

Вентцель Е. С. *Исследование операций*. М., «Советское радио», 1972, 552 стр., т 31 000 экз., ц. 1 р. 96 к.

Излагаются основы исследования операций — науки, занимающейся количественным обоснованием решений во всех областях целенаправленной человеческой деятельности.

В книге рассматриваются основные понятия и методологические принципы исследования операций, математические методы оптимизации (линейное, динамическое программирование, теория игр и статистических решений), а также методы математического моделирования операций. Большое внимание уделяется прикладной теории марковских случайных процессов (с приложениями в области теории массового обслуживания, теории надежности) и математическому описанию процессов, протекающих в сложных, многоэлементных системах (метод динамики средних). Рассматриваются методы статистического моделирования операций на ЭЦВМ и основы метода сетевого планирования. Книга содержит ряд новых материалов, разработанных автором в последние годы и нигде ранее не публиковавшихся.

Изложение ведется на сравнительно элементарном уровне, вполне доступном читателю, знакомому с обычным вузовским курсом математики и с элементами теории вероятностей. Излагаемые методы иллюстрируются большим количеством примеров из разных областей практики.

Книга рассчитана на широкий круг читателей — инженеров, экономистов, научных работников и хозяйственных руководителей, интересующихся применением математики к обоснованию оптимальных решений.

Рис. 266, табл 119, библи. 29 наим.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие	6
Введение	7
1. Основные понятия исследования операций	11
1. Операция. Эффективность операции	11
2. Математическая модель операции	14
3. Общая постановка задачи исследования операций. Детерминированный случай	16
4. Общая постановка задачи исследования операций. Оптимизация решения в условиях неопределенности	18
5. Оценка операции по нескольким показателям	23
2. Линейное программирование	28
1. Задачи линейного программирования	28
2. Основная задача линейного программирования	39
3. Геометрическая интерпретация основной задачи линейного программирования	45
4. Задача линейного программирования с ограничениями-неравенствами. Переход от нее к ОЗЛП и обратно	55
5. Симплекс-метод решения задачи линейного программирования	59
6. Табличный алгоритм замены базисных переменных	63
7. Отыскание опорного решения основной задачи линейного программирования	71
8. Отыскание оптимального решения основной задачи линейного программирования	77
9. Транспортная задача линейного программирования	83
10. Нахождение опорного плана	87
11. Улучшение плана перевозок. Цикл пересчета	91
12. Решение транспортной задачи методом потенциалов	99
13. Транспортная задача с неправильным балансом	110
14. Решение транспортной задачи по критерию времени	115
3. Динамическое программирование	120
1. Задачи динамического программирования	120
2. Задача о наборе высоты и скорости летательным аппаратом	124
3. Общая постановка задачи динамического программирования. Интерпретация управления в фазовом пространстве	132
4. Задачи распределения ресурсов	142
5. Пример решения задачи распределения ресурсов	146
6. Другие задачи распределения ресурсов	154
7. Распределение ресурсов со вложением доходов в производство	157
8. Решение задачи динамического программирования с учетом предыстории процесса	163
9. Задачи динамического программирования, не связанные со временем	172

10	Задачи динамического программирования с мультипликативным критерием	175
11	Бесконечношаговой процесс динамического программирования	177
4. Моделирование операций по схеме марковских случайных процессов 181		
1	Марковский случайный процесс с дискретными состояниями	181
2	Случайные процессы с дискретным и непрерывным временем Марковская цепь	185
3	Марковский процесс с дискретными состояниями и непрерывным временем Уравнения Колмогорова для вероятностей состояний	194
4.	Поток событий Простейший поток и его свойства	200
5	Потоки Пальма Потоки Эрланга	206
6	Пуассоновские потоки событий и непрерывные марковские цепи	212
7	Предельные вероятности состояний	217
8	Процесс «гибели и размножения»	222
9	Циклический процесс	227
10	Приближенное сведение не-марковских процессов к марковским Метод псевдосостояний	232
5. Теория массового обслуживания 238		
1	Задачи теории массового обслуживания	238
2	Классификация систем массового обслуживания и их основные характеристики	240
3	Одноканальная СМО с отказами	242
4	Многоканальная СМО с отказами	245
5	Одноканальная СМО с ожиданием	248
6	Многоканальная СМО с ожиданием	257
7	СМО с ограниченным временем ожидания	264
8	Замкнутые системы массового обслуживания	268
9	Системы массового обслуживания со «взаимопомощью» между каналами	275
10	Система массового обслуживания с ошибками	281
11.	Системы массового обслуживания с не-пуассоновскими потоками событий	285
6. Метод динамики средних 291		
1	Идея метода Область применимости	291
2	Учет зависимости интенсивностей потоков событий от численностей состояний Принцип квазирегулярности	300
3	Учет пополнения численностей состояний	309
4	Метод динамики средних для системы, состоящей из неоднородных элементов	314
5	Предельное поведение средних численностей состояний	320
6.	Уравнения динамики боя (модель А)	329
7	Учет пополнения сил, упреждающего удара, темпа мобилизации и прочих факторов в уравнениях динамики боя	333
8	Модель Б Случай отсутствия переноса огня	336
9	Модель В Учет деятельности разведки и системы управления боем	338
10	Учет восстановления единиц в ходе боевых действий	343
11	Уравнения динамики боя для неоднородных единиц Функции распределения огня	347
12	Уравнения смешанного типа	350
13	Некоторые уточнения метода динамики средних	357

7. Методы учета надежности технических устройств 366		
1 Проблема оценки надежности	366	
2 Надежность элемента Плотность распределения времени безотказной работы Среднее время безотказной работы	367	
3 Экспоненциальный закон надежности Интенсивность отказов	372	
4 Определение надежности системы по надежности ее элементов. Надежность нерезервированной системы	378	
5 Надежность резервированной системы («горячий резерв»)	382	
6 Надежность резервированной системы («холодный» и «облегченный» резерв)	386	
7 Надежность системы с восстановлением	393	
8 Учет зависимости отказов при оценке надежности технических устройств	400	
8. Моделирование операций методом статистических испытаний . . . 409		
1 Метод статистических испытаний (Монте-Карло)	409	
2. Единичный жребий	413	
3 Розыгрыш значения нормально распределенной случайной величины	420	
4 Получение случайного числа R от 0 до 1	424	
5 Примеры моделирования случайных процессов методом Монте-Карло	426	
6 Определение характеристик стационарного случайного процесса методом Монте-Карло по одной реализации	433	
7. Оценка точности характеристик полученных методом Монте-Карло Необходимое число реализаций	440	
9. Игровые методы обоснования решений 446		
1 Задачи теории игр и статистических решений	446	
2. Предмет теории игр Основные понятия	447	
3 Платежная матрица	450	
4 Нижняя и верхняя цена игры Принцип минимакса	454	
5 Решение игры в смешанных стратегиях	461	
6 Упрощение игр	464	
7 Игра 2×2	466	
8. Игры $2 \times n$ и $m \times 2$	472	
9 Решение игр $m \times n$	480	
10 Решение конечных игр методом итераций	489	
11. Физическая смесь стратегий	493	
12. Элементы теории статистических решений	496	
13 Критерий, основанный на известных вероятностях условий. Критерий Вальда, Гурвица, Сэвиджа	500	
14 Планирование эксперимента в условиях неопределенности	509	
10. Метод сетевого планирования 516		
1 Задача планирования комплекса работ	516	
2. Сетевой график комплекса работ. Временной сетевой график	519	
3 Формальная запись (алгоритм) задачи сетевого планирования	526	
4 Оптимизация плана комплекса работ	529	
5 Сетевое планирование при случайных временах выполнения работ Применение ЭЦВМ	539	
Приложение (таблицы)		543
Литература		545
Предметный указатель		547

ПРЕДИСЛОВИЕ

Настоящая книга написана на базе лекций по исследованию операций, читанных автором в течение ряда лет в высших учебных заведениях, а также на основе опыта научно-исследовательских работ в разных областях.

Задачей автора было дать по возможности простое и понятное изложение идей и методов исследования операций, не пользуясь громоздким математическим аппаратом. В отношении математической подготовки от читателя требуется только знакомство с обычным вузовским курсом высшей математики, а также владение элементами теории вероятностей. В целях наглядности изложение сопровождается многими примерами. Книга рассчитана на широкий круг читателей — главным образом, инженеров и научных работников, интересующихся задачами обоснования решений в различных областях практики.

Автор приносит глубокую благодарность И. Я. Динеру, Л. А. Овчарову и А. Д. Вентцелю, сотрудничество с которыми помогло ему в разработке материалов, изложенных в книге.

Книга содержит ряд новых материалов, разработанных автором в последние годы и нигде ранее не публиковавшихся.

Москва, 1970

Е. Вентцель

ВВЕДЕНИЕ

За последние годы наука уделяет все большее внимание вопросам организации и управления; это обусловлено целым рядом причин. Быстрое развитие и усложнение техники; увеличение масштабов и стоимостей проводимых мероприятий; широкое внедрение автоматизации в сферу управления — все это приводит к необходимости научного анализа сложных целенаправленных процессов под углом зрения их структуры и организации. От науки требуются рекомендации по наилучшему (оптимальному) управлению такими процессами.

Эти потребности практики вызвали к жизни специальные научные методы, которые принято объединять под названием «Исследование операций». Под этим подразумевается применение математических, количественных методов для обоснования решений во всех областях целенаправленной человеческой деятельности.

Необходимость принятия решений так же стара, как само человечество. Испокон веку люди, приступая к осуществлению своих мероприятий, раздумывали над их возможными последствиями и принимали решения, выбирая тем или другим образом зависящие от них параметры — способы организации мероприятий. Но до поры, до времени решения могли приниматься без специального математического анализа, просто на основе опыта и здравого смысла. Такой способ принятия решений не утратил своего значения и в наше время.

Возьмем пример: человек вышел утром из дому, чтобы ехать на работу. По ходу дела ему приходится принять целый ряд решений: брать ли с собой зонтик? В каком месте перейти улицу? Каким видом транспорта воспользоваться? И так далее.

Разумеется, все эти решения человек принимает без специальных расчетов, просто опираясь на имеющийся у него опыт и на здравый смысл. Для обоснования таких решений никакая наука не нужна, да вряд ли понадобится и в дальнейшем.

Однако возьмем другой пример. Допустим, организуется работа городского транспорта. В нашем распоряжении имеется какое-то количество транспортных средств. Необходимо принять ряд решений, например: какое количество и каких транспортных средств направить по тому или другому маршруту? Как изменять частоту следования машин в зависимости от времени суток? Где разместить остановки? И так далее.

Эти решения являются гораздо более ответственными, чем решения предыдущего примера. В силу сложности явления последствия каждого из них не столь ясны; для того, чтобы представить себе эти

последствия, нужно провести расчеты. А главное, от этих решений гораздо больше зависит. В первом примере неправильный выбор решения затронет интересы одного человека; во втором — может отразиться на деловой жизни целого города.

Конечно, и во втором примере при выборе решения можно действовать интуитивно, опираясь на опыт и здравый смысл. Но решения окажутся гораздо более разумными, если они будут подкреплены количественными, математическими расчетами. Эти предварительные расчеты помогут избежать длительного и дорогостоящего поиска правильного решения «наощупь».

Наиболее сложно обстоит дело с принятием решений, когда речь идет о мероприятиях, опыта в проведении которых еще не существует и, следовательно, здравому смыслу не на что опереться, а интуиция может обмануть. Пусть, например, составляется перспективный план развития системы вооружения на несколько лет вперед. Образцы вооружения, о которых может идти речь, еще не существуют, никакого опыта их боевого применения нет. При планировании приходится опираться на большое количество данных, относящихся не столько к прошлому опыту, сколько к предвидимому будущему. Выбранное решение должно по возможности гарантировать нас от ошибок, связанных с неточным прогнозированием, и быть достаточно эффективным для широкого круга условий. Для обоснования такого решения приводится в действие сложная система математических расчетов, да иначе и быть не должно: ведь неправильное решение, если оно будет принято, может привести к самым тяжелым последствиям.

Вообще, чем сложнее организуемое мероприятие, чем больше вкладывается в него материальных средств, чем шире спектр его возможных последствий, тем менее допустимы так называемые «волевые» решения, не опирающиеся на научный расчет, и тем большее значение получает совокупность научных методов, позволяющих заранее оценить последствия каждого решения, заранее отбросить недопустимые варианты и рекомендовать те, которые представляются наиболее удачными.

Таковыми математическими расчетами, облегчающими людям принятие правильных решений, и занимается наука «Исследование операций». Это — сравнительно молодая наука. Ее возникновение обычно относят к годам второй мировой войны, когда в вооруженных силах США и Англии были сформированы специальные научные группы для подготовки решений по способам организации и обеспечения боевых действий [1]. Справедливость требует отметить, что подобными исследованиями (правда, не под таким названием) занимались и до войны, в частности, в нашей стране, где были широко развиты математические методы оценки эффективности стрельбы, представляющие собой, в современном понимании, часть исследования операций.

Зародившись в области преимущественно военных задач, исследование операций с течением времени вышло из этой узкой сферы. В настоящее время исследование операций — одна из самых быстро развивающихся наук, завоевывающая все более обширные области применения: промышленность, сельское хозяйство, торговля, транспорт, здравоохранение и т. д. Задачи исследования операций, к какой бы

области они ни относились, имеют общие черты, и при их решении применяются сходные методологические приемы. Например, методика количественного исследования, выработанная для анализа процессов образования очередей в системах массового обслуживания (парикмахерских, ремонтных мастерских и т. д.), может, почти без изменений, быть перенесена на некоторые задачи электронной вычислительной техники, а также задачи, связанные с организацией системы противовоздушной обороны (ПВО).

Чтобы ближе познакомиться со спецификой задач исследования операций и их характерными особенностями, приведем несколько примеров таких задач.

Пример 1. Завод выпускает определенного вида изделия. Для обеспечения высокого качества этих изделий организуется система выборочного контроля. Требуется рациональным образом организовать этот контроль, т. е. выбрать:

- размер контрольной партии;
- последовательность контрольных операций;
- правила браковки изделий

и т. д. так, чтобы обеспечить заданный уровень качества при минимальных расходах.

Пример 2. Для реализации определенной массы сезонных товаров создается сеть временных торговых точек. Требуется выбрать параметры этой сети:

- число точек;
- их размещение;
- количество персонала;
- продажные цены товаров

и т. д. так, чтобы обеспечить максимальную экономическую эффективность распродажи.

Пример 3. Организуется воздушный налет группы самолетов-бомбардировщиков на промышленный район противника. В нашем распоряжении — определенное количество самолетов с известными летно-тактическими данными и вооружением. Требуется выбрать параметры налета:

- высоту полета;
- эшелонирование самолетов в строю;
- точки прицеливания отдельных самолетов и групп;
- способ выполнения бомбометания (залпом, серией)

и т. д. так, чтобы в результате налета максимально снизить промышленный потенциал района.

Пример 4. Организуется снабжение сырьем группы промышленных предприятий. Возможные поставщики сырья размещены в различных географических пунктах страны и связаны с группой предприятий различными путями сообщения (с разными тарифами). Требуется рациональным образом разместить заказы на сырье, так, чтобы потребности группы предприятий были удовлетворены в заданные сроки и при минимальных затратах на перевозки.

ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ ИССЛЕДОВАНИЯ ОПЕРАЦИЙ

Пример 5. Сложное техническое устройство время от времени может отказывать (выходить из строя). Для того, чтобы ликвидировать аварию, необходимо локализовать неисправность (обнаружить ее причину). Требуется разработать систему тестов, позволяющую с определенной, достаточно большой вероятностью локализовать неисправность за минимальное время.

Пример 6. Организуется медицинское обследование группы населения с целью выявления некоторых заболеваний. На обследование выделены определенные материальные средства, оборудование и медицинский персонал. Требуется разработать план обследования:

- количество пунктов;
- их размещение;
- последовательность осмотров;
- вид и количество анализов

и т. д. с тем, чтобы к заданному сроку выявить максимальный процент заболевших.

Число примеров можно было бы легко умножить, но и этих достаточно, чтобы составить представление об отличительных особенностях задач исследования операций. Несмотря на то, что примеры относятся к самым разным областям практики, в них легко просматриваются сходные черты. В каждом из них идет речь о каком-то мероприятии (или системе мероприятий), преследующем определенную цель. Заданы некоторые условия, характеризующие обстановку мероприятия, изменить которые мы не вправе (например, отпущенные средства). В рамках этой системы условий, требуется принять какое-то решение с тем, чтобы мероприятие в некотором смысле было наиболее выгодным (или наименее убыточным).

В соответствии с этими общими чертами вырабатываются и общие приемы решения подобных задач, в совокупности составляющие методологическую основу исследования операций.

Для решения практических задач исследование операций располагает целым арсеналом математических средств. К ним относятся: теория вероятностей с ее новейшими разделами (теория случайных процессов, теория информации, теория массового обслуживания); математические методы оптимизации, начиная от простейших способов нахождения экстремумов (максимумов и минимумов), знакомых каждому инженеру, и кончая современными методами, такими, как линейное программирование, динамическое программирование, принцип максимума Л. С. Понтрягина и многие другие. Из них в данной книге, адресованной широкому кругу читателей, освещаются далеко не все, а только простейшие и наиболее распространенные.

Для понимания текста читатель должен владеть только основами математического анализа и элементами теории вероятностей.

В книге содержится много численных примеров, иллюстрирующих излагаемые методы. При выборе условий этих примеров автор исходил из методических соображений, так что этими материалами ни в коем случае нельзя пользоваться как справочными.

1. ОПЕРАЦИЯ. ЭФФЕКТИВНОСТЬ ОПЕРАЦИИ

Под операцией мы будем понимать любое мероприятие (или систему действий), объединенное единым замыслом и направленное к достижению определенной цели.

Примеры операций.

1. Система мероприятий, направленная к повышению надежности технического устройства.
2. Отражение воздушного налета средствами ПВО.
3. Размещение заказов на производство оборудования.
4. Разведывательный поиск группы самолетов в тылу противника.
5. Запуск группы искусственных спутников Земли для установления системы телевизионной связи.
6. Система перевозок, обеспечивающая снабжение ряда пунктов определенного вида товарами.

Операция всегда является управляемым мероприятием, т. е. от нас зависит выбрать тем или другим способом какие-то параметры, характеризующие способ ее организации. «Организация» здесь понимается в широком смысле слова, включая и выбор технических средств, применяемых в операции. Например, организуя отражение воздушного налета средствами ПВО, мы можем, в зависимости от обстановки, выбирать тип и свойства применяемых технических средств (ракет, установок) или же, при заданных технических средствах, решать только задачу рациональной организации самой процедуры отражения налета (распределение целей между установками, количество ракет, направляемых на каждую цель и т. д.).

Всякий определенный выбор зависящих от нас параметров мы будем называть решением.

Решения могут быть удачными и неудачными, разумными и неразумными. Оптимальными называются решения, которые, по тем или иным соображениям, предпочтительнее других.

Основная задача исследования операций — *предварительное количественное обоснование оптимальных решений*.

Заметим, что само принятие решения выходит за рамки исследования операций и относится к компетенции ответственного лица (или группы лиц), которым предоставлено право окончательного выбора. При этом выборе ответственные за него лица могут учитывать,

наряду с рекомендациями, вытекающими из математического расчета, еще ряд соображений (количественного и качественного характера), которые не были учтены расчетом.

Таким образом, исследование операций не ставит себе задачей полную автоматизацию принятия решений, полное исключение из этого процесса размышляющего, оценивающего, критикующего человеческого сознания. В конечном итоге, решение всегда принимается человеком (или группой лиц); задача исследования операций — подготовить количественные данные и рекомендации, облегчающие человеку принятие решения*).

Наряду с основной задачей — обоснованием оптимальных решений — к области исследования операций относятся и другие задачи, такие как

— сравнительная оценка различных вариантов организации операции;

— оценка влияния на результат операции различных параметров (элементов решения и заданных условий);

— исследование так называемых «узких мест», то есть элементов управляемой системы, нарушение работы которых особенно сильно сказывается на успехе операции, и т. д.

Эти «вспомогательные» задачи исследования операций приобретают особую важность, когда мы рассматриваем данную операцию не изолированно, а как составной элемент целой системы операций. Так называемый «системный» подход к задачам исследования операций требует учета взаимной зависимости и обусловленности целого комплекса мероприятий. Разумеется, в принципе всегда можно объединить систему операций в одну сложную операцию более «высокого порядка», но на практике это не всегда удобно (и не всегда желательно), и в ряде случаев целесообразно выделять в качестве «операций» отдельные элементы системы, а окончательное решение принимать с учетом роли и места данной операции в системе.

Итак, рассмотрим отдельную операцию O . Размышляя над организацией операции, мы стремимся сделать ее наиболее эффективной. Под эффективностью операции разумеется степень ее приспособленности к выполнению стоящей перед ней задачи. Чем лучше организована операция, тем она эффективнее.

Чтобы судить об эффективности операции и сравнивать между собой по эффективности различно организованные операции, нужно иметь некоторый численный критерий оценки или показатель эффективности (в некоторых руководствах показатель эффективности называют «целевой функцией»).

Будем в дальнейшем обозначать показатель эффективности буквой W .

*) Даже в тех случаях, когда принятие решения, казалось бы, полностью автоматизировано (например, в процессе автоматического управления предприятием или космическим кораблем), роль человека не устраняется, ибо, в конечном счете, от него зависит выбор алгоритма, по которому осуществляется управление.

Конкретный вид показателя эффективности W , которым следует пользоваться при численной оценке эффективности, зависит от специфики рассматриваемой операции, ее целевой направленности, а также от задачи исследования, которая может быть поставлена в той или другой форме.

Многие операции выполняются в условиях, содержащих элемент случайности (например, операции, связанные с колебаниями спроса и предложения, с движением народонаселения, заболеваемостью, смертностью, а также все военные операции). В этих случаях исход операции, даже организованной строго определенным образом, не может быть точно предсказан, остается случайным. Если это так, то в качестве показателя эффективности W выбирается не просто характеристика исхода операции, а ее среднее значение (математическое ожидание). Например, если задача операции — получение максимальной прибыли, то в качестве показателя эффективности берется средняя прибыль. В других случаях, когда задачей операции является осуществление вполне определенного события, в качестве показателя эффективности берут вероятность этого события (например, вероятность того, что в результате воздушного налета данная группа целей будет поражена).

Правильный выбор показателя эффективности — необходимое условие полезности исследования, применяемого для обоснования решения.

Рассмотрим ряд примеров, в каждом из которых показатель эффективности W выбран в соответствии с целевой направленностью операции.

Пример 1. Рассматривается работа промышленного предприятия под углом зрения его рентабельности, причем проводится ряд мер с целью повышения этой рентабельности. Показатель эффективности — прибыль (или средняя прибыль), приносимая предприятием за хозяйственный год.

Пример 2. Группа истребителей поднимается в воздух для перехвата одиночного самолета противника. Цель операции — сбить самолет. Показатель эффективности — вероятность поражения (сбития) самолета.

Пример 3. Ремонтная мастерская занимается обслуживанием машин; ее рентабельность определяется количеством машин, обслуженных в течение дня. Показатель эффективности — среднее число машин, обслуженных за день («среднее» потому, что фактическое число случайно).

Пример 4. Группа радиолокационных станций в определенном районе ведет наблюдение за воздушным пространством. Задача группы — обнаружить любой самолет, если он появится в районе. Показатель эффективности — вероятность обнаружения любого самолета, появившегося в районе.

Пример 5. Предпринимается ряд мер по повышению надежности электронной цифровой вычислительной машины (ЭЦВМ). Цель операции — уменьшить частоту появления неисправностей («сбоев») ЭЦВМ, или, что равносильно, увеличить средний промежуток времени между сбоями («наработку на отказ»). Показатель эффективности — среднее время безотказной работы ЭЦВМ (или среднее относительное время исправной работы).

Пример 6. Проводится борьба за экономию средств при производстве определенного вида товаров. Показатель эффективности — количество (или среднее количество) сэкономленных средств.

Во всех рассмотренных примерах показатель эффективности, каков бы он ни был, требовалось обратить в максимум («чем больше, тем

лучше»). Вообще, это не обязательно: в исследовании операций часто пользуются показателями, которые требуется обратить не в максимум, а в минимум («чем меньше, тем лучше»). Например, в примере 4 можно было бы в качестве показателя эффективности взять «вероятность того, что появившийся самолет не будет обнаружен» — этот показатель желательно сделать как можно меньше. В примере 5 за показатель эффективности можно было бы принять «среднее число сбоев за сутки», которое желательно минимизировать. Если оценивается какая-то система, обеспечивающая наведение снаряда на цель, то в качестве показателя эффективности можно выбрать среднее значение «промаха» снаряда (расстояния от траектории до центра цели), которое желательно сделать как можно меньше. Наряд средств, выделяемых на выполнение какой-либо задачи, тоже желательно сделать минимальным, равно как и стоимость предпринимаемой системы мероприятий. Таким образом, во многих задачах исследования операций разумное решение должно обеспечивать не максимум, а минимум некоторого показателя.

Очевидно, что случай, когда показатель эффективности W надо обратить в минимум, легко сводится к задаче максимизации (для этого достаточно, например, изменить знак величины W). Поэтому в дальнейшем, рассматривая в общем виде задачу исследования операций, мы будем для простоты говорить только о случае, когда W требуется обратить в максимум. Что касается практических конкретных задач, то мы будем пользоваться как показателями эффективности, которые требуется максимизировать, так и теми, которые требуется минимизировать.

2. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ОПЕРАЦИИ

Для применения количественных методов исследования в любой области всегда требуется построить ту или другую математическую модель явления. Не составляет исключения и исследование операций. При построении математической модели явление (в нашем случае — операция) каким-то образом упрощается, схематизируется; из бесчисленного множества факторов, влияющих на явление, выделяется сравнительно небольшое количество важнейших, и полученная схема описывается с помощью того или другого математического аппарата. В результате устанавливаются количественные связи между условиями операции, параметрами решения и исходом операции — показателем эффективности (или показателями, если их в данной задаче несколько).

Чем удачнее подобрана математическая модель, тем лучше она отражает характерные черты явления, тем успешнее будет исследование и полезнее — вытекающие из него рекомендации.

Общих способов построения математических моделей не существует. В каждом конкретном случае модель строится, исходя из целевой направленности операции и задачи научного исследования, с учетом требуемой точности решения, а также точности, с которой могут быть известны исходные данные.

Требования к модели противоречивы. С одной стороны, она должна быть достаточно полной, т. е. в ней должны быть учтены все важ-

ные факторы, от которых существенно зависит исход операции. С другой стороны, модель должна быть достаточно простой для того, чтобы можно было установить обозримые (желательно — аналитические) зависимости между входящими в нее параметрами. Модель не должна быть «засорена» множеством мелких, второстепенных факторов — их учет усложняет математический анализ и делает результаты исследования трудно обозримыми.

Одним словом, искусство составлять математические модели есть именно искусство, и опыт в этом деле приобретается постепенно. Две опасности всегда подстерегают составителя модели: первая — утонуть в подробностях («из-за деревьев не увидеть леса»); вторая — слишком огрубить явление («выплеснуть из ванны вместе с водой и ребенка»). В сложных случаях, когда построение модели вызывает наибольшее сомнение, полезным оказывается своеобразный «спор моделей», когда одно и то же явление исследуется на нескольких моделях. Если научные выводы и рекомендации от модели к модели меняются мало, это — серьезный аргумент в пользу объективности исследования. Характерным для сложных задач исследования операций является также повторное обращение к модели: после того, как первый цикл исследований выполнен, возвращаются снова к модели и вносят в нее необходимые коррективы.

Построение математической модели — наиболее важная и ответственная часть исследования, требующая глубоких знаний не только и не столько в математике, сколько в существе моделируемых явлений. Однако, раз созданная удачная модель может найти применение и далеко за пределами того круга явлений, для которого она первоначально создавалась. Так, например, математические модели массового обслуживания нашли широкое применение в целом ряде областей, далеких, с первого взгляда, от массового обслуживания (надежность технических устройств, организация автоматизированного производства, задачи ПВО и др.). Математические модели, первоначально предназначенные для описания динамики развития биологических популяций, находят широкое применение при описании боевых действий и наоборот — боевые модели с успехом применяются в биологии.

Математические модели, применяемые в настоящее время в задачах исследования операций, можно грубо подразделить на два класса: аналитические и статистические.

Для первых характерно установление формульных, аналитических зависимостей между параметрами задачи, записанных в любом виде: алгебраические уравнения, обыкновенные дифференциальные уравнения, уравнения с частными производными и т. д. Чтобы такое аналитическое описание операции было возможно, как правило, нужно принять те или иные допущения или упрощения. С помощью аналитических моделей удается провести простые операции, где число взаимодействующих элементов не слишком велико. В операциях же большого масштаба, сложных, в которых переплетается действие огромного количества факторов, в том числе и случайных, на первый план выходит метод статистического моделирования. Он состоит в том, что процесс развития

операции как бы «копируется» на вычислительной машине, со всеми сопровождающими его случайностями. Всякий раз, когда в ход операции вмешивается какой-либо случайный фактор, его влияние учитывается посредством «розыгрыша», напоминающего бросание жребия. В результате многократного повторения такой процедуры удается получить интересующие нас характеристики исхода операции с любой степенью точности*).

Статистические модели имеют перед аналитическими то преимущество, что они позволяют учесть большее число факторов и не требуют грубых упрощений и допущений. Зато результаты статистического моделирования труднее поддаются анализу и осмыслению. Более грубые аналитические модели описывают явление лишь приближенно, зато результаты более наглядны и отчетливее отражают присущие явлению основные закономерности. Наилучшие результаты получаются при совместном применении аналитических и статистических моделей: простая аналитическая модель позволяет вчерне разобраться в основных закономерностях явления, наметить главные его контуры, а любое дальнейшее уточнение может быть получено статистическим моделированием.

3. ОБЩАЯ ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ ИССЛЕДОВАНИЯ ОПЕРАЦИЙ. ДЕТЕРМИНИРОВАННЫЙ СЛУЧАЙ

Рассмотрим задачу исследования операций в общей постановке, безотносительно к виду и цели операции.

Пусть имеется некоторая операция O , т. е. управляемое мероприятие, на исход которого мы можем в какой-то мере влиять, выбирая тем или другим способом зависящие от нас параметры. Эффективность операции характеризуется каким-то численным критерием или показателем W , который требуется обратить в максимум (случай, когда его требуется обратить в минимум, сводится к предыдущему и отдельно не рассматривается).

Предположим, что тем или иным способом математическая модель операции построена; она позволяет вычислить показатель эффективности W при любом принятом решении, для любой совокупности условий, в которых выполняется операция.

Рассмотрим сначала наиболее простой случай: все факторы, от которых зависит успех операции, делятся на две группы:

- заданные, заранее известные факторы (условия проведения операции) $\alpha_1, \alpha_2, \dots$, на которые мы влиять не можем;
- зависящие от нас факторы (элементы решения) x_1, x_2, \dots , которые мы, в известных пределах, можем выбирать по своему усмотрению.

Этот случай, в котором факторы, влияющие на исход операции, либо заранее известны, либо зависят от нас, мы будем называть **детерминированным**.

*) Подробно о статистическом моделировании см. гл. 8.

Заметим, что под «заданными условиями» операции $\alpha_1, \alpha_2, \dots$ могут пониматься не только обычные числа, но и функции, в частности — ограничения, наложенные на элементы решения. Равным образом, элементы решения x_1, x_2, \dots также могут быть не только числами, но и функциями.

Показатель эффективности W зависит от обеих групп факторов: как от заданных условий, так и от элементов решения. Запишем эту зависимость в виде общей символической формулы:

$$W = W(\alpha_1, \alpha_2, \dots; x_1, x_2, \dots). \quad (3.1)$$

Так как математическая модель построена, будем считать, что зависимость (3.1) нам известна, и для любых $\alpha_1, \alpha_2, \dots; x_1, x_2, \dots$ мы можем найти W .

Тогда задачу исследования операций можно математически сформулировать так:

При заданных условиях $\alpha_1, \alpha_2, \dots$ найти такие элементы решения x_1, x_2, \dots , которые обращают показатель W в максимум.

Перед нами — типично математическая задача, относящаяся к классу так называемых **вариационных задач**. Методы решения таких задач подробно разработаны в математике. Простейшие из этих методов («задачи на максимум и минимум») хорошо известны каждому инженеру. Для нахождения максимума или минимума (короче, экстремума) функции нужно продифференцировать ее по аргументу (или аргументам, если их несколько), приравнять производные нулю и решить полученную систему уравнений.

Однако, этот простой метод в задачах исследования операций имеет ограниченное применение. Причин этому несколько.

1. Когда аргументов x_1, x_2, \dots много (а это типично для задач исследования операций), совместное решение системы уравнений, полученных дифференцированием основной зависимости, зачастую оказывается не проще, а сложнее, чем непосредственный поиск экстремума.

2. В случае, когда на элементы решения x_1, x_2, \dots наложены ограничения (т. е., область их изменения ограничена), часто экстремум наблюдается не в точке, где производные обращаются в нуль, а на **границе** области возможных решений. Возникает специфическая для исследования операций математическая задача «поиска экстремума при наличии ограничений», не укладывающаяся в схему классических вариационных методов.

3. Наконец, производных, о которых идет речь, может вовсе не существовать, например, если аргументы x_1, x_2, \dots изменяются не непрерывно, а дискретно, или же сама функция W имеет особенности.

Общих математических методов нахождения экстремумов функций любого вида при наличии произвольных ограничений не существует. Однако для случаев, когда функция и ограничения обладают определенными свойствами, современная математика предлагает ряд специальных методов. Например, если показатель эффективности W зависит от элементов решения x_1, x_2, \dots **линейно** и ограничения, наложенные на x_1, x_2, \dots , также имеют вид **линейных равенств** (или неравенств), максимум функции W находится с помощью специального

аппарата, так называемого линейного программирования (см. гл. 2). Если эти функции обладают другими свойствами (например, выпуклы или квадратичны), применяется аппарат «выпуклого» или «квадратичного» программирования [2], более сложный по сравнению с линейным программированием, но все же позволяющий в приемлемые сроки найти решение. Если операция естественным образом расчленяется на ряд «шагов» или «этапов» (например, хозяйственных лет), а показатель эффективности W выражается в виде суммы показателей w_i , достигнутых за отдельные этапы, для нахождения решения, обеспечивающего максимальную эффективность, может быть применен метод динамического программирования (см. гл. 3).

Если операция описывается обыкновенными дифференциальными уравнениями, а управление, меняющееся со временем, представляет собой некоторую функцию $x(t)$, то для нахождения оптимального управления может оказаться полезным специально разработанный метод Л. С. Понтрягина [3].

Таким образом, в рассматриваемом детерминированном случае задача отыскания оптимального решения сводится к математической задаче отыскания экстремума функции W ; эта задача может быть весьма сложной (особенно при многих аргументах), но, в конце концов, является вычислительной задачей, которую, особенно при наличии быстродействующих ЭЦВМ, удастся так или иначе решить до конца. Трудности, возникающие при этом, являются расчетными, а не принципиальными.

4. ОБЩАЯ ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ ИССЛЕДОВАНИЯ ОПЕРАЦИЙ. ОПТИМИЗАЦИЯ РЕШЕНИЯ В УСЛОВИЯХ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ

В предыдущем параграфе мы рассмотрели самый простой, полностью детерминированный случай, когда все условия операции $\alpha_1, \alpha_2, \dots$ известны, и любой выбор решения x_1, x_2, \dots приводит к вполне определенному значению показателя эффективности W .

К сожалению, этот простейший случай не так уж часто встречается на практике. Гораздо более типичен случай, когда не все условия, в которых будет проводиться операция, известны заранее, а некоторые из них содержат элемент неопределенности. Например, успех операции может зависеть от метеорологических условий, которые заранее неизвестны, или от колебаний спроса и предложения, заранее трудно предвидимых, связанных с капризами моды, или же от поведения разумного противника, действия которого заранее неизвестны.

В подобных случаях эффективность операции зависит уже не от двух, а от трех категорий факторов:

- условия выполнения операции $\alpha_1, \alpha_2, \dots$, которые известны заранее и изменены быть не могут;
- неизвестные условия или факторы Y_1, Y_2, \dots ;
- элементы решения x_1, x_2, \dots , которые нам предстоит выбрать.

Пусть эффективность операции характеризуется некоторым показателем W , зависящим от всех трех групп факторов. Это мы запишем в виде общей формулы:

$$W = W(\alpha_1, \alpha_2, \dots; Y_1, Y_2, \dots; x_1, x_2, \dots). \quad (4.1)$$

Если бы условия Y_1, Y_2, \dots были известны, мы могли бы заранее подсчитать показатель W и выбрать такое решение x_1, x_2, \dots , при котором он максимизируется. Беда в том, что параметры Y_1, Y_2, \dots нам неизвестны, а значит, неизвестен и зависящий от них показатель эффективности W при любом решении. Тем не менее задача выбора решения по-прежнему стоит перед нами. Ее можно сформулировать так:

При заданных условиях $\alpha_1, \alpha_2, \dots$, с учетом неизвестных факторов Y_1, Y_2, \dots найти такие элементы решения x_1, x_2, \dots , которые по возможности обращали бы в максимум показатель эффективности W .

Это — уже другая, не чисто математическая задача (недаром в ее формулировке сделана оговорка «по возможности»). Наличие неизвестных факторов Y_1, Y_2, \dots переводит нашу задачу в другую категорию: она превращается в задачу о выборе решения в условиях неопределенности.

Давайте будем честны: неопределенность есть неопределенность. Если условия выполнения операции неизвестны, мы не имеем возможности так же успешно организовать ее, как мы это сделали бы, если бы располагали большей информацией. Поэтому любое решение, принятое в условиях неопределенности, хуже решения, принятого во вполне определенной ситуации. Наше дело — сообщить своему решению в наибольшей возможной мере черты разумности. Решение, принятое в условиях неопределенности, но на основе математических расчетов, будет все же лучше решения, выбранного наобум. Недаром один из видных зарубежных специалистов — Т. Л. Саати в книге «Математические методы исследования операций» [4] дает своему предмету следующее ироническое определение:

«Исследование операций представляет собой искусство давать плохие ответы на те практические вопросы, на которые даются еще худшие ответы другими методами».

Задачи о выборе решения в условиях неопределенности встречаются нам в жизни на каждом шагу. Пусть, например, мы собрались ехать в отпуск, взяв с собой чемодан ограниченного объема, причем вес чемодана не должен превышать того, при котором мы можем носить его без посторонней помощи (условия $\alpha_1, \alpha_2, \dots$). Погода в районах путешествия заранее неизвестна (условия Y_1, Y_2, \dots). Спрашивается, какие предметы одежды (x_1, x_2, \dots) следует взять с собой?

Эту задачу мы, разумеется, решаем без всякого математического аппарата, хотя, по-видимому, не без опоры на какие-то численные данные (хотя бы на вероятности морозной или дождливой погоды в районах путешествия в данное время года). Однако, если нужно принять более серьезное и ответственное решение (например, о характеристиках проектируемой плотины в районе возможных паводков, или о выборе типа посадочного устройства для посадки на планету с неизвест-

ными свойствами поверхности, или о выборе образца вооружения для борьбы с противником, характеристики которого заранее неизвестны), то выбору решения в обязательном порядке должны быть предпосланы математические расчеты, облегчающие этот выбор и сообщающие ему, в доступной мере, черты разумности.

Применяемые при этом методы существенно зависят от того, какова природа неизвестных факторов Y_1, Y_2, \dots и какими ориентировочными сведениями о них мы располагаем.

Наиболее простым и благоприятным для расчетов является случай, когда неизвестные факторы Y_1, Y_2, \dots представляют собой случайные величины (или же случайные функции), о которых имеются статистические данные, характеризующие их распределение.

Пусть, например, мы рассматриваем работу железнодорожной сортировочной станции, стремясь оптимизировать процесс обслуживания прибывающих на эту станцию грузовых поездов. Заранее неизвестны ни точные моменты прибытия поездов, ни количество вагонов в каждом поезде, ни адреса, по которым направляются вагоны. Все эти характеристики представляют собой случайные величины, закон распределения каждой из которых (и их совокупности) может быть определен по имеющимся данным обычными методами математической статистики.

Аналогично, в каждой военной операции присутствуют случайные факторы, связанные с рассеиванием снарядов, со случайностью моментов обнаружения целей и т. п. В принципе все эти факторы могут быть изучены методами теории вероятностей, и для них могут быть получены законы распределения (или, по крайней мере, числовые характеристики).

В случае, когда неизвестные факторы, фигурирующие в операции — Y_1, Y_2, \dots — являются обычными случайными величинами (или случайными функциями), распределение которых, хотя бы ориентировочно, известно, для оптимизации решения может быть применен один из двух приемов:

- искусственное сведение к детерминированной схеме;
- «оптимизация в среднем».

Остановимся более подробно на каждом из этих приемов.

Первый прием сводится к тому, что неопределенная, вероятностная картина явления приближенно заменяется детерминированной. Для этого все участвующие в задаче случайные факторы Y_1, Y_2, \dots приближенно заменяются не случайными (как правило, их математическими ожиданиями).

Этот прием применяется по преимуществу в грубых, ориентировочных расчетах, когда диапазон случайных изменений величин Y_1, Y_2, \dots сравнительно мал, т. е. они без большой натяжки могут рассматриваться как не случайные. Заметим, что тот же прием замены случайных величин их математическими ожиданиями может успешно применяться и в случаях, когда величины Y_1, Y_2, \dots обладают большим разбросом, но показатель эффективности W зависит от них линейно (или почти линейно).

Второй прием («оптимизация в среднем»), более сложный, применяется, когда случайность величин Y_1, Y_2, \dots весьма существенна и замена каждой из них ее математическим ожиданием может привести к большим ошибкам.

Рассмотрим этот случай более подробно. Пусть показатель эффективности W существенно зависит от случайных факторов (будем для простоты считать их случайными величинами) Y_1, Y_2, \dots ; допустим, что нам известно распределение этих факторов, скажем, плотность распределения $f(y_1, y_2, \dots)$. Предположим, что операция выполняется много раз, причем условия Y_1, Y_2, \dots меняются от раза к разу случайным образом. Какое решение x_1, x_2, \dots следует выбрать? Очевидно, то, при котором операция в среднем будет наиболее эффективна, т. е. математическое ожидание показателя эффективности W будет максимально. Таким образом, нужно выбирать такое решение x_1, x_2, \dots , при котором обращается в максимум математическое ожидание показателя эффективности:

$$\bar{W} = M[W] = \int \dots \int W(\alpha_1, \alpha_2, \dots; y_1, y_2, \dots; x_2, x_2 \dots) f(y_1, y_2, \dots) dy_1 dy_2 \dots \quad (4.2)$$

Такую оптимизацию мы будем называть «оптимизацией в среднем».

А как же с элементом неопределенности? Конечно, в какой-то мере он сохраняется. Успешность каждой отдельной операции, осуществляемой при случайных, заранее неизвестных значениях Y_1, Y_2, \dots , может сильно отличаться от ожидаемой средней, как в большую, так, к сожалению, и в меньшую сторону. При многократном осуществлении операции эти различия, в среднем, сглаживаются; однако, нередко данный способ оптимизации решения, за наименьшим лучшим, применяется и тогда, когда операция осуществляется всего несколько раз или даже один раз. Тогда надо считаться с возможностью неприятных неожиданностей в каждом отдельном случае. Утешением нам может служить мысль о том, что «оптимизация в среднем» все же лучше, чем выбор решения без всяких обоснований. Применяя этот прием к многочисленным (хотя бы и различным) операциям, все же мы в среднем выигрываем больше, чем если бы совсем не пользовались расчетом.

Для того, чтобы составить себе представление о том, чем мы рискуем в каждом отдельном случае, желательно, кроме математического ожидания показателя эффективности, оценивать также и его дисперсию (или среднее квадратическое отклонение).

Наиболее трудным для исследования является тот случай неопределенности, когда неизвестные факторы Y_1, Y_2, \dots не могут быть изучены и описаны с помощью статистических методов: их законы распределения или не могут быть получены (соответствующие статистические данные отсутствуют), или, что еще хуже, таких законов распределения вовсе не существует. Это бывает, когда явление, о котором идет речь, не обладает свойством статистической устойчивости. Например, мы

знаем, что на Марсе возможно наличие органической жизни, и некоторые ученые даже считают его весьма вероятным, но совершенно невозможно подсчитать эту вероятность на основе каких-либо статистических данных. Другой пример: предположим, что эффективность проектируемого вооружения сильно зависит от того, будет ли предполагаемый противник к моменту начала боевых действий располагать средствами защиты, и если да, то какими именно? Очевидно, нет никакой возможности подсчитать вероятности этих гипотез — самое большее, их можно назначить произвольно, что сильно повредит объективности исследования.

В подобных случаях, вместо произвольного и субъективного назначения вероятностей с дальнейшей «оптимизацией в среднем», рекомендуется рассмотреть весь диапазон возможных условий Y_1, Y_2, \dots и составить представление о том, какова эффективность операции в этом диапазоне и как на нее влияют неизвестные условия. При этом задача исследования операций приобретает новые методологические особенности.

Действительно, рассмотрим случай, когда эффективность операции W зависит, помимо заданных условий $\alpha_1, \alpha_2, \dots$ и элементов решения x_1, x_2, \dots , еще и от ряда неизвестных факторов Y_1, Y_2, \dots нестатистической природы, о которых никаких определенных сведений нет, а можно делать только предположения. Попробуем все же решить задачу. Зафиксируем мысленно параметры Y_1, Y_2, \dots , придадим им вполне определенные значения $Y_1 = y_1, Y_2 = y_2, \dots$, и переведем тем самым в категорию заданных условий $\alpha_1, \alpha_2, \dots$. Для этих условий мы в принципе можем решить задачу исследования операций и найти соответствующее оптимальное решение x_1, x_2, \dots . Его элементы, кроме заданных условий $\alpha_1, \alpha_2, \dots$, очевидно, будут зависеть еще и от того, какие частные значения мы придали условиям Y_1, Y_2, \dots :

$$x_1 = x_1(\alpha_1, \alpha_2, \dots; y_1, y_2, \dots);$$

$$x_2 = x_2(\alpha_1, \alpha_2, \dots; y_1, y_2, \dots).$$

Такое решение, оптимальное для данной совокупности условий y_1, y_2, \dots (и только для нее), называется *локально-оптимальным*. Это решение, как правило, уже не оптимально для других значений Y_1, Y_2, \dots . Совокупность локально-оптимальных решений для всего диапазона условий Y_1, Y_2, \dots дает нам представление о том, как мы должны бы поступать, если бы известные условия Y_1, Y_2, \dots были нам в точности известны. Поэтому локально-оптимальное решение, на получение которого зачастую тратится много усилий, имеет в случае неопределенности сугубо ограниченную ценность. Совершенно очевидно, что в данном случае следует предпочесть не решение, строго оптимальное для каких-то определенных условий, а компромиссное решение, которое, не будучи, может быть, строго оптимальным ни для каких условий, оказывается приемлемым в целом диапазоне условий.

В настоящее время полноценной математической «теории компромисса» еще не существует, хотя в теории решений и имеются некоторые попытки в этом направлении (см., например, § 13 гл. 9 настоящей кни-

ги). Обычно окончательный выбор компромиссного решения осуществляется человеком, который, опираясь на расчеты, может оценить и сопоставить сильные и слабые стороны каждого варианта решения в разных условиях и на основе этого сделать окончательный выбор. При этом необязательно (хотя иногда и любопытно) знать точный локальный оптимум для каждой совокупности условий y_1, y_2, \dots . Таким образом, классические вариационные и новейшие оптимизационные методы математики отступают в данном случае на задний план.

В последнюю очередь рассмотрим своеобразный случай, возникающий в так называемых конфликтных ситуациях, когда неизвестные параметры Y_1, Y_2, \dots зависят не от объективных обстоятельств, а от активно противодействующего нам противника. Такие ситуации характерны для боевых действий, отчасти для спортивных соревнований, в капиталистическом обществе — для конкурентной борьбы и т. д.

При выборе решений в подобных случаях может оказаться полезным математический аппарат так называемой теории игр — математической теории конфликтных ситуаций (см. гл. 10). Модели конфликтных ситуаций, изучаемые в теории игр, основаны на предположении, что мы имеем дело с разумным и дальновидным противником, всегда выбирающим свое поведение наихудшим для нас (и наилучшим для себя) способом. Такая идеализация конфликтной ситуации в некоторых случаях может подсказать нам наименее рискованное, «перестраховочное» решение, которое необязательно принимать, но во всяком случае полезно иметь в виду.

Наконец, сделаем одно общее замечание. При обосновании решения в условиях неопределенности, что бы мы ни делали, элемент неопределенности остается. Поэтому неразумно предъявлять к точности таких решений слишком высокие требования. Вместо того, чтобы после скрупулезных расчетов однозначно указать одно-единственное, в точности оптимальное (в каком-то смысле) решение, всегда лучше выделить область приемлемых решений, которые оказываются несущественно хуже других, какой бы точкой зрения мы ни пользовались. В пределах этой области могут произвести свой окончательный выбор ответственные за него лица.

5. ОЦЕНКА ОПЕРАЦИИ ПО НЕСКОЛЬКИМ ПОКАЗАТЕЛЯМ

Выше мы рассмотрели задачу исследования операций, где требовалось так выбрать решение, чтобы максимизировать (или минимизировать) один-единственный показатель эффективности W . На практике часто встречается случай, когда эффективность операции приходится оценивать не по одному, а сразу по нескольким показателям: W_1, W_2, \dots, W_k ; одни из этих показателей желательнее сделать больше, другие — меньше.

Как правило, эффективность больших по объему, сложных операций не может быть исчерпывающим образом охарактеризована с помощью одного показателя; на помощь ему приходится привлекать и другие, дополнительные.

Например, при оценке деятельности промышленного предприятия приходится учитывать целый ряд показателей, как то:

- прибыль,
- полный объем продукции («вал»),
- себестоимость

и т. д.

При анализе боевой операции, помимо основного показателя, характеризующего ее эффективность (например, математическое ожидание причиненного противнику ущерба), приходится учитывать и ряд дополнительных, как то:

- собственные потери,
- время выполнения операции,
- расход боеприпасов

и т. д.

Такая множественность показателей эффективности, из которых некоторые желательно максимизировать, а другие — минимизировать, характерна для любой сколько-нибудь сложной задачи исследования операций. Возникает вопрос: как же быть?

Прежде всего надо подчеркнуть, что выдвинутые требования, вообще говоря, несовместимы. Решение, обращающее в максимум один какой-то показатель W_1 , как правило, не обращает ни в максимум, ни в минимум другие показатели W_2, W_3, \dots . Поэтому широко распространенная формулировка «достижение максимального эффекта при минимальных

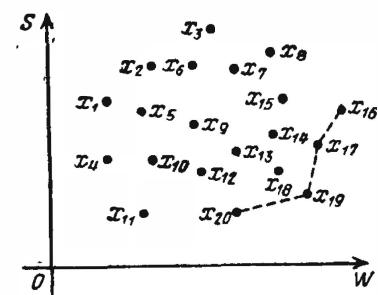


Рис. 1.1

затратах» для научного исследования не подходит. Корректной является любая из формулировок «достижение максимального эффекта при заданных затратах» или же «достижение заданного эффекта при минимальных затратах».

В общем случае не существует решения, которое обращало бы в максимум один показатель W_1 и одновременно в максимум (или минимум) другой показатель W_2 ; тем более, такого решения не существует для нескольких показателей. Однако, количественный анализ эффективности может оказаться весьма полезным и в случае нескольких показателей эффективности.

Прежде всего, он позволяет заранее отбросить явные нерацональные варианты решений, уступающие лучшим вариантам по всем показателям.

Проиллюстрируем сказанное на примере. Пусть анализируется боевая операция \bullet , оцениваемая по двум показателям:

W — вероятность выполнения боевой задачи («эффективность»);

S — стоимость израсходованных средств.

Очевидно, первый показатель желательно обратить в максимум, а второй — в минимум. Предположим для простоты, что предлагается

на выбор конечное число — 20 различных вариантов решения; обозначим их X_1, X_2, \dots, X_{20} . Для каждого из них известны значения обоих показателей W и S .

Изобразим для наглядности каждый вариант решения в виде точки на плоскости с координатами W и S (рис. 1.1)*.

Рассматривая рисунок, мы видим, что некоторые варианты решения «неконкурентоспособны» и заранее должны быть отброшены. Действительно, те варианты, которые имеют над другими вариантами с той же стоимостью S преимущество по эффективности W , должны лежать на правой границе области возможных вариантов. Те же варианты, которые при равной эффективности обладают меньшей стоимостью, должны лежать на нижней границе области возможных вариантов.

Какие же варианты следует предпочесть при оценке эффективности по двум показателям? Очевидно, те, которые лежат одновременно и на правой, и на нижней границе области (см. пунктирную линию на рис. 1.1). Действительно, для каждого из вариантов, не лежащих на этом участке границы, всегда найдется другой вариант, не уступающий ему по эффективности, но зато более дешевый или, наоборот, не уступающий ему по дешевизне, но зато более эффективный. Таким образом, из 20 предварительно выдвинутых вариантов большинство выпадает из соревнования, и нам остается только проанализировать оставшиеся четыре варианта: $X_{16}, X_{17}, X_{19}, X_{20}$. Из них X_{16} — наиболее эффективный, но зато сравнительно дорогой; X_{20} — самый дешевый, но зато не столь эффективный. Дело принимающего решение — разобраться в том, какой ценой мы согласны оплатить известное повышение эффективности или, наоборот, какой долей эффективности мы согласны пожертвовать, чтобы не нести слишком больших материальных потерь.

Аналогичный предварительный просмотр вариантов (хотя и без такой наглядной геометрической интерпретации) может быть произведен и в случае многих показателей: W_1, W_2, \dots, W_k .

Такая процедура предварительной отбраковки неконкурентоспособных вариантов решения должна всегда предшествовать решению задачи исследования операций с несколькими показателями. Это, хотя и не снимает необходимости компромисса, но существенно уменьшает множество решений, в пределах которого осуществляется выбор.

Ввиду того, что комплексная оценка операции сразу по нескольким показателям затруднительна и требует размышлений, на практике часто пытаются искусственно объединить несколько показателей в один обобщенный показатель (или критерий). Нередко в качестве такого обобщенного (составного) критерия берут дробь; в числителе ставят те показатели W_1, \dots, W_m , которые желательно увеличить, а в знаменателе, — те, которые желательно уменьшить:

$$U = \frac{W_1 \cdot \dots \cdot W_m}{W_{m+1} \cdot \dots \cdot W_k}. \quad (5.1)$$

* В книге рисунки пронумерованы по главам, а формулы и таблицы — по параграфам

Например, если речь идет о боевой операции, в числителе ставят такие величины, как «вероятность выполнения боевой задачи» или «потери противника»; в знаменателе — «собственные потери», «расход боеприпасов», «время выполнения операции» и т. п.

Общим недостатком «составных критериев» типа (5.1) является, то, что недостаток эффективности по одному показателю всегда можно скомпенсировать за счет другого (например, малую вероятность выполнения боевой задачи — за счет малого расхода боеприпасов, и т. п.). Критерии подобного рода напоминают в шутку предложенный Львом Толстым «критерий оценки человека» в виде дроби, где числитель — истинные достоинства человека, а знаменатель — его мнение о себе. Несостоятельность такого критерия очевидна: если принять его всерьез, то человек, почти без достоинств, но зато совсем без самомнения, будет иметь бесконечно большую ценность!

Часто «составные критерии» предлагаются не в виде дроби, а в виде «взвешенной суммы» отдельных показателей эффективности:

$$U = a_1 W_1 + a_2 W_2 + \dots + a_k W_k, \quad (5.2)$$

где a_1, a_2, \dots, a_k — положительные или отрицательные коэффициенты. Положительные ставятся при тех показателях, которые желательно максимизировать; отрицательные — при тех, которые желательно минимизировать. Абсолютные значения коэффициентов («веса») соответствуют степени важности показателей.

Нетрудно убедиться, что составной критерий вида (5.2) по существу ничем не отличается от критерия вида (5.1) и обладает теми же недостатками (возможность взаимной компенсации разнородных показателей). Поэтому некритическое пользование любого вида «составными» критериями чревато опасностями и может привести к неправильным рекомендациям. Однако, в некоторых случаях, когда «веса» не выбираются произвольно, а подбираются так, чтобы составной критерий наилучшим образом выполнял свою функцию, удается получить с его помощью некоторые результаты ограниченной ценности.

В некоторых случаях задачу с несколькими показателями удается свести к задаче с одним-единственным показателем, если выделить только один (главный) показатель эффективности W_1 и стремиться его обр-ратить в максимум, а на остальные, вспомогательные показатели W_2, W_3, \dots наложить только некоторые ограничения вида:

$$W_2 \geq w_2; \dots; W_m \geq w_m; W_{m+1} \leq w_{m+1}; \dots; W_k \leq w_k.$$

Эти ограничения, разумеется, войдут в комплекс заданных условий $\alpha_1, \alpha_2, \dots$

Например, при оптимизации плана работы промышленного предприятия можно потребовать, чтобы прибыль была максимальна, план по ассортименту — выполнен, а себестоимость продукции — не выше заданной. При планировании бомбардировочного налета можно потребовать, чтобы нанесенный противнику ущерб был максимален, но при этом собственные потери и стоимость операции не выходили за известные пределы.

При такой постановке задачи все показатели эффективности, кроме одного, главного, переводятся в разряд заданных условий операции. Варианты решения, не укладывающиеся в заданные границы, сразу же отбрасываются, как неконкурентоспособные. Полученные рекомендации, очевидно, будут зависеть от того, как выбраны ограничения для вспомогательных показателей. Чтобы определить, насколько это влияет на окончательные рекомендации по выбору решения, полезно проварьировать ограничения в разумных пределах.

Наконец, возможен еще один путь построения компромиссного решения, который можно назвать «методом последовательных уступок».

Предположим, что показатели эффективности расположены в порядке убывающей важности: сначала основной W_1 , затем другие, вспомогательные: W_2, W_3, \dots . Для простоты будем считать, что каждый из них нужно обратить в максимум (если это не так, достаточно изменить знак показателя). Процедура построения компромиссного решения сводится к следующему. Сначала ищется решение, обращающее в максимум главный показатель эффективности W_1 . Затем назначается, исходя из практических соображений и точности, с какой известны исходные данные (а часто она бывает небольшой), некоторая «уступка» ΔW_1 , которую мы согласны допустить для того, чтобы обратиться в максимум второй показатель W_2 . Налагаем на показатель W_1 ограничение, чтобы он был не меньше, чем $W_1^* - \Delta W_1$, где W_1^* — максимально возможное значение W_1 , и при этом ограничении ищем решение, обращающее в максимум W_2 . Далее снова назначается «уступка» в показателе W_2 , ценой которой можно максимизировать W_3 , и т. д.

Такой способ построения компромиссного решения хорош тем, что здесь сразу видно, ценой какой «уступки» в одном показателе приобретается выигрыш в другом.

Заметим, что свобода выбора решения, приобретаемая ценой даже незначительных «уступок», может оказаться существенной, так как в районе максимума обычно эффективность решения меняется очень слабо.

Так или иначе, при любом способе формализации, задача количественного обоснования решения по нескольким показателям остается не до конца определенной, и окончательный выбор решения определяется волевым актом «командира» (так мы условно будем называть ответственного за выбор лица). Дело исследователя — предоставить в распоряжение командира достаточное количество данных, позволяющих ему всесторонне оценить преимущества и недостатки каждого варианта решения и, опираясь на них, сделать окончательный выбор.

ЛИНЕЙНОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ

1. ЗАДАЧИ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Во многих областях практики возникают своеобразные задачи оптимизации решений, для которых характерны следующие черты:

- показатель эффективности W представляет собой линейную функцию от элементов решения x_1, x_2, \dots ;
- ограничительные условия, налагаемые на возможные решения, имеют вид линейных равенств или неравенств.

Такие задачи принято называть *задачами линейного программирования**.

Приведем несколько примеров задач линейного программирования из разных областей практики.

1. Задача о пищевом рационе. Имеется четыре вида продуктов питания:

$\Pi_1, \Pi_2, \Pi_3, \Pi_4$.

Известна стоимость единицы каждого продукта:

c_1, c_2, c_3, c_4 .

Из этих продуктов необходимо составить пищевой рацион, который должен содержать:

$$\left. \begin{array}{l} \text{— белков не менее } b_1 \text{ единиц,} \\ \text{— углеводов не менее } b_2 \text{ единиц,} \\ \text{— жиров не менее } b_3 \text{ единиц.} \end{array} \right\} \quad (1.1)$$

Единица продукта Π_1 содержит a_{11} единиц белков, a_{12} единиц углеводов, a_{13} единиц жиров и т. д. Содержание элементов в единице каждого продукта задано таблицей (табл. 1.1).

Требуется так составить пищевой рацион, чтобы обеспечить заданные условия (1.1) при минимальной стоимости рациона.

Запишем сформулированные словесно условия задачи в виде математических формул. Обозначим

x_1, x_2, x_3, x_4

количества продуктов $\Pi_1, \Pi_2, \Pi_3, \Pi_4$, входящих в рацион.

* Слово «программирование» заимствовано из зарубежной литературы и в данном случае означает не что иное, как «планирование»

Таблица 1.1

		Элемент		
		белки	углеводы	жиры
Продукт	Π_1	a_{11}	a_{12}	a_{13}
	Π_2	a_{21}	a_{22}	a_{23}
	Π_3	a_{31}	a_{32}	a_{33}
	Π_4	a_{41}	a_{42}	a_{43}

Очевидно, общая стоимость рациона будет

$$L = c_1 x_1 + c_2 x_2 + c_3 x_3 + c_4 x_4$$

или короче

$$L = \sum_{i=1}^4 c_i x_i. \quad (1.2)$$

Запишем математически условия (1.1). В одной единице продукта Π_1 содержится a_{11} единиц белка, значит, в x_1 единицах — $a_{11}x_1$; в x_2 единицах продукта Π_2 содержится $a_{21}x_2$ единиц белка и т. д. Общее количество белков, содержащееся в рационе, не должно быть меньше b_1 ; отсюда получаем первое условие-неравенство:

$$a_{11} x_1 + a_{21} x_2 + a_{31} x_3 + a_{41} x_4 \geq b_1. \quad (1.3)$$

Записывая аналогичные условия для углеводов и жиров, получим, включая (1.3), три условия-неравенства:

$$\left. \begin{array}{l} a_{11} x_1 + a_{21} x_2 + a_{31} x_3 + a_{41} x_4 \geq b_1, \\ a_{12} x_1 + a_{22} x_2 + a_{32} x_3 + a_{42} x_4 \geq b_2, \\ a_{13} x_1 + a_{23} x_2 + a_{33} x_3 + a_{43} x_4 \geq b_3. \end{array} \right\} \quad (1.4)$$

Эти условия представляют собой ограничения, накладываемые на решение.

Возникает следующая задача:

Выбрать такие неотрицательные значения переменных x_1, x_2, x_3, x_4 , удовлетворяющие линейным неравенствам (1.4), при которых линейная функция этих переменных

$$L = c_1 x_1 + c_2 x_2 + c_3 x_3 + c_4 x_4$$

обращалась бы в минимум.

Поставленная задача представляет собой типичную задачу линейного программирования. Не останавливаясь пока на способах ее решения (об этом речь будет идти в дальнейшем), поставим еще несколько подобных задач.

2. Задача о загрузке станков. Ткацкая фабрика располагает N_1 станками типа 1 и N_2 станками типа 2. Станки могут производить четырёх видов тканей:

$$T_1, T_2, T_3, T_4.$$

Каждый тип станка может производить любой из видов тканей, но в неодинаковом количестве. Станок типа 1 производит в месяц a_{11} метров ткани T_1 , a_{12} метров ткани T_2 , a_{13} метров ткани T_3 , a_{14} метров ткани T_4 . Соответствующие числа для станка типа 2 будут a_{21} , a_{22} , a_{23} , a_{24} . Таким образом, производительности станков при производстве каждого вида ткани заданы табл. 1.2.

Таблица 1.2

Тип станка	Вид ткани			
	T_1	T_2	T_3	T_4
1	a_{11}	a_{12}	a_{13}	a_{14}
2	a_{21}	a_{22}	a_{23}	a_{24}

Каждый метр ткани T_1 приносит фабрике доход c_1 , ткани T_2 — доход c_2 , ткани T_3 — доход c_3 и ткани T_4 — доход c_4 . Фабрике предписан план, согласно которому она обязана произвести за месяц:

не менее b_1 метров ткани T_1 , не менее b_2 метров ткани T_2 , не менее b_3 метров ткани T_3 и не менее b_4 метров ткани T_4 , т. е. плановое задание выражается числами b_1, b_2, b_3, b_4 .

Требуется так распределить загрузку станков производством тканей различного вида, чтобы план был выполнен и при этом месячная прибыль была максимальной.

Запишем условия задачи математически. Обозначим x_{11} — число станков типа 1, занятых производством ткани T_1 , x_{12} — число станков типа 1, занятых производством ткани T_2 , и вообще x_{ij} — число станков типа i , занятых производством ткани T_j . Первый индекс соответствует типу станка, второй — виду ткани ($i = 1, 2, j = 1, 2, 3, 4$).

Таким образом возникают восемь переменных — элементов решения:

$$\left. \begin{matrix} x_{11}, x_{12}, x_{13}, x_{14}; \\ x_{21}, x_{22}, x_{23}, x_{24}, \end{matrix} \right\} \quad (1.5)$$

которые мы должны выбрать так, чтобы месячная прибыль была максимальной. Запишем формулу для вычисления этой прибыли. Каждый метр ткани T_1 приносит прибыль c_1 ; x_{11} метров ткани T_1 принесут прибыль $c_1 x_{11}$; всего ткань T_1 принесет прибыли $c_1(x_{11} + x_{21})$ и т. д. Общая прибыль будет равна:

$$L = c_1(x_{11} + x_{21}) + c_2(x_{12} + x_{22}) + c_3(x_{13} + x_{23}) + c_4(x_{14} + x_{24}). \quad (1.6)$$

Требуется выбрать такие неотрицательные значения переменных (1.5), чтобы линейная функция от них (1.6) обращалась в максимум. При этом должны выполняться следующие ограничительные условия:

1) Ресурсы по станкам не должны быть превышены, т. е. сумма количеств станков каждого типа, занятых производством всех тканей, не должна превышать наличного запаса станков:

$$\left. \begin{matrix} x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} \leq N_1; \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} \leq N_2. \end{matrix} \right\} \quad (1.7)$$

2) Задания по ассортименту должны быть выполнены (или перевыполнены). С учетом данных табл. 1.2 эти условия запишутся в виде неравенств:

$$\left. \begin{matrix} a_{11} x_{11} + a_{21} x_{21} \geq b_1, \\ a_{12} x_{12} + a_{22} x_{22} \geq b_2, \\ a_{13} x_{13} + a_{23} x_{23} \geq b_3, \\ a_{14} x_{14} + a_{24} x_{24} \geq b_4. \end{matrix} \right\} \quad (1.8)$$

Таким образом, сформулирована задача:

Выбрать такие неотрицательные значения переменных $x_{11}, x_{12}, \dots, x_{24}$, удовлетворяющие линейным неравенствам (1.7) и (1.8), при которых линейная функция этих переменных (1.6) обращалась бы в максимум.

3. Задача о распределении ресурсов. Имеются какие-то ресурсы (сырье, рабочая сила, оборудование):

$$R_1, R_2, \dots, R_m$$

в количествах соответственно

$$b_1, b_2, \dots, b_m$$

единиц. С помощью этих ресурсов могут производиться товары:

$$T_1, T_2, \dots, T_n.$$

Для производства одной единицы товара T_j необходимо a_{ij} единиц ресурса R_i ($i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n$). Каждая единица ресурса R_i стоит d_i рублей ($i = 1, 2, \dots, m$). Каждая единица товара T_j может быть реализована по цене c_j ($j = 1, 2, \dots, n$).

По каждому виду товара количество произведенных единиц ограничивается спросом: известно, что рынок не может поглотить более, чем k_j единиц товара T_j ($j = 1, 2, \dots, n$).

Спрашивается: какое количество единиц какого товара надо произвести для того, чтобы реализовать максимальную прибыль?

Запишем условия задачи. Обозначим

$$x_1, x_2, \dots, x_n$$

количества товаров T_1, T_2, \dots, T_n , которые мы запланируем к производству. Условия спроса налагают на эти величины ограничения:

$$x_1 \leq k_1; \quad x_2 \leq k_2; \quad \dots; \quad x_n \leq k_n. \quad (1.9)$$

Ресурсов должно хватить, отсюда возникают ограничения:

$$\left. \begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &\leq b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &\leq b_2; \\ \dots &\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n &\leq b_m. \end{aligned} \right\}$$

Эти же условия можно короче записать в виде:

$$\left. \begin{aligned} \sum_{j=1}^n a_{1j}x_j &\leq b_1, \\ \sum_{j=1}^n a_{2j}x_j &\leq b_2, \\ \dots &\dots \\ \sum_{j=1}^n a_{mj}x_j &\leq b_m. \end{aligned} \right\} \quad (1.10)$$

Выразим прибыль L в зависимости от элементов решения

$$x_1, x_2, \dots, x_n.$$

Себестоимость s_j единицы товара T_j равна

$$s_j = a_{1j}d_1 + a_{2j}d_2 + \dots + a_{mj}d_m,$$

или, короче,

$$s_j = \sum_{i=1}^m a_{ij}d_i \quad (j=1, 2, \dots, n) \quad (1.11)$$

Вычислив по этой формуле себестоимость единицы каждого товара, получим ряд значений:

$$s_1, s_2, \dots, s_n.$$

Чистая прибыль q_j , получаемая от реализации одной единицы товара T_j , равна разнице между ее продажной ценой c_j и себестоимостью s_j :

$$q_j = c_j - s_j \quad (j=1, 2, \dots, n). \quad (1.12)$$

По этой формуле получаем чистые прибыли на единицу для всех товаров:

$$q_1, q_2, \dots, q_n.$$

Общая чистая прибыль от реализации всех товаров будет

$$L = q_1x_1 + q_2x_2 + \dots + q_nx_n,$$

или, короче,

$$L = \sum_{j=1}^n q_jx_j. \quad (1.13)$$

Задача сводится к следующему:

Выбрать такие неотрицательные значения переменных x_1, x_2, \dots, x_n , которые удовлетворяют линейным неравенствам (1.9), (1.10) и обращают в максимум линейную функцию этих переменных (1.13).

4. Задача о перевозках. Имеются m складов:

$$C_1, C_2, \dots, C_m$$

и n пунктов потребления:

$$П_1, П_2, \dots, П_n$$

(см. рис. 2.1).

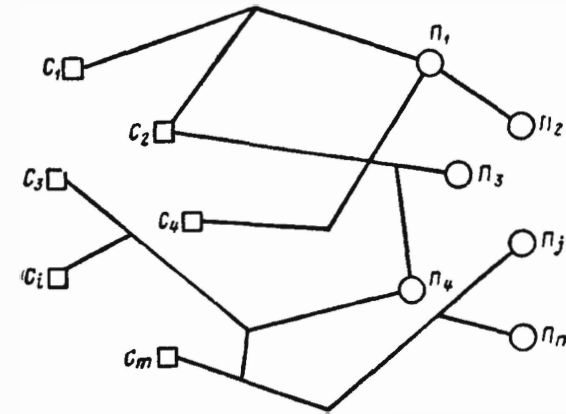


Рис. 2.1

Речь идет о составлении плана перевозок со складов C_1, C_2, \dots, C_m в пункты $П_1, П_2, \dots, П_n$ некоторого товара. На складах C_1, C_2, \dots, C_m имеются запасы товара в количествах

$$a_1, a_2, \dots, a_m$$

единиц. Пункты потребления $П_1, П_2, \dots, П_n$ подали заявки соответственно на

$$b_1, b_2, \dots, b_n$$

единиц товара. Заявки выполнимы, т. е. сумма всех заявок не превосходит суммы всех имеющихся запасов:

$$\sum_{j=1}^n b_j \leq \sum_{i=1}^m a_i.$$

Склады C_1, \dots, C_m связаны с пунктами потребления $П_1, \dots, П_n$ какой-то сетью дорог с определенными тарифами на перевозки. Стоимость перевозки одной единицы товара со склада C_i в пункт $П_j$ равна c_{ij} ($i=1, 2, \dots, m; j=1, 2, \dots, n$).

Заказы на производство этих элементов могут быть размещены на m разных предприятиях:

$$П_1, П_2, \dots, П_m.$$

В течение заданного времени T на предприятии $П_i$ можно изготовить a_{ij} элементов типа $Э_j$ ($i = 1, \dots, m; j = 1, \dots, n$).

Сдаче подлежат только полные комплекты оборудования, состоящие из набора всех элементов $Э_1, Э_2, \dots, Э_n$.

Требуется распределить заказы по предприятиям так, чтобы число полных комплектов оборудования, изготовленных за время T , было максимально. Планируя производство оборудования, мы должны для каждого предприятия $П_i$ указать, какую часть имеющегося в его распоряжении времени оно должно отдать на производство элементов $Э_j$ ($i = 1, \dots, m; j = 1, \dots, n$).

Обозначим x_{ij} долю времени T , которую предприятие $П_i$ будет уделять производству элемента $Э_j$ (если этот элемент на данном предприятии вообще не производится, $x_{ij} = 0$).

При планировании мы должны соблюдать следующие ограничительные условия: количество времени, которое каждое предприятие затрачивает на производство всех элементов, не должно превышать общего запаса времени T (а «доля» — единицы):

$$\left. \begin{aligned} x_{11} + x_{12} + \dots + x_{1n} &\leq 1, \\ x_{21} + x_{22} + \dots + x_{2n} &\leq 1, \\ \dots &\dots \\ x_{m1} + x_{m2} + \dots + x_{mn} &\leq 1, \end{aligned} \right\}$$

или

$$\left. \begin{aligned} \sum_{j=1}^n x_{ij} &\leq 1, \\ \sum_{j=1}^n x_{2j} &\leq 1, \\ \dots &\dots \\ \sum_{j=1}^n x_{mj} &\leq 1. \end{aligned} \right\} \quad (1.17)$$

Определим количество полных комплектов оборудования, которое за время T поставят все предприятия вместе.

Общее количество элементов $Э_j$, которое произведут все предприятия вместе, будет равно

$$N_j = a_{1j} x_{1j} + a_{2j} x_{2j} + \dots + a_{mj} x_{mj}$$

или

$$N_j = \sum_{i=1}^m a_{ij} x_{ij} \quad (j = 1, \dots, n). \quad (1.18)$$

Таким образом, при заданном плане распределения заказов, т. е. при заданных x_{ij} ($i = 1, \dots, m; j = 1, \dots, n$) будет произведено:

$$\begin{aligned} &- N_1 \text{ экземпляров элемента } Э_1 \\ &- N_2 \text{ экземпляров элемента } Э_2 \\ &\dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ &- N_n \text{ экземпляров элемента } Э_n. \end{aligned}$$

Сколько же полных комплектов оборудования можно собрать из этих элементов? Очевидно столько, каково минимальное из всех чисел N_1, N_2, \dots, N_n . Действительно, если, например, элементов типа $Э_1$ произведено 100 шт., а элементов типа $Э_2$ — всего 10 шт., то мы никак не сможем собрать из этих элементов более 10 полных комплектов.

Обозначим Z — количество полных комплектов оборудования, которое можно собрать при данном плане размещения заказов (x_{ij}) .

Имеем:

$$Z = \min_j N_j, \quad (1.19)$$

где знаком \min_j обозначается минимальное из чисел, стоящих под этим знаком, для всех возможных j .

С учетом (1.18), условие (1.19) можно переписать в виде

$$Z = \min_j \sum_{i=1}^m a_{ij} x_{ij}. \quad (1.20)$$

Таким образом, мы приходим к следующей математической постановке задачи:

Найти такие неотрицательные значения переменных x_{ij} , чтобы выполнялись неравенства (1.17) и при этом обращалась в максимум функция этих переменных

$$Z = \min_j \sum_{i=1}^m a_{ij} x_{ij}.$$

Отличие этой задачи от всех ранее рассмотренных состоит в том, что здесь максимизируемая функция Z не является линейной функцией от переменных x_{ij} и, таким образом, задача, собственно, не является задачей линейного программирования. Однако ее легко свести к задаче линейного программирования следующими рассуждениями.

Так как величина Z является минимальной из всех величин

$$N_j = \sum_{i=1}^m a_{ij} x_{ij}, \text{ то можно написать ряд неравенств}$$

$$\left. \begin{aligned} \sum_{i=1}^m a_{i1} x_{i1} &\geq Z; \\ \sum_{i=1}^m a_{i2} x_{i2} &\geq Z; \\ \dots &\dots \\ \sum_{i=1}^m a_{in} x_{in} &\geq Z. \end{aligned} \right\} \quad (1.21)$$

Величину Z можно рассмотреть как новую неотрицательную переменную и решить следующую задачу.

Найти такие неотрицательные значения переменных $x_{11}, x_{12}, \dots, x_{m1}$ и Z , чтобы они удовлетворяли линейным неравенствам (1.17) и (1.21) и при этом величина Z обращалась в максимум.

Так как величина Z есть линейная функция новых переменных $x_{11}, x_{12}, \dots, x_{m1}, Z$:

$$Z = 0 \cdot x_{11} + 0 \cdot x_{12} + \dots + 0 \cdot x_{m1} + 1 \cdot Z,$$

то задача сведена к обычной задаче линейного программирования, путем введения «лишней» переменной Z , которая в первоначальной постановке задачи не фигурировала.

Задачи такого типа, где требуется обратить в максимум минимальное значение какой-то величины (или, наоборот, в минимум — максимальное), довольно часто встречаются на практике и называются «задачами на минимакс». Стакими задачами мы еще встретимся в гл. 10.

Итак, мы рассмотрели целый ряд задач исследования операций из самых разных областей практики; эти задачи характеризуются некоторыми общими чертами. В каждой из них элементы решения представляют собой ряд неотрицательных переменных x_1, x_2, \dots . Требуется так выбрать значения этих переменных, чтобы

1) выполнялись некоторые ограничения, имеющие вид линейных неравенств или равенств относительно переменных x_1, x_2, \dots ;

2) некоторая линейная функция L тех же переменных обращалась в максимум (минимум).

Математический аппарат линейного программирования, к изложению которого мы и приступаем, предназначен специально для решения таких задач.

Может возникнуть вопрос: а нужен ли такой специальный аппарат? Нельзя ли, как это принято в математике, просто продифференцировать L по аргументам x_1, x_2, \dots , приравнять производные нулю и решить полученную систему уравнений?

Нет, оказывается, сделать этого нельзя! Так как функция L линейная, производные от нее по всем аргументам постоянны и нигде в нуль не обращаются. Максимум (или минимум) функции L , если он существует, достигается всегда где-то на границе области возможных значений x_1, x_2, \dots , т. е. там, где начинают действовать ограничения. Математический аппарат линейного программирования и позволяет нам последовательно, в кратчайшие сроки, обследовать

границы области возможных решений и найти на этих границах то решение, которое является оптимальным, т. е. такую совокупность значений x_1, x_2, \dots , при которой линейная функция L обращается в максимум или в минимум.

2. ОСНОВНАЯ ЗАДАЧА ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Выше мы рассмотрели различные практические задачи, сводящиеся к схеме линейного программирования. В одних из этих задач линейные ограничения имели вид неравенства, в других — равенств, в третьих — тех и других.

Здесь мы рассмотрим задачу линейного программирования с ограничениями-равенствами — так называемую основную задачу линейного программирования (ОЗЛП).

В дальнейшем мы покажем, как от задачи с ограничениями-неравенствами можно перейти к ОЗЛП, и обратно.

Основная задача линейного программирования ставится следующим образом.

Имеется ряд переменных

$$x_1, x_2, \dots, x_n.$$

Требуется найти такие неотрицательные значения этих переменных, которые удовлетворяли бы системе линейных уравнений:

$$\left. \begin{aligned} a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \dots + a_{1n} x_n &= b_1; \\ a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \dots + a_{2n} x_n &= b_2; \\ \dots &\dots \\ a_{m1} x_1 + a_{m2} x_2 + \dots + a_{mn} x_n &= b_m, \end{aligned} \right\} \quad (2.1)$$

и, кроме того, обращали бы в минимум линейную функцию

$$L = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \dots + c_n x_n. \quad (2.2)$$

Очевидно, случай, когда линейную функцию нужно обратить не в минимум, а в максимум, легко сводится к предыдущему, если изменить знак функции и рассмотреть вместо нее функцию

$$L' = -L = -c_1 x_1 - c_2 x_2 - \dots - c_n x_n. \quad (2.3)$$

Условимся называть допустимым решением ОЗЛП любую совокупность переменных

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \dots, x_n \geq 0,$$

удовлетворяющую уравнениям (2.1).

Оптимальным решением будем называть то из допустимых решений, при котором линейная функция (2.2) обращается в минимум.

Основная задача линейного программирования необязательно должна иметь решение. Может оказаться, что уравнения (2.1) противо-

Решение. Выберем в качестве свободных переменных, например, x_1 и x_2 и выразим через них остальные (базисные) переменные: x_3, x_4, x_5, x_6, x_7 . Из первого уравнения имеем:

$$x_3 = -x_1 + x_2 + 4 \quad (3.4)$$

Из третьего:

$$x_5 = x_1 + x_2 + 4.$$

Из четвертого:

$$x_6 = -x_2 + 5. \quad (3.5)$$

Подставляя (3.4) во второе уравнение (3.3) и (3.5) — в последнее и разрешая относительно x_4, x_7 , имеем:

$$x_4 = 3x_1 - 2x_2 + 1;$$

$$x_7 = -x_1 + \frac{1}{2}x_2 + 6.$$

Геометрическая интерпретация задачи представлена на рис. 2.6 (прямые $x_1 = 0, x_2 = 0$ — оси координат; остальные ограничивающие прямые $x_3 = 0, x_4 = 0, x_5 = 0, x_6 = 0$ и $x_7 = 0$; короткой штриховкой помечены допустимые полуплоскости).

Как видно из расположения прямых и отмеченных полуплоскостей, допустимые решения для рассмотренной задачи существуют; они заполняют ОДР, которая на рис. 2.6 показана редкой штриховкой.

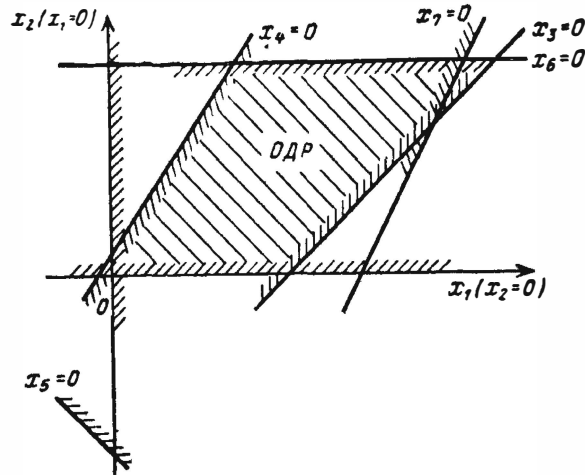


Рис. 2.6

Таким образом, мы рассмотрели вопрос о существовании области допустимых решений ОЗЛП и (для случая $m = n - 2$) дали ему геометрическую интерпретацию.

Теперь возникает вопрос о нахождении из числа допустимых оптимального решения, т. е. такого, которое обращает в минимум линейную функцию

$$L = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \dots + c_n x_n. \quad (3.6)$$

Дадим и этой задаче геометрическую интерпретацию, причем снова для случая, когда $m = n - 2$ (т. е. число свободных переменных равно 2, а число базисных m).

Предположим, что свободными переменными опять являются x_1, x_2 , а базисными x_3, x_4, \dots, x_n , выраженные через свободные формулами (3.2). Подставим выражения (3.2) в формулу (3.6), приведем подобные члены и выразим линейную функцию L всех n переменных как линейную функцию только двух свободных переменных: x_1 и x_2 . Получим:

$$L = \gamma_0 + \gamma_1 x_1 + \gamma_2 x_2, \quad (3.7)$$

где γ_0 — свободный член, которого в первоначальном виде у функции L не было; теперь, при переходе к переменным x_1, x_2 , он мог появиться.

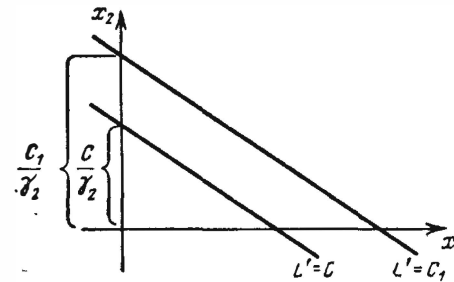


Рис. 2.7

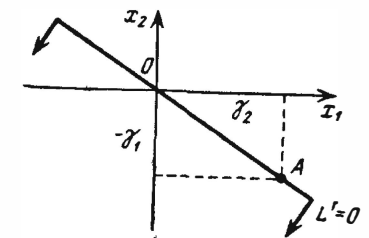


Рис. 2.8

Очевидно, линейная функция (3.7) достигает минимума при тех же значениях x_1, x_2 , что и функция

$$L' = \gamma_1 x_1 + \gamma_2 x_2$$

без свободного члена (линейная форма). Действительно, $L' = L - \gamma_0$, где γ_0 не зависит от x_1 и x_2 , и, очевидно, минимумы той и другой функций, отличающиеся на γ_0 , достигаются при одних и тех же значениях x_1, x_2 .

Найдем эти значения, пользуясь геометрической интерпретацией. Придадим L' некоторое постоянное значение C :

$$L' = \gamma_1 x_1 + \gamma_2 x_2 = C; \bullet$$

получим уравнение прямой на плоскости $x_1 O x_2$ (рис. 2.7). Угловой коэффициент этой прямой равен $-\gamma_1/\gamma_2$, а отрезок, отсекаемый ею на оси Ox_2 (начальная ордината), равен C/γ_2 . Очевидно, если мы заменим постоянную C на некоторую другую C_1 , угловой коэффициент прямой не изменится; изменится только начальная ордината, и прямая переместится параллельно самой себе в новое положение $L' = C_1$ (см. рис. 2.7).

Таким образом, различным значениям L' соответствуют разные прямые на плоскости, но все они параллельны между собой. Очевид-

но, вместо всех этих прямых достаточно изобразить на плоскости одну основную прямую, например, $L' = 0$, а затем можно мысленно перемещать ее параллельно самой себе. При перемещении этой прямой в одну сторону L' будет возрастать, в другую — убывать.

Построим основную прямую $L' = 0$ на плоскости $x_1 O x_2$ (рис. 2.8). Мы знаем, что ее угловой коэффициент равен $-\gamma_1/\gamma_2$; чтобы построить прямую, проходящую через начало координат с угловым коэффициентом $-\gamma_1/\gamma_2$, отложим по оси абсцисс отрезок γ_2 , а по оси ординат отрезок $-\gamma_1$, и через точку A с такими координатами проведем прямую. Это и будет основная прямая $L' = 0$.

Теперь остается только выяснить, в какую сторону (параллельно самой себе) надо двигать эту прямую, чтобы величина L' убывала. В случае, показанном на рис. 2.8 (оба коэффициента γ_1 и γ_2 положи-

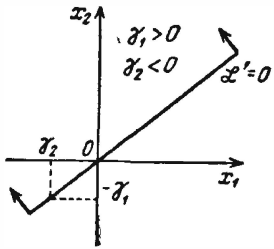


Рис. 2.9

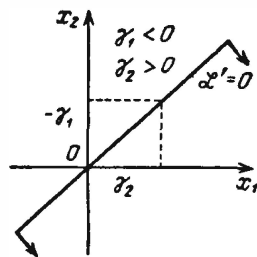


Рис. 2.10

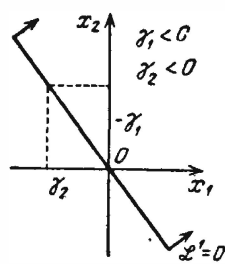


Рис. 2.11

тельно) направление убывания L' — вниз и влево (это показано стрелками, направленными от основной прямой в сторону убывания L'). При других знаках коэффициентов γ_1, γ_2 направление убывания меняется. Случаи различных направлений убывания показаны на рис. 2.9, 2.10 и 2.11.

Таким образом, и направление основной прямой $L' = 0$, и направление убывания линейной формы L' определяются величинами и знаками коэффициентов γ_1, γ_2 при свободных переменных x_1, x_2 в выражении L' .

Дадим теперь геометрическую интерпретацию нахождения оптимального решения ОЗЛП среди допустимых.

Пусть имеется область допустимых решений ОДР (рис. 2.12) и основная прямая $L' = 0$; известно (указано стрелками) направление убывания линейной формы L' .

При перемещении основной прямой в направлении, указанном стрелками, линейная форма L' будет убывать. Очевидно, наименьшего значения она достигнет, когда прямая будет проходить через крайнюю точку ОДР, наиболее удаленную от начала координат в направлении стрелок (в нашем случае, точку A). Координаты этой точки x_1^*, x_2^* и определяют оптимальное решение ОЗЛП. Зная оптимальные значения свободных переменных x_1^*, x_2^* , можно найти, подставляя их в уравнения (3.2), и оптимальные значения базисных переменных:

$$\begin{aligned} x_3^* &= \alpha_{31} x_1^* + \alpha_{32} x_2^* + \beta_3, \\ x_4^* &= \alpha_{41} x_1^* + \alpha_{42} x_2^* + \beta_4, \\ &\dots \dots \dots \\ x_n^* &= \alpha_{n1} x_1^* + \alpha_{n2} x_2^* + \beta_n, \end{aligned}$$

а также оптимальное (минимальное) значение линейной функции L :

$$L_{min} = \gamma_0 + \gamma_1 x_1^* + \gamma_2 x_2^*. \quad (3.8)$$

Таким образом, если число независимых уравнений-ограничений, которым должны удовлетворять переменные x_1, x_2, \dots, x_n , на два меньше, чем число переменных n (т. е. в ОЗЛП фигурируют две свободные переменные и любое число базисных), решение ОЗЛП может быть получено простым геометрическим построением.

Пример 2. В условиях примера 1 найти оптимальное решение ОЗЛП, обращающее в минимум линейную функцию семи неизвестных:

$$L = x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 - 3x_5 + x_6 - 2x_7 \quad (3.9)$$

Уравнения-ограничения — те же, что и в примере 1.

Решение. В примере 1 уравнения-ограничения (3.3) были разрешены относительно базисных переменных x_3, x_4, x_5, x_6, x_7 , которые были выражены через свободные x_1 и x_2 :

$$\left. \begin{aligned} x_3 &= -x_1 + x_2 + 4; \\ x_4 &= 3x_1 - 2x_2 + 1; \\ x_5 &= x_1 + x_2 + 4; \\ x_6 &= -x_2 + 5; \\ x_7 &= -x_1 + \frac{1}{2}x_2 + 6. \end{aligned} \right\} \quad (3.10)$$

Подставляя эти выражения в (3.9) и приводя подобные члены, имеем:

$$L = -5x_1 - 2x_2 - 12. \quad (3.11)$$

Воспроизведем область допустимых решений, ранее построенную на рис. 2.6 (см. рис. 2.13).

Отбрасывая свободный член в (3.11), имеем:

$$L' = -5x_1 - 2x_2.$$

Строим основную прямую $L' = 0$. Для этого откладываем отрезки $\gamma_2 = -2$ по оси абсцисс и $-\gamma_1 = 5$ по оси ординат, проводим через точку B с координатами $(-2, 5)$ прямую $L' = 0$ и отмечаем стрелками направление убывания L' . Перемещая основную прямую параллельно самой себе в сторону убывания L' , наименьшее значение L' мы получим в точке A (наиболее удаленной от нача-

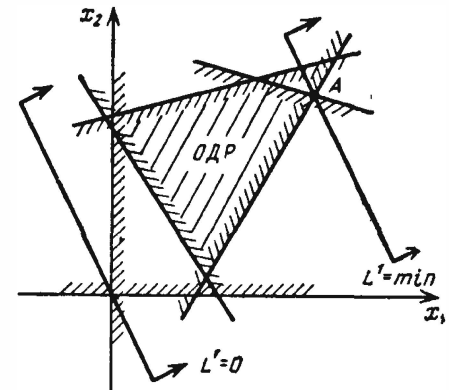


Рис. 2.12

ла координат в направлении стрелок). Координаты этой точки x_1^* , x_2^* и дают оптимальное решение ОЗЛП. В точке A пересекаются две ограничивающие прямые: $x_6 = 0$ и $x_7 = 0$. Приравняв нулю выражения для x_6 и x_7 , получим два уравнения:

$$\begin{cases} -x_2 + 5 = 0, \\ -x_1 + \frac{1}{2}x_2 + 6 = 0. \end{cases}$$

Решая их совместно, найдем $x_1^* = 8,5$; $x_2^* = 5$.

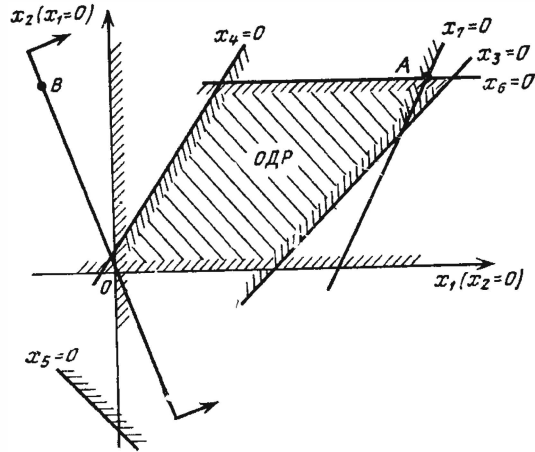


Рис. 2.13

Подставляя эти значения в (3.11), найдем оптимальные значения базисных переменных:

$$x_3^* = 0,5, \quad x_4^* = 16,5; \quad x_5^* = 17,5.$$

Что касается x_6 и x_7 , то их оптимальные значения равны нулю: $x_6^* = 0$; $x_7^* = 0$.

Подставляя найденные оптимальные значения x_1^* и x_2^* в линейную функцию (3.11), найдем минимальное значение (оптимум) линейной функции L :

$$L = -5 \cdot 8,5 - 2 \cdot 5 - 12 = -64,5.$$

Таким образом, мы научились решать ОЗЛП в частном случае $m = n - 2$ при помощи геометрического построения.

Несмотря на то, что это построение относится к частному случаю, из него вытекают некоторые общие соображения, относящиеся вообще к свойствам решения ОЗЛП.

Отметим отмеченные нами закономерности для случая $n - m = 2$.

1. Решение ОЗЛП, если оно существует, не может лежать в нулевой области допустимых решений, а только на ее границе.

2. Решение ОЗЛП может быть и не единственным (см. рис. 2.14). Действительно, если основная прямая параллельна той стороне многоугольника допустимых решений, где достигается минимум L' , то он

достигается не в одной точке, а на всей этой стороне. В этом случае ОЗЛП имеет бесчисленное множество оптимальных решений.

3. ОЗЛП может не иметь решения даже в случае, когда существует ОДР (рис. 2.15). Это бывает тогда, когда в направлении стрелок ОДР неограничена, т. е. в области допустимых решений линейная функция L неограничена снизу. Перемещая основную прямую в направлении стрелок, мы будем получать все меньшие и меньшие значения L' , а значит, и L .

4. Решение ОЗЛП, минимизирующее функцию L (оптимальное решение), всегда достигается в одной из вершин многоугольника допустимых решений (если оно достигается на целой стороне, то оно же

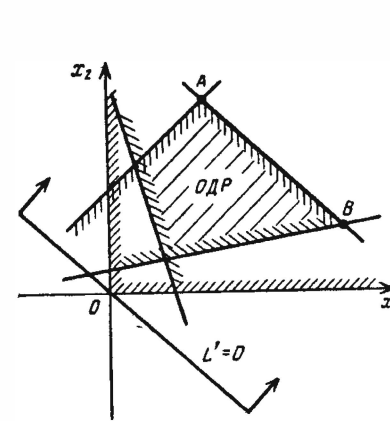


Рис. 2.14

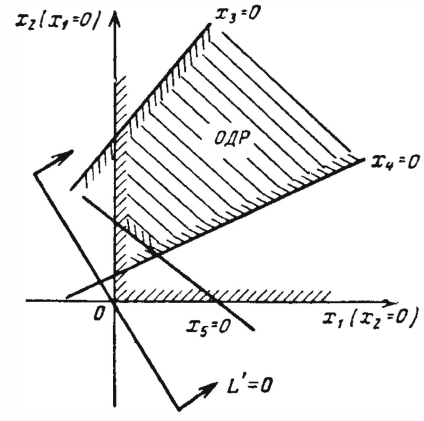


Рис. 2.15

достигается и в каждой из вершин, через которые проходит эта сторона). Решение, лежащее в одной из вершин ОДР, называется опорным решением, а сама вершина — опорной точкой.

5. Для того, чтобы найти оптимальное решение, в принципе достаточно перебрать все вершины ОДР (опорные точки) и выбрать из них ту, где функция L достигает минимума.

6. Если число свободных переменных в ОЗЛП равно 2, а число базисных — m и решение ОЗЛП существует, то оно всегда достигается в точке, где по крайней мере две из переменных x_1, x_2, \dots, x_n обращаются в нуль. Действительно, в любой опорной точке пересекаются по крайней мере две из ограничивающих прямых; могут же в ней пересекаться и более двух (см. рис. 2.16).

Случай, когда в оптимальном решении обращаются в нуль не две, а больше переменных, называется вырожденным. На рис. 2.16 показан вырожденный случай, когда в точке A , соответствующей оптимальному решению, обращаются в нуль три переменные: x_3, x_5 и x_6 .

Рассмотрев подробно геометрическую интерпретацию для случая $m = n - 2$, обратимся к случаю, когда число переменных превышает на 3 число независимых уравнений-ограничений: $m = n - 3$.

$$\left. \begin{aligned} a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \dots + a_{1n} x_n + b_1 &\geq 0; \\ a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \dots + a_{2n} x_n + b_2 &\geq 0; \\ \dots &\dots \\ a_{m1} x_1 + a_{m2} x_2 + \dots + a_{mn} x_n + b_m &\geq 0. \end{aligned} \right\} \quad (4.1)$$

Будем считать, что все эти неравенства линейно независимы (т. е. никакое из них нельзя представить в виде линейной комбинации других).

Требуется найти такую совокупность неотрицательных значений x_1, x_2, \dots, x_n , которая удовлетворяла бы неравенствам (4.1), и, кроме того, обращала бы в минимум линейную функцию:

$$L = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \dots + c_n x_n. \quad (4.2)$$

От поставленной таким образом задачи легко перейти к основной задаче линейного программирования. Действительно, введем обозначения:

$$\left. \begin{aligned} y_1 &= a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \dots + a_{1n} x_n + b_1, \\ y_2 &= a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \dots + a_{2n} x_n + b_2, \\ \dots &\dots \\ y_m &= a_{m1} x_1 + a_{m2} x_2 + \dots + a_{mn} x_n + b_m, \end{aligned} \right\} \quad (4.3)$$

где y_1, y_2, \dots, y_m — некоторые новые переменные, которые мы будем называть «добавочными». Согласно условиям (4.1), эти добавочные переменные так же, как и x_1, x_2, \dots, x_n , должны быть неотрицательными.

