которая соответствует группе движений плоской гиперболической геометрии, можно получить модель плоской гиперболической геометрии, имеющую особую геометрическую и теоретико-функциональную важность. К этой модели мы уже были приведены на стр. 325 и сл. посредством рассмотрения совершенно других, именно дифференциально-геометрических соображений. Мы находим здесь следующее. Подгруппа, соответствующая плоской гиперболической группе движений, в пространственной гиперболической геометрии получалась, когда мы оставляли неподвижной некоторую точку вне фундаментальной поверхности (стр. 275). В связке, проходящей через эту точку, имеет место, как это мы подчеркивали, гиперболическое мероопределение, которое мы на стр. 276 проектировали на соответствующую неподвижной точке гиперсферу. Но мы можем также перенести это гиперболическое мероопределение на самую фундаментальную поверхность, которую мы теперь принимаем за евклидову сферу. Если, в частности, мы выберем за неподвижную точку бесконечно удаленную точку оси z , то лучи и плоскости нашей связки будут параллельны оси z . Прямым линиям рассматриваемой двумерной гиперболической геометрии, следовательно плоскостям нашей связки, будут тогда соответствовать те круги на сфере, которые ортогонально пересекают экватор; движениям будут соответствовать те линейные подстановки переменного λ ,

1) Определение изоморфизма см. на стр. 233, сноска 1.

при которых экватор переходит сам в себя. Это отображение гиперболической связки на сферу прежде всего является двузначным; мы его сделаем однозначным тем, что будем рассматривать только нижнее полушарие. Если мы это последнее спроектируем теперь стереографически на экваториальную плоскость, то мы получим внутри единичного круга x, y -плоскости взаимно однозначный образ плоской гиперболической геометрии, причем роль прямых будут играть окружности, ортогональные пересекующие единичный круг, а роль движений будут играть те линейные подстановки переменного $x+iy$, которые переводят этот круг в себя¹⁾. Если мы в качестве центра гиперболической связки возьмем не бесконечно удаленную точку оси z , а бесконечно удаленную точку оси y , и затем стереографически спроектируем полушарие, определяемое неравенством $y > 0$ из северного полюса на плоскость x, y , то мы получим совершенно такой же образ гиперболической геометрии на полуплоскости $y > 0$, вместо образа внутри единичного круга. Теперь движениями будут те линейные подстановки переменного $x+iy$, при которых действительная ось $y=0$ переходит сама в себя, т. е. подстановки с действительными коэффициентами. То обстоятельство, что с помощью этих подстановок можно изображать гиперболические движения на плоскость, мы уже установили ранее (стр. 115), но совершенно другим путем.

Рассмотренная здесь модель плоской гиперболической геометрии, которая была известна уже Бельтрами, получила особенно большое значение для новейшей теории функций благодаря работам Пуанкаре; этим мы ближе займемся в § 3. Здесь мы только хотим показать, в каком направлении надо искать связи между действительной неевклидовой геометрией и теорией функций комплексного переменного.

§ 2. О применениях пространственной гиперболической геометрии к теории линейных подстановок

На основе установленной в предыдущем параграфе связи между линейными подстановками и движениями гиперболического пространства мы можем применить наши познания об этих последних (ср. стр. 273 и сл.) к рассмотрению отображений римановой числовой сферы на себя, осуществляемых с помощью линейных функций. Эти отображения мы можем классифицировать так же, как и соответствующие движения²⁾, и тогда придем к следующему их разделению:

1. При данном гиперболическом движении все точки прямой g , лежащей внутри фундаментальной поверхности, переходят, в

¹⁾ Относительно измерения длины углов в этой модели см. стр. 324 и сл.

²⁾ Пусть читатель сравнит эту классификацию с классификацией гиперболических движений на стр. 273 и сл.

себя так же, как и всякая плоскость перпендикулярная (в смысле гиперболической геометрии) к прямой g , в то время как пучок плоскостей, проходящих через прямую g , претерпевает некоторое проективное преобразование. Соответствующее линейное преобразование фундаментальной сферы выглядит следующим образом: две точки (точки пересечения с прямой g) являются неподвижными точками; всякая окружность того семейства окружностей, которое получается в результате пересечения сферы плоскостями, перпендикулярными к прямой g , является „линией тока“, т. е. преобразуется сама в себя; семейство окружностей, ортогональное предыдущему семейству окружностей (сечение с пучком плоскостей, проходящих через прямую g), переходит как целое само в себя. Подобная линейная подстановка называется *эллиптической*.

При данном гиперболическом движении остается точечно неподвижной некоторая прямая g , лежащая вне фундаментальной поверхности; тогда пучок плоскостей, проходящих через прямую g , претерпевает некоторое проективное преобразование; всякая же плоскость, проходящая через полярю g' прямой g , переходит сама в себя. При соответствующей линейной подстановке на сфере имеются опять две неподвижные точки (точки пересечения с прямой g'); „линиями тока“ являются здесь окружности пучка окружностей, определенного этими двумя неподвижными точками (линии пересечения с плоскостями, проходящими через прямую g'); семейство окружностей, ортогональное этому семейству (сечение пучком плоскостей, проходящих через прямую g), переходит как целое само в себя. Следовательно, здесь роли обоих семейств окружностей поменялись местами относительно того, как это было в случае эллиптической подстановки. Подобную линейную подстановку называют *гиперболической*.

3. При данном гиперболическом движении каждая из двух взаимно полярных прямых g и g' переходит сама в себя, но больше нет ни одной неподвижной точки ни внутри, ни вне фундаментальной поверхности. Такое движение можно рассматривать как комбинацию 1-го и 2-го случая. Точки двигаются по винтовым линиям. На сфере существуют опять две неподвижные точки (точки пересечения с той из неподвижных прямых, которая пересекает сферу в действительных точках); „линиями тока“ здесь являются спирали вокруг обеих неподвижных точек. Подобную линейную подстановку называют *ложнодромической*.

4. Наконец, еще остается предельный случай, в котором обе неподвижные прямые пересекаются и касаются сферы в этой точке пересечения. В этом случае рассмотрение гиперболического пространства показывает (ср. стр. 273), что существует только одна единственная неподвижная точка на сфере (именно точка прикосновения неподвижных прямых); каждое семейство в этой точке касающихся друг друга окружностей переходит

как целое само в себя; окружности одного „отмеченного“ из этих семейств являются „линиями тока“. Подобная линейная подстановка называется *параболической*.

Подробное рассмотрение различных линейных отображений сферы на себя имеется во многих учебниках по теории функций¹⁾.

