

Ergänzungen zur Experimentalphysik

Einführende exakte Behandlung physikalischer
Aufgaben, Fragen und Probleme

Von

Dr. H. Greinacher

o. Professor der Physik an der Universität Bern

Mit 79 Abbildungen



Springer-Verlag Wien GmbH

1942

Ergänzungen zur Experimentalphysik

Einführende exakte Behandlung physikalischer
Aufgaben, Fragen und Probleme

Von

Dr. H. Greinacher

o. Professor der Physik an der Universität Bern

Mit 79 Abbildungen



Springer-Verlag Wien GmbH
1942

ISBN 978-3-662-35916-7 ISBN 978-3-662-36746-9 (eBook)
DOI 10.1007/978-3-662-36746-9

**Alle Rechte, insbesondere das der Übersetzung
in fremde Sprachen, vorbehalten.**

Copyright 1942 by Springer-Verlag Wien

Ursprünglich erschienen bei Springer-Verlag OHG. in Vienna 1942.

Meinem ehemaligen Lehrer
Herrn Geheimrat
Professor Dr. Max Planck
in Verehrung und Dankbarkeit
gewidmet

Vorwort.

Dieses Buch bildet eine Herausgabe der Vorlesungen, die ich in Ergänzung zu meinen Vorlesungen über Experimentalphysik an der Universität Bern halte. In diesen „Ergänzungen zur Experimentalphysik“ wurden jeweils ausgewählte Aufgaben, Fragen und Probleme behandelt, wie sie sich gerade im Anschluß an die Hauptvorlesung ergaben. Es war dabei keineswegs die Absicht, den an und für sich schon reichlichen Wissensstoff noch wesentlich zu vermehren. Vielmehr sollte die ja immer unzulängliche kursorische Vermittlung des Stoffes dadurch wirksamer gemacht werden, daß ich die Studierenden zu selbständiger Bearbeitung von physikalischen Fragen anleitete. Die rein rezeptive Arbeit der Hörer sollte so durch eine produktive Mitarbeit lebendig gestaltet werden. Bald bot sich hier als Thema ein Gegenstand, der in der Hauptvorlesung nur kurz berührt werden konnte und der sich nun ausführlich und exakt behandeln ließ, bald wurden die neu erworbenen Kenntnisse zur Lösung einer instruktiven Aufgabe verwendet. Dann wieder kamen Zusammenhänge zur Sprache, die in Physikbüchern vielfach nicht deutlich genug hervortraten. Gelegentlich aber wurden auch neuartige Themen und interessant scheinende Probleme zur Behandlung gestellt.

Die Absicht ging dahin, die Durchdringung des Stoffes auch einem größeren Kreise zu ermöglichen. Man mußte sich daher einerseits auf elementare mathematische Hilfsmittel beschränken und andererseits versuchen, die Entwicklungen und Beweise so einfach und durchsichtig als möglich zu gestalten. Auf diese Weise konnte es gelingen, sogar Dinge, deren Behandlung in der Experimentalphysik gewöhnlich als zu schwierig befunden wird, dem Verständnis nahe zu bringen. Nicht unwichtig schien es mir, gelegentlich einen Beweis nicht nur durchzuführen, sondern auch

etwas über das Warum des begangenen Weges sowie über weitere Möglichkeiten der Behandlung zu sagen. Auch wurde kurz auf Fragen eingegangen, die einem kritisch begabten Anfänger bei der Bearbeitung auftauchen mögen. Das Ziel war, den Studierenden allmählich in die geistige Werkstatt des praktischen Physikers einzuführen und ihn mit dem dort vorhandenen Rüstzeug vertraut zu machen.

In gleicher Weise möchte nun auch dieses Buch versuchen, Kenntnisse und Fähigkeiten zu vermitteln. Immerhin könnte auch eine noch so geeignete Darstellung dieses Ziel nie voll erreichen, wenn nicht der Lernende mitarbeiten und sich an neuen Aufgaben selbst versuchen würde. So möge er sich denn jeweils nach dem Studium eines Paragraphen nochmals zur selbständigen Durchführung der Aufgabe hinsetzen. Je nach der erlangten Übung wird ihm die Führung eines einfacheren Beweises gelegentlich schon nach Lesen der Einleitung gelingen. Eine erhöhte Selbständigkeit und Freude am selbst Erarbeiteten sollen ferner die Aufgaben bezwecken, die vielfach am Schlusse der Abschnitte gestellt werden. Diese sind so gewählt, daß sie in engem Anschluß an den behandelten Gegenstand unmittelbar gelöst werden können, so daß mir eine Bearbeitung im Text nicht erforderlich schien. Es war mir immer eine besondere Freude zu sehen, wie auch nicht Naturwissenschaften Studierende allmählich zur Lösung solcher Aufgaben befähigt wurden und wie sich allgemein ein lebendiges Interesse an der physikalischen Ideenwelt und sozusagen am physikalischen Denksport einstellte. Dabei habe ich selbst auch manche Anregung erfahren.

Was den Charakter des Buches anbelangt, so soll es nicht eine mit physikalischen Beispielen versehene Einführung in die Mathematik des Naturwissenschaftlers darstellen, vielmehr ein Physikbuch, bei dem die Mathematik nur das nötige Beiwerk zur exakten Behandlung liefert. Als Sammlung von Themen und Aufgaben und in seiner didaktischen Art, sowie entsprechend der Behandlung von neuartigen Fragen dürfte es auch für den Fachkollegen nicht ohne Interesse sein. Der Hauptsache nach aber möchte dieses Buch allen Studierenden, die Physik als Haupt- oder Nebenfach studieren, Wissen, Können und Anregung vermitteln und manchem bei der Lektüre seines Experimentalphysikbuches ein zusätzlicher Ratgeber und Wegbereiter sein. Darüber hinaus aber

mag es vielleicht dem angehenden Physiker auch den Übergang zum Studium der theoretischen Physik erleichtern helfen. So möchte ich denn wünschen, daß diese „Ergänzungen zur Experimentalphysik“ nicht nur im eigenen Hörsaal, sondern nun auch in einem größeren Kreise fruchtbringend wirken mögen.

Bern, Mai 1942.

H. Greinacher.

Inhaltsverzeichnis.

I. Mechanik.

| | Seite |
|---|-------|
| 1. Die Brückenwaage | 1 |
| 2. Schwingungsdauer einer Flüssigkeit im U-Rohr | 3 |
| 3. Änderung der Schwerebeschleunigung infolge der Drehung der Erde | 4 |
| 4. Wie weit ist der Mond von der Erde entfernt? | 6 |
| 5. Wie groß ist das Gewicht einer laufenden Sanduhr? | 8 |
| 6. Kreisbewegung und Impuls | 11 |
| 7. Masse und Geschwindigkeit | 13 |
| 8. Das Gesetz des freien Falles in der speziellen Relativitätstheorie | 14 |
| 9. Reaktionskraft eines seitlich aus einem Gefäß austretenden Flüssigkeitsstrahls | 18 |
| 10. Wie weit spritzt ein Flüssigkeitsstrahl aus einer seitlichen Öffnung? | 19 |
| 11. Die barometrische Höhenformel | 21 |

II. Akustik und Wellenlehre.

| | |
|---|----|
| 12. Newtonsche Formel für die Schallgeschwindigkeit | 23 |
| 13. Schallgeschwindigkeit in Abhängigkeit von der Luftfeuchtigkeit | 25 |
| 14. Welches ist die Tonfrequenz, die ein Beobachter hört, wenn er sich gleichzeitig mit der Tonquelle bewegt? | 27 |
| 15. Echo und Geschwindigkeit bewegter Schallquelle | 28 |
| 16. Die diatonische Tonleiter als Tonspektrum | 29 |
| 17. Mathematischer Ausdruck für eine Welle | 32 |
| 18. Zusammenhang zwischen stehender und fortschreitender Welle . | 35 |
| 19. Entstehung der Schwebungen durch Interferenz | 38 |
| 20. Schwebungen bei veränderlicher Wellengeschwindigkeit | 40 |

III. Wärmelehre.

| | |
|--|----|
| 21. Die Barometerkorrektur | 42 |
| 22. Thermische Kräfte | 44 |
| 23. Druck eines Radreifens | 45 |
| 24. Verhältnis der spezifischen Wärmen c_p/c_v nach Clément und Desormes | 48 |
| 25. Thomson-Joule-Effekt und mechanisches Wärmeäquivalent . . | 51 |
| 26. Dampfdruck und Flüssigkeitskrümmung | 54 |

| | Seite |
|--|-------|
| 27. Der Siedeverzug | 56 |
| 28. Der Carnotsche Kreisprozeß | 60 |
| 29. Die Clausius-Clapeyronsche Gleichung | 64 |

IV. Optik (Strahlungslehre).

| | |
|---|----|
| 30. Minimum der Strahlenablenkung durch ein Prisma | 68 |
| 31. Das Brechungsgesetz aus dem Fermatschen Satz | 71 |
| 32. Beziehung zwischen Linsen- und Spiegelgleichung | 75 |
| 33. Bestimmung der Brechkraft einer Zerstreuungslinse aus ihrer verkleinernden Wirkung | 77 |
| 34. Brennweite und Lage der Hauptebenen zweier zentrierter Linsen | 79 |
| 35. Brennweite und Hauptebenen einer Linse | 81 |
| 36. Beziehung zwischen Fernrohr und Mikroskop | 85 |
| 37. Kirchhoffsches Strahlungsgesetz | 89 |

V. Elektrizität und Magnetismus.

A. Magnetostatik.

| | |
|--|----|
| 38. Feld eines Stabmagneten in der 1. und 2. Hauptlage | 91 |
| 39. Feld eines Dipols | 92 |
| 40. Magnetisches Ohmsches Gesetz | 96 |
| 41. Der Entmagnetisierungsfaktor | 97 |

B. Elektromagnetismus.

| | |
|---|-----|
| 42. Magnetische Wirkung stromumflossener ebener Flächen | 102 |
| 43. Magnetfeld eines Kreisstroms und eines Solenoides | 105 |
| 44. Feld eines Elektromagneten | 110 |
| 45. Energieaufnahme einer Stromspule | 113 |

C. Elektrostatik.

| | |
|--|-----|
| 46. Die Potentialwaage | 116 |
| 47. Das Quadrant-Elektrometer | 118 |
| 48. Potentialfeld einer geladenen Kugel | 122 |
| 49. Feld in der Nähe einer elektrisch geladenen ebenen Fläche und elektrostatischer Druck | 124 |
| 50. Kraftwirkung einer geladenen Kugel | 128 |
| 51. Direkte Berechnung des Feldes einer geladenen Kugel | 131 |
| 52. Kapazitätsänderung eines Kondensators durch eine geerdete Um- hüllung | 133 |

D. Elektrodynamik.

| | |
|---|-----|
| 53. Wheatstonesche Brücke | 137 |
| 54. Gruppenschaltung von galvanischen Elementen | 140 |
| 55. Leuchttemperatur einer Metallfadenlampe | 143 |
| 56. Dissoziationsgrad eines Elektrolyten | 144 |
| 57. Elektromotorische Kraft und Energieverbrauch des galvanischen Elements | 148 |
| 58. Selbstinduktion einer Stromspule | 152 |

| E. Elektrotechnik. | | Seite |
|--|--|-------|
| 59. Energieabgabe einer Stromquelle bei angeschlossenem Elektromotor | | 153 |
| 60. Leistungsaufnahme eines Elektromotors | | 155 |
| 61. Addition von Wechselstromgrößen | | 157 |
| 62. Wechselstromwiderstand eines Schwingungskreises | | 159 |
| F. Radiologie. | | |
| 63. Druck durch bewegte Ionen | | 162 |
| 64. Bestimmung der Lichtgeschwindigkeit mit Hilfe von Ionenströmen | | 168 |
| 65. Kathodenstrahlgeschwindigkeit und Beschleunigungsspannung . | | 170 |
| 66. Röntgenwellen und Materiewellen | | 173 |
| Sachverzeichnis | | 177 |

I. Mechanik.

§ 1. Die Brückenwaage.

Die Konstruktion der Brückenwaage (in Abb. 1 schematisch dargestellt) hat folgende drei Bedingungen zu erfüllen. Es soll

I. das Gewicht P einen gegebenen Bruchteil der Last Q ausmachen,

II. die Verteilung der Last auf der Brücke keine Rolle spielen,

III. die Brücke beim Einspielen sich parallel zu sich selbst verschieben.

Zur Berechnung des Gleichgewichts der Waage kann man auf die wirkenden Kraftmomente eingehen, oder aber, man wendet das Prinzip der virtuellen Arbeiten an. Das erste Verfahren ist das anschaulichere, das zweite aber, zumal es einem das Eingehen auf Details erspart, das bequemere. Hiernach hat man nur die Arbeiten zu berechnen, welche die wirkenden Kräfte bei einer kleinen, mit dem Mechanismus der Anordnung verträglichen Verschiebung (einer virtuellen Verschiebung) leisten und die algebraische Summe aller Arbeitsbeträge dann gleich null zu setzen.

Hierbei ist zu beachten, daß die Waage schon vor dem Auflegen von P und Q im Gleichgewicht ist. Die dann bereits vorhandenen Kräfte (Hebel, Waagschale, Brücke usw.) ergeben also für sich schon die virtuelle Arbeit 0. Legt man jetzt P und Q auf, so hat man nun bloß noch die virtuellen Arbeiten dieser beiden Gewichtskräfte zu berechnen und dann zusammen gleich null zu setzen. Denkt man sich etwa P gehoben und Q gesenkt,

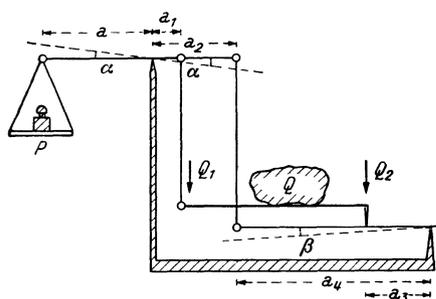


Abb. 1.

so ist die an P gegen die Schwere geleistete Arbeit gleich der von Q hergegebenen.

Q verteilt sich dabei auf die beiden, je nach der Lage auf der Brücke variablen Anteile Q_1 und Q_2 , wobei aber

$$Q = Q_1 + Q_2.$$

Ferner ist, da die Neigungswinkel α und β sehr klein sein sollen,

$$\begin{aligned} \text{die Hebung von} & \quad P : a \alpha, \\ \text{die Senkung von} & \quad Q_1 : a_1 \alpha \\ \text{und von} & \quad Q_2 : a_3 \beta. \end{aligned}$$

Wir haben nun nur die Arbeitsbeträge dieser drei wirkenden Kräfte in Rechnung zu setzen. Kräfte, wie etwa die Spannung in der starren Verbindung der Hebelenden von a_2 und a_4 geben keinen Beitrag. So erhalten wir denn

$$\text{virtuelle Arbeit} \quad Pa \alpha = Q_1 a_1 \alpha + Q_2 a_3 \beta. \quad (1)$$

Um jetzt das Gleichgewicht der Kräfte zu finden, haben wir die verschiedenen Verschiebungen durch eine einzige auszu-drücken und die Arbeitsgleichung dann durch diese zu kürzen. Die Beziehung zwischen α und β folgt aus der konstruktiven Eigenschaft der Waage, daß die Hebelenden von a_2 und a_4 stets dieselbe Senkung erfahren. Danach ist

$$a_2 \alpha = a_4 \beta, \quad (2)$$

so daß aus (1) wird

$$Pa \alpha = Q_1 a_1 \alpha + Q_2 a_3 \frac{a_2}{a_4} \alpha.$$

Nach Kürzung mit dem von 0 verschiedenen α kommt

$$Pa = Q_1 a_1 + Q_2 a_3 \frac{a_2}{a_4}. \quad (3)$$

Gemäß dieser Formel müßten zur Berechnung von P das Q_1 und Q_2 einzeln bekannt sein. Das dringendste Erfordernis für die Brauchbarkeit der Waage ist aber Bedingung II, d. h., daß für das Gleichgewicht nur die Summe $Q_1 + Q_2$ maßgebend sein darf. Dies führt zur Forderung, daß in (3) die Faktoren von Q_1 und Q_2 gleich sein müssen:

$$a_1 = a_2 \frac{a_3}{a_4},$$

oder daß

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{a_3}{a_4}. \quad (4)$$

In diesem Falle wird dann

$$Pa = Qa_1, \quad (5)$$

d. h. es gilt dieselbe Beziehung wie bei der einfachen Schnellwaage, und kann das Verhältnis a_1/a gemäß Forderung I nach Belieben gewählt werden.

Um nun auch Bedingung III zu erfüllen, muß sein

$$a_1 \alpha = a_3 \beta.$$

Im Hinblick auf (2) ergibt dies

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{a_3}{a_4},$$

glücklicherweise also dieselbe Hebelbedingung wie oben (4), so daß sich das Gewünschte von selbst ergibt.

Natürlich könnte man nach Erhalt von (3) auch so vorgehen, daß man erst Bedingung III erfüllte. Dabei ergäbe sich dann das Resultat, daß die Faktoren von Q_1 und Q_2 überraschenderweise gleich groß ausfallen. Man würde sozusagen durch Berücksichtigung des in III ausgedrückten, mehr ästhetischen Momentes mit der gleichzeitigen Erfüllung der für die Brauchbarkeit maßgebenden Bedingung II belohnt werden.

§ 2. Schwingungsdauer einer Flüssigkeit im U-Rohr.

Welche Pendelformel ist auf die Anordnung der Abb. 2 anzuwenden? Wir haben kein mathematisches Pendel vor uns, da keine bestimmte Pendellänge und auch kein physisches, da keine Rotation und damit kein Trägheitsmoment vorhanden ist. Hier schwingt vielmehr eine einheitliche Masse m unter der Wirkung der Schwere auf und ab, wobei die treibende Kraft proportional mit der Entfernung der Masse aus der Ruhelage anwächst. Wir haben somit die Formel für ein elastisches Pendel, auf das eine Direktionskraft D wirkt, anzuwenden:

$$t = 2\pi \sqrt{m/D}. \quad (I)$$

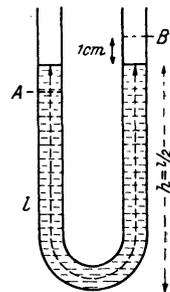


Abb. 2.

Die bewegte Masse ist $m = lq\rho$, wo q den Querschnitt, ρ die Dichte bedeutet. D ist die Kraft, welche die Flüssigkeit zurücktreibt, wenn diese um 1 cm aus der Ruhelage verschoben wird. Da der Niveauunterschied AB in diesem Falle 2 cm beträgt, so entspricht D dem Gewicht einer Flüssigkeitssäule von 2 cm. Also ist

$$D = 2q\rho g.$$

Daher erhalten wir

$$t = 2\pi \sqrt{\frac{lq\rho}{2q\rho g}} = 2\pi \sqrt{\frac{l}{2g}}. \quad (2)$$

Die Schwingungsdauer ist also gleich derjenigen eines mathematischen Pendels von der Höhe einer Flüssigkeitssäule $h = l/2$. Die Natur der Flüssigkeit spielt dabei keine Rolle, da ja ρ aus (2) herausfällt.

§ 3. Änderung der Schwerebeschleunigung infolge der Drehung der Erde.

Ein unter dem Breitengrad φ (Abb. 3) befindlicher Gegenstand erfährt, kugelförmige Gestalt und kugelsymmetrische Massenverteilung der Erde vorausgesetzt, eine nach dem Erdmittelpunkt gerichtete Beschleunigung g . Infolge der Rotation

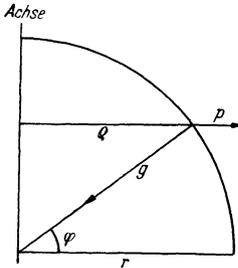


Abb. 3.

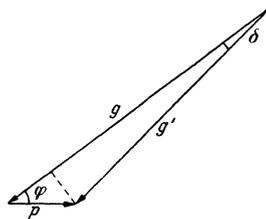


Abb. 4.

der Erde kommt aber noch eine \perp zur Drehungsachse gerichtete, zentrifugale Beschleunigung ϕ hinzu, deren Größe vom Abstand q von der Achse und der Winkelgeschwindigkeit ω der Erdrotation abhängt.

Aufgabe: Man berechne Richtung und Größe der wahren Beschleunigung g aus der gemessenen g' .

g und p setzen sich vektoriell zu g' zusammen (Abb. 4). Wir berechnen zunächst die Richtung von g bzw. den Winkel zwischen g und g' und sodann die absolute Größe von g .

I. Richtungsabweichung δ .

Nach dem Sinussatz haben wir

$$\frac{\sin \delta}{\sin \varphi} = \frac{p}{g'}. \quad (1)$$

Dabei ist

$$p = \omega^2 \rho = \omega^2 r \cos \varphi,$$

wo r den Erdradius bedeutet.

Danach erhält man

$$\sin \delta = \omega^2 r \cos \varphi \cdot \frac{\sin \varphi}{g'},$$

oder schließlich

$$\sin \delta = \frac{\omega^2 r}{2g'} \sin 2\varphi. \quad (2)$$

δ besitzt hiernach Extremwerte für $\varphi = 0$ und 90° , d. h. für Äquator und Pol, ferner für die mittlere Breite $\varphi = 45^\circ$. Für Pol und Äquator findet man unmittelbar $\delta = 0$, während man für das Maximum $\varphi = 45^\circ$ erst nach Einsetzen der Zahlenwerte für $\omega^2 r$ und g' seinen Wert angeben kann. ω folgt aus der Umdrehungszeit der Erde, also eigentlich aus der Länge des Sterntages. Wir können aber bis auf einen Fehler von weniger als $3\%_{00}$ den etwas größeren Wert des mittleren Sonnentages von $86400''$ benützen und rechnen $\omega = 2\pi/86400$. Unter Benützung eines mittleren Erdradius von $6,36 \cdot 10^8$ cm ergibt dies für

$$\omega^2 r = 3,36.$$

Nimmt man noch $g' = 981$ hinzu, so erhalten wir

$$\sin \delta = 0,00171 \cdot \sin 2\varphi. \quad (2a)$$

Danach beträgt das Maximum der Abweichung $\delta_m = 6'$.

II. Größe von g (wenn g' und φ bekannt).

Man wird ansetzen entweder den Kosinussatz

$$g'^2 = g^2 + p^2 - 2gp \cos \varphi, \quad (3)$$

und hat eine quadratische Gleichung zu lösen, oder den Sinussatz in der Form

$$\frac{\sin \delta}{\sin(\varphi + \delta)} = \frac{p}{g}, \quad (4)$$

und wird den Wert von $\sin \delta$ aus (1) hierin einsetzen. In beiden Fällen ist die Berechnung etwas umständlich. Man wird allerdings in deren Verlauf einige Vernachlässigungen vornehmen können im Hinblick auf die Kleinheit von δ . Dieser letztere Umstand kann aber schon von Anfang an berücksichtigt werden. Sehr häufig kann man eine rein schematische Durchführung der Rechnung vermeiden und diese vereinfachen, wenn man sich erst die Größenverhältnisse etwas ansieht.

So schneidet man hier sozusagen den gordischen Knoten entzwei, wenn man g durch eine Senkrechte aus der stumpfen Ecke des Dreiecks (Abb. 4) in zwei Stücke teilt. Der erste Teil ist $p \cos \varphi$, der zweite aber mit größter Annäherung g' . Also hat man unmittelbar das gesuchte Resultat

$$g = g' + p \cos \varphi,$$

d. h.

$$g = g' + \omega^2 r \cos \varphi. \quad (5)$$

§ 4. Wie weit ist der Mond von der Erde entfernt?

Zur Berechnung benötigen wir ein Abstandsgesetz. Nach NEWTON haben wir

$$K = f \frac{M m}{R^2}. \quad (1)$$

Hier bedeuten M und m die Massen der Erde und des Mondes, die man sich in ihrem Mittelpunkt konzentriert denken darf, und R den Abstand dieser Punkte (Abb. 5). Da die Anziehungskraft gleich dem zentrifugalen Trägheitswiderstand sein muß, so ist auch

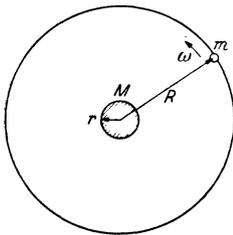


Abb. 5.

$$K = m \omega^2 R. \quad (2)$$

Durch Gleichsetzen von (1) und (2) folgt

$$f \frac{m}{R^2} = \omega^2 R. \quad (3)$$

f ist zwar experimentell bekannt, aber M kennen wir nicht. Weiter kommt man erst, wenn man sich des Zusammenhangs zwischen Massenattraktion und Gewicht erinnert und auf Grund desselben eine zweite Beziehung ableitet. Wir wollen hierzu zwei Wege angeben.

Der erste Weg geht von der Erkenntnis aus, daß die Attraktionskraft K nichts anderes als das Gewicht des Mondes im Abstand R darstellt. Danach ist $K = mg'$, wo g' die Beschleunigung der Schwere in Mondabstand bedeutet. Diese können wir aber aus derjenigen auf unserer Erde ausrechnen. Es gilt nach dem quadratischen Abstandsgesetz

$$g' : g = r^2 : R^2, \quad (4)$$

woraus folgt

$$K = mg \frac{r^2}{R^2}. \quad (5)$$

Durch Gleichsetzen von (5) und (1) erhält man dann

$$fM = g r^2. \quad (6)$$

Der zweite, zweifellos elegantere Weg verlangt die Betätigung der Phantasie. Anstatt die wirkliche Attraktion und Schwere des Mondes gleich zu setzen, kann man sich den Mond erst mit punktförmig konzentrierter Masse auf die Erde versetzt denken. Dann wäre sein Gewicht mg und die Attraktion $f \frac{Mm}{r^2}$. Also hätte man

$$f \frac{Mm}{r^2} = mg.$$

Dies ist aber nichts anderes als die Beziehung (6).

Die fragliche Größe M bzw. fM läßt sich nun leicht aus (6) und (3) eliminieren. Durch Division von (3) : (6) erhält man

$$\frac{1}{R^2} = \frac{\omega^2 R}{g r^2}. \quad (7)$$

Hieraus kann man R entweder absolut oder aber in Erdradien ausrechnen. In letzterem Falle lautet das Resultat

$$\frac{R}{r} = \sqrt[3]{\frac{g}{\omega^2 r}}. \quad (8)$$

Es kommt also auf das Verhältnis der Erdbeschleunigung g zur zentrifugalen Beschleunigung des Mondes, wenn er im Abstand r in seinem gewohnten Tempo rotierte, an.

Man findet für $R : r$ etwa 60, d. h. der Mondmittelpunkt ist von der Erde 59 Erdradien entfernt.

§ 5. Wie groß ist das Gewicht einer laufenden Sanduhr?

Wir legen einmal die Uhr auf die Waage und stellen sie ein zweites Mal darauf. Im zweiten Fall fließt ein Strom von Sand herunter und befindet sich während dieser Zeit nicht mehr auf der Waage. Ist in diesem Fall das Gewicht der Uhr kleiner?

Hier ist zu bedenken, daß zwar jedes Sandkörnchen in dem Moment, wo es sich loslöst, sein Gewicht abhebt, daß es aber beim Auffallen unten sowohl sein Gewicht als den durch den Fall erlangten Impuls an die Waage abgibt. Die Uhr zeigt also die in Abb. 6 (obere Kurve!) eingezeichnete Gewichtsschwankung an, und es fragt sich, ob das Gewicht im Mittel ebensoviel unter als

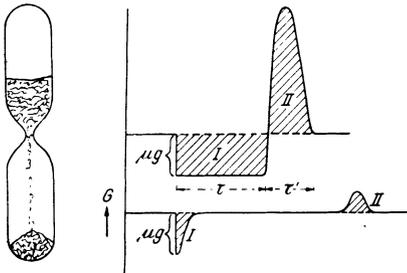


Abb. 6.

über dem Normalgewicht gelegen hat bzw. ob die beiden Flächen *I* und *II* gleich groß ausfallen müssen. In diesem Fall wäre dann beim Herabfallen eines Sandkorns das Uhrgewicht im Mittel konstant geblieben. Bedenkt man nun, daß stets viele Sandkörner herabfallen, wobei die Kurven (Abb. 6) ganz

beliebig gegeneinander verschoben sein werden (das Herabfallen geschieht ja unregelmäßig und nicht etwa portionsweise in periodischen Zeitabständen), so sieht man ein, daß sich die Gewichtsmankos und Überschüsse in allen möglichen Lagen überdecken, und wenn die Flächen *I* und *II* in Abb. 6 gleich groß sind, so wird eine Waage tatsächlich auch trotz der vielen Schwankungen keine Gewichtsänderung anzeigen, solange die Uhr läuft. Nur beim Beginn und Ende des Sandstroms entstehen zwei Schwankungen, zuerst eine momentane Abnahme und dann eine Zunahme des Normalgewichts. Nun wird man aus dem Satz von der Konstanz des Impulses schon schließen können, daß beide Flächen *I* und *II* gleich groß sein werden und daß der in Form von Gewicht beim Fallen verlorene Impuls sich beim Auffallen wieder vorfinden muß. Allein es ist doch lehrreich, sich die Verhältnisse auch einmal im einzelnen zurechtzulegen.

Es ist der während der Fallzeit verlorene Impuls, wenn μ die Masse des Sandkorns: $\mu g \tau$, d. h. Gewichtskraft \times Fallzeit. Während der Bremsung beim Auffallen des Kornes wird seine Geschwindigkeit v abgegeben, und es ist der Impuls μv . Der Überschuß an Impuls während der Zeit $\tau + \tau'$ ist also

$$\Delta I = \mu(v - g\tau), \quad (1)$$

und die mittlere Gewichtsschwankung wäre

$$\Delta G = \frac{\mu(v - g\tau)}{\tau + \tau'}. \quad (2)$$

Da aber nach dem Fallgesetz $v = g\tau$, so folgt $\Delta G = 0$.

Man kann statt eines einzelnen Sandkorns auch den ganzen Sandstrom zum Gegenstand der Betrachtung machen. Man wird dann den Gewichtsverlust durch den Teil des Sandes, der sich im Fallraum befindet, vergleichen mit dem Impuls, den dieser Teil des Sandes beim Auffallen abgibt. Wir gehen also von irgendeinem Zeitpunkt aus und lassen den in diesem Moment im Fallraum befindlichen Sand herabfallen. Hierzu braucht es eine Zeit τ . Der Impuls, der in dieser Zeit abgegeben wird, beträgt mv , und die während der Fallzeit ausgeübte Kraft ist $\frac{mv}{\tau}$. Nun befindet sich aber infolge des kontinuierlichen Vorganges dauernd eine Masse m im Fallen, das Gewicht ist also konstant um mg vermindert, zugleich wird ebenfalls dauernd eine Kraft $\frac{mv}{\tau}$ ausgeübt. Die Differenz oder die Gewichtsänderung berechnet sich also zu

$$\Delta G = \frac{mv}{\tau} - mg, \quad (3)$$

was aber, da $v = g\tau$ ist, wiederum $= 0$ ergibt.

Bei diesen Ableitungen ist, wie naheliegend, die Voraussetzung gemacht, daß das Herabfallen ohne Bewegungshindernis, also im Vakuum, erfolge. Man wird nun den allgemeinen Fall, daß die Uhr Luft oder irgendein reibendes Mittel enthält, ins Auge fassen müssen. Ohne Zweifel wird hier, weil übersichtlicher, die Betrachtung am einzelnen Korn und nicht am Sandstrom den Vorzug verdienen. Der Unterschied des allgemeinen Falles gegenüber dem behandelten speziellen besteht darin, daß jetzt die Bewegung des Sandkorns nicht nur beim Auffallen, sondern auch schon

unterwegs gebremst wird. Dies geschieht durch eine von unten nach oben gerichtete Kraft, die wir mit K bezeichnen wollen. K wird durch die Reibung des Mittels (Gas oder Flüssigkeit) hervorgebracht. Nach $\text{actio} = \text{reactio}$ entsteht hierdurch eine gleich große, nach unten gerichtete, also auf die Waage drückende Kraft. Wir haben nun nur nachzusehen, wie groß der durch K ausgeübte Kraftantrieb ist in der Zeit, die zwischen dem Loslösen des Kornes (Beginn des Herabfallens) bis zum Zeitpunkt, wo es unten seinen Impuls abgegeben hat, liegt. Das Korn wird beschleunigt mit einer Kraft gleich der Differenz zwischen Gewichtskraft und Reibungskraft, also mit $\mu g - K$. Da aber Kraft = Masse \times Beschleunigung, so haben wir

$$\mu g - K = \mu \frac{dv}{dt}, \quad (4)$$

oder (nach Erweiterung mit dt) in Impulsform

$$K dt = \mu g dt - \mu dv. \quad (5)$$

Nennen wir die ganze Zeit, während der das Körnchen sich bewegt, τ , so wäre der Gesamtimpuls, den die Bremskraft auf die Waage überträgt

$$\int K dt = \mu g \tau - \mu v \Big|_{\text{Anfang}}^{\text{Ende}} \quad (6)$$

Nun ist aber v sowohl am Anfang als am Ende 0, das zweite Glied fällt somit weg, und man erhält für die mittlere Kraftwirkung auf die Waage

$$\frac{\int K dt}{\tau} = \mu g. \quad (7)$$

Wenn sich das Korn also löst, um zu fallen, verliert zwar die Waage das Gewicht μg , die Bremskraft fügt aber im Mittel ein gleich großes hinzu, und die mittlere Gewichtsänderung ist 0.

Für den Fall, daß das Sandkorn so stark gebremst wird, daß eine gleichförmige Fallgeschwindigkeit sich einstellt, würde die Impulskurve etwa so aussehen, wie in Abb. 6 (untere Kurve!) gezeichnet. Die Fläche unterhalb und oberhalb der Horizontalen wäre gemäß (7) wiederum gleich groß.

Unsere Betrachtungen gelten nur für den Fall, daß die Sanduhr (wie gewöhnlich) geschlossen ist. Kommuniziert der Fallraum etwa mit der freien Atmosphäre, so wird ein Teil der Reak-

tionskraft zu K nicht auf die Waage drücken, sondern sich durch Vermittlung der Atmosphäre nach außen auf die Umgebung fort-pflanzen. In diesem Fall würde dann tatsächlich eine laufende Sanduhr etwas leichter sein.

Vielleicht wird es an dieser Stelle interessieren, daß seinerzeit in der Phys. ZS. 7, 248, 335, 336, 400 (1906) die Frage zur Dis-kussion stand, welches das Gewicht eines zugedeckten Glases ist, in dem sich eine Fliege befindet.

§ 6. Kreisbewegung und Impuls.

Der Impuls oder das Zeitintegral der Kraft $\int K dt$ berechnet sich für den gewöhnlichen Fall, daß die Kraft in Richtung des Weges wirkt, algebraisch, für jeden andern Fall aber vektoriell. Wir wollen es für den Grenzfall, wo die Kraft \perp zum Weg steht, berechnen, und zwar für den besonders einfachen Fall, daß die Kraft konstant wirkt, d. h. für die gleichförmige Kreisbewegung.

Frage: Wie groß ist der Impuls, der an eine Masse m übertragen wird, wenn sie sich von A (Abb. 7) nach B mit der Geschwindigkeit v bewegt?

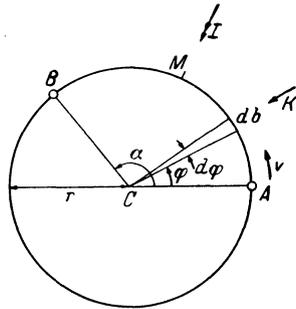


Abb. 7.

Der Impulsanteil auf einem Wegstückchen $db = r d\varphi$ beträgt

$$dI = K dt = K d\varphi \frac{dt}{d\varphi},$$

oder, da $d\varphi/dt$ die Winkelgeschwindigkeit ω bedeutet,

$$dI = \frac{K d\varphi}{\omega}.$$

Für alle Winkelstückchen $d\varphi$ wird, da K konstant ist, der Beitrag gleich groß, hat aber variable Richtung. Aus Symmetriegründen wird die Resultante, d. h. I die Richtung der Winkelhalbierenden von CA und CB besitzen. Wir haben daher nur in dieser einen Richtung CM die Komponenten der Impulsanteile dI zu bilden und diese algebraisch zu addieren, um den resultierenden Im-

puls I zu erhalten. Nun ist die Komponente von dI in Richtung CM

$$\frac{K d\varphi}{\omega} \cos\left(\frac{\alpha}{2} - \varphi\right),$$

der Impuls I beträgt demnach

$$I = \int_0^{\alpha} \frac{K d\varphi}{\omega} \cos\left(\frac{\alpha}{2} - \varphi\right), \quad (1)$$

was man auch schreiben kann

$$I = \frac{K}{\omega} \int_0^{\alpha} d\left(\varphi - \frac{\alpha}{2}\right) \cos\left(\varphi - \frac{\alpha}{2}\right),$$

dies ergibt

$$I = \frac{K}{\omega} \sin\left(\varphi - \frac{\alpha}{2}\right) \Big|_0^{\alpha},$$

die Grenzen α und 0 eingesetzt, kommt

$$I = \frac{K}{\omega} \left(\sin \frac{\alpha}{2} - \left(-\sin - \frac{\alpha}{2}\right) \right)$$

$$I = \frac{2K}{\omega} \sin \frac{\alpha}{2}. \quad (2)$$

Trägt man den Betrag von I in der Richtung CB als Funktion von α auf, so erhält man die in Abb. 8 eingezeichnete brezel-förmige Kurve. Hierbei ist willkürlich $2K/\omega = r$ gesetzt. Man sieht, daß für einen halben Umlauf der Impuls maximal ist ($2K/\omega$), und null für einen ganzen. Im übrigen spiegelt die Impulskurve durchaus nicht die völlig zentralsymmetrische Bewegung der Masse m wieder. Dies hängt damit zusammen, daß ja ein ganz beliebiger Punkt der Kreisbewegung als Ausgangspunkt herausgegriffen ist. Für jeden solchen Punkt muß zwar die Kurve gleich aussehen, aber ihre Lage, d. h. die

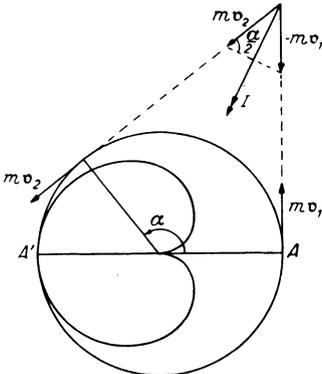


Abb. 8.

Orientierung der Mittellinie, ist jeweils durch den gewählten Punkt festgelegt.

Für die Herleitung der Impulskurve gibt es noch eine zweite Möglichkeit. Nach dem Impulssatz ist

$$K dt = d(m v).$$

Hier ist der Geschwindigkeitsvektor mit v bezeichnet. Daher ist

$$I = m v_2 - m v_1. \quad (3)$$

Tragen wir daher die beiden Vektoren $m v_2$ und $-m v_1$ auf (Abb. 8) und bilden den resultierenden Pfeil, so erkennt man unmittelbar, daß der Zahlenwert von I (die Länge des Pfeiles)

$$I = 2 m v \sin \frac{\alpha}{2}. \quad (4)$$

Der Vergleich von (2) mit (4) liefert

$$K = m \omega v. \quad (5)$$

Dies ist unter Berücksichtigung der Beziehung $\omega = v/r$ die bekannte Formel für die gleichförmige Zentralbewegung

$$K = \frac{m v^2}{r}. \quad (5a)$$

Bemerkung: Auch unter Berücksichtigung der Massenveränderlichkeit mit der Geschwindigkeit (siehe § 7) erhält man dieselben Formeln, da im vorliegenden Falle der Geschwindigkeitswert stets gleich groß ist.

§ 7. Masse und Geschwindigkeit.

Ein bewegter Körper besitzt nach der speziellen Relativitätstheorie eine größere Masse als ein ruhender. Die Zunahme der Masse mit der Geschwindigkeit läßt sich auf folgende Weise berechnen. Wir führen einem Körper Bewegungsenergie E zu, berechnen diese und setzen Energiezunahme = Massenzunahme multipliziert mit c^2 , d. h. $E = c^2(m - m_0)$, wo m_0 die Ruhemasse, c die Lichtgeschwindigkeit bedeutet. Damit der Körper wirklich nur kinetische Energie und keine potentielle erhält, müssen wir ihn entweder dem Schwerfeld entzogen denken, oder aber, wir lassen ihn sich auf horizontaler Bahn bewegen. Wirkt auf ihn eine Kraft K ein, dann ist die Energiezunahme pro dx gegeben durch $K dx$. Diese ist nun gleich $c^2 dm$. Da $K = \frac{d(mv)}{dt}$, so haben wir

$$dx \frac{d(mv)}{dt} = c^2 dm. \quad (I)$$

Da ferner $dx/dt = v$, so ist auch

$$v \, d(mv) = c^2 \, dm. \quad (1a)$$

Nun haben wir dies zu summieren, mit der Geschwindigkeit 0 und der Ruhemasse m_0 beginnend. Man wird auf dem gewöhnlichen Weg: Ausrechnen von $d(mv)$ und Separation der Variablen, dann Integration, zum Ziele kommen. Einfacher ist es, wenn man erkennt, daß links ein vollständiges Differential entsteht, wenn man mit m erweitert, also schreibt

$$(mv) \cdot d(mv) = c^2 m \, dm. \quad (2)$$

Man hat dann

$$d(mv)^2 = c^2 d(m^2),$$

und kann unmittelbar summieren:

$$m^2 v^2 = c^2 m^2 \Big|_{m_0}^m = c^2 (m^2 - m_0^2). \quad (3)$$

Dies liefert, nach m aufgelöst, die bekannte Beziehung

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - (v/c)^2}}. \quad (4)$$

§ 8. Das Gesetz des freien Falles in der speziellen Relativitätstheorie.

Die Gesetze des freien Falles geben die Beziehung zwischen Fallraum (h), Fallzeit (t) und Fallgeschwindigkeit (v) und lauten in der klassischen Mechanik

$$h = \frac{g}{2} t^2, \quad (1)$$

$$v = g t, \quad (2)$$

$$v = \sqrt{2gh}, \quad (3)$$

wo g die Beschleunigung der Schwere (die Fallbeschleunigung) bedeutet. Eigentlich gibt es nur ein Fallgesetz und (1) bis (3) sind nur drei verschiedene Formulierungen. Denn je zwei der Ausdrücke können aus dem dritten mathematisch abgeleitet werden unter Berücksichtigung der Definitionsbeziehung $v = dx/dt$. Das Fallgesetz selbst ist nichts anderes als der Ausdruck des Energiesatzes, angewendet auf ein homogenes Schwerfeld. Im speziellen erhält man (3) so, daß man setzt: potentielle Energie

eines Massenpunktes zu Beginn des Falles gleich der kinetischen, die er beim Herabfallen erlangt, d. h.

$$mgh = \frac{1}{2} m v^2. \quad (3a)$$

Auch in der relativistischen Mechanik gilt der Energiesatz, und können die Fallgesetze aus diesem abgeleitet werden. Nur hat der Satz eine andere Formulierung. Das Hauptresultat der speziellen Relativitätstheorie besagt, daß Energie und Masse einander äquivalent sind. Das Kennzeichen dafür, daß die Energie konstant bleibt, ist also die Unveränderlichkeit der Masse; und wir erhalten die Fallgesetze aus der Forderung, daß die Masse im ganzen Fallraum konstant bleiben muß. Was sich ändert, ist nur die Natur der Masse. Beim Herabfallen verschwindet potentielle Masse, und es entsteht kinetische Masse. Beide Änderungen müssen nun einander gleich sein.

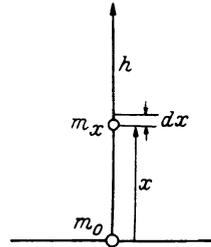


Abb. 9.

Die kinetische Masse oder die Zunahme der Masse infolge der Erlangung einer Fallgeschwindigkeit v ist in bekannter Weise (§ 7)

$$m - m_0 = m_0 \left(\frac{1}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} - 1 \right). \quad (4)$$

Der Verlust an potentieller Masse läßt sich leicht berechnen. Er ist gleich dem Gewinn an potentieller Masse, wenn man den Körper um den Fallraum h hebt. Es habe die Masse in irgendeiner Höhe x (Abb. 9) den Wert m_x . Dann ist auf der Strecke dx der Gewinn an potentieller Energie $m_x g dx$. Da nun allgemein nach der speziellen Relativitätstheorie eine Energiezunahme gleich $c^2 \times$ Massenzunahme ist, so folgt für die Zunahme der potentiellen Energie

$$m_x g dx = c^2 dm_x. \quad (5)$$

Schreibt man dies so

$$\frac{g}{c^2} dx = \frac{dm_x}{m_x}, \quad (5a)$$

so läßt sich dies integrieren, und man erhält

$$\frac{g}{c^2} x + \text{const.} = \ln m_x. \quad (6)$$

Am Ende des Fallraums ist $x = 0$ und $m_x = m_0$. Denn m_0 ist die Ruhemasse am Orte, wo der Körper die Geschwindigkeit v besitzt

(Gleichung 4); das ist aber am Ende des Fallraums. Wenn wir dies in (6) einsetzen, so kommt

$$\text{const.} = \ln m_0, \quad (6a)$$

oder durch Subtraktion von (6) und (6a)

$$\frac{g}{c^2} x = \ln m_x - \ln m_0 = \ln \frac{m_x}{m_0}.$$

Hieraus folgt

$$m_x = m_0 e^{\frac{g}{c^2} \cdot x}. \quad (7)$$

Die Zunahme der potentiellen Masse bei Hebung von $x = 0$ bis $x = h$ ergibt sich daraus zu

$$m_0 e^{\frac{g}{c^2} \cdot h} - m_0 e^{\frac{g}{c^2} \cdot 0} = m_0 \left(e^{\frac{g}{c^2} \cdot h} - 1 \right). \quad (8)$$

Die Ausdrücke (8) und (4) müssen nun einander gleich sein, d. h.

$$\frac{m_0}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} = m_0 e^{\frac{g}{c^2} \cdot h}. \quad (9)$$

Dies gibt, nach v aufgelöst,

$$v = c \sqrt{1 - e^{-\frac{2gh}{c^2}}}. \quad (10)$$

Es ist leicht zu zeigen, daß diese Formel, wie es sein muß, in (3) übergeht für den Fall, daß $2gh \ll c^2$. Man hat nur den Exponentialausdruck zu entwickeln $e^{-\frac{2gh}{c^2}} = 1 - \frac{2gh}{c^2} + \dots$ und zu bedenken, daß die höheren Potenzen verschwindend klein sind. Würde andererseits der Fallraum so weit zunehmen können, daß $2gh \gg c^2$ wird, dann würde sich v dem konstanten Wert c nähern, also den relativistisch maximal zulässigen Wert, eben die Lichtgeschwindigkeit, erreichen.

Resultat (10) kann auch noch auf andere Weise gewonnen werden. Fällt ein Körper frei herunter, so gilt in jedem Augenblick

$$m = \frac{m_x}{\sqrt{1 - (v_x/c)^2}},$$

wo v_x die Geschwindigkeit und m_x die Ruhemasse am betreffenden Orte, d. h. in der Höhe x , bedeutet. m_x ist aber eine Funktion von x , denn die potentielle Energie des Körpers nimmt mit der

Höhe über dem Boden zu. m_x berechnet sich aus der Ruhemasse am Boden nach der oben abgeleiteten Formel (7). Also ist

$$m = \frac{m_0 e^{\frac{g}{c^2} \cdot x}}{\sqrt{1 - (v_x/c)^2}}, \quad (11)$$

wo m_0 die Ruhemasse am Boden ist. Die Masse m muß im ganzen Fallraum gleich groß sein. Ihren Wert finden wir leicht, wenn wir (11) auf den Anfangspunkt des freien Falles anwenden. Dort ist $x = h$ und $v_x = 0$. Dies in (11) eingesetzt, ergibt

$$m = m_0 e^{\frac{g}{c^2} \cdot h}. \quad (12)$$

Also haben wir durch Gleichsetzen von (11) und (12)

$$e^{\frac{g}{c^2} \cdot h} = \frac{e^{\frac{g}{c^2} \cdot x}}{\sqrt{1 - (v_x/c)^2}}. \quad (11a)$$

Nach dem Durchfallen des Fallraums ist $x = 0$ und $v_x = v$. Diese Werte in (11a) eingesetzt, ergeben

$$e^{\frac{g}{c^2} \cdot h} = \frac{1}{\sqrt{1 - (v/c)^2}}.$$

Dies stimmt aber mit (9) überein, und gelangen wir damit zum selben Resultat (10).

Damit ist die Aufgabe, das relativistische Fallgesetz zu finden, gelöst. Wir können natürlich auch noch die den Gleichungen (1) und (2) entsprechenden Ausdrücke ableiten. Doch ist dies eine rein mathematische Aufgabe. Wir wollen den Weg nur kurz andeuten und die Resultate angeben. Man bezeichne etwa den in der Zeit t durchfallenen Raum mit x , rechne x also vom Anfangspunkt des Falles aus nach unten und bedenke, daß $v_x = dx/dt$, dann ist gemäß (10)

$$v_x = \frac{dx}{dt} = c \sqrt{1 - e^{-\frac{2g}{c^2} \cdot x}}, \quad (13)$$

oder

$$\frac{dt}{c} = \frac{dx}{\sqrt{1 - e^{-\frac{2g}{c^2} \cdot x}}}.$$

Nun lassen sich beide Seiten integrieren, und man erhält schließlich

$$h = \frac{c^2}{g} \ln \frac{1}{2} \left(e^{\frac{gt}{c}} + e^{-\frac{gt}{c}} \right). \quad (14)$$

Der Ausdruck unter dem \ln nennt man den hyperbolischen Kosinus, und schreibt man demgemäß

$$h = \frac{c^2}{g} \ln \operatorname{Cof} \frac{gt}{c}. \quad (14a)$$

Wenn man (14) differenziert, d. h. bildet dh/dt , so findet man die Geschwindigkeit v nach Durchlaufen von h . Man erhält dann den hyperbolischen Tangens, und das Resultat schreibt sich

$$v = c \operatorname{Tang} \frac{gt}{c}. \quad (15)$$

Bemerkung. Über die Ausdehnung der Ableitung auf den Fall eines inhomogenen Schwerfeldes siehe *Helv. Phys. Acta* 7, 394 (1939).

Aufgabe 1. Man führe die Berechnung der Formeln (14) und (15) wirklich durch.

Aufgabe 2. Man zeige, daß für $gt \ll c$ (14) und (15) in die klassischen Formeln (1) und (2) übergehen.

§ 9. Reaktionskraft eines seitlich aus einem Gefäß austretenden Flüssigkeitsstrahls.

Auf den ersten Blick könnte es scheinen, daß die an der Öffnung (Abb. 10) fortfallende Druckkraft die Reaktionskraft ergebe. Dann wäre bei einem Öffnungsquerschnitt q und einer mittleren Druckhöhe h die rücktreibende Kraft $K = qhg$ dyn. Wir haben aber, da Wasser beim Ausfluß beschleunigt wird, nicht ein statisches, sondern ein dynamisches Problem. Eine in der Zeit dt mit der Geschwindigkeit v ausströmende Flüssigkeitsmenge dm wird durch eine Kraft beschleunigt, die nach dem zweiten Grundprinzip der Mechanik

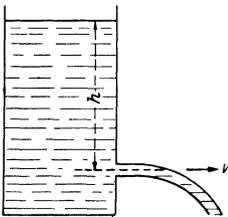


Abb. 10.

$$K = \frac{d \text{Impuls}}{dt} = \frac{v \cdot dm}{dt}. \quad (1)$$

§ 10. Wie weit spritzt ein Flüssigkeitsstrahl aus einer seitlichen Öffnung? 19

Wenn wir von der Strahleinschnürung absehen und somit q mit dem Strahlquerschnitt identifizieren, haben wir

$$dm = qv\rho dt. \quad (2)$$

Also ist

$$K = qv^2\rho. \quad (3)$$

v^2 berechnet sich, eine ideale Flüssigkeit vorausgesetzt, nach TORRICELLI aus

$$v^2 = 2gh. \quad (4)$$

Demnach folgt

$$K = 2qh\rho g*. \quad (5)$$

Diese horizontal nach rechts wirkende Triebkraft ergibt nach actio = reactio eine gleich große statische Kraft nach links. Diese Reaktionskraft setzt sich somit aus zwei gleichen Teilen zusammen, einem, der dem fehlenden Wanddruck entspricht und einem gleich großen, der infolge der Wasserbeschleunigung noch hinzukommt.

Aufgabe. Man beweise, daß eine Flüssigkeit aus einer Öffnung (Querschnitt q) am Boden eines zylindrischen Gefäßes (Querschnitt q') in der Zeit $t = q'/q \sqrt{2h/g}$ ausfließt, wenn man der Berechnung die Beziehungen (2) und (4) zugrunde legt.

§ 10. Wie weit spritzt ein Flüssigkeitsstrahl aus einer seitlichen Öffnung?

Besonders einfach wird der Fall, wenn das Gefäß auf einer ebenen Unterlage steht. Die Seitenbewegung x des Strahls (Abb. 11) findet in der gleichen Zeit statt, in der er um die Strecke y frei herabfällt. Ist v die Austrittsgeschwindigkeit, so ist die gleichförmig durchlaufene Strecke

$$x = vt,$$

und ferner ist

$$y = \frac{g}{2} t^2.$$

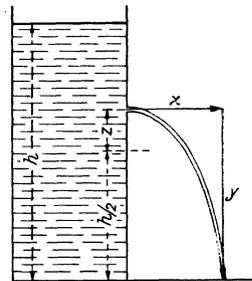


Abb. 11.

* Die Ableitung und experimentelle Bestätigung dieser Formel findet sich schon bei D. BERNOULLI: Hydrodynamica, S. 289f. 1738.

Daher

$$y = \frac{g}{2} \frac{x^2}{v^2}. \quad (1)$$

Da nach TORRICELLI $v^2 = 2g(h - y)$, so folgt, dieses in (1) eingesetzt,

$$x^2 = 4y(h - y). \quad (2)$$

Für die Reichweite x kommt es also auf das Produkt der beiden Abschnitte, in die h durch die Öffnung geteilt wird, y und $h - y$ an. Vertauscht man daher den oberen kleinen Abschnitt mit dem unteren großen, so ist x gleich groß. Das heißt, zwei Öffnungen, die gleich weit von der Mitte der Flüssigkeitssäule abstehen (eine oberhalb, eine unterhalb) geben dieselbe Reichweite. Es ist daher zweckmäßig, als Variable nicht y , sondern den Abstand von der Mitte zu wählen. Bezeichnet man diesen mit z , so ist

$$y = \frac{h}{2} \pm z.$$

Danach ist entsprechend

$$h - y = \frac{h}{2} \mp z,$$

und es wird nach (2)

$$x^2 = 4 \left(\frac{h}{2} \pm z \right) \left(\frac{h}{2} \mp z \right),$$

d. h.

$$x = 2 \sqrt{\frac{h^2}{4} - z^2}. \quad (3)$$

Hieraus ersieht man unmittelbar, daß $+z$ und $-z$ denselben Wert für x ergeben, ferner, daß für $z = 0$ x seinen größten Wert, nämlich $x = h$, besitzt und daß für $z = h/2$, d. h. oben und unten an der Säule, $x = 0$ wird.

Letzteres ist auch ohne Rechnung verständlich, da eine Öffnung oben keine Austrittsgeschwindigkeit und eine unten keinen Fallraum für den Flüssigkeitsstrahl ergibt. Man kann also schon anfangs schließen, daß bei zwischenliegender Stellung ein Maximum für die Reichweite herauskommt. Wenn man außerdem noch vermutet, daß ein solches für $h/2$ eintritt, so würde man zum vorneherein die Variable z statt y benützen und gelangte so noch unmittelbarer zur Endformel (3).

Bemerkung. Da Formel (3) weder die Dichte der Flüssigkeit noch die Größe g enthält, so gilt das Resultat für beliebige Flüssigkeiten und Schwerefelder.