Таким образом, перед нами возникает задача линейного программирования в следующей постановке: найти такие неотрицательные значения $n + m$ переменных $x_1, x_2, \dots, x_n; y_1, y_2, \dots, y_m$, чтобы они удовлетворяли системе уравнений (4.3) и одновременно обращали в минимум линейную функцию этих переменных:

$$L = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \dots + c_n x_n.$$

Как видно, перед нами в чистом виде основная задача линейного программирования (ОЗЛП). Уравнения (4.3) заданы в форме, уже разрешенной относительно базисных переменных y_1, y_2, \dots, y_m , которые выражены через свободные переменные x_1, x_2, \dots, x_n . Общее количество переменных равно $n + m$, из них n «первоначальных» и m «добавочных». Функция L выражена только через «первоначальные» переменные (коэффициенты при «добавочных» переменных в ней равны нулю).

Таким образом, задача линейного программирования с ограничениями-неравенствами сведена нами к основной задаче линейного программирования, но с большим числом переменных, чем первоначально было в задаче.

Пример 1 Имеется задача линейного программирования с ограничениями-неравенствами: найти неотрицательные значения переменных x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 , удовлетворяющие условиям

$$\left. \begin{aligned} 2x_1 - x_2 + 3x_3 &< 6, \\ x_3 - 3x_2 &< -1, \\ x_5 - 2x_4 + x_1 &> -1, \\ x_5 - x_1 &< 0 \end{aligned} \right\} \quad (4.4)$$

и обращающие в минимум линейную функцию

$$L = x_1 - 2x_2 - 3x_3. \quad (4.5)$$

Требуется привести эту задачу к виду ОЗЛП.

Решение. Приводим неравенства (4.4) к стандартной форме:

$$\begin{aligned} -2x_1 + x_2 - 3x_3 + 6 &> 0, \\ 3x_2 - x_3 - 1 &> 0, \\ x_1 - 2x_4 + x_5 + 1 &> 0, \\ x_1 - x_5 &> 0. \end{aligned}$$

Вводим дополнительные переменные:

$$\left. \begin{aligned} y_1 &= -2x_1 + x_2 - 3x_3 + 6, \\ y_2 &= 3x_2 - x_3 - 1, \\ y_3 &= x_1 - 2x_4 + x_5 + 1, \\ y_4 &= x_1 - x_5. \end{aligned} \right\} \quad (4.6)$$

Задача сводится к тому, чтобы найти неотрицательные значения переменных

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5; y_1, y_2, y_3, y_4,$$

удовлетворяющие уравнениям (4.6) и обращающие в минимум линейную функцию (4.5).

Мы показали, как от задачи линейного программирования с ограничениями-неравенствами можно перейти к задаче с ограничениями-равенствами (ОЗЛП). Всегда возможен и обратный переход — от ОЗЛП к задаче с ограничениями-неравенствами. Если в первом случае мы увеличивали число переменных, то во втором случае будем его уменьшать, устраняя базисные переменные и оставляя только свободные.

Пример 2. Имеется задача линейного программирования с ограничениями-равенствами (ОЗЛП):

$$\left. \begin{aligned} x_1 + x_2 &= 1, \\ x_2 - 2x_3 &= -3, \\ x_3 - x_4 + x_5 &= 1 \end{aligned} \right\} \quad (4.7)$$

и минимизируемой функцией

$$L = -x_1 - x_2 + x_5. \quad (4.8)$$

Требуется записать ее как задачу линейного программирования с ограничениями-неравенствами.

Решение. Так как $m = 3$, $n = 5$, $n - m = 2$, то выберем какие-то две из переменных в качестве свободных. Заметим, что переменные x_1, x_2 в качестве свободных выбирать нельзя, так как они связаны первым из уравнений (4.7): значение одной из них полностью определяется значением другой, а свободные переменные должны быть независимыми. По такой же причине нельзя в качестве

Попробуем, что будет, если положить все свободные переменные x_1, x_2, \dots, x_k равными нулю:

$$x_1 = 0, \quad x_2 = 0, \dots, \quad x_k = 0.$$

При этом мы получим:

$$x_{k+1} = \beta_{k+1}, \quad x_{k+2} = \beta_{k+2}, \quad \dots, \quad x_n = \beta_n.$$

Это решение может быть допустимым или недопустимым. Оно допустимо, если все свободные члены $\beta_{k+1}, \beta_{k+2}, \dots, \beta_n$ неотрицательны. Предположим, что это условие выполнено. Тогда мы получили опорное решение. Но является ли оно оптимальным? Может быть да, а может быть и нет. Чтобы проверить это, выразим минимизируемую линейную функцию L через свободные переменные x_1, x_2, \dots, x_k :

$$L = \gamma_0 + \gamma_1 x_1 + \gamma_2 x_2 + \dots + \gamma_k x_k. \quad (5.2)$$

Очевидно, что при $x_1 = x_2 = \dots = x_k = 0$ $L = \gamma_0$. Посмотрим, не можем ли мы улучшить решение, т. е. уменьшить функцию L , увеличивая какие-нибудь из переменных x_1, x_2, \dots, x_k (уменьшать их мы не можем, так как все они равны нулю, а отрицательные значения переменных недопустимы). Если все коэффициенты $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_k$ в формуле (5.2) положительны, то, увеличивая какие-то из переменных x_1, x_2, \dots, x_k сверх нуля, мы не можем уменьшить L ; следовательно, найденное нами опорное решение является оптимальным. Если же среди коэффициентов $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_k$ в формуле (5.2) есть отрицательные, то, увеличивая некоторые из переменных x_1, x_2, \dots, x_k , а именно — те, коэффициенты при которых отрицательны, мы можем улучшить решение, т. е. уменьшить L .

Пусть, например, коэффициент γ_1 в формуле (5.2) отрицателен. Значит, есть смысл увеличить x_1 , т. е. перейти от данного опорного решения к другому, где переменная x_1 не равна нулю, а вместо нее равна нулю какая-то другая. Увеличение x_1 «полезно» для линейной функции L , делает ее меньше. Однако увеличивать x_1 надо осторожно, так чтобы не стали отрицательными другие переменные $x_{k+1}, x_{k+2}, \dots, x_n$, выраженные через свободные переменные, в частности, через x_1 формулами (5.1).

Посмотрим, опасно ли для переменных $x_{k+1}, x_{k+2}, \dots, x_n$ увеличение x_1 , т. е. может ли оно сделать их отрицательными? Да, опасно, если коэффициент при x_1 в соответствующем уравнении отрицателен. Если среди уравнений (5.1) нет уравнения с отрицательным коэффициентом при x_1 , то величину x_1 можно увеличивать беспредельно, а значит, линейная функция L не ограничена снизу и оптимального решения ОЗЛП не существует.

Допустим, что это не так и что среди уравнений (5.1) есть такие, в которых коэффициент при x_1 отрицателен. Для переменных, стоящих в левых частях этих уравнений, увеличение x_1 опасно — оно может сделать их отрицательными.

Возьмем одну из таких переменных x_l и посмотрим, до какой степени можно все же увеличить x_1 , пока переменная x_l не станет отрицательной? Выпишем l -е уравнение из системы (5.1):

$$x_l = \alpha_{l1} x_1 + \alpha_{l2} x_2 + \dots + \alpha_{lk} x_k + \beta_l.$$

Здесь свободный член $\beta_l \geq 0$, а коэффициент α_{l1} отрицателен. Легко понять, что если мы оставим $x_2 = \dots = x_k = 0$, то x_l мы можем увеличивать только до значения, равного $-\beta_l/\alpha_{l1}$, а при дальнейшем увеличении x_1 переменная x_l станет отрицательной.

Выберем ту из переменных x_{k+1}, \dots, x_n , которая раньше всех обратится в нуль при увеличении x_1 , т. е. ту, для которой величина $-\beta_l/\alpha_{l1}$ меньше всего. Пусть такая «наиболее угрожаемая» переменная будет x_r . Тогда имеет смысл «переразрешить» систему уравнений (5.1) относительно других базисных переменных, выведя из числа свободных переменных x_1 и переведя вместо нее в группу свободных переменных x_r . Действительно, мы хотим перейти от опорного решения, задаваемого равенствами $x_1 = x_2 = \dots = x_k = 0$, к опорному решению, в котором уже $x_1 \neq 0$, а $x_2 = \dots = x_k = x_r = 0$. Первое опорное решение мы получили, положив равными нулю все прежние свободные переменные x_1, x_2, \dots, x_k ; второе мы получим, если обратим в нуль все новые свободные переменные x_2, \dots, x_k, x_r . Базисными переменными при этом будут $x_1, x_{k+1}, \dots, x_{r-1}, x_{r+1}, \dots, x_n$.

Предположим, что уравнения типа (5.1) для нового набора базисных и свободных переменных составлены. Тогда можно выразить через новые свободные переменные и линейную функцию L . Если все коэффициенты при переменных в этой формуле положительны, то мы нашли оптимальное решение: оно получится, если все свободные переменные положить равными нулю. Если среди коэффициентов при переменных есть отрицательные, то процедура улучшения решения продолжается: система вновь переразрешается относительно других базисных переменных, и так далее, пока не будет найдено оптимальное решение, обращающее функцию L в минимум.

Проследим описанную процедуру постепенного улучшения решения ОЗЛП на конкретном примере.

Пример Имеется задача линейного программирования с ограничениями-равенствами:

$$\left. \begin{aligned} -5x_1 - x_2 + 2x_3 &< 2, \\ -x_1 + x_2 + x_4 &\leq 5, \\ -3x_1 + 5x_4 &\leq 7. \end{aligned} \right\} \quad (5.3)$$

Требуется минимизировать линейную функцию

$$L = 5x_1 - 2x_3.$$

Решение. Приводя неравенства к стандартному виду (≥ 0) и вводя добавочные переменные y_1, y_2, y_3 , переходим к условиям-равенствам:

$$\left. \begin{aligned} y_1 &= 5x_1 + x_2 - 2x_3 + 2, \\ y_2 &= x_1 - x_2 - x_4 + 5, \\ y_3 &= 3x_1 - 5x_4 + 7. \end{aligned} \right\} \quad (5.4)$$

Число переменных $n=7$ на 4 превышает число уравнений $m=3$. Значит, четыре переменных могут быть выбраны в качестве свободных

Попробуем выбрать в качестве свободных переменных x_1, x_2, x_3, x_4 и положить их равными нулю. При этом мы сразу получим опорное решение: $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 0; y_1 = 2; y_2 = 5; y_3 = 7$.

При этих значениях переменных $L = 0$.

Посмотрим, является ли это решение оптимальным? Нет! Потому что в выражении линейной функции L коэффициент при x_3 отрицателен. Значит, увеличивая x_3 , можно уменьшить L .

Попробуем увеличивать x_3 . Проследим по уравнениям (5.4), опасно ли это для других переменных? Да, опасно для y_1 и y_2 — в оба эти уравнения переменная x_3 входит с отрицательным коэффициентом, значит, при увеличении x_3 соответствующие переменные y_1 и y_2 могут стать отрицательными.

Посмотрим, какая из этих переменных y_1 или y_2 является наиболее «угрожаемой», какая раньше обратится в нуль при увеличении x_3 . Очевидно, y_1 : она станет равной нулю при $x_3 = 1$, а величина y_2 — только при $x_3 = 5$.

Поэтому выбираем переменную y_1 и вводим ее в число свободных вместо x_3 . Чтобы «переразрешить» систему (5.4) относительно x_3, y_2, y_3 , поступим следующим образом. Разрешим первое уравнение (5.4) относительно новой базисной переменной x_3 :

$$x_3 = \frac{5}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_2 - \frac{1}{2}y_1 + 1.$$

Это выражение подставим вместо x_3 во второе уравнение; получим

$$y_2 = -\frac{3}{2}x_1 - \frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{2}y_1 - x_4 + 4.$$

Что касается третьего уравнения, то оно, как не содержащее x_3 , не изменится. Итак, мы привели систему (5.4) к виду:

$$\left. \begin{aligned} x_3 &= \frac{5}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_2 - \frac{1}{2}y_1 + 1, \\ y_2 &= -\frac{3}{2}x_1 - \frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{2}y_1 - x_4 + 4, \\ y_3 &= 3x_1 - 5x_4 + 7 \end{aligned} \right\} \quad (5.5)$$

со свободными переменными x_1, x_2, y_1, x_4 и базисными x_3, y_2, y_3 .

Выразим линейную функцию L через новые свободные переменные:

$$L = 5x_1 - 5x_4 - x_2 + y_1 - 2,$$

или

$$L = -x_2 + y_1 - 2. \quad (5.6)$$

Положим теперь свободные переменные равными нулю. Линейная функция L станет равной -2 . Это уже лучше, чем прежнее значение $L = 0$. Но является ли это решение оптимальным? Все еще нет, так как коэффициент при x_2 в выражении (5.6) отрицателен. Итак, будем увеличивать x_2 . Посмотрим, для какой из переменных, стоящих в левых частях системы (5.5), это может быть «опасно». Только для y_2 (в первое уравнение x_2 входит с положительным коэффициентом, а в третье совсем не входит).

Итак, обменяем местами переменные x_2 и y_2 — первую выведем из числа свободных, а вторую — введем. Для этого разрешим второе уравнение (5.5) относительно x_2 и подставим это x_2 в первое уравнение. Получим еще один вид системы (5.4):

$$\left. \begin{aligned} x_3 &= x_1 - y_2 - x_4 + 5, \\ x_2 &= -3x_1 - 2y_2 + y_1 - 2x_4 + 8; \\ y_3 &= 3x_1 - 5x_4 + 7. \end{aligned} \right\} \quad (5.7)$$

Выразим L через новые свободные переменные:

$$L = 3x_1 + 2y_2 - y_1 + 2x_4 - 8 + y_1 - 2,$$

или

$$L = 3x_1 + 2y_2 + 2x_4 - 10. \quad (5.8)$$

Полагая $x_1 = y_1 = y_2 = x_4 = 0$, получим

$$L = -10.$$

Является ли это решение оптимальным? На этот раз — да, так как коэффициенты при всех свободных переменных в выражении (5.8) неотрицательны. Итак, оптимальное решение ОЗЛП найдено:

$$x_1^* = 0, \quad x_2^* = 8; \quad x_3^* = 5; \quad x_4^* = 0; \quad y_1^* = 0; \quad y_2^* = 0; \quad y_3^* = 7.$$

При таких значениях переменных линейная функция L принимает минимальное значение:

$$L_{min} = -10.$$

Заметим, что в рассмотренном примере нам не пришлось искать опорного решения: оно сразу же получилось, когда мы положили свободные переменные равными нулю. Это объясняется тем, что в уравнениях (5.4) все свободные члены были неотрицательны и, значит, первое же попавшееся решение оказалось опорным. Если это окажется не так, можно будет прийти к опорному решению с помощью такой же процедуры обмена местами некоторых базисных и свободных переменных, переразрешая уравнения до тех пор, пока свободные члены не станут неотрицательными. Как это делается, мы увидим в дальнейшем (см. § 7).

6. ТАБЛИЧНЫЙ АЛГОРИТМ ЗАМЕНЫ БАЗИСНЫХ ПЕРЕМЕННЫХ

Процедура «переразрешения» системы уравнений-ограничений ОЗЛП относительно новых базисных переменных может быть существенно упрощена, если ее формализовать и свести к заполнению стандартных таблиц по определенной системе правил (короче, алгоритму). Этот алгоритм мы продемонстрируем на конкретном примере (в его справедливости для любого общего случая читатель сможет убедиться самостоятельно).

Рассмотрим систему пяти уравнений-ограничений:

$$y_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4 + b_1,$$

$$y_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + a_{24}x_4 + b_2,$$

$$y_3 = a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + a_{34}x_4 + b_3,$$

$$y_4 = a_{41}x_1 + a_{42}x_2 + a_{43}x_3 + a_{44}x_4 + b_4,$$

$$y_5 = a_{51}x_1 + a_{52}x_2 + a_{53}x_3 + a_{54}x_4 + b_5$$

с четырьмя свободными переменными: x_1, x_2, x_3, x_4 . Пусть нам требуется вывести из числа свободных какую-нибудь переменную, например x_2 , и перевести ее в базисные, а взамен ее ввести в число свободных какую-то базисную переменную, скажем y_3 ; короче, мы хотим обменять местами переменные x_2 и y_3 . Эту замену мы будем символически обозначать

$$x_2 \leftrightarrow y_3.$$

Посмотрим, какие действия надо для этого осуществить.

Вообще, можно было бы для каждой новой системы уравнений проводить перерешение заново, т. е. для замены $x_2 \leftrightarrow y_3$ мы взяли бы в третьем уравнении (6.1) член $a_{32}x_2$, содержащий x_2 , (назовем его «разрешающим членом»; разумеется, предполагаем $a_{32} \neq 0$), перенесли бы его в левую часть, а y_3 — в правую; решили бы уравнение относительно x_2 и подставили бы выражение для x_2 во все остальные уравнения. Процедура достаточно громоздкая, требующая напряженного внимания; при ее выполнении легко ошибиться (особенно при большом числе уравнений). Но так как здесь каждый раз нужно проделывать одни и те же операции, то их достаточно выполнить один раз в общем виде и вывести правила преобразования, которые затем можно применять автоматически. Эти правила, осуществляющие «перерешение» системы, удобно реализовать в виде табличного алгоритма.

Чтобы этот алгоритм был проще и легче запоминался, целесообразно предварительно несколько преобразовать систему уравнений (6.1), представив их правые части как разности между свободными членами и суммой остальных:

$$\left. \begin{aligned} y_1 &= b_1 - (-a_{11}x_1 - a_{12}x_2 - a_{13}x_3 - a_{14}x_4), \\ y_2 &= b_2 - (-a_{21}x_1 - a_{22}x_2 - a_{23}x_3 - a_{24}x_4), \\ y_3 &= b_3 - (-a_{31}x_1 - a_{32}x_2 - a_{33}x_3 - a_{34}x_4), \\ y_4 &= b_4 - (-a_{41}x_1 - a_{42}x_2 - a_{43}x_3 - a_{44}x_4), \\ y_5 &= b_5 - (-a_{51}x_1 - a_{52}x_2 - a_{53}x_3 - a_{54}x_4). \end{aligned} \right\} \quad (6.1)$$

Обозначая

$$-a_{11} = \alpha_{11}; \quad -a_{12} = \alpha_{12}; \quad \dots; \quad -a_{54} = \alpha_{54},$$

получим:

$$\left. \begin{aligned} y_1 &= b_1 - (\alpha_{11}x_1 + \alpha_{12}x_2 + \alpha_{13}x_3 + \alpha_{14}x_4), \\ y_2 &= b_2 - (\alpha_{21}x_1 + \alpha_{22}x_2 + \alpha_{23}x_3 + \alpha_{24}x_4), \\ y_3 &= b_3 - (\alpha_{31}x_1 + \alpha_{32}x_2 + \alpha_{33}x_3 + \alpha_{34}x_4), \\ y_4 &= b_4 - (\alpha_{41}x_1 + \alpha_{42}x_2 + \alpha_{43}x_3 + \alpha_{44}x_4), \\ y_5 &= b_5 - (\alpha_{51}x_1 + \alpha_{52}x_2 + \alpha_{53}x_3 + \alpha_{54}x_4). \end{aligned} \right\} \quad (6.2)$$

Форму записи уравнений (6.2) мы будем называть *стандартной*.

Очевидно, вместо того, чтобы полностью записывать уравнения (6.2), можно ограничиться заполнением *стандартной таблицы*, где указаны только свободные члены и коэффициенты при переменных. Первый столбец таблицы мы отведем под свободные члены, второй, третий, четвертый и пятый — под коэффициенты при переменных x_1, x_2, x_3, x_4 в стандартной форме (6.2). Стандартная таблица для системы (6.2) приведена в табл. 6.1.

Теперь представим себе, что мы хотим произвести замену $x_2 \leftrightarrow y_3$, т. е. перевести переменную x_2 в число базисных, а переменную y_3 — в число свободных. Выделим в стандартной таблице *разрешающий элемент* α_{32} (обведем его кружком); выделим также жирными

Таблица 6.1

	Свободный член	x_1	x_2	x_3	x_4
y_1	b_1	α_{11}	α_{12}	α_{13}	α_{14}
y_2	b_2	α_{21}	α_{22}	α_{23}	α_{24}
y_3	b_3	α_{31}	α_{32}	α_{33}	α_{34}
y_4	b_4	α_{41}	α_{42}	α_{43}	α_{44}
y_5	b_5	α_{51}	α_{52}	α_{53}	α_{54}

ми линиями строку и столбец, в которых стоит разрешающий элемент. Эту строку и этот столбец мы будем называть *разрешающей строкой и разрешающим столбцом* (см. табл. 6.2).

Таблица 6.2

	Свободный член	x_1	x_2	x_3	x_4
y_1	b_1	α_{11}	α_{12}	α_{13}	α_{14}
y_2	b_2	α_{21}	α_{22}	α_{23}	α_{24}
y_3	b_3	α_{31}	α_{32}	α_{33}	α_{34}
y_4	b_4	α_{41}	α_{42}	α_{43}	α_{44}
y_5	b_5	α_{51}	α_{52}	α_{53}	α_{54}

Выполняя операцию $x_2 \leftrightarrow y_3$, мы хотим в разрешающей строке поместить переменную y_3 , а в разрешающем столбце — переменную x_2 (это отмечено в таблице рядом со строкой и столбцом).

Найдем коэффициенты, которые нужно будет поставить в таблице после обмена $x_2 \leftrightarrow y_3$. Начнем с преобразования разрешающей строки. Решая третье уравнение (6.2) относительно x_2 , получим:

$$x_2 = \frac{b_3}{\alpha_{32}} - \left(\frac{\alpha_{31}}{\alpha_{32}} x_1 + \frac{1}{\alpha_{32}} y_3 + \frac{\alpha_{33}}{\alpha_{32}} x_3 + \frac{\alpha_{34}}{\alpha_{32}} x_4 \right). \quad (6.3)$$

Таким образом, преобразованные элементы разрешающей строки найдены. Составим правило преобразования остальных строк. Для

этого подставим в первое уравнение (6.2) вместо x_3 его выражение (6.3). После приведения подобных членов получим

$$y_1 = \left(b_1 - \frac{\alpha_{12} b_3}{\alpha_{32}} \right) - \left[\left(\alpha_{11} - \frac{\alpha_{12} \alpha_{31}}{\alpha_{32}} \right) x_1 - \left(\frac{\alpha_{12}}{\alpha_{32}} \right) y_3 + \left(\alpha_{13} - \frac{\alpha_{12} \alpha_{33}}{\alpha_{32}} \right) x_3 + \left(\alpha_{14} - \frac{\alpha_{12} \alpha_{34}}{\alpha_{32}} \right) x_4 \right].$$

Нетрудно убедиться, что совершенно аналогичным образом преобразовываются все остальные строки. В результате мы получим преобразованную таблицу (см. табл. 6.3), в которой операция $x_2 \leftrightarrow y_3$ уже совершена.

Таблица 6.3

	Свободный член	x_1	y_3	x_3	x_4
y_1	$b_1 - \frac{\alpha_{12} b_3}{\alpha_{32}}$	$\alpha_{11} - \frac{\alpha_{12} \alpha_{31}}{\alpha_{32}}$	$-\frac{\alpha_{12}}{\alpha_{32}}$	$\alpha_{13} - \frac{\alpha_{12} \alpha_{33}}{\alpha_{32}}$	$\alpha_{14} - \frac{\alpha_{12} \alpha_{34}}{\alpha_{32}}$
y_2	$b_2 - \frac{\alpha_{22} b_3}{\alpha_{32}}$	$\alpha_{21} - \frac{\alpha_{22} \alpha_{31}}{\alpha_{32}}$	$-\frac{\alpha_{22}}{\alpha_{32}}$	$\alpha_{23} - \frac{\alpha_{22} \alpha_{33}}{\alpha_{32}}$	$\alpha_{24} - \frac{\alpha_{22} \alpha_{34}}{\alpha_{32}}$
x_2	$\frac{b_3}{\alpha_{32}}$	$\frac{\alpha_{31}}{\alpha_{32}}$	$\frac{1}{\alpha_{32}}$	$\frac{\alpha_{33}}{\alpha_{32}}$	$\frac{\alpha_{34}}{\alpha_{32}}$
y_4	$b_4 - \frac{\alpha_{42} b_3}{\alpha_{32}}$	$\alpha_{41} - \frac{\alpha_{42} \alpha_{31}}{\alpha_{32}}$	$-\frac{\alpha_{42}}{\alpha_{32}}$	$\alpha_{43} - \frac{\alpha_{42} \alpha_{33}}{\alpha_{32}}$	$\alpha_{44} - \frac{\alpha_{42} \alpha_{34}}{\alpha_{32}}$
y_5	$b_5 - \frac{\alpha_{52} b_3}{\alpha_{32}}$	$\alpha_{51} - \frac{\alpha_{52} \alpha_{31}}{\alpha_{32}}$	$-\frac{\alpha_{52}}{\alpha_{32}}$	$\alpha_{53} - \frac{\alpha_{52} \alpha_{33}}{\alpha_{32}}$	$\alpha_{54} - \frac{\alpha_{52} \alpha_{34}}{\alpha_{32}}$

Рассмотрев табл. 6.3, мы можем так сформулировать алгоритм преобразования коэффициентов стандартной таблицы.

1. Разрешающий элемент заменяется на обратную ему величину.
2. Все остальные элементы разрешающей строки делятся на разрешающий элемент.
3. Все элементы разрешающего столбца (кроме самого разрешающего элемента) меняют знак и делятся на разрешающий элемент.
4. Каждый из остальных элементов подвергается следующему преобразованию: к нему прибавляется произведение элемента, стоявшего в прежней разрешающей строке на том же месте по порядку (т. е. в том же столбце), на элемент, стоящий в новом разрешающем столбце на соответствующем месте (т. е. в той же строке, что и наш элемент).

Последнее правило может в первом чтении показаться не совсем понятным; покажем, как оно применяется, хотя бы на примере элемента, стоящего в первой строке и втором столбце табл. 6.3. Новый элемент равен прежнему (α_{11}) плюс произведение прежнего элемента разрешающей строки α_{31} , стоящего в том же столбце, что α_{11} , и нового элемента разрешающего столбца ($-\frac{\alpha_{12}}{\alpha_{32}}$), стоящего в той же строке, что и преобразуемый элемент.

Нетрудно убедиться, что сформулированные правила преобразования стандартной таблицы справедливы для любого числа уравнений и свободных переменных и для любой замены $x_j \leftrightarrow y_i$.

Преобразование стандартной таблицы при замене $x_j \leftrightarrow y_i$ удобно производить, выполняя все вспомогательные расчеты тут же, в таблице, для чего выделяется нижняя часть каждой ячейки.

Алгоритм преобразования $x_j \leftrightarrow y_i$ стандартной таблицы сводится при этом к следующим операциям.

1. Выделить в таблице разрешающий элемент α_{ij} . Вычислить его обратную величину $\lambda = 1/\alpha_{ij}$ и записать в нижней части той же ячейки (в правом нижнем углу).
2. Все элементы разрешающей строки (кроме самого α_{ij}) умножить на λ ; результат записать в нижней части той же ячейки.
3. Все элементы разрешающего столбца (кроме самого α_{ij}) умножить на $-\lambda$; результат записать в нижней части той же ячейки.
4. Подчеркнуть (или выделить иным способом) в разрешающей строке все верхние числа (прежние элементы), за исключением самого разрешающего элемента ячейки, а в разрешающем столбце — все нижние числа (новые элементы), за исключением самого разрешающего элемента.
5. Для каждого из элементов, не принадлежащих ни к разрешающей строке, ни к разрешающему столбцу, записать в нижнюю часть ячейки произведение выделенных чисел, стоящих в том же столбце и в той же строке, что и данный элемент.

6. Переписать таблицу, заменив:
 - x_j на y_i и обратно,
 - элементы разрешающей строки и столбца — числами, стоящими в нижних частях тех же ячеек,
 - каждый из остальных элементов — суммой чисел, стоящих в верхней и нижней части той же ячейки.

Пример 1. В системе уравнений

$$\left. \begin{aligned} y_1 &= x_1 - x_2 + 2x_3 - 5, \\ y_2 &= 2x_1 - x_2 + 1, \\ y_3 &= 2x_2 - x_3 - 1, \\ y_4 &= -x_1 - x_3 + 2 \end{aligned} \right\} \quad (6.4)$$

произвести замену $x_1 \leftrightarrow y_2$, т. е. вывести из числа свободных переменных x_1 и взамен ее ввести y_2

Таблица 6.4

		$y_2 \leftrightarrow$		
	Свободный член	x_1	x_2	x_3
y_1	-5	-1	1	-2
$x_1 \leftrightarrow$ y_2	1	-2	1	0
y_3	-1	0	-2	1
y_4	2	1	0	1

Решение. Записываем уравнения (6.3) в форме стандартной таблицы (см. табл. 6.4), оставляя в нижней части каждой ячейки достаточно свободного места.

Выделяем кружком разрешающий элемент -2 и жирными линиями — разрешающие строку и столбец. Вычисляем $\lambda = -1/2$. Вспомогательные записи будем вести в правом нижнем углу ячейки (см. табл. 6.5).

Заполним, согласно пунктам 1, 2 и 3 алгоритма, нижние части ячеек разрешающих строки и столбца.

Выделим, окружив их рамкой, верхние числа разрешающей строки и нижние числа разрешающего столбца (кроме самой разрешающей ячейки).

Далее мы уже можем заполнить все остальные нижние части ячеек, перемножая соответствующие им выделенные числа, стоящие в разрешающей строке и разрешающем столбце на тех же местах, что данная ячейка (см. табл. 6.6).

Заканчиваем преобразование, для чего переписываем табл. 6.6, заменяя x_1 на y_2 , элементы разрешающей строки и столбца — нижними числами тех же ячеек, а остальные элементы — суммой верхних и нижних чисел (см. табл. 6.7)

Таким образом, мы научились с помощью табличного алгоритма совершать в уравнениях-ограничениях любую замену $x_j \leftrightarrow y_i$.

Вспомним, что в задаче линейного программирования, кроме уравнений-ограничений, существует еще и линейная функция

$$L = c_0 + c_1 x_1 + c_2 x_2 + \dots + c_j x_j + \dots + c_n x_n,$$

которую нужно минимизировать. Если эта функция выражена через прежние свободные переменные x_1, x_2, \dots, x_n , то, очевидно, после замены $x_j \leftrightarrow y_i$ ее нужно выразить через новые свободные переменные $x_1, x_2, \dots, x_{j+1}, y_i, x_{j+1}, \dots, x_n$. Нетрудно убедиться, что для этого может быть применен тот же алгоритм, что и для преобразования любой строки стандартной таблицы. Действительно, приводя L к стандартной форме

$$L = c_0 - (\gamma_1 x_1 + \gamma_2 x_2 + \dots + \gamma_n x_n),$$

где $\gamma_1 = -c_1; \gamma_2 = -c_2; \dots; \gamma_n = -c_n$, мы получим еще одну строку (добавочную) стандартной таблицы, которая отличается от осталь-

Таблица 6.5

			y_2		
	Свободный член	x_1	x_2	x_3	
y_1	-5	-1	1	-2	
$x_1 \leftrightarrow$ y_2	1	-2	1	0	0
y_3	-1	0	-2	1	
y_4	2	1	0	1	

Таблица 6.6

		$y_2 \leftrightarrow$		
	Свободный член	x_1	x_2	x_3
y_1	-5	-1	1	-2
$x_1 \leftrightarrow$ y_2	1	-2	1	0
y_3	-1	0	-2	1
y_4	2	1	0	1

Таблица 6.7

	Свободный член	y_2	x_2	x_3
y_1	$-\frac{11}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	-2
x_1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0
y_3	-1	0	-2	1
y_4	$\frac{5}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1

разрешенными относительно базисных переменных y_1, y_2, \dots, y_m , которые выражены через свободные переменные x_1, x_2, \dots, x_n . В каждой вершине ОДР (опорном решении) по крайней мере n переменных должны обращаться в нуль. Попробуем получить опорное решение, полагая в формулах (7.1) все свободные переменные равными нулю.

Имеем:

$$\begin{aligned} x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0; \\ y_1 = b_1; y_2 = b_2; \dots; y_m = b_m. \end{aligned} \quad (7.2)$$

Если все свободные члены b_1, b_2, \dots, b_m в уравнениях (7.1) неотрицательны, это значит, что опорное решение уже получено; этот случай нас не интересует. Рассмотрим случай, когда среди свободных членов b_1, b_2, \dots, b_m есть отрицательные. Это значит, что решение (7.2) не является опорным — оно вообще не допустимо, и опорное решение еще предстоит найти. Для этого мы будем шаг за шагом обменивать местами базисные и свободные переменные в уравнениях (7.1) до тех пор, пока не придем к опорному решению или не убедимся, что его не существует. Последнее бывает в случае, когда система уравнений (7.1) несовместима с неравенствами

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \dots, x_n \geq 0, y_1 \geq 0, \dots, y_m \geq 0, \quad (7.3)$$

т. е. у нее нет неотрицательных решений.

Очевидно, нужно так обменивать местами базисные и свободные переменные, чтобы эта процедура приближала нас к границе ОДР, а не удаляла от нее, т. е. чтобы число отрицательных свободных членов с каждым шагом убывало, или, если число отрицательных свободных членов остается прежним, то, по крайней мере, убывали их абсолютные величины.

Существует ряд способов выбора разрешающего элемента для приближения к опорному решению. Остановимся (без строгого доказательства) на одном из них.

Пусть имеется одно из уравнений (7.1) с отрицательным свободным членом. Ищем в этой строке отрицательный элемент a_{ij} . Если такого элемента нет (все элементы $a_{ij} \geq 0$), это признак того, что система уравнений (7.1) несовместима с неравенствами (7.3). Действительно, при отсутствии отрицательных элементов в строке вся правая часть соответствующего уравнения может быть только отрицательной, а это противоречит условиям неотрицательности переменных.

Предположим, что отрицательный элемент есть. Тогда выбираем столбец, в котором он находится, в качестве разрешающего.

Теперь надо выбрать в этом столбце сам разрешающий элемент. Рассмотрим все элементы данного столбца, имеющие одинаковый знак со свободным членом. Из них выберем в качестве разрешающего тот, для которого отношение к нему свободного члена минимально.

Таким образом, выбирается разрешающий столбец, разрешающий элемент в нем и, значит, разрешающая строка.

Убедимся на примере, как совершается приближение к опорному решению при таком правиле выбора разрешающего элемента. Попутно мы убедимся в разумности этого правила.

Пример 1. Найти (если оно существует) опорное решение задачи линейного программирования с ограничениями-равенствами:

$$\left. \begin{aligned} y_1 &= 1 - (-x_1 - 2x_2 + x_3), \\ y_2 &= -5 - (-2x_1 + x_2 - x_3), \\ y_3 &= 2 - (x_1 + x_2), \\ y_4 &= 1 - (-x_2 + x_3), \end{aligned} \right\} \quad (7.4)$$

(здесь не приводится линейная форма, которую нужно минимизировать, потому что опорное решение ищется безотносительно к виду этой формы).

Решение. Записываем условия (7.4) в виде стандартной таблицы (см. табл. 7.1).

Таблица 7.1

	Свободный член	x_1	x_2	x_3
y_1	1	-1	-2	1
y_2	-5	<u>-2</u>	1	-1
y_3	2	1	1	0
y_4	1	0	-1	1

В табл. 7.1 имеется отрицательный свободный член -5 в строке y_2 столбца x_1 . Согласно правилу, выбираем любой отрицательный элемент этой строки, например -2 (в табл. 7.1 он подчеркнут). Этим мы выбрали разрешающий столбец x_1 . В качестве «кандидатов» на роль разрешающего элемента рассмотрим все те элементы этого столбца, которые одинаковы по знаку со своим свободным членом; это будут -2 и 1 (ноль в качестве разрешающего элемента фигурировать не может).

Вычисляем для каждого из «кандидатов» отношение к нему свободного члена:

$$(-5) / (-2) = 5/2; \quad 2/1 = 2.$$

Наименьшее из этих отношений 2 ; значит, элемент 1 выбираем в качестве разрешающего и меняем местами $x_1 \leftrightarrow y_3$ (см. табл. 7.2).

После выполнения действий приходим к табл. 7.3.

В табл. 7.3 по-прежнему один отрицательный свободный член, но по абсолютной величине он уже меньше, чем в табл. 7.1 — значит, мы приближаемся к ОДР.

Попробуем избавиться и от этого члена. В строке y_2 имеется только один отрицательный элемент -1 (подчеркнут). Значит, разрешающим столбцом может быть только столбец x_3 . Вычисляем для всех элементов этого столбца, имеющих одинаковый знак со своим свободным членом, отношение свободного члена к элементу:

$$3/1 = 3; \quad (-1) / (-1) = 1; \quad 1/1 = 1.$$

Таблица 7.2

	Свободный член	x_1	x_2	x_3
y_1	1	-1	-2	1
y_2	-5	-2	1	-1
y_3	2	1	1	0
y_4	1	0	-1	1

Таблица 7.4

	Свободный член	y_3	x_2	x_3
y_1	3	1	-1	1
y_2	-1	2	3	-1
x_1	2	1	1	0
y_4	1	0	-1	1

Таблица 7.3

	Свободный член	y_3	x_2	x_3
y_1	3	1	-1	-1
y_2	-1	2	3	-1
x_1	2	1	1	0
y_4	1	0	-1	1

Таблица 7.5

	Свободный член	y_3	x_2	y_2
y_1	2	3	2	1
x_3	1	-2	-3	-1
x_1	2	1	1	0
y_4	0	2	2	1

Отношение достигает минимума, равного 1, для двух элементов; возьмем и качестве разрешающего первый из них (-1), стоящий в строке y_2 и столбце x_3 , в сделаем замену $x_3 \leftrightarrow y_2$ (см. табл. 7.4 и 7.5).

В табл. 7.5 все свободные члены неотрицательны, и опорное решение найдено:

$$y_3 = x_2 = y_2 = 0; y_1 = 2; x_3 = 1; x_1 = 2; y_4 = 0.$$

Пример 2. Найти (если оно существует) опорное решение системы

$$\left. \begin{aligned} y_1 &= -4 - (-x_1 + 2x_2), \\ y_2 &= -3 - (x_1 - x_2 + x_3), \\ y_3 &= -10 - (2x_1 - x_2 + x_3), \\ y_4 &= -2 - (-x_1 + x_2). \end{aligned} \right\} \quad (7.5)$$

Таблица 7.6

	Свободный член	x_1	x_2	x_3
y_1	-4	-1	2	0
y_2	-3	1	-1	1
y_3	-10	2	-1	1
y_4	-2	-1	1	0

Таблица 7.7

	Свободный член	x_1	x_2	x_3
y_1	-4 2	-1 -1	2 -1	0 0
y_2	-3 -2	1 1	-1 1	1 0
y_3	-10 -4	2 2	-1 2	1 0
y_4	-2 2	-1 -1	1 -1	0 0

Решение. Записываем систему уравнений (7.5) в виде стандартной таблицы (см. табл. 7.6).

Выбираем строку с отрицательным свободным членом, например, первую. В ней есть отрицательный элемент (-1). Выбираем столбец x_1 в качестве разрешающего. Вычисляем отношения:

$$(-4)/(-1)=4; \quad (-2)/(-1)=2.$$

Последнее отношение минимально; значит, в качестве разрешающего берем элемент (-1) в строке y_4 и производим замену $x_1 \leftrightarrow y_4$ (см. табл. 7.7 и 7.8).

Обратим внимание на строку y_3 в табл. 7.8. В ней свободный член отрицателен, но нет ни одного отрицательного элемента (кроме самого свободного члена). Соответствующее уравнение имеет вид:

$$y_3 = -14 - (2y_4 + x_2 + x_3).$$

Может ли при каких бы то ни было неотрицательных значениях y_4, x_2, x_3 величина y_3 быть неотрицательной? Очевидно, нет: при $y_4 = x_2 = x_3 = 0$ получим $y_3 = -14$, а увеличение y_4, x_2, x_3 сверх нуля сделает y_3 еще меньше. Следо-

Таблица 7.8

	Свободный член	y_4	x_2	x_3
y_1	-2	-1	1	0
y_2	-5	1	0	1
y_3	-14	2	1	1
x_1	2	-1	-1	0

вательно, система (7.5) несовместима с неравенствами, вытекающими из неотрицательности переменных, и задача линейного программирования с условиями-ограничениями (7.5) допустимых решений не имеет. О том же свидетельствует и строка y_3 табл. 7.8, где тоже нет ни одного отрицательного элемента (кроме самого свободного члена).

Таким образом, мы видим, что нет необходимости специально исследовать систему условий ОЗЛП на совместность в области неотрицательных решений: этот вопрос выясняется автоматически, в процессе нахождения опорного решения.

8. ОТЫСКИВАНИЕ ОПТИМАЛЬНОГО РЕШЕНИЯ ОСНОВНОЙ ЗАДАЧИ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

В предыдущем параграфе мы научились отыскивать опорное решение системы уравнений ОЗЛП; при поисках этого опорного решения мы вовсе не занимались минимизируемой функцией L . Теперь мы займемся оптимизацией решения, т. е. отысканием такого опорного решения, которое обращает в минимум линейную функцию:

$$L = c_0 - (\gamma_1 x_1 + \gamma_2 x_2 + \dots + \gamma_n x_n).$$

В § 5 мы уже продемонстрировали принципиальную сторону методики оптимизации решения. Здесь мы на примерах покажем, как эта оптимизация может быть проведена с помощью табличного алгоритма замены $x_j \leftrightarrow y_i$.

Пример 1. Найти решение задачи линейного программирования с уравнениями

$$\left. \begin{aligned} y_1 &= 2 - (x_1 + x_2 - 2x_3), \\ y_2 &= 1 - (x_1 - x_2 + x_3), \\ y_3 &= 5 - (x_2 + x_3), \\ y_4 &= 2 - (2x_1 - x_2), \end{aligned} \right\} \quad (8.1)$$

обращающее в минимум линейную функцию

$$L = 0 - (-x_1 + 2x_2 + x_3). \quad (8.2)$$

Решение. Все свободные члены в (8.1) неотрицательны, значит, опорное решение налицо:

$$x_1 = x_2 = x_3 = 0; \quad y_1 = 2; \quad y_2 = 1; \quad y_3 = 5; \quad y_4 = 2.$$

Является ли оно оптимальным? Нет, так как коэффициенты при x_2 и x_3 в (8.2) положительны, значит, увеличивая эти переменные, мы уменьшаем L . Запишем (8.1) и (8.2) в виде стандартной таблицы (табл. 8.1).

Так как коэффициенты в первой строке при x_2 и x_3 положительны, любую из этих переменных можно вывести из числа свободных. Пусть это будет x_3 . Какой из элементов столбца x_3 взять разрешающим? Этот элемент должен быть положительным. Значит, у нас есть выбор: 1 в строке y_2 или 1 в строке y_3 . Выберем тот их них, для которого отношение к нему свободного члена минимально (обоснование см. в § 5).

Отношения равны $1/1 = 1$; $5/1 = 5$. Минимальное из них 1. Значит, в качестве разрешающего нужно взять элемент 1 в столбце x_3 , строке y_2 . Произведем замену $x_3 \leftrightarrow y_2$ (см. табл. 8.2, 8.3).

Таблица 8.1

	Свободный член	x_1	x_2	x_3
L	0	-1	2	1
y_1	2	1	1	-2
y_2	1	1	-1	1
y_3	5	0	1	1
y_4	2	2	-1	0

Таблица 8.2

	Свободный член	x_1	x_2	x_3
L	0	-1	2	1
y_1	2	1	1	-2
y_2	1	1	-1	1
y_3	5	0	1	1
y_4	2	2	-1	0

Таблица 8.3

	Свободный член	x_1	x_2	y_2
L	-1	-2	3	-1
y_1	4	3	-1	2
x_3	1	1	-1	1
y_3	4	-1	2	-1
y_4	2	2	-1	0

Таблица 8.4

	Свободный член	x_1	x_2	y_2
L	-1	-2	3	-1
y_1	4	3	-1	2
x_3	1	1	-1	1
y_3	4	-1	2	-1
y_4	2	2	-1	0

В верхней строке табл. 8.3 есть положительный коэффициент при x_2 , значит, x_2 надо вывести из свободных переменных. Выбираем в качестве разрешающего тот положительный элемент столбца x_2 , для которого отношение к нему свободного члена минимально. Но в столбце x_3 единственный положительный элемент 2, его и выбираем в качестве разрешающего (см. табл. 8.4 и 8.5).

Оказывается, процедура еще не закончена: в первой строке табл. 8.5 имеет положительный элемент в столбце y_2 , значит, переменную y_2 нужно вывести из числа свободных. В качестве разрешающего берем тот из положительных элементов столбца y_2 , для которого отношение к нему свободного члена минимально. Сравнивая отношения

$$6 : 3/2 = 4, \quad 3 : 1/2 = 6,$$

выбираем в качестве разрешающего элемент $3/2$ в строке y_1 и столбце y_2 и продолжаем процедуру оптимизации (см. табл. 8.6 и 8.7).

В первой строке табл. 8.7 нет ни одного положительного элемента; значит, оптимальное решение достигнуто; оно будет:

$$x_1 = y_3 = y_1 = 0; \quad y_2 = 4; \quad x_3 = 1; \quad x_2 = 4; \quad y_4 = 6.$$

При этих значениях переменных линейная функция L достигает своего минимального значения, равного

$$L_{\min} = -9.$$

Возникает вопрос: а что если в столбце, содержащем положительный элемент строки L , не найдется ни одного положительного элемента, чтобы сделать его разрешающим? Легко убедиться, что в этом случае функция L не ограничена снизу и ОЗЛП не имеет оптимального решения.

Действительно, в этом случае увеличение переменной, соответствующей данному столбцу, уменьшает линейную функцию L и не может сделать ни одной из базисных переменных отрицательной, значит, ничто не препятствует неограниченному уменьшению функции L .

Итак, сформулируем правила нахождения оптимального решения ОЗЛП симплекс-методом.

1. Если все свободные члены (не считая строки L) в симплекс-таблице неотрицательны, а в строке L (не считая свободного члена) нет ни одного положительного элемента, то оптимальное решение достигнуто.

Таблица 8.5

	Свободный член	x_1	y_3	y_2
L	-7	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$
y_1	6	$\frac{5}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$
x_3	3	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
x_2	2	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$
y_4	4	$\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$

Таблица 8.8

	Свободный член	x_1	x_2	x_3	x_4
L	0	-2	1	0	0
y_1	0	-1	1	0	0
y_2	2	0	1	-1	0
y_3	1	0	0	-1	-1

Таблица 8.6
 $y_1 \leftrightarrow$

	Свободный член	x_1	y_3	y_2
L	-7	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$
y_1	6	$\frac{5}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$
x_3	3	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
x_2	2	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$
y_4	4	$\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$

Таблица 8.9
 $y_1 \leftrightarrow$

	Свободный член	x_1	x_2	x_3	x_4
L	0	-2	1	0	0
y_1	0	-1	1	0	0
y_2	2	0	1	-1	0
y_3	1	0	0	-1	-1

Таблица 8.7

	Свободный член	x_1	y_3	y_1
L	-9	$-\frac{4}{3}$	$-\frac{5}{3}$	$-\frac{1}{3}$
y_2	4	$\frac{5}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$
x_3	1	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$
x_2	4	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$
y_4	6	$\frac{7}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$

Таблица 8.10

	Свободный член	x_1	y_1	x_3	x_4
L	0	-1	-1	0	0
x_2	0	-1	1	0	0
y_2	2	1	-1	-1	0
y_3	1	0	0	-1	-1

2. Если в строке L есть положительный элемент, а в столбце, соответствующем ему, нет ни одного положительного элемента, то линейная функция L не ограничена снизу, и оптимального решения не существует.

3. Если в этом столбце есть положительные элементы, то следует произвести замену одной из свободных переменных на одну из базисных, причем в качестве разрешающего надо взять тот элемент этого столбца, для которого отношение к нему соответствующего свободного члена минимально.

В заключение остановимся на так называемом «вырожденном» случае, когда один (или более) свободных членов в уравнениях-ограничениях получается равным нулю. Это означает, что в данном опорном решении обращаются в нуль не только свободные переменные, но и некоторые из базисных. Рассмотрим пример.

Пример 2. Найти решение задачи линейного программирования с условиями

$$\left. \begin{aligned} y_1 &= x_1 - x_2, \\ y_2 &= -x_2 + x_3 + 2, \\ y_3 &= x_3 + x_4 + 1, \end{aligned} \right\} \quad (8.3)$$

обращающее в минимум линейную функцию

$$L = 2x_1 - x_2. \quad (8.4)$$

Решение. Записываем (8.3) и (8.4) в виде стандартной таблицы (см. табл. 8.8).

Согласно общему правилу, ищем в столбце x_2 разрешающий элемент, для которого отношение к нему свободного члена неотрицательно и минимально. Сравнивая отношения 0:1 и 2:1, останавливаемся на разрешающем элементе 1 в строке y_1 , для которого это отношение равно нулю. Производим замену $x_2 \leftrightarrow y_1$ (см. табл. 8.9 и 8.10).

При переходе от табл. 8.8 к табл. 8.10, естественно, не произошло уменьшения линейной функции L (она как была, так и осталась равной нулю), но зато элементы верхней строки стали все неположительными, из чего видно, что оптимальное решение достигнуто: минимум функции равен нулю и достигается при $x_1 = y_1 = x_3 = x_4 = 0$; $x_2 = 0$; $y_2 = 2$; $y_3 = 1$.

Сделаем еще одно, последнее, замечание по поводу так называемого «зацикливания». Мы уже видели, что при наличии «вырождения» может оказаться, что замена одной из свободных переменных на базисную и обратно приводит только к перестановке переменных, без уменьшения линейной функции L . В очень редких случаях может оказаться, что последовательное применение правила выбора разрешающего элемента приводит к тому, что после нескольких замен $x_j \leftrightarrow y_i$ мы вновь возвращаемся к тому же набору базисных и свободных переменных, с которого начали. Это и называется «зацикливанием». Практически для того, чтобы избежать этого, достаточно бывает при повторении взять разрешающий элемент не так, как он был взят первый раз (например, в другом столбце). При организации алгоритма линейного программирования на ЭЦВМ в программу должно быть введено соответствующее указание.

9. ТРАНСПОРТНАЯ ЗАДАЧА ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Изложенный в предыдущих параграфах симплекс-метод решения задачи линейного программирования является универсальным и применим для решения любых таких задач. Однако существуют некоторые частные типы задач линейного программирования, которые, в силу некоторых особенностей своей структуры, допускают решение более простыми методами. К ним относится, в частности, так называемая транспортная задача.

Классическая транспортная задача линейного программирования формулируется следующим образом.

Имеется m пунктов отправления: A_1, A_2, \dots, A_m , в которых сосредоточены запасы какого-то однородного товара (груза) в количестве соответственно a_1, a_2, \dots, a_m единиц. Кроме того, имеется n пунктов назначения: B_1, B_2, \dots, B_n , подавших заявки соответственно на b_1, b_2, \dots, b_n единиц товара.

Предполагается, что сумма всех заявок равна сумме всех запасов:

$$\sum_{i=1}^m a_i = \sum_{j=1}^n b_j. \quad (9.1)$$

Известна стоимость c_{ij} перевозки единицы товара от каждого пункта отправления A_i до каждого пункта назначения B_j . Таблица (матрица) стоимостей перевозки c_{ij} задана:

$$\left\| \begin{array}{cccc} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ c_{m1} & c_{m2} & \dots & c_{mn} \end{array} \right\|.$$

Требуется составить такой план перевозок, при котором все заявки были бы выполнены, и при этом общая стоимость всех перевозок была минимальна.

При такой постановке задачи показателем эффективности плана перевозок является стоимость; поэтому поставленную задачу точнее называют *транспортной задачей по критерию стоимости*.

Дадим этой задаче математическую формулировку. Обозначим x_{ij} — количество груза, отправляемого из i -го пункта отправления A_i в j -й пункт назначения B_j ($i = 1, \dots, m$; $j = 1, \dots, n$). Неотрицательные переменные $x_{11}, x_{12}, \dots, x_{mn}$ (число которых, очевидно, равно $m \times n$) должны удовлетворять следующим условиям:

1. Суммарное количество груза, направляемое из каждого пункта отправления во все пункты назначения, должно быть равно запасу груза в данном пункте. Это даст нам m условий-равенств:

а сводятся к более простым операциям непосредственно с таблицей, где в определенном порядке записаны все условия ТЗ. Таковую таблицу мы будем называть **транспортной таблицей**.

В транспортной таблице записываются

- пункты отправления и назначения,
- запасы, имеющиеся в пунктах отправления,
- заявки, поданные пунктами назначения,
- стоимости перевозок из каждого пункта отправления в каждый пункт назначения.

Стоимости перевозок мы будем помещать в правом верхнем углу каждой ячейки, с тем чтобы в самой ячейке при составлении плана помещать перевозки x_{ij} .

Образец транспортной таблицы дан в табл. 9.1.

Таблица 9.1

ПН \ ПО	B_1	B_2	...	B_n	Запасы a_1
A_1	C_{11}	C_{12}	...	C_{1n}	a_1
A_2	C_{21}	C_{22}	...	C_{2n}	a_2
...
A_m	C_{m1}	C_{m2}	...	C_{mn}	a_m
Заявки b_j	b_1	b_2	...	b_n	$\sum_{i=1}^m a_i = \sum_{j=1}^n b_j$

Для краткости в дальнейшем будем обозначать пункты отправления — ПО, пункты назначения — ПН. В правом верхнем углу каждой клетки проставлены стоимости перевозки единицы товара (груза) из ПО A_i в ПН B_j . В правом столбце помещены запасы товара в каждом ПО, в нижней строке — заявки, поданные каждым ПН. Для ТЗ сумма запасов равна сумме заявок; общее значение этой суммы записывается в правой нижней ячейке таблицы.

Выше мы показали, что ранг системы уравнений-ограничений ТЗ равен $r = m + n - 1$, где m — число строк, а n — число столбцов транспортной таблицы. Значит, в каждом опорном плане, включая оптимальный, будут отличны от нуля не более, чем $n + m - 1$ перевозок.

Ячейки (клетки) таблицы, в которых мы будем записывать эти отличные от нуля перевозки, условимся называть **базисными**, а остальные (пустые) **свободными**.

Таким образом, решение ТЗ свелось к следующему. Найти такие значения положительных перевозок, которые, будучи проставлены в базисных клетках транспортной таблицы, удовлетворяли бы следующим условиям:

- сумма перевозок в каждой строке таблицы должна быть равна запасу данного ПО;
- сумма перевозок в каждом столбце должна быть равна заявке данного ПН;
- общая стоимость перевозок — минимальная.

В дальнейшем все действия по нахождению решения ТЗ будут сводиться к преобразованию транспортной таблицы 9.1.

При описании этих преобразований нам удобно будет пользоваться нумерацией клеток таблицы (подобной нумерации клеток шахматной доски). Клеткой (A_i, B_j) или, короче, клеткой (i, j) мы будем называть клетку, стоящую в i -й строке и j -м столбце транспортной таблицы. Например, самая верхняя левая клетка будет обозначаться $(1, 1)$, стоящая под ней $(2, 1)$ и т. д.

10. НАХОЖДЕНИЕ ОПОРНОГО ПЛАНА

Решение транспортной задачи, как и всякой задачи линейного программирования, начинается с нахождения опорного решения, или, как мы будем говорить, **опорного плана**. В отличие от общего случая ОЗЛП с произвольными ограничениями и минимизируемой функцией, решение ТЗ всегда существует. Действительно, из чисто физических соображений ясно, что хоть какой-то допустимый план существовать должен. Среди допустимых планов непременно имеется оптимальный (может быть, не один), потому что линейная функция L — стоимость перевозок заведомо неотрицательна (ограничена снизу нулем). В данном параграфе мы покажем, как построить опорный план. Для этого существуют различные способы, из которых мы остановимся на простейшем, так называемом «способе северо-западного угла». Пояснить его проще всего будет на конкретном примере.

Пример 1. Условия ТЗ заданы транспортной таблицей (см. табл. 10.1).

Требуется найти опорное решение ТЗ (построить опорный план).

Решение. Перепишем табл. 10.1 и будем заполнять ее перевозками постепенно, начиная с левой верхней ячейки $(1,1)$ («северо-западного угла» таблицы). Будем рассуждать при этом следующим образом. Пункт B_1 подал заявку на 18 единиц груза. Удовлетворим эту заявку за счет запаса 48, имеющегося в пункте A_1 , и запишем перевозку 18 в клетке $(1,1)$. После этого заявка пункта B_1 удовлетворена, а в пункте A_1 осталось еще 30 единиц груза. Удовлетворим за счет них заявку пункта B_2 (27 единиц), запишем 27 в клетке $(1,2)$; оставшиеся 3 единицы пункта A_1 назначим пункту B_3 . В составе заявки пункта B_3 остались неудовлетворенными 39 единиц. Из них 30 покроем за счет пункта

Таблица 10.1

ПН ПО	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	Запасы a_i
A_1	10	8	5	6	9	48
A_2	6	7	8	6	5	30
A_3	8	7	10	8	7	27
A_4	7	5	4	6	8	20
Заявки b_j	18	27	42	12	26	125

A_2 , чем его запас будет исчерпан, и еще 9 возьмем из пункта A_3 . Из оставшихся 18 единиц пункта A_3 12 выделим пункту B_4 ; оставшиеся 6 единиц назначим пункту B_5 , что вместе со всеми 20 единицами пункта A_4 покроет его заявку (см. табл. 10.2).

На этом распределение запасов закончено: каждый пункт назначения получил груз согласно своей заявке. Это выражается в том, что сумма перевозок в каждой строке равна соответствующему запасу, а в столбце — заявке.

Таким образом, нами сразу же составлен план перевозок, удовлетворяющий балансовым условиям. Полученное решение является не только допустимым, но и опорным решением транспортной задачи.

Таблица 10.2

ПН ПО	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	Запасы a_i
A_1	18	27	3	6	9	48
A_2	6	7	30	6	5	30
A_3	8	7	9	12	6	27
A_4	7	5	4	6	20	20
Заявки b_j	18	27	42	12	26	125

Клетки таблицы, в которых стоят ненулевые перевозки, являются базисными, их число удовлетворяет условию $r = m + n - 1 = 8$. Остальные клетки — свободные (пустые), в них стоят ненулевые перевозки, их число равно $(n - 1)(m - 1) = 12$. Значит, наш план — опорный и поставленная задача построения опорного плана решена.

Возникает вопрос: а является ли этот план оптимальным по стоимости? Разумеется, нет! Ведь при его построении мы совсем не учитывали стоимостей перевозок c_{ij} . Естественно, план не получился оптимальным. Действительно, стоимость этого плана, которая найдется, если умножить каждую перевозку на соответствующую стоимость, равна $18 \cdot 10 + 27 \cdot 8 + 3 \cdot 5 + 30 \cdot 8 + 9 \cdot 10 + 12 \cdot 8 + 6 \cdot 7 + 20 \cdot 8 = 1039$.

Таблица 10.3

ПН ПО	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	Запасы a_i
A_1	10	27	21	6	9	48
A_2	6	7	12	6	5	30
A_3	8	7	9	12	6	27
A_4	7	5	4	6	20	20
Заявки b_j	18	27	42	12	26	125

Попробуем улучшить этот план, перенеся, например, 18 единиц из клетки (1,1) в клетку (2,1) и, чтобы не нарушить баланс, перенеся те же 18 единиц из клетки (2,3) в клетку (1,3). Получим новый план, приведенный в табл. 10.3.

Нетрудно убедиться, что стоимость нового плана равна $27 \cdot 8 + 21 \cdot 5 + 18 \cdot 6 + 12 \cdot 8 + 9 \cdot 10 + 12 \cdot 8 + 6 \cdot 7 + 20 \cdot 8 = 913$, т. е. на 126 единиц меньше стоимости плана, приведенного в табл. 10.3.

Таким образом, за счет циклической перестановки 18 единиц груза из одних клеток в другие нам удалось понизить стоимость плана. На этом способе уменьшения стоимости в дальнейшем и будет основан алгоритм оптимизации плана перевозок.

Остановимся на одной особенности плана перевозок, которая может встретиться как при построении опорного плана, так и при его улучшении. Речь идет о так называемом «вырожденном» плане, в котором некоторые из базисных перевозок оказываются равными нулю. Рассмотрим конкретный пример возникновения вырожденного плана.

Пример 2. Дана транспортная таблица (без стоимостей перевозок, так как речь идет только о построении опорного плана) — см. табл. 10.4.

Таблица 10.4

ПН ПО	V_1	V_2	V_3	V_4	V_5	Запасы a_i
A_1						20
A_2						30
A_3						25
A_4						20
Заявки b_j	10	10	20	35	20	95

Таблица 10.5

ПН ПО	V_1	V_2	V_3	V_4	V_5	Запасы a_i
A_1	10	10				20
A_2			20	10		30
A_3				25		25
A_4					20	20
Заявки b_j	10	10	20	35	20	95

Таблица 10.6

ПН ПО	V_1	V_2	V_3	V_4	V_5	Запасы a_i
A_1	10	10	ϵ			$20 + \epsilon$
A_2			$20 - \epsilon$	$10 + \epsilon$		30
A_3				$25 - \epsilon$	2ϵ	$25 + \epsilon$
A_4					$20 - 2\epsilon$	$20 - 2\epsilon$
Заявки b_j	10	10	20	35	20	95

Составить опорный план перевозок.

Решение. Применяя способ северо-западного угла, получим табл. 10.5.

Опорный план составлен. Особенностью его является то, что в нем только шесть, а не восемь отличных от нуля перевозок. Значит, некоторые из базисных перевозок, которых должно быть $m + n - 1 = 8$, оказались равными нулю.

Нетрудно заметить, отчего это произошло: при распределении запасов по пунктам назначения в некоторых случаях остатки оказывались равными нулю и в соответствующую клетку не попадали.

Такие случаи «вырождения» могут возникать не только при составлении опорного плана, но и при его преобразовании, оптимизации.

В дальнейшем нам удобно будет всегда иметь в транспортной таблице $m + n - 1$ базисных клеток, хотя в некоторых из них, может быть, будут стоять и нулевые значения перевозок. Для этого можно ничтожно мало изменить запасы или заявки, так чтобы общий баланс не нарушился, а лишние, «промежуточные» балансы уничтожились. Достаточно в нужных местах изменить запасы или заявки, например, на величину ϵ , а после нахождения оптимального решения положить $\epsilon = 0$.

Покажем, как перейти от вырожденного плана к невырожденному на примере табл. 10.5. Изменим слегка запасы в первой строке и положим их равными $20 + \epsilon$. Кроме того, в третьей строке проставим запасы $25 + \epsilon$. Чтобы «свести баланс», в четвертой строке ставим запасы $20 - 2\epsilon$ (см. табл. 10.6). Для этой таблицы строим опорный план способом северо-западного угла.

В табл. 10.6 уже содержится столько базисных переменных, сколько требуется: $m + n - 1 = 8$. В дальнейшем, после оптимизации плана, можно будет положить $\epsilon = 0$.

11. УЛУЧШЕНИЕ ПЛАНА ПЕРЕВОЗОК. ЦИКЛ ПЕРЕСЧЕТА

В предыдущем параграфе мы уже бегло познакомились со способом улучшения плана, состоящим в том, что некоторые перевозки, без нарушения баланса, переносятся из клетки в клетку по некоторому замкнутому циклу. Здесь мы рассмотрим эти циклические перестановки подробнее.

Возьмем транспортную таблицу, состоящую, например, из $m = 5$ строк и $n = 6$ столбцов (число строк и столбцов несущественно).

Ц и к л о м в транспортной таблице мы будем называть несколько клеток, соединенных замкнутой ломаной линией, которая в каждой клетке совершает поворот на 90° .

Например, в табл. 11.1 изображены два цикла: первый с четырьмя вершинами (2,1), (2,3), (4,3), (4,1) и второй — с восемью вершинами (1,4), (1,6), (4,6), (4,4), (3,4), (3,5), (5,5), (5,4). Стрелками показано направление обхода цикла.

Таблица 11.1

ПН ПО	V_1	V_2	V_3	V_4	V_5	V_6	Запасы a_i
A_1	C_{11}	C_{12}	C_{13}	C_{14}	C_{15}	C_{16}	a_1
A_2	C_{21}	C_{22}	C_{23}	C_{24}	C_{25}	C_{26}	a_2
A_3	C_{31}	C_{32}	C_{33}	C_{34}	C_{35}	C_{36}	a_3
A_4	C_{41}	C_{42}	C_{43}	C_{44}	C_{45}	C_{46}	a_4
A_5	C_{51}	C_{52}	C_{53}	C_{54}	C_{55}	C_{56}	a_5
Заявки b_j	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	b_6	$\sum_{i=1}^m a_i = \sum_{j=1}^n b_j$

Таблица 11.2

ПН ПО	V_1	V_2	V_3	V_4	V_5	V_6	Запасы a_i
A_1	C_{11}	C_{12}	C_{13}	C_{14}	C_{15}	C_{16}	a_1
A_2	C_{21}	C_{22}	C_{23}	C_{24}	C_{25}	C_{26}	a_2
A_3	C_{31}	C_{32}	C_{33}	C_{34}	C_{35}	C_{36}	a_3
A_4	C_{41}	C_{42}	C_{43}	C_{44}	C_{45}	C_{46}	a_4
A_5	C_{51}	C_{52}	C_{53}	C_{54}	C_{55}	C_{56}	a_5
Заявки b_j	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	b_6	$\sum_{i=1}^m a_i = \sum_{j=1}^n b_j$

Нетрудно убедиться, что каждый цикл имеет четное число вершин и, значит, четное число звеньев (стрелок).

Условимся отмечать знаком «+» те вершины цикла, в которых перевозки увеличиваются, а знаком «-» — те вершины, в которых они уменьшаются. Цикл с отмеченными вершинами будем называть «означенным». В табл. 11.2 показано два означенных цикла: первый Π_1 с четырьмя вершинами (1,1), (1,2), (3,2) и (3,1) и второй Π_2 с восемью вершинами (3, 4), (3,6), (5, 6), (5,3), (2,3), (2,5), (4,5) и (4,4).

Перенести («перевосить») какое-то количество единиц груза по означенному циклу — это значит увеличить перевозки, стоящие в положительных вершинах цикла, на это количество единиц, а перевозки, стоящие в отрицательных вершинах — уменьшить на то же количество. Очевидно, при переносе любого числа единиц по циклу равновесие между запасами и заявками не меняется: по-прежнему сумма перевозок в каждой строке равна запасам этой строки, а сумма перевозок в каждом столбце — заявке этого столбца. Таким образом, при любом циклическом переносе, оставляющем перевозки неотрицательными, допустимый план остается допустимым. Стоимость же плана при этом может меняться — увеличиваться или уменьшаться.

Назовем ценой цикла увеличение стоимости перевозок при перемещении одной единицы груза по означенному циклу. Очевидно, цена цикла равна алгебраической сумме стоимостей, стоящих в вершинах цикла, причем стоимости, стоящие в положительных вершинах, берутся со знаком «+», а в отрицательных — со знаком «-». Например, для цикла Π_1 в табл. 11.2 цена равна:

$$c_{11} - c_{12} + c_{32} - c_{31},$$

а для цикла Π_2

$$c_{34} - c_{36} + c_{56} - c_{53} + c_{23} - c_{25} + c_{45} - c_{44}.$$

Обозначим цену цикла Π через γ . При перемещении одной единицы груза по циклу Π стоимость перевозок увеличивается на величину γ ; при перемещении по нему k единиц груза стоимость перевозок увеличивается на $k\gamma$.

Очевидно, для улучшения плана имеет смысл перемещать перевозки только по тем циклам, цена которых отрицательна. Каждый раз, когда нам удастся совершить такое перемещение, стоимость плана уменьшается на соответствующую величину $k\gamma$.

Так как перевозки не могут быть отрицательными, мы будем пользоваться только такими циклами, отрицательные вершины которых лежат в базисных клетках таблицы, где стоят положительные перевозки*). Если циклов с отрицательной ценой в таблице больше не осталось, это означает, что дальнейшее улучшение плана невозможно, т. е. оптимальный план достигнут.

*) В случае вырождения, как мы увидим далее, может оказаться полезным фиктивный перенос по циклу, отрицательная вершина которого лежит в клетке с нулевой перевозкой.

Метод последовательного улучшения плана перевозок и состоит в том, что в таблице отыскиваются циклы с отрицательной ценой, по ним перемещаются перевозки, и план улучшается до тех пор, пока циклов с отрицательной ценой уже не останется.

При улучшении плана циклическими переносами, как правило, пользуются приемом, заимствованным из симплекс-метода: при каждом шаге (цикле) заменяют одну свободную переменную на базисную, т. е. заполняют одну свободную клетку и взамен того освобождают одну из базисных клеток. При этом общее число базисных клеток остается неизменным и равным $m + n - 1$. Этот прием удобен тем, что для него легче находить подходящие циклы.

Можно доказать, что для любой свободной клетки транспортной таблицы всегда существует цикл (и притом единственный), одна из вершин которого лежит в этой свободной клетке, а все остальные — в базисных клетках. Если цена такого цикла, с плюсом в свободной клетке, отрицательна, то план можно улучшить перемещением перевозок по данному циклу. Количество единиц груза k , которое можно переместить, определяется минимальным значением перевозок, стоящих в отрицательных вершинах цикла (если переместить большее число единиц груза, возникнут отрицательные перевозки).

Пример 1. Найти оптимальный план для транспортной задачи, приведенной в табл. 11.3.

Таблица 11.3

ПН \ ПО	B_1	B_2	B_3	B_4	Запасы a_i
A_1	10	7	6	8	31
A_2	5	6	5	4	48
A_3	8	7	6	7	38
Заявки b_j	22	34	41	20	117

Решение. Составляем опорный план способом северо-западного угла (табл. 11.4).

Стоимость этого плана равна:

$$L_1 = 22 \cdot 10 + 9 \cdot 7 + 25 \cdot 6 + 23 \cdot 5 + 18 \cdot 6 + 20 \cdot 7 = 796.$$

Число базисных переменных, как и полагается в невырожденном случае,

$$\text{равно } r = m + n - 1 = 3 + 4 - 1 = 6.$$

Попробуем улучшить план, заняв свободную клетку (2,4) с минимальной стоимостью 4. Цикл, соответствующий этой клетке, показан в табл. 11.4. Цена этого цикла равна $\gamma = 4 - 7 + 6 - 5 = -2$.

По этому циклу мы можем переместить максимум 20 единиц груза (чтобы не получить в клетке (3,4) отрицательной перевозки). Новый, улучшенный план показан в табл. 11.5

Таблица 11.4

ПН \ ПО	B_1	B_2	B_3	B_4	Запасы a_i
A_1	22 ¹⁰	9 ⁷	6 ⁶	8 ⁸	31
A_2	5 ⁵	25 ⁶	23 ⁵	4 ⁴	48
A_3	8 ⁸	7 ⁷	18 ⁶	20 ⁷	38
Заявки b_j	22	34	41	20	117

Таблица 11.5

ПН \ ПО	B_1	B_2	B_3	B_4	Запасы a_i
A_1	22 ¹⁰	9 ⁷	6 ⁶	8 ⁸	31
A_2	5 ⁵	25 ⁶	3 ⁵	20 ⁴	48
A_3	8 ⁸	7 ⁷	38 ⁶	7 ⁷	38
Заявки b_j	22	34	41	20	117

Таблица 11.6

ПН \ ПО	B_1	B_2	B_3	B_4	Запасы a_i
A_1	10 ¹⁰	31 ⁷	6 ⁶	8 ⁸	31
A_2	22 ⁵	3 ⁶	3 ⁵	20 ⁴	48
A_3	8 ⁸	7 ⁷	38 ⁶	7 ⁷	38
Заявки b_j	22	34	41	20	117

Таблица 11.7

ПН ПО	B_1	B_2	B_3	Запасы a_i
A_1	10	5	4	40
A_2	6	4	5	23
A_3	7	3	8	20
Заявки b_j	20	20	43	83

Таблица 11.8

ПН ПО	B_1	B_2	B_3	Запасы a_i
A_1	20 ¹⁰	20 ⁵ ϵ	ϵ ⁴	40 + ϵ
A_2	6	4	23 ⁵	23
A_3	7	3	20 - ϵ ⁶	20 - ϵ
Заявки b_j	20	20	43	83

Таблица 11.9

ПН ПО	B_1	B_2	B_3	Запасы a_i
A_1	20 ¹⁰ ϵ	20 ⁶	20 ⁴	40 + ϵ
A_2	6	4	23 ⁵	23
A_3	7	20 - ϵ ³	20 - ϵ ⁶	20 - ϵ
Заявки b_j	20	20	43	83

Стоимость этого плана $L_2 = 796 + 20 \cdot (-2) = 756$. В нем по-прежнему шесть базисных клеток.

Для дальнейшего улучшения плана обратим внимание на свободную клетку (2,1) со стоимостью 5. Цикл, соответствующий этой клетке, показан в табл. 11.5; цена его $7 - 6 + 5 - 10 = -4$. По этому циклу переместим 22 единицы груза, чем уменьшим стоимость перевозок до $L_3 = 756 + 22 \cdot (-4) = 668$ (см. табл. 11.6).

Попробуем дальше улучшить этот план, подсчитывая цены циклов, начинающихся положительной вершиной в свободной клетке. Просматриваем имеющиеся свободные клетки табл. 11.6 и определяем цену цикла для каждой из них. Все эти цены (предоставляем читателю проверить это) или положительные, или нулевые, следовательно, никакое циклическое перенесение перевозок не может улучшить план перевозок. Таким образом, план, данный в табл. 11.6, является оптимальным.

Примененный выше метод отыскания оптимального решения транспортной задачи называется **распределительным**; он состоит в непосредственном отыскании свободных клеток с отрицательной ценой цикла и в перенесении перевозок по этому циклу.

Пример 2. Найти оптимальный план перевозок для ТЗ, условия которой приведены в табл. 11.7.

Решение. Строим опорный план способом северо-западного угла; он получается вырожденным. Чтобы избежать этого, нарушаем баланс запасов и заявок на ϵ в первой и третьей строках, не нарушая общего баланса (сумма запасов равна сумме заявок). После этого строим опорный план также способом северо-западного угла (табл. 11.8), в нем ровно столько базисных переменных, сколько нужно; пять. Улучшаем план перевозок переносом $20 - \epsilon$ единиц груза по циклу, показанному в табл. 11.8; получим новый, лучший план (см. табл. 11.9).

План, приведенный в табл. 10.9, еще не оптимален, так как цикл с началом в свободной клетке (2,1) имеет отрицательную цену:

$$\gamma = 6 - 5 + 4 - 10 = -5.$$

Перемещаем по этому циклу 20 единиц груза; получим табл. 11.10.

Цена цикла, начинающегося в клетке (2,2) табл. 11.10, также отрицательна: $4 - 5 + 4 - 5 = -2$. Однако, по этому циклу можно перенести только перевозку, равную ϵ . Тем не менее, сделаем это и получим новый план (см. табл. 11.11).

В табл. 11.11 все циклы, соответствующие свободным клеткам, имеют неотрицательную цену, поэтому план, приведенный в табл. 11.11, является оптимальным. Полагая в нем $\epsilon = 0$, получим окончательный оптимальный план (табл. 11.12) с минимальной стоимостью перевозок

$$L_{\min} = 40 \cdot 4 + 20 \cdot 6 + 3 \cdot 5 + 20 \cdot 3 = 355.$$

Заметим, что примененный здесь метод «ликвидации вырождения» путем ϵ -изменения запасов не совсем удобен, так как требует дополнительных действий с ϵ -измененными данными. Проще было бы при заполнении табл. 10.8 не изменять запасы, а «вообразить» их себе измененными и вместо ϵ поставить в базисной клетке (3,3) просто нуль. Базисная клетка с нулевой перевозкой тем будет отличаться от свободной, что в ней нуль проставлен, а в свободной — нет. Дальнейшие манипуляции с транспортной таблицей будут совершенно такими же, как если бы в базисных клетках стояли только положительные перевозки, с той лишь разницей, что когда одна из отрицательных вершин цикла окажется в базисной клетке с нулевой перевозкой, нужно переносить по этому циклу нулевую перевозку (фиктивный перенос). Если в транспортной таблице немного (одна-две) базисных переменных обращаются в нуль, можно рекомендовать этот простой метод вместо

Таблица 11.10

ПН \ ПО	B_1	B_2	B_3	Запасы a_i
A_1	10	ϵ	40	$40 + \epsilon$
A_2	20		3	23
A_3	7	$20 - \epsilon$		$20 - \epsilon$
Заявки b_j	20	20	43	83

Таблица 11.11

ПН \ ПО	B_1	B_2	B_3	Запасы a_i
A_1	10		$40 + \epsilon$	$40 + \epsilon$
A_2	20	ϵ	$3 - \epsilon$	23
A_3	7	$20 - \epsilon$		$20 - \epsilon$
Заявки b_j	20	20	43	83

Таблица 11.12

ПН \ ПО	B_1	B_2	B_3	Запасы a_i
A_1	10		40	40
A_2	20		3	23
A_3	7	20		20
Заявки b_j	20	20	43	83

ϵ -изменений запасов (заявок). Рекомендуем читателю самостоятельно решить пример 2 таким упрощенным способом. Следует иметь в виду, что при большом количестве базисных переменных, обращающихся в нуль, упрощенный метод становится менее удобным, так как легко запутаться с расстановкой по таблице нулевых базисных перевозок (т. е. ошибочно проставить базисные клетки там, где они находиться не могут).

12. РЕШЕНИЕ ТРАНСПОРТНОЙ ЗАДАЧИ МЕТОДОМ ПОТЕНЦИАЛОВ

Распределительный метод решения ТЗ, с которым мы познакомились в предыдущем параграфе, обладает одним недостатком: нужно отыскивать циклы для всех свободных клеток и находить их цены. От этой трудоемкой работы нас избавляет специальный метод решения ТЗ, который называется методом потенциалов. Этот метод позволяет автоматически выделять циклы с отрицательной ценой и определять их цены.

Пусть имеется транспортная задача с балансовыми условиями

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} = a_i \quad (i = 1, \dots, m); \quad \sum_{i=1}^m x_{ij} = b_j \quad (j = 1, \dots, n), \quad (12.1)$$

причем

$$\sum_{i=1}^m a_i = \sum_{j=1}^n b_j.$$

Стоимость перевозки единицы груза из A_i в B_j равна c_{ij} ; таблица стоимостей (c_{ij}) задана.

Требуется найти план перевозок (x_{ij}), который удовлетворял бы балансовым условиям (12.1), и при этом стоимость всех перевозок была минимальна:

$$L = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij} = \min. \quad (12.2)$$

Идея метода потенциалов для решения ТЗ сводится к следующему. Представим себе, что каждый из пунктов отправления A_i вносит за перевозку единицы груза (все равно, куда) какую-то сумму α_i ; в свою очередь, каждый из пунктов назначения B_j также вносит за перевозку единицы груза (куда угодно) сумму β_j ; эти платежи передаются некоторому третьему лицу («перевозчику»).

Обозначим

$$\alpha_i + \beta_j = \tilde{c}_{ij} \quad (i = 1, \dots, m; \quad j = 1, \dots, n) \quad (12.3)$$

и будем называть величину \tilde{c}_{ij} «псевдостоимостью» перевозки единицы груза из A_i в B_j .

Заметим, что платежи α_i, β_j не обязательно должны быть положительными: не исключено, что «перевозчик» сам платит тому или другому пункту какую-то премию за перевозку.

Обозначим для краткости всю совокупность платежей $\alpha_1, \dots, \alpha_m, \beta_1, \dots, \beta_n$ через (α_i, β_j) . Не уточняя пока вопроса, из каких соображений назначаются эти платежи, докажем прежде всего одно общее положение или «теорему о платежах». Она состоит в следующем.

Для заданной совокупности платежей (α_i, β_j) суммарная псевдостоимость перевозок

$$\tilde{L} = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \tilde{c}_{ij} x_{ij}$$

при любом допустимом плане перевозок (x_{ij}) сохраняет одно и то же значение

$$\tilde{L} = C = \text{const.} \quad (12.4)$$

В этой формуле величина C зависит только от совокупности платежей (α_i, β_j) , но не зависит от того, каким именно допустимым планом (x_{ij}) мы пользуемся.

Докажем это положение. Имеем:

$$\begin{aligned} \tilde{L} &= \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \tilde{c}_{ij} x_{ij} = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n (\alpha_i + \beta_j) x_{ij} = \\ &= \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \alpha_i x_{ij} + \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \beta_j x_{ij}. \end{aligned} \quad (12.5)$$

Преобразуем первую из двойных сумм в выражении (12.5). Вынесем α_i из-под знака суммы по j :

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \alpha_i x_{ij} = \sum_{i=1}^m \alpha_i \sum_{j=1}^n x_{ij}.$$

Но план (x_{ij}) является допустимым, значит, для него выполняется балансовое условие:

$$\sum_{i=1}^n x_{ij} = a_i,$$

откуда

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \alpha_i x_{ij} = \sum_{i=1}^m \alpha_i a_i. \quad (12.6)$$

Аналогичным образом преобразуем второе слагаемое в (12.5):

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \beta_j x_{ij} &= \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m \beta_j x_{ij} = \\ &= \sum_{j=1}^n \beta_j \sum_{i=1}^m x_{ij} = \sum_{j=1}^n \beta_j b_j. \end{aligned} \quad (12.7)$$

Подставляя (12.6) и (12.7) в (12.5), получим:

$$\tilde{L} = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \tilde{c}_{ij} x_{ij} = \sum_{i=1}^m \alpha_i a_i + \sum_{j=1}^n \beta_j b_j. \quad (12.8)$$

В формуле (12.8) правая часть не зависит от плана перевозок (x_{ij}) , а зависит только от запасов (a_i) , заявок (b_j) и платежей (α_i, β_j) .

Таким образом, мы доказали, что суммарная псевдостоимость любого допустимого плана перевозок при заданных платежах (α_i, β_j) одна и та же и от плана к плану не меняется.

До сих пор мы никак не связывали платежи (α_i, β_j) и псевдостоимости $\tilde{c}_{ij} = \alpha_i + \beta_j$ с истинными стоимостями перевозок c_{ij} . Теперь мы установим между ними связь.

Предположим, что план (x_{ij}) невырожденный (число базисных клеток в таблице перевозок равно $m + n - 1$). Для всех этих клеток $x_{ij} > 0$. Определим платежи (α_i, β_j) так, чтобы во всех базисных клетках псевдостоимости были равны истинным стоимостям:

$$\tilde{c}_{ij} = \alpha_i + \beta_j = c_{ij} \quad \text{при } x_{ij} > 0;$$

что касается свободных клеток (где $x_{ij} = 0$), то в них соотношение между псевдостоимостями и стоимостями может быть какое угодно:

$$\tilde{c}_{ij} = c_{ij}; \quad \tilde{c}_{ij} < c_{ij} \quad \text{или} \quad \tilde{c}_{ij} > c_{ij} \quad \text{при } x_{ij} = 0.$$

Оказывается соотношение между псевдостоимостями и стоимостями в свободных клетках показывает, является ли план оптимальным, или же он может быть улучшен.

Докажем следующую теорему.

Теорема.

Если для всех базисных клеток плана $(x_{ij} > 0)$

$$\alpha_i + \beta_j = \tilde{c}_{ij} = c_{ij},$$

а для всех свободных клеток $(x_{ij} = 0)$

$$\alpha_i + \beta_j = \tilde{c}_{ij} \leq c_{ij},$$

то план является оптимальным и никакими способами улучшить быть не может.

Доказательство. Обозначим (x_{ij}) — план с соответствующей ему системой платежей (α_i, β_j) , обладающий указанным выше свойством (для всех базисных клеток псевдостоимости равны истинным стоимостям, а для свободных — не превосходят их). Определим стоимость этого плана:

$$L = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij}. \quad (12.9)$$

В сумме (12.9) отличны от нуля только слагаемые, соответствующие базисным клеткам, в них стоимости равны псевдостоимостям. Поэтому

$$L = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \tilde{c}_{ij} x_{ij}. \quad (12.10)$$

На основании ранее доказанного, эта сумма (при данной системе платежей) равна некоторой константе C (см. (12.4)):

$$L = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \tilde{c}_{ij} x_{ij} = C. \quad (12.11)$$

Теперь попробуем изменить план (x_{ij}) , заменив его каким-то другим планом (x'_{ij}) . Обозначим стоимость нового плана

$$L' = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x'_{ij}, \quad (12.12)$$

где x'_{ij} — новые перевозки, отличные от нуля, вообще говоря, в других клетках, чем x_{ij} . Некоторые из этих клеток совпадают с прежними — базисными для плана (x_{ij}) , а другие — со свободными для плана (x_{ij}) . В первых — стоимости c_{ij} по-прежнему равны псевдостоимостям, а во вторых — не меньше их:

$$c_{ij} \geq \tilde{c}_{ij}.$$

Поэтому сумма (12.12) не может быть меньше, чем сумма (12.11) (она же 12.9):

$$L' = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x'_{ij} \geq \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \tilde{c}_{ij} x'_{ij} = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \tilde{c}_{ij} x_{ij} = C = L. \quad (12.13)$$

Мы видим, что никаким изменением плана (x_{ij}) его стоимость не может быть уменьшена; значит, план (x_{ij}) является оптимальным и теорема доказана.

Нетрудно показать, что эта теорема справедлива также для вырожденного плана, в котором некоторые из базисных переменных равны нулю. Действительно, то, что в базисных клетках перевозки строго положительны, для доказательства несущественно: достаточно, чтобы они были неотрицательными.

Таким образом, доказано, что признаком оптимальности плана (x_{ij}) является выполнение двух условий:

$$\tilde{c}_{ij} = c_{ij} \text{ для всех базисных клеток;} \quad (12.14a)$$

$$\tilde{c}_{ij} \leq c_{ij} \text{ для всех свободных клеток.} \quad (12.14b)$$

План, обладающий таким свойством, называется потенциалным, а соответствующие ему платежи (α_i, β_j) — потенциалы и пунктов A_i, B_j ($i=1, m; j=1, \dots, n$).

Пользуясь этой терминологией, доказанную выше теорему можно сформулировать так:

Всякий потенциалный план является оптимальным.

Итак, для решения транспортной задачи нам нужно одно — построить потенциалный план. Оказывается, его можно построить методом последовательных приближений, задаваясь сначала какой-то произвольной системой платежей, удовлетворяющей условию (12.14 а). При этом в каждой базисной клетке получается сумма платежей, рав-

ная стоимости перевозок в данной клетке; затем, улучшая план, следует одновременно менять систему платежей так, что они приближаются к потенциалам.

При улучшении плана нам помогает следующее свойство платежей и псевдостоимостей:

Какова бы ни была система платежей (α_i, β_j) , удовлетворяющая условию (12.14 а), для каждой свободной клетки цена цикла пересчета равна разности между стоимостью c_{ij} и псевдостоимостью \tilde{c}_{ij} в данной клетке:

$$\gamma_{ij} = c_{ij} - \tilde{c}_{ij}. \quad (12.15)$$

Таблица 12.1

ПН ПО	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	B_6
A_1	C_{11}	C_{12}	C_{13}	C_{14}	C_{15}	C_{16}
A_2	C_{21}	C_{22}	C_{23}	C_{24}	C_{25}	C_{26}
A_3	C_{31}	C_{32}	C_{33}	C_{34}	C_{35}	C_{36}
A_4	C_{41}	C_{42}	C_{43}	C_{44}	C_{45}	C_{46}
A_5	C_{51}	C_{52}	C_{53}	C_{54}	C_{55}	C_{56}

Действительно, рассмотрим какую-то транспортную таблицу, например $m = 5, n = 6$ (табл. 12.1).

Не будем проставлять в этой таблице ни запасов, ни заявок, ни перевозок (они не будут нам нужны), просто отметим (обведем жирной линией) базисные клетки.

Возьмем любую свободную клетку, например (1.5), и построим соответствующий ей цикл пересчета, положительная вершина которого лежит в этой свободной клетке, а все остальные — в базисных. Определим цену этого цикла. Она равна

$$\gamma_{15} = c_{15} - c_{35} + c_{33} - c_{23} + c_{22} - c_{12}.$$

Но для всех базисных клеток стоимости равны псевдостоимостям, поэтому

$$\begin{aligned} \gamma_{15} &= c_{15} - (\alpha_3 + \beta_5) + (\alpha_3 + \beta_3) - (\alpha_2 + \beta_3) + (\alpha_2 + \beta_2) - \\ &\quad - (\alpha_4 + \beta_2) = c_{15} - (\alpha_1 + \beta_5) = c_{15} - \tilde{c}_{15}, \end{aligned}$$

т. е. цена цикла, начинающегося в свободной клетке (1, 5) равна разности стоимости c_{15} и псевдостоимости \tilde{c}_{15} в этой клетке. Очевидно, то же будет справедливо и для любой свободной клетки.

Таким образом, при пользовании методом потенциалов для решения ТЗ отпадает наиболее трудоемкий элемент распределительного метода: поиски циклов с отрицательной ценой.

Процедура построения потенциального (оптимального) плана состоит в следующем.

В качестве первого приближения к оптимальному плану берется любой допустимый план (хотя бы построенный способом северо-западного угла). В этом плане $m + n - 1$ базисных клеток, где m — число строк, n — число столбцов транспортной таблицы. Для этого плана можно определить платежи (α_i, β_j) , так, чтобы в каждой базисной клетке выполнялось условие:

$$\alpha_i + \beta_j = c_{ij}. \quad (12.16)$$

Уравнений (12.16) всего $m + n - 1$, а число неизвестных равно $m + n$. Следовательно, одну из этих неизвестных можно задать произвольно (например, равной нулю). После этого из $m + n - 1$ уравнений (12.16) можно найти остальные платежи α_i, β_j , а по ним вычислить псевдостоимости:

$$\tilde{c}_{ij} = \alpha_i + \beta_j$$

для каждой свободной клетки. Если оказалось, что все эти псевдостоимости не превосходят стоимостей

$$\tilde{c}_{ij} \leq c_{ij}, \quad (12.17)$$

то план потенциален и, значит, оптимален. Если же хотя бы в одной свободной клетке псевдостоимость больше стоимости

$$\tilde{c}_{ij} > c_{ij},$$

то план не является оптимальным и может быть улучшен переносом перевозок по циклу, соответствующему данной свободной клетке. Цена этого цикла равна разности между стоимостью и псевдостоимостью в этой свободной клетке.

Итак, мы приходим к следующему правилу (алгоритму) решения транспортной задачи методом потенциалов.

1. Взять любой опорный план перевозок, в котором отмечены $m + n - 1$ базисных клеток (остальные клетки — свободные).

2. Определить для этого плана платежи (α_i, β_j) исходя из условия, чтобы в любой базисной клетке псевдостоимости были равны стоимостям:

$$\alpha_i + \beta_j = c_{ij}. \quad (12.18)$$

Один из платежей можно назначить произвольно, например, положить равным нулю.

3. Подсчитать псевдостоимости $\tilde{c}_{ij} = \alpha_i + \beta_j$ для всех свободных клеток. Если окажется, что все они не превышают стоимостей, то план оптимален.

4. Если бы хотя в одной свободной клетке псевдостоимость превышает стоимость, следует приступить к улучшению плана путем переброски перевозок по циклу, соответствующему любой свободной клетке с отрицательной ценой (для которой псевдостоимость больше стоимости).

5. После этого заново подсчитываются платежи и псевдостоимости, и, если план все еще не оптимален, процедура улучшения продолжается до тех пор, пока не будет найден оптимальный план.

Таблица 12.2

ПН ПО	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	Запасы a_i
A_1	¹⁰ 17	⁸ 8	⁹	⁶	⁵	25
A_2	⁵	⁶ 13	⁴ 19	³	⁸	32
A_3	⁹	⁷	⁵ 22	⁴ 14	³ 4	40
A_4	¹⁴	¹⁰	⁸	⁸	⁸ 20	20
Заявки b_j	17	21	41	14	24	117

Понятиям «платежей» и «псевдостоимостей» можно дать наглядную экономическую интерпретацию.

Представим себе, что (α_i, β_j) — реальные платежи, которые пункты A_i и B_j платят за перевозку единицы груза какому-то третьему лицу («перевозчику»). Не будем противопоставлять интересов A и B — пусть они действуют как единая экономическая система. Перевозка единицы груза из пункта A_i в пункт B_j объективно стоит c_{ij} , а стороны A и B вместе платят за эту перевозку «перевозчику» сумму $\tilde{c}_{ij} = \alpha_i + \beta_j$. Оптимальным будет такой план перевозок, при котором пункты A_i, B_j не переплачивают «перевозчику» ничего сверх объективной стоимости перевозок, т. е. такой план, любое отступление от которого невыгодно для компании A, B — оно заставит их платить за перевозку больше, чем если бы они возили грузы сами.

Продемонстрируем применение метода потенциалов для решения ТЗ на конкретном примере.

Пример 1. Решить методом потенциалов ТЗ, заданную в табл. 12.2, где представлен первый опорный план, составленный по способу северо-западного угла.

Таблица 12.4

Решение. Приписываем к табл. 12.2 снизу добавочную строку для платежей β_j , справа — добавочный столбец для платежей α_i (см табл. 12.3) Псевдостоимости $\tilde{c}_{ij} = \alpha_i + \beta_j$ записываем в левом верхнем углу каждой клетки, а стоимости — в правом верхнем углу. Один из платежей, например α_1 , выбираем произвольно, полагая, скажем, $\alpha_1 = 0$. Для каждой базисной клетки псевдостоимость $\tilde{c}_{ij} = \alpha_i + \beta_j$ должна быть равна стоимости c_{ij} .

Полагая $\alpha_1 = 0$, находим из условия

$$\alpha_1 + \beta_1 = 10; \quad 0 + \beta_1 = 10; \quad \beta_1 = 10,$$

а из условия

$$\alpha_1 + \beta_2 = 0 + \beta_2 = 8; \quad \beta_2 = 8$$

Таблица 12.3

ПО \ ПН	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	Запасы a_i	Платежи α_i
A_1	10 10 8 8 6 9 5 6 4 5	17 8	8			25	0
A_2	8 5 6 6 4 4 3 3 2 8	13	19			32	-2
A_3	9 9 7 7 5 5 4 4 3 3		22	14	4	40	-1
A_4	14 14 12 10 10 8 9 8 8 8				20	20	4
Заявки b_j	17	21	41	14	24	117	
Платежи β_j	10	8	6	5	4		

Продолжая эту процедуру, находим:

$$\begin{aligned} \alpha_2 + \beta_2 = \alpha_2 + 8 = 6, & \quad \alpha_2 = -2; \\ -2 + \beta_3 = 4; & \quad \beta_3 = 6; \\ \alpha_3 + 6 = 5; & \quad \alpha_3 = -1; \\ -1 + \beta_4 = 4; & \quad \beta_4 = 5; \\ -1 + \beta_5 = 3; & \quad \beta_5 = 4; \\ \alpha_4 + 4 = 8; & \quad \alpha_4 = 4. \end{aligned}$$

Так как не все псевдостоимости в свободных клетках табл. 12.3 удовлетворяют условию (12.17), план, приведенный в табл. 12.3, не является оптимальным. Попробуем улучшить его, переводя в базисные одну из свободных клеток, для которых $\tilde{c}_{ij} > c_{ij}$, например, клетку (2, 1). Строим соответствующий этой клетке цикл (показан в табл. 12.3). Цена этого цикла $5 - 8 = -3$. Перенесем по этому циклу 13 единиц груза (больше нельзя, чтобы перевозки в клетке (2, 2) не стали отрицательными), уменьшим стоимость плана на $13 \cdot 3 = 39$ и перейдем к табл. 12.4.

Вычисляем для плана табл. 12.4 новые значения платежей, по-прежнему полагая $\alpha_1 = 0$. Видим, что в табл. 12.4 все еще есть свободные клетки, для которых $\tilde{c}_{ij} > c_{ij}$, например (1, 4). Цикл для этой клетки показан в табл. 12.4. Перенос четырех единиц по этому циклу приводит к плану, представленному (со свои-

ПО \ ПН	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	Запасы a_i	Платежи α_i
A_1	10 10 8 8 9 9 6 7 5	4 21				25	0
A_2	5 5 3 6 4 4 3 3 2 8	13	19			32	-5
A_3	6 9 4 7 5 5 4 4 3 3		22	14	4	40	-4
A_4	11 14 9 10 10 8 9 8 8 8				20	20	1
Заявки b_j	17	21	41	14	24	117	
Платежи β_j	10	8	9	8	7		

Таблица 12.5

ПО \ ПН	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	Запасы a_i	Платежи α_i
A_1	8 10 8 8 7 9 6 6 5 5	21		4		25	0
A_2	5 5 5 6 4 4 3 3 2 8	17	15			32	-3
A_3	6 9 6 7 5 5 4 4 3 3		26	10	4	40	-2
A_4	11 14 11 10 10 8 9 8 8 8				20	20	3
Заявки b_j	17	21	41	14	24	117	
Платежи β_j	8	8	7	6	5		

Таблица 12.6

ПО \ ПН	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	Запасы a_i	Платежи α_i
A_1	8 10 8 8 7 9 6 6 5 5	21		4		25	0
A_2	5 5 5 6 4 4 3 3 2 8	17	18			32	-3
A_3	6 9 6 7 5 5 4 4 3 3		6	10	24	40	-2
A_4	9 14 9 10 8 8 7 9 6 8			20		20	1
Заявки b_j	17	21	41	14	24	117	
Платежи β_j	8	8	7	6	5		

Таблица 12.7

ПН ПО	B_1	B_2	B_3	Запасы a_1
A_1	6	4	2	20
A_2	8	5	4	25
A_3	3	6	3	30
Заявки b_j	20	25	30	75

Таблица 12.8

ПН ПО	B_1	B_2	B_3	Запасы a_1	Платежи α_1
A_1	6 20	4 $+\epsilon$	2 4^3	$20+\epsilon$	0
A_2	7 3	5 5^4 $25-\epsilon$	4 5^4 2ϵ	$25+\epsilon$	1
A_3	6 3	4 3^4	3 6^3 $30-2\epsilon$	$30-2\epsilon$	0
Заявки b_j	20	25	30	75	
Платежи β_j	6	4	3		

Таблица 12.9

ПН ПО	B_1	B_2	B_3	Запасы a_1	Платежи α_1
A_1	3 6	4 $20+\epsilon$	2 4^3	$20+\epsilon$	0
A_2	4 3	5 5^4 $5-\epsilon$	4 5^4 $20+2\epsilon$	$25+\epsilon$	1
A_3	3 20	4 3^4	3 6^3 $10-2\epsilon$	$30-2\epsilon$	0
Заявки b_j	20	25	30	75	
Платежи β_j	3	4	3		

Таблица 12.10

ПН ПО	B_1	B_2	B_3	Запасы a_1	Платежи α_1
A_1	2 6	3 4	2 $20+\epsilon$	$20+\epsilon$	0
A_2	4 3	5 25	4 ϵ	$25+\epsilon$	2
A_3	3 20	4 3^4	3 6^3 $10-2\epsilon$	$30-2\epsilon$	1
Заявки b_j	20	25	30	75	
Платежи β_j	2	3	2		

Таблица 12.11

ПН ПО	B_1	B_2	B_3	Запасы a_1	Платежи α_1
A_1	2 6	4 4	2 $20+\epsilon$	$20+\epsilon$	0
A_2	3 ϵ	5 25	4 5^3	$25+\epsilon$	1
A_3	3 20	4 3^5	3 6^3 $10-\epsilon$	$30-2\epsilon$	1
Заявки b_j	20	25	30	75	
Платежи β_j	2	4	2		

Таблица 12.12

ПН ПО	B_1	B_2	B_3	Запасы a_1
A_1	6	4	2	20
A_2	3	5	4	25
A_3	20	6	3	30
Заявки b_j	20	25	30	75

ми платежами и псевдостоимостями) в табл. 12.5. Этот план все еще не оптимальный. Переноса по циклу, соответствующему свободной клетке (4, 3), 20 единиц груза, получаем новый план (табл. 12.6) с новыми платежами и псевдостоимостями.