Прекрасное применение гиперболической геометрии дал Клейн при рассмотрении следующей задачи: „Найти все конечные группы (т. е. группы, состоящие из конечного числа элементов) линейных подстановок одного комплексного переменного“²⁾. Ход его мысли заключался в следующем. Надо отыскать все конечные группы движений гиперболического пространства. Всякое движение, принадлежащее к одной из таких групп, является „периодическим“, т. е. после нескольких повторений этого движения всякая точка возвращается в свое исходное положение. Периодическое движение, как легко видеть, всегда имеет неподвижную точку внутри фундаментальной поверхности (следовательно, является „эллиптическим“). Но все движения какой-нибудь конечной группы имеют даже *общую* неподвижную точку внутри поверхности³⁾. Поэтому рассматриваемая группа является подгруппой группы всех гиперболических вращений вокруг какой-нибудь неподвижной действительной собственной точки, которая (ср. стр. 274) ничем не отличается от группы евклидовых вращений шара. Поэтому наша конечная группа изоморфна некоторой конечной подгруппе группы вращений шара, т. е. одной из так называемых „групп многогранников“⁴⁾.

§ 3. Автоморфные функции, униформизация и неевклидово мероопределение⁵⁾

В этом параграфе мы вкратце познакомимся с *теоретико-функциональным значением модели Пуанкаре* плоской гиперболической геометрии (ср. стр. 335 так же, как и стр. 324 и сл.), в которой линейные подстановки, преобразующие единичный круг сам в себя, истолковываются как неевклидовы движения плоскости.

¹⁾ См., например, Hurwitz-Courant, Funktionentheorie 2-е изд., 1925. Есть русский перевод Р. Курант, Геометрическая теория функций комплексного переменного, ГТТИ, 1934.

²⁾ Über binäre Formen mit linearen Substitutionen in sich, Math. Ann., т. 9; вновь переиздано в „Kleins Ges. Math. Abh.“, II, стр. 245.

³⁾ Обоснование см. в предыдущей ссылке.

⁴⁾ Группы многогранников рассматриваются, например, в книге Klein, Elementarmathematik, т. I, стр. 129 и сл., 1924. Также и бесконечные группы подстановок могут классифицироваться с помощью рассмотренной связи, см. Klein-Fricke, Automorphe Funktionen, I.

⁵⁾ В качестве литературы к этому параграфу (для понимания которого необходимы некоторые сведения из теории функций) мы укажем на Klein-Fricke, Automorphe Funktionen; Hurwitz-Courant, Funktionentheorie (3-я часть); Weyl, Die Idee der Riemannschen Fläche.

Под *автоморфной функцией* мы понимаем некоторую однозначную аналитическую функцию, инвариантную относительно некоторой группы линейных подстановок аргумента этой функции; если $f(t)$ является подобной функцией, то следовательно, существует некоторая группа подстановок:

$$t_\lambda = \frac{\alpha_\lambda t + \beta_\lambda}{\gamma_\lambda t + \delta_\lambda} \quad (\alpha_\lambda \delta_\lambda - \beta_\lambda \gamma_\lambda \neq 0; \lambda = 0, 1, 2, \dots)$$

такого рода, что

$$f(t_\lambda) = f(t)$$

для всех значений t , лежащих в области существования функции f . Простейшими примерами могут служить следующие:

$$f(t) = t^n$$

с группой, состоящей из n подстановок:

$$t_\lambda = e^{2\pi i \cdot \frac{\lambda}{n}} t \quad (\lambda = 0, 1, \dots, n-1)$$

и

$$f(t) = e^t$$

с бесконечной группой

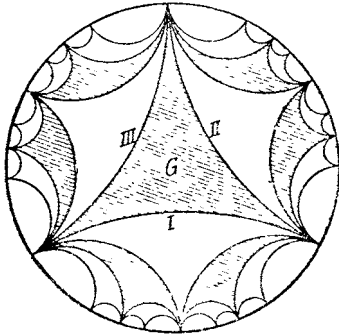
$$t_\lambda = t + \lambda \cdot 2\pi i \quad (\lambda = 0, 1, 2, \dots, -1, -2, \dots),$$

далее, кроме этой просто-периодической функции e^t примером могут служить также известные дважды-периодические функции. В этих примерах областью существования функции $f(t)$ является либо — в случае $f(t) = t^n$ — вся числовая сфера, либо — в случае периодических функций — числовая плоскость без бесконечно удаленной точки.

Но наряду с этим существуют также автоморфные функции с другими областями существования. Нам теперь будет особенно интересоваться те из них, областью существования которых является внутренность единичного круга. Поэтому соответствующие линейные подстановки будут переводить единичный круг сам в себя и, следовательно, могут рассматриваться как движения гиперболической плоскости. Так как, далее, для изучения автоморфных функций весьма большое значение имеет знание соответствующих групп подстановок, то отсюда видна вся важность гиперболической геометрии для этой ветви теории функций.

Простейшей из этих автоморфных функций „с предельным кругом“ является *модулярная функция*, т. е. та функция, которая отображает конформно на одну из полуплоскостей, ограниченных действительной осью, вписанный в единичный круг и пересекающий его ортогонально своими сторонами треугольник, образованный дугами окружностей (следовательно, в смысле модели гиперболической геометрии Пуанкаре прямолинейный треугольник с нулевыми углами). Эта функция $u = f(t)$, определенная сначала только внутри треугольника, может быть аналитически

продолжена на всю внутреннюю область единичного круга, но нигде не может быть продолжена за пределы этого круга. Аналитическое продолжение выполняется следующим образом: рассматриваемый треугольник зеркально отражают относительно одной из его сторон; вместе с этим своим зеркальным образом он образует четырехугольник; этот последний опять отражают зеркально относительно одной из его сторон; подобный процесс продолжают



Черт. 236.

все дальше и дальше и покрывают все большие и большие области внутреннего круга, которые в пределе стремятся ко всей внутренней области круга. Тогда, по известному принципу теории функций, аналитическое продолжение определяется посредством того требования, чтобы двум точкам t_1 и t_2 , из которых каждая в указанном выше смысле является зеркальным образом другой, соответствовали комплексно-сопряженные значения u_1 и $u_2 = \bar{u}_1$.

При этом существенным является тот факт, что при неограниченных повторениях зеркального отображения все точки внутренней области круга действительно могут быть покрыты. Для доказательства этого факта с большим успехом можно применить неевклидово мероопределение, потому что, в то время как с евклидовой точки зрения образы исходного треугольника при вызванном повторными зеркальными отображениями приближении к периферии круга становятся все меньше и меньше (ср. черт. 236), с точки зрения гиперболической геометрии они все одинаковой величины, так как зеркальные отражения являются твердыми преобразованиями.