Aufgabe. Das Gefäß sei nicht direkt auf dem Boden, sondern in irgendeiner Höhe darüber aufgestellt. Man zeige, daß genau dieselben Beziehungen wie oben gelten, wenn man jetzt nicht die Tiefe der Flüssigkeit, sondern den Abstand des Flüssigkeitsspiegels vom Boden mit h bezeichnet.

§ 11. Die barometrische Höhenformel.

Der Luftdruck kann nur eine Funktion der Höhe sein, da er in jeder horizontalen Ebene einen konstanten Wert besitzt. Der Grund der Druckzunahme nach abwärts besteht in der Zunahme des Gewichts der darüber lastenden Luftsäule. Auf der Strecke Δx (Abb. 12) kommt pro cm^2 das Gewicht hinzu $\rho \Delta x$ Gramm bzw. die Gewichtskraft $\rho \Delta x g$ dyn. Es ist also

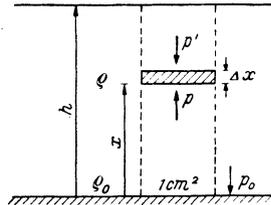


Abb. 12.

$$p - p' = \rho g \Delta x. \tag{1}$$

Bezeichnet man die Druckzunahme in der x -Richtung mit Δp , so wäre demnach

$$-\Delta p = \rho g \Delta x. \tag{1a}$$

Diese Beziehung kann auch aus einer Gleichgewichtsbedingung abgeleitet werden. Man denkt sich die dünne Luftschrift Δx fest, etwa in eine dünne, gewichtslose Schachtel eingeschlossen. Dies ist gestattet, da bei jeder Gleichgewichtsordnung, unbeschadet des Gleichgewichts, beliebige Teile festgehalten (fixiert, festgeklemmt usw.) werden dürfen. Denn das Gleichgewicht kann dadurch nur verbessert werden. Dann haben wir einerseits die Luftscheibe, die mit dem Gewicht $\rho \Delta x$ Gramm nach unten und den Auftrieb $p - p'$, der nach oben wirkt. Die Seitenkräfte heben sich auf.

In (1) haben wir drei Variable p , ρ , x in Differentialform. Zur Integration muß eine Variable eliminiert werden. Nun gilt ja $pV = p_0 V_0$ (bei konstanter Temperatur). Da aber die Dichte sich umgekehrt proportional dem Volumen ändert, so ist auch

$$\frac{p}{p_0} = \frac{V_0}{V} = \frac{\rho}{\rho_0}. \tag{2}$$

Man kann also ϱ durch ρ ersetzen:

$$\varrho = \frac{\varrho_0}{\rho_0} \cdot \rho.$$

ϱ_0 und ρ_0 sind irgend zwei zusammengehörige Werte. Man wird diejenigen für den Ausgangspunkt $x = 0$ wählen. Wir haben

$$-\Delta \rho = g \frac{\varrho_0}{\rho_0} \rho \Delta x. \quad (3)$$

Die Variablen sind durch Division mit ρ leicht zu trennen:

$$-\frac{\Delta \rho}{\rho} = g \frac{\varrho_0}{\rho_0} \Delta x, \quad (3a)$$

und man erhält, indem man vom Erdboden bis zu irgendeiner Höhe h summiert:

$$-\ln \rho \Big|_{\rho_0}^{\rho_h} = g \frac{\varrho_0}{\rho_0} x \Big|_0^h,$$

d. h.

$$\ln \rho_0 - \ln \rho_h = g \frac{\varrho_0}{\rho_0} h. \quad (4)$$

Dies läßt sich auch schreiben

$$\rho_h = \rho_0 e^{-\frac{g \varrho_0}{\rho_0} \cdot h}. \quad (5)$$

Setzt man in (4) rechts die Werte für ρ_0 und ϱ_0 , d. h. Normaldruck und Normaldichte, ein, so kommt

$$\ln \rho_0 - \ln \rho_h = \frac{981 \cdot 0,001293}{76 \cdot 13,6 \cdot 981} \cdot h.$$

Links kann man nun ρ_0 und ρ_h in beliebigen Einheiten ausdrücken. Wenn wir ferner Briggsche Logarithmen verwenden und h in Metern (über Meer) erhalten wollen (statt in Zentimetern), so hätten wir noch zu schreiben:

$$\frac{\log \rho_0 - \log \rho_h}{0,4343} = \frac{0,001293}{76 \cdot 13,6} \cdot 100 \cdot h.$$

Dies ergibt für h in Metern

$$h = 18400 (\log \rho_0 - \log \rho), \quad (6)$$

und, wenn der Druck in Zentimeter Hg abgelesen wird:

$$h = 18400 (2,881 - \log \rho). \quad (6a)$$

Eine hübsche Erweiterung der Aufgabe bestünde darin, bei der Ableitung der Formel die Abnahme der Schwere mit der Höhe (siehe diesbezüglich § 4) zu berücksichtigen. Es sei aber erwähnt, daß auch für sehr große Höhen meist Formel (6) benützt wird.

Bemerkung. Aneroidbarometer haben die Eigenschaft, daß ihre Angaben (nicht wie bei Hg-Barometern) unabhängig vom Wert von g erfolgen.

II. Akustik und Wellenlehre.

§ 12. NEWTONSche Formel für die Schallgeschwindigkeit.

Die Schallausbreitung stellt sich in einem eindimensionalen Gebilde, wie einem (zylindrischen) Stab (Abb. 13), besonders einfach dar. Wir schlagen den Stab, etwa mit einem Hammer, am einen Ende an und erzeugen dadurch eine Kompressionsstelle, die sich nun längs des Stabes mit Schallgeschwindigkeit ausbreitet. Es ist zweckmäßig zur Erfassung der Aufgabe, sich

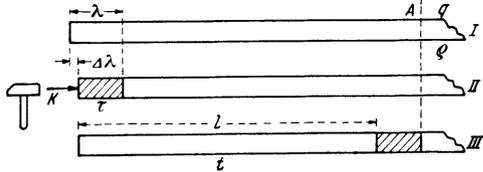


Abb. 13.

die Verhältnisse zu skizzieren. Der schraffierte Teil sei die Kompressionsstelle, die sich in der Stoßzeit τ ausbildet. Der Einfachheit halber wird man die während dieser Zeit wirkende Stoßkraft als konstant annehmen. Nach Aufhören der Kraftwirkung pflanzt sich die Kompression durch den Stab hin fort und hat in irgendeiner Zeit t (nach ihrer Ausbildung) die Strecke l durchlaufen. Es ist die Schallgeschwindigkeit

$$c = \frac{l}{t}. \quad (1)$$

Sie ist aber auch

$$c = \frac{\lambda}{\tau}, \quad (2)$$

wenn λ die Strecke bedeutet, welche in der Stoßzeit τ von der Kompression erfaßt wird.

Für K kennen wir nun eine statische und eine dynamische Beziehung, nämlich das HOOKESche Gesetz und den Impulssatz.

Das erstere lautet, wenn der Stab beim Schlag um $\Delta\lambda$ verkürzt wird:

$$\Delta\lambda = \frac{\lambda K}{E q}, \quad (3)$$

das zweite

$$K \tau = \text{erzielte Bewegungsgröße.} \quad (4)$$

Letztere findet man, wenn man die in Bewegung gesetzte Masse mit der ihr erteilten Geschwindigkeit multipliziert. Das in Bewegung gesetzte Stabstück ist aber der Teil links von A . Zustand *III* unterscheidet sich nun von Zustand *I* dadurch, daß der gerade vor A liegende Teil des Stabes komprimiert, also verkürzt ist. Es ist daher ein Teil des Stabes, und zwar von der Länge l , um $\Delta\lambda$ nach rechts verschoben worden, und zwar in der Zeit t . Die mittlere Wanderungsgeschwindigkeit ist demnach $\Delta\lambda/t$. Natürlich ist der in der Kompressionsstelle enthaltene Teil auch etwas nach rechts verschoben worden. Die zugehörige Masse ist aber so klein im Verhältnis zur übrigen bewegten, die ja beliebig groß gewählt werden kann, da t unbegrenzt, daß die entsprechende Bewegungsgröße nicht in Betracht fällt.

Die erzielte Bewegungsgröße ist also $q l \varrho \cdot \frac{\Delta\lambda}{t}$, so daß wir nach (4) haben

$$K \tau = \frac{q l \varrho \Delta\lambda}{t}. \quad (4a)$$

Nun wird man (3) und (4a) vergleichen bzw. K eliminieren wollen und erhält

$$\Delta\lambda = \frac{\lambda}{E q} \frac{q l \varrho \Delta\lambda}{\tau t},$$

oder

$$1 = \frac{\lambda l \varrho}{E \tau t}. \quad (5)$$

Unter Berücksichtigung von (1) und (2) hat man sofort

$$1 = \frac{c^2 \varrho}{E},$$

oder

$$c = \sqrt{\frac{E}{\varrho}}. \quad (6)$$

Da die Kompression kurzzeitig erfolgte, muß sie adiabatisch sein. E bedeutet daher den adiabatischen Elastizitätsmodul, der gegen-

über dem statischen um den Faktor κ (Verhältnis der spezifischen Wärmen c_p/c_v) größer ist. Für ein (ideales) Gas hat man für E den Ausdruck: $p\kappa$ (p = Gasdruck).

§ 13. Schallgeschwindigkeit in Abhängigkeit von der Luftfeuchtigkeit.

Zur Behandlung dieser Aufgabe sind Weg und Durchführung vorgezeichnet. Man wird zunächst feststellen, von welchen Faktoren die Schallgeschwindigkeit überhaupt abhängt. Antwort gibt die NEWTONSche Formel $c = \sqrt{E/\rho}$, wo E den (adiabatischen) Elastizitätsmodul, ρ die Dichte bedeuten. Für ein ideales Gas ist $E = p\kappa$ (p : Gasdruck, $\kappa = c_p/c_v$: Verhältnis der spezifischen Wärmen), so daß man hat

$$c = \sqrt{\frac{p\kappa}{\rho}}. \quad (1)$$

Der atmosphärische Druck p ist gegeben und damit als konstant zu betrachten. Es bleibt daher nur der Einfluß der Feuchtigkeit auf die beiden Größen κ und ρ zu berücksichtigen. Nun beträgt κ für Luft 1,40, für Wasserdampf 1,33. Beim völligen Ersatz von Luft durch Wasserdampf würde κ also um 5% abnehmen. Die Änderung der Dichte ρ mit dem Ersatz von Luft durch Wasserdampf läßt sich leicht aus dem AVOGADROSchen Satz entnehmen, daß die Dichten sich wie die Molekulargewichte verhalten. Demgemäß ist die Dichte von H_2O -Dampf ρ_2 im Verhältnis 18/28,9 kleiner als diejenige der Luft ρ_1 . Also $\rho_2 = \rho_1 \cdot 18/28,9$. Dies bedeutet eine prozentuale Abnahme von $\frac{28,9 - 18}{28,9} \cdot 100 = 37,7\%$.

Auch bei teilweisem Ersatz der Luft durch H_2O -Dampf dürfen wir infolge der Gültigkeit der Mischungsregel annehmen, daß sich die Änderung von ρ zu der von κ im Verhältnis 37,7 : 5 vollzieht. Da ferner beide Größen in derselben Weise in die Formel (1) eingehen, so ist auch der Einfluß auf c im selben Maße vorhanden. Es ist daher der Einfluß der Feuchtigkeit auf ρ weitaus größer als der auf κ , so daß man in erster Näherung nur den Einfluß auf ρ zu berücksichtigen braucht. Immerhin ist zu beachten, daß die so berechnete Abhängigkeit der Schallgeschwindigkeit von der Feuchtigkeit etwas zu groß ausfällt, da die Veränderlichkeit von κ der von ρ entgegenwirkt. Wie denn ohne weiteres ersichtlich,

daß, wenn κ und ϱ im selben Maße abnehmen würden, der Einfluß der Feuchtigkeit auf c überhaupt wegfiel.

Bezeichnen wir die Partialdrucke der Luft und des H_2O -Dampfes mit p_1 und p_2 , so berechnet sich nach der Mischungsregel die Dichte der feuchten Luft zu

$$\varrho = \varrho_1 \frac{p_1}{p} + \varrho_2 \frac{p_2}{p}, \quad (2)$$

oder, da

$$p = p_1 + p_2$$

ist, auch zu

$$\begin{aligned} \varrho &= \varrho_1 \frac{p - p_2}{p} + \varrho_2 \frac{p_2}{p} \\ &= \varrho_1 - \frac{p_2}{p} (\varrho_1 - \varrho_2). \end{aligned} \quad (3)$$

Dies in (1) eingeführt, liefert

$$c = \sqrt{\frac{p \kappa}{\varrho_1 \left(1 - \frac{p_2 (\varrho_1 - \varrho_2)}{p \varrho_1} \right)}},$$

oder, da $\sqrt{\frac{p \kappa}{\varrho_1}}$ die Schallgeschwindigkeit für trockene Luft bedeutet (Bezeichnung: c_1), haben wir

$$c = \frac{c_1}{\sqrt{1 - \frac{p_2 \varrho_1 - \varrho_2}{p \varrho_1}}}. \quad (4)$$

Die Schallgeschwindigkeit in trockener Luft c_1 berechnet sich demnach folgendermaßen aus der in feuchter c

$$c_1 = c \sqrt{1 - \frac{p_2 \varrho_1 - \varrho_2}{p \varrho_1}},$$

eine Formel, die auch für irgend ein anderes zwei- oder mehratomiges Gas, für das dann die entsprechende Normaldichte ϱ_1 einzusetzen ist, gilt. Unter Berücksichtigung, daß gegenüber 1 der Subtrahend sehr klein ist, kann eine viel benützte Näherungsformel Anwendung finden. Es ist

$$(1 + x)^n = 1 + nx,$$

sofern man sich auf das erste Glied der binomischen Entwicklung beschränkt. Daher ist

$$c_1 = c \left(1 - \frac{1}{2} \frac{p_2 \varrho_1 - \varrho_2}{p \varrho_1} \right). \quad (5)$$

Setzt man den Wert $\frac{\varrho_1 - \varrho_2}{\varrho_1}$ für Luft ein, so erhält man

$$c_t = c \left(1 - 0,19 \frac{p_2}{p} \right). \quad (6)$$

Die Korrektion $0,19 p_2/p$ ist recht klein. Rechnet man mit wasserdampfgesättigter Luft bei etwa 20° , d. h. mit $p_2 = 20$ mm und $p = 760$ mm, so beträgt dies $0,005$. Die Änderung von c macht also sogar in diesem extremen Fall nur $0,5\%$ aus. Die Temperaturkorrektion für trockenes Gas berechnet sich anderseits aus

$$c_0 = c_t \sqrt{1 - 0,00367 \cdot t}. \quad (7)$$

c_0 = Geschwindigkeit bei 0° ; c_t bei t° . In all den häufigen Fällen, wo man feuchtes Gas hat, wäre dann noch die Korrektion (6) hinzuzufügen. Man trägt diesem Umstand dadurch Rechnung, daß man statt des Koeffizienten $0,00367$ in (7) einen etwas größeren Wert einsetzt und schreibt

$$c_0 = c_t \sqrt{1 - 0,004 \cdot t}$$

(siehe etwa F. KOHLRAUSCH: Prakt. Phys., S. 114. 1935).

Aufgabe. Man leite die Formel (7) für die Temperaturabhängigkeit von c aus (1) ab unter Beachtung, daß nur ϱ , nicht aber $p \kappa$, mit der Temperatur veränderlich ist.

§ 14. Welches ist die Tonfrequenz, die ein Beobachter hört, wenn er sich gleichzeitig mit der Tonquelle bewegt?

Bewegt sich eine Tonquelle auf einen ruhenden Beobachter zu, so wird die ausgesandte Welle verkürzt, so daß statt des ursprünglichen Tons n ein höherer n' entsteht, und es ist

$$n' = \frac{n}{1 - v/c}, \quad (1)$$

wo v die Geschwindigkeit der Tonquelle und c die des Schalles bedeuten. Im Falle einer Entfernung wäre ebenso

$$n' = \frac{n}{1 + v/c}. \quad (1a)$$

Bewegt sich nun der Beobachter mit der Geschwindigkeit v' , so nimmt er, je nachdem er sich auf die Tonquelle zu- oder weg-

bewegt, mehr oder weniger Wellen dieser Frequenz n' auf, und er hört

$$n'' = n' (1 \pm v'/c), \quad (2)$$

das heißt, gemäß (1) bzw. (1a)

$$n'' = n \frac{1 \pm v'/c}{1 \mp v/c}. \quad (3)$$

Man beachte, daß in dieser Beziehung sowohl v als v' bei einer Annäherung $+$ gerechnet sind.

Beziehung (3) beantwortet nun die Frage: wann bleibt der Ton trotz Dopplereffekt unverändert? Es ist $n'' = n$, wenn $v' = -v$, d. h. wenn der Abstand zwischen Beobachter und Tonquelle konstant bleibt.

Bemerkenswert ist der Umstand, daß die Ableitung Schwierigkeiten bereitet, wenn man erst den Beobachter und dann die Schallquelle sich bewegen läßt, d. h. erst die Zahl der vom Ohr aufgenommenen Wellen ausrechnet und dann die Wellenlänge ändert. Hier spielt also die Reihenfolge der stufenweisen Behandlung eine gewisse Rolle.

§ 15. Echo und Geschwindigkeit bewegter Schallquelle.

Der einfachste Fall liegt vor, wenn sich eine Tonquelle vom Beobachter weg auf eine reflektierende Wand zubewegt. Bezeichnen wir ihre Geschwindigkeit mit v und die Schallgeschwindigkeit mit c , so ist die Frequenz des zuerst gehörten Tons

$$n_1 = \frac{n}{1 + v/c},$$

wo n die gewöhnliche Frequenz bedeutet. Die Frequenz des sonach gehörten Tons ist dementsprechend

$$n_2 = \frac{n}{1 - v/c}.$$

Beträgt das gehörte Intervall $i = n_2/n_1$, so folgt hieraus

$$i = \frac{1 + v/c}{1 - v/c},$$

und die Geschwindigkeit der Tonquelle ergibt sich zu

$$v = c \frac{i - 1}{i + 1}. \quad (1)$$

Beispiel. Ein Wald, gegen den ein Eisenbahnzug fährt, gibt den Pfiff der Lokomotive um einen Ton höher wieder. Man erhält für $i = \sqrt[6]{2} = 1,122 \dots$ und $c = 340 \text{ m/s}$, $v = 19,6 \text{ m/s}$ oder $70,6 \text{ km pro Stunde}$.

Der Fall liegt komplizierter, wenn die Schallquelle S (Abb. 14) sich nicht in der Richtung vom Beobachter B weg, sondern unter einem Winkel α dazu bewegt und wenn der Schallstrahl von S zum Reflektor den Winkel β einschließt. Dann geben nur die Komponenten $v_1 = v \cos \alpha$ und $v_2 = v \cos \beta$ Dopplereffekt, und die Beziehungen lauten

$$n_1 = \frac{n}{1 + \frac{v \cos \alpha}{c}} \quad \text{und} \quad n_2 = \frac{n}{1 - \frac{v \cos \beta}{c}}. \quad (2)$$

Hieraus folgt

$$i = \frac{1 + \frac{v \cos \alpha}{c}}{1 - \frac{v \cos \beta}{c}},$$

und man erhält

$$v = c \frac{i - 1}{i \cos \beta + \cos \alpha}. \quad (3)$$

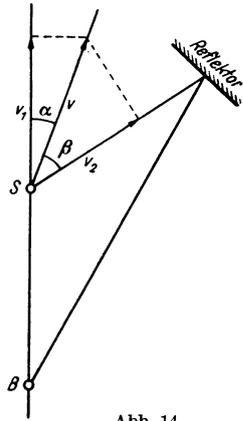


Abb. 14.

Die Geschwindigkeit einer Schallquelle ist also ohne Kenntnis von α und β nicht berechenbar. Indessen kann man die Geschwindigkeit, die eine Schallquelle bei einem gehörten Intervall i mindestens besitzen muß, ohne weiteres angeben. Man braucht nur die im Nenner von (3) befindlichen Größen $\cos \beta$ und $\cos \alpha$ durch ihren Höchstwert, nämlich durch 1, zu ersetzen und erhält damit den kleinsten Wert, den v annehmen kann. Das heißt aber, man wendet Formel (1) an, wobei man sich dessen bewußt bleiben muß, daß dies im allgemeinen Fall nicht den richtigen Wert, sondern nur einen unteren Grenzwert für die Geschwindigkeit einer Schallquelle ergibt.

§ 16. Die diatonische Tonleiter als Tonspektrum.

Vergleicht man die Intervalle, welche die Töne der diatonischen Tonleiter mit dem Grundton bilden, so findet man hierfür das Verhältnis von zumeist kleinen ganzen Zahlen. Dies ist ohne

weiteres verständlich, wenn für die Auswahl der Töne das Prinzip der Konsonanz maßgebend war. Denn nach HELMHOLTZ ist die Bedingung der Konsonanz um so besser erfüllt, je mehr gemeinsame harmonische Obertöne zwei Klänge besitzen. Solche stehen aber mit dem Grundton im einfachen Frequenzverhältnis $1 : 2 : 3 : 4$ usw.

Nun zeigt es sich aber weiterhin, daß die Tonfolgen gfe eine besonders einfache Gesetzmäßigkeit aufweisen. Die Intervalle $\frac{3}{2}$, $\frac{4}{3}$, $\frac{5}{4}$ lassen sich offenbar durch den Ausdruck $\frac{n+1}{n}$ darstellen, wenn man n der Reihe nach die Werte 2, 3, 4 beilegt. Auch noch weitere Töne lassen sich in dieses Seriengesetz einordnen. So $d(\frac{9}{8})$ und der Grundton c selbst ($\frac{1}{1}$), mit $n=8$ und $n=\infty$. Schreibt man das Seriengesetz in der Form

$$i_1 = 1 + \frac{1}{n}, \quad (1)$$

so erkennt man leicht eine gewisse Ähnlichkeit mit der optischen Lyman-Wasserstoffserie $\frac{\nu}{R} = \frac{1}{1^2} - \frac{1}{n^2}$. Dem Unterschied im Vorzeichen des Laufterms entsprechend, liegt dann allerdings die Seriegrenze $n = \infty$ im akustischen Falle beim kleinsten und im optischen beim größten Frequenzwert. In beiden Fällen entspricht aber $n=2$ dem Grundton, so daß das Tonspektrum bei $g(n=2)$ beginnt und bei $c(n=\infty)$ endigt.

Es erscheint nun die Frage natürlich, ob es nicht gelingt, das ganze Tonspektrum in ein Seriengesetz einzuordnen. Man erkennt allerdings sofort, daß die Töne ahc_1 nicht durch den Ausdruck (1) wiedergegeben werden. Da aber g den Ausgangspunkt für eine abwärtsführende Serie bildet, so kann die Frage geprüft werden, ob g nicht ebensogut den Ausgangspunkt für eine nach oben führende Serie bilden könnte. Für die Intervallreihe $gahc_1$, d. h. $\frac{3}{2}$, $\frac{5}{3}$, $\frac{15}{8}$, $\frac{2}{1}$, wird man in der Tat unschwer den allgemeinen Ausdruck finden $\frac{2n-1}{n}$, oder, was dasselbe ist,

$$i_2 = 2 - \frac{1}{n}. \quad (2)$$

Es muß nun das Verhältnis dieser oberen Serie zu der unteren interessieren. Man ersieht unmittelbar, daß die beiden Kurven $i_1 = f_1(n)$ und $i_2 = f_2(n)$ spiegelbildlich gleich sind, d. h. die Summe

$i_1 + i_2$ ist konstant, und zwar stets gleich 3. Bemerkenswert ist dabei, daß für i_1 und i_2 die gleiche Auswahl der Laufzahl gilt, mit der Ausnahme, daß in der oberen Serie die Laufzahl $n = 4$ nicht vertreten ist. Die Intervallkurve sieht nun für die ganze Tonleiter aus, wie dies in Abb. 15 dargestellt ist.

Die beiden Gesetzmäßigkeiten: 1. Gleicher Verlauf der i_1 - und i_2 -Kurve auf- und abwärts, 2. gleiche Laufzahlauswahl, sprechen dafür, daß vom physikalischen Standpunkt aus auch der Ton $i_2 = \frac{7}{4}$ mit der Laufzahl $n = 4$ zur Serie, d. h. Tonleiter, gehört. Seine Auslassung könnte durch das musikalische Moment erklärt

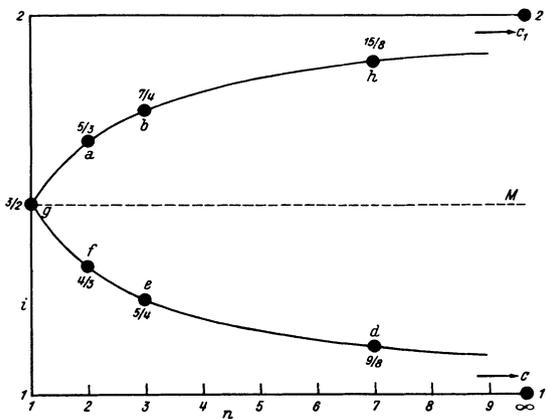


Abb. 15.

werden, daß dadurch eine Folge von Halbtönen $abhc_1$ vermieden wird¹.

Es ist nun ein leichtes, die beiden Seriengesetze zu einem einzigen zusammenzufassen. Da die eine Kurve ebensoweit oberhalb als die andere unterhalb der Mittellinie M liegt, so werden wir die Koordinaten von dieser aus rechnen. Es ist die Intervalldifferenz der Töne gegenüber $g(\frac{3}{2})$

$$\Delta = i_2 - \frac{3}{2} = \frac{3}{2} - i_1 = 2 - \frac{1}{n} - \frac{3}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{n},$$

¹ Siehe darüber auch Helv. Phys. Acta 6, 305 (1933). Naturwiss. 1933, 824.

und die beiden Intervalle i_1 und i_2 erhält man, indem man diesen Ausdruck \mathcal{A} entweder von $\frac{3}{2}$ subtrahiert oder dazu addiert, also bildet

$$i_{12} = \frac{3}{2} \pm \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{n} \right) = \frac{1}{2} \left(3 \pm \frac{n-2}{n} \right). \quad (3)$$

Hieraus erhält man die 9 Töne der Tonleiter durch Einsetzen der Laufzahlen $n = 2, 3, 4, 8$ und ∞ . Die Steigung der Intervalle mit der Laufzahl, d. h. $|di/dn|$, ergibt sich zu $1/n^2$.

Aufgabe. Man zeige, daß das Tonspektrum auch durch den Ausdruck

$$i_{12} = \frac{1}{2} \left(3 \pm \frac{n'-1}{n'+1} \right)$$

wiedergegeben werden kann, wo n' die Werte $1, 2, 3, 7, \infty$ annimmt.

§ 17. Mathematischer Ausdruck für eine Welle.

Der einfachste Fall ist der einer einseitigen linearen Wellenausbreitung. Während bei allseitiger Ausbreitung (z. B. in Luft) die Wellenintensität mit dem Quadrat der Entfernung abnimmt, ist sie hier, von Absorptionsverlusten abgesehen (ähnlich wie beim Scheinwerferlicht), konstant. Besonders übersichtlich sind die Verhältnisse bei Transversalwellen, wie man sie z. B. erhält, wenn man das eine Ende eines horizontal ausgespannten Gummischlauches auf und ab bewegt. Alle Punkte der Strecke werden dann der Reihe nach in gleiche Schwingung versetzt, d. h. die

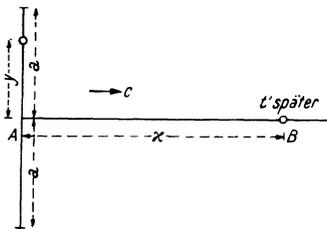


Abb. 16.

Schwingungsform, die Frequenz und die Amplitude (Intensität), sind für alle Teile gleich. Wir wollen im speziellen den Punkt A (Abb. 16) eine harmonische Schwingung ausführen lassen. Dieser Fall ist grundlegend, da sich eine beliebige Schwingungskurve nach FOURIER immer als Summe solcher harmonischer Schwingungen darstellen läßt.

Für die Ausweitung y des Punktes A zu einer Zeit t Sekunden nach Beginn der Schwingung hat man dann den Ausdruck

$$y = a \sin 2\pi n t. \quad (I)$$

Wir wollen nun von dieser Schwingungsformel ausgehend zur Wellenformel gelangen. Von einer solchen verlangt man, daß sie an jedem Ort der Strecke, d. h. für jedes x und zu jeder Zeit t den Schwingungszustand, d. h. die Ausweichung aus der Ruhelage y_x , angibt.

Wir betrachten den Schwingungsvorgang an irgendeinem Punkt B , dessen Lage durch die einzige Koordinate x bestimmt ist. Je größer x ist, um so später wird B von der Schwingung erfaßt. Diese Zeit t' berechnet sich aus der Wellengeschwindigkeit c nach der elementaren Beziehung

$$x = ct'. \quad (2)$$

In der Zeit t' , in der die Bewegung sich von A nach B fortgepflanzt hat, hat Punkt A bereits eine Strecke $y = a \sin 2\pi n t'$ zurückgelegt, und y_x ist, da die Schwingung dort erst jetzt anfängt, noch gleich 0. Sie wird nun stets um die Zeit t' nachhinken, d. h. für sie ist die Zeit stets um t' weniger weit vorgeschritten als die von A . Die Schwingungsformel für B , die zu der von A gehört, lautet also

$$y_x = a \sin 2\pi n (t - t'). \quad (3)$$

Unter Berücksichtigung von (2) schreibt sich dies:

$$y_x = a \sin 2\pi n \left(t - \frac{x}{c} \right). \quad (4)$$

Diese Beziehung kann in verschiedener Form geschrieben werden, indem man den allgemeinen Zusammenhang

$$c = n\lambda = \frac{\lambda}{\tau}$$

mit einbezieht. Man hat dann die mit (4) gleichwertigen Ausdrücke

$$y_x = a \sin 2\pi \left(nt - \frac{x}{\lambda} \right) \quad (4a)$$

oder

$$y_x = a \sin 2\pi \left(\frac{t}{\tau} - \frac{x}{\lambda} \right). \quad (4b)$$

Aus der letzteren Fassung geht hervor, daß immer, wenn t um τ oder x um λ zunimmt, y_x wieder denselben Wert annimmt. Denn, wenn man statt t schreibt $t + \tau$ und statt x $x + \lambda$, so ändert

sich das Argument des \sin um 2π , der Sinus selbst ist also wieder derselbe. Gleichung (4) ist nun gemäß unserer oben formulierten Forderung die Wellenformel, d. h. sie liefert $y = f(x, t)$. Man erkennt unmittelbar, daß sie auch für Longitudinalwellen gilt. Die y bedeuten dann einfach die longitudinalen Ausweichungen. Ferner gilt (4) auch für räumliche Ausbreitung, nur ist dann zu bedenken, daß die Wellenintensität, d. h. a^2 mit dem Quadrat der Entfernung (x) und daher a mit $1/x$ abnimmt, und daß (4) dann lauten muß:

$$y_x = \frac{b}{x} \sin 2\pi n \left(t - \frac{x}{\lambda} \right). \quad (5)$$

Mit der Ableitung von (4) bzw. (5) ist die Aufgabe gelöst. Es ist zum Verständnis der Wellenformel aber angezeigt, aus dieser auch die charakteristischen Merkmale einer Welle herauszulesen. Diese können etwa so formuliert werden: 1. Jeder Punkt der Strecke vollführt eine harmonische Schwingung der gleichen Amplitude. 2. Eine Momentphoto ergäbe eine Wellen- (Sinus-) Linie. 3. Aufeinanderfolgende Momentphotos (kinematographische Aufnahme!) ergäben stets dieselbe Wellenlinie, die aber mit fortschreitender Zeit mit der Geschwindigkeit c nach rechts rückt.

1. Wir wählen irgendeinen Punkt B , halten also x konstant. Dann wird (4):

$$y_x = a \sin (2\pi n t - \varphi), \quad (6)$$

wo

$$\varphi = 2\pi \frac{x}{\lambda} = \text{const.}$$

d. h. wir haben eine Sinusschwingung mit der Amplitude a und der Frequenz n , die, abgesehen von der Phase, identisch ist mit der des Anfanges A .

2. Hier bedeutet t einen gegebenen Wert, d. h. $t = \text{const.}$, und (4) wird dann

$$y_x = a \sin \left(\varphi - 2\pi \frac{x}{\lambda} \right), \quad (7)$$

d. h. wir erhalten längs x eine Sinuskurve mit der Amplitude a . Die Nullstellen ($y_x = 0$) sind durch den gewählten Zeitpunkt, d. h. durch φ , bestimmt.

3. In einem gegebenen Zeitpunkt ist an irgendeinem Punkt, z. B. B , die Ausweichung y_x die durch (4) gegebene. Wie ver-

schiebt sich nun der Ort, der einem konstanten y_x entspricht?
 $y_x = \text{const.}$ liefert die Bedingung

$$t - \frac{x}{c} = \text{const.}$$

oder $x = ct + \text{const.}$ (8)

Der Ort gleicher Ausweichung, d. h. x , verschiebt sich also mit konstanter Geschwindigkeit c nach rechts (t wächst ja gleichförmig). Im speziellen wandern also auch Täler und Berge und ebenso die Nullstellen gleichmäßig nach rechts.

§ 18. Zusammenhang zwischen stehender und fortschreitender Welle.

Stehende Wellen entstehen immer, wenn zwei gleiche Wellenzüge einander entgegenlaufen. Dies läßt sich an Hand der Wellengleichung (§ 17) unmittelbar beweisen. I und II seien die beiden Wellen (Abb. 17). Um deren Gleichung anschreiben zu können, müssen wir eine Bezugsebene haben, von wo aus wir x rechnen. Wir werden vernünftigerweise für E dieselbe Lage für beide Wellen wählen. Man bedenke, daß im allgemeinen die Schwingungen in A_1

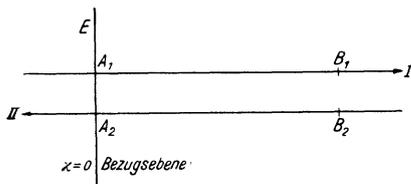


Abb. 17.

und A_2 nicht in Phase sind, sondern irgendeine (zeitlich) konstante Phasendifferenz aufweisen. Man kann nun E (ohne Beschränkung der Allgemeinheit der Behandlung) so wählen, daß A_1 und A_2 in Phase sind. Denn Punkte rechts von A_1 hinken, je weiter sie von ihm entfernt sind, in der Schwingung hinten nach, Punkte rechts von A_2 eilen aber entsprechend in der Schwingung voraus. Man kann also, wenn A_1 und A_2 nicht in Phase sind, E so weit nach rechts oder links verschieben, bis Phasengleichheit erreicht ist. Jetzt vereinfachen sich Rechnung und Ausdrücke entsprechend. Für die Ausweichungen y_1 und y_2 in B_1 und B_2 (d. h. an der selben Stelle) hat man

$$y_1 = a \sin 2\pi n \left(t - \frac{x}{c} \right) \quad (1)$$

und

$$y_2 = a \sin 2\pi n \left(t + \frac{x}{c} \right). \quad (2)$$

Würde die Schwingung in A_1 gegenüber der in A_2 um eine konstante Zeit t' nachhinken, so wäre im Ausdruck für y_1 statt t zu schreiben $t - t'$. Diese Komplikation vermeiden wir nun. Für die resultierende Ausweichung y bei B_1 bzw. B_2 , d. h. die Summe $y_1 + y_2$ erhalten wir nach dem bekannten trigonometrischen Satze für $\sin \alpha + \sin \beta$,

$$y = y_1 + y_2 = 2a \sin 2\pi n t \cdot \cos 2\pi n \frac{x}{c} \quad (3)$$

oder unter Berücksichtigung, daß $c = \lambda n$,

$$y = 2a \cos 2\pi \frac{x}{\lambda} \cdot \sin 2\pi n t. \quad (4)$$

Wir erhalten demnach eine Sinusschwingung längs der ganzen Strecke mit der örtlich variablen Amplitude $2a \cos 2\pi \frac{x}{\lambda}$.

Das Amplitudenbild entspricht dem in Abb. 18 dargestellten: Die Amplitude ist ein Maximum $= 2a$ für $x = k \lambda/2$, wo $k = 0, 1, 2, 3$ usw. Dann ist nämlich das Argument des \cos : $0, \pi, 2\pi, 3\pi$ usw. Die Amplitude wird andererseits jeweils null, wenn $x = k \lambda/2 + \lambda/4$; dann ist

$$\cos 2\pi \frac{x}{\lambda} = \cos \frac{2\pi}{\lambda} \left(k \frac{\lambda}{2} + \frac{\lambda}{4} \right) = \cos \left(k\pi + \frac{\pi}{2} \right) = 0.$$

Es gibt also Stellen, die dauernd in Ruhe sind: Knoten; ihr Abstand ist $\lambda/2$, und dazwischen befinden sich die Schwingungsbäuche. Da $\sin 2\pi n t$ zwischen $+1$ und -1 ändert, finden die Schwingungen zwischen der ausgezogenen und der gestrichelten Kurve Abb. 18 statt. Dabei schwingen alle Teile zwischen

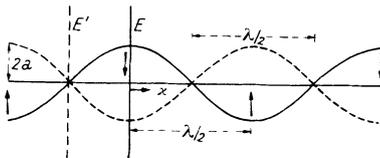


Abb. 18.

zwei Knoten in Phase, für sie gilt ja der von x unabhängige Ausdruck $\sin 2\pi n t$. Hingegen kehrt sich die Phase jeweils bei aufeinanderfolgenden Gebieten um. Denn das Vorzeichen der Amplitude springt, wenn das Argument von $\cos 2\pi x/\lambda$ die Grenzen $0, \pi, 2\pi, 3\pi$ usw. überschreitet, von $+$ zu $-$. Während wir also für das eine Gebiet zu setzen haben

+ $\sin 2\pi n t$, geht dieser Ausdruck sprunghaft beim Überschreiten eines Knotens in $-\sin 2\pi n t$ über. Es ist aber

$$-\sin 2\pi n t = \sin (2\pi n t + \pi) = \sin 2\pi n \left(t + \frac{\tau}{2} \right),$$

d. h. die Schwingung differiert um eine halbe Periode $\tau/2$. Wenn daher beim Passieren der Ruhelage die Teile des einen Gebietes nach oben schwingen, so schwingen die des nächsten nach unten. Die gleichzeitigen Schwingungsrichtungen sind in Abb. 18 durch Pfeile angedeutet. Ausdruck (4) zeigt also, daß die Interferenz der beiden fortschreitenden Wellenzüge *I* und *II* zu einem Schwingungszustand, d. h. zur Ausbildung einer stehenden Welle führt.

Zwei sich entgegenlaufende Wellenzüge stellt man am einfachsten her, wenn man eine Welle sich reflektieren läßt. Die ankommende und reflektierte Welle sind zwar nicht gleich intensiv, qualitativ wird man aber dieselbe Interferenzerscheinung erwarten dürfen. Die beiden Wellen haben im Moment und damit am Ort der Reflexion dieselbe Phase, wenigstens trifft dies für den Fall zu, daß die Reflexion an einem (mechanisch oder optisch) dünneren Medium stattfindet. Die Reflexionsebene spielt dann die Rolle unserer Bezugsebene *E*. Formel (5) ist daher unmittelbar anwendbar für die stehende Welle, die entsteht, wenn eine Welle sich an einer bei *E* befindlichen Wand reflektiert. An dieser bildet sich dann ein Schwingungsbauch aus, dem in regelmäßigen Abständen von $\lambda/4$ Knoten und Bäuche folgen.

Anders, wenn die Reflexion an einem dichteren Medium erfolgt. Dann wird ein Wellenberg als Wellental zurückgeworfen, die Phase kehrt sich um, und die Schwingungen der beiden Wellen besitzen am Ort der Reflexion einen Gangunterschied einer halben Periode. Diese Bedingung erfüllt aber eine Ebene im Abstand $\lambda/4$ von unserer Bezugsebene, und zwar sowohl links als rechts davon. Rückt man nämlich *E* um $\lambda/4$ nach links, so schwingt A_1 um $\tau/4$ früher und A_2 um $\tau/4$ später. Der Gangunterschied ist also $\tau/2$. Eine Reflexionsebene, an der Stelle von *E'* angebracht, ergibt daher gerade das Interferenzergebnis, wie es nach Abb. 17 abgeleitet und in Formel (4) dargestellt ist. *E'* bedeutet somit eine Reflexionsebene und *E* die dazu gehörige Bezugsebene für die Messung von *x* und *t*. Will man *x* und *t*, statt von *E* aus, von der Reflexionsebene aus messen, und berücksichtigt man, daß diese

auch rechts von E liegen kann, dann hätte man in Formel (4) zu x noch $\pm \lambda/4$, zu t noch $\pm \tau/4$ hinzuzufügen, so daß man hätte

$$y = 2a \sin 2\pi n \left(t \pm \frac{\tau}{4} \right) \cdot \cos 2\pi \frac{x \pm \lambda/4}{\lambda}$$

oder

$$y = 2a \sin \left(2\pi n t \pm \frac{\pi}{2} \right) \cdot \cos \left(2\pi \frac{x}{\lambda} \pm \frac{\pi}{2} \right). \quad (5)$$

Aufgabe. Man leite Formel (5) direkt ab, indem man eine ankommende und eine reflektierte Welle unter Berücksichtigung des Phasensprungs addiert.

§ 19. Entstehung der Schwebungen durch Interferenz.

Schwebungen entstehen, wenn zwei Wellenzüge mit wenig voneinander abweichender Frequenz miteinander interferieren. Für die beiden Wellen können wir schreiben:

$$\begin{aligned} y_1 &= a \sin 2\pi n \left(t - \frac{x}{c} \right) \\ y_2 &= a \sin 2\pi n' \left(t - \frac{x}{c} \right). \end{aligned} \quad (1)$$

Hierin sind die Amplituden gleich groß angesetzt, und ist als Bezugs ebene eine solche gewählt, daß die Schwingungen der beiden Wellen dort in Phase sind, was ohne Beschränkung der Allgemeinheit immer erlaubt ist. Man erhält durch Superposition, ähnlich wie in § 18,

$$y = y_1 + y_2 = 2a \sin 2\pi \frac{n+n'}{2} \left(t - \frac{x}{c} \right) \cdot \cos 2\pi \frac{n-n'}{2} \left(t - \frac{x}{c} \right).$$

Wir bezeichnen die mittlere Frequenz $\frac{n+n'}{2}$ mit \bar{n} und die Differenz $n-n'$ mit Δn und schreiben demgemäß

$$y = 2a \sin 2\pi \bar{n} \left(t - \frac{x}{c} \right) \cdot \cos \pi \Delta n \left(t - \frac{x}{c} \right). \quad (2)$$

Wir erhalten das Produkt zweier Wellen. Da aber $\bar{n} \gg \Delta n$, so ändert die erste sich zeitlich viel schneller als die zweite. Ja, die erste wird schon sehr viele Schwingungen ausgeführt haben, ehe der Betrag der zweiten sich wesentlich geändert hat. Man wird daher, ähnlich wie in § 18, den Ausdruck (2) auffassen als eine Welle $\sin 2\pi \bar{n} (t - x/c)$ mit der zeitlich und örtlich langsam

variierenden Amplitude $2a \cos \pi \Delta n (t - x/c)$. Man kann auch sagen, man erhält eine Welle mit einer mittleren Frequenz \bar{n} , die praktisch von n und n' nicht zu unterscheiden ist, und mit einer Amplitude, die sinusförmig moduliert ist.

Eine Vorstellung von der Interferenzwelle erhält man durch Aufnahme einer Momentphoto, d. h. man wählt einen festen Zeitpunkt, etwa $t = 0$, und zeichnet zunächst einmal den örtlichen Verlauf der Amplitude, d. h. die Amplitudenwelle, auf. Man erhält Abb. 19. Die Amplitude $2a \cos \left(-\pi \Delta n \frac{x}{c} \right) = 2a \cos \pi \Delta n \frac{x}{c}$ hat ihren größten Wert ± 1 , wenn

$$\pi \Delta n \frac{x}{c} = k\pi, \quad \text{wo } k = 0, 1, 2, 3 \dots, \quad \text{d. h. für } x = k \frac{c}{\Delta n} \quad (3)$$

und ihr Minimum = 0, wenn

$$\pi \Delta n \frac{x}{c} = k\pi + \frac{\pi}{2}, \quad \text{d. h. für } x = k \frac{c}{\Delta n} + \frac{c}{2 \cdot \Delta n}. \quad (4)$$

Der Abstand L zwischen zwei Maxima oder Minima beträgt

$$L = x_k - x_{k-1} = \frac{c}{\Delta n}. \quad (5)$$

Wir ergänzen Abb. 19 noch dadurch, daß wir die Schwingungsfigur der Welle $\sin 2\pi \bar{n} (t - x/c)$ für $t = 0$ einzeichnen. Diese ist begrenzt einerseits durch die Amplitudenkurve, andererseits

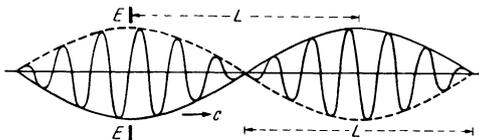


Abb. 19.

durch deren gestrichelt gezeichnetes Spiegelbild. E sei die Bezugsebene ($x = 0, t = 0$). Die Welle $\sin 2\pi \bar{n} (t - x/c)$ erscheint in Portionen, d. h. Gruppen von der Länge L abgeteilt. Diese Wellengruppen bewegen sich mit derselben Geschwindigkeit nach rechts wie die Welle $\sin 2\pi \bar{n} (t - x/c)$. Denn beide Faktoren in (2) enthalten genau denselben Ausdruck $t - x/c$. Bezeichnet man die Zeit, die eine Gruppe braucht, um sich um ihre Länge L zu verschieben, mit T , so gilt $c = L/T$. Unter der Schwebungsfrequenz versteht man nun die Zahl der Wellenpakete oder

Wellenstöße, die pro Sekunde an einem Orte vorbeiziehen. Da ein Wellenstoß die Zeit T braucht, so ist N nichts anderes als $1/T$, und man hat $c = LN$. Der Vergleich mit (5) zeigt nun, daß $N = \Delta n$.

Man wird vielleicht noch beachten, daß die Amplitudenwelle in aufeinanderfolgenden Wellengruppen ihr Vorzeichen ändert. Das bedeutet aber (ähnlich wie in § 18) nichts anderes, als daß die Welle $\sin 2\pi \bar{n}(t - x/c)$ beim Übergang von einem Gebiet ins andere ihre Phase um π , d. h. $\pi/2$, ändert. Da an dieser Stelle aber die Amplituden 0 sind, so tritt das bei den Schwingungsfiguren nicht augenfällig hervor.

§ 20. Schwebungen bei veränderlicher Wellengeschwindigkeit.

Wenn die Ausbreitungsgeschwindigkeit einer Welle nicht unveränderlich, sondern eine Funktion der Frequenz bzw. der Wellenlänge ist, dann haben wir (1) in § 19 folgendermaßen anzuschreiben:

$$\begin{aligned} y_1 &= a \sin 2\pi n \left(t - \frac{x}{c} \right) \\ y_2 &= a \sin 2\pi n' \left(t - \frac{x}{c'} \right), \end{aligned} \quad (1)$$

wo jetzt $c' \neq c$ ist. Die Addition ergibt nun:

$$\begin{aligned} y &= 2a \sin 2\pi \left(\frac{n+n'}{2} t - x \frac{n/c + n'/c'}{2} \right) \\ &\quad \times \cos \pi \left[(n - n') t - x \left(\frac{n}{c} - \frac{n'}{c'} \right) \right], \end{aligned} \quad (2)$$

oder, wenn wir wiederum setzen $\bar{n} = \frac{n+n'}{2}$ und $n - n' = \Delta n$ und berücksichtigen, daß $c/n = \lambda$ und $c'/n' = \lambda'$, so ergibt dies

$$y = 2a \sin 2\pi \left(\bar{n} t - \frac{x}{2} \left(\frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\lambda'} \right) \right) \cdot \cos \pi \left(\Delta n \cdot t - x \left(\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda'} \right) \right). \quad (3)$$

Da λ nur wenig von λ' verschieden ist, so wird man für λ bzw. λ' einen mittleren Wert $\bar{\lambda}$ setzen dürfen und für $\lambda - \lambda' = \Delta \lambda$ schreiben. Der Ausdruck lautet dann:

$$y = 2a \sin 2\pi \left(\bar{n} t - \frac{x}{\bar{\lambda}} \right) \cdot \cos \pi \left(\Delta n \cdot t + x \frac{\Delta \lambda}{\bar{\lambda}^2} \right). \quad (4)$$

Wir erhalten, wie in § 19, eine rasch verlaufende Welle multipliziert mit einer langsam verlaufenden Amplitudenwelle. Man wird also bei einer Momentphoto dieselbe Abb. 19 erhalten. Nur besitzen die Wellengruppen eine andere Länge. Sie bewegen sich auch mit einer anderen Geschwindigkeit als die Einzelwellen.

Die Ausbreitungsgeschwindigkeit der Amplitudenwelle erhält man, wenn man nachsieht, wie sich der Ort konstanter Amplitude zeitlich ändert. Man setze also

$$\cos \pi \left(\Delta n \cdot t + x \frac{\Delta \lambda}{\lambda^2} \right) = \text{const.} \quad (5)$$

oder

$$\Delta n \cdot t + x \frac{\Delta \lambda}{\lambda^2} = \text{const.} \quad (5a)$$

Dies ergibt für dx/dt , d. h. die Gruppengeschwindigkeit c_g , den Ausdruck

$$\frac{dx}{dt} = c_g = -\lambda^2 \frac{\Delta n}{\Delta \lambda}. \quad (6)$$

c_g wird man mit der Wellen- bzw. der Phasengeschwindigkeit c vergleichen wollen. Man kann entweder n oder λ durch c ersetzen unter Benützung von $c = n\lambda$ bzw. von

$$\Delta c = n \Delta \lambda + \lambda \Delta n. \quad (7)$$

Setzt man den Wert von Δn aus (7) in (6) ein, so erhält man

$$c_g = c - \lambda \frac{\Delta c}{\Delta \lambda}. \quad (8)$$

Dies ist die Formel von RAYLEIGH¹. c_g und c stimmen nur überein, wenn keine Dispersion der Wellen vorhanden ist, d. h. wenn $\Delta c/\Delta \lambda = 0$. c_g ist größer oder kleiner, je nachdem c mit λ abnimmt oder zunimmt. Es ist $c_g = 0$, wenn $c = k \cdot \lambda$.

Aufgabe. Man zeige, daß die Länge L einer Wellengruppe gleich ist $\frac{c_g}{\Delta n}$.

¹ Apparate zur Demonstration dieser Beziehung sind beschrieben in Helv. Phys. Acta 10, 490 (1937); 14, 552 (1941).

III. Wärmelehre.

§ 21. Die Barometerkorrektion.

Um den Barometerdruck in absoluten Einheiten, d. h. in dyn/cm^2 zu finden, hätte man die Hg-Säule in Zentimeter auszumessen und das Produkt zu bilden

$$\text{Höhe} \times \text{Dichte} \times \text{Schwerebeschleunigung.}$$

Wenn man also den Druck einfach in Millimeter oder Zentimeter Hg angeben will, hat man die Angaben immer für die gleiche

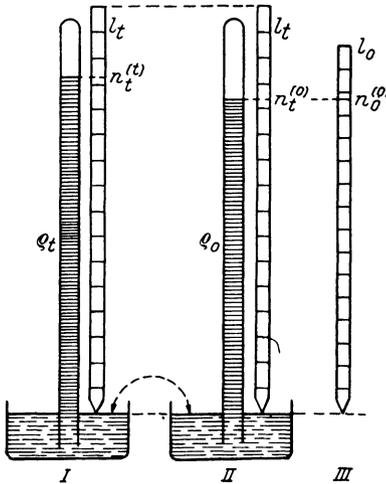


Abb. 20.

Dichte und Schwerebeschleunigung zu machen. Die abgelesene Barometerhöhe ist demnach immer erst auf Normalbedingungen zu reduzieren. Wir wollen uns auf die Temperaturkorrektion beschränken. Man hat festgesetzt, daß man den Barometerstand für Hg von 0°C angeben soll. Ferner sei vorausgesetzt, daß der Maßstab seinerseits auch bei 0°C richtig zeigt. Es ist also aus der bei irgendeiner Temperatur gemachten Ablesung zu berechnen, wie diese ausfallen würde, wenn Barometer samt Maßstab auf 0°C

abgekühlt wäre. Die Kontraktion des Glases spielt dabei keine Rolle, da der Barometerstand bei nicht zu engen Röhren, wo die Kapillarität verschwindend ist, nicht von der Rohrweite abhängt.

Wir nehmen die Korrektion in zwei Stufen vor (Abb. 20) und denken uns zunächst nur das Hg (samt Glas) auf 0° abgekühlt (Übergang $I \rightarrow II$). Die Zahl der abgelesenen Teilstriche bei t^0 sei $n_t^{(0)}$. Hier, wie im folgenden, beziehe sich der obere Index von n auf Hg, der untere auf den Maßstab. Die Ablesung bei Hg auf 0° und Maßstab auf t^0 ist dann zu bezeichnen mit $n_t^{(0)}$. Sind

die Dichten des Hg bei t^0 : ϱ und bei 0^0 : ϱ_0 , so haben wir nach dem Prinzip der kommunizierenden Röhren

$$n_i^{(t)} \varrho_t = n_i^{(0)} \varrho_0. \quad (1)$$

Nun besteht die Beziehung

$$\varrho_0 = \varrho_t (1 + at). \quad (2)$$

a : Volumenausdehnungskoeffizient des Hg. Also ist

$$n_i^{(0)} = \frac{n_i^{(t)}}{1 + at}. \quad (3)$$

Nun kühlen wir auch den Maßstab auf 0^0 ab (Übergang $II \rightarrow III$). Seine gesamte Länge l_t reduziert sich dabei auf l_0 , wobei gilt

$$l_t = l_0 (1 + \alpha t). \quad (4)$$

α : linearer Ausdehnungskoeffizient. Da hierbei der Abstand der Teilstriche verkleinert wird, fällt die Ablesung jetzt zu groß aus. Die Ablesung bei 0^0 : $n_0^{(0)}$ verhält sich zu der bei t^0 : $n_i^{(0)}$ umgekehrt wie die Länge des Maßstabes bei 0^0 und t^0 . Das heißt, es ist

$$\frac{n_0^{(0)}}{n_i^{(0)}} = \frac{l_t}{l_0}, \quad (5)$$

und somit

$$n_0^{(0)} = n_i^{(0)} (1 + \alpha t). \quad (6)$$

Setzen wir $n_i^{(0)}$ aus (3) ein, so erhalten wir

$$n_0^{(0)} = n_i^{(t)} \frac{1 + \alpha t}{1 + at}. \quad (7)$$

Da die Glieder mit t klein gegen 1 sind, so ist nach einer bekannten Näherungsformel (siehe etwa § 13) $\frac{1}{1+x} = 1 - x$ und demnach

$$n_0^{(0)} = n_i^{(t)} (1 + \alpha t) (1 - at),$$

und wenn man beim Ausmultiplizieren das Glied mit t^2 wiederum vernachlässigt,

$$n_0^{(0)} = n_i^{(t)} [1 - (a - \alpha)t]. \quad (8)$$

Das heißt, das Glied, das zu der Ablesung $n_i^{(t)}$ zu addieren ist, bzw. die Korrektur beträgt

$$-n_i^{(t)} (a - \alpha)t.$$

| | |
|---------------|---------------------------|
| Es ist für Hg | $a = 0,000181$ |
| für Messing | $\alpha = 0,000025$ |
| | $a - \alpha = 0,000156$. |

Die Korrektur würde offenbar dann wegfallen, wenn es gelänge, ein Material für den Maßstab zu finden, dessen linearer Ausdehnungskoeffizient gleich dem Volumenausdehnungskoeffizienten des Hg wäre.