В табл. 12.6 все псевдостоимости не превосходят соответствующих стоимостей, значит, этот план оптимален. Потенциалы пунктов найдены и равны соответственно:

$$\alpha_1 = 0; \alpha_2 = -3; \alpha_3 = -2; \alpha_4 = 1; \\ \beta_1 = 8; \beta_2 = 8; \beta_3 = 7; \beta_4 = 6; \beta_5 = 5.$$

При анализе этих значений нельзя забывать, что одно из них (в нашем случае α_1) назначено произвольно ($\alpha_1 = 0$), поэтому потенциалы (или равновесные платежи) пунктов достаточно условны. Важно, что их сумма для всех перевозок, отличных от нуля, равна сумме стоимостей, проставленных в соответствующих клетках. Если смотреть на эти платежи не с точки зрения каждого пункта в отдельности, а с точки зрения всей «компании» пунктов (A, B), то безразлично, какой из пунктов платит больше, а какой — меньше.

Следующий пример будет посвящен вырожденному случаю.

Пример 2. Решить методом потенциалов ТЗ, условия которой даны в табл. 12.7.

Решение. Применяя способ северо-западного угла, получаем вырожденный план. Вводя ε -изменения запасов, получаем опорный план с пятью базисными клетками. Подсчитывая платежи (табл. 12.8), видим, что план не оптимален. Улучшаем его циклическим переносом перевозок, и т. д. Процедура улучшения плана показана в табл. 12.8, 12.9, 12.10, 12.11; план, приведенный в последней таблице, оптимален. Полагая в нем $\varepsilon = 0$, получаем окончательный оптимальный план (табл. 12.12) со стоимостью

$$L_{\min} = 20 \cdot 2 + 25 \cdot 5 = 20 \cdot 3 + 10 \cdot 3 = 255.$$

Заметим, что эта стоимость такая же, как стоимость плана, показанного в табл. 12.10 при $\varepsilon = 0$; это и естественно, так как табл. 12.11 получена из табл. 12.10 переносом по циклу фиктивных ε -перевозок; этот перенос не меняет стоимости плана, а нужен только для того, чтобы убедиться, что план оптимален.

13. ТРАНСПОРТНАЯ ЗАДАЧА С НЕПРАВИЛЬНЫМ БАЛАНСОМ

До сих пор мы рассматривали только такую задачу о перевозках, в которой сумма запасов равна сумме заявок:

$$\sum_{i=1}^m a_i = \sum_{j=1}^n b_j. \quad (13.1)$$

Это — классическая транспортная задача, иначе называемая «транспортной задачей с правильным балансом».

Встречаются такие варианты ТЗ, где условие (13.1) нарушено. В этих случаях говорят о ТЗ с неправильным балансом.

Баланс ТЗ может нарушаться в двух направлениях:

1. Сумма запасов в пунктах отправления превышает сумму поданных заявок:

$$\sum_{i=1}^m a_i > \sum_{j=1}^n b_j.$$

2. Сумма поданных заявок превышает наличные запасы:

$$\sum_{j=1}^n b_j > \sum_{i=1}^m a_i.$$

Условимся первый случай называть «ТЗ с избытком запасов», а второй — «ТЗ с избытком заявок».

Рассмотрим последовательно эти два случая.

1. ТЗ с избытком запасов

В пунктах A_1, A_2, \dots, A_m имеются запасы груза a_1, a_2, \dots, a_m ; пункты B_1, B_2, \dots, B_n подали заявки b_1, b_2, \dots, b_n , причем

$$\sum_{i=1}^m a_i > \sum_{j=1}^n b_j.$$

Требуется найти такой план перевозок (x_{ij}), при котором все заявки будут выполнены, а общая стоимость перевозок минимальна:

$$L = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij} = \min.$$

Очевидно, при этой постановке задачи некоторые условия-равенства ТЗ превращаются в условия-неравенства, а некоторые — остаются равенствами:

$$\left. \begin{aligned} \sum_{j=1}^n x_{ij} &\leq a_i \quad (i = 1, \dots, m), \\ \sum_{i=1}^m x_{ij} &= b_j \quad (j = 1, \dots, n). \end{aligned} \right\} \quad (13.2)$$

Мы умеем решать задачу линейного программирования, в какой бы форме — равенств или неравенств — ни были заданы ее условия. Поставленная задача может быть решена, например, обычным симплекс-методом. Однако, задачу можно решить проще, если искусственным приемом свести ее к ранее рассмотренной ТЗ с правильным балансом.

Для этого, сверх имеющихся n пунктов назначения B_1, B_2, \dots, B_n , введем еще один, фиктивный, пункт назначения B_Φ , которому припишем фиктивную заявку, равную избытку запасов над заявками:

$$b_\Phi = \sum_{i=1}^m a_i - \sum_{j=1}^n b_j \quad (13.3)$$

и положим стоимости перевозок из всех ПО в фиктивный ПН V_ϕ равными нулю:

$$c_{i\phi} = 0 \quad (i = 1, \dots, m).$$

Таким образом, отправление какого-то количества груза $x_{i\phi}$ из пункта A_i в пункт V_ϕ попросту будет означать, что в пункте A_i остались неотправленными $x_{i\phi}$ единиц груза.

Введением фиктивного ПН V_ϕ с его заявкой b_ϕ мы сравняли баланс ТЗ, и теперь ее можно решать как обычную ТЗ с правильным балансом.

2. ТЗ с избытком заявок

В пунктах A_1, A_2, \dots, A_m имеются запасы груза a_1, \dots, a_m ; пункты V_1, \dots, V_n подали заявки b_1, \dots, b_n , причем $\sum_{j=1}^n b_j > \sum_{i=1}^m a_i$, т. е.

имеющихся запасов недостаточно для удовлетворения всех заявок.

Требуется составить такой план перевозок, при котором все запасы окажутся вывезенными, а стоимость перевозок — минимальной.

Очевидно, эту задачу также можно свести к обычной ТЗ с правильным балансом, если ввести в рассмотрение фиктивный пункт отправления A_ϕ с запасом a_ϕ , равным недостающему запасу:

$$a_\phi = \sum_{j=1}^n b_j - \sum_{i=1}^m a_i,$$

и положить стоимости перевозок из ПО A_ϕ в любой ПН равными нулю: $c_{\phi j} = 0$ ($j = 1, \dots, n$). При этом какая-то часть заявок $x_{\phi j}$ на каждом пункте останется неудовлетворенной; будем считать, что она как бы покрывается за счет фиктивного ПО A_ϕ .

Таким образом, мы свели ТЗ с избытком заявок к ТЗ с правильным балансом. Заметим, что при этом мы вовсе не заботились о «справедливости» удовлетворения заявок, не налагали никаких условий на то, какую долю своей заявки должен получить каждый ПН — нас интересовали лишь расходы, которые нужно минимизировать.

Если поставить задачу по-иному, например, потребовать, чтобы все ПН были удовлетворены в равной доле, задача снова сводится к ТЗ с правильным балансом. А именно, нужно поданные заявки «ис-

править», умножив каждую из них на коэффициент $k = \frac{\sum_{i=1}^m a_i}{\sum_{j=1}^n b_j}$, после чего решать ТЗ с правильным балансом.

Можно также поставить задачу о распределении грузов по пунктам назначения с учетом сравнительной важности каждого пункта. При этом доля заявки, которую получает каждый пункт, может быть не одинаковой, как в только что описанном способе, а различной. В этом случае задача также сводится к ТЗ с правильным балансом.

Таблица 13.1

ПО \ ПН	V_1	V_2	V_3	Запасы a_i
A_1	5	7	6	50
A_2	6	6	5	40
A_3	8	4	6	20
Заявки b_j	18	21	33	

Таблица 13.2

ПО \ ПН	V_1	V_2	V_3	V_ϕ	Запасы a_i	Платежи α_i
A_1	5 18	5 7 21	7 6 11	6 1 0	50	0
A_2	4 6	6 6 22	6 5 5	5 0 18	40	-1
A_3	4 8	6 4	5 5	5 0	20	-1
Заявки b_j	18	21	33	38	110	
Платежи β_j	5	7	6	1		

Таблица 13.3

ПО \ ПН	V_1	V_2	V_3	V_ϕ	Запасы a_i	Платежи α_i
A_1	5 18	5 7 21	7 6 11	6 1 0	50	0
A_2	5 6	7 6 33	5 5 7	5 0 0	40	0
A_3	5 8	7 4	5 5	5 0	20	0
Заявки b_j	18	21	33	38	110	
Платежи β_j	5	7	5	0		

разница между запасами и заявками равна

$$\sum_{i=1}^m a_i - \sum_{j=1}^n b_j = 110 - 72 = 38.$$

Введением фиктивного ПН V_ϕ с заявкой $b_\phi = 38$ сводим задачу к ТЗ с правильным балансом (см. табл. 13.2, 13.3, 13.4, 13.5).

План, представленный в табл. 13.5, является оптимальным, так как во всех свободных клетках псевдостоимости не превосходят стоимостей. Согласно этому плану, из 50 единиц груза, имеющихся в пункте A_1 , не перевозятся 32, а остальные 18 направляются в пункт B_1 ; из 40 единиц, имеющихся в пункте A_2 , 6 не перевозятся, 1 отправляется в пункт B_2 и 33 — в пункт B_3 . Все 20 единиц, имеющихся в пункте A_3 , направляются в пункт B_2 .

14. РЕШЕНИЕ ТРАНСПОРТНОЙ ЗАДАЧИ ПО КРИТЕРИЮ ВРЕМЕНИ

До сих пор критерием оптимальности решения ТЗ у нас была общая стоимость перевозок, и мы стремились эту стоимость минимизировать.

В большинстве случаев практики именно критерий стоимости является главным, определяющим качество (эффективность) плана перевозок. Однако в некоторых случаях на первый план выдвигается не стоимость перевозок L , а время T , в течение которого все перевозки будут закончены. Так, например, бывает, когда речь идет о перевозках скоропортящихся продуктов или же о подвозе боеприпасов к месту боевых действий. Наилучшим планом перевозок (x_{ij}) будет считаться тот план, при котором время окончания всех перевозок минимально:

$$T = \min. \quad (14.1)$$

Такая транспортная задача, где оптимальным считается план с минимальным временем T , называется *транспортной задачей по критерию времени*.

Задача ставится следующим образом. Имеется m пунктов отправления A_1, \dots, A_m с запасами a_1, \dots, a_m и n пунктов назначения B_1, \dots, B_n с заявками b_1, \dots, b_n ; сумма запасов равна сумме заявок:

$$\sum_{i=1}^m a_i = \sum_{j=1}^n b_j. \quad (14.2)$$

Заданы времена перевозок t_{ij} из каждого ПО A_i в каждый ПН B_j ; предполагается, что они не зависят от количества перевозимого груза x_{ij} , т. е. количество транспортных средств всегда достаточно для осуществления любого объема перевозок. Запасы a_i , заявки b_j и времена t_{ij} приведены в табл. 14.1, построенной так же, как обычная транспортная таблица, с той разницей, что в правом верхнем углу каждой клетки вместо стоимостей c_{ij} стоят времена t_{ij} .

Таблица 13.4

ПН ПО	B_1	B_2	B_3	B_ϕ	Запасы a_i	Платежи α_i
A_1	5 18	5 7 7 5	6 0	0	50	0
A_2	5 6 7	6 5	33	5 0	40	0
A_3	2 8 4	4 2	5 -3	0	20	-3
Заявки b_j	18	21	33	38	110	
Платежи β_j	5	7	5	0		

Таблица 13.5

ПН ПО	B_1	B_2	B_3	B_ϕ	Запасы a_i	Платежи α_i
A_1	5 18	5 6	7 5	6 0	0	50
A_2	5 6 8	6 5	33	5 0	0	40
A_3	3 8 4	4 3	5 -2	0	20	-2
Заявки b_j	18	21	33	38	110	
Платежи β_j	5	6	5	0		

Пример. Решить ТЗ с избытком запасов, условия которой заданы в табл. 13.1.

Решение.

$$\sum_{i=1}^m a_i = 110; \quad \sum_{j=1}^n b_j = 72;$$

Таблица 14.1

ПН ПО	B_1	B_2	...	B_n	Запасы a_i
A_1	t_{11}	t_{12}	...	t_{1n}	a_1
A_2	t_{21}	t_{22}	...	t_{2n}	a_2
⋮	⋮
A_m	t_{m1}	t_{m2}	...	t_{mn}	a_m
Заявки b_j	b_1	b_2	...	b_n	$\sum_{i=1}^m a_i = \sum_{j=1}^n b_j$

Требуется выбрать перевозки (x_{ij}) таким образом, чтобы удовлетворялись балансовые условия

$$\left. \begin{aligned} \sum_{j=1}^n x_{ij} &= a_i \quad (i = 1, \dots, m), \\ \sum_{i=1}^m x_{ij} &= b_j \quad (j = 1, \dots, n), \end{aligned} \right\} \quad (14.3)$$

и, кроме того, обращалось в минимум время окончания всех перевозок T .

Выразим время T через времена t_{ij} и перевозки x_{ij} . Так как все перевозки заканчиваются в момент, когда кончается самая длительная из всех перевозок, то время T есть *максимальное из всех времен t_{ij} , стоящих в ячейках, содержащих ненулевые перевозки*. Запишем это в виде формулы:

$$T = \max_{x_{ij} > 0} t_{ij}, \quad (14.4)$$

где знак $x_{ij} > 0$ показывает, что берется максимальное не из всех t_{ij} , а только из тех, для которых перевозки отличны от нуля.

Мы хотим найти такой план перевозок (x_{ij}), для которого время T обращается в минимум:

$$T = \min_{x_{ij} > 0} t_{ij} = \min. \quad (14.5)$$

Поставленная задача не является задачей линейного программирования, так как величина T — не ли-

нейная функция переменных x_{ij} . Эту задачу можно свести к решению задач линейного программирования, но не одной, а нескольких. Однако, мы не будем заниматься таким сведением, а продемонстрируем расчетный метод, позволяющий непосредственно найти оптимальное решение ТЗ по критерию времени преобразованием транспортной таблицы. Этот метод называется «методом запрещенных клеток». Проще всего будет пояснить его на примере.

Пример. Условия ТЗ по критерию времени (запасы, заявки и времена перевозок) даны в табл. 14.2. Требуется найти план перевозок, укладывающийся в минимальное время, и указать это время.

Решение. Начальный план перевозок можно было бы, как мы и делали раньше, составить способом северо-западного угла, но мы видим что при этом получится (за счет клетки (1,1)) очень большое время $T=10$. Попытаемся этого избежать, «запретив» себе ставить отличные от нуля перевозки в клетки (1,1) и (4,1), где стоят самые большие времена в таблице ($t_{11} = 10$ и $t_{41} = 11$). Перечеркнем в табл. 14.3 эти клетки и составим новый план перевозок так, чтобы в первую очередь занимать клетки с малыми временами.

В плане (табл. 14.3) время окончания всех перевозок равно 8 — оно достигается в клетке (3, 2). Попробуем улучшить план, запретив себе для дальнейшего использования все клетки, где время $t_{ij} \geq 8$, и перечеркнув эти клетки. Перенесем 14 единиц груза по циклу, указанному в табл. 14.3; этим мы устраним перевозки со временем 8. Получится план, приведенный в табл. 14.4, со временем окончания $T = 7$ (клетка (3, 3)).

Чтобы еще улучшить этот план, нам нужно устранить перевозки из клетки (3, 3), запретив, кроме того, перенос в клетку (1, 5), содержащую то же время. 7 из 13 единиц, стоящих в клетке (3, 3), устраняем переносом по циклу, показанному в табл. 14.4. Новый план приведен в табл. 14.5.

Таблица 14.2

ПН ПО	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	Запасы a_i
A_1	10	8	5	6	7	25
A_2	5	6	8	8	9	34
A_3	4	8	7	8	5	42
A_4	11	4	5	8	9	23
Заявки b_j	21	37	40	11	15	124

Таблица 14.3

ПН ПО	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	Запасы a_1		
A_1	10	8	25	5	6	7	25	
A_2	21	5	6	2	8	6	9	34
A_3	4	8	13	7	8	5	15	42
A_4	11	23	4	5	8	9	23	
Заявки b_j	21	37	40	11	15		124	

Таблица 14.4

ПН ПО	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	Запасы a_1		
A_1	10	8	25	5	6	7	25	
A_2	7	5	6	2	8	6	9	34
A_3	14	4	8	13	7	8	5	42
A_4	11	23	4	5	8	9	23	
Заявки b_j	21	37	40	11	15		124	

Таблица 14.5

ПН ПО	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	Запасы a_1		
A_1	10	8	25	5	6	7	25	
A_2	5	21	6	2	6	6	9	34
A_3	21	4	8	6	7	8	5	42
A_4	11	16	4	7	5	8	9	23
Заявки b_j	21	37	40	11	15		124	

Попробуем избавиться от оставшихся 6 единиц в клетке (3,3) путем их циклического переноса. Для этого испробуем все возможные переносы из этой клетки, начинающиеся горизонтально или вертикально. Горизонтальный перенос в клетку (3,5) исключен, так как столбец 5 не содержит запрещенных клеток. Горизонтальный перенос в клетку (3,1) также исключен, так как для этого пришлось бы уменьшить перевозки в клетке (2,1), что невозможно.

Вертикальный перенос, как можно убедиться непосредственно, также не дает ни одного цикла, уменьшающего время перевозок.

Из этого мы делаем заключение, что план перевозок, данный в табл. 14.5, оптимален, и минимальное время перевозок равно $T_{min} = 7$.

ДИНАМИЧЕСКОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ

1. ЗАДАЧИ ДИНАМИЧЕСКОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Динамическое программирование (иначе, «динамическое планирование») представляет собой особый математический метод оптимизации решений, специально приспособленный к многошаговым (или многоэтапным) операциям.

Представим себе, что исследуемая операция O представляет собой процесс, развивающийся во времени и распадающийся на ряд «шагов» или «этапов». Некоторые операции расчлняются на шаги естественно: например, при планировании хозяйственной деятельности группы предприятий естественным шагом является хозяйственный год. В других операциях разделение на шаги приходится вводить искусственно; например, процесс вывода ракеты на космическую орбиту можно условно разбить на этапы, каждый из которых занимает какой-то временной отрезок Δt .

Процесс, о котором идет речь, является управляемым, т. е. на каждом шаге принимается какое-то решение, от которого зависит успех данного шага и операции в целом. Управление операцией складывается из ряда элементарных, «шаговых» управлений.

Рассмотрим пример естественно-многошаговой операции O . Пусть планируется деятельность группы (системы) промышленных предприятий $\Pi_1, \Pi_2, \dots, \Pi_k$ на некоторый период времени T , состоящий из m хозяйственных лет (рис. 3.1).

В начале периода на развитие системы предприятий выделяются какие-то основные средства K_0 , которые должны быть как-то распределены между предприятиями. В процессе функционирования системы выделенные средства частично расходуются (амортизируются). Кроме того, каждое предприятие за год приносит некоторый доход, зависящий от вложенных средств. В начале каждого хозяйственного года имеющиеся средства могут перераспределяться между предприятиями: каждому из них выделяется какая-то доля средств.

Ставится вопрос: *как нужно в начале каждого года распределять имеющиеся средства между предприятиями, чтобы суммарный доход от всей системы предприятий за весь период $T = m$ был максимальным?*

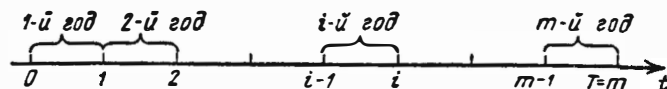


Рис. 3.1

Перед нами — типичная задача динамического программирования.

Рассматривается управляемый процесс — функционирование системы предприятий. Управлении процессом состоит в распределении (и перераспределении) средств. Шагом управления является выделение каких-то средств каждому из предприятий в начале хозяйственного года.

Пусть в начале i -го года предприятиям $\Pi_1, \Pi_2, \dots, \Pi_k$ выделяются соответственно средства:

$$X_i^{(1)}, X_i^{(2)}, \dots, X_i^{(k)}.$$

Совокупность этих значений представляет собой не что иное, как управление на i -м шаге:

$$U_i = (X_i^{(1)}, X_i^{(2)}, \dots, X_i^{(k)}). \quad (1.1)$$

Управление U операцией в целом представляет собой совокупность всех шаговых управлений:

$$U = (U_1, U_2, \dots, U_m). \quad (1.2)$$

Управление может быть хорошим или плохим, эффективным или неэффективным. Эффективность управления U оценивается тем же показателем W , что и эффективность операции в целом. В нашем примере показатель эффективности (целевая функция) представляет собой суммарный доход от всей системы предприятий за m лет. Он зависит от управления операцией U , т. е. от всей совокупности шаговых управлений:

$$W = W(U) = W(U_1, U_2, \dots, U_m). \quad (1.3)$$

Возникает вопрос: *как выбрать шаговые управления U_1, U_2, \dots, U_m для того, чтобы величина W обратилась в максимум?*

Поставленная задача называется задачей оптимизации управления, а управление, при котором показатель W достигает максимума, — оптимальным управлением. Будем обозначать оптимальное управление (в отличие от управления вообще U) буквой u . Оптимальное управление u многошаговым процессом состоит из совокупности оптимальных шаговых управлений:

$$u = (u_1, u_2, \dots, u_m). \quad (1.4)$$

Таким образом, перед нами стоит задача: определить оптимальное управление на каждом шаге u_i ($i=1, 2, \dots, m$) и, значит, оптимальное управление всей операцией u .

Заметим, что в нашем примере (управление финансированием системы предприятий) показатель эффективности W представляет собой сумму доходов за все отдельные годы (шаги):

$$W = \sum_{i=1}^m w_i, \quad (1.5)$$

где w_i — доход от всей системы предприятий за i -й год.

Показатель, обладающий таким свойством, называется аддитивным. Мы будем пока рассматривать только задачи с аддитивным показателем.

Поставим задачу динамического программирования в общем виде. Пусть имеется операция O с аддитивным показателем эффективности (1.5), распадающаяся (естественно или искусственно) на m шагов. На каждом шаге применяется какое-то управление U_i . Требуется найти оптимальное управление

$$u = (u_1, u_2, \dots, u_m),$$

при котором показатель эффективности

$$W = \sum_{i=1}^m w_i$$

обращается в максимум.

Поставленную задачу можно решать по-разному: или искать сразу оптимальное управление u , или же строить его постепенно, шаг за шагом, на каждом этапе расчета оптимизируя только один шаг. Обычно второй способ оптимизации оказывается проще, чем первый, особенно при большом числе шагов.

Такая идея постепенной, пошаговой оптимизации процесса и составляет суть метода динамического программирования.

С первого взгляда эта идея может показаться довольно тривиальной. В самом деле, чего, казалось бы, проще: если трудно оптимизировать операцию в целом, то разбить ее на ряд шагов; каждый такой шаг будет отдельной, маленькой операцией, оптимизировать которую уже нетрудно. Надо выбрать на каждом шаге такое управление, при котором эффективность этого шага максимальна. Не так ли?

Оказывается, вовсе не так! Принцип динамического программирования отнюдь не предполагает, что каждый шаг оптимизируется отдельно, независимо от других; что, выбирая шаговое управление, можно забыть обо всех других шагах. Напротив, шаговое управление должно выбираться с учетом всех его последствий в будущем. Планирование должно быть дальновидным, с учетом перспективы. Что толку, если мы выберем на данном шаге управление, при котором эффективность этого шага максимальна, если в дальнейшем это помешает нам получить хорошие результаты других шагов? Нет, выбирая управление на каждом шаге, надо делать это непременно «с оглядкой на будущее», иначе возможны серьезные ошибки.

Рассмотрим пример: пусть планируется работа группы промышленных предприятий, одни из которых заняты выпуском предметов потребления, другие же производят для этого машины. Задачей является получение за m лет максимального объема выпуска предметов потребления. Пусть планируются капиталовложения на первый год. Исходя из узких интересов данного шага (года), мы должны были бы все средства вложить в производство предметов потребления, пустить имею-

щиеся машины на полную мощность и добиться к концу года максимального объема продукции. Но правильным ли будет такое решение с точки зрения операции в целом? Очевидно, нет. Имея в виду будущее, необходимо выделить какую-то долю средств и на производство машин. При этом объем продукции за первый год, естественно, снизится, зато будут созданы условия, позволяющие увеличивать ее производство в последующие годы.

Таким образом, планируя многошаговую операцию, необходимо выбирать управление на каждом шаге с учетом его будущих последствий на еще предстоящих шагах.

Однако из этого правила есть исключение. Среди всех шагов существует один, который может планироваться попросту, без «оглядки на будущее». Какой это шаг? Очевидно, последний — после него других шагов нет. Этот шаг, единственный из всех, можно планировать так, чтобы он как таковой принес наибольшую выгоду. Спланировав оптимально этот последний шаг, можно к нему пристраивать предпоследний, к предпоследнему — пред-предпоследний и т. д.

Поэтому процесс динамического программирования разворачивается от конца к началу: раньше всех планируется последний, m -й шаг. А как его спланировать, если мы не знаем, чем кончился предпоследний? Очевидно, нужно сделать разные предположения о том, чем кончился предпоследний ($m-1$)-й шаг, и для каждого из них найти такое управление, при котором выигрыш (доход) на последнем шаге был бы максимален. Решив эту задачу, мы найдем условное оптимальное управление на m -м шаге, т. е. то управление, которое надо применить, если ($m-1$)-й шаг закончился определенным образом.

Предположим, что эта процедура выполнена и для каждого исхода ($m-1$)-го шага мы знаем условное оптимальное управление на m -м шаге и соответствующий ему условный оптимальный выигрыш. Теперь мы можем оптимизировать управление на предпоследнем, ($m-1$)-м шаге. Сделаем все возможные предположения о том, чем кончился пред-предпоследний, ($m-2$)-й шаг, и для каждого из этих предположений найдем такое управление на ($m-1$)-м шаге, чтобы выигрыш за последние два шага (из которых последний уже оптимизирован) был максимален. Далее оптимизируется управление на ($m-2$)-м шаге, и т. д.

Одним словом, на каждом шагу ищется такое управление, которое обеспечивает оптимальное продолжение процесса относительно достигнутого в данный момент состояния. Этот принцип выбора управления называется принципом оптимальности. Само управление, обеспечивающее оптимальное продолжение процесса относительно заданного состояния, называется условным оптимальным управлением на данном шаге.

Теперь предположим, что условное оптимальное управление на каждом шаге нам известно: мы знаем, что делать дальше, в каком бы состоянии ни был процесс к началу каждого шага. Тогда мы можем найти уже не «условное», а просто оптимальное управление на каждом шаге.

Действительно, пусть нам известно начальное состояние процесса, обозначим его S_0 . Теперь мы уже знаем, что делать на первом шаге: надо применить условное оптимальное управление, выработанное нами для первого шага, относящееся к состоянию S_0 . В результате этого управления после первого шага система перейдет в другое состояние S_1 ; но для этого состояния мы снова знаем условное оптимальное управление на втором шаге u_2 , и т. д. Таким образом мы найдем оптимальное управление процессом

$$u = (u_1, u_2, \dots, u_m),$$

приводящее к максимально возможному выигрышу W_{max} .

Таким образом, в процессе оптимизации управления методом динамического программирования многошаговой процесс «проходится» дважды:

— первый раз — от конца к началу, в результате чего находятся условные оптимальные управления на каждом шаге и оптимальный выигрыш (тоже условный) на всех шагах, начиная с данного и до конца процесса;

— второй раз — от начала к концу, в результате чего находятся (уже не условные) оптимальные шаговые управления на всех шагах операции.

Эти общие правила станут более понятными на конкретном примере.

2. ЗАДАЧА О НАБОРЕ ВЫСОТЫ И СКОРОСТИ ЛЕТАТЕЛЬНЫМ АППАРАТОМ

Одной из простейших задач, решаемых методом динамического программирования, является задача об оптимальном режиме набора высоты и скорости летательным аппаратом. С этой задачи мы и начнем изложение практических приемов динамического программирования, причем в целях методической ясности, условия задачи будут до крайности упрощены.

Пусть самолет (или другой летательный аппарат), находящийся на высоте H_0 и имеющий скорость V_0 , должен быть поднят на заданную высоту H_ω , а скорость его доведена до заданного значения V_ω (буквой ω мы будем отмечать концы процесса). Известен расход горючего, потребный для подъема аппарата с любой высоты H на любую другую $H' > H$ при неизменной скорости V ; известен также расход горючего, потребный для увеличения скорости от любого значения V до $V' > V$ при неизменной высоте H .

Требуется найти оптимальный режим набора высоты и скорости, при котором общий расход горючего будет минимальным.

Решение будем строить следующим образом. Для простоты допустим, что весь процесс набора высоты и скорости разделен на ряд последовательных шагов (этапов) и за каждый шаг самолет увеличивает только высоту или только скорость.

Будем изображать состояние самолета точкой S на плоскости VOH (рис. 3.2), где абсцисса — скорость самолета, а ордината — его высота.

Очевидно, существует множество возможных управлений — множество траекторий, по которым можно перевести точку S из S_0 в S_ω .

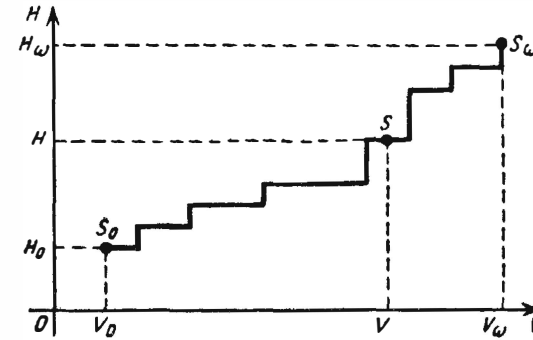


Рис. 3.2

Из всех этих траекторий нужно выбрать ту, на которой расход горючего будет минимальным.

Будем решать задачу методом динамического программирования. Для этого разделим интервал скоростей $V_\omega - V_0$ на n_1 равных частей:

$$\Delta V = \frac{V_\omega - V_0}{n_1},$$

а интервал высот $H_\omega - H_0$ — на n_2 равных частей:

$$\Delta H = \frac{H_\omega - H_0}{n_2}.$$

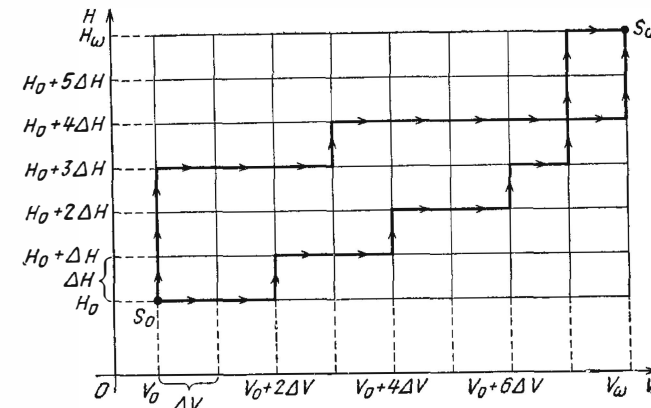


Рис. 3.3

Число частей n_1 и n_2 принципиального значения не имеет и может быть выбрано исходя из требований к точности решения задачи. Так как за каждый шаг мы можем менять только высоту или только скорость, то общее число m шагов будет:

$$m = n_1 + n_2.$$

Например, для случая, изображенного на рис. 3.3,

$$n_1 = 8, \quad n_2 = 6, \quad m = 14.$$

Любая траектория, переводящая точку S из S_0 в S_ω , состоит из 14 шагов, или этапов.

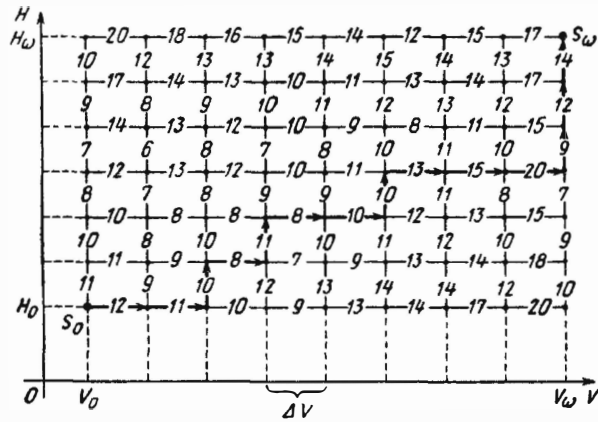


Рис. 3.4

Чтобы оптимизировать управление процессом набора высоты и скорости (т. е. выбрать ту траекторию, на которой расход горючего минимален), надо знать расход на каждом шаге (горизонтальном или вертикальном участке траектории). Предположим, что эти расходы заданы (см. рис. 3.4). На каждом отрезке записан расход горючего в условных единицах.

Любой траектории, переводящей S из S_0 в S_ω , соответствует вполне определенный расход горючего, равный сумме чисел, написанных на отрезках. Например, траектория, помеченная стрелками на рис. 3.4, дает расход горючего:

$$W = 12 + 11 + 10 + 8 + 11 + 8 + 10 + 10 + 13 + 15 + 20 + 9 + 12 + 14 = 163.$$

Нам нужно из всех траекторий выбрать ту, для которой расход горючего минимален. Можно было бы, конечно, перебрать все возможные траектории, но их слишком много. Гораздо проще будет решить задачу методом динамического программирования. Процесс состоит из 14 шагов; будем оптимизировать каждый шаг, начиная с последнего. Конечное состояние самолета (точка S_ω) нам задано; 14-й шаг непременно должен привести нас в эту точку. Посмотрим, откуда мы можем

переместиться в точку S_ω за один шаг, т. е. каковы возможные состояния самолета после предпоследнего, 13-го шага?

Рассмотрим отдельно правый верхний угол нашей прямоугольной сетки (рис. 3.5) с конечной точкой S_ω . В эту точку можно за один шаг переместиться из двух соседних точек: B_1 и B_2 , причем из каждой — только одним способом, так что выбора условного управления на последнем шаге у нас нет — оно единственно. Если предпоследний шаг привел нас в точку B_1 , мы должны двигаться по горизонтали (набирать скорость) и тратить 17 единиц горючего; если в точку B_2 — идти по вертикали (набирать высоту) и тратить 14 единиц. Запишем эти минимальные (в данном случае просто неизбежные) расходы в специальных кружках, которые поставим в точках B_1 , B_2 (рис. 3.6). Запись «17» в кружке у B_1 означает: «если мы пришли в B_1 , то минимальный расход

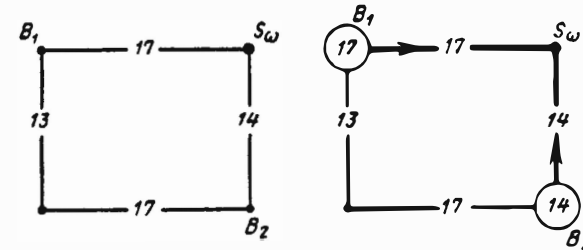


Рис. 3.5

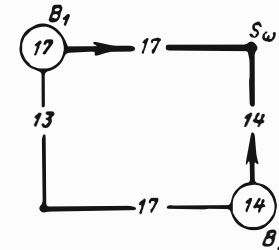


Рис. 3.6

горючего, переводящий нас в точку S_ω , равен 17 единицам». Аналогичный смысл имеет запись «14» в кружке у точки B_2 . Оптимальное управление, приводящее к этому расходу, помечено в каждом случае стрелкой, выходящей из кружка. Стрелка указывает то направление, по которому мы должны двигаться из данной точки, если в результате предыдущей нашей деятельности оказались в ней.

Таким образом, условное оптимальное управление на последнем, 14-м шаге, найдено для любого (B_1 или B_2) исхода тринадцатого шага. Для каждого из этих исходов найден, кроме того, условный минимальный расход горючего, за счет которого можно переместиться из данной точки в S_ω .

Перейдем к планированию предпоследнего, 13-го шага. Для этого рассмотрим все возможные результаты пред-предпоследнего, 12-го шага. После этого шага мы можем оказаться только в одной из точек C_1 , C_2 , C_3 (рис. 3.7). Из каждой такой точки мы должны найти оптимальный путь в точку S_ω и соответствующий этому пути минимальный расход горючего.

Если мы оказались в точке C_1 , то выбора нет: мы должны перемещаться по горизонтали и тратить $15 + 17 = 32$ единицы горючего. Этот расход мы запишем в кружке при точке C_1 , а оптимальное (в данном случае единственное) управление из точки C_1 снова помечим стрелкой.

Для точки C_2 выбор есть: из нее можно идти в S_ω либо через B_1 , либо через B_2 . В первом случае мы израсходуем $13 + 17 = 30$ единиц

горючего, во втором $17 + 14 = 31$ единицу. Значит, оптимальный путь из C_2 в S_ω начинается вертикальным участком (отметим это вертикальной стрелкой), а минимальный расход горючего равен 30 (это число мы запишем в кружке при точке C_2).

Наконец, для точки C_3 путь в S_ω опять единственный: по вертикали. Обходится он в $12 + 14 = 26$ единиц; эту величину (26) мы и запишем в кружке при C_3 , а стрелкой пометим оптимальное управление.

Таким образом, переходя от точки к точке справа налево и сверху вниз (от конца процесса к его началу), можно для каждой узловой точки рис. 3.4 выбрать условное оптимальное управление на следующую

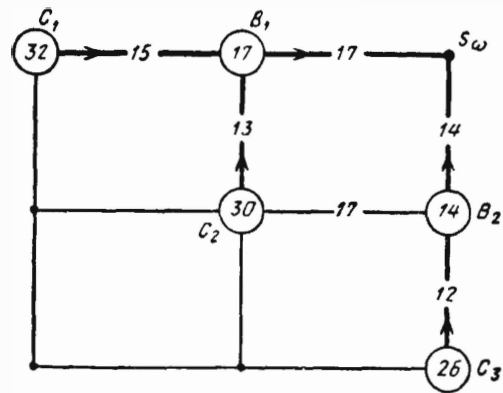


Рис. 3.7

шем шаге, т. е. направление, ведущее из данной точки в точку S_ω с минимальным расходом горючего, и записать в кружке у данной точки этот минимальный расход. Чтобы найти в узловой точке оптимальное управление, нужно просмотреть два возможных пути из этой точки: направо и вверх, и для каждого из них найти сумму расхода горючего на этом шаге и минимального расхода горючего на оптимальном продолжении пути, уже построенном для следующей точки, куда ведет данный путь. Из двух путей (вправо и вверх) выбирается тот, для которого эта сумма меньше (если суммы равны, выбирается любой путь).

В результате выполнения такой процедуры, из каждой узловой точки (см. рис. 3.8) проводится стрелка, указывающая условное оптимальное управление, а в кружке записывается минимальная стоимость перехода из этой точки в S_ω (условная минимальная стоимость). Рано или поздно процесс заканчивается, дойдя до исходной точки S_0 .

Из этой точки, как и из любой другой, идет стрелка, указывающая, куда надо из нее перемещаться, а в кружке записан минимальный расход горючего. На этом этап условной оптимизации управления заканчивается, и начинается завершающий этап безусловной оптимизации — построение оптимального управления на каждом шаге от первого до по-

следнего. При этом мы строим оптимальную траекторию точки S , перемещаясь по стрелкам из S_0 в S_ω .

На рис. 3.8 показан окончательный результат такой процедуры — оптимальная траектория отмечена жирными кружками и дополнительными стрелками. Число «139», стоящее у точки S_0 , означает минимальный расход горючего W_{min} , меньше которого нельзя получить ни на какой траектории.

Таким образом, поставленная задача решена, и оптимальное управление процессом найдено. Оно состоит в следующем:

— на первом шаге увеличивать только скорость, сохраняя неизменной высоту H_0 , и довести скорость до $V_0 + \Delta V$;

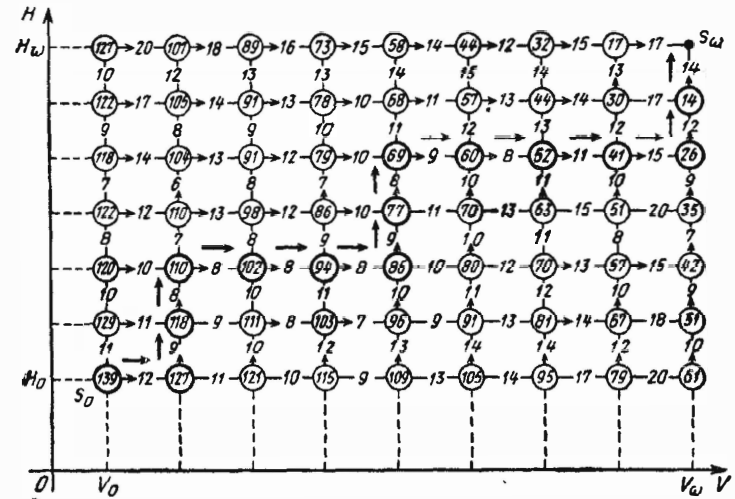


Рис. 3.8

— на втором и третьем шагах увеличить высоту до $H_0 + 2\Delta H$, сохраняя скорость неизменной;

— на четвертом, пятом и шестом шагах снова набирать скорость, пока она не станет равной $V_0 + 4\Delta V$;

— на седьмом и восьмом шагах набирать высоту и довести ее до $H_0 + 4\Delta H$;

— на девятом, десятом, одиннадцатом и двенадцатом шагах снова набирать скорость и довести ее до заданного конечного значения V_ω ;

— на последних двух шагах (тринадцатом и четырнадцатом) набирать высоту до заданного значения H_ω .

Нетрудно на ряде примеров убедиться, что найденное управление действительно является оптимальным и на любой другой траектории расход горючего будет больше (или, по крайней мере, не меньше).

Рассмотренная здесь задача оптимального набора высоты и скорости является простейшим примером, на котором часто демонстрируют основную идею динамического программирования. Действительно,

в нашей упрощенной постановке задачи на каждом шагу нам нужно выбирать только между двумя управлениями: «набирать высоту» и «набирать скорость». Именно в связи с таким элементарно простым набором управлений задача очень легко решается до конца.

Такая намеренно упрощенная постановка задачи не вполне соответствует действительности. Фактически летательный аппарат может набирать (а зачастую и набирает) высоту и скорость одновременно.

В этом случае для каждой точки на плоскости V_0H точка S может двигаться под любым углом в пределах некоторого сектора (рис. 3.9), причем каждому направлению соответствует свой расход горючего на единицу длины пройденного пути (разумеется, не реального пути, а условного — на плоскости V_0H).

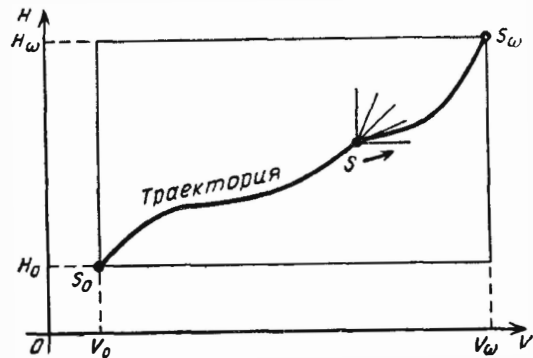


Рис. 3.9

Чтобы решить такую задачу динамического программирования, мы должны как-то установить «шаги» или «этапы» процесса. Нам здесь уже неудобно будет пользоваться тем разделением на этапы, которое мы выбрали для предыдущей задачи. Удобнее будет разбить отрезок $\overline{S_0 S_\omega}$ на m частей, провести через точки деления ряд опорных прямых $(0) - (0), (1) - (1), \dots, (i) - (i), \dots, (m) - (m)$, перпендикулярных $\overline{S_0 S_\omega}$, и предположить, что «шаг» состоит из перехода точки с одной из опорных прямых на другую (рис. 3.10). Если взять опорные прямые достаточно близкими, можно допустить, что каждый участок траектории, от одной опорной прямой до следующей, — прямолинеен. Разумеется, направление каждого такого участка не должно выходить за пределы «разрешенного сектора», определяемого «розой направлений» на рис. 3.10.

Расход горючего на прямолинейном участке определяется точкой, где он начинается, направлением участка и его длиной.

Схема решения такой задачи методом динамического программирования несколько сложнее, чем вышеописанная «ступенчатая» схема, но в принципе отличается от нее только тем, что на каждом шаге приходится выбирать не между двумя направлениями, а между несколькими.

Начинается процесс с последнего шага (рис. 3.11). Прежде всего, определяются возможные положения точки на прямой $(m-1) - (m-1)$, из которых она может прийти в S_ω за один шаг. Это, очевидно, все положения от A до B (так как выбранная нами роза направлений предполагает, что скорость и высота в процессе набора убывать не могут). Зададимся на отрезке AB рядом возможных положений точки S , для каждого из них построим прямолинейный участок пути к точке S_ω и подсчитаем на этом участке расход горючего. Движение по этому

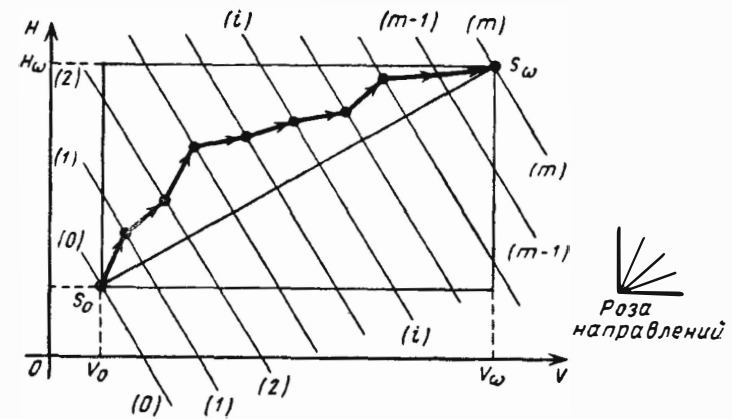


Рис. 3.10

участку и будет (вынужденным) оптимальным управлением, в расход — (неизбежным) минимальным расходом. Таким образом, условная оптимизация последнего шага выполнена. Перейдем к предпоследнему шагу. Зададимся рядом точек на отрезке \overline{CD} прямой $(m-2) - (m-2)$.

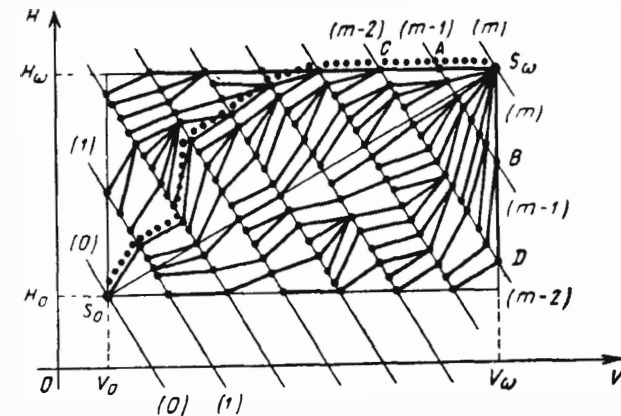


Рис. 3.11

Для каждой из этих точек выявим оптимальное управление, т. е. то направление дальнейшего следования, двигаясь по которому мы истратим на двух последних шагах минимум горючего. Чтобы найти это направление, мы должны для каждого из возможных отрезков, соединяющих данную точку с прямой $(m-1) - (m-1)$, подсчитать расход горючего и сложить его с (уже оптимизированным) расходом на последнем шаге. Из всех направлений в качестве оптимального выбирается то, для которого этот суммарный расход минимален.

Далее переходим к оптимизации $(m-2)$ -го шага, и т. д. На каждом этапе ищется такое направление движения из каждой точки, для которого расход горючего на ближайшем шаге плюс (уже оптимизированный) расход горючего на всех оставшихся до конца шагах достигает минимума. Этот процесс условной оптимизации продолжается до тех пор, пока мы не дойдем до первого шага, начало которого S_0 уже не надо варьировать — оно известно. Таким образом определяется минимальный расход горючего на всю операцию, начиная от точки S_0 . Далее, двигаясь из каждой точки, начиная от S_0 , по оптимальному пути, находим оптимальный режим набора высоты и скорости (отмечен на рис. 3.11 точками).

Заметим, что описанная методика построения оптимальной траектории точки S (оптимального управления) отнюдь не относится только к случаю набора высоты и скорости. По осям могут откладываться не высота и скорость, а любые другие величины, например:

- декартовы (полярные) координаты движущейся точки;
- вес и три составляющие скорости ракеты;
- количества средств, вкладываемые в разные отрасли производства и т. п.

Равным образом, максимизируемый (минимизируемый) показатель эффективности W может быть любой природы, например:

- расход материальных средств на систему мероприятий;
- время перемещения из точки S_0 в S_ω ;
- доход, приносимый группой предприятий, и т. д.

Выбор системы координат, в которой решается задача, и способ членения операции на шаги могут быть самыми разными; их конкретные формы диктуются, главным образом, соображениями удобства расчетной схемы, а иногда — наглядностью геометрической интерпретации.

3. ОБЩАЯ ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ ДИНАМИЧЕСКОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ. ИНТЕРПРЕТАЦИЯ УПРАВЛЕНИЯ В ФАЗОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

После того, как рассмотрены некоторые конкретные задачи динамического программирования, дадим общую постановку таких задач и сформулируем принципы их решения. При этом мы будем пользоваться общими, символическими, а не расчетными формулами;

каждая из них выражает, что от чего зависит, но не дает возможности что-либо вычислить. Тем не менее, написание таких общих формул очень полезно для уяснения сути метода.

Рассматривается следующая общая задача. Имеется некоторая физическая система S , которая с течением времени меняет свое состояние, т. е. в системе S происходит какой-то процесс. Мы можем управлять этим процессом, т. е. тем или другим способом влиять на состояние системы. Такую систему S мы будем называть управляемой системой, а способ нашего воздействия на нее — управлением U . Напомним, что буквой U обозначается не какая-то одна величина, а целая совокупность величин, векторов или функций, характеризующих управление.

Предположим, что с процессом связана какая-то наша заинтересованность, выражающаяся численно величиной W , которую мы будем называть «выигрышем». Мы хотим так управлять процессом, чтобы выигрыш был максимален*).

Очевидно, выигрыш зависит от управления:

$$W = W(U). \quad (3.1)$$

Мы хотим найти такое управление (оптимальное)

$$U = u,$$

при котором выигрыш максимален:

$$W_{max} = \max_U \{W(U)\}. \quad (3.2)$$

Запись \max_U читается «максимум по U » и означает: «максимальное из всех значений $W(U)$ при всех возможных управлениях U ». То из управлений, при котором достигается этот максимум, и есть оптимальное управление u .

Таким образом, поставлена общая задача оптимизации управления физической системой. Однако она поставлена еще не полностью. Обычно в таких задачах должны быть учтены некоторые условия, накладываемые на начальное состояние системы S_0 и конечное состояние S_ω .

В простейших случаях эти состояния могут быть полностью заданы (см., например, § 2). В других случаях они могут быть заданы не полностью, а только ограничены какими-то условиями, т. е. указаны область начальных состояний \tilde{S}_0 и область конечных состояний \tilde{S}_ω .

Например, в задаче, подобной рассмотренной в предыдущем параграфе, может оказаться, что летательный аппарат надо привести не в точно заданное состояние S_ω , а в какую-то область на плоскости VOH (скажем, достигнуть высоты, не меньше заданной, имея при этом

* Здесь и в дальнейшем для краткости будем говорить только о максимизации W ; подразумевается, что «максимум» в любом случае может быть заменен на «минимум»

скорость, заключенную в определенных пределах); начальная скорость V_0 также может быть не в точности задана, а ее можно произвольно выбирать в некоторых границах.

Тот факт, что начальное состояние системы S_0 входит в область \tilde{S}_0 , мы будем записывать с помощью принятого в математике «знака включения» \in :

$$S_0 \in \tilde{S}_0.$$

Аналогично, для конечного состояния системы:

$$S_\omega \in \tilde{S}_\omega.$$

Таким образом, общая задача оптимального управления формулируется следующим образом:

Из множества возможных управлений U найти такое оптимальное управление u , которое переводит физическую систему S из начального состояния $S_0 \in \tilde{S}_0$ в конечное состояние $S_\omega \in \tilde{S}_\omega$ так, чтобы при этом выигрыш W обращался в максимум.

Дадим процессу управления геометрическую интерпретацию. Для этого нам придется несколько расширить наши привычные геометрические представления и ввести понятие о так называемом фазовом пространстве (или пространстве состояний).

Состояние S системы S , которой мы управляем, всегда можно описать с помощью того или другого количества численных параметров. Такими параметрами могут быть, например:

- координаты тела и его скорость;
- количества средств, вложенных в отрасль производства;
- численности группировок войск

и т. д.

Эти параметры мы будем называть фазовыми координатами системы S , а состояние системы изображать точкой S с этими координатами в некотором условном фазовом пространстве (пространстве состояний). Размерность этого пространства зависит от числа фазовых координат. Если состояние системы характеризуется одним параметром ξ , то фазовое пространство будет



Рис. 3.12

одномерным и представляет собой участок оси абсцисс (рис. 3.12), а управление интерпретируется законом движения точки S из исходного состояния $S_0 \in \tilde{S}_0$ в конечное состояние $S_\omega \in \tilde{S}_\omega$. Если состояние системы характеризуется двумя параметрами ξ_1 и ξ_2 (например, скоростью и высотой, как в § 2, гл. 3), то фазовое пространство будет дву-

мерным (плоскость или ее часть), а процесс будет изображаться перемещением точки S из $S_0 \in \tilde{S}_0$ в $S_\omega \in \tilde{S}_\omega$ по определенной траектории на фазовой плоскости $\xi_1 O \xi_2$. Траектория эта и будет изображать управление (рис. 3.13).

Если состояние системы S характеризуется тремя координатами ξ_1, ξ_2, ξ_3 (например, абсцисса, скорость и ускорение), то фазовым пространством будет трехмерное пространство или его часть, а управляемый процесс изобразится перемещением точки S по пространственной кривой (рис. 3.14).

Если число параметров, характеризующих состояние системы, больше трех, то геометрическая интерпретация теряет свою наглядность, но геометрическая терминология продолжает оставаться удобной. В общем случае, когда состояние системы S описывается n параметрами

$$\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n,$$

мы будем говорить о точке S в n -мерном фазовом пространстве и о ее перемещении из области \tilde{S}_0 в область \tilde{S}_ω по такой траектории, для которой выигрыш W максимален.

Выбор фазовых координат ξ_1, ξ_2, \dots , определяющих состояние системы, и соответствующей геометрической интерпретации может быть тем или другим, в зависимости от удобства построения расчетной схемы. В некоторых случаях в качестве одной из фазовых координат, характеризующих состояние системы S , бывает удобно выбрать время t , протекшее с начала процесса; тогда этапы (шаги) будут наглядно видны в фазовом пространстве как перемещения точки S с одной из плоскостей (гиперплоскостей) $t = \text{const}$ на другую (рис. 3.15).

Предположим, что фазовые координаты ξ_1, ξ_2, \dots , определяющие состояние системы S , выбраны. Общая задача оптимизации управления в геометрических терминах может быть сформулирована так:

Найти такое управление u (оптимальное управление), под влиянием которого точка S фазового пространства переместится из начальной области \tilde{S}_0 в конечную область \tilde{S}_ω так, что при этом выигрыш W обратится в максимум.

Поставленную общую задачу можно решать различными способами — отнюдь не только методом динамического программирования. Характерным для динамического программирования является определенный методический прием, состоящий в следующем: процесс перемещения точки S из \tilde{S}_0 в \tilde{S}_ω разделяется на несколько шагов (этапов) (см. рис. 3.16), и затем проводится пошаговая оптимизация управления и выигрыша.

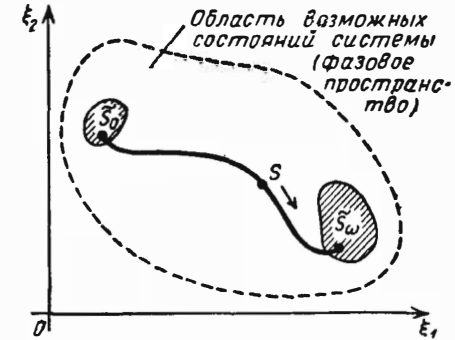


Рис. 3.13

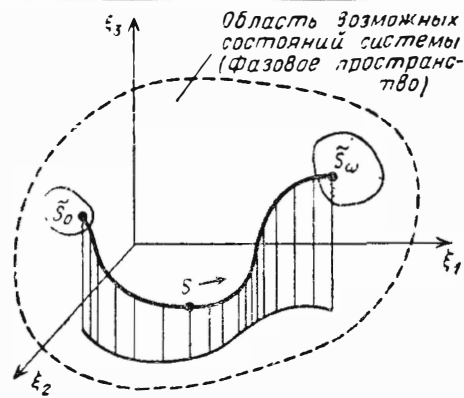


Рис. 3.14

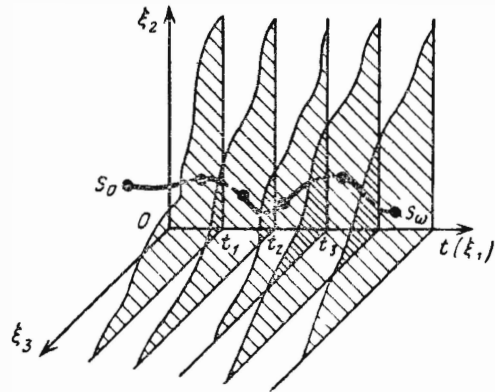


Рис. 3.15

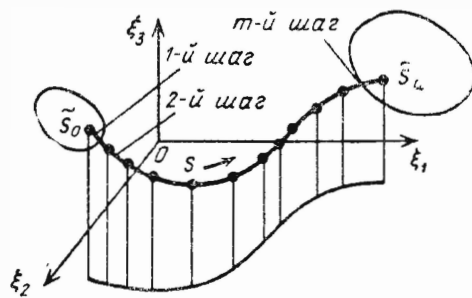


Рис. 3.16

Процедура построения оптимального управления методом динамического программирования распадается на две стадии: предварительную и окончательную. На предварительной стадии определяется для каждого шага условное оптимальное управление, зависящее от состояния S системы (достигнутого в результате предыдущих шагов), и условный оптимальный выигрыш на всех оставшихся шагах, начиная с данного, также зависящий от состояния S .

На окончательной стадии определяется для каждого шага окончательное (безусловное) оптимальное управление.

Предварительная (условная) оптимизация производится по шагам, в обратном порядке: от последнего шага к первому; окончательная (безусловная) оптимизация — также по шагам, но в естественном порядке: от первого шага к последнему.

Из двух стадий оптимизации несравненно более важной и трудоемкой является первая. После окончания первой стадии выполнение второй трудности не представляет: остается только «прочитать» рекомендации, уже заготовленные на первой стадии.

В основе поэтапной процедуры лежит уже упоминавшийся принцип оптимальности, состоящий в следующем:

Каково бы ни было состояние S системы в результате какого-то числа шагов, мы должны выбирать управление на ближайшем шаге так, чтобы оно, в совокупности с оптимальным управлением на всех последующих шагах, приводило к максимальному выигрышу на всех оставшихся шагах, включая данный.

Запишем принципиальную структуру обеих стадий оптимизации с помощью общих символических формул. «Символическими» мы их называем потому, что в них будут фигурировать функции, аргументами которых будут не числа, а «состояния» и «управления», каждое из которых в общем случае характеризуется не одним числом, а целой совокупностью чисел или функцией.

Введем некоторые обозначения. Условимся обозначать

$$W_i(S) \quad (3.3)$$

условный оптимальный выигрыш, получаемый на всех последующих шагах, начиная с i -го и до конца; он достигается при оптимальном управлении на всех этих шагах и равен максимальному выигрышу, который можно получить на всех этих шагах вместе, если в их начале система находится в состоянии S . Коротко мы будем называть величину $W_i(S)$ условным оптимальным выигрышем.

Условимся также обозначать

$$u_i(S) \quad (3.4)$$

условное оптимальное управление на i -м шаге, которое, совместно с оптимальным управлением на всех последующих шагах, обращает выигрыш на всех оставшихся шагах, начиная с данного, в максимум. Коротко будем называть управление $u_i(S)$ условным оптимальным управлением.

Поставим задачу: определить функции $W_i(S)$ и $u_i(S)$, т. е. условный оптимальный выигрыш и условное оптимальное управление, для всех шагов ($i = 1, 2, \dots, m$).

Рассмотрим i -й шаг процесса управления. Пусть в результате $i - 1$ предыдущих шагов система пришла в состояние S , и мы выбираем какое-то управление U_i на i -м шаге. Если мы его применим, то, во-первых, получим на данном i -м шаге какой-то выигрыш w_i ; он зависит как от состояния системы S , так и от примененного управления U_i :

$$w_i = w_i(S, U_i). \quad (3.5)$$

Кроме того, мы получим какой-то выигрыш на всех оставшихся шагах. Соответственно принципу оптимальности, будем считать, что он максимален. Чтобы найти этот выигрыш, мы должны знать состояние системы перед следующим, $(i + 1)$ -м шагом. Под влиянием управления U_i на i -м шаге система из состояния S (в котором она была перед этим шагом) перейдет в какое-то новое состояние S' . Это новое состояние будет зависеть, опять-таки, от прежнего состояния S и примененного управления U_i :

$$S' = \varphi_i(S, U_i). \quad (3.6)$$

Запишем выигрыш, который мы получим на всех шагах, начиная с i -го, если на i -м шаге будет применено любое (вообще говоря, не оптимальное) управление U_i , а на всех последующих (от $(i + 1)$ -го до m -го оптимальное управление. Этот выигрыш будет равен выигрышу w_i на данном, i -м шаге, плюс условный оптимальный выигрыш на всех последующих шагах, начиная с $(i + 1)$ -го, определяемый для нового состояния системы S' ; обозначим такой «полуоптимальный» выигрыш через $\bar{W}(S, U_i)$:

$$\bar{W}_i(S, U_i) = w_i(S, U_i) + W_{i+1}(S'),$$

или, учитывая (3.6),

$$\bar{W}_i(S, U_i) = w_i(S, U_i) + W_{i+1}(\varphi_i(S, U_i)). \quad (3.7)$$

Теперь, в соответствии с принципом оптимальности, мы должны выбрать такое управление $U_i = u_i$, при котором величина (3.7) максимальна и достигает значения:

$$W_i(S) = \max_{U_i} \{w_i(S, U_i) + W_{i+1}(\varphi_i(S, U_i))\}. \quad (3.8)$$

То управление

$$U_i = u_i(S),$$

при котором этот максимум достигается, и есть условное оптимальное управление на i -м шаге, а сама величина (3.8) — условный оптимальный выигрыш (на всех шагах, начиная с i -го и до конца).

В уравнении (3.8) функции $w_i(S, U_i)$ и $\varphi_i(S, U_i)$ известны. Неизвестными остаются функции $W_i(S)$ и $W_{i+1}(S)$; из них первая выражается через вторую.

Формула (3.8) представляет собой так называемое основное функциональное уравнение динамического программирования; она позволяет определить функцию $W_i(S)$, если известна следующая за ней по порядку функция $W_{i+1}(S)$.

Что касается функции $W_m(S)$ (условный оптимальный выигрыш на последнем шаге), то она может быть определена очень просто. Действительно, за последним шагом нет никакого другого, и нужно попросту обратиться в максимум выигрыш на последнем шаге:

$$W_m(S) = \max_{U_m} \{w_m(S, U_m)\}. \quad (3.9)$$

Максимум в формуле (3.9) берется не по всем возможным управлениям U_m на m -м шаге, а только по тем, которые приводят систему в заданную область конечных состояний \bar{S}_ω , т. е. по тем, для которых

$$\varphi_m(S, U_m) \in \bar{S}_\omega.$$

Это всегда надо иметь в виду при пользовании формулой (3.9).

То управление $U_m = u_m(S)$, при котором достигается максимум выигрыша (3.9), и есть условное оптимальное управление на последнем шаге.

Теперь можно, одно за другим, построить всю цепочку условных оптимальных управлений. Действительно, зная $W_m(S)$, можно, по общей формуле (3.8), полагая в ней $i + 1 = m$, найти функцию $W_{m-1}(S)$ и соответствующее условное оптимальное управление $u_{m-1}(S)$; затем $W_{m-2}(S)$ и $u_{m-2}(S)$ и так далее, вплоть до последнего от конца (первого) шага, для которого будут найдены функции $W_1(S)$ и $u_1(S)$. Функция $W_1(S)$ есть условный оптимальный выигрыш за всю операцию, т. е. на всех шагах, начиная с первого и до последнего (если первый шаг начинается с определенного состояния S системы S).

Таким образом, предварительная оптимизация закончена — найдены условный оптимальный выигрыш и условное оптимальное управление для каждого шага.

Теперь перейдем ко второй стадии оптимизации — нахождению безусловного (окончательного) оптимального управления

$$u = (u_1, u_2, \dots, u_m).$$

Начнем в первого шага. Предположим, что исходное состояние S_0 нам полностью известно. Подставим это состояние S_0 в формулу для условного оптимального выигрыша $W_1(S)$. Получим

$$W_{max} = W_1(S_0). \quad (3.10)$$

Оптимальное управление на первом шаге найдется одновременно с (3.10):

$$u_1 = u_1(S_0).$$

Далее, зная исходное состояние S_0 и управление u_1 , можем найти состояние S_1^* системы после первого шага:

$$S_1^* = \varphi_1(S_0, u_1). \quad (3.11)$$

Зная это состояние S_1^* , можно найти оптимальное управление на втором шаге $u_2 = u_2(S_1^*)$, затем $S_2^* = \varphi_2(S_1^*, u_2)$ и т. д. Таким образом, идя по цепочке

$$S_0 \rightarrow u_1(S_0) \rightarrow S_1^* \rightarrow u_2(S_1^*) \rightarrow \dots \rightarrow S_{m-1}^* \rightarrow u_m(S_{m-1}^*) \rightarrow S_m^*. \quad (3.12)$$

мы определим, одно за другим, все шаговые оптимальные управления и найдем состоящее из них оптимальное управление операцией в целом

$$u = (u_1, u_2, \dots, u_m),$$

а также (если оно не было в точности задано заранее) конечное состояние системы:

$$S_\omega = S_m^*. \quad (3.13)$$

Разумеется, это состояние будет принадлежать области \tilde{S}_ω , потому что мы выбирали управление на последнем шаге именно так, чтобы это условие было соблюдено:

$$S_m^* = \varphi(S_{m-1}^*, u_m) \in \tilde{S}_\omega$$

Предположим теперь, что исходное состояние системы известно нам не полностью, а только ограничено условием:

$$S_0 \in \tilde{S}_0.$$

Тогда нужно найти такое (оптимальное) начальное состояние S_0^* , при котором условный оптимальный выигрыш за все шаги максимален:

$$W_{max} = \max_{S \in \tilde{S}_0} \{W_1(S)\}. \quad (3.14)$$

То начальное состояние S_0^* , для которого этот максимум достигается, и должно быть выбрано в качестве исходного. Далее оптимальное управление строится совершенно так же, как и раньше, по цепочке:

$$S_0^* \rightarrow u_1(S_0^*) \rightarrow S_1^* \rightarrow u_2(S_1^*) \rightarrow \dots \rightarrow S_{m-1}^* \rightarrow u_m(S_{m-1}^*) \rightarrow S_m^*, \quad (3.15)$$

что и дает оптимальное управление операцией в целом:

$$u = (u_1, u_2, \dots, u_m)$$

и конечное состояние системы $S_\omega = S_m^*$, если оно заранее не было полностью определено.

На этом процесс оптимизации заканчивается.

В данном параграфе мы пользовались системой символических формул, которые, разумеется, непригодны для непосредственного вычисления по ним: в этих формулах не указан не только конкретный вид функций $\omega_i(S, U_i)$ и $\varphi_i(S, U_i)$, но даже и что такие аргументы S и U_i — числа, векторы, или же функции и т. п. Тем не менее, система

символических формул очень полезна для организации процедуры динамического программирования. При решении любой задачи динамического программирования удобно придерживаться раз навсегда установленного, стандартного порядка действий. Этот порядок можно установить, например, в такой форме.

1. Выбрать способ описания процесса, т. е. параметры, характеризующие состояние системы, фазовое пространство и способ членения операции на «шаги».

2. Записать выигрыш на i -м шаге в зависимости от состояния системы S в начале этого шага и управления U_i :

$$\omega_i = \omega_i(S, U_i).$$

3. Записать для i -го шага функцию, выражающую изменение состояния системы от S к S' под влиянием управления U_i :

$$S' = \varphi_i(S, U_i).$$

4. Записать основное функциональное уравнение (3.8), выражающее функцию $W_i(S)$ через $W_{i+1}(S)$:

$$W_i(S) = \max_{U_i} \{ \omega_i(S, U_i) + W_{i+1}(\varphi_i(S, U_i)) \}. \quad (3.16)$$

5. Найти функцию $W_m(S)$ (условный оптимальный выигрыш) для последнего шага:

$$W_m(S) = \max_{U_m} \{ \omega_m(S, U_m) \} \quad (3.17)$$

(максимум берется только по тем управлениям, которые приводят систему в заданную область конечных состояний \tilde{S}_ω) и соответствующее ей условное оптимальное управление на последнем шаге:

$$u_m(S).$$

6. Зная $W_m(S)$ и пользуясь уравнением (3.16) при конкретном виде функций $\omega_i(S, U_i)$, $\varphi_i(S, U_i)$, найти одну за другой функции

$$W_{m-1}(S), W_{m-2}(S), \dots, W_1(S)$$

и соответствующие им условные оптимальные управления:

$$u_{m-1}(S), u_{m-2}(S), \dots, u_1(S).$$

7. Если начальное состояние S_0 задано, найти оптимальный выигрыш $W_{max} = W_1(S_0)$ и далее безусловные оптимальные управления (и, если надо, конечное состояние S_m^*) по цепочке:

$$S_0 \rightarrow u_1(S_0) \rightarrow S_1^* \rightarrow u_2(S_1^*) \rightarrow \dots \rightarrow S_{m-1}^* \rightarrow u_m(S_{m-1}^*) \rightarrow S_m^*.$$

8. Если начальное состояние S_0 не задано, а лишь ограничено условием

$$S_0 \in \tilde{S}_0,$$

найти оптимальное начальное состояние S_0 , при котором выигрыш, $W_1(S)$ достигает максимума

$$W_{max} = \max_{s \in S_0} \{W_1(S)\}$$

и далее, по цепочке, безусловные оптимальные управления.

В дальнейшем, решая различные задачи динамического программирования, мы будем придерживаться этой последовательности действий.

В заключение отметим следующее. В принципе процесс динамического программирования может разворачиваться (хотя и не так естественно) и в направлении, обратном тому, которое мы приняли: условные оптимальные управления могут отыскиваться в направлении от первого шага к последнему, а безусловные — от последнего к первому. Например, в задаче о наборе высоты и скорости, которую мы рассматривали в предыдущем параграфе, ничто не мешает нам строить процесс не от правого верхнего угла к нижнему левому, а наоборот, и результат при этом получится тот же самый. Это относится к любой задаче многоэтапного планирования. Можно сначала планировать первый шаг, при условии, что он приведет систему в состояние S , затем второй, так чтобы выигрыш за два первых шага (первый — уже оптимизированный) был максимален, и т. д. После того, как все условные оптимальные управления и соответствующие выигрыши будут известны, можно найти безусловные оптимальные управления на всех шагах. Вычислительно эта схема ничуть не хуже предложенной выше, но в смысле удобства изложения и понимания уступает ей. Поэтому мы всюду будем придерживаться вышеизложенной схемы: условные оптимальные управления находятся в обратном порядке, от последнего шага к первому, а безусловные — в прямом порядке, от первого шага к последнему.

4. ЗАДАЧИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ РЕСУРСОВ

На практике очень часто встречаются многоэтапные операции, связанные с разумным распределением тех или других ресурсов. Речь может идти, например, о распределении денежных средств, сырья, рабочей силы по предприятиям, отраслям промышленности или этапам отдельных работ или, скажем, о распределении снарядов по целям, общего веса G , отведенного на техническое устройство, по его отдельным агрегатам, и т. д. — вообще, о распределении всевозможных средств по каким-то категориям мероприятий.

Начнем с наиболее простой, «классической» задачи распределения ресурсов, на которой легко будет продемонстрировать особенности подобных задач.

Задача ставится следующим образом.

Имеется определенное начальное количество средств K_0 (необязательно в денежной форме), которые мы должны распределять в течение m лет между двумя отраслями производства I и II. Средства,

вложенные в каждую отрасль, приносят за год определенный доход, зависящий от объема вложений. Если мы вложим средства X в отрасль I, то за год получим доход, равный $f(X)$; при этом вложенные средства частично уменьшаются (амортизируются, тратятся), так что к концу года от них остается какая-то часть:

$$\varphi(X) < X.$$

Аналогично, средства Y , вложенные в отрасль II, приносят за год доход $g(Y)$ и уменьшаются до

$$\psi(Y) < Y.$$

По истечении года, оставшиеся от K_0 средства заново распределяются между отраслями I и II. Новых средств извне не поступает, и в производство вкладываются все оставшиеся в наличии средства; доход в производство не вкладывается, а накапливается отдельно. Требуется найти такой способ управления ресурсами (какие средства, в какие годы и в какую отрасль вкладывать), при котором суммарный доход от обеих отраслей за m лет будет максимальным.

Будем решать задачу методом динамического программирования, по развернутой выше стандартной схеме.

1. Система S в данном случае — две отрасли со вложенными в них средствами. Она характеризуется двумя параметрами X и Y , выражающими количества средств в отраслях I и II соответственно. Естественным «шагом» (этапом) процесса является хозяйственный год. В процессе управления величины X и Y меняются в зависимости от двух причин:

- перераспределение средств между отраслями в начале каждого года;
- уменьшение (трата) средств за год, сказывающееся в конце каждого года.

Управлением U_i на i -м шаге будут количества средств X_i, Y_i , вкладываемые в отрасли I и II на этом шаге. Управление операцией U состоит из совокупности всех шаговых управлений:

$$U = (U_1, U_2, \dots, U_m). \quad (4.1)$$

Нам нужно найти такое (оптимальное) управление

$$u = (u_1, u_2, \dots, u_m), \quad (4.2)$$

при котором суммарный доход, приносимый обеими отраслями за m лет $W = \sum_{i=1}^m w_i$, был максимальным:

$$W = W_{max}. \quad (4.3)$$

2. Состояние системы перед i -м шагом характеризуется одним параметром K — количеством средств, сохранившихся после предыдущих $i - 1$ шагов. Управление U_i на i -м шаге будет состоять в том,

что мы выделим в отрасль I средства X_i ; величина Y_i определится автоматически; она будет равна оставшимся средствам:

$$Y_i = K - X_i.$$

Выигрыш (доход) на i -м шаге будет:

$$w_i(K, X_i) = f(X_i) + g(K - X_i). \quad (4.4)$$

3. Под влиянием этого управления на i -м шаге система перейдет из состояния K в состояние

$$K' = \varphi(X_i) + \psi(K - X_i). \quad (4.5)$$

4. Основное функциональное управление имеет вид:

$$W_i(K) = \max_{0 \leq X_i \leq K} \{f(X_i) + g(K - X_i) + W_{i+1}(\varphi(X_i) + \psi(K - X_i))\}, \quad (4.6)$$

где знак $0 \leq X_i \leq K$ обозначает, что максимум берется по всем неотрицательным вложениям X_i , не превосходящим наличного запаса средств K .

Условным оптимальным управлением на i -м шаге $x_i(K)$ будет то из значений X_i , при котором выражение в фигурных скобках достигает максимума.

5. Условный оптимальный выигрыш на последнем шаге будет

$$W_m(K) = \max_{0 \leq X_m \leq K} \{f(X_m) + g(K - X_m)\}; \quad (4.7)$$

ему соответствует условное оптимальное управление $x_m(K)$, при котором этот максимум достигается.

6. Зная функцию $W_m(K)$, находим по формуле (4.6) условные оптимальные выигрыши на двух последних, на трех последних и т. д. шагах:

$$\left. \begin{aligned} W_{m-1}(K) &= \max_{0 \leq X_{m-1} \leq K} \{f(X_{m-1}) + g(K - X_{m-1}) + \\ &+ W_m(\varphi(X_{m-1}) + \psi(K - X_{m-1}))\}; \\ W_{m-2}(K) &= \max_{0 \leq X_{m-2} \leq K} \{f(X_{m-2}) + g(K - X_{m-2}) + \\ &+ W_{m-1}(\varphi(X_{m-2}) + \psi(K - X_{m-2}))\}; \\ &\dots \dots \dots \\ W_1(K) &= \max_{0 \leq X_1 \leq K} \{f(X_1) + g(K - X_1) + \\ &+ W_2(\varphi(X_1) + \psi(K - X_1))\} \end{aligned} \right\} \quad (4.8)$$

и соответствующие им условные оптимальные управления:

$$x_{m-1}(K), x_{m-2}(K), \dots, x_1(K). \quad (4.9)$$

7. Начальное состояние K_0 (начальный запас средств) задано, поэтому максимальный доход (оптимальный выигрыш) будет

$$W_{max} = W_1(K_0).$$

Оптимальное управление на первом шаге будет:

$$x_1 = x_1(K_0).$$

Состояние системы после первого шага:

$$K_1^* = \varphi(x_1) + \psi(K_0 - x_1).$$

Оптимальное управление на втором шаге:

$$x_2 = x_2(K_1^*),$$

и т. д. по цепочке. Состояние системы после i шагов:

$$K_i^* = \varphi(x_i) + \psi(K_{i-1}^* - x_i). \quad (4.10)$$

Оптимальное управление на i -м шаге:

$$x_i = x_i(K_{i-1}^*),$$

и т. д., вплоть до последнего шага, по цепочке:

$$K_0 \rightarrow x_1(K_0) \rightarrow K_1^* \rightarrow x_2(K_1^*) \rightarrow \dots \rightarrow K_{m-1}^* \rightarrow x_m(K_{m-1}^*) \rightarrow K_m^*$$

Величина K_m^* будет представлять собой количество средств, оставшихся (при оптимальном управлении) после последнего шага. Совокупность средств, вложенных по годам в отрасль I:

$$x = (x_1, x_2, \dots, x_m)$$

будет представлять собой оптимальное управление, наряду с которым имеет смысл рассмотреть

$$y = (y_1, y_2, \dots, y_m) = (K_0 - x_1, K_1^* - x_2, \dots, K_{m-1}^* - x_m)$$

— количество средств, вложенных в отрасль II по годам.

Дадим процессу распределения ресурсов геометрическую интерпретацию. Из соображений наглядности сделаем фазовое пространство двумерным, хотя можно было бы ограничиться и одномерным. Будем откладывать по оси OX средства X , вкладываемые в отрасль I, по оси OY — средства Y , вкладываемые в отрасль II. Сумма этих средств не может быть больше, чем количество начальных средств K_0 , поэтому фазовое пространство — это часть плоскости XOY , заключенная внутри равнобедренного прямоугольного треугольника AOB с катетами K_0 (рис. 3.17).

Так как в начале процесса распределения сумма средств в обеих отраслях равна K_0 , то область начальных состояний \tilde{S}_0 есть не что иное, как гипотенуза треугольника AB . На количество средств в конце периода t лет никаких ограничений, кроме $0 \leq X_t + Y_t \leq K_0$, не накладывается; поэтому областью \tilde{S} конечных состояний системы является весь треугольник AOB (кроме гипотенузы).

Изобразим траекторию точки S в фазовом пространстве (рис. 3.18).

Представим себе, что в начале каждого года происходит распределение (или перераспределение) средств по отраслям, а в течение года вложенные средства тратятся и образуется доход. Тогда каждое звено траектории точки S в фазовом пространстве будет состоять из двух полузвеньев: на первом происходит только перераспределение средств и точка S перемещается параллельно \overline{AB} , на втором — средств

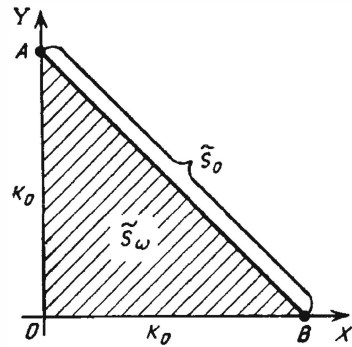


Рис. 3.17

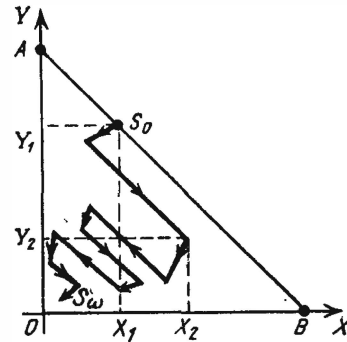


Рис. 3.18

ва тратятся и точка S перемещается вниз и влево, ближе к началу координат. Исключение составляет только первый шаг, для которого первое полузвено отсутствует: сразу назначаются X_1, Y_1 , и начинается трата средств. Сумма абсциссы и ординаты последней точки траектории S_ω представляет собой количество средств K_ω , которое сохранится к концу периода при данном управлении.

5. ПРИМЕР РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ РЕСУРСОВ

Пример. Планируется деятельность двух отраслей производства I и II сроком на 5 лет ($m = 5$). Заданы «функции дохода»:

$$f(X) = 1 - e^{-X}; \quad g(Y) = 1 - e^{-2Y}$$

и «функции траты»:

$$\varphi(X) = 0,75X; \quad \psi(Y) = 0,3Y.$$

Требуется распределить имеющиеся средства в размере $K_0 = 2$ (условных единиц) между отраслями I и II по годам, исходя из условия максимума дохода.

Решение. В соответствии с общей схемой, приведенной в § 4, получаем:

1. Как в п. 1 общей схемы.

2. Выигрыш на i -м шаге:

$$w_i(K, X_i) = 1 - e^{-X_i} + 1 - e^{-2(K-X_i)} = 2 - (e^{-X_i} + e^{-2(K-X_i)}).$$

3. Под влиянием управления X_i (вложения средств X_i в отрасль I, а $Y_i = K - X_i$ в отрасль II) система на i -м шаге перейдет из состояния K в

$$K' = 0,75X_i + 0,3(K - X_i).$$

4. Основное функциональное уравнение:

$$W_i(K) = \max_{0 \leq X_i \leq K} \{2 - [e^{-X_i} + e^{-2(K-X_i)}] + W_{i+1}(0,75X_i + 0,3(K - X_i))\}.$$

Условное оптимальное управление на i -м шаге — то, при котором достигается этот максимум.

5. Условный оптимальный выигрыш на последнем шаге:

$$W_5(K) = \max_{0 \leq X_5 \leq K} \{w_5(K, X_5)\} = \max_{0 \leq X_5 \leq K} [2 - [e^{-X_5} + e^{-2(K-X_5)}]].$$

Найдем этот максимум.

При фиксированном K выражение, стоящее в фигурных скобках, есть функция аргумента X_5 , выпуклая вверх. В зависимости от значения K максимум этой функции может достигаться либо внутри отрезка $(0, K)$ (рис. 3.19), либо на левом его конце (рис. 3.20).

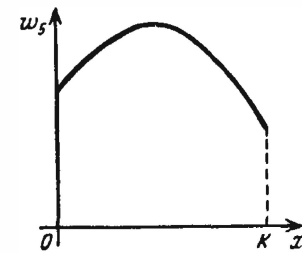


Рис. 3.19

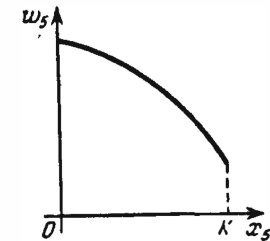


Рис. 3.20

Чтобы найти этот максимум, продифференцируем выражение

$$w_5(K, X_5) = 2 - [e^{-X_5} + e^{-2(K-X_5)}]$$

при фиксированном K по X_5 и приравняем производную нулю

$$\frac{\partial w_5}{\partial X_5} = e^{-X_5} - 2e^{-2(K-X_5)} = 0. \quad (5.1)$$

На данном (пятом) шаге нам еще удастся решить уравнение (5.1) в буквенном виде, на дальнейших шагах такие задачи придется решать численно (графически). Из (5.1) имеем:

$$-X_5 = \ln 2 - 2K + 2X_5; \quad (5.2)$$

$$X_5 = (2K - \ln 2)/3. \quad (5.3)$$

Отсюда следует, что если $K > (\ln 2)/2 \approx 0,347$, то максимум достигается внутри отрезка $(0, K)$ в точке $x_5(K) = (2K - \ln 2)/3$, если же $K < (\ln 2)/2 \approx 0,347$, то максимум достигается в конце отрезка:

$$x_5(K) = 0.$$

Таким образом, условное оптимальное управление на последнем (пятом) шаге найдено: если мы подошли к этому шагу с запасом средств $K > (\ln 2)/2$, то из этих средств следует выделить в отрасль I долю (5.3); если же мы подошли к пятому шагу с запасом средств, меньшим, чем $(\ln 2)/2$, то все эти средства надо отдать в отрасль II. Как же быть, если мы подойдем к пятому шагу с запасом средств, в точности равным $(\ln 2)/2$? Очевидно, в этом случае оба управления указывают одно и то же, а именно: выделять средств в отрасль I не нужно. Запишем найденное условное оптимальное управление на пятом шаге в виде формулы

$$x_5(K) = \begin{cases} 0 & \text{при } K \leq (\ln 2)/2, \\ (2K - \ln 2)/3 & \text{при } K > (\ln 2)/2. \end{cases} \quad (5.4)$$

Найдем теперь условный оптимальный выигрыш (доход) на пятом шаге, который получится при таком управлении:

$$W_5(K) = 2 - \{e^{-x_5(K)} + e^{-2[K-x_5(K)]}\},$$

или, подставляя сюда выражения (5.4):

$$W_5(K) = \begin{cases} 1 - e^{-2K} & \text{при } K \leq (\ln 2)/2, \\ 2 - \frac{3}{2} \sqrt[3]{2} e^{-\frac{2}{3}K} & \text{при } K > (\ln 2)/2. \end{cases}$$

Так как нам в дальнейшем придется вычислять величину $W_5(K)$ для разных значений аргумента, построим ее график в зависимости от K (рис. 3.21).

На том же графике, но в другом масштабе, изобразим зависимость от K условного оптимального управления $x_5(K)$. Вторая кривая представляет собой ломаную линию, которая до $K = (\ln 2)/2$ идет по оси абсцисс, а после этой точки возрастает линейно.

Построением этого графика заканчиваются все процедуры, связанные с оптимизацией последнего шага.

6. Переходим к предпоследнему (четвертому) шагу. Задачу его условной оптимизации будем решать численно, задавая рядом значений K (количества средств, оставшихся после третьего шага).

Чтобы не делать лишней работы, выясним, в каких пределах может находиться K . Найдем самое большое из возможных значений K . Оно

будет получено, если на первых трех шагах все средства будут вложены в отрасль I, где траты минимальны; тогда после трех лет получим:

$$K_{max} = K_0 \cdot 0,75^3 = 0,844.$$

Наименьшее значение K получится, если на первых трех шагах все средства будут вложены в отрасль II:

$$K_{min} = K_0 \cdot 0,3^3 = 0,054.$$

На участке $0,054 \div 0,844$ заключены все возможные значения K . Назначим на этом участке несколько опорных значений K : $K = 0,1; 0,2; 0,3; 0,4; 0,5; 0,6; 0,7; 0,8$ и для каждого из них найдем услов-

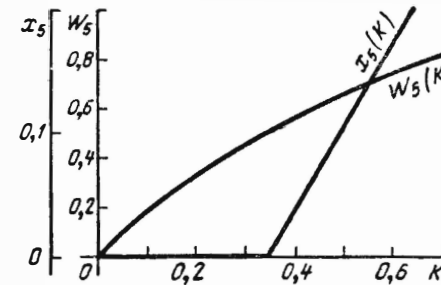


Рис. 3.21

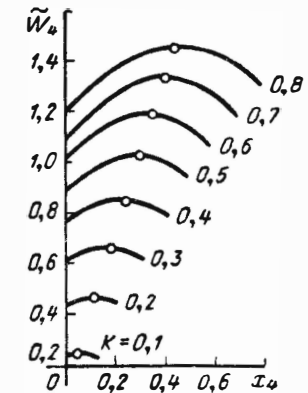


Рис. 3.22

ное оптимальное управление на четвертом шаге $x_4(K)$ и условный максимальный доход на двух последних шагах $W_4(K)$. Для этого построим серию кривых, изображающих «полуоптимальный» выигрыш W_4 на двух последних шагах (при любом управлении на четвертом шаге и при оптимальном — на пятом):

$$\hat{W}_4(K, X_4) = \omega_4(K, X_4) + W_5(0,75X_4 + 0,3(K - X_4)),$$

где первое слагаемое $\omega_4(K, X_4) = 2 - \{e^{-X_4} + e^{-2(K - X_4)}\}$, а второе

слагаемое W_5 определяется по графику рис. 5.3, для чего нужно войти в него вместо K с аргументом $K' = 0,75X_4 + 0,3(K - X_4)$.

Кривые зависимости W_4 от X_4 (при заданном K) для шестого шага представлены на рис. 3.22.

Найдем на каждой из кривых точку с максимальной ординатой и пометим ее кружком. Ордината такой точки представляет собой условный максимальный доход на двух последних шагах $W_4(K)$, а абсцисса — условное оптимальное управление $x_4(K)$. Определив эти величины для каждого значения $K = 0,1; 0,2; \dots; 0,8$, построим графики зависимостей $W_4(K)$ и $x_4(K)$ для четвертого шага (рис. 3.23).

Далее переходим к оптимизации третьего шага. Для него возможные значения K находятся в пределах от $2 \cdot 0,3^2 = 0,18$ до $2 \cdot 0,75^2 = 1,12$. Снова зададимся рядом опорных значений K : $K = 0,3; 0,5; 0,7; 0,9; 1,1$ и для каждого из них вычислим доход на третьем шаге в зависимости от K и управления X_3 :

$$w_3(K, X_3) = 2 - [e^{-X_3} + e^{-2(K-X_3)}].$$

Затем прибавим к нему уже оптимизированный доход на двух

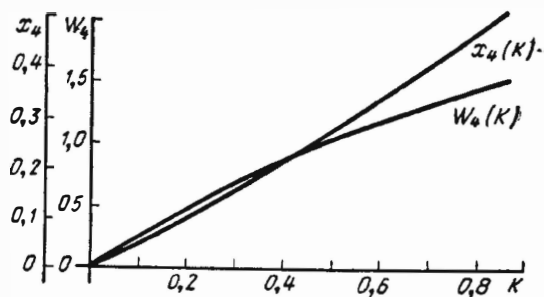


Рис. 3.23

последних шагах W_4 , который мы определим по графику рис. 3.21, входя в него вместо K аргументом $K' = 0,75 X_3 + 0,3(K - X_3)$, и получим «полуоптимальный» выигрыш на трех последних шагах (при оптимальном управлении на двух последних и любом управлении — на третьем шаге) $\tilde{W}_3(K, X_3) = w_3(K, X_3) + W_4(0,75 X_3 + 0,3(K - X_3))$.

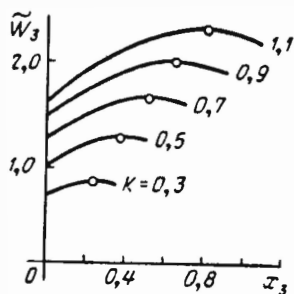


Рис. 3.24

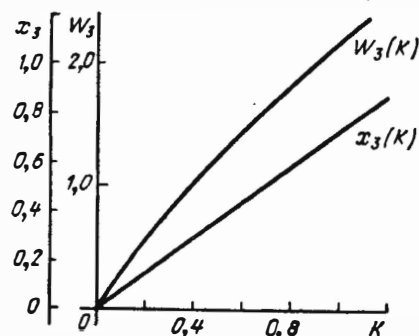


Рис. 3.25

Для этой функции опять построим графики зависимостей \tilde{W}_3 от X_3 при фиксированном K . На каждой из кривых снова отметим максимум (рис. 3.24). После этого построим на одном графике (рис. 3.25) две кривые: условное оптимальное управление $x_3(K)$ и условный оптимальный выигрыш $W_3(K)$.

Совершенно аналогично решается задача оптимизации второго шага. Варьируются значения K от $2 \cdot 0,3 = 0,6$ до $2 \cdot 0,75 = 1,5$: $K = 0,6; 0,9; 1,2; 1,5$. Определяется доход на втором шаге:

$$w_2(K, X_2) = 2 - [e^{-X_2} + e^{-2(K-X_2)}].$$

К нему прибавляется условный максимальный доход $W_3(K')$, определяемый по графику рис. 3.25 со входом

$$K' = 0,75 X_2 + 0,3(K - X_2).$$

Получается величина \tilde{W}_2 , для которой снова строятся графики (рис. 3.26). На каждой кривой находится максимум и строятся две кривые: $x_2(K)$ и $W_2(K)$ (рис. 3.27).

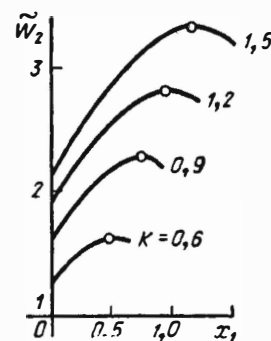


Рис. 3.26

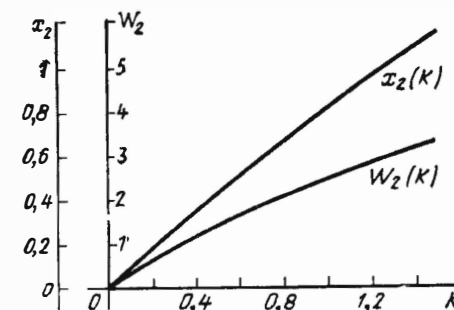


Рис. 3.27

Осталось оптимизировать один только первый шаг. Это — уже более легкая задача, так как начальное состояние системы $K_0 = 2$ нам известно и, значит, не должно варьироваться. Поэтому для первого шага строится только одна кривая зависимости $\tilde{W}_1(K_0, X_1)$ от X_1 при известном K_0 (рис. 3.28), где

$$\begin{aligned} \tilde{W}_1(K_0, X_1) &= w_1(K_0, X_1) + W_2(K') = \\ &= 2 - [e^{-X_1} + e^{-2(K_0 - X_1)}] + W_2(K'), \end{aligned}$$

а последний член находится по графику рис. 3.27 при входе в него с аргументом $K' = 0,75 X_1 + 0,3(K_0 - X_1)$, где $K_0 = 2$.

Определяя на единственной кривой (см. рис. 3.28) максимум, найдем окончательное (уже не условное) значение максимального дохода за все пять лет:

$$W_{max} = W_1(2) = 4,35$$

и соответствующее ему безусловное оптимальное управление на первом шаге:

$$x_1 = 1,6.$$

6. После того, как процесс построения условных оптимальных управлений и выигрышей закончен, надо провести вторую стадию оптимизации, проходя, шаг за шагом, процесс управления от первого шага до последнего по цепочке:

$$x_1 \rightarrow K_1^* \rightarrow x_2 \rightarrow K_2^* \rightarrow x_3 \rightarrow K_3^* \rightarrow x_4 \rightarrow K_4^* \rightarrow x_5 \rightarrow K_5^*$$

Зная $x_1 = 1,6$, находим запас средств после первого шага:

$$K_1^* = 0,75 x_1 + 0,3 (K_0 - x_1) = 1,32.$$

Войдя с этим значением K_1^* в график $x_2(K)$ на рис. 3.27, находим оптимальное управление на втором шаге:

$$x_2 = 1,02.$$

Остаток средств после второго шага будет:

$$K_2^* = 0,75 x_2 + 0,3 (K_1^* - x_2) = 0,86.$$

С этим значением K_2^* входим в график $x_3(K)$ (см. рис. 3.25) и находим оптимальное управление на третьем шаге

$$x_3 = 0,62.$$

Остаток средств после третьего шага:

$$K_3^* = 0,75 x_3 + 0,3 (K_2^* - x_3) = 0,54.$$

По графику рис. 3.23 находим оптимальное управление на четвертом шаге

$$x_4 = 0,30.$$

Остаток средств после четвертого шага:

$$K_4^* = 0,75 x_4 + 0,3 (K_3^* - x_4) = 0,30.$$

С этим значением K_4^* входим в график $x_5(K)$ (см. рис. 3.21) и находим оптимальное управление на последнем шаге $x_5 = 0$.

Итак, планирование закончено: найдено оптимальное управление, указывающее, сколько средств при начальном их запасе $K_0 = 2$ нужно вкладывать в отрасль I по годам. Это управление будет:

$$x = (1,60; 1,02; 0,62; 0,30; 0).$$

Учитывая, что наличные средства перед началом каждого года известны и равны:

$$K_0 = 2; \quad K_1^* = 1,32; \quad K_2^* = 0,86; \quad K_3^* = 0,54; \quad K_4^* = 0,30,$$

сразу же находим и количества средств, вкладываемых в отрасль II по годам:

$$y = (0,40; 0,30; 0,24; 0,24; 0,30).$$

Таким образом, можно сформулировать следующие рекомендации по вложению средств. Из имеющегося в начале запаса $K_0 = 2$ и оста-

ющихся средств в конце каждого года нужно вкладывать по годам в отрасли I и II следующие суммы:

отрасли	Год				
	1	2	3	4	5
I	1,60	1,02	0,62	0,30	0
II	0,40	0,30	0,24	0,24	0,30

При таком распределении средств за пять лет будет получен максимальный доход, равный

$$W_{max} = 4,35.$$

Остаток средств в конце периода будет равен: $0,3 \cdot 0,30 = 0,09$.