Двум точкам, получающимися одна из другой посредством четного числа зеркальных отражений, в силу вышеприведенного принципа аналитического продолжения соответствуют всегда одинаковые значения функций. Зеркальное отражение является

несобственной подстановкой (т. е. имеет вид $t' = \frac{\alpha \bar{t} + \beta}{\gamma \bar{t} + \delta}$); ком-

бинация же четного числа зеркальных отражений дает всегда собственную подстановку. Вместе с тем функция $f(t)$ действительно является автоморфной функцией.

Под *фундаментальной областью* функции $f(t)$ мы понимаем такую область, в которой каждое из значений, принимаемых вообще функцией $f(t)$, встречается в точности один раз. Вышеупомянутый четырехугольник, получающийся после однократного зеркального отражения, является фундаментальной областью, если только из него исключить две надлежащим образом выбранные стороны. Этот четырехугольник при подстановках вашей

группы переносится в различные места внутренности круга таким образом, что при этом каждая точка покрывается в точности один раз. Подобные фундаментальные области и преобразования наложения уже встречались при рассмотрении пространственных форм (гл. IX). Сейчас дело идет о том же самом, как и тогда, потому что также и теперь преобразования наложения являются гиперболическими движениями и также и теперь они лишены неподвижных точек (что, как это можно показать, имеет место для всех автоморфных функций с предельным кругом). Следовательно, мы видим: *всякая автоморфная функция с предельным кругом*, — например, модулярная функция — *определяет некоторую гиперболическую пространственную форму*.

Этот факт находится в тесной связи с проблемой *униформизации многозначных функций*. Если два переменных z и w связаны между собой посредством аналитического уравнения $F(z, w) = 0$, то вследствие этого w определяется, вообще говоря, как многозначная функция переменного z . Задача униформизации заключается в том, чтобы свести изучение этой многозначной функции к изучению однозначных функций, т. е. требуется найти две однозначные функции $\varphi(t)$, $\psi(t)$, для которых тождественно $F[\varphi(t), \psi(t)] = 0$, другими словами, требуется для данной многозначной функции $w = f(z)$ дать некоторое представление $z = \varphi(t)$, $w = \psi(t)$ с *униформизирующим параметром t* . Геометрически это сводится к нахождению конформного и взаимно однозначного отображения на некоторую область t -плоскости надлежащим образом разрезанной римановой поверхности, соответствующей уравнению $F(z, w) = 0$; при этом взаимную однозначность здесь надо понимать в том смысле, что два краевых куска области-образа, соответствующие двум берегам одного и того же разреза на поверхности, следует рассматривать как тождественные. К этой задаче можно приступить следующим образом: для данной римановой поверхности F надо построить универсальную накрывающую поверхность F' , т. е. *односвязную* риманову поверхность, которая накрывает поверхность F . Далее, поверхность F' надо отобразить конформно и взаимно однозначно (в обычном смысле) на некоторую часть t -плоскости. В теории униформизации доказывается, что такое отображение всегда возможно.

Если мы ограничимся *замкнутыми* римановыми поверхностями, т. е. *алгебраическими функциями* $w = f(z)$ и притом поверхностями рода $p > 1$, то поверхность F' может быть отображена на внутреннюю область единичного круга в t -плоскости; введенные выше функции $z = \varphi(t)$, $w = \psi(t)$ будут тогда *автоморфными функциями с предельным кругом*. Двум точкам t_1 и t_2 , переходящим друг в друга при подстановках соответствующей группы, соответствуют две точки поверхности F' , лежащие над одной и той же точкой поверхности F ; следовательно, обоим этим точкам соответствует одна и та же точка поверхности F

фундаментальной областью и является как раз взаимно однозначный образ поверхности F . Так как преобразования наложения мы можем рассматривать как гиперболические движения, то поверхность F можно истолковать как гиперболическую пространственную форму. Измерение углов на ней с самого начала было задано римановой поверхностью, а описанное униформизирующее отображение определило на ней также и измерение расстояний; обратно, знание этой метрики на F тотчас доставляет искомое отображение на плоскость. Следовательно, возможностью рассмотрения римановой поверхности как пространственной формы неевклидовой геометрии как раз составляет содержание теоремы об униформизации.

Из различных способов разрешения проблемы униформизации один непосредственно сводится к нахождению неевклидова мероопределения, соответствующего поверхности F .

Пусть риманова поверхность рода $p > 1$, которую надо отобразить на часть t -плоскости, расположена с ветвлениями на z -плоскости. Задача об отображении будет решена, если будет найден *модуль*, т. е. коэффициент увеличения $\left| \frac{dt}{dz} \right|^2$ (в наших

прежних обозначениях $\left| \frac{1}{\psi'(t)} \right|^2$), как функция z . Но так как t не

является однозначной функцией переменного z — ведь некоторому значению z соответствуют все те значения t , которые при подстановках группы переходят друг в друга, — то и этот модуль будет также не однозначным, что значительно затрудняет его нахождение. Это затруднение устраняется следующим образом. Вместо упомянутого здесь модуля, являющегося отношением квадратов евклидовых линейных элементов t - и z -плоскости, в качестве искомой функции, берут отношение квадрата неевклидова линейного элемента, который соответствует гиперболическому мероопределению, господствующему в единичном круге t -плоскости, к $|dz|^2$. Эта функция является однозначной, так как те подстановки, которые претерпевает t при обходе некоторого пути в t -плоскости, сохраняют длины в смысле гиперболической геометрии. Логарифм этой однозначной функции (который мы обозначим через u), как в этом легко убедиться путем вычисления, будет удовлетворять дифференциальному уравнению $\Delta u = e^u$; при этом независимыми переменными являются x и y , причем $z = x + iy$. Вследствие этого задача униформизации сводится к интегрированию приведенного выше дифференциального уравнения с известными краевыми условиями, которые должны быть выполнены в точках разветвления римановой поверхности¹⁾.

1) См. подробнее Klein, Über lineare Differentialgleichungen der zweiten Ordnung, автографированные лекции, 1894; Bieberbach, $\Delta u = e^u$ und die automorphen Funktionen, „Math. Ann.“ т. 77, 1916.

До сих пор род рассматриваемой римановой поверхности был всегда больше единицы. Но и поверхности рода $p=1$ и $p=0$ также могут быть униформизированы. Все же имеется существенное различие в отношении области регулярности соответствующих автоморфных функций. Теперь уже эта область не является внутренностью круга. Если $p=0$, то она состоит из *всей* числовой сферы, следовательно, униформизирующие функции являются рациональными. Примером может служить параметрическое представление:

$$z = \varphi(t) = t^2, \quad w = \psi(t) = t^3$$

многозначной функции

$$w = f(z) = z^{3/2}.$$

Если $p=1$, то $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ являются мероморфными функциями, следовательно, их областью существования будет *вся плоскость* без бесконечно удаленной точки. Известнейшим примером является униформизация функций $w = f(t) = \sqrt{a_0 z^3 + a_1 z^2 + a_2 z + a_3}$ с помощью эллиптических функций. При этом фундаментальной областью здесь будет параллелограм t -плоскости, как мы уже видели при рассмотрении сохраняющего длины отображения кольцеобразной поверхности, снабженной клиффордовым мероопределением, на евклидову плоскость (ср. черт. 185 на стр. 284).