Bemerkung. Die Reihenfolge der stufenweisen Reduktion kann ohne weiteres vertauscht werden, da die Operationen ja unabhängig voneinander sind. Siehe dagegen etwa Aufgabe § 22, wo dies nicht angeht.

Aufgabe. Man rechne die Barometerkorrektur aus, indem man sich erst den Maßstab und dann das Hg auf 0° abgekühlt denkt.

§ 22. Thermische Kräfte.

Ein Metallstab sei zwischen zwei festen Widerlagern angebracht. Welcher Druck entsteht, wenn der Stab von 0° auf t° erwärmt wird?

Es besteht keine Möglichkeit, diesen Druck unmittelbar als Funktion der Temperatur zu berechnen. Man muß sich den Zustand 2 aus dem Zustand 1 durch irgendwelche Vorgänge entstanden denken, die selbst berechenbar sind. Solche sind die thermische Ausdehnung und die elastische Dehnung (bzw. Kompression). Wir lassen also zunächst den Stab sich ausdehnen, wofür gilt

$$l_t = l_0(1 + \alpha t). \quad (1)$$

Hieraus folgt die Verlängerung

$$l_t - l_0 = l_0 \alpha t.$$

Nun komprimieren wir um ebensoviel und gelangen damit zum Endzustand. Es ist, unter der Annahme, daß man unterhalb der Elastizitätsgrenze bleibt, nach HOOKE bei der Temperatur t

$$\Delta l_t = \frac{l_t K}{E_t q_t}. \quad (2)$$

Hier bedeuten E_t und q_t Elastizitätsmodul und Querschnitt bei t° . Setzt man nun $l_t - l_0 = \Delta l_t$, so folgt

$$l_0 \alpha t = \frac{K l_t}{E_t q_t}$$

Druckfehlerverzeichnis.

| Seite | lies | statt |
|-----------------|---|--|
| 12, Mitte | $\left(\sin \frac{\alpha}{2} - \left(\sin - \frac{\alpha}{2}\right)\right)$ | $\left(\sin \frac{\alpha}{2} \left(-\sin - \frac{\alpha}{2}\right)\right)$ |
| 17, unten | $c dt$ | $\frac{dt}{c}$ |
| 47, Mitte | $\Delta A_e = P \Delta u$ | $\Delta A = P \Delta u$ |
| 102, Ende § 41 | $\mu = 1 + 4\pi x$ | $\mu = 1 + 4\pi k$ |
| 109, unten | $\cos \alpha_2 \mp \cos \alpha_1$ | $\cos \alpha_1 \mp \cos \alpha_2$ |
| 114, Formel (4) | $\int_0^t J V dt$ | $\int_0 J V dt$ |

oder unter Benützung von (1)

$$K = \frac{E_t q_t \alpha t}{1 + \alpha t}. \quad (3)$$

Da im allgemeinen $\alpha t \ll 1$, wird man mit genügender Annäherung setzen dürfen

$$K = E q \alpha t, \quad (4)$$

wobei auch die Temperaturveränderlichkeit von E und q unberücksichtigt bleiben darf. Für einen Fe-Stab von $q = 1 \text{ cm}^2$, $\alpha = 10^{-5}$, $E_t = 2 \cdot 10^6 \text{ kg/cm}^2$ und $t = 50^0$ findet man bereits $K = 1000 \text{ kg}$. K ist unabhängig von der Länge des Stabes.

Bemerkung. Man beachte, daß man für die Berechnung die Reihenfolge der Operationen nicht vertauschen kann! Wohl kann man durch Zusammendrücken und nachherige thermische Ausdehnung zum selben Endzustand gelangen. Aber für die thermische Ausdehnung unter Druck haben wir keine Beziehung, und selbst, wenn man für eine Ausdehnung bei konstantem K die Formel (1) anwenden wollte, so wäre α für einen unter Druck befindlichen Stab nicht bekannt.

Aufgabe 1. Man zeige, daß sich (3) darstellen läßt durch $K = E_t q_0 (1 + \alpha t) \alpha t$, wo q_0 den Querschnitt bei 0^0 bedeutet.

Aufgabe 2. Man wähle eine beliebige Anfangstemperatur und erhöhe oder erniedrige die Temperatur um Δt . Man zeige, daß die entstehende Druck- bzw. Zugkraft sich berechnet nach der Formel

$$K = \frac{E q \alpha \Delta t}{1 + \alpha t}.$$

K ist die Kraft, die bei der Temperatur t auftritt, E und q sind ebenfalls die für diese Temperatur gültigen Werte. Unter K/q versteht man den Druck bzw. den Zug. Warum ist ersterer im allgemeinen kleiner als letzterer?

§ 23. Druck eines Radreifens.

Ein Radreifen R_e (Abb. 21) werde heiß auf ein Rad R_a aufgebracht. Welcher Druck entsteht bei der Abkühlung von t^0 auf 0^0 ? Voraussetzung: starres Rad.

Die im Reifen entstehende Spannung ist nach § 22

$$P = E q \alpha t. \quad (1)$$

Da der Reifen sich zusammenzuziehen sucht, drückt er mit einer gewissen Kraft K auf das Rad, die man finden kann 1. durch Behandlung des Gleichgewichts der Kräfte, 2. aus dem Energieprinzip. Das erste Verfahren ist etwas umständlicher, dafür aber anschaulicher.

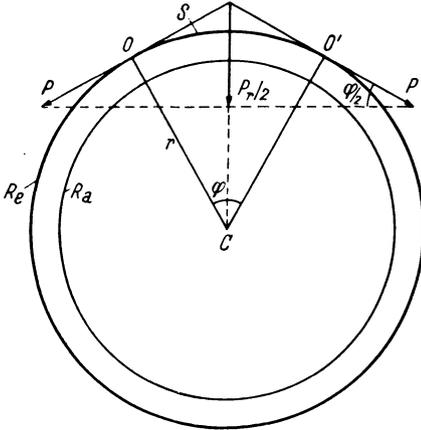


Abb. 21.

1. Wir betrachten ein abgegrenztes Stück des Reifens, indem wir zwei Linien CO und CO' , die einen Winkel φ einschließen mögen, zeichnen. Das zwischen O , O' eingeschlossene Stück S wird sowohl nach links als nach rechts mit einer Kraft P gespannt. Die Resultante dieser Kräfte liegt in Richtung der Winkelhalbierenden und hat, da die Projektion von P auf diese den Wert $P \sin \varphi/2$ besitzt, die Größe

$$P_r = 2P \sin \frac{\varphi}{2}. \quad (2)$$

Unter Benützung von (1) schreibt sich

$$P_r = 2Eq\alpha t \sin \frac{\varphi}{2}. \quad (3)$$

Diese Kraft wird durch den Gegendruck des Rades auf S aufgehoben. Wählt man den Winkel φ sehr klein, so steht $P_r \perp$ auf dem ganzen Bandstückchen S . Bezeichnet man die Oberfläche von S mit f und den Raddruck, d. h. die auf 1 cm^2 wirkende Druckkraft mit K_1 , so ist

$$P_r = K_1 f. \quad (4)$$

Daher ist der gesuchte Druck

$$K_1 = \frac{2Eq\alpha t \sin \varphi/2}{f}. \quad (5)$$

Man wird nun noch f durch den Winkel φ ausdrücken. Ist die Streifenbreite b , der Raddurchmesser r , so ist

$$f = r\varphi b \quad (6)$$

und

$$K_1 = \frac{2E q \alpha t \sin \varphi/2}{r b \varphi}. \quad (7)$$

Wählen wir φ genügend klein, so ist $\sin \varphi/2 = \varphi/2$; daher wird unter Berücksichtigung, daß $q = b \delta$, wo δ die Dicke des Reifens,

$$K_1 = \frac{E \delta \alpha t}{r}. \quad (8)$$

Dies ist der Druck, den der Reifen auf das Rad und umgekehrt das Rad auf den Reifen ausübt. Dieser Gegendruck kann natürlich nur hervorgerufen werden durch eine entsprechende elastische Kraft. Eine exakte Behandlung des Problems müßte also auch die Kompression des Rades mit berücksichtigen.

2. Bei irgendwelchen Vorgängen muß der Energiesatz gelten. Wir lassen das Rad z. B. sich kontrahieren oder sich ausdehnen. Nehmen wir den zweiten Fall. Die Druckkraft zwischen Rad und Reifen sei K . Dann wird bei einer Vergrößerung des Radius um Δr die Arbeit geleistet

$$\Delta A = K \Delta r.$$

Dabei wird der Umfang u des Rades um Δu vergrößert und die elastische Energie des gespannten Reifens A_e wird um den Betrag

$$\Delta A = P \Delta u$$

zunehmen. Denn, denken wir uns den Reifen etwa an der Stelle O durchschnitten, und müßte jetzt die ganze Reifenlänge, d. h. u , um Δu vergrößert werden, so wäre die Arbeit $\Delta A_e = P \Delta u$ zu leisten. Da nun $\Delta A = \Delta A_e$ sein muß, so haben wir

$$K \Delta r = P \Delta u, \quad (9)$$

und da $u = 2\pi r$, so folgt unmittelbar

$$K = 2\pi P. \quad (10)$$

(10) ist aber mit (8) identisch. Man hat nur zu berücksichtigen, daß $K = \text{Druck} \times \text{Fläche} = K_1 \cdot 2\pi r b$, ferner P aus (1) und $q = b \delta$ einzusetzen.

Aufgabe. Formel (1) stellt (siehe § 22) eine Näherung dar für den thermischen Druck bei Erwärmung von 0^0 auf t^0 . Man zeige, daß sie für den vorliegenden Fall der Spannung bei Abkühlung von t^0 auf 0^0 exakt gilt. E und q bedeuten dann die Werte bei 0^0 .

§ 24. Verhältnis der spezifischen Wärmen $\frac{c_p}{c_v}$ nach CLÉMENT und DESORMES.

Der Versuch (Abb. 22) besteht darin, daß man erst mit einem Gebläse etwas Luft durch den mit Hahn H versehenen Ansatz in den großen, mit Luft gefüllten Glasballon G hineinpumpt. Nachdem die kleine hierdurch bewirkte Erwärmung sich ausgeglichen hat, liest man den erzeugten Überdruck h ab. Durch kurzzeitiges Abnehmen des Pfropfens Z (oder Öffnen eines Hahns) läßt man die Luft sich rasch und damit adiabatisch bis zum Atmosphären-

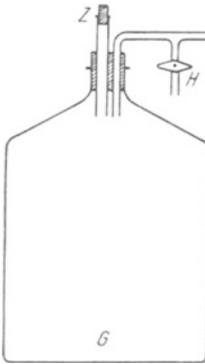


Abb. 22.

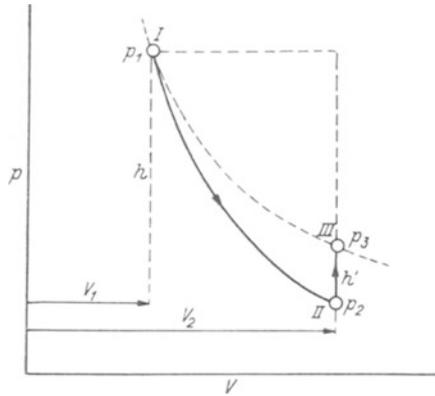


Abb 23.

druck ausdehnen. Dabei kühlt sich das Gas etwas ab. Nun setzt man Z sofort wieder auf und läßt Wärme von außen zuströmen, bis wieder die Anfangs- (Außen-) Temperatur erreicht ist. Dabei steigt der Druck des abgeschlossenen Luftvolumens an bis zu einem Überdruck, den wir mit h' bezeichnen.

Aufgabe. Es soll bewiesen werden, daß c_p/c_v , das wir abkürzungsweise mit γ bezeichnen, sich nach der Formel berechnet

$$\gamma = \frac{h}{h - h'}$$

Wir stellen die Zustandsänderung der Luft im CLAPEYRONschen pV -Diagramm dar (Abb. 23). Der Anfangszustand wird durch den Punkt I dargestellt; Druck und Volumen seien mit p_1 und V_1 bezeichnet. Beim Abheben des Pfropfens wandert der Punkt (der

Zustand) längs einer Adiabaten herab, bis der Barometerdruck p_2 erreicht ist. Das Volumen ist dabei auf V_2 gewachsen. Da bei adiabatischer Änderung nach POISSON pV^γ unverändert bleiben muß, so gilt für I und II die Beziehung

$$p_1 V_1^\gamma = p_2 V_2^\gamma. \quad (1)$$

Nach Wiederaufsetzen von Z bleibt nun das Volumen konstant. Der Zustandspunkt wandert von II nach III senkrecht in die Höhe, und die Temperatur wächst proportional mit dem Druck. Diese Beziehung ist im Zusammenhang mit (1) aber offenbar nicht geeignet, um zu einer Formel zu gelangen, die nur Drucke allein enthält. Hingegen gibt es außer (1) noch eine Beziehung zwischen p und V . Da den Punkten I und III dieselbe Temperatur entspricht, so liegen diese auf einer Isothermen (gestrichelt gezeichnet). Für I und III ist also das Gesetz von BOYLE-MARIOTTE anzuwenden:

$$p_1 V_1 = p_3 V_3,$$

oder da $V_3 = V_2$

$$p_1 V_1 = p_3 V_2. \quad (2)$$

Zwischen (1) und (2) lassen sich V_1 und V_2 eliminieren, da diese beiden Größen nur in der Verbindung V_2/V_1 vorkommen und damit nur eine einzige Variable repräsentieren. Wenn wir (2) mit γ potenzieren, kommt

$$p_1^\gamma V_1^\gamma = p_3^\gamma V_2^\gamma,$$

dies durch (1) dividiert ergibt

$$\frac{p_1^\gamma}{p_1} = \frac{p_3^\gamma}{p_2},$$

was sich schreiben läßt

$$p_2 p_1^{\gamma-1} = p_3^\gamma. \quad (3)$$

Nun sind statt der Drucke selber die Überdrucke einzuführen. Man hat

$$p_1 = p_2 + h$$

und

$$p_3 = p_2 + h',$$

so daß aus (3) wird

$$p_2 (p_2 + h)^{\gamma-1} = (p_2 + h')^\gamma. \quad (4)$$

Die Überdrucke h und h' werden klein gewählt gegenüber dem Barometerdruck p_2 , so daß h/p_2 und h'/p_2 kleine Größen darstellen. Es ist daher zweckmäßig, (4) so zu schreiben, daß diese Brüche erscheinen. Dies erreicht man durch Division mit p_2^γ . Man erhält

$$\left(1 + \frac{h}{p_2}\right)^{\gamma-1} = \left(1 + \frac{h'}{p_2}\right)^\gamma. \quad (4a)$$

Soweit gilt die Formel streng. Nun machen wir von der Näherung Gebrauch, daß, sofern $x \ll 1$:

$$(1 + x)^n = 1 + nx.$$

Dann kommt

$$1 + (\gamma - 1) \frac{h}{p_2} = 1 + \gamma \frac{h'}{p_2}.$$

Nach Streichung der 1 und Wegheben von p_2 bleibt noch

$$(\gamma - 1) h = \gamma h'.$$

Hieraus folgt

$$\gamma = \frac{h}{h - h'}. \quad (5)$$

Da wir das Verhältnis zweier Drucke haben, ist die Einheit, in der wir h und h' messen, gleichgültig. Man wird daher ein Manometer mit irgendeiner passenden Flüssigkeit (Öl) nehmen und direkt die abgelesenen Höhen h und h' in die Formel einsetzen dürfen.

Zum Schluß muß noch auf einen prinzipiellen Punkt hingewiesen werden. Kurven im pV -Diagramm bedeuten immer Zustandsänderungen eines Gases von konstanter Masse. Beim Versuch von CLÉMENT und DESORMES aber entweicht Gas beim Abnehmen des Pfropfens! Trotzdem kann die Darstellung als korrekt angesehen werden. Durch die Adiabate wird eben die Zustandsänderung jenes Teils des Gefäßinhaltes dargestellt, der in der Flasche verbleibt. Dieser Teil durchläuft dann auch die Isochore von *II* nach *III*. Vielfach wird der Versuch nicht mit anfänglichem Überdruck, sondern mit einem entsprechenden Unterdruck begonnen, indem man erst etwas Luft aus dem Gefäß herausaugt. Dies entspricht sogar dem ursprünglichen Verfahren von CLÉMENT und DESORMES. In diesem Fall ist, wie leicht einzusehen, der Versuch inkorrekt, denn beim Öffnen des Pfropfens stürzt Luft hinzu. Nehmen wir in erster Näherung an, die einstürzende Luft komprimiere den verdünnten Gasinhalt

wie etwa ein mit Atmosphärendruck wirkender fester Kolben. Dann besteht der Gasinhalt beim Druckausgleich aus einem Teil, der komprimiert und damit erwärmt, und einem Teil, der bei gegebener Außentemperatur noch hinzugekommen ist. Nach Aufsetzen des Pfropfens fließt nur von dem komprimierten Gase Wärme ab. Der Druck steigt daher nicht so hoch an, h' und damit γ wird also zu klein gefunden. Wenn der Fehler auch nicht groß ist (auch im Vergleich mit den übrigen methodischen Fehlern), so wird man doch prinzipiell besser mit Überdruck arbeiten.

Aufgabe. Man leite Formel (5) für den Fall ab, daß der Versuch mit Unterdruck ausgeführt wird (in der Annahme, daß die Zustandsänderung an einer konstanten Gasmenge ausgeführt werde).

§ 25. THOMSON-JOULE-Effekt und mechanisches Wärmeäquivalent.

Läßt man ein Gas sich adiabatisch (d. h. bei völliger Wärmeisolation) ausdehnen, so kann die Abkühlung sehr verschiedene Werte annehmen, ja es kann unter Umständen sogar eine Erwärmung eintreten. Die beiden Grenzfälle sind die Ausdehnung bei maximaler Arbeitsleistung des Gases und die bei Ausschaltung jeder äußeren Arbeitsleistung. Wir wollen uns diese einzeln näher betrachten und miteinander vergleichen.

Beim ersten Fall denken wir uns eine Gasmasse M (Abb. 24, *Ia*) zwischen zwei leicht beweglichen Kolben K_1K_2 eingeschlossen. Bewegt man nun K_1 nach rechts, bis er an die Stelle von K_2 tritt (*Ib*), so hat man am Gase die Arbeit p_1V_1 geleistet, ebensoviel hat aber das Gas wieder abgegeben. Der Zustand des Gases und damit seine Zustandsgrößen $p_1V_1t_1$ haben sich also nicht geändert. Hält man nun K_1 fest und läßt das Gas sich ausdehnen, indem man rechts von K_2 den Druck allmählich auf p_2 absinken

läßt (*Ic*), so wird die Expansionsarbeit $\int_{p_1}^{p_2} p dV$, daneben aber

noch die Arbeit zur Überwindung der Kohäsionskräfte zwischen den Gasmolekülen geleistet. Diese ist gleich der Differenz der Kohäsionsenergie $U_1 - U_2$. Diese Arbeitsbeträge werden der Energie des Gases entzogen, und es tritt eine der Arbeit

$\int_{p_1}^{p_2} p dV + U_1 - U_2$ entsprechende Abnahme der Wärmeenergie ein.
Diese Abkühlung $T_1 - T_2$ rechnet sich für ein ideales Gas nach der Formel aus

$$\frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{p_2}{p_1} \right)^{1 - \frac{1}{\gamma}}. \quad (I)$$

Sie ist am größten für ein einatomiges Gas mit $\gamma = 1 \frac{2}{3}$.

Den zweiten Fall erhalten wir durch eine einfache Abänderung des ersten. Wir schalten vor den Kolben K_2 (Abb. 24, II) eine

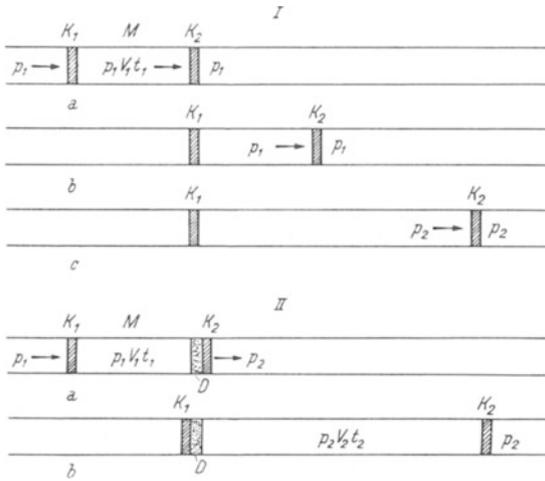


Abb. 24.

poröse Wand D (Wattepfropfen, Düse usw.), durch welche das Gas nur langsam hindurchströmen kann, und senken den Druck rechts von K_2 gleich von Anfang an auf p_2 (II a). Jetzt wird der Kolben K_2 sich nach rechts bewegen, da infolge der Druckdifferenz $p_1 - p_2$ fortdauernd Gas durch den Pfropfen nachströmt. K_2 bewege sich so, daß der Druck links davon nur unmerklich größer als rechts davon ist, d. h. im Idealfalle auf beiden Seiten $= p_2$. K_1 werde mit entsprechender Geschwindigkeit so nach rechts bewegt, daß der Druck p_1 aufrechterhalten bleibt. Der Endzustand ist erreicht, wenn der Kolben K_1 am Pfropfen angekommen ist (II b). Die Gasmasse hat dann ihr Endvolumen V_2 und die Temperatur t_2 angenommen.

Ein Vergleich von Fall *I* und *II* zeigt folgendes. Beim ersten wird das Gas erst ohne Veränderung in die Position der Abb. 24*Ib* gebracht, worauf man sich das Gas unter Arbeitsleistung ausdehnen läßt. Beim zweiten dehnt sich das Gas unter Reibung im Pfropfen aus und wird in expandiertem Zustand in seine Endlage gebracht. In der Düse bildet sich also gleichzeitig Reibungswärme und Expansionskälte. Die beiden Effekte sind, wie der Versuch zeigt, von nahezu gleicher Größe; denn die Temperatur t_2 ergibt sich nur wenig verschieden von t_1 .

Die Energiebilanz für den zweiten Fall, welcher dem THOMSON-JOULE-Versuch entspricht, ist folgende. Die von außen aufgewendete Arbeit beträgt $p_1 V_1$, die vom Gase geleistete $p_2 V_2$. Die in das Gas hineingesteckte Energie ist also $p_1 V_1 - p_2 V_2$. Diese findet sich wieder in der Vermehrung der „inneren Energie“. Diese setzt sich aus der Wärmeenergie und der Kohäsionsenergie zusammen. Die Vermehrung des Wärmehaltes ist $M c_v \cdot (t_2 - t_1)$. Die Zunahme der zweiten bezeichnen wir wieder wie oben mit $U_2 - U_1$. Wir haben also, wenn wir die Wärmeenergie in erg ausdrücken (mechanisches Wärmeäquivalent: J), die Beziehung

$$p_1 V_1 - p_2 V_2 = J M c_v (t_2 - t_1) + U_2 - U_1 \quad (2)$$

oder

$$t_2 - t_1 = \frac{p_1 V_1 - p_2 V_2 + U_1 - U_2}{J M c_v}. \quad (2a)$$

Da $U_1 - U_2$ stets positiv ist, muß das Produkt $p_2 V_2$ (bei t_2) also größer als $p_1 V_1$ (bei t_1) sein, damit eine Abkühlung erfolgt. Eine Berechnung des Temperatureffektes $t_2 - t_1$ für den Allgemeinfall soll nicht durchgeführt werden. Jedoch sei er für zwei Spezialfälle angegeben.

i. Ideales Gas. Für ein solches gilt

$$p_1 V_1 = p_0 V_0 (1 + \alpha t_1) \quad (3a)$$

bzw.

$$p_2 V_2 = p_0 V_0 (1 + \alpha t_2). \quad (3b)$$

Ferner ist die Kohäsionsenergie $U = 0$. Wir haben daher

$$p_1 V_1 - p_2 V_2 = p_0 V_0 \alpha (t_1 - t_2) = J M c_v (t_2 - t_1). \quad (4)$$

Da M/V_0 die normale Gasdichte ρ_0 bedeutet, so schreibt sich

$$(J \rho_0 c_v + p_0 \alpha) (t_2 - t_1) = 0. \quad (4a)$$

Da der erste Faktor immer $\neq 0$, also stets $\neq 0$, so folgt $t_2 = t_1$, d. h. daß der THOMSON-JOULE-Effekt = 0 ist.

2. Flüssigkeit. Auch auf diesen Fall muß unsere Beziehung anwendbar sein. Die Änderung der im übrigen sehr großen Kohäsionsenergie ist verschwindend klein. In erster Näherung wird man auch von der Volumenänderung durch Druck und Temperatur absehen dürfen und gelangt dann so zu dem einfachen Ausdruck

$$(p_1 - p_2)V = JM c_v(t_2 - t_1). \quad (5)$$

Unter Berücksichtigung, daß die Dichte $\rho = M/V$, folgt hieraus die Temperaturerhöhung

$$t_2 - t_1 = \frac{p_1 - p_2}{J \rho c_v}. \quad (5a)$$

Diese Beziehung liefert auch ein einfaches Mittel, um J zu bestimmen. Man läßt zu diesem Zwecke Wasser unter Druck in konstantem Strom durch eine Düse strömen und mißt die Temperaturerhöhung. Da in diesem Falle ρ und c_v praktisch = 1 sind, so folgt dann J aus

$$J = \frac{p_1 - p_2}{t_2 - t_1}. \quad (6)$$

Das Verfahren bietet nebst seiner Einfachheit den Vorteil, daß die bei kalorimetrischen Messungen auftretenden Wärmeverluste klein ausfallen, da die Flüssigkeitsmenge hier nicht begrenzt ist¹.

§ 26. Dampfdruck und Flüssigkeitskrümmung.

Es läßt sich leicht einsehen, daß eine Flüssigkeit leichter bei konvexer als bei konkaver Oberfläche verdampft. Denn im ersten Falle ist die Molekularanziehung zwischen den verdampfenden Molekülen und der Flüssigkeitsoberfläche kleiner. Der Dampfdruck, der sich in diesem Falle einstellt, ist demnach entsprechend größer.

Frage: Welches ist die Beziehung zwischen Dampfdruck und Krümmung der Flüssigkeitsoberfläche?

Folgendes Gedankenexperiment soll uns den Weg weisen. Man bringe in ein luftleeres Gefäß (Abb. 25) z. B. Wasser. Dieses

¹ Ein Demonstrationsapparat auf Grund dieses hydraulischen Prinzips in Helv. Phys. Acta 8, 160 (1940).

wird augenblicklich so weit verdampfen, bis sich der für die betreffende Temperatur maßgebende Dampfdruck eingestellt hat. Tauchen wir jetzt eine Kapillare in das Wasser, so steigt dieses bis zur kapillaren Steighöhe h . Dies hat zur Folge, daß das Wasser außerhalb und innerhalb der Kapillaren unter verschiedenem Dampfdruck steht. Denn der Druck an der unteren Fläche p_u ist um so viel größer als der Druck p_o in der Höhe h , als dem Gewicht einer Dampfsäule von der Höhe h entspricht. Es ist also

$$p_u - p_o = h \delta g \text{ dyn/cm}^2. \quad (1)$$

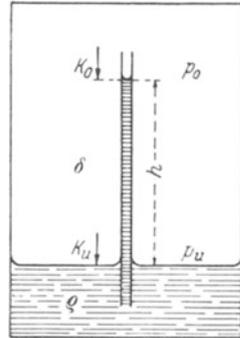


Abb. 25.

Das Ganze ist nur dann im Gleichgewicht, wenn der Flüssigkeitsmeniskus mit dem Dampfdruck p_o und die untere Wasserfläche mit dem Dampfdruck p_u im Gleichgewicht ist. Der konkaven Fläche in der Kapillaren muß also der um $p_u - p_o$ kleinere Dampfdruck entsprechen. Wäre nämlich der Druck nur von der Temperatur abhängig, also im Gleichgewicht sowohl unten als oben $= p_u$, dann wäre der Dampf in der Kapillaren bei p_o nicht gesättigt. Es müßte fortdauernd Wasser aus der Kapillaren verdampfen, der Dampf würde dann zum äußern Niveau herabfallen, sich kondensieren und als Wasser wieder in der Kapillaren hochsteigen. Wir hätten eine dauernde stoffliche Zirkulation und damit ein Perpetuum mobile. Statt dessen haben wir aber ein Gleichgewicht, und die Bedingung hierfür zu finden gilt es jetzt.

Wir haben dreierlei Kräfte in Betracht zu ziehen: 1. Den hydrostatischen Druck der gehobenen Wassersäule, 2. den Dampfdruck p_u bzw. p_o und 3. den Kohäsionsdruck K_u und K_o , das sind die Druckkräfte, welche die Wassermoleküle an der Oberfläche infolge der Molekularanziehung in die Flüssigkeit hinein zu treiben suchen. Auf das äußere Wasserniveau drücken p_u und K_u und auf den Meniskus im Innern p_o und K_o . Die Differenz ist gleich dem hydrostatischen Druck der gehobenen Wassersäule. Also haben wir $p_u + K_u - (p_o + K_o)$ oder

$$p_u - p_o + K_u - K_o = h \rho g. \quad (2)$$

$p_o - p_u$ ist nun der Dampfdruckunterschied, der sich bei einer konkaven Fläche gegenüber einer ebenen ausbildet. Wir finden ihn, wenn wir uns von den speziellen Voraussetzungen des gedanklichen Experimentes befreien, d. h. h aus (1) und (2) eliminieren. Es folgt

$$p_u - p_o + K_u - K_o = \frac{\rho}{\delta} (p_u - p_o),$$

woraus sich ergibt, daß der Dampfdruckunterschied

$$\Delta p = p_o - p_u = \frac{K_o - K_u}{\rho/\delta - 1}. \quad (3)$$

Die Differenz des Kohäsionsdruckes bei krummer und ebener Fläche ist nun nichts anderes als der kapillare Druck K . Im einfachsten Falle einer halbkugeligen Oberfläche mit dem Radius r hat K den Wert $K = \frac{2T}{r}$, wo T die Oberflächenspannung bedeutet und wo $r +$ bei konvexer und $-$ bei konkaver Fläche anzunehmen ist. Setzen wir diesen Ausdruck in (3) ein, so erhalten wir

$$\Delta p = \frac{2T}{r(\rho/\delta - 1)}. \quad (4)$$

Da zumeist $\rho \gg \delta$, so vereinfacht sich dies zu

$$\Delta p = \frac{2T\delta}{r\rho}. \quad (4a)$$

Aufgabe. Man leite die Formel unter Zugrundelegung einer Flüssigkeit mit Kapillardepression (z. B. Hg) ab, wobei man beachte, daß es für das gedankliche Experiment gleichgültig ist, ob die Flüssigkeit benetzt oder nicht, bzw. ob der Radius r der Formel (4) den Radius der Kapillaren bedeute oder nicht.

§ 27. Der Siedeverzug.

Damit eine Flüssigkeit siedet, müssen zwei Bedingungen erfüllt sein. Einmal muß die Temperatur so weit gesteigert werden, daß der entstehende Dampfdruck gleich dem äußern auf der Flüssigkeit lastenden Gasdruck ist. Dann aber muß durch eine zusätzliche Temperatursteigerung dafür gesorgt werden, daß sich im Innern der Flüssigkeit Dampfblasen bilden können. Die Höhe der nötigen Übertemperatur hängt ab 1. vom hydrostatischen Druck an der Stelle, wo die Blasen sich bilden sollen bzw. der

Tiefe unter der Oberfläche, und 2. vom Widerstande, den die Flüssigkeit einem Zerreißen durch Dampfblasen infolge der molekularen Anziehungskräfte entgegensetzt. Dementsprechend setzt sich die Siedepunkterhöhung Δt aus zwei Teilen Δt_1 und Δt_2 zusammen.

Δt_1 ist leicht anzugeben. Es entspricht der Erhöhung, die nötig ist, um statt des äußeren Druckes p_0 (Abb. 26) den Druck $p_0 + h\rho g$ zu überwinden. Man hat also die Abhängigkeit des Dampfdruckes von der Temperatur für Werte, die in der Nähe des Barometerdruckes liegen, zu kennen und nachzusehen, welches Δt_1 der Druckzunahme $h\rho g$ entspricht. Nun kennt man sehr genau den Siedepunkt des Wassers in Funktion des äußeren Druckes in der Nähe einer Atmosphäre. Die Abhängigkeit lautet nach REGNAULT, wenn man die neueren Meßresultate von H. MOSER¹ berücksichtigt,

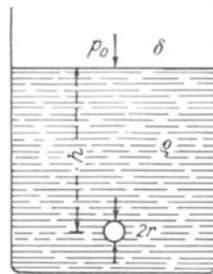


Abb. 26.

$$t = 100 + 0,0369(b_0 - 760), \tag{1}$$

wo b_0 den Barometerstand in mm Hg bedeutet. Die Beziehung (1) stellt aber ebensogut die Abhängigkeit der Dampftemperatur t vom Dampfdruck b_0 dar, da ja beim Sieden der Dampfdruck gleich dem äußeren Druck ist.

Will man in (1) die Drucke in absoluten Einheiten angeben, so hat man die mm Hg erst mit dem Faktor $\frac{1}{10}$ in cm Hg, dann diese in Gramm (Multiplikation mit 13,6) und schließlich in dyn (Faktor 981) umzurechnen. Entsprechend ist der Zahlenfaktor 0,0369 mit $\frac{10}{13,6 \cdot 981}$ zu multiplizieren. Bezeichnet man die in dyn/cm^2 angegebenen Barometerdrucke bzw. die den Temperaturen t' und t entsprechenden Dampfdrucke mit p_0' und p_0 , so hat man daher

$$\begin{aligned} t' - t &= 0,0369 \frac{10}{13,6 \cdot 981} (p_0' - p_0) \\ &= 2,77 \cdot 10^{-5} (p_0' - p_0). \end{aligned} \tag{2}$$

¹ MOSER, H.: Ann. d. Phys. (5) 14, 790 (1932).

Die Siedepunktserhöhung Δt_1 in der Tiefe h berechnet sich hier-
nach zu

$$t' - t = \Delta t_1 = 2,77 \cdot 10^{-5} h \rho g$$

oder, wenn man $\rho = 1$, $g = 981$ einsetzt, zu

$$\Delta t_1 = 0,027 \cdot h. \quad (3)$$

So beträgt sie beispielsweise in einer Tiefe von 10 cm $0,27^\circ \text{C}$.

Und nun die Berechnung des durch die Kohäsionskräfte be-
dingten Siedeverzugs Δt_2 . Für diese gibt die Tatsache einen An-
haltspunkt, daß die Größe des Siedeverzugs von der Anwesenheit
von Gasbläschen in der Flüssigkeit abhängt. Je mehr Luft eine
Flüssigkeit enthält, d. h. je größer die Gasblasen, in die hinein
die Flüssigkeit verdampfen kann, um so geringer der Siedeverzug.
Das hängt damit zusammen, daß der sich über einer Flüssigkeit
einstellende Dampfdruck von der Krümmung der Oberfläche ab-
hängt. Der Dampfdruckunterschied Δp bei sphärischer und
ebener Fläche ist nach § 26, wenn $\delta \ll \rho$,

$$\Delta p = \frac{2T \delta}{r \rho}. \quad (4)$$

Bei konkaver Fläche ist, da r negativ, auch Δp negativ. In ein
Luftbläschen vom Radius r hinein entwickelt sich also bei der
regulären Siedetemperatur nicht ein Dampfdruck p_0 , sondern ein
um Δp kleinerer Druck. Damit nun im Bläschen ein Dampfdruck
gleich dem äußeren Druck p_0 entsteht, muß die Siedetemperatur
ebenda erhöht werden um einen Betrag, welcher der Druck-
differenz Δp entspricht. Diese Siedepunktserhöhung Δt_2 läßt sich
nun ebenso wie die Δt_1 aus der Formel (3) entnehmen. Man hat
nur für $p_0' - p_0$ den Ausdruck (4) einzusetzen. Man erhält sofort

$$\Delta t_2 = 2,77 \cdot 10^{-5} \frac{2T \delta}{r \rho}. \quad (5)$$

Der gesamte Siedeverzug ist, soweit die lineare Beziehung (3) zu
Recht besteht, einfach gleich der Summe von Δt_1 und Δt_2 . Wir
finden daher

$$\Delta t = 2,77 \cdot 10^{-5} \left(\frac{2T \delta}{r \rho} + h g \right). \quad (6)$$

Für Wasser können wir die Werte einsetzen $T_{100} = 57,1 \text{ dyn/cm}$,
 $\frac{\delta}{\rho} = \frac{1}{1650}$, so daß man schließlich in Zahlen erhält

$$\Delta t = \frac{1,91}{r} 10^{-6} + 0,027 h. \quad (7)$$

Die beiden Summanden sind dann gleich groß, wenn r ungefähr gleich $\frac{0,7}{h} \mu$ beträgt. Die Gasbläschen müssen also schon sehr klein sein, damit der erste Summand überwiegt. Immerhin tut er dies schon bei einem Siedeverzug von 1° , da Δt_1 ja selbst bei $h = 10$ cm kaum $0,3^{\circ}$ beträgt.

Von besonderem Interesse muß nun die Frage nach dem maximal möglichen Siedeverzug erscheinen. Nach Formel (7) sieht es so aus, wie wenn dieser beliebig hohe Werte annehmen könnte, da man ja r bis gegen 0 hin abnehmen lassen kann. Nun wird aber der Durchmesser eines Luftbläschens niemals kleiner als der eines Moleküls, also einige Å werden können. Nehmen wir aber diesen äußersten Fall an, d. h. setzen wir in (7) etwa $r = 1,91 \cdot 10^{-8}$ cm ein, so berechnet sich eine Siedepunkterhöhung von $\Delta t = 100^{\circ}$. Sogar dieser Wert ist noch zu hoch, da für so große Temperaturunterschiede die REGNAULTSche Formel ihre Gültigkeit verliert. Man wird zu einem besseren Resultat gelangen, wenn man erst Δp aus (4) ausrechnet, unter Zugrundelegung von $r = 1,91 \cdot 10^{-8}$ cm, und dann in einer Dampfdrucktabelle¹ die entsprechende Temperaturdifferenz nachsieht. Man findet so den wesentlich kleineren Wert $\Delta t = 38^{\circ}$.

Auch diese Zahl ist noch mit Reserve aufzunehmen. Denn einmal sollte für T nicht der Wert für 100° , sondern der kleinere für $100 + \Delta t$ geltende Wert eingesetzt werden. Dann aber werden auch die Voraussetzungen, die der Formel (4) zugrunde liegen, kaum bis herab zu Luftbläschen von molekularen Dimensionen zutreffend sein. Dies schon nicht, da bei so kleinen Abmessungen überhaupt nicht mehr von einem kugeligen Hohlraum gesprochen werden kann. Immerhin kann das Resultat als eine Schätzung der oberen Grenze des Siedeverzugs gelten, und zwar in dem Sinne, daß man sagen kann, daß bei Siedeverzügen von 30 — 40° ein Zerreißen der Flüssigkeit ohne Zuhilfenahme von Gasbläschen angenommen werden muß. In diesem Zusammenhang darf erwähnt werden, daß Siedeverzüge von 20 — 40° verschiedentlich, höhere aber nur selten beobachtet worden sind. Der von G. KREBS² mitgeteilte Wert von etwa 100° scheint hier den Rekord zu halten.

¹ Zum Beispiel F. KOHLRAUSCH: Prakt. Physik 1935, 903.

² KREBS: Pogg. Ann. 136, 144 (1869).

§ 28. Der CARNOTSche Kreisprozeß.

Wir stellen erst fest, daß sich die Wärme eines Gases, prinzipiell wenigstens, vollständig in mechanische Arbeit umwandeln läßt. Man hat nur durch das unter dem Druck p stehende Gas G (Abb. 27) einen Kolben K vorwagschieben zu lassen. Maximale Arbeit wird man erhalten, wenn 1. keine Reibung vorhanden, 2. der äußere Druck p' , der überwunden werden muß, stets so dem inneren angepaßt wird, daß er gerade nur wenig kleiner als dieser ist. Der Vorgang wird dann

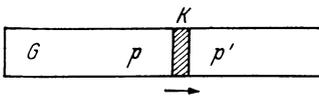


Abb. 27.

zwar unendlich langsam vor sich gehen, aber erst aufhören, wenn p auf 0 gesunken, d. h. das Volumen auf ∞ gewachsen ist. Hat man ein ideales

Gas, dann gilt für diesen adiabatischen Vorgang $TV^{\gamma-1} = \text{const.}$ Wenn $V = \infty$ wird, sinkt also die Temperatur auf den absoluten Nullpunkt, d. h. die ganze Wärme wird verbraucht, umgewandelt.

Von einer Wärmekraftmaschine verlangt man aber nicht einen einmaligen, sondern einen sich periodisch wiederholenden Vorgang. Und daher wird man die Arbeitsleistung des benützten Stoffes, hier eines idealen Gases, bei einem in sich zurücklaufenden Vorgang, d. h. einem Kreisprozeß, untersuchen müssen. Dieser ist, um den idealen Nutzeffekt zu erhalten, ohne Verluste auszuführen. Hierzu wird man, wie oben, Druckdifferenzen verschwindend klein machen, aber auch Temperaturunterschiede zwischen dem Wärmespeicher und dem idealen Gas möglichst klein wählen, damit sich nicht wertvolle (höher temperierte) Wärme von selbst in weniger wertvolle (nieder temperierte) umwandeln kann. Wenn es sich dementsprechend auch um unendlich langsam ausgeführte Prozesse handelt, so kann man sie sich natürlich doch unbenommen beliebig schnell ausgeführt denken. Diese Vorgänge, die eigentlich eine Aneinanderreihung von Gleichgewichtszuständen bedeuten, haben den Vorteil, daß man sie ebensogut in umgekehrter Richtung ausgeführt denken kann, d. h. sie sind umkehrbar. Solche reversibeln Kreisprozesse kommen zwar in der Natur nicht vor. Sie entsprechen einem idealen Fall, und der aus ihnen berechnete Nutzeffekt bedeutet daher die Grenze, die man bestenfalls annähernd erreichen kann. Ein Kreisprozeß stellt sich in der pV -Ebene durch einen geschlossenen

Linienzug dar. Im Prinzip wird man eine beliebig in sich geschlossene Kurve wählen können, und letzten Endes interessiert ja auch der Nutzeffekt für einen beliebigen Kreisprozeß. Allein zur Berechnung wird man erst einmal einen Linienzug verwenden, der aus Stücken besteht, die besonders einfache physikalische Vorgänge darstellen und dementsprechend auch leicht zu berechnen sind. Das sind z. B. Isothermen, Isobaren, Iso-

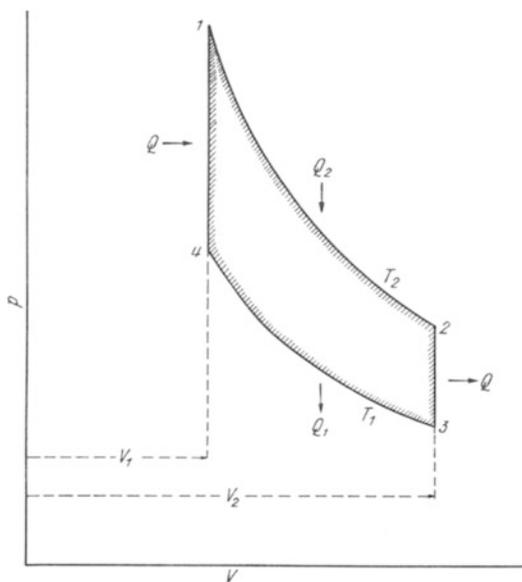


Abb. 28.

choren und Adiabaten. Nun braucht es offenbar, um zum Anfangspunkt zurückkehren zu können, mindestens drei Teilstücke (§ 24). Zweckmäßig ist es aber, deren vier zu wählen, da dann zwei paarweise derselben Art sein können. Man kommt dann also mit zwei Sorten aus. Wir wählen zwei Isothermen und zwei Isochoren und konstruieren damit den in Abb. 28 dargestellten Kreisprozeß.

Wir lassen das Gas bei konstanter Temperatur T_2 sich von 1 bis 2 ausdehnen. Die durch die geleistete Arbeit verbrauchte Wärme Q_2 wird aus einer Wärmequelle der Temperatur T_2 ersetzt. Hierbei besteht die Beziehung, daß die auf dem

Wege 1 bis 2 geleistete, der Wärme Q_2 äquivalente Arbeit gleich ist

$$A_2 = JQ_2 = \int_1^2 p \, dV. \quad (1)$$

Hierbei bedeutet J das mechanische Wärmeäquivalent. Unter Benützung der Gasgleichung und unter Zugrundelegung von 1 Mol Gas gilt für den Vorgang 1 bis 2

$$pV = RT_2, \quad (2)$$

daher ist auch

$$A_2 = JQ_2 = \int_1^2 RT_2 \frac{dV}{V} = RT_2 \int_1^2 \frac{dV}{V}. \quad (3)$$

Nun folgt die Abkühlung von 2 bis 3 bei konstantem Volumen, d. h. ohne Arbeitsleistung fließt die Wärmemenge Q ab. Von 3 nach 4 gelangen wir durch Kompression des Gases. Dabei müssen wir die Kompressionswärme Q_1 in einen Wärmebehälter der Temperatur T_1 abführen. Die geleistete Arbeit ist offenbar ebensogroß wie die, welche das Gas bei Expansion von 4 bis 3 hergeben würde. Diese ist aber

$$A_1 = JQ_1 = \int_4^3 p \, dV \quad (1a)$$

oder, da hier gilt

$$pV = RT_1, \quad (2a)$$

$$A_1 = JQ_1 = \int_4^3 RT_1 \frac{dV}{V} = RT_1 \int_4^3 \frac{dV}{V}. \quad (3a)$$

Nun ist aber die Summe $\int \frac{dV}{V}$ auf dem Wege 1 bis 2 ebenso groß wie auf dem Wege 4 bis 3, da sie zwischen denselben Grenzen V_1 und V_2 ausgeführt ist. Also ist, wenn wir diese Summe mit Σ bezeichnen,

$$A_2 = JQ_2 = RT_2 \Sigma \quad (4)$$

und

$$A_1 = JQ_1 = RT_1 \Sigma. \quad (4a)$$

Auf dem Wege 4 bis 1 wird keine Arbeit geleistet. Wohl aber muß Wärme zur Temperaturerhöhung von T_1 auf T_2 zugeführt werden. Diese hat gerade den gleichen Betrag wie die Wärme, die auf dem Wege 2 bis 3 fortgeführt werden mußte. Die gesamte beim Kreisprozeß gewonnene Arbeit beträgt offenbar $A_2 - A_1$. Wir haben also folgende Bilanz: Die Wärmequelle hat die Wärmemenge Q_2 hergeben müssen. Hiervon ist der Teil Q_1 unverbraucht

wieder abgeflossen. Nur die Differenz $Q_2 - Q_1$ ist in die entsprechende Arbeit $A_2 - A_1$ verwandelt worden. Der zur Arbeitsleistung verbrauchte Teil der Wärme, dividiert durch die insgesamt verbrauchte Wärme oder der Nutzeffekt η ist daher

$$\eta = \frac{Q_2 - Q_1}{Q_2}.$$

Unter Benützung von (4) und (4a) findet man aber unmittelbar

$$\eta = \frac{T_2 - T_1}{T_2}. \quad (5)$$

Bemerkung.

1. Die mit Q bezeichnete Wärme muß so zugeführt bzw. abgeführt werden, daß keine Temperaturdifferenz zwischen Gas und Wärmebehälter vorhanden ist. Dies kann nur durch eine unbegrenzt große Zahl entsprechend temperierter Behälter erfüllt werden, was aber gedanklich keine Schwierigkeiten bereitet.

2. Die Summe $\int_1^2 p dV$ bedeutet die zwischen Kurve 1 bis 2 und der Abszissenachse eingeschlossene Fläche, analog $\int_4^3 p dV$ die Fläche unterhalb 4 bis 3. Die Differenz oder die beim Kreisprozeß geleistete Arbeit wird also durch die schraffierte Fläche dargestellt.

Verallgemeinerung. Wie bekannt, gilt der CARNOTSche Satz (5) auch für einen beliebigen Kreisprozeß, sofern man unter T_2 und T_1 die höchste und die niederste bei dem Prozeß auftretende Temperatur versteht. Das heißt aber, wenn wir in unserem speziellen Kreisprozeß (Abb. 29) irgendeine geschlossene Kurve einzeichnen, welche die beiden Isothermen berührt, muß sich für diese derselbe oben berechnete Nutzeffekt ergeben. Für einen Beweis genügt es offenbar, zu zeigen, daß der eine Kreisprozeß durch den anderen ersetzt werden kann, ohne daß sich etwas am Nutzeffekt ändert. Das ist nun in der Tat möglich, indem man den speziellen Kreisprozeß so lange erweitert und deformiert, bis er sich

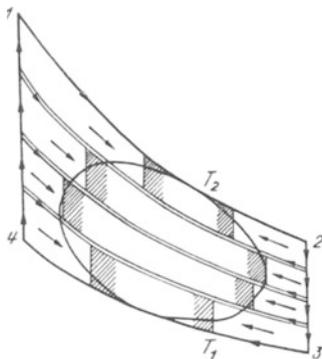


Abb. 29.

dem allgemeinen Fall angepaßt hat. Einmal läßt sich der Prozeß dadurch erweitern, daß man beliebig viele Isothermen einfügt (Abb. 29), die man einmal in der einen, einmal in der anderen Richtung durchlaufen läßt, wobei energetisch sich nichts ändert. Der Übersicht halber ist nur eine beschränkte Anzahl eingezeichnet. Der eine Kreisprozeß zerfällt damit in eine beliebig große Anzahl derselben Art. Wir ersetzen ihn durch unendlich viele differentielle schmale Streifen. Die Länge dieser Streifen dürfen wir nun auch beliebig ändern, da die Volumengrenzen, zwischen denen der Prozeß läuft, keine Rolle spielen [in (5) sind die Volumina verschwunden!]. Also komprimieren wir alle schmalen Streifen so lange, bis sie gerade die eingeschriebene Kurve berühren. Diese wird dann von einer Reihe von isothermen und isochoren Stückchen umrandet. Diese Umrandung ist aber von der Kurve selbst nicht zu unterscheiden, wenn die Zahl der Kreisprozesse unendlich groß gemacht wird. Also kann man den ursprünglichen speziellen Kreisprozeß auf die beliebige Kurve zusammenschrumpfen lassen, ohne daß sich etwas am Nutzeffekt ändert. Man erkennt daher im allgemeinen Fall den speziellen und umgekehrt.

Damit ist natürlich auch bewiesen, daß der Satz für sämtliche speziellen Fälle Gültigkeit hat. Solche lassen sich unter paarweiser Benützung von Isothermen, Isobaren, Isochoren und Adiabaten deren sechs konstruieren. Besonders erwähnt sei die Verwendung zweier Isothermen und zweier Adiabaten, da dies der ursprünglichen von CARNOT untersuchten Kombination entspricht. Mit der gegebenen Verallgemeinerung ist natürlich noch nicht bewiesen, daß der CARNOTSche Satz nicht nur für ein ideales Gas, sondern für irgendeinen anderen Wärmeträger gilt. Dazu bedarf es dann noch einer besonderen Betrachtung, auf die wir hier aber nicht näher eintreten wollen.

§ 29. Die CLAUSIUS-CLAPEYRONsche Gleichung.

Dies ist eine der wichtigsten Gleichungen der Thermodynamik. Sie bezieht sich nicht nur auf das Gleichgewicht zwischen zwei Aggregatzuständen, sondern ganz allgemein das Gleichgewicht zwischen irgend zwei Phasen ein und desselben Stoffes (z. B. zwei Modifikationen). Sie lautet

$$QJ = (v_2 - v_1) T \frac{d\hat{p}}{dT}. \quad (1)$$

Handelt es sich um das Gleichgewicht zwischen einer Flüssigkeit und ihrem gesättigten Dampf, so bedeuten Q die totale Verdampfungswärme (innere + äußere), $v_2 - v_1$ die Vergrößerung des spezifischen Volumens (Volumen der Masseneinheit) beim Verdampfen, p den Dampfdruck, T die absolute Temperatur und J das mechanische Wärmeäquivalent. (1) gilt aber ebensogut für das Schmelzen und das Sublimieren. Im ersten Falle wäre Q die Schmelzwärme, $v_2 - v_1$ die spezifische Volumenvergrößerung beim Schmelzen und dT die Gefrierpunkterhöhung bei Anwendung eines Überdruckes $d p$. Während bei Dämpfen $d p/d T$ immer + ausfällt, da stets $v_2 > v_1$, so kann beim Schmelzen $d p/d T$ auch - sein. Das heißt, man erhält eine Gefrierpunktserniedrigung mit zunehmendem Druck (wie z. B. bei Wasser).

Die Ableitung der C.-C.-Gleichung kann durch die (gedankliche) Ausführung eines reversibeln Kreisprozesses vorgenommen werden. Man denke sich wie in Abb. 27 ein Gefäß, dessen Volumen durch einen beweglichen Kolben K verändert werden kann. Nur sei jetzt G nicht mit einem Gas, sondern mit einer Flüssigkeit angefüllt. Wir wählen z. B. 1 g Wasser; das Volumen beträgt dann ungefähr 1 cm³. Die Umgebung, die als Wärmespeicher diene, besitze dieselbe Temperatur T wie das Wasser, und auf den Kolben wirke von außen ein Druck, der dem Dampfdruck, den das Wasser beim Verdampfen erzeugen würde, gerade das Gleichgewicht hält. Wir wollen nun das Wasser bei konstantem Druck verdampfen und führen ihm zu diesem Zwecke Wärme zu. Da sich hierbei das Volumen von v_1 und v_2 vergrößert, muß der Kolben Arbeit leisten. Die totale Verdampfungswärme setzt sich dabei aus zwei Teilen zusammen: 1. der Wärme für die Änderung des Aggregatzustandes (innere Verdampfungswärme) und 2. dem Äquivalent der Wärme für die Arbeitsleistung $p \cdot (v_2 - v_1)$ (äußere Verdampfungswärme). Stellen wir den Vorgang in der CLAPEYRONschen $p v$ -Ebene dar (Abb. 30), so entspricht dies dem Übergang von Zustand 1 zu Zustand 2. Dieser erfolgt gemäß einer horizontalen geraden Linie, da gleichzeitig mit der Temperatur auch der Dampfdruck konstant bleibt, unabhängig davon, ob das Mengenverhältnis von Flüssigkeit und dampfförmigem Anteil sich ändert. Ausgehend von Zustand 2 wählen wir nun als zweiten Teilprozeß eine kleine Volumenver-

größerung (Übergang $2 \rightarrow 3$). Diese erfolge ohne Wärmezufuhr, d. h. adiabatisch. Mit der kleinen Volumenzunahme $v_3 - v_2 = \Delta v$ ist eine entsprechende Arbeitsleistung und damit eine kleine Abkühlung um ΔT verbunden.

Wir kühlen nun auch die Umgebung des Gefäßes, d. h. den Wärmespeicher auf $T - \Delta T$ ab und komprimieren den Dampf bei konstanter Temperatur $T - \Delta T$. Es tritt Kondensation ein, und die totale Kondensationswärme Q' muß an die Umgebung abgeführt werden. Wir kondensieren bis nahe zu dem Betrage, wie er dem Anfangszustand I entspricht (Übergang $3 \rightarrow 4$) und kehren dann wirklich zum Anfangszustand zurück, indem wir noch eine adiabatische Kompression um $v_4 - v_1 = \Delta v'$ vornehmen (Übergang $4 \rightarrow 1$).

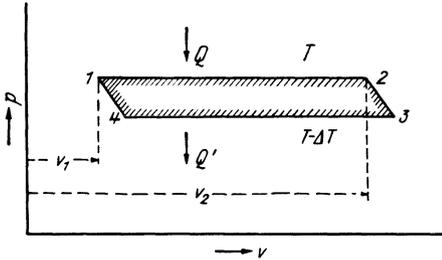


Abb. 30.