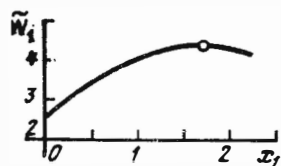


Рис. 3.28

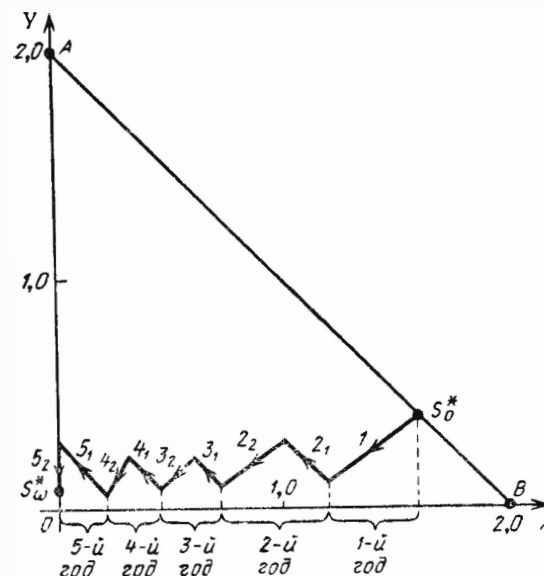


Рис. 3.29

На рис. 3.29 изображена оптимальная траектория в фазовом пространстве (каждый этап, кроме первого, разделен на полуэтапы).

Из рассмотренного примера видно, насколько сложной и кропотливой является пошаговая оптимизация «вручную», даже для наиболее элементарных задач (только две отрасли производства; простейшие «функции дохода» и «функции трат»). При сколько-нибудь более сложных условиях разработка оптимального плана методом динамического программирования практически невозможна без привлечения быстродействующих ЭЦВМ.

6. ДРУГИЕ ЗАДАЧИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ РЕСУРСОВ

Задача распределения ресурсов имеет много вариантов. Некоторые из них сравнительно мало отличаются от простейшей задачи, рассмотренной в §§ 4 и 5, другие настолько непохожи на нее по своей словесной формулировке, что иной раз трудно уловить в них общие черты. Здесь и в следующем параграфе мы приведем несколько примеров подобных задач.

1. Распределение ресурсов по неоднородным этапам

В задаче, рассмотренной в § 4, этапы были однородными в том смысле, что «функции дохода» $f(X)$, $g(Y)$ и «функции траты» $\varphi(X)$, $\psi(Y)$ были одинаковыми для всех шагов. Может оказаться, что они меняются от шага к шагу, а именно для i -го шага они равны:

$$\left. \begin{array}{l} f_i(X), \quad g_i(Y) \\ \varphi_i(X), \quad \psi_i(Y) \end{array} \right\} \quad (i = 1, 2, \dots, m).$$

В этом случае стандартная схема решения задачи почти не меняется. Основное функциональное уравнение принимает вид

$$W_i(K) = \max_{0 \leq X_i \leq K} \{f_i(X_i) + g_i(K - X_i) + W_{i+1}(\varphi_i(X_i) + \psi_i(K - X_i))\}.$$

Условие оптимизации m -го шага будет:

$$W_m(K) = \max_{0 \leq X_m \leq K} \{f_m(X_m) + g_m(K - X_m)\},$$

а во всем остальном процедура построения решения останется неизменной.

2. Задача о резервировании ресурсов

Имеется всего одна отрасль производства и некоторый запас средств K_0 , который можно вкладывать в производство не целиком, а частично резервировать. Если на i -м шаге в производство вложены средства X , то они дают доход $f_i(X)$ и уменьшаются до $\varphi_i(X)$.

Требуется рационально распределить имеющиеся и остающиеся средства на m шагов так, чтобы суммарный доход за все m шагов был максимален.

Нетрудно видеть, что эта задача сводится к предыдущей. Действительно, резервированные средства можно считать вложенными в ка-

кую-то фиктивную вторую отрасль, где они не тратятся, но и не дают дохода:

$$g_i(Y) = 0; \quad \psi_i(Y) = Y \quad (i = 1, \dots, m).$$

С учетом этого условия задача решается совершенно так же, как задача распределения ресурсов по неоднородным этапам. Геометрическая интерпретация задачи в фазовом пространстве показана на рис. 3.30.

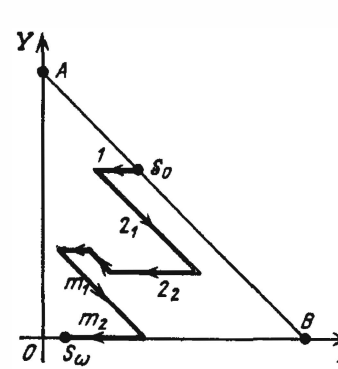


Рис. 3.30

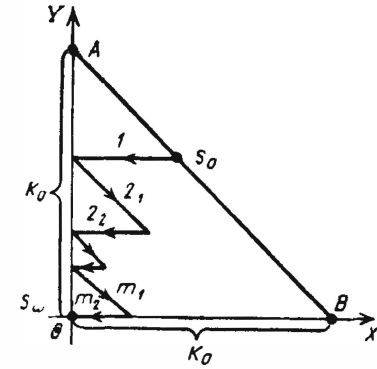


Рис. 3.31

Рассмотрим частный случай задачи о резервировании ресурсов, когда на всех этапах

$$\varphi_i(X) = 0 \quad (i = 1, \dots, m),$$

т. е. вложенные средства расходуются целиком (рис. 3.31). Так как средства тратятся целиком, то каждый горизонтальный участок траектории доходит до самой оси ординат.

Поставленная задача сводится к отысканию максимума функции m аргументов (X_1, X_2, \dots, X_m) :

$$W = \sum_{i=1}^m f_i(X_i),$$

где X_1, X_2, \dots, X_m неотрицательны и ограничены условием:

$$\sum_{i=1}^m X_i \leq K_0. \quad (6.1)$$

Если доход $f_i(X)$ (как это естественно предполагать) представляет собой неубывающую функцию вложенных средств X , то знак неравенства в формуле (6.1) можно отбросить, так как в этих условиях расходовать средства не до конца невыгодно.

Заметим, что некоторые простейшие задачи резервирования ресурсов допускают элементарное решение и без метода динамического

программирования. К ним принадлежит, например, простейший случай, когда «функция дохода» на всех этапах одна и та же:

$$f_1(X) = f_2(X) = \dots = f_m(X) = f(X)$$

и средства расходуются полностью:

$$\varphi_1(X) = \varphi_2(X) = \dots = \varphi_m(X) = 0.$$

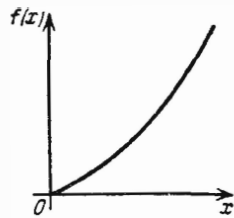


Рис. 3.32

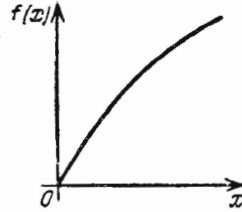


Рис. 3.33

Нетрудно убедиться, что если функция дохода выпукла вниз (рис. 3.22), то выгоднее всего вложить все средства в какой-то один этап, а в остальные не вкладывать. Если же функция дохода выпукла вверх (рис. 3.33), то максимум дохода достигается при равномерном распределении средств между этапами: $x_1 = x_2 = \dots = x_m = K_0/m$.

3. Задача распределения ресурсов между тремя и более отраслями

Предположим, что в условиях задачи § 4 ресурсы распределяются не между двумя отраслями (I и II), а между несколькими: I, II, ..., (n). причем для каждой (j-й) отрасли заданы: «функция дохода» $f_i^{(j)}(X)$,

выражающая доход, приносимый средствами X, вложенными на i-м году в j-ю отрасль, и «функция траты» $\varphi_i^{(j)}(X) < X$, показывающая, насколько убывают средства X, вложенные на i-м году в j-ю отрасль.

Задача отличается от рассмотренной в пункте 1 данного параграфа только размерностью (числом параметров, определяющих состояние системы). Например, для трех отраслей I, II и III фазовое пространство показано на рис. 3.34. Для случая более чем трех отраслей геометрическая интерпретация теряет наглядность, но сущность задачи остается такой же. Состояние системы будет определяться уже не парой чисел X, Y, а n числами

$$X^{(1)}, X^{(2)}, \dots, X^{(n)},$$

обозначающими вложения в каждую из отраслей. Процесс распределения средств, как и в двумерном случае может быть разделен на этапы

и произведена сначала условная оптимизация (от конца к началу), а потом — безусловная (от начала к концу). Состояние системы перед началом каждого шага по-прежнему будет характеризоваться суммой средств, подлежащих распределению, т. е. одним числом K.

Сложнее будет обстоять дело с управлением. Управление на i-м шаге будет состоять в выделении средств не в одну отрасль, а в n отраслей:

$$X_i^{(1)}, X_i^{(2)}, \dots, X_i^{(n)} = K - \sum_{i=1}^{n-1} X_i^{(i)}.$$

Придется находить максимум функции нескольких переменных. При числе отраслей $n > 3$ задача оптимизации становится очень громоздкой и без помощи ЭВМ вряд ли может быть решена.

7. РАСПРЕДЕЛЕНИЕ РЕСУРСОВ СО ВЛОЖЕНИЕМ ДОХОДОВ В ПРОИЗВОДСТВО

До сих пор в задачах о распределении ресурсов мы рассматривали «доход», приносимый предприятиями, совершенно независимо от распределяемых средств; он даже мог выражаться в других единицах (например, ресурсы — в человеко-часах, а доход — в рублях). Теперь мы рассмотрим случай, когда доход вкладывается в производство (полностью или частично). Разумеется, для этого доход и средства должны быть приведены к единому (денежному) эквиваленту.

Задача о распределении ресурсов со вложением доходов в производство может ставиться по-разному, в зависимости от того, вкладывается доход полностью или частично и какая величина максимизируется.

Ниже приводится ряд задач, в каждой из которых идет речь о распределении ресурсов по двум отраслям производства со вложением (полным или частичным) доходов в производство, при разных целевых функциях.

1. Доход вкладывается в производство полностью, максимизируется сумма всех средств (основные плюс доход) после m-го этапа.

В этом случае выигрыш W представляет собой сумму всех средств, сохранившихся в обеих отраслях после завершения последнего этапа, плюс доход, данный обеими отраслями на последнем этапе. Весь этот выигрыш приобретает только на одном, последнем этапе, но он представляет собой частный случай аддитивного показателя эффективности, для которого

$$W = \sum_{i=1}^m w_i,$$

если считать, что выигрыши на всех этапах, кроме последнего, равны нулю

$$w_1 = w_2 = \dots = w_{m-1} = 0; \quad w_m = W.$$

Так как все средства (и основные и доход) вкладываются в производство на равных основаниях, нет надобности рассматривать отдельно «функции дохода» и «функции траты», а достаточно ввести для каждой отрасли только по одной функции: для отрасли I — функцию $F_i(X)$, показывающую, сколько средств (включая и доход) получится в конце i -го шага в отрасли I при вложении в нее средств X в начале этого шага. Аналогичная функция для отрасли II будет $G_i(Y)$. Назовем функции

$$F_i(X), \quad G_i(Y)$$

«функциями изменения средств» на i -м этапе. Заметим, что вообще возможно любое из соотношений:

$$F_i(X) > X; \quad F_i(X) < X; \quad F_i(X) = X$$

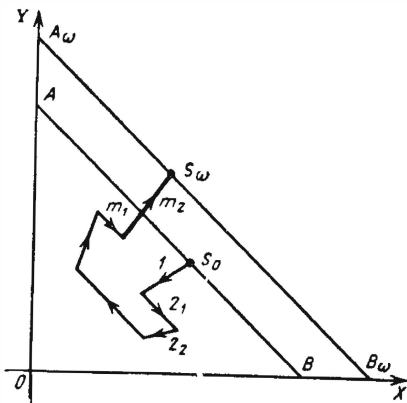


Рис. 3.35

(аналогично для $G_i(Y)$).

Рассмотрим фазовое пространство, соответствующее данной задаче (рис. 3.35). Таким пространством будет уже не треугольник AOB (как в задачах без вложения доходов), а весь первый квадрант XOY (средства могут не только уменьшаться, но и расти). Траектория по-прежнему состоит из ряда звеньев, распадающихся на полузвенья; первое полузвено (для всех этапов, кроме первого) изображает перераспределение средств (точка S движется параллельно \overline{AB}), второе —

трату и приобретение средств (точка S может двигаться в любом направлении). В отличие от ранее рассмотренных задач, здесь доход приносит только одно, последнее, звено, которое на рис. 3.35 выделено жирной стрелкой.

В данном случае значение показателя W непосредственно видно на чертеже — это сумма абсциссы и ординаты точки S_ω , изображающей конечное состояние системы. Задача оптимального управления: вывести точку S_ω на прямую $A_\omega B_\omega$, параллельную AB и наиболее удаленную от начала координат. Значение выигрыша для любой траектории в фазовом пространстве представляет собой каждый из отрезков, отсекаемый прямой $A_\omega B_\omega$ на осях координат.

Построим схему решения этой задачи методом динамического программирования, без подробных словесных объяснений (по образцу предыдущих задач). На функции $F_i(X)$ и $G_i(Y)$ пока не будем накладывать никаких ограничений.

Выигрыш на всех шагах, кроме последнего, равен нулю, поэтому не будем его записывать. На последнем же шаге он выражается

формулой:

$$w_m(K, X_m) = F_m(X_m) + G_m(K - X_m), \quad (7.1)$$

где K — средства, с которыми мы подошли к последнему шагу.

Основное функциональное уравнение динамического программирования будет:

$$W_i(K) = \max_{0 \leq X_i \leq K} \{W_{i+1}(F_i(X_i) + G_i(K - X_i))\}, \quad (7.2)$$

где K — средства, с которыми мы подошли к i -му шагу.

На последнем шаге получаем условный оптимальный выигрыш, равный

$$W_m(K) = \max_{0 \leq X_m \leq K} \{F_m(X_m) + G_m(K - X_m)\}, \quad (7.3)$$

и условное оптимальное управление, при котором этот выигрыш достигается: $x_m(K)$.

Далее, по формуле (7.2) находим все условные выигрыши и условные оптимальные управления на всех шагах, начиная с последнего, после чего процесс проходит в прямом направлении и определяются безусловные оптимальные управления на каждом шаге.

Такова схема решения задачи методом динамического программирования при любом виде функций изменения средств $F_i(X)$, $G_i(Y)$. Однако, если на эти функции наложить некоторые (очень естественные) ограничения, схема может быть сильно упрощена.

Предположим, что все функции $F_i(X)$, $G_i(Y)$ представляют собой неубывающие функции своих аргументов, т. е. при увеличении количества вложенных средств сумма дохода и оставшихся средств к концу этапа не может уменьшиться.

Покажем, что при этом условный оптимальный выигрыш есть *неубывающая функция от исхода каждого из предыдущих шагов*, т. е. от суммы средств в его конце.

Действительно, пусть исход какого-то, скажем, $(i-1)$ -го шага (сумма средств в его конце) равен K_{i-1} . Рассмотрим оптимальный выигрыш при этом условии как функцию K_{i-1} . Так как выигрыш приобретается только на последнем шаге, то безразлично, рассматривать ли этот выигрыш за все шаги, или только за последний шаг, или за все шаги начиная с i -го. Выберем последнее: рассмотрим оптимальный выигрыш W за все шаги начиная с i -го, как функцию K_{i-1} :

$$W_i(K_{i-1}). \quad (7.4)$$

Нужно доказать, что эта функция — неубывающая. Доказательство будем вести методом полной индукции, но не от i к $i+1$, а, наоборот, от $i+1$ к i . Предположим, что доказываемое свойство справедливо для $i+1$, т. е.

$$W_{i+1}(K_i) \quad (7.5)$$

есть неубывающая функция своего аргумента K_i (суммы средств в конце i -го шага). Докажем, что тогда неубывающей функцией будет и (7.4). Действительно, согласно уравнению (7.2) (где K_{i-1} обозначено

просто K) функция $W_i(K_{i-1})$ представляет собой максимум выражения

$$W_{i+1}(F_i(X_i) + G_i(K_{i-1} - X_i)) \quad (7.6)$$

Покажем, что (7.6) есть неубывающая функция от K_{i-1} ; тогда будет ясно, что и ее максимальное значение $W_i(K_{i-1})$ с увеличением K_{i-1} убывать не может.

Зафиксируем какое-то значение K_{i-1} . Пусть для этого значения выражение (7.6) достигает максимума по X_i , равного $W_i(K_{i-1})$, при определенном управлении x_i . Придадим теперь величине K_{i-1} некоторое положительное приращение ΔK_{i-1} . У нас образовался некоторый избыток средств, который мы можем вложить дополнительно либо в отрасль I, либо в отрасль II, либо в обе сразу. Так как функции $F_i(X)$, $G_i(Y)$ не убывают, то от такого «добавления» средств каждое слагаемое под знаком функции (7.6) может только увеличиться, а значит, и их сумма может только увеличиться, а не стать меньше. Что при этом станет с функцией (7.6)? Согласно нашему допущению, функция W_{i+1} — неубывающая, значит, при увеличении K_{i-1} выражение (7.6) уменьшиться не может. Итак, переход от $i + 1$ к i доказан.

Покажем теперь, что наше свойство справедливо для последнего шага ($i + 1 = m$). Это доказывается просто. По формуле (7.3) выигрыш на m -м шаге при оптимальном управлении представляет собой максимум выражения

$$F_m(X_m) + G_m(K_{m-1} - X_m)$$

и, естественно, является неубывающей функцией от K_{m-1} (это только что было доказано для любого i , а значит, и для $i = m$). Таким образом, $W_m(K_{m-1})$ есть неубывающая функция K_{m-1} , а значит, согласно принципу полной индукции, и любой из выигрышей $W_i(K_{i-1})$ — неубывающая функция, что и требовалось доказать.

Из доказанного вытекают очень простые рекомендации по оптимальному управлению. Действительно, если окончательный оптимальный выигрыш есть неубывающая функция от общей суммы средств, реализуемой на исходе каждого шага, то оптимальное управление состоит в том, чтобы в результате каждого шага получать максимальное значение этой суммы средств. Значит, управление каждым отдельным шагом можно выбирать исходя из интересов этого отдельного шага, не учитывая остальных.

Эта особенность поставленной задачи приводит к тому, что процесс планирования сильно упрощается. Нет уже надобности в сложной процедуре нахождения условных оптимальных выигрышей и условных оптимальных управлений — для каждого шага, начиная с первого, сразу находится безусловное оптимальное управление. На первом шаге нужно выбрать то управление x_1 , при котором обращается в максимум K_1 — сумма средств после первого шага:

$$K_1^* = \max_{0 \leq X_1 \leq K_0} \{F_1(X_1) + G_1(K_0 - X_1)\}.$$

На втором — то управление, при котором обращается в максимум величина $F_2(X_2) + G_2(K_1^* - X_2)$:

$$K_2^* = \max_{0 \leq X_2 \leq K_1^*} \{F_2(X_2) + G_2(K_1^* - X_2)\},$$

и т. д. до K_{m-1}^* . Максимальный выигрыш на m -м шаге будет равен:

$$W_m = \max_{0 \leq X_m \leq K_{m-1}^*} \{F_m(X_m) + G_m(K_{m-1}^* - X_m)\}.$$

Таким образом, при неубывающих функциях $F_i(X)$, $G_i(Y)$ поставленная задача распределения ресурсов только внешне похожа на задачу динамического программирования, а по существу — гораздо проще ее.

Подобные вырожденные задачи динамического программирования, где оптимальное управление состоит в простой оптимизации каждого шага, нередко встречаются на практике. Если, не обратив внимания на такую их особенность, решать их все же методом динамического программирования, решение, разумеется, будет верным, но потребует во много раз больше времени, чем если бы сразу учесть их вырожденность.

2. Доход вкладывается в производство полностью на всех этапах, кроме последнего; максимизируется доход на последнем шаге.

Задача отличается от рассмотренной выше тем, что максимизируется не сумма оставшихся средств плюс доход на последнем шаге, а только один доход на последнем шаге, независимо от того, сколько средств сохранилось от первоначально вложенных.

Для того, чтобы отделить сумму оставшихся средств от дохода, нужно для последнего шага задать не функции изменения средств, а по отдельности «функции дохода» $f_m(X)$, $g_m(Y)$ и «функции траты» $\varphi_m(X)$, $\psi_m(Y)$.

Легко убедиться, что задача так поставленная, сводится к предыдущей. Действительно, полагая на последнем шаге

$$F_m(X) = f_m(X); \quad G_m(Y) = g_m(Y),$$

получаем условия п. 1. Естественно, что если все функции $F_i(X)$, $G_i(Y)$ ($i = 1, \dots, m$) — неубывающие, данная задача, как и предыдущая, будет вырожденной.

3. Доход вкладывается в производство не полностью, а какая-то часть его отчисляется; максимизируется полный отчисленный доход на всех этапах плюс остаток средств после m -го этапа.

Для решения этой задачи должны быть заданы «функции дохода»:

$$f_i(X), \quad g_i(Y) \quad (i = 1, \dots, m),$$

«функции траты»:

$$\varphi_i(X) \leq X; \quad \psi_i(Y) \leq Y \quad (i = 1, \dots, m),$$

и еще, дополнительно, «функции отчислений»:

$$r_i(D) \leq D \quad (i = 1, \dots, m),$$

показывающие, какая часть дохода D , полученного на i -м шаге, не вкладывается в производство на следующем $(i + 1)$ -м шаге, а отчисляется.

Наметим схему решения задачи методом динамического программирования. Состояние системы перед началом i -го шага будем характеризовать количеством средств K , подлежащих распределению; оно получается из исхода предыдущего шага путем отчисления определенной доли дохода.

Выигрыш на i -м шаге будет

$$\omega_i(K, X_i) = r_i(f_i(X_i) + g_i(K - X_i)).$$

Управление X_i на i -м шаге (вложение средств X_i в отрасль I, а остальных средств — в отрасль II) переводит систему из состояния K в новое состояние:

$$K' = \varphi_i(X_i) + \psi_i(K - X_i) + f_i(X_i) + g_i(K - X_i) - r_i(f_i(X_i) + g_i(K - X_i)).$$

Основное функциональное уравнение:

$$W_i(K) = \max_{0 \leq X_i \leq K} \{r_i(f_i(X_i) + g_i(K - X_i)) + W_{i+1}(\varphi_i(X_i) + \psi_i(K - X_i) + f_i(X_i) + g_i(K - X_i) - r_i(f_i(X_i) + g_i(K - X_i)))\}.$$

Условный оптимальный выигрыш на m -м шаге:

$$W_m(K) = \max_{0 \leq X_m \leq K} \{f_m(X_m) + g_m(K - X_m) + \varphi_m(X_m) + \psi_m(K - X_m)\}.$$

В остальном схема динамического программирования остается той же, как и раньше, для невырожденных задач распределения ресурсов.

Рекомендуем читателю в качестве упражнения набросать схемы решения следующих задач распределения ресурсов.

4. Доход вкладывается в производство не полностью, а частично; максимизируется только полный отчисленный доход за все m шагов, без учета оставшихся средств.

5. Доход вкладывается в производство не полностью, а частично; максимизируется суммарное количество средств (основные плюс доход) после m -го шага, без учета ранее отчисленных сумм.

Не будет ли какая-нибудь из этих задач при некоторых условиях вырожденной?

8. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ДИНАМИЧЕСКОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ С УЧЕТОМ ПРЕДЫСТОРИИ ПРОЦЕССА

Все задачи динамического программирования, которые мы до сих пор рассматривали, отличались следующей особенностью: «доход» ω_i на каждом i -м шаге и максимальный доход W начиная с i -го шага и далее зависели только от состояния S системы S перед данным, i -м шагом и от примененного управления U_i , но не зависели от того, каким образом (каким путем) система пришла в состояние S , т. е. в результате каких управлений, когда и как это произошло. Другими словами, задачу оптимизации управления на каждом (i -м) шаге мы решали с учетом не а с т о я щ е г о состояния S , но без учета п р е д ы с т о р и и процесса.

Например, решая задачу распределения ресурсов между двумя (или более) отраслями производства, мы в качестве характеристики состояния системы перед каждым шагом брали одну величину — имеющиеся в нашем распоряжении средства K ; нам совершенно не было дела до того, к о г д а и к а к система пришла в это состояние, т. е. как распределялись средства между отраслями на всех предыдущих этапах. Важно было только количество средств K , с которым мы пришли к очередному шагу.

Во многих задачах динамического программирования эта «независимость от предыстории» не имеет места. Например, доход на i -м шаге может зависеть не только от количества средств, вложенного в каждую отрасль на д а н н о м шаге, а еще и от того, какие средства и на каких шагах вкладывались в нее ранее.

Теоретически всегда можно учесть предысторию процесса с помощью следующего приема: включить в число фазовых координат, характеризующих состояние S системы S перед данным шагом, *все те параметры из прошлого, от которых зависит будущее*.

Например, если доход на i -м шаге зависит не только от вложенных средств X_i , но и от ранее вложенных средств Z , можно характеризовать состояние системы перед i -м шагом не просто имеющимся в нашем распоряжении запасом средств K , а совокупностью (K, Z) , где Z — ранее вложенные средства.

Если существенна не только общая сумма ранее вложенных средств, но и когда именно и сколько средств вкладывалось — в принципе можно «обогащить» состояние S и этими сведениями из прошлого. Таким образом, теоретически всегда можно ввести в число параметров, характеризующих состояние системы в настоящий момент, сколько угодно параметров из «прошлого». Однако, на практике такое «обогащение» фазового пространства быстро приводит к необозримо сложной схеме динамического программирования, настолько сложной, что самый метод перестает быть пригодным. Ведь главная идея динамического программирования: «*вместо того, чтобы один раз решать сложную задачу, много раз решать сравнительно простую*» перестает себя оправдывать, если «простая» задача перестает быть «простой».

Поэтому попытки решать методом динамического программирования задачи со сложным влиянием «предыстории» обычно ни к чему хорошему не приводят.

Однако, если влияние «предыстории» может быть учтено с помощью небольшого числа параметров (одного, двух, трех), иногда удается построить сравнительно простую схему динамического программирования и решить задачу оптимизации.

В качестве примера задачи «с предысторией» рассмотрим задачу о профилактическом ремонте техники.

Задача ставится следующим образом.

Имеется техническое устройство S , эксплуатируемое в течение t лет.

Эксплуатационные расходы зависят от следующих факторов:

- от «возраста» устройства t , т. е. количества лет, протекшего со времени ввода его в эксплуатацию;
- от количества профилактических ремонтов k , произведенных до момента t ;
- от количества лет τ , протекшего со времени последнего профилактического ремонта*).

Предположим, что профилактический ремонт производится (если производится) мгновенно и в начале года. Естественно предположить, что затраты на этот ремонт (стоимость ремонта) зависят от тех же аргументов t , k и τ , что и эксплуатационные расходы.

Мы хотим так распределить профилактические ремонты по годам, чтобы сумма общих затрат (эксплуатационные расходы плюс расходы на ремонт, если он производился) достигали минимума.

Поставленная задача может быть решена методом динамического программирования, если характеризовать состояние системы (технического устройства S) к началу каждого шага тремя фазовыми координатами: t — «возрастом» системы, k — количеством ремонтов в прошлом и τ — временем, протекшим с момента последнего ремонта.

Чтобы решить задачу оптимизации управления, нужно задать как эксплуатационные расходы, так и расходы на ремонт в функции от этих фазовых координат.

Введем следующие обозначения.

$R_0(t)$ — стоимость эксплуатации устройства за год, начинающийся в момент t , если до момента t никакого ремонта не производилось;

$R_1(t, \tau)$ — стоимость эксплуатации устройства за год, начинающийся в момент t , если до момента t производился один ремонт, и со времени этого ремонта прошло τ лет;

и вообще

$R_k(t, \tau)$ — стоимость эксплуатации устройства за один год, начинающийся в момент t , если до момента t производилось k ремонтов, и со времени последнего из них прошло τ лет.

* Строго говоря, эксплуатационные расходы зависят не только от времени τ , прошедшего после последнего ремонта, но и от сроков предыдущих k ремонтов; но эта зависимость слаба, и ее можно не учитывать.

$R_0(t)$ — стоимость ремонта, производимого в момент t , если до момента t никакого ремонта не производилось;

$R_1(t, \tau)$ — стоимость ремонта, производимого в момент t , если до момента t производился один ремонт, и со времени этого ремонта прошло τ лет;

и вообще

$R_k(t, \tau)$ — стоимость ремонта, производимого в момент t , если до момента t производилось k ремонтов, и со времени последнего из них прошло τ лет.

Будем изображать состояние технического устройства S точкой S в фазовом пространстве; по одной оси мы будем откладывать «возраст» устройства — время t , по другой — время τ , протекшее с момента последнего ремонта, по третьей — количество ремонтов k (рис. 3.36). Так как при всех условиях $\tau < t$ и $k < t$, то все возможные состояния системы будут изображаться точками внутри трехгранного угла $OAtB$. Если до момента t ремонта не было, точка S находится на оси Ot ; если был один ремонт — точка S находится в плоскости $KO'L$, параллельной $tO\tau$ и отстоящей от нее на расстоянии 1, и т. д.

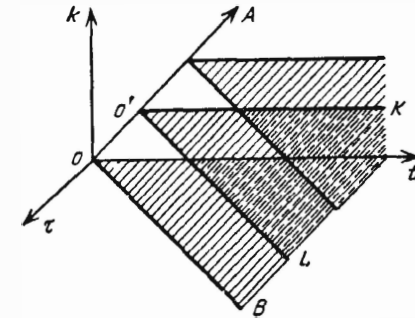


Рис. 3.36

Чтобы не пользоваться пространственной картиной, «расслоим» фазовое пространство на несколько частей, которые мы будем обозначать:

(0), (1), (2), ..., (k), ...

Часть (0) фазового пространства представляет собой просто ось Ot ; часть (1) — треугольник на плоскости $KO'L$, часть (2) — треугольник на плоскости, параллельной $tO\tau$ и лежащей от нее на расстоянии 2 и т. д. С увеличением номера пространства размеры треугольников все время уменьшаются. Части фазового пространства (0), (1), (2), ..., (k), ... показаны на рис. 3.37.

Перед началом каждого года у нас есть выбор между двумя управлениями:

U^0 — не делать ремонта (продолжать эксплуатировать устройство S).

U^1 — сделать ремонт (и после него продолжать эксплуатировать устройство).

Посмотрим, какие перемещения в фазовом пространстве испытает точка S под действием каждого управления.

Пусть точка S находится в пространстве (0) — на оси Ot в точке с координатой t (см. рис. 3.37). Под влиянием управления U^0 (продолжать эксплуатировать) она за год переместится в точку с абсциссой $t + 1$ на той же оси.

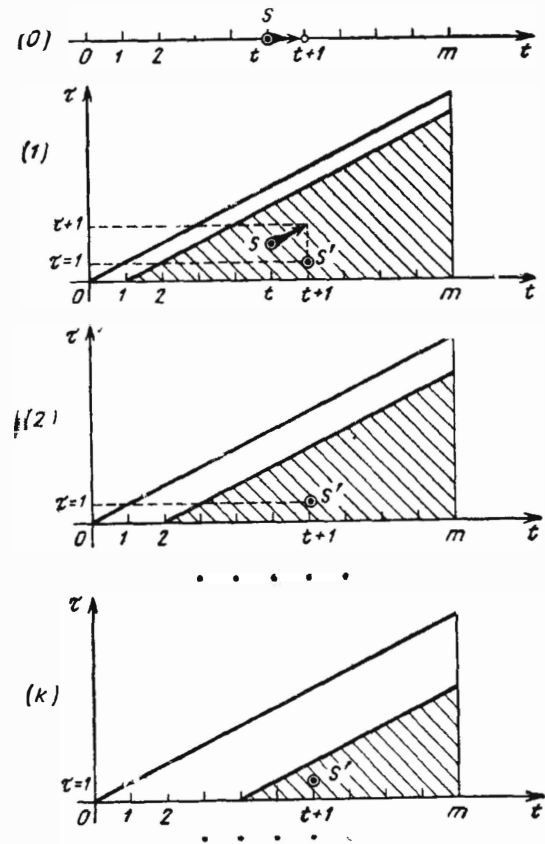


Рис. 3.37

Под влиянием управления U^1 (сделать ремонт) она переместится в точку S' в пространстве (1) с координатами $(t + 1, 1)$. Вторая координата $\tau = 1$, так как ремонт производится в начале года, т. е. за год до конца очередного шага.

Теперь пусть точка S занимает какое-то положение в пространстве (1). Управление U^0 (продолжать эксплуатировать) приведет к тому, что как t , так и τ за один шаг увеличатся на одну единицу, т. е. точка S переместится вверх и вправо (параллельно гипотенузе треугольника) в точку с координатами $(t + 1, \tau + 1)$, если прежние координаты были (t, τ) . Если же мы применим управле-

ние U^1 (сделаем ремонт), точка переместится в пространство (2), в точку S' с координатами $(t + 1, 1)$.

Вообще, если точка S находится в пространстве (k) ($k \geq 1$), то управление U^0 перемещает ее на один шаг вправо и вверх, из точки с координатами (t, τ) в точку с координатами $(t + 1, \tau + 1)$, а управление U^1 — в следующее по порядку пространство $(k + 1)$, в точку с координатами $(t + 1, 1)$.

Запишем правила перехода точки S в фазовом пространстве под влиянием управлений U^0 и U^1 в виде «таблицы преобразования» (см. табл. 8.1, первые пять столбцов).

Таблица 8.1

Исходное положение		Управление	Новое состояние		Расход на данном шаге, начинающемся в момент t
пространство	координаты		пространство	координаты	
(0)	(t)	U^0 U^1	(0) (1)	$(t+1)$ $(t+1, 1)$	$\Theta_0(t)$ $R_0(t) + \Theta_1(t, 0)$
(1)	(t, τ)	U^0 U^1	(1) (2)	$(t+1, \tau+1)$ $(t+1, 1)$	$\Theta_1(t, \tau)$ $R_1(t, \tau) + \Theta_2(t, 0)$
...
(k)	(t, τ)	U^0 U^1	(k) $(k+1)$	$(t+1, \tau+1)$ $(t+1, 1)$	$\Theta_k(t, \tau)$ $R_k(t, \tau) + \Theta_{k+1}(t, 0)$
...

Таким образом, нам ясно, как перемещается точка в фазовом пространстве под влиянием любого управления, т. е. мы знаем функцию

$$S' = \varphi(S, U),$$

согласно которой меняется состояние системы под влиянием примененного управления U ($U = U^0, U^1$).

Теперь посмотрим, к какому «выигрышу» — расходу w_t на данном шаге приведет каждое управление. Если мы применим управление U^0 , то на данном шаге мы будем иметь только эксплуатационные расходы; если управление U^1 — расходы на ремонт плюс эксплуатационные на ближайший год, но другие, чем если бы ремонта не было. Запишем эти расходы в той же табл. 8.1 в виде добавочного столбца.

Пользуясь этой таблицей, мы можем теперь для любого состояния системы S и любого управления (U^0 или U^1), примененного в любой момент t , найти:

- куда переместится точка S под действием управления;
- к какому расходу средств это приведет.

После того, как такая таблица составлена, уже нетрудно организовать самую процедуру оптимизации. Мы начнем, как всегда, с последнего шага, переберем все возможные состояния системы перед

этим шагом и для каждого из них найдем условное оптимальное управление (U^0 или U^1) на m -м шаге и условный оптимальный выигрыш (минимальный расход) на последнем шаге. Далее будем оптимизировать $(m - 1)$ -й шаг, так чтобы он, в совокупности с уже оптимизированным m -м, дал минимальный расход и т. д.

Продemonстрируем эту методику на конкретном примере.

Пример. Участок железнодорожного пути эксплуатируется в течение $m=6$ лет. Эксплуатационные расходы за один год, начинающийся в момент t , (в условных единицах) выражены функциями: $\mathcal{E}_0(t)$, $\mathcal{E}_1(t, \tau)$, $\mathcal{E}_2(t, \tau)$, $\mathcal{E}_3(t, \tau)$, $\mathcal{E}_4(t, \tau)$, $\mathcal{E}_5(t, \tau)$ (индекс — количество предшествующих ремонтов, τ — количество лет, протекшее с последнего ремонта пути). Стоимость ремонта задана функциями $R_0(t)$, $R_1(t, \tau)$, $R_2(t, \tau)$, $R_3(t, \tau)$, $R_4(t, \tau)$. Значения функций \mathcal{E} и R приведены в табл. 8.2 и 8.3.

Таблица 8.2

Функция	$t \backslash \tau$	0	1	2	3	4	5
$\mathcal{E}_0(t)$		1,9	2,5	3,1	4,0	5,1	6,6
$\mathcal{E}_1(t, \tau)$	$t \backslash \tau$	0	1	2	3	4	5
	0	—	2,2	2,4	3,8	5,0	6,3
	1	—	—	2,5	3,9	5,1	6,4
	2	—	—	—	4,0	5,1	6,5
	3	—	—	—	—	5,1	6,6
	4	—	—	—	—	—	6,6
$\mathcal{E}_2(t, \tau)$	$t \backslash \tau$	0	1	2	3	4	5
	0	—	—	2,3	3,7	4,8	5,5
	1	—	—	—	3,8	4,9	5,7
	2	—	—	—	—	5,0	6,0
	3	—	—	—	—	—	6,2
$\mathcal{E}_3(t, \tau)$	$t \backslash \tau$	0	1	2	3	4	5
	0	—	—	—	2,8	3,9	4,5
	1	—	—	—	—	4,0	4,7
	2	—	—	—	—	—	5,5
$\mathcal{E}_4(t, \tau)$	$t \backslash \tau$	0	1	2	3	4	5
	0	—	—	—	—	3,5	4,2
	1	—	—	—	—	—	4,5
$\mathcal{E}_5(t, \tau)$	$t \backslash \tau$	0	1	2	3	4	5
	0	—	—	—	—	—	3,8

Таблица 8.3

Функция	$t \backslash \tau$	1	2	3	4	5
$R_0(t)$		1,2	1,4	1,8	2,3	3,0
$R_1(t, \tau)$	$t \backslash \tau$	1	2	3	4	5
	1	—	1,2	1,4	1,9	2,4
	2	—	—	1,5	2,0	2,5
	3	—	—	—	2,1	2,6
	4	—	—	—	—	2,9
$R_2(t, \tau)$	$t \backslash \tau$	1	2	3	4	5
	1	—	—	1,2	1,5	2,0
	2	—	—	—	1,6	2,1
	3	—	—	—	—	2,3
$R_3(t, \tau)$	$t \backslash \tau$	1	2	3	4	5
	1	—	—	—	0,8	1,1
	2	—	—	—	—	1,4
$R_4(t, \tau)$	$t \backslash \tau$	1	2	3	4	5
	1	—	—	—	—	1,0

Таблица 8.4

Условная оптимизация шестого шага					
Пространство	Состояние системы (координаты t, τ)	Расход при управлении U^0	Расход при управлении U^1	Оптимальное управление	Минимальный расход
(0)	$t=5$	6,6	$3,0+6,3=9,3$	U^0	6,6
(1)	(5,1)	6,4	$2,4+5,5=7,9$	U^0	6,4
	(5,2)	6,5	$2,5+5,5=8,0$	U^0	6,5
	(5,3)	6,6	$2,6+5,5=8,1$	U^0	6,6
	(5,4)	6,6	$2,9+5,5=8,4$	U^0	6,6
(2)	(5,1)	5,7	$2,0+4,5=6,5$	U^0	5,7
	(5,2)	6,0	$2,1+4,5=6,6$	U^0	6,0
	(5,3)	6,2	$2,3+4,5=6,8$	U^0	6,2
(3)	(5,1)	4,7	$1,1+4,2=5,3$	U^0	4,7
	(5,2)	5,5	$1,4+4,2=5,6$	U^0	5,5
(4)	(5,1)	4,5	$1,0+3,8=4,8$	U^0	4,5

Таблица 8.5

Условная оптимизация пятого шага					
Пространство	Состояние системы (координаты t, τ)	Расход при управлении U^0	Расход при управлении U^1	Оптимальное управление	Минимальный расход
(0)	$t=4$	$5,1+6,6=11,7$	$2,3+5,0+6,4=13,7$	U^0	11,7
(1)	(4,1)	$5,1+6,5=11,6$	$1,9+4,8+5,7=12,4$	U^0	11,6
	(4,2)	$5,1+6,6=11,7$	$2,0+4,8+6,0=12,8$	U^0	11,7
	(4,3)	$5,1+6,6=11,7$	$2,1+4,8+6,2=13,1$	U^0	11,7
(2)	(4,1)	$4,9+6,0=10,9$	$1,5+3,9+4,7=10,1$	U^1	10,1
	(4,2)	$5,0+6,2=11,2$	$1,6+3,9+4,7=10,2$	U^1	10,2
(3)	(4,1)	$4,0+5,5=9,5$	$0,8+3,5+4,5=8,8$	U^1	8,8
Условная оптимизация четвертого шага					
(0)	$t=3$	$4,0+11,7=15,7$	$1,8+3,8+11,6=17,2$	U^0	15,7
(1)	(3,1)	$3,9+11,7=15,6$	$1,4+3,7+10,1=15,2$	U^1	15,2
	(3,2)	$4,0+11,7=15,7$	$1,5+3,7+10,1=15,3$	U^1	15,3
(2)	(3,1)	$3,8+10,2=14,0$	$1,2+2,8+8,8=12,8$	U^1	12,8
Условная оптимизация третьего шага					
(0)	$t=2$	$3,1+15,7=18,8$	$1,4+2,4+15,2=19,0$	U^0	18,8
(1)	(2,1)	$2,5+15,3=17,8$	$1,2+2,3+12,8=16,3$	U^1	16,3
Условная оптимизация второго шага					
(0)	$t=1$	$2,5+18,8=21,3$	$1,2+2,2+16,3=19,7$	U^1	19,7
Оптимизация первого шага					
(0)	$t=0$	$2,0+19,7=21,7$	—	U^0	21,7

Решение. Пользуясь таблицами функций 8.2 и 8.3 и таблицей преобразования 8.1, развернем процесс динамического программирования. Как всегда, начнем с оптимизации последнего (шестого) шага.

Все возможные состояния системы S перед этим шагом будут изображаться точками с абсциссой $t = 5$ в пространствах (0), (1), (2), (3), (4) (см. рис. 3.38). Для шестого (последнего) шага оптимальным будет то управление (U^0 или U^1), при котором расход на последнем шаге минимален. Расходы будем вычислять согласно последнему столбцу табл. 8.1. На рис. 3.38, кроме состояния системы, мы будем обозначать еще и оптимальное управление: U^0 будет обозначаться стрелкой, направленной вправо (в пространстве (0)) и вправо и вверх (в остальных пространствах). Управление U^1 , выводящее точку из данной части фазового пространства и переводящее в следующую по порядку часть, будем изображать стрелкой, направленной вправо и вниз. У каждой точки внутри кружка будем записывать минимальный расход на всех оставшихся шагах, соответствующий данному состоянию системы (условный оптимальный выигрыш).

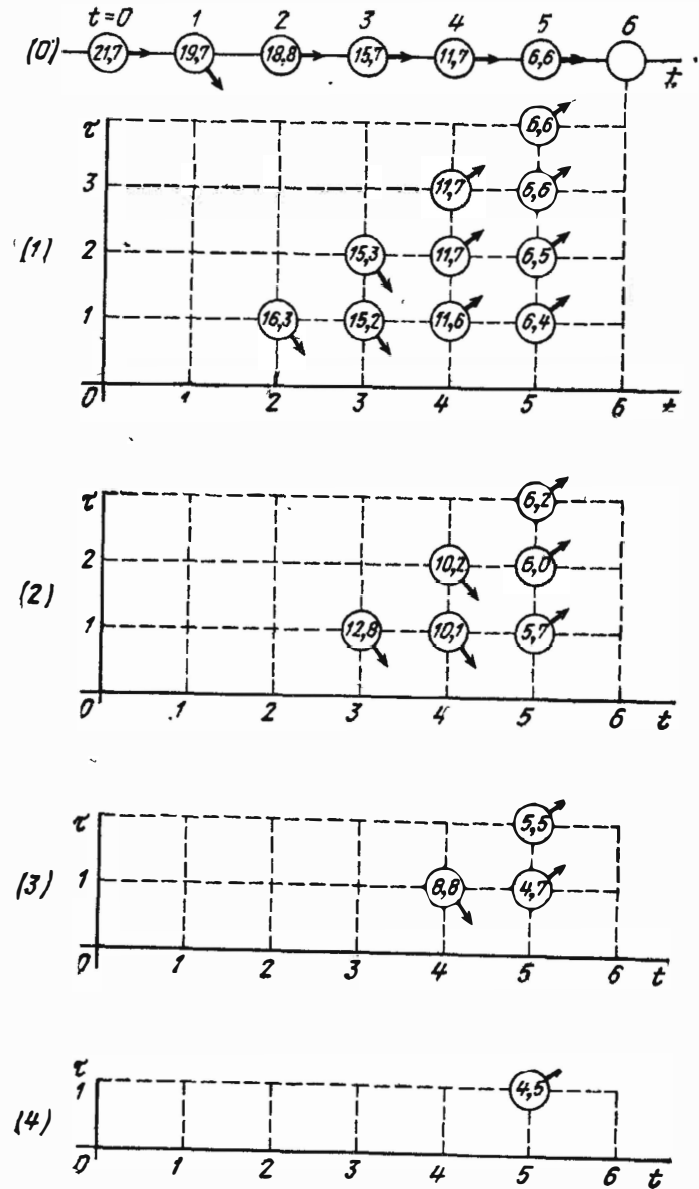


Рис. 3.38

Расчеты, связанные с оптимизацией, будем оформлять в виде таблиц (см табл. 8.4 и 8.5 на стр 169, 170)

Таким образом, оптимизация закончена. Она привела нас к следующим выводам.

Минимальный расход равен 21,7. Достигается он при следующем оптимальном управлении:

$$u = (U^0, U^1, U^1, U^1, U^1, U^0),$$

т. е.:

- на первом году участок эксплуатируется без ремонта;
- в начале второго, третьего, четвертого и пятого годов производится ремонт;
- на шестом году участок эксплуатируется без ремонта.

При этом расходы достигают минимума, равного 21,7 условных единиц*).

9. ЗАДАЧИ ДИНАМИЧЕСКОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ, НЕ СВЯЗАННЫЕ СО ВРЕМЕНЕМ

До сих пор мы рассматривали только такие задачи динамического программирования, где планируемая операция развивалась во времени и распадалась на ряд шагов (этапов), следующих друг за другом в естественном, временном порядке — от первого шага к последнему. Вообще, это не обязательно: разбиение на шаги или «этапирование» в задачах динамического программирования может быть произведено не по времени, а по любому другому признаку, например, по порядковому номеру того или другого объекта.

В качестве примера рассмотрим следующую задачу.

Пусть имеется группа предприятий

$$П_1, П_2, \dots, П_m, \quad (9.1)$$

которые выпускают одну и ту же продукцию. В нашем распоряжении — какой-то запас средств K_0 , который мы можем вложить в группу предприятий (9.1) с тем, чтобы произвести сверх плана максимальное количество продукции.

Предположим, что каждое предприятие может освоить только ограниченное количество средств, и

$$k_1, k_2, \dots, k_m \quad (9.2)$$

представляют собой максимальные суммы, которые могут освоить соответственно предприятия (9.1). Если в предприятие $П_i$ вложены средства X_i , оно даст $\varphi_i(X_i)$ единиц дополнительной (сверхплановой) продукции.

Требуется так распределить имеющиеся средства между предприятиями, чтобы суммарный объем W дополнительной продукции был максимальным. Управление средствами состоит в том, что предприятиям выделяются соответственно средства:

$$X_1, X_2, \dots, X_m,$$

*) При анализе этого примера следует иметь в виду, что численные данные выбраны из методических соображений и ничего общего с реальностью не имеют.

не превосходящие в сумме имеющегося капитала K_0 :

$$\sum_{i=1}^m X_i \leq K_0,$$

и требуется найти оптимальное управление, при котором

$$W = \sum_{i=1}^m w_i = \max,$$

где w_i — дополнительная продукция i -го предприятия.

Поставленная задача легко решается методом динамического программирования; «этапом» процесса распределения средств является выделение средств i -му предприятию.

Будем нумеровать этапы (шаги) в порядке номеров предприятий (т. е. в произвольном порядке). Предположим, что средства предприятиям $П_1, \dots, П_{m-1}$ уже выделены, и к последнему, m -му шагу мы пришли с каким-то запасом средств K .

Очевидно, оптимальное управление на последнем шаге состоит в том, чтобы выделить m -му предприятию все оставшиеся средства K , если они не превосходят k_m , и максимально возможное количество средств k_m , если $K \geq k_m$. Таким образом, условное оптимальное управление на последнем шаге:

$$x_m(K) = \begin{cases} K & \text{при } K \leq k_m, \\ k_m & \text{при } K > k_m. \end{cases}$$

При таком управлении максимальный доход на последнем шаге будет

$$W_m(K) = w_m(K) = \varphi_m(x_m(K)). \quad (9.3)$$

Перейдем к планированию предпоследнего шага — выделению средств на $(m-1)$ -е предприятие. Пусть после $m-2$ шагов в нашем распоряжении остались средства K . Мы должны выбрать такое управление

$$x_{m-1} \leq k_{m-1},$$

при котором доход на $(m-1)$ -м шаге плюс уже оптимизированный доход на последнем обрабатывается в максимум:

$$W_{m-1}(K) = \max_{0 \leq x_{m-1} \leq k_{m-1}} \{\varphi_{m-1}(x_{m-1}) + W_m(K - x_{m-1})\}, \quad (9.4)$$

и т. д.

Основное функциональное уравнение динамического программирования будет

$$W_i(K) = \max_{0 \leq X_i \leq k_i} \{\varphi_i(X_i) + W_{i+1}(K - X_i)\}, \quad (9.5)$$

а вся процедура условной и безусловной оптимизации ничем не отличается от той задачи о распределении ресурсов по неоднородным этапам с резервированием, которую мы рассматривали выше, в § 6.

Таким образом, метод динамического программирования, который первоначально представлялся нам как специфический метод оптимизации процессов, развивающихся во времени, имеет гораздо более широкое поле применений.

Пример. Предстоит спроектировать многоступенчатую космическую ракету в пределах определенного стартового веса G . Кабина космонавта имеет заданный вес g_k . Предполагается, что ракета будет иметь m ступеней. Стартовый вес ракеты складывается из весов всех ступеней ракеты плюс вес кабины:

$$G = Q_0 + g_k,$$

где Q_0 — вес, выделенный на все m ступеней.

Каждая ступень имеет какой-то запас горючего. После израсходования горючего отработанная ступень сбрасывается и вступает в действие следующая.

Скорость ракеты в конце активного участка W складывается из m приращений скорости w_1, w_2, \dots, w_m , которые она приобретает на отдельных участках траектории, в результате работы каждой ступени. Добавочная скорость w_i , придаваемая ракете на i -м шаге, зависит, во-первых, от веса X_i , выделенного на i -ю ступень, и во-вторых, от того пассивного веса P , который приходится нести этой ступени:

$$w_i = f(X_i, P). \quad (9.6)$$

Требуется найти такое распределение веса Q_0 по отдельным ступеням, при котором скорость в конце активного участка максимальна.

Решение. Рассмотрим m ступеней ракеты как m этапов набора скорости. Состояние S системы перед началом каждого шага мы будем характеризовать одним параметром Q — оставшимся весом, подлежащим распределению между ступенями. Управление на i -м шаге состоит в выборе веса X_i , отводимого из оставшегося веса Q на данную, i -ю ступень.

Так как приращение скорости, согласно формуле (9.6), зависит от двух аргументов — веса ступени и пассивного веса P , определим этот пассивный вес. Очевидно, он равен $P = Q - X_i + g_k$, и приращение скорости будет:

$$w_i = f(X_i, Q - X_i + g_k).$$

Под влиянием управления X_i система переходит из состояния Q в состояние $Q' = Q - X_i$.

Основное функциональное уравнение будет иметь вид:

$$W_i(Q) = \max_{0 \leq X_i \leq Q} \{f(X_i, Q - X_i + g_k) + W_{i+1}(Q - X_i)\}. \quad (9.7)$$

Оптимальное управление на i -м шаге есть то значение $X_i = x_i$, при котором достигается этот максимум.

Оптимальное управление на m -м шаге (при естественном предположении, что с увеличением веса, отводимого на ступень, приращение скорости увеличивается), состоит в том, чтобы отвести на последнюю ступень весь оставшийся вес Q . При этом на последнем шаге будет приобретена скорость:

$$W_m(Q) = f(Q, g_k). \quad (9.8)$$

Далее процедура динамического программирования разворачивается обычным порядком. В результате находится оптимальный набор весов ступеней:

$$x = (x_1, x_2, \dots, x_m), \quad (9.9)$$

придающий последней ступени (кабине) максимальную скорость:

$$W_{max} = W_1(Q_0).$$

10 ЗАДАЧИ ДИНАМИЧЕСКОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ С МУЛЬТИПЛИКАТИВНЫМ КРИТЕРИЕМ

До сих пор мы рассматривали только такие задачи динамического программирования, в которых выигрыш (критерий, или показатель эффективности) складывался из суммы выигрышей w_i на отдельных шагах:

$$W = \sum_{i=1}^m w_i, \quad (10.1)$$

т. е. был аддитивен.

Иногда возникают задачи, в которых величина W представляет собой не сумму, а произведение:

$$W = \prod_{i=1}^m w_i, \quad (10.2)$$

где w_i — выигрыш на i -м шаге (предполагается, что все w_i положительны). Такой показатель или критерий эффективности называется мультипликативным.

Нетрудно убедиться, что любая задача с мультипликативным критерием может быть сведена к задаче с аддитивным критерием. Для этого достаточно, например, прологарифмировать выражение (10.2) и искать решение, обращающее в максимум логарифм величины W . Так как логарифм — возрастающая функция, то максимум логарифма соответствует максимуму величины W .

Однако для решения задач с мультипликативным критерием нет прямой надобности непременно логарифмировать его. Вся процедура динамического программирования может быть для этого случая построена непосредственно. В основу ее кладется такой выбор условного оптимального управления на каждом шаге, при котором обращается в максимум выигрыш на всех оставшихся шагах, равный произведению выигрыша на данном шаге и уже оптимизированного выигрыша на всех последующих шагах.

Основное функциональное уравнение динамического программирования для этого случая будет иметь вид:

$$W_i(S) = \max_{U_i} \{w_i(S, U_i) \cdot W_{i+1}(\varphi_i(S, U_i))\}, \quad (10.3)$$

а условие оптимальности последнего шага сохранится в том же виде, как при аддитивном критерии:

$$W_m(S) = \max_{U_m} \{w_m(S, U_m)\}. \quad (10.4)$$

Вся процедура динамического программирования с мультипликативным критерием ничем не отличается от обычной, кроме того, что под знаком максимума стоит не сумма, а произведение.

Рассмотрим одну из типичных задач динамического программирования с мультипликативным критерием.

Распределение средств для повышения надежности технического устройства

Имеется техническое устройство S , состоящее из m элементов, или узлов $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2, \dots, \mathcal{E}_m$ (см. рис. 3.39). Безотказная работа каждого элемента безусловно необходима для работы устройства S в целом.

Элементы могут отказывать (выходить из строя), причем независимо один от другого. Надежность (вероятность безотказной работы) всего устройства равна произведению надежностей всех элементов:

$$P = \prod_{i=1}^m p_i, \quad (10.5)$$

где p_i — надежность i -го элемента.

В нашем распоряжении имеются некоторые средства K_0 (в денежном, весовом или ином выражении), которые можно употребить на повышение надежностей элементов.

Количество средств X_i , вложенное в приспособления, повышающие надежность i -го элемента, доводит ее до значения

$$p_i = f_i(X). \quad (10.6)$$

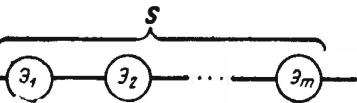


Рис. 3.39

Все функции $f_i(X)$ — неубывающие.

Требуется определить оптимальное распределение средств по элементам, приводящее к наибольшей надежности устройства в целом.

Задача решается методом динамического программирования. Перед нами — задача с мультипликативным критерием. Выигрыш на i -м шаге $p_i = f_i(X_i)$, где управление X_i — количество средств, вложенное в i -й элемент.

Основное функциональное уравнение имеет вид:

$$P_i(K) = \max_{0 \leq X_i \leq K} \{f_i(X_i) \cdot P_{i+1}(K - X_i)\}, \quad (10.7)$$

где $P_i(K)$ — условный оптимальный выигрыш, т. е. максимальная надежность устройства, составленного из всех элементов, начиная с i -го и до m -го, если после $i - 1$ -го шага, т. е. после обеспечения средствами предыдущих $i - 1$ элементов, в нашем распоряжении остались средства K . Условное оптимальное управление на i -м шаге $x_i(K)$ — то количество средств, при котором достигается этот максимум.

Как и во всех задачах распределения ресурсов, где средства расходуются до конца, а выигрыш — неубывающая функция, оптимальное управление на последнем шаге состоит в том, чтобы выделить на этот шаг все оставшиеся средства:

$$x_m(K) = K. \quad (10.8)$$

При этом достигается условный оптимальный выигрыш, равный

$$P_m(K) = f_m(K). \quad (10.9)$$

Последовательным применением формулы (10.7) для $i = m - 1, m - 2, \dots, 2$, как всегда, находим условные оптимальные управления

$$x_{m-1}(K), \quad x_{m-2}(K), \quad \dots, \quad x_2(K)$$

и условные оптимальные выигрыши

$$P_{m-1}(K), \quad P_{m-2}(K), \quad \dots, \quad P_2(K).$$

Первый шаг в данном случае оптимизируется не условно, а безусловно, так как исходное количество средств K_0 задано:

$$P_1(K_0) = \max_{0 \leq X_1 \leq K_0} \{f_1(X_1) \cdot P_2(K_0 - X_1)\}. \quad (10.10)$$

То управление

$$x_1 = x_1(K_0),$$

при котором достигается максимум (10.10), и есть безусловное оптимальное управление на первом шаге, а $P_1(K_0)$ — безусловный оптимальный выигрыш, т. е. максимально достижимая данными средствами надежность устройства. Далее оптимальное управление строится по схеме:

$$\begin{aligned} x_1 \rightarrow K_1^* = K_0 - x_1 \rightarrow x_2 \rightarrow K_2^* = K_1^* - x_2 \rightarrow \dots \\ \dots \rightarrow K_{m-1}^* = K_{m-2}^* - x_{m-1} \rightarrow x_m \rightarrow K_m^* = 0. \end{aligned}$$

11. БЕСКОНЕЧНОШАГОВЫЙ ПРОЦЕСС ДИНАМИЧЕСКОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Все задачи динамического программирования, которые мы рассматривали до сих пор, относились к процессам, разделяющимся на конечное число m шагов. Разумеется, все практические задачи, связанные с планированием экономических и подобных им операций, относятся к этому классу — планировать имеет смысл только на конечный (пусть даже очень большой) участок времени вперед. Однако, есть задачи, в которых этот участок времени представляется заранее не вполне определенным, и нас может интересовать решение задачи оптимального планирования безотносительно к тому, на каком именно шаге операция закончится. В таких случаях иногда бывает целесообразно рассмотреть в качестве модели явления некоторый идеализированный бесконечношаговый управляемый процесс, который получится из реального при $m \rightarrow \infty$. Эта модель удобна тем, что в ней не существует исключительного по своей роли «последнего шага» — все шаги между собой равноправны, процесс в известном смысле однороден. Условное оптимальное управление в таком процессе оказывается не зависящим от номера шага, а зависящим только от состояния S системы S перед началом шага. Разумеется, для этого нужно, чтобы шаги были однородными, т. е. функции, определяющие доход и изменение состояния системы под действием управления, были для всех шагов одинаковыми.

Следует подчеркнуть, что в однородном бесконечношаговом процессе одинаковыми для всех шагов оказываются только условные оптимальные управления; что касается безусловного оптимального управления, то оно, будучи зависимым от состояния системы, достигнутого к данному шагу, в общем случае меняется от шага к шагу.

Заметим, что в отличие от конечношаговых задач, для которых оптимальное управление всегда существует, бесконечношаговые задачи могут и не иметь решения. Чтобы убедиться в этом, рассмотрим элементарный пример.

Пусть имеется задача распределения ресурсов с резервированием (см. § 6), но с бесконечным числом шагов. Средства X , вложенные в производство, дают за год доход $f(X)$ и расходуются до конца. В на-

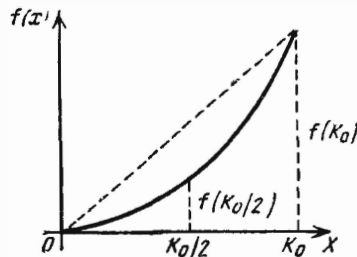


Рис. 3.40

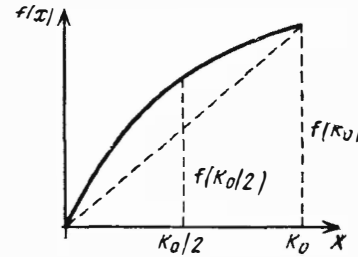


Рис. 3.41

шем распоряжении имеется исходный запас средств K_0 , который требуется оптимальным образом распределить по годам, так чтобы суммарный доход был максимален.

Существование и вид решения зависит от того, каков вид функции $f(X)$.

Предположим, что эта функция выпукла вниз (рис. 3.40). Тогда очевидно, что оптимальное решение существует и состоит в том, чтобы вложить в производство все имеющиеся средства в первый же год. Действительно, предположим, что мы, например, разделили средства пополам, первую половину вложили в производство на первом году, а вторую — на следующем году. Очевидно, это будет невыгодно, так как для выпуклой вниз функции $f(X)$

$$2f(K_0/2) < f(K_0).$$

Предположим теперь, что функция $f(X)$ выпукла вверх (рис. 3.41).

Очевидно, что в этом случае выгодно не вкладывать в производство все средства сразу, а «растянуть» их. Например, если мы, вместо того, чтобы вкладывать в производство все средства на первом же шаге, распределим их на два шага, то получим больший доход:

$$2f(K_0/2) > f(K_0),$$

на три шага — еще больший, и т. д. При увеличении числа шагов, на которые распределяются средства, доход только возрастает.

Определим предел, к которому будет стремиться суммарный доход при неограниченном возрастании числа шагов, в которые вкладываются средства, и значит, при одновременном уменьшении числа средств, вкладываемых на каждом шагу. Предположим сначала, что мы планируем на m лет и каждый год вкладываем в производство одну и ту же сумму

$$\Delta X = K_0/m,$$

а затем устремим m к бесконечности, а ΔX — к нулю. Из рис. 3.42 видно, что при достаточно малом ΔX можно заменить участок кривой $f(X)$ участком касательной в начале координат. Тогда доход, получаемый за год, будет приближенно равен

$$f'(0) \Delta X \approx f'(0) K_0/m,$$

где $f'(0)$ — значение производной функции дохода в начале координат. При этом суммарный доход за весь период m лет будет приближенно равен

$$W \approx f'(0) K_0. \quad (11.1)$$

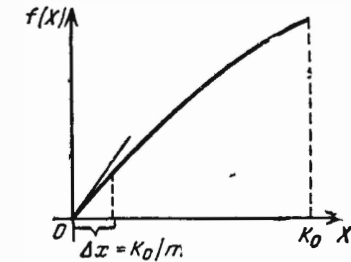


Рис. 3.42

При $m \rightarrow \infty$ приближенное равенство (11.1) превращается в точное.

Таким образом, мы получили парадоксальный вывод: чем меньше средств мы вкладываем в производство на каждом году, тем больше будет доход; в пределе, при $m \rightarrow \infty$, получится максимальный доход (11.1). Если же прямо перейти к предельному случаю и положить $\Delta X = 0$, т. е. не вкладывать в производство никаких средств, то, очевидно, и доход будет равен нулю.

Это пример бесконечношаговой задачи, где оптимального решения не существует. При любом конечном m оно существует и состоит в том, чтобы вкладывать средства во все этапы поровну, а при бесконечном числе шагов перестает существовать.

При постановке и решении бесконечношаговых задач методом динамического программирования всегда необходимо исследовать вопрос о существовании решения*).

Бесконечношаговая модель в задачах динамического программирования в ряде случаев может оказаться проще, чем конечношаговая. Действительно, вместо ряда функциональных уравнений, решаемых одно за другим в обычной процедуре динамического программирования, здесь приходится решать всего только одно функциональное уравнение для условного оптимального выигрыша, пригодное для любого шага.

Запишем это единственное функциональное уравнение. Пусть бесконечношаговый управляемый процесс происходит в физической си-

*) Условия существования решения в бесконечношаговых задачах рассмотрены, например, в [10].

стеме S ; обозначим S — состояние этой системы после какого-то (любого) шага. Под влиянием управления U система S за следующий шаг переходит в новое состояние S' , зависящее от предыдущего состояния S и примененного управления U :

$$S' = \varphi(S, U).$$

За этот шаг мы получаем выигрыш (доход) ω , также зависящий от S и U :

$$\omega = f(S, U).$$

Тогда можно написать основное функциональное уравнение для бесконечношаговой задачи в виде:

$$W(S) = \max_U \{f(S, U) + W(\varphi(S, U))\}, \quad (11.2)$$

где $W(S)$ — условный максимальный выигрыш, который можно получить, управляя системой, находящейся в состоянии S . В уравнении (11.2) $W(S)$ — единственная неизвестная функция; остальные функции (φ , f) являются заданными. Условное оптимальное управление $u(S)$ — то управление, при котором достигается максимум (11.2).

В некоторых простейших задачах удается подобрать функцию $W(S)$ так, чтобы она удовлетворяла уравнению (11.2). Общих методов аналитического решения функциональных уравнений не существует. В случаях, когда подобрать функцию $W(S)$, удовлетворяющую уравнению (11.2), не удается, прибегают к приближенному решению этого уравнения. Для этого может быть применен метод последовательных приближений, состоящий в следующем: решается задача динамического программирования для конечного, все возрастающего числа шагов m ; если решение существует, то при возрастании m функции $W_i(S)$ и $u_i(S)$, определяющие условный оптимальный выигрыш и условное оптимальное управление для шагов, достаточно удаленных от конца, стабилизируются, приближаясь к соответствующим функциям $W(S)$ и $u(S)$ для бесконечношагового процесса, в качестве которых они и могут быть приближенно взяты.

В заключение отметим, что бесконечношаговые задачи динамического программирования могут получаться не только за счет неограниченного увеличения числа шагов при заданной длине каждого шага, но и за счет неограниченного уменьшения длины шага Δt , когда дискретное поэтапное управление переходит в непрерывное. Такие задачи достаточно сложны, и мы не будем на них останавливаться.

МОДЕЛИРОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ ПО СХЕМЕ МАРКОВСКИХ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ

1. МАРКОВСКИЙ СЛУЧАЙНЫЙ ПРОЦЕСС С ДИСКРЕТНЫМИ СОСТОЯНИЯМИ

Многие операции, которые приходится анализировать под углом зрения выбора оптимального решения, развиваются как случайные процессы, ход и исход которых зависят от ряда случайных факторов, сопровождающих эти операции.

Для того, чтобы вычислить числовые параметры, характеризующие эффективность таких операций, нужно построить некоторую вероятностную модель явления, учитывающую сопровождающие его случайные факторы.

Для математического описания многих операций, развивающихся в форме случайного процесса, может быть с успехом применен математический аппарат, разработанный в теории вероятностей для так называемых марковских случайных процессов.

Поясним понятие марковского случайного процесса.

Пусть имеется некоторая физическая система S , состояние которой меняется с течением времени (под системой S может пониматься что угодно: техническое устройство, ремонтная мастерская, вычислительная машина, железнодорожный узел и т. д.). Если состояние системы S меняется во времени случайным, заранее непредсказуемым образом, мы говорим, что в системе S протекает случайный процесс.

Примерами случайных процессов могут быть:

- процесс функционирования ЭЦВМ;
- процесс наведения на цель управляемой ракеты или космического летательного аппарата;
- процесс обслуживания клиентов парикмахерской или ремонтной мастерской;
- процесс выполнения плана снабжения группы предприятий и т. д.

Конкретное протекание каждого из таких процессов зависит от ряда случайных, заранее непредсказуемых факторов, таких как:

- поступление заказов на ЭЦВМ и вид этих заказов; случайные выходы ЭЦВМ из строя;
- случайные возмущения (помехи) в системе управления ракетой;

— случайный характер потока заявок (требований), поступающих со стороны клиентов;

— случайные перебои в выполнении плана снабжения и т. д.

Случайный процесс, протекающий в системе S , называется марковским процессом (или «процессом без последствий»), если он обладает следующим свойством:

Для каждого момента времени t_0 вероятность любого состояния системы в будущем (при $t > t_0$) зависит только от ее состояния в настоящем (при $t = t_0$) и не зависит от того, когда и каким образом система пришла в это состояние (т. е. как развивался процесс в прошлом).

Другими словами, в марковском случайном процессе будущее развитие его зависит только от настоящего состояния и не зависит от «предыстории» процесса.

Рассмотрим пример. Пусть система S представляет собой техническое устройство, которое уже проработало некоторое время, соответствующим образом «износилось» и пришло в некоторое состояние, характеризующееся определенной степенью изношенности S . Нас интересует, как будет работать система в будущем. Ясно, что, по крайней мере в первом приближении, характеристики работы системы в будущем (частота отказов, потребность в ремонте) зависят от состояния устройства в настоящий момент и не зависят от того, когда и как устройство достигло своего настоящего состояния.

На практике часто встречаются случайные процессы, которые, с той или другой степенью приближения, можно считать марковскими.

Теория марковских случайных процессов является в настоящее время очень обширным разделом теории вероятностей с широким спектром различных приложений — от описания физических явлений типа диффузии или перемешивания шихты во время плавки в доменной печи до процессов образования очередей или распространения мутаций генов в биологической популяции. Нас будут интересовать, главным образом, применения теории марковских случайных процессов к построению математических моделей операций, ход и исход которых существенно зависит от случайных факторов.

Марковские случайные процессы делятся на классы по некоторым признакам, в зависимости от того, как и в какие моменты времени система S может менять свои состояния.

Случайный процесс называется процессом с дискретными состояниями, если возможные состояния системы:

$$S_1, S_2, S_3, \dots$$

можно перечислить (перенумеровать) одно за другим, а сам процесс состоит в том, что время от времени система S скачком (мгновенно) перескакивает из одного состояния в другое.

Пример 1. Техническое устройство S состоит из двух узлов: I и II, каждый из которых может в ходе работы устройства отказаться (выйти из строя). Возможны следующие состояния системы:

- S_1 — оба узла работают;
- S_2 — первый узел отказал, второй работает;
- S_3 — второй узел отказал, первый работает;
- S_4 — оба узла отказали.

Процесс, протекающий в системе, состоит в том, что она случайным образом, в какие-то моменты времени, переходит (перескакивает) из состояния в состояние. Всего у системы четыре возможных состояния, которые мы перенумеровали. Перед нами — процесс с дискретными состояниями.

Кроме процессов с дискретными состояниями существуют случайные процессы с непрерывными состояниями: для этих процессов характерен постепенный, плавный переход из состояния в состояние. Например, процесс изменения напряжения в осветительной сети представляет собой случайный процесс с непрерывными состояниями.

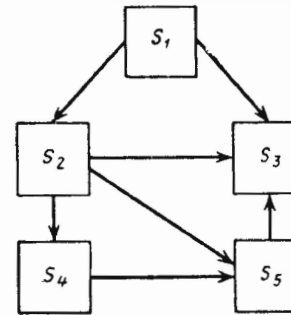


Рис. 4.1

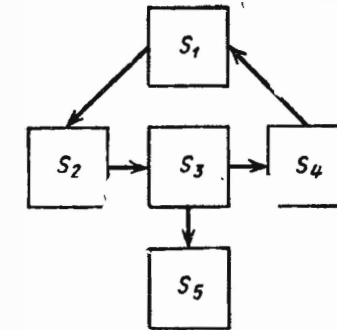


Рис. 4.2

В данной главе мы будем рассматривать только случайные процессы с дискретными состояниями.

При анализе случайных процессов с дискретными состояниями очень удобно пользоваться геометрической схемой — так называемым графом состояний. Граф состояний геометрически изображает возможные состояния системы и ее возможные переходы из состояния в состояние.

Пусть имеется система S с дискретными состояниями:

$$S_1, S_2, \dots, S_n.$$

Мы будем изображать каждое состояние прямоугольником, а возможные переходы («перескоки») из состояния в состояние — стрелками, соединяющими эти прямоугольники (рис. 4.1).

Заметим, что стрелками отмечаются только непосредственные переходы из состояния в состояние; если система может перейти из состояния S_1 в S_3 только через S_2 , то стрелками отмечаются только переходы $S_1 \rightarrow S_2$ и $S_2 \rightarrow S_3$, но не $S_1 \rightarrow S_3$.

Пример 2. Система S — автомашина, которая может находиться в одном из пяти возможных состояний:

- S_1 — исправна, работает;
- S_2 — неисправна, ожидает осмотра;

S_3 — осматривается;
 S_4 — ремонтируется;
 S_5 — списана.

Граф состояний системы показан на рис. 4.2.

Пример 3. Построить граф состояний в условиях примера 1 (предполагается, что ремонт узлов в ходе процесса не производится).

Решение. Граф состояний представлен на рис. 4.3. Отметим, что на графе не показан возможный переход из состояния S_1 непосредственно в S_4 , который осуществится, если строго одновременно выйдут из строя оба узла. Возможностью такого события мы пренебрегаем.

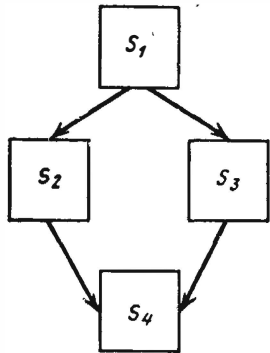


Рис. 4.3

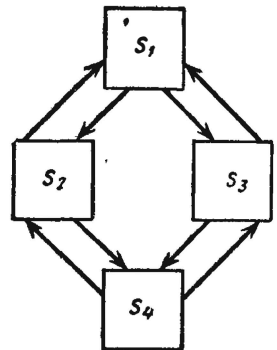


Рис. 4.4

Пример 4. Система S , как и в примере 1, представляет собой техническое устройство, состоящее из двух узлов: I и II; каждый из них может в какой-то момент времени отказать. Отказавший узел немедленно начинает восстанавли-

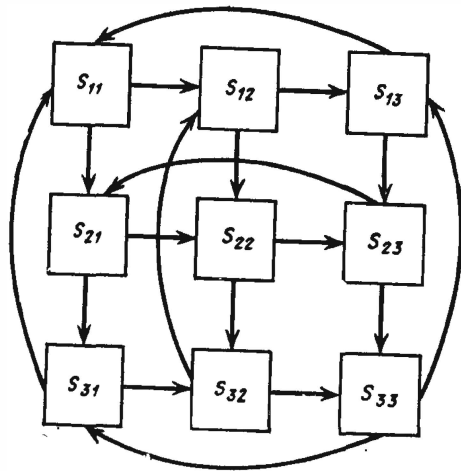


Рис. 4.5

ваться. Возможные состояния системы:

S_1 — оба узла работают;
 S_2 — первый узел восстанавливается, второй работает;
 S_3 — первый узел работает, второй восстанавливается;
 S_4 — оба узла восстанавливаются

Граф состояний системы показан на рис. 4.4

Пример 5. В условиях примера 4 каждый узел перед тем, как начать восстанавливаться, подвергается осмотру с целью локализации неисправности.

Состояния системы будем для удобства нумеровать не одним, а двумя индексами; первый будет означать состояния первого узла:

1 — работает,
 2 — осматривается,
 3 — восстанавливается;

второй — те же состояния для второго узла, так что, например, S_{23} будет означать: первый узел осматривается, второй — восстанавливается, и т. д.

Возможные состояния системы S будут:

S_{11} — оба узла работают,
 S_{12} — первый узел работает, второй осматривается,

S_{33} — оба узла восстанавливаются
 (всего 9 состояний).

Граф состояний показан на рис. 4.5.

2. СЛУЧАЙНЫЕ ПРОЦЕССЫ С ДИСКРЕТНЫМ И НЕПРЕРЫВНЫМ ВРЕМЕНЕМ. МАРКОВСКАЯ ЦЕПЬ

Способы математического описания марковского случайного процесса, протекающего в системе с дискретными состояниями, зависят от того, в какие моменты времени — заранее известные или случайные — могут происходить переходы («перескоки») системы из состояния в состояние.

Случайный процесс называется процессом с дискретным временем, если переходы системы из состояния в состояние возможны только в строго определенные, заранее фиксированные моменты времени: t_1, t_2, \dots . В промежутки времени между этими моментами система S сохраняет свое состояние.

Случайный процесс называется процессом с непрерывным временем, если переход системы из состояния в состояние возможен в любой, наперед неизвестный, случайный момент t .

Рассмотрим прежде всего марковский случайный процесс с дискретными состояниями и дискретным временем.

Пусть имеется физическая система S , которая может находиться в состояниях:

$$S_1, S_2, \dots, S_n,$$

причем переходы («перескоки») системы из состояния в состояние возможны только в моменты:

$$t_1, t_2, \dots, t_k, \dots$$

Будем называть эти моменты «шагами» или «этапами» процесса и рассматривать случайный процесс, происходящий в системе S , как функцию целочисленного аргумента: $1, 2, \dots, k, \dots$ (номера шага).

Случайный процесс, происходящий в системе, состоит в том, что в последовательные моменты времени t_1, t_2, t_3, \dots , система S оказывается в тех или других состояниях, ведя себя, например, следующим образом:

$$S_1 \rightarrow S_3 \rightarrow S_6 \rightarrow S_4 \rightarrow S_2 \rightarrow S_1 \rightarrow \dots$$

или же

$$S_1 \rightarrow S_2 \rightarrow S_1 \rightarrow S_2 \rightarrow S_3 \rightarrow S_4 \rightarrow S_1 \rightarrow \dots$$

В общем случае в моменты t_1, t_2, \dots система может не только менять состояние, но и оставаться в прежнем, например:

$$S_1 \rightarrow S_1 \rightarrow S_2 \rightarrow S_3 \rightarrow S_3 \rightarrow S_3 \rightarrow S_4 \rightarrow S_1 \rightarrow \dots$$

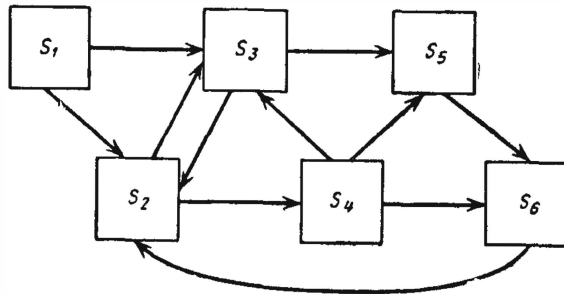


Рис. 4.6

Условимся обозначать $S_i^{(k)}$ событие, состоящее в том, что после k -шагов система находится в состоянии S_i . При любом k события

$$S_1^{(k)}, S_2^{(k)}, \dots, S_i^{(k)}, \dots, S_n^{(k)}$$

образуют полную группу и несовместны.

Процесс, происходящий в системе, можно представить как последовательность (цепочку) событий, например:

$$S_1^{(0)}, S_2^{(1)}, S_1^{(2)}, S_2^{(3)}, S_3^{(4)}, \dots$$

Такая случайная последовательность событий называется марковской цепью, если для каждого шага вероятность перехода из любого состояния S_i в любое S_j не зависит от того, когда и как система пришла в состояние S_i .

Мы будем описывать марковскую цепь с помощью так называемых вероятностей состояний. Пусть в любой момент времени (после любого, k -го шага) система S может быть в одном из состояний:

$$S_1, S_2, \dots, S_n,$$

т. е. осуществится одно из полной группы несовместных событий:

$$S_1^{(k)}, S_2^{(k)}, \dots, S_n^{(k)}.$$

Обозначим вероятности этих событий:

$$p_1(1) = P(S_1^{(1)}); \quad p_2(1) = P(S_2^{(1)}); \quad \dots; \quad p_n(1) = P(S_n^{(1)})$$

— вероятности после первого шага,

$$p_1(2) = P(S_1^{(2)}); \quad p_2(2) = P(S_2^{(2)}); \quad \dots; \quad p_n(2) = P(S_n^{(2)}) \quad (2.1)$$

— вероятности после второго шага; и вообще после k -го шага:

$$p_1(k) = P(S_1^{(k)}); \quad p_2(k) = P(S_2^{(k)}); \quad \dots; \quad p_n(k) = P(S_n^{(k)}). \quad (2.2)$$

Легко видеть, что для каждого номера шага k

$$p_1(k) + p_2(k) + \dots + p_n(k) = 1,$$

так как это — вероятности несовместных событий, образующих полную группу.

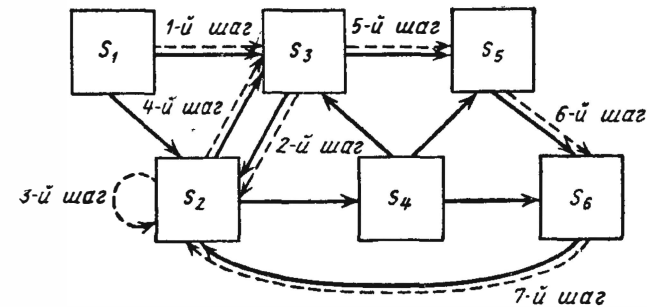


Рис. 4.7

Будем называть вероятности

$$p_1(k), p_2(k), \dots, p_n(k)$$

вероятностями состояний; поставим задачу: найти вероятности состояний системы для любого k .

Изобразим состояния системы в виде графа (рис. 4.6), где стрелками указаны возможные переходы системы из состояния в состояние за один шаг.

Случайный процесс (марковскую цепь) можно представить себе так, как будто точка, изображающая систему S , случайным образом перемещается (блуждает) по графу состояний, перескакивая из состояния в состояние в моменты t_1, t_2, \dots , а иногда (в общем случае) и задерживаясь какое-то число шагов в одном и том же состоянии. Например, последовательность переходов

$$S_1 \rightarrow S_3 \rightarrow S_2 \rightarrow S_2 \rightarrow S_3 \rightarrow S_6 \rightarrow S_6 \rightarrow S_2$$

можно изобразить на графе состояний как последовательность различных положений точки (см. пунктирные стрелки, изображающие переходы из состояния в состояние на рис. 4.7). «Задержка» системы в состоянии S_2 на третьем шаге изображена стрелкой, выходящей из состояния S_2 и в него же возвращающейся.

Для любого шага (момента времени $t_1, t_2, \dots, t_k, \dots$ или номера $1, 2, \dots, k, \dots$) существуют какие-то вероятности перехода системы из любого состояния в любое другое (некоторые из них равны нулю, если непосредственный переход за один шаг невозможен), а также вероятность задержки системы в данном состоянии.

Будем называть эти вероятности переходными вероятностями и вероятностями задержки в марковской цепи.

Марковская цепь называется однородной, если переходные вероятности не зависят от номера шага. В противном случае марковская цепь называется неоднородной.

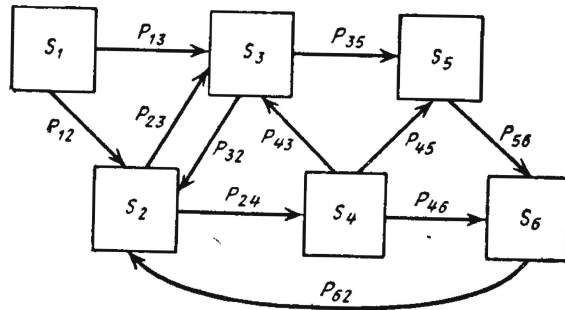


Рис. 4.8

Рассмотрим сначала однородную марковскую цепь. Пусть система S имеет n возможных состояний S_1, S_2, \dots, S_n . Предположим, что для каждого состояния нам известна вероятность перехода в любое другое состояние за один шаг (в том числе и вероятность задержки в данном состоянии). Обозначим P_{ij} вероятность перехода за один шаг из состояния S_i в состояние S_j ; P_{ii} будет вероятностью задержки системы в состоянии S_i . Запишем переходные вероятности P_{ij} в виде прямоугольной таблицы (матрицы):

$$\|P_{ij}\| = \begin{vmatrix} P_{11} & P_{12} & \dots & P_{1j} & \dots & P_{1n} \\ P_{21} & P_{22} & \dots & P_{2j} & \dots & P_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ P_{i1} & P_{i2} & \dots & P_{ij} & \dots & P_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ P_{n1} & P_{n2} & \dots & P_{nj} & \dots & P_{nn} \end{vmatrix}. \quad (2.3)$$

Некоторые из переходных вероятностей P_{ij} могут быть равны нулю: это означает, что за один шаг переход системы из i -го состояния в j -е невозможно. По главной диагонали матрицы переходных вероятностей стоят вероятности P_{ii} того, что система не выйдет из состояния S_i , а останется в нем.

Пользуясь введенными выше событиями $S_1^{(k)}, S_2^{(k)}, \dots, S_n^{(k)}$, переходные вероятности P_{ij} можно записать как условные вероятности:

$$P_{ij} = P(S_j^{(k)} / S_i^{(k-1)}).$$

Отсюда следует, что сумма членов, стоящих в каждой строке матрицы (2.3), должна быть равна единице, так как, в каком бы состоянии система ни была перед k -м шагом, события $S_1^{(k)}, S_2^{(k)}, \dots, S_n^{(k)}$ несовместны и образуют полную группу.

При рассмотрении марковских цепей часто бывает удобно пользоваться графом состояний, на котором у стрелок проставлены соответствующие переходные вероятности (см. рис. 4.8). Такой граф мы будем называть «размеченным графом состояний».

Заметим, что на рис. 4.8 проставлены не все переходные вероятности, а только те из них, которые не равны нулю и меняют состояние системы, т. е. P_{ij} при $i \neq j$; «вероятности задержки» P_{11}, P_{22}, \dots проставлять на графе излишне, так как каждая из них дополняет до единицы сумму переходных вероятностей, соответствующих всем стрелкам, исходящим из данного состояния. Например, для графа рис. 4.8

$$\begin{aligned} P_{11} &= 1 - (P_{12} + P_{13}), \\ P_{22} &= 1 - (P_{23} + P_{24}), \\ P_{33} &= 1 - (P_{32} + P_{35}), \\ P_{44} &= 1 - (P_{43} + P_{45} + P_{46}), \\ P_{55} &= 1 - P_{56}, \\ P_{66} &= 1 - P_{62}. \end{aligned}$$

Если из состояния S_i не исходит ни одной стрелки (переход из него ни в какое другое состояние невозможен), соответствующая вероятность задержки P_{ii} равна единице.

Имея в распоряжении размеченный граф состояний (или, что равносильно, матрицу переходных вероятностей) и зная начальное состояние системы, можно найти вероятности состояний

$$p_1(k), p_2(k), \dots, p_n(k)$$

после любого (k -го) шага.

Покажем, как это делается.

Предположим, что в начальный момент (перед первым шагом) система находится в каком-то определенном состоянии, например, S_m . Тогда, для начального момента (0) будем иметь:

$$p_1(0) = 0; \quad p_2(0) = 0; \quad \dots; \quad p_m(0) = 1; \quad \dots; \quad p_n(0) = 0,$$

т. е. вероятности всех состояний равны нулю, кроме вероятности начального состояния S_m , которая равна единице.

Найдем вероятности состояний после первого шага. Мы знаем, что перед первым шагом система заведомо находится в состоянии S_m . Значит, за первый шаг она перейдет в состояния $S_1, S_2, \dots, S_m, \dots, S_n$ с вероятностями

$$P_{m1}, P_{m2}, \dots, P_{mm}, \dots, P_{mn},$$

записанными в m -й строке матрицы переходных вероятностей. Таким образом, вероятности состояний после первого шага будут:

$$p_1(1) = P_{m1}; \quad p_2(1) = P_{m2}; \quad \dots; \quad p_m(1) = P_{mm}; \quad \dots; \quad p_n(1) = P_{mn}. \quad (2.4)$$

Вероятности состояний после третьего шага:

$$\begin{aligned} p_1(3) &= p_1(2) P_{11} = 0,09 \cdot 0,3 = \underline{0,027}; \\ p_2(3) &= p_1(2) P_{12} + p_2(2) P_{22} = 0,09 \cdot 0,4 + 0,28 \cdot 0,4 = \underline{0,148}; \\ p_3(3) &= p_1(2) P_{13} + p_2(2) P_{23} + p_3(2) P_{33} = \\ &= 0,09 \cdot 0,2 + 0,28 \cdot 0,4 + 0,28 \cdot 0,3 = \underline{0,214}; \\ p_4(3) &= p_1(2) P_{14} + p_2(2) P_{24} + p_3(2) P_{34} + p_4(2) P_{44} = \\ &= 0,09 \cdot 0,1 + 0,28 \cdot 0,2 + 0,28 \cdot 0,7 + 0,35 \cdot 1 = \underline{0,611}. \end{aligned}$$

Вероятности состояний после четвертого шага:

$$\begin{aligned} p_1(4) &= p_1(3) P_{11} = 0,0081; \\ p_2(4) &= p_1(3) P_{12} + p_2(3) P_{22} = 0,27 \cdot 0,4 + 0,148 \cdot 0,4 = \underline{0,0700}; \\ p_3(4) &= p_1(3) P_{13} + p_2(3) P_{23} + p_3(3) P_{33} = \\ &= 0,027 \cdot 0,2 + 0,148 \cdot 0,4 + 0,214 \cdot 0,3 = \underline{0,1288}; \\ p_4(4) &= p_1(3) P_{14} + p_2(3) P_{24} + p_3(3) P_{34} + p_4(3) P_{44} = \\ &= 0,027 \cdot 0,1 + 0,148 \cdot 0,2 + 0,214 \cdot 0,7 + 0,611 \cdot 1 = \underline{0,7931}. \end{aligned}$$

Таким образом, нами получены вероятности всех исходов обстрела цели (четыре выстрелов):

- цель не повреждена: $p_1(4) \approx 0,008$;
- цель получила незначительные повреждения: $p_2(4) \approx 0,070$;
- цель получила существенные повреждения: $p_3(4) \approx 0,129$;
- цель поражена полностью: $p_4(4) \approx 0,793$.

Мы рассмотрели однородную марковскую цепь, для которой вероятности перехода от шага к шагу не меняются.

Рассмотрим теперь общий случай — неоднородную марковскую цепь, для которой вероятности перехода P_{ij} меняются от шага к шагу. Обозначим $P_{ij}^{(k)}$ — вероятность перехода системы из состояния S_i в состояние S_j на k -м шаге, то есть условную вероятность

$$P_{ij}^{(k)} = P(S_j^{(k)} / S_i^{(k-1)}).$$

Предположим, что нам заданы матрицы вероятностей перехода на каждом шаге. Тогда вероятность того, что система S после k шагов будет находиться в состоянии S_i , выразится формулой:

$$p_i(k) = \sum_j p_j(k-1) P_{ji}^{(k)} \quad (i = 1, \dots, n), \quad (2.9)$$

которая отличается от аналогичной формулы (2.8) для однородной цепи Маркова только тем, что в ней фигурируют вероятности перехода, зависящие от номера шага k . Вычисления по формуле (2.9) ничуть не сложнее, чем в случае однородной цепи.

Пример 2. Производится три выстрела по цели, которая может быть в тех же четырех состояниях S_1, S_2, S_3, S_4 , что и в предыдущем примере, но вероятности перехода для трех последовательных выстрелов различны и заданы тремя матрицами:

$$\|P_{ij}^{(1)}\| = \begin{vmatrix} 0,3 & 0,4 & 0,2 & 0,1 \\ 0 & 0,4 & 0,4 & 0,2 \\ 0 & 0 & 0,3 & 0,7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix};$$

$$\|P_{ij}^{(2)}\| = \begin{vmatrix} 0,1 & 0,4 & 0,3 & 0,2 \\ 0 & 0,2 & 0,5 & 0,3 \\ 0 & 0 & 0,2 & 0,8 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix};$$

$$\|P_{ij}^{(3)}\| = \begin{vmatrix} 0,05 & 0,3 & 0,4 & 0,25 \\ 0 & 0,1 & 0,6 & 0,3 \\ 0 & 0 & 0,1 & 0,9 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

В начальный момент цель находится в состоянии S_1 . Найти вероятности состояний после трех выстрелов.

Решение. Имеем:

$$p_1(1) = 0,3; \quad p_2(1) = 0,4; \quad p_3(1) = 0,2; \quad p_4(1) = 0,1;$$

$$p_1(2) = p_1(1) P_{11}^{(2)} = 0,3 \cdot 0,1 = \underline{0,03};$$

$$p_2(2) = p_1(1) P_{12}^{(2)} + p_2(1) P_{22}^{(2)} = 0,3 \cdot 0,4 + 0,4 \cdot 0,2 = \underline{0,20};$$

$$\begin{aligned} p_3(2) &= p_1(1) P_{13}^{(2)} + p_2(1) P_{23}^{(2)} + p_3(1) P_{33}^{(2)} = \\ &= 0,3 \cdot 0,3 + 0,4 \cdot 0,5 + 0,2 \cdot 0,2 = \underline{0,33}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p_4(2) &= p_1(1) P_{14}^{(2)} + p_2(1) P_{24}^{(2)} + p_3(1) P_{34}^{(2)} + p_4(1) P_{44}^{(2)} = 0,3 \cdot 0,2 + \\ &+ 0,4 \cdot 0,3 + 0,2 \cdot 0,8 + 0,1 \cdot 1 = \underline{0,44}; \end{aligned}$$

$$p_1(3) = p_1(2) P_{11}^{(3)} = 0,03 \cdot 0,05 \approx \underline{0,002};$$

$$p_2(3) = p_1(2) P_{12}^{(3)} + p_2(2) P_{22}^{(3)} = 0,03 \cdot 0,3 + 0,20 \cdot 0,1 = \underline{0,029};$$

$$\begin{aligned} p_3(3) &= p_1(2) P_{13}^{(3)} + p_2(2) P_{23}^{(3)} + p_3(2) P_{33}^{(3)} = \\ &= 0,3 \cdot 0,4 + 0,20 \cdot 0,6 + 0,33 \cdot 0,1 = \underline{0,165}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p_4(3) &= p_1(2) P_{14}^{(3)} + p_2(2) P_{24}^{(3)} + p_3(2) P_{34}^{(3)} + p_4(2) P_{44}^{(3)} = \\ &= 0,03 \cdot 0,25 + 0,20 \cdot 0,3 + 0,33 \cdot 0,9 + 0,44 \cdot 1 \approx \underline{0,804}. \end{aligned}$$

Итак, вероятности состояний после трех выстрелов:

$$p_1(3) \approx 0,002; \quad p_2(3) = 0,029; \quad p_3(3) = 0,165; \quad p_4(3) \approx 0,804.$$

3. МАРКОВСКИЙ ПРОЦЕСС С ДИСКРЕТНЫМИ СОСТОЯНИЯМИ И НЕПРЕРЫВНЫМ ВРЕМЕНЕМ. УРАВНЕНИЯ КОЛМОГОВОРА ДЛЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ СОСТОЯНИЙ

В предыдущем параграфе мы рассматривали марковскую цепь, т. е. случайный процесс, протекающий в системе, которая случайным образом может переходить из состояния в состояние только в некоторые заранее определенные, фиксированные моменты времени.

На практике значительно чаще встречаются ситуации, когда переходы системы из состояния в состояние происходят не в фиксированные, а в случайные моменты времени, которые заранее указать невозможно — переход может осуществиться, вообще говоря, в любой момент. Например, выход из строя (отказ) любого элемента аппаратуры может произойти в любой момент времени; окончание ремонта (восстановление) этого элемента также может произойти в заранее не зафиксированный момент и т. д.

Для описания таких процессов в ряде случаев может быть с успехом применена схема марковского случайного процесса с дискретными состояниями и непрерывным временем, который мы будем для краткости называть *непрерывной цепью Маркова*.

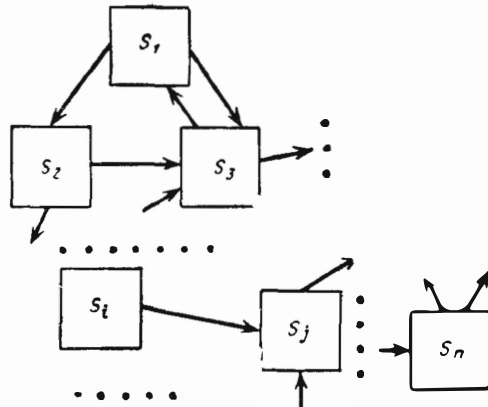


Рис. 4.10

Покажем, как выражаются вероятности состояний для такого процесса.

Пусть имеется ряд дискретных состояний:

$$S_1, S_2, \dots, S_n;$$

переход (перескок) системы S из состояния в состояние может осуществляться в любой момент времени. Граф состояний системы представлен на рис. 4.10.

Обозначим $p_i(t)$ — вероятность того, что в момент t система S будет находиться в состоянии S_i ($i = 1, \dots, n$). Очевидно, для любого момента t сумма вероятностей состояний равна единице:

$$\sum_{i=1}^n p_i(t) = 1, \quad (3.1)$$

так как события, состоящие в том, что в момент t система находится в состояниях S_1, S_2, \dots, S_n , несовместны и образуют полную группу.

Поставим задачу — определить для любого t вероятности состояний:

$$p_1(t), p_2(t), \dots, p_n(t).$$

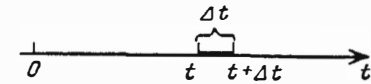


Рис. 4.11

Для того, чтобы найти эти вероятности, необходимо знать характеристики процесса, аналогичные переходным вероятностям для марковской цепи. В случае процесса с непрерывным временем нам не придется задавать определенные, отличные от нуля, переходные вероятности P_{ij} ; вероятность перехода (перескока) системы из состояния в состояние *точно* в момент t будет равна нулю (так же как вероятность любого отдельного значения непрерывной случайной величины). Вместо переходных вероятностей P_{ij} мы введем в рассмотрение *плотности вероятностей* перехода λ_{ij} .

Пусть система S в момент t находится в состоянии S_i . Рассмотрим элементарный промежуток времени Δt , примыкающий к моменту t (рис. 4.11).

Назовем *плотностью вероятности* перехода λ_{ij} предел отношения вероятности перехода системы за время Δt из состояния S_i в состояние S_j к длине промежутка Δt :

$$\lambda_{ij} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{P_{ij}(\Delta t)}{\Delta t}, \quad (3.2)$$

где $P_{ij}(\Delta t)$ — вероятность того, что система, находившаяся в момент t в состоянии S_i , за время Δt перейдет из него в состояние S_j (плотность вероятностей перехода определяется только для $i \neq j$).

Из формулы (3.2) следует, что при малом Δt вероятность перехода $P_{ij}(\Delta t)$ (с точностью до бесконечно малых высших порядков) равна $\lambda_{ij}\Delta t$:

$$P_{ij}(\Delta t) \approx \lambda_{ij} \Delta t.$$

Если все плотности вероятностей перехода λ_{ij} не зависят от t (т. е. от того, в какой момент начинается элементарный участок Δt), марковский процесс называется *однородным*; если эти плотности представляют собой какие-то функции времени $\lambda_{ij}(t)$, процесс называется *неоднородным*. При пользовании сокращенным назва-

нием «непрерывная марковская цепь» мы также будем различать однородные и неоднородные цепи.

Предположим, что нам известны плотности вероятностей перехода λ_{ij} для всех пар состояний S_i, S_j .