Вообще здесь имеет место следующая заслуживающая внимания связь. Одно и то же распределение всех замкнутых поверхностей по трем классам, в зависимости от того, будет ли

$$p=0, \quad p=1, \quad p=2,$$

получается как в проблеме пространственных форм, так и в проблеме униформизации: поверхности этих трех классов могут быть снабжены соответственно эллиптическим, евклидовым и гиперболическим мероопределением и затем могут быть отображены с сохранением длин соответственно на сферу, евклидову плоскость и на гиперболическую плоскость, представленную внутренностью некоторого круга, совершенно аналогично конформным отображениям римановых поверхностей различного рода на однолистные области.

§ 4. Замечания о применении неевклидова мероопределения в топологии

Для чисто топологических исследований замкнутых поверхностей имеет большое значение возможность рассматривать их как евклидовы и неевклидовы пространственные формы и связанное с этим распределение их по трем классам.

Мы укажем на относящиеся сюда работы¹⁾, не входя в ближайшее их рассмотрение; в этих работах на изучаемой с топологической точки зрения поверхности вводят мероопределение Клиффорда-Клейна и пользуются простыми свойствами этого мероопределения, как, например, наглядным течением его геодезических линий. Ясно, что из всех способов метризации поверхности мероопределение Клиффорда-Клейна должно рассматриваться как самое естественное и наилучшим образом отвечающее топологическому строению поверхности.

§ 5. Приложения проективного мероопределения в специальной теории относительности²⁾

В новейшее время проективное мероопределение нашло себе применение также и при физических рассмотрениях, именно в специальной (частной) теории относительности. Пространственно-временное положение какой-нибудь материальной точки P определяется четырьмя величинами: тремя пространственными координатами x, y, z некоторой прямоугольной декартовой системы координат и тем соответствующим моментом времени t , в который материальная точка P занимает это место. Поэтому мы можем всякое положение точки P изображать некоторой точкой четырехмерного многообразия x, y, z, t , которое в отличие от физического пространства x, y, z называется *миром*. Далее, всякое движение материальной точки P изображается тремя уравнениями вида $x=f_1(t), y=f_2(t), z=f_3(t)$. В трехмерном многообразии эти уравнения определяют некоторую кривую, которую называют *мировой линией* материальной точки P . Всякая точка этой линии изображает некоторое определенное положение материальной точки P в пространстве и во времени, и осуществленное с помощью мировой линии объединение этих положений и дает рассматриваемое движение. Аналогичным образом система из n материальных точек изображается совокупностью из n отдельных мировых линий.

При изучении евклидовой геометрии и проективного мероопределения мы уже видели, что существенные свойства геометрии особенно ясно и просто обнаруживаются в закономерностях, управляющих соответствующими твердыми преобразованиями. При их исследовании мы пришли к рассмотрению

¹⁾ Например, Dehn, Über unendliche diskontinuierliche Gruppen, Math. Ann., т. 71, 1912. Gieseking, Analytische Untersuchungen über topologische Gruppen, Diss., Мюнстер 1912. Nielsen, Zur Topologie der geschlossenen Flächen, Saertryk af Kongresberetningen, Kopenhagen 1926. Brouwer, Aufzählung der Abbildungsklassen endlichfach zusammenhängender Flächen, „Math. Ann.“, т. 82, 1921.

²⁾ В качестве литературы к этому параграфу мы укажем на Klein, Über die geometrischen Grundlagen der Lorentzgruppe, Jahresber. der D. M. V., т. 19, 1910; вновь переиздано в „Kleins Ges. Math. Abh.“, т. I. Далее, см. Klein, Vorlesungen über die Entwicklung der Mathematik, im 19. Jahrhundert, т. II, 1927.

фундаментального образа, который при всех этих движениях переходит сам в себя. Исходя из теории этого фундаментального образа, мы получили возможность изучить простейшим образом все свойства соответствующего мероопределения.

Теперь оказывается возможным перенести соответствующие рассуждения также и на случай рассмотренного здесь мира; именно: мы можем приписать миру определенную геометрию или, говоря точнее, определенную пространственно-временную структуру. Но при этом оказывается, что мы приходим к совершенно различным структурам в зависимости от того, исходим ли мы из *классической механики* или же из *электродинамики*. Отправной точкой классической механики являются ньютоновы дифференциальные уравнения, в то время как в основе электродинамики лежат уравнения Максвелла. Теперь мы будем искать те проективные преобразования мира, при которых каждая из обеих систем уравнения остается неизменной, совершенно аналогично тому, как мы раньше определяли все проективные преобразования, при которых расстояния между всякими двумя точками и углы между всякими двумя прямыми оставались неизменными.

Известно, что ньютоновы дифференциальные уравнения остаются инвариантными при группе следующих подстановок:

$$x = c_{11}x' + c_{12}y' + c_{13}z' + c_{14}t' + c_{15},$$

$$y = c_{21}x' + c_{22}y' + c_{23}z' + c_{24}t' + c_{25},$$

$$z = c_{31}x' + c_{32}y' + c_{33}z' + c_{34}t' + c_{35},$$

$$t = \pm t' + c_{45},$$

в которых девять коэффициентов $c_{\lambda\mu}$ ($\lambda, \mu = 1, 2, 3$) образуют ортогональную матрицу с определителем $+1$ или -1 . Эта группа составляет из подстановок следующих трех типов:

1) из евклидовых преобразований физического пространства x, y, z ;

2) из преобразований, получающихся, если отсчитывать от другого момента времени;

3) из преобразований, возникающих при введении новой системы координат x, y, z , которая относительно старой системы координат x', y', z' перемещается с постоянной (как по величине, так и по направлению) скоростью. Рассматриваемая группа называется *группой Галилея-Ньютона классической механики*. В ней имеется 16 коэффициентов, из которых первые девять связаны шестью (независимыми) условиями; поэтому группа зависит только от десяти независимых параметров и вследствие этого является *десятичленной*.