Bei diesem Kreisprozeß ist nun insgesamt die Wärme Q der Temperatur T verbraucht

worden. Davon ist ein Teil in Arbeit verwandelt, ein Teil bei der Temperatur $(T - \Delta T)$ in die Umgebung abgeflossen. Nach dem CARNOTSchen Prinzip muß aber für einen reversibeln Prozeß gelten

$$\frac{\text{Wärmewert der Arbeitsleistung}}{\text{verbrauchte Wärme}} = \frac{\text{Temperaturdifferenz}}{\text{Höchsttemperatur}}. \quad (2)$$

Den Wert für die Arbeitsleistung finden wir aus dem Arbeitsweg $1-2-3-4-1$. Er ist (siehe auch § 28) einfach gleich dem von ihm eingeschlossenen (schraffierten) Flächenstück. Wir kennen allerdings die Kurvenstücke $2-3$ und $4-1$ nicht. Wir wissen nicht einmal, ob bei der Expansion $2-3$ der Dampf gesättigt bleibt oder wo Punkt 4 genau gewählt werden muß. Aber wir wissen, daß Δv und $\Delta v'$ fast beliebig klein gegenüber $v_2 - v_1$ (bzw. $v_3 - v_4$) gewählt werden können. Die vom Arbeitsweg eingeschlossene Fläche weicht daher nur unmerklich wenig vom Inhalt eines Rechteckes von der Länge $v_2 - v_1$ und der Breite Δp

ab, so daß wir die Arbeitsleistung gleich $\Delta p(v_2 - v_1)$ setzen dürfen. Daher wird aus (2)

$$-\frac{\Delta p(v_2 - v_1)}{Q} = \frac{\Delta T}{T}. \quad (3)$$

Diese Beziehung ist aber mit (1) identisch.

Damit haben wir die C.-C.-Gleichung, d. h. eine Beziehung zwischen wirklich meßbaren Größen aus einem idealen Kreisprozeß abgeleitet. Man könnte sich nun noch fragen, ob dies zulässig ist, denn bei jedem in Wirklichkeit ausgeführten Kreisprozeß, der ja immer irreversibel ist, dürften wir in Formel (2) nicht das Gleichheitszeichen setzen. Es müßte dann heißen: linke Seite < rechte Seite, und wir erhielten die C.-C.-Beziehung in Form einer Ungleichung. Eine solche Ungleichung würde in der Tat herauskommen, wenn wir den Nutzeffekt irgendeiner Maschine mit dem durch unseren Kreisprozeß dargestellten Arbeitsverlauf berechnen wollten. Allerdings besteht die Möglichkeit, sich dem Idealfall zu nähern, indem man alle vorkommenden Druck- und Temperaturdifferenzen klein genug macht (und die Reibung vermeidet), also einen aus lauter Gleichgewichtszuständen bestehenden Zyklus, der dann naturgemäß äußerst langsam verläuft, herstellt. Das läßt sich im Prinzip um so besser erreichen, je kleiner der Kreisprozeß in seinen Dimensionen ist, schon da ja der Zeitverlauf abgekürzt wird. Praktisch wird dies allerdings wegen der experimentellen Schwierigkeiten in der Handhabung so kleiner Größen nicht möglich sein. Aber wir können uns den idealen Fall in fast beliebiger Annäherung realisiert denken. Wir können nicht nur die Breite des umlaufenen Rechtecks in Abb. 30 sehr klein nehmen, sondern auch die Länge sehr klein wählen, da über die Größe von Q nichts vorausgesetzt ist. Immerhin muß die Länge noch als groß gegenüber der Breite angenommen werden, da die Umlaufskurve in Wirklichkeit kein Rechteck ist, aber doch die Formel für ein Rechteck angewendet werden soll. Ferner dürfen die Abmessungen nicht unendlich klein im mathematischen Sinne sein, sondern nur so klein, daß die statistischen Schwankungen der Zustandsgrößen (T, p) noch keine Rolle spielen. Für diesen physikalisch unendlich kleinen Kreisprozeß dürfen wir nun die Reversibilität als erfüllt ansehen und somit das Gleich-

heitszeichen setzen. Unsere Formel gibt dann eine Gleichgewichtsbedingung zwischen einer Anzahl physikalischer Größen für einen Punkt der p -Ebene und dessen unmittelbarer Umgebung (dT, dp). Ganz allgemein wird man es nun verstehen, daß immer, wenn sich ein unendlich kleiner reversibler Kreisprozeß ausdenken läßt, man hierdurch zu einer Gleichgewichtsbeziehung gelangen wird (siehe auch § 57).

Aufgabe. Man berechne die Gefrierpunktserniedrigung des Wassers pro 1 Atmosphäre. Latente Schmelzwärme: 79,7 cal, $v_2 - v_1 = -0,0906$.

IV. Optik (Strahlungslehre).

§ 30. Minimum der Strahlenablenkung durch ein Prisma.

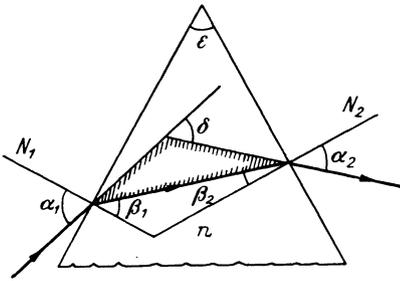


Abb. 31.

Um zu beweisen, daß die Winkelablenkung δ (Abb. 31) des durch das Prisma hindurchgehenden Strahles ein Minimum besitzt, wird man diese Ablenkung δ erst einmal als Funktion des Einfallswinkels α_1 berechnen. Hierzu dienen 1. die vorhandenen Winkelbeziehungen und 2.

das Brechungsgesetz, angewendet auf die 1. und 2. Fläche. Man hat, da δ der Außenwinkel des schraffierten Dreiecks ist,

$$\delta = \alpha_1 - \beta_1 + \alpha_2 - \beta_2. \quad (1)$$

Ferner ist, wenn ε den Prismenwinkel bedeutet

$$\varepsilon = \beta_1 + \beta_2, \quad (2)$$

so daß (1) auch geschrieben werden kann

$$\delta = \alpha_1 + \alpha_2 - \varepsilon. \quad (3)$$

Ferner ist

$$\sin \alpha_1 = n \sin \beta_1 \quad (4)$$

und

$$\sin \alpha_2 = n \sin \beta_2. \quad (5)$$

Aus (2) bis (5) ließen sich $\beta_1, \beta_2, \alpha_2$ eliminieren, so daß man δ als Funktion von α_1 erhalte. Durch Ausrechnen von $\frac{d\delta}{d\alpha_1}$ und Gleichnullsetzen des Ausdrucks würde man nach Schema f die Minimalbedingung herausfinden. Einfacher und übersichtlicher wird die Behandlung, wenn man die Minimalbedingung gleich in (3) zum Ausdruck bringt und schreibt

$$d(\delta) = d\alpha_1 + d\alpha_2 = 0. \quad (3a)$$

Man wird dann allerdings auch (2), (4), (5) in Differentialform benützen müssen, also schreiben

$$d\beta_1 + d\beta_2 = 0. \quad (2a)$$

$$\cos\alpha_1 d\alpha_1 = n \cos\beta_1 d\beta_1. \quad (4a)$$

$$\cos\alpha_2 d\alpha_2 = n \cos\beta_2 d\beta_2. \quad (5a)$$

Man bemerkt, daß man die Differentiale leicht eliminieren kann. Denn (4a) dividiert durch (5a) liefert

$$\frac{\cos\alpha_1 d\alpha_1}{\cos\alpha_2 d\alpha_2} = \frac{\cos\beta_1 d\beta_1}{\cos\beta_2 d\beta_2},$$

oder, da nach (2a) und (3a) $\frac{d\alpha_1}{d\alpha_2} = \frac{d\beta_1}{d\beta_2} = -1$, so folgt

$$\frac{\cos\alpha_1}{\cos\alpha_2} = \frac{\cos\beta_1}{\cos\beta_2} \quad \text{oder} \quad \frac{\cos\alpha_1}{\cos\beta_1} = \frac{\cos\alpha_2}{\cos\beta_2}. \quad (6)$$

Die Bedeutung dieses Resultats ersieht man, wenn man die Beziehung (4) und (5) einführt. Um keine Quadratwurzeln zu haben, wird man (6) quadrieren und schreiben

$$\frac{1 - \sin^2\alpha_1}{1 - \sin^2\beta_1} = \frac{1 - \sin^2\alpha_2}{1 - \sin^2\beta_2}$$

und weiter

$$\left(\frac{1 - n^2 \sin^2\beta_1}{1 - \sin^2\beta_1}\right) = \left(\frac{1 - n^2 \sin^2\beta_2}{1 - \sin^2\beta_2}\right). \quad (7)$$

Dieser Ausdruck bedeutet, daß dieselbe Funktion $f(\beta)$ für zwei Werte von β gleich groß sein muß, was mit einiger Wahrscheinlichkeit darauf schließen läßt, daß $\beta_1 = \beta_2$. Allein, man kann auch (7) übers Kreuz ausmultiplizieren und wird dann in der Tat sofort auf dieses Resultat geführt. Eine zweite mögliche Lösung $\beta_1 = -\beta_2$ kommt nach der Natur des Problems nicht in Frage. Da infolge von $\beta_1 = \beta_2$ automatisch auch $\alpha_1 = \alpha_2$ sein

muß, so heißt das also, daß der Strahlengang symmetrisch verlaufen muß. Diese Bedingung in (2), (3), (4) eingesetzt, liefert nun den Extremwert von δ .

Wir haben

$$\begin{aligned}\varepsilon &= 2\beta \\ \delta_m &= 2\alpha - \varepsilon\end{aligned}$$

und daher

$$\alpha = \frac{\delta_m + \varepsilon}{2} \quad \text{und} \quad \beta = \frac{\varepsilon}{2},$$

d. h. nach (4) oder (5)

$$\sin \frac{\delta_m + \varepsilon}{2} = n \sin \frac{\varepsilon}{2}. \quad (8)$$

Nun ist noch zu beweisen, daß dies einem Minimum und nicht einem Maximum entspricht. Dazu müßte man nun eigentlich wiederum auf die Bildung von $\delta = f(\alpha_1)$ zurückkommen und dann den zweiten Differentialquotienten bilden, um festzustellen, ob dieser + oder - ausfällt. Glücklicherweise läßt sich dieses umständliche Verfahren durch folgende Überlegung vermeiden. Wir haben festgestellt, daß nur ein Extremwert existiert. Ist dieser ein Minimum, dann genügt es, für einen beliebigen Einfallswinkel α_1 nachzuweisen, daß für δ ein Wert herauskommt, der größer ist als δ_m . Man wird nun α_1 so wählen, daß die Rechnung besonders einfach ausfällt. Das trifft z. B. zu für $\alpha_1 = 0$, also \perp Inzidenz. Dann ist auch $\beta_1 = 0$, ferner ist gemäß (2) $\beta_2 = \varepsilon$, so daß sich für die Ablenkung δ_0 nach (1) ergibt

$$\delta_0 = \alpha_2 - \varepsilon.$$

Da ferner nach (5) unter Berücksichtigung, daß $\beta_2 = \varepsilon$, gilt

$$\sin \alpha_2 = n \sin \varepsilon,$$

so folgt

$$\sin(\delta_0 + \varepsilon) = n \sin \varepsilon. \quad (9)$$

Nun haben wir zu beweisen, daß $\delta_0 > \delta_m$. Im Hinblick auf die Form der Ausdrücke (8) und (9) scheint es offenbar leichter, zu zeigen, daß

$$\sin \frac{\delta_0 + \varepsilon}{2} > \sin \frac{\delta_m + \varepsilon}{2}.$$

Ein solcher Beweis genügt aber, da in diesem Falle dann auch $\frac{\delta_0 + \varepsilon}{2} > \frac{\delta_m + \varepsilon}{2}$ und damit auch $\delta_0 > \delta_m$ sein muß. Vorausgesetzt

ist nur, daß $\frac{\delta_0 + \varepsilon}{2}$ den Winkel von 90° nicht übersteigt. Dies läßt sich aber leicht verhüten, indem man ε genügend klein wählt, eine Wahl, die einem ja frei steht. Denn es genügt zu beweisen, daß für irgendeinen Fall, also z. B. für den Spezialfall $\varepsilon \ll \frac{\pi}{2}$, herauskommt $\delta_0 > \delta_m$. Dadurch wird der allgemeine Geltungsbereich der Formel (8) in keiner Weise berührt.

Wir müssen nun die Form von (9) an die von (8) angleichen, gehen also in Anwendung eines trigonometrischen Satzes auf den halben Winkel $\frac{\delta_0 + \varepsilon}{2}$ über. Wir haben

$$2 \sin \frac{\delta_0 + \varepsilon}{2} \cos \frac{\delta_0 + \varepsilon}{2} = 2n \sin \frac{\varepsilon}{2} \cos \frac{\varepsilon}{2}.$$

$n \sin \frac{\varepsilon}{2}$ bedeutet aber gemäß (8) nichts anderes als $\sin \frac{\delta_m + \varepsilon}{2}$, so daß wir haben

$$\sin \frac{\delta_0 + \varepsilon}{2} = \sin \frac{\delta_m + \varepsilon}{2} \cdot \frac{\cos \frac{\varepsilon}{2}}{\cos \frac{\delta_0 + \varepsilon}{2}}. \quad (10)$$

Man erkennt, daß das Verhältnis der beiden cos stets größer als 1 ist. Damit ist aber nachgewiesen, daß

$$\sin \frac{\delta_0 + \varepsilon}{2} > \sin \frac{\delta_m + \varepsilon}{2},$$

was bedeutet, daß δ_m einen kleinsten Wert darstellt.

§ 31. Das Brechungsgesetz aus dem FERMATSchen Satz.

Nach dem FERMATSchen Prinzip wählt ein „Lichtstrahl“ den Weg kürzester Ankunft. Demnach pflanzt sich Licht von einem Punkt A nach einem Punkt C längs einer geraden Linie fort, sofern das Zwischenmedium überall dasselbe. Befindet sich aber z. B. A in Luft und C in Glas (Abb. 32), so wird der Lichtstrahl an der Begrenzung beider Medien geknickt. B liegt dann nicht auf der geraden Verbindungslinie von A und C , sondern sicher rechts davon, da das Licht dann eine größere Strecke in Luft mit der größeren Geschwindigkeit c_1 zurücklegen kann. Über die Lage von B wissen wir zunächst allerdings nur, daß der Punkt

wie A und C in der Zeichenebene liegen muß. Denn jedes Heraustreten aus derselben würde den Lichtweg vergrößern. Ferner

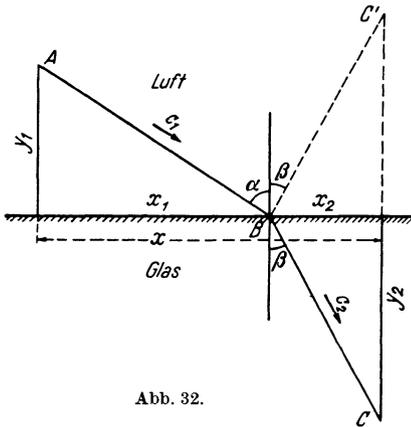


Abb. 32.

ist wiederum, wie oben, die gerade Linie von A nach B , ferner von B nach C die kürzeste Verbindung.

Frage: Wo liegt der Punkt B , der das Licht von A nach C in der kürzesten Zeit gelangen läßt?

Die gegenseitige Lage der beiden beliebigen Punkte A und C ist durch die Koordinaten y_1 , y_2 und x bestimmt. Variabel sind die beiden Strecken x_1 und

x_2 bzw. die beiden Winkel α und β . Jedoch sind diese Größen nicht unabhängig voneinander. Denn es gilt

$$x = x_1 + x_2 = y_1 \operatorname{tg} \alpha + y_2 \operatorname{tg} \beta. \quad (1)$$

Wir bezeichnen die Zeit, die der Strahl von A nach B gebraucht, mit t_1 , die von B nach C mit t_2 . Demnach ist die Gesamtzeit $t = t_1 + t_2$.

Nun ist

$$\overline{AB} = c_1 t_1 \quad \text{und} \quad \overline{BC} = c_2 t_2,$$

also

$$t = \frac{\overline{AB}}{c_1} + \frac{\overline{BC}}{c_2}.$$

Da aber

$$y_1 = \overline{AB} \cos \alpha \quad \text{und} \quad y_2 = \overline{BC} \cos \beta,$$

so ist dies auch

$$t = \frac{y_1}{c_1 \cos \alpha} + \frac{y_2}{c_2 \cos \beta}. \quad (2)$$

Nach dem gewöhnlichen Vorgehen hätte man nun, um den Extremwert von t zu finden, $\operatorname{tg} \beta$ bzw. $\cos \beta$ aus (1) auszurechnen und in (2) einzusetzen, dann zu bilden $dt/d\alpha$ und dies $= 0$ zu setzen. Man könnte aber ebensogut α aus (1) entnehmen und in (2) einsetzen und $dt/d\beta$ bilden und dies $= 0$ setzen. Beide Ausdrücke (1) und (2) sind ja in α und β gleich gebaut. Demzu-

folge scheint es nicht gerechtfertigt, eine der Variablen zu bevorzugen. Man wird daher versuchen, beiden Größen gleiche Gerechtigkeit widerfahren zu lassen. Dies wird uns dann nicht nur den Vorteil einer übersichtlichen Behandlung, sondern auch einer gewissen Vereinfachung eintragen. Wir eliminieren daher weder α noch β , sondern differenzieren zunächst (1) und (2), wie sie sind. Es liefert (1)

$$\frac{y_1}{\cos^2 \alpha} d\alpha + \frac{y_2}{\cos^2 \beta} d\beta = 0. \quad (1a)$$

Um (2) zu differenzieren, ist zu berücksichtigen, daß

$$d \frac{1}{\cos \alpha} = -\frac{d \cos \alpha}{\cos^2 \alpha} = \frac{\sin \alpha}{\cos^2 \alpha} d\alpha.$$

Man findet so

$$dt = \frac{y_1 \sin \alpha}{c_1 \cos^2 \alpha} d\alpha + \frac{y_2 \sin \beta}{c_2 \cos^2 \beta} d\beta. \quad (2a)$$

Die Minimumbedingung ist nun $dt = 0$. Dementsprechend lassen sich jetzt (1a) und (2a) schreiben

$$\begin{aligned} \frac{y_1}{\cos^2 \alpha} d\alpha &= -\frac{y_2}{\cos^2 \beta} d\beta \\ \frac{y_1 \sin \alpha}{c_1 \cos^2 \alpha} d\alpha &= -\frac{y_2 \sin \beta}{c_2 \cos^2 \beta} d\beta. \end{aligned}$$

$d\alpha$ und $d\beta$ heben sich durch Division der linken und rechten Seiten der Gleichungen weg. Da auch die Glieder y_1 , y_2 und \cos^2 verschwinden, so bleibt nur noch übrig

$$\frac{\sin \alpha}{c_1} = \frac{\sin \beta}{c_2},$$

oder

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{c_1}{c_2}. \quad (3)$$

Da c_1/c_2 gleich dem Brechungsquotienten n , so erhalten wir also das SNELLIUSsche Brechungsgesetz. Einer besonderen Untersuchung, ob es sich bei (3) um ein Minimum der Lichtzeit handelt, bedarf es nicht. Denn erstens geht das Minimum ohne weiteres daraus hervor, daß der Lichtweg, wenn B nach links oder rechts hinaus wandert, schließlich unendlich groß wird, und dann erübrigt sich überhaupt die Diskussion. Denn das FERMATSche Prinzip verlangt in seiner Allgemeinheit bloß, daß die Lichtzeit einen Extremwert aufweise. Sie kann also sowohl einem Minimum als einem Maximum entsprechen.

Hingegen scheint noch die Frage berechtigt, ob die Beweisführung in der einfachsten Form vorliegt. Dies im Hinblick auf die etwas umständlichen Ausdrücke (1a) und (2a), aus denen dann das einfache Resultat (3) hervorspringt. Man wird bei dieser Sachlage vielleicht etwas an den Ausspruch vom Gebirge und der Maus erinnert. In der Tat kann man nach dem Vorgang von PLANCK¹ durch die Benützung der Strecken AB und BC als Variable die Winkelfunktionen vermeiden, aber im Prinzip ist der Weg des Beweises doch derselbe.

Es gibt nun aber eine Möglichkeit, den Zusammenhang zwischen FERMATSchem Prinzip und Brechungsgesetz unmittelbar zur

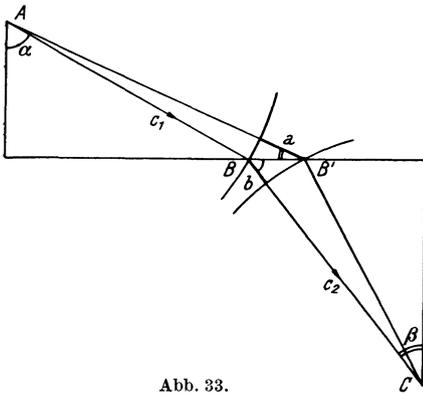


Abb. 33.

Anschauung zu bringen. Man zeichne sich einmal den Lichtweg (Abb. 33) $AB \rightarrow BC$, welcher der kürzesten Ankunft entspricht. Nun zeichne man einen unmittelbar benachbarten Strahl $AB' \rightarrow B'C$. Jetzt kann man in sehr hübscher Weise Anwendung machen von dem Satze, daß eine Funktion sich in der Nähe eines Extremwertes höchstens nur um kleine Größen von 2. Ordnung (oder eventuell noch höherer Ordnung) ändern kann. Der Unterschied in der Laufzeit der beiden Strahlen $AB'C$ und ABC ist also unendlich klein 2. Ordnung, wenn $B'B$ unendlich klein 1. Ordnung ist. Diesen Unterschied finden wir, wenn wir um A und C durch B und B' Kreisbögen schlagen. Dann unterscheiden sich die Lichtwege um die Strecken a und b , wo a und b ebenfalls unendlich klein 1. Ordnung sind. Die Differenz in der Laufzeit ist entsprechend $\frac{a}{c_1} - \frac{b}{c_2}$. Da dies gemäß dem FERMATSchen Prinzip bis auf Größen 2. Ordnung = 0 sein muß, so haben wir

$$\frac{a}{c_1} - \frac{b}{c_2} = 0. \quad (4)$$

¹ PLANCK, M.: Einführung in die theoretische Optik, S. 67. 1927.

Nun ist aber weiterhin ersichtlich, daß

$$a = \overline{BB'} \sin \alpha \quad \text{und} \quad b = \overline{BB'} \sin \beta, \quad (5)$$

da die Kreisbögen (bei unendlich kleinen Winkeln) auf beiden benachbarten Strahlen \perp stehen. Die Beziehungen (4) und (5) führen daher unmittelbar zum Brechungsgesetz.

Aufgabe. Man leite aus dem FERMATSchen Satz auch das Reflexionsgesetz ab. Man wähle also statt eines Punktes C unterhalb der Trennungsebene einen oberhalb C' (Abb. 32). Man wird dann genau dieselben Ausdrücke wie oben finden, nur ist jetzt $c_2 = c_1$, und somit folgt

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = 1 \quad \text{oder} \quad \alpha = \beta.$$

§ 32. Beziehung zwischen Linsen- und Spiegelgleichung.

Frage: Warum gilt für Linsen und sphärische Spiegel dieselbe Gleichung:

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{\gamma} + \frac{1}{\beta}. \quad (1)$$

Gewöhnlich wird diese Abstandsbeziehung einmal unter Anwendung des Brechungsgesetzes (Linsen) und einmal unter Anwendung des Reflexionsgesetzes (Spiegel) abgeleitet, und es wird auf das zunächst befremdliche Resultat, daß trotz der ganz verschiedenen Voraussetzung dieselbe Formel herauskommt, zu meist keine Antwort erteilt. Zunächst ist aus dieser Tatsache zu schließen, daß es auf die speziellen Voraussetzungen, ob Brechung oder Reflexion, offenbar nicht ankommt, und daß die Beziehung infolgedessen eine allgemeinere Gesetzmäßigkeit zum Ausdruck bringt. Was Linsen und Spiegeln gemeinsam ist, das ist ihre abbildende Wirkung. Man wird daher versuchen, die Gleichung (1) als Ausdruck für irgendein abbildendes System zu deuten. Bei einem solchen schneiden sich alle von einem Gegenstandspunkt ausgehenden Strahlen in einem Bildpunkt. Diesen gewinnt man also, wenn man irgend zwei „Konstruktionsstrahlen“ zeichnet und ihren Schnittpunkt bestimmt. Wir haben nun zu beweisen, daß nach Ausführung einer solchen Konstruktion das Abstandsgesetz (1) herauskommt, unabhängig von den speziellen Voraussetzungen. Wir wählen als Konstruktionsstrahlen einen

Parallel- und einen Fokalstrahl (Abb. 34). In der Ebene H befinde sich eine dünne Linse oder der Scheitel eines sphärischen

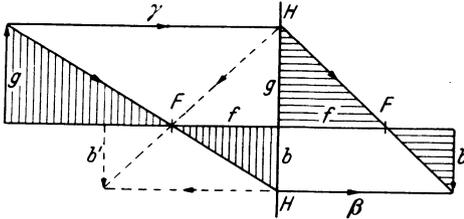


Abb. 34.

Spiegels. Die ausgezogenen Linien geben den Strahlenverlauf für das dioptrische und die gestrichelten die für das katoptrische System. Man erhält in beiden Fällen Bilder b und b' derselben Größe und vom selben Abstand β von

der Ebene H . Damit ist gezeigt, daß die Abstandsbeziehung also gleich ausfallen muß. Diese selbst erhält man nun ohne weiteres aus den schraffierten Dreiecken.

Man hat einmal

$$\frac{g}{b} = \frac{\gamma - f}{f} \quad (2)$$

und ein zweites Mal

$$\frac{g}{b} = \frac{f}{\beta - f}. \quad (2a)$$

Durch Gleichsetzen und Ausmultiplizieren erhält man alsobald

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{\gamma} + \frac{1}{\beta}.$$

Die Differenzierung zwischen Linsen- und Spiegelabbildung geschieht erst, wenn man nach der Brennweite f fragt. Hier ergibt sich in bekannter Weise aus dem Brechungsgesetz

$$\frac{1}{f} = (n - 1) \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right) \quad (3)$$

und aus dem Reflexionsgesetz

$$\frac{1}{f} = \frac{2}{r}.$$

Aufgabe. Übungsweise kann (1) auch unter Verwendung eines Parallel- und eines Zentralstrahles (Strahl durch die Mitte von H) oder eines Fokal- und eines Zentralstrahles abgeleitet werden. Ferner kann die Gültigkeit von (1) unschwer für den allgemeinen Fall eines Linsensystems dargetan werden. γ und β bedeuten dann die Abstände von der gegenstandsseitigen bzw. der bildseitigen Hauptebene.

§ 33. Bestimmung der Brechkraft einer Zerstreuungslinse aus ihrer verkleinernden Wirkung.

Von einem Punkt B aus (Abb. 35) werde ein Gegenstand der Länge g einmal von bloßem Auge und einmal durch eine Zerstreuungslinse L betrachtet. Die Winkel, unter denen wir den Gegenstand in beiden Fällen sehen, seien ψ und φ . φ erhält man, wenn man denjenigen Strahl zeichnet, der von der Pfeilspitze ausgehend durch die Linse nach B gebrochen wird. Da der Strahl nach unten geknickt ist, fällt φ kleiner aus als ψ .

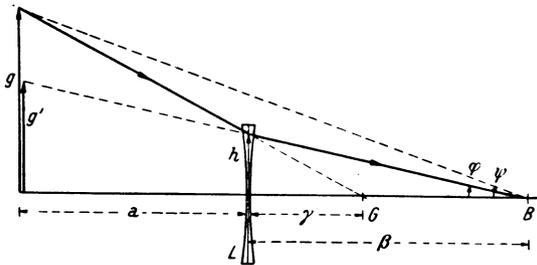


Abb. 35.

Dementsprechend erscheint der Gegenstand auf die Größe g' zusammengeschrumpft zu sein, und die Verkleinerung ist

$$v = \frac{g'}{g} = \frac{\operatorname{tg} \varphi}{\operatorname{tg} \psi} \approx \frac{\varphi}{\psi}.$$

Frage. Wie berechnet sich die Zerstreuungsweite f aus v ? Zunächst hat man gemäß Abb. 35 die geometrische Beziehung

$$\frac{g}{h} = \frac{a + \gamma}{\gamma} \quad \text{und} \quad \frac{g'}{h} = \frac{a + \beta}{\beta}$$

und daher

$$\frac{g}{h} = \frac{a}{\gamma} + 1 \quad \text{und} \quad \frac{g'}{h} = \frac{a}{\beta} + 1,$$

woraus

$$v = \frac{g'}{g} = \left(\frac{a}{\beta} + 1 \right) : \left(\frac{a}{\gamma} + 1 \right). \quad (2)$$

Dazu kommt die Linsengleichung. Denn G und B sind konjugierte Punkte. Zwar wird nicht ein von G herkommender, auf die Linse auffallender Strahl nach B abgelenkt, wohl aber wird ein umgekehrt verlaufender, d. h. ein nach G zielender Strahl nach

B hin gebrochen. Also bedeutet G den virtuellen Gegenstandspunkt zum reellen Bildpunkt B . Die Gegenstandsweite γ ist dementsprechend mit negativem Vorzeichen einzuführen. Da analog ein auf die Linse auffallender auf den Brennpunkt zielender Strahl parallel austritt, so ist auch f negativ einzusetzen, und wir haben

$$-\frac{1}{f} = -\frac{1}{\gamma} + \frac{1}{\beta}. \quad (3)$$

Da γ unbekannt ist, wird man dieses aus (2) und (3) eliminieren, d. h. man setzt den Wert von $1/\gamma$ aus (3) in (2) ein und erhält

$$v = \frac{\frac{a}{\beta} + 1}{a\left(\frac{1}{f} + \frac{1}{\beta}\right) + 1} = \frac{\left(\frac{a}{\beta} + 1\right)}{\left(\frac{a}{\beta} + 1\right) + \frac{a}{f}}, \quad (4)$$

oder zunächst

$$\frac{1}{v} = \frac{\left(\frac{a}{\beta} + 1\right) + \frac{a}{f}}{\frac{a}{\beta} + 1},$$

und hieraus

$$\frac{1}{f} = \left(\frac{1}{v} - 1\right)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{\beta}\right). \quad (5)$$

Zur Messung der Verkleinerung wird man für g einen in nicht zu großem Abstand aufgestellten Maßstab oder sonst ein regelmäßig gemustertes Gebilde (wie ein Ziegeldach) wählen und nun ähnlich verfahren wie bei der Bestimmung der Vergrößerung eines Fernrohrs. Man wählt als Gesichtsfeld am einfachsten die ganze Linsenöffnung, d. h. man visiert nach dem Linsenrand und zählt die Anzahl der Teilstriche, die im Gesichtsfeld der Linse erscheinen, und die Anzahl, welche von bloßem Auge gesehen, aus dem Gesichtsfeld durch die Linse herausgeschnitten wird. Das Verhältnis gibt dann die Verkleinerung v . Variiert man β etwa so lange, bis $v = \frac{1}{2}$ wird, so gibt β (wenn $\beta \ll a$) gerade die Zerstreuungswerte.

Die subjektive Methode läßt sich ohne weiteres zu einer objektiven gestalten, indem man den umgekehrten Strahlengang verwendet und an Stelle des Auges eine punktförmige Lichtquelle bringt. Man erhält dann einen hellen Zerstreuungskreis von der Ausdehnung g und einen dunkeln Schatten vom Durchmesser g' .

Besonders einfach wird die Methode, wenn man die Lichtquelle unendlich weit entfernt ($\beta = \infty$), etwa als solche die Sonne verwendet. Ändert man dann den Abstand a so lange, bis $v = \frac{1}{2}$ wird, dann ist gemäß (5) $a = f$.

Aufgabe. Aus (5) kann umgekehrt v als Funktion der Abstände a und β berechnet werden. Man zeige, daß für einen gegebenen Gesamtabstand $a + \beta$ die Verkleinerung am größten wird, wenn $a = \beta$. Experimentell an jedem Brillenglas eines Kurzsichtigen zu zeigen. Man betrachte durch ein solches einen Gegenstand auf dem Tisch und bewege das Glas vom Auge auf den Gegenstand zu.

§ 34. Brennweite und Lage der Hauptebenen zweier zentrierter Linsen.

Vorausgesetzt seien zwei dünne Sammellinsen. Man wird zweckmäßig erst den Strahlenverlauf zeichnen (Abb. 36). Ein paralleler Strahl wird durch Linse I nach ihrem Brennpunkt F_1 gebrochen, Linse II lenkt ihn aber nochmals ab, so daß er die Achse im Brennpunkt des Systems F schneidet. Die Lage der bildseitigen Hauptebene H findet man, indem man den ein-

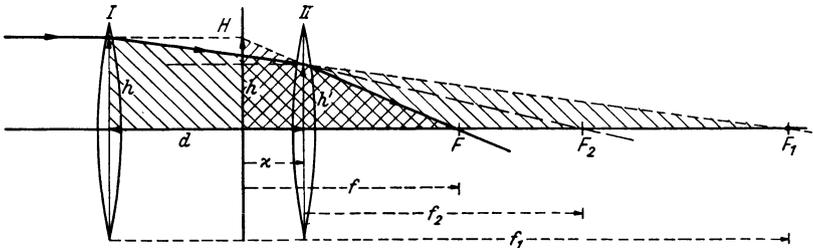


Abb. 36.

fallenden und den aus dem System austretenden Strahl zum Schnitt bringt. Wie berechnet sich nun die Brennweite f und der Abstand x der Hauptebene von der bildseitigen Linse II?

Zur Berechnung können sowohl optische als rein geometrische Beziehungen helfen. 1. Stellt man einmal fest, daß alle parallelen Strahlen, unabhängig vom Achsenabstand h , nach Durchtritt durch Linse I nach F_1 zielen und daß Linse II alle nach dem Punkt F ablenkt. Nun bedeutet aber der Ort, in dem sich die von einem

Gegenstandspunkt herkommenden Strahlen schneiden, den Bildpunkt. Da alle durch den Bildpunkt F gehenden Strahlen vor Ablenkung durch Linse II nach F_1 gezielt haben (also nicht davon herkommen), so bedeutet F_1 den virtuellen Gegenstandspunkt. F_1 und F sind demnach konjugiert, und es gilt die Linsengleichung für die Abbildung durch Linse II. $f_1 - d$ bedeutet den negativen Gegenstandsabstand, $f - x$ den Bildabstand. Wir haben

$$\frac{1}{f_2} = -\frac{1}{f_1 - d} + \frac{1}{f - x}. \quad (1)$$

2. Diese eine Beziehung genügt nicht zur Berechnung von f und x , doch kommen noch geometrische Beziehungen hinzu. Aus den schraffierten Dreiecken folgen die Ähnlichkeitsproportionen:

$$\frac{h}{h'} = \frac{f_1}{f_1 - d} = \frac{f}{f - x}. \quad (2)$$

Wir entnehmen hieraus den Wert von $\frac{f}{f - x}$ und setzen ihn in (1) ein. Dies ergibt

$$\frac{1}{f_2} = -\frac{1}{f_1 - d} + \frac{f_1}{f(f_1 - d)},$$

was uns sofort (etwa durch Erweitern der Gleichung mit $\frac{f_1 - d}{f_1}$) den bekannten Ausdruck für f liefert:

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} - \frac{d}{f_1 f_2}. \quad (3)$$

x folgt aus (2). Setzt man dieses nämlich reziprok an, so findet man unmittelbar

$$x = f \cdot \frac{d}{f_1}. \quad (4)$$

Läßt man die parallelen Strahlen von rechts her in das System eintreten, dann erhalten wir das entsprechende Resultat für die Brennweite nach links und die gegenstandsseitige Hauptebene. Man hat nur f_1 und f_2 zu vertauschen und x von Linse I an nach rechts zu rechnen. Man erkennt, daß (3) denselben Wert für f ergibt, wie es ja allgemein sein soll, wenn das erste und das letzte Medium eines Systems gleich ist. Für x' ergibt sich indessen

$$x' = f \cdot \frac{d}{f_2}. \quad (4a)$$

Den Abstand der beiden Hauptebenen findet man, wenn man bildet $\bar{d} - x - x'$. Es ist dieser Abstand

$$a = \bar{d} - f \frac{\bar{d}}{f_1} - f \frac{\bar{d}}{f_2} = \bar{d} - \bar{d} f \left(\frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} \right).$$

Unter Verwendung von (3) ergibt dies

$$a = \bar{d} - \bar{d} f \left(\frac{1}{f} + \frac{\bar{d}}{f_1 f_2} \right)$$

oder

$$a = - \frac{\bar{d}^2 f}{f_1 f_2}. \tag{5}$$

Da a negativ ausfällt, so liegt die bildseitige Hauptebene näher an Linse I und die gegenstandsseitige näher an Linse II. Die Hauptebenen sind also in der Reihenfolge vertauscht. Für den Spezialfall, daß $\bar{d} = f_1 + f_2$, wird nach (3) die Brechkraft = 0, und entsprechend ist $x = x' = \infty$. Die Hauptebenen rücken also aus dem Linsensystem heraus ins Unendliche. Man hat dann ein teleskopisches System.

Ein System mit zwei Linsen stellt auch das photographische Teleobjektiv dar. Hier gehen die Strahlen erst durch eine Sammellinse und dann durch eine Zerstreulinse hindurch. Man wird zur Berechnung dieses Falles unmittelbar dieselben Überlegungen wie oben verwenden können.

§ 35. Brennweite und Hauptebenen einer Linse.

Probleme lassen sich gelegentlich vermittels Ähnlichkeitsbetrachtungen behandeln. Unter Umständen gilt es allerdings, den Weg zur Aufzeigung von Ähnlichkeiten erst zu finden. Ein solches Beispiel ist das einer dicken Linse. Dieser Fall läßt sich nämlich auf den in § 34 behandelten von zwei dünnen Linsen zurückführen. Man braucht sich nur den Zwischenraum zwischen den beiden Linsen mit Glas ausgefüllt zu denken. Der Strahlengang ist dann genau so zu zeichnen wie in Abb. 37. Ja,

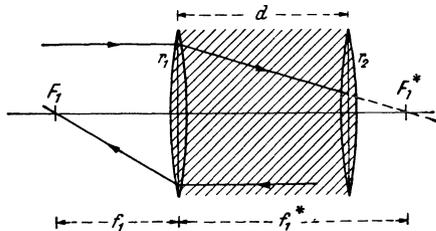


Abb. 37.

es sieht zunächst so aus, als ob auch alle Beziehungen und Ergeb-

nisse dieselben sein müßten. Das kann aber schon darum nicht sein, da die Hauptebenen im Falle zweier Linsen vertauscht liegen, dies aber bekanntlich bei einer dicken Linse nicht zutrifft! Es gilt daher, genau das Gemeinsame und das Trennende in beiden Fällen festzustellen und zu berücksichtigen. Man erkennt, daß die geometrische Beziehung (2) des § 34 zwar auch hier unverändert zu Recht besteht, daß aber die gewöhnliche Linsengleichung nicht anwendbar ist, da es sich um die einmalige Brechung an einer Kugelfläche handelt. Da hier Bild und Gegenstand nicht im gleichen Medium liegen, wie das bei einer Linse der Fall ist, so spielt die Strahlenrichtung eine wichtige Rolle. Dies ersieht man schon daraus, daß die Brennweiten in Luft und Glas ungleich groß sind.

Ganz allgemein gilt für ein optisches System, daß die Brennweite in Glas f^* (letztes Medium) und die Brennweite in Luft f (erstes Medium) so zusammenhängen $\frac{f^*}{n} = f$. Dies geht aber auch in unserem Fall unmittelbar aus der Abbildungsgleichung für eine brechende Kugelfläche hervor. Diese lautet für einen Strahlengang von links nach rechts

$$\frac{n-1}{r} = \frac{1}{\gamma} + \frac{n}{\beta}, \quad (1)$$

wo γ und β den Gegenstands- und den Bildabstand bedeuten. Vertauschen wir hierin die Rolle von Gegenstand und Bild (Gegenstand im Glas, Strahlen von rechts nach links), so gilt dann entsprechend

$$\frac{n-1}{r} = \frac{1}{\beta'} + \frac{n}{\gamma'}. \quad (2)$$

Die Brennweite in Glas erhält man aus (1), indem man $\gamma = \infty$ und $\beta = f^*$ setzt zu $\frac{1}{f^*} = \frac{n-1}{nr}$ und diejenige in Luft, wenn man entsprechend mit (2) verfährt. Man erhält $\frac{1}{f} = \frac{n-1}{r}$. Hieraus folgt eben $\frac{f^*}{n} = f$. Die Beziehungen (1) und (2) lassen sich demnach auch schreiben

$$\frac{n}{f^*} = \frac{1}{\gamma} + \frac{n}{\beta} \quad (1a)$$

und

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{\beta'} + \frac{n}{\gamma'}. \quad (2a)$$

Man kann somit die Linsengleichung anwenden, wenn man die Strecken, die sich auf Glas beziehen (also auch die bildseitige Brennweite), durch den Faktor n dividiert!

Nach dieser allgemeinen Betrachtung sind wir nun in der Lage, die Modifikationen anzugeben, die hier gegenüber dem Problem zweier Linsen anzubringen sind. Alle parallelen Strahlen, die durch Linse I gebrochen werden, zielen nach dem Brennpunkt F_1^* . Sie tun es dort in Luft, im Falle einer brechenden Kugelfläche aber in Glas. Für die Brechung und Abbildung durch Fläche II der dicken Linse bedeutet daher F_1^* den virtuellen Gegenstandspunkt in Glas. Die virtuelle Gegenstandsweite beträgt demnach in Glas $f_1^* - d$, und die Abbildungsgleichung durch Fläche II schreibt sich gemäß Gleichung (2a) folgendermaßen an

$$\frac{1}{f_2} = -\frac{n}{f_1^* - d} + \frac{1}{f - x}. \quad (3)$$

Dementsprechend ist auch die geometrische Beziehung [§ 34. (2) bzw. (4)] korrekterweise zu schreiben

$$\frac{f_1^*}{f_1^* - d} = \frac{f}{f - x} \quad \text{und} \quad x = \frac{df}{f_1^*}. \quad (4)$$

Durch Elimination von $f - x$ zwischen (3) und (4) erhält man

$$\frac{1}{f} = \frac{n}{f_1^*} + \frac{1}{f_2} - \frac{d}{f_2 f_1^*} \quad (5)$$

oder unter Berücksichtigung von $f_1^* = n f_1$

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} - \frac{d}{n f_1 f_2}, \quad (6)$$

ferner

$$x = \frac{df}{n f_1}. \quad (7)$$

Analog ist der Abstand der gegenstandsseitigen Hauptebene von der Fläche I

$$x' = \frac{df}{n f_2}. \quad (7a)$$

Hierzu kommen noch die Ausdrücke für f_1 und f_2 (Luftbrennweiten der Flächen I und II)

$$\frac{1}{f_1} = \frac{n - 1}{r_1} \quad \text{und} \quad \frac{1}{f_2} = \frac{n - 1}{r_2}. \quad (8)$$

Aus (6) und (7) in Verbindung mit (8) berechnen sich unmittelbar die Brennweite der Linse und der Scheitelabstand ihrer Hauptebenen aus den Krümmungsradien r_1 und r_2 . Der Abstand zwischen den Hauptebenen ergibt sich, ähnlich wie in § 34, zu

$$a = d - x - x' = d - \frac{df}{n} \left(\frac{x}{f_1} + \frac{x}{f_2} \right), \quad (9)$$

was sich unter Berücksichtigung von (6) auch schreiben läßt

$$\begin{aligned} a &= d - \frac{df}{n} \left(\frac{x}{f} + \frac{d}{n f_1 f_2} \right) \\ &= d \left(\frac{n-1}{n} - \frac{df}{n^2 f_1 f_2} \right). \end{aligned} \quad (10)$$

Dieser Abstand ist für nicht extrem große Linsendicken d stets positiv und wird bei kleinen Dicken, wo der Subtrahend zu vernachlässigen ist, gleich $d \frac{n-1}{n}$, d. h. für gewöhnliches Glas ($n = 1,5$) etwa $d/3$. Hieraus ergibt sich, daß für den Fall gleicher Krümmung $r_1 = r_2$, d. h. symmetrische Verhältnisse, auch die beiden Scheitelabstände x und x' nahezu $d/3$ sein müssen.

Aus (7) und (7a) folgt in Verbindung mit (8) noch die einfache Beziehung

$$\frac{x}{x'} = \frac{f_2}{f_1} = \frac{r_2}{r_1}. \quad (11)$$

Zur Berechnung von f und x bzw. x' ist es nicht notwendig, die Ausdrücke für f_1 und f_2 aus (8) in (6) und (7) einzusetzen. Die Beziehungen werden dadurch nur weniger übersichtlich. Hingegen ist es für manche Zwecke doch wünschenswert, die Formeln auch direkt in Funktion von r_1 , r_2 und n ausgedrückt zu besitzen. Wir fügen diese daher noch bei. Man erhält

$$\frac{1}{f} = (n-1) \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} - \frac{(n-1)d}{n r_1 r_2} \right), \quad (12)$$

ferner

$$x = \frac{d r_2}{n (r_1 + r_2) - (n-1) d} \quad (13)$$

$$x' = \frac{d r_1}{n (r_1 + r_2) - (n-1) d}. \quad (13a)$$

Bei kleinen Linsendicken wird man (13) und (13a) durch Streichen des Subtrahenden im Nenner vereinfachen dürfen. Als Spezialfälle seien nur zwei erwähnt:

1. Dünne Linse, d. h. $d = 0$. Man erhält die gewöhnliche Linsengleichung mit $x = x' = 0$.

2. Glaskugel als Linse, d. h. $r_1 = r_2 = r$ und $d = 2r$. Man findet

$$\frac{1}{f} = \frac{2(n-1)}{nr} \quad \text{und} \quad x = x' = r,$$

d. h. die Brechkraft beträgt $1/n$ von der einer dünnen Bikonvexlinse derselben Krümmung, und die beiden Hauptpunkte liegen, wie bei einer dünnen Linse, im Mittelpunkt vereinigt.

Aufgabe. Zwischen $d = 0$ und $d = 2r$ liegt demnach ein Maximum für a . Man zeige, daß dieses dann vorhanden ist, wenn

$$d = \frac{2r}{1 + \frac{1}{\sqrt{n}}}$$

und den Wert hat

$$a = 2r \frac{\sqrt{n} - 1}{\sqrt{n} + 1}.$$

§ 36. Beziehung zwischen Fernrohr und Mikroskop.

Bau und Funktionsweise von Fernrohr und Mikroskop sind grundsätzlich gleich. Beide Instrumente bestehen im Prinzip aus zwei hintereinander geschalteten Sammellinsen, wobei die erste (das Objektiv) ein reelles Bild des Gegenstandes erzeugt und die zweite (das Okular) als Lupe zur Betrachtung dieses Bildes dient. Eine Sammellinse kann also sowohl als Objektiv als auch als Okular dienen; ja, sie kann beide Funktionen gleichzeitig ausüben. Man hat nur hinter das Objektiv einen Planspiegel zu stellen, der die Strahlen auf das Objektiv, das nun als Okular wirkt, zurückwirft, und man hat ein einlinsiges Mikroskop¹.

Je nach dem Abstände zwischen Objektiv und Okular kann man ferne oder nahe Gegenstände betrachten, so daß ein Instrument prinzipiell sowohl als Fernrohr wie als Mikroskop zu gebrauchen ist. Nur kann es nicht gleichzeitig starke Vergrößerung für ferne und nahe Gegenstände geben. Daher besteht zwar kein qualitativer, wohl aber ein bedeutender quantitativer Unterschied zwischen Fernrohr und Mikroskop. Dieser läßt sich

¹ Helv. Phys. Acta 14, 554 (1941).

etwa so kennzeichnen: um ferne Gegenstände vergrößert zu sehen, muß das Objektiv schwach, um nahe vergrößert zu sehen, stark sein. Das Okular ist dasselbe. Um nun wirklich ein und dasselbe Instrument als Fernrohr und Mikroskop gebrauchen zu können, müßte man daher das Objektiv austauschen können. Es ließe sich ein Fernrohr auch allmählich in ein Mikroskop verwandeln, wenn man die Brechkraft des zunächst schwachen Objektivs immer größer und größer machen könnte. Man ersieht hieraus, daß eine scharfe Grenze zwischen beiden Instrumentenformen nicht besteht, wohl aber vermutet man, daß die Vergrößerungen eines Fernrohrs und eines Mikroskops in einer einfachen Beziehung zueinander stehen.

Um eine solche zu deduzieren, muß erst die Definition der Vergrößerung in beiden Fällen gegeben sein. Die Winkelvergrößerung eines Fernrohrs ist das Verhältnis der Winkel, unter dem ein Gegenstand im Fernrohr und von bloßem Auge erscheint. Gegenstand und Bild sind dabei im selben Abstand zu betrachten. Normalerweise wählt man unendlich große Entfernung. Die Vergrößerung eines Mikroskops und auch die einer Lupe wird ebenfalls durch das Verhältnis dieser Winkel bestimmt. Gegenstand und Bild sind hier aber nicht im selben Abstand miteinander zu vergleichen. Dies würde sonst zu einem den Tatsachen nicht entsprechenden, unendlich großen Wert für die Vergrößerung führen. Da nämlich die Bilder im Mikroskop und in der Lupe bei Betrachtung mit dem unangestregten Auge in unendlicher Entfernung erscheinen, so wäre auch der (kleine) Gegenstand zum Vergleich in unendliche Entfernung zu rücken. Dies würde aber einen verschwindend kleinen Gesichtswinkel liefern, so daß das Winkelverhältnis ungeheuer groß würde. Man muß daher für den Gegenstand einen passenden Vergleichsabstand wählen. Es läge nahe, als solchen einfach den Abstand festzusetzen, wie er gerade bei Betrachtung des Gegenstandes durch das Instrument vorliegt. Allein das wäre unzweckmäßig, da dieser Abstand mit der Tubuslänge variiert. Auch würde dies den Tatsachen wiederum, wie aus dem Fall der Lupe unmittelbar ersichtlich ist, nicht gerecht werden. Betrachtet man nämlich durch eine ans Auge gehaltene Lupe einen Gegenstand und nimmt die Lupe weg, so erscheint der Gegenstand unter demselben Winkel. Als Vergrößerung käme also immer 1 heraus.

Nun kann man aber einen Gegenstand gar nicht in Lupenabstand betrachten, da man auf so kurze Entfernung nicht akkomodieren kann. Um einen tatsächlichen Vergleich zu erhalten, muß man daher den Gegenstand ohne Lupe unbedingt in einen größeren Abstand bringen. Als solchen hat man allgemein die deutliche Sehweite von 25 cm festgesetzt.

Um nun den Vergleich der Vergrößerung von Fernrohr und Mikroskop durchzuführen, wird man z. B. vom Fernrohr ausgehen (Abb. 38) und einen unendlich fernen Gegenstand G abbilden. Es werden dann die parallel auf die Objektivlinse (Brennweite f_1) auffallenden Strahlen zu einem Bild b vereinigt. Nun bringt man einen kleinen Gegenstand g in die Nähe des Objektivs und wählt dessen Größe g und Abstand γ so, daß die Winkel φ bzw. ψ dieselben sind. Damit g sich nun in b abbildet, muß vor

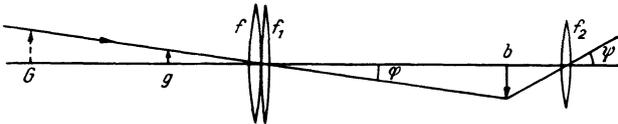


Abb. 38.

die Objektivlinse des Fernrohrs eine passende Linse (Brennweite f) geschaltet werden. f muß gerade gleich γ sein. Denn in diesem Falle treten von g ausgehende Strahlen \parallel aus der vorgesetzten Linse f aus und treffen also auch \parallel auf die Objektivlinse f_1 auf. Das Instrument ist aber so eingestellt, daß \parallel auf f_1 auffallende Strahlen sich zu einem Bilde in b vereinigen.

Wir schreiben nun die Vergrößerung für Fernrohr und Mikroskop v_f und v_m an.

Es ist

$$v_f = \frac{\psi}{\varphi} \approx \frac{\operatorname{tg} \psi}{\operatorname{tg} \varphi}$$

und

$$v_m = \frac{\psi}{\varphi_s} \approx \frac{\operatorname{tg} \psi}{g/s}$$

g_s sei der Gesichtswinkel von bloßem Auge in deutlicher Sehweite s . Das Verhältnis der beiden Vergrößerungen ist

$$\frac{v_m}{v_f} = \frac{\operatorname{tg} \varphi}{g/s} = \frac{b/\beta}{g/s} = \frac{b s}{g \beta}$$

Da $\frac{b}{g} = \frac{\beta}{\gamma}$, so ist auch

$$\frac{v_m}{v_f} = \frac{s}{\gamma}, \quad (1)$$

was unter Berücksichtigung von $\gamma = f$ auch geschrieben werden kann

$$\frac{v_m}{v_f} = \frac{s}{f}. \quad (1a)$$

Diese Beziehung erlaubt eine einfache Deutung. s/f bedeutet nämlich nichts anderes als die normale Vergrößerung v_l einer Lupe der Brennweite f , so daß man hat

$$v_m = v_f \cdot v_l, \quad (2)$$

d. h. aber, die Vergrößerung eines Mikroskops ist gleich der eines Fernrohrs, multipliziert mit der Lupenvergrößerung der Vorsatzlinse, die das Fernrohr zum Mikroskop macht. Hieraus ersieht man auch ohne weiteres, daß bei gleicher Länge ein Mikroskop eine weit stärkere Vergrößerung besitzt als ein Fernrohr.

Gemäß (1) läßt sich nun auch die Vergrößerungsformel des einen Instruments aus der des anderen herleiten. Nehmen wir die einfachere des Fernrohrs als bekannt an $v_f = f_1/f_2$, so haben wir unmittelbar

$$v_m = \frac{f_1 s}{f_2 f}. \quad (3)$$

Indessen will man nicht v_m in Abhängigkeit von der Brennweite f der Vorsatzlinse, sondern von der Brennweite des Objektivs haben. Letztere setzt sich aber aus den beiden Brennweiten f und f_1 zusammen. Bezeichnet man die Brennweite des Objektivs mit F , so gilt

$$\frac{1}{F} = \frac{1}{\gamma} + \frac{1}{\beta} \quad (4)$$

und unter Berücksichtigung, daß $\gamma = f$ und $\beta = f_1$, liefert das die bekannte Formel für die Brechkraft einer Doppellinse

$$\frac{1}{F} = \frac{1}{f} + \frac{1}{f_1}. \quad (4a)$$

Wir setzen nun $1/f$ aus (4a) in (3) ein und erhalten

$$\begin{aligned} v_m &= \frac{f_1 s}{f_2} \left(\frac{1}{F} - \frac{1}{f_1} \right) \\ &= \frac{s(f_1 - F)}{f_2 F}. \end{aligned}$$

$f_1 - F$ bedeutet den Abstand der beiden (einander zugewandten) Brennpunkte vom Objektiv und Okular und wird die optische Tubuslänge genannt. Bezeichnen wir diese mit l , so folgt die bekannte Formel fürs Mikroskop

$$v_m = \frac{s l}{f_2 F}. \tag{5}$$

Aufgabe. Statt vom Fernrohr, das man durch Vorsetzen einer Sammellinse in ein Mikroskop verwandelt, kann man natürlich ebensogut vom Mikroskop ausgehen, dem man eine Zerstreuungslinse vorsetzt. Es gibt nicht mehr Mühe, die Aufgabe auch in dieser Weise durchzuführen¹.

§ 37. KIRCHHOFFSches Strahlungsgesetz.

Manche Beziehungen lassen sich durch zweckmäßig gewählte Gedankenexperimente gewinnen, so diejenige zwischen Emissions- und Absorptionsvermögen eines Temperaturstrahlers.