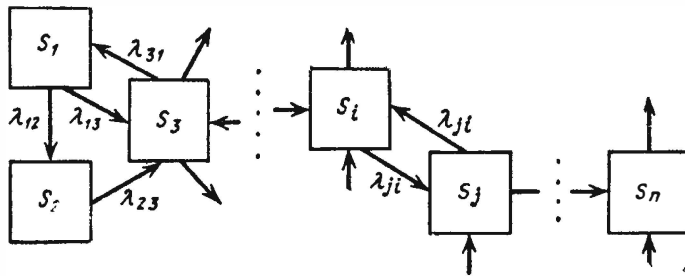


Рис. 4.12

Построим граф состояний системы S и против каждой стрелки поставим соответствующую плотность вероятности перехода (рис. 4.12).

Такой граф, с проставленными у стрелок плотностями вероятностей перехода, мы будем называть размеченным графом состояний.

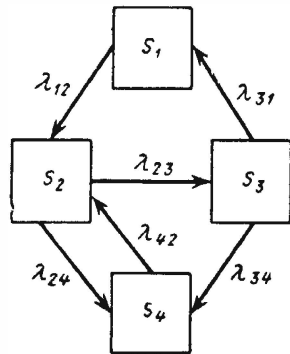


Рис. 4.13

Оказывается, зная размеченный граф состояний, можно определить вероятности состояний:

$$p_1(t), p_2(t), \dots, p_n(t) \quad (3.3)$$

как функции времени. А именно, эти вероятности удовлетворяют определенного вида дифференциальным уравнениям, так называемым уравнениям Колмогорова. Решая эти уравнения, мы получим вероятности (3.3).

Продemonстрируем методику вывода уравнений Колмогорова для вероятностей состояний на конкретном примере.

Пусть система S имеет четыре возможных состояния:

$$S_1, S_2, S_3, S_4;$$

размеченный граф состояний системы показан на рис. 4.13.

Поставим себе задачу: найти одну из вероятностей состояний, например, $p_1(t)$. Это есть вероятность того, что в момент t система будет находиться в состоянии S_1 .

Придадим t малое приращение Δt и найдем вероятность того, что в момент $t + \Delta t$ система будет находиться в состоянии S_1 .

Как это событие может произойти? Очевидно, двумя способами: — в момент t система уже была в состоянии S_1 , а за время Δt не вышла из этого состояния

или

— в момент t система была в состоянии S_3 , а за время Δt перешла из него в S_1 .

Вероятность первого варианта найдем как произведение вероятности $p_1(t)$ того, что в момент t система была в состоянии S_1 , на условную вероятность того, что, будучи в состоянии S_1 , система за время Δt не перейдет из него в S_2 . Эта условная вероятность (с точностью до бесконечно малых высших порядков) равна $1 - \lambda_{12}\Delta t$.

Аналогично, вероятность второго варианта равна вероятности того, что в момент t система была в состоянии S_3 , умноженной на условную вероятность перехода за время Δt в состояние S_1 :

$$p_3(t) \lambda_{31} \Delta t.$$

Применяя правило сложения вероятностей, получим:

$$p_1(t + \Delta t) = p_1(t) (1 - \lambda_{12} \Delta t) + p_3(t) \lambda_{31} \Delta t.$$

Раскроем скобки в правой части, перенесем $p_1(t)$ в левую и разделим обе части равенства на Δt ; получим:

$$\frac{p_1(t + \Delta t) - p_1(t)}{\Delta t} = -\lambda_{12} p_1(t) + \lambda_{31} p_3(t).$$

Теперь устремим Δt к нулю и перейдем к пределу:

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{p_1(t + \Delta t) - p_1(t)}{\Delta t} = -\lambda_{12} p_1(t) + \lambda_{31} p_3(t).$$

Левая часть есть не что иное, как производная функции $p_1(t)$:

$$\frac{dp_1(t)}{dt} = -\lambda_{12} p_1(t) + \lambda_{31} p_3(t). \quad (3.4)$$

Таким образом, выведено дифференциальное уравнение, которому должна удовлетворять функция $p_1(t)$. Аналогичные дифференциальные уравнения могут быть выведены и для остальных вероятностей состояний: $p_2(t), p_3(t), p_4(t)$.

Рассмотрим второе состояние S_2 и найдем $p_2(t + \Delta t)$ — вероятность того, что в момент $(t + \Delta t)$ система S будет находиться в состоянии S_2 . Это событие может произойти следующими способами:

— в момент t система уже была в состоянии S_2 , а за время Δt не перешла из него ни в S_3 , ни в S_4 ;

или

— в момент t система была в состоянии S_1 , а за время Δt перешла из него в S_2 ;

или

— в момент t система была в состоянии S_4 , а за время Δt перешла из него в S_2 .

Вероятность первого варианта вычисляется так: $p_2(t)$ умножается на условную вероятность того, что система за Δt не перейдет ни в S_3 , ни в S_4 . Так как события, состоящие в переходе за время Δt из S_2 в S_3

и из S_2 в S_4 , несовместны, то вероятность того, что осуществится один из этих переходов, равна сумме их вероятностей, т. е. $\lambda_{23} \Delta t + \lambda_{24} \Delta t$ (с точностью до бесконечно малых высших порядков). Вероятность того, что не осуществится ни один из этих переходов, равна $1 - \lambda_{23} \Delta t - \lambda_{24} \Delta t$. Отсюда вероятность первого варианта:

$$p_2(t) (1 - \lambda_{23} \Delta t - \lambda_{24} \Delta t).$$

Прибавляя сюда вероятности второго и третьего вариантов, получим:

$$p_2(t + \Delta t) = p_2(t) (1 - \lambda_{23} \Delta t - \lambda_{24} \Delta t) + p_1(t) \lambda_{12} \Delta t + p_4(t) \lambda_{42} \Delta t.$$

Переносим $p_2(t)$ в левую часть, делим на Δt и переходя к пределу, получим дифференциальное уравнение для $p_2(t)$:

$$\frac{dp_2(t)}{dt} = -\lambda_{23} p_2(t) - \lambda_{24} p_2(t) + \lambda_{12} p_1(t) + \lambda_{42} p_4(t). \quad (3.5)$$

Рассуждая аналогично для состояний S_3, S_4 , получим в результате систему дифференциальных уравнений, составленных по типу (3.4) и (3.5). Отбросим в них для краткости аргумент t у функций p_1, p_2, p_3, p_4 и перепишем эту систему в виде:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dp_1}{dt} &= -\lambda_{12} p_1 + \lambda_{31} p_3, \\ \frac{dp_2}{dt} &= -\lambda_{23} p_2 - \lambda_{24} p_2 + \lambda_{12} p_1 + \lambda_{42} p_4, \\ \frac{dp_3}{dt} &= -\lambda_{31} p_3 - \lambda_{34} p_3 + \lambda_{23} p_2, \\ \frac{dp_4}{dt} &= -\lambda_{42} p_4 + \lambda_{24} p_2 + \lambda_{34} p_3. \end{aligned} \right\} \quad (3.6)$$

Эти уравнения для вероятностей состояний и называются уравнениями Колмогорова.

Интегрирование этой системы уравнений даст нам искомые вероятности состояний как функции времени. Начальные условия берутся в зависимости от того, каково было начальное состояние системы S . Например, если в начальный момент времени (при $t = 0$) система S находилась в состоянии S_1 , то надо принять начальные условия:

$$\text{при } t=0 \quad p_1 = 1, \quad p_2 = p_3 = p_4 = 0.$$

Заметим, что всех четырех уравнений для p_1, p_2, p_3, p_4 можно было бы и не писать; действительно, $p_1 + p_2 + p_3 + p_4 = 1$ для всех t , и любую из вероятностей p_1, p_2, p_3, p_4 можно выразить через три остальные. Например p_4 можно выразить через p_1, p_2, p_3 в виде

$$p_4 = 1 - (p_1 + p_2 + p_3)$$

и подставить в остальные уравнения. Тогда специального уравнения для вероятности p_4 можно и не писать. Однако в дальнейшем нам будет удобнее пользоваться полной системой уравнений типа (3.6).

Обратим внимание на структуру уравнений (3.6). Все они построены по вполне определенному правилу, которое можно сформулировать следующим образом.

В левой части каждого уравнения стоит производная вероятности состояния, а правая часть содержит столько членов, сколько стрелок связано с данным состоянием. Если стрелка направлена из состояния, соответствующий член имеет знак «минус»; если в состояние — знак «плюс». Каждый член равен произведению плотности вероятности перехода, соответствующей данной стрелке, умноженной на вероятность того состояния, из которого исходит стрелка.

Это правило составления дифференциальных уравнений для вероятностей состояний является общим и справедливо для любой непрерывной марковской цепи; с его помощью можно совершенно механически, без всяких рассуждений, записывать дифференциальные уравнения для вероятностей состояний непосредственно по размеченному графу состояний.

Пример. Размеченный граф состояний системы S имеет вид, показанный на рис. 4.14. Написать систему дифференциальных уравнений Колмогорова и начальные условия для решения этой системы, если известно, что в начальный момент система находится в состоянии S_1 .

Решение. Система уравнений Колмогорова имеет вид:

$$\frac{dp_1}{dt} = -(\lambda_{12} + \lambda_{13}) p_1,$$

$$\frac{dp_2}{dt} = \lambda_{12} p_1 + \lambda_{32} p_3,$$

$$\frac{dp_3}{dt} = -(\lambda_{32} + \lambda_{34}) p_3 + \lambda_{13} p_1 + \lambda_{53} p_5,$$

$$\frac{dp_4}{dt} = -\lambda_{45} p_4 + \lambda_{34} p_3,$$

$$\frac{dp_5}{dt} = -\lambda_{53} p_5 + \lambda_{45} p_4.$$

Начальные условия:

$$\text{при } t=0 \quad p_1 = 1, \quad p_2 = p_3 = p_4 = p_5 = 0.$$

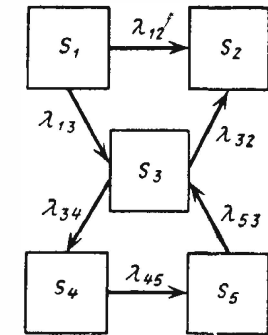


Рис. 4.14

4. ПОТОК СОБЫТИЙ. ПРОСТЕЙШИЙ ПОТОК И ЕГО СВОЙСТВА

При рассмотрении случайных процессов, протекающих в системах с дискретными состояниями и непрерывным временем, часто приходится встречаться с так называемыми «потоками событий».

Потоком событий называется последовательность однородных событий, следующих одно за другим в какие-то, вообще говоря, случайные моменты времени.

Примерами могут быть:

- поток вызовов на телефонной станции;
 - поток включений приборов в бытовой электросети;
 - поток грузовых составов, поступающих на железнодорожную станцию;
 - поток неисправностей (сбоев) вычислительной машины;
 - поток выстрелов, направляемых на цель,
- и т. д.



Рис. 4.15

При рассмотрении процессов, протекающих в системе с дискретными состояниями и непрерывным временем, часто бывает удобно представлять себе процесс так, как будто переходы системы из состояния в состояние происходят под действием каких-то потоков событий (поток вызовов, поток неисправностей, поток заявок на обслуживание, поток посетителей и т. д.) Поэтому имеет смысл рассмотреть подробнее потоки событий и их свойства.

Будем изображать поток событий последовательностью точек на оси времени $0t$ (рис. 4.15). Пользуясь таким изображением, не надо забывать, что положение каждой точки на оси абсцисс случайно.

Поток событий называется *регулярным*, если события следуют одно за другим через строго определенные промежутки времени. Такой поток сравнительно редко встречается на практике, но представляет определенный интерес как предельный случай.

При исследовании операций чаще приходится встречаться с потоками событий, для которых и моменты наступления событий и промежутки времени между ними случайны.

В данном параграфе мы рассмотрим потоки событий, обладающие некоторыми особо простыми свойствами. Для этого введем ряд определений.

1. Поток событий называется *стационарным*, если вероятность попадания того или иного числа событий на участок времени длиной τ (рис. 4.15) зависит только от длины участка и не зависит от того, где именно на оси $0t$ расположен этот участок.

2. Поток событий называется *поток без последствие*, если для любых непересекающихся участков времени число событий, попадающих на один из них, не зависит от того, сколько событий попало на другой (или другие, если рассматривается больше двух участков).

3. Поток событий называется *ординарным*, если вероятность попадания на элементарный участок двух или более событий пренебрежимо мала по сравнению с вероятностью попадания одного события.

Рассмотрим подробнее эти три свойства потоков и посмотрим, каким физическим условиям они соответствуют и за счет чего могут нарушаться.

Стационарность потока означает его однородность по времени: вероятностные характеристики такого потока не должны меняться в зависимости от времени. В частности, так называемая *интенсивность* (или «плотность») потока событий — среднее число событий в единицу времени — для стационарного потока должна оставаться постоянной. Это, разумеется, не значит, что фактическое число событий, появляющихся в единицу времени, постоянно — нет, поток может иметь местные сгущения и разрежения. Важно, что для стационарного потока эти сгущения и разрежения не носят закономерного характера, а среднее число событий, попадающих на единичный участок времени, остается постоянным для всего рассматриваемого периода.

На практике часто встречаются потоки событий, которые (по крайней мере, на ограниченном участке времени) могут рассматриваться как стационарные. Например, поток вызовов, поступающих на телефонную станцию, скажем, на интервале от 12 до 13 часов может считаться стационарным. Тот же поток в течение целых суток уже не будет стационарным (ночью интенсивность потока вызовов гораздо меньше, чем днем). Заметим, что так же обстоит дело и с большинством физических процессов, которые мы называем «стационарными» — в действительности они стационарны только на ограниченном участке времени, а распространение этого участка до бесконечности — лишь удобный прием, применяемый в целях упрощения.

Отсутствие последствие в потоке означает, что события, образующие поток, появляются в последовательные моменты времени *независимо* друг от друга. Например, поток пассажиров, входящих на станцию метро, можно считать потоком без последствие, потому что причины, обусловившие приход отдельного пассажира именно в данный момент, а не в другой, как правило, не связаны с аналогичными причинами для других пассажиров. Если такая зависимость появляется, условие отсутствия последствие оказывается нарушенным.

Рассмотрим, например, поток грузовых поездов, идущих по железнодорожной ветке. Если, по условиям безопасности, они не могут следовать один за другим чаще, чем через интервал времени τ_0 , то между событиями в потоке имеется зависимость, и условие отсутствия последствие нарушается. Если интервал τ_0 мал по сравнению со средним интервалом между поездами $\bar{\tau}$, такое нарушение несущественно, но если интервал τ_0 сравним с $\bar{\tau}$, его приходится учитывать.

Ординарность потока означает, что события в потоке приходят поодиночке, а не парами, тройками и т. д. Например, поток клиентов, направляющихся в парикмахерскую, практически можно считать ординарным, чего нельзя сказать о потоке клиентов, направляющихся в ЗАГС для регистрации брака. Поток атак истребителей по бомбардировщику, находящемуся над вражеской территорией, ординарен, если они атакуют цель поодиночке, и не ординарен, если они идут в атаку парами или тройками.

Если в неординарном потоке события происходят только парами, только тройками и т. д., то можно его рассматривать как ординарный «поток пар», «поток троек» и т. д. Несколько сложнее обстоит дело, если число событий, образующих «пакет» (группу одновременно приходящих событий) случайно. Тогда приходится наряду с потоком пакетов рассматривать случайную величину X — число событий в пакете, и математическая модель потока становится более сложной: он



Рис. 4.16

представляет собой не только последовательность моментов появления пакетов, но и последовательность случайных величин — чисел событий в каждом пакете (рис. 4.16), где $x_1, x_2, \dots, x_i, \dots$ — значения, принятые случайной величиной X в первом, втором и т. д. пакетах. Пример неординарного потока событий со случайным числом событий в пакете — поток товарных вагонов, прибывающих на сортировочную станцию («пакетом» является поезд).

Рассмотрим поток событий, обладающий всеми тремя свойствами: стационарный, без последствия, ординарный. Такой поток называется простейшим (или стационарным пуассоновским) потоком. Название «простейший» связано с тем, что математическое описание событий, связанных с простейшими потоками, оказывается наиболее простым. Отметим, между прочим, что «самый простой», на первый взгляд, регулярный поток со строго постоянными интервалами между событиями отнюдь не является «простейшим» в вышеназванном смысле слова: он обладает ярко выраженным последствием, так как моменты появления событий связаны между собой жесткой функциональной зависимостью. Именно из-за этого последствия анализ процессов, связанных с регулярными потоками, оказывается, как правило, труднее, а не легче по сравнению с простейшими.

Простейший поток играет среди других потоков особую роль. А именно, можно доказать, что при суперпозиции (взаимном наложении) достаточно большого числа потоков, обладающих последствием (лишь бы они были стационарны и ординарны), образуется суммарный

поток, который можно считать простейшим, и тем точнее, чем большее число потоков складывается^{*)}.

Если поток событий не имеет последствия, ординарен, но не стационарен, он называется нестационарным пуассоновским потоком. В таком потоке интенсивность λ (среднее число событий в единицу времени) зависит от времени:

$$\lambda = \lambda(t),$$

тогда как для простейшего потока

$$\lambda = \text{const.}$$

Пуассоновский поток событий (как стационарный, так и нестационарный) тесно связан с известным распределением Пуассона. А именно, число событий потока, попадающих на любой участок, распределено по закону Пуассона.



Рис. 4.17

Поясним, что это означает. Рассмотрим на оси $0t$, где наблюдается поток событий, некоторый участок времени длины τ (см. рис. 4.17), начинающийся в момент t_0 и заканчивающийся в момент $t_0 + \tau$. Нетрудно доказать (доказательство дается во всех курсах теории вероятностей), что вероятность попадания на этот участок ровно m событий выражается формулой:

$$P_m = \frac{a^m}{m!} e^{-a} \quad (m = 0, 1, \dots), \quad (4.1)$$

где a — среднее число событий, приходящееся на участок τ .

Для стационарного (простейшего) пуассоновского потока величина a равна интенсивности потока, умноженной на длину интервала:

$$a = \lambda\tau,$$

т. е. не зависит от того, где на оси $0t$ взят участок τ . Для нестационарного пуассоновского потока величина a выражается формулой:

$$a = \int_{t_0}^{t_0+\tau} \lambda(t) dt,$$

и, значит, зависит от того, в какой точке t_0 начинается участок τ .

Рассмотрим на оси $0t$ простейший поток событий с интенсивностью λ (рис. 4.18). Нас будет интересовать интервал времени T между со-

^{*)} Для этого дополнительно требуется, чтобы складываемые потоки были сравнимы по интенсивности, т. е., чтобы среди них не было, скажем, одного, превосходящего по интенсивности сумму всех остальных.

седними событиями в этом потоке. Очевидно, T есть величина случайная; найдем ее закон распределения. Сначала найдем функцию распределения:

$$F(t) = P(T < t),$$

т. е. вероятность того, что величина T примет значение, меньшее, чем t . Отложим от начала интервала T (точки t_0) отрезок t и найдем вероятность того, что интервал T будет меньше t . Для этого нужно, чтобы на участок длины t , примыкающий к точке t_0 , попало хотя бы одно событие потока. Вычислим вероятность этого $F(t)$ через вероятность противоположного события (на участок t не попадет ни одного события потока):

$$F(t) = 1 - P_0.$$

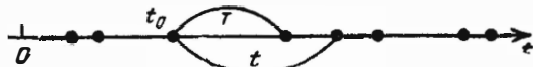


Рис. 4.18

Вероятность P_0 найдем по формуле (1.4), полагая $m = 0$:

$$P_0 = \frac{a^0}{0!} e^{-a} = e^{-a} = e^{-\lambda t},$$

откуда функция распределения величины T будет:

$$F(t) = 1 - e^{-\lambda t} \quad (t > 0). \quad (4.2)$$

Чтобы найти плотность распределения $f(t)$ случайной величины T , продифференцируем выражение (4.2) по t :

$$f(t) = \lambda e^{-\lambda t} \quad (t > 0). \quad (4.3)$$

Закон распределения с плотностью (4.3) называется показательным (или экспоненциальным). График его имеет вид, представленный на рис. 4.19. Величина λ называется параметром показательного закона.

Показательный закон распределения, как мы увидим дальше, играет большую роль в теории марковских случайных процессов.

Найдем числовые характеристики случайной величины T — математическое ожидание (среднее значение) m_t и дисперсию D_t . Имеем:

$$m_t = \int_0^{\infty} t f(t) dt = \lambda \int_0^{\infty} t e^{-\lambda t} dt.$$

Интегрируя по частям, получим:

$$m_t = \frac{1}{\lambda}. \quad (4.4)$$

Дисперсию величины T найдем через второй начальный момент:

$$D_t = \int_0^{\infty} t^2 f(t) dt - m_t^2 = \int_0^{\infty} \lambda t^2 e^{-\lambda t} dt - \frac{1}{\lambda^2},$$

откуда, снова интегрируя по частям, получим:

$$D_t = \frac{1}{\lambda^2}. \quad (4.5)$$

Извлекая корень квадратный из дисперсии, найдем среднее квадратическое отклонение случайной величины T :

$$\sigma_t = \sqrt{D_t} = \frac{1}{\lambda}. \quad (4.6)$$

Итак, для показательного распределения математическое ожида-

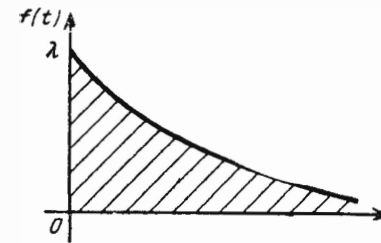


Рис. 4.19

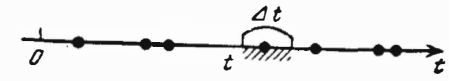


Рис. 4.20

ние и среднее квадратическое отклонение равны друг другу и обратны параметру λ .

Таким образом, исследуя структуру простейшего потока событий, мы пришли к заключению: промежуток времени T между соседними событиями в простейшем потоке распределен по показательному закону; его среднее значение и среднее квадратическое отклонение равны $1/\lambda$, где λ — интенсивность потока.

Для нестационарного пуассоновского потока закон распределения промежутка T уже не будет показательным; вид этого закона будет зависеть, во-первых, от того, где на оси $0t$ расположено первое из событий, и, во-вторых, от вида зависимости $\lambda(t)$, характеризующей переменную интенсивность потока. Однако если $\lambda(t)$ меняется сравнительно медленно и его изменение за время между двумя событиями невелико, то закон распределения промежутка времени между событиями можно приближенно считать показательным (4.3), полагая в этой формуле величину λ равной среднему значению $\lambda(t)$ на том участке, который нас интересует.

В заключение данного параграфа выведем выражение для так называемого «элемента вероятности появления события».

Рассмотрим на оси $0t$ простейший поток событий с интенсивностью λ и элементарный участок Δt , прилежащий в точке t (рис. 4.20).

Найдем вероятность того, что на участке Δt появится какое-то событие потока, т. е. участок не будет «пуст». Так как поток ординарен, вероятностью появления на участке Δt более чем одного события можно пренебречь. Обозначим $P_0(\Delta t)$ вероятность того, что на

участке Δt не будет события, а $P_1(\Delta t)$ — вероятность того, что на нем появится одно событие. В силу ординарности потока

$$P_1(\Delta t) \approx 1 - P_0(\Delta t),$$

а вероятность $P_0(\Delta t)$ вычисляем по формуле (4.1):

$$P_0(\Delta t) = \frac{a_0}{0!} e^{-a} = e^{-a} = e^{-\lambda \Delta t},$$

откуда

$$P_1(\Delta t) \approx 1 - e^{-\lambda \Delta t}.$$

Разлагая $e^{-\lambda \Delta t}$ в ряд по степеням $\lambda \Delta t$ и пренебрегая величинами высшего порядка малости, получим:

$$P_1(\Delta t) \approx 1 - (1 - \lambda \Delta t).$$

Отсюда

$$P_1(\Delta t) \approx \lambda \Delta t, \quad (4.7)$$

т. е. вероятность появления на элементарном участке времени Δt какого-то события потока приближенно равна $\lambda \Delta t$, где λ — интенсивность потока. Эту вероятность мы будем называть «элементом вероятности появления события».

Очевидно, такая же формула будет справедлива и для нестационарного пуассоновского потока, с той разницей, что величину λ нужно брать равной ее значению в той точке t , к которой примыкает участок Δt :

$$P_1(\Delta t) \approx \lambda(t) \Delta t.$$

5. ПОТОКИ ПАЛЬМА. ПОТОКИ ЭРЛАНГА

Поток событий называется **потоком Пальма** (или потоком с ограниченным последствием), если промежутки времени между последовательными событиями:

$$T_1, T_2, \dots, T_i, \dots$$

представляют собой независимые, одинаково распределенные случайные величины (рис. 4.21).

Простейший поток есть частный случай потока Пальма: в нем расстояния $T_1, T_2, \dots, T_i, \dots$ представляют собой случайные величины, распределенные по одному и тому же показательному закону; их независимость следует из того, что простейший поток есть поток без последствия, и расстояние по времени между любыми двумя событиями не зависит от того, каковы расстояния между другими.

Рассмотрим пример потока Пальма. Некоторый элемент технического устройства (например, радиолампа) работает непрерывно до своего отказа (выхода из строя), после чего он мгновенно заменяется новым. Срок работы элемента случаен. Если отдельные экземпляры элементов выходят из строя независимо друг от друга, то поток отказов (или «по-

ток восстановлений», так как отказ и восстановление происходят в один и тот же момент) представляет собой поток Пальма. Если к тому же срок работы элемента распределен по показательному закону, поток Пальма превращается в простейший (стационарный пуассоновский) поток.

Другой пример: группа самолетов идет в боевом порядке «колонна» (рис. 4.22) с одинаковой для всех самолетов скоростью V . Каждый из них, кроме ведущего, обязан выдерживать строй, т. е. держаться на

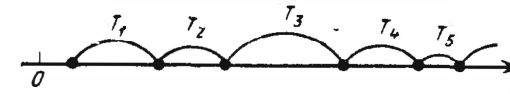


Рис. 4.21

заданном расстоянии от впереди идущего. Это расстояние, измеряемое дальномером, выдерживается с ошибками. Моменты пересечения самолетами заданного рубежа при этих условиях образуют поток Пальма, так как случайные величины $T_1 = \frac{L_1}{V}$; $T_2 = \frac{L_2}{V}$; ... независимы. Заметим, что тот же поток не будет потоком Пальма, если самолеты стремятся выдержать заданное расстояние не от соседа, а от ведущего всю колонну.

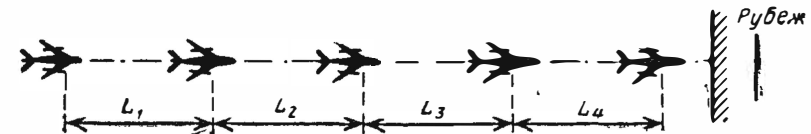


Рис. 4.22

Многие потоки событий, встречающиеся на практике, хотя и не являются в точности потоками Пальма, но могут быть ими приближенно заменены.

Важными для практики образцами потоков Пальма являются так называемые **потоки Эрланга**. Эти потоки образуются в результате «просеивания» простейших потоков.

Рассмотрим на оси $0t$ простейший поток событий (рис. 4.23) и сохраним в нем не все точки, а только каждую вторую; остальные выбросим (на рис. 4.23 сохраненные точки показаны жирными). В результате такой операции «прореживания» или «просеивания» образуется снова поток событий; он называется **потоком Эрланга второго порядка**.



Рис. 4.23

Вообще, потоком Эрланга k -го порядка \mathcal{E}_k называется поток, получающийся, если в простейшем потоке сохранить каждую k -ю точку, а остальные выбросить.

Например, на рис. 4.24 показано образование потока Эрланга 4-го порядка \mathcal{E}_4 (три точки простейшего потока выбрасываются, а четвертая сохраняется).

Очевидно, простейший поток представляет собой частный случай потока Эрланга, а именно поток Эрланга 1-го порядка \mathcal{E}_1 .

Интервал времени T между соседними событиями в потоке Эрланга k -го порядка представляет собой сумму k независимых случайных величин — расстояний между событиями в исходном простейшем потоке:

$$T = T_1 + T_2 + \dots + T_k = \sum_{i=1}^k T_i.$$



Рис. 4.24

Каждая из этих случайных величин распределена по показательному закону:

$$f_1(t) = \lambda e^{-\lambda t} \quad (t > 0).$$

Закон распределения интервала T между соседними событиями в потоке \mathcal{E}_k называется законом Эрланга k -го порядка.

Найдем выражение для плотности распределения этого закона; обозначим ее $f_k(t)$. Для этого рассмотрим на оси (рис. 4.25) простейший поток с интенсивностью λ , в котором события разделены интервалами T_1, T_2, \dots , и найдем элемент вероятности $f_k(t)dt$ — вероятность того, что интервал $T = \sum_{i=1}^k T_i$ окажется в пределах элементарного участка $(t, t + dt)$.

Для этого, во-первых, на участок длиной t должно попасть ровно $k - 1$ точек простейшего потока; вероятность этого события, согласно формуле (4.1), равна

$$P_{k-1} = \frac{a^{k-1}}{(k-1)!} e^{-a} = \frac{(\lambda t)^{k-1}}{(k-1)!} e^{-\lambda t}.$$

Кроме того, последняя (k -я) точка должна попасть на элементарный участок $(t, t + dt)$ — вероятность этого равна λdt (см. формулу (4.7)). Перемножая эти вероятности, получим:

$$f_k(t) dt = \frac{(\lambda t)^{k-1}}{(k-1)!} e^{-\lambda t} \lambda dt,$$

откуда

$$f_k(t) = \frac{\lambda (\lambda t)^{k-1}}{(k-1)!} e^{-\lambda t} \quad (t > 0). \quad (5.1)$$

Очевидно, при $k = 1$ получается обычное показательное распределение:

$$f_1(t) = \lambda e^{-\lambda t} \quad (t > 0). \quad (5.2)$$

Найдем характеристики закона Эрланга k -го порядка: его математическое ожидание $m_t^{(k)}$ и дисперсию $D_t^{(k)}$. Случайная величина T , распределенная по закону Эрланга k -го порядка, получается сложением k независимых случайных величин:

$$T = \sum_{i=1}^k T_i,$$

где каждая из величин T_i распределена по показательному закону (5.2) с математическим ожиданием $1/\lambda$ и дисперсией $1/\lambda^2$ (см. формулы

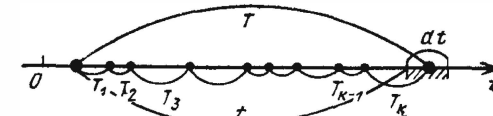


Рис. 4.25

(4.4) и (4.5)). Применяя теоремы сложения математических ожиданий и дисперсий, имеем

$$m_t^{(k)} = \frac{k}{\lambda}, \quad D_t^{(k)} = \frac{k}{\lambda^2}. \quad (5.3)$$

Извлекая из последнего выражения квадратный корень, найдем среднее квадратическое отклонение:

$$\sigma_t^{(k)} = \frac{\sqrt{k}}{\lambda}.$$

Таким образом, мы нашли математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение интервала между соседними событиями в потоке Эрланга k -го порядка:

$$m_t^{(k)} = \frac{k}{\lambda}; \quad D_t^{(k)} = \frac{k}{\lambda^2}; \quad \sigma_t^{(k)} = \frac{\sqrt{k}}{\lambda}. \quad (5.4)$$

Заметим, что как закон распределения $f_k(t)$, так и все его характеристики выражены не через интенсивность самого потока Эрланга \mathcal{E}_k , а через интенсивность λ порождающего его простейшего потока, который подвергался прореживанию. Представляет интерес выразить их через интенсивность (среднее число событий в единицу времени) самого потока Эрланга \mathcal{E}_k . Обозначим Λ_k — интенсивность потока \mathcal{E}_k . Очевидно

$$\Lambda_k = \lambda/k; \quad \lambda = k\Lambda_k,$$

так как из исходного простейшего потока с интенсивностью λ берется только k -я часть.

Подставляя выражение λ через Λ_k в формуле (5.1), получим

$$f_k(t) = \frac{k\Lambda_k (k\Lambda_k t)^{k-1}}{(k-1)!} e^{-k\Lambda_k t},$$

или

$$f_k(t) = \frac{(k\Lambda_k)^k}{(k-1)!} t^{k-1} e^{-k\Lambda_k t} \quad (t > 0). \quad (5.5)$$

Математическое ожидание, дисперсия и среднее квадратическое отклонение этого закона будут:

$$m_t^{(k)} = \frac{1}{\Lambda_k}; \quad D_t^{(k)} = \frac{1}{k\Lambda_k^2}; \quad \sigma_t^{(k)} = \frac{1}{\sqrt{k}\Lambda_k}. \quad (5.6)$$

Теперь предположим, что, сохраняя неизменной интенсивность потока Λ_k :

$$\Lambda_k = \Lambda = \text{const},$$

мы будем менять только порядок k закона Эрланга. Его математическое ожидание останется постоянным:

$$m_t = \frac{1}{\Lambda}, \quad (5.7)$$

а дисперсия и среднее квадратическое отклонение будут меняться:

$$D_t^{(k)} = \frac{1}{k\Lambda^2}; \quad \sigma_t^{(k)} = \frac{1}{\sqrt{k}\Lambda}. \quad (5.8)$$

Из формул (5.8) видно, что при $k \rightarrow \infty$ и дисперсия, и среднее квадратическое отклонение стремятся к нулю. А что это значит? Это значит, что при $k \rightarrow \infty$ поток Эрланга заданной интенсивности Λ неограниченно приближается к регулярному потоку с постоянным интервалом между событиями:

$$T = \text{const} = \frac{1}{\Lambda}.$$

Это свойство потоков Эрланга удобно в практических применениях: оно дает возможность, задаваясь различными k , получать потоки, обладающие различным последствием — от полного отсутствия последствия ($k = 1$) до жесткой функциональной связи между моментами появления событий ($k = \infty$). Таким образом, порядок потока Эрланга k может служить в какой-то степени «мерой последствия».

В целях упрощения часто бывает удобно приближенно заменить реальный поток событий — потоком Эрланга с тем же последствием. Это делают, согласовывая характеристики реального потока — математическое ожидание и дисперсию интервала между событиями — с теми же характеристиками заменяющего потока Эрланга.

Пример. В результате статистической обработки интервалов времени между событиями в некотором потоке получены следующие характеристики:

— среднее значение интервала $m_t = 2$ мин,

— среднее квадратическое отклонение интервала $\sigma_t = 0,9$ мин.

Требуется подобрать поток Эрланга, обладающий приблизительно теми же характеристиками, найти его интенсивность Λ и порядок k .

Решение. Интенсивность Λ есть величина, обратная среднему интервалу между событиями:

$$\Lambda = 1/m_t = 1/2 = 0,5 \text{ (соб/мин)}$$

Из формулы (5.8) находим порядок потока Эрланга k :

$$k = \left(\frac{1}{\sigma_t \Lambda} \right)^2 = \left(\frac{1}{0,9 \cdot 0,5} \right)^2 \approx 4,9.$$

Выбирая в качестве k ближайшее целое число, получаем

$$k = 5.$$

Итак, данный поток можно приближенно заменить потоком Эрланга 5-го порядка с плотностью вида:

$$f_5(t) = \frac{(5 \cdot 0,5)^5}{4!} t^4 e^{-5 \cdot 0,5 t}$$

или

$$f_5(t) = 4,1 t^4 e^{-2,5 t} \quad (t > 0). \quad (5.9)$$

Вид кривой распределения (5.9) показан на рис. 4.26

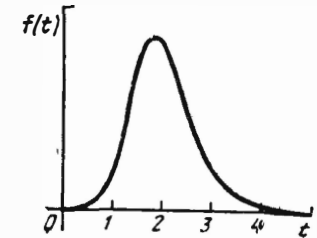


Рис. 4.26

Особое внимание, уделяемое здесь потокам Эрланга по сравнению с другими потоками Пальма (с произвольным законом распределения интервала времени между соседними событиями) объясняется тем, что при помощи этих потоков можно сводить не-марковские процессы к марковским. Как это делается, мы увидим дальше, в § 10, 11 настоящей главы, а также в § 6 гл. 5.

Потоки Эрланга весьма удобны для приближенного представления потоков Пальма любого вида, так как потоки Эрланга различных порядков образуют целую гамму, дающую постепенный переход от простейшего потока (полное отсутствие последствия) к потоку с регулярными интервалами (полное, жесткое последствие). Возможности приближенного представления любых потоков Пальма потоками типа Эрланга еще более расширяются, если воспользоваться «обобщенными законами Эрланга», которые получаются при сложении нескольких случайных величин, распределенных по показательным законам с разными параметрами (см., например, [8]), а также «смешанными обобщенными законами Эрланга», которые получаются, если сложить несколько обобщенных законов Эрланга с коэффициентами («весами»), образующими в сумме единицу.

6. ПУАССОНОВСКИЕ ПОТОКИ СОБЫТИЙ И НЕПРЕРЫВНЫЕ МАРКОВСКИЕ ЦЕПИ

Рассмотрим некоторую физическую систему S с дискретными состояниями S_1, S_2, \dots, S_n , которая переходит из состояния в состояние под влиянием каких-то случайных событий, например, вызовы на телефонной станции, выходы из строя (отказы) элементов аппаратуры, выстрелы, направленные по цели и т. д.

Будем себе это представлять так, будто события, переводящие систему из состояния в состояние, представляют собой какие-то потоки событий (потоки вызовов, потоки отказов, потоки выстрелов и т. д.).

Пусть система S с графом состояний, показанным на рис. 4.27, в момент t находится в состоянии S_i и может перейти из него в состояние S_j под влиянием какого-то пуассоновского потока событий с интенсивностью λ_{ij} : как только появляется первое событие этого потока, система мгновенно переходит (перескакивает) из S_i в S_j . Как мы знаем, вероятность этого перехода за элементарный промежуток времени Δt (элемент вероятности перехода) равна $\lambda_{ij}\Delta t$. Таким образом, плотность вероятности перехода λ_{ij} в непрерывной цепи Маркова представляет собой не что иное, как интенсивность потока событий, переводящего систему по соответствующей стрелке.

Если все потоки событий, переводящие систему S из состояния в состояние, пуассоновские (стационарные или нестационарные — безразлично), то процесс, протекающий в системе, будет марковским. Действительно, пуассоновский поток обладает отсутствием последствия, поэтому, при заданном состоянии системы в данный момент, ее переходы в другие состояния в будущем обусловлены только появлением каких-то событий в пуассоновских потоках, а вероятности появления этих событий не зависят от «предыстории» процесса.

В дальнейшем, рассматривая марковские процессы в системах с дискретными состояниями и непрерывным временем (непрерывные марковские цепи), нам удобно будет во всех случаях рассматривать переходы системы из состояния в состояние как происходящие под влиянием каких-то потоков событий, хотя бы в действительности эти события были единичными. Например, работающее техническое устройство мы будем рассматривать как находящееся под действием потока отказов, хотя фактически оно может отказаться только один раз. Действительно, если устройство отказывает в тот момент, когда приходит первое событие потока, то совершенно все равно — продолжается после этого поток отказов или же прекращается: судьба устройства от этого уже не зависит. Для нас же будет удобнее иметь дело именно с потоками событий.

Итак, рассматривается система S , в которой переходы из состояния в состояние происходят под действием пуассоновских потоков событий с определенными интенсивностями. Проставим эти интенсивности (плотности вероятностей переходов) на графе состояний системы у соответствующих стрелок. Получим размеченный граф состоя-

ний (рис. 4.27); по которому, пользуясь правилом, сформулированным в § 3, можно сразу записать дифференциальные уравнения Колмогорова для вероятностей состояний.

Пример 1. Техническая система S состоит из двух узлов: I и II; каждый из них независимо от другого может отказывать (выходить из строя). Поток отказов первого узла — пуассоновский, с интенсивностью λ_I ; второго — также пуассоновский, с интенсивностью λ_{II} . Каждый узел сразу после отказа начинает ремонтироваться (восстанавливаться). Поток восстановлений (окончаний ремонта ремонтируемого узла) для обоих узлов — пуассоновский с интенсивностью λ .

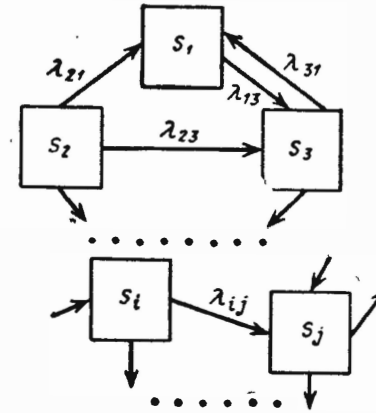


Рис. 4.27

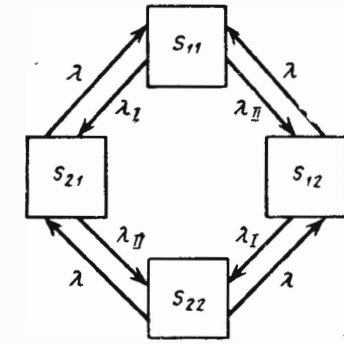


Рис. 4.28

Составить граф состояний системы и написать уравнения Колмогорова для вероятностей состояний. Определить, при каких начальных условиях нужно решать эти уравнения, если в начальный момент ($t=0$) система работает исправно.

Решение. Состояния системы:

- S_{11} — оба узла исправны,
- S_{21} — первый узел ремонтируется, второй исправен,
- S_{12} — первый узел исправен, второй ремонтируется,
- S_{22} — оба узла ремонтируются.

Размеченный граф состояний системы показан на рис. 4.28.

Интенсивности потоков событий на рис. 4.28 проставлены из следующих соображений. Если система S находится в состоянии S_{11} , то на нее действуют два потока событий: поток неисправностей узла I с интенсивностью λ_I , переводящий ее в состояние S_{21} , и поток неисправностей узла II с интенсивностью λ_{II} , переводящий ее в S_{12} . Пусть теперь система находится в состоянии S_{21} (узел I ремонтируется, узел II — исправен). Из этого состояния система может, во-первых, вернуться в S_{11} (это происходит под действием потока восстановлений с интенсивностью λ); во-вторых, — перейти в состояние S_{22} (когда ремонт узла I еще не закончен, а узел II тем временем вышел из строя); этот переход происходит под действием потока отказов узла II с интенсивностью λ_{II} . Интенсивности потоков у остальных стрелок проставляются аналогично.

Обозначая вероятности состояний p_{11}, p_{21}, p_{12} и p_{22} и пользуясь правилом, сформулированным в § 3, запишем уравнения Колмогорова для вероятностей состояний:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dp_{11}}{dt} &= -(\lambda_1 + \lambda_{11}) p_{11} + \lambda p_{21} + \lambda p_{12}, \\ \frac{dp_{21}}{dt} &= -(\lambda + \lambda_{11}) p_{21} + \lambda_1 p_{11} + \lambda p_{22}, \\ \frac{dp_{12}}{dt} &= -(\lambda + \lambda_1) p_{12} + \lambda_{11} p_{11} + \lambda p_{22}, \\ \frac{dp_{22}}{dt} &= -2\lambda p_{22} + \lambda_{11} p_{21} + \lambda_1 p_{12}. \end{aligned} \right\} (6.1)$$

Начальные условия, при которых нужно решать эту систему: при $t = 0$ $p_{11} = 1$, $p_{21} = p_{12} = p_{22} = 0$.

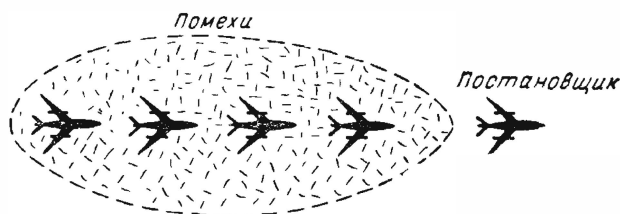


Рис. 4.29

Заметим, что, пользуясь условием

$$p_{11} + p_{21} + p_{12} + p_{22} = 1,$$

можно было бы уменьшить число уравнений на одно. Действительно, любую из вероятностей p_{11} , p_{21} , p_{12} , p_{22} можно выразить через остальные и подставить в уравнения (6.1), а уравнение, содержащее в левой части производную этой вероятности — отбросить.

Заметим, кроме того, что уравнения (6.1) справедливы как для постоянных интенсивностей пуассоновских потоков λ_1 , λ_{11} , λ , так и для переменных:

$$\lambda_1 = \lambda_1(t); \quad \lambda_{11} = \lambda_{11}(t); \quad \lambda = \lambda(t).$$

Пример 2. Группа в составе пяти самолетов в строю «колонна» (рис. 4.29) совершает налет на территорию противника. Передний самолет (ведущий) является постановщиком помех; до тех пор, пока он не сбит, идущие за ним самолеты не могут быть обнаружены и атакованы средствами ПВО противника. Атакам подвергается только постановщик помех. Поток атак — пуассоновский, с интенсивностью λ (атак/час). В результате атаки постановщик помех поражается с вероятностью p .

Если постановщик помех поражен (сбит), то следующие за ним самолеты обнаруживаются и подвергаются атакам ПВО; на каждый из них (до тех пор, пока он не поражен) направляется пуассоновский поток атак с интенсивностью λ ; каждой атакой самолет поражается с вероятностью p . Когда самолет поражен, атаки по нему прекращаются, но на другие самолеты не переносятся.

Написать уравнения Колмогорова для вероятностей состояний системы и указать начальные условия.

Решение. Будем нумеровать состояния системы соответственно числу сохранившихся самолетов в группе:

- S_5 — все самолеты целы;
- S_4 — постановщик помех сбит, остальные самолеты целы;

- S_3 — постановщик помех и один бомбардировщик сбиты, остальные самолеты целы;
- S_2 — постановщик помех и два бомбардировщика сбиты, остальные самолеты целы;
- S_1 — постановщик помех и три бомбардировщика сбиты, один самолет цел;
- S_0 — все самолеты сбиты.

Состояния мы отличаем друг от друга по числу сохранившихся бомбардировщиков, а не по тому, какой именно из них сохранился, так как все бомбардировщики по условиям задачи равноценны — атакуются с одинаковой интенсивностью и поражаются с одинаковой вероятностью.

Граф состояний системы показан на рис. 4.30. Чтобы разметить этот граф, определим интенсивности потоков событий, переводящих систему из состояния в состояние.

Из состояния S_5 в S_4 систему переводит поток поражающих (или «успешных») атак, т. е. тех атак, которые приводят к поражению постановщика (разумеется, если он раньше не был поражен). Интенсивность

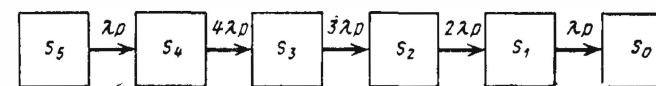


Рис. 4.30

потока атак равна λ , но не все они — поражающие: каждая из них оказывается поражающей только с вероятностью p . Очевидно, интенсивность потока поражающих атак равна λp ; эта интенсивность и проставлена в качестве λ_{54} у первой слева стрелки на графе (рис. 4.30).

Займемся следующей стрелкой и найдем интенсивность λ_{43} . Система находится в состоянии S_4 , т. е., целы и могут быть атакованы четыре самолета. Она перейдет в состояние S_3 за время Δt , если за это время какой-нибудь из самолетов (все равно, какой) будет сбит. Найдем вероятность противоположного события — за время Δt ни один самолет не будет сбит:

$$(1 - \lambda p \Delta t) (1 - \lambda p \Delta t) (1 - \lambda p \Delta t) (1 - \lambda p \Delta t) = (1 - \lambda p \Delta t)^4 \approx 1 - 4\lambda p \Delta t.$$

Здесь отброшены члены высшего порядка малости относительно Δt . Вычитая эту вероятность из единицы, получим вероятность перехода из S_4 в S_3 за время Δt (элемент вероятности перехода):

$$4\lambda p \Delta t,$$

откуда

$$\lambda_{43} = 4\lambda p,$$

что и проставлено у второй слева стрелки. Заметим, что интенсивность этого потока событий просто равна сумме интенсивностей потоков поражающих атак, направленных на отдельные самолеты. Рассуждая наглядно, можно получить этот вывод следующим образом: система S в состоянии S_4 состоит из четырех самолетов; на каждый из них действует поток поражающих атак с интенсивностью λp ; значит на систему в целом действует суммарный поток поражающих атак с интенсивностью $4\lambda p$.

С помощью аналогичных рассуждений проставляются интенсивности потоков событий у остальных стрелок.

Уравнения Колмогорова для вероятностей состояний имеют вид:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dp_5}{dt} &= -\lambda p p_5, \\ \frac{dp_4}{dt} &= -4\lambda p p_4 + \lambda p p_5, \\ \frac{dp_3}{dt} &= -3\lambda p p_3 + 4\lambda p p_4, \\ \frac{dp_2}{dt} &= -2\lambda p p_2 + 3\lambda p p_3, \\ \frac{dp_1}{dt} &= -\lambda p p_1 + 2\lambda p p_2, \\ \frac{dp_0}{dt} &= \lambda p p_1. \end{aligned} \right\}$$

Так как в начальный момент (при $t = 0$) все самолеты целы, начальные условия будут:

$$\text{при } t=0 \quad p_5 = 1, \quad p_4 = p_3 = p_2 = p_1 = p_0 = 0.$$

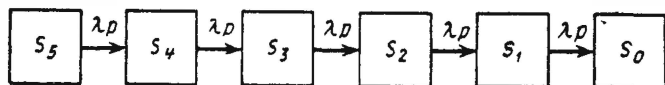


Рис. 4.31

Пример 3. Условия те же, что и в примере 2, но интенсивность λ относится к общему потоку атак, направляемому на всю группу. До тех пор, пока постановщик помех цел, все эти атаки направляются на него; когда он сбив, атаки распределяются равномерно между оставшимися самолетами, так что на один самолет приходится в среднем λ/k (атак/час), где k — число сохранившихся самолетов. Составить граф состояний, разметить его и записать уравнения Колмогорова для вероятностей состояний.

Решение. Размеченный граф состояний показан на рис. 4.31. Уравнения Колмогорова:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dp_5}{dt} &= -\lambda p p_5, \\ \frac{dp_4}{dt} &= -\lambda p p_4 + \lambda p p_5, \\ \frac{dp_3}{dt} &= -\lambda p p_3 + \lambda p p_4, \\ \frac{dp_2}{dt} &= -\lambda p p_2 + \lambda p p_3, \\ \frac{dp_1}{dt} &= -\lambda p p_1 + \lambda p p_2, \\ \frac{dp_0}{dt} &= \lambda p p_1. \end{aligned} \right\}$$

Начальные условия — те же, что и в примере 2.

Отметим, что в данном параграфе мы только в п и с ы в а л и дифференциальные уравнения для вероятностей состояний, но не занимались решением этих уравнений.

По этому поводу можно заметить следующее. Уравнения для вероятностей состояний представляют собой линейные дифференциальные уравнения с постоянными или переменными коэффициентами — в зависимости от того, постоянны или переменны интенсивности λ_{ij} потоков событий, переводящих систему из состояния в состояние.

Система нескольких линейных дифференциальных уравнений такого типа только в редких случаях может быть проинтегрирована в квадратурах: обычно такую систему приходится решать численно — либо вручную, либо на аналоговой вычислительной машине (АВМ), либо, наконец, на ЭЦВМ. Все эти способы решения систем дифференциальных уравнений затруднений не доставляют; поэтому самое существенное — уметь записать систему уравнений и сформулировать для нее начальные условия, чем мы и ограничились здесь.

7. ПРЕДЕЛЬНЫЕ ВЕРОЯТНОСТИ СОСТОЯНИЙ

Пусть имеется физическая система S с дискретными состояниями:

$$S_1, S_2, \dots, S_n,$$

в которой протекает марковский случайный процесс с непрерывным временем (непрерывная цепь Маркова). Граф состояний показан на рис. 4.32.

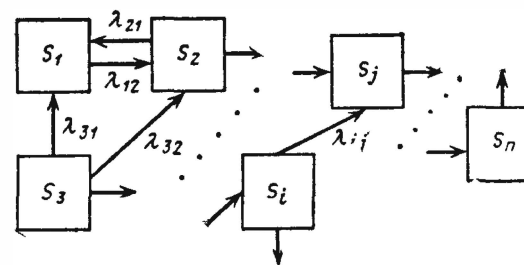


Рис. 4.32

Предположим, что все интенсивности потоков событий, переводящих систему из состояния в состояние, постоянны:

$$\lambda_{ij} = \text{const},$$

другими словами, все потоки событий — простейшие (стационарные пуассоновские) потоки.

Записав систему дифференциальных уравнений Колмогорова для вероятностей состояний и проинтегрировав эти уравнения при задан-

ных начальных условиях, мы получим вероятности состояний, как функции времени, т. е. n функций:

$$p_1(t), p_2(t), \dots, p_n(t),$$

при любом t дающих в сумме единицу:

$$\sum_{i=1}^n p_i(t) = 1.$$

Поставим теперь следующий вопрос: что будет происходить с системой S при $t \rightarrow \infty$? Будут ли функции $p_1(t), p_2(t), \dots, p_n(t)$ стремиться к каким-то пределам? Эти пределы, если они существуют, называются предельными (или «финальными») вероятностями состояний.

Можно доказать следующее общее положение. Если число состояний системы S конечно и из каждого состояния можно перейти (за то или иное число шагов) в каждое другое, то предельные вероятности состояний существуют и не зависят от начального состояния системы.

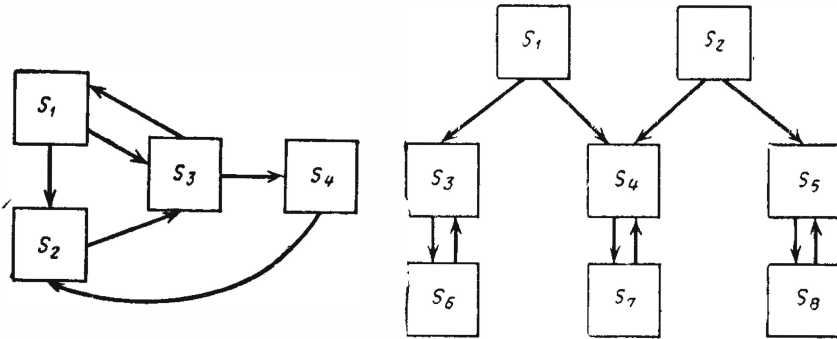


Рис. 4.33

Рис. 4.34

На рис. 4.33 показан граф состояний, удовлетворяющий поставленному условию: из любого состояния система может рано или поздно перейти в любое другое. Напротив, для системы, граф состояний которой показан на рис. 4.34, условие не выполнено. Очевидно, что если начальное состояние такой системы S_1 , то, например, состояние S_6 при $t \rightarrow \infty$ может быть достигнуто, а если начальное состояние S_2 — не может.

Предположим, что поставленное условие выполнено, и предельные вероятности существуют:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} p_i(t) = p_i \quad (i = 1, 2, \dots, n). \quad (7.1)$$

Предельные вероятности мы будем обозначать теми же буквами p_1, p_2, \dots, p_n , что и сами вероятности состояний, разумея под ними на этот раз не переменные величины (функции времени), а постоянные числа.

Очевидно, предельные вероятности состояний, так же как и допредельные, в сумме должны давать единицу:

$$\sum_{i=1}^n p_i = 1.$$

Таким образом, при $t \rightarrow \infty$ в системе S устанавливается некий определенный стационарный режим: он состоит в том, что система случайным образом меняет свои состояния, но вероятность каждого из них уже не зависит от времени: каждое из состояний осуществляется с некоторой постоянной вероятностью. Каков смысл этой вероятности? Она представляет собой не что иное, как среднее относительное время пребывания системы в данном состоянии. Например, если у системы S три возможных состояния: S_1, S_2 и S_3 , причем их предельные вероятности равны 0,2, 0,3 и 0,5, это означает, что после перехода к установившемуся режиму система S в среднем две десятых времени будет находиться в состоянии S_1 , три десятых — в состоянии S_2 и половину времени — в состоянии S_3 . Возникает вопрос: как вычислить предельные вероятности состояний p_1, p_2, \dots, p_n ?

Оказывается, для этого в системе уравнений Колмогорова, описывающих вероятности состояний, нужно положить все левые части (производные) равными нулю.

Действительно, в предельном (установившемся) режиме все вероятности состояний постоянны, значит, их производные равны нулю.

Если все левые части уравнений Колмогорова для вероятностей состояний положить равными нулю, то система дифференциальных уравнений превратится в систему линейных алгебраических уравнений. Совместно с условием

$$\sum_{i=1}^n p_i = 1 \quad (7.2)$$

(так называемым «нормировочным условием») эти уравнения дают возможность вычислить все предельные вероятности

$$p_1, p_2, \dots, p_n.$$

Пример 1. Физическая система S имеет возможные состояния: S_1, S_2, S_3, S_4 , размеченный граф которых дан на рис. 4.35 (у каждой стрелки поставлено численное значение соответствующей интенсивности). Вычислить предельные вероятности состояний: p_1, p_2, p_3, p_4 .

Решение. Пишем уравнения Колмогорова для вероятностей состояний:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dp_1}{dt} &= -5p_1 + p_3, \\ \frac{dp_2}{dt} &= -p_2 + 2p_1 + 2p_3, \\ \frac{dp_3}{dt} &= -3p_3 + 3p_1 + 2p_4, \\ \frac{dp_4}{dt} &= -2p_4 + p_2. \end{aligned} \right\} \quad (7.3)$$

Полагая левые части равными нулю, получим систему алгебраических уравнений для предельных вероятностей состояний:

$$\left. \begin{aligned} 0 &= -5p_1 + p_3, \\ 0 &= -p_2 + 2p_1 + 2p_3, \\ 0 &= -3p_3 + 3p_1 + 2p_4, \\ 0 &= -2p_4 + p_2. \end{aligned} \right\} \quad (7.4)$$

Уравнения (7.4) — так называемые однородные уравнения (без свободного члена). Как известно из алгебры, эти уравнения определяют величины p_1, p_2, p_3, p_4 только с точностью до постоянного множителя. К счастью, у нас есть нормировочное условие:

$$p_1 + p_2 + p_3 + p_4 = 1, \quad (7.5)$$

которое, совместно с уравнениями (7.4), дает возможность найти все неизвестные вероятности.

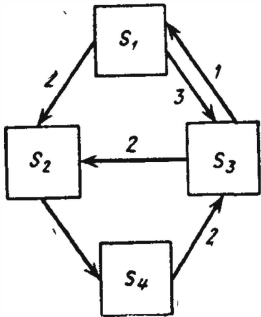


Рис. 4.35

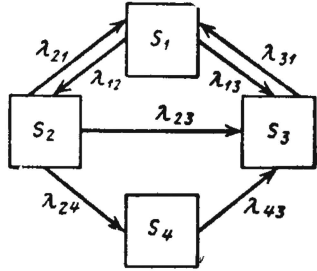


Рис. 4.36

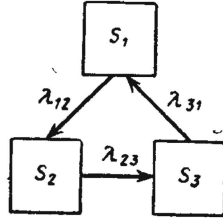


Рис. 4.37

Действительно, выразим из (7.4) все неизвестные вероятности через одну из них, например, через p_1 . Из первого уравнения:

$$p_3 = 5p_1.$$

Подставляя во второе уравнение, получим:

$$p_2 = 2p_1 + 2p_3 = 2p_1 + 10p_1 = 12p_1.$$

Четвертое уравнение дает:

$$p_4 = 1/2 p_2 = 6p_1.$$

Подставляя все эти выражения вместо p_2, p_3, p_4 в нормировочное условие (7.5), получим

$$p_1 + 12p_1 + 5p_1 + 6p_1 = 1.$$

Отсюда

$$24p_1 = 1, \quad p_1 = 1/24, \quad p_2 = 12p_1 = 1/2,$$

$$p_3 = 5p_1 = 5/24, \quad p_4 = 6p_1 = 1/4.$$

Таким образом, предельные вероятности состояний получены, они равны:

$$p_1 = 1/24, \quad p_2 = 1/2, \quad p_3 = 5/24, \quad p_4 = 1/4. \quad (7.6)$$

Это значит, что в предельном, установившемся режиме система S будет проводить в состоянии S_1 в среднем одну двадцать четвертую часть времени, в состоянии S_2 — половину времени, в состоянии S_3 — пять двадцать четвертых и в состоянии S_4 — одну четверть времени.

Заметим, что решая эту задачу, мы совсем не пользовались одним из уравнений (7.4) — третьим. Нетрудно убедиться, что оно является следствием трех остальных: складывая все четыре уравнения, мы получим тождественный нуль. Сравным успехом, решая систему, мы могли бы отбросить любое из четырех уравнений (7.4).

Примененный нами способ составления алгебраических уравнений для предельных вероятностей состояний сводился к следующему: сперва написать дифференциальные уравнения, а затем положить в них левые части равными нулю. Однако можно записать алгебраические уравнения для предельных вероятностей и непосредственно, не проходя через этап дифференциальных. Проиллюстрируем это на примере.

Пример 2. Граф состояний системы показан на рис. 4.36. Написать алгебраические уравнения для предельных вероятностей состояний.

Решение. Не записывая дифференциальных уравнений, прямо пишем соответствующие правые части и приравниваем их нулю; чтобы не иметь дела с отрицательными членами, сразу переносим их в другую часть, меняя знаки:

$$\left. \begin{aligned} \lambda_{21} p_2 + \lambda_{31} p_3 &= (\lambda_{12} + \lambda_{13}) p_1, \\ \lambda_{12} p_1 &= (\lambda_{23} + \lambda_{24}) p_2, \\ \lambda_{13} p_1 + \lambda_{23} p_2 + \lambda_{43} p_4 &= \lambda_{31} p_3, \\ \lambda_{21} p_2 &= \lambda_{43} p_4. \end{aligned} \right\} \quad (7.7)$$

Чтобы в дальнейшем сразу же писать такие уравнения, полезно запомнить следующее мнемоническое правило: «что втекает, то и вытекает, то есть для каждого состояния сумма членов, соответствующих входящим стрелкам, равна сумме членов, соответствующих выходящим; каждый член равен интенсивности потока событий, переводящего систему по данной стрелке, умноженной на вероятность того состояния, из которого выходит стрелка».

В дальнейшем мы во всех случаях будем пользоваться именно этим кратчайшим способом записи уравнений для предельных вероятностей.

Пример 3. Написать алгебраические уравнения для предельных вероятностей состояний системы S , граф состояний которой дан на рис. 4.37. Решить эти уравнения.

Решение. Пишем алгебраические уравнения для предельных вероятностей состояний:

$$\left. \begin{aligned} \lambda_{31} p_3 &= \lambda_{12} p_1, \\ \lambda_{12} p_1 &= \lambda_{23} p_2, \\ \lambda_{23} p_2 &= \lambda_{31} p_3. \end{aligned} \right\} \quad (7.8)$$

Нормировочное условие:

$$p_1 + p_2 + p_3 = 1. \quad (7.9)$$

Выразим с помощью первых двух уравнений (7.8) p_2 и p_3 через p_1 :

$$\left. \begin{aligned} p_3 &= \frac{\lambda_{12}}{\lambda_{31}} p_1; \\ p_2 &= \frac{\lambda_{12}}{\lambda_{23}} p_1. \end{aligned} \right\} \quad (7.10)$$

Подставим их в нормировочное условие (7.9):

$$p_1 + \frac{\lambda_{12}}{\lambda_{23}} p_1 + \frac{\lambda_{12}}{\lambda_{31}} p_1 = 1,$$

откуда

$$p_1 = \frac{1}{1 + \frac{\lambda_{12}}{\lambda_{23}} + \frac{\lambda_{12}}{\lambda_{31}}}$$

Далее, из (7.10) получим

$$p_2 = \frac{\frac{\lambda_{12}}{\lambda_{23}}}{1 + \frac{\lambda_{12}}{\lambda_{23}} + \frac{\lambda_{12}}{\lambda_{31}}}; \quad p_3 = \frac{\frac{\lambda_{12}}{\lambda_{31}}}{1 + \frac{\lambda_{12}}{\lambda_{23}} + \frac{\lambda_{12}}{\lambda_{31}}}$$

8. ПРОЦЕСС «ГИБЕЛИ И РАЗМНОЖЕНИЯ»

В предыдущем параграфе мы убедились, что зная размеченный граф состояний системы, можно сразу написать алгебраические уравнения для предельных вероятностей состояний. Таким образом, если две непрерывные цепи Маркова имеют одинаковые графы состояний и различаются только значениями интенсивностей λ_{ij} , то нет надобности на-

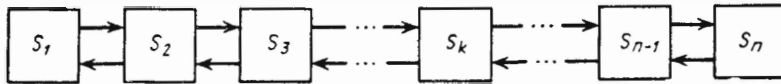


Рис. 4.38

ходить предельные вероятности состояний для каждого из графов в отдельности: достаточно составить и решить в буквенном виде уравнения для одного из них, а затем подставить вместо λ_{ij} соответствующие значения. Для многих часто встречающихся форм графов линейные уравнения легко решаются в буквенном виде.

В данном параграфе мы познакомимся с одной очень типичной схемой непрерывных марковских цепей — так называемой «схемой гибели и размножения»^{*)}.

Марковская непрерывная цепь называется «процессом гибели и размножения», если ее граф состояний имеет вид, представленный на рис. 4.38, т. е. все состояния можно вытянуть в одну цепочку, в которой каждое из средних состояний (S_2, \dots, S_{n-1}) связано прямой и обратной связью с каждым из соседних состояний, а крайние состояния (S_1, S_n) — только с одним соседним состоянием.

Пример 1. Техническое устройство состоит из трех одинаковых узлов; каждый из них может выходить из строя (отказывать); от казавший узел немедленно начинает восстанавливаться. Состояния системы нумеруем по числу неисправных узлов:

^{*)} Происхождение термина «схема гибели и размножения» ведет начало от биологических задач, где подобной схемой описывается процесс изменения численности популяции.

- S_0 — все три узла исправны;
- S_1 — один узел отказал (восстанавливается), два исправны;
- S_2 — два узла восстанавливаются, один исправен;
- S_3 — все три узла восстанавливаются.

Граф состояний показан на рис. 4.39. Из графа видно, что процесс, протекающий в системе, представляет собой процесс «гибели и размножения».

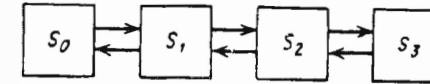


Рис. 4.39

Схема гибели и размножения очень часто встречается в самых разнообразных практических задачах; поэтому имеет смысл заранее рассмотреть эту схему в общем виде и решить соответствующую систему алгебраических уравнений с тем, чтобы в дальнейшем, встречаясь с конкретными процессами, протекающими по такой схеме, не решать задачу каждый раз заново, а пользоваться уже готовым решением.

Итак, рассмотрим случайный процесс гибели и размножения с графом состояний, представленным на рис. 4.40

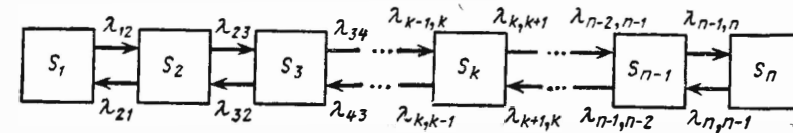


Рис. 4.40

Напишем алгебраические уравнения для вероятностей состояний. Для первого состояния S_1 имеем:

$$\lambda_{12} p_1 = \lambda_{21} p_2. \quad (8.1)$$

Для второго состояния S_2 суммы членов, соответствующих входящим и выходящим стрелкам, равны:

$$\lambda_{23} p_2 + \lambda_{21} p_2 = \lambda_{12} p_1 + \lambda_{32} p_3,$$

Но, в силу (8.1), можно сократить справа и слева равные друг другу члены $\lambda_{12} p_1$ и $\lambda_{21} p_2$; получим:

$$\lambda_{23} p_2 = \lambda_{32} p_3,$$

и далее, совершенно аналогично,

$$\lambda_{34} p_3 = \lambda_{43} p_4, \\ \dots$$

Одним словом, для схемы гибели и размножения члены, соответствующие стоящим друг над другом стрелкам, равны между собой:

$$\lambda_{k-1, k} p_{k-1} = \lambda_{k, k-1} p_k, \quad (8.2)$$

где k принимает все значения от 2 до n .

Итак, предельные вероятности состояний p_1, p_2, \dots, p_n в любой схеме гибели и размножения удовлетворяют уравнениям:

$$\left. \begin{aligned} \lambda_{12} p_1 &= \lambda_{21} p_2, \\ \lambda_{23} p_2 &= \lambda_{32} p_3, \\ \lambda_{34} p_3 &= \lambda_{43} p_4, \\ \dots & \dots \dots \dots \\ \lambda_{k-1, k} p_{k-1} &= \lambda_{k, k-1} p_k, \\ \dots & \dots \dots \dots \\ \lambda_{n-1, n} p_{n-1} &= \lambda_{n, n-1} p_n \end{aligned} \right\} \quad (8.3)$$

и нормировочному условию:

$$p_1 + p_2 + \dots + p_n = 1. \quad (8.4)$$

Будем решать эту систему следующим образом: из первого уравнения (7.3) выразим p_2 :

$$p_2 = \frac{\lambda_{12}}{\lambda_{21}} p_1, \quad (8.5)$$

из второго, с учетом (8.5), получим:

$$p_3 = \frac{\lambda_{23}}{\lambda_{32}} p_2 = \frac{\lambda_{23} \lambda_{12}}{\lambda_{32} \lambda_{21}} p_1, \quad (8.6)$$

из третьего, с учетом (8.6):

$$p_4 = \frac{\lambda_{34} \lambda_{23} \lambda_{12}}{\lambda_{43} \lambda_{32} \lambda_{21}} p_1,$$

и вообще

$$p_k = \frac{\lambda_{k-1, k} \lambda_{k-2, k-1} \dots \lambda_{12}}{\lambda_{k, k-1} \lambda_{k-1, k-2} \dots \lambda_{21}} p_1. \quad (8.7)$$

Эта формула справедлива для любого k от 2 до n .

Обратим внимание на ее структуру. В числителе стоит произведение всех плотностей вероятности перехода (интенсивностей) λ_{ij} , стоящих у стрелок, направленных слева направо, с начала и вплоть до той, которая идет в состояние S_k ; в знаменателе — произведение всех интенсивностей λ_{ij} , стоящих у стрелок, идущих справа налево, опять-таки, с начала и вплоть до стрелки, исходящей из состояния S_k . При $k = n$ в числителе будет стоять произведение интенсивностей λ_{ij} , стоящих у всех стрелок, идущих слева направо, а в знаменателе — у всех стрелок, идущих справа налево.

Итак, все вероятности p_1, p_2, \dots, p_n выражены через одну из них: p_1 . Подставим эти выражения в нормировочное условие: $p_1 + p_2 + \dots + p_n = 1$. Получим:

$$p_1 + \frac{\lambda_{12}}{\lambda_{21}} p_1 + \frac{\lambda_{23} \lambda_{12}}{\lambda_{32} \lambda_{21}} p_1 + \dots + \frac{\lambda_{k-1, k} \lambda_{k-2, k-1} \dots \lambda_{12}}{\lambda_{k, k-1} \lambda_{k-1, k-2} \dots \lambda_{21}} p_1 + \dots + \frac{\lambda_{n-1, n} \lambda_{n-2, n-1} \dots \lambda_{12}}{\lambda_{n, n-1} \lambda_{n-1, n-2} \dots \lambda_{21}} p_1 = 1,$$

откуда

$$p_1 = \frac{1}{1 + \frac{\lambda_{12}}{\lambda_{21}} + \frac{\lambda_{23} \lambda_{12}}{\lambda_{32} \lambda_{21}} + \dots + \frac{\lambda_{k-1, k} \lambda_{k-2, k-1} \dots \lambda_{12}}{\lambda_{k, k-1} \lambda_{k-1, k-2} \dots \lambda_{21}} + \dots + \frac{\lambda_{n-1, n} \dots \lambda_{12}}{\lambda_{n, n-1} \dots \lambda_{21}}}. \quad (8.8)$$

Остальные вероятности выражаются через p_1 :

$$\left. \begin{aligned} p_2 &= \frac{\lambda_{12}}{\lambda_{21}} p_1, \\ p_3 &= \frac{\lambda_{23} \lambda_{12}}{\lambda_{32} \lambda_{21}} p_1, \\ \dots & \dots \dots \dots \\ p_k &= \frac{\lambda_{k-1, k} \dots \lambda_{12}}{\lambda_{k, k-1} \dots \lambda_{21}} p_1, \\ \dots & \dots \dots \dots \\ p_n &= \frac{\lambda_{n-1, n} \dots \lambda_{12}}{\lambda_{n, n-1} \dots \lambda_{21}} p_1. \end{aligned} \right\} \quad (8.9)$$

Таким образом, задача «гибели и размножения» решена в общем виде: найдены предельные вероятности состояний.

Пример 2. Найти предельные вероятности состояний для процесса гибели и размножения, граф которого показан на рис. 4.41.

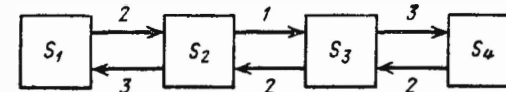


Рис. 4.41

Решение По формулам (8.8) и (8.9) имеем:

$$p_1 = \frac{1}{1 + \frac{2}{3} + \frac{2 \cdot 1}{3 \cdot 2} + \frac{2 \cdot 1 \cdot 3}{3 \cdot 2 \cdot 2}} = \frac{1}{1 + \frac{2}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{2}} = \frac{2}{5},$$

$$p_2 = \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{5} = \frac{4}{15}, \quad p_3 = \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{5} = \frac{2}{15}, \quad p_4 = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{5} = \frac{1}{5}.$$

Пример 3. Прибор состоит из трех узлов; поток отказов — простейший, среднее время безотказной работы каждого узла равно \bar{t}_6 . Отказавший узел сразу же начинает ремонтироваться; среднее время ремонта (восстановления) узла равно \bar{t}_p ; закон распределения этого времени показательный (поток восстановлений — простейший). Найти среднюю производительность прибора, если при трех работающих узлах она равна 100%, при двух — 50%, а при одном и менее — прибор вообще не работает.

Решение. Перечень состояний системы и граф состояний уже приводились в примере 1 данного параграфа. Разметим этот граф, т. е. проставим у каждой стрелки соответствующую интенсивность λ_{ij} (см. рис. 4.42).

Так как поток отказов каждого узла — простейший, то промежуток времени между отказами в этом потоке распределен по показательному закону с параметром $\lambda = 1/\bar{t}_6$, где \bar{t}_6 — среднее время безотказной работы узла.

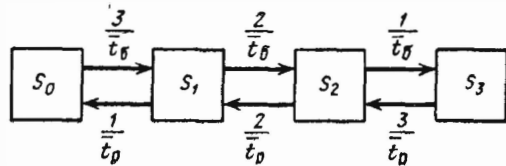


Рис. 4.42

По стрелкам вправо систему переводят отказы. Если система находится в состоянии S_0 , то работают три узла; каждый из них подвергается потоку отказов с интенсивностью $1/\bar{t}_6$; значит, поток отказов, действующий на всю систему, в три раза более интенсивен: $\lambda_{01} = 3/\bar{t}_6$.

Если система находится в состоянии S_1 , то работают два узла; общий поток отказов имеет интенсивность: $\lambda_{12} = 2/\bar{t}_6$. Аналогично $\lambda_{23} = 1/\bar{t}_6$.

По стрелкам влево систему переводят ремонты (восстановления). Среднее время восстановления узла равно \bar{t}_p , значит, интенсивность потока восстановлений, действующего на один восстанавливаемый узел, равна $\mu = 1/\bar{t}_p$, на два узла — $2/\bar{t}_p$, на три узла — $3/\bar{t}_p$. Эти значения λ_{10} , λ_{21} , λ_{32} и проставлены на рис. 8.5 у стрелок, ведущих влево.

Пользуясь полученным выше общим решением задачи гибели и размножения, имеем (ставя p_0 вместо p_1):

$$p_0 = \frac{1}{1 + 3\left(\frac{\bar{t}_p}{\bar{t}_6}\right) + 3\left(\frac{\bar{t}_p}{\bar{t}_6}\right)^2 + \left(\frac{\bar{t}_p}{\bar{t}_6}\right)^3}$$

$$p_1 = 3\left(\frac{\bar{t}_p}{\bar{t}_6}\right) p_0;$$

$$p_2 = 3\left(\frac{\bar{t}_p}{\bar{t}_6}\right)^2 p_0;$$

$$p_3 = \left(\frac{\bar{t}_p}{\bar{t}_6}\right)^3 p_0.$$

Зададимся конкретными значениями $\bar{t}_6 = 10$ (час), $\bar{t}_p = 5$ (час). Тогда $\frac{\bar{t}_p}{\bar{t}_6} = 0,5$ и

$$p_0 = \frac{1}{1 + 3/2 + 3/4 + 1/8} = 8/27, \quad p_1 = 3/2 \cdot 8/27 = 12/27, \quad p_2 = 3/4 \cdot 8/27 = 6/27, \quad p_3 = 1/8 \cdot 8/27 = 1/27.$$

Средняя производительность прибора в установившемся режиме:

$$100\% p_0 + 50\% p_1 = \left(\frac{800}{27} + \frac{600}{27}\right) \% = 51,9\% \text{ номинала.}$$

9. ЦИКЛИЧЕСКИЙ ПРОЦЕСС

Марковский случайный процесс, протекающий в системе, называется циклическим, если состояния связаны между собой в кольцо (цикл) с односторонними переходами (см. рис. 4.43 на стр. 228).

Напишем алгебраические уравнения для предельных вероятностей состояний:

$$\left. \begin{aligned} \lambda_{23} p_2 &= \lambda_{12} p_1, \\ \lambda_{34} p_3 &= \lambda_{23} p_2, \\ &\dots \\ \lambda_{k-1, k} p_{k-1} &= \lambda_{k, k+1} p_k, \\ &\dots \\ \lambda_{n-1, n} p_{n-1} &= \lambda_{n, 1} p_n, \\ \lambda_{n, 1} p_n &= \lambda_{12} p_1, \end{aligned} \right\} \quad (9.1)$$

плюс нормировочное условие:

$$p_1 + p_2 + \dots + p_n = 1.$$

Из уравнений (9.1), отбросив последнее, выразим все вероятности p_2, \dots, p_n через p_1 :

$$\left. \begin{aligned} p_2 &= \frac{\lambda_{12}}{\lambda_{23}} p_1, \\ p_3 &= \frac{\lambda_{23}}{\lambda_{34}} p_2 = \frac{\lambda_{12} \lambda_{23}}{\lambda_{23} \lambda_{34}} p_1 = \frac{\lambda_{12}}{\lambda_{34}} p_1, \\ p_4 &= \frac{\lambda_{12}}{\lambda_4} p_1, \\ &\dots \\ p_k &= \frac{\lambda_{12}}{\lambda_{k, k+1}} p_1, \\ &\dots \\ p_n &= \frac{\lambda_{12}}{\lambda_{n, 1}} p_1. \end{aligned} \right\}$$

Подставляя эти выражения в (9.2), получим:

$$p_1 + \lambda_{12} \left(\frac{1}{\lambda_{23}} + \frac{1}{\lambda_{34}} + \dots + \frac{1}{\lambda_{n1}} \right) p_1 = 1,$$

откуда

$$\left. \begin{aligned} p_1 &= \frac{1}{1 + \lambda_{12} \left(\frac{1}{\lambda_{23}} + \frac{1}{\lambda_{34}} + \dots + \frac{1}{\lambda_{n1}} \right)}, \\ p_2 &= \frac{\lambda_{12}}{\lambda_{23}} p_1, \\ p_3 &= \frac{\lambda_{12}}{\lambda_{34}} p_1, \\ &\dots \dots \dots \\ p_k &= \frac{\lambda_{12}}{\lambda_{k, k+1}} p_1, \\ &\dots \dots \dots \\ p_n &= \frac{\lambda_{12}}{\lambda_{n1}} p_1. \end{aligned} \right\} (9.2)$$

Формулы (9.2), выражающие предельные вероятности состояний для циклического процесса, можно привести к более удобному и наглядному виду, если перейти от интенсивностей λ_{ij} к средним временам \bar{t}_i пребывания системы (подряд) в состоянии S_i ($i = 1, \dots, n$).

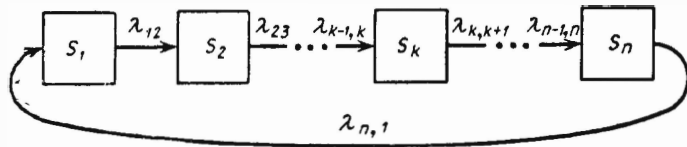


Рис. 4.43

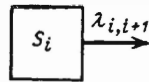


Рис. 4.44

Действительно, пусть из состояния S_i , как это имеет место в циклической схеме, исходит только одна стрелка (рис. 4.44). Пусть система S находится в состоянии S_i . Найдем математическое ожидание времени T_i , которое она еще пробудет в этом состоянии. Так как процесс — марковский, закон распределения времени T_i не зависит от того, сколько времени система уже пробыла в состоянии S_i ; значит, он такой же, каким был бы, если бы система только что пришла в состояние S_i , т. е., представляет собой не что иное, как показательный закон распределения промежутка времени T между соседними событиями в простейшем «потокте уходов» системы из состояния S_i . Параметр этого закона равен $\lambda_{i, i+1}$, а среднее время пребывания системы в состоянии S_i (если она в нем уже находится) равно $\bar{t}_i = \frac{1}{\lambda_{i, i+1}}$.

Отсюда $\lambda_{i, i+1} = \frac{1}{\bar{t}_i}$ для всех $i = 1, 2, \dots, n - 1$. Для $i = n$ получим (в силу цикличности) $\lambda_{n, 1} = \frac{1}{\bar{t}_n}$.

Подставив эти выражения в формулы (9.2), после элементарных преобразований получим:

$$\begin{aligned} p_1 &= \frac{\bar{t}_1}{\bar{t}_1 + \bar{t}_2 + \dots + \bar{t}_n}, \\ p_2 &= \frac{\bar{t}_2}{\bar{t}_1 + \bar{t}_2 + \dots + \bar{t}_n}, \\ &\dots \dots \dots \\ p_n &= \frac{\bar{t}_n}{\bar{t}_1 + \bar{t}_2 + \dots + \bar{t}_n}, \end{aligned}$$

или, короче:

$$p_k = \frac{\bar{t}_k}{\sum_{i=1}^n \bar{t}_i} \quad (k = 1, \dots, n), \quad (9.3)$$

т. е. предельные вероятности состояний в циклической схеме относятся как средние времена пребывания системы подряд в каждом из состояний.

Пример 1. Электронная цифровая вычислительная машина может находиться в одном из следующих состояний:

- S_1 — исправна, работает;
- S_2 — неисправна, остановлена; ведется поиск неисправности;
- S_3 — неисправность локализована; ведется ремонт;
- S_4 — ремонт закончен; ведется подготовка к пуску машины.

Все потоки событий — простейшие. Среднее время безотказной работы ЭЦВМ (подряд) равно 0,5 (суток). Для ремонта машину приходится останавливать в среднем на 6 часов. Поиск неисправности длится в среднем 0,5 часа. После окончания ремонта машина готовится к пуску в среднем 1 час. Найти предельные вероятности состояний.

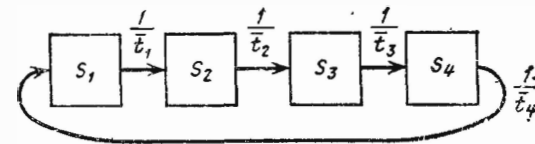


Рис. 4.45

Решение. Граф состояний имеет вид циклической схемы (рис. 4.45). Определим среднее время пребывания ЭЦВМ подряд в каждом состоянии:

$$\bar{t}_1 = 1/2, \quad \bar{t}_2 = 1/48, \quad \bar{t}_3 = 1/4, \quad \bar{t}_4 = 1/24 \text{ (суток)},$$

откуда, по формулам (9.3):

$$p_1 = \frac{1/2}{1/2 + 1/48 + 1/4 + 1/24} = 24/39, \quad p_2 = 1/39, \quad p_3 = 12/39, \quad p_4 = 2/39,$$

или, в десятичных дробях,

$$p_1 = 0,615; \quad p_2 = 0,026; \quad p_3 = 0,308; \quad p_4 = 0,051.$$

Таким образом, если процесс сводится к простому циклическому с односторонними переходами, предельные вероятности состояний находятся очень просто: из соотношения средних времен пребывания (поряд) в каждом из состояний.

Во многих случаях практики приходится иметь дело с ветвящимся циклическим процессом, где граф состояний в отдельных узлах образует разветвления.

Пример 2. ЭЦВМ может находиться в следующих состояниях:

S_1 — исправна, работает;

S_2 — неисправна, остановлена; ведется поиск неисправности;

S_3 — неисправность оказалась незначительной и устраняется местными средствами;

S_4 — неисправность оказалась серьезной и устраняется бригадой специалистов;

S_5 — подготовка к пуску

Процесс, протекающий в системе — марковский (все потоки событий — простейшие). Среднее время исправной работы машины подряд равно \bar{t}_1 , среднее время поиска неисправностей — \bar{t}_2 , среднее время ремонта местными средствами — \bar{t}_3 , среднее время ремонта бригадой специалистов — \bar{t}_4 , среднее время подготовки ЭЦВМ к пуску — \bar{t}_5 .

Неисправность ЭЦВМ может быть ликвидирована местными средствами с вероятностью \mathcal{P} , а с вероятностью $1 - \mathcal{P}$ требует вызова бригады специалистов. Труд бригады оплачивается в размере k (руб/час).

Требуется найти предельные вероятности состояний и определить средний расход, идущий на оплату работы ремонтной бригады в единицу времени (в сутки).

Решение. Строим размеченный граф состояний (рис. 4.46). Если из состояния выходит только одна стрелка, то интенсивность потока событий, стоящая у этой стрелки, равна единице, деленной на среднее время пребывания (поряд) в этом состоянии. Если из состояния выходят не одна стрелка, а две, то общая интенсивность, равная единице, деленной на среднее время пребывания (поряд) в данном состоянии, умножается для каждой стрелки на вероятность того, что переход совершится именно по этой стрелке.

Уравнения для предельных вероятностей состояний имеют вид:

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{\bar{t}_1} p_1 &= \frac{1}{\bar{t}_2} p_2, \\ \frac{\mathcal{P}}{\bar{t}_2} p_2 &= \frac{1}{\bar{t}_3} p_3, \\ \frac{1-\mathcal{P}}{\bar{t}_2} p_2 &= \frac{1}{\bar{t}_4} p_4, \\ \frac{1}{\bar{t}_3} p_3 + \frac{1}{\bar{t}_4} p_4 &= \frac{1}{\bar{t}_5} p_5, \\ \frac{1}{\bar{t}_5} p_5 &= \frac{1}{\bar{t}_1} p_1, \end{aligned} \right\} \quad (9.4)$$

плюс нормировочное условие:

$$p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + p_5 = 1. \quad (9.5)$$

Из уравнений (9.4) одно, как мы знаем, можно отбросить; отбросим самое сложное — четвертое, а из остальных выразим p_2, p_3, p_4, p_5 через p_1 :

$$\begin{aligned} p_2 &= \frac{\bar{t}_2}{\bar{t}_1} p_1, \\ p_3 &= \frac{\mathcal{P}\bar{t}_3}{\bar{t}_2} p_2 = \frac{\mathcal{P}\bar{t}_3}{\bar{t}_2} \frac{\bar{t}_2}{\bar{t}_1} p_1 = \frac{\mathcal{P}\bar{t}_3}{\bar{t}_1} p_1, \\ p_4 &= \frac{(1-\mathcal{P})\bar{t}_4}{\bar{t}_2} p_2 = \frac{(1-\mathcal{P})\bar{t}_4}{\bar{t}_2} \frac{\bar{t}_2}{\bar{t}_1} p_1 = \frac{(1-\mathcal{P})\bar{t}_4}{\bar{t}_1} p_1, \\ p_5 &= \frac{\bar{t}_5}{\bar{t}_1} p_1. \end{aligned}$$

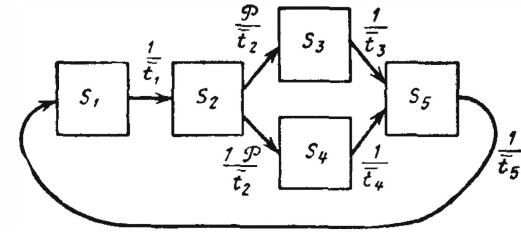


Рис. 4.46

Подставляя в (9.5), имеем:

$$p_1 \left(1 + \frac{\bar{t}_2}{\bar{t}_1} + \frac{\mathcal{P}\bar{t}_3}{\bar{t}_1} + \frac{(1-\mathcal{P})\bar{t}_4}{\bar{t}_1} + \frac{\bar{t}_5}{\bar{t}_1} \right) = 1.$$

Отсюда

$$\begin{aligned} p_1 &= \frac{\bar{t}_1}{\bar{t}_1 + \bar{t}_2 + \mathcal{P}\bar{t}_3 + (1-\mathcal{P})\bar{t}_4 + \bar{t}_5}, \\ p_2 &= \frac{\bar{t}_2}{\bar{t}_1 + \bar{t}_2 + \mathcal{P}\bar{t}_3 + (1-\mathcal{P})\bar{t}_4 + \bar{t}_5}, \\ p_3 &= \frac{\mathcal{P}\bar{t}_3}{\bar{t}_1 + \bar{t}_2 + \mathcal{P}\bar{t}_3 + (1-\mathcal{P})\bar{t}_4 + \bar{t}_5}, \\ p_4 &= \frac{(1-\mathcal{P})\bar{t}_4}{\bar{t}_1 + \bar{t}_2 + \mathcal{P}\bar{t}_3 + (1-\mathcal{P})\bar{t}_4 + \bar{t}_5}, \\ p_5 &= \frac{\bar{t}_5}{\bar{t}_1 + \bar{t}_2 + \mathcal{P}\bar{t}_3 + (1-\mathcal{P})\bar{t}_4 + \bar{t}_5}. \end{aligned}$$

Средняя доля времени, которую система проводит (в установившемся режиме) в состоянии S_4 (ремонт бригадой специалистов) равна p_4 . Значит, за час система проводит в этом состоянии в среднем p_4 часов. Умножая эту величину на $24k$, получим средний расход средств на оплату бригады специалистов за сутки: $C = 24kp_4$.

Обратим внимание на структуру вероятностей p_1, p_2, \dots, p_5 в схеме ветвящегося цикла. Они, так же как и в случае простого цикла, представляют собой отношения средних времен пребывания (поряд) в состояниях к сумме всех таких времен, с той разницей, что для состояния, лежащего на «ветке», это среднее время множится на вероятность перехода по данной «ветке» (\mathcal{P} или $1 - \mathcal{P}$). Пользуясь этим правилом, можно сразу писать предельные вероятности состояний для любой ветвящейся циклической схемы

10. ПРИБЛИЖЕННОЕ СВЕДЕНИЕ НЕ-МАРКОВСКИХ ПРОЦЕССОВ К МАРКОВСКИМ. МЕТОД «ПСЕВДОСОСТОЯНИЙ»

На практике мы почти никогда не имеем дела с марковскими процессами в чистом виде: реальные процессы почти всегда обладают тем или другим последствием. Для марковского процесса время пребывания системы подряд в каком-либо состоянии распределено по показательному закону; на самом деле это далеко не всегда бывает так. Например, если поток событий, переводящий систему из состояния в состояние есть поток отказов какого-то узла, то более естественно предположить, что оставшееся время безотказной работы узла зависит от того, сколько времени узел уже работал. При этом время пребывания узла в рабочем состоянии представляет собой случайную величину, распределенную не по показательному, а по какому-то иному закону. Возникает вопрос о том, можно ли приближенно заменять не-пуассоновские потоки — пуассоновскими и к каким ошибкам в предельных вероятностях состояний может привести подобная замена. Для этого необходимо уметь хотя бы приближенно исследовать случайные процессы, протекающие в системах с последствием.

Рассмотрим некоторую физическую систему S , в которой протекает случайный процесс, направляемый какими-то не-пуассоновскими потоками событий. Если мы попробуем для этого процесса написать уравнения, выражающие вероятности состояний как функции времени, мы увидим, что в общем случае это нам не удастся. Действительно, для марковской системы мы вычисляли вероятность того, что в момент $t + \Delta t$ система будет в состоянии S_i , учитывая только то, в каком состоянии система была в момент t , и не учитывая, сколько времени она была в этом состоянии. Для не-марковской системы этот прием уже непригоден: вычисляя вероятность перехода из одного состояния в другое за время Δt , мы должны будем учитывать, сколько времени система уже провела в данном состоянии. Это приводит, вместо обыкновенных дифференциальных уравнений, к уравнениям с частными производными, то есть к гораздо более сложному математическому аппарату, с помощью которого только в редких случаях можно получить нужные результаты.

Возникает вопрос: а нельзя ли свести искусственно (хотя бы приближенно) не-марковский процесс к марковскому?

Оказывается, в некоторых случаях это возможно: а именно, если число состояний системы не очень велико, а отличающиеся от простейших потоки событий, участвующие в задаче, представляют собой (точно или приближенно) потоки Эрланга. Тогда, вводя в схему возможных состояний системы некоторые фиктивные «псевдосостояния», удастся свести не-марковский процесс к марковскому и описать его с помощью обыкновенных дифференциальных уравнений, которые при $t \rightarrow \infty$ переходят в алгебраические уравнения для предельных вероятностей состояний.

Поясним идею метода «псевдосостояний» на конкретном примере.

Пример 1. Рассматривается система S — техническое устройство, которое может выходить из строя под влиянием простейшего потока неисправностей с интенсивностью λ . Отказавшее устройство немедленно начинает восстанавливаться. Время восстановления (ремонта) T распределено не по показательному закону (как надо было бы для того, чтобы процесс был марковским), а по закону Эрланга 3-го порядка:

$$f_3(t) = \frac{\mu(\mu t)^2}{2} e^{-\mu t} \quad (t > 0). \quad (10.1)$$

Требуется свести данный не-марковский процесс к марковскому и найти для него предельные вероятности состояний.

Решение. Случайная величина T — время восстановления — распределена по закону Эрланга и, значит, представляет собой сумму трех случайных величин T_1, T_2, T_3 , распределенных по показательному закону (см. § 5 гл. 4) с параметром μ :

$$f_1(t) = \mu e^{-\mu t} \quad (t > 0). \quad (10.2)$$

Истинных состояний системы всего два:

S_1 — устройство исправно;

S_2 — устройство восстанавливается.

Граф этих состояний показан на рис. 4.47 (он относится к циклической схеме).

Однако в виду того, что переход по стрелке $S_2 \rightarrow S_1$ происходит под влиянием не простейшего, а эрланговского потока событий, процесс, происходящий в системе, марковским не является, и для него мы не можем написать ни дифференциальных, ни алгебраических уравнений.

Чтобы искусственно свести это процесс к марковскому, введем в цепочку состояний, вместо одного состояния S_2 , три последовательных «псевдосостояния».

$S_2^{(1)}$ — ремонт начинается;

$S_2^{(2)}$ — ремонт продолжается;

$S_2^{(3)}$ — ремонт заканчивается,

т. е. разделим ремонт на три этапа или «фазы», причем время пребывания системы в каждой из фаз будем считать распределенным по показательному закону (10.2). Граф состояний будет иметь вид, показанный на рис. 4.48, где роль одного состояния S_2 будут играть три псевдосостояния $S_2^{(1)}, S_2^{(2)}$ и $S_2^{(3)}$. Процесс, протекающий в такой системе, уже будет марковским.

Обозначим $p_2^{(1)}, p_2^{(2)}, p_2^{(3)}$ — предельные вероятности пребывания системы в псевдосостояниях $S_1^{(1)}, S_2^{(2)}, S_3^{(3)}$; тогда

$$p_2 = p_2^{(1)} + p_2^{(2)} + p_2^{(3)}.$$

Обозначая

$$\bar{t}_1 = 1/\lambda, \quad \bar{t}_2 = 1/\mu,$$

можем сразу написать (как для обычной циклической схемы) предельные вероятности состояний:

$$\left. \begin{aligned} p_1 &= \frac{\bar{t}_1}{\bar{t}_1 + \bar{t}_2 + \bar{t}_2 + \bar{t}_2} = \frac{\bar{t}_1}{\bar{t}_1 + 3\bar{t}_2}; \\ p_2^{(1)} &= p_2^{(2)} = p_2^{(3)} = \frac{\bar{t}_2}{\bar{t}_1 + 3\bar{t}_2}; \\ p_2 &= p_2^{(1)} + p_2^{(2)} + p_2^{(3)} = \frac{3\bar{t}_2}{\bar{t}_1 + 3\bar{t}_2}. \end{aligned} \right\}$$

Заметим, что величина $3\bar{t}_2$ представляет собой не что иное, как среднее время восстановления (ремонта) — оно равно сумме средних времен пребывания системы в каждой фазе ремонта.

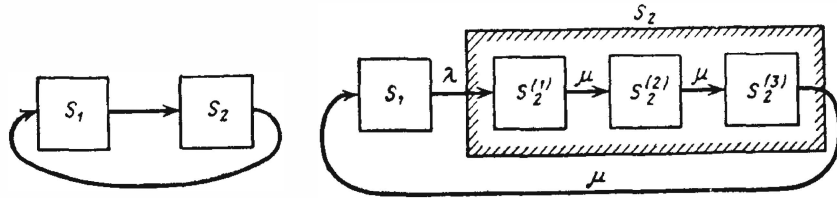


Рис. 4.47

Рис. 4.48

Переходя в формулах для p_1, p_2 от средних времен \bar{t}_1, \bar{t}_2 к интенсивностям потоков, по формулам $\bar{t}_1 = 1/\lambda, \bar{t}_2 = 1/\mu$, получим:

$$p_1 = \mu/(\mu + 3\lambda), \quad p_2 = 3\lambda/(\mu + 3\lambda). \quad (10.3)$$

Таким образом, получен вывод: для нашего элементарного примера вероятность пребывания в каждом из двух состояний, как и для марковского цикла, равна относительному среднему времени пребывания подряд в каждом из состояний.

Следующий пример будет несколько сложнее.

Пример 2. Техническое устройство S состоит из двух одинаковых узлов, каждый из которых может выходить из строя (отказываться) под влиянием простейшего потока неисправностей с интенсивностью λ . Отказавший узел немедленно начинает ремонтироваться. Время ремонта T распределено по закону Эрланга второго порядка:

$$f_2(t) = \mu^2 t e^{-\mu t} \quad (t > 0).$$

Требуется найти предельные вероятности состояний системы.

Решение. Истинных состояний системы три (нумеруем их по числу отказавших узлов).

S_0 — оба узла работают;

S_1 — один узел работает, другой ремонтируется;

S_2 — оба узла ремонтируются.

Разделим условно ремонт на две фазы: ремонт начинается и ремонт заканчивается.

Длительность каждой фазы будем считать распределенной по показательному закону (10.2). Процесс, происходящий в системе, приводится к марковскому, если ввести такие псевдосостояния:

$S_1^{(1)}$ — один узел работает, другой начинает ремонтироваться;

$S_1^{(2)}$ — один узел работает, другой кончает ремонтироваться;

$S_2^{(1,1)}$ — оба узла начинают ремонтироваться;

$S_2^{(1,2)}$ — один узел начинает ремонтироваться, а другой кончает;

$S_2^{(2,2)}$ — оба узла кончают ремонтироваться.