Совершенно аналогичным образом можно говорить о группе проективных преобразований, при которых инвариантными остаются уравнения Максвелла. Более глубокие исследования

(которыми мы здесь заниматься не будем) показывают, что эта группа имеет следующий вид:

$$x = c_{11}x' + c_{12}y' + c_{13}z' + c \cdot c_{14}t' + c_{15},$$

$$y = c_{21}x' + c_{22}y' + c_{23}z' + c \cdot c_{24}t' + c_{25},$$

$$z = c_{31}x' + c_{32}y' + c_{33}z' + c \cdot c_{34}t' + c_{35},$$

$$t = \frac{c_{41}}{c}x' + \frac{c_{42}}{c}y' + \frac{c_{43}}{c}z' + c_{44}t' + c_{45},$$

причем первые шестнадцать коэффициентов $c_{\lambda\mu}$ ($\lambda, \mu = 1, 2, 3, 4$) связаны следующими десятью соотношениями:

$$c_{x1} c_{\lambda 1} + c_{x2}^2 c_{\lambda 2} + c_{x3} c_{\lambda 3} - c_{x4} c_{\lambda 4} = \begin{cases} 1 & \text{для } x = \lambda, \\ 0 & \text{для } x \neq \lambda; \end{cases}$$

буква c в приведенных формулах обозначает скорость света. Следовательно, в этой группе, которую мы по примеру Пуанкаре будем называть *группой Лоренца*, фигурируют 20 коэффициентов, связанных десятью (независимыми) соотношениями; значит эта группа точно так же, как и группа Галилея-Ньютона, является *десятичленной*.

Обе эти группы мы можем определить очень простым образом геометрически, если мы расширим аффинное многообразие переменных x, y, z, t до проективного многообразия путем присоединения бесконечно удаленных элементов. Именно: при подстановках группы Галилея-Ньютона некоторый определенный квадратичный образ переходит сам в себя, причем этот образ состоит из бесконечно удаленного пространства с лежащей в нем плоскостью, на которой выделена некоторая нулевая кривая¹⁾. Совершенно аналогичным образом при преобразованиях группы Лоренца инвариантной остается некоторая нулевая поверхность, которая вырезается нулевым гиперконусом:

$$x^2 + y^2 + z^2 - c^2 t^2 = 0,$$

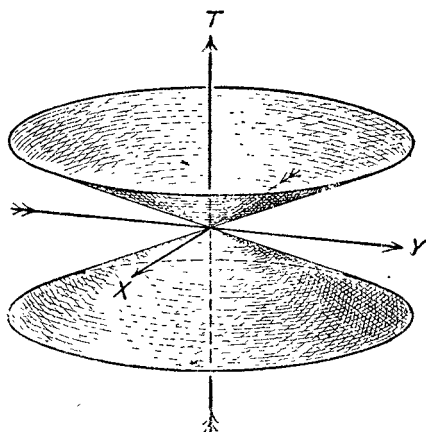
из бесконечно удаленного пространства. В смысле теории квадратичных образов в четырехмерном многообразии фундаментальный образ группы Галилея-Ньютона должен рассматриваться как дважды вырождающийся, а фундаментальный образ группы Лоренца, напротив, как однократно вырождающийся²⁾.

С геометрией, соответствующей группе Лоренца, мы уже познакомились раньше, как с *псевдо-евклидовой геометрией* (стр. 161 и сл.).

¹⁾ Этот образ является пересечением бесконечно удаленного пространства с гиперплоскостью $t=0$ и гиперцилиндром $x^2 + y^2 + z^2 = 0$.

²⁾ Вследствие этого вырождения фундаментальные образы переходят в себя еще при преобразованиях подобия (ср. стр. 206), которые все же здесь не будут приниматься во внимание, так как они не оставляют инвариантными положенные в основу уравнения.

Ради наглядности отбросим z -координату и будем рассматривать соответствующие предложения лишь для случая трех измерений x, y, t . Из каждой точки пространства выходит конус изотропных прямых, который мы изобразили на схематическом черт. 237¹⁾ для начала координат; все эти конусы параллельны между собой. Так как скорость света c , будучи измерена в обычных единицах (сантиметрах и секундах), изображается чрезвычайно большим числом $c = 3 \cdot 10^{10}$ см/сек, то этот конус чрезвычайно тесно прилегает к X -, Y -плоскости. Если бы мы стали приписывать c все большие и большие значения, то наш конус все теснее и теснее прилегал бы к этой плоскости и наконец в пределе при $c = \infty$ превратился бы в нее (притом дважды считаемую).



Черт. 237.

При этом предельном переходе фундаментальный образ группы Лоренца превращается в фундаментальный образ группы Галилея-Ньютона. Именно в случае группы Лоренца мы можем этот образ (если мы введем однородные точечные координаты:

$= x_1 : x_2, y = x_3 : x_4, z = x_5 : x_6, t = x_7 : x_8$) представить с помощью следующих двух уравнений: $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - c^2 x_4^2 = 0, x_5 = 0$. В однородных пространственных координатах: $u_1 : u_2 : u_3 : u_4 : u_5$ мы получим вместо этих уравнений только одно единственное уравнение: $u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 - \frac{1}{c^2} \cdot u_4^2 = 0$. Но если мы здесь будем неограниченно

увеличивать c , то мы получим в пределе: $u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 = 0$, а это как раз и является уравнением фундаментального образа группы Галилея-Ньютона в однородных пространственных координатах. Следовательно, между группой Галилея-Ньютона и группой Лоренца имеется такая же связь, как между евклидовой и неевклидовой геометрией.

Эти отношения между обеими группами имеют важные физические следствия. По классической механике мир должен иметь структуру группы Галилея-Ньютона, а по электродинамической теории — структуру группы Лоренца. Необходимо сделать выбор между этими двумя группами; историческое развитие показало, что предпочтение нужно отдать группе Лоренца. В самом деле, если бы мы отдали предпочтение группе Галилея-Ньютона, то нам пришлось бы втиснуть теорию элек-

¹⁾ В действительности этот конус является еще более плоским, чем как он изображен на чертеже.

тричества в рамки этой по существу совершенно чуждой ей группы, что, как показывает опыт (например известный эксперимент Майкельсона), просто невозможно. Если же мы отдадим предпочтение группе Лоренца, то нам хотя и придется внести в законы классической механики некоторые изменения для того, чтобы эти законы сделать инвариантными относительно группы Лоренца, но, так как группа Лоренца превращается в группу Галилея-Ньютона, если рассматривать скорость света бесконечно большой, эти изменения будут иметь значение только для тех явлений, при которых встречаются скорости того же порядка, как и скорость света. Вследствие этого в огромном большинстве явлений физики и в особенности в астрономии мы можем предполагать справедливыми законы классической механики, не опасаясь сделать сколько-нибудь ощутительной ошибки.