Emissionsvermögen e = sekundliche Strahlungsenergie, die von 1 cm^2 ausgeht,

Absorptionsvermögen a = absorbiertes Bruchteil der auf irgendeine Fläche auffallenden Strahlung.

Wir denken uns einen Hohlraum in irgendeinem Körper, der sich auf einer konstanten Temperatur T (Abb. 39) befindet. Wir wählen zweckmäßig zylindrische Form mit einem Querschnitt von 1 cm^2 . Die linke Endfläche sei absolut schwarz, reflektiere also nichts, die rechte sei beliebig. Ferner sei die Zylinderwand ideal spiegelnd, absorbiere also nichts. Es stellt sich ein stationärer Zustand ein (PREVOSTSches Strahlungsgleichgewicht), bei dem durch einen beliebigen Querschnitt von links nach rechts und von rechts nach links gleichviel Strahlung hindurchtritt. Dabei rührt alle Strahlung von den beiden Endflächen her, und die Zylinderwand hat nur dafür zu sorgen, daß alle Strah-

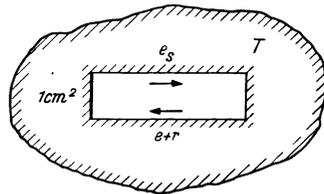


Abb. 39.

¹ Siehe diesbezüglich Helv. Phys. Acta 4, 432 (1931).

lung von der schwarzen Fläche nach der beliebigen gelangt und umgekehrt. Die Strahlung von links besteht nur aus schwarzer Strahlung, diejenige von rechts sowohl aus der aus der rechten Fläche emittierten und der von dieser reflektierten Strahlung. Bezeichnen wir das Emissionsvermögen der schwarzen und der beliebigen Fläche mit e_s bzw. e , ferner die reflektierte Strahlung mit R , so gilt also

$$e_s = e + R. \quad (1)$$

Andererseits wird nun die Strahlung e_s durch die Fläche rechts zum Teil reflektiert, zum Teil absorbiert. Nennen wir den letzteren Anteil A , so gilt also auch

$$e_s = A + R. \quad (2)$$

Aus (1) und (2) folgt

$$e = A. \quad (3)$$

Das Absorptionsvermögen a ist definitionsgemäß

$$a = \frac{A}{e_s}, \quad (4)$$

so daß (3) sich schreibt

$$e = a e_s$$

oder

$$e_s = \frac{e}{a}. \quad (5)$$

Bei der Ableitung war stillschweigend vorausgesetzt, daß die Seitenwand des zylindrischen Hohlraums selbst keine Strahlung aussendet. Im Falle einer ideal reflektierenden Wand ist das aber auch nicht der Fall, wie ebenfalls ein einfaches Gedankenexperiment beweist. Man denke sich einen Hohlraum in einem auf der Temperatur T befindlichen Körper, der überall vollkommen spiegelt. Würde nun die Wand strahlen, so würde sich die Strahlung im Hohlraum fortwährend verstärken, da die Wände ja nichts absorbieren. Ein in den Hohlraum hineingebrachter Körper würde sich demnach von selbst auf eine beliebig hohe Temperatur erwärmen. Dies widerspricht aber dem 2. Hauptsatz der Wärmelehre.

V. Elektrizität und Magnetismus.

A. Magnetostatik.

§ 38. Feld eines Stabmagneten in der 1. und 2. Hauptlage.

1. Hauptlage: Punkt P (Abb. 40) auf der Verbindungslinie der beiden Pole (Achse des Magneten).

Die Kraftwirkung auf den Einheitspol in P entspricht der Differenz der Abstoßung von $+m$ und der Anziehung von $-m$. Das heißt, das resultierende Feld \mathfrak{H} ist gleich der Differenz der

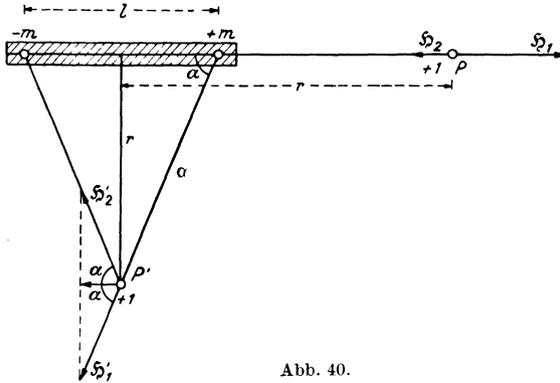


Abb. 40.

Einzelfelder \mathfrak{H}_1 und \mathfrak{H}_2 . Da diese gleiche Richtung haben, können wir algebraisch addieren

$$\mathfrak{H} = \mathfrak{H}_1 - \mathfrak{H}_2.$$

Um beide Pole gleichmäßig zu berücksichtigen, rechnen wir die Abstände von der Mitte zwischen $+m$ und $-m$. Nach dem COULOMBSCHEN Gesetz haben wir nun

$$\mathfrak{H} = \frac{m}{(r - l/2)^2} - \frac{m}{(r + l/2)^2}. \quad (1)$$

Auf gleichen Nenner gebracht, folgt

$$\mathfrak{H} = \frac{2mlr}{(r^2 - l^2/4)^2}.$$

Da ml das magnetische Moment \mathfrak{M} bedeutet, so ist dies

$$\mathfrak{H} = \frac{2\mathfrak{M}r}{(r^2 - l^2/4)^2}. \quad (2)$$

Für größere Abstände $r \gg l/2$ kann der Subtrahend im Nenner weggelassen werden, und das Resultat vereinfacht sich zu

$$\mathfrak{H} = \frac{2\mathfrak{M}}{r^3}. \quad (2a)$$

2. Hauptlage: Punkt P' auf der \perp durch die Magnetmitte gehenden Schnittebene.

Hier sind die beiden von $+m$ und $-m$ herrührenden Felder \mathfrak{H}_1 und \mathfrak{H}_2 gleich groß, nämlich m/a^2 , haben aber verschiedene Richtung. Da beide dieselbe Neigung gegen die Schnittebene besitzen (Abb. 40), so verläuft die Resultierende horizontal. Der waagrecht von P' aus gezeichnete Pfeil bedeutet sowohl die horizontale Komponente von \mathfrak{H}_1 als von \mathfrak{H}_2 . Diese beiden Komponenten, zueinander addiert, geben die resultierende Feldstärke \mathfrak{H}' , also

$$\mathfrak{H}' = \mathfrak{H}_1' \cos \alpha + \mathfrak{H}_2' \cos \alpha$$

oder

$$\mathfrak{H}' = 2 \frac{m}{a^2} \cos \alpha. \quad (3)$$

Nun ist

$$\cos \alpha = \frac{l/2}{a},$$

also

$$\mathfrak{H}' = \frac{ml}{a^3} = \frac{\mathfrak{M}}{a^3}. \quad (4)$$

Für größeren Abstand ist praktisch $r = a$ und somit

$$\mathfrak{H}' = \frac{\mathfrak{M}}{r^3}. \quad (4a)$$

Es folgt das bekannte Resultat, daß in gleichen Abständen $\mathfrak{H} = 2\mathfrak{H}'$. In beiden Lagen nimmt das Feld mit r^3 ab.

Bemerkung. Die Formeln (2) und (4) gelten für kleine Werte von r nicht mehr, da dann keine polartige Wirkung mehr angenommen werden darf.

§ 39. Feld eines Dipols.

Zwei Magnetpole von der Stärke $+m$ und $-m$ oder zwei elektrisch geladene Punkte mit den Ladungen $+e$ und $-e$ befinden sich in einem Abstand l voneinander (Abb. 41).

Frage. Wie groß ist die Kraft K auf einen Einheitspol in irgendeinem Punkte P , d. h. die Feldstärke?

Das Resultat wird in beiden Fällen gleich lauten, da das COULOMBSche Gesetz sowohl für magnetische als elektrische Ladungen gilt. Die Aufgabe bildet eine Verallgemeinerung der in § 38 behandelten. Die Lage des Punktes P ist relativ zum Magneten durch zwei Koordinaten bestimmt. Man wird etwa r_1 und r_2 wählen oder, analog wie in § 38, den Abstand r von der Stabmitte bis zum Punkt P und wird dann etwa noch den Winkel α hinzunehmen.

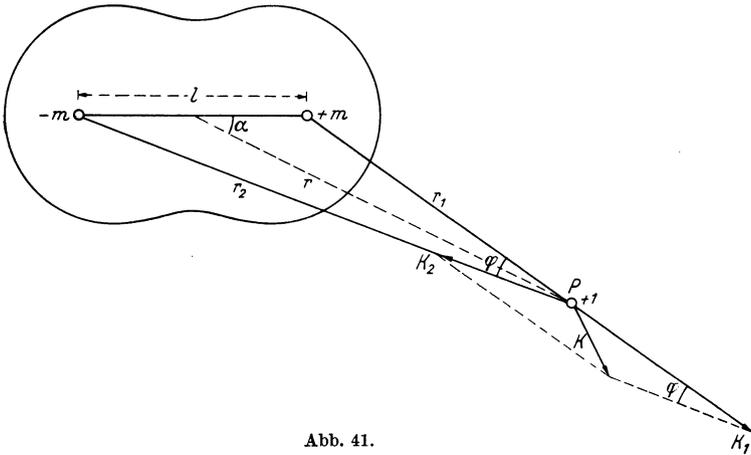


Abb. 41.

Das Vorgehen ist vorgezeichnet: Man setzt die beiden Kräfte K_1 und K_2 zur resultierenden zusammen. Zur Berechnung dient der Kosinussatz

$$K^2 = K_1^2 + K_2^2 - 2K_1K_2 \cos \varphi. \quad (1)$$

Für φ haben wir ebenfalls nach dem Kosinussatz die Beziehung

$$l^2 = r_1^2 + r_2^2 - 2r_1r_2 \cos \varphi. \quad (2)$$

Indem man $\cos \varphi$ aus (2) in (1) einsetzt, erhält man das fertige Resultat. Es ist aber sehr unübersichtlich. Vor allem tritt das Abstandsgesetz nicht explicite hervor. Daher ersetzen wir r_1 und r_2 durch r und α . Hierzu dient wiederum dasselbe Mittel: Der Kosinussatz. Schreiben wir diesen der Reihe nach für die Dreiecke $rr_1l/2$ und $rr_2l/2$ an, so haben wir

$$r_1^2 = \left(r^2 + \frac{l^2}{4} \right) - rl \cos \alpha \quad (3)$$

und

$$r_2^2 = \left(r^2 + \frac{l^2}{4}\right) + rl \cos \alpha, \quad (4)$$

letzteres in Berücksichtigung, daß $\cos(180 - \alpha) = -\cos \alpha$. Ersetzen wir zunächst r_1^2 und r_2^2 in (2) durch die Werte aus (3) und (4), so folgt

$$l^2 = 2 \left(r^2 + \frac{l^2}{4}\right) - 2r_1 r_2 \cos \varphi,$$

d. h. nach $\cos \varphi$ aufgelöst

$$\cos \varphi = \frac{r^2 - \frac{l^2}{4}}{r_1 r_2}. \quad (5)$$

Wenn wir dies in (1) einsetzen und berücksichtigen, daß

$$K_1 = \frac{m}{r_1^2} \quad \text{und} \quad K_2 = \frac{m}{r_2^2}, \quad (6)$$

so finden wir

$$\frac{K^2}{m^2} = \frac{1}{r_1^4} + \frac{1}{r_2^4} - 2 \frac{r^2 - \frac{l^2}{4}}{r_1^3 r_2^3}. \quad (7)$$

Zwecks Ausrechnung wird man auf gleichen Nenner bringen:

$$\frac{K^2}{m^2} = \frac{r_1^4 + r_2^4 - 2r_1 r_2 \left(r^2 - \frac{l^2}{4}\right)}{r_1^4 r_2^4}. \quad (7a)$$

Man beachte, daß r_1^2 und r_2^2 die Form $x - y$ und $x + y$ haben, daß also bei der Addition von $r_1^4 + r_2^4$ die Doppelprodukte wegfallen. Ferner stellt sich auch $r_1 r_2$ dar in der Form $\sqrt{x^2 - y^2}$. Somit hat man

$$\frac{K^2}{m^2} = \frac{2 \left(r^2 + \frac{l^2}{4}\right)^2 + 2r^2 l^2 \cos^2 \alpha - 2 \sqrt{\left(r^2 + \frac{l^2}{4}\right)^2 - r^2 l^2 \cos^2 \alpha} \cdot \left(r^2 - \frac{l^2}{4}\right)}{r_1^4 r_2^4}. \quad (8)$$

Eine Vereinfachung des Ausdrucks kann man nur erwarten, wenn man sich auf größere Abstände r beschränkt. Es sei also $r \gg l/2$. Man wird dementsprechend, um die Näherungsrechnung durchzuführen, das Verhältnis l/r einführen. Das geschieht durch Ausklammern von r^4 im Zähler:

$$\frac{K^2}{m^2} = \frac{2r^4}{r_1^4 r_2^4} \left[\left(1 + \frac{l^2}{4r^2}\right)^2 + \frac{l^2}{r^2} \cos^2 \alpha - \left(1 - \frac{l^2}{4r^2}\right) \sqrt{\left(1 + \frac{l^2}{4r^2}\right)^2 - \frac{l^2}{r^2} \cos^2 \alpha} \right]. \quad (8a)$$

Indem man höhere Potenzen als die zweite von l/r nicht berücksichtigt, ist der Radikand der Wurzel

$$1 + \frac{l^2}{2r^2} - \frac{l^2}{r^2} \cos^2 \alpha$$

und die Wurzel daraus nach einer bekannten Näherungsformel

$$1 + \frac{l^2}{4r^2} - \frac{l^2}{2r^2} \cos^2 \alpha.$$

Dies ist gemäß (8a) mit $\left(1 - \frac{l^2}{4r^2}\right)$ zu multiplizieren, so daß sich unter Weglassung der Glieder mit $(l/r)^4$ ergibt

$$1 - \frac{l^2}{2r^2} \cos^2 \alpha.$$

Die Klammer [] in (8a) wird also

$$1 + \frac{l^2}{2r^2} + \frac{l^2}{r^2} \cos^2 \alpha - \left(1 - \frac{l^2}{2r^2} \cos^2 \alpha\right)$$

oder

$$\frac{l^2}{2r^2} + \frac{3l^2}{2r^2} \cos^2 \alpha = \frac{l^2}{2r^2} (1 + 3 \cos^2 \alpha).$$

Somit wird aus (8a)

$$K^2 = \frac{m^2 l^2 r^2 (1 + 3 \cos^2 \alpha)}{r_1^4 r_2^4}.$$

Da für $r_1 r_2 = r^2$ gesetzt werden darf, und da ml das magnetische Moment \mathfrak{M} bedeutet, so erhalten wir schließlich

$$K = \frac{\mathfrak{M}}{r^3} \sqrt{1 + 3 \cos^2 \alpha}. \quad (9)$$

Die Abhängigkeit des Feldverlaufs von α bei konstantem Abstand r gibt die in Abb. 41 eingezeichnete Kurve wieder. Hier ist der Betrag der Feldstärke auf den Radien abgetragen.

Aufgabe. Eine Vereinfachung der ziemlich umständlichen Rechnung läßt sich erzielen, wenn man den indirekten Weg über das magnetische Potential einschlägt¹. Aber auch bei direkter Berechnung läßt sich der Weg wesentlich abkürzen, wenn man gleich anfangs gewisse Vernachlässigungen einführt, deren Zulässigkeit zum vornherein allerdings nicht sichersteht; nämlich, daß man setzt $\cos \alpha = \frac{r_2 - r_1}{l}$, ferner $\sphericalangle r_2 r = \sphericalangle r_1 r$ und $\cos \frac{\varphi}{2} = 1$.

¹ GRIMSEHL: Lehrbuch der Physik, Bd. 2, Teil 1, S. 91.

Man bilde dann die Komponenten von K_1 und K_2 in Richtung von r . Ihre Differenz sei D . Ferner rechne man die Komponenten von K_1 und K_2 \perp zu r aus. Ihre Summe sei S . Die Resultante K berechnet sich dann aus

$$\sqrt{D^2 + S^2}.$$

§ 40. Magnetisches OHMSches Gesetz.

Der magnetische Induktionslinienfluß (der „Flux“), der durch den Querschnitt q (Abb. 42) eines homogenen Magnetfeldes \mathfrak{H} hindurchtritt, ist

$$\Phi = q\mu\mathfrak{H}. \quad (1)$$

Unter der Zunahme des magnetischen Potentials verstehen wir die Arbeit, die man am magnetischen Einheitspol auf der betreffenden Strecke leisten muß.

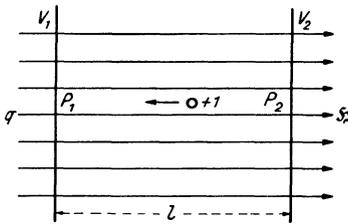


Abb. 42.

Betrachten wir den Flux zwischen irgend zwei Ebenen im Abstand l und bewegen wir einen solchen Pol von P_2 nach P_1 , so ist diese Arbeit bzw. die Potentialzunahme

$$V_1 - V_2 = \mathfrak{H}l. \quad (2)$$

Aus (1) und (2) ergibt sich eine Beziehung zwischen Φ und

$V_1 - V_2$, indem man \mathfrak{H} eliminiert. Man erhält

$$V_1 - V_2 = \Phi \frac{l}{\mu q}. \quad (3)$$

Dies entspricht völlig dem elektrischen OHMSchen Gesetz

$$V_1 - V_2 = JW_e. \quad (4)$$

Dem elektrischen Widerstand $W_e = \frac{l}{\kappa q}$ entspricht der magnetische

$$W_m = \frac{l}{\mu q}. \quad (5)$$

κ bedeutet die elektrische, μ die magnetische Leitfähigkeit (die Permeabilität), $\mathfrak{H}l$ nennt man die magnetische Spannung. Sie ist gleich der Abnahme des Potentials in Richtung \mathfrak{H} bzw. l , d. h.

$$\mathfrak{H}l = -(V_2 - V_1). \quad (6)$$

Oder die Zunahme des Potentials auf dem Wege l beträgt $-\oint l$. Ist \mathfrak{H} längs einer Strecke nicht konstant, d. h. ändert es sich der Größe und der Richtung nach, so berechnet sich die magnetische Spannung V oder gemäß (6) die Abnahme des Potentials als Summe

$$-(V_2 - V_1) = \int_1^2 \mathfrak{H}_x dx. \quad (7)$$

Hierbei bedeutet \mathfrak{H}_x die Komponente des Feldes in der jeweiligen Wegrichtung dx . Erstreckt man das „Linienintegral“ über eine geschlossene Kurve, so erhält man das, was man Randspannung oder Umlaufspannung nennt. Diese ist unabhängig vom gewählten Wege = 0, d. h. man kehrt immer wieder zum selben Potentialwert zurück.

Eine Ausnahme tritt nur ein, wenn der geschlossene Weg um einen elektrischen Strom herum führt. Dann wirkt auf dem Umfang eine Potentialdifferenz von $0,4\pi J$, wenn J in Ampere ausgedrückt wird (siehe Berechnung § 44). Man sagt, der magnetische Kreis besitze eine „magnetomotorische Kraft“. Es ist dies eine Bezeichnung, die man in Analogie zur elektromotorischen Kraft in galvanischen Elementen gewählt hat, die aber nicht sehr glücklich ist, da es sich in beiden Fällen nicht um Kräfte, sondern um Energien handelt.

§ 41. Der Entmagnetisierungsfaktor.

Magnetisierung J und magnetische Induktion \mathfrak{B} sind Funktionen der magnetischen Feldstärke \mathfrak{H} . Für irgendeinen Punkt eines magnetisierten Materials läßt sich J und \mathfrak{B} , falls die Feldstärke am betreffenden Ort des Materials \mathfrak{H} ist, darstellen durch

$$J = \kappa \mathfrak{H} \quad \text{und} \quad \mathfrak{B} = \mu \mathfrak{H}, \quad (I)$$

$\kappa =$ Suszeptibilität, $\mu =$ Permeabilität,

wo κ und μ nur für paramagnetische Substanzen konstant, für ferromagnetische aber selbst wieder Funktionen von \mathfrak{H} sind. Auf alle Fälle ist zur Berechnung von J und \mathfrak{B} an irgendeinem Punkt die Kenntnis der dort herrschenden Feldstärke \mathfrak{H} nötig. Es erhebt sich nun die Frage, wie groß ist das Feld an irgendeinem Punkt im Innern, wenn ein Körper in ein homogenes Magnetfeld \mathfrak{H}_0 hineingebracht wird?

Durch die erzeugte magnetische Induktion (Influenz) wird dieses Feld \mathfrak{H}_0 in charakteristischer Weise verändert, und zwar sowohl außerhalb als innerhalb des Körpers. Die Änderungen sind bedingt 1. durch die Größe von κ und μ , 2. durch die Form des Körpers. Hier soll uns vor allem die Abhängigkeit des innern Feldes \mathfrak{H} von der Form interessieren. Denn die Kenntnis dieses Feldes ist es, die für magnetische Messungen wichtig ist. Ganz allgemein kann man sagen, daß das innere Feld stets kleiner ist als das Feld, in welches das Material gebettet ist. Formell kann man dies so verstehen: an den Enden des Körpers entstehen induzierte Pole (Abb. 43), die nun ihrerseits ein sekundäres Feld \mathfrak{H}_s erzeugen. Das resultierende Feld \mathfrak{H} ist demnach überall

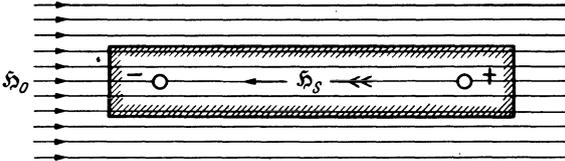


Abb. 43.

die vektorielle Summe von \mathfrak{H}_0 und \mathfrak{H}_s . Im Innern des Materials ist \mathfrak{H}_s von rechts nach links gerichtet, schwächt also \mathfrak{H}_0 , so daß $\mathfrak{H} < \mathfrak{H}_0$. Die Schwächung wird in einem gegebenen Fall um so beträchtlicher sein, je größer die Polstärke, bzw. die Magnetisierung J , so daß man an jeder Stelle des Materials ansetzen kann

$$\mathfrak{H} = \mathfrak{H}_0 - \alpha J. \quad (2)$$

α hat die Bedeutung eines Schwächungskoeffizienten. Man nennt ihn den Entmagnetisierungsfaktor, da das zweite Glied von (2) im Sinne einer Vernichtung der Magnetisierung wirkt. Nimmt man nämlich das induzierende Feld \mathfrak{H}_0 weg, so bleibt nur das entgegengesetzte Feld \mathfrak{H}_s wirksam und zerstört das entstandene Feld \mathfrak{H} , sofern nicht eine innere magnetische Kraft, Koerzitivkraft genannt, für die teilweise Aufrechterhaltung von \mathfrak{H} sorgt (remanenter Magnetismus). Den Grund für die Entmagnetisierungstendenz bilden also die Pole bzw. die freien Magnetismen. Will man die entmagnetisierende Kraft beseitigen, so wird man die Pole genügend weit auseinander oder,

noch besser, ganz zum Verschwinden bringen. Dies kann sehr weitgehend erreicht werden, indem man einen langgestreckten Körper wählt oder dann für einen geschlossenen magnetischen Kreis sorgt. Dieser Fall liegt vor bei einem Eisenring, den man durch eine Stromspule magnetisiert, oder einem Hufeisenmagneten, dessen Pole man durch einen Weicheisenanker schließt.

Man kann daher einen Elektromagneten zu einem Permanentmagneten machen. Das läßt sich leicht mit Hilfe eines Transformators zeigen, dessen magnetischer Schluß sich öffnen läßt. Man magnetisiert den Kern, indem man Gleichstrom durch die eine Spule hindurchschickt. Hernach verbindet man diese Spule z. B. mit einer kleinen Glühlampe. Öffnet man nun rasch den magnetischen Kreis, so leuchtet diese einen Moment auf, da die entstandenen freien Pole die Magnetisierung plötzlich zerstören.

Schreibt man (2) in der Form

$$\alpha = \frac{\mathfrak{H}_0 - \mathfrak{H}}{J_{\mathfrak{k}}}, \quad (2a)$$

so hat man die Definitionsgleichung für den Entmagnetisierungsfaktor α . Zu bedenken ist, daß \mathfrak{H}_0 und \mathfrak{H} im allgemeinen verschiedene Richtung besitzen und daher $\mathfrak{H}_0 - \mathfrak{H}$ vektoriell zu bilden ist. J besitzt andererseits gemäß (1) die Richtung von \mathfrak{H} , so daß α der Quotient aus zwei verschieden gerichteten Vektoren, also ein sogenannter Tensor, ist. α hängt einerseits von der Gestalt des Körpers ab und ist andererseits von Ort zu Ort verschieden. Dieser allgemeine Fall hat indessen keine praktische Bedeutung. Denn einmal läßt sich α nicht berechnen, und dann sind solche Versuchskörper, eben aus diesem Grunde, für magnetische Messungen nicht zu gebrauchen.

Es gibt nun aber besonders ausgezeichnete Fälle, wo α 1. räumlich konstant ist, 2. eine für die betreffende Körperform berechenbare Größe besitzt. Das ist immer dann der Fall, wenn sich ein Körper, der in ein homogenes Feld gebracht wird, auch homogen magnetisiert. In diesem Falle hat dann α die Bedeutung eines für die Form charakteristischen Zahlenfaktors.

Zunächst interessieren hier zwei theoretisch interessante Grenzfälle, die dadurch ausgezeichnet sind, daß der eine den kleinsten, der andere den größten möglichen Wert für α ergibt. Diese sind in Abb. 44 nebeneinander schematisch dargestellt. Wir denken uns ein homogenes Feld \mathfrak{H}_0 hergestellt, wie es z. B. im Innern

einer langen Stromspule entsteht. Nun bringen wir einmal einen Fe-Stab, der sehr lang im Verhältnis zu seiner Dicke sei und einmal ein Fe-Blech, das sehr dünn im Verhältnis zu seinem Durchmesser sei, in der gezeichneten Lage hinein.

Im ersten Fall wird das Feld \mathfrak{H}_0 gar nicht gestört. Die Kraftlinien verlaufen nach wie vor im Innern und außen horizontal, und da die tangentielle Komponente der Feldstärke stets stetig ist, so ist $\mathfrak{H} = \mathfrak{H}_0$. Dies ergibt aber für α gemäß (2a) den Wert 0, wenigstens an allen Stellen, die von den Enden genügend weit entfernt sind. In fast idealer Weise wird dieser Fall realisiert durch einen Eisenstab, den man zu einem geschlossenen kreis-

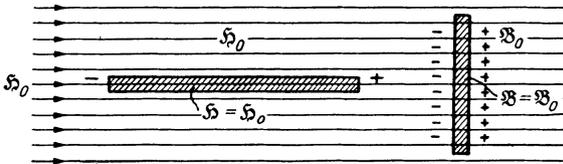


Abb. 44.

förmigen Ring um- und zusammenbiegt und den man gleichmäßig bewickelt.

Im zweiten Fall des „magnetischen Blattes“ wird ebenfalls das Feld außerhalb des Probestückes nicht geändert, wohl aber im Innern im Verhältnis μ reduziert. Denn da die Kraftlinien \perp zur Trennungsfäche verlaufen, ist die Größe \mathfrak{B} stetig. Es ist $\mathfrak{B} = \mathfrak{B}_0$ oder $\mathfrak{H} = \frac{\mathfrak{H}_0}{\mu}$. Infolgedessen wird aus (2a) unter Berücksichtigung von (1) und von $\mu = 1 + 4\pi \kappa$

$$\alpha = \frac{\mathfrak{H}_0 - \frac{\mathfrak{H}_0}{\mu}}{\kappa \frac{\mathfrak{H}_0}{\mu}} = \frac{\mathfrak{H}_0 - \frac{\mathfrak{H}_0}{\mu}}{\kappa \frac{\mathfrak{H}_0}{\mu}} = \frac{\mu - 1}{\kappa} = 4\pi.$$

α kann also innert der Grenzen 0 und 4π variieren.

Es liegt nahe zu fragen, wie stellen sich die Verhältnisse dar, wenn man die Rolle des Fe und der Luft vertauscht? Die in Abb. 44 schraffierten Teile stellen also jetzt den Luftraum in Fe dar. Dann entstehen an denselben Stellen wie früher die freien magnetischen Ladungen. Nur müssen wir die — und + -Zeichen miteinander vertauschen. Ferner bedeutet jetzt \mathfrak{H}_0 das Feld in

Fe und \mathfrak{H} dasjenige in Luft. Im Falle der dünnen „Lufttröhre“ haben wir wieder $\mathfrak{H} = \mathfrak{H}_0$ und damit $\alpha = 0$. Im Falle der dünnen „Luftplatte“ ist wegen der Stetigkeit von \mathfrak{B} : $\mathfrak{H} = \mu \mathfrak{H}_0$, und ferner wegen der umgekehrten Magnetisierung $J = -\kappa \mathfrak{H}_0$. Aus Beziehung (2a) wird also für diesen Fall

$$\alpha = \frac{\mathfrak{H}_0 - \mu \mathfrak{H}}{-\kappa \mathfrak{H}_0} = \frac{1 - \mu}{-\kappa} = 4\pi.$$

Der Fall des Luftkanals und des Luftschlitzes ist aus zwei Gründen bemerkenswert. 1. ersieht man, daß das Feld im ersten Falle gleich dem Feld in Fe, im zweiten gleich der Induktion in Fe ist. Ganz allgemein hängt die magnetische Wirkung in einem Luftraum von dessen Form ab. 2. Der Fall der entgegengesetzten Magnetisierungsrichtung entspricht einem diamagnetischen Verhalten. Man versteht daher, daß ein diamagnetischer Körper genau denselben Entmagnetisierungsfaktor besitzt wie ein ferro- oder paramagnetischer Körper derselben Form. Daß auch in diesem Fall eine entmagnetisierende Wirkung vorhanden ist, ist leicht einzusehen, da nach Wegnahme des induzierenden Feldes auch das diamagnetische Material von selbst wieder in den unmagnetischen Zustand zurückkehrt.

Nun kommen wir zu den praktisch wichtigen Fällen, wo ein Körper beschränkter Größe sich gleichmäßig magnetisiert. Es ist dies eine Aufgabe der mathematischen Physik, und wir geben nur das Resultat wieder: Gleichmäßige Magnetisierung bekommen wir bei einem drehrunden Körper, dessen Profil einen Kegelschnitt aufweist. In erster Linie kommen in Frage das Rotationsellipsoid und der Spezialfall der Kugel. Für die Kugel erhält man den einfachen Ausdruck $\alpha = \frac{4\pi}{3}$. Für das Ellipsoid sind die Ausdrücke wesentlich komplizierter. Es gibt aber Tabellen, die α für jedes Achsenverhältnis angeben.

Zum Schluß führen wir noch die Formeln an, welche \mathfrak{H} , J und \mathfrak{B} in einem Material zu berechnen gestatten, wenn das homogene Feld \mathfrak{H}_0 bekannt ist. Um sie zu finden, setzen wir in (2) den Wert $J = \kappa \mathfrak{H}$ ein und erhalten

$$\mathfrak{H} = \mathfrak{H}_0 - \alpha \kappa \mathfrak{H}$$

und hieraus

$$\mathfrak{H} = \frac{\mathfrak{H}_0}{1 + \alpha \kappa}. \quad (3)$$

Unter Benützung dieses Ausdrucks folgt dann

$$J = \frac{\kappa \mathfrak{D}_0}{1 + \alpha \kappa} \quad (4)$$

und

$$\mathfrak{B} = \frac{\mu \mathfrak{D}_0}{1 + \alpha \kappa}$$

oder durch Ersatz von μ durch κ

$$\mathfrak{B} = \frac{(1 + 4\pi\kappa) \mathfrak{D}_0}{1 + \alpha \kappa}. \quad (5)$$

Genau dieselben Betrachtungen und Formeln gelten nun auch für die Polarisation der Dielektrika. Hier bedeutet dann κ die Elektrisierungskonstante k , J und \mathfrak{B} die Elektrisierungsstärke oder Polarisation \mathfrak{P} bzw. die elektrische Induktion \mathfrak{D} , α die Entelektrisierungskonstante. Besonders wichtig ist hier der Fall der elektrisierten Kugel, da man ihn auf die Polarisation der Moleküle übertragen kann. Bringt man eine elektrisierbare Kugel in ein elektrisches Feld \mathfrak{E}_0 , so herrscht in der Kugel das Feld

$$\mathfrak{E} = \mathfrak{E}_0 - \frac{4\pi}{3} \mathfrak{P}, \quad (6)$$

oder es ist

$$\mathfrak{E} = \frac{\mathfrak{E}_0}{1 + \frac{4\pi}{3} k}. \quad (7)$$

Zweckmäßigerweise führt man statt k die Dielektrizitätskonstante ε ein, indem man die zu $\mu = 1 + 4\pi k$ analoge Beziehung $\varepsilon = 1 + 4\pi k$ benützt. So erhält man den Ausdruck

$$\mathfrak{E} = \frac{3 \mathfrak{E}_0}{2 + \varepsilon}. \quad (8)$$

B. Elektromagnetismus.

§ 42. Magnetische Wirkung stromumflossener ebener Flächen.

Zur Berechnung der magnetischen Stromwirkung wird gewöhnlich das BIOT-SAVARTSche Gesetz in der Form angewendet

$$\Delta K = \frac{m J \Delta l \sin \varphi}{r^2}.$$

(Abb. 45). Hierbei ist J elektromagnetisch gemessen, und der Beitrag der magnetischen Feldstärke, der vom Leiterelement Δl herrührt, ist dementsprechend

$$\Delta \mathfrak{H} = \frac{\Delta K}{m} = \frac{J \Delta l \sin \varphi}{r^2}. \quad (1)$$

Häufig lohnt es sich, den Ausdruck eines Gesetzes auf die Möglichkeit verschiedener Formulierungen hin zu untersuchen. Einmal wird sich einem dann auch der Inhalt unter verschiedenen Gesichtspunkten darbieten, dann aber ist es für die Lösung praktischer Aufgaben wichtig, sich der geeigneten Form zu bedienen. So läßt sich Formel (1) an Hand der Abb. 45 leicht eine andere Fassung geben. Der Übersichtlichkeit wegen ist dort r nicht von der Mitte von Δl , sondern vom unteren Ende aus gezeichnet. Dies ist wegen der differentiellen Kleinheit von Δl ohne weiteres zulässig. Man erkennt, daß $\Delta l \sin \varphi$ die

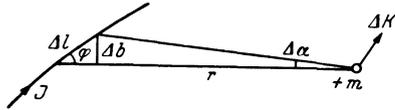


Abb. 45.

Strecke Δb bedeutet. Ferner, daß, wieder wegen der Kleinheit aller mit Δ bezeichneten Größen, Δb praktisch gleich dem Bogenstückchen ist, das zum Winkel $\Delta \alpha$ gehört. Es gilt dann

$$\Delta b = r \Delta \alpha.$$

Infolgedessen geht die Formel (1) über in

$$\Delta \mathfrak{H} = \frac{J \Delta b}{r^2} = \frac{J \Delta \alpha}{r}. \quad (2)$$

In dieser Form kommt ohne weiteres zum Ausdruck, daß das BIOT-SAVARTSche Gesetz ein Abstandsgesetz mit der Potenz 1 ist. Für den Fall, daß alle Δl in derselben Ebene liegen, haben auch alle Beiträge $\Delta \mathfrak{H}$ dieselbe Richtung, und man findet die resultierende Feldstärke durch algebraische Summation:

$$\mathfrak{H} = J \int \frac{\Delta \alpha}{r}. \quad (3)$$

Damit lassen sich auch alle Fälle, die einfach zu berechnen sind, angeben: Es muß $r = f(\alpha)$ bekannt und von einfacher Form sein. So eignet sich jede Funktion $r = k \alpha^n$ zur Berechnung. Wir beschränken uns hier auf die archimedische Spirale

$$r = k \alpha.$$

Dehnt sich das Stück rechts bis ins Unendliche aus, so wird $\alpha = 90^\circ$ und $\mathfrak{H} = \frac{J}{a}$. Für ein beidseitig beliebig ausgedehntes gerades Stück folgt dementsprechend das bekannte Resultat

$$\mathfrak{H} = 2 \frac{J}{a}. \quad (5a)$$

Einfach ist nun die Anwendung auf das regelmäßige Vieleck. Der Beitrag der Seite 1 (Abb. 48) ist

$$2 \frac{J}{a} \sin \alpha.$$

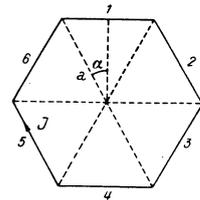


Abb. 48.

a ist hier die Mittelsenkrechte. Also ist für das n -Eck

$$\mathfrak{H} = 2 \frac{J}{a} n \sin \alpha,$$

und da $\alpha = \frac{2\pi}{2n}$, so erhält man schließlich

$$\mathfrak{H} = \frac{2J}{a} n \sin \frac{\pi}{n}. \quad (6)$$

Für $n = \infty$ geht das Vieleck in den Kreis über. Da dann $\sin \frac{\pi}{n} = \frac{\pi}{n}$, so folgt aus (6) die bekannte Formel für den Kreisstrom

$$\mathfrak{H} = \frac{2\pi J}{a}. \quad (7)$$

Aufgabe 1. Man rechne \mathfrak{H} aus für $r = a\alpha + b$ und eine aus vier Stücken ($\alpha_1 = 0^\circ$, $\alpha_2 = 90^\circ$) bestehende Fläche.

Aufgabe 2. Wie groß ist die Feldstärke in der Mitte eines stromumflossenen Rechtecks? Wann ist diese bei gegebenem Umfang (fixer Drahtlänge) ein Minimum?

§ 43. Magnetfeld eines Kreisstroms und eines Solenoides.

Alle Leiterelemente Δl eines vom Strom J durchflossenen Kreisrings (Abb. 49) liefern denselben Beitrag ΔK zur Kraftwirkung K auf einen Magnetpol m , der auf der Achse liegt. Da $\Delta l \perp a$ und somit $\sin(\Delta l, a) = 1$, so ist

$$\Delta K = \Delta l \frac{J m}{a^2}$$

(J elektromagnetisch gemessen). a ist in der Papierebene gezeichnet. Das dazu gehörende Δl steht dann \perp dazu. Da andererseits ΔK wiederum \perp zur Ebene Δl , a wirkt, so liegt es seinerseits auch in der Papierebene und ist $\perp a$ einzuzichnen.

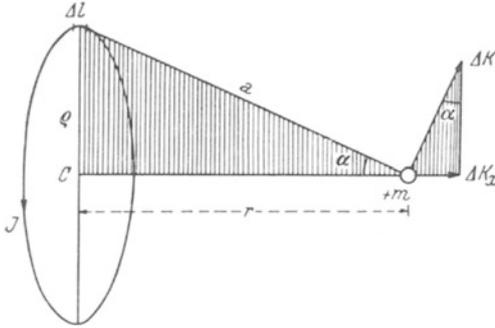


Abb. 49.

Aus Symmetriegründen liegt die Resultante aller Teilkräfte ΔK in der Achse. Nur die Komponenten ΔK_x in dieser Richtung geben also einen Beitrag zur Resultanten. Das heißt, man hat, um K zu finden, nur die algebraische Summe $\sum \Delta K_x$ zu bilden. Nun ist $\Delta K_x = \Delta K \sin \alpha$. Daher, wenn wir die Summierung über den geschlossenen Kreis mit \oint bezeichnen:

$$K = \oint \Delta K \sin \alpha = \oint \Delta l \frac{J m \sin \alpha}{a^2}. \quad (1)$$

Da der Faktor von Δl konstant ist für die Summation, so ist

$$K = \frac{J m \sin \alpha}{a^2} \oint \Delta l = \frac{J m \sin \alpha}{a^2} 2\pi \varrho.$$

Berücksichtigt man, daß $\sin \alpha = \frac{\varrho}{a}$, so ist dies auch

$$K = \frac{J m}{a^3} 2\pi \varrho^2. \quad (2)$$

Für $\pi \varrho^2$ die Kreisfläche f gesetzt, heißt dies, daß die magnetische Feldstärke $\mathfrak{H} = \frac{K}{m}$ den Wert besitzt:

$$\mathfrak{H} = \frac{2fJ}{a^3}. \quad (3)$$

Für große Entfernungen, d. h. für $\varrho \ll a$ darf auch gesetzt werden

$$\mathfrak{H} = \frac{2fJ}{r^3}. \quad (3a)$$

Die Kraftwirkung entspricht also ganz der eines kurzen Magnetstabes in der 1. Hauptlage (siehe § 38). Dort wurde gefunden

$$\mathfrak{H} = \frac{2\mathfrak{M}}{r^3}.$$

Die Stromschlinge ist somit bei größeren Abständen gleichwertig einem Stabmagneten mit dem magnetischen Moment

$$\mathfrak{M} = fJ. \quad (4)$$

Man sieht sofort ein, daß man in der Formel (3) die Grundlage für die Berechnung der magnetischen Wirkung eines Solenoides, d. h. einer Stromspule, gefunden hat. Denn es liegt nahe, eine enggewickelte Spirale als eine Hintereinanderschaltung von Kreisströmen aufzufassen. Die Gesamtwirkung auf irgendeinen Punkt der Achse wäre dann die vektorielle Summe der Wirkung der einzelnen Kreise. Die Addition kann dabei wiederum algebraisch vorgenommen werden, da die Resultante aus Symmetriegründen in der Achse liegt, und daher von jeder Windung nur die Komponente längs der Achse berücksichtigt zu werden braucht. Man hat dann eine Reihe von n Gliedern, wenn n Windungen vorhanden sind, zu summieren.

Diese Aufgabe bildet nun ein hübsches Beispiel dafür, wie unter Umständen die Summierung von vielen Gliedern, deren Zahlenwert sich in kleinen Stufen ändert, in eine bequeme Integration verwandelt werden kann. Dies gelingt immer, wenn man die Reihe einer endlichen Anzahl von stufenweise sich ändernden Gliedern ersetzen kann durch eine unendliche Anzahl von Gliedern differentiell kleinen Unterschieds. Dies ist hier möglich. Ersetzt man beispielsweise eine Spule von n Windungen und der Stromstärke J durch eine gleich lange von $2n$ Windungen mit der Stromstärke $J/2$, so erhält man praktisch dieselbe magnetische Wirkung. Und letzten Endes kann man die Spule überhaupt durch einen metallenen Hohlzylinder, der in allen Teilen gleichmäßig von Strom umflossen ist, ersetzen, wenn man den Gesamtstrom gleich nJ wählt. Den Metallzylinder kann man sich dabei ∞ dünn denken, und von einem Durchmesser, der dem Durchmesser der Spule, von Drahtmitte zu Drahtmitte gerechnet, entspricht. Fließt pro 1 cm Breite der Strom i , so fließt durch ein

dr breites Stück der Strom $i dr$, und dieses übt auf einen Achsenpunkt P (Abb. 50) die Wirkung aus

$$\Delta \mathfrak{H} = \frac{i dr}{a^2} 2\pi \varrho.$$

Die axiale Komponente erhält man durch Multiplikation mit $\sin \alpha = \frac{\varrho}{a}$:

$$\Delta \mathfrak{H}_r = \frac{i dr \varrho}{a^3} 2\pi \varrho = 2\pi \varrho^2 i \frac{dr}{a^3},$$

und die Feldstärke \mathfrak{H} ist die Summe von r_1 bis r_2 , also

$$\mathfrak{H} = \sum \Delta \mathfrak{H}_r = 2\pi \varrho^2 i \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{a^3}. \quad (5)$$

Da $a^2 = r^2 + \varrho^2$, so ist

$$\mathfrak{H} = 2\pi \varrho^2 i \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{(r^2 + \varrho^2)^{3/2}}. \quad (6)$$

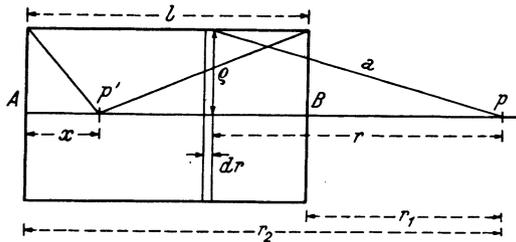


Abb. 50.

Der Wert dieses Integrals findet sich in vielen Sammlungen angegeben¹. Er ist

$$\frac{r}{\varrho^2 \sqrt{r^2 + \varrho^2}}.$$

Die Grenzen r_1 und r_2 eingesetzt, ergibt das Resultat

$$\mathfrak{H} = 2\pi i \left(\frac{r_2}{\sqrt{r_2^2 + \varrho^2}} - \frac{r_1}{\sqrt{r_1^2 + \varrho^2}} \right). \quad (7)$$

¹ Siehe z. B. F. KOHLRAUSCH: Praktische Physik, S. 939. 1935.

Der Gesamtstrom im Zylinder $i \cdot l$ muß nun gleich Jn sein. Es ist also $i = J \cdot \frac{n}{l} = Jn_1$, wenn man mit n_1 die Windungsdichte (Windungszahl pro 1 cm) bezeichnet. Daher

$$\mathfrak{H} = 2\pi J n_1 \left(\frac{r_2}{\sqrt{r_2^2 + \varrho^2}} - \frac{r_1}{\sqrt{r_1^2 + \varrho^2}} \right). \quad (8)$$

Damit können wir auch das Feld im Innern einer Spule berechnen. Für einen Punkt P' zwischen A und B (Abb. 50) kann die Wirkung des links und rechts davon befindlichen Spulenteils einzeln nach (8) angegeben werden. Sei der Abstand $P'A = x$ und demgemäß $P'B = l - x$, so ist für die linke Spulenhälfte zu setzen $r_2 = x$ und $r_1 = 0$, und für die rechte $r_2 = l - x$ und $r_1 = 0$. So findet man in zweimaliger Anwendung der Formel (8) für die Summe $\mathfrak{H}_x + \mathfrak{H}_{l-x}$

$$\mathfrak{H} = 2\pi J n_1 \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + \varrho^2}} + \frac{l-x}{\sqrt{(l-x)^2 + \varrho^2}} \right). \quad (9)$$

Das Feld am Ende der Spule ($x = 0$ bzw. $x = l$) ergibt sich zu

$$\mathfrak{H}_e = \frac{2\pi J n_1 l}{\sqrt{l^2 + \varrho^2}} = \frac{2\pi J n_1}{\sqrt{1 + (\varrho/l)^2}}. \quad (10)$$

Für die Mitte der Spule $x = \frac{l}{2}$ findet man

$$\mathfrak{H}_m = \frac{2\pi J n_1 l}{\sqrt{l^2/4 + \varrho^2}} = \frac{2\pi J n_1}{\sqrt{1/4 + (\varrho/l)^2}}. \quad (11)$$

Ist ϱ/l sehr klein (lange Spule), so erhält man den bekannten Ausdruck

$$\mathfrak{H}_m = 4\pi J n_1. \quad (12)$$

Formeln (8) und (9) gestatten eine einfache Interpretation.

Benützt man die Bezeichnungen der Abb. 51, so können beide Ausdrücke dargestellt werden durch

$$\mathfrak{H} = 2\pi J n_1 (\cos \alpha_2 \mp \cos \alpha_1), \quad (8a, 9a)$$

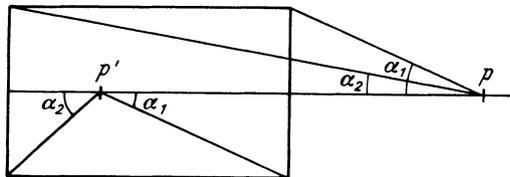


Abb. 51.

wo das obere Vorzeichen für P , das untere für P' gilt. In dieser Form erlaubt die Formel auch eine einfache Abschätzung des Fehlers, den man gegebenenfalls durch Anwendung der zumeist gebrauchten Formel (12) begeht.

§ 44. Feld eines Elektromagneten.

Um diese Aufgabe behandeln zu können, muß folgende Eigenschaft der Stromspulen bekannt sein: Die Arbeit, die ein Magnetpol entgegen dem magnetischen Felde einer solchen Spule zu leisten hat, hängt nur von der Stromstärke und der Windungszahl ab. Bewegt man einen Einheitspol durch eine Stromspule hindurch und schließt den Weg außen herum, indem man zum Anfangspunkt zurückkehrt, so beträgt die geleistete Arbeit

$$A = 0,4 \pi JN \text{ Joule/Polstärke.} \quad (1)$$

JN nennt man die Zahl der Amperewindungen. Weder Form und Größe der gewählten Umlaufskurve, noch die Umgebung der Stromwindungen (ob Luft oder Eisen) spielen eine Rolle. Dieser Satz läßt sich auf Grund der Tatsache, daß alle magnetischen

Kraftlinien geschlossen um einen Stromleiter herumlaufen, folgendermaßen beweisen.

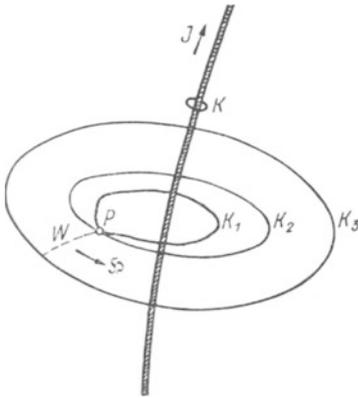


Abb. 52.

1. Zunächst ist einzusehen, daß man von einem gegebenen Punkt P ausgehend (Abb. 52), stets dieselbe Arbeit leisten muß, auf welcher Kurve man auch einen Magnetpol um einen Leiter herumführt. Denn wäre auf Kurve K_1 die Arbeit größer als auf Kurve K_2 , so ließe sich ein Perpetuum mobile konstruieren. Man würde dann auf Kurve K_2 Arbeit gegen das

Feld leisten und auf Kurve K_1 Arbeit vom Feld leisten lassen, indem man diese Kurve in umgekehrter Richtung durchlaufen läßt.

2. Auch auf zwei Kurven, z. B. K_1 und K_3 , die keinen gemeinsamen Punkt besitzen, muß sich aus demselben Grund dieselbe Arbeit ergeben. Denn man kann von jeder Kurve zur andern

ohne Arbeitsleistung gelangen, indem man dafür sorgt, daß der Verbindungsweg W die Kraftlinien senkrecht durchschneidet.

3. Um den Arbeitswert selbst zu berechnen, wählt man eine Kreiskurve K , die den Leiter eng umschließt. Nimmt man zunächst an, der Leiter sei sehr dünn und damit der Kreis sehr klein, dann rührt die magnetische Wirkung praktisch ganz nur von dem kurzen Leiterstück her, das vom Kreise gerade umschlossen wird. Welches nun auch die Form des Leiters sei, dieses winzige Stückchen darf immer als geradlinig angesehen werden¹. Somit dürfen wir die Formel anwenden für die Arbeit an einem Einheitspol, der um einen unendlich langen geraden Leiter auf einem Kreis herumbewegt wird. Diese lautet aber

$$A_1 = 0,4 \pi J.$$

4. Diese Formel gilt nach 1 und 2 für eine beliebig weite Kurve, die den dünnen Stromleiter umschließt. Sie gilt daher auch für einen massiven Stromleiter, den man sich aus einem Bündel solcher dünnen Stromleiter zusammengesetzt denken kann.

5. Umschließt die Kurve statt eines Stromleiters deren N , so ist die Arbeit das N -fache für einen Strom, und wir erhalten allgemein

$$A = 0,4 \pi J N.$$

A bedeutet die bei einem Umlauf am Einheitspol geleistete Arbeit, also die Zunahme des magnetischen Potentials bei einem Umgang. Dies stellt aber gleichzeitig auch die Arbeit dar, die das magnetische Feld bei umgekehrtem Verlauf hergibt, d. h. den Wert von $\oint \mathfrak{H}_x dx$ (siehe § 40). Wir haben daher die allgemeine Beziehung

$$\oint \mathfrak{H}_x dx = 0,4 \pi J N. \quad (2)$$

Damit sind wir nun imstande, folgende Aufgabe zu lösen: Wie groß ist das Feld eines Elektromagneten in Funktion des Polabstandes? Wir wählen als Beispiel einen Ringmagneten mit Flachpolen, auf den N Stromwindungen aufgebracht sind

¹ Weder der Leiterteil, der noch als geradlinig angesehen werden kann, noch der Durchmesser des umschließenden Kreises sind im mathematischen Sinne ∞ klein. Sie müssen immer noch so groß angenommen werden, daß die strukturelle Beschaffenheit des Leiters und der Elektrizität keine Rolle spielt. Hingegen ist Voraussetzung, daß der Durchmesser des Kreises gegenüber dem Leiterelement klein sei.

(Abb. 53). Infolge des Luftschlitzes (Breite b) tritt eine beträchtliche Streuung des Induktionsflusses ein. Der von der Stromspule ausgehende Flux tritt gegen die Pole hin immer mehr und mehr seitlich zum Eisenring heraus in die Luft.

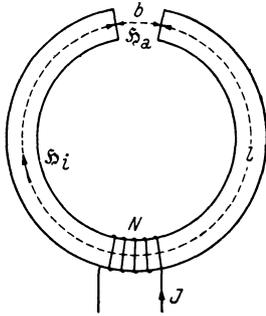


Abb. 53.

Das magnetische Feld im Ring \mathfrak{H}_i ist daher in der Spulenmitte am größten und nimmt gegen die Polenden hin allmählich ab. Ist die Spule einigermaßen lang, so beträgt das Feld in der Mitte, unabhängig vom Polabstand, $0,4 \pi J n$, wo n die Windungszahl pro Zentimeter bedeutet. Auch auf der Luftstrecke wird die Feldstärke \mathfrak{H}_a um so weniger konstant sein, je größer b ist. Betrachten wir die Verhältnisse auf der Mittellinie des Ringes und nehmen an, daß das Feld annähernd längs dieser Linie verläuft, so wäre in Anwendung von (2) zu berechnen

$$\int_0^l \mathfrak{H}_i dx + \int_0^b \mathfrak{H}_a dx = 0,4 \pi J N. \quad (3)$$

Da der Verlauf von \mathfrak{H}_i und \mathfrak{H}_a nicht bekannt ist, sind wir auf die Verwendung von Mittelwerten angewiesen. Bezeichnen wir diese nun ihrerseits mit $\bar{\mathfrak{H}}_i$ und $\bar{\mathfrak{H}}_a$, so hätten wir

$$\bar{\mathfrak{H}}_i l + \bar{\mathfrak{H}}_a b = 0,4 \pi J N. \quad (4)$$

Dabei gilt stets

$$\bar{\mathfrak{H}}_i = \frac{\bar{\mathfrak{H}}_a}{\mu}.$$

Dies in (4) eingesetzt, ergibt, wenn man nach $\bar{\mathfrak{H}}_a$ auflöst,

$$\bar{\mathfrak{H}}_a = \frac{0,4 \pi J N}{\frac{l}{\mu} + b}. \quad (5)$$

Die Abhängigkeit von der Schlitzbreite b erhalten wir, wenn wir den unveränderlichen Umfang $L = l + b$ einführen.

Es wird dann aus (5)

$$\bar{\mathfrak{H}}_a = \frac{0,4 \pi J N \mu}{L + (\mu - 1) b}. \quad (5a)$$

Hieraus ersieht man zunächst, daß $\bar{\mathfrak{H}}_a$ um so größer ist, je kleiner der Luftschlitz b . Die Feldstärke, die man in einem unendlich

schmalen Schlitz messen würde, ergibt den größten Wert. Denn setzen wir $b = 0$, so folgt

$$\mathfrak{H}'_a = \frac{0,4 \pi J N \mu}{L}. \quad (6)$$

Für das Verhältnis von $\mathfrak{H}_a/\mathfrak{H}'_a$ erhält man

$$\frac{\mathfrak{H}_a}{\mathfrak{H}'_a} = \frac{L}{L + (\mu - 1)b}. \quad (7)$$

Nimmt man als Beispiel $L = 100$ cm, $b = 1$ cm, $\mu = 3000$, so beträgt der Quotient schon nurmehr $\frac{1}{31}$, d. h. aber, das Feld besitzt nur noch 3% des Maximalwertes.

§ 45. Energieaufnahme einer Stromspule.