Граф состояний системы с псевдосостояниями показан на рис. 4.49. На стрелках, ведущих из $S_2^{(1,1)}$ в $S_2^{(1,2)}$ и из $S_2^{(2,2)}$ в $S_1^{(2)}$, написано 2μ , а не μ , потому что перейти в следующую фазу ремонта (окончание ремонта) может любой из двух узлов.

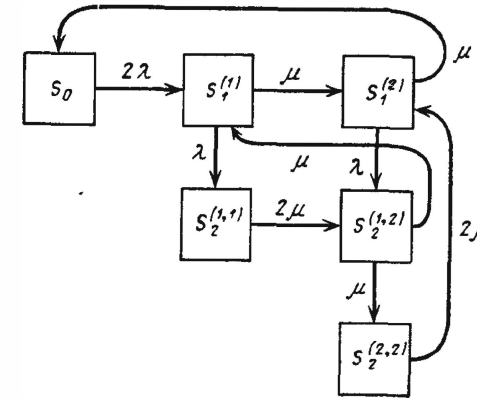


Рис. 4.49

Уравнения для предельных вероятностей состояний имеют вид:

$$\left. \begin{aligned} 2\lambda p_0 + \mu p_2^{(1,2)} &= (\lambda + \mu) p_1^{(1)}, \\ \mu p_1^{(1)} + 2\mu p_2^{(2,2)} &= (\lambda + \mu) p_1^{(2)}, \\ \lambda p_1^{(1)} &= 2\mu p_2^{(1,1)}, \\ 2\mu p_2^{(1,1)} + \lambda p_1^{(2)} &= 2\mu p_2^{(1,2)}, \\ \mu p_2^{(1,2)} &= 2\mu p_2^{(2,2)}, \\ \mu p_1^{(2)} &= 2\lambda p_0. \end{aligned} \right\} \quad (10.4)$$

Из третьего, пятого и шестого уравнений (10.4) имеем:

$$\left. \begin{aligned} p_2^{(1,1)} &= \frac{\lambda}{2\mu} p_1^{(1)}, \\ p_2^{(2,2)} &= \frac{1}{2} p_2^{(1,2)}, \\ p_1^{(2)} &= \frac{2\lambda}{\mu} p_0. \end{aligned} \right\} \quad (10.5)$$

что дает возможность уменьшить число неизвестных: подставляя (10.5) в оставшиеся три уравнения (10.4), получим:

$$\left. \begin{aligned} 2\lambda p_0 + \mu p_2^{(1,2)} &= (\lambda + \mu) p_1^{(1)}, \\ \mu p_1^{(1)} + \mu p_2^{(1,2)} &= (\lambda + \mu) \frac{2\lambda}{\mu} p_0, \\ \lambda p_1^{(1)} + \frac{2\lambda^2}{\mu} p_0 &= 2\mu p_2^{(1,2)}. \end{aligned} \right\} \quad (10.6)$$

Из этих трех уравнений с тремя неизвестными p_0 , $p_1^{(1)}$, $p_2^{(1,2)}$ можно по произволу отбросить любое, например, последнее, и добавить нормировочное условие:

$$p_0 + p_1^{(1)} + p_1^{(2)} + p_2^{(1,1)} + p_2^{(1,2)} + p_2^{(2,2)} = 1,$$

или, с учетом (10.5),

$$\left(1 + \frac{2\lambda}{\mu}\right) p_0 + \left(1 + \frac{\lambda}{2\mu}\right) p_1^{(1)} + \frac{3}{2} p_2^{(1,2)} = 1. \quad (10.7)$$

Решим два первых уравнения (10.6) вместе с уравнением (10.7). Выразим из первого уравнения $p_2^{(1,2)}$ через p_0 и $p_1^{(1)}$:

$$p_2^{(1,2)} = \left(1 + \frac{\lambda}{\mu}\right) p_1^{(1)} - \frac{2\lambda}{\mu} p_0 \quad (10.8)$$

и подставим это выражение во второе уравнение; получим:

$$(\lambda + 2\mu) p_1^{(1)} = \left[2\lambda + \frac{2\lambda}{\mu} (\lambda + \mu)\right] p_0,$$

или, после сокращения на $(\lambda + 2\mu)$:

$$p_1^{(1)} = \frac{2\lambda}{\mu} p_0. \quad (10.9)$$

Подставляя это в (10.8), выразим и вероятность $p_2^{(1,2)}$ через p_0 :

$$p_2^{(1,2)} = \frac{2\lambda^2}{\mu^2} p_0. \quad (10.10)$$

Теперь подставим (10.9) и (10.10) в нормировочное условие (10.7):

$$p_0 \left(1 + \frac{2\lambda}{\mu} + \frac{2\lambda}{\mu} + \frac{\lambda^2}{\mu^2} + \frac{3\lambda^2}{\mu^2}\right) = 1,$$

откуда

$$p_0 = \frac{1}{1 + 4\lambda/\mu + 4\lambda^2/\mu^2} = \frac{\mu^2}{\mu^2 + 4\lambda\mu + 4\lambda^2}. \quad (10.11)$$

После этого найдем все остальные предельные вероятности: из (10.9), (10.10)

$$p_1^{(1)} = \frac{2\lambda\mu}{\mu^2 + 4\lambda\mu + 4\lambda^2}, \quad p_2^{(1,2)} = \frac{2\lambda^2}{\mu^2 + 4\lambda\mu + 4\lambda^2};$$

из (10.5):

$$p_1^{(2)} = \frac{2\lambda\mu}{\mu^2 + 4\lambda\mu + 4\lambda^2}, \quad p_2^{(1,1)} = \frac{\lambda^2}{\mu^2 + 4\lambda\mu + 4\lambda^2}, \\ p_2^{(2,2)} = \frac{\lambda^2}{\mu^2 + 4\lambda\mu + 4\lambda^2}$$

После того, как найдены вероятности псевдосостояний, можно найти и вероятности состояний:

$$p_0 = \frac{\mu^2}{\mu^2 + 4\lambda\mu + 4\lambda^2}; \quad p_1 = p_1^{(1)} + p_1^{(2)} = \frac{4\lambda\mu}{\mu^2 + 4\lambda\mu + 4\lambda^2}; \\ p_2 = p_2^{(1,1)} + p_2^{(1,2)} + p_2^{(2,2)} = \frac{4\lambda^2}{\mu^2 + 4\lambda\mu + 4\lambda^2}.$$

Например, при $\lambda = 1$, $\mu = 4$ (в стационарном режиме) вероятность того, что оба узла работают, равна $p_0 = 16/25 = 0,64$; вероятность того, что один узел ремонтируется $p_1 = 8/25 = 0,32$; вероятность того, что оба узла ремонтируются $p_2 = 1/25 = 0,04$.

Заметим, что метод псевдосостояний допускает сравнительно простое решение задачи только в самых простых случаях, когда число состояний исходной системы невелико. Однако, иногда удается применить этот метод и к задачам, где число состояний не очень мало; во всяком случае, получить если не буквенное, то численное приближенное решение соответствующей системы линейных алгебраических уравнений.

Возможности метода псевдосостояний существенно расширяются, если пользоваться в качестве потоков событий не одними только эрланговскими потоками в чистом виде, а и обобщенными эрланговскими и смешанными обобщенными эрланговскими распределениями, о которых упоминалось в конце § 5.

ТЕОРИЯ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ

1. ЗАДАЧИ ТЕОРИИ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ

При исследовании операций очень часто приходится сталкиваться с анализом работы своеобразных систем, называемых с и с т е м а м и м а с с о в о г о о б с л у ж и в а н и я (СМО). Примерами таких систем могут служить: телефонные станции, ремонтные мастерские, билетные кассы, справочные бюро, магазины, парикмахерские и т. п.

Каждая СМО состоит из какого-то числа обслуживающих единиц, которые мы будем называть к а н а л а м и обслуживания. В качестве «каналов» могут фигурировать: линии связи, рабочие точки, приборы, железнодорожные пути, лифты, автомашины и т. д.

Системы массового обслуживания могут быть одноканальными или многоканальными.

Каждая СМО предназначена для обслуживания (выполнения) какого-то потока заявок (или «требований»), поступающих на СМО в какие-то, вообще говоря, случайные моменты времени. Обслуживание поступившей заявки продолжается некоторое (вообще говоря, случайное) время, после чего канал освобождается и готов к принятию следующей заявки. Случайный характер потока заявок приводит к тому, что в какие-то промежутки времени на входе СМО скапливается излишне большое число заявок (они либо образуют очередь, либо покидают СМО необслуженными); в другие же периоды СМО будет работать с недогрузкой или вообще простаивать.

Каждая система массового обслуживания, в зависимости от числа каналов и их производительности, а также от характера потока заявок, обладает какой-то пропускной способностью, позволяющей ей более или менее успешно справляться с потоком заявок. Предмет теории массового обслуживания — *установление зависимости между характером потока заявок, числом каналов, их производительностью, правилами работы СМО и успешностью (эффективностью) обслуживания.*

В качестве характеристик эффективности обслуживания, в зависимости от условий задачи и целей исследования, могут применяться различные величины и функции, например:

- среднее количество заявок, которое может обслужить СМО в единицу времени;

- средний процент заявок, получающих отказ и покидающих СМО необслуженными;

- вероятность того, что поступившая заявка немедленно будет принята к обслуживанию;

- среднее время ожидания в очереди;

- закон распределения времени ожидания;

- среднее количество заявок, находящихся в очереди;

- закон распределения числа заявок в очереди;

- средний доход, приносимый СМО в единицу времени и т. д.

Случайный характер потока заявок, а в общем случае и длительности обслуживания приводит к тому, что в системе массового обслуживания будет происходить какой-то случайный процесс. Чтобы дать рекомендации по рациональной организации этого процесса и предъявить разумные требования к СМО, необходимо изучить случайный процесс, протекающий в системе, описать его математически. Этим и занимается теория массового обслуживания.

Заметим, что за последние годы область применения математических методов теории массового обслуживания непрерывно расширяется и все больше выходит за пределы задач, связанных с «обслуживающими организациями» в буквальном смысле слова. Как своеобразные системы массового обслуживания могут рассматриваться: электронные цифровые вычислительные машины; системы сбора и обработки информации; автоматизированные производственные цехи, поточные линии; транспортные системы; системы противовоздушной обороны и т. п.

Близкими к задачам теории массового обслуживания являются многие задачи, возникающие при анализе надежности технических устройств.

Математический анализ работы СМО очень облегчается, если случайный процесс, протекающий в системе, является марковским. Тогда удастся сравнительно просто описать работу СМО с помощью аппарата обыкновенных дифференциальных (в предельном случае — линейных алгебраических) уравнений и выразить в явном виде основные характеристики эффективности обслуживания через параметры СМО и потока заявок.

Мы знаем, что для того, чтобы процесс, протекающий в системе, был марковским, нужно, чтобы все потоки событий, переводящие систему из состояния в состояние, были пуассоновскими (потоками без последствия). Для СМО потоки событий — это потоки заявок, потоки «обслуживаний» заявок и т. д. Если эти потоки не являются пуассоновскими, математическое описание процессов, происходящих в СМО, становится несравненно более сложным и требует более громоздкого аппарата, доведение которого до явных, аналитических формул удается только в редких, простейших случаях. Однако, все же аппарат «марковской» теории массового обслуживания может пригодиться и в том случае, когда процесс, протекающий в СМО, отличен от марковского — с его помощью характеристики эффективности СМО могут быть оценены приближенно. Следует заметить, что чем сложнее СМО, чем больше в ней каналов обслуживания, тем точнее оказываются приближенные формулы, полученные с помощью марковской теории. Следует также заметить, что в ряде случаев для принятия обоснованных ре-

шений по управлению работой СМО вовсе и не требуется точного знания всех ее характеристик — зачастую достаточно и приближенного, ориентировочного.

В настоящей главе будут изложены элементы теории массового обслуживания, главным образом в той простейшей форме, которую они приобретают в рамках марковской теории. Для более подробного ознакомления с теорией массового обслуживания в ее современной, развитой форме, читатель может обратиться к специальным монографиям, например, [14], [12], [20].

2. КЛАССИФИКАЦИЯ СИСТЕМ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ И ИХ ОСНОВНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ

Системы массового обслуживания вообще могут быть двух типов.

1. *Системы с отказами.* В таких системах заявка, поступившая в момент, когда все каналы заняты, получает «отказ», покидает СМО и в дальнейшем процессе обслуживания не участвует.

2. *Системы с ожиданием* (с очередью). В таких системах заявка, поступившая в момент, когда все каналы заняты, становится в очередь и ожидает, пока не освободится один из каналов. Как только освободится канал, принимается к обслуживанию одна из заявок, стоящих в очереди.

Обслуживание в системе с ожиданием может быть «упорядоченным» (заявки обслуживаются в порядке поступления) и «неупорядоченным» (заявки обслуживаются в случайном порядке). Кроме того, в некоторых СМО применяется так называемое «обслуживание с приоритетом», когда некоторые заявки обслуживаются в первую очередь, предпочтительно перед другими.

Системы с очередью делятся на *системы с неограниченным ожиданием* и *системы с ограниченным ожиданием*.

В системах с неограниченным ожиданием каждая заявка, поступившая в момент, когда нет свободных каналов, становится в очередь и «терпеливо» ждет освобождения канала, который примет ее к обслуживанию. Любая заявка, поступившая в СМО, рано или поздно будет обслужена.

В системах с ограниченным ожиданием на пребывание заявки в очереди накладываются те или другие ограничения. Эти ограничения могут касаться длины очереди (числа заявок, одновременно находящихся в очереди), времени пребывания заявки в очереди (после какого-то срока пребывания в очереди заявка покидает очередь и уходит), общего времени пребывания заявки в СМО и т. д.

В зависимости от типа СМО, при оценке ее эффективности могут применяться те или другие величины (показатели эффективности). Например, для СМО с отказами одной из важнейших характеристик ее продуктивности является так называемая абсолютная пропускная способность — среднее число заявок, которое может обслужить система за единицу времени.

Наряду с абсолютной, часто рассматривается относительная пропускная способность СМО — средняя доля поступивших заявок, обслуживаемая системой (отношение среднего числа заявок, обслуживаемых системой в единицу времени, к среднему числу поступающих за это время заявок).

Помимо абсолютной и относительной пропускной способностей, при анализе СМО с отказами нас могут, в зависимости от задачи исследования, интересовать и другие характеристики, например:

- среднее число занятых каналов,
- среднее относительное время простоя системы в целом и отдельного канала и т. д.

Перейдем к рассмотрению характеристик СМО с ожиданием.

Очевидно, для СМО с неограниченным ожиданием как абсолютная, так и относительная пропускная способность теряют смысл, так как каждая поступившая заявка рано или поздно будет обслужена. Зато для такой СМО весьма важными характеристиками являются:

- среднее число заявок в очереди,
- среднее число заявок в системе (в очереди и под обслуживанием),
- среднее время ожидания заявки в очереди,
- среднее время пребывания заявки в системе (в очереди и под обслуживанием),
- и другие характеристики ожидания.

Для СМО с ограниченным ожиданием интерес представляют обе группы характеристик: как абсолютная и относительная пропускная способности, так и характеристики ожидания.

Для анализа процесса, протекающего в СМО, существенно знать основные параметры системы: число каналов n , интенсивность потока заявок λ , производительность каждого канала (среднее число заявок μ , обслуживаемое каналом в единицу времени), условия образования очереди (ограничения, если они есть).

В зависимости от этих параметров мы и будем в дальнейшем выражать характеристики эффективности работы СМО.

Заранее условимся (чтобы не оговаривать это всякий раз отдельно), что мы будем считать все потоки событий, переводящие СМО из состояния в состояние, пуассоновскими. В тех редких случаях, когда мы будем рассматривать не-марковские системы массового обслуживания, мы будем каждый раз оговаривать это специально.

Напомним, что в случае, когда пуассоновский поток стационарен (простейший поток), интервал времени T между событиями в этом потоке есть случайная величина, распределенная по показательному закону:

$$f(t) = \lambda e^{-\lambda t} \quad (t > 0), \quad (2.1)$$

где λ — интенсивность потока событий.

В случае, когда из какого-то состояния S_i систему выводят сразу несколько простейших потоков, величина T — время пребывания системы (подряд) в данном состоянии есть случайная величина, распределенная по закону (2.1), где λ — суммарная интенсивность всех потоков событий, выводящих систему из данного состояния.

3. ОДНОКАНАЛЬНАЯ СМО С ОТКАЗАМИ

Рассмотрим простейшую из всех задач теории массового обслуживания — задачу о функционировании одноканальной СМО с отказами.

Пусть система массового обслуживания состоит только из одного канала ($n = 1$) и на нее поступает пуассоновский поток заявок с интенсивностью λ , зависящей, в общем случае, от времени:

$$\lambda = \lambda(t). \quad (3.1)$$

Заявка, заставшая канал занятым, получает отказ и покидает систему.

Обслуживание заявки продолжается в течение случайного времени $T_{об}$, распределенного по показательному закону с параметром μ :

$$f(t) = \mu e^{-\mu t} \quad (t > 0). \quad (3.2)$$

Из этого следует, что «поток обслуживаний» — простейший, с интенсивностью μ . Чтобы представить себе реально этот поток, вообразим один непрерывно занятый канал —

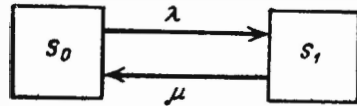


Рис. 5.1

он будет выдавать обслуженные заявки потоком с интенсивностью μ .

Требуется найти:

- 1) абсолютную пропускную способность СМО (A);
- 2) относительную пропускную способность СМО (q).

Рассмотрим единственный канал обслуживания как физическую систему S , которая может находиться в одном из двух состояний:

- S_0 — свободен,
- S_1 — занят.

Граф состояний системы показан на рис. 5.1.

Из состояния S_0 в S_1 систему, очевидно, переводит поток заявок с интенсивностью λ ; из S_1 в S_0 — «поток обслуживаний» с интенсивностью μ .

Обозначим вероятности состояний $p_0(t)$ и $p_1(t)$. Очевидно, для любого момента t

$$p_0(t) + p_1(t) = 1. \quad (3.3)$$

Составим дифференциальные уравнения Колмогорова для вероятностей состояний согласно правилу, данному в § 3 гл. 4. Имеем:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dp_0}{dt} &= -\lambda p_0 + \mu p_1, \\ \frac{dp_1}{dt} &= -\mu p_1 + \lambda p_0. \end{aligned} \right\} \quad (3.4)$$

Из двух уравнений (3.4) одно является лишним, так как p_0 и p_1 связаны соотношением (3.3). Учитывая это, отбросим второе уравнение,

а в первое подставим вместо p_1 его выражение $(1 - p_0)$:

$$\frac{dp_0}{dt} = -\lambda p_0 + \mu(1 - p_0),$$

или

$$\frac{dp_0}{dt} = -(\lambda + \mu)p_0 + \mu. \quad (3.5)$$

Это уравнение естественно решать при начальных условиях:

$$p_0(0) = 1, \quad p_1(0) = 0$$

(в начальный момент канал свободен).

Линейное дифференциальное уравнение (3.5) с одной неизвестной функцией p_0 легко может быть решено не только для простейшего потока заявок ($\lambda = \text{const}$), но и для случая, когда интенсивность этого потока со временем меняется ($\lambda = \lambda(t)$). Не останавливаясь на последнем случае, приведем решение уравнения (3.5) только для случая $\lambda = \text{const}$:

$$p_0 = \frac{\mu}{\lambda + \mu} + \frac{\lambda}{\lambda + \mu} e^{-(\lambda + \mu)t}. \quad (3.6)$$

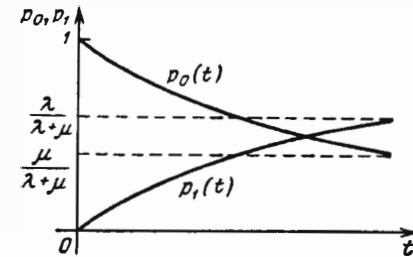


Рис. 5.2

Зависимость величины p_0 от времени имеет вид, изображенный на рис. 5.2. В начальный момент (при $t = 0$) канал заведомо свободен ($p_0(0) = 1$). С увеличением t вероятность p_0 уменьшается и в пределе (при $t \rightarrow \infty$) равна $\frac{\mu}{\lambda + \mu}$. Величина $p_1(t)$, дополняющая $p_0(t)$ до единицы, изменяется как показано на том же рис. 5.2.

Нетрудно убедиться, что для одноканальной СМО с отказами вероятность p_0 есть не что иное, как относительная пропускная способность q .

Действительно, p_0 есть вероятность того, что в момент t канал свободен, иначе вероятность того, что заявка, пришедшая в момент t , будет обслужена. А значит, для данного момента времени t среднее отношение числа обслуженных заявок к числу поступивших также равно p_0 : $q = p_0$.

В пределе, при $t \rightarrow \infty$, когда процесс обслуживания уже установится, предельное значение относительной пропускной способности будет равно:

$$q = \frac{\mu}{\lambda + \mu}. \quad (3.7)$$

Зная относительную пропускную способность q , легко найти абсолютную A . Они связаны очевидным соотношением:

$$A = \lambda q. \quad (3.8)$$

В пределе, при $t \rightarrow \infty$, абсолютная пропускная способность тоже установится и будет равна

$$A = \frac{\lambda \mu}{\lambda + \mu}. \quad (3.9)$$

Зная относительную пропускную способность системы q (вероятность того, что пришедшая в момент t заявка будет обслужена), легко найти вероятность отказа:

$$P_{\text{отк}} = 1 - q. \quad (3.10)$$

Вероятность отказа $P_{\text{отк}}$ есть не что иное, как средняя доля необслуженных заявок среди поданных. В пределе, при $t \rightarrow \infty$,

$$P_{\text{отк}} = 1 - \frac{\mu}{\lambda + \mu} = \frac{\lambda}{\lambda + \mu}. \quad (3.11)$$

Пример. Одноканальная СМО с отказами представляет собой одну телефонную линию. Заявка — вызов, пришедший в момент, когда линия занята, получает отказ. Интенсивность потока вызовов $\lambda = 0,8$ (вызовов в минуту). Средняя продолжительность разговора $\bar{t}_{\text{об}} = 1,5$ мин. Все потоки событий — простейшие. Определить предельные (при $t \rightarrow \infty$) значения:

- 1) относительной пропускной способности q ;
- 2) абсолютной пропускной способности A ;
- 3) вероятности отказа $P_{\text{отк}}$.

Сравнить фактическую пропускную способность СМО с номинальной, которая была бы, если бы каждый разговор длился в точности 1,5 мин, и разговоры следовали бы один за другим без перерыва.

Решение. Определяем параметр μ потока обслуживаний:

$$\mu = 1/\bar{t}_{\text{об}} = 1/1,5 = 0,667.$$

По формуле (3.6) получаем относительную пропускную способность СМО:

$$q = \frac{0,667}{0,8 + 0,667} \approx 0,455.$$

Таким образом, в установившемся режиме система будет обслуживать около 45% поступающих вызовов.

По формуле (3.9) находим абсолютную пропускную способность:

$$A = \lambda q = 0,8 \cdot 0,455 \approx 0,364,$$

т. е. линия способна осуществить в среднем 0,364 разговора в минуту. Вероятность отказа:

$$P_{\text{отк}} = 1 - q = 0,545,$$

значит около 55% поступивших вызовов будет получать отказ. Номинальная пропускная способность канала:

$$A_{\text{ном}} = \frac{1}{\bar{t}_{\text{об}}} = 0,667 \text{ (разговора в минуту)},$$

что почти вдвое больше, чем фактическая пропускная способность, получаемая с учетом случайного характера потока заявок и случайности времени обслуживания.

4. МНОГОКАНАЛЬНАЯ СМО С ОТКАЗАМИ

Рассмотрим n -канальную СМО с отказами. Будем нумеровать состояния системы по числу занятых каналов (или, что в данном случае то же, по числу заявок, связанных с системой). Состояния будут:

- S_0 — все каналы свободны,
- S_1 — занят ровно один канал, остальные свободны,
- \dots
- S_k — заняты ровно k каналов, остальные свободны,
- \dots
- S_n — заняты все n каналов.

Граф состояний СМО представлен на рис. 5.3. Разметим граф, т. е. проставим у стрелок интенсивности соответствующих потоков событий. По стрелкам слева направо систему переводит один и тот же

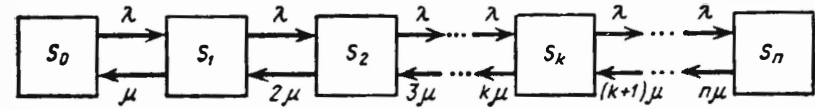


Рис. 5.3

поток — поток заявок с интенсивностью λ . Если система находится в состоянии S_k (занято k каналов) и пришла новая заявка, система переходит (перескакивает) в состояние S_{k+1} .

Определим интенсивности потоков событий, переводящих систему по стрелкам справа налево.

Пусть система находится в состоянии S_1 (занят один канал). Тогда, как только закончится обслуживание заявки, занимающей этот канал, система перейдет в S_0 ; значит, поток событий, переводящий систему по стрелке $S_1 \rightarrow S_0$, имеет интенсивность μ . Очевидно, если обслуживанием занято два канала, а не один, поток обслуживаний, переводящий систему по стрелке $S_2 \rightarrow S_1$, будет вдвое интенсивнее (2μ); если занято k каналов — в k раз интенсивнее ($k\mu$). Проставим соответствующие интенсивности у стрелок, ведущих справа налево.

Из рис. 5.3 видно, что процесс, протекающий в СМО, представляет собой частный случай процесса гибели и размножения, рассмотренного нами в § 8 гл. 4.

Пользуясь общими правилами, можно составить уравнения Колмогорова для вероятностей состояний:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dp_0}{dt} &= -\lambda p_0 + \mu p_1, \\ \frac{dp_1}{dt} &= -(\lambda + \mu) p_1 + \lambda p_0 + 2\mu p_2, \\ &\dots \\ \frac{dp_k}{dt} &= -(\lambda + k\mu) p_k + \lambda p_{k-1} + (k+1)\mu p_{k+1}, \\ &\dots \\ \frac{dp_n}{dt} &= -n\mu p_n + \lambda p_{n-1}. \end{aligned} \right\} \quad (4.1)$$

Уравнения (4.1) называются уравнениями Эрланга. Естественными начальными условиями для их решения являются:

$$p_0(0) = 1; \quad p_1(0) = p_2(0) = \dots = p_n(0) = 0$$

(в начальный момент система свободна).

Интегрирование системы уравнений (4.1) в аналитическом виде довольно сложно; на практике такие системы дифференциальных уравнений обычно решаются численно, на АВМ или ЭЦВМ. Такое решение дает нам все вероятности состояний

$$p_0(t), \quad p_1(t), \quad \dots, \quad p_k(t), \quad \dots, \quad p_n(t)$$

как функции времени.

Естественно, нас больше всего будут интересовать предельные вероятности состояний $p_0, p_1, \dots, p_k, \dots, p_n$, характеризующие установившийся режим работы СМО (при $t \rightarrow \infty$). Для нахождения предельных вероятностей воспользуемся уже готовым решением задачи, полученным для схемы гибели и размножения в § 8 гл. 4. Согласно этому решению,

$$\left. \begin{aligned} p_k &= \frac{\lambda^k}{\mu \cdot 2\mu \dots k\mu} p_0 = \frac{(\lambda/\mu)^k}{k!} p_0, \quad (k = 1, 2, \dots, n); \\ p_0 &= \frac{1}{1 + \frac{\lambda/\mu}{1!} + \frac{(\lambda/\mu)^2}{2!} + \dots + \frac{(\lambda/\mu)^n}{n!}} \end{aligned} \right\} \quad (4.2)$$

В этих формулах интенсивность потока заявок λ и интенсивность потока обслуживаний (для одного канала) μ не фигурируют по отдельности, а входят только своим отношением λ/μ . Обозначим это отношение

$$\lambda/\mu = \rho$$

и будем называть величину ρ «приведенной интенсивностью» потока заявок. Физический смысл ее таков: величина ρ представляет собой среднее число заявок, приходящих в СМО за среднее время обслуживания одной заявки.

С учетом этого обозначения, формулы (4.2) примут вид:

$$\left. \begin{aligned} p_k &= \frac{\rho^k}{k!} p_0, \quad (k = 1, 2, \dots, n); \\ p_0 &= \frac{1}{1 + \frac{\rho}{1!} + \frac{\rho^2}{2!} + \dots + \frac{\rho^n}{n!}} = \left[1 + \frac{\rho}{1!} + \frac{\rho^2}{2!} + \dots + \frac{\rho^n}{n!} \right]^{-1} \end{aligned} \right\} \quad (4.3)$$

Формулы (4.3) называются формулами Эрланга. Они выражают предельные вероятности всех состояний системы в зависимости от параметров λ , μ и n (λ — интенсивность потока заявок, μ — интенсивность обслуживания, n — число каналов СМО).

Зная все вероятности состояний

$$p_0, p_1, \dots, p_k, \dots, p_n,$$

можно найти характеристики эффективности СМО: относительную пропускную способность q , абсолютную пропускную способность A и вероятность отказа $P_{\text{отк}}$.

Действительно, заявка получает отказ, если приходит в момент, когда все n каналов заняты. Вероятность этого равна

$$P_{\text{отк}} = p_n = \frac{\rho^n}{n!} p_0 \quad (4.4)$$

Вероятность того, что заявка будет принята к обслуживанию (она же относительная пропускная способность q) дополняет $P_{\text{отк}}$ до единицы:

$$q = 1 - p_n. \quad (4.5)$$

Абсолютная пропускная способность:

$$A = \lambda q = \lambda (1 - p_n). \quad (4.6)$$

Одной из важных характеристик СМО с отказами является среднее число занятых каналов (в данном случае оно совпадает со средним числом заявок, находящихся в системе). Обозначим это среднее число \bar{k} .

Величину \bar{k} можно вычислить непосредственно через вероятности p_0, p_1, \dots, p_n по формуле:

$$\bar{k} = 0 \cdot p_0 + 1 \cdot p_1 + \dots + n \cdot p_n \quad (4.7)$$

как математическое ожидание дискретной случайной величины, принимающей значения $0, 1, \dots, n$ с вероятностями p_0, p_1, \dots, p_n . Однако значительно проще выразить среднее число занятых каналов через абсолютную пропускную способность A , которую мы уже знаем. Действительно, A есть не что иное, как *среднее число заявок, обслуживаемых в единицу времени*; один занятый канал обслуживает в среднем за единицу времени μ заявок; среднее число занятых каналов получится делением A на μ :

$$\bar{k} = \frac{A}{\mu} = \frac{\lambda (1 - p_n)}{\mu},$$

или, переходя к обозначению $\lambda/\mu = \rho$,

$$\bar{k} = \rho (1 - p_n). \quad (4.8)$$

Пример. Повторяются условия примера предыдущего параграфа ($\lambda = 0,8$, $\mu = 0,667$), однако вместо одноканальной СМО ($n = 1$) рассматривается трехканальная ($n = 3$), т. е. число линий связи увеличено до трех. Найти вероятности состояний, абсолютную и относительную пропускную способности, вероятность отказа и среднее число занятых каналов.

Решение. Приведенная интенсивность потока заявок:

$$\rho = \lambda/\mu = 0,8/0,667 = 1,2.$$

По формулам Эрланга (4.3) получаем:

$$p_1 = \frac{\rho}{1!} p_0 = 1,2 p_0,$$

$$p_2 = \frac{\rho^2}{2!} p_0 = 0,72 p_0,$$

$$p_3 = \frac{\rho^3}{3!} p_0 = 0,288 p_0.$$

$$p_0 = \frac{1}{1 + 1,2 + 0,72 + 0,288} \approx 0,312;$$

$$p_1 \approx 1,2 \cdot 0,312 \approx 0,374; \quad p_2 \approx 0,72 \cdot 0,312 \approx 0,224;$$

$$p_3 \approx 0,288 \cdot 0,312 \approx 0,090.$$

Вычисляем вероятность отказа:

$$P_{\text{отк}} = p_3 = 0,090.$$

Относительная и абсолютная пропускные способности равны:

$$q = 1 - p_3 = 0,910; \quad A = \lambda q = 0,8 \cdot 0,910 = 0,728.$$

Среднее число занятых каналов:

$$\bar{k} = \rho (1 - p_3) = 1,2 \cdot 0,91 \approx 1,09,$$

т. е. при установившемся режиме работы СМО в среднем будет занят один с небольшим канал из трех — остальные два будут простаивать. Этой ценой добывается сравнительно высокий уровень эффективности обслуживания — около 91% всех поступивших вызовов будет обслужено

5. ОДНОКАНАЛЬНАЯ СМО С ОЖИДАНИЕМ

Рассмотрим сначала простейшую из всех возможных СМО с ожиданием — одноканальную систему ($n = 1$), на которую поступает поток заявок с интенсивностью λ ; интенсивность обслуживания μ (т. е. в среднем непрерывно занятый канал будет выдавать μ обслуженных заявок в единицу (времени)). Заявка, поступившая в момент, когда канал занят, становится в очередь и ожидает обслуживания.

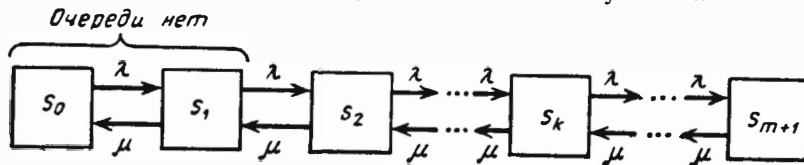


Рис. 5.4

Предположим, сначала, что количество мест в очереди ограничено числом m , т. е. если заявка пришла в момент, когда в очереди уже стоят m заявок, она покидает систему необслуженной. В дальнейшем, устремив m к бесконечности, мы получим характеристики одноканальной СМО без ограничений по длине очереди.

Будем нумеровать состояния СМО по числу заявок, находящихся в системе (как обслуживаемых, так и ожидающих обслуживания):

- S_0 — канал свободен,
- S_1 — канал занят, очереди нет,
- S_2 — канал занят, одна заявка стоит в очереди,
- ...

S_k — канал занят, $k - 1$ заявок стоит в очереди,

S_{m+1} — канал занят, m заявок стоит в очереди.

Граф состояний СМО показан на рис. 5.4. Интенсивности потоков событий, переводящих в систему по стрелкам слева направо, все равны λ , а справа налево — μ . Действительно, по стрелкам слева направо система переводит поток заявок (как только придет заявка, система переходит в следующее состояние), справа же налево — поток «освобождений» занятого канала, имеющий интенсивность μ (как только будет обслужена очередная заявка, канал либо освободится, либо уменьшится число заявок в очереди).

Изображенная на рис. 5.4 схема представляет собой схему гибели и размножения. Пользуясь общим решением, данным для схемы гибели и размножения в § 8 гл. 4, напишем выражения предельных вероятностей состояний:

$$\left. \begin{aligned} p_1 &= (\lambda/\mu) p_0, \\ p_2 &= (\lambda/\mu)^2 p_0, \\ &\dots \\ p_k &= (\lambda/\mu)^k p_0, \\ &\dots \\ p_{m+1} &= (\lambda/\mu)^{m+1} p_0, \\ p_0 &= \frac{1}{1 + (\lambda/\mu) + (\lambda/\mu)^2 + \dots + (\lambda/\mu)^{m+1}}. \end{aligned} \right\} (5.1)$$

Вводя обозначение $\lambda/\mu = \rho$, перепишем формулы (5.1) в виде:

$$\left. \begin{aligned} p_1 &= \rho p_0, \\ p_2 &= \rho^2 p_0, \\ &\dots \\ p_k &= \rho^k p_0, \\ &\dots \\ p_{m+1} &= \rho^{m+1} p_0, \\ p_0 &= \frac{1}{1 + \rho + \rho^2 + \dots + \rho^{m+1}} = \\ &= [1 + \rho + \rho^2 + \dots + \rho^{m+1}]^{-1}. \end{aligned} \right\} (5.2)$$

Заметим, что в знаменателе последней формулы (5.2) стоит геометрическая прогрессия с первым членом 1 и знаменателем ρ ; суммируя эту прогрессию, находим:

$$p_0 = \frac{1}{(1 - \rho^{m+2}) / (1 - \rho)} = \frac{1 - \rho}{1 - \rho^{m+2}}. \quad (5.3)$$

Таким образом, формулы (5.2) окончательно примут вид:

$$\left. \begin{aligned} p_0 &= \frac{1-\rho}{1-\rho^{m+2}}, \\ p_1 &= \rho p_0, \\ p_2 &= \rho^2 p_0, \\ \dots & \dots \dots \dots \\ p_k &= \rho^k p_0, \\ \dots & \dots \dots \dots \\ p_{m+1} &= \rho^{m+1} p_0. \end{aligned} \right\} \quad (5.4)$$

Обратим внимание на то, что формула (5.3) справедлива только при $\rho \neq 1$ (при $\rho = 1$ она дает неопределенность вида $0/0$). Но сумму геометрической прогрессии со знаменателем $\rho = 1$ найти еще проще чем по формуле (5.3): она равна $m + 2$, и в этом случае $p_0 = 1/(m + 2)$. Заметим, что тот же результат мы могли бы получить более сложным способом, раскрывая неопределенность (5.3) по правилу Лопиталья.

Определим характеристики СМО: вероятность отказа $P_{\text{отк}}$, относительную пропускную способность q , абсолютную пропускную способность A , среднюю длину очереди \bar{r} , среднее число заявок, связанных с системой \bar{k} .

Очевидно, заявка получает отказ только в случае, когда канал занят и все m мест в очереди — тоже:

$$P_{\text{отк}} = p_{m+1} = \frac{\rho^{m+1}(1-\rho)}{1-\rho^{m+2}}. \quad (5.5)$$

Находим относительную пропускную способность:

$$q = 1 - P_{\text{отк}} = 1 - \frac{\rho^{m+1}(1-\rho)}{1-\rho^{m+2}}. \quad (5.6)$$

Абсолютная пропускная способность:

$$A = \lambda q.$$

Найдем среднее число \bar{r} заявок, находящихся в очереди; определим эту величину как математическое ожидание дискретной случайной величины R — числа заявок, находящихся в очереди:

$$\bar{r} = M[R].$$

С вероятностью p_2 в очереди стоит одна заявка, с вероятностью p_3 две заявки, вообще с вероятностью p_k в очереди стоят $k - 1$ заявок, наконец, с вероятностью p_{m+1} в очереди стоят m заявок. Среднее число заявок в очереди получим, умножая число заявок в очереди на соответствующую вероятность и складывая результаты:

$$\begin{aligned} \bar{r} &= 1 \cdot p_2 + 2 \cdot p_3 + \dots + (k-1) \cdot p_k + \dots + m \cdot p_{m+1} = \\ &= 1 \cdot \rho^2 p_0 + 2 \cdot \rho^3 p_0 + \dots + (k-1) \cdot \rho^k p_0 + \dots + m \cdot \rho^{m+1} p_0. \end{aligned} \quad (5.7)$$

Вынесем в этом выражении $\rho^2 p_0$ за скобки:

$$\bar{r} = \rho^2 p_0 [1 + 2\rho + \dots + (k-1)\rho^{k-2} + \dots + m\rho^{m-1}]. \quad (5.8)$$

Выведем формулу для суммы, стоящей в скобках (этой формулой мы будем часто пользоваться в дальнейшем). Очевидно, рассматриваемая сумма представляет собой не что иное, как производную по ρ суммы

$$\Sigma = \rho + \rho^2 + \dots + \rho^{k-1} + \dots + \rho^m,$$

а для этого выражения мы можем воспользоваться формулой суммы геометрической прогрессии:

$$\Sigma = \frac{\rho - \rho^{m+1}}{1-\rho}. \quad (5.9)$$

Продифференцируем (5.9) по ρ :

$$\begin{aligned} \Sigma' &= \frac{[1 - (m+1)\rho^m](1-\rho) + (\rho - \rho^{m+1})}{(1-\rho)^2} = \\ &= \frac{1 - (m+1)\rho^m - \rho + (m+1)\rho^{m+1} + \rho - \rho^{m+1}}{(1-\rho)^2} = \\ &= \frac{1 - (m+1)\rho^m + m\rho^{m+1}}{(1-\rho)^2} = \frac{1 - \rho^m(m+1-m\rho)}{(1-\rho)^2}. \end{aligned}$$

Итак, выражение для суммы, стоящей в скобках в правой части (5.8), найдено:

$$1 + 2\rho + \dots + (k-1)\rho^{k-2} + \dots + m\rho^{m-1} = \frac{1 - \rho^m(m+1-m\rho)}{(1-\rho)^2}. \quad (5.10)$$

Подставляя его в (5.8), получим:

$$\bar{r} = \rho^2 p_0 \frac{1 - \rho^m(m+1-m\rho)}{(1-\rho)^2}.$$

Учитывая выражение для p_0 из (5.4), имеем:

$$\bar{r} = \rho^2 \frac{(1-\rho)[1 - \rho^m(m+1-m\rho)]}{(1-\rho^{m+2})(1-\rho)^2}$$

или, окончательно,

$$\bar{r} = \frac{\rho^2 [1 - \rho^m(m+1-m\rho)]}{(1-\rho^{m+2})(1-\rho)}. \quad (5.11)$$

Таким образом, мы вывели выражение для среднего числа заявок, ожидающих обслуживания в очереди. Выведем теперь формулу для среднего числа \bar{k} заявок, связанных с системой (как стоящих в очереди, так и находящихся под обслуживанием). Будем решать задачу следующим образом: рассмотрим общее число заявок K , связанных с системой, как сумму двух случайных величин: числа заявок, стоящих в очереди, и числа заявок, находящихся под обслуживанием:

$$K = R + \Omega,$$

где R — число заявок в очереди, Ω — число заявок под обслуживанием.

По теореме сложения математических ожиданий

$$\bar{k} = M[K] = M[R] + M[\Omega] = \bar{r} + \bar{\omega},$$

где \bar{r} — среднее число заявок в очереди, $\bar{\omega}$ — среднее число заявок под обслуживанием.

Величину \bar{r} мы только что нашли; найдем величину $\bar{\omega}$. Так как канал у нас один, то случайная величина Ω может принимать только два значения: 0 или 1. Значение 0 она принимает, если канал свободен; вероятность этого равна

$$p_0 = \frac{1-\rho}{1-\rho^{m+2}}.$$

Значение 1 она принимает, если канал занят; вероятность этого равна

$$1-p_0 = \frac{\rho-\rho^{m+2}}{1-\rho^{m+2}}.$$

Отсюда находим математическое ожидание числа заявок, находящихся под обслуживанием:

$$\bar{\omega} = 0 \cdot p_0 + 1 \cdot (1-p_0) = \frac{\rho-\rho^{m+2}}{1-\rho^{m+2}}.$$

Таким образом, среднее число заявок, связанных с СМО, будет

$$\bar{k} = \bar{r} + \frac{\rho-\rho^{m+2}}{1-\rho^{m+2}}, \quad (5.12)$$

где величина \bar{r} определяется по формуле (5.11).

Выведем выражение еще для одной существенной характеристики СМО с ожиданием: среднего времени ожидания заявки в очереди. Обозначим его $\bar{t}_{ож}$. Пусть заявка проходит в систему в какой-то момент времени. С вероятностью p_0 канал обслуживания не будет занят, и ей не придется стоять в очереди (время ожидания равно нулю). С вероятностью p_1 она придет в систему во время обслуживания какой-то заявки, но перед ней не будет очереди, и заявка будет ждать начала своего обслуживания в течение времени $1/\mu$ (среднее время обслуживания одной заявки). С вероятностью p_2 в очереди перед рассматриваемой заявкой будет стоять еще одна, и время ожидания в среднем будет равно $2/\mu$, и т. д. Вообще, с вероятностью p_k пришедшая заявка застанет в системе k заявок и будет ждать в среднем k/μ единиц времени; здесь k может быть любым целым числом до m . Что же касается $k = m+1$, т. е. случая, когда вновь приходящая заявка застаёт канал обслуживания занятым и еще m заявок в очереди (вероятность этого p_{m+1}), то время ожидания в этом случае также равно нулю, потому что заяв-

ка не становится в очередь (и не обслуживается). Поэтому среднее время ожидания будет:

$$\bar{t}_{ож} = p_1 \frac{1}{\mu} + p_2 \frac{2}{\mu} + \dots + p_k \frac{k}{\mu} + \dots + p_m \frac{m}{\mu}.$$

Подставляя сюда выражения для p_1, \dots, p_m , получаем:

$$\begin{aligned} \bar{t}_{ож} &= p_0 \rho \frac{1}{\mu} + p_0 \rho^2 \frac{2}{\mu} + \dots + p_0 \rho^k \frac{k}{\mu} + \dots + p_0 \rho^m \frac{m}{\mu} = \\ &= \frac{p_0 \rho}{\mu} (1 + 2\rho + \dots + k\rho^{k-1} + \dots + m\rho^{m-1}). \end{aligned}$$

Преобразуем сумму в скобках, пользуясь формулой (5.10):

$$\bar{t}_{ож} = \frac{p_0 \rho}{\mu} \frac{1-\rho^m (m+1-m\rho)}{(1-\rho)^2},$$

или, выражая p_0 через ρ :

$$\bar{t}_{ож} = \frac{1}{\mu} \frac{\rho(1-\rho)}{1-\rho^{m+2}} \frac{1-\rho^m (m+1-m\rho)}{(1-\rho)^2} = \frac{\rho[1-\rho^m (m+1-m\rho)]}{\mu(1-\rho^{m+2})(1-\rho)}. \quad (5.13)$$

Сравнивая это выражение с формулой (5.11), замечаем, что

$$\bar{t}_{ож} = \frac{1}{\rho\mu} \bar{r} = \frac{\bar{r}}{\lambda}, \quad (5.14)$$

т. е. среднее время ожидания равно среднему числу заявок в очереди, деленному на интенсивность потока заявок.

Выведем еще формулу для среднего времени пребывания заявки в системе. Обозначим $T_{сист}$ случайную величину — время пребывания заявки в СМО. Эта случайная величина складывается из двух слагаемых (тоже случайных):

$$T_{сист} = T_{ож} + \Theta,$$

где $T_{ож}$ — время ожидания заявки в очереди, Θ — случайная величина, равная времени обслуживания $T_{об}$, если заявка обслуживается, и нулю, если она не обслуживается (получает отказ).

По теореме сложения математических ожиданий:

$$\bar{t}_{сист} = M[T_{сист}] = M[T_{ож}] + M[\Theta],$$

но, в наших обозначениях, $M[T_{ож}] = \bar{t}_{ож}$, а $M[\Theta] = q\bar{t}_{об} = q/\mu$. Отсюда находим: $\bar{t}_{сист} = \bar{t}_{ож} + q/\mu$, или, с учетом формулы (5.4),

$$\bar{t}_{сист} = \bar{r}/\lambda + q/\mu. \quad (5.15)$$

Пример 1. Автозаправочная станция (АЗС) представляет собой СМО с одним каналом обслуживания (одной колонкой). Площадка при станции допускает пребывание в очереди на заправку не более трех машин одновременно ($m=3$). Если в очереди уже находится три машины, очередная машина,

прибывшая к станции, в очередь не становится, а проезжает мимо. Поток машин, прибывающих для заправки, имеет интенсивность $\lambda = 1$ (машина в минуту). Процесс заправки продолжается в среднем 1,25 мин. Определить:

- вероятность отказа;
- относительную и абсолютную пропускную способности СМО;
- среднее число машин, ожидающих заправки;
- среднее число машин, находящихся на АЗС (включая и обслуживаемую);
- среднее время ожидания машины в очереди;
- среднее время пребывания машины на АЗС (включая обслуживание).

Решение. Находим приведенную интенсивность потока заявок:

$$\mu = 1/1,25 = 0,8; \quad \rho = \lambda/\mu = 1/0,8 = 1,25.$$

По формулам (5.4):

$$p_0 = \frac{1 - 1,25}{1 - 3,05} \approx 0,122, \quad p_1 = 1,25 \cdot 0,122 \approx 0,152,$$

$$p_2 = 1,25 \cdot 0,122 \approx 0,191, \quad p_3 = 1,25 \cdot 0,122 \approx 0,238,$$

$$p_4 = 1,25 \cdot 0,122 \approx 0,297.$$

Вероятность отказа $P_{\text{отк}} \approx 0,297$.

Относительная пропускная способность СМО $q = 1 - P_{\text{отк}} = 0,703$.
 Абсолютная пропускная способность СМО $A = \lambda q = 0,703$ (машины в мин).
 Среднее число машин в очереди находим по формуле (5.11)

$$\bar{r} = \frac{1,25^2 [1 - 1,25^3 (3 + 1 - 3,75)]}{(1 - 1,25^5) (1 - 1,25)} \approx 1,56,$$

т. е. среднее число машин, ожидающих в очереди на заправку, равно 1,56.

Прибавляя к этой величине среднее число машин, находящихся под обслуживанием

$$\bar{\omega} = \frac{1,25 - 1,25^5}{1 - 1,25^5} \approx 0,88,$$

получаем среднее число машин, связанных с АЗС:

$$\bar{k} = \bar{r} + \bar{\omega} \approx 2,44.$$

Среднее время ожидания машины в очереди, по формуле (5.14) равно

$$\bar{t}_{\text{ож}} = \frac{\bar{r}}{\lambda} = 1,56 \text{ (мин)}.$$

Прибавляя к этой величине $M[\theta] = q/\mu = 0,703/0,8 \approx 0,88$, получим среднее время, которое машина проводит на АЗС:

$$\bar{t}_{\text{сист}} = 1,56 + 0,88 = 2,44 \text{ (мин)}.$$

До сих пор мы рассматривали работу одноканальной СМО с ожиданием при ограниченном числе m мест в очереди.

Теперь снимем это ограничение, т. е. устремим m к бесконечности. При этом число возможных состояний системы станет бесконечным, и граф состояний примет вид, показанный на рис. 5.5.

Попытаемся получить вероятности состояний СМО с неограниченной очередью путем предельного перехода (при $m \rightarrow \infty$) из формул (5.4).

Заметим, что при этом знаменатель в последней формуле (5.2) представляет собой сумму бесконечного числа членов

геометрической прогрессии. Эта сумма сходится только, когда прогрессия бесконечно убывающая, т. е. при $\rho < 1$. Можно совершенно строго доказать, что $\rho < 1$ есть условие, при котором в СМО с ожиданием существует предельный установившийся режим; при $\rho \geq 1$ такого режима не существует, и очередь при $t \rightarrow \infty$ растёт до бесконечности.

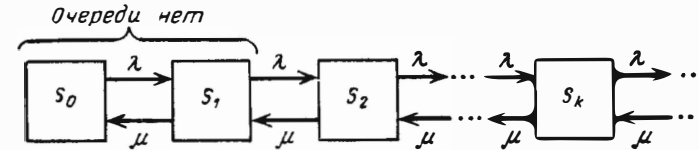


Рис. 5.5

Предположим, что

$$\rho = \lambda/\mu < 1,$$

т. е. что предельный режим существует. Устремим в формулах (5.4) m к ∞ и выведем формулы для предельных вероятностей состояний в СМО без ограничений по длине очереди. Получим:

$$\left. \begin{aligned} p_0 &= 1 - \rho, \\ p_1 &= \rho (1 - \rho), \\ p_2 &= \rho^2 (1 - \rho), \\ &\dots \dots \dots \\ p_k &= \rho^k (1 - \rho), \\ &\dots \dots \dots \end{aligned} \right\} \quad (5.16)$$

При отсутствии ограничений по длине очереди каждая заявка, пришедшая в систему, будет обслужена, поэтому $q = 1$, $A = \lambda q = \lambda$. Среднее число заявок в очереди получим из (5.11) при $m \rightarrow \infty$:

$$\bar{r} = \frac{\rho^2}{1 - \rho}. \quad (5.17)$$

Среднее число заявок в системе по формуле (5.12) при $m \rightarrow \infty$ будет равно

$$\bar{k} = \bar{r} + \rho = \frac{\rho^2}{1 - \rho} + \rho = \frac{\rho}{1 - \rho}. \quad (5.18)$$

Среднее время ожидания $\bar{t}_{\text{ож}}$ также получим из формулы (5.14) при $m \rightarrow \infty$:

$$\bar{t}_{\text{ож}} = \frac{1}{\mu} \frac{\rho}{1 - \rho}. \quad (5.19)$$

или, в другой форме:

$$\bar{t}_{\text{ож}} = \frac{\rho^2}{\lambda (1 - \rho)}. \quad (5.20)$$

Граф состояний приведен на рис. 5.6. У каждой стрелки проставлены соответствующие интенсивности потоков событий. Действительно, по стрелкам слева направо систему переводит всегда один и тот же поток заявок с интенсивностью λ ; по стрелкам справа налево систему переводит поток обслуживаний, интенсивность которого равна μ , умноженному на число занятых каналов.

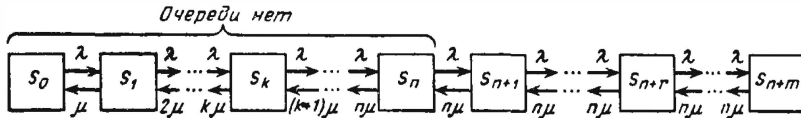


Рис. 5.6

Граф на рис. 5.6 представляет собой схему гибели и размножения, для которой решение в общем виде уже получено. Напишем выражения для предельных вероятностей состояний, сразу же обозначая $\lambda/\mu = \rho$:

$$p_1 = \frac{\rho}{1!} p_0, \quad p_2 = \frac{\rho^2}{2!} p_0, \quad \dots, \quad p_n = \frac{\rho^n}{n!} p_0,$$

$$p_{n+1} = \frac{\rho^{n+1}}{n \cdot n!} p_0, \quad p_{n+2} = \frac{\rho^{n+2}}{n^2 \cdot n!} p_0, \quad \dots, \quad p_{n+m} = \frac{\rho^{n+m}}{n^m \cdot n!} p_0,$$

$$p_0 = \left[1 + \frac{\rho}{1!} + \frac{\rho^2}{2!} + \dots + \frac{\rho^n}{n!} + \frac{\rho^{n+1}}{n \cdot n!} + \frac{\rho^{n+2}}{n^2 \cdot n!} + \dots + \frac{\rho^{n+m}}{n^m \cdot n!} \right]^{-1}$$

или, суммируя геометрическую прогрессию со знаменателем ρ/n подчеркнутые члены):

$$p_0 = \left[1 + \frac{\rho}{1!} + \frac{\rho^2}{2!} + \dots + \frac{\rho^n}{n!} \cdot \frac{\rho/n - (\rho/n)^{m+1}}{1 - \rho/n} \right]^{-1},$$

$$p_1 = \frac{\rho}{1!} p_0,$$

$$p_2 = \frac{\rho^2}{2!} p_0,$$

$$\dots$$

$$p_n = \frac{\rho^n}{n!} p_0,$$

$$p_{n+1} = \frac{\rho^n}{n \cdot n!} p_0,$$

$$p_{n+2} = \frac{\rho^{n+2}}{n^2 \cdot n!} p_0,$$

$$\dots$$

$$p_{n+m} = \frac{\rho^{n+m}}{n^m \cdot n!} p_0.$$

(6.1)

Таким образом, все вероятности состояний найдены. Найдем некоторые характеристики эффективности обслуживания. Поступившая заявка получает отказ, если заняты все n каналов и все m мест в очереди:

$$P_{\text{отк}} = p_{n+m} = \frac{\rho^{n+m}}{n^m \cdot n!} p_0. \quad (6.2)$$

Относительная пропускная способность, как всегда, дополняет вероятность отказа до единицы:

$$q = 1 - P_{\text{отк}} = 1 - \frac{\rho^{n+m}}{n^m \cdot n!} p_0.$$

Абсолютная пропускная способность СМО будет равна:

$$A = \lambda q = \lambda \left(1 - \frac{\rho^{n+m}}{n^m \cdot n!} p_0 \right). \quad (6.3)$$

Найдем среднее число занятых каналов. Для СМО с отказами оно совпадает со средним числом заявок, находящихся в системе. Для СМО с очередью среднее число занятых каналов не совпадает со средним числом заявок, находящихся в системе: последняя величина отличается от первой на среднее число заявок, находящихся в очереди. Сохраним обозначение \bar{k} для среднего числа заявок, связанных с системой, а среднее число занятых каналов обозначим \bar{z} . Каждый занятый канал обслуживает в среднем μ заявок в единицу времени; вся же СМО обслуживает в среднем A заявок в единицу времени. Деля одно на другое, получим:

$$\bar{z} = \frac{A}{\mu} = \frac{\lambda}{\mu} \left(1 - \frac{\rho^{n+m}}{n^m \cdot n!} p_0 \right),$$

или

$$\bar{z} = \rho \left(1 - \frac{\rho^{n+m}}{n^m \cdot n!} p_0 \right). \quad (6.4)$$

Среднее число заявок в очереди можно вычислить непосредственно, как математическое ожидание дискретной случайной величины, умножая любое возможное число заявок на вероятность того, что именно это число заявок будет в очереди, и складывая результаты:

$$\bar{r} = 1 \cdot p_{n+1} + 2 \cdot p_{n+2} + \dots + m \cdot p_{n+m} = 1 \cdot \frac{\rho^{n+1}}{n \cdot n!} p_0 + 2 \cdot \frac{\rho^{n+2}}{n^2 \cdot n!} p_0 + \dots + m \cdot \frac{\rho^{n+m}}{n^m \cdot n!} p_0 = \frac{\rho^{n+1}}{n \cdot n!} p_0 \left[1 + 2 \frac{\rho}{n} + 3 \left(\frac{\rho}{n} \right)^2 + \dots + m \left(\frac{\rho}{n} \right)^{m-1} \right]. \quad (6.5)$$

Введем обозначение $\rho/n = \kappa$ и перепишем (6.5) в виде:

$$\bar{r} = \frac{\rho^{n+1}}{n \cdot n!} p_0 [1 + 2\kappa + 3\kappa^2 + \dots + m\kappa^{m-1}]. \quad (6.6)$$

Заметим, что выражение в скобках есть не что иное, как уже вычисленная нами в предыдущем параграфе сумма (5.10), где вместо ρ поставлено κ . Пользуясь этой формулой и подставляя результат в (6.6), получим:

$$\bar{r} = \frac{\rho^{n+1} p_0}{n \cdot n!} \cdot \frac{1 - (m+1)\kappa + m\kappa}{(1-\kappa)^2}. \quad (6.7)$$

Складывая среднее число заявок в очереди \bar{r} и среднее число занятых каналов \bar{z} , получим среднее число заявок, связанных с системой:

$$\bar{k} = \bar{z} + \bar{r}. \quad (6.8)$$

Теперь найдем среднее время ожидания заявки в очереди: $\bar{t}_{ож}$. Сделаем ряд гипотез о том, в каком состоянии застанет систему вновь пришедшая заявка и сколько времени ей придется ждать обслуживания.

Если заявка застанет не все каналы занятыми, ей вообще не придется ждать (соответствующие члены в математическом ожидании отбросим, как равные нулю). Если заявка придет в момент, когда заняты все n каналов, а очереди нет, ей придется ждать в среднем время, равное $1/n\mu$ (потому что поток освобождений n каналов имеет интенсивность $n\mu$). Если заявка застанет все каналы занятыми и одну заявку перед собой в очереди, ей придется в среднем ждать время $2/n\mu$ (по $1/n\mu$ на каждую впереди стоящую заявку) и т. д. Если заявка застанет в очереди r заявок, ей придется ждать в среднем время $r/n\mu$. Если вновь пришедшая заявка застанет в очереди уже m заявок, то она вообще не будет ждать (но и не будет обслуживаться). Среднее время ожидания найдем, умножая каждое из этих значений на соответствующую вероятность:

$$\begin{aligned} \bar{t}_{ож} &= \frac{1}{n\mu} p_n + \frac{2}{n\mu} p_{n+1} + \dots + \frac{m}{n\mu} p_{n+m-1} = \\ &= \frac{1}{n\mu} \left[\frac{\rho^n}{n!} p_0 + \frac{2\rho^{n+1}}{n \cdot n!} p_0 + \dots + \frac{m\rho^{n+m-1}}{n^{m-1} \cdot n!} p_0 \right] = \\ &= \frac{\rho^n p_0}{n \cdot n! \mu} \left[1 + \frac{2\rho}{n} + \frac{3\rho^2}{n^2} + \dots + \frac{m\rho^{m-1}}{n^{m-1}} \right]. \end{aligned}$$

Так же, как и в случае одноканальной СМО с ожиданием, замечаем, что это выражение отличается от выражения для средней длины очереди (6.5) только множителем $1/\rho\mu = 1/\lambda$, т. е.

$$\bar{t}_{ож} = \frac{\bar{r}}{\lambda}. \quad (6.9)$$

Подставляя сюда выражение для \bar{r} , найдем:

$$\bar{t}_{ож} = \frac{\rho^n p_0}{n\mu n!} \frac{1 - (m+1)\kappa + m\kappa^{m+1}}{(1-\kappa)^2}. \quad (6.10)$$

Среднее время пребывания заявки в системе, так же, как и для одноканальной СМО, отличается от среднего времени ожидания на среднее время обслуживания, умноженное на относительную пропускную способность:

$$\bar{t}_{сист} = M[T_{ож}] + M[\Theta] = \bar{t}_{ож} + q/\mu. \quad (6.11)$$

Пример 1. Автозаправочная станция (АЗС) с двумя колонками ($n = 2$) предназначена для обслуживания машин. Поток машин, прибывающих на АЗС, имеет интенсивность $\lambda = 2$ (машины в минуту); среднее время обслуживания одной машины

$$\bar{t}_{об} = 1/\mu = 2 \text{ (мин.)}$$

Площадка у АЗС может вместить очередь не более $m = 3$ (машин). Машина, прибывшая в момент, когда все три места в очереди заняты, покидает АЗС (получает отказ). Найти характеристики СМО:

- вероятность отказа,
- относительную и абсолютную пропускную способности,
- среднее число занятых колонок,
- среднее число машин в очереди,
- среднее время ожидания и пребывания машины на АЗС.

Решение. Имеем: $n = 2$, $m = 3$, $\lambda = 2$, $\mu = 1/\bar{t}_{об} = 0,5$, $\rho = 4$, $\kappa = \rho/n = 2$.

По формулам (6.1) находим:

$$p_0 = \frac{1}{1 + \frac{4}{1} + \frac{4^2}{2} + \frac{4^3}{2 \cdot 1-2}} = \frac{1}{125} = 0,008.$$

Вероятность отказа:

$$P_{отк} = p_{n+m} = p_5 = \frac{4^5}{2^3 \cdot 2} p_0 = 64 p_0 = 0,512.$$

Относительная пропускная способность:

$$q = 1 - P_{отк} = 0,488.$$

Абсолютная пропускная способность:

$$A = q\lambda = 0,976 \text{ (машины в минуту)}.$$

Среднее число занятых каналов (колонок):

$$\bar{z} = A/\mu = 0,976/0,5 = 1,952$$

(т. е. обе колонки почти все время заняты).

Среднее число машин в очереди находим по формуле (6.7):

$$\bar{r} = \frac{4^3}{2 \cdot 2 \cdot 125} \frac{1 - 4 \cdot 2^3 + 3 \cdot 2^4}{(1-2)^2} = \frac{16}{125} 17 = 2,18$$

Среднее время ожидания в очереди — по формуле (6.9):

$$\bar{t}_{ож} = \bar{r}/\lambda = 2,18/2 = 1,09 \text{ (мин.)}$$

Среднее время пребывания машины на АЗС (включая время обслуживания):

$$\bar{t}_{вст} = \bar{t}_{ож} + q\bar{t}_{об} = 1,09 + 0,976 = 2,07 \text{ (мин.)}$$

Выше мы рассмотрели n -канальную СМО с ожиданием, когда в очереди одновременно могут находиться не более m заявок.

Так же, как и в предыдущем параграфе, посмотрим, что будет, если длина очереди не ограничена каким-то числом m , а может быть сколь угодно большой. Граф состояний в этом случае — бесконечный (см. рис. 5.7).

Вероятности состояний получим из формул (6.1) предельным переходом (при $m \rightarrow \infty$). Заметим, что сумма соответствующей геомет-

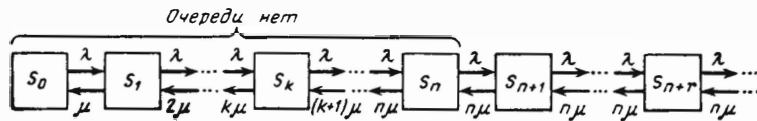


Рис. 5.7

рической прогрессии сходится при $\kappa = \rho/n < 1$ и расходится при $\kappa \geq 1$; соответственно, установившийся режим будет существовать при $\kappa < 1$, а при $\kappa \geq 1$ очередь будет бесконечно возрастать. Допустим, что $\kappa < 1$ и устремим в формулах (6.1) величину m к бесконечности. Получим выражения для предельных вероятностей состояний:

$$\left. \begin{aligned} p_0 &= \left[1 + \frac{\rho}{1!} + \frac{\rho^2}{2!} + \dots + \frac{\rho^n}{n!} + \frac{\rho^{n+1}}{n! (n-\rho)} \right]^{-1}, \\ p_1 &= \frac{\rho}{1!} p_0, \\ p_2 &= \frac{\rho^2}{2!} p_0, \\ p_n &= \frac{\rho^n}{n!} p_0, \\ p_{n+1} &= \frac{\rho^{n+1}}{n \cdot n!} p_0, \\ p_{n+2} &= \frac{\rho^{n+2}}{n^2 \cdot n!} p_0, \\ &\dots \\ p_{n+r} &= \frac{\rho^{n+r}}{n^r \cdot n!} p_0, \\ &\dots \end{aligned} \right\} (6.12)$$

Так как каждая заявка рано или поздно будет обслужена, то характеристики пропускной способности СМО равны:

$$P_{отк} = 0, \quad q = 1, \quad A = \lambda q = \lambda.$$

Среднее число заявок в очереди получим при $m \rightarrow \infty$ из (6.7):

$$\bar{r} = \frac{\rho^{n+1} p_0}{n \cdot n! (1-\kappa)^2}, \quad (6.13)$$

а среднее время ожидания — из (6.10):

$$\bar{t}_{ож} = \frac{\rho^n p_0}{n \mu n! (1-\kappa)^2}. \quad (6.14)$$

Среднее число занятых каналов \bar{z} найдется по-прежнему через абсолютную пропускную способность:

$$\bar{z} = \frac{A}{\mu} = \frac{\lambda}{\mu} = \rho, \quad (6.15)$$

а среднее число заявок, связанных с СМО — как среднее число заявок в очереди плюс среднее число заявок, находящихся под обслуживанием (среднее число занятых каналов):

$$\bar{k} = \bar{r} + \bar{z}. \quad (6.16)$$

Пример 2. Автозаправочная станция с двумя колонками ($n = 2$) обслуживает поток машин с интенсивностью $\lambda = 0,8$ (машин в минуту). Среднее время обслуживания одной машины

$$\bar{t}_{об} = \frac{1}{\mu} = 2 \text{ (мин.)}$$

В данном районе нет другой АЗС, так что очередь машин перед АЗС может расти практически неограниченно. Найти характеристики СМО.

Решение Имеем: $n = 2$, $\lambda = 0,8$, $\mu = 1/\bar{t}_{об} = 0,5$, $\rho = 1,6$, $\kappa = \rho/n = 0,8$. Поскольку $\kappa < 1$, очередь не растет безгранично и имеет смысл говорить о предельном стационарном режиме работы СМО. По формулам (6.11) находим вероятности состояний:

$$\begin{aligned} p_0 &= \left[1 + 1,6 + 1,28 + \frac{4,09}{2 \cdot 0,4} \right]^{-1} \approx 0,111, \\ p_1 &= 1,6 p_0 \approx 0,178, \quad p_2 = 1,28 p_0 \approx 0,142, \\ p_3 &= \frac{1,6^3}{2 \cdot 2!} p_0 \approx 0,114, \quad p_4 = \frac{1,6^4}{2^2 \cdot 2!} p_0 \approx 0,091 \text{ и т. д.} \end{aligned}$$

Среднее число занятых каналов найдем, разделив абсолютную пропускную способность СМО $A = \lambda = 0,8$ на интенсивность обслуживания $\mu = 0,5$:

$$\bar{z} = 0,8/0,5 = 1,6.$$

Вероятность отсутствия очереди у АЗС будет:

$$p_0 + p_1 + p_2 \approx 0,431.$$

Среднее число машин в очереди:

$$\bar{r} = \frac{1,6^2 \cdot 0,111}{2 \cdot 2 \cdot 0,42^2} \approx 0,71.$$

Среднее число машин на АЗС:

$$\bar{k} = \bar{r} + \bar{z} \approx 0,71 + 1,6 = 2,31$$

Среднее время ожидания в очереди:

$$\bar{t}_{\text{ож}} = \frac{\bar{r}}{\lambda} \approx 0,89 \text{ (мин)}.$$

Среднее время пребывания машины на АЗС:

$$\bar{t}_{\text{сист}} = \bar{t}_{\text{ож}} + \bar{t}_{\text{об}} \approx 0,89 + 2 = 2,89 \text{ (мин)}.$$

7. СМО С ОГРАНИЧЕННЫМ ВРЕМЕНЕМ ОЖИДАНИЯ

До сих пор мы рассматривали СМО с ожиданием, ограниченным только длиной очереди (числом m заявок, одновременно находящихся в очереди). В такой СМО заявка, раз ставшая в очередь, уже не покидает ее и «терпеливо» дожидается обслуживания. На практике нередко встречаются СМО другого типа, в которых заявка, подождав некоторое время, может уйти из очереди (так называемые «нетерпеливые» заявки).

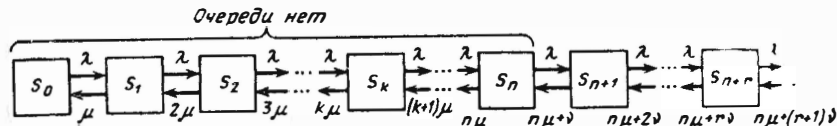


Рис. 5.8

Рассмотрим СМО подобного типа, оставаясь в рамках марковской схемы. Предположим, что имеется n -канальная СМО с ожиданием, в которой число мест в очереди не ограничено, но время пребывания заявки в очереди ограничено некоторым случайным сроком $T_{\text{оч}}$ со средним значением $\bar{t}_{\text{оч}}$, таким образом, на каждую заявку, стоящую в очереди, действует как бы «поток уходов» с интенсивностью

$$v = \frac{1}{\bar{t}_{\text{оч}}}.$$

Если этот поток пуассоновский, то процесс, протекающий в СМО, будет марковским. Найдем для него вероятности состояний. Будем снова нумеровать состояния системы по числу заявок, связанных с системой — как обслуживаемых, так и стоящих в очереди:

очереди нет $\left\{ \begin{array}{l} S_0 \text{ — все каналы свободны,} \\ S_1 \text{ — занят один канал,} \\ S_2 \text{ — заняты два канала,} \\ \dots \dots \dots \\ S_n \text{ — заняты все } n \text{ каналов,} \\ S_{n+1} \text{ — заняты все } n \text{ каналов, одна заявка стоит в очереди,} \\ \dots \dots \dots \\ S_{n+r} \text{ — заняты все } n \text{ каналов, } r \text{ заявок стоит в очереди,} \\ \dots \dots \dots \end{array} \right.$

и т. д.

Граф состояний системы показан на рис. 5.8.

Разметим этот граф, т. е. проставим у стрелок соответствующие интенсивности. Снова, как и раньше, у всех стрелок, ведущих слева направо, будет стоять интенсивность потока заявок λ . Для состояний без очереди у стрелок, ведущих из них справа налево, будет, как и раньше, стоять суммарная интенсивность потока обслуживаний всех занятых каналов. Что касается состояний с очередью, то у стрелок, ведущих из них справа налево будет стоять суммарная интенсивность потока обслуживаний всех n каналов $n\mu$, плюс соответствующая интенсивность потока уходов из очереди. Если в очереди стоят r заявок, то суммарная интенсивность потока уходов будет равна $r\nu$.

Как видно из графа, перед нами опять схема гибели и размножения; применяя общие выражения для предельных вероятностей состояний в этой схеме, напишем:

$$\begin{aligned} p_1 &= \frac{\lambda/\mu}{1!} p_0, \\ p_2 &= \frac{(\lambda/\mu)^2}{2!} p_0, \\ &\dots \dots \dots \\ p_n &= \frac{(\lambda/\mu)^n}{n!} p_0, \\ p_{n+1} &= \frac{(\lambda/\mu)^n \lambda}{n! (n\mu + \nu)} p_0, \\ p_{n+2} &= \frac{(\lambda/\mu)^n \lambda^2}{n! (n\mu + \nu)(n\mu + 2\nu)} p_0, \\ &\dots \dots \dots \\ p_{n+r} &= \frac{(\lambda/\mu)^n \lambda^r}{n! (n\mu + \nu)(n\mu + 2\nu) \dots (n\mu + r\nu)} p_0, \\ &\dots \dots \dots \\ p_0 &= \left\{ 1 + \frac{\lambda/\mu}{1!} + \frac{(\lambda/\mu)^2}{2!} + \dots + \frac{(\lambda/\mu)^n}{n!} + \frac{(\lambda/\mu)^n}{n!} \left[\frac{\lambda}{n\mu + \nu} + \frac{\lambda^2}{(n\mu + \nu)(n\mu + 2\nu)} + \dots + \frac{\lambda^r}{(n\mu + \nu)(n\mu + 2\nu) \dots (n\mu + r\nu)} + \dots \right] \right\}^{-1}, \end{aligned}$$

или, вводя обозначения:

$$\rho = \lambda/\mu, \quad \beta = \nu/\mu,$$

$$\left. \begin{aligned} p_0 &= \left\{ 1 + \frac{\rho}{1!} + \frac{\rho^2}{2!} + \dots + \frac{\rho^n}{n!} + \frac{\rho^n}{n!} \left[\frac{\rho}{n+\beta} + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{\rho^2}{(n+\beta)(n+2\beta)} + \dots + \frac{\rho^r}{(n+\beta)(n+2\beta)\dots(n+r\beta)} + \dots \right] \right\}^{-1}, \\ p_1 &= \frac{\rho}{1!} p_0, \\ p_2 &= \frac{\rho^2}{2!} p_0, \\ &\dots \dots \dots \\ p_n &= \frac{\rho^n}{n!} p_0, \\ p_{n+1} &= \frac{\rho^n}{n!} \frac{\rho}{n+\beta} p_0, \\ p_{n+2} &= \frac{\rho^n}{n!} \frac{\rho^2}{(n+\beta)(n+2\beta)} p_0, \\ &\dots \dots \dots \\ p_{n+r} &= \frac{\rho^n}{n!} \frac{\rho^r}{(n+\beta)(n+2\beta)\dots(n+r\beta)} p_0, \\ &\dots \end{aligned} \right\} \quad (7.1)$$

Отметим некоторые особенности рассмотренной СМО с «нетерпеливыми» заявками по сравнению с ранее рассмотренной СМО с «терпеливыми» заявками.

Если длина очереди не ограничена заранее никаким числом и заявки «терпеливы» (не уходят из очереди), то стационарный предельный режим существует только в случае $\rho < n$ (при $\rho \geq n$ соответствующая бесконечная геометрическая прогрессия расходится, что физически соответствует неограниченному росту очереди при $t \rightarrow \infty$). Напротив, в СМО с «нетерпеливыми» заявками, уходящими рано или поздно из очереди, установившийся режим обслуживания при $t \rightarrow \infty$ достигается в с е г д а, независимо от приведенной интенсивности потока заявок ρ . Это следует из того, что ряд в знаменателе первой формулы (7.1) сходится при любых положительных значениях ρ и β .

Для СМО с «нетерпеливыми» заявками понятие «вероятность отказа» не имеет смысла — каждая заявка становится в очередь, но может и не дожидаться обслуживания, уйдя раньше времени.

Относительную пропускную способность q такой СМО можно подсчитать следующим образом. Очевидно, обслужены будут все заявки, кроме тех, которые уйдут из очереди досрочно. Подсчитаем, какое в среднем число заявок покидает очередь досрочно. Для этого вычислим среднее число заявок в очереди:

$$\bar{r} = 1 \cdot p_{n+1} + 2 \cdot p_{n+2} + \dots + r \cdot p_{n+r} + \dots \quad (7.2)$$

На каждую из этих заявок действует «поток уходов» с интенсивностью ν . Значит, из среднего числа \bar{r} заявок в очереди в среднем будет уходить, не дождавшись обслуживания, $\nu \bar{r}$ заявок в единицу времени; всего в единицу времени в среднем будет обслужено

$$A = \lambda - \nu \bar{r} \quad (7.3)$$

заявок. Относительная пропускная способность СМО будет

$$q = \frac{A}{\lambda} = \frac{\lambda - \nu \bar{r}}{\lambda} = 1 - \frac{\nu}{\lambda} \bar{r}. \quad (7.4)$$

Среднее число занятых каналов \bar{z} по-прежнему получим, деля абсолютную пропускную способность на μ :

$$\bar{z} = \frac{A}{\mu} = \frac{\lambda - \nu \bar{r}}{\mu} = \rho - \beta \bar{r}. \quad (7.5)$$

Это позволяет вычислить среднее число заявок в очереди \bar{r} , не суммируя бесконечного ряда (7.2). Действительно, из (7.5) получим:

$$\bar{r} = \frac{\rho}{\beta} - \frac{\bar{z}}{\beta}, \quad (7.6)$$

а входящее в эту формулу среднее число занятых каналов можно найти как математическое ожидание случайной величины Z , принимающей значения $0, 1, 2, \dots, n$ с вероятностями $p_0, p_1, p_2, \dots, [1 - (\rho_0 + p_1 + \dots + p_{n-1})]$:

$$\begin{aligned} \bar{z} &= 0 \cdot p_0 + 1 \cdot p_1 + 2 \cdot p_2 + \dots + n \cdot [1 - (\rho_0 + p_1 + \dots + p_{n-1})] = \\ &= p_1 + 2p_2 + \dots + n[1 - (\rho_0 + p_1 + \dots + p_{n-1})]. \end{aligned} \quad (7.7)$$

Мы не будем выводить формул для среднего времени ожидания в очереди, так как для этого требуются сравнительно сложные выкладки.

Заметим, что, в отличие от формул §§ 5, 6, где суммы большого (или бесконечного) числа слагаемых «свертываются» при помощи формул для суммы геометрической прогрессии, в формуле (7.1) фигурирует сумма бесконечного ряда, не являющегося прогрессией. Однако эта сумма вычисляется приближенно, причем достаточно легко, так как члены ряда быстро убывают с увеличением их номера. В качестве приближенного значения для бесконечной суммы берется сумма конечного числа $r - 1$ членов, а остаток оценивается следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{\rho^n}{n!} \left[\frac{\rho^r}{(n+\beta)(n+2\beta)\dots(n+r\beta)} + \frac{\rho^{r+1}}{(n+\beta)(n+2\beta)\dots(n+(r+1)\beta)} + \dots \right] < \\ < \frac{\rho^n}{n!} \left[\frac{\rho^r}{\beta \cdot 2 \cdot \beta \cdot \dots \cdot r \beta} + \frac{\rho^{r+1}}{\beta \cdot 2 \cdot \beta \cdot \dots \cdot (r+1) \beta} + \dots \right] = \\ = \frac{\rho^r}{n!} \left[\frac{(\rho/\beta)^r}{r!} + \frac{(\rho/\beta)^{r+1}}{(r+1)!} + \dots \right]. \end{aligned} \quad (7.8)$$

Можно доказать, что бесконечная сумма в квадратных скобках меньше, чем $\frac{(\rho/\beta)^r}{r!} e^{\rho/\beta}$, и выражение (7.8) меньше, чем

$$\frac{\rho^n}{n!} \frac{(\rho/\beta)^r}{r!} e^{\rho/\beta}.$$

В заключение заметим, что если в формулах (7.1) перейти к пределу при $\nu \rightarrow 0$ (или, что то же, при $\beta \rightarrow 0$), то при $\rho < n$ получатся формулы (6.10) предыдущего параграфа, т. е. «нетерпеливые» заявки станут «терпеливыми».

8. ЗАМКНУТЫЕ СИСТЕМЫ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ

До сих пор мы рассматривали такие системы массового обслуживания, где заявки приходили откуда-то и з в н е и интенсивность потока заявок не зависела от состояния самой системы. В настоящем параграфе мы рассмотрим системы массового обслуживания другого типа — такие, в которых интенсивность потока поступающих заявок зависит от состояния самой СМО. Такие системы массового обслуживания называются з а м к н у т ы м и .

В качестве примера замкнутой СМО рассмотрим следующую систему. Рабочий-наладчик обслуживает n станков. Каждый станок может в любой момент выйти из строя и потребовать обслуживания со стороны наладчика. Интенсивность потока неисправностей каждого станка равна λ . Вышедший из строя станок останавливается. Если в этот момент рабочий свободен, он берется за наладку станка; на это он тратит среднее время

$$\bar{t}_{об} = \frac{1}{\mu},$$

где μ — интенсивность потока обслуживаний (наладок).

Если в момент выхода станка из строя рабочий занят, станок становится в очередь на обслуживание и ждет, пока рабочий не освободится.

Требуется найти вероятности состояний данной системы и ее характеристики:

- вероятность того, что рабочий не будет занят,
- вероятность наличия очереди,
- среднее число станков, ожидающих очереди на ремонт и т. д.

Перед нами — своеобразная система массового обслуживания, где источниками заявок являются станки, имеющиеся в ограниченном количестве и подающие или не подающие заявки в зависимости от своего состояния: при выходе станка из строя он перестает быть источником новых заявок. Следовательно, интенсивность общего потока заявок, с которым приходится иметь дело рабочему, зависит от того, сколько имеется неисправных станков, т. е. сколько заявок связано с процессом обслуживания (непосредственно обслуживается или стоит в очереди).

Характерным для замкнутой системы массового обслуживания является наличие ограниченного числа источников заявок.

В сущности, любая СМО имеет дело только с ограниченным числом источников заявок, но в ряде случаев число этих источников так велико, что можно пренебречь влиянием состояния самой СМО на поток заявок. Например, поток вызовов на АТС крупного города исходит, в сущности, от ограниченного числа абонентов, но это число так велико, что практически можно считать интенсивность потока заявок независимой от состояний самой АТС (сколько каналов занято в данный момент). В замкнутой же системе массового обслуживания источники заявок, наряду с каналами обслуживания, рассматриваются как элементы СМО.

Рассмотрим сформулированную выше задачу о рабочем-наладчике в рамках общей схемы марковских процессов.

Система, включающая рабочего и n станков, имеет ряд состояний, которые мы будем нумеровать по числу неисправных станков (станков, связанных с обслуживанием):

- S_0 — все станки исправны (рабочий свободен),
- S_1 — один станок неисправен, рабочий занят его наладкой,
- S_2 — два станка неисправны, один налаживается, другой ожидает очереди,
- ...
- S_n — все n станков неисправны, один налаживается, $n - 1$ стоят в очереди.

Граф состояний приведен на рис. 5.9. Интенсивности потоков событий, переводящих систему из состояния в состояние, проставлены у стрелок. Из состояния S_0 в S_1 систему переводит поток неисправностей в n работающих станков; его интенсивность равна $n\lambda$. Из состояния S_1 в S_2 систему переводит поток неисправностей уже не n , а $n - 1$ станко в (работают всего $n - 1$) и т. д. Что касается интенсивностей потоков событий, переводящих систему по стрелкам справа налево, то они все одинаковы — работает все время один рабочий с интенсивностью обслуживания μ .

Пользуясь, как обычно, общим решением задачи о предельных вероятностях состояний для схемы гибели и размножения (§ 8 гл. 4), напишем предельные вероятности состояний:

$$\left. \begin{aligned} p_1 &= \frac{n\lambda}{\mu} p_0, \\ p_2 &= \frac{n(n-1)\lambda^2}{\mu^2} p_0, \\ &\dots \\ p_n &= \frac{n(n-1)(n-2)\dots 1 \lambda^n}{\mu^n} p_0, \\ p_0 &= \frac{1}{1 + n(\lambda/\mu) + n(n-1)(\lambda/\mu)^2 + \dots + n(n-1)\dots 1 \cdot (\lambda/\mu)^n} \end{aligned} \right\}$$

Вводя, как и раньше, обозначения $\lambda/\mu = \rho$, перепишем эти формулы в виде:

$$\left. \begin{aligned} \rho_0 &= \frac{1}{1 + n\rho + n(n-1)\rho^2 + \dots + n(n-1)\dots 1 \cdot \rho^n} \\ \rho_1 &= n\rho\rho_0 \\ \rho_2 &= n(n-1)\rho^2\rho_0 \\ &\dots \\ \rho_n &= n(n-1)\dots 1\rho^n\rho_0 \end{aligned} \right\} (8.1)$$

Итак, вероятности состояний СМО найдены.

В силу своеобразия замкнутой СМО, характеристики ее эффективности будут отличны от тех, которые мы применяли ранее для СМО с неограниченным количеством источников заявок.

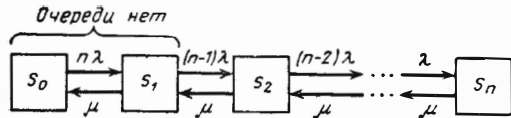


Рис. 5.9

Роль «абсолютной пропускной способности» в данном случае будет играть среднее количество неисправностей, устраняемых рабочим в единицу времени. Вычислим эту характеристику. Рабочий занят наладкой станка с вероятностью

$$P_{\text{зан}} = 1 - \rho_0. \quad (8.2)$$

Если он занят, он обслуживает μ станков (ликвидирует μ неисправностей) в единицу времени; значит, абсолютная пропускная способность системы

$$A = (1 - \rho_0)\mu. \quad (8.3)$$

Относительную пропускную способность для замкнутой СМО мы не вычисляем, так как каждая заявка, в конце концов, будет обслужена: $q = 1$.

Вероятность того, что рабочий не будет занят:

$$P_{\text{своб}} = 1 - P_{\text{зан}} = \rho_0. \quad (8.4)$$

Вычислим среднее число неисправных станков, иначе — среднее число станков, связанных с процессом обслуживания. Обозначим это среднее число \bar{w} . Вообще говоря, величину \bar{w} можно вычислить непосредственно, по формуле

$$\bar{w} = 1 \cdot \rho_1 + 2 \cdot \rho_2 + \dots + n \cdot \rho_n,$$

но проще будет найти ее через абсолютную пропускную способность A . Действительно, каждый работающий станок порождает поток не-

исправностей с интенсивностью λ ; в нашей СМО в среднем работает $n - \bar{w}$ станков; порождаемый ими средний поток неисправностей будет иметь среднюю интенсивность $(n - \bar{w})\lambda$; все эти неисправности устраняются рабочим, следовательно,

$$(n - \bar{w})\lambda = (1 - \rho_0)\mu,$$

откуда

$$\bar{w} = n - \frac{\mu}{\lambda} (1 - \rho_0)$$

или

$$\bar{w} = n - \frac{1 - \rho_0}{\rho}. \quad (8.5)$$

Определим теперь среднее число станков \bar{r} , ожидающих наладки в очереди. Будем рассуждать следующим образом: общее число станков W , связанных с обслуживанием, складывается из числа станков R , стоящих в очереди, плюс число станков Ω , непосредственно находящихся под обслуживанием:

$$W = R + \Omega.$$

Число станков Ω , находящихся под обслуживанием, равно единице, если рабочий занят, и нулю, если он свободен, т. е. среднее значение Ω равно вероятности того, что рабочий занят:

$$\bar{\Omega} = 1 - \rho_0.$$

Вычитая эту величину из среднего числа \bar{w} станков, связанных с обслуживанием (неисправных), получим среднее число станков, ожидающих обслуживания в очереди:

$$\bar{r} = n - \frac{1 - \rho_0}{\rho} - (1 - \rho_0) = n - (1 - \rho_0) \left(1 + \frac{1}{\rho} \right). \quad (8.6)$$

Остановимся еще на одной характеристике эффективности СМО: на производительности группы станков, обслуживаемых рабочим.

Зная среднее число неисправных станков \bar{w} и производительность l исправного станка за единицу времени, можно оценить среднюю потерю L производительности группы станков в единицу времени за счет неисправностей:

$$L = \bar{w}l.$$

Пример 1. Рабочий обслуживает группу из трех станков. Каждый станок останавливается в среднем 2 раза в час. Процесс наладки занимает у рабочего, в среднем, 10 минут. Определить характеристики замкнутой СМО: вероятность занятости рабочего; его абсолютную пропускную способность A ; среднее количество неисправных станков; среднюю относительную потерю производительности группы станков за счет неисправностей

Решение. Имеем. $n = 3$, $\lambda = 2$, $\mu = \frac{1}{t_{\text{ог}}} = \frac{1}{1/6} = 6$, $\rho = \lambda/\mu = 1/3$.

По формулам (8.1)

$$p_0 = \frac{1}{1 + 3 \cdot 1/3 + 3 \cdot 2 \cdot 1/3^2 + 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1/3^3} \approx 0,346.$$

Вероятность занятости рабочего:

$$P_{\text{зан}} = 1 - p_0 = 0,654.$$

Абсолютная пропускная способность рабочего (среднее число неисправностей, которое он ликвидирует в час):

$$A = 0,654 \cdot 6 = 3,94.$$

Среднее число неисправных станков находим по формуле (8.5):

$$\bar{w} = 3 - \frac{0,654}{1/3} = 1,04.$$

Средняя относительная потеря производительности группы станков за счет неисправностей $\bar{w}/n = 0,347$, т. е. за счет неисправностей группа станков теряет около 35% производительности.

Рассмотрим теперь более общий пример замкнутой СМО: бригада из m рабочих обслуживает n станков ($m < n$). Перечислим состояния системы:

- очереди нет
- S_0 — все станки работают, рабочие не заняты,
 - S_1 — один станок остановился, один рабочий занят,
 - S_2 — два станка остановились, два рабочих заняты,
 -
 - S_m — m станков остановились, все рабочие заняты,
 - S_{m+1} — $m+1$ станок остановился, m из них налаживаются, один ждет очереди,
 -
 - S_n — все n станков остановились, m из них налаживаются, $n-m$ ждут очереди.

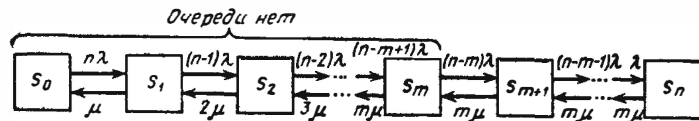


Рис. 5.10

Граф состояний системы показан на рис. 5.10 (интенсивности потоков событий проставлены у стрелок). Применяя общее решение для схемы гибели и размножения, находим предельные вероятности состояний:

$$p_1 = \frac{n}{1} \frac{\lambda}{\mu} p_0,$$

$$p_2 = \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2 p_0,$$

$$p_3 = \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^3 p_0,$$

$$\dots$$

$$p_m = \frac{n(n-1)(n-2) \dots (n-m+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots m} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^m p_0,$$

$$p_{m+1} = \frac{n(n-1) \dots (n-m)}{1 \cdot 2 \dots m \cdot m} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{m+1} p_0,$$

$$p_{m+2} = \frac{n(n-1) \dots (n-m-1)}{1 \cdot 2 \dots m \cdot m^2} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{m+2} p_0,$$

$$\dots$$

$$p_n = \frac{n(n-1) \dots 1}{1 \cdot 2 \dots m \cdot m^{n-m}} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n p_0,$$

$$p_0 = \left[1 + \frac{n}{1} \frac{\lambda}{\mu} + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2 + \dots + \frac{n(n-1) \dots (n-m+1)}{1 \cdot 2 \dots m} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^m + \frac{n(n-1) \dots (n-m)}{1 \cdot 2 \dots m \cdot m} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{m+1} + \dots + \frac{n(n-1) \dots 1}{1 \cdot 2 \dots m \cdot m^{n-m}} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n \right]^{-1}.$$

Обозначая, как всегда, $\lambda/\mu = \rho$, приведем формулы к виду:

$$p_0 = \left[1 + \frac{n}{1!} \rho + \frac{n(n-1)}{2!} \rho^2 + \dots + \frac{n(n-1) \dots (n-m+1)}{m!} \rho^m + \frac{n(n-1) \dots (n-m)}{m! m} \rho^{m+1} + \dots + \frac{n(n-1) \dots 1}{m! m^{n-m}} \rho^n \right]^{-1},$$

$$p_1 = \frac{n}{1!} \rho p_0,$$

$$p_2 = \frac{n(n-1)}{2!} \rho^2 p_0,$$

$$p_3 = \frac{n(n-1)(n-2)}{3!} \rho^3 p_0,$$

$$\dots$$

$$p_m = \frac{n(n-1) \dots (n-m+1)}{m!} \rho^m p_0,$$

$$p_{m+1} = \frac{n(n-1) \dots (n-m)}{m! m} \rho^{m+1} p_0,$$

$$p_{m+2} = \frac{n(n-1) \dots (n-m-1)}{m! m^2} \rho^{m+2} p_0,$$

$$\dots$$

$$p_n = \frac{n(n-1) \dots 1}{m! m^{n-m}} \rho^n p_0.$$

(8.7)

Через эти вероятности выражается среднее число \bar{z} занятых рабочих:

$$\begin{aligned} \bar{z} &= 0 \cdot p_0 + 1 \cdot p_1 + 2 \cdot p_2 + \dots + m \cdot (p_m + p_{m+1} + \dots + p_n) = \\ &= p_1 + 2p_2 + \dots + (m-1)p_{m-1} + m(1 - p_0 - p_1 - \dots - p_{m-1}). \end{aligned} \quad (8.8)$$

Через \bar{z} выражается, в свою очередь, среднее число станков, обслуживаемых бригадой в единицу времени (абсолютная пропускная способность):

$$A = \bar{z}\mu, \quad (8.9)$$

а также среднее число неисправных станков:

$$\bar{\omega} = n - \frac{\bar{z} \cdot \mu}{\lambda} = n - \frac{\bar{z}}{\rho}. \quad (8.10)$$

Отсюда же находится и средняя потеря производительности группы станков в единицу времени за счет неисправностей: нужно умножить среднее число неисправных станков $\bar{\omega}$ на производительность l одного станка в единицу времени.

Пример 2. Два рабочих обслуживают группу из шести станков. Остановки каждого (работающего) станка случаются, в среднем, через каждые полчаса. Процесс наладки занимает у рабочего в среднем 10 минут. Определить характеристики замкнутой СМО:

- среднее число занятых рабочих,
- абсолютную пропускную способность,
- среднее количество неисправных станков

Решение. Имеем: $n=6$, $m=2$, $\lambda=2$, $\mu=1/\bar{t}_{об}=6$, $\rho=\lambda/\mu=1/3$. По формулам (8.7)

$$\begin{aligned} p_0 &= \left(1 + \frac{6}{1} \cdot \frac{1}{3} + \frac{6 \cdot 5}{1 \cdot 2} \cdot \frac{1}{3^2} + \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{1 \cdot 2 \cdot 2} \cdot \frac{1}{3^3} + \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3}{1 \cdot 2 \cdot 2^2} \cdot \frac{1}{3^4} + \right. \\ &\left. + \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}{1 \cdot 2 \cdot 2^3} \cdot \frac{1}{3^5} + \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{1 \cdot 2 \cdot 2^4} \cdot \frac{1}{3^6} \right)^{-1} = \frac{1}{6,549} \approx 0,153, \end{aligned}$$

$$p_1 \approx 6/1 \cdot 1/3 \cdot 0,153 \approx 0,306.$$

Отсюда среднее число занятых рабочих:

$$\bar{z} = 1p_1 + 2(1 - p_0 - p_1) = 1 \cdot 0,153 + 2 \cdot 0,541 \approx 1,235.$$

По формуле (8.9) находим абсолютную пропускную способность

$$A = 1,235 \cdot 6 = 7,41.$$

По формуле (8.10) находим среднее число неисправных станков

$$\bar{\omega} = 6 - 7,41/2 = 2,295.$$

9. СИСТЕМЫ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ СО «ВЗАИМОПОМОЩЬЮ» МЕЖДУ КАНАЛАМИ

До сих пор мы рассматривали только такие СМО, в которых каждая заявка может обслуживаться только одним каналом; незанятые каналы не могут «помогать» занятому в обслуживании.

Вообще, это не всегда бывает так: встречаются системы массового обслуживания, где одна и та же заявка может одновременно обслуживаться двумя и более каналами. Например, один и тот же вышедший из строя станок могут обслуживать два рабочих сразу. Такая «взаимопомощь» между каналами может иметь место как в открытых, так и в замкнутых СМО.

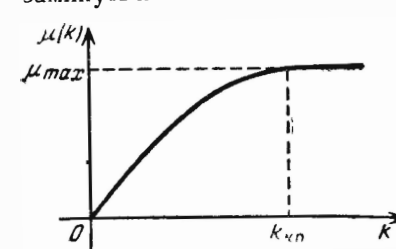


Рис. 5.11

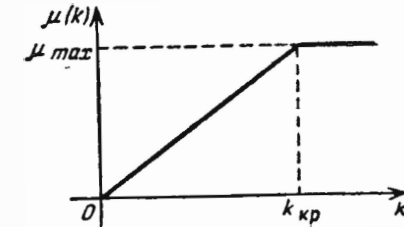


Рис. 5.12

При рассмотрении СМО со взаимопомощью между каналами необходимо учитывать два фактора:

1. Насколько убыстряется обслуживание заявки, когда над ним работает не один, а сразу несколько каналов?

2. Какова «дисциплина взаимопомощи», т. е. когда и как несколько каналов берут на себя обслуживание одной и той же заявки?

Рассмотрим сначала первый вопрос. Естественно предположить, что если над обслуживанием заявки работает не один канал, а несколько (k) каналов, интенсивность потока обслуживаний не будет убывать с увеличением k , т. е. будет представлять собой некоторую неубывающую функцию числа k работающих каналов. Обозначим эту функцию $\mu(k)$. Возможный вид функции $\mu(k)$ показан на рис. 5.11.

Очевидно, что неограниченное увеличение числа одновременно работающих каналов не всегда ведет к пропорциональному увеличению скорости обслуживания; естественнее предположить, что при некотором критическом значении $k = k_{кр}$ дальнейшее увеличение числа занятых каналов уже не повышает интенсивности обслуживания.

Для того, чтобы проанализировать работу СМО со взаимопомощью между каналами, нужно, прежде всего, задать вид функции $\mu(k)$.

Самым простым для исследования будет случай, когда функция $\mu(k)$ возрастает пропорционально k при $k \leq k_{кр}$, а при $k > k_{кр}$ остается постоянной и равной $\mu_{max} = k_{кр} \mu$ (см. рис. 5.12). Если при этом общее число каналов n , которые могут помогать друг другу, не превосходит $k_{кр}$:

$$n \leq k_{кр},$$

то можно считать интенсивность обслуживания заявки несколькими каналами пропорциональной числу каналов.

Остановимся теперь на втором вопросе: дисциплине взаимопомощи. Самый простой случай этой дисциплины мы обозначим условно «все как один». Это означает, что при появлении одной заявки ее начинают обслуживать все n каналов сразу и остаются занятыми, пока не закончится обслуживание этой заявки; затем все каналы переключаются на обслуживание другой заявки (если она есть) или ждут ее появления, если ее нет, и т. д. Очевидно, в этом случае все n каналов работают как один, СМО становится одноканальной, но с более высокой интенсивностью обслуживания.