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

- Абсолютная кривизна 331—332
Абсолютные образы, см. фундаментальные образы
Автоморфные функции 329, 338—343
Аксиома непрерывности 180, 330
— о параллельных 296—302
Аксиоматика 42—43, 180, 330
Антиколлинеации 62—63
Антисолнце 229
Апериодические поверхности вращения постоянной отрицательной кривизны 309—310
Асимптотические треугольники 222, 249, 301
Аффинная прямая, плоскость, пространство 12—13
Аффинное n -мерное многообразие 41—44
— преобразование 33—40
Аффинные координаты 11—12
- Барицентрические координаты 21—22
Бельтрами-Пуанкаре модель 326, 336
Биссектриса 239—242
Бутылка Клейна 287
- Вдущие прямые конгруэнции 138
Взаимно перпендикулярные плоскости 155
— — прямые 154, 158, 169, 235, 237, 242—245, 258
— — (ортогональные) точки 169, 233—235, 242
Внешний мир 209, 226—231
Вращения в гиперболической геометрии 123—125, 139—141, 207—208, 246—248, 273—274
— в псевдоевклидовой геометрии 162—163
— в эллиптической геометрии 123—125, 139—141, 207—208, 235—236, 255, 260
- Вырождающиеся образы второго порядка, класса и степени 67, 68, 100—101, 107
— проективные мероопределения 183, 198—203
- Галилея-Ньютона группа 345
Гармоническое отношение 51, 173—176
Гауссова числовая плоскость 61, 325—329
Геодезические линии 271—272, 302, 314—315
Геометрия гиперболическая и эллиптическая, см. гиперболическая и эллиптическая геометрия
Геометрия, ее развитие 20—22, см. также исторические замечания
Геометрия неархимедова 330
— псевдоевклидова 161—164, 203, 346—347
— сферическая 166; см. также эллиптическая геометрия, ее связь со сферической геометрией
Гиперболическая геометрия (гиперболическое мероопределение) на прямой 191—193, 234
— — на плоскости 194—198, 204—208, 210—225, 243—255, 290—293, 296—302, 311—313, 319—329, 335—336, 339—341
— — в пространстве 198, 204—211, 223—231, 272—277, 294—295, 330—338
Гиперболическая геометрия, переход к евклидовой и эллиптической геометриям 99, 106, 210—211, 218, 220, 241—242, 276
— —, связь с евклидовым шаром 212—220
— кривизна 306
Гиперболические движения (см. движения в гиперболической геометрии)
— подстановки 337
— пространственные формы 290—295, 341

- Гиперболические функции 216
 Гиперболическое измерение углов в пучке 193—194
 — мероопределение, см. гиперболическая геометрия
 Гиперболы в гиперболической геометрии 252—255
 Гиперплоскость 41, 47
 Гиперсфера (сверхшар) 198, 272, 276—277
 Гиперцикл (сверхкруг) 197, 247
 Главные кривизны и главные радиусы кривизны 305—306, 331
 Главный круг 321
 Горосфера (пределный шар) 198, 272, 276, 331
 Гороцикл (пределный круг) 194, 248
 Группа, определение 29
 — Лоренца 163, 346—347
 — смешанная 110
 Группы дискретные 282—283, 288—289
 Движения вырождающегося мероопределения 162, 207—208
 — гиперболической геометрии 109—146, в частности 119, и 135, 207—208, 234, 246—249, 273—275, 277, 335
 Движения евклидовой геометрии 112—113, 126—128, 143—145, 155, 158, 160, 165, 207
 — эллиптической геометрии 109—146, — ; в частности 119—120, 135, 169, 207—208, 233—237, 256—263
 Двойная пара 105
 — точка как образ некоторого класса 86, 89
 Двойное отношение 51—56
 Двойные поверхности 26
 Двойственность в евклидовой связи 165
 — в проективном мероопределении 203—205
 — в проективной плоскости 47—49
 — в проективном пространстве 50
 — в гиперболической и эллиптической геометриях 164, 204—205, 235, 242
 Двоичные дроби 180
 Двусторонние поверхности 25
 Действительные образы второго порядка и класса 65
 Детерминанта ранг 75
 Детерминанты окаймленные 72, 73
 — ; применение в геометрии 15
 Дискретные группы 282—284, 289—293, 338
 Дифференциальная геометрия на поверхности в евклидовом пространстве 302—307
 — — неевклидова 267—270, 330—332
 Евклидова геометрия 49, 112—113, 126—128, 144—166, 186, 199, 204—211, 218, 220, 223—227, 242, 268—270, 275—288, 294—299, 302—313, 321
 Евклидова геометрия; движения, расстояния и т. д., см. движения и т. д.
 — — ; пространственные формы 271, 278—288, 294—295
 Единичная точка 11, 16, 18, 56
 Закон инерции квадратичных форм 80, 84
 Зеркальные отображения в гиперболической геометрии 109—146: в частности 119, 135, 207, 234—235, 246, 335, 346, 335
 — — в евклидовой геометрии 112—113, 128, 143, 155, 160, 207
 — — в эллиптической геометрии 109—146; в частности 119—120, 135, 207, 293—237, 255
 Зеркальные отражения 235—237, 246
 Избыток 221, 235
 Изоморфизм 234, 235
 Изотропные прямые (минимальные прямые) и изотропные плоскости в евклидовой геометрии 151—158, 165
 — точки, прямые и плоскости в эллиптической и гиперболической геометриях 164, 185, 327
 Инвариантный треугольник плоского проективного преобразования 121—123
 — тетраэдр пространственного проективного преобразования 135—138
 Инварианты 53, 81, 158, 160, 184
 Инцидентность 48

- Исторические замечания 12, 15, 20—22, 26, 29, 31, 43—44, 47, 49, 51, 63, 71, 74, 83—84, 94, 108, 157, 176, 182, 296—332
- История неевклидовой геометрии 296—332
- Наноническое уравнение поверхности 78
- Касательный тангенциальный треугольник 114, 121
- тетраэдр 90, 93
- Кватернионы 261—263
- лиф фтордовы параллели 256—259, 264
- поверхности 261, 264—272, 281
- пространственные формы евклидовой геометрии 270, 280
- сдвиги 256—261
- Когрессиентность; когрессиентные, переменные 29—31
- Кольцевая форма 283—288
- Кольцеобразная поверхность вращения постоянной отрицательной кривизны 309—310
- Кольцеобразные поверхности 82
- Конгруенция линейная 138
- Конические поверхности вращения постоянной отрицательной кривизны 309, 310
- Конические сечения как плоскостные образы 84—85
- — центральные 251—255
- Контрагрессиентность; контрагрессиентные переменные 29—31
- Конфигурации 242
- Конформное отображение 318—329
- Координаты аффинные 11—12, 19—20
- однородные 12—15
- плоскости (плоскостные координаты) 46—47
- проективные 15—20, 56, 174—182
- прямой (прямолинейные координаты) 19, 44—45
- Кратчайшее расстояние двух прямых 245
- Кривизна абсолютная и относительная 331
- плоской кривой и поверхности в евклидовой геометрии 305
- поверхности 307, 331
- риманова многообразия 316—317
- эллиптической и гиперболической геометрии 213—214, 228—230, 331
- Кривые второго порядка 46, 64—108; классификация 83
- второго порядка в эллиптической и гиперболической геометриях 250—255
- второго класса 46, 44—108; классификация 88—89
- второй степени 99—102; классификация 100
- вырождающиеся и невырождающиеся 67, 68, 100—101
- действительные и мнимые 65
- нулевые и овальные 81—83
- n -го порядка и n -го класса 46
- постоянного расстояния 237, 247, 298
- Круг в вырождающихся мероопределениях 161—162, 201—203
- гиперболической геометрии 122—123, 196—198, 218, 220, 246—252
- евклидовой геометрии 155—156, 220
- эллиптической геометрии 122—123, 196—198, 218—220, 235—239, 242, 251, 252, 266, 271
- вписанный, невписанный и описанный 239—240, 242
- кривизны 305
- расстояний 202
- Круговые точки 155—156
- Линейная конгруенция 138
- однородная подстановка 27—31
- Линейные подстановки комплексного переменного 120, 277, 333—336
- Линейный элемент в евклидовой геометрии 304
- — — неевклидовой геометрии 315—316, 333
- — — римановом многообразии 314, 317—318
- Линия тока 337
- Лист Мебиуса 25
- Локсодромическая подстановка 337
- Мероопределение параболическое 190, 200—203, 209
- проективное 183—188, 3.9—330
- проективное вырождающееся и невырождающееся 183