Die Energieaufnahme irgendeines elektrischen Verbrauchers, also auch einer Stromspule, ist, wenn man den Strom J (Ampere) und die Spannung V (Volt) als konstant voraussetzt, gegeben durch das Produkt JVt . Falls J und V variabel sind und nur während einer kleinen Zeit dt als konstant betrachtet werden dürfen, ist jedoch der allgemeine Ausdruck anzusetzen

$$E = \int_0^t J V dt.$$

Diese Energie findet sich nun zum Teil wieder im magnetischen Felde (E_m), das in der Spule erzeugt wird, zum Teil in der Stromwärme (E_w) im Leitungsdraht.

Aufgabe. Es sollen diese beiden Teile berechnet werden.

Für den Spezialfall, daß es sich um ein langgestrecktes Solenoid handelt, könnte man folgendermaßen vorgehen. 1. Zur Berechnung von E_m geht man davon aus, daß man für das homogene Feld in der Spule ansetzen kann $\mathfrak{H} = 0,4 \pi J \frac{N}{l}$ (§ 43), ferner, daß die Energiedichte (Energie pro 1 cm^3) $\frac{\mu \mathfrak{H}^2}{8\pi}$ beträgt. E_m ergibt sich dann als Produkt Energiedichte \times Volumen. Der so erhaltene Ausdruck ließe sich dann schließlich noch wesentlich vereinfachen, wenn man die Formel für die Selbstinduktion L als bekannt voraussetzt (§ 58). 2. Zur Berechnung von E_w hat man unmittelbar das JOULESche Gesetz, wonach ist $E_w = \int_0^t w J^2 dt$ ($w =$ Leitungswiderstand).

Die Aufgabe läßt sich aber einfacher und dabei zugleich für den allgemeinen Fall behandeln, wenn man vom OHMSchen Gesetz ausgeht. Bei dessen Anwendung hat man allerdings zu bedenken, daß irgendeiner angelegten Spannung, sofern diese variabel ist, immer eine induzierte Gegenspannung entgegenwirkt. Es ist also ähnlich wie beim Betrieb eines Elektromotors oder einer galvanischen Zelle, wo der angelegten Spannung eine Polarisationsspannung entgegen wirkt.

Man muß daher schreiben

$$V - V' = wJ, \quad (1)$$

wo V' die induzierte Gegenspannung bedeutet. Nun ist

$$V' = L \frac{dJ}{dt}, \quad (2)$$

so daß aus (1) wird

$$V = L \frac{dJ}{dt} + wJ. \quad (3)$$

Hieraus soll nun eine Energiegleichung gebildet werden, welche die obengenannten Ausdrücke, insbesondere $\int_0^t J V dt$, enthält. Man erhält sie unmittelbar, indem man (3) mit $J dt$ erweitert. Es ist

$$\int_0^t J V dt = \int_0^t L J dJ + \int_0^t w J^2 dt. \quad (4)$$

Ohne Kenntnis des Stromverlaufs läßt sich der 1. und 3. Teil dieses Ausdrucks nicht angeben, wohl aber der 2., welcher der magnetischen Energie entspricht. Nehmen wir an, daß zu Beginn ($t = 0$) der Strom J auch 0 sei, so ist die magnetische Energie

$$E_m = \int_0^t L J dJ = L \int_0^t J dJ = L \frac{J_t^2}{2}, \quad (5)$$

wo J_t den Stromwert nach Ablauf der Zeit t bedeutet. Wir können jetzt schreiben

$$\int_0^t J V dt = L \frac{J_t^2}{2} + \int_0^t w J^2 dt. \quad (4a)$$

Man sieht, daß der Anteil E_m , so lange auch Strom fließen möge, nicht beliebig weit anwachsen kann. Seine Größe ist einfach

durch den Stromwert zur Zeit t bestimmt. Es ist auch gleichgültig, wie dieser Stromwert erreicht wird, so daß (5) überhaupt den allgemeinen Ausdruck für die magnetische Energie einer Stromspule für irgendeinen gegebenen Stromwert J darstellt. Anders die JOULESche Wärme E_w . Ihr Betrag nimmt fortwährend zu und wächst mit der Zeit ins Unendliche, und damit nimmt natürlich auch der gesamte Energieverbrauch E unbegrenzt zu.

Als Beispiel möge uns der Fall eines sinusförmigen Wechselstromes dienen. Dann ist, wenn wir eine beliebige, aber ganze Zahl von Perioden ins Auge fassen, der Energieverbrauch

$$E = J_e V_e \cos \varphi \cdot t,$$

wo J_e , V_e die Effektivwerte und φ die Phasenverschiebung bedeuten. Ferner ist Ausdruck (5), da J nach jeder Periode wieder 0 ist, ebenfalls gleich 0, und aus E wird, wenn man w als vom Strom (d. h. der Stromwärme) unabhängig annimmt,

$$E_w = w \int_0^t J^2 dt = w J_e^2 \cdot t.$$

Also folgt nach (4a)

$$J_e V_e \cos \varphi = w J_e^2. \quad (6)$$

Diese Beziehung kann man zur Bestimmung von $\cos \varphi$ bzw. φ benützen. Es ist, nach $\cos \varphi$ aufgelöst, $\cos \varphi = \frac{w J_e}{V_e}$, und da $\frac{V_e}{J_e}$ den Wechselstromwiderstand W bedeutet,

$$\cos \varphi = \frac{w}{W}.$$

Aufgabe 1. Man rechne die Ausdrücke der Formel (4a) für den Fall aus, daß man den Strom einer Batterie durch eine Stromspule schließe. Dann wächst der Strom von 0 auf den stationären Endwert J_0 an nach der Exponentialformel $J = J_0(1 - e^{-\frac{wt}{L}})$. Der Einfachheit halber wird man den innern Widerstand der Batterie als vernachlässigbar klein annehmen.

Aufgabe 2. Man rechne den Spannungs- bzw. Stromverlauf in einem Schwingungskreis aus unter Benützung des Energiesatzes, wonach die Summe aus der Ladungsenergie des Konden-

sators $\frac{e^2}{2C}$ und der Stromenergie der Spule $\frac{LJ^2}{2}$ stets gleich groß bleiben muß. Unter Berücksichtigung, daß $J = \frac{de}{dt}$ ist, kommt man durch eine einfache Integration zum Ziel.

C. Elektrostatik.

§ 46. Die Potentialwaage.

Diese besteht aus einem Plattenkondensator (Abb. 54), dessen obere geerdete Platte an einem Waagebalken hängt und deren untere isoliert und fest montiert ist und auf ein Potential V aufgeladen wird.

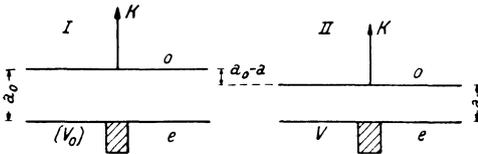


Abb. 54.

Die Waage befindet sich bei ungeladenem Kondensator im Gleichgewicht. Nach Aufladung der unteren Platte entsteht eine Anziehungskraft K , die nun durch Auflegen eines Übergewichtes gemessen wird. Die Beziehung zwischen K und V wird gewöhnlich auf eine der beiden folgenden Arten abgeleitet.

Nach der ersten greift man auf die Formel für den elektrostatischen Druck zurück (siehe § 49). Dies ist die mechanische Kraft, die auf jede elektrisch geladene Oberfläche in Richtung des elektrischen Feldes wirkt und die $2\pi\sigma^2$ pro 1 cm^2 Oberfläche beträgt, wobei σ die Ladungsdichte, d. h. die Ladung pro 1 cm^2 bedeutet. Besitzt eine Kondensatorplatte die Oberfläche $f\text{ cm}^2$, so ist daher die gesamte Anziehungskraft $K = 2\pi\sigma^2 f$. Da nun die Ladung e eines Kondensators, von der Randwirkung abgesehen (diese soll in der Folge überhaupt außer Betracht gelassen werden), gleichmäßig verteilt ist, so ist $\sigma = \frac{e}{f}$ und

$$K = \frac{2\pi e^2}{f}. \quad (\text{I})$$

Um V an Stelle von e einzuführen, sind die Beziehungen zu benutzen

$$e = CV \quad (C = \text{Kapazität}) \quad \text{und} \quad C = \frac{f}{4\pi a} \quad (a = \text{Plattenabstand}),$$

und man erhält dann die bekannte THOMSONSche Formel

$$K = \frac{f V^2}{8 \pi a^2}. \quad (2)$$

Nach der zweiten Art benützt man das Prinzip der virtuellen Arbeiten, was auf die Verwendung des Energiesatzes hinausläuft.

Statt dessen kann aber auch die gewöhnliche Anwendung des Energieprinzips zum Ziele führen. Wir wollen diesen Weg hier beschreiten, zumal er auch für die spätere Behandlung des Quadrantelektrometers richtunggebend sein wird.

Wir schreiben zu diesem Zweck die Energie eines Plattenkondensators in der Lage der Abb. 54 I an und lassen nun den Kondensator Energie abgeben, indem wir die elektrische Anziehungskraft durch eine gleich große nach oben gerichtete Kraft überwinden und durch Herabbewegen der oberen Platte auf den Abstand a (Abb. 54 II) Arbeit leisten lassen. Hierbei bleibt die Ladung der unteren Platte unverändert. Die Ladungsenergie verringert sich in diesem Falle einzig und allein durch die Vergrößerung der Kapazität. Die mechanische Arbeit ist nun allerdings nur berechenbar, wenn K als Funktion des Plattenabstandes bekannt ist. Hier müssen wir als bekannt voraussetzen, daß gemäß (1) K für jeden Abstand gleich groß ist (eine Voraussetzung, die wir bei Anwendung des Prinzips der virtuellen Arbeiten nicht machen müssen!). Wir sind dann in der Lage anzusetzen: Abnahme der Ladungsenergie = geleistete Arbeit oder

$$\frac{e^2}{2 C_0} - \frac{e^2}{2 C} = K(a_0 - a). \quad (3)$$

Da

$$C_0 = \frac{f}{4 \pi a_0} \quad \text{und} \quad C = \frac{f}{4 \pi a},$$

so folgt hieraus

$$\frac{e^2}{2} \left(\frac{4 \pi a_0}{f} - \frac{4 \pi a}{f} \right) = K(a_0 - a),$$

d. h.

$$\frac{2 \pi e^2}{f} (a_0 - a) = K(a_0 - a),$$

oder wieder wie oben

$$K = \frac{2 \pi e^2}{f}. \quad (1)$$

Man könnte versucht sein, das Energieprinzip auch noch in anderer Weise anzuwenden. Daß hierbei aber Vorsicht geboten

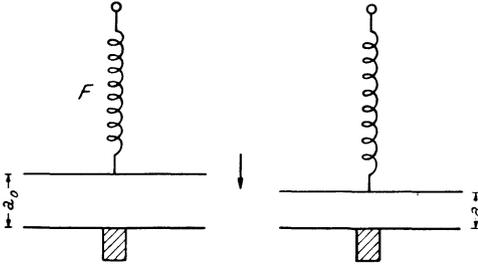


Abb. 55.

ist, möge folgendes Beispiel zeigen. Man denke sich die obere Platte etwa gewichtslos und an einer Feder F aufgehängt (Abb. 55). Der Abstand betrage bei ungespannter Feder a_0 . Nun lade man die untere Platte auf, indem man zunächst die obere

Platte festhält. Hierauf lasse man die obere Platte los. Dem neuen Gleichgewichtszustand entspreche der kleinere Abstand a .

Die Ladungsenergie nimmt dabei wiederum von $\frac{e^2}{2C_0}$ auf $\frac{e^2}{2C}$ ab.

Setzt man jetzt fälschlicherweise: Abnahme der Ladungsenergie = gewonnene elastische Energie bei der Verlängerung der Feder um $a_0 - a$, so erhält man für K das Doppelte des richtigen Wertes!

Aufgabe. Man weise den begangenen Fehler nach und stelle ihn richtig. Eventuell lese man hierzu die Ausführungen des § 47.

§ 47. Das Quadrant-Elektrometer.

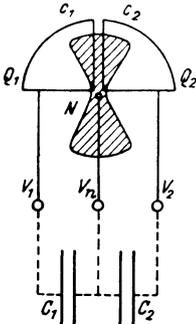


Abb. 56.

In Abb. 56 sind je die Hälfte der Quadrantenpaare Q_1 und Q_2 und die Elektrometernadel N , letztere in der Nullage, angedeutet

Frage. Um welchen Winkel α dreht sich die Nadel, wenn an den Zuleitungsklemmen die Potentiale V_1, V_2 und V_n angelegt werden?

Wir können ähnlich vorgehen, wie bei der Potentialwaage. Wir halten erst die Nadel in der Ruhelage fest und erteilen den Quadranten Q_1, Q_2 und der Nadel N die den Potentialen V_1, V_2, V_n entsprechenden Ladungen. Nun lassen wir die Nadel los. Dann verwandelt sich ein Teil der Ladungsenergie infolge der Drehung der Nadel (da diese Geschwindigkeit annimmt und der Faden sich tordiert) in mechanische Energie. Hierauf läßt sich nun der Energiesatz anwenden.

Wir betrachten zunächst ganz allgemein die Änderung der Ladungsenergie eines Kondensators. Vergrößern wir die Kapazität c um Δc bei unveränderter Ladung, so beträgt die Zunahme der Ladungsenergie

$$\Delta E = \frac{e^2}{2(c + \Delta c)} - \frac{e^2}{2c} = \frac{-e^2 \Delta c}{2c(c + \Delta c)},$$

oder, da $\frac{e}{c}$ das Potential V vor der Änderung und $\frac{e}{c + \Delta c}$ dasjenige V' nach der Änderung bedeutet, so ist die Energiezunahme

$$\Delta E = \frac{-VV'}{2} \Delta c. \quad (1)$$

Man erhält also ΔE als Funktion eines mittleren Potentials $\bar{V} = \sqrt{VV'}$, d. h.

$$\Delta E = \frac{-\bar{V}^2}{2} \Delta c. \quad (1a)$$

Nun soll man aber die Ablenkung α des Quadrantelektrometers nicht für solche mittleren Potentiale, sondern für die Potentiale, wie sie bei der abgelenkten Nadel vorhanden sind, berechnen. Dies bedeutet natürlich eine Komplikation, die sich aber durch einen Kunstgriff spielend beheben läßt. Man schaltet einfach einen beliebig großen Kondensator parallel zum Meßgerät! Be trägt die Kapazität desselben C und die des letzteren c , so gilt dann analog wie vorhin

$$\Delta E = \frac{e^2}{2(c + \Delta c + C)} - \frac{e^2}{2(c + C)} = \frac{-e^2 \Delta c}{2(c + C)(c + \Delta c + C)}.$$

Da nun $\Delta c \ll c + C$, so sind V und V' praktisch gleich groß, und man hat

$$\Delta E = \frac{-V^2}{2} \Delta c, \quad (2)$$

wo V jetzt sowohl das Potential vor als nach Drehung der Nadel bedeutet.

Ähnlich gehen wir nun auch beim Quadrantelektrometer vor, indem wir uns an die Klemmen zwei Kondensatoren angeschaltet denken (gestrichelt gezeichnet). Bezeichnen wir die Kapazität zwischen Q_1 und dem dort hineinreichenden Teil der Nadel mit

c_1 und die zwischen Q_2 und Nadel mit c_2 , ferner die entsprechenden Kapazitätsvergrößerungen bei Drehung der Nadel mit Δc_1 und Δc_2 , so ist die Zunahme der Ladungsenergie bei einer Drehung der Nadel aus der Ruhelage gegeben durch

$$\Delta E_l = -\frac{(V_n - V_1)^2}{2} \Delta c_1 - \frac{(V_n - V_2)^2}{2} \Delta c_2. \quad (3)$$

Nun gilt es noch, die Zunahme der mechanischen Energie bei abgelenkter Nadel zu berechnen. Diese sei ΔE_m . Haben wir diese berechnet, können wir dann die algebraische Summe aller Energieänderungen = 0 setzen. Das heißt

$$\Delta E_l + \Delta E_m = 0. \quad (4)$$

Nun ist zu bedenken, daß die Nadel nach Loslassen aus der Ruhelage schwingt. Es entsteht also sowohl elastische Energie des verdrehten Fadens als auch kinetische Energie der schwingenden Nadel. Es wird bei der Bewegung im allgemeinen auch Reibungsarbeit geleistet werden. Es steht einem aber frei, den Fall bei ungedämpfter Nadel zu behandeln. Dann schwingt die Nadel durch die neue Gleichgewichtslage (α) hindurch, um nach Erreichung des doppelten Ausschlages 2α zurückzuschwingen. In diesem Moment besteht nun die ganze mechanische Energie nur aus Torsionsenergie. Diese läßt sich aber leicht angeben, so daß man Gleichung (4) am besten für diese Nadelposition anwendet. Bezeichnen wir das Direktionsmoment des Aufhängefadens mit D , so stellt sich die elastische Energie bei Verdrillung um den Winkel 2α dar durch $D/2 \cdot (2\alpha)^2$. Wir haben also

$$\Delta E_m = \frac{D}{2} (2\alpha)^2. \quad (5)$$

Nun muß auch ΔE_l für den Winkel 2α angeschrieben werden. Wenn wir die Kapazitätsänderungen Δc_1 und Δc_2 proportional dem Winkel ansetzen dürfen und annehmen, daß die Nadel sich nach rechts (Abb. 56) bewege, so haben wir zunächst

$$\Delta c_1 = -k(2\alpha) \quad \text{und} \quad \Delta c_2 = +k(2\alpha) \quad (6)$$

und damit

$$\Delta E_l = -\frac{(V_n - V_1)^2}{2} (-2\alpha k) - \frac{(V_n - V_2)^2}{2} (2\alpha k). \quad (7)$$

Durch Gleichsetzen von $\mathcal{A}E_m$ (5) und $-\mathcal{A}E_l$ (7) folgt

$$\frac{(V_n - V_1)^2}{2} (-2\alpha k) + \frac{(V_n - V_2)^2}{2} (2\alpha k) = \frac{D}{2} (2\alpha)^2. \quad (8)$$

Dies ist die gesuchte Beziehung zwischen α und den Potentialen, der wir nun, nach α aufgelöst, verschiedene Formen geben können. Einmal hat man

$$\alpha = \frac{k}{2D} [(V_n - V_2)^2 - (V_n - V_1)^2]. \quad (9)$$

Dann läßt sich dies aber auch weiter entwickeln, so daß man erhält

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{k}{2D} (-2V_n V_2 + V_2^2 + 2V_n V_1 - V_1^2) \\ &= \frac{k}{2D} [2V_n (V_1 - V_2) - (V_1^2 - V_2^2)] \end{aligned}$$

und schließlich

$$\alpha = \frac{k}{D} (V_1 - V_2) \left(V_n - \frac{V_1 + V_2}{2} \right). \quad (10)$$

Dies ist die bekannte MAXWELLSche Formel.

Auf die verschiedenen Schaltungsmöglichkeiten treten wir nicht ein. Hingegen sei darauf hingewiesen, daß man große Empfindlichkeit bei großer Apparatkonstanten k/D erhält. Das heißt: Einmal muß die Kapazitätsänderung (k) bei Nadeldrehung groß und dann das Direktionsmoment (D) klein sein (feiner Aufhängefaden).

Aufgabe. Die Behandlung des Quadrantelektrometers kann auch in der Weise geschehen, daß man die Ladungen, wie oben, bei festgehaltener Nadel zuführt, daß man aber vor dem Loslassen derselben dem Aufhängefaden erst eine solche Torsion erteilt, wie sie der neuen Gleichgewichtslage entspricht. Dies geschehe durch Drehen des oberen Fadenendes um den Winkel $-\alpha$. Nun bringt man die Nadel samt dem tordierten Faden langsam in die Endlage, d. h. man drehe oberes und unteres Ende (mit der Nadel) um den Winkel α . Bei diesem Vorgang nimmt die Ladungsenergie ab, und am oberen Fadenende wirkt ein konstantes Kraftmoment, das bei der Drehung entsprechende Arbeit leistet.

§ 48. Potentialfeld einer geladenen Kugel.

Das Potential im Abstand x von einem geladenen Punkt hat den Wert $V = \frac{e}{x}$. Das Potential eines ausgedehnten geladenen Konduktors findet man daher, indem man sich die Oberfläche in lauter kleinste Flächenstückchen zerlegt denkt. Befindet sich auf einem die Ladung Δe und ist der Abstand von dieser Ladung und dem Punkte P gleich x , so ist das Potential durch die algebraische Summe aller $\Delta e/x$ zu finden:

$$V = \sum \frac{\Delta e}{x}. \quad (I)$$

Hierbei ist im allgemeinen Δe und x variabel. Die Aufgabe ist gewöhnlich dadurch kompliziert, daß die Ladungsverteilung auf der Oberfläche zunächst unbekannt ist. Besonders einfach ist nun der Fall einer geladenen Kugel, da die Ladungsdichte überall konstant ist und auch die variable Größe x sich einfach darstellen läßt. Es sei daher das Potential außerhalb und innerhalb einer geladenen Kugelfläche berechnet.

Um die Summation (I) besonders einfach zu gestalten, wird man die Einteilung der Flächenelemente zweckmäßig vornehmen. Man wird also von vorneherein etwa alle Elemente, welche dasselbe x besitzen, zusammenfassen. So wird man z. B. die Kugel-

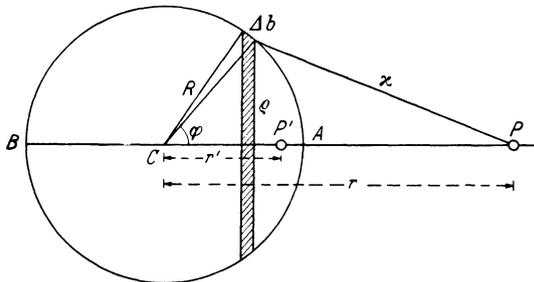


Abb. 57.

oberfläche in lauter schmale Riemen zerlegen, indem man Schnitte \perp zu r ausführt. Ein solcher Riemen von der Breite Δb ist in Abb. 57 gezeichnet. Der Umfang des Riemen beträgt $2\pi r$. Das Flächenstück ist also

$$\Delta f = 2\pi r \cdot \Delta b;$$

da aber

$$q = R \sin \varphi \quad \text{und} \quad \Delta b = R \cdot \Delta \varphi,$$

so ist auch

$$\Delta f = 2\pi R^2 \sin \varphi \cdot \Delta \varphi. \quad (2)$$

Bedeutet σ die Ladungsdichte, so sitzt auf Δf die Ladung $\sigma \cdot \Delta f$, und der Beitrag, den der Riemen für das Potential an P liefert, ist demnach

$$\Delta V = \frac{2\pi R^2 \sigma \sin \varphi \cdot \Delta \varphi}{x}. \quad (3)$$

Der konstante Faktor $2\pi R^2 \sigma$ bedeutet offenbar die halbe Kugelladung $e/2$, da $2\pi R^2$ die Oberfläche einer Halbkugel darstellt. Also ist einfach

$$\Delta V = \frac{e \sin \varphi \cdot \Delta \varphi}{2x}. \quad (3a)$$

Zur Summierung muß nun entweder φ durch x oder umgekehrt x durch φ ausgedrückt werden. Nach dem Kosinussatz ist

$$x^2 = R^2 + r^2 - 2Rr \cos \varphi. \quad (4)$$

Es sieht zunächst so aus, als ob der Ersatz von x durch φ einfacher wäre. Ein sicheres Urteil können wir aber erst fällen, wenn wir auch die zweite Variante uns ansehen. φ kann allerdings nicht direkt aus (4) in (3a) eingesetzt werden. Dies ist nur möglich, wenn wir (4) erst differenzieren. Dies liefert, da R und r Konstanten sind, den einfachen Ausdruck

$$x \Delta x = Rr \sin \varphi \cdot \Delta \varphi. \quad (4a)$$

Man sieht zu seiner Überraschung, daß sich tatsächlich (3a) unter Verwendung von (4a) ganz bedeutend vereinfacht, da hier wie dort der Ausdruck $\frac{\sin \varphi \cdot \Delta \varphi}{x}$ erscheint. Man erhält unmittelbar:

$$\Delta V = \frac{e}{2} \frac{\Delta x}{Rr} \quad (5)$$

und damit

$$V = \frac{e}{2Rr} \sum \Delta x. \quad (5a)$$

Nun ist der kleinste Wert, den x annehmen kann, $AP = r - R$ und der größte $BP = r + R$. Die $\sum \Delta x$ oder die Zunahme von x beträgt also $BP - AP = 2R$, oder für V kommt

$$V = \frac{e}{r}. \quad (6)$$

Auch das Potential im Innern der Kugelfläche findet man durch dieselbe Formel (5a). Für einen Punkt P' (Abb. 57) wächst der

Abstand von der Kugelfläche von $P'A$ bis $P'B$. Also ist jetzt die Zunahme von x , d. h. $\sum \Delta x = P'B - P'A$. Bezeichnen wir den Abstand $P'C$ mit r' , so ist $P'B = r' + R$ und $P'A = R - r'$ und daher $\sum \Delta x = 2r'$. Dies ergibt für V nach Formel (5a), in der statt r ebenfalls r' zu schreiben ist,

$$V = \frac{e}{R}. \quad (7)$$

Der Abstand $P'C$, d. h. r' spielt also keine Rolle, und das Potential besitzt den festen Wert e/R , wie er auch auf der Oberfläche vorhanden ist.

Bemerkung. Diese Resultate hätte man auch unmittelbar aus dem GAUSSschen Satz gewinnen können. Da von einer mit e geladenen Kugel $4\pi e$ Kraftlinien ausgehen, ganz ebenso wie von einem mit e geladenen Punkt, und da in beiden Fällen aus Symmetriegründen der Feldverlauf punktsymmetrisch aussehen muß, so ist auch das Kraftfeld und damit auch das Potentialfeld (außerhalb der geladenen Fläche) dasselbe. Das heißt, das Potential in der Nähe einer Kugel ist so, wie wenn man es mit einem geladenen Punkt zu tun hätte, also: $V = \frac{e}{r}$. Ferner ist das Innere einer geladenen Kugel feldfrei, also: $\frac{\Delta V}{\Delta r} = 0$, oder $V = \text{const.}$, d. h. gleich wie an der Oberfläche.

§ 49. Feld in der Nähe einer elektrisch geladenen ebenen Fläche und elektrostatischer Druck.

Wir wollen das Feld direkt, d. h. ohne Zuhilfenahme des Potentialbegriffs, berechnen. Wir denken uns als Idealfall eine

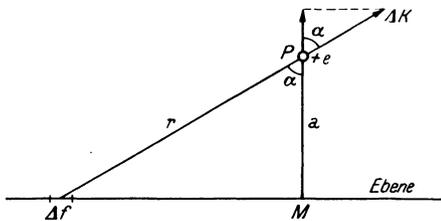


Abb. 58.

unendlich ausgedehnte Ebene mit gleichmäßig verteilter elektrischer Ladung. Auf jedem Quadratcentimeter befinden sich σ elektrostatische Einheiten. Wie groß ist die abstoßende Kraft K , die eine Ladung $+e$ im

Punkt P (Abb. 58) durch die geladene Ebene erfährt; bzw. wie groß ist die Stärke des elektrischen Feldes K/e im Punkt P ?

Die Kraftwirkung eines kleinen Flächenstückchens Δf in der Ebene auf $+e$ ist nach dem COULOMBSCHEN Gesetz unmittelbar anzugeben. Es ist, da die Ladung auf Δf gleich $\sigma \Delta f$,

$$\Delta K = \frac{\sigma \Delta f e}{r^2}. \quad (1)$$

Wir haben also die Ebene in lauter kleinste Flächenstückchen zu zerschneiden, dann die einzelnen ΔK auszurechnen und vektoriell zusammenzuzählen. Nun sieht man aber, daß aus Symmetriegründen die Resultante \perp zur Ebene stehen muß. Es genügt also, alle vertikalen Komponenten von ΔK zu bilden und diese algebraisch zu addieren (alle horizontalen Komponenten zusammen sind ja 0). Also haben wir zu berechnen

$$K = \sum \Delta K \cos \alpha$$

oder nach (1)

$$K = \sum \frac{\sigma \Delta f e \cos \alpha}{r^2}. \quad (2)$$

Man wird eine solche Summation dadurch so einfach als möglich gestalten wollen, daß man die Zerschneidung der Ebene in Flächenstückchen zweckmäßig vornimmt. Zweifelsohne wäre da eine Zerteilung in kreisförmige Zonen mit dem Mittelpunkt in M angezeigt, da jedes ringförmige Flächenstück überall denselben Abstand r von P aufweist. Indessen kann man auch erst einmal prüfen, ob sich der Ausdruck (2) nicht auf eine einfachere Form bringen läßt. Hier bedeutet offenbar $\Delta f \cos \alpha$ eine Flächenprojektion. Man erinnert sich an die Beziehung zwischen den verschiedenen Schnittflächen eines Zylinders. Schneidet man einen solchen einmal \perp und einmal unter einem Winkel α durch, dann verhält sich die erste Schnittfläche f_0 zur zweiten f_α wie $\frac{f_0}{f_\alpha} = \cos \alpha$. Denken wir uns nun einen Kreiskegel mit der Spitze in P (Abb. 59),

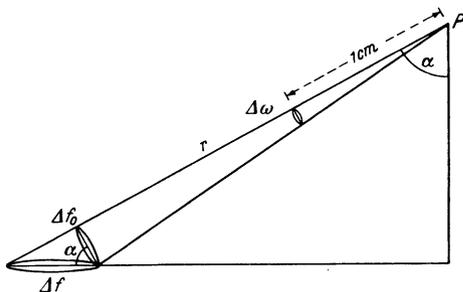


Abb. 59.

Schneidet man einen solchen einmal \perp und einmal unter einem Winkel α durch, dann verhält sich die erste Schnittfläche f_0 zur zweiten f_α wie $\frac{f_0}{f_\alpha} = \cos \alpha$. Denken wir uns nun einen Kreiskegel mit der Spitze in P (Abb. 59),

und wählen wir die Öffnung differentiell klein, so daß wir praktisch einen unendlich dünnen Zylinder haben, so ist

$$\Delta f_0 = \Delta f \cos \alpha,$$

(2) wird dann

$$K = \sum \frac{\sigma e \Delta f_0}{r^2}. \quad (2a)$$

$\frac{\Delta f_0}{r^2}$ hat aber eine einfache Bedeutung. Schneidet man den Kegel im Abstand 1 cm von $P \perp$ durch, so verhält sich dieses Flächenstück

$$\Delta f_0' : \Delta f_0 = 1^2 : r^2,$$

d. h.

$$\frac{\Delta f_0'}{1^2} = \frac{\Delta f}{r^2}.$$

Nun nennt man dies den räumlichen Winkel (Bezeichnung: $\Delta \omega$). Er wird gemessen durch das Flächenstück $\Delta f_0'$, das der Kegel aus der Einheitskugel herauschneidet. (2a) gewinnt also die einfache Gestalt

$$K = \sum \sigma e \Delta \omega. \quad (3)$$

Da σ und e für alle Winkelemente gleich groß sind, ist dies auch

$$K = \sigma e \sum \Delta \omega. \quad (3a)$$

Diese Beziehung gilt natürlich für beliebige Form der Flächenstückchen Δf . Wenn wir nun zu allen Flächenstückchen der Ebene Δf die entsprechenden räumlichen Winkel bilden und diese gemäß (3a) summieren, so erhalten wir offenbar den räumlichen Winkel einer Halbkugel. Dieser ist 2π , und für die Kraft K finden wir somit

$$K = 2\pi \sigma e, \quad (4)$$

d. h. die Feldstärke ist

$$\mathfrak{E} = \frac{K}{e} = 2\pi \sigma, \quad (4a)$$

unabhängig vom Abstand von der Ebene und gleich groß nach unten und oben.

Dies ist auf den ersten Blick ein überraschendes Resultat; denn die Feldstärke in nächster Nähe jeder geladenen Fläche beträgt bekanntlich $4\pi \sigma$. Es muß also auch im Falle einer dünnen Metallscheibe die Feldstärke $4\pi \sigma$ und nicht $2\pi \sigma$ sein. Die Erklärung liegt darin, daß jede Metallscheibe, sie mag so dünn sein wie sie will (von monomolekularen Schichten abgesehen), zwei

geladene Flächen aufweist: eine obere und eine untere. Für jede gilt unser Resultat. Und das, was man tatsächlich beobachtet, ist ein Summationseffekt. Wie aus Abb. 60 unmittelbar ersichtlich, wirkt rechts der Fläche *II* die Feldstärke $\mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2 = 4\pi\sigma$ und links von *I* $-\mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_2 = -4\pi\sigma$. Im Zwischenraum ist das resultierende Feld $\mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_2 = 0$, wie es sein muß, da jeder geladene Körper im Innern feldfrei ist. Diese Überlegung liefert auch leicht den Wert für den elektrostatischen Druck. Die Fläche *II* (Abb. 60) wird durch die eigene Ladung nicht nach außen getrieben, da ihr Feld nach beiden Seiten gleich stark zieht, wohl aber durch die Ladung von *I*. Es ist also die Kraftwirkung auf 1 cm^2 gegeben durch die Ladung von 1 cm^2 auf *II* (σ), multipliziert mit dem von *I* herrührenden Feld $2\pi\sigma$, also

$$D = 2\pi\sigma^2. \tag{5}$$

Das Resultat gilt zunächst nur für eine geladene Metallplatte. Es läßt sich aber leicht für beliebige Flächen verallgemeinern. Zunächst ist einzusehen, daß je näher ein Punkt *P* sich an der Ebene befindet (Abb. 59), um so weniger die entfernteren Teile der Ebene einen Beitrag zum Feld an diesem Punkt liefern. Ja, wenn *P* genügend nahe an der Fläche liegt, so rührt die Wirkung praktisch nur vom gerade gegenüber liegenden Flächenstückchen her, und dieses kann für irgendeine Fläche als eben betrachtet werden. Denken wir uns also ein ebenes Flächenstückchen Δf auf einer beliebigen Fläche (Abb. 61), so erzeugt dieses nach innen und außen ein Feld von der Größe $2\pi\sigma$. Die ganze übrige Fläche liefert an der Stelle von Δf auch ein Feld \mathcal{E}_F , und zwar gerade von der gleichen Größe, da ja das resultierende Feld außen an Δf eben $4\pi\sigma$ beträgt. Daher $\mathcal{E} + \mathcal{E}_F = 4\pi\sigma$, wobei $\mathcal{E} = 2\pi\sigma$, d. h. $\mathcal{E}_F = 2\pi\sigma$. Nach innen hebt sich \mathcal{E} und \mathcal{E}_F auf. Die Kraftwirkung auf Δf ist nun:

$$\text{Ladung auf } \Delta f \times \mathcal{E} \text{ also } \sigma \Delta f \cdot 2\pi\sigma,$$

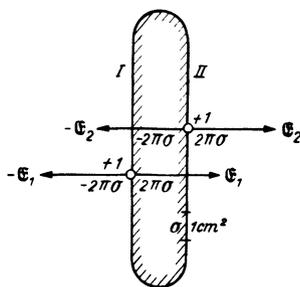


Abb. 60.

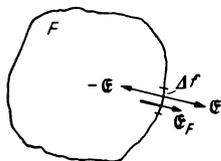


Abb. 61.

d. h. es ist

$$\Delta K = 2\pi\sigma^2 \cdot \Delta f \quad (6)$$

und der elektrostatische Druck

$$D = \frac{\Delta K}{\Delta f} = 2\pi\sigma^2.$$

Die Verhältnisse bei einem geladenen Kondensator stellen sich ebenfalls sehr einfach dar. Jetzt sind die beiden Flächen ungleichnamig geladen. Die Felder von I und II heben sich nach außen hin auf (Abb. 62), und das ganze Kraftfeld beschränkt sich auf den Zwischenraum mit dem resultierenden Feld $2\mathfrak{E} = 4\pi\sigma$. Die Anziehungskraft zwischen den Platten schreibt sich unmittelbar an: Ladung einer Platte \times Feld einer Platte

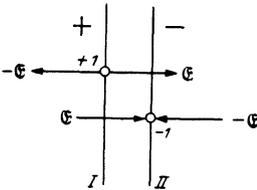


Abb. 62.

$$K = f\sigma \cdot 2\pi\sigma = 2\pi\sigma^2 f. \quad (7)$$

§ 50. Kraftwirkung einer geladenen Kugel.

1. Auf einen Punkt P_i im Innern der Kugel. Zwei dünne Kegel (Abb. 63), die von P_i diametral ausgehen, schneiden zwei Flächenelemente f_1 und f_2 aus der Kugel heraus. Man zeige, daß die Kraftwirkungen, die von f_1 und f_2 ausgehen, sich im Punkt P_i aufheben.

Beide Kegel der Länge a_1 bzw. a_2 haben dieselbe Öffnung mit dem räumlichen Winkel ω (siehe § 49). Die von f_1 und f_2 herrührenden Felder sind

$$\mathfrak{E}_1 = \sigma \frac{f_1}{a_1^2} \quad \text{und} \quad \mathfrak{E}_2 = \sigma \frac{f_2}{a_2^2}.$$

Man hat nun zu zeigen, daß

$$\frac{f_1}{a_1^2} = \frac{f_2}{a_2^2}. \quad (I)$$

Falls die Flächen f_1 und f_2 den Kegel \perp abschnitten, so würde sowohl f_1/a_1^2 als f_2/a_2^2 einfach den räumlichen Winkel ω bedeuten, und da dieser nach beiden Seiten gleich groß ist, so wäre der Beweis für $\mathfrak{E}_1 = \mathfrak{E}_2$ schon geliefert. Nun schließt aber f_1 mit der Normalen n einen gewissen Winkel ein. Da $n \perp a_1$ und $f_1 \perp$ Radius, so ist dieser Winkel gleich groß wie α_1 . Nach einem bekannten

Satze der Geometrie ist der senkrechte Kegelschnitt $f_1' = f_1 \cos \alpha_1$. Auf der anderen Seite ist aber ebenfalls der senkrechte Kegelschnitt $f_2' = f_2 \cos \alpha_2$. Also kann man für die Ausdrücke in (I) schreiben

$$\frac{f_1'}{a_1^2 \cos \alpha_1} \quad \text{bzw.} \quad \frac{f_2'}{a_2^2 \cos \alpha_2},$$

d. h. aber

$$\frac{\omega}{\cos \alpha_1} \quad \text{und} \quad \frac{\omega}{\cos \alpha_2}.$$

Wie aus Abb. 63 hervorgeht, sind aber α_1 und α_2 als demselben Zentriwinkel zugehörig gleich groß. Daher folgt, daß die Beziehung (I) zu Recht besteht.

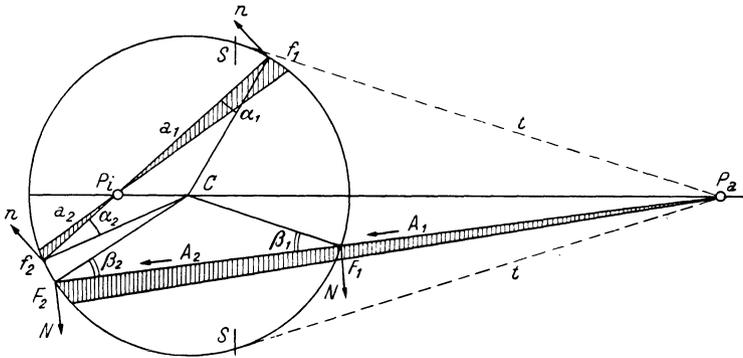


Abb. 63.

2. Auf einen Punkt P_a außerhalb der Kugel. Man wird nun versuchen, auch für diesen Fall dieselbe Betrachtung durchzuführen. Wir lassen durch einen dünnen von P_a ausgehenden Kegel die Flächenstückchen F_1 und F_2 aus der Kugel herauschneiden. Die von F_1 und F_2 herrührenden Felder \mathfrak{E}_1 und \mathfrak{E}_2 sind jetzt gleichgerichtet. Sie betragen wieder

$$\mathfrak{E}_1 = \sigma \frac{F_1}{A_1^2} \quad \text{und} \quad \mathfrak{E}_2 = \sigma \frac{F_2}{A_2^2}.$$

In der Tat läßt sich auch hier beweisen, daß $\mathfrak{E}_1 = \mathfrak{E}_2$. Denn es ist zunächst, ähnlich wie oben, $N \perp A_1$ und $F_1 \perp$ Radius, so daß der von F_1 und N eingeschlossene Winkel $= \beta_1$ ist. Ferner ergibt sich für den senkrechten Kegelschnitt bei F_1 die Fläche

$$F_1' = F_1 \cos \beta_1,$$

so daß

$$\mathfrak{G}_1 = \sigma \frac{F_1'}{A_1^2 \cos \beta_1}$$

oder, da wieder $\frac{F_1'}{A_1^2} = \omega$, so ist ebenfalls

$$\mathfrak{G}_1 = \frac{\sigma \omega}{\cos \beta_1} \quad \text{und} \quad \mathfrak{G}_2 = \frac{\sigma \omega}{\cos \beta_2}.$$

Da nun wiederum gemäß Zeichnung $\beta_2 = \beta_1$, so folgt tatsächlich

$$\mathfrak{G}_1 = \mathfrak{G}_2.$$

Das Feld, das die Kugel im Punkt P_a erzeugt, hat aus Symmetriegründen die Richtung CP_a . Den Beitrag, den die Flächenstückchen F_1 und F_2 zur Resultanten liefern, erhält man daher, wenn man die Projektion von \mathfrak{G}_1 und \mathfrak{G}_2 auf die Richtung CP_a bildet. Es sind daher nicht nur \mathfrak{G}_1 und \mathfrak{G}_2 , sondern auch ihre Beiträge gleich groß, da \mathfrak{G}_1 und \mathfrak{G}_2 ja dieselbe Richtung besitzen.

Alle Elementarkegel, die man von P_a aus gegen die Kugel zielen lassen kann, sind in dem größeren Kegel enthalten, den man erhält, wenn man die Tangenten tt an die Kugel zieht. Der Berührungskreis dieses Kegels, d. h. ein Schnitt bei SS durch die Kugel, teilt diese also in zwei ungleiche Hälften. Die linke enthält alle Flächenstücke mit dem Index 2, die rechte die mit dem Index 1. Da paarweise die Wirkung zweier entsprechender Flächenstücke 1 und 2 gleich groß ist, so folgt daraus, daß die Kugelhälfte links von SS und die rechts davon die gleiche Kraftwirkung in P_a hervorbringen. Je näher der Punkt P_a an die Kugel heranrückt, um so kleiner ist die zugewandte Hälfte, und sie schrumpft auf ein ebenes Miniaturstück zusammen bei aller kleinstem Abstand. Das heißt, das gegenüberstehende Flächenelement besitzt eine ebenso große Wirkung wie die ganze übrige Kugelfläche zusammen genommen. Es läßt sich beweisen, daß dieses Resultat auch für eine beliebig gestaltete, geladene Fläche Gültigkeit besitzt (siehe § 49).

Verlauf des Kraftfeldes an der Oberfläche. Eine ähnliche Betrachtung läßt sich auch für P_i durchführen. Jede Schnittfläche durch P_i teilt die Kugel in zwei Hälften gleicher Wirkung. Wählen wir also beispielsweise wieder einen Schnitt $\perp CP_i$ und lassen P_i an die Oberfläche heranrücken, so erhalten wir wiederum das

Resultat, daß die Hälfte der Wirkung vom angrenzenden ebenen Flächenelement stammen muß. Für den Sprung, den die Feldstärke zwischen innen und außen macht, bekommt man daher folgende Erklärung:

Auf P_a wirkt von Δf die Feldstärke $\mathcal{E}/2$, von der übrigen Fläche f ebenfalls $\mathcal{E}/2$, also in Summa $\mathcal{E}/2 + \mathcal{E}/2 = \mathcal{E}$.

Auf P_i wirken dieselben beiden Feldstärken, hingegen hat die von Δf herrührende umgekehrte Richtung, also ist die Resultierende $\mathcal{E}/2 - \mathcal{E}/2 = 0$.

Soweit die Theorie. In Wirklichkeit sind die Verhältnisse aus zwei Gründen etwas anders.

1. Die Kraftwirkung in P_a ist unter der Voraussetzung berechnet, daß ein geladener Punkt in P_a die elektrische Verteilung auf der Kugel nicht durch Influenz störe. Das ist aber immer der Fall. So ist die abstoßende Wirkung einer geladenen Kugel auf einen + Einheitspol stets kleiner als die anziehende auf einen - Einheitspol im selben Abstand. Man kann aber die Störung beliebig klein machen, indem man eine genügend kleine Ladung in P_a anbringt. Immerhin ist man hierin doch beschränkt, da die kleinste zur Verfügung stehende Ladung das Elektron ist. Influenzstörungen lassen sich daher nicht vermeiden, wenn man in nächste Nähe der Oberfläche, d. h. bis auf molekulare Abmessungen herangeht.

2. Die Oberfläche ist in Wirklichkeit keine mathematische Kugelfläche. Sie ist im Kleinsten rau und porös. Das Kraftfeld, das ein eindringendes Elektron durchläuft, nimmt daher in unregelmäßiger Weise und allmählich auf 0 ab und zeigt sogar lebhaft zeitliche Schwankungen infolge der thermischen Bewegungen der Atome. Die Verhältnisse in dieser Übergangsschicht werden von obiger Darstellung nicht erfaßt.

§ 51. Direkte Berechnung des Feldes einer geladenen Kugel.

Der indirekte Weg besteht darin, daß man erst das Potential in der Nähe der Kugel ausrechnet (wie dies in § 48 ausgeführt wurde) und dann bildet $\frac{dV}{dr}$. Man erhält, da $V = \frac{e}{r}$, sofort

$$\mathcal{E} = - \frac{dV}{dr} = \frac{e}{r^2}.$$

Der Weg über das Potential ist trotz des Umweges der einfachste. Grund: Potentiale berechnen sich, da sie Skalare sind, in der Form einer algebraischen Summe, während andererseits bei der direkten Berechnung von Kraftfeldern eine vektorielle Summierung notwendig ist.

Aufgabe. Man zeige, daß selbst für den einfachen Fall einer geladenen Kugel die direkte Berechnung des Feldes umständlicher ausfällt als unter Verwendung des Potentials.

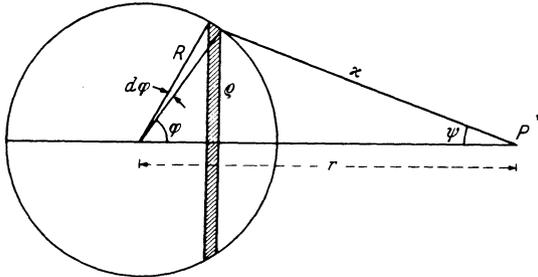


Abb. 64.

Man wird, wie bei der Berechnung des Potentials, alle Flächenelemente zusammenfassen, die denselben Abstand x vom gewählten Punkt P besitzen (Abb. 64). Während die schmale Kugelzone gemäß § 48 den Beitrag

$$\Delta V = \frac{e}{2} \frac{\sin \varphi \Delta \varphi}{x}$$

an das Potential V liefert, ist der Beitrag für \mathfrak{E} entsprechend

$$\Delta \mathfrak{E} = \frac{e}{2} \frac{\sin \varphi \Delta \varphi}{x^2}. \quad (1)$$

Man ist nun hier in der glücklichen Lage zu wissen, daß aus Symmetriegründen die Resultierende aller Beiträge $\Delta \mathfrak{E}$ in die Richtung r fällt. Es genügt daher, die Beiträge $\Delta \mathfrak{E}$ in Richtung r auszurechnen und dann diese algebraisch zu addieren, um das resultierende Feld \mathfrak{E} zu finden. Indem wir den Winkel ψ einführen, bekommen wir also

$$\mathfrak{E} = \frac{e}{2} \int_{r-R}^{r+R} \frac{\sin \varphi \Delta \varphi}{x^2} \cos \psi. \quad (2)$$

Wie im Falle der Potentialrechnung (§ 48) kann man auch hier $\sin \varphi d\varphi$ durch x ersetzen und erhält dann

$$\mathfrak{E} = \frac{e}{2 R r} \int_{r-R}^{r+R} \frac{dx \cos \psi}{x}. \quad (3)$$

Während man aber dort sofort integrieren konnte ($\int dx!$), muß man hier erst ψ durch x ausdrücken. Unter Verwendung des Kosinussatzes hat man

$$\cos \psi = \frac{x^2 + r^2 - R^2}{2 x r}. \quad (4)$$

Der Integrand in (3) wird daher

$$\frac{\cos \psi}{x} = \frac{1}{2 r} + \frac{r^2 - R^2}{2 r x^2}, \quad (5)$$

und man erhält

$$\mathfrak{E} = \frac{e}{4 r^2 R} \left[\int dx + (r^2 - R^2) \int \frac{dx}{x^2} \right]_{r-R}^{r+R}. \quad (6)$$

Der Inhalt der [] ergibt

$$\begin{aligned} \left[x + \frac{R^2 - r^2}{x} \right]_{r-R}^{r+R} &= r + R - (r - R) + \frac{R^2 - r^2}{r + R} - \frac{R^2 - r^2}{r - R} \\ &= 2R + (R - r) + (R + r) = 4R. \end{aligned}$$

Als Resultat findet man schließlich

$$\mathfrak{E} = \frac{e}{4 r^2 R} \cdot 4R = \frac{e}{r^2}. \quad (7)$$

Aufgabe. Man versuche, die Rechnung etwas eleganter zu gestalten, indem man in (3) substituiert $x \cos \psi = y$ und den Ausdruck $\int \frac{dx \cdot y}{x^2} = -\int y \cdot d\left(\frac{1}{x}\right)$ partiell integriert. Man wird dann finden, daß das erste Integral = 0 ist, d. h. verschwindet und das zweite $\int \frac{dx}{x}$ sich auf eine sehr einfache Form (ähnlich wie bei der Potentialrechnung in § 48) reduzieren läßt.

§ 52. Kapazitätsänderung eines Kondensators durch eine geerdete Umhüllung.

Bevor wir unser spezielles Problem behandeln, wird es zweckmäßig sein, erst die allgemeinen Grundlagen zu entwickeln. Ein geladener Körper, der sich allein im Raume befindet, besitzt nur

freie Ladung. Befinden sich aber in der Nachbarschaft andere geladene oder ungeladene Körper, so tritt zu seiner freien Ladung noch eine Influenzladung, die der Natur nach gebunden ist, hinzu. Man erkennt den Zusammenhang am besten an Hand eines einfachen Beispiels.

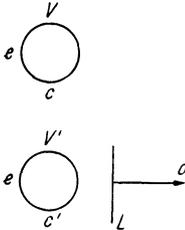


Abb. 65.

Nähert man einem geladenen Körper (Abb. 65) einen geerdeten Leiter L , so bleibt die Ladung zwar unverändert, das Potential sinkt aber von V auf V' . Die Kapazität c verwandelt sich also in die größere c' , wobei die Beziehung gilt

$$e = cV = c'V'. \quad (1)$$

Will man daher bei der Annäherung von L das Potential V auf seinem Wert behalten, so muß man dem Körper entsprechend Ladung zuführen. Die Influenzladung werde also bei konstantem Potential V zugeführt. Sie wird um so größer sein müssen, je größer V selbst ist. Man kann für sie daher ansetzen $c_{12}V$. Hierbei bedeutet c_{12} den Influenzierungsfaktor, der von der Gestalt der beteiligten Leiter, ihrer Größe und ihrem Abstand abhängt. Man hat somit den Ansatz: die neue Elektrizitätsmenge des geladenen Körpers nach Annäherung von L , d. h. e' ist gegeben durch die Summe

$$e' = e + c_{12}V$$

oder gemäß (1) durch

$$\begin{aligned} e' &= cV + c_{12}V \\ &= (c + c_{12})V. \end{aligned} \quad (2)$$

Da wiederum nach (1) e'/V die neue Kapazität c' ist, so folgt

$$c' = c + c_{12}.$$

c und c_{12} werden auch als Teilkapazitäten bezeichnet. Dabei ist c ein Maß für die freie, c_{12} für die gebundene Ladung. c kann auch als Eigenkapazität bezeichnet werden.

Würde man statt L zu erden, dieses selbst bei der Annäherung auf dem Potential V halten, so könnte offenbar keine Influenz eintreten und daher auch keine Kapazitätsänderung erfolgen. Für die Influenzierung kommt also die Potentialdifferenz zwischen Körper und Leiter L in Frage. Ist das Potential von L V_l , so würde der Ausdruck (2) allgemein lauten

$$e' = cV + c_{12}(V - V_l). \quad (3)$$

So gelangen wir nun zwangsläufig zu dem allgemeinen Ausdruck für die Ladung eines Körpers, der von beliebigen Leitern umgeben ist. Bezeichnen wir Ladung, Potential und Eigenkapazität unseres Körpers mit e_1, V_1, c_1 und die entsprechenden Größen für den zweiten, dritten usw. Körper mit $e_2, V_2, c_2, e_3, V_3, c_3$ usw., so drückt sich e_1 offenbar folgendermaßen aus

$$e_1 = c_1 V_1 + c_{12}(V_1 - V_2) + c_{13}(V_1 - V_3) + c_{14}(V_1 - V_4) + \dots \quad (4a)$$

Hierbei sind c_{12}, c_{13}, c_{14} die Influenzierungskoeffizienten bzw. Teilkapazitäten zwischen 1 und 2, ferner 1 und 3 usw. Analog gilt natürlich auch für den zweiten Körper mit der Eigenkapazität c_2

$$e_2 = c_2 V_2 + c_{21}(V_2 - V_1) + c_{23}(V_2 - V_3) + c_{24}(V_2 - V_4) + \dots \quad (4b)$$

Und ähnlich lauten die Ausdrücke für die übrigen. Da die Influenzierungskoeffizienten immer nur die Wechselwirkung zwischen zwei Leitern betreffen, die Influenz von Körper m auf n aber so groß ist, wie von n auf m , so ist jederzeit $c_{mn} = c_{nm}$. Das hindert nicht, daß eine Verschiebung der Lage nur eines der Körper gleichzeitig alle Influenzierungskoeffizienten ändert.

Das Gleichungssystem (4) bildet nun die Grundlage auch für die Behandlung unseres Problems. Ein Kondensator befindet sich in einem geerdeten Faradaykäfig (Abb. 66).

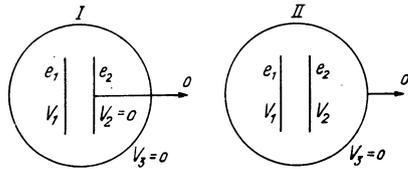


Abb. 66.

Frage. Wie groß ist die Kapazität:

- I. wenn eine Belegung mit dem Käfig verbunden ist,
- II. wenn beide Belegungen isoliert sind?