Возникает вопрос: выгодно или невыгодно вводить такую взаимопомощь между каналами? Ответ на этот вопрос зависит от того, какова интенсивность потока заявок, каков вид функции $\mu(k)$, каков тип СМО (с отказами, с очередью), какая величина выбирается в качестве характеристики эффективности обслуживания.

Пример 1. Имеется трехканальная СМО с отказами: интенсивность потока заявок $\lambda = 4$ (заявки в минуту), среднее время обслуживания одной заявки одним каналом $t_{об} = 0,5$ (мин), функция $\mu(k) = k\mu$. Спрашивается, выгодно ли с точки зрения пропускной способности СМО вводить взаимопомощь между каналами по типу «все как один»? Выгодно ли это с точки зрения уменьшения среднего времени пребывания заявки в системе?

Решение. а. Без взаимопомощи.

$$n = 3, \lambda = 4, \mu = 1/0,5 = 2, \rho = \lambda/\mu = 2.$$

По формулам Эрланга (см. § 4) имеем:

$$\rho_0 = \frac{1}{1 + \frac{2}{1!} + \frac{2^2}{2!} + \frac{2^3}{3!}} = \frac{3}{19} \approx 0,158;$$

$$P_{отк} = \rho_3 = \frac{2^3}{3!} \rho_0 = \frac{4}{3} \cdot \frac{3}{19} \approx 0,21.$$

Относительная пропускная способность СМО:

$$q = 1 - P_{отк} \approx 0,79.$$

Абсолютная пропускная способность:

$$A = \lambda q \approx 4 \cdot 0,79 = 3,16.$$

Среднее время пребывания заявки в СМО найдется, как вероятность того, что заявка будет принята к обслуживанию, умноженная на среднее время обслуживания:

$$\bar{t}_{сист} = 0,79 \cdot 0,5 = 0,395 \text{ (мин)}.$$

Не нужно забывать, что это среднее время относится ко всем заявкам — как обслуженным, так и необслуженным. Нас же может интересовать среднее время, которое проведет в системе обслуженная заявка. Это время равно:

$$\bar{t}_{сист}^{(об)} = \bar{t}_{об} = 0,5 \text{ (мин)}.$$

б. Со взаимопомощью.

$$n^* = 1, \lambda = 4, \mu^* = 3\mu = 6, \rho^* = \frac{\lambda}{\mu^*} = \frac{2}{3};$$

$$\rho_0 = \frac{1}{1 + 2/3} = \frac{3}{5}; \quad \rho_1 = \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{5} = \frac{2}{5};$$

$$P_{отк} = \rho_3 = \frac{2}{5} \cdot q = 1 - \frac{2}{5} = \frac{3}{5} = 0,6$$

$$A = \lambda q = 4 \cdot 0,6 = 2,4.$$

Среднее время пребывания заявки в СМО:

$$\bar{t}_{сист} = \rho_1 \cdot 1/3\mu = 2/5 \cdot 6 = 0,6667 \text{ (мин)}.$$

Среднее время пребывания обслуженной заявки в СМО:

$$\bar{t}_{сист}^{(об)} = 1/3\mu = 0,167 \text{ (мин)}.$$

Таким образом, при наличии взаимопомощи «все как один» пропускная способность СМО заметно уменьшилась. Это объясняется увеличением вероятности отказа: за то время, пока все каналы заняты обслуживанием одной заявки, могут прийти другие заявки, и, естественно, получить отказ. Что касается среднего времени пребывания заявки в СМО, то оно, как и следовало ожидать, уменьшилось. Если, по каким-то соображениям, мы стремимся ко всемерному уменьшению времени, которое заявка проводит в СМО (например, если пребывание в СМО опасно для заявки), может оказаться, что, несмотря на уменьшение пропускной способности, все же будет выгодно объединить три канала в один.

Рассмотрим теперь влияние взаимопомощи типа «все как один» на работу СМО с ожиданием. Возьмем для простоты только случай неограниченной очереди. Естественно, влияния взаимопомощи на пропускную способность СМО в этом случае не будет, так как при любых условиях обслужены будут все пришедшие заявки. Возникает вопрос о влиянии взаимопомощи на характеристики ожидания: среднюю длину очереди, среднее время ожидания, среднее время пребывания в СМО.

В силу формул (6.13), (6.14) § 6 для обслуживания без взаимопомощи среднее число заявок в очереди будет

$$\bar{r} = \frac{\rho^{n+1} \rho_0}{n \cdot n! (1 - \rho)^2}, \quad (9.1)$$

среднее время ожидания:

$$\bar{t}_{ож} = \frac{\rho^n \rho_0}{n\mu \cdot n! (1 - \rho)^2}, \quad (9.2)$$

а среднее время пребывания в системе:

$$\bar{t}_{сист} = \bar{t}_{ож} + 1/\mu, \quad (9.3)$$

где

$$\rho_0 = \frac{1}{1 + \frac{\rho}{1!} + \frac{\rho^2}{2!} + \dots + \frac{\rho^n}{n!} + \frac{\rho^{n+1}}{n! (n - \rho)}}, \quad \rho = \frac{\lambda}{\mu}. \quad (9.4)$$

Если же применяется взаимопомощь типа «все как один», то система будет работать как одноканальная с параметрами

$$\rho^* = \lambda/\mu^* = \lambda/n\mu = \rho/n = \kappa$$

и ее характеристики определяются формулами (5.14), (5.15) § 5:

$$\bar{r} = \frac{\kappa^2}{1-\kappa} \quad (9.5)$$

$$\bar{t}_{ож} = \frac{1}{n\mu} \frac{\kappa}{1-\kappa} \quad (9.6)$$

$$\bar{t}_{сист} = \bar{t}_{ож} + \frac{1}{n\mu} = \frac{1}{n\mu(1-\kappa)} \quad (9.7)$$

Пример 2. Имеется трехканальная СМО с неограниченной очередью; интенсивность потока заявок $\lambda = 4$ (заявки в мин.), среднее время обслуживания $\bar{t}_{об} = 0,5$ (мин). Функция $\mu(k) = k\mu$ ($k_{кр} > 3$). Выгодно ли, имея в виду:

- среднюю длину очереди,
- среднее время ожидания обслуживания,
- среднее время пребывания заявки в СМО

вводить взаимопомощь между каналами типа «все как один»?

Решение. а. Без взаимопомощи.

$n = 3, \lambda = 4, \mu = 1/0,5 = 2, \rho = \lambda/\mu = 2, \kappa = \rho/n = 2/3.$

По формулам (9.1) — (9.4) имеем

$$\rho_0 = \frac{1}{1 + \frac{2}{1!} + \frac{2^2}{2!} + \frac{2^3}{3!} + \frac{2^4}{3!(3-2)}} = \frac{1}{9};$$

$$\bar{r} = \frac{2^4 \cdot 1/9}{3 \cdot 3! (1/3)^2} = \frac{8}{9} = 0,889;$$

$$\bar{t}_{ож} = \bar{r}/\lambda = 2/9 = 0,222;$$

$$\bar{t}_{сист} = \bar{t}_{ож} + \bar{t}_{об} = 2/9 + 1/2 = 0,722.$$

б. Со взаимопомощью

$$n^* = 1, \lambda = 4, \mu^* = 3\mu = 6, \rho^* = \lambda/\mu^* = \kappa = 2/3.$$

По формулам (9.5) — (9.7) находим:

$$\bar{r} = \frac{(2/3)^2}{1/3} = \frac{4}{3} = 1,333;$$

$$\bar{t}_{ож} = \frac{1}{6} \frac{2/3}{1/3} = \frac{1}{3} = 0,333;$$

$$\bar{t}_{сист} = \bar{t}_{ож} + \bar{t}_{об} = 1/3 + 1/6 = 0,500.$$

Таким образом, средняя длина очереди и среднее время ожидания в очереди в случае взаимопомощи, больше, но среднее время пребывания заявки в системе — меньше.

Из рассмотренных примеров видно, что взаимопомощь между каналами типа «все как один», как правило, не способствует повышению эффективности обслуживания: время пребывания заявки в СМО уменьшается, но зато ухудшаются другие характеристики обслуживания.

Поэтому желательно изменить дисциплину обслуживания так, чтобы взаимопомощь между каналами не мешала принимать к обслуживанию новые заявки, если они появятся за время, пока все каналы заняты.

Назовем условно «равномерной взаимопомощью» следующий тип взаимопомощи. Если заявка приходит в момент, когда все каналы свободны, то все n каналов принимаются за ее обслуживание; если, в момент обслуживания заявки, приходит еще одна, часть каналов переключается на ее обслуживание; если, пока обслуживаются эти две заявки, приходит еще одна, часть каналов переключается на ее обслуживание и т. д., до тех пор, пока не окажутся занятыми все n каналов; если это так, вновь пришедшая заявка получает отказ (в СМО с отказом) или становится в очередь (в СМО с ожиданием).

При такой дисциплине взаимопомощи заявка получает отказ или становится в очередь только тогда, когда нет возможности ее обслужить. Что касается «простоя» каналов, то он в этих условиях минимален: если в системе имеется хотя бы одна заявка, все каналы работают.

Выше мы упомянули, что при появлении новой заявки часть занятых каналов освобождается и переключается на обслуживание вновь прибывшей заявки. Какая часть? Это зависит от вида функции $\mu(k)$. Если она имеет вид линейной зависимости, как показано на рис. 5.12, и $k_{кр} > n$, то все равно, какую часть каналов выделить на обслуживание вновь поступившей заявки, лишь бы все каналы были заняты (тогда суммарная интенсивность обслуживаний при любом распределении каналов по заявкам будет равна $n\mu$). Можно доказать, что если кривая $\mu(k)$ выпукла кверху, как показано на рис. 5.11, то нужно распределять каналы по заявкам как можно более равномерно.

Рассмотрим работу n -канальной СМО при «равномерной» взаимопомощи между каналами.

1. СМО с отказами

Будем нумеровать состояния СМО по числу заявок, находящихся в состоянии обслуживания:

- S_0 — СМО свободна,
- S_1 — одна заявка обслуживается всеми n каналами.
- S_2 — две заявки обслуживаются всеми n каналами,
-
- S_k — k заявок обслуживаются всеми n каналами,
-
- S_n — n заявок обслуживаются всеми n каналами.

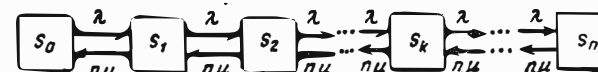


Рис. 5.13

Мы видим, что граф состояний (см. рис. 5.13) здесь тот же, что для одноканальной СМО с производительностью $\mu^* = n\mu$ и ограниченной очередью, имеющей $n - 1$ мест. Поэтому для определения характеристик системы мы можем воспользоваться формулами § 5, подставляя в них $\kappa = \lambda/\mu^* = \lambda/n\mu$ вместо $\rho = \lambda/\mu$:

$$P_{\text{отк}} = \frac{\kappa^n (1-\kappa)}{1-\kappa^{n+1}}; \quad (9.8)$$

$$q = \frac{1-\kappa^n}{1-\kappa^{n+1}}; \quad (9.9)$$

$$A = \lambda q = \lambda \frac{1-\kappa^n}{1-\kappa^{n+1}}. \quad (9.10)$$

Пример 3. В условиях примера 1 сравнить относительную и абсолютную пропускную способности СМО, а также среднее число занятых каналов:

- а) при отсутствии взаимопомощи,
- б) при наличии равномерной взаимопомощи между каналами.

Решение а. Без взаимопомощи.

Из примера 1 имеем: $q = 0,79$, $A = 3,16$. Среднее число занятых каналов $\bar{z} = A/\mu = 1,58$.

б. С равномерной взаимопомощью.

$$\kappa = \lambda/n\mu = 4/2 \cdot 3 = 2/3.$$

По формуле (9.9)

$$q = \frac{1-(2/3)^3}{1-(2/3)^4} \approx 0,887; \quad A = 4q \approx 3,51; \quad \bar{z} = 3,51/2 \approx 1,76.$$

Таким образом, за счет применения разумно организованной взаимопомощи между каналами, пропускная способность СМО несколько повысилась. Соответственно увеличилась и средняя занятость каналов.

2. СМО с очередью

Рассмотрим СМО с очередью и максимальным числом заявок в очереди m . Предположим, что между каналами имеется «равномерная» взаимопомощь и $\mu(k) = k\mu$. Состояния системы опять будем нумеровать по числу заявок, находящихся в СМО:

- S_0 — система свободна,
- S_1 — одна заявка обслуживается всеми n каналами,
- S_2 — две заявки обслуживаются всеми n каналами,
-
- S_k — k заявок обслуживаются всеми n каналами, очереди нет,
-
- S_n — n заявок обслуживаются всеми n каналами, очереди нет,

- S_{n+1} — n заявок обслуживаются всеми n каналами, одна заявка стоит в очереди,
-
- S_{n+m} — n заявок обслуживаются всеми n каналами, в очереди стоит m заявок.

Граф состояний СМО приведен на рис. 5.14.

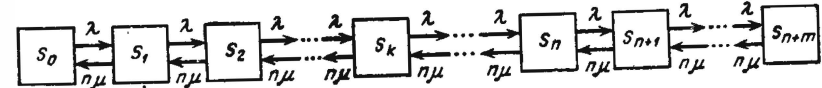


Рис. 5.14

Мы опять получили граф того же вида, что и на рис. 5.13, но с увеличенным на m числом состояний. Значит, нам нужно воспользоваться формулами § 5 для одноканальной СМО с производительностью $\mu^* = n\mu$ и числом мест в очереди $n + m - 1$. Получим:

$$P_{\text{отк}} = \frac{\kappa^{n+m} (1-\kappa)}{1-\kappa^{n+m+1}}; \quad (9.11)$$

$$q = \frac{1-\kappa^{n+m}}{1-\kappa^{n+m+1}}; \quad (9.12)$$

$$A = \lambda q = \lambda \frac{1-\kappa^{n+m}}{1-\kappa^{n+m+1}}. \quad (9.13)$$

Пример 4. В условиях примера 1 сравнить абсолютную и относительную пропускные способности для случая отсутствия взаимопомощи и наличия равномерной взаимопомощи, если в очереди имеется два места ($m = 2$).

Решение а. Без взаимопомощи. Из примера 1 имеем $q \approx 0,79$; $A \approx 3,16$.

б. С равномерной взаимопомощью

По формулам (9.11)–(9.13) для $n=3$, $\lambda=4$, $\mu=2$, $\rho=2$, $\kappa=\rho/n=2/3$ имеем: $q = \frac{1-(2/3)^3}{1-(2/3)^4} = \frac{57}{65} = 0,88$, $A = \lambda q = 3,52$.

Предоставляем читателю самостоятельно подсчитать среднее число заявок в очереди, среднее время ожидания и среднее время пребывания в системе для обоих вариантов примера 4 и убедиться, что при наличии равномерной взаимопомощи между каналами все характеристики СМО меняются только в желательном для нас направлении. Не следует, однако, забывать, что организация такой взаимопомощи между каналами далеко не для всех СМО осуществима.

10. СИСТЕМА МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ С ОШИБКАМИ

Иногда на практике приходится встречаться с такими случаями, когда заявка, принятая к обслуживанию в СМО, обслуживается не с полной достоверностью, а с некоторой вероятностью $p \neq 1$; другими

словами, могут иметь место о ш и б к и в обслуживании, результатом которых является то, что некоторые заявки, прошедшие СМО и якобы «обслуженные», в действительности остаются необслуженными из-за «брака» в работе СМО.

Примерами СМО с ошибками могут быть: справочные бюро, иногда выдающие неправильные справки и указания; корректор, могущий пропустить ошибку или неверно ее исправить; телефонная станция, иногда соединяющая абонента не с тем номером; система ПВО, для которой «обслуживанием» является обстрел цели, как известно, не всегда кончающийся ее поражением и т. д.

В разомкнутой СМО с ошибками появление ошибки в обслуживании практически не сказывается на потоке заявок: число источников заявок так велико, что интенсивность потока заявок вследствие ошиб-

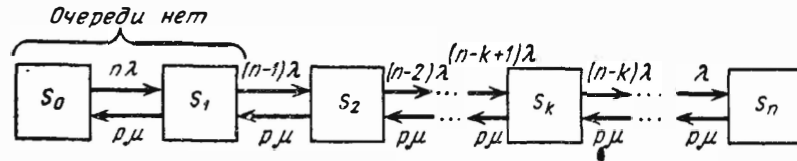


Рис. 5.15

ки практически не меняется. Поэтому для разомкнутых систем массового обслуживания учет ошибок в обслуживании сводится только к тому, что относительная пропускная способность системы уменьшается: она умножается на $p < 1$, где p — вероятность безошибочного обслуживания. Соответственно, умножается на p и абсолютная пропускная способность. Что касается остальных характеристик СМО, таких, например, как время ожидания, число заявок в очереди и т. д., то на них ошибки в обслуживании не сказываются. Другое дело — для замкнутой системы массового обслуживания, когда заявка, обслуженная с ошибкой, вновь становится в очередь на обслуживание, и, следовательно, увеличивает загрузку СМО.

В качестве примера замкнутой СМО с ошибками рассмотрим одного рабочего, обслуживающего n станков. Интенсивность потока неисправностей одного работающего станка равна λ , среднее время обслуживания (наладки) станка $\bar{t}_{об} = 1/\mu$; с вероятностью p обслуживание заканчивается удачно, и станок начинает снова работать; с вероятностью $1 - p$ обслуживание оказывается неудачным, и станок снова становится в очередь на обслуживание. Требуется определить предельные вероятности состояний.

Будем нумеровать состояния СМО по числу неисправных станков:

- S_0 — все станки исправны,
- S_1 — один станок неисправен, налаживается, очереди нет,
- S_2 — два станка неисправны, один налаживается, другой ждет в очереди,
- ...

- S_k — k станков неисправны, один налаживается, $k - 1$ ждут в очереди,
- S_n — все n станков неисправны, один налаживается, $n - 1$ ждут очереди,

Граф состояний системы показан на рис. 5.15. Наличие ошибок в обслуживании сказывается в том, что у стрелок, идущих справа налево, стоит не интенсивность обслуживания μ , а интенсивность «успешного обслуживания» $p\mu$, где p — вероятность того, что обслуживание будет выполнено успешно. Действительно, пусть, например, система находится в состоянии S_k (один станок налаживается, $k - 1$ ждут очереди). Вероятность того, что за время Δt будет закончено обслуживание, равна $\mu\Delta t$; но это обслуживание лишь с вероятностью p будет успешным и переведет систему из состояния S_k в S_{k-1} ; с вероятностью же $1 - p$ оно будет неуспешным и заявка снова вернется в очередь, следовательно, система опять останется в состоянии S_k . Значит, интенсивность потока успешных обслуживаний будет равна $p\mu$, что и отмечено на рис. 5.15. Полученный граф ничем не отличается от того, который приведен на рис. 5.9, с той разницей, что вместо μ на нем стоит $\mu^* = p\mu$. Значит, характеристики СМО с ошибками могут быть вычислены по формулам § 8, с заменой μ на $p\mu$.

Пример 1. Рабочий обслуживает группу из трех станков. Остановки работающего станка случаются в среднем два раза в час. Процесс наладки отнимает у рабочего в среднем 10 минут, причем неисправность устраняется с вероятностью 2/3 (и остается неустранимой с вероятностью 1/3). Определить характеристики этой замкнутой СМО: вероятность занятости рабочего, абсолютную пропускную способность; среднее количество неисправных станков

Решение. Для $n=3$, $\lambda=2$, $\mu=1/\bar{t}_{об}=6$, $p=2/3$, $\mu^*=p\mu=4$, $\rho^*=\lambda/\mu^*=1/2$ по формулам (8.1) находим

$$p_0 = \frac{1}{1 + 3 \cdot 1/2 + 3 \cdot 2 \cdot 1/2^2 + 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1/2^3} \approx 0,211.$$

Вероятность занятости рабочего:

$$P_{зан} = 1 - p_0 \approx 0,789.$$

Абсолютная пропускная способность (число неисправностей, устраняемых рабочим в час):

$$A = 0,789 \cdot 4 \approx 3,16.$$

Среднее число неисправных станков находим по формуле (8.5):

$$\bar{w} = 3 - \frac{0,789}{1/2} = 1,42.$$

Оригинальный случай СМО с ошибками представляет такая система массового обслуживания, в которой характер обслуживания зависит от длины очереди: при увеличении этой длины обслуживающий канал начинает «спешить» — в связи с этим уменьшается время обслуживания, но увеличивается вероятность ошибки. Разумеется, такая обстановка создается только там, где «каналом обслуживания» является живой человек.

Рассмотрим пример такой СМО. Возьмем замкнутую одноканальную СМО с n источниками заявок (рабочего, обслуживающего n стан-

ков). Пусть при отсутствии очереди (в нормальных условиях) среднее время обслуживания равно $\bar{t}_{об}$, а значит интенсивность потока обслуживаний равна $\mu(0) = 1/\bar{t}_{об}$. При наличии в очереди ожидающих наладки станков рабочий начинает торопиться, и интенсивность потока обслуживаний увеличивается. Обозначим интенсивность потока обслуживаний при наличии в очереди r станков через $\mu(r)$. Одновременно с увеличением темпа обслуживания (в связи с увеличением числа станков, ожидающих в очереди) увеличивается и вероятность ошибки; при отсутствии очереди (в нормальных условиях) она равна $p(0)$, а при наличии в очереди r станков — $p(r)$. Очевидно, нужно перемножить для каждого r интенсивность обслуживания и вероятность ошибки и ввести одну «приведенную» интенсивность обслуживания:

$$\mu^*(r) = \mu(r) \cdot p(r) \quad (r = 0, \dots, n-1).$$

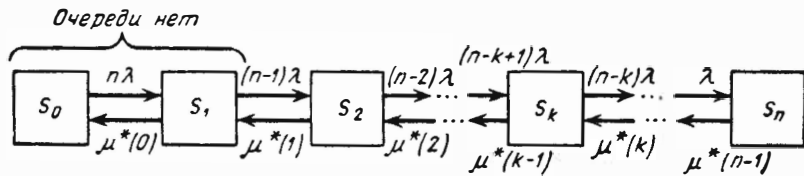


Рис. 5.16

Граф состояний СМО представлен на рис. 5.16 (нумерация состояний — та же, что и выше). Применяя общие формулы для предельных вероятностей в схеме гибели и размножения, получим:

$$\left. \begin{aligned} p_1 &= \frac{n\lambda}{\mu^*(0)} p_0, \\ p_2 &= \frac{n(n-1)\lambda^2}{\mu^*(0)\mu^*(1)} p_0, \\ p_3 &= \frac{n(n-1)(n-2)\lambda^3}{\mu^*(0)\mu^*(1)\mu^*(2)} p_0, \\ &\dots \\ p_k &= \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)\lambda^k}{\mu^*(0)\mu^*(1)\dots\mu^*(k-1)} p_0, \\ &\dots \\ p_n &= \frac{n(n-1)\dots 1 \cdot \lambda^n}{\mu^*(0)\mu^*(1)\dots\mu^*(n-1)} p_0, \\ p_0 &= \left[1 + \frac{n\lambda}{\mu^*(0)} + \frac{n(n-1)\lambda^2}{\mu^*(0)\mu^*(1)} + \dots + \right. \\ &\quad \left. + \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)\lambda^k}{\mu^*(0)\mu^*(1)\dots\mu^*(k-1)} + \dots + \right. \\ &\quad \left. + \frac{n(n-1)\dots 1 \cdot \lambda^n}{\mu^*(0)\mu^*(1)\dots\mu^*(n-1)} \right]^{-1}. \end{aligned} \right\} (10.1)$$

11. СИСТЕМЫ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ С НЕ-ПУАССОНОВСКИМИ ПОТОКАМИ СОБЫТИЙ

Все рассмотренные до сих пор задачи теории массового обслуживания относились только к случаю, когда процесс, протекающий в СМО, представляет собой непрерывную марковскую цепь (марковский процесс с дискретными состояниями и непрерывным временем), другими словами, когда все потоки событий, переводящие систему из состояния в состояние (потоки заявок, обслуживаний, уходов и т. д.) являются пуассоновскими. Для получения предельных характеристик системы в установившемся стационарном режиме требовалось, чтобы эти потоки были не только пуассоновскими, но и простейшими (с постоянными интенсивностями).

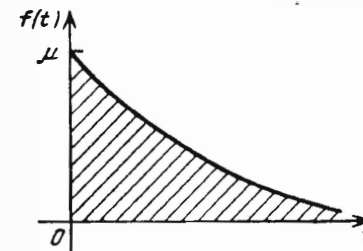


Рис. 5.17

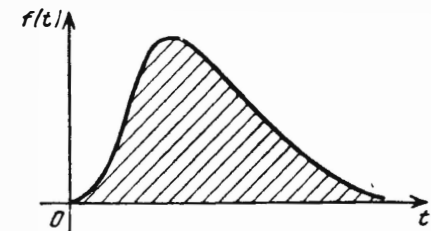


Рис. 5.18

На практике очень часто оказывается, что потоки событий, действующие в системе массового обслуживания, заметно отличаются от простейших. Особенно это относится к потоку обслуживаний. Действительно, мы знаем, что в простейшем потоке интервал времени между двумя соседними событиями распределен по показательному закону

$$f(t) = \mu e^{-\mu t} \quad (t > 0).$$

(см. рис. 5.17). Очевидно, что время $T_{об}$ обслуживания заявки вовсе не обязательно распределяется по такому закону; напротив, гораздо более типичным является случай, когда закон распределения времени обслуживания $f(t)$ отличен от показательного, и его наивероятнейшее значение не равно нулю (см. рис. 5.18).

В случае, когда закон распределения времени обслуживания отличен от показательного, все ранее рассмотренные методы описания процессов, протекающих в СМО, становятся, строго говоря, непригодными. В частности, нельзя записать ни линейных дифференциальных уравнений для вероятностей состояний, ни линейных алгебраических уравнений для предельных вероятностей. Математический аппарат исследования становится гораздо более сложным; аналитические формулы для характеристик СМО удается получить только для самых простых случаев.

Приведем (без доказательства) некоторые из полученных в этой области результатов.

1. СМО с отказами

Пусть на n -канальную систему массового обслуживания с отказами поступает простейший поток заявок с интенсивностью λ , а время обслуживания имеет произвольное распределение с математическим ожиданием

$$\bar{t}_{об} = \frac{1}{\mu} = \int_0^{\infty} t f(t) dt. \quad (11.1)$$

Доказано (см. [16]), что в этом случае формулы Эрланга для вероятностей состояний остаются справедливыми, а именно

$$\left. \begin{aligned} p_k &= \frac{\rho^k}{k!} p_0, \quad (k=0, \dots, n), \\ p_0 &= \frac{1}{1 + \frac{\rho}{1!} + \frac{\rho^2}{2!} + \dots + \frac{\rho^n}{n!}}, \end{aligned} \right\} \quad (11.2)$$

где $\rho = \lambda/\mu = \lambda \bar{t}_{об}$.

2. Одноканальная СМО с ожиданием

Пусть имеется одноканальная система массового обслуживания с неограниченной очередью ($n = 1, m = \infty$); на вход ее поступает простейший поток заявок с интенсивностью λ ; закон распределения времени обслуживания $f(t)$ — произвольный, с математическим ожиданием $\bar{t}_{об} = 1/\mu$ и средним квадратическим отклонением $\sigma_{t_{об}}$.

Величина

$$\frac{\sigma_{t_{об}}}{\bar{t}_{об}} = v$$

называется коэффициентом вариации времени обслуживания (этот коэффициент показывает, насколько велик разброс времени обслуживания относительно его среднего значения).

Доказано (см. напр., [20]), что для одноканальной СМО с простейшим потоком заявок и произвольно распределенным временем обслуживания среднее число заявок, находящихся в очереди, выражается формулой:

$$\bar{r} = \frac{\rho^2 (1+v^2)}{2(1-\rho)}, \quad (11.3)$$

где $\rho = \lambda/\mu$, v — коэффициент вариации времени обслуживания. Что касается среднего времени ожидания в очереди, то оно выражается формулой:

$$\bar{t}_{ож} = \frac{\rho^2 (1+v^2)}{2\lambda (1-\rho)}.$$

Формулы (11.3), (11.4) обычно называются формулами Полячека-Хинчина [20].

Заметим, что для показательного распределения

$$f(t) = \mu e^{-\mu t} \quad (t > 0)$$

коэффициент вариации

$$v = \frac{\sigma_{t_{об}}}{\bar{t}_{об}} = \frac{1/\mu}{1/\mu} = 1.$$

В этом случае формулы (11.3) и (11.4) превращаются в ранее выведенные нами формулы (5.17) и (5.20) (см. § 5):

$$\bar{r} = \frac{\rho^2}{1-\rho}; \quad \bar{t}_{ож} = \frac{\rho^2}{\lambda(1-\rho)}. \quad (11.4)$$

Рассмотрим крайний случай, когда время обслуживания вообще неслучайно и равно своему математическому ожиданию:

$$\bar{t}_{об} = 1/\mu.$$

Тогда $\sigma_{t_{об}} = 0$, $v = 0$, и формулы (11.3), (11.4) дают

$$\bar{r} = \frac{\rho^2}{2(1-\rho)} \quad (11.5)$$

и

$$\bar{t}_{ож} = \frac{\rho^2}{2\lambda(1-\rho)}, \quad (11.6)$$

т. е. как среднее число заявок в очереди, так и среднее время ожидания при строго постоянном времени обслуживания вдвое меньше, чем при случайном времени обслуживания, распределенном по показательному закону.

Пример 1. Поток железнодорожных составов, поступающих на сортировочную станцию для обработки, — простейший поток с интенсивностью $\lambda = 2$ (состава в час). Среднее время, затрачиваемое на обработку одного состава, равно $\bar{t}_{об} = 20$ (мин); его среднее квадратическое отклонение $\sigma_{t_{об}} = 8$ (мин). Определить среднее число составов, ожидающих обработки и среднее время ожидания обработки в очереди, а также среднее число составов, связанных с обслуживанием на сортировочной станции.

Решение. Переходя к одной и той же единице измерения времени (час) имеем:

$$\mu = \frac{1}{\bar{t}_{об}} = \frac{1}{1/3} = 3 \text{ (состава в час)}.$$

Коэффициент загрузки станции (приведенная интенсивность потока заявок):

$$\rho = \lambda/\mu = 2/3.$$

Коэффициент вариации времени обслуживания:

$$v = \sigma_{t_{об}}/\bar{t}_{об} = 8/20 = 0,4.$$

По формулам (11.3) и (11.4) находим среднее число составов, ожидающих обработки

$$\bar{r} = \frac{(2/3)^3 (1 + 0,4^2)}{2(1 - 2/3)} \approx 0,77$$

и среднее время ожидания обработки:

$$\bar{t}_{ож} = \bar{r}/\lambda \approx 0,385 \text{ (час).}$$

Среднее число составов, связанных с сортировочной станцией, равно среднему числу составов в очереди \bar{r} плюс среднее число составов под обслуживанием; последнее же равно вероятности занятости СМО, т. е. отношению среднего числа составов, поступающих в единицу времени к среднему числу составов, обслуживаемых каналом в единицу времени. Отсюда среднее число составов (заявок) в системе равно:

$$\bar{k} = \bar{r} + \rho = 0,77 + 2/3 \approx 1,437.$$

Приведенные аналитические формулы относятся, как уже было сказано, к самым простейшим не-пуассоновским СМО. В случае более сложных СМО (многоканальных, с особенностями обслуживания и т.д.), простых аналитических формул получить не удастся. В некоторых случаях исследование СМО с не-пуассоновскими потоками событий может быть произведено с помощью метода псевдосостояний, описанного в § 10 гл. 4.

В качестве примера рассмотрим одноканальную СМО с очередью (без ограничений). На вход системы поступает простейший поток заявок с интенсивностью λ ; время обслуживания $T_{об}$ распределено по закону Эрланга 2-го порядка с математическим ожиданием $1/\mu$, т. е. представляет собой сумму двух независимых случайных величин с одинаковым показательным распределением. Обозначим параметры этих показательных распределений μ' и найдем значение μ' . По теореме сложения математических ожиданий имеем:

$$1/\mu' + 1/\mu' = 2/\mu' = 1/\mu,$$

откуда $\mu' = 2\mu$.

Таким образом, время обслуживания $T_{об}$, распределенное по закону Эрланга 2-го порядка с математическим ожиданием $1/\mu$, может быть представлено, как сумма двух независимых случайных величин $T_{об}^{(1)}$ и $T_{об}^{(2)}$, имеющих каждая показательное распределение с параметром 2μ . Эти два времени $T_{об}^{(1)}$ и $T_{об}^{(2)}$ можно представить как две последовательные «фазы» процесса обслуживания.

Рассмотрим различные состояния СМО, нумеруя их по числу заявок в системе и фазе обслуживания:

- S_0 — заявок в системе нет (обслуживания не происходит);
- $S_{1,1}$ — одна заявка находится в СМО, обслуживание в первой фазе, очереди нет;
- $S_{1,2}$ — одна заявка находится в СМО, обслуживание во второй фазе, очереди нет;

$S_{2,1}$ — две заявки находятся в СМО, первая обслуживается (первая фаза), вторая стоит в очереди;

$S_{2,2}$ — две заявки находятся в СМО; первая обслуживается (вторая фаза), вторая стоит в очереди;

...

$S_{k,1}$ — k заявок находятся в СМО, одна под обслуживанием (первая фаза), остальные — в очереди;

$S_{k,2}$ — k заявок находятся в СМО, одна под обслуживанием (вторая фаза), остальные — в очереди;

...

Размеченный граф состояний системы приведен на рис. 5.19. Действительно, из состояния S_0 в $S_{1,1}$ систему переводит поток заявок с интенсивностью λ . Из состояния $S_{1,1}$ в $S_{1,2}$ систему переводит поток с интенсивностью 2μ (поток окончаний первой фазы обслуживания). Из состояния $S_{1,2}$ в S_0 — такой же поток. Из состояния $S_{1,1}$ в $S_{2,1}$ систему переводит поток заявок и т. д.

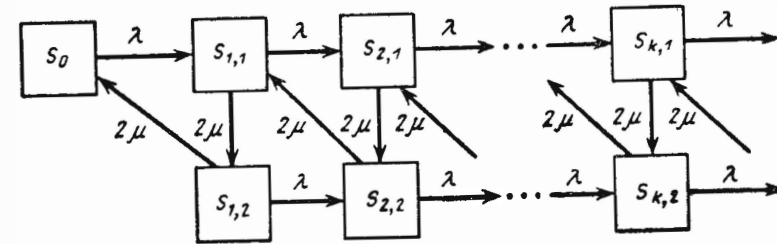


Рис. 5.19

Пользуясь размеченным графом состояний, запишем линейные алгебраические уравнения для вероятностей состояний:

$$\left. \begin{aligned} \lambda p_0 &= 2\mu p_{1,2}, \\ (\lambda + 2\mu) p_{1,1} &= \lambda p_0 + 2\mu p_{2,2}, \\ (\lambda + 2\mu) p_{1,2} &= 2\mu p_{1,1}, \\ (\lambda + 2\mu) p_{2,1} &= \lambda p_{1,1} + 2\mu p_{3,2}, \\ (\lambda + 2\mu) p_{2,2} &= \lambda p_{1,2} + 2\mu p_{2,1}, \\ &\dots \\ (\lambda + 2\mu) p_{k,1} &= \lambda p_{k-1,1} + 2\mu p_{k+1,2}, \\ (\lambda + 2\mu) p_{k,2} &= \lambda p_{k-1,2} + 2\mu p_{k,1}, \\ &\dots \end{aligned} \right\} \quad (11.7)$$

подробными методами: сложность изучаемых процессов и большое число участвующих в них элементов. Как и везде, где применяются методы теории вероятностей, массовость изучаемых явлений позволяет установить в них сравнительно простые закономерности.

Продemonстрируем идею метода динамики средних на следующем простейшем примере.

Пусть имеется сложная физическая система S , состоящая из большого числа N однородных элементов (или «единиц»), каждый из которых может случайным образом переходить из состояния в состояние. Предположим, что все потоки событий, переводящие систему S (и каждый элемент) из состояния в состояние — пуассоновские (хотя в общем случае и не простейшие, а с интенсивностями, произвольным образом зависящими от времени). Тогда процесс, протекающий в системе, будет марковским.

Допустим, что каждый элемент может быть в любом из n возможных состояний:

$$\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2, \dots, \mathcal{E}_n,$$

а состояние системы S в каждый момент характеризуется числом элементов, находящихся в каждом из состояний. Нам требуется исследовать случайный процесс, протекающий в системе S .

В принципе, можно было бы применить ту же методичку, которую мы уже применяли ранее при изучении подобных процессов, а именно, рассмотреть все возможные состояния системы S :

$S_{N, 0, \dots, 0}$ — все элементы находятся в состоянии \mathcal{E}_1 , в других состояниях нет ни одного элемента;

$S_{N-1, 1, 0, \dots, 0}$ — один элемент находится в состоянии \mathcal{E}_2 , все остальные — в состоянии \mathcal{E}_1 ,

и т. д., и найти вероятности этих состояний. Однако при большом числе элементов N даже перечисление возможных состояний системы S затруднительно, не то, что составление и решение уравнений для вероятностей состояний.

Очевидно, нам нужно идти другим путем. Отвлечемся от возможных состояний системы в целом и сосредоточим свое внимание на отдельном элементе \mathcal{E} (так как все элементы однородны, все равно, какой это будет элемент) и рассмотрим для него граф состояний (рис. 6.1).

Введем в рассмотрение случайную величину $X_k(t)$ — число единиц, находящихся в момент t в состоянии \mathcal{E}_k . Будем ее называть кратко численностью состояния \mathcal{E}_k в момент t . Очевидно, для любого момента t сумма численностей всех состояний равна общей численности элементов:

$$X_1(t) + X_2(t) + \dots + X_n(t) = N,$$

или, короче:

$$\sum_{k=1}^n X_k(t) = N. \quad (1.1)$$

Рассмотренная нами величина $X_k(t)$ для любого t представляет собой случайную величину, а вообще, при меняющемся t — случайную функцию времени.

Поставим себе задачу: найти для любого t основные характеристики случайной величины $X_k(t)$ — ее математическое ожидание

$$m_k(t) = M[X_k(t)] \quad (1.2)$$

и дисперсию:

$$D_k(t) = D[X_k(t)]. \quad (1.3)$$

Другими словами, для каждого момента времени t мы хотим знать среднее значение численности каждого состояния, а также разброс фактической численности около средней.

Для того, чтобы найти эти характеристики, надо знать интенсивности всех потоков событий, переводящих элемент (не систему, а именно элемент!) из состояния в состояние.

Предположим, что эти интенсивности нам известны и проставлены на графе состояний (см. рис. 6.1). Тогда численность каждого состояния $X_k(t)$ можно представить как сумму случайных величин, каждая из которых связана с отдельным (i -м) элементом, а именно: равна единице, если этот элемент в момент времени t находится в состоянии \mathcal{E}_k , и равна нулю, если не находится:

$$X_k^{(i)}(t) = \begin{cases} 1, & \text{если } i\text{-й элемент в момент } t \text{ находится в состоянии } \mathcal{E}_k; \\ 0, & \text{если не находится.} \end{cases} \quad (1.4)$$

Очевидно, для любого момента t общая численность состояния \mathcal{E}_k равна сумме случайных величин (1.4):

$$X_k(t) = X_k^{(1)}(t) + X_k^{(2)}(t) + \dots + X_k^{(N)}(t),$$

или короче

$$X_k(t) = \sum_{i=1}^N X_k^{(i)}(t). \quad (1.5)$$

Если интенсивности λ_{ij} потоков событий, переводящих каждый элемент из состояния в состояние, нам известны (а, стало быть, не случайны), то величины

$$X_k^{(1)}(t), X_k^{(2)}(t), \dots, X_k^{(N)}(t)$$

для отдельных элементов независимы между собой. По теореме сложения математических ожиданий (для которой, кстати, независимости не требуется) и теореме сложения дисперсий:

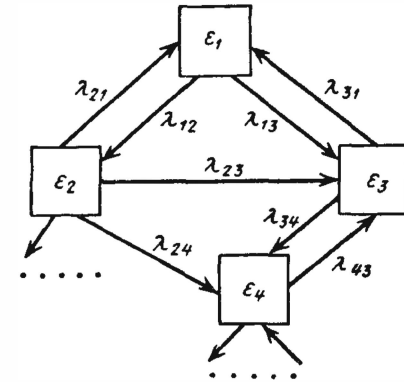


Рис. 6.1

$$\left. \begin{aligned} m_k(t) &= \sum_{i=1}^N M[X_k^{(i)}(t)], \\ D_k(t) &= \sum_{i=1}^N D[X_k^{(i)}(t)]. \end{aligned} \right\} \quad (1.6)$$

Найдем числовые характеристики — математическое ожидание и дисперсию — случайной величины $X_k^{(i)}(t)$, заданной выражением (1.4). Эта величина имеет два возможных значения: 0 и 1. Вероятность первого из них равна $p_k(t)$ — вероятности того, что элемент находится в состоянии \mathcal{E}_k (так как элементы однородны, то для всех них эта вероятность одна и та же). Ряд распределения каждой из случайных величин $X_k^{(i)}(t)$ один и тот же и имеет вид:

$$\frac{0 \quad | \quad 1}{1-p_k(t) \quad | \quad p_k(t)}, \quad (1.7)$$

где в верхней строке указаны возможные значения случайной величины, а в нижней — их вероятности.

Математическое ожидание случайной величины, заданной рядом распределения (1.7), равно:

$$M[X_k^{(i)}(t)] = 0 \cdot (1-p_k(t)) + 1 \cdot p_k(t) = p_k(t),$$

где $p_k(t)$ — вероятность того, что отдельный элемент в момент t будет находиться в состоянии \mathcal{E}_k . Дисперсия случайной величины с рядом распределения (1.7) равна:

$$D[X_k^{(i)}(t)] = (0-p_k(t))^2(1-p_k(t)) + (1-p_k(t))^2 p_k(t) = p_k(t)(1-p_k(t)).$$

Подставляя эти выражения в формулы (1.6), найдем математическое ожидание и дисперсию численности k -го состояния:

$$m_k(t) = N p_k(t), \quad (1.8)$$

$$D_k(t) = N p_k(t)(1-p_k(t)). \quad (1.9)$$

Таким образом, нам удалось для любого t найти математическое ожидание и дисперсию численности любого состояния \mathcal{E}_k : они выражаются формулами (1.8) и (1.9) через число элементов N и вероятность k -го состояния любого элемента.

Зная дисперсию $D_k(t)$, можно найти среднее квадратическое отклонение численности состояния \mathcal{E}_k :

$$\sigma_k(t) = \sqrt{N p_k(t)(1-p_k(t))}, \quad (1.10)$$

и, значит, для любого момента времени t указать ориентировочно диапазон практически возможных значений численности:

$$m_k(t) \pm 3\sigma_k(t). \quad (1.11)$$

Таким образом, не определяя вероятностей состояний системы S в целом, а занимаясь только вероятностями состояний отдельных ее элементов, можно определить, чему равна для любого момента t средняя численность каждого состояния и в каких пределах находится фактическая численность. Если мы знаем вероятности всех состояний одного элемента

$$p_1, p_2, \dots, p_n$$

как функции времени, то нам известны и средние численности состояний:

$$m_1, m_2, \dots, m_n$$

и их дисперсии:

$$D_1, D_2, \dots, D_n$$

и средние квадратические отклонения:

$$\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n.$$

Таким образом, поставленная задача сводится к определению вероятностей состояний одного отдельного элемента.

Эти вероятности, как известно, могут быть найдены как решения дифференциальных уравнений Колмогорова для вероятностей состояний; правила их составления даны в § 6 гл. 4. Для этого нужно только знать (точно или приближенно) интенсивности потоков событий, переводящих каждый элемент из состояния в состояние. Пока что мы будем предполагать, что эти интенсивности нам известны и не случайны. О том, из каких соображений можно определять эти интенсивности, мы будем говорить несколько позже (см. § 2).

Заметим, что вместо дифференциальных уравнений для вероятностей состояний можно (и иногда бывает удобнее) писать уравнения непосредственно для средних численностей состояний. Действительно, как видно из формулы (1.8), средняя численность каждого состояния пропорциональна вероятности этого состояния (отличается от нее множителем N) и, очевидно, удовлетворяет тем же дифференциальным уравнениям, только интегрировать их нужно при других начальных условиях, соответствующих начальным численностям состояний.

Пример 1. Система S состоит из N однородных элементов; граф состояний каждого элемента представлен на рис. 6.2. В начальный момент (при $t = 0$) все элементы находятся в состоянии \mathcal{E}_1 . Написать систему дифференциальных уравнений, которым должны удовлетво-

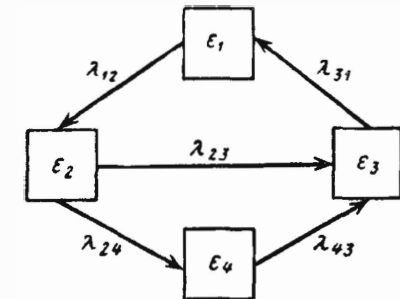


Рис. 6.2

рять средние численности состояний m_1, m_2, m_3, m_4 , и указать, при каких начальных условиях ее нужно решать. Считая уравнения решенными, написать выражения для дисперсий численностей состояний.

Решение. Непосредственно по графу (рис. 6.2) составляем уравнения Колмогорова для вероятностей состояний:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dp_1}{dt} &= -\lambda_{12} p_1 + \lambda_{31} p_3, \\ \frac{dp_2}{dt} &= -(\lambda_{23} + \lambda_{24}) p_2 + \lambda_{12} p_1, \\ \frac{dp_3}{dt} &= -\lambda_{31} p_3 + \lambda_{23} p_2 + \lambda_{43} p_4, \\ \frac{dp_4}{dt} &= -\lambda_{43} p_4 + \lambda_{24} p_2. \end{aligned} \right\} (1.12)$$

Мы знаем, что одно из этих уравнений (любое) может быть отброшено, но мы пока сохраним их все.

Умножим левую и правую части каждого из уравнений (1.12) на число элементов N и введем в левых частях N под знак производной; получим:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d(Np_1)}{dt} &= -\lambda_{12} N p_1 + \lambda_{31} N p_3, \\ \frac{d(Np_2)}{dt} &= -(\lambda_{23} + \lambda_{24}) N p_2 + \lambda_{12} N p_1, \\ \frac{d(Np_3)}{dt} &= -\lambda_{31} N p_3 + \lambda_{23} N p_2 + \lambda_{43} N p_4, \\ \frac{d(Np_4)}{dt} &= -\lambda_{43} N p_4 + \lambda_{24} N p_2. \end{aligned} \right\} (1.13)$$

Теперь вспомним, что

$$Np_1 = m_1, \quad Np_2 = m_2, \quad Np_3 = m_3, \quad Np_4 = m_4,$$

(аргумент t у этих функций для краткости отброшен) и перепишем уравнения (1.13) в виде:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dm_1}{dt} &= -\lambda_{12} m_1 + \lambda_{31} m_3, \\ \frac{dm_2}{dt} &= -(\lambda_{23} + \lambda_{24}) m_2 + \lambda_{12} m_1, \\ \frac{dm_3}{dt} &= -\lambda_{31} m_3 + \lambda_{23} m_2 + \lambda_{43} m_4, \\ \frac{dm_4}{dt} &= -\lambda_{43} m_4 + \lambda_{24} m_2. \end{aligned} \right\} (1.14)$$

В уравнениях (1.14) неизвестными функциями являются непосредственно средние численности состояний. Как видно, эти уравнения составлены совершенно по тому же правилу, что и уравнения для вероятностей состояний, поэтому их можно было составить сразу, минуя промежуточные этапы (1.12) и (1.13). Так мы и будем поступать в дальнейшем.

Очевидно, для каждого t средние численности состояний удовлетворяют условию:

$$m_1 + m_2 + m_3 + m_4 = N,$$

и поэтому одно (любое) из уравнений (1.14) можно отбросить. Отбросим, например, третье уравнение (оно наиболее сложно) и в остальные уравнения вместо m_3 подставим выражение:

$$m_3 = N - (m_1 + m_2 + m_4).$$

Получится окончательно система трех дифференциальных уравнений:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dm_1}{dt} &= -\lambda_{12} m_1 + \lambda_{31} [N - (m_1 + m_2 + m_4)], \\ \frac{dm_2}{dt} &= -(\lambda_{23} + \lambda_{24}) m_2 + \lambda_{12} m_1, \\ \frac{dm_4}{dt} &= -\lambda_{43} m_4 + \lambda_{24} m_2. \end{aligned} \right\} (1.15)$$

Эту систему нужно решать при начальных условиях:

$$t = 0; \quad m_1 = N, \quad m_2 = m_3 = m_4 = 0. \quad (1.16)$$

Интегрирование такой системы дифференциальных уравнений для конкретных значений входящих в нее параметров ($N, \lambda_{12}, \lambda_{31}, \lambda_{24}, \lambda_{34}, \lambda_{43}$) проще всего осуществить на машине или же вручную, методом численного интегрирования.

Предположим, что это осуществлено и нами получены четыре функции, выражающие средние численности состояний:

$$m_1(t), \quad m_2(t), \quad m_3(t), \quad m_4(t).$$

Найдем дисперсии численностей состояний:

$$D_1(t), \quad D_2(t), \quad D_3(t), \quad D_4(t).$$

Ранее мы показали, что

$$D_k(t) = N p_k(t) (1 - p_k(t)). \quad (1.17)$$

Отсюда, учитывая зависимость $m_k(t) = N p_k(t)$, получим:

$$D_k(t) = m_k(t) \left(1 - \frac{m_k(t)}{N} \right), \quad k = 1, 2, 3, 4. \quad (1.18)$$

Таким образом, если интенсивности потоков событий, переводящих элемент из состояния в состояние, не зависят от численностей со-

Построим на графике функции (1.25) и (1.26) (рис. 6.4). Из графика видно, что при $t \rightarrow \infty$ средние численности состояний стремятся к предельным значениям:

$$m_1 \rightarrow 3/5N \quad m_2 \rightarrow 2/5N.$$

Определим дисперсии численностей состояний:

$$D_1(t) = m_1(t) \left(1 - \frac{m_1(t)}{N} \right) = N \left(\frac{6}{25} + \frac{4}{25} e^{-5t} \right) (1 - e^{-5t}). \quad (1.27)$$

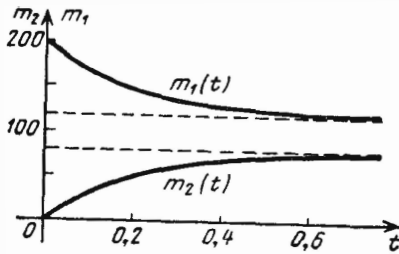


Рис. 6.4

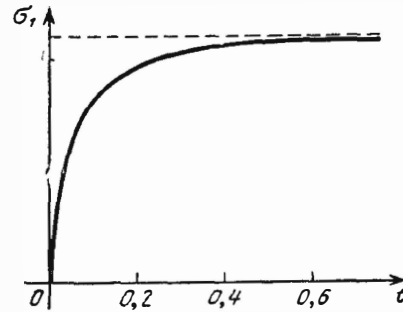


Рис. 6.5

Очевидно, дисперсия численности второго состояния будет такая же:

$$D_2(t) = D_1(t).$$

Средние квадратические отклонения численностей состояний равны:

$$\sigma_1(t) = \sigma_2(t) = \sqrt{N \left(\frac{6}{25} + \frac{4}{25} e^{-5t} \right) (1 - e^{-5t})}.$$

График функции $\sigma_1(t)$ показан на рис. 6.5.

2. УЧЕТ ЗАВИСИМОСТИ ИНТЕНСИВНОСТЕЙ ПОТОКОВ СОБЫТИЙ ОТ ЧИСЛЕННОСТЕЙ СОСТОЯНИЙ. ПРИНЦИП КВАЗИРЕГУЛЯРНОСТИ

До сих пор, применяя метод динамики средних, мы считали, что интенсивности потоков событий, переводящих элемент из состояния в состояние, нам заранее известны и не случайны. Тем самым предполагалось, что они не зависят от численностей состояний и, которые, как известно, случайны. Однако, на практике очень часто это бывает не так. Процессы, протекающие в системе элементов, чаще всего складываются так, что интенсивности потоков событий, переводящих элемент из состояния в состояние, зависят от того, сколько элементов в данном состоянии (да и в других состояниях) имеется в системе.

Например, в примере 2 предыдущего параграфа мы предполагали, что среднее время ремонта элемента (величина, обратно пропорцио-

нальная интенсивности потока ремонтов) не зависит от того, сколько элементов одновременно находится в ремонте. Это действительно так, если элементы настолько редко выходят из строя, что практически не может создаваться «затора» при их восстановлении. Если же это не так, необходимо учитывать тот факт, что время, требуемое на ремонт элемента, зависит от количества неисправных элементов, имеющих в наличии.

Действительно, рассмотрим систему S , состоящую из N однородных элементов — приборов, которые могут в случайные моменты выходить из строя и направляться в ремонт. Предположим, что ремонт осуществляется одной бригадой, имеющей вполне определенную пропускную способность (среднее количество ремонтов в единицу времени). Тогда время, которое каждый отдельный неисправный элемент пробудет в ремонте, зависит от общего числа ремонтируемых в данный момент элементов: чем это количество больше, тем больше, в среднем, пробудет в ремонте каждый отдельный элемент, и тем, следовательно, меньше будет интенсивность потока событий, переводящего каждый отдельный элемент из состояния «неисправен» в состояние «исправен». Таким образом, интенсивность потока событий, переводящего элемент из второго состояния в первое, зависит от численности первого состояния. Эта численность случайна — значит и интенсивность переводящего потока, строго говоря, будет случайной.

Другой пример. Пусть система S состоит из большого числа N автомашин, каждая из которых может быть в состоянии «исправна» или «неисправна». Парк автомашин выполняет вполне определенный круг работ, так что при большом количестве неисправных машин нагрузка, ложащаяся на исправные, увеличивается, и, значит, увеличивается интенсивность потоков событий, переводящих их в состояние «неисправна». Снова интенсивность потока событий зависит от численности состояния.

В общем случае (ниже мы увидим ряд таких примеров) интенсивности потоков событий, переводящих элемент из состояния в состояние, могут зависеть от численности не одного состояния, а сразу нескольких. В случае, когда интенсивности потоков событий зависят от численностей состояний (значит, случайны), мы уже не можем, как это было раньше, писать уравнения динамики средних, так как не знаем численностей состояний, определяющих интенсивности. Однако эту трудность можно обойти, если предположить, что интенсивности потоков событий, переводящих элемент из состояния в состояние, зависят не от самих численностей состояний, а от их средних значений (математических ожиданий) m_1, m_2, \dots, m_n .

Это допущение, которое мы, следуя И. Я. Динеру [13], будем называть «принципом квазирегулярности», позволит написать уравнения динамики средних и решить задачу (правда, не точно, а приближенно, потому что само это допущение — не точное, а приближенное).

Заметим, что допущение, о котором идет речь, приводит к существенным ошибкам только когда общее число элементов N в системе S сравнительно мало — тогда фактические численности состояний

могут сильно отличаться от своих математических ожиданий. Если же общее число элементов N велико, отклонение численности каждого состояния от среднего значения относительно мало, и метод динамики средних дает сравнительно малые погрешности.

Существенен также вид зависимости, связывающий интенсивности потоков событий с численностями состояний. Чем ближе эта зависимость к линейной (в области практически возможных значений аргументов), тем меньшую погрешность дает замена случайных численностей их средними значениями.

Поясним методику пользования принципом квазирегулярности на примерах.

Пример 1. Система S состоит из большого числа N однородных технических устройств, каждое из которых может быть в одном из двух состояний:

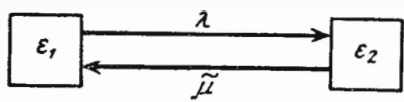


Рис. 6.6

\mathcal{E}_1 — исправно, работает,
 \mathcal{E}_2 — неисправно, ремонтируется.

На каждый элемент действует поток неисправностей с интенсивностью λ , не зависящей от численностей состояний. Ремонтом элемен-

тов занята группа рабочих в составе k человек ($k \ll N$). Каждый неисправный элемент ремонтируется одним рабочим (взаимопомощи между ними нет); каждый рабочий может ремонтировать в среднем μ элементов в единицу времени. В начальный момент ($t = 0$) все элементы исправны. Все потоки событий — пуассоновские (может быть, с переменной интенсивностью). Написать уравнения динамики средних для средних численностей состояний.

Решение. Граф состояний элемента (одного технического устройства) имеет вид, представленный на рис. 6.6, где $\tilde{\mu}$ — интенсивность потока ремонтов, приходящаяся на один ремонтируемый элемент.

Найдем зависимость $\tilde{\mu}$ от числа X_2 элементов, находящихся в данный момент в состоянии ремонта. Начнем с того, что определим, при данном X_2 , суммарную интенсивность M_Σ потока ремонтов, приходящегося на все элементы, которые находятся в состоянии \mathcal{E}_2 . Эта суммарная интенсивность есть функция числа элементов, находящихся в состоянии ремонта:

$$M_\Sigma = \varphi(X_2).$$

Так как рабочие работают без взаимопомощи и число их равно k , то суммарная интенсивность потока ремонтов с возрастанием числа ремонтируемых элементов растет по линейному закону (пропорционально числу ремонтируемых элементов) до тех пор, пока их число не достигнет k ; после этого все рабочие будут заняты, интенсивность M_Σ перестанет расти и останется равной μk :

$$M_\Sigma = \varphi(X_2) = \begin{cases} \mu X_2 & \text{при } X_2 \leq k, \\ \mu k & \text{при } X_2 > k. \end{cases} \quad (2.1)$$

Построим график функции $\varphi(X_2)$ (см. рис. 6.7). Она задана только в целочисленных точках; но при составлении уравнений динамики средних с использованием принципа квазирегулярности нам придется заменять случайное число X_2 элементов в состоянии ремонта его математическим ожиданием m_2 , а оно может быть и не целым. Поэтому нам нужно определить функцию φ и для нецелых значений аргумента. Для этого воспользуемся линейной интерполяцией и соединим точки на графике рис. 6.7 отрезками прямых.

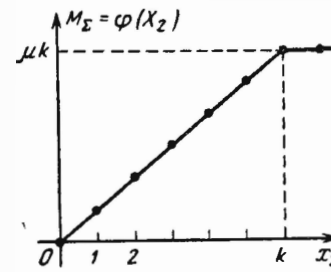


Рис. 6.7

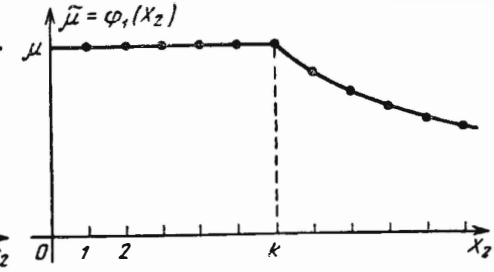


Рис. 6.8

Подсчитаем теперь, какова будет средняя интенсивность потока ремонтов, приходящаяся на один ремонтируемый элемент:

$$\tilde{\mu} = \varphi_1(X_2) = \frac{M_\Sigma}{X_2}.$$

Деля (2.1) на X_2 , получим:

$$\tilde{\mu} = \varphi_1(X_2) = \begin{cases} \mu & \text{при } X_2 \leq k, \\ \frac{\mu k}{X_2} & \text{при } X_2 > k. \end{cases} \quad (2.2)$$

График функции $\varphi_1(X_2)$ представлен на рис. 6.8. Эта кривая, как и $\varphi(X_2)$, состоит из двух участков. На первом (от 0 до k) она параллельна оси абсцисс, на втором — убывает по гиперболическому закону.

Теперь нам известна интенсивность потока событий $\lambda_{21} = \tilde{\mu}$, переводящего один элемент из состояния \mathcal{E}_2 в \mathcal{E}_1 . Она зависит от фактического (случайного) числа X_2 элементов, находящихся в состоянии \mathcal{E}_2 . Согласно принципу квазирегулярности, заменим это случайное число его математическим ожиданием m_2 . Тогда, на основе графа состояний (рис. 6.6), дифференциальные уравнения динамики средних запишутся в виде:

$$\frac{dm_1}{dt} = -\lambda m_1 + \varphi_1(m_2) m_2, \quad (2.3)$$

$$\frac{dm_2}{dt} = -\varphi_1(m_2) m_2 + \lambda m_1, \quad (2.4)$$

где m_1, m_2 — средние численности состояний $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2$.

Уравнения (2.3), (2.4) можно переписать в другом виде, если вспомнить, что

$$\varphi_1(X_2) = \frac{\varphi(X_2)}{X_2}; \quad \varphi_1(m_2) = \frac{\varphi(m_2)}{m_2}.$$

Получим два уравнения:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dm_1}{dt} &= -\lambda m_1 + \varphi(m_2), \\ \frac{dm_2}{dt} &= -\varphi(m_2) + \lambda m_1. \end{aligned} \right\} \quad (2.5)$$

Из этих двух уравнений мы можем выбрать одно — например, второе, первое отбросить и во второе подставить выражение m_1 из условия:

$$m_1 + m_2 = N; \quad m_1 = N - m_2.$$

Получим вместо (2.5) одно дифференциальное уравнение:

$$\frac{dm_2}{dt} = -\varphi(m_2) + \lambda(N - m_2).$$

Это — уравнение с разделяющимися переменными:

$$\frac{dm_2}{\lambda(N - m_2) - \varphi(m_2)} = dt.$$

Интегрируя правую часть от 0 до t , а левую — от 0 до m_2 (начальное значение m_2 равно нулю), имеем:

$$\int_0^{m_2} \frac{dm_2}{\lambda(N - m_2) - \varphi(m_2)} = t. \quad (2.6)$$

Учитывая, что функция $\varphi(m_2)$ задана двумя разными выражениями при $m_2 \leq k$ и при $m_2 > k$, имеем:

$$\begin{aligned} t &= \int_0^{m_2} \frac{dm_2}{\lambda(N - m_2) - \mu m_2} = \int_0^{m_2} \frac{dm_2}{\lambda N - (\lambda + \mu)m_2} = \\ &= -\frac{1}{\lambda + \mu} \ln \frac{\lambda N - (\lambda + \mu)m_2}{\lambda N}, \end{aligned}$$

откуда

$$m_2 = \frac{\lambda N}{\lambda + \mu} [1 - e^{-(\lambda + \mu)t}]. \quad (2.7)$$

При $m_2 > k$

$$t = \int_0^k \frac{dm_2}{\lambda N - (\lambda + \mu)m_2} + \int_k^{m_2} \frac{dm_2}{\lambda N - k\mu - \lambda m_2}.$$

Первый интеграл равен:

$$-\frac{1}{\lambda + \mu} \ln \frac{\lambda N - (\lambda + \mu)k}{\lambda N}.$$

Вычисляем второй интеграл:

$$\begin{aligned} \int_k^{m_2} \frac{dm_2}{\lambda N - k\mu - \lambda m_2} &= -\frac{1}{\lambda} \ln (\lambda N - k\mu - \lambda m_2) \Big|_k^{m_2} = \\ &= -\frac{1}{\lambda} \ln \frac{\lambda N - k\mu - \lambda m_2}{\lambda N - k(\lambda + \mu)}. \end{aligned}$$

Следовательно, при $m_2 > k$

$$t = -\frac{1}{\lambda + \mu} \ln \frac{\lambda N - (\lambda + \mu)k}{\lambda N} - \frac{1}{\lambda} \ln \frac{\lambda N - k\mu - \lambda m_2}{\lambda N - k(\lambda + \mu)},$$

откуда

$$m_2 = N - k \frac{\mu}{\lambda} - \frac{N - k \frac{\lambda + \mu}{\lambda}}{\left[1 - \frac{\lambda + \mu}{\lambda N} k\right]^{\lambda/(\lambda + \mu)}} e^{-\lambda t}. \quad (2.8)$$

Формулой (2.7) величина m_2 будет выражаться при

$$t \leq -\frac{1}{\lambda + \mu} \ln \frac{\lambda N - (\lambda + \mu)k}{\lambda N} = \frac{1}{\lambda + \mu} \ln \frac{\lambda N}{\lambda N - (\lambda + \mu)k},$$

а формулой (2.8) — при больших значениях t .

Пример 2. Условия те же, что и в примере 1, с той разницей, что k рабочих, ремонтирующих вышедшие из строя элементы, помогают друг другу, так что k рабочих осуществляют ремонт одного элемента в среднем в k раз скорей, чем один рабочий.

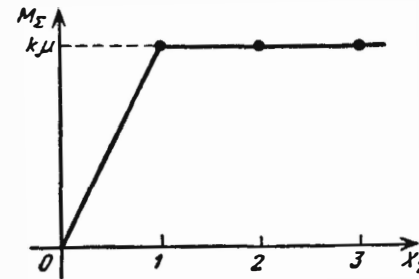


Рис. 6.9

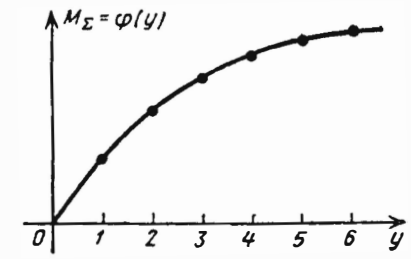


Рис. 6.10

Требуется построить для этих условий функцию $M_\Sigma = \varphi(X_2)$ (суммарную интенсивность потока ремонтов), функцию $\mu = \varphi_1(X_2)$ (интенсивность потока ремонтов, приходящуюся на один ремонтируемый элемент) и составить дифференциальные уравнения для средних численностей состояний (уравнения динамики средних).

Решение. График зависимости M_{Σ} от числа ремонтируемых элементов X_2 представлен на рис. 6.9. Действительно, при любом целом положительном числе элементов, находящихся в состоянии \mathcal{E}_2 ($X_2 = 1, 2, 3, \dots$), все рабочие, работая одновременно над ремонтом этих элементов, порождают один поток ремонтов с интенсивностью $k\mu$; они как бы эквивалентны одному «сверхрабочему» с производительностью, в k раз большей (см. § 9 гл. 5). Таким образом, чтобы решить поставленную задачу, достаточно в условиях примера 1 положить $k = 1$, а вместо μ — подставить $k\mu$.

В реальных условиях зависимость суммарной интенсивности потока ремонтов M_{Σ} от числа ремонтируемых элементов может быть и не такой простой, как в рассмотренных двух примерах — она может зависеть от особенностей организации ремонтов в бригаде, от очередности обслуживания элементов, от емкости ремонтных мастерских, и т. д. Может оказаться, что для установления вида функции $M_{\Sigma} = \varphi(X_2)$

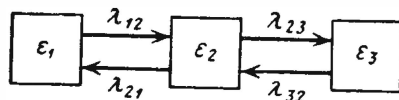


Рис. 6.11

придется делать специальное исследование, например, рассматривая ремонтную бригаду как систему массового обслуживания и строя для нее математическую модель.

Пример 3. Рассматривается система, состоящая из $N = 100$ одинаковых приборов; каждый прибор состоит из двух одинаковых узлов: один основной, второй резервный. В случае выхода из строя основного узла в работу включается резервный. При выходе из строя обоих узлов выходит из строя и перестает работать весь прибор. Поток неисправностей, действующий на работающий узел, имеет интенсивность λ_1 ; на неработающий (исправный) — λ_2 . Вышедшие из строя узлы ремонтируются бригадой рабочих. Суммарная интенсивность потока ремонтов бригады, в зависимости от общего числа ремонтируемых узлов y , задана функцией

$$M_{\Sigma} = \varphi(y).$$

Вид функции $\varphi(y)$ представлен на рис. 6.10.

Отдельный прибор (элемент) может находиться в следующих состояниях:

\mathcal{E}_1 — исправны оба узла, первый работает, второй в резерве,

\mathcal{E}_2 — первый узел неисправен, ремонтируется, второй узел работает; прибор работает,

\mathcal{E}_3 — оба узла неисправны, ремонтируются; прибор не работает.

Вышедшие из строя узлы ремонтируются независимо от того, является ли узел основным или запасным (ремонты распределяются по узлам равномерно). После исправления вышедшего из строя узла он становится резервным, если другой не вышел из строя, и основным — если вышел.

Написать уравнения динамики средних.

Решение. Граф состояний элемента (прибора) имеет вид, показанный на рис. 6.11.

Определим интенсивности потоков событий, переводящих элемент из состояния в состояние. Прежде всего,

$$\lambda_{12} = \lambda_1 + \lambda_2.$$

Действительно, пока прибор работает нормально, на оба узла действуют потоки неисправностей: на работающий — с интенсивностью λ_1 , на неработающий — с интенсивностью λ_2 . На прибор в целом действует поток с суммарной интенсивностью $\lambda_1 + \lambda_2$.

Далее, из состояния \mathcal{E}_2 в \mathcal{E}_3 прибор переходит под действием потока неисправностей, приходящегося на единственный работающий узел:

$$\lambda_{23} = \lambda_1.$$

Обратно, из состояния \mathcal{E}_2 в \mathcal{E}_1 , прибор переводит поток ремонтов, приходящийся на один ремонтируемый узел. Общее число узлов, находящихся в ремонте, равно

$$y = X_2 + 2X_3.$$

Действительно, на каждый прибор, находящийся в состоянии \mathcal{E}_2 , приходится один неисправный узел; на каждый прибор в состоянии \mathcal{E}_3 — два неисправных узла.

Суммарная интенсивность потока ремонтов будет:

$$M_{\Sigma} = \varphi(y) = \varphi(X_2 + 2X_3).$$

Эта интенсивность делится поровну между всеми ремонтируемыми узлами, так что на один узел приходится интенсивность потока ремонтов, равная

$$\tilde{\mu} = \frac{\varphi(X_2 + 2X_3)}{X_2 + 2X_3}.$$

Следовательно, истинная интенсивность потока ремонтов, приходящаяся на один элемент в состоянии \mathcal{E}_2 , равна:

$$\lambda_{21} = \frac{\varphi(X_2 + 2X_3)}{X_2 + 2X_3}.$$

Аналогично определим λ_{32} . В состоянии \mathcal{E}_3 прибор имеет два неисправных узла; на каждый из них приходится поток ремонтов с интенсивностью

$$\frac{\varphi(X_2 + 2X_3)}{X_2 + 2X_3},$$

а на оба — поток с интенсивностью, вдвое большей:

$$\frac{2\varphi(X_2 + 2X_3)}{X_2 + 2X_3}.$$

Согласно принципу квазирегулярности, заменяем случайные аргументы X_2 и X_3 их математическими ожиданиями m_2 и m_3 ; получим:

$$\lambda_{21} \approx \frac{\varphi(m_2 + 2m_3)}{m_2 + 2m_3}; \quad \lambda_{32} \approx \frac{2\varphi(m_2 + 2m_3)}{m_2 + 2m_3}.$$

Таким образом, можно проставить на графе состояний все интенсивности и, согласно общему правилу, записать уравнения динамики средних. Из трех уравнений (для m_1 , m_2 и m_3) пишем первое и последнее — второе отбрасываем:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dm_1}{dt} &= -(\lambda_1 + \lambda_2) m_1 + \frac{\varphi(m_2 + 2m_3) m_2}{m_2 + 2m_3}, \\ \frac{dm_3}{dt} &= -\frac{2\varphi(m_2 + 2m_3) m_3}{m_2 + 2m_3} + \lambda_1 m_2. \end{aligned} \right\} \quad (2.9)$$

Из условия

$$m_1 + m_2 + m_3 = N$$

выражаем m_2 через m_1 и m_3 :

$$m_2 = N - m_1 - m_3$$

и подставляем в первое и второе уравнения (2.9):

$$\left. \begin{aligned} \frac{dm_1}{dt} &= -(\lambda_1 + \lambda_2) m_1 + \frac{\varphi(N - m_1 + m_3)(N - m_1 - m_3)}{N - m_1 + m_3}, \\ \frac{dm_3}{dt} &= -\frac{2\varphi(N - m_1 + m_3) m_3}{N - m_1 + m_3} + \lambda_1(N - m_1 - m_3). \end{aligned} \right\} \quad (2.10)$$

Полученную систему двух нелинейных дифференциальных уравнений с неизвестными функциями m_1 , m_3 можно решать на машине или вручную (численно).

Таким образом, пользуясь принципом квазирегулярности, можно написать уравнения динамики средних, в которых неизвестными функциями являются средние численности состояний; эти уравнения приближенно описывают изменение средних численностей состояний даже в случае, когда интенсивности потоков событий, переводящих элемент из состояния в состояние, зависят от численностей состояний и, значит, являются случайными. Погрешность, с которой уравнения динамики средних описывают процесс, тем меньше, чем более многочисленна группа элементов и чем ближе к линейным функции, выражающие интенсивности потоков событий в зависимости от численностей состояний.

Возникает вопрос: а нельзя ли, пользуясь тем же методом, что в § 1, приближенно определить не только математические ожидания, но и дисперсии средних численностей состояний? Мы видели, что в случае, когда отдельные элементы переходили из состояния в состояние независимо друг от друга (т. е. интенсивности потоков событий, переводящих элементы из состояния в состояние вовсе не зависели от численностей состояний), дисперсии численностей состояний находились просто по формуле:

$$D_k(t) = m_k(t) \left(1 - \frac{m_k(t)}{N} \right). \quad (2.11)$$

Исследования показывают, что в случае, когда интенсивности потоков событий зависят от численностей состояний, этой формулой, вообще говоря, нельзя пользоваться. Она оказывается пригодной только в случаях, когда зависимость интенсивностей потоков событий от численностей очень слабая (почти пренебрежимая), да и то на сравнительно малых участках времени, пока не накопилась погрешность. Если же зависимость интенсивностей от численностей существенна, формула (2.11) дает ошибку. Если функции, выражающие суммарные интенсивности потоков (как например, функция φ в примере 1) выпуклы вверх, то формула (2.11) дает заниженное значение для дисперсии: дисперсия, вычисляемая по этой формуле, может быть, скажем, вдвое меньше истинной (а иногда — и более, чем вдвое).

Приближенно найти дисперсии численностей состояний можно, выписывая и решая специальные дифференциальные уравнения уже не для математических ожиданий, а для дисперсий $D_k(t)$ и корреляционных моментов $K_{ki}(t)$, характеризующих связь между численностями состояний \mathcal{E}_k , \mathcal{E}_i . Эти уравнения в каком-то смысле аналогичны уравнениям динамики средних, составляемым на базе принципа квазирегулярности, но гораздо сложнее их и не обладают той же наглядностью. Число уравнений и число неизвестных в этих уравнениях равно числу дисперсий плюс число попарных корреляций между численностями X_1, X_2, \dots, X_n , т. е.

$$n + \frac{n(n-1)}{2} = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Кроме дисперсий $D_k(t)$ и корреляционных моментов $K_{ki}(t)$, в уравнения для них входят еще и n функций $m_1(t), m_2(t), \dots, m_n(t)$ — средних численностей состояний, которые предполагаются уже определенными из уравнений динамики средних. Уравнения для дисперсий $D_k(t)$ и корреляционных моментов $K_{ki}(t)$ оказываются относительно самих этих переменных линейными, хотя математические ожидания численностей $m_k(t)$ входят в них нелинейно.

В виду сравнительной сложности вопроса, мы не рассматриваем методику построения системы уравнений для дисперсий и корреляционных моментов (для частного случая эти уравнения описаны в статье [22]).

3. УЧЕТ ПОПОЛНЕНИЯ ЧИСЛЕННОСТЕЙ СОСТОЯНИЙ

До сих пор мы применяли метод динамики средних к решению только таких задач, где система была замкнутой, т. е. количество элементов N , участвующих в процессе, оставалось неизменным. На практике нередко встречаются задачи, где в ходе процесса численности элементов, находящихся в каких-то состояниях, пополняются и vice versa. Это пополнение очень легко учесть в уравнениях динамики средних.

Рассмотрим в качестве примера систему S , состоящую из N однородных элементов. Граф состояний элемента показан на рис. 6.12.

Интенсивности λ_{ij} в общем случае зависят от численностей состояний X_1, X_2, X_3, X_4 (при составлении дифференциальных уравнений эти численности заменяются средними численностями m_1, m_2, m_3, m_4).

Если пополнения состава численностей состояний в ходе процесса не происходит, то уравнения динамики средних будут:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dm_1}{dt} &= -(\lambda_{12} + \lambda_{13}) m_1 + \lambda_{21} m_2, \\ \frac{dm_2}{dt} &= -(\lambda_{21} + \lambda_{23} + \lambda_{24}) m_2 + \lambda_{12} m_1, \\ \frac{dm_3}{dt} &= \lambda_{13} m_1 + \lambda_{23} m_2 + \lambda_{43} m_4, \\ \frac{dm_4}{dt} &= -\lambda_{43} m_4 + \lambda_{24} m_2, \end{aligned} \right\} (3.1)$$

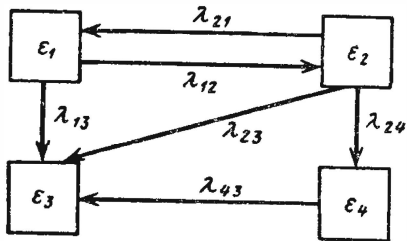


Рис. 6.12

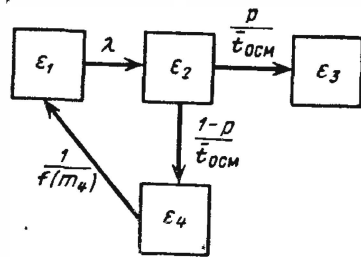


Рис. 6.13

причем любое из этих уравнений может быть отброшено, и соответствующая переменная выражена из условия:

$$m_1 + m_2 + m_3 + m_4 = N. (3.2)$$

Теперь предположим, что контингент элементов, находящихся в одном из состояний (например, \mathcal{E}_1) пополняется извне, причем интенсивность пополнения, т. е. число элементов, вводимых в единицу времени в состояние \mathcal{E}_1 , равна δ (в случае, если за единицу времени вводится случайное число единиц, интенсивностью пополнения будет называться среднее число единиц, вводимых извне за единицу времени). Величина δ может быть как постоянной, так и переменной, как зависящей, так и не зависящей от средних численностей состояний.

При наличии пополнения первое уравнение системы (3.1) изменится; в правой части его появится слагаемое, равное пополнению δ :

$$\frac{dm_1}{dt} = -(\lambda_{12} + \lambda_{13}) m_1 + \lambda_{21} m_2 + \delta, (3.3)$$

а остальные уравнения останутся такими, как были.

Заметим, что условие (3.2) также изменится. Раньше в любой момент времени сумма всех средних численностей была равна одной и той

же величине N ; теперь она будет равна изменяющейся со временем численности

$$N(t) = N_0 + \int_0^t \delta(t) dt, (3.4)$$

где N_0 — начальное значение численности элементов.

Таким образом, учет пополнения численностей состояний сводится к тому, что к правой части соответствующего дифференциального уравнения прибавляется слагаемое, равное интенсивности пополнения — среднему числу элементов, вводимых в данное состояние за единицу времени.

Пример 1. Рассматривается система, состоящая (в начальный момент) из N_0 однородных технических устройств (приборов), каждый из которых может быть в одном из следующих состояний:

- \mathcal{E}_1 — исправен;
- \mathcal{E}_2 — неисправен, осматривается;
- \mathcal{E}_3 — признан негодным, списан;
- \mathcal{E}_4 — ремонтируется.

Соответствующие средние численности обозначим m_1, m_2, m_3, m_4 . Граф состояний элемента показан на рис. 6.13.

Интенсивность потока неисправностей работающего прибора равна λ . Среднее время осмотра не зависит от числа осматриваемых приборов и равно $\bar{t}_{осм}$. Неисправный прибор оказывается негодным и списывается с вероятностью p , а с вероятностью $1 - p$ направляется в ремонт. Среднее время, которое прибор проводит в состоянии ремонта, $\bar{t}_{рем}$ есть некоторая функция от числа x приборов, одновременно находящихся в ремонте:

$$\bar{t}_{рем} = f(x).$$

Чтобы скомпенсировать убыль приборов в результате списания, производится пополнение численности приборов извне (исправными приборами), причем за единицу времени в систему вводится в среднем $\delta = \delta(t)$ исправных приборов.

Требуется:

- написать уравнения динамики средних с учетом пополнения,
- определить, какова должна быть функция $\delta(t)$ для того, чтобы списание приборов в среднем было скомпенсировано,
- написать формулу для суммарного числа элементов $N(t)$, находящихся во всех состояниях к моменту t .

Решение. На графе рис. 6.13 проставляем интенсивности потоков событий. Интенсивность λ_{41} приближенно принимаем обратно пропорциональной среднему времени ремонта (строго говоря, это верно только для стационарного пуассоновского потока):

$$\lambda_{41} = \frac{1}{f(X_4)}$$

Заменяя истинную численность ремонтируемых приборов X_4 ее математическим ожиданием m_4 , получим:

$$\lambda_{41} \approx \frac{\dot{1}}{f(m_4)}.$$

Система дифференциальных уравнений динамики средних будет:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dm_1}{dt} &= -\lambda m_1 + \frac{m_4}{f(m_4)} + \delta, \\ \frac{dm_2}{dt} &= -\frac{m_2}{\bar{t}_{\text{осм}}} + \lambda m_1, \\ \frac{dm_3}{dt} &= \frac{\rho m_2}{\bar{t}_{\text{осм}}}, \\ \frac{dm_4}{dt} &= -\frac{m_4}{f(m_4)} + \frac{(1-\rho)m_2}{\bar{t}_{\text{осм}}} \end{aligned} \right\}$$

Заметим, что в данном случае мы не можем так просто отбросить любое из уравнений, как в случае без пополнения, так как условие (3.2) видоизменяется; общее число элементов в системе зависит от времени и равно:

$$N(t) = N_0 + \int_0^t \delta(t) dt. \quad (3.5)$$

Для того чтобы в среднем скомпенсировать списываемые приборы, интенсивность пополнения должна быть равна среднему числу приборов, списываемых за единицу времени. Всего в единицу времени списывается (переходит из состояния \mathcal{E}_2 в \mathcal{E}_3) в среднем

$$\frac{\rho}{\bar{t}_{\text{осм}}} m_2$$

приборов; значит, мы должны положить:

$$\delta = \frac{\rho}{\bar{t}_{\text{осм}}} m_2.$$

При такой интенсивности пополнения система уравнений динамики средних примет вид:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dm_1}{dt} &= -\lambda m_1 + \frac{1}{f(m_4)} m_4 + \frac{\rho}{\bar{t}_{\text{осм}}} m_2, \\ \frac{dm_2}{dt} &= -\frac{1}{\bar{t}_{\text{осм}}} m_2 + \lambda m_1, \\ \frac{dm_3}{dt} &= \frac{\rho}{\bar{t}_{\text{осм}}} m_2, \\ \frac{dm_4}{dt} &= -\frac{1}{f(m_4)} m_4 + \frac{1-\rho}{\bar{t}_{\text{осм}}} m_2. \end{aligned} \right\} \quad (3.6)$$

Из числа уравнений (3.6) можно безболезненно исключить третье, так как величина m_3 не входит ни в одну правую часть. Величину m_3 в условиях данного примера можно вычислить очень просто: для каждого момента t она равна суммарному числу вновь поступивших приборов (так как все списанные в среднем компенсируются) и, значит,

$$m_3 = \frac{\rho}{\bar{t}_{\text{осм}}} \int_0^t m_2(t) dt.$$

В данном примере 1 пополнение вводилось только в одно состояние; вообще, это может быть и не так (например, можно вводить пополнение неисправными приборами, которые должны ремонтироваться местными средствами). Заметим, кроме того, что функции пополнения могут иметь как положительные, так и отрицательные значения (убыль элементов).

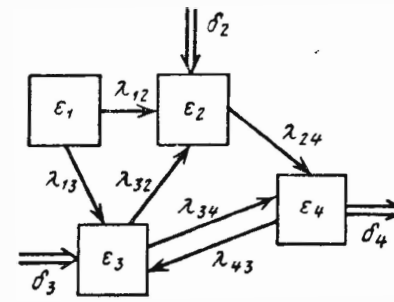


Рис. 6.14

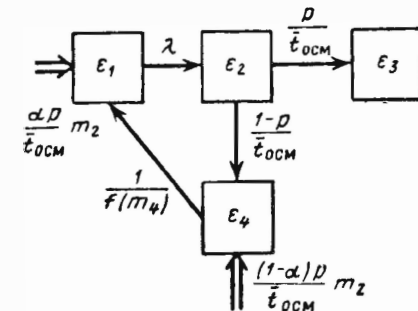


Рис. 6.15

Пополнения, вводимые в состояния, иногда бывает удобно изображать наглядно, на графе состояний (рис. 6.14). Условимся изображать их «полустрелками», не идущими ни из какого состояния, а в случае «убыли» — не направленными ни в какое состояние (для наглядности полустрелки, в отличие от стрелок, будем делать двойными). Размечая граф интенсивностями потоков событий, против полустрелок будем писать не интенсивность, приходящуюся на один элемент, а интенсивность приходящуюся на систему в целом (это делается для того, чтобы избежать ненужного деления и умножения на одно и то же число).

Пример 2. В условиях примера 1 пополнение численностей относится к двум состояниям: \mathcal{E}_1 (исправные приборы) и \mathcal{E}_4 (ремонтруемые приборы), причем некоторая доля α вновь поставляемых приборов дается исправными, а доля $(1-\alpha)$ — неисправными; последние сразу же начинают ремонтироваться. Как и в предыдущем примере, суммарное пополнение в единицу времени равно $\frac{\rho}{\bar{t}_{\text{осм}}} m_2$.

Построить граф состояний, отразив на нем пополнение, написать уравнения динамики средних, определить общее среднее количество элементов в системе $N(t)$ как функцию времени.

Решение. Граф состояний показан на рис. 6.15; полустрелки, направленные в состояния $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_4$, изображают пополнение. Уравнения динамики средних имеют вид:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dm_1}{dt} &= -\lambda m_1 + \frac{1}{f(m_4)} m_4 + \frac{\alpha p}{\bar{t}_{\text{осм}}} m_2, \\ \frac{dm_2}{dt} &= -\frac{1}{\bar{t}_{\text{осм}}} m_2 + \lambda m_1, \\ \frac{dm_3}{dt} &= \frac{p}{\bar{t}_{\text{осм}}} m_2, \\ \frac{dm_4}{dt} &= -\frac{1}{f(m_4)} m_4 + \frac{1-p}{\bar{t}_{\text{осм}}} m_2 + \frac{(1-\alpha)p}{\bar{t}_{\text{осм}}} m_2. \end{aligned} \right\} (3.7)$$

Из них по-прежнему удобнее всего исключить третье уравнение и выразить m_3 как

$$m_3 = \frac{p}{\bar{t}_{\text{осм}}} \int_0^t m_2 dt.$$

Общее суммарное число элементов в системе меняется во времени согласно формуле:

$$N(t) = N_0 + \frac{p}{\bar{t}_{\text{осм}}} \int_0^t m_2 dt = N_0 + m_3.$$

4. МЕТОД ДИНАМИКИ СРЕДНИХ ДЛЯ СИСТЕМЫ, СОСТОЯЩЕЙ ИЗ НЕОДНОРОДНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

До сих пор мы применяли метод динамики средних к системам, состоящим из однородных элементов. Однако, без принципиальных изменений, он может быть применен и к системам, состоящим из неоднородных элементов разных категорий — разница будет только в том, что число дифференциальных уравнений увеличится. Если число категорий и состояний не слишком велико, решение задачи трудностей не вызывает.

Пример. В автохозяйстве имеется N^r грузовых и N^l легковых автомашин. Каждая грузовая машина может быть в одном из следующих состояний:

- Γ_1 — ожидает вызова на базе,
- Γ_2 — совершает порожний рейс к месту погрузки,
- Γ_3 — совершает рейс с грузом,
- Γ_4 — совершает порожний рейс обратно на базу,

Γ_5 — проходит профилактический осмотр,

Γ_6 — ремонтируется.

Каждая легковая машина может быть в одном из следующих состояний:

Λ_1 — ожидает вызова на базе,

Λ_2 — совершает рейс,

Λ_3 — проходит профилактический осмотр,

Λ_4 — ремонтируется.

На базу поступают пуассоновские потоки заявок на грузовые и легковые машины, интенсивности которых λ^r и λ^l не зависят от числа свободных машин на базе. Пришедшие заявки распределяются равномерно между всеми машинами данной категории, ожидающими вызова. В случае, если на базе нет ни одной свободной машины данной категории, заявка получает отказ (переадресуется на другую базу).

На профилактический осмотр берутся только машины, находящиеся в состояниях Γ_1, Λ_1 . Средняя интенсивность потока профилактических осмотров грузовой машины равна $\lambda_{\text{проф}}^r$, легковой $\lambda_{\text{проф}}^l$. Осмотры проводятся специализированной бригадой; суммарный поток осмотров имеет интенсивность

$$A_{\Sigma} = a(1 - e^{-y}), \quad (4.1)$$

где y — число машин (грузовых и легковых вместе), проходящих осмотр.

Средняя длительность профилактического осмотра грузовой и легковой машины одинакова и равна $\bar{t}_{\text{осм}}$. Средняя длительность порожнего рейса (к месту погрузки или к автобазе) равна $\bar{t}_{\text{пор}}^r$. Средняя длительность груженого рейса равна $\bar{t}_{\text{гр}}^r$. Средняя длительность рейса легковой машины равна \bar{t}^l .

Из профилактического осмотра грузовая машина с вероятностью p^r идет в ремонт, а с вероятностью $1 - p^r$ — обратно в состояние Γ_1 . Аналогичные вероятности для легковых машин равны p^l и $1 - p^l$.

Ремонт как грузовых, так и легковых машин производится ремонтной бригадой; суммарный поток ремонтов, производимый бригадой, имеет интенсивность

$$B_{\Sigma} = b(1 - e^{-x}), \quad (4.2)$$

где x — число машин (грузовых и легковых вместе), одновременно находящихся в ремонте.

Кроме состояния профилактического осмотра, машины могут поступать в ремонт непосредственно из рейса. Интенсивность потока неисправностей одной грузовой машины в состоянии порожнего рейса равна $\nu_{\text{пор}}^r$, в состоянии груженого рейса — $\nu_{\text{гр}}^r$. Интенсивность потока неисправностей легковой машины, находящейся в рейсе, равна ν^l .

Требуется:

- составить граф состояний элементов системы,
- написать дифференциальные уравнения для средних численностей состояний.

Решение. Вводим обозначения:

m_1^r — среднее число грузовых машин, ожидающих вызова в момент t ;

m_2^r — среднее число грузовых машин, совершающих порожний рейс к месту погрузки;

m_3^r — среднее число грузовых машин, совершающих груженный рейс;

m_4^r — среднее число грузовых машин, возвращающихся порожняком на базу;

m_5^r — среднее число грузовых машин, проходящих профилактический осмотр;

m_6^r — среднее число ремонтируемых грузовых машин;

m_1^n — среднее число легковых машин, ожидающих вызова;

m_2^n — среднее число легковых машин, совершающих рейс;

m_3^n — среднее число легковых машин, проходящих профилактический осмотр;

m_4^n — среднее число ремонтируемых легковых машин.

Граф состояний системы, распадающийся на два подграфа — Γ и Π , показан на рис. 6.16.

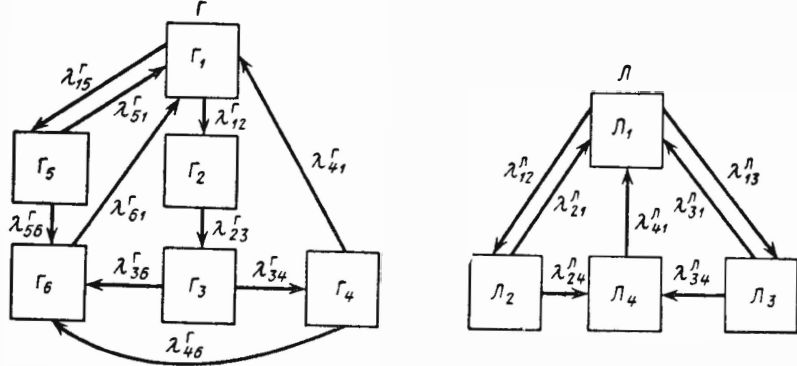


Рис. 6.16

Определим теперь интенсивности $\lambda_{ij}^r, \lambda_{ij}^n$ потоков событий, переводящих элементы (грузовые и легковые машины) из состояния в состояние. Некоторые из этих интенсивностей зависят от численностей состояний, другие не зависят. Для первых мы, при составлении дифференциальных уравнений, согласно принципу квазирегулярности, заменим численности состояний, от которых они зависят, средними численностями.

Найдем λ_{12}^r — интенсивность потока событий, переводящего грузовую машину, ожидающую вызова, в состояние Γ_2 — рейс к месту погрузки. Вызовы грузовых машин, по условиям задачи, образуют поток с интенсивностью λ^r ; но вызов принимается только тогда, когда в состоянии Γ_1 есть хотя бы одна машина. Поэтому интенсивность потока принятых вызовов $\lambda_{пр}^r$ (а только такие вызовы могут пере-

водить грузовую машину из состояния Γ_1 в Γ_2) зависит от числа X_1^r машин в состоянии Γ_1 следующим образом:

$$\lambda_{пр}^r = \begin{cases} \lambda^r & \text{при } X_1^r \geq 1, \\ 0 & \text{при } X_1^r = 0. \end{cases} \quad (4.3)$$

Эта функция такого же вида, как нам встречалась уже ранее, в примере 2 § 2, и встретится еще не раз в следующих примерах. Поэтому мы сейчас введем две функции, которые в дальнейшем будут обозначаться всегда одинаково: $R(x)$ и $\rho(x)$ (ими мы будем пользоваться во многих конкретных задачах динамики средних).

Определим функцию $R(x)$ следующим образом:

$$R(x) = \begin{cases} x & \text{при } x \leq 1; \\ 1 & \text{при } x > 1. \end{cases} \quad (4.4)$$

График этой функции представлен на рис. 6.17.

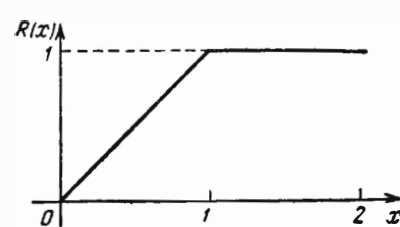


Рис. 6.17

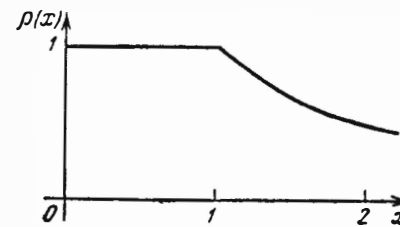


Рис. 6.18

Функцию $\rho(x)$ определим формулой:

$$\rho(x) = \frac{R(x)}{x} = \begin{cases} 1 & \text{при } x \leq 1, \\ \frac{1}{x} & \text{при } x > 1. \end{cases} \quad (4.5)$$

График функции $\rho(x)$ изображен на рис. 6.18.

При помощи функции $R(x)$ интенсивность $\lambda_{пр}^r$ потока принятых вызовов грузовых машин записывается так:

$$\lambda_{пр}^r = \lambda^r R(X_1^r). \quad (4.6)$$

Теперь вычислим интенсивность λ_{12}^r потока событий, переводящих отдельную грузовую машину из состояния Γ_1 в Γ_2 (см. рис. 6.16):

$$\lambda_{12}^r = \frac{\lambda_{пр}^r}{X_1^r} = \lambda^r \frac{R(X_1^r)}{X_1^r} = \lambda^r \rho(X_1^r). \quad (4.7)$$

Далее найдем другие интенсивности. Имеем:

$$\lambda_{23}^r = 1/\bar{t}_{пор}^r; \quad \lambda_{34}^r = 1/\bar{t}_{гр}^r; \quad \lambda_{41}^r = 1/\bar{t}_{пор}^r; \quad \lambda_{15}^r = \lambda_{проф}^r. \quad (4.8)$$

Теперь определим интенсивность λ_{51}^r потока событий, переводящего элемент (грузовую машину), находящийся в состоянии Γ_5 (про-

филактической осмотр), в состоянии Γ_1 . Эту интенсивность вычислим следующим образом. Суммарная интенсивность потока осмотров, который производит бригада, согласно формуле (4.1), равна:

$$A_{\Sigma} = a [1 - e^{-(X_5^{\Gamma} + X_3^{\Delta})}]. \quad (4.9)$$

Эту интенсивность нужно поровну разделить между всеми машинами, находящимися в состояниях Γ_5 и Δ_3 ; получится

$$\frac{a [1 - e^{-(X_5^{\Gamma} + X_3^{\Delta})}]}{X_5^{\Gamma} + X_3^{\Delta}} \quad (\text{осмотров в единицу времени}). \quad (4.10)$$

Но это еще не все: ведь в состояние Γ_1 переходит не каждая машина, прошедшая осмотр, а только какая-то часть из них. Чтобы получить из (4.10) интенсивность λ_{51}^{Γ} , нужно умножить (4.10) на $(1 - p^{\Gamma})$ — вероятность того, что машина из профилактического ремонта вернется в состояние Γ_1 ; получим:

$$\lambda_{51}^{\Gamma} = \frac{a(1 - p^{\Gamma}) [1 - e^{-(X_5^{\Gamma} + X_3^{\Delta})}]}{X_5^{\Gamma} + X_3^{\Delta}}. \quad (4.11)$$

Аналогично находим:

$$\lambda_{56}^{\Gamma} = \frac{ap^{\Gamma} [1 - e^{-(X_5^{\Gamma} + X_3^{\Delta})}]}{X_5^{\Gamma} + X_3^{\Delta}}. \quad (4.12)$$

Интенсивность потока ремонтов, переводящих элемент из состояния Γ_6 в Γ_1 , выразится формулой:

$$\lambda_{61}^{\Gamma} = \frac{b [1 - e^{-(X_6^{\Gamma} + X_4^{\Delta})}]}{X_6^{\Gamma} + X_4^{\Delta}}, \quad (4.13)$$

где X_6^{Γ} , X_4^{Δ} — численности ремонтируемых в данное время грузовых и легковых машин.

Из состояний Γ_2 , Γ_3 , Γ_4 в состояние Γ_6 (ремонт) элемент переводится потоками событий с интенсивностями, соответственно равными:

$$\lambda_{26}^{\Gamma} = \nu_{пор}^{\Gamma}; \quad \lambda_{36}^{\Gamma} = \nu_{rp}^{\Gamma}; \quad \lambda_{46}^{\Gamma} = \nu_{пор}^{\Gamma}. \quad (4.14)$$

Аналогично определяем интенсивности потоков событий для второго подграфа (легковые машины):

$$\lambda_{12}^{\Delta} = \lambda^{\Delta} \rho (X_1^{\Delta}), \quad (4.15)$$

$$\lambda_{21}^{\Delta} = \frac{1}{t^{\Delta}}, \quad (4.16)$$

$$\lambda_{13}^{\Delta} = \lambda_{проф}^{\Delta}, \quad (4.17)$$

$$\lambda_{31}^{\Delta} = \frac{a(1 - p^{\Delta}) [1 - e^{-(X_5^{\Gamma} + X_3^{\Delta})}]}{X_5^{\Gamma} + X_3^{\Delta}}, \quad (4.18)$$

$$\lambda_{34}^{\Delta} = \frac{ap^{\Delta} [1 - e^{-(X_5^{\Gamma} + X_3^{\Delta})}]}{X_5^{\Gamma} + X_3^{\Delta}}, \quad (4.19)$$

$$\lambda_{24}^{\Delta} = \nu^{\Delta}, \quad (4.20)$$

$$\lambda_{41}^{\Delta} = \frac{b [1 - e^{-(X_6^{\Gamma} + X_4^{\Delta})}]}{X_6^{\Gamma} + X_4^{\Delta}}. \quad (4.21)$$

Таким образом, все интенсивности потоков событий для обоих подграфов рис. 6.16 найдены.