- эллиптическое и гиперболическое, см. эллиптическая и гиперболическая геометрии
- Минимальные прямые, см. изотропные прямые
- Мнимые образы второй степени и класса 65
- элементы 57—60
- Многообразие n -мерное 41—44, 47, 94, 186, 198, 223—225, 291—295, 314—318, 344—347
- риманово n -мерное 314—315
- риманово постоянной кривизны 316—317
- Модель Пуанкаре гиперболической геометрии 326—335
- Модулярная функция 339
- Неархимедова геометрия 330
- Невырождающееся проективное мероопределение 183—198
- Невырождающиеся образы второго порядка, класса и степени 67, 68, 100, 107
- Недостаток 222, 225
- Неевклидова дифференциальная геометрия 267—270, 330—332
- Неевклидов линейный элемент 333
- Неевклидова геометрия; история 296—332
- Неопределенная форма 80
- Неподвижные точки проективного преобразования 38—40, 120—123, 135—138
- Несобственные (бесконечно далекие) элементы 12
- проективные преобразования 109—110, 129—130
- Несобственные n -мерные многообразия 41—44, 47, 94, 186, 198, 223—225, 294—295, 314—318, 344—347
- Нормальное сечение поверхности 305
- Нулевые поверхности и кривые 81—82, 83
- Образы второго порядка, класса и степени, см. кривые и, соответственно, поверхности второго порядка, класса, степени
- Обратные преобразования 28
- Овальные поверхности и кривые 81—83
- Однородные координаты плоскости 46—47
- Однородные координаты прямой 19, 44—47
- — точки 11—15
- линейные подстановки
- пространственные формы 281, 294
- Односторонние поверхности 25—26
- Окаймленный определитель 72—73
- Операции перестановочные 130
- Ортогональные подстановки 118, 134, 143
- траектории (круги как ортогональные траектории) 237, 247
- Оси движения 259, 273
- зеркального отражения 246
- клиффордовой поверхности 266
- центрального конического сечения 252, 253
- Основные образы 41—42, 50, 94
- Относительная кривизна 331
- Отображения конформные 318—329
- сохраняющие длины 267, 303—304, 318
- Отрицательно искривленный кусок поверхности 306
- определенная форма 80
- Пара точек как образ некоторого класса 85
- Параболические подстановки 337—338
- Параболическое мероопределение 190, 200—203, 209
- Параболы в гиперболической геометрии 250, 252
- Параллельные плоскости 272
- прямые 167, 173, 227—228, 256—259, 272, 296—302
- Параметр, зависимость от него 57—58
- Параметрическая форма уравнения прямой, плоскости, основного образа 14, 15, 19, 42
- Перестановочные операции 130—131
- Плоскости взаимно перпендикулярные 155
- изотропные, см. изотропные плоскости
- мнимые и комплексно-сопряженные 59—60
- Площадь круга и длина окружности 218—220

- треугольника 80
- Поверхность вращения постоянной отрицательной кривизны 307—313
- Поверхности второго порядка 47, 64—108; классификация их 81
 - второго класса 47, 64—108; классификация их 85—86
 - второй степени 107—108; классификация их 107
 - вырождающиеся и невырождающиеся 67, 68, 108
 - действительные и мнимые 65
 - n -го порядка и n -го класса 47
 - нулевой кривизны 307, 331
 - нулевые, овальные и кольцеобразные 82
 - односторонние и двусторонние 24—26
 - постоянной кривизны 307—313, 331—332
 - род 290
- Подгруппа; определение 33—34
 - ; установление всех конечных подгрупп линейных подставок 3, 8
- Подстановки линейные однородные 27—29
 - обратные 28
 - эллиптические, параболические, гиперболические и локсодромические 337
- Политехническая школа 20
- Положительно искривленный кусок поверхности 306
- Положительно определенная форма 80
- Полярные преобразования 65—71
- Полярный тетраэдр 78
- Поляры сопряженные 70
- Полюс, поляр, полярная плоскость 66, 67—68
- Постоянная расстояний 184, 190—191, 192—194, 212, 213—214
- Постоянной кривизны поверхности 307
 - — риманово многообразии 317
- Построение четырехсторонника 173—176
- Преобразование эллиптической, параболической и гиперболической геометрий друг в друга 99, 106, 210—216, 218, 220, 212, 276
 - образов второго порядка 95—106
- Предельный круг (гороцикл) 197, 248
 - — автоморфной функции 339
 - шар (горосфера) 198, 272, 276
- Преобразования аффинные, свободно-аффинные и центрально-аффинные 33—40
- Преобразования наложения 282, 341
 - подобия в евклидовом пространстве 112, 126, 146
 - ; отсутствие преобразований подобия в неевклидовой геометрии 206, 298, 301
 - проективные; см. коллинеации
 - твердые 206
- Проблема пространственных форм 281
- Проективная прямая, плоскость, пространство 13, 22—27
 - шкала 37, 177—381
- Проективное мероопределение 183—208
 - n -мерное многообразие, см. многообразие n -мерное
- Проективные координаты прямой и плоскости (прямолинейные и плоскостные координаты) 44—45, 46—47
 - координаты точки (точечные координаты) 15—20
 - преобразования 32—40
 - — переводящие в самого себя образ второй степени 109—146, 155, 165, 169, 185, 206—208
 - — собственные и несобственные 128—130
- Прямолинейный ряд точек 50
- Прямые взаимно перпендикулярные, см. взаимно перпендикулярные прямые
 - изотропные, см. изотропные прямые
 - мнимые и комплексно-сопряженные 58—60
 - сильно-мнимые и слабо-мнимые 60, 94
- Псевдоевклидова геометрия 161—164, 203, 346—347
- Псевдосфера 309—310
- Пучок 23, 50—51, 55—56, 200
- Пучки скрещенные 106