Die beiden Fälle sind in Abb. 66 I und II schematisch dargestellt. Wir haben ein Dreikörperproblem: zwei Kondensatorplatten und die Hülle. Für beide Fälle gemeinsam gilt somit:

$$\begin{aligned} e_1 &= c_1 V_1 + c_{12}(V_1 - V_2) + c_{13}(V_1 - V_3) \\ e_2 &= c_2 V_2 + c_{21}(V_2 - V_1) + c_{23}(V_2 - V_3) \\ e_3 &= c_3 V_3 + c_{31}(V_3 - V_1) + c_{32}(V_3 - V_2). \end{aligned} \quad (5)$$

Da $V_3 = 0$ und $c_{mn} = c_{nm}$, so reduziert sich dies auf

$$\begin{aligned} e_1 &= c_1 V_1 + c_{12}(V_1 - V_2) + c_{13} V_1 \\ e_2 &= c_2 V_2 + c_{12}(V_2 - V_1) + c_{23} V_2 \\ e_3 &= -c_{13} V_1 - c_{23} V_2. \end{aligned} \quad (5a)$$

Hiervon interessieren uns nur die Ladungen der Kondensatorplatten e_1 und e_2 . e_3 , das übrigens gleich 0 ist, haben wir nur der Vollständigkeit halber angeschrieben. Die Glieder $c_1 + c_{13}$ sowie $c_2 + c_{23}$ wird man zusammenfassen. Wir schreiben daher

$$c_1' = c_1 + c_{13} \quad \text{und} \quad c_2' = c_2 + c_{23}.$$

c_1' und c_2' sind die Teilkapazitäten der beiden Kondensatorplatten, wenn sie sich in der geerdeten Hülle befinden. Also schreiben wir

$$\begin{aligned} e_1 &= c_1' V_1 + c_{12}(V_1 - V_2) \\ e_2 &= c_2' V_2 + c_{12}(V_2 - V_1). \end{aligned} \quad (5b)$$

Fall I. $V_2 = 0$. Es ist die Ladung der allein benützten Kondensatorplatte 1 gemäß (5b)

$$e_1 = c_1' V_1 + c_{12} V_1.$$

Somit ist die Kapazität für diesen Fall

$$C_I = c_1' + c_{12}. \quad (6)$$

Fall II. Als Kapazität C_{II} kann angesehen werden sowohl der Ausdruck $\frac{e_1}{V_1 - V_2}$ als $\frac{e_2}{V_2 - V_1}$. Weder das eine noch das andere können wir ohne weiteres aus (5b) ausrechnen. Es muß eine bestimmte Annahme gemacht werden, wie der Kondensator „betrieben“ werden soll. Je nachdem erhält man die entsprechende „Betriebskapazität“. Ist die Anordnung der Kondensatorplatten einigermaßen symmetrisch oder überwiegt c_{12} bei weitem die anderen Koeffizienten, so wird man setzen dürfen $e_2 = -e_1$. In diesem Falle schreibt sich (5b) folgendermaßen

$$\begin{array}{l|l} e_1 = c_1' V_1 + c_{12}(V_1 - V_2) & c_2' \\ -e_1 = c_2' V_2 + c_{12}(V_2 - V_1) & -c_1'. \end{array} \quad (7)$$

Um $C_{II} = \frac{e_1}{V_1 - V_2}$ zu finden, wird man hieraus einen Ausdruck formen müssen, der V_1 und V_2 nicht einzeln, sondern nur in der

Kombination $V_1 - V_2$ enthält. Dies geschieht durch Erweiterung der Ausdrücke (7) mit c_2' und $-c_1'$ und Addition. Man erhält

$$e_1(c_2' + c_1') = c_1'c_2'(V_1 - V_2) + c_{12}c_2'(V_1 - V_2) + c_{12}c_1'(V_1 - V_2),$$

woraus man findet

$$C_{II} = \frac{c_1'c_2' + c_{12}(c_1' + c_2')}{c_1' + c_2'},$$

was man auch schreiben kann

$$C_{II} = c_1' \frac{c_2'}{c_1' + c_2'} + c_{12}. \quad (8)$$

Wir sehen hier, daß c_1' mit einem echten Bruch multipliziert ist. Ein Vergleich von (8) und (6) zeigt daher, daß $C_I > C_{II}$.

D. Elektrodynamik.

§ 53. WHEATSTONESche Brücke.

Die Widerstandsproportion für die Einstellung der WHEATSTONE-Brücke ist bekanntlich sehr einfach abzuleiten. Wesentlich umständlicher gestaltet sich die Berechnung des Brückenstroms, der auftritt, wenn einer der vier Brückenarme geändert wird. Die Aufgabe stellt sich aber sehr häufig, so bei Widerstandsänderungen durch Erwärmung (Widerstandsthermometer, Bolometer, Barretter), durch Belichtung (Selenzelle), durch Magnetfelder (Wismutspirale) usw., dann aber auch, wenn man die Meßempfindlichkeit der WHEATSTONE-Brücke beurteilen will. Es soll daher diese Rechnung durchgeführt werden, zumal die Hilfsmittel hierzu fix und fertig vorliegen in den „KIRCHHOFFSchen Regeln“. Immerhin bedarf es dazu noch einiger Überlegungen. So wird man bald erkennen, daß die allgemein durchgeführte Rechnung umständlich und unübersichtlich wird, was damit zusammenhängt, daß bei Änderung eines Widerstandes, z. B. von a (Abb. 67) nicht nur der Brückenstrom j , sondern auch der Meßstrom J sich ändert. Nun kann man aber an Stelle der Stromquelle den Strom als primär gegeben ansehen. Denn dieser kann ja mittels eines Regulierwiderstandes beliebig eingestellt werden, ja kann auch wirklich durch Einschaltung eines Strombegrenzers, etwa einer Elektronenröhre, konstant gehalten werden. Auf alle Fälle wird man in erster Näherung von seinen Änderungen ab-

sehen dürfen und sich mit der Berechnung von j_0/J begnügen. j_0 bedeutet dabei den Brückenstrom, der bei vorgängiger Abgleichung der Brücke nach Störung des Gleichgewichts entsteht.

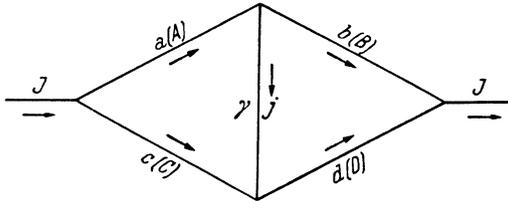


Abb. 67.

Man wird nun zunächst einmal ganz allgemein den Brückenstrom bei beliebigen Widerstandsverhältnissen ausrechnen. Bezeichnet man mit a, b, c, d, γ (Abb. 67) die Widerstände, mit A, B, C, D, j die entsprechenden Ströme, so gilt bei der für j angenommenen Richtung nach KIRCHHOFF I:

$$A = B + j. \quad (1)$$

$$D = C + j. \quad (2)$$

$$J = A + C = B + D. \quad (3a, 3b)$$

KIRCHHOFF II:

$$aA + \gamma j = cC \quad (4)$$

$$dD + \gamma j = bB. \quad (5)$$

Wir stellen zunächst fest, daß hier 5, nicht 6 voneinander unabhängige Gleichungen vorliegen. Denn (3a) und (3b) stellen nur eine Gleichung dar, da $A + C = B + D$ aus (1) und (2) folgt. Unbekannt sind die Größen $A B C D j$. Da es deren fünf sind, so haben wir die für die Berechnung notwendige und hinreichende Zahl von Gleichungen aufgestellt. Die Ausdrücke sind so einfach, daß es nicht lohnt, zur Auflösung die Determinanten heranzuziehen. Wir entnehmen z. B. A und D direkt aus (3a) bzw. (3b) und setzen die Werte in die Gleichungen (1), (2), (4) und (5) ein. Man erhält

$$J - C = B + j. \quad (1a)$$

$$J - B = C + j. \quad (2a)$$

$$a(J - C) + \gamma j = cC \quad (4a)$$

$$d(J - B) + \gamma j = bB. \quad (5a)$$

Man kann nun B aus (5a) und C aus (4a) ausrechnen, und in (2a) oder (1a), die ja identisch sind, einsetzen. Man erhält, da nach (1a) bzw. (2a) $J - j = B + C$,

$$J - j = \frac{\gamma j + dJ}{b + d} + \frac{\gamma j + aJ}{a + c}. \quad (6)$$

Um j/J zu berechnen, wird man mit $(b + d) \cdot (a + c)$ erweitern. Nach Sammlung der Glieder mit j auf der einen und J auf der andern Seite der Gleichung ergibt sich

$$\frac{j}{J} = \frac{(a + c)(b + d) - d(a + c) - a(b + d)}{(a + c)(b + d) + \gamma(a + b + c + d)}$$

oder nach Ausmultiplizieren des Zählers

$$\frac{j}{J} = \frac{bc - ad}{(a + c)(b + d) + \gamma(a + b + c + d)}. \quad (7)$$

Um nun j_0 zu finden, haben wir erst die Brücke abzugleichen, d. h. $j = 0$ zu machen. Wir erfüllen also die Bedingung $bc - ad = 0$. Jetzt ändern wir z. B. a in $a + \Delta a$ und rechnen j_0 nach (7) aus. Es ist

$$\frac{j_0}{J} = \frac{bc - (a + \Delta a)d}{(a + \Delta a + c)(b + d) + \gamma(a + \Delta a + b + c + d)}.$$

Dies ergibt unter Berücksichtigung, daß $bc - ad = 0$,

$$\frac{j_0}{J} = \frac{-d \cdot \Delta a}{(a + c)(b + d) + \gamma(a + b + c + d) + \Delta a(\gamma + b + d)}. \quad (8)$$

Zumeist wird man das Glied mit Δa im Nenner vernachlässigen dürfen und schreiben können

$$\frac{j_0}{J} = \frac{-d \cdot \Delta a}{(a + c)(b + d) + \gamma(a + b + c + d)}. \quad (8a)$$

Wählt man, wie häufig, $a = b = c = d$, so vereinfacht sich dies zu

$$\frac{j_0}{J} = \frac{-\Delta a}{4(a + \gamma)}. \quad (9)$$

a und γ gehen dann also in gleicher Weise in die Formel ein.

Bemerkung. Die weitere Ausgestaltung und Anwendung der Formel (8) findet man z. B. in F. KOHLRAUSCH: Praktische Physik, S. 551, 1935.

§ 54. Gruppenschaltung von galvanischen Elementen.

Eine gegebene Zahl z von Elementen sei in n Gruppen eingeteilt. Die m Elemente einer Gruppe seien hintereinander, die n Gruppen selbst aber einander parallel geschaltet. In Abb. 68 ist der Fall für $m = 4$ und $n = 3$ dargestellt.

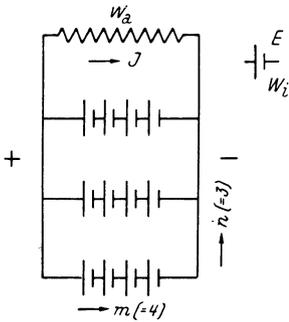


Abb. 68.

Frage. Wie müssen m und n bei gegebenem z gewählt werden, damit der durch den gegebenen äußeren Widerstand W_a fließende Strom einen Maximalwert aufweist?

Zur Berechnung der Stromstärke haben wir das OHMSche Gesetz für einen geschlossenen Stromkreis anzuwenden. Bezeichnen wir die EmK und den inneren Widerstand eines Elementes mit E bzw. W_i , so ist die treibende Kraft der Batterie mE und der gesamte innere Widerstand $\frac{m}{n}W_i$. Daher haben wir

$$mE = J \left(W_a + \frac{m}{n} W_i \right). \quad (1)$$

Hierzu kommt die feste Bedingung

$$z = mn. \quad (2)$$

(1) kann daher nach Erweiterung mit n und unter Berücksichtigung von (2) auch geschrieben werden

$$zE = J(nW_a + mW_i). \quad (1a)$$

Nach Schema f müßte jetzt die eine Variable, m oder n , aus (2) in (1a) eingesetzt werden. Man erhielte dann J entweder als Funktion von m oder n . Dann wäre $\frac{dJ}{dn}$ oder $\frac{dJ}{dm}$ zu bilden und gleich Null zu setzen. Schließlich wäre noch nachzuweisen, daß der so gefundene Grenzwert von J wirklich ein Maximum ist. Das heißt, es wäre zu zeigen, daß entweder $\frac{d^2J}{dn^2}$ oder $\frac{d^2J}{dm^2} < 0$.

Die Ausführung bildet durchaus keine mathematischen Schwierigkeiten. Hingegen zeigt sich ein Hindernis anderer Art. Es ist nicht möglich, sich aus Gründen der Zweckmäßigkeit für die Elimination der einen Variablen zugunsten der andern zu entscheiden, da beide in durchaus gleicher Weise in die Ausdrücke (1a) und (2) eingehen. m und n besitzen sozusagen gleichen mathematischen Wert, und dementsprechend haben sie auch Anspruch auf gleichmäßige mathematische Behandlung. Eine solche ist tatsächlich auch möglich, und die Berücksichtigung dieses Moments der mathematischen Gerechtigkeit lohnt sich dadurch, daß es uns in besonders einfacher und übersichtlicher Weise zum Ziele führt. Wir eliminieren daher überhaupt nicht und differenzieren direkt (2) und (1a):

$$0 = m \, dn + n \, dm, \tag{3}$$

ferner

$$0 = J(W_a \, dn + W_i \, dm) + (nW_a + mW_i) \, dJ. \tag{4}$$

Nun setzen wir die Maximumbedingung $dJ = 0$ an. Da $J \neq 0$, so reduziert sich (4) auf

$$0 = W_a \, dn + W_i \, dm. \tag{4a}$$

Aus (3) und (4a) folgt aber unmittelbar

$$nW_a = mW_i \tag{5}$$

oder

$$W_a = \frac{m}{n} W_i. \tag{5a}$$

Das heißt, der innere Widerstand der Batterie $\frac{m}{n} W_i$ muß gleich dem äußeren Widerstand W_a sein, ein Resultat, das von allgemeinerer Bedeutung ist. Denn in jedem Fall, wo an eine stromliefernde Apparatur ein Verbraucher angeschlossen ist, muß dieser an jenen angeglichen sein. Man denke etwa an einen Radioapparat und einen Lautsprecher oder an eine Thermosäule und ein Galvanometer.

Den Wert für das Strommaximum J_m findet man grundsätzlich so, daß man aus (2) und (5) m und n ausrechnet und in (1) bzw. (1a) einsetzt. Bei der Ausführung kann aber wiederum etwas verschieden verfahren werden.

I. m bevorzugt.

Unter Berücksichtigung von (5a) reduziert sich (1) auf

$$mE = zW_a J_m.$$

Elimination von n zwischen (2) und (5) ergibt

$$m^2 = z \frac{W_a}{W_i}.$$

Dies oben eingesetzt, führt zu

$$\sqrt{z \frac{W_a}{W_i}} \cdot E = zW_a J_m$$

oder

$$J_m = \frac{E}{z} \sqrt{\frac{z}{W_a W_i}}. \quad (6)$$

II. m und n gleichmäßig behandelt.

Man erweitert (5) einmal mit m und einmal mit n und erhält

$$zW_a = m^2 W_i$$

und

$$n^2 W_a = zW_i.$$

Hieraus folgen die Ausdrücke für m und n , die man nun in (1a) einsetzt, so daß nun hieraus wird

$$\begin{aligned} zE &= J_m \left(W_a \sqrt{z \frac{W_i}{W_a}} + W_i \sqrt{z \frac{W_a}{W_i}} \right) \\ &= 2J_m \sqrt{zW_a W_i}, \end{aligned}$$

was wiederum liefert

$$J_m = \frac{E}{2} \sqrt{\frac{z}{W_a W_i}}. \quad (6)$$

Der erzielbare Maximalstrom nimmt also mit der Wurzel aus der Zahl der zur Verfügung stehenden Elemente zu. Man bemerke, daß in Wirklichkeit m und n , und damit auch z , stets positive, ganze Zahlen unter Ausschluß der Null bedeuten. In der mathematischen Behandlung sind aber diese Größen als stetige Variable behandelt. Die abgeleiteten Resultate gelten also nur insoweit, als sie sich durch ganzzahlige Werte von m und n realisieren lassen. Die Kombination ist so zu treffen, daß die Abweichungen von den errechneten Resultaten möglichst klein werden. Dies wird sich um so besser erreichen lassen, je größer die Zahl z ist.

Die Frage, ob J_m ein Maximum oder Minimum darstellt, läßt sich ohne Differenziation beantworten, da man festgestellt hat, daß nur ein Extremwert vorhanden ist. Wir müssen nur zeigen, daß für irgendeine Wahl für m oder n ein Stromwert herauskommt, der kleiner als J_m ausfällt. Man wird auch hier wieder die mathematische Gerechtigkeit walten lassen und die Wahl so treffen, daß m und n gleichmäßig berücksichtigt sind. Das ist in idealer Weise der Fall, wenn wir setzen $m = n$. Dann ist $z = m^2$ und (1) schreibt sich

$$\sqrt{z} E = J (W_a + W_i),$$

woraus für den Strom folgt

$$J = \frac{E \sqrt{z}}{W_a + W_i}. \tag{7}$$

Nun ist leicht zu zeigen, daß $\frac{J}{J_m} < 1$. Denn es ist

$$\frac{J}{J_m} = \frac{\sqrt{W_a W_i}}{\frac{W_a + W_i}{2}}.$$

Da aber das geometrische Mittel $\sqrt{W_a W_i}$ stets kleiner ist als das arithmetische $\frac{W_a + W_i}{2}$, so ist bewiesen, daß J_m ein Maximum darstellt.

§ 55. Leuchttemperatur einer Metallfadenlampe.

Eine Metallfadenlampe mit Zickzackhalterung ist luftleer, und gibt der Faden die elektrische Heizenergie fast vollständig in Form von Strahlung ab. Im stationären Zustand ist also die sekundlich verbrauchte elektrische Energie E gleich der Strahlungsenergie S (Abb. 69). Der Wattverbrauch E ist gewöhnlich

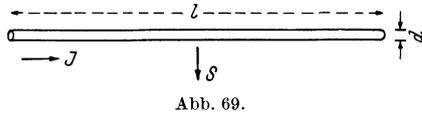


Abb. 69.

an der Lampe angeschrieben. Die Strahlung ist, sofern der Glühdraht (Wolfram) als ein grauer Strahler anzusehen ist, nach STEFAN-BOLTZMANN zu berechnen aus

$$S = \alpha c f T^4 - k T_0^4. \tag{I}$$

Das erste Glied ist die vom Faden ausgestrahlte, das zweite die von der Umgebung in den Faden eingestrahlte Energie. T_0 sei die Raumtemperatur, f die strahlende Fläche. c bedeutet die Strahlungskonstante für den schwarzen Körper. α ist ein echter Bruch, der mit 0,9 angesetzt werden kann. Wenn die Lampe nicht brennt, ist $T = T_0$ und, da dann ebensoviel eingestrahlt als ausgestrahlt wird, ist $S = 0$. Daraus folgt aber, daß $\alpha c f = k$ sein muß. Wir schreiben also

$$S = \alpha c f (T^4 - T_0^4). \tag{Ia}$$

Da T vielfach größer ist als T_0 , so verschwindet T_0^4 praktisch gegenüber T^4 und kann daher vernachlässigt werden. Behalten

wir aber T_0 korrekterweise bei und bedenken, daß $S = E$, so folgt aus (1a)

$$T = \sqrt[4]{\frac{E}{\alpha e f} + T_0^4}. \quad (2)$$

f berechnet sich aus der Länge l und dem Durchmesser d des Drahtes zu $f = \pi l d \text{ cm}^2$. Um eine Berechnung von T zu ermöglichen, müßte nun eine Lampe zur Messung von l und d geöffnet werden. Es ist dies aber nicht nötig, sofern man sich mit einer Schätzung begnügt. Auch wenn α , l und d nur ungenau bekannt sind, läßt sich schon ein brauchbarer Wert berechnen, dank der Form der Formel (2). Jede fehlerhafte Schätzung der Größen α , c und f geht nämlich nur mit dem vierten Teil ins Resultat ein. Ist allgemein

$$y = \sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}},$$

so beträgt die Abweichung, d. h. das Differential

$$\Delta y = \frac{1}{n} x^{\frac{1}{n}-1} \Delta x = \frac{1}{n} y x^{-1} \Delta x$$

und der relative Fehler $\Delta y/y$ ist

$$\frac{\Delta y}{y} = \frac{1}{n} \frac{\Delta x}{x},$$

d. h. gleich dem n . Teil des relativen Fehlers von x . Setzt man nun schätzungsweise $l = 70 \text{ cm}$ und $d = 0,002 \text{ cm}$, so kommt $f = 0,44 \text{ cm}^2$. Da ferner $c = 5,75 \cdot 10^{-12} \text{ Watt cm}^{-2} \text{ grad}^{-4}$, so bekommen wir unter Zugrundelegung einer 50-Watt-Lampe

$$\frac{E}{\alpha c f} = \frac{50}{0,9 \cdot 5,75 \cdot 10^{-12} \cdot 0,44} = 22,0 \cdot 10^{12}.$$

Hiergegen beträgt $T_0^4 = 300^4$, d. h. nur $81 \cdot 10^8$, ist also zu vernachlässigen. Wir erhalten daher

$$T = 10^3 \sqrt[4]{22,0} = 2170^0 \text{ abs.},$$

d. h. eine Temperatur von rund 1900^0 C .

§ 56. Dissoziationsgrad eines Elektrolyten.

Den Bruchteil der in einem Elektrolyten gelösten Moleküle, welcher dissoziiert ist, nennt man den Dissoziationsgrad. Befinden sich also in einem einfach dissoziierenden, d. h. binären

Elektrolyten, wie HCl, je $1 \text{ cm}^3 N$ gelöste Moleküle und ist die Zahl der positiven bzw. der negativen Ionen n , so ist der Dissoziationsgrad

$$\alpha = \frac{n}{N}.$$

Dieser beträgt für starke Elektrolyte wie etwa HCl-Lösung nahezu 1. Bei schwachen Elektrolyten, wie bei organischen Säuren, ist er aber von Lösung zu Lösung verschieden und variiert zudem mit der Konzentration.

Frage. Wie hängt α von der Konzentration der Lösung ab?

Daß die Spaltung in Ionen keine vollständige ist, haben wir offenbar so aufzufassen, daß zwar eine dissoziierende Kraft vorhanden ist, daß aber eine zweite Kraft dieser entgegenwirkt. Die dissoziierende Wirkung ist den elektrostatischen Kräften der Dipolmomente des Lösungsmittels zuzuschreiben und ist daher bei solchen mit großer Dielektrizitätskonstanten (wie z. B. Wasser) besonders stark. $+$ - und $-$ -Ionen suchen sich aber infolge elektrostatischer Anziehung andererseits wieder zu vereinigen. Die Dissoziation des Elektrolyten entspricht also einem stationären Zustand oder einem dynamischen Gleichgewicht, bei dem pro Sekunde gerade so viel gelöste Moleküle in Ionen zerfallen, als von den vorhandenen Ionen sich wieder vereinigen. Nun ist aber die Zahl der pro Sekunde gebildeten Ionen offenbar proportional der Zahl der nichtdissoziierten Moleküle, d. h. gleich $b \cdot (N - n)$, wobei die Konstante b ein Maß für die Stärke der dissoziierenden Kraft ist. Die Zahl der durch Wiedervereinigung zurückgebildeten Moleküle ist sowohl der Zahl der positiven n^+ als der Zahl der negativen Ionen n^- proportional oder, da $n^+ = n^- = n$, so ist diese Zahl $a n^2$, wo die Konstante a ein Maß für die Wiedervereinigungstendenz angibt. Man hat nun einfach gleichzusetzen

$$b(N - n) = a n^2, \quad (1)$$

und unter Benützung von $n = \alpha \cdot N$ erhält man

$$b(N - \alpha N) = a \alpha^2 N^2,$$

oder schließlich

$$\frac{b}{aN} = \frac{\alpha^2}{1 - \alpha}.$$

N ist nun offenbar proportional der Konzentration c . Setzt man daher $N = k \cdot c$, so schreibt sich

$$\frac{b}{a k c} = \frac{\alpha^2}{1 - \alpha},$$

oder, indem man $\frac{b}{a k}$ zu einer Konstanten K zusammenfaßt,

$$\frac{K}{c} = \frac{\alpha^2}{1 - \alpha}. \quad (2)$$

Dies ist das OSTWALDSche Verdünnungsgesetz. K nennt man die Dissoziationskonstante. Deren Zahlenwert hängt naturgemäß davon ab, wie man die Konzentration c definiert. Sie ist im übrigen eine Funktion der Temperatur. Will man nun den Dissoziationsgrad als Funktion von c berechnen, so ist (2) nach α aufzulösen, und man erhält zunächst

$$\alpha = \frac{\sqrt{1 + 4 \frac{c}{K}} - 1}{2 \frac{c}{K}}$$

oder nach Erweiterung mit $(\sqrt{1 + 4 \frac{c}{K}} + 1)$

$$\alpha = \frac{2}{1 + \sqrt{1 + 4 \frac{c}{K}}}. \quad (3)$$

Schon aus (2) folgt unmittelbar

1. daß, wenn c gegen 0 konvergiert, auch der Nenner von (2) $1 - \alpha = 0$ werden muß. Das heißt aber, daß $\alpha = 1$ und somit jeder Elektrolyt bei unendlicher Verdünnung vollständig dissoziiert sein muß.

2. daß bei kleinem c auch $1 - \alpha$ klein sein wird. Dann darf aber α^2 in (2) praktisch = 1 gesetzt werden, und es folgt

$$\frac{K}{c} = \frac{1}{1 - \alpha}$$

oder

$$1 - \alpha = \frac{c}{K},$$

was einem linearen Verlauf entspricht.

3. daß bei großem c oder kleinem K α klein wird und der Nenner von (2) praktisch = 1 gesetzt werden darf. Dies führt dann zu der Beziehung

$$\alpha \sim \frac{1}{\sqrt{c}}.$$

Das Resultat 1 ermöglicht es, den Dissoziationsgrad eines Elektrolyten aus dessen Äquivalentleitfähigkeit A zu finden. Darunter versteht man den Quotienten aus der gewöhnlichen Leitfähigkeit und der Zahl der im Kubikzentimeter vorhandenen Mole gelösten Stoffes. Die Theorie zeigt, daß das Äquivalentleitvermögen

$$A = 96500 \alpha (u^+ + u^-),$$

wo u^+ und u^- die beiden Ionenbeweglichkeiten bedeuten. Nimmt man, wie es die ARRHENIUSSCHE Theorie tut, an, daß u^+ und u^- nur wenig von der Konzentration abhängen, so gilt für $c = 0$, d. h. für $\alpha = 1$

$$A_0 = 96500 (u^+ + u^-).$$

Es ist daher

$$\frac{A}{A_0} = \alpha.$$

Bei starken Elektrolyten sind die Voraussetzungen grundlegend anders. Hier ist α unabhängig von der Konzentration stets = 1, und dafür sind u^+ und u^- Funktionen der Konzentration, was damit zusammenhängt, daß die Ionenbeweglichkeit nicht nur durch die innere Reibung im Lösungsmittel, sondern stark auch durch die Ionenkräfte mitbestimmt ist. Hier darf man nicht mehr annehmen, daß die einzelnen Ionen so weit durch das Lösungsmittel getrennt sind, daß sie sich in ihrer Bewegung gegenseitig nicht beeinflussen.

Das OSTWALDSche Verdünnungsgesetz stellt einen Spezialfall des chemischen Massenwirkungsgesetzes dar. Auch diesem liegt die Vorstellung eines dynamischen Gleichgewichts zwischen Bildung und Zerfall zugrunde. Der dynamischen Betrachtungsweise entsprechend liegt es nun nahe, nicht nur das Gleichgewicht, sondern auch die Veränderung desselben in die Behandlung mit einzubeziehen. So könnte man z. B. versuchen, den zeitlichen Verlauf des Dissoziationsvorganges zu berechnen. Man denke sich etwa in einem gegebenen Moment einem Lösungsmittel den gelösten Stoff gleichmäßig beigemischt. Dann wird zunächst nur

die Dissoziation einsetzen, und erst mit dem Anwachsen der Ionenzahl wird immer stärker auch die Wiedervereinigung auftreten. Die Ionenzahl nimmt dann von 0 an zeitlich bis zu dem Maximum des Gleichgewichtszustandes zu. Es ist nun offenbar die Zunahme dn proportional dem Zeitelement dt und der Differenz der Ausdrücke $b(N - n)$ und an^2 . Also

$$dn = [b(N - n) - an^2] dt.$$

Da $n = \alpha N$ und demzufolge $dn = N \cdot d\alpha$, so erhält man die Beziehung

$$d\alpha = [b(1 - \alpha) - aN\alpha^2] dt. \quad (4)$$

Wir geben hier gleich das Resultat der Integration:

$$\alpha = \frac{2}{1 + \sqrt{1 + 4 \frac{c}{K} \cdot \frac{1+q}{1-q}}}. \quad (5)$$

wo abkürzungsweise $q = e^{-bt} \sqrt{1 + 4 \frac{c}{K}}$.

Dieser Ausdruck wäre auch anwendbar auf die Ionisierung der Gase, z. B. Röntgenstrahlen. Formel (5) gibt dann die Zunahme der Ionisierung nach Einsetzen der Bestrahlung. a bedeutet in diesem Fall den Wiedervereinigungskoeffizienten und b wäre ein Maß für die Strahlungsintensität.

Aufgabe. Man führe die Integration von (4) aus.

§ 57. Elektromotorische Kraft und Energieverbrauch des galvanischen Elements.

Bezeichnet man die EmK mit E und den aus dem Element entnommenen Strom mit J , so ist die abgegebene Leistung EJ und die in der Zeit t geleistete Arbeit EJt . Oder, da Jt den Ladungstransport e bedeutet, so ist die Arbeit A auch

$$A = eE. \quad (1)$$

Diese besteht, sofern die Pole einfach durch einen Widerstand verbunden sind, aus der Stromwärme im äußeren und im inneren Widerstande des Kreises. Es liegt nahe, anzunehmen, daß die Arbeit gleich ist der beim Stromdurchgang verbrauchten chemischen Energie. Beträgt die Wärmetönung, die dem chemischen Umsatz im Element entspricht, Q cal, so ist diese mit QM einzu-

setzen, wo M das mechanische Wärmeäquivalent $M = 4,19$ Joule/cal bedeutet. Man hat also die einfache Beziehung

$$QM = eE. \quad (2)$$

Zur Verdeutlichung dieser Beziehung wählen wir als Beispiel das DANIELLSche Element (Abb. 70). Hier wird durch die Stromentnahme auf der einen Seite Zn aufgelöst, auf der andern Cu abgeschieden. Wenn wir diese Reaktion ohne Zuhilfenahme des elektrischen Stromes bewerkstelligen, dann wird keine elektrische Arbeit geleistet, es wird nur Wärme produziert, und Q bedeutet nun die entsprechende Wärmetönung. Diese rein chemische Reaktion ist sehr einfach auszuführen. Man braucht nur bei einem DANIELL-Element den trennenden Tonzylinder wegzunehmen, so daß CuSO_4 und ZnSO_4 sich mischen. Dann setzt also gleich die Auflösung von Zn und die Abscheidung von Cu ein. In Wirklichkeit wird man den Versuch so ausführen: Man wirft in ein Kupferkalorimeter, das mit Kupfersulfatlösung beschickt ist, eine abgewogene Menge Zinkspäne und mißt die Wärmetönung bei der Auflösung. Beträgt diese bei der Auflösung eines Grammäquivalents Q_a cal, dann ist die entsprechende Elektrizitätsmenge e in (2) mit 96 500 Coulomb einzusetzen. Man hat also

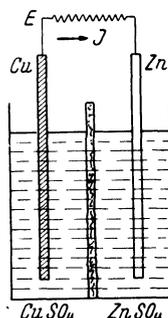


Abb. 70.

$$E = \frac{Q_a \cdot 4,19}{96\,500} = \frac{Q_a}{23\,000} \text{ Volt.} \quad (2a)$$

Für die Wärmetönung wird pro 1 g Zn etwa 800 cal gefunden. Da das Äquivalentgewicht des Zn $65,4/2$ beträgt, so ergibt dies

$$Q_a = 800 \frac{65,4}{2} = 26\,200 \text{ cal.}$$

Man erhält somit für das DANIELLSche Element:

$$E = \frac{26\,200}{23\,000} = 1,14 \text{ Volt.}$$

Dies stimmt nun mit dem gemessenen Wert recht gut überein. Leider aber versagt das in (2) formulierte, von J. THOMSON aufgestellte Gesetz in sehr vielen Fällen. Häufig wird nur ein Teil der chemischen Energie in elektrische umgewandelt, und ein Teil tritt als Wärmetönung im Elektrolyten in Erscheinung. Auch

kommt es sogar vor, daß die gewonnene elektrische Energie größer ist, als der chemischen entspricht. Dann zeigt sich beim Stromdurchgang eine Abkühlung des Elektrolyten. Wie GIBBS und HELMHOLTZ gezeigt haben, stimmt die THOMSONSche Regel immer dann nicht, wenn die EmK temperaturabhängig ist. Die richtige Formel muß nach ihnen lauten

$$E = \frac{QM}{e} + T \frac{\Delta E}{\Delta T}. \tag{3}$$

Danach ist die elektrische Energie Ee größer als die chemische QM , wenn E mit T zunimmt, und kleiner, wenn E abnimmt. Letzteres ist der seltenere Fall. Verwendet man also Formel (2), so erhält man für die EmK im ersten Fall einen zu kleinen, im zweiten einen zu großen Wert. In Formel (3) treten neben Arbeit und Wärme auch Temperaturen auf. Dies läßt ihren Charakter als thermodynamische Beziehung erkennen. Schreibt man sie etwa in der Form

$$\frac{e \Delta E}{eE - QM} = \frac{\Delta T}{T}, \tag{4}$$

d. h.

$$\frac{\text{Arbeitsdifferenz}}{\text{Arbeitswert einer Wärme}} = \frac{\text{Temperaturdifferenz}}{\text{Temperatur}},$$

so erkennt man die Form des CARNOTSchen Wärmesatzes. Und in der Tat läßt sich (3) auch unter Verwendung eines passend gewählten reversibeln Kreisprozesses ableiten.

Der Anfangszustand des Elementes sei durch Punkt 1 in Abb. 71 dargestellt. Wir schließen das Element durch einen Draht, den wir hochohmig wählen, damit die Vorgänge langsam vor sich gehen. Indem wir eine Elektrizitäts-

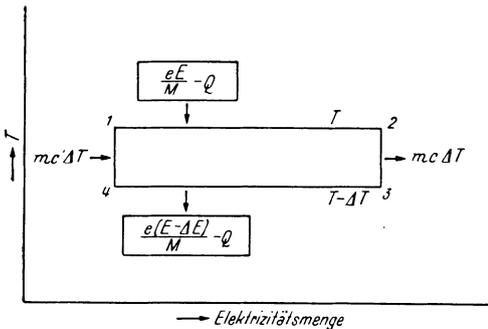


Abb. 71.

menge e durch das Element fließen lassen, gelangen wir von Punkt 1 nach 2. Die vom Element geleistete Arbeit beträgt $\frac{eE}{M}$ cal, die verbrauchte

chemische Energie Q cal. Ist $\frac{eE}{M} - Q$ positiv, dann würde eine Abkühlung des Elementes erfolgen. Wir müssen daher zur Konstanthaltung der Temperatur T (1 und 2 in derselben Höhe!) eine Wärmemenge $\frac{eE}{M} - Q$ zuführen. Es geschehe dies mit Hilfe eines auf T temperierten Wärmereservoirs. Nun kühlen wir das Element um ΔT ab, indem wir eine kleine Wärmemenge in ein gleichtemperiertes Reservoir abführen. Diese Wärme können wir darstellen durch $mc \Delta T$, wo m die Masse, c die mittlere spezifische Wärme des Elementes bedeuten. Bei 3 angekommen, schicken wir nun durch das Element in umgekehrter Richtung eine gleiche Elektrizitätsmenge e und machen dadurch den chemischen Vorgang wieder völlig rückgängig. Da die EmK bei der um ΔT tieferen Temperatur mit $E - \Delta E$ anzusetzen ist, so ist die bei dem Vorgang frei werdende Wärmemenge gegeben durch $\frac{e(E - \Delta E)}{M} - Q$. Diese werde in ein Wärmereservoir von der konstanten Temperatur $T - \Delta T$ abgeführt. Wir erwärmen nun schließlich noch, indem wir die Wärme $mc' \Delta T$ zuführen und gelangen so von 4 nach 1 zurück. Da angenommen werden darf, daß c und c' nicht merklich voneinander verschieden sind, so heben sich die beiden auf dem Wege $2 \rightarrow 3$ und $4 \rightarrow 1$ zugeführten, bzw. weggeführten Wärmemengen auf. Es ist also bei dem Kreisprozeß die Wärme

$$\frac{eE}{M} - Q - \left(\frac{e(E - \Delta E)}{M} - Q \right) = \frac{e \Delta E}{M}$$

als solche verschwunden, d. h. in Arbeit umgesetzt worden. Dabei ist aber die Wärme $eE/M - Q$ verbraucht worden, indem diese zum Teil in Arbeit verwandelt, zum Teil in das tiefer temperierte Reservoir übergegangen ist. Der Quotient muß nach dem CARNOT'schen Satz der Temperaturdifferenz ΔT dividiert durch die Temperatur des höher temperierten Wärmereservoirs sein. Man erhält so die Beziehung

$$\frac{\frac{e \Delta E}{M}}{\frac{eE}{M} - Q} = \frac{\Delta T}{T}. \quad (4a)$$

Man erkennt sogleich, daß dieser Ausdruck mit (4) identisch ist, woraus dann ohne weiteres auch die Richtigkeit von (3) hervorgeht.

§ 58. Selbstinduktion einer Stromspule.

Die Definitionsgleichung für den Selbstinduktionskoeffizienten lautet

$$L = - \frac{V}{\frac{dJ}{dt}}. \quad (1)$$

Um L zu finden, hat man also die durch eine Stromänderung dJ/dt induzierte EmK V zu berechnen. Nun gilt allgemein

$$V = - \frac{d\Phi}{dt}, \quad (2)$$

wo Φ den Induktionslinienfluß bedeutet. Da man V nach (2) elektromagnetisch erhält, soll auch in (1) und in der Folge dasselbe Maßsystem vorausgesetzt werden. Wir berechnen L für den besonders einfachen Fall eines langgestreckten Solenoides. In diesem Falle ist das Magnetfeld im Innern homogen und hat den Wert

$$\mathfrak{H} = 4\pi J \frac{N}{l} \quad (3)$$

(siehe § 43). Der Fluß durch eine Windung ist also, wenn mit q der Querschnitt der Spule bezeichnet wird, $q \cdot \mu \cdot \mathfrak{H}$, und Φ hat für alle N Windungen zusammen daher den Wert

$$\Phi = Nq\mu\mathfrak{H}. \quad (4)$$

Unter Berücksichtigung von (3) wird

$$\Phi = Nq\mu \cdot 4\pi J \frac{N}{l}. \quad (5)$$

Diesen Wert in (2) eingesetzt liefert

$$V = - \frac{4\pi\mu q N^2}{l} \frac{dJ}{dt}. \quad (6)$$

Hieraus folgt gemäß (1)

$$L = \frac{4\pi\mu q N^2}{l}. \quad (7)$$

Dieses Resultat kann auch aus der Energiebeziehung gefunden werden:

$$E = \frac{L}{2} J^2. \quad (8)$$

Denn diese stellt eine Integrationsform der Beziehung (1) dar (siehe § 45). Die magnetische Energie E ist, da die Energiedichte eines Magnetfeldes den Wert $\frac{\mu \mathfrak{H}^2}{8\pi}$ besitzt,

$$E = \frac{\mu \mathfrak{H}^2}{8\pi} \times \text{Volumen} = \frac{\mu \mathfrak{H}^2 q l}{8\pi}. \quad (9)$$

Indem man ξ aus (3) einsetzt, ergibt sich hierfür

$$E = \frac{\mu q l}{8\pi} \cdot \frac{16\pi^2 J^2 N^2}{l^2},$$

oder schließlich

$$E = \frac{2\pi\mu q N^2}{l} \cdot J^2. \quad (10)$$

Durch Vergleich von (8) und (10) folgt dann wiederum der in (7) angegebene Wert für L .

Formel (7) gilt naturgemäß wegen der Wirkung der freien Enden der Spule nur angenähert, am besten etwa noch für eine Spule, die zu einem Kreisring zusammengeschlossen wird.

Bemerkung. Bei der exakten Berechnung von Selbstinduktionen führt der Umstand, daß in der Nähe eines Stromfadens (linearer Leiter) die magnetische Feldstärke ∞ groß wird, stets zu einer gewissen Komplikation. Diese kann nur dadurch beseitigt werden, daß man die Rechnung für Leitungsdrähte gegebener Dicke durchführt.

E. Elektrotechnik.

§ 59. Energieabgabe einer Stromquelle bei geschlossenem Elektromotor.

Eine Stromquelle, z. B. eine Batterie, mit der elektromotorischen Kraft E (Abb. 72) sei an den Punkten A und B mit einem Elektromotor verbunden. Die OHMSchen Widerstände des Kreises links und rechts von A und B seien W_a und W_i , der Gesamtwiderstand sei W . Somit $W = W_a + W_i$.

Frage. Welches ist der Energieverbrauch der Batterie, und wie ändert sich dieser mit der Belastung bzw. der Tourenzahl des Elektromotors?

Ein laufender Motor wirkt gleichzeitig als Dynamo und liefert daher eine Gegenspannung. Wir wollen sie mit P bezeichnen, da diese Größe durchaus der Polarisationsspannung entspricht, die man erhält, wenn an Stelle des Motors eine elektrolytische Zelle

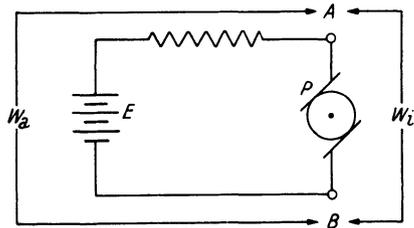


Abb. 72.

gebracht wird. P hängt offenbar von der Tourenzahl des Motors ab. Je weniger dieser belastet ist, um so größer wird also P . Das OHMSche Gesetz lautet nun

$$E - P = WJ. \quad (1)$$

Der Energieverbrauch der Batterie in der Zeiteinheit, d. h. ihre Leistung L , ist

$$L = EJ.$$

Entnimmt man J aus (1), so erhält man

$$L = \frac{E(E - P)}{W}. \quad (2)$$

Daraus geht das auf den ersten Blick sonderbar anmutende Resultat hervor, daß der Batterieverbrauch, d. h. die Leistung L , größer ist, wenn der Motor stillgehalten wird, als wenn er (unter Arbeitsleistung) läuft. Denn der Verbrauch bei feststehendem Motor, d. h. bei $P = 0$, ist nach (2)

$$L_0 = \frac{E^2}{W}. \quad (2a)$$

In diesem Falle verwandelt sich alles in Wärme. Läßt man aber den Motor laufen, so entsteht zwar ebenfalls Wärme; aber diese zusammen mit der geleisteten mechanischen Arbeit ist kleiner als dem Wert (2a) entspricht.

Zum Vergleich wird man etwa noch das Verhältnis $L : L_0$ anschreiben. Dieses ist nach (2) und (2a)

$$\frac{L}{L_0} = 1 - \frac{P}{E}. \quad (3)$$

Es kann auch bei Freilauf des Motors nicht unterhalb einen durch die Energieverluste im Motor bestimmten Wert herabsinken, da stets $P < E$. Man kann aber durch äußere Arbeitsleistung die Tourenzahl so weit hinauftreiben, daß $P = E$. Dann leistet die Batterie gar keine Arbeit mehr. Und wenn der Motor noch schneller angetrieben wird, so wird $P > E$, und der Batterie wird Energie zugeführt. Dies entspricht etwa dem praktisch wichtigen Fall einer Akkumulatorenbatterie, die aufgeladen wird.

Aufgabe. Um wieviel müßte man das E der Batterie (durch Zusatz von Elementen) vergrößern, damit bei laufendem Motor ebensoviel Energie wie bei stillstehendem verbraucht würde?

§ 60. Leistungsaufnahme eines Elektromotors.

Die Anordnung sei wiederum die der Abb. 72 (§ 59). Wird der Motor völlig gebremst, so nimmt er nur Leistung in Form von JOULEScher Wärme in seinem innern Widerstand W_i auf. Läuft er, so konsumiert er nicht nur Stromwärme, sondern noch eine Leistung infolge seiner Rotation. Diese könnte im Idealfall ganz in mechanische Energie umgewandelt werden. In Wirklichkeit aber wird diese ideale Nutzleistung nur zum Teil in mechanische Arbeit umgewandelt, zum Teil wird sie durch Reibung, Hysterese, Wirbelströme usw. im Motor verbraucht und geht so verloren.

Frage. In welcher Beziehung steht die ideale Nutzleistung L' zur Stärke der Stromquelle E ? Wie groß ist andererseits die gesamte vom Motor aufgenommene Leistung L'' ?

Man wird wiederum an die Grundbeziehung des § 59 anknüpfen:

$$E - P = WJ. \quad (1)$$

Die Nutzleistung ist offenbar gleich der Batterieleistung, vermindert um die gesamte im Stromkreis verbrauchte JOULESche Wärme, also

$$L' = EJ - WJ^2.$$

Ein Blick auf (1) zeigt, daß man diesen Ausdruck ohne weiteres gewinnt, wenn man (1) mit J erweitert. Dann folgt nämlich

$$EJ - PJ = WJ^2,$$

d. h.

$$L' = PJ. \quad (2)$$

Setzt man nun J aus (1) in (2) ein, so erhält man das Resultat

$$L' = \frac{P(E - P)}{W}. \quad (2a)$$

Die Nutzleistung ist demnach sowohl, wenn $P = 0$, als wenn $P = E$, gleich 0 und ist, wie ohne Rechnung einzusehen, am größten, wenn $P = \frac{E}{2}$. Dann ist nach (2a)

$$L'_{\max} = \frac{1}{4} \frac{E^2}{W}, \quad (3)$$

also im Hinblick auf § 59 (2a)

$$L'_{\max} = \frac{1}{4} L_0. \quad (3a)$$

Die gesamte vom Motor aufgenommene Leistung L'' erhält man, wenn man zu L' noch die im Motor verbrauchte JOULESche Wärme hinzufügt

$$\begin{aligned} L'' &= PJ + W_i J^2 \\ &= J(P + W_i J). \end{aligned} \quad (4)$$

Indem man das J in der Klammer ersetzt unter Benützung von (1), ist dies auch

$$L'' = J \frac{PW_a + EW_i}{W}. \quad (5)$$

Da die Leistung L'' andererseits $= J \times$ Klemmenspannung am Motor ist, so erkennt man, daß letztere (V) gegeben ist durch

$$V = \frac{PW_a + EW_i}{W}. \quad (6)$$

Es ist zu vermuten, daß L'' (ähnlich wie L') für ein bestimmtes P einen Maximalwert aufweist. Wir ersetzen zunächst in (5) J durch dessen Wert aus (1) und schreiben

$$L'' = \frac{E - P}{W} \frac{PW_a + EW_i}{W}.$$

Durch Differenzieren nach P erhalten wir

$$\frac{dL''}{dP} = \frac{(E - P)W_a - (PW_a + EW_i)}{W^2}.$$

Wenn wir diesen Ausdruck gleich 0 setzen, so folgt für P die Beziehung

$$P = \frac{E}{2} \left(1 - \frac{W_i}{W_a} \right). \quad (7)$$

Ein Maximalwert tritt also hier nur auf, wenn $W_i < W_a$, da nur dann P positiv ausfällt. Beim unteren Grenzfall $W_i = 0$, wo im Motor keine JOULESche Wärme verbraucht wird, erhält man nach (7) $P = \frac{E}{2}$, also dieselbe Bedingung wie oben für L' , was nicht zu verwundern, da dann überhaupt L' und L'' identisch werden. Damit ist aber auch gezeigt, daß das Resultat (7), wie im früheren Fall, auch nur einem Maximum und nicht einem Minimum entsprechen kann.

Bemerkung. Zur Demonstration des Maximums von L'' bremse man einen Elektromotor allmählich vom Leerlauf bis

zum Stillstand ab. Dann sinkt P von seinem größten Wert auf 0, und man beobachtet bei einer bestimmten Tourenzahl einen Maximalausschlag am angeschlossenen Wattmeter.

Aufgabe. Wie müssen die Elemente einer Akkumulatoren-batterie geschaltet werden, daß diese bei gegebener Stromquelle E möglichst rasch aufgeladen wird? W_i kann in diesem Falle als sehr klein außer Betracht gelassen werden.

§ 61. Addition von Wechselstromgrößen.

Gegeben seien zwei Wechselspannungen

$$V_1 = \bar{V}_1 \sin \omega t \tag{1}$$

und

$$V_2 = \bar{V}_2 \sin (\omega t + \varphi).$$

Hier bedeuten \bar{V}_1 und \bar{V}_2 die Scheitelspannungen, φ die Phasendifferenz zwischen beiden Spannungen, ω die Kreisfrequenz. Es soll gezeigt werden, wie man geometrisch die Summe $V = V_1 + V_2$ finden kann. Vorausgesetzt ist hier, wie bei allen ähnlichen Fällen, daß ω für beide Summanden gleich groß ist.

Man erkennt, daß die beiden Ausdrücke (1) die Form linearer harmonischer Schwingungen besitzen. Diese können aber immer als Projektion einer gleichförmigen Kreisbewegung aufgefaßt werden. Lassen wir nämlich einen Punkt P_1 (Abb. 73) auf einem Kreis mit dem Radius \bar{V}_1 mit gleichförmiger Winkelgeschwindigkeit ω rotieren, so hat er in der Zeit t den Winkel ωt überstrichen. Seine Projektion auf den vertikalen Durchmesser des Kreises ergibt die Strecke $V_1 = \bar{V}_1 \sin \omega t$. Für die Projektion des Punktes P_2 , der $\omega t + \varphi$ auf dem Kreise mit dem Radius \bar{V}_2 überstrichen hat, gilt analog $V_2 = \bar{V}_2 \sin (\omega t + \varphi)$. Die Rotationsbewegung der Punkte P_1 und P_2 läßt sich nun nach dem Prinzip der ungestörten Superposition zusammensetzen. Man nimmt von

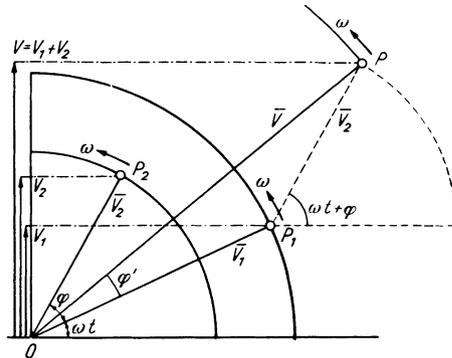


Abb. 73.

P_1 aus den Radius \bar{V}_2 in den Zirkel und trägt ihn in Richtung $\omega t + \varphi$ auf (ebensogut könnte man natürlich auch, von P_2 ausgehend, die Strecke \bar{V}_1 in Richtung ωt auftragen). So gelangt man zu einem Punkt P , dessen Projektion auf die Vertikale die Strecke $V = V_1 + V_2$, d. h. die algebraische Summe der beiden Pfeile V_1 und V_2 ergibt. P repräsentiert daher den Ort, welcher der gleichzeitigen Rotation der Punkte P_1 und P_2 auf ihrem Kreis nach Ablauf der Zeit t entspricht. V erscheint als Projektion der Strecke OP auf die Vertikale, d. h. es ist $V = \overline{OP} \cdot \sin(\omega t + \varphi')$, wenn wir mit φ' den Winkel zwischen OP und OP_1 bezeichnen. Den größten Wert, den V annehmen kann, ist \overline{OP} . Letzteres bedeutet daher den Scheitelwert der Spannung, so daß man schreiben kann $V = \bar{V} \sin(\omega t + \varphi')$. Die Summation der Ausdrücke (1) ergibt also eine resultierende Wechselspannung V mit dem Scheitelwert \bar{V} und der Phase $\omega t + \varphi'$. Diese beiden Größen findet man gemäß der Zeichnung einfach so, daß man die Strecken OP_1 und OP_2 vektoriell zur Resultanten OP zusammensetzt. Man darf daher V_1 und V_2 als Vektoren behandeln. Das Argument des Sinus gibt die Richtung an, in welcher der Zahlenwert des Vektors, d. h. der Scheitelwert, aufzutragen ist. Dann gibt die Länge des resultierenden Pfeiles den resultierenden Scheitelwert und dessen Richtung die Phase an. Die Konstruktion kann für beliebige t -Werte ausgeführt werden. Die relative Lage der Strecken OP_1 , OP_2 und OP zueinander bleibt davon unberührt, d. h. φ' bleibt zeitlich konstant. Dies folgt aus der Unveränderlichkeit der gegenseitigen Lage von OP_1 und OP_2 , die gemäß Konstruktion ein festes Verhältnis zu P bedingt. Demgemäß muß auch P mit derselben Winkelgeschwindigkeit wie P_1 und P_2 rotieren.

Die vektorielle Behandlungsweise von Wechselstromgrößen läßt sich nicht nur geometrisch, sondern auch algebraisch begründen. Wir setzen

$$V = V_1 + V_2 = \bar{V}_1 \sin \omega t + \bar{V}_2 \sin(\omega t + \varphi), \quad (2)$$

und wollen nun 1. zeigen, daß V wieder eine Wechselspannung mit der Kreisfrequenz ω ist und 2., daß Scheitelwert und Phase der vektoriellen Zusammensetzung von V_1 und V_2 entsprechen. Wir setzen also

$$V = \bar{V} \sin(\omega t + \varphi'). \quad (3)$$

Durch Gleichsetzen von (2) und (3) und Entwickeln der Sinusglieder erhalten wir

$$\begin{aligned} \bar{V} \sin \omega t \cos \varphi' + \bar{V} \cos \omega t \sin \varphi' \\ = \bar{V}_1 \sin \omega t + \bar{V}_2 \sin \omega t \cos \varphi + \bar{V}_2 \cos \omega t \sin \varphi. \end{aligned} \quad (4)$$

Damit diese Gleichung für beliebige Werte von t erfüllt ist, müssen einerseits die Faktoren von $\sin \omega t$ und andererseits die Faktoren von $\cos \omega t$ auf der linken Seite der Gleichung gleich denen der rechten Seite sein. Das heißt, es muß sein

$$\begin{aligned} \bar{V} \cos \varphi' &= \bar{V}_1 + \bar{V}_2 \cos \varphi \\ \text{und} \quad \bar{V} \sin \varphi' &= \bar{V}_2 \sin \varphi. \end{aligned} \quad (5)$$

Hieraus folgt durch Quadrieren und Addieren

$$\bar{V}^2 = \bar{V}_1^2 + \bar{V}_2^2 + 2\bar{V}_1 \bar{V}_2 \cos \varphi, \quad (6)$$

ferner durch Division

$$\operatorname{tg} \varphi' = \frac{\bar{V}_2 \sin \varphi}{\bar{V}_1 + \bar{V}_2 \cos \varphi}. \quad (7)$$

Wir stellen also zunächst fest, daß es möglich ist, $V_1 + V_2$ durch eine Wechselspannung der Kreisfrequenz ω gemäß (3) darzustellen. Bedingung hierfür ist die Erfüllung der Gleichungen (6) und (7). (6) sagt aber nichts anderes aus, als daß \bar{V} die Diagonale eines Parallelogramms mit den beiden Seiten \bar{V}_1 und \bar{V}_2 und dem eingeschlossenen Winkel φ bedeutet. Denn nach Abb. 73 ist gemäß dem Kosinussatz

$$\bar{V}^2 = \bar{V}_1^2 + \bar{V}_2^2 - 2\bar{V}_1 \bar{V}_2 \cos(180 - \varphi).$$

(7) entspricht der Formel, nach welcher sich der Winkel zwischen \bar{V} und \bar{V}_1 berechnet. Damit ist aber bewiesen, daß man die Summe zweier Wechselspannungen erhält, wenn man deren Scheitelwerte vektoriell zusammensetzt. Die Resultante gibt dann den Scheitelwert und die Phase der resultierenden Spannung.

§ 62. Wechselstromwiderstand eines Schwingungskreises.

Eine Wechselspannung $V = \bar{V} \sin \omega t$ werde an einen Schwingungskreis angelegt (Abb. 74). Dann fließt ein Teil des Wechselstroms durch den Kondensator C mit dem Widerstand W_2 und ein

Teil durch die Stromspule mit dem Widerstand W_1 , und es ist in jedem Moment

$$i = i_1 + i_2. \quad (\text{I})$$

Bezeichnen wir die Scheitelwerte der Ströme mit \bar{i} , \bar{i}_1 und \bar{i}_2 , so folgen die entsprechenden Widerstände W , W_1 und W_2 nach dem OHMSchen Gesetz aus

$$\frac{I}{W} = \frac{\bar{i}}{\bar{V}}, \quad \frac{I}{W_1} = \frac{\bar{i}_1}{\bar{V}} \quad \text{und} \quad \frac{I}{W_2} = \frac{\bar{i}_2}{\bar{V}}. \quad (\text{2})$$

Da \bar{V} überall als gemeinsamer Faktor auftritt, so sind die Leitwerte I/W , I/W_1 und I/W_2 den Scheitelwerten der Ströme proportional. Das heißt aber, die in der geometrischen Darstellung aufgetragenen Stromwerte stellen bis auf einen konstanten Faktor auch die Leitwerte dar.

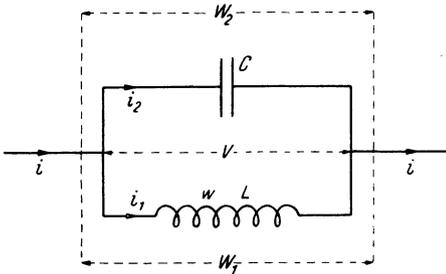


Abb. 74.

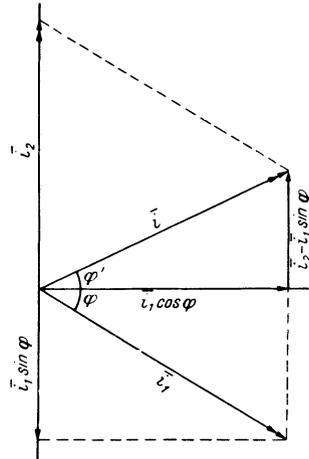


Abb. 75.

Der Strom i_1 in der Stromspule hinkt hinter V nach. Die Phasenverschiebung betrage φ . Dann ist \bar{i}_1 unter dem Winkel $-\varphi$ aufzutragen (Abb. 75). i_2 eilt andererseits um $\pi/2$ voraus, also weist i_2 nach oben. Die Zusammensetzung von i_1 und i_2 kann nun so geschehen, daß man i_1 erst in seine Komponenten $i_1 \sin \varphi$ und $i_1 \cos \varphi$ zerlegt und die erstere von i_2 subtrahiert. Dann hat man die Resultante aus dem horizontalen Teil $i_1 \cos \varphi$ und dem vertikalen $i_2 - i_1 \sin \varphi$ zu bilden, was uns liefert

$$\bar{i}^2 = (\bar{i}_1 \cos \varphi)^2 + (\bar{i}_2 - \bar{i}_1 \sin \varphi)^2,$$

d. h.

$$\bar{i}^2 = \bar{i}_1^2 + \bar{i}_2^2 - 2\bar{i}_1\bar{i}_2 \sin \varphi. \quad (3)$$

Dies ergibt unter Berücksichtigung von (2)

$$\frac{I}{W^2} = \frac{I}{W_1^2} + \frac{I}{W_2^2} - \frac{2 \sin \varphi}{W_1 W_2}. \quad (4)$$

Nun ist in bekannter Weise der Wechselstromwiderstand

für einen Kondensator $W_2 = \frac{I}{\omega C},$

für eine Stromspule $W_1 = \sqrt{w^2 + \omega^2 L^2},$

ferner ist

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\omega L}{w} \quad \text{und damit} \quad \sin \varphi = \frac{\omega L}{\sqrt{w^2 + \omega^2 L^2}},$$

also erhält man

$$\frac{I}{W^2} = \frac{I}{w^2 + \omega^2 L^2} + \omega^2 C^2 - \frac{2 \omega L \omega C}{w^2 + \omega^2 L^2}.$$

Auf gleichen Nenner gebracht kommt

$$\frac{I}{W^2} = \frac{I + w^2 \omega^2 C^2 + \omega^4 L^2 C^2 - 2 \omega^2 L C}{w^2 + \omega^2 L^2}.$$

Das 1., 3. und 4. Glied im Zähler geben ein vollständiges Quadrat, so daß man das Resultat schreiben kann

$$W = \sqrt{\frac{w^2 + \omega^2 L^2}{(I - \omega^2 L C)^2 + \omega^2 C^2 w^2}}. \quad (5)$$

Die Phasendifferenz zwischen i und V erhält man gemäß Abb. 75 zu

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \varphi' &= \frac{W_1 - W_2 \sin \varphi}{W_2 \cos \varphi} \\ &= \frac{W_1}{W_2 \cos \varphi} - \operatorname{tg} \varphi \\ &= \frac{\omega C \sqrt{w^2 + \omega^2 L^2}}{\cos \varphi} - \frac{\omega L}{w}. \end{aligned} \quad (6)$$

Wenn man für $\cos \varphi$ noch seinen Wert einsetzt, findet man schließlich

$$\operatorname{tg} \varphi' = \omega C w - \frac{\omega L}{w} (I - \omega^2 L C). \quad (7)$$

Aus (5) geht hervor, daß W ein Maximum wird, wenn

$$I - \omega^2 L C = 0, \quad (8)$$

d. h. wenn Stromresonanz vorhanden ist. Es wird dann

$$W = \frac{\sqrt{w^2 + \omega^2 L^2}}{\omega C w} \quad \text{oder} \quad W = \frac{W_1 W_2}{w}. \quad (9)$$

Ist w verschwindend klein, so stellt der Schwingungskreis praktisch einen Stromunterbruch dar, da $W = \infty$. Für φ' erhält man

$$\operatorname{tg} \varphi' = \omega C w. \quad (10)$$

Dieser Ausdruck kann vermöge Beziehung (8) auch in der Form geschrieben werden

$$\operatorname{tg} \varphi' = \frac{w}{\omega L}. \quad (10a)$$

Man hat daher

$$\operatorname{tg} \varphi' \operatorname{tg} \varphi = 1. \quad (10b)$$

φ' ist bei Resonanz stets von Null verschieden, solange $w \neq 0$ ist. Es ist jedoch möglich, φ' unter anderen Bedingungen zu Null zu machen. Indem wir den Ausdruck (7) gleich Null setzen, erhalten wir hierfür die Beziehung

$$\frac{L}{C} = w^2 + \omega^2 L^2. \quad (11)$$

Allgemeine Bemerkung. Bei Parallel-Hintereinander-Schaltung sind die Ströme vektorieU zusammenzusetzen. Da die Spannungen der Strom für die einzelnen Teile dieselbe ist, so ergibt die Summation den resultierenden reziproken Widerstand

Aufgabe. Man führe die Rechnung in der hier gezeigten Weise unter der Annahme durch 1. daß vor den Kondensator ein OHMScher Widerstand gelegt sei, 2. daß parallel zum Kondensator ein OHMScher Widerstand liege. Letzteres repräsentiert das Ersatzschema für den Fall eines mit Verlusten behafteten Kondensators.

F. Radiologie.

§ 63. Druck durch bewegte Ionen.

Nicht nur in Elektrolyten, sondern auch in Gasen bewegen sich die Ionen unter Reibung durch das Medium und nehmen daher in einem elektrischen Felde \mathcal{E} eine gleichförmige Geschwin-

digkeit v an. Bezeichnet man die Geschwindigkeit im Felde \mathfrak{E} V/cm mit u , so gilt

$$v = u\mathfrak{E}. \tag{1}$$

Die Ionen übertragen dabei fortwährend Impuls auf die Gasmoleküle, und es entstehen Druckdifferenzen, die den elektrischen Wind verursachen.

Frage. Welches sind die durch den Ionenstrom hervorgerufenen Gasdruckänderungen?

Wir wollen, um möglichst einfache Verhältnisse zu bekommen, der Berechnung eine Anordnung zugrunde legen, bei der nur Druckänderungen, aber keine Gasströmungen auftreten. Wir erzeugen z. B. einen Ionenstrom in einem abgeschlossenen Gasraum. Zwischen zwei Kondensatorplatten $P_1 P_2$ wird (Abb. 76), sofern diese genügend groß und nahe beieinander sind, die Luft an allen Stellen eines Querschnitts gleich stark nach rechts bzw.

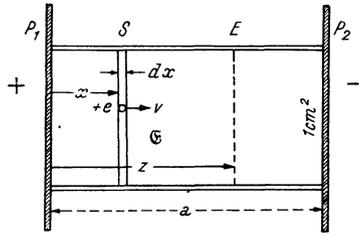


Abb. 76.

nach links bewegt, kann aber seitlich nicht ausweichen, und es entstehen Druckdifferenzen in der Längsrichtung.

Hier liegt nun ein Fall vor, wo es für die Berechnung und das Verständnis nötig ist, erst auf den elementaren Vorgang einzugehen und dann den Allgemeinfall sozusagen aus seinen Bestandteilen aufzubauen. Wir denken uns einmal ein einzelnes Ion mit seiner Ladung $+e$ an irgendeiner Stelle, z. B. in der Schicht S entstanden (Abstand x). Auf dieses wirke die Kraft $K = \mathfrak{E} \cdot e$. Auf einer beliebigen Strecke $SE = z - x$ überträgt es an die Gasmoleküle den Impuls $K \cdot t$, wo t die Laufzeit von S nach E ist. Da $v = \frac{z - x}{t}$, so haben wir für den Impuls

$$K t = \mathfrak{E} e \frac{z - x}{v}.$$

Gemäß (1) ergibt dies, wenn wir die Beweglichkeit für $+$ Ionen mit u^+ bezeichnen:

$$K t = \frac{e (z - x)}{u^+}. \tag{2}$$

Starten nun aus der dünnen Schicht S (Dicke dx) pro Sekunde Z Ionen, so ist der auf die Zwischenschicht $S-E$ pro Sekunde übertragene Impuls oder die treibende Kraft gegeben durch

$$K_1 = Z K t = Z \frac{e(z-x)}{u^+}. \quad (3)$$

Dieser hält nun eine Gegenkraft in Form eines in E gegenüber S erhöhten Gasdruckes p_z das Gleichgewicht. Die Druckerhöhung an E ist daher

$$p_z = Z \frac{e(z-x)}{u^+}. \quad (3a)$$

Befindet sich die Ionen emittierende Schicht (Oberflächenionisierung) an P_1 , so gilt, da $x = 0$,

$$p_z = \frac{Z e z}{u^+}. \quad (4)$$

Der Druck steigt linear an und beträgt an der Gegenplatte $z = a$

$$p_a = \frac{Z e a}{u^+}. \quad (4a)$$

p_a ist der Überdruck an P_2 gegenüber P_1 und ist, verglichen mit dem Gasdruck selbst, klein. Daher durfte auch bei der Ableitung u^+ räumlich als konstant angenommen werden, obschon es eine Funktion des Gasdruckes ist.

Man beachte, daß in (4) bzw. (4a) die Feldstärke \mathcal{E} nicht vorkommt. Bei konstantem Z ist der Ionendruck also ganz unabhängig von der angelegten Spannung. In Wirklichkeit liegen die Verhältnisse allerdings anders. Sendet P_1 z. B. Glühionen aus, dann wird von diesen je nach der angelegten Spannung nur ein mehr oder weniger großer Prozentsatz der pro Sekunde gebildeten Ionen in die Strombahn gezogen. Der Gasdruck p_a wächst also genau nach dem Gesetz an, nach dem der Ionenstrom mit der Spannung ansteigt. Man könnte geradezu die Sättigungskurve manometrisch aufnehmen.

Wir erweitern nun unsere Betrachtung auf den Fall, wo die Ionen nicht nur in einer dünnen Schicht S , sondern im ganzen Zwischenraum erzeugt werden. Damit erhalten wir allerdings die Komplikation, daß immer $+$ - und $-$ -Ionen gleichzeitig entstehen. Wir können uns aber die Betrachtung dadurch vereinfachen, daß wir annehmen, es sei nur eine Ionensorte vor-

handen. Und weiterhin wird man sich auf den einfachsten Fall beschränken, daß die Ionisierung homogen sei, d. h. daß in jedem Kubikzentimeter pro Sekunde $N +$ -Ionen gebildet werden. Dann ist die in der Schicht S (Querschnitt 1 cm^2) erzeugte Menge $N \cdot dx$ und die Druckerhöhung, welche diese Ionen erzeugen, ist gemäß (3)

$$\frac{Ne}{u^+} (z - x) dx. \quad (5)$$

Nun denken wir uns den ganzen Zwischenraum zwischen P_1 und E in lauter solche Schichten S zerlegt und summieren alle durch (5) wiedergegebenen Einzelwirkungen. So erhalten wir unmittelbar

$$\int_0^z \frac{Ne}{u^+} (z - x) dx.$$

Dies ergibt

$$\frac{Ne}{u^+} \left[zx - \frac{x^2}{2} \right]_0^z = \frac{Ne}{u^+} \left(z \cdot z - \frac{z^2}{2} \right),$$

oder

$$p_z^+ = \frac{Ne z^2}{2u^+}. \quad (6)$$

Der Druckanstieg ist also quadratisch und hängt wiederum nicht von \mathcal{E} ab.

In Wirklichkeit kommt nun noch ein entgegengesetzter negativer Ionenstrom hinzu. Dessen Wirkung superponiert sich, so daß wir in derselben Schicht E eine Druckerhöhung in entgegengesetzter Richtung erhalten. An Stelle von u^+ müssen wir jetzt u^- und an Stelle des Abstandes z , den Abstand von P_2 , also $a - z$ setzen. Es ist somit

$$p_z^- = \frac{Ne (a - z)^2}{2u^-}. \quad (7)$$

Den Ionendruck der $+$ -Ionen an P_2 erhält man, wenn man in (6) $z = a$ setzt. Somit haben wir

$$p_a^+ = \frac{Ne a^2}{2u^+}. \quad (6a)$$

Den Ionendruck der $-$ -Ionen an P_1 erhalten wir andererseits, wenn wir in (7) $z = 0$ setzen. Also ist

$$p_0^- = \frac{Ne a^2}{2u^-}. \quad (7a)$$

Zum besseren Verständnis tragen wir die beiden Kurven (6) und (7) in Abb. 77 unter der gewöhnlich zutreffenden Voraussetzung, daß $u^+ < u^-$, auf. Die Kurven p_z^+ und p_z^- geben nun den Druckverlauf für die beiden Fälle an, daß je nur eine Ionensorte allein vorhanden sei. Wie ist der Verlauf nun bei gleichzeitiger Wirkung beider Ionen? Die $+$ -Ionen erzeugen eine Druckerhöhung nach rechts, die $-$ -Ionen nach links. Also hätte man allem Anschein nach einfach eine Differenzwirkung, und der resultierende Verlauf ergäbe sich als Differenz von $p_z^+ - p_z^-$. Wir haben hier aber ein hübsches Beispiel für einen naheliegenden Trugschluß vor uns. Denn es ist gerade umgekehrt. Den resul-

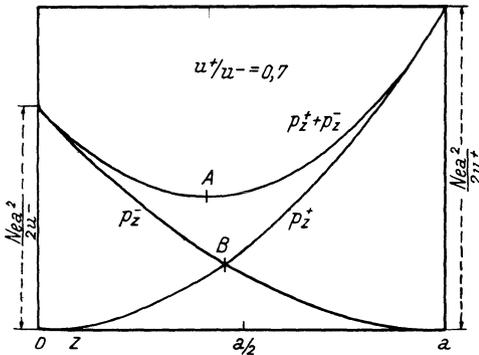


Abb. 77.

Man hat also überall zu den Ordinaten von p_z^+ noch die von p_z^- zu addieren, und erhält dann die in Abb. 77 eingezeichnete muldenförmige Kurve $p_z = p_z^+ + p_z^-$.

Es ist

$$p_z = \frac{N e}{2} \left(\frac{z^2}{u^+} + \frac{(a-z)^2}{u^-} \right). \quad (8)$$

Hiernach bzw. aus Abb. 77 ist zu ersehen, daß im ganzen Zwischenraum $P_1 P_2$ Überdruck herrscht. Diesen kann man sich wiederum aus der Zusammensetzung des Endzustandes aus den Einzeleffekten erklären. Man denke sich zunächst das Gefäß Abb. 76 stromlos. In P_1 befindet sich eine kleine Öffnung, so daß der Druck innen und außen ausgeglichen ist. Nun lasse man den $+$ -Ionenstrom einsetzen. Gegen P_2 bildet sich eine Druckerhöhung aus, und es wird durch die Öffnung in P_1

tierenden Druck erhält man durch Addition von p_z^+ und p_z^- . Denn man denke sich erst den positiven Ionenstrom allein. Dann stellt sich der Druckverlauf p_z^+ (Abb. 77) ein. Nun setzen wir den $-$ -Ionenstrom zu. Dieser bildet über dieser Druckkurve den seinem p_z^- entsprechenden Druckverlauf aus.

eine entsprechende Menge Luft eingesogen. Jetzt schließen wir diese Öffnung und machen eine solche in P_2 . Damit nun keine Luft ausströme, erhöhen wir dort den äußeren Druck um p_a gemäß (6a). Jetzt lassen wir den —-Ionenstrom einsetzen. Sogleich entsteht eine gegen P_1 hin zunehmende Druckerhöhung, und es wird entsprechend Luft durch die Öffnung in P_2 nachgesogen. Es entsteht der resultierende durch p_z wiedergegebene Druckverlauf, der nun den Drucküberschuß gegenüber der Atmosphäre im Zwischenraum zwischen P_1 und P_2 angibt.

Gewöhnlich interessiert die Druckdifferenz zwischen den beiden Platten. Diese ist, wie aus Abb. 77 ohne weiteres ersichtlich,

$$p_{12} = \frac{N e a^2}{2} \left(\frac{1}{u^+} - \frac{1}{u^-} \right). \quad (9)$$

Für die Lage des Druckminimums zwischen $P_1 P_2$, d. h. für A , findet man aus (8) leicht die Beziehung

$$\frac{a-z}{z} = \frac{u^-}{u^+}. \quad (10)$$

Diese gibt, wie die Ionenlehre zeigt, zugleich die Lage für die neutrale Schicht an, welche die an P_1 liegende —- und an P_2 liegende +-Raumladung voneinander trennt. Die größte zwischen P_1 und P_2 auftretende Druckdifferenz liegt offenbar zwischen A und P_2 ¹. Die Lage von A stimmt nicht etwa mit der von B , wo $p_z^+ = p_z^-$ ist, überein. Dieser Punkt ist bestimmt durch

$$\frac{a-z}{z} = \sqrt{\frac{u^-}{u^+}}. \quad (11)$$

Zum Schluß bemerken wir noch ausdrücklich, daß unsere Formeln nur für ein räumlich konstantes N gelten. Hierfür sind zwei Bedingungen zu erfüllen: 1. muß die gebildete Ionenzahl in jedem Kubikzentimeter die gleiche sein, 2. ist für Sättigungsstrom zu sorgen. Mit dem Vorhandensein von Wiedervereinigung ist weder die Ionendichte räumlich konstant, noch ist überhaupt die Zahl der +- und —-Ionen an einem gegebenen Ort gleich groß.

¹ Phys. ZS. 19, 188 (1918).

Im übrigen läßt sich eine weitere Verallgemeinerung der Formeln für den Fall räumlich variabler Ionisierung und bei Vorhandensein verschiedener Ionensorten unschwer durchführen¹.

Frage. In einem abgeschlossenen Gefäß (Abb. 76) entsteht durch den Ionenstrom an P_2 ein größerer Gasdruck als an P_1 . Warum erfährt das Gefäß trotzdem keine nach rechts treibende Kraft?

Aufgabe. Man rechne die Druckdifferenz zwischen AP_1 und AP_2 (Abb. 76 u. 77) aus.

§ 64. Bestimmung der Lichtgeschwindigkeit mit Hilfe von Ionenströmen.

Als Umrechnungsfaktor zwischen dem elektrostatischen und dem elektromagnetischen Maßsystem erscheint die „kritische Geschwindigkeit“, die mit der Lichtgeschwindigkeit identisch ist. Um diese zu bestimmen, hat man also eine und dieselbe Größe einmal im einen und einmal im andern Maß zu messen. Mit Vorliebe wurde die Kapazitätsmessung angewendet, die sich durch besondere Genauigkeit auszeichnet und den Vorteil hat, daß man die Kapazität elektrostatisch nicht zu bestimmen braucht, sondern aus den Abmessungen des Kondensators sehr genau berechnen kann. In gewisser Hinsicht noch einfacher ist es², die Dielektrizitätskonstante zu benutzen. Wählt man als Versuchsobjekt das Vakuum, dann braucht die DK. elektrostatisch überhaupt nicht gemessen zu werden, sie hat den Wert 1. Geeignet erweist sich hier die Poissonsche Gleichung³

$$\epsilon \Delta V = -4\pi \rho. \quad (1)$$

Hier bedeutet ΔV in bekannter Weise die Summe der zweiten Ableitungen nach den drei Koordinaten

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2},$$

¹ HESS, V. F.: S.-B. Akad. Wiss. Wien, Abt. IIa **129**, Heft 6 (1920).

² Siehe ausführlicher ZS. f. Phys. **10**, 63 (1922). — Ionen und Elektronen, S. 52. Teubner 1934.

³ In der oft gebrauchten Form $\Delta V = -4\pi \rho$ gilt die Beziehung nur für das Vakuum und stimmt auch in den Dimensionen nur im elektrostatischen Maßsystem.

oder, da die Komponenten der Feldstärke $\mathfrak{E}_x = -\frac{\partial V}{\partial x}$ usw. sind,

$$-\left(\frac{\partial \mathfrak{E}_x}{\partial x} + \frac{\partial \mathfrak{E}_y}{\partial y} + \frac{\partial \mathfrak{E}_z}{\partial z}\right) = -\operatorname{div} \mathfrak{E} \text{ (Divergenz von } \mathfrak{E}\text{)}.$$

q ist die räumliche Ladung im Kubikzentimeter, ε die DK.

Man kann nun (1) für das elektromagnetische und das elektrostatische Maßsystem anschreiben. Mit den entsprechenden Indizes hat man dann

$$\varepsilon_m \operatorname{div} \mathfrak{E}_m = 4\pi q_m \quad (1a)$$

und

$$\varepsilon_s \operatorname{div} \mathfrak{E}_s = 4\pi q_s. \quad (1b)$$

Dazu kommt noch

$$\varepsilon_m = \frac{\varepsilon_s}{c^2}, \quad (2)$$

wo c die Lichtgeschwindigkeit bedeutet. Besteht nun eine experimentelle Möglichkeit, (1) auf das Vakuum anzuwenden, so wird (1b) zur Messung von ε_s gar nicht benötigt. Man kann in (2) $\varepsilon_s = 1$ setzen und unter Verwendung von $\varepsilon_m = \frac{1}{c^2}$ wird (1a) dann

$$\frac{1}{c^2} \operatorname{div} \mathfrak{E}_m = 4\pi q_m. \quad (3)$$

Man hat nun im Prinzip an irgendwelchen Raumladungen q_m im Vakuum die $\operatorname{div} \mathfrak{E}_m$ zu messen, um aus (3) c zu finden. Solche Raumladungen sind leicht herzustellen, so durch Elektronen. Ja, auch Ionen in Luft und in anderen Gasen können verwendet werden, da man die DK. der Gase immer noch praktisch = 1 setzen darf. Hingegen erweisen sich die Größen der Beziehung (3) ungeeignet zur Messung. Nun muß aber auch jede andere Beziehung, die sich aus (3) herleitet, zur Bestimmung von c verwendbar sein. Eine solche ist die Raumladungscharakteristik, d. h. die Beziehung zwischen Strom und Spannung für ein ionisiertes Gas. Besonders einfach sind die Ausdrücke für den Fall der Oberflächenionisierung. Wir weisen hier auf folgende Fälle hin:

1. Elektronenstrom im Vakuum zwischen einer Zylinderelektrode und einem coaxialen Glühdraht (Länge = l , Radius = r). Für diesen gilt nach SCHOTTKY

$$c^2 J_m = \frac{2}{9} \sqrt{2 \frac{e_m}{m} \frac{l}{r}} V_m^{3/2}. \quad (4)$$

e_m/m bedeutet dabei die spezifische Elektronenladung (Ladung pro Masseneinheit).

2. Ionenstrom in Gasen.

a) Für einen Plattenkondensator (Abstand = a , Ionenbeweglichkeit = u_m) findet man nach RUTHERFORD

$$c^2 J_m = \frac{9 u_m}{32 \pi a^3} V_m^2. \quad (5)$$

b) Für zylindrische Anordnung (innerer und äußerer Radius = a bzw. b , Länge = l) ist nach GREINACHER¹

$$c^2 J_m = \frac{l u_m V_m^2}{2 a^2 (\sqrt{(b/a)^2 - 1} - \arctg \sqrt{(b/a)^2 - 1})^2}. \quad (6)$$

Praktisch am einfachsten ist die Anwendung der Formel (4). Wenn wir V_m , I_m und e_m in Volt, Ampere und Coulomb umrechnen, so findet man nach c aufgelöst

$$c = 0,997 \cdot 10^8 \sqrt{\frac{l}{r} V^{3/2} \sqrt{\frac{e}{m}}}. \quad (4a)$$

Hier liegen nun bereits genügend, allerdings zu anderem Zwecke ausgeführte Messungen vor. Um einen Zahlenwert für c zu finden, können wir daher irgendwelche in der Literatur vorkommende Angaben benützen. So z. B. die von DUSHMAN² in Amerika gefundenen Zahlen $i = 0,130$ Ampere, $V = 129$ Volt, $r = 1,27$ cm und $l = 7,62$ cm. Mit diesen finden wir unter Verwendung von $\frac{e}{m} = 1,76 \cdot 10^8$ Clb/g $c = 2,99 \cdot 10^{10}$ cm/s.

Bemerkung. Will man e/m nicht von vornherein als bekannt voraussetzen, so läßt sich dieses auch mit derselben zylindrischen Anordnung leicht bestimmen³.

§ 65. Kathodenstrahlengeschwindigkeit und Beschleunigungsspannung.

Ein Elektron (Ladung $-e$, Masse m) fliege ungestört von der Kathode K zur Anode A (Abb. 78). Durch die Potential-

¹ Ionen und Elektronen, S. 31. Teubner 1924.

² DUSHMAN, S.: Phys. ZS. 15, 684 (1914).

³ Beschrieben in Verh. d. Dtsch. Phys. Ges. 14, 856 (1912). — Einführung in die Ionen- und Elektronenlehre, S. 84. Bern: P. Haupt 1923.

differenz V werde es von der Geschwindigkeit 0 bis zur Endgeschwindigkeit v beschleunigt. Die dabei geleistete elektrische Arbeit ist $A = eV$. Da diese sich in kinetische Energie umsetzt, haben wir

$$eV = \frac{m}{2} v^2, \quad (1)$$

woraus in bekannter Weise folgt

$$v = \sqrt{2V \frac{e}{m}}. \quad (2)$$

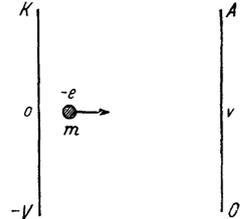


Abb. 78.

Da Kathodenstrahlen aber Geschwindigkeiten annehmen können, die mit der Lichtgeschwindigkeit c vergleichbar sind, kann die klassische Formel (1) nur beschränkte Gültigkeit besitzen. Es ist zu bedenken, daß die Masse eine Funktion der Geschwindigkeit ist (siehe § 7):

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - (v/c)^2}}. \quad (3)$$

Um diesem Umstand Rechnung zu tragen, läge es nahe, einfach Ausdruck (3) in (1) einzusetzen. Man erhielte dann eine leicht zu lösende, biquadratische Gleichung in v . Das Resultat wäre aber nicht korrekt, da die Kombination eines „klassischen“ Ausdrucks (1) mit einem „relativistischen“ (3) nur ein Mittelglied zwischen beiden geben kann, also eine Formel mit beschränkter Gültigkeit. Der in (1) verwendete Ausdruck für die kinetische Energie ist aber der klassischen Mechanik entnommen. Um nun den korrekten (allgemein gültigen) Ausdruck zu gewinnen, müssen wir den Satz von der Äquivalenz von Energie und Masse verwenden. Die Energie eines ruhenden Elektrons ist, wenn m_0 seine Ruhemasse bedeutet, $m_0 c^2$, die eines bewegten mc^2 . Die Zunahme $(m - m_0)c^2$ entspricht der kinetischen Energie. Diese ist also unter Berücksichtigung von (3)

$$m_0 c^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} - 1 \right). \quad (4)$$

Die Energiegleichung (1) haben wir demgemäß korrekterweise zu schreiben

$$eV = m_0 c^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} - 1 \right). \quad (5)$$

Die Auflösung nach v ist sehr einfach zu bewerkstelligen. Man findet

$$v = c \sqrt{1 - \frac{1}{\left(1 + \frac{eV}{m_0 c^2}\right)^2}}. \quad (6)$$

Maßgebend für die Endgeschwindigkeit ist also das Verhältnis der beiden Energien eV und $m_0 c^2$, d. h. der elektrischen Arbeit und der Eigenenergie des Elektrons. Solange erstere klein, d. h. solange $eV \ll m_0 c^2$, gilt die klassische Formel (1). Denn (6) reduziert sich dann unter Benützung der Näherungsformel $(1+x)^n = 1 + nx$ folgendermaßen

$$v = c \sqrt{1 - \left(1 + \frac{eV}{m_0 c^2}\right)^{-2}} = c \sqrt{1 - \left(1 - 2 \frac{eV}{m_0 c^2}\right)} = \sqrt{2V \frac{e}{m_0}}.$$

Für den anderen Grenzfall, wo $eV \gg m_0 c^2$, erhält man andererseits, da das 1 im Nenner zu vernachlässigen ist,

$$v = c \sqrt{1 - \left(\frac{m_0 c^2}{eV}\right)^2}, \quad (7)$$

und schließlich unter Benützung derselben Näherungsformel

$$v = c \left[1 - \frac{1}{2} \left(\frac{m_0 c^2}{eV}\right)^2\right]. \quad (7a)$$

Man wird etwa noch die Zahlenwerte für $\frac{e}{m_0} = 1,76 \cdot 10^7$ el. magn. E. und $c = 3 \cdot 10^{10}$ cm/s einsetzen, ferner V , statt elektromagnetisch, in Volt angeben, also statt V setzen $V \cdot 10^8$. Man erhält dann für (6)

$$v = c \sqrt{1 - \frac{1}{\left(1 + 1,96 \cdot 10^{-6} V\right)^2}}. \quad (6a)$$

Hieraus ergibt sich z. B. für

$$V = 1 \text{ Million Volt: } \frac{v}{c} = 0,941$$

$$V = 2 \text{ Million Volt: } \frac{v}{c} = 0,979.$$

Wir bemerken, daß diese Formeln von allgemeiner Bedeutung sind, denn sie gelten für alle Ionenstrahlen. Man hat nur die entsprechenden Werte von e/m_0 einzusetzen.

Aufgabe. Wie groß wäre nach (1) die Spannung, um Kathodenstrahlen von Lichtgeschwindigkeit zu erhalten?

§ 66. Röntgenwellen und Materiewellen.

Die Materiewellen, die einem mit der Geschwindigkeit v bewegten Teilchen der Masse m nach DE BROGLIE zuzuordnen sind, haben die Wellenlänge

$$\lambda' = \frac{h}{m v}, \quad (1)$$

wo h das PLANCKSche Wirkungsquantum $h = 6,6 \cdot 10^{-27}$ erg \cdot s bedeutet. Dieser winzigen Größe entsprechend sind die Wellen im allgemeinen schon bei geringen Geschwindigkeiten v so klein, daß sie nicht mehr nachweisbar sind. Indessen können doch Elektronen mit ihrer kleinen Masse schon namhafte Geschwindigkeiten annehmen, ohne daß dies der Fall wäre. In Form der Kathodenstrahlen besitzen sie Wellenlängen, die mit denen der Röntgenstrahlen vergleichbar sind. Dies zeigt sich dann dadurch an, daß sie ähnliche Beugungserscheinungen wie diese hervorrufen können. Es besteht auch keine Schwierigkeit, die Materiewellen einer Kathodenstrahlung durch Wahl der passenden Beschleunigungsspannung an die Wellenlänge irgendeiner monochromatischen Röntgenstrahlung anzugleichen. Eine andere Frage ist es, in welchem Verhältnis die Wellen zweier genetisch miteinander verknüpften Röntgen- und Elektronenstrahlen stehen.

Frage. Sind in diesem Falle Materie- und Röntgenwellen stets oder nur für eine bestimmte Entladungsspannung gleich lang oder sind sie stets verschieden groß? Welches ist dann die längere Welle?

Für die kurzwellige Grenze der Bremsstrahlung (weißes Röntgenlicht) hat man die EINSTEINSche Beziehung

$$e V = h \nu. \quad (2)$$

e = Ladung des Elektrons, V = Entladungsspannung und ν = Frequenz. Die Wellenlänge λ ergibt sich aus der allgemeinen Wellengleichung $c = \lambda \nu$ (c = Lichtgeschwindigkeit), so daß man hat

$$\lambda = \frac{h c}{e V}. \quad (2a)$$

Nun sind λ und λ' nicht unabhängig voneinander, da die Beziehung gilt (siehe § 65)

$$e V = c^2(m - m_0), \quad (3)$$

wo m_0 die Ruhemasse des Elektrons bedeutet.

Um nun zwei Größen, z. B. λ und λ' , miteinander zu vergleichen, kann man entweder die Differenz oder den Quotienten bilden. Im ersten Falle ist zu fragen, ob der Ausdruck $+$ oder $-$, im zweiten ob er $\cong 1$ ist. Das Zweckmäßigere erkennt man sofort, wenn man zunächst einmal den Wert von eV aus (3) in (2a) einsetzt. Man erhält

$$\lambda = \frac{h}{c(m - m_0)}. \quad (3a)$$

Man wird sich leicht für die Bildung des Quotienten entscheiden, schon da dann h herausfällt, also schreiben

$$\frac{\lambda}{\lambda'} = \frac{mv}{c(m - m_0)}. \quad (4)$$

In diesem Ausdruck stecken zunächst zwei Variable m und v , und wird man die eine vermittels der Beziehung

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} \quad (5)$$

eliminieren müssen. Dies geschieht besonders einfach, wenn man (4) erst in der Form schreibt

$$\frac{\lambda}{\lambda'} = \frac{v/c}{1 - m_0/m}.$$

Mit Rücksicht auf (5) ergibt dies sofort

$$\frac{\lambda}{\lambda'} = \frac{v/c}{1 - \sqrt{1 - (v/c)^2}} = \frac{\beta}{1 - \sqrt{1 - \beta^2}}, \quad (6)$$

wenn wir, wie etwa üblich, abkürzungsweise $\frac{v}{c} = \beta$ schreiben. Nun ist λ/λ' größer, gleich oder kleiner als 1, also

$$\frac{\lambda}{\lambda'} = \frac{\beta}{1 - \sqrt{1 - \beta^2}} \begin{matrix} \geq \\ < \end{matrix} 1. \quad (7)$$

Hieraus folgt der Reihe nach

$$\begin{aligned} \beta &\begin{matrix} \geq \\ < \end{matrix} 1 - \sqrt{1 - \beta^2}, \\ \sqrt{1 - \beta^2} &\begin{matrix} \geq \\ < \end{matrix} 1 - \beta. \end{aligned}$$

Man wird beachten, daß

$$1 - \beta^2 = (1 - \beta)(1 + \beta),$$

also

$$\sqrt{1 - \beta} \sqrt{1 + \beta} \begin{matrix} \geq \\ \leq \end{matrix} 1 - \beta$$

oder

$$\begin{matrix} \geq \\ \leq \end{matrix} \sqrt{1 - \beta} \sqrt{1 - \beta}.$$

Wenn wir in der Annahme, daß $\beta \neq 1$, durch $\sqrt{1 - \beta}$ kürzen, so folgt schließlich

$$\sqrt{1 + \beta} \begin{matrix} \geq \\ \leq \end{matrix} \sqrt{1 - \beta}. \quad (8)$$

Da $0 < \beta < 1$, so sieht man unmittelbar, daß das Zeichen $>$ zutreffend ist. Als Resultat ergibt sich daher

$$\frac{\lambda}{\lambda'} > 1, \quad \text{d. h. } \lambda > \lambda'.$$

λ bedeutet dabei die kleinste durch den Elektronenstrahl erzeugte Röntgenwelle. Schon diese ist also größer als λ' . Daher ist sämtliches weißes Röntgenlicht, verglichen mit den Materiewellen der Kathodenstrahlen, langwelliger. Es zeigt sich also eine gewisse Analogie zur STOKESSchen Regel für das Fluoreszenzlicht.

Von Interesse sind noch die Werte von λ/λ' für die Grenzfälle $\beta = 0$ und $\beta = 1$. Diese ergeben sich aus (6). Für $\beta = 1$ erhält man unmittelbar $\frac{\lambda}{\lambda'} = 1$. Das heißt, bei Annäherung an die Lichtgeschwindigkeit verschwindet der Unterschied zwischen λ und λ' . Für $\beta = 0$ erhält man zunächst den unbestimmten Wert $\frac{0}{0}$. Dieser läßt sich ohne Differentiation von Zähler und Nenner finden, wenn man $\sqrt{1 - \beta^2}$ entwickelt. Es ist

$$\text{für } \beta \ll 1 \quad \sqrt{1 - \beta^2} = 1 - \frac{1}{2} \beta^2,$$

$$\text{daher} \quad \frac{\lambda}{\lambda'} = \frac{\beta}{1 - (1 - \frac{1}{2} \beta^2)} = \frac{2}{\beta},$$

λ/λ' wird also für $\beta = 0$ unendlich groß.

Der Verlauf von λ/λ' und vergleichsweise auch für λ' sei in Abb. 79 wiedergegeben.

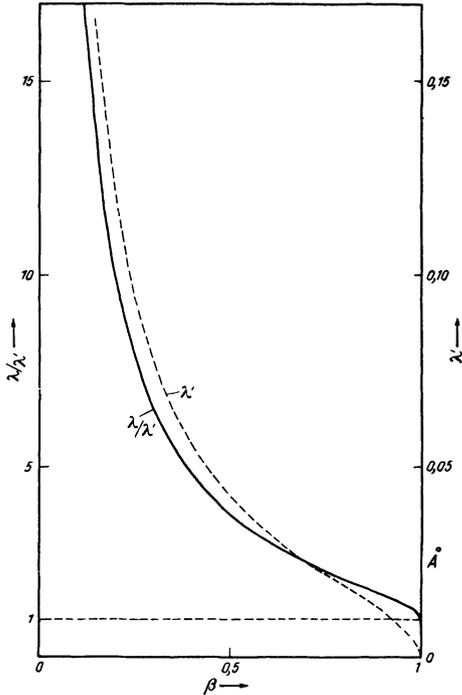


Abb. 79.

Aufgabe 1. Wenn man (6) mit $1 + \sqrt{1 - \beta^2}$ erweitert, erhält man die Form

$$\frac{\lambda}{\lambda'} = \frac{1 + \sqrt{1 - \beta^2}}{\beta}. \quad (6a)$$

Man führe an Hand von (6a) den obigen Beweis durch für $\frac{\lambda}{\lambda'} > 1$, wenn $0 < \beta < 1$ und $\frac{\lambda}{\lambda'} = 1$, wenn $\beta = 1$ und $\frac{\lambda}{\lambda'} = \infty$, wenn $\beta = 0$.

Aufgabe 2. Man zeige durch zweimalige Differentiation von (6a), daß die Kurve einen Wendepunkt bei $\beta = \frac{\sqrt{3}}{2}$ besitzt.

Sachverzeichnis.

Absolute Einheiten 57.
Absoluter Nullpunkt 60.
Absorptionsvermögen 89.
Adiabate 49, 61.
Adiabatische Ausdehnung 51f.
Amplitudenbild einer stehenden Welle 36.
Amplitudenwelle 40.
Amperewindungszahl 110.
Aneroidbarometer 23.
Äquivalentleitvermögen 147.
Arbeit, elektrische 171.
— mechanische 117, 154.
Arbeit im magnetischen Feld 110f.
Arbeitsleistung eines Gases 51f, 60f.
Archimedische Spirale 103.
ARRHENIUSsche Theorie der Elektrolyte 147.
Ausdehnungskoeffizient, linearer 43.
AVOGADROScher Satz 25.

Barometerkorrektion 42.
Barometrische Höhenformel 21.
Beschleunigung der Schwere 4f, 14.
Beschleunigungsspannung 170.
Bewegungsgröße 24.
Bildpunkt 75, 78, 80.
BIOT-SAVARTSches Gesetz 102f.
BOYLE-MARIOTTESches Gesetz 49.
Breckkraft einer Zerstreuungslinse 77.
— eines Systems aus zwei Linsen 79f.
Brechung an einer Kugelfläche 82.
Brechungsgesetz 68.
— aus dem Fermatschen Satz 71f.
Bremsstrahlung 173.
Brennweite 76, 81f.
Brückenstrom der WHEATSTONE-Brücke 138f.
Brückenwaage 1.

CARNOTScher Kreisprozeß 60f.
CARNOTSches Prinzip 66, 150.
CLAPEYRONSches Diagramm 48, 65.
CLAUSIUS-CLAPEYRONSche Gleichung 64f.
CLÉMENT und DESORMES, Bestimmung von c_p/c_v 48f.
COULOMBSches Gesetz 91, 93, 125.

Dampfdruck und Flüssigkeitskrümmung 54.
DANIELLSches Element 149.
Demonstrationsapparat für Gruppengeschwindigkeit 41.
— — mechanisches Wärmeäquivalent 54.
Diamagnetische Substanz 101.
Dielektrizitätskonstante 102, 145, 168.
Dipol 92, 145.
Direktionskraft 3.
Dissoziationsgrad eines Elektrolyten 144f.
Dissoziationskonstante 146.
Dopplereffekt 28f.
Druck eines Radreifens 45.
— hydrostatischer 55, 57.
Dynamisches Gleichgewicht 145, 147.

Echo bei bewegter Schallquelle 28.
Eigenenergie 172.
Eigenkapazität 134.
EINSTEINSche Beziehung 173.
Elastische Energie eines tordierten Fadens 120.
Elastizitätsmodul 24, 44.
Elektrischer Wind 163.
Elektrolyt, Dissoziation und Konzentration 145f.
Elektrolyte, starke 145, 147.

- Elektromagnet 110f.
 Elektromotor, Leistungsaufnahme 155f.
 Elektromotorische Kraft 148f.
 Elektronenladung, spezifische 170, 172.
 Elektronenstrom 169f.
 Elektrostatischer Druck 116, 127f.
 Elementarkegel 130.
 Emissionsvermögen 89.
 Energieabgabe einer Stromquelle bei angeschlossenem Elektromotor 153f.
 Energieaufnahme einer Stromspule 113f.
 Energiedichte, magnetische 113, 152.
 Energie, chemische 148.
 — innere 53.
 Energiesatz 15, 47, 117f, 171.
 Entmagnetisierungsfaktor 97f.
 Ersatzschema 162.
 Expansionsarbeit 51.

Fallgesetz in der Relativitätstheorie 14.
FARADAY-Käfig 135.
 Feld eines Dipols 92f.
 — einer elektrisch geladenen Ebene 124f.
 Feld einer geladenen Kugel, an der Oberfläche 130.
 — — —, direkte Berechnung 131f.
 — — —, inneres und äußeres 128f.
 Feld eines Elektromagneten 110f.
 Feldstärke, magnetische 91f.
FERMATScher Satz 71f.
 Fernrohr 85f.
 Ferromagnetische Substanz 97, 101.
 Flächenprojektion 125.
 Flüssigkeitsstrahl aus einer seitlichen Öffnung 19.
 Flux, magnetischer 96.
FOURIERScher Satz 32.
 Freier Fall 8f, 14f.

Galvanische Elemente, Elektromotorische Kraft und Energieverbrauch 148f.
 — — Gruppenschaltung 140f.
 Gasdruckänderung durch Ionenströme 162f.

 Gasgleichung 62.
GAUSSscher Satz 124.
 Gedankenexperiment 55, 89, 80.
 Gefrierpunktserniedrigung durch Druck 65.
 Gegenstandspunkt 75.
 — virtueller 78, 80, 83.
 Geschwindigkeit der Kathodenstrahlen 170f.
 — kritische 168.
 Geschwindigkeitsvektor 13.
 Gesetze des freien Falls 14.
 Gesichtsfeld 78.
 Gewicht einer laufenden Sanduhr 8.
 Gewichtsschwankung 9.
 Gleichgewichtszustand 60, 64, 118.
 Grammäquivalent 149.
 Grundprinzip der Mechanik 18.
 Gruppengeschwindigkeit 41.

Hauptebenen einer dicken Linse 81f.
 — zweier zentrierter Linsen 79f.
 Hauptlagen eines Stabmagneten 91.
 Hauptsatz II der Wärmelehre 90.
HELMHOLTZ, Bedingung der Konsonanz 30.
HELMHOLTZ-GIBBSsches Gesetz für die EmK eines Elementes 150.
 Homogenes Magnetfeld 97, 99, 101.
HOOKESches Gesetz 23, 44.

 Ideales Gas 53, 60.
 Impuls 8, 11, 23, 163.
 Induktion, magnetische 97f.
 Induktionslinienfluß 96, 152.
 Influenz, elektrische 131, 134f.
 Influenzierungsfaktor 134.
 Interferenz 37f.
 Intervall 28, 30.
 Intervallkurve 31.
 Ionen, Beweglichkeit 147, 163, 170.
 — Druck durch 162f.
 — Wiedervereinigung 145, 148, 167.
 Ionenstrom 163f, 168f.
 Ionisierung 148.
 Isobaren 61.
 Isochoren 61.
 Isothermen 49, 61.

JOULESche Wärme 113, 155, 156.

Kapazität eines Kondensators 116, 133f.

- Kapazität eines Kondensators, Änderung durch eine geerdete Hülle 133f.
 Kapillardruck 56.
 Kathodenstrahlengeschwindigkeit 170f.
 KIRCHHOFFSche Regeln 137.
 KIRCHHOFFSches Strahlungsgesetz 89f.
 Klemmenspannung 156.
 Knoten stehender Wellen 36.
 Koerzitivkraft 98.
 Kohäsionsdruck 55.
 Kohäsionsenergie, Änderung der 51.
 Kondensator, Ladungsenergie 117f.
 Kondensatorfeld 128.
 Konjugierte Punkte 77, 80.
 Konstruktionsstrahlen 75.
 Kraftantrieb 10f.
 Kräfte, thermische 44.
 Kraftwirkung einer geladenen Kugel 128f.
 Kreisbewegung 11, 157.
 Kreisfrequenz 157f.
 Kreisprozeß, irreversibler 67.
 — reversibler 60f, 65, 150.

 Ladungsdichte 116, 123.
 Leistung einer Batterie 154.
 Leistungsaufnahme eines Elektromotors 155f.
 Leitwert 160.
 Leuchttemperatur einer Glühlampe 143f.
 Lichtgeschwindigkeit 13, 16, 171.
 — Bestimmung mit Hilfe von Ionenströmen 168f.
 Linsengleichung 75, 77.
 Linsensystem 76, 79f.
 Luftbrennweite 83.
 Luftdruckabnahme mit der Höhe 21.
 Luftsäule, Gewicht 21f.
 Luftschlitz 101, 112.
 Lupe, Vergrößerung 86f.

 Magnetfeld eines Kreisstroms 105.
 — eines Solenoides 107f.
 Magnetische Energie einer Stromspule 114, 152.
 — Wirkung eines Stromleiters 104.
 Magnetisches Blatt 100.
 Magnetisierung 97.
 Magnetomotorische Kraft 97.
 Masse, kinetische und potentielle 15.

 Masse und Energie 171.
 — und Geschwindigkeit 13, 171.
 Massenattraktion und Gewicht 6.
 Massenwirkungsgesetz 147.
 Maßsystem 168.
 Materiewellen 173f.
 Mathematische Gerechtigkeit 141, 142.
 Maximalstrom aus einer Batterie 141, 142.
 MAXWELLSche Formel für das Quadrantelektrometer 121.
 Mechanik, klassische 171.
 — relativistische 15.
 Metallfadenlampe, Leuchttemperatur 143f.
 Mikroskop 85f.
 — einliniges 85.
 Minimalbedingung 69, 73.
 Minimum der Strahlenablenkung 68.
 Mischungsregel 26.
 Molekulare Dimensionen 59.
 Moment, magnetisches 91, 92, 95.
 Mond, Entfernung von der Erde 6f.

 Näherungsformel 26, 50.
 NEWTONSche Formel für die Schallgeschwindigkeit 23f, 25f.
 NEWTONSches Gravitationsgesetz 6.
 Nutzeffekt, idealer einer Wärmekraftmaschine 60.
 Nutzleistung eines Elektromotors 155.

 Oberflächenionisierung 164, 169.
 Oberflächenspannung 56.
 Obertöne, harmonische 30.
 OHMSches Gesetz 114, 140, 154, 160.
 — — magnetisches und elektrisches 96.
 OSTWALDSches Verdünnungsgesetz 146.

 Paramagnetische Substanz 97, 101.
 Partialdruck 26.
 Permeabilität 96, 97.
 Perpetuum mobile 55, 110.
 Phase 35, 64.
 Phasengeschwindigkeit 41.
 Phasenverschiebung 115, 157f.
 PLANCKSches Wirkungsquantum 173.
 Plattenkondensator 116, 170.

- Poissonsche Gleichung für adiabatische Kompression 49.
 — — für Raumladungen 168f.
 Polarisation, dielektrische 102.
 Polarisationsspannung 114, 153.
 Pole induzierte 98.
 Potential, magnetisches 95, 96, 111.
 Potentialfeld einer geladenen Kugel 122f, 131.
 Potentialwaage 116f.
 PREVOSTSches Strahlungsgleichgewicht 89.
 Prinzip der kommunizierenden Röhren 43.
 — der virtuellen Arbeiten 1, 117.
Quadrantelektrometer 118f.
Radiologie 162f.
 Randspannung 97.
 Raumladung, elektrische 169.
 Raumladungscharakteristik 169.
 Räumlicher Winkel 126, 128.
 RAYLEIGHsche Formel 41.
 Reaktionskraft eines Flüssigkeitsstrahls 18.
 Reflexion von Wellen 37.
 Reflexionsgesetz 75.
 REGNAULTSche Formel für die Siedetemperatur 57, 59.
 Relativer Fehler 144.
 Relativitätstheorie 13, 14f, 171.
 Resultante 11, 158.
 Röntgenwellen 173f.
 Ruhemasse 13f, 171, 173.
Sammellinsen 79.
 Sanduhr 5.
 Sättigungskurve 164.
 —Strom 167.
 Schallgeschwindigkeit 23.
 — und Luftfeuchtigkeit 25.
 — und Temperatur 27.
 Scheitelwert 158, 160.
 Schwebungen 38, 40.
 Schwerebeschleunigung, Änderung infolge der Drehung der Erde 4.
 Schwingung, harmonische 32, 157.
 Schwingungsdauer 31.
 Schwingungskreis 115, 159f.
 Sehweite, deutliche 87.
 Selbstinduktion 113f, 152.
 Seriengesetz 30.
 Siedepunktserhöhung 57.
 Siedeverzug 56.
 Skalar 132.
 SNELLIUSSches Brechungsgesetz 73.
 Solenoid, Feld in einem 152, 107f.
 Spannung, magnetische 96.
 Spezifische Wärmen, Verhältnis 25, 48.
 Spiegelgleichung 75.
 Stationärer Zustand 143, 145.
 Steighöhe, kapillare 55.
 STEPHAN-BOLTZMANNSSches Gesetz 143.
 STOKESSche Regel 175.
 Stufenweise Behandlung 28, 163.
 Strahlenablenkung durch ein Prisma 68f.
 Strahlung, graue 143.
 — schwarze 90.
 Strahlungskonstante 143.
 Streuung, magnetische 112.
 Stromresonanz 162.
 Stromspule 107f, 113f, 152f, 160f.
 Superposition 157, 165.
 Suszeptibilität 97.
Teilkapazität 134.
Teleobjektiv 81.
Tensor 99.
 Thermische Kräfte 44.
 Thermodynamik 64, 150.
 THOMSON-JOULE-Effekt 51.
 — — — an Flüssigkeiten 54.
 THOMSONSche Formel für EmK eines Elements 149.
 — — für Potentialwaage 117.
Tonfrequenz 27.
Tonleiter als Tonspektrum 29.
TORRICELLISches Theorem 19.
Trägheitswiderstand, zentrifugaler 6.
Transversalwelle 32.
Trugschluß 118, 166.
Tubelänge, optische 89.
U-Rohr 3.
Vektorielle Addition 5, 11, 93, 125, 132, 158.
Verdampfungswärme 65.
Vergleich zweier Größen 174.
Vergroßerung von Mikroskop und Fernrohr 85f.
Verkleinernde Wirkung einer Zerstreungslinse 77f.

- Volumenausdehnungskoeffizient 43.
 Volumen, spezifisches 65.
 Volumenionisierung 164.
- Wärmeäquivalent**, mechanisches
 53f, 62, 149.
 Wärmeenergie eines Gases 52f.
 Wärmespeicher 60f, 65, 151.
 Wärmetönung 149.
 Wärmeträger 64.
 Wechselstromgrößen, Addition 157f.
 Wechselstromwiderstand 115, 161.
 — eines Schwingungskreises 159f.
 Weicheisenanker 99.
 Welle, charakteristische Merkmale
 34.
 — mathematischer Ausdruck 32.
 Wellen, Dispersion 41.
 — Modulation 39.
 — Reflexion 37.
- Wellen, stehende 35f.
 Wellenausbreitung 32.
 Wellenformel 33.
 Wellengeschwindigkeit, veränder-
 liche 40.
 Wellengruppen 39, 40.
 Wellenlänge von Röntgen- und Ma-
 teriewellen 173f.
 Wellenpakete 39.
 WHEATSTONEsche Brücke 137f.
 Widerstand, elektrischer und mag-
 netischer 96.
 Winkelgeschwindigkeit 11, 157.
- Zeitlicher Verlauf der Dissoziation**
 147.
 Zerstreuungslinsen 77f.
 Zustandsgrößen 51.
 Zylindrische Anordnung, Elektro-
 nenröhre 170.
-

- Einführung in die Physik.** Von Dr. phil., Dr.-Ing. e. h., Dr. phys. e. h. **R. W. Pohl**, o. ö. Professor der Physik an der Universität Göttingen.
Erster Band: **Einführung in die Mechanik, Akustik und Wärmelehre.** Dritte und vierte, umgearbeitete und ergänzte Auflage. Dritte und vierte, umgearbeitete und ergänzte Auflage. Z. Zt. vergriffen.
Zweiter Band: **Einführung in die Elektrizitätslehre.** Sechste und siebente, verbesserte und ergänzte Auflage. Mit 497 Abbildungen, darunter 20 entlehnten. VIII, 276 Seiten. 1941.
Ganzleinen RM 13.80
Dritter Band: **Einführung in die Optik.** Zweite und dritte, verbesserte Auflage. Mit 564 Abbildungen im Text und auf einer Tafel, darunter 18 entlehnten. VIII, 324 Seiten. 1941.
Ganzleinen RM 18.60
-

Kurzes Lehrbuch der Physik. Von Dr. **Herbert A. Stuart**, o. Professor an der Technischen Hochschule Dresden. Mit 378 Textabbildungen. VII, 273 Seiten. 1942.

Physik. Ein Lehrbuch. Von **Wilhelm H. Westphal**, b. a. o. Professor der Physik an der Technischen Hochschule Berlin.
Siebente und achte Auflage. Mit 634 Abbildungen. XI, 679 Seiten. 1941.
Ganzleinen RM 19.80

Grundriß der Physik für Naturwissenschaftler, Mediziner und Pharmazeuten. Von Dr. **Ernst Lamla**, Oberstudiendirektor in Berlin. Zugleich fünfte, völlig neu bearbeitete Auflage der „Schule der Pharmazie, Physikalischer Teil“. Mit 250 Textabbildungen, VI, 318 Seiten. 1925. Ganzleinen RM 10.80

Einführung in die Physik. Von Dr. med. **Ph. Broemser**, o. Professor für Physiologie an der Universität Basel. Mit 206 Abbildungen. VIII, 404 Seiten. 1925. Ganzleinen RM 10.80

Einführung in das physikalische Praktikum für Studierende der Medizin und anderer Fächer. Von **Chr. Gerthsen** und **M. Pollermann**. Mit 125 Abbildungen. VI, 98 Seiten, mit Schreibpapier durchschossen. 1941. RM 3.30