- Радиус кривизны 212—213, 229, 277, 305
 Развертывающиеся поверхности 267, 303—307
 Развитие геометрии 20, см. также исторические замечания
 Ранг детерминанта 75
 Расстояние в евклидовой геометрии 147—148, 150—152, 158—160, 199—200
 — в проективных мероопределениях 161—162, 184—189, 198—203
 — кратчайшее между двумя прямыми 245
 — перпендикулярное 169, 232—235, 242, 254
 Риманова числовая сфера 62
 Риманово многообразие n измерений 314—315
 Род поверхности 290
 Ряд точек прямолинейный 50
 Сверхкруги (гиперциклы) 197, 247
 Сверхшары (гиперсферы) 198, 272, 276
 Свободно-аффинные преобразования 33
 Связка 23, 165—170
 Сдвиги 130—134, 208, 254—263
 Сеть Мебиуса 181
 Сильнонимые прямые 60, 94
 Синектическая линейчатая конгруенция 332
 Слабонимые прямые 60, 94
 Смешанные группы 110
 Собственные проективные преобразования 109, 129—130
 — точки, прямые и плоскости в евклидовой геометрии 151
 Сопряженные мнимые точки, прямые, плоскости 57—60
 — поляры 70
 Сохраняющее углы (конформное) отображение 318—329
 Стереографическая проекция 62, 320
 Сферическая геометрия 166
 — — ; отношение к эллиптической геометрии, см. эллиптическая геометрия
 Сумма углов треугольника 220—223
 Твердые преобразования 206—208
 Тензор кривизны 316
 Теорема о высотах 242
 — — перпендикулярах 242
 — — конгруентности 238—239, 249
 Теорема о точках пересечения в треугольнике 239—242
 Теория инвариантов 29, 31
 — поверхностей 302—311, 330—331
 — относительности 344—348
 — элементарных делителей 40, 250
 Топологические применения неевклидовой геометрии 344
 Точка как образ некоторого класса 45—46, 85—86, 88—89
 Точки изотропные, см. изотропные точки
 — мнимые и комплексно-сопряженные 57—60
 — округления 305
 — ортогональные (взаимно перпендикулярные) 169, 233—235, 242, 254
 — пересечения кругов 238, 249
 Тригонометрические формулы эллиптической и гиперболической геометрий 215—218
 Угловая постоянная 185, 193, 195—196
 Угловой круг 202
 Угол в евклидовой геометрии 148—150, 153—155, 156—158, 165, 193, 200
 Угол параллельности 244
 Угол в проективном мероопределении 185—189, 193—195, 200—203
 Униформизация 341
 Уравнение касательной 114
 Фокусы и фокусные линии центрального конического сечения 254—255
 Формы, положительно и отрицательно определенные, неопределенные 80, 314
 Фундаментальная группа 233
 Фундаментальная область 282, 283, 340
 Фундаментальные образы евклидовой геометрии 155, 165, 186
 — — проективных мероопределений 183—186, 198—203

- Фундаментальные образы эллиптической и гиперболической геометрий 168—169, 190, 194, 197—198
 Фундаментальные прямые 17
 — — точки 16
 Фундаментальный треугольник 18
 Функции автоморфные 329, 338—343
 — — гиперболические 216
 Центры вписанного, невписанного и описанного кругов 239, 242
 Центр центрального конического сечения 251—253
 Централно-аффинное преобразование 33
 Центральное коническое сечение 252—253
 Цилиндрическая форма 278—279, 283—288
 Числовая (гауссова) плоскость 61
 Числовой круг Римана 62
 Четвертая гармоническая точка, прямая плоскость 51, 173—176
 Шар евклидов; эллиптическая и гиперболическая геометрия на евклидовом шаре действительного или мнимого радиуса 170—173, 212—220, 242—243
 Шаровой круг 155—156
 — — мнимый 152, 156
 Шары в евклидовой геометрии
 — — эллиптической и гиперболической геометриях 198, 255, 272, 275—277
 Шкала проективная 37, 177—181
 Эллипс в эллиптической и гиперболической геометриях 250—255
 Эллиптическая геометрия (эллиптическое мероопределение) на прямой 190—191, 232—234
 Эллиптическая геометрия на плоскости 167—173, 194, 197—198, 204—208, 212, 214—221, 250—255, 288—289, 297, 310, 315, 318—324
 — — в пространстве 198, 203—211, 226—231, 255—272, 294, 317—318, 330—332
 — — ; переход к евклидовой и гиперболической геометриям 99, 106, 210—211, 218, 220, 241—242, 275—277
 — — ; связь со сферической геометрией 171—173, 212, 214—219, 221, 242, 289, 294
 Эллиптическая кривизна 306
 Эллиптические движения, см. движения в эллиптической геометрии
 Эллиптические подстановки 337
 — пространственные формы 289—294
 Эллиптическое измерение углов в пучке 193—194
 Эллиптическое мероопределение. см. эллиптическая геометрия.

Редактор *Р. Н. Бончковский*

Сформление *Э. М. Бейлиной*.

Сдано в производство 7/VI—1935 г. Подписано к печати 25·XI—1935 г. Листов 22¹/₄. Тираж 5000
Формат 62×94¹/₁₆. Печатных знаков в листе 48 000 Главн. ред. общетехн. лит. № 66
Уполномоч. Главлита № В-23353 (484). Зак. № 124.

Типография Государственного научно-технического издательства Украины.
Киев, ул. Воровского, 42.

ОПЕЧАТКИ

Стр.	Строка	Напечатано	Следует читать
63	10 сверху	$+ \sin x$	$+ i \sin x$
70	17 снизу	$(x_\lambda + xy)$	$(x_\lambda + xy_\lambda)$
75	12 снизу	$\Sigma a_{1\lambda} x_{1\lambda}$	$\Sigma a_{1\lambda} x_\lambda$
114	9 снизу	$y_2 = 0$	$y_3 = 0$
149	5 сверху	$u_1 u_2^1 + u_2 u_1^1$	$u_1 u_1^1 + u_2 u_2^1$
154	7 сверху	$- u_3 u_2^{12})$	$- u_3 u_2^1)^2$
182	12 снизу	аксном	аксиомы

4 опечатки по вине редактора и 3— по вине типографии.