Заменяя в них численности состояний средними численностями, напишем систему дифференциальных уравнений динамики средних в виде:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dm_1^{\Gamma}}{dt} &= -\lambda^{\Gamma} R(m_1^{\Gamma}) - \lambda_{проф}^{\Gamma} m_1^{\Gamma} + \frac{1}{t_{пор}^{\Gamma}} m_4^{\Gamma} + \\ &+ \frac{a(1 - p^{\Gamma}) [1 - e^{-(m_5^{\Gamma} + m_3^{\Delta})}] m_5^{\Gamma}}{m_5^{\Gamma} + m_3^{\Delta}} + \frac{b [1 - e^{-(m_6^{\Gamma} + m_4^{\Delta})}] m_6^{\Gamma}}{m_6^{\Gamma} + m_4^{\Delta}}; \\ \frac{dm_2^{\Gamma}}{dt} &= -\left(\nu_{пор}^{\Gamma} + \frac{1}{t_{пор}^{\Gamma}}\right) m_2^{\Gamma} + \lambda^{\Gamma} R(m_1^{\Gamma}); \\ \frac{dm_3^{\Gamma}}{dt} &= -\left(\nu_{rp}^{\Gamma} + \frac{1}{t_{rp}^{\Gamma}}\right) m_3^{\Gamma} + \frac{1}{t_{пор}^{\Gamma}} m_2^{\Gamma}; \\ \frac{dm_4^{\Gamma}}{dt} &= -\left(\nu_{пор}^{\Gamma} + \frac{1}{t_{пор}^{\Gamma}}\right) m_4^{\Gamma} + \frac{1}{t_{rp}^{\Gamma}} m_3^{\Gamma}; \\ \frac{dm_5^{\Gamma}}{dt} &= -\frac{a [1 - e^{-(m_6^{\Gamma} + m_3^{\Delta})}] m_5^{\Gamma}}{m_6^{\Gamma} + m_3^{\Delta}} + \lambda_{проф}^{\Gamma} m_1^{\Gamma}; \\ \frac{dm_6^{\Gamma}}{dt} &= -\frac{b [1 - e^{-(m_6^{\Gamma} + m_4^{\Delta})}] m_6^{\Gamma}}{m_6^{\Gamma} + m_4^{\Delta}} + \\ &+ \frac{ap^{\Gamma} [1 - e^{-(m_5^{\Gamma} + m_3^{\Delta})}] m_5^{\Gamma}}{m_5^{\Gamma} + m_3^{\Delta}} + \nu_{пор}^{\Gamma} (m_2^{\Gamma} + m_4^{\Gamma}) + \nu_{rp}^{\Gamma} m_3^{\Gamma}; \\ \frac{dm_1^{\Delta}}{dt} &= -\lambda^{\Delta} R(m_1^{\Delta}) - \lambda_{проф}^{\Delta} m_1^{\Delta} + \frac{1}{t^{\Delta}} m_2^{\Delta} + \\ &+ \frac{a(1 - p^{\Delta}) [1 - e^{-(m_5^{\Gamma} + m_3^{\Delta})}] m_5^{\Gamma}}{m_5^{\Gamma} + m_3^{\Delta}} + \frac{b [1 - e^{-(m_6^{\Gamma} + m_4^{\Delta})}] m_6^{\Gamma}}{m_6^{\Gamma} + m_4^{\Delta}}; \\ \frac{dm_2^{\Delta}}{dt} &= -\left(\frac{1}{t^{\Delta}} + \nu^{\Delta}\right) m_2^{\Delta} + \lambda^{\Delta} R(m_1^{\Delta}); \\ \frac{dm_3^{\Delta}}{dt} &= -\frac{a [1 - e^{-(m_5^{\Gamma} + m_3^{\Delta})}] m_5^{\Gamma}}{m_5^{\Gamma} + m_3^{\Delta}} + \lambda_{проф}^{\Delta} m_1^{\Delta}; \\ \frac{dm_4^{\Delta}}{dt} &= -\frac{b [1 - e^{-(m_6^{\Gamma} + m_4^{\Delta})}] m_6^{\Gamma}}{m_6^{\Gamma} + m_4^{\Delta}} + \\ &+ \nu^{\Delta} m_2^{\Delta} + \frac{ap^{\Delta} [1 - e^{-(m_5^{\Gamma} + m_3^{\Delta})}] m_5^{\Gamma}}{m_5^{\Gamma} + m_3^{\Delta}}. \end{aligned} \right\} \quad (4.22)$$

Напомним, что в этих уравнениях $R(x)$ — функция, определенная формулой (4.4).

Таким образом, нами написаны десять дифференциальных уравнений для средних численностей состояний ($6 + 4 = 10$). Однако фактически решать приходится не так много: любое из шести первых уравнений и любое из четырех последних может быть отброшено и соответствующая функция выражена из условия:

$$m_1^r + m_2^r + m_3^r + m_4^r + m_5^r + m_6^r = N^r, \quad m_1^n + m_2^n + m_3^n + m_4^n = N^n.$$

Таким образом, общее количество дифференциальных уравнений, которое придется решать, равно восьми ($5 + 3 = 8$).

Начальные условия, при которых мы будем решать эту систему, зависят от того, какой вопрос мы хотим выяснить. Если, например, нас интересует по преимуществу начальный период работы базы, вскоре после ее организации, естественно предположить, что в начальный момент все машины находятся в состояниях Γ_1 и Λ_1 ; тогда начальные условия будут:

$$t = 0; \quad m_1^r = N^r; \quad m_2^r = m_3^r = m_4^r = m_5^r = m_6^r = 0; \\ m_1^n = N^n; \quad m_2^n = m_3^n = m_4^n = 0.$$

Если же нас интересует другое, например, насколько быстро система может справиться с «затором», вызванным большим числом неисправностей, — можно предположить, что в начальный момент уже большое число машин находится в ремонте (состояния Γ_6 и Λ_4).

Обратим внимание на то, что полученная нами система дифференциальных уравнений для средних численностей состояний нелинейна. Это очень типично для метода динамики средних в условиях, когда интенсивности потоков событий зависят от численностей состояний. Тем не менее решение такой системы дифференциальных уравнений на ЭЦВМ или даже вручную (численно) затруднений не представляет. Для этого только нужно задаться численными значениями всех параметров, фигурирующих в задаче.

5. ПРЕДЕЛЬНОЕ ПОВЕДЕНИЕ СРЕДНИХ ЧИСЛЕННОСТЕЙ СОСТОЯНИЙ

В предыдущих параграфах мы рассмотрели методику описания процесса, протекающего в сложной (многоэлементной) системе S с помощью уравнений динамики средних, в которых неизвестными функциями являются средние численности состояний: m_1, m_2, \dots, m_n .

Естественно, возникает вопрос: к каким предельным значениям стремятся (если стремятся) эти средние численности при $t \rightarrow \infty$? Существует ли, и если существует, то каков установившийся режим?

В случае, когда мы рассматривали уравнения для вероятностей состояний, вопрос о предельном режиме решался достаточно просто. Если из любого состояния система могла перейти в любое другое, а число состояний было конечно, то существовал предельный установив-

шийся режим, не зависящий от начальных условий. Чтобы найти вероятности состояний в этом режиме, достаточно было положить левые части дифференциальных уравнений равными нулю и решить полученную систему линейных алгебраических уравнений.

Для метода динамики средних дело обстоит несколько сложнее. Напомним, что уравнения динамики средних в общем случае нелинейны; так же нелинейны и алгебраические уравнения, получаемые из них, если левые части положить равными нулю. Может оказаться, что решение этой системы уравнений не единственно, тогда нужно рассмотреть совокупность решений и отбросить те из них, которые не отвечают физическим условиям задачи. Если даже решение единственно, нужно все же исследовать поведение решения системы дифференциальных уравнений при $t \rightarrow \infty$.

Продemonстрируем особенности исследования предельного поведения средних численностей состояний на примере задачи, взятой, ради разнообразия, из области биологии. Пусть в некоторой местности обитают животные двух видов A и B , причем животные первого вида (A) — хищные, и они питаются животными второго вида (B), которые довольствуются растительной пищей.

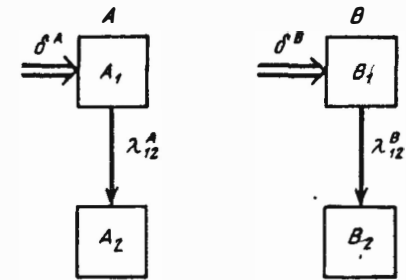


Рис. 6.19

Будем характеризовать состояние каждого животного предельно грубо, учитывая только, живо ли оно еще или погибло. Построение графа состояний элементов системы не вызывает никаких трудностей: этот граф разобьется на два подграфа, соответствующих видам A и B (рис. 6.19). Здесь стрелки, ведущие из A_1 в A_2 и из B_1 в B_2 , учитывают смертность животных, причем для вида B — смертность двух родов: и те случаи, когда особь погибает естественной смертью, и те, когда ее поедает животное вида A . Двойные полустрелки, ведущие в состояния A_1, B_1 , соответствуют пополнению численностей благодаря рождаемости.

Обозначим численности элементов (животных) в состояниях A_1, A_2, B_1, B_2 соответственно через $X_1^A, X_2^A, X_1^B, X_2^B$, а их математические ожидания через $m_1^A, m_2^A, m_1^B, m_2^B$. Мы хотим составить дифференциальные уравнения для m_1^A, m_1^B (средние численности m_2^A, m_2^B предыдущих поколений, как окончательно выбывшие из «активных» элементов системы, не будут входить в эти уравнения, и мы можем ими совсем не интересоваться).

Для того, чтобы составить дифференциальные уравнения, нужно задаться видом зависимости интенсивностей потоков $\lambda_{12}^A, \lambda_{12}^B, \delta^A, \delta^B$ от X_1^A, X_1^B .

Начнем с травоядных животных вида B . Предположим, что запасы пищи, доступной им, не зависят от численности животных ни вида A ,

ни вида B , и что пищи хватает на всех. Тогда естественно предположить, что средняя рождаемость в единицу времени (в пересчете на одну живую особь вида B) остается постоянной. Обозначим эту постоянную c ; тогда прирост численности состояния B_1 за счет рождения новых животных выразится формулой:

$$\delta^B = cX_1^B. \quad (5.1)$$

Что касается смертности λ_{12}^B , то мы уже сказали, что она складывается из двух слагаемых. Первое — это естественная смертность; мы будем считать ее постоянной (по тем же причинам, по которым считали постоянной рождаемость). Обозначим эту постоянную (среднее число естественных смертей в пересчете на одну живую особь вида B) через k ; величина k может быть истолкована как доля животных вида B , погибающих в единицу времени естественной смертью. Второе слагаемое в составе λ_{12}^B — это доля животных вида B , поедаемых в единицу времени хищниками вида A . Естественно предположить, что число встреч (в единицу времени) животных видов A и B , кончающихся тем, что A поедает B , прямо пропорционально числу X_1^A животных вида A (живых) и числу X_1^B имеющихся животных вида B , т. е. что это число выражается формулой

$$lX_1^A \cdot X_1^B, \quad (5.2)$$

где l — константа. В пересчете на одну живую особь вида A число таких смертей («поеданий») в единицу времени будет равно lX_1^A , так что интенсивность потока гибелей, приходящаяся на одну особь вида B в состоянии B_1 , выразится так:

$$\lambda_{12}^B = k + lX_1^A. \quad (5.3)$$

Теперь займемся животными вида A . Мы предположили, что их единственную пищу составляет вид B ; поэтому естественно, что и рождаемость и смертность вида A будут зависеть от числа поедаемых в единицу времени животных, приходящихся на одного хищника. Число поедаемых животных задается формулой (5.2), и на одного хищника их приходится в среднем lX_1^B . Таким образом, смертность хищников λ_{12}^A будет какой-то функцией от lX_1^B , или, так как l — константа, какой-то функцией от X_1^B :

$$\lambda_{12}^A = f(X_1^B). \quad (5.4)$$

Очевидно, функция f будет убывающей функцией от X_1^B (т. е. от количества пищи). Действительно, животные будут тем меньше умирать, чем больше у них будет пищи. Возможный вид функции f представлен на рис. 6.20.

Аналогично, рождаемость будет какой-то другой функцией от числа животных вида B : $g(X_1^B)$, и средний прирост популяции хищников за счет рождаемости (в единицу времени) запишется так:

$$\delta^A = X_1^A g(X_1^B). \quad (5.5)$$

Функция g , естественно, возрастающая функция от X_1^B (рис. 6.21).

Выпишем теперь дифференциальные уравнения для средних численностей состояний:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dm_1^A}{dt} &= -\lambda_{12}^A m_1^A + \delta^A, \\ \frac{dm_1^B}{dt} &= -\lambda_{12}^B m_1^B + \delta^B. \end{aligned} \right\}$$

Пользуясь принципом квазирегулярности и заменяя численности X_1^A , X_1^B от которых зависят интенсивности (5.1), (5.3), (5.4), (5.5), их средними значениями m_1^A , m_1^B , получим:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dm_1^A}{dt} &= -f(m_1^B) m_1^A + g(m_1^B) m_1^A, \\ \frac{dm_1^B}{dt} &= -(k + l m_1^A) m_1^B + c m_1^B. \end{aligned} \right\} \quad (5.6)$$

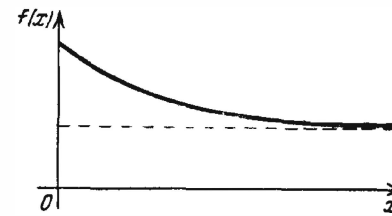


Рис. 6.20

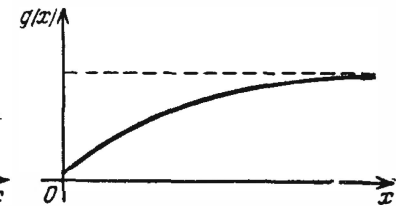


Рис. 6.21

Мы видим, что в первое уравнение фактически входит только разность функций g и f , характеризующая полный средний прирост. Обозначим эту разность через h :

$$h(x) = g(x) - f(x). \quad (5.7)$$

Это — разность возрастающей и убывающей функции, а значит, сама функция h — возрастающая (см. рис. 6.22). В отличие от положительных функций f и g , эта функция может менять знак. Предположим, что она меняет знак в какой-то точке x_0^B (рис. 6.22). Значение x_0^B имеет смысл той численности животных вида B , при которой рождаемость и смертность хищников в среднем уравниваются. При больших значениях численности вида B численность вида A в среднем возрастает, при меньших — в среднем убывает. Назовем x_0^B критической численностью вида B .

Совершенно так же можно ввести критическую численность x_0^A хищников, при которой число травоядных животных в среднем остается неизменным. Из второго уравнения (5.6) видно, что

$$x_0^A = \frac{c - k}{l}. \quad (5.8)$$

Когда число хищников больше, чем x_0^A , то численность вида B убывает, а при меньшем их числе — возрастает.

Пользуясь новыми обозначениями, уравнения динамики средних (5.6) можно переписать в виде:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dm_1^A}{dt} &= h(m_1^B) m_1^A; \\ \frac{dm_1^B}{dt} &= l(x_0^A - m_1^A) m_1^B. \end{aligned} \right\} (5.9)$$

В таком виде мы и будем анализировать уравнения для средних численностей состояний системы.

Посмотрим, как с изменением l будет двигаться точка на плоскости, изображающая решение m_1^A, m_1^B системы (5.9) (см. рис. 6.23).

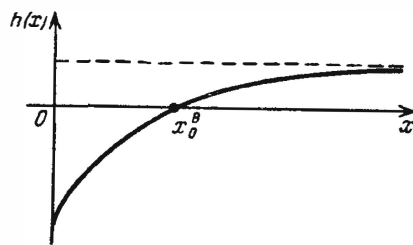


Рис. 6.22

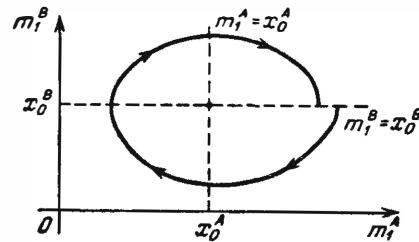


Рис. 6.23

При $m_1^B < x_0^B$, т. е. ниже прямой $m_1^B = x_0^B$, согласно первому уравнению (5.9), $\frac{dm_1^A}{dt} < 0$; это означает, что точка движется в л е в о (одновременно с этим, может быть, вверх или вниз). Выше этой прямой точка движется в п р а в о. Точно так же из второго уравнения (5.9) получаем, что левее прямой $m_1^A = x_0^A$ движение точки направлено в в е р х, а правее этой прямой — вниз. В моменты прохождения прямой $m_1^B = x_0^B$ точка движется строго вертикально: вниз, если она находится правее x_0^A и вверх — если левее; в моменты прохождения прямой $m_1^A = x_0^A$ она движется строго горизонтально.

Таким образом, точка, изображающая решение системы (5.9), вращается вокруг точки (x_0^A, x_0^B) по часовой стрелке, причем вращается, вообще говоря, не по кругу — может быть, приближаясь к точке (x_0^A, x_0^B) , а может быть удаляясь от нее. Точка (x_0^A, x_0^B) — п о л о ж е н и е р а в н о в е с и я: если в качестве начальных условий для решения системы (5.9) взять x_0^A, x_0^B , то численности m_1^A, m_1^B не будут изменяться, и решение системы (5.9) не зависит от времени:

$$m_1^A(t) \equiv x_0^A; \quad m_1^B(t) \equiv x_0^B.$$

Это положение равновесия может быть у с т о й ч и в ы м, если решения системы, начинающиеся из точек, близких к (x_0^A, x_0^B) , с течением времени неограниченно приближаются к этой точке; и н е у с т о й ч и в ы м — если удаляются.

На рис. 6.23 изображен случай, когда решение, начинающееся на прямой $m_1^B = x_0^B$ через один «оборот» оказывается ближе к точке (x_0^A, x_0^B) , чем в начале. Очевидно, возможны еще два случая:

— после одного «оборота» точка окажется дальше от (x_0^A, x_0^B) , чем в начале;

— после одного «оборота» точка в точности вернется к своему начальному положению.

В последнем случае все последующие «обороты» точки m_1^A, m_1^B вокруг положения равновесия будут совершаться по одному и тому же замкнутому пути. Такой замкнутый путь в теории дифференциальных уравнений называется ц и к л о м; ему соответствует периодическое решение $m_1^A(t), m_1^B(t)$: число хищников возрастает, поэтому число травоядных начинает убывать, достигает x_0^B ; тогда начинает убывать число хищников, и, когда оно минует критическое значение x_0^A , число травоядных начинает возрастать; наконец, численности тех и других достигают своих прежних значений и процесс начинается заново. Так же, как и положение равновесия, цикл может быть у с т о й ч и в ы м (когда решения, начинающиеся вблизи него, неограниченно приближаются к циклу) и н е у с т о й ч и в ы м (когда они удаляются).

Вернемся к случаю, изображенному на рис. 6.23. Следующий оборот точки (m_1^A, m_1^B) вокруг положения равновесия еще больше приблизит ее к точке (x_0^A, x_0^B) , и с каждым следующим оборотом точка (m_1^A, m_1^B) будет все больше приближаться к точке (x_0^A, x_0^B) . Здесь опять-таки может быть два случая: либо точка будет н е о г р а н и ч е н н о приближаться к положению равновесия — тогда, очевидно, это положение равновесия будет устойчивым; либо будет с каждым оборотом приближаться, но н е н е о г р а н и ч е н н о. В этом случае точка (m_1^A, m_1^B) будет неограниченно приближаться снаружи к какому-то циклу, который, конечно, будет устойчивым.

Такие же рассуждения можно применить и в случае, когда после одного оборота точка (m_1^A, m_1^B) у д а л и т с я от положения равновесия: либо с течением времени она будет неограниченно удаляться от точки (x_0^A, x_0^B) , а значит, и от начала координат; либо она будет приближаться к какому-то устойчивому циклу (на этот раз изнутри).

Все эти характеры поведения решений системы (5.9) могут по-разному комбинироваться друг с другом, образуя иногда довольно сложную картину. Например, изобразим на рис. 6.24 случай, когда положение равновесия устойчиво, и никаких циклов (периодических решений) нет. Здесь будет единственный предельный режим (x_0^A, x_0^B) ; и к нему будут стремиться все решения, каковы бы ни были начальные условия. На рис. 6.25 изображен другой случай, когда положение равновесия неустойчиво, а циклов, как и в предыдущем случае, нет. В этом случае никакого предельного режима не существует: численность каждого вида то убывает почти до нуля, то сильно возрастает, причем с каждым «оборотом» эти колебания становятся все больше, возрастая неограниченно. Разумеется, в точности такой характер предельного поведения численностей видов практически не может встретиться. Здесь начнут сказываться не учтенные при формализации задачи факторы: например, ограниченность запасов пищи у травоядных или

ошибки, связанные с применением принципа квазирегулярности (которые будут значительны при малых значениях m_1^A, m_1^B).

Еще один пример возможного характера предельного поведения решений: положение равновесия неустойчиво, имеется один устойчивый цикл C (см. рис. 6.26). Здесь будет опять единственный пре-

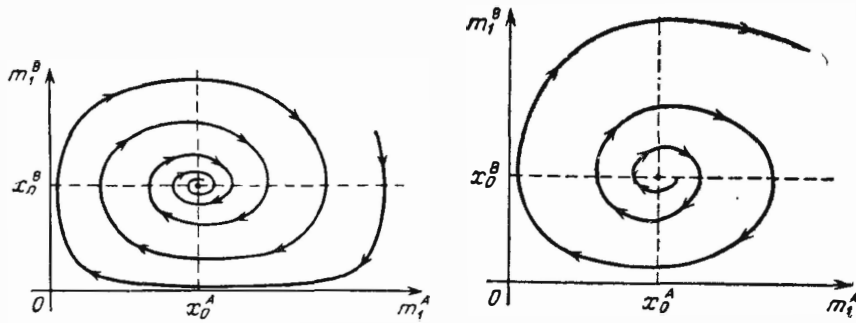


Рис. 6.24

Рис. 6.25

дельный режим — периодическое возрастание и убывание численностей, соответствующее предельному циклу C . К этому режиму приближаются средние численности $m_1^A(t), m_1^B(t)$ при любых начальных условиях.

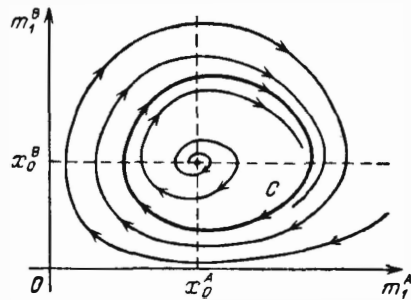


Рис. 6.26

На рис. 6.27 изображен еще более сложный случай: устойчивое положение равновесия, вокруг него неустойчивый цикл C_1 , а вокруг него — еще один, но устойчивый цикл C_2 . Предельных режимов здесь два: положение равновесия (x_0^A, x_0^B) и периодический режим, соответствующий циклу C_2 . К первому предельному режиму численности m_1^A, m_1^B приближаются, если начальные условия находятся внутри цикла C_1 (заштрихованная область на

рис. 6.27); ко второму — если вначале точка (m_1^A, m_1^B) находилась вне цикла C_1 .

Конечно, может оказаться, что некоторые из перечисленных случаев, при определенных ограничениях на вид функции $h(x)$ (например, для ограниченной функции $h(x)$) невозможны. Но, во всяком случае, картина предельного поведения решений не всегда будет одна и та же, и для нахождения предельных режимов необходимо исследование системы (5.9) при конкретных значениях входящих в нее числовых параметров и конкретном виде функции $h(x)$.

Пример. В условиях рассмотренной выше задачи функция $h(x)$, задающая относительный прирост численности хищников в единицу времени в зависимости от числа травоядных, имеет вид:

$$h(x) = 1 - \frac{3}{2000 + x};$$

константы l и x_0^A равны соответственно 0,001 и 1000. При этом уравнения динамики средних (5.9) примут следующий вид:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dm_1^A}{dt} &= \left[1 - \frac{3}{2000 + m_1^B} \right] m_1^A, \\ \frac{dm_1^B}{dt} &= \left[1 - \frac{m_1^A}{1000} \right] m_1^B. \end{aligned} \right\} \quad (5.10)$$

Заметим, что x_0^B («критическое» число животных вида B , при котором животные вида A в среднем не размножаются и не вымирают), в данном случае также равно 1000.

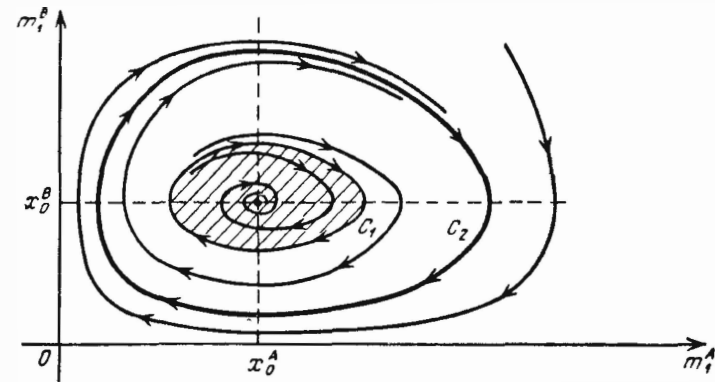


Рис. 6.27

Решая численно систему (5.10) при различных начальных условиях, убеждаемся, что здесь имеет место случай, изображенный на рис. 6.26: существует неустойчивое положение равновесия (1000, 1000) и один цикл, причем устойчивый. Этот цикл и будет играть роль предельного режима, для любых начальных условий. Как показывают вычисления, период этого предельного режима будет приблизительно равен 10,8 единиц времени; изменение средних численностей видов A и B в течение этого периода представлено в табл. 5.1, а графически — на рис. 6.28 и 6.29. В качестве начала отсчета времени взят момент наименьшей численности травоядных животных.

На рис. 6.28 представлена зависимость средних численностей хищников (m_1^A) и травоядных (m_1^B) от времени t ; на рис. 6.29 показан устойчивый предельный цикл. Цикл размечен по времени; деления соответствуют $t = 1, 2, \dots, 10$. При $t = 10,8$ (период цикла) m_1^A и m_1^B возвращаются к первоначальным значениям.

Таблица 5.1

Время t	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	10,8
Средняя численность хищников m_1^A	1000	790	670	620	650	750	960	1270	1540	1490	1210	1000
Средняя численность травоядных m_1^B	450	500	650	930	1310	1810	2170	1950	1200	670	480	450

Анализируя данные, приведенные в табл. 5.1, мы видим, что вначале, когда число травоядных мало (в среднем 450), хищники голодают,

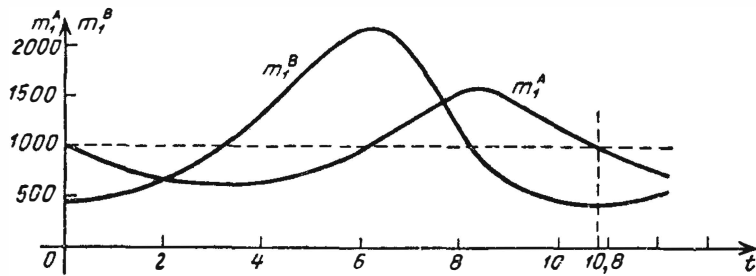


Рис. 6.28

их число уменьшается, и поэтому число травоядных начинает расти. К тому моменту, когда число травоядных достигает 1000 (это происходит немного больше, чем через 3 единицы времени от начала цикла), среднее число хищников достигает своего минимума (около 620). После того, как травоядных становится более 1000, число хищников опять начинает расти и снова достигает 1000 немного позже $t=6$. Число травоядных в это время достигает максимума (2170 или немного больше), а потом снова начинает убывать, потому что число хищников больше критического 1000. Затем (при t между 8 и 9) число хищников достигает максимума, равного приблизительно 1550, а число травоядных в это время равно критическому 1000. На последнем участке цикла (до момента $t=10,8$) убывает и

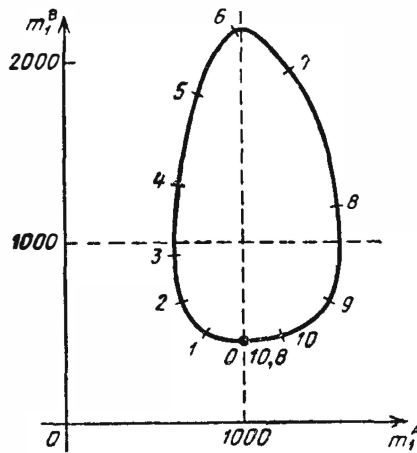


Рис. 6.29

число травоядных (потому что число хищников превосходит 1000), и число хищников (потому что травоядных меньше 1000). В конце периода, при $t=10,8$, число хищников опять достигает критического значения 1000, а число травоядных возвращается к своему наименьшему значению 450.

Любопытно, что в природе действительно встречаются такие периодические изменения численностей связанных друг с другом видов.

6. УРАВНЕНИЯ ДИНАМИКИ БОЯ (МОДЕЛЬ А)

Метод динамики средних может быть с успехом применен для приближенного описания процессов боевых действий, в которых участвуют многочисленные группы тех или других элементов (танки, корабли, самолеты и т. п.). Более того, именно описание процессов боевых действий («динамики боя») — одно из первых по времени применений метода динамики средних. Дифференциальные уравнения, описывающие изменение численностей борющихся групп в процессе боя, под названием «уравнений Ланчестера», появились еще во времена первой мировой войны. Правда, область их применения была тогда очень узка (всего две-три модели), а связь метода с марковскими случайными процессами не установлена. В настоящее время метод динамики средних получил широкое развитие и представляет собой хорошо разработанный и весьма гибкий аппарат, позволяющий описывать самые разнообразные боевые ситуации (см. например, [1, 11, 13, 23]).

Здесь мы рассмотрим только немногие из задач динамики боя, преимущественно под методическим углом зрения, не останавливаясь подробно на количественной стороне зависимостей.

Мы будем рассматривать боевые ситуации, в которых сталкиваются группировки, состоящие из большого количества элементов, которые мы будем называть «боевыми единицами» (самолеты, танки, корабли, ракетные установки и т. д.) Кроме боевых единиц, в некоторых моделях будут участвовать «вспомогательные единицы» (радиолокационные станции, разведчики, ложные цели и т. д.), отличные которых от боевых единиц — в том, что они не могут сами вести огонь по объектам противника, выполняя различные обеспечивающие задачи.

Строя математическую модель, мы будем рассматривать описываемые явления в рамках марковских случайных цепей (с вытекающим из них методом динамики средних). Поэтому мы всегда будем предполагать, что каждая боевая единица производит λ п о т о к в ы с т р е л о в с некоторой интенсивностью λ , которая может быть как постоянной, так и переменной, зависящей от времени. При расчете этой интенсивности необходимо принимать во внимание не просто «скорострельность» боевой единицы, а ее фактическую с р е д н ю ю с к о р о с т р е л ь н о с т ь, с учетом времени, потребного на расчет прицельных данных, прицеливание, перезарядание и проч.

Если стрельба боевой единицы ведется по однородным целям, каждая из которых в результате выстрела по ней может быть только «поражена» или «не поражена» («поражение» означает выход из строя), то

удобно вместо скорострельности λ пользоваться эффективной скорострельностью

$$\lambda^* = \lambda p,$$

где p — вероятность поражения единицы направленным по ней выстрелом. Величина λ^* представляет собой не что иное, как интенсивность потока «успешных» (поражающих) выстрелов, производимого одной боевой единицей.

Расчеты показывают, что при рассмотрении динамики боя многочисленных групп допущение о пуассоновском характере потока выстрелов (или успешных выстрелов) не искажает сколько-нибудь серьезно картину явления. Кроме того, надо учитывать, что задача метода динамики средних — создание не подробной и точной, а грубо приближенной модели боя.

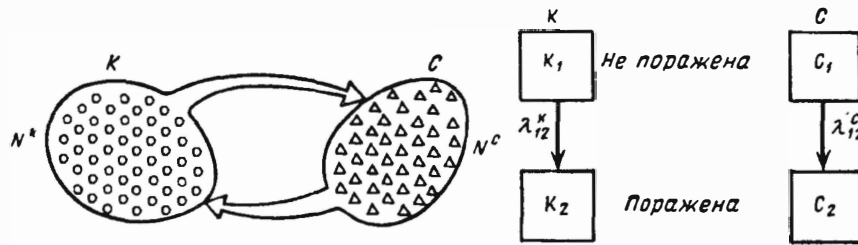


Рис. 6.30

Рис. 6.31

Рассмотрим сначала следующую простейшую модель боя — назовем ее «моделью А». В бое принимают участие две группировки: К (Красные) и С (Синие) (рис. 6.30). Будем отмечать параметры, относящиеся к Красным и Синим верхними индексами «К» и «С». В составе группировки К имеется N^k однородных боевых единиц (самолетов, танков, кораблей), в составе группировки С — N^c боевых единиц, однородных между собой, но не обязательно однородных с боевыми единицами Красных. Эффективная скорострельность одной боевой единицы Красных равна λ^k , Синих — λ^c .

Относительно организации боя мы примем следующие предположения.

1. Каждая боевая единица Красных может вести огонь по каждой боевой единице Синих, и наоборот.

2. Огонь является прицельным, т. е. направляется по вполне определенной боевой единице; одним выстрелом нельзя поразить более одной единицы.

3. Обстрелу подвергается с одинаковой вероятностью любая из еще не пораженных единиц; после поражения единицы огонь по ней прекращается и немедленно переносится на другую, еще не пораженную.

4. Пораженная единица прекращает стрельбу и в дальнейших боевых действиях не участвует.

Таким образом, в нашей простейшей модели каждая боевая единица может быть в одном из двух состояний: «не поражена» (и, значит,

ведет огонь) и «поражена» (прекратила огонь). Граф состояний элементов системы, разделенный на два подграфа К и С, показан на рис. 6.31. Буквами λ_{12}^k , λ_{12}^c обозначены интенсивности потоков событий, переводящих элемент (боевую единицу) из состояния в состояние.

Обозначим, как всегда,

$$X_1^k = X_1^k(t); \quad X_2^k = X_2^k(t);$$

$$X_1^c = X_1^c(t); \quad X_2^c = X_2^c(t)$$

численности состояний K_1, K_2, C_1, C_2 в момент времени t . Через $m_1^k, m_2^k, m_1^c, m_2^c$ будем обозначать соответствующие средние численности.

Очевидно, в рассматриваемом случае интенсивности $\lambda_{12}^k, \lambda_{12}^c$ меняются со временем и зависят от численностей состояний (количества стреляющих единиц). Определим эти интенсивности. Будем рассуждать следующим образом. Каждая боевая единица Синих производит в единицу времени λ^c успешных выстрелов. В момент t стреляет X_1^c боевых единиц Синих; все вместе в единицу времени они дают в среднем

$$\lambda^c X_1^c$$

успешных выстрелов. Эти выстрелы распределяются равномерно между всеми сохранившимися к данному моменту боевыми единицами Красных, так что на каждую из них приходится в среднем

$$\frac{\lambda^c X_1^c}{X_1^k} \quad (6.1)$$

успешных выстрелов. Но это еще не все: интенсивность (6.1) надо умножить на функцию $R(X_1^k)$ (см. формулу (4.4) § 4), которая обращается в нуль при $X_1^k = 0$ (если в момент t у Красных не сохранилось ни одной боевой единицы, Синим попросту не по кому будет стрелять).

Учитывая, что $\frac{R(x)}{x} = \rho(x)$ (см. формулу (4.5) § 4), получим

$$\lambda_{12}^k = \lambda^c X_1^c \rho(X_1^k). \quad (6.2)$$

Аналогично находим

$$\lambda_{12}^c = \lambda^k X_1^k \rho(X_1^c). \quad (6.3)$$

Зная эти интенсивности и пользуясь принципом квазирегулярности, можно на основе графа (см. рис. 6.31) сразу написать уравнения динамики средних:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dm_1^k}{dt} &= -\lambda^c m_1^c R(m_1^k), \\ \frac{dm_1^c}{dt} &= -\lambda^k m_1^k R(m_1^c). \end{aligned} \right\} \quad (6.4)$$

Уравнений для m_2^k, m_2^c не пишем, так как для любого t

$$m_1^k + m_2^k = N^k; \quad m_1^c + m_2^c = N^c.$$

Заметим, что, как правило, нас и не интересуют численности уничтоженных единиц m_2^k , m_2^c , так как активного участия в боевых действиях они не принимают.

Решать уравнения (6.4) можно при любых начальных условиях; обычно полагают, что в начальный момент все единицы целы:

$$t = 0; \quad m_1^k = N^k, \quad m_1^c = N^c.$$

Обратим внимание на то, что в начальных стадиях боя, далеких от стадии «истощения», среднее число элементов в состояниях K_1 , C_1 больше единицы, значения функций $R(m_1^k) = R(m_1^c) = 1$, и вместо уравнений (6.4) можно записать:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dm_1^k}{dt} &= -\lambda^c m_1^c, \\ \frac{dm_1^c}{dt} &= -\lambda^k m_1^k. \end{aligned} \right\} \quad (6.5)$$

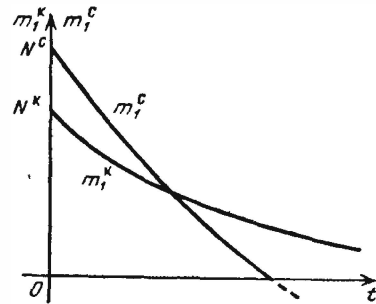


Рис. 6.32

Уравнения (6.5) известны в литературе как уравнения Ланчестера 2-го рода. Следует отметить, что такие уравнения, даже в более точной форме (6.4), пригодны для описания динамики боя только на начальных его стадиях, когда средние численности обеих группировок еще не малы по сравнению с их начальными численностями, а в далеко зашедших стадиях боя (стадия «истощения») перестают быть пригодными даже приближенно*).

Заметим, что, в отличие от уравнений (6.4), уравнения (6.5) л и н е й н ы, что представляет существенное преимущество при их решении.

При выводе уравнений (6.4), (6.5) мы никак не оговаривали, постоянны или переменны эффективные скорострельности λ^k , λ^c — уравнения справедливы как в том, так и в другом случае. Однако, при постоянных эффективных скорострельностях ($\lambda^k = \text{const}$, $\lambda^c = \text{const}$) уравнения (6.5) удастся проинтегрировать в явном виде. Опуская элементарные преобразования, приведем прямо окончательный результат:

$$\left. \begin{aligned} m_1^k &= N^k \operatorname{ch} \sqrt{\lambda^k \lambda^c} t - N^c \sqrt{\frac{\lambda^c}{\lambda^k}} \operatorname{sh} \sqrt{\lambda^k \lambda^c} t, \\ m_1^c &= N^c \operatorname{ch} \sqrt{\lambda^k \lambda^c} t - N^k \sqrt{\frac{\lambda^k}{\lambda^c}} \operatorname{sh} \sqrt{\lambda^k \lambda^c} t, \end{aligned} \right\} \quad (6.6)$$

где $\operatorname{ch} x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$, $\operatorname{sh} x = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$ — гиперболические функции.

Кривые $m_1^k(t)$, $m_1^c(t)$ имеют разный вид в зависимости от первоначального соотношения сил N^k/N^c и соотношения эффективных скоро-

стрельностей λ^k/λ^c . Например, на рис. 6.32 показан случай, когда в начале боя Синие имеют количественное преимущество над Красными ($N^c > N^k$), а в ходе боя Красные побеждают, благодаря большей эффективной скорострельности ($\lambda^k > \lambda^c$). Обратим внимание на то, что кривая $m_1^c(t)$ (численность побеждаемой стороны) подходит к оси абсцисс под углом и при продолжении пересекла бы ее, т. е. средняя численность побеждаемой стороны стала бы отрицательной, что, разумеется, невозможно. Это происходит потому, что для конечных стадий боя, когда сторона С близка к состоянию истощения, уравнения (6.5), как мы уже говорили, перестают быть применимыми. Если бы мы решали не уравнения (6.5), а более точные уравнения (6.4), кривая $m_1^c(t)$ плавно приближалась бы к оси $0t$.

Анализируя решение уравнений Ланчестера (6.6), можно проследить, как влияют на это решение условия боя (параметры N^k , N^c , λ^k и λ^c). Для этого разделим уравнения (6.6) на N^k и N^c и перейдем к относительным количествам сохранившихся боевых единиц в момент t :

$$\left. \begin{aligned} \mu_1^k &= \operatorname{ch} \sqrt{\lambda^k \lambda^c} t - \frac{N^c}{N^k} \sqrt{\frac{\lambda^c}{\lambda^k}} \operatorname{sh} \sqrt{\lambda^k \lambda^c} t, \\ \mu_1^c &= \operatorname{ch} \sqrt{\lambda^k \lambda^c} t - \frac{N^k}{N^c} \sqrt{\frac{\lambda^k}{\lambda^c}} \operatorname{sh} \sqrt{\lambda^k \lambda^c} t. \end{aligned} \right\} \quad (6.7)$$

Из формул (6.7) видно, что убывание численностей каждой из сторон в большей мере зависит от соотношения сил N^c/N^k , чем от соотношения эффективных скорострельностей λ^c/λ^k (первое отношение входит в формулы (6.7) непосредственно, а второе — под знаком корня). Это вполне объяснимо: действительно, при той организации боя, которая принята в нашей модели А (стрельба ведется только по непораженным единицам) Красным выгоднее, например, вдвое увеличить число единиц N^k , чем вдвое увеличить эффективную скорострельность каждой λ^k : на поражение двух единиц противник вынужден истратить вдвое больше средств, чем на поражение одной.

Более подробный анализ решения уравнений Ланчестера 2-го рода не входит в наши задачи; интересующегося читателя можно отослать к руководствам [11, 13, 23].

7. УЧЕТ ПОПОЛНЕНИЯ СИЛ, УПРЕЖДАЮЩЕГО УДАРА, ТЕМПА МОБИЛИЗАЦИИ И ПРОЧИХ ФАКТОРОВ В УРАВНЕНИЯХ ДИНАМИКИ БОЯ

В уравнениях динамики боя можно очень просто учесть различные факторы, относящиеся к организации боевых действий, как то:

- ввод резервов (пополнение сил),
- упреждающий удар одной из сторон;
- темп мобилизации боевых средств,
- истощение боезапаса

и т. д.

*) Об оценке ошибок, связанных с принципом квазирегулярности, см. далее,

Покажем, как это можно сделать. Пусть в процессе боя каждая из сторон вводит в действие резервы в количестве δ^k боевых единиц в единицу времени (для красных) и δ^c — для синих. Мы уже умеем (см. § 3) учитывать в уравнениях динамики средних пополнение состава элементов извне. В данном случае ввод резервов учтется с помощью добавочного слагаемого в правой части каждого уравнения динамики боя:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dm_1^k}{dt} &= -\lambda^c m_1^c + \delta^k, \\ \frac{dm_1^c}{dt} &= -\lambda^k m_1^k + \delta^c. \end{aligned} \right\} \quad (7.1)$$

Величины δ^k , δ^c могут быть как постоянными, так и переменными, как зависящими, так и не зависящими от средних численностей сторон. Решая эти уравнения и анализируя ход изменения численностей сторон (рис. 6.33), можно сделать заключение о рациональном темпе ввода резервов, сроке его начала и окончания.

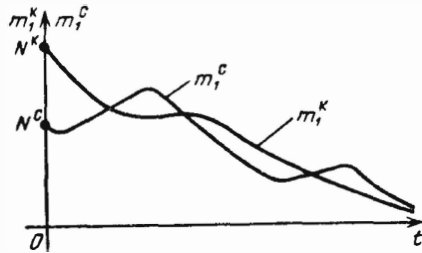


Рис. 6.33

В уравнениях динамики боя можно учесть не только пополнение сил, но и ряд других факторов: упреждающий удар, темп мобилизации, истощение наличного ресурса боеприпасов и его восстановление и т. д. Для всего этого достаточно полагать в уравнениях динамики боя эффективные скорострельности λ^k , λ^c не постоянными, а меняющимися по определенному закону:

$$\lambda^k = \lambda^k(t); \quad \lambda^c = \lambda^c(t).$$

Пусть, например, Красные наносят Синим упреждающий удар в какой-то момент $t = 0$, а Синие, застигнутые врасплох, не отвечают никаким противодействием до момента $t = \tau$, в который они вводят в действие все свои силы. Тогда в уравнениях динамики боя

$$\left. \begin{aligned} \frac{dm_1^k}{dt} &= -\lambda^c m_1^c, \\ \frac{dm_1^c}{dt} &= -\lambda^k m_1^k \end{aligned} \right\} \quad (7.2)$$

нужно полагать величину $\lambda^c(t)$ равной нулю до момента $t = \tau$ и постоянной (равной $\tilde{\lambda}^c = \text{const}$) при $t \geq \tau$ (рис. 6.34).

Так будет обстоять дело, если сторона, подвергаясь упреждающему удару, совсем не отвечает противнику огнем до момента τ , а в момент τ сразу вводит в бой все свои силы. Естественнее предположить, что Синие, подвергшись нападению, начнут постепенно мобилизовыв-

ать и вводить в действие свои силы. Это можно учесть опять-таки введением некоторой переменной эффективной скорострельности:

$$\lambda^c(t) = \tilde{\lambda}^c \varphi(t),$$

где $\tilde{\lambda}^c$ — номинальная эффективная скорострельность, которая будет достигнута после окончания мобилизации; $\varphi(t)$ — некоторая возрастающая от 0 до 1 функция (рис. 6.35). Решая уравнения динамики боя при определенном виде функции $\varphi(t)$, можно учесть влияние темпа мобилизации на ход и исход боя.

С первого взгляда может показаться, что учет мобилизации сил должен производиться теми же методами, что и учет ввода резервов; но это не так. Неотмобилизованные к моменту τ силы находятся на территории, подвергаемой огню противника, еще не войдя в действие; све-

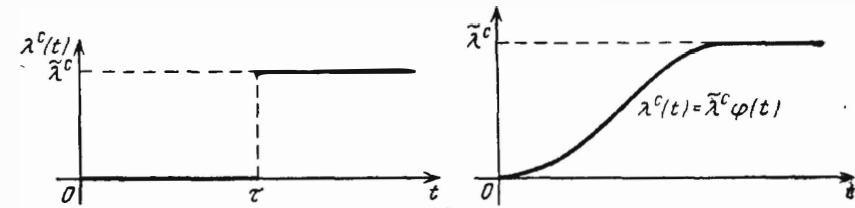


Рис. 6.34

Рис. 6.35

жие силы (резервы) начинают подвергаться огню только с момента ввода. Поэтому мобилизация и ввод резервов учитываются по-разному: первая — переменной скорострельностью, а второй — добавочным членом в правой части уравнения.

По аналогичной методике можно учесть в уравнениях динамики боя и ограниченность боезапаса. Предположим, сначала, что боезапас каждой боевой единицы жестко с нею связан (не может передаваться другим) и уничтожается вместе с боевой единицей при ее поражении. Пусть боезапас каждой боевой единицы Красных рассчитан на время τ^k , а Синих — на τ^c . Очевидно,

$$\tau^k = k^k / \lambda_0^k; \quad \tau^c = k^c / \lambda_0^c,$$

где k^k — запас снарядов, имеющийся у каждой боевой единицы Красных, k^c — соответствующий запас Синих, λ_0^k (λ_0^c) — средние скорострельности (не эффективные!) одной боевой единицы Красных (Синих).

Чтобы учесть ограниченность боезапаса, достаточно положить после момента τ^k для Красных и τ^c для Синих эффективные скорострельности равными нулю:

$$\lambda^k = 0 \quad \text{при } t > \tau^k;$$

$$\lambda^c = 0 \quad \text{при } t > \tau^c.$$

Несколько иначе будет учитываться ограниченность боезапаса, если имеется общий для всех единиц склад боепитания, надежно защищенный от огня противника и снабжающий боеприпасами все единицы.

Пусть склад боепитания красных имеет запас L^k снарядов, Синих — L^c снарядов, распределяемый равномерно между всеми непораженными единицами (задержками в доставке боеприпасов пренебрегаем).

Найдем время τ^k , на которое хватит боеприпасов Красным. В единицу времени Красные расходуют в среднем λ_0^k снарядов; к моменту t будет израсходовано в среднем

$$M^k(t) = \int_0^t m_1^k \lambda_0^k dt. \quad (7.3)$$

Момент τ^k прекращения огня Красными вследствие нехватки боеприпасов может быть определен из уравнения:

$$M^k(\tau^k) = \int_0^{\tau^k} m_1^k \lambda_0^k dt = L^k. \quad (7.4)$$

Практически величину τ^k можно найти заодно с решением уравнений динамики боя, вычисляя для каждого t^k интеграл (7.3) и останавливая расчет в тот момент, когда он достиг значения L^k (боезапас Красных кончился) или соответствующий интеграл для Синих достиг значения L^c (боезапас Синих кончился). После окончания боезапаса одной из сторон бой становится односторонним (эффективная скорострельность другой стороны равна нулю); после окончания боезапаса обеих сторон бой прекращается вообще.

Не представляет труда учесть в уравнениях динамики боя и такой фактор, как подвоз боеприпасов. Предлагаем читателю построить такую модель самостоятельно.

8. МОДЕЛЬ Б. СЛУЧАЙ ОТСУТСТВИЯ ПЕРЕНОСА ОГНЯ

Уравнения, выведенные в § 6 и обобщенные в § 7, описывают такую модель боя (модель А), в которой стрельба ведется только по непораженным целям и перенос огня с пораженной единицы на другую, непораженную, осуществляется мгновенно. При этом предполагается, что в распоряжении каждой стороны имеется точная информация о том, какие цели поражены, а какие нет, а время, необходимое для учета этой информации, пренебрежимо мало. Таким образом, модель А представляет собой модель высокоорганизованного боя с полной и немедленной информацией о состоянии противника и мгновенной передачей этой информации по звеньям системы управления.

Представляет интерес рассмотреть противоположный крайний случай плохо организованного боя, где информация о состоянии противника не поступает и переноса огня не производится. Назовем такую модель боя «моделью Б».

Рассмотрим снова две группировки: К (красные) и С (Синие) в составе N^k и N^c боевых единиц с эффективными скорострельностями λ^k и λ^c . Схему организации боя примем следующую.

1. Каждая боевая единица Красных может вести огонь по каждой боевой единице Синих и наоборот.

2. Одним выстрелом поражается не более одной боевой единицы.

3. Пораженная боевая единица мгновенно перестает вести огонь.

4. Огонь всех сохранившихся боевых единиц распределяется равномерно между всеми боевыми единицами противника — как пораженными, так и непораженными (перенос огня не производится).

Рассмотрим граф состояний элементов системы, распадающийся на два подграфа «К» и «С» (см. рис. 6.31); внешне он ничем не отличается от графа модели А, но значения $\lambda_{12}^k, \lambda_{12}^c$ будут уже другие. Подсчитаем интенсивность λ_{12}^k в момент t . Каждая непораженная боевая единица Синих производит поток успешных выстрелов с интенсивностью λ^c ; число таких боевых единиц равно X_1^c ; общее среднее число успешных выстрелов в единицу времени $\lambda^c X_1^c$ надо разделить на число обстреливаемых целей — в нашем случае оно равно N^k , так как обстреливаются все цели, и пораженные и непораженные. Значит, $\lambda_{12}^k = \frac{\lambda^c X_1^c}{N^k}$ и аналогично $\lambda_{12}^c = \frac{\lambda^k X_1^k}{N^c}$. Пользуясь принципом квазирегулярности, запишем уравнения динамики боя в виде:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dm_1^k}{dt} &= -\frac{\lambda^c}{N^k} m_1^k m_1^c, \\ \frac{dm_1^c}{dt} &= -\frac{\lambda^k}{N^c} m_1^k m_1^c. \end{aligned} \right\} \quad (8.1)$$

Такой системой дифференциальных уравнений описывается изменение средних численностей состояний в модели боя Б, когда переноса огня с непораженных единиц на пораженные не производится. В отличие от уравнений Ланчестера 2-го рода (формулы (6.5) § 6), уравнения (8.1) не линейны. При постоянных интенсивностях потоков успешных выстрелов

$$\lambda^k = \text{const}, \quad \lambda^c = \text{const}$$

эта система может быть решена в явном виде. Приведем, опуская промежуточные выкладки (их можно найти, например, в [13]), только окончательный результат — решение системы (8.1):

$$\left. \begin{aligned} m_1^k &= N^k \frac{u^c - u^k}{u^c e^{-(u^c - u^k)t} - u^k}, \\ m_1^c &= N^c \frac{u^k - u^c}{u^k e^{-(u^k - u^c)t} - u^c}, \end{aligned} \right\} \quad (8.2)$$

где

$$u^k = \frac{\lambda^k N^k}{N^c}, \quad u^c = \frac{\lambda^c N^c}{N^k}. \quad (8.3)$$

Модель Б (без переноса огня) отличается, по сравнению с моделью А, более затяжным, вялым развитием боя, преимущество одной

стороны над другой выражено слабее, убывание численностей происходит медленнее.

В условиях модели Б (так же как и А) могут быть, причем теми же методами, учтены дополнительные факторы: упреждающий удар, пополнение сил, мобилизация и т. п.

9. МОДЕЛЬ В. УЧЕТ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ РАЗВЕДКИ И СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ БОЕМ

В § 6 и 8 мы рассмотрели два крайних случая организации боя: идеальную организацию (модель А) и плохую организацию (модель Б).

В реальной действительности дело обстоит не так хорошо, как в первом случае, но и не так плохо, как во втором.

Перенос огня с пораженной единицы на непораженную производится не мгновенно, как в модели А, но все же производится. В реальной действительности имеются задержки в переносе огня, связанные с запаздыванием получения информации о поражении цели, а также с немгновенной передачей этой информации по звеньям системы управления боем. Однако эти задержки не столь велики, чтобы получилась схема модели Б, с ее стрельбой «вслепую» по всем целям — как пораженным, так и непораженным.

В данном параграфе мы построим обобщенную модель боя — модель В, по отношению к которой ранее введенные модели А и Б являются частными случаями. В модели В учитываются такие факторы, как деятельность разведки и степень совершенства системы управления боем.

Рассмотрим следующую модель боя. Происходит бой двух группировок: К (Красные) и С (Синие), состоящих каждая из однородных боевых единиц в количествах N^k и N^c . Эффективная скорострельность одной боевой единицы Красных равна λ^k , Синих — λ^c . Каждая боевая единица Красных может находиться в следующих состояниях:

- K_0 — не разведана,
- K_1 — разведана, но еще не обстреливается,
- K_2 — обстреливается, но еще не поражена,
- K_3 — поражена, но это еще не обнаружено; обстрел продолжается,
- K_4 — поражена, это обнаружено, но обстрел еще не снят,
- K_5 — поражена, обстрел снят.

Аналогичные состояния боевой единицы Синих обозначим $C_0, C_1, C_2, C_3, C_4, C_5$.

После того, как обстрел с пораженной единицы снят, огонь переносится на любую другую из разведанных единиц, находящихся под обстрелом, т. е. в состояниях со второго по четвертое.

Граф состояний элементов системы, разделенный на два подграфа К и С, показан на рис. 6.36.

Обозначим, как всегда, $X_0^k, X_1^k, \dots, X_5^k, X_0^c, X_1^c, \dots, X_5^c$ — численности состояний; $m_0^k, m_1^k, \dots, m_5^k, m_0^c, m_1^c, \dots, m_5^c$ — соответ-

ствующие средние численности; $\lambda_{ij}^k, \lambda_{ij}^c$ — интенсивности потоков событий, переводящих боевую единицу Красных (Синих) из состояния в состояние. Определим эти интенсивности, начиная с λ_{01}^k . Будем считать, что переход боевой единицы Красных из состояния K_0 (не разведана) в состояние K_1 (разведана) происходит под действием потока успешных разведок Синих (под потоком успешных разведок понимается поток событий, состоящих в обнаружении еще не разведанной единицы). Очевидно, эта интенсивность зависит от интенсивности и успешности разведывательных действий Синих (полеты разведывательной авиации, поиск разведывательных групп и т. д.). Обозначим интенсивность потока успешных разведок Синих, приходящуюся на каждую еще не разведанную боевую единицу Красных, через $\lambda_{разв}^c$; аналогичное обозначение для интенсивности успешных разведок Красных будет $\lambda_{разв}^k$. Таким образом находим интенсивности потоков событий, переводящих одну боевую единицу Красных (аналогично — Синих) из состояния «не разведана» в состояние «разведана, но еще не обстреливается»;

$$\lambda_{01}^k = \lambda_{разв}^c; \quad \lambda_{01}^c = \lambda_{разв}^k. \quad (9.1)$$

Заметим, что обе интенсивности $\lambda_{01}^k, \lambda_{01}^c$ могут быть как зависимы, так и независимы от общего состояния, в котором находится группировка (т. е. от численностей состояний). Это обусловлено тем, действует ли разведка автономно, или же разведывательные средства выделяются из состава самой группировки и таким образом переводятся из боевых единиц во вспомогательные.

Может оказаться также, что интенсивность потока успешных разведок зависит от того, сколько осталось в составе группы противника неразведанных единиц. Таким образом, в зависимости от условий боя, параметры $\lambda_{разв}^k$ и $\lambda_{разв}^c$ могут тем или иным образом зависеть от средних численностей состояний или же не зависеть от них. Мы не будем уточнять, какой из этих случаев имеет место, а просто обозначим $\lambda_{разв}^c$ — интенсивность потока успешных разведок Синих, которую испытывает на себе каждая еще не разведанная боевая единица Красных ($\lambda_{разв}^k$ — наоборот). Для подсчета $\lambda_{разв}^c$ нужно определить, сколько раз за единицу времени в районе данной (произвольно выб-

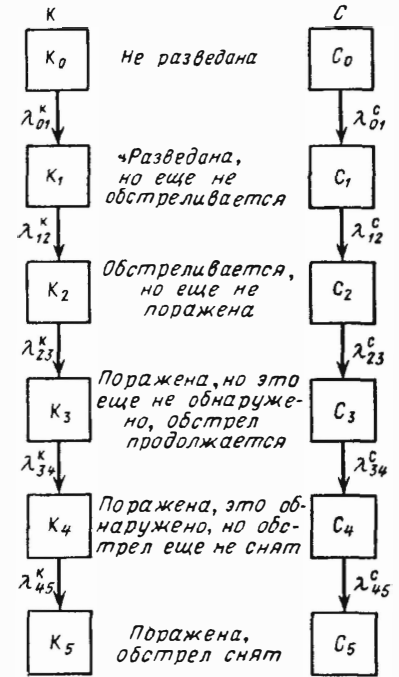


Рис. 6.36

ранной) неразведанной боевой единицы Красных появляется разведчик Синих (например, самолет разведывательной авиации), и умножить это число на вероятность того, что единица будет обнаружена разведчиком ($\lambda_{разв}^k$ находится так же).

Найдем интенсивность потока событий, переводящих единицу из состояния K_1 в K_2 . Соответствующее событие состоит в том, что разведанная единица ставится под обстрел. Интенсивность потока событий можно определить, как величину, обратную среднему времени задержки в постановке под обстрел разведанной боевой единицы Красных. Это время зависит от степени совершенства и быстродействия системы управления Синих; обозначим его $\bar{t}_{пост}^c$. Тогда

$$\lambda_{12}^k = 1/\bar{t}_{пост}^c \cdot \quad (9.2)$$

Аналогично

$$\lambda_{12}^c = 1/\bar{t}_{пост}^k \cdot \quad (9.3)$$

Найдем интенсивность потока событий, переводящего боевую единицу из состояния K_2 (обстреливается, но еще не поражена) в состояние K_3 (поражена). Это поток успешных (поражающих) выстрелов Синих, приходящийся на одну боевую единицу Красных, находящуюся в состоянии K_2 . Из чего складывается этот поток? Со стороны C участвуют в обстреле все единицы, находящиеся в состояниях C_0, C_1, C_2 ; их число равно

$$X_0^c + X_1^c + X_2^c.$$

Каждая из них делает λ^c успешных выстрелов в единицу времени. Согласно условию, эти выстрелы равномерно распределяются между всеми боевыми единицами Красных, находящимися в состояниях K_2, K_3, K_4 . Их число равно

$$X_2^k + X_3^k + X_4^k,$$

значит на каждую из них приходится поток успешных выстрелов с интенсивностью

$$\frac{\lambda^c (X_0^c + X_1^c + X_2^c)}{X_2^k + X_3^k + X_4^k}.$$

Эту интенсивность, как мы знаем, надо еще помножить на функцию $R(X_2^k + X_3^k + X_4^k)$, обращающуюся в нуль, когда $X_2^k + X_3^k + X_4^k = 0$, т. е. нет единиц Красных, которые можно было бы обстрелять (см. формулу (4.4) § 4). Пользуясь обозначением $\frac{R(x)}{x} = \rho(x)$ (см. формулу (4.5) § 4), получаем интенсивность потока событий, переводящего боевую единицу Красных из состояния K_2 в K_3 :

$$\lambda_{23}^k = \lambda^c (X_0^c + X_1^c + X_2^c) \cdot \rho (X_2^k + X_3^k + X_4^k). \quad (9.4)$$

Аналогично найдем интенсивность потока событий, переводящего боевую единицу Синих из состояния C_2 в C_3 :

$$\lambda_{23}^c = \lambda^k (X_0^k + X_1^k + X_2^k) \cdot \rho (X_2^c + X_3^c + X_4^c). \quad (9.5)$$

Определим интенсивность потока событий, переводящего единицу из состояния K_3 в K_4 ; это интенсивность потока успешных контрольных разведок Синих, доставляющих им сведения о поражении обстреливаемых единиц. В общем случае интенсивность потока контрольных разведок не совпадает с интенсивностью потока разведок, направленных на обнаружение новых целей; они даже могут осуществляться разными силами. Обозначим интенсивность потока контрольных разведок Синих $\lambda_{конт}^k$ (эта величина может быть подсчитана, как обратная среднему времени, отделяющему момент поражения цели от момента обнаружения его контрольной разведкой). Имеем

$$\lambda_{34}^k = \lambda_{конт}^k \quad (9.6)$$

и аналогично

$$\lambda_{34}^c = \lambda_{конт}^c. \quad (9.7)$$

Интенсивности $\lambda_{конт}^k, \lambda_{конт}^c$ могут быть как зависимы, так и независимы от средних численностей состояний.

Остается определить интенсивность потока событий, переводящего единицу из K_4 в K_5 . Эту интенсивность можно считать величиной, обратной среднему времени передачи распоряжения о снятии огня с единицы после того, как ее поражение зарегистрировано разведкой Синих. Обозначим это среднее время $\bar{t}_{сн}^c$ (аналогично для Красных $\bar{t}_{сн}^k$). Получим:

$$\lambda_{45}^k = 1/\bar{t}_{сн}^c, \quad (9.8)$$

$$\lambda_{45}^c = 1/\bar{t}_{сн}^k. \quad (9.9)$$

Пользуясь графом состояний (рис. 6.36), интенсивностями (9.1)–(9.8) и применяя принцип квазирегулярности, запишем уравнения динамики боя в виде:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dm_0^k}{dt} &= -\lambda_{разв}^c m_0^k, \\ \frac{dm_1^k}{dt} &= -\frac{1}{\bar{t}_{пост}^c} m_1^k + \lambda_{разв}^c m_0^k, \\ \frac{dm_2^k}{dt} &= -\lambda^c (m_0^c + m_1^c + m_2^c) \rho (m_2^k + m_3^k + m_4^k) m_2^k + \\ &\quad + \frac{1}{\bar{t}_{пост}^c} m_1^k, \\ \frac{dm_3^k}{dt} &= -\lambda_{конт}^c m_3^k + \lambda^c (m_0^c + m_1^c + m_2^c) \times \\ &\quad \times \rho (m_2^k + m_3^k + m_4^k) m_3^k, \end{aligned} \right\}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{dm_4^k}{dt} &= -\frac{1}{T_{сн}^c} m_4^k + \lambda_{конт}^c m_3^k, \\
 \frac{dm_0^c}{dt} &= -\lambda_{разв}^k m_0^c, \\
 \frac{dm_1^c}{dt} &= -\frac{1}{T_{пост}^k} m_1^c + \lambda_{разв}^k m_0^c, \\
 \frac{dm_2^c}{dt} &= -\lambda^k (m_0^k + m_1^k + m_2^k) \rho (m_2^c + m_3^c + m_4^c) m_2^c + \\
 &\quad + \frac{1}{T_{пост}^k} m_1^c, \\
 \frac{dm_3^c}{dt} &= -\lambda_{конт}^k m_3^c + \lambda^k (m_0^k + m_1^k + m_2^k) \times \\
 &\quad \times \rho (m_2^c + m_3^c + m_4^c) m_2^c, \\
 \frac{dm_4^c}{dt} &= -\frac{1}{T_{сн}^k} m_4^c + \lambda_{конт}^k m_3^c.
 \end{aligned}
 \tag{9.10}$$

Уравнения для m_5^k , m_5^c отброшены, так как для любого момента t

$$\left. \begin{aligned}
 m_5^k &= N^k - (m_0^k + m_1^k + m_2^k + m_3^k + m_4^k), \\
 m_5^c &= N^c - (m_0^c + m_1^c + m_2^c + m_3^c + m_4^c).
 \end{aligned} \right\}
 \tag{9.11}$$

К тому же, как правило, нас не интересуют численности единиц, пораженных и не обстреливаемых (и тем самым выбывших из числа как активных, так и пассивных элементов системы).

Дифференциальные уравнения (9.10) при любых значениях входящих в них параметров могут быть решены численно (на машине или вручную). Начальные условия зависят от тактической ситуации, которую требуется исследовать. Например, если к началу боевых действий какая-то доля боевых единиц уже разведана (α^k для Красных и α^c для Синих), то начальные условия будут:

$$\begin{aligned}
 t=0, \quad m_0^k &= N^k (1 - \alpha^c); \quad m_1^k = N^k \alpha^k; \\
 m_2^k &= m_3^k = m_4^k = m_5^k = 0; \\
 m_0^c &= N^c (1 - \alpha^c); \quad m_1^c = N^c \alpha^c; \\
 m_2^c &= m_3^c = m_4^c = m_5^c = 0.
 \end{aligned}$$

Рассмотренная нами модель боя **В** является более общей, чем ранее рассмотренные модели **А** и **Б**, которые вытекают из модели **В** как частные случаи.

Действительно, если считать в начальный момент все единицы разведанными, а время, необходимое для обнаружения факта поражения цели и для передачи информации об этом по всем звеньям системы управления, равным нулю — получится модель **А** (при этом три пер-

вые состояния сольются в одно: «единица не поражена», и три последние — тоже в одно: «единица поражена»). Модель **Б** получится, если также считать в начальный момент все единицы разведанными, но время, необходимое для получения и передачи информации, положить равным бесконечности.

Уравнения модели **В**, включающие, кроме чисто боевых действий, еще и разведывательные, а также учитывающие степень совершенства системы управления боем, позволяют решать задачи, связанные как бы с «ценой информации» в процессе развития боевых действий.

Заметим дополнительно, что в уравнениях модели **В**, как и для моделей **А** и **Б**, можно легко учесть все дополнительные факторы, сопровождающие боевые действия (упреждающий удар, пополнение сил, темп мобилизации и т. д.).

10. УЧЕТ ВОССТАНОВЛЕНИЯ ЕДИНИЦ В ХОДЕ БОЕВЫХ ДЕЙСТВИЙ

До сих пор, рассматривая уравнения динамики боя, мы предполагали, что пораженная боевая единица окончательно выбывает из строя. Вообще говоря, это не всегда так. В случае, когда продолжительность боевых действий велика по сравнению со временем, потребным на ремонт единицы, может возникнуть речь об учете восстановления единиц в ходе боевых действий. Та же задача возникает и в случаях, когда боевая деятельность единицы при ее «поражении» прекращается лишь временно (например, из-за воздействия помех). Во всех этих случаях единица, временно выведенная из строя, может через некоторое (вообще говоря, случайное) время снова войти в строй.

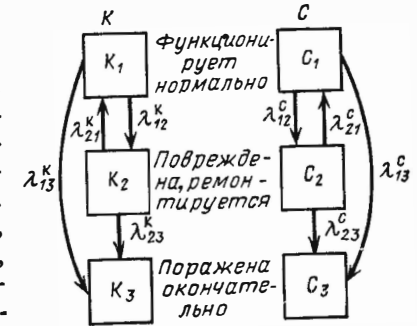


Рис. 6.37

Учесть такое восстановление в уравнениях динамики боя не представляет труда. Покажем, как это сделать, на простейшем примере, близком по схеме к модели **А** (в случае надобности аналогичным способом можно учесть восстановление единиц в любой другой модели).

Пусть в бою участвуют стороны **К** и **С** в составе N^k и N^c боевых единиц; каждая из них может быть в одном из состояний:

K_1 (C_1) — функционирует нормально,

K_2 (C_2) — повреждена, ремонтируется,

K_3 (C_3) — поражена окончательно, ремонту не подлежит.

Граф состояний, распадающийся на подграфы **С** и **К**, показан на рис. 6.37.

Организация боя предполагается следующей.

1. Каждая боевая единица любой стороны может вести огонь по любой боевой единице противника.

2. Огонь прицельный, каждый выстрел может повредить только ту единицу, по которой направлен.

3. Огонь равномерно распределяется между всеми не окончательно пораженными единицами, как действующими, так и ремонтируемыми.

4. Поврежденная единица огня не ведет.

5. При окончательном поражении единицы огонь с нее немедленно снимается и переносится на другую, еще не пораженную.

Все потоки событий, как всегда, будем считать пуассоновскими. Каждая боевая единица Красных производит поток выстрелов с интенсивностью λ^k , Синих — с интенсивностью λ^c . Выстрел, направленный по неповрежденной единице Красных, повреждает ее (переводит из K_1 в K_2) с вероятностью \mathcal{P}_2^k и окончательно поражает ее с вероятностью \mathcal{P}_3^k . Выстрел, направленный по уже поврежденной единице, поражает ее окончательно (переводит в состояние K_3) с вероятностью \mathcal{Q}_3^k ; в противном случае состояние единицы не меняется. Аналогичные данные для боевой единицы Синих будут \mathcal{P}_2^c , \mathcal{P}_3^c , \mathcal{Q}_3^c .

Среднее время ремонта (восстановления) поврежденной боевой единицы Красных равно $\bar{t}_{\text{рем}}^k$, Синих — $\bar{t}_{\text{рем}}^c$.

Напишем уравнения динамики средних для такой системы. Введем обычные обозначения численностей и средних численностей состояний:

$$X_1^k, X_2^k, X_3^k, X_1^c, X_2^c, X_3^c, \\ m_1^k, m_2^k, m_3^k, m_1^c, m_2^c, m_3^c$$

и выразим все интенсивности λ_{ij}^k , λ_{ij}^c через заданные параметры и численности состояний.

Найдем интенсивность λ_{12}^k . Всего по стороне K в момент t стреляет X_1^c единиц Синих; каждая из них производит, в среднем, λ^c выстрелов в единицу времени (в данном случае просто «выстрелов», а не «успешных выстрелов»). Эти выстрелы равномерно распределяются между всеми функционирующими и восстанавливаемыми единицами Красных. Обстрелянная неповрежденная единица с вероятностью \mathcal{P}_2^k повреждается, с вероятностью \mathcal{P}_3^k полностью выводится из строя. Очевидно, на каждую единицу в состоянии K_1 приходится в единицу времени в среднем

$$\frac{\lambda^c X_1^c \mathcal{P}_2^k}{X_1^k + X_2^k}$$

«повреждающих» выстрелов; эту интенсивность потока повреждающих выстрелов надо умножить на функцию $R(X_1^k + X_2^k)$ (см. формулу (4.4) § 4), обращаящуюся в нуль, когда нет ни одной единицы, которую можно обстреливать. Получим:

$$\lambda_{12}^k = \frac{\lambda^c X_1^c \mathcal{P}_2^k}{X_1^k + X_2^k} R(X_1^k + X_2^k), \quad (10.1)$$

где поправочный множитель $R(X_1^k + X_2^k)$ для начальных стадий боя можно не учитывать (полагать равным единице). Аналогично получим интенсивность потока событий, переводящих единицу Красных из состояния K_1 в K_3 (поражена полностью):

$$\lambda_{13}^k = \frac{\lambda^c X_1^c \mathcal{P}_3^k}{X_1^k + X_2^k} R(X_1^k + X_2^k). \quad (10.2)$$

Интенсивность потока событий, переводящего единицу Красных из K_2 в K_3 :

$$\lambda_{23}^k = \frac{\lambda^c X_1^c \mathcal{Q}_3^k}{X_1^k + X_2^k} R(X_1^k + X_2^k). \quad (10.3)$$

Наконец, величина интенсивности потока событий (восстановлений), переводящего единицу из K_2 в K_1 , обратна среднему времени ремонта:

$$\lambda_{21}^k = \frac{1}{\bar{t}_{\text{рем}}^k}. \quad (10.4)$$

Переходя в выражениях интенсивностей от функции $R(x)$ к функции $\rho(x) = \frac{R(x)}{x}$, получим:

$$\left. \begin{aligned} \lambda_{21}^k &= 1/\bar{t}_{\text{рем}}^k, \\ \lambda_{12}^k &= \lambda^c X_1^c \mathcal{P}_2^k \rho(X_1^k + X_2^k), \\ \lambda_{13}^k &= \lambda^c X_1^c \mathcal{P}_3^k \rho(X_1^k + X_2^k), \\ \lambda_{23}^k &= \lambda^c X_1^c \mathcal{Q}_3^k \rho(X_1^k + X_2^k), \end{aligned} \right\} \quad (10.5)$$

и аналогично для Синих:

$$\left. \begin{aligned} \lambda_{21}^c &= 1/\bar{t}_{\text{рем}}^c, \\ \lambda_{12}^c &= \lambda^k X_1^k \mathcal{P}_2^c \rho(X_1^c + X_2^c), \\ \lambda_{13}^c &= \lambda^k X_1^k \mathcal{P}_3^c \rho(X_1^c + X_2^c), \\ \lambda_{23}^c &= \lambda^k X_1^k \mathcal{Q}_3^c \rho(X_1^c + X_2^c). \end{aligned} \right\} \quad (10.6)$$

С учетом графа рис. 6.37 и интенсивностей (10.5), (10.6), пользуясь принципом квазирегулярности, напишем систему уравнений дина-

мики боя с восстановлением единиц:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dm_1^k}{dt} &= -\lambda^c m_1^c (\mathcal{P}_2^k + \mathcal{P}_3^k) \rho (m_1^k + m_2^k) m_1^k + \\ &+ \frac{1}{\bar{t}_{\text{рем}}^k} m_2^k, \\ \frac{dm_2^k}{dt} &= -\frac{1}{\bar{t}_{\text{рем}}^k} m_2^k - \lambda^c m_1^c \mathcal{Q}_3^k \rho (m_1^k + m_2^k) m_2^k + \\ &+ \lambda^c m_1^c \mathcal{P}_2^k \rho (m_1^k + m_2^k) m_1^k, \\ \frac{dm_1^c}{dt} &= -\lambda^k m_1^k (\mathcal{P}_2^c + \mathcal{P}_3^c) \rho (m_1^c + m_2^c) m_1^c + \\ &+ \frac{1}{\bar{t}_{\text{рем}}^c} m_2^c, \\ \frac{dm_2^c}{dt} &= -\frac{1}{\bar{t}_{\text{рем}}^c} m_2^c - \lambda^k m_1^k \mathcal{Q}_3^c \rho (m_1^c + m_2^c) m_2^c + \\ &+ \lambda^k \mathcal{P}_2^c \rho (m_1^c + m_2^c) m_1^c. \end{aligned} \right\} (10.7)$$

Что касается m_3^k , m_3^c , то для любого момента t

$$m_3^k = N^k - (m_1^k + m_2^k),$$

$$m_3^c = N^c - (m_1^c + m_2^c);$$

к тому же, эти состояния нас, как правило, не интересуют.

Система нелинейных дифференциальных уравнений (10.7) для любых конкретных значений входящих в нее параметров может быть решена численно (на машине или вручную). Начальные условия, как всегда, задаются исходя из тактических соображений. Например, если нас интересует поведение системы в ближайшее время после открытия боевых действий, то можно принять начальные условия:

$$\begin{aligned} t = 0; \quad m_1^k &= N^k; \quad m_2^k = m_3^k = 0, \\ m_1^c &= N^c; \quad m_2^c = m_3^c = 0. \end{aligned}$$

Однако нас может заинтересовать и способность той или другой стороны «выбираться» из трудного положения, когда в начальный момент значительное количество ее единиц повреждено.

Заметим, что для начальных стадий боя, когда средние численности неповрежденных и ремонтируемых единиц $m_1^k + m_2^k$, $m_1^c + m_2^c$ еще достаточно велики, поправочные множители $R(m_1^k + m_2^k)$, $R(m_1^c + m_2^c)$ обращаются в единицу, а значит, $\rho(m_1^k + m_2^k)$ можно заменить на $1/(m_1^k + m_2^k)$, а $\rho(m_1^c + m_2^c)$ на $1/(m_1^c + m_2^c)$.

При решении задачи мы для простоты предполагаем, что огонь распределяется равномерно между всеми не окончательно пораженными единицами — как поврежденными, так и неповрежденными. Однако это вовсе не обязательно: легко учесть и неравномерное распределение огня между теми и другими. Для этого достаточно умножить соответствующие интенсивности потоков выстрелов на

какие-то коэффициенты, большие единицы для тех элементов, которые обстреливаются предпочтительно, и меньшие единицы — для остальных; эти коэффициенты могут быть как постоянными, так и переменными. С методикой учета неравномерности распределения огня мы познакомимся в следующем параграфе.

11. УРАВНЕНИЯ ДИНАМИКИ БОЯ ДЛЯ НЕОДНОРОДНЫХ ЕДИНИЦ. ФУНКЦИИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ОГНЯ

До сих пор мы рассматривали только группировки, состоящие из однородных боевых единиц. Не представляет труда написать уравнения динамики боя и для случая, когда боевые единицы, входящие в группировку, неоднородны. Продемонстрируем это снова на примере простейшей модели, близкой по форме организации к модели А, но отличающейся от нее разнородностью единиц.

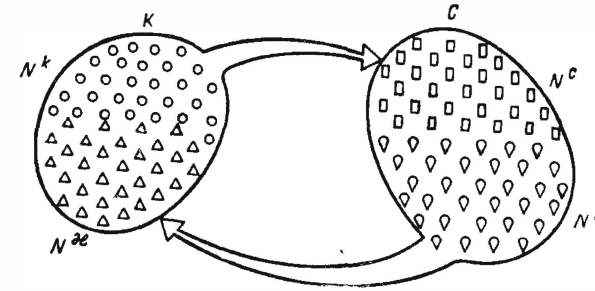


Рис. 6.38

Пусть происходит бой между двумя группировками К и С, причем группировка К состоит из неоднородных боевых единиц типов k и x , а группировка С — из неоднородных боевых единиц типов c и y (рис. 6.38). Количество боевых единиц каждого типа равно соответственно N^k , N^x , N^c , N^y . Каждая боевая единица может быть в одном из двух состояний: не поражена, поражена. Стрельба ведется только по непораженным единицам (получение и учет информации мгновенны, как в модели А).

Граф состояний единицы показан на рис. 6.39 — он распадается на четыре подграфа: k и x , c и y (по числу типов единиц). Как обычно обозначим численности состояний и средние численности состояний соответственно

$$\begin{aligned} X_1^k, X_2^k, X_1^x, X_2^x, X_1^c, X_2^c, X_1^y, X_2^y, \\ m_1^k, m_2^k, m_1^x, m_2^x, m_1^c, m_2^c, m_1^y, m_2^y. \end{aligned}$$

Чтобы определить интенсивности потоков событий, переводящих единицы из состояния в состояние, нужно задаться каким-то пра в и-

лом распределения огня между единицами различных типов. Это правило будет предписывать в каждый момент времени t какую-то долю имеющихся в нашем распоряжении боевых средств каждого типа направлять по единицам противника первого типа, а все остальные — по единицам второго типа.

Введем обозначение для функций, описывающих это распределение (условимся тип стреляющей единицы ставить у буквы первым индексом, а обстреливаемой — вторым). Введем обозначения:

$\alpha_{k,c}(t)$ — доля непораженных боевых единиц типа k , огонь которых в момент t направляется по боевым единицам типа c ,

$\alpha_{k,\gamma}(t)$ — доля непораженных боевых единиц типа k , огонь которых в момент t направляется по боевым единицам типа γ .

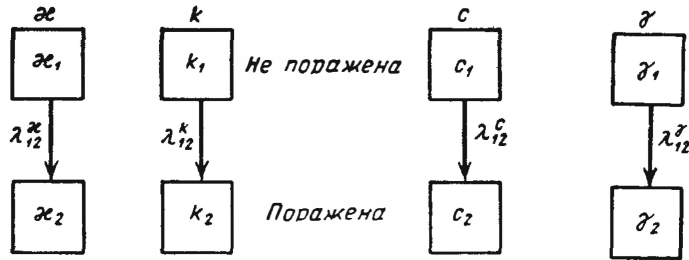


Рис. 6.39

Очевидно, что так как в любой момент времени огонь ведут все способные к этому единицы,

$$\alpha_{k,\gamma}(t) = 1 - \alpha_{k,c}(t).$$

Аналогично обозначим

$$\alpha_{x,c}(t), \alpha_{x,k}(t), \alpha_{\gamma,k}(t)$$

долю непораженных боевых единиц типов x, c, γ соответственно, огонь которых в момент t направляется по единицам типов c, k, k соответственно, и назовем четыре функции

$$\alpha_{k,c}(t), \alpha_{x,c}(t), \\ \alpha_{c,k}(t), \alpha_{\gamma,k}(t)$$

функциями распределения огня.

Кроме функций распределения огня, надо задаться также характеристиками эффективности огня различных единиц по различным целям. Обозначим:

$$\lambda^k, \lambda^x, \lambda^c, \lambda^\gamma \quad (11.1)$$

интенсивности потоков выстрелов соответствующих боевых единиц. Кроме того, обозначим:

$\mathcal{P}_{k,c}$ — вероятность поражения боевой единицы типа c при одном выстреле по ней боевой единицы типа k ,

$\mathcal{P}_{k,\gamma}$; $\mathcal{P}_{x,c}$; $\mathcal{P}_{x,\gamma}$; $\mathcal{P}_{c,k}$; $\mathcal{P}_{c,x}$; $\mathcal{P}_{\gamma,k}$; $\mathcal{P}_{\gamma,x}$ — аналогично.

В этих обозначениях снова индекс стреляющей единицы — слева, обстреливаемой — справа.

Умножая интенсивности потоков выстрелов на соответствующие вероятности поражения, получим эффективные скорострельности:

$$\left. \begin{aligned} \lambda_{k,c} &= \lambda^k \mathcal{P}_{k,c}; & \lambda_{k,\gamma} &= \lambda^k \mathcal{P}_{k,\gamma}; \\ \lambda_{x,c} &= \lambda^x \mathcal{P}_{x,c}; & \lambda_{x,\gamma} &= \lambda^x \mathcal{P}_{x,\gamma}; \\ \lambda_{c,k} &= \lambda^c \mathcal{P}_{c,k}; & \lambda_{c,x} &= \lambda^c \mathcal{P}_{c,x}; \\ \lambda_{\gamma,k} &= \lambda^\gamma \mathcal{P}_{\gamma,k}; & \lambda_{\gamma,x} &= \lambda^\gamma \mathcal{P}_{\gamma,x}. \end{aligned} \right\} \quad (11.2)$$

Теперь можно найти интенсивности всех потоков событий для графа рис. 6.39.

Определим λ_{12}^k . Для этого найдем среднее число успешных выстрелов, приходящееся на одну боевую единицу типа k за единицу времени. Всего по единицам типа k за единицу времени приходится

$$\alpha_{c,k} \lambda_{c,k} X_1^c + \alpha_{\gamma,k} \lambda_{\gamma,k} X_1^\gamma$$

успешных выстрелов. Это число надо разделить на число X_1^k боевых единиц в состоянии k_1 и умножить на поправочный множитель $R(X_1^k)$. Отсюда, переходя от функции $R(x)$ к функции $\rho(x) = \frac{R(x)}{x}$, получим:

$$\lambda_{12}^k = (\alpha_{c,k} \lambda_{c,k} X_1^c + \alpha_{\gamma,k} \lambda_{\gamma,k} X_1^\gamma) \rho(X_1^k). \quad (11.3)$$

Аналогично

$$\lambda_{12}^x = (\alpha_{c,x} \lambda_{c,x} X_1^c + \alpha_{\gamma,x} \lambda_{\gamma,x} X_1^\gamma) \rho(X_1^x), \quad (11.4)$$

$$\lambda_{12}^c = (\alpha_{k,c} \lambda_{k,c} X_1^k + \alpha_{x,c} \lambda_{x,c} X_1^x) \rho(X_1^c), \quad (11.5)$$

$$\lambda_{12}^\gamma = (\alpha_{k,\gamma} \lambda_{k,\gamma} X_1^k + \alpha_{x,\gamma} \lambda_{x,\gamma} X_1^x) \rho(X_1^\gamma). \quad (11.6)$$

Эти выражения можно несколько упростить, если объединить функции распределения огня с эффективными скорострельностями и обозначить:

$$\left. \begin{aligned} \beta_{k,c} &= \alpha_{k,c} \lambda_{k,c}, & \beta_{k,\gamma} &= \alpha_{k,\gamma} \lambda_{k,\gamma}, \\ \beta_{x,c} &= \alpha_{x,c} \lambda_{x,c}, & \beta_{x,\gamma} &= \alpha_{x,\gamma} \lambda_{x,\gamma}, \\ \beta_{c,k} &= \alpha_{c,k} \lambda_{c,k}, & \beta_{c,x} &= \alpha_{c,x} \lambda_{c,x}, \\ \beta_{\gamma,k} &= \alpha_{\gamma,k} \lambda_{\gamma,k}, & \beta_{\gamma,x} &= \alpha_{\gamma,x} \lambda_{\gamma,x}. \end{aligned} \right\} \quad (11.7)$$

Вновь введенные функции (11.7) можно назвать функциями распределения эффективности. С учетом этих обозначений и формул (11.2) — (11.6) можно записать дифференциальные уравнения для средних численностей состояний (уравнения динамики боя) в виде:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dm_1^k}{dt} &= -(\beta_{c,k} m_1^c + \beta_{\gamma,k} m_1^\gamma) R(m_1^k), \\ \frac{dm_1^x}{dt} &= -(\beta_{c,x} m_1^c + \beta_{\gamma,x} m_1^\gamma) R(m_1^x), \\ \frac{dm_1^c}{dt} &= -(\beta_{k,c} m_1^k + \beta_{x,c} m_1^x) R(m_1^c), \\ \frac{dm_1^\gamma}{dt} &= -(\beta_{k,\gamma} m_1^k + \beta_{x,\gamma} m_1^x) R(m_1^\gamma). \end{aligned} \right\} \quad (11.8)$$

Средние численности остальных состояний (обычно нас не интересующие) могут быть найдены из условий:

$$\left. \begin{aligned} m_2^k &= N^k - m_1^k; & m_2^x &= N^x - m_1^x; \\ m_2^c &= N^c - m_1^c; & m_2^\gamma &= N^\gamma - m_1^\gamma. \end{aligned} \right\} \quad (11.9)$$

Заметим, что уравнения (11.8) для начальных стадий боя, когда поправочные множители $R(m_1^k)$, $R(m_1^x)$, $R(m_1^c)$, $R(m_1^\gamma)$ равны единице, являются линейными уравнениями (в общем случае с переменными коэффициентами). Решение подобных уравнений (на машине или вручную) затруднений не представляет.

Отметим, что, пользуясь подобными уравнениями (число однородных элементов в которых легко увеличить), можно не только приближенно описывать ход боевых действий при заданных функциях распределения огня, но и оптимизировать управление боем, т. е. находить наивыгоднейший вид этих функций.

В заключение заметим, что в уравнениях подобного типа можно рассматривать динамику изменения численностей не только боевых единиц, но и любых вспомогательных (радиолокационные станции, транспортные средства и т. п.). Разумеется, для всех таких единиц нужно полагать эффективные скорострельности равными нулю.

12. УРАВНЕНИЯ СМЕШАННОГО ТИПА

До сих пор мы описывали процессы, протекающие в физических системах, либо с помощью уравнений для вероятностей состояний (см. гл. 4 и 5), либо с помощью уравнений динамики средних (гл. 6), где неизвестными функциями являются средние численности состояний. Уравнения первого типа применялись тогда, когда система была сравнительно проста и ее состояния — сравнительно немногочисленны. Уравнения второго типа были специально предназначены для описания процессов, происходящих в системах, состоящих из многочисленных элементов; для таких систем нам удавалось найти не вероятности состояний, а, в первую очередь, средние численности состояний.

На практике встречаются ситуации, в которых приходится применять уравнения смешанного типа. В этих уравнениях фигурируют как вероятности состояний, так и средние численности

состояний. Такой аппарат применяется, когда система S , в которой происходит процесс, состоит из элементов разного типа: немногочисленных (уникальных) и многочисленных (сопутствующих), причем состояния тех и других взаимообусловлены.

В подобных случаях для элементов первого типа можно составить дифференциальные уравнения, в которых неизвестными функциями являются вероятности состояний; для элементов же второго типа — уравнения динамики средних, где неизвестные функции — средние численности состояний. Такие уравнения мы будем называть уравнениями смешанного типа.

В качестве примера рассмотрим систему S , состоящую из большого количества N однородных приборов (элементов) и одного стабилизатора напряжения C , который выполняет важную функцию обеспечения нормального режима работы всех приборов сразу. Как стабилизатор, так и отдельные приборы могут выходить из строя (отказываться). Интенсивность потока неисправностей стабилизатора зависит от числа x работающих приборов:

$$\lambda^c = \varphi(x). \quad (12.1)$$

Вышедший из строя стабилизатор немедленно начинает ремонтироваться; среднее время ремонта стабилизатора зависит от числа одновременно с ним находящихся в ремонте приборов y :

$$\bar{t}_{\text{рем}}^c = \psi(y). \quad (12.2)$$

Интенсивность потока неисправностей каждого прибора при работающем стабилизаторе равна μ_c , при неработающем — $\mu_{\bar{c}}$. Отказавший прибор немедленно начинает ремонтироваться; среднее время ремонта прибора зависит от того, ремонтируется ли стабилизатор и сколько приборов ремонтируется одновременно. При не ремонтируемом стабилизаторе это время равно $f_c(y)$, при ремонтируемом — $f_{\bar{c}}(y)$, где y — число одновременно ремонтируемых приборов, а f_c , $f_{\bar{c}}$ — некоторые функции.

Требуется описать процесс, протекающий в системе, с помощью уравнений смешанного типа, в которых неизвестными функциями будут:

- вероятности состояний (для стабилизатора),
- средние численности состояний (для приборов).

Методика составления таких уравнений отличается от уже известной нам методики составления уравнений динамики средних. В самом деле, при составлении уравнений для средних численностей состояний мы пользовались принципом квазирегулярности, основываясь на том, что значения случайной величины X_i — численности i -го состояния — близки к своему среднему значению m_i , группируются вокруг этого среднего значения. При наличии в системе «уникального» элемента уже нет оснований считать, что это так. В этом случае типичной будет другая ситуация, когда распределение численностей состояний вспомогательного элемента имеет двухвершинный вид, как, например, показано на рис. 6.40. По оси абсцисс откладываются численности какого-то

состояния вспомогательного элемента, а по оси ординат — соответствующие вероятности. Если конкретно речь идет о численности X_1 работающих элементов, то правая группа значения (см. рис 6.40) соответствует работе системы при исправном стабилизаторе, а левая — при неисправном (разумеется, считая, что работа стабилизатора благоприятна для приборов). Если распределение таково, как на рис. 6.40, то случайная величина иногда будет близка к среднему значению левой группы, иногда — к среднему правой группы, но практически никогда не будет близка к «полному» среднему значению случайной величины, которое лежит где-то между обеими группами. В таких случаях принцип квазирегулярности неприменим.

Посмотрим, нельзя ли чем-нибудь заменить этот принцип, чтобы все-таки решить поставленную задачу? Оказывается, можно, Действительно, то, что мы довольно неопределенно называли «средним значе-

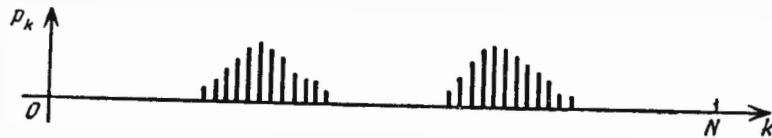


Рис. 6.40

нием одной группы» (в случае, когда распределение группируется в двух местах на отрезке от 0 до N) — это не что иное, как условное математическое ожидание случайной величины X_1 при условии, что стабилизатор работает — для одной группы, или при условии, что стабилизатор не работает — для другой.

Напомним, что такое условное математическое ожидание. Обычное математическое ожидание случайной величины X_1 (безусловное) определяется как сумма

$$M[X_1] = \sum_{k=0}^N k p_k, \quad (12.3)$$

где p_k — вероятность того, что случайная величина X_1 примет значение k :

$$p_k = P(X_1 = k), \quad (k = 0, 1, \dots, N). \quad (12.4)$$

С учетом (12.4) формулу (12.3) можно переписать в виде:

$$M[X_1] = \sum_{k=0}^N k \cdot P(X_1 = k). \quad (12.5)$$

Рассмотрим теперь какое-нибудь случайное событие C (в применении к нашему случаю — событие, состоящее в том, что стабилизатор работает). Определим условное математическое ожидание случайной величины X_1 при условии события C , заменив в формуле (12.5) вероятности — условными вероятностями:

$$M[X_1/C] = \sum_{k=0}^N k \cdot P(X_1 = k/C), \quad (12.6)$$

где $P(X_1 = k/C)$ — условная вероятность того, что случайная величина X_1 примет значение k , при условии, что имеет место событие C .

Аналогично напишется определение и для условных математических ожиданий $M[X_1/\bar{C}]$, $M[X_2/C]$, $M[X_2/\bar{C}]$ (случайная величина X_2 — число приборов в состоянии ремонта, \bar{C} — событие, состоящее в том, что стабилизатор ремонтируется).

Преобразуем формулу (12.6) к другому виду. Для этого воспользуемся выражением для условной вероятности любого события A при условии, что событие C имеет место:

$$P(A/C) = \frac{P(AC)}{P(C)}. \quad (12.7)$$

Тогда формула (12.6) примет вид:

$$M[X_1/C] = \sum_{k=0}^N k \frac{P(C, X_1 = k)}{P(C)} = \frac{1}{P(C)} \sum_{k=0}^N k P(C, X_1 = k). \quad (12.8)$$

Здесь $P(C, X_1 = k)$ означает вероятность того, что имеют место оба события: и C , и $X_1 = k$ (т. е. стабилизатор работает и случайная величина X_1 приняла значение k).

Чтобы упростить выражение (12.8) введем новую случайную величину:

$$X_1^c = \begin{cases} X_1, & \text{если имеет место событие } C, \\ 0, & \text{если событие } C \text{ не имеет места.} \end{cases}$$

С помощью этой случайной величины X_1^c условное математическое ожидание $M[X_1/C]$ запишется следующим образом:

$$M[X_1/C] = \frac{1}{P(C)} M[X_1^c]. \quad (12.9)$$

Действительно, для $k \neq 0$

$$P(X_1^c = k) = P(C, X_1 = k);$$

поэтому математическое ожидание случайной величины X_1^c запишется как

$$M[X_1^c] = \sum_{k=1}^N k \cdot P(C, X_1 = k)$$

или, учитывая, что член суммы, соответствующий $k = 0$, равен нулю,

$$M[X_1^c] = \sum_{k=0}^N k \cdot P(C, X_1 = k).$$

Аналогично, вводя в рассмотрение случайные величины

$$X_1^{\bar{c}} = \begin{cases} 0, & \text{если событие } C \text{ имеет место,} \\ X_1, & \text{если событие } C \text{ не имеет места} \\ & (\text{т. е. имеет место } \bar{C}), \end{cases}$$

$$X_2^c = \begin{cases} X_2, & \text{если событие } C \text{ имеет место,} \\ 0, & \text{если событие } C \text{ не имеет места.} \end{cases}$$

$$X_2^{\bar{c}} = \begin{cases} 0, & \text{если событие } C \text{ имеет место,} \\ X_2, & \text{если событие } C \text{ не имеет места,} \end{cases}$$

получаем:

$$M[X_1/\bar{C}] = \frac{1}{P(\bar{C})} M[X_1^{\bar{c}}], \quad (12.10)$$

$$M[X_2/C] = \frac{1}{P(C)} M[X_2^c], \quad (12.11)$$

$$M[X_2/\bar{C}] = \frac{1}{P(\bar{C})} M[X_2^{\bar{c}}]. \quad (12.12)$$

Заметим, что для любого момента времени t

$$\left. \begin{aligned} X_1^c + X_1^{\bar{c}} &= X_1; & X_2^c + X_2^{\bar{c}} &= X_2; \\ X_1^c + X_1^{\bar{c}} + X_2^c + X_2^{\bar{c}} &= N. \end{aligned} \right\} \quad (12.13)$$

Теперь перейдем к выводу дифференциальных уравнений для описания процесса, протекающего в нашей системе. При этом мы будем

исходить из того, что численности состояний в случае, когда стабилизатор работает, приближенно равны условным математическим ожиданиям этих численностей при условии, что имеет место событие C ; а когда он не работает — соответствующим условным математическим ожиданиям при условии, что имеет место событие \bar{C} .

Прежде всего, опишем нашу систему при помощи графа. Этот граф (рис. 6.41) будет выглядеть несколько по-иному по сравнению с обычным случаем. Он распадается на два подграфа. Первый (верхний) — это подграф состояний

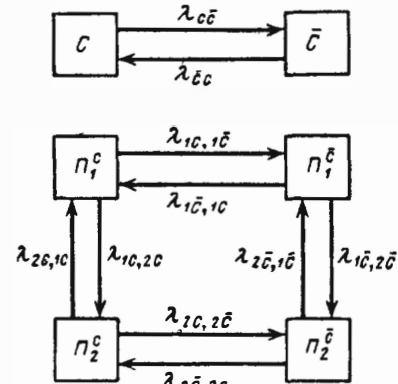


Рис. 6.41

стабилизатора, который может быть в одном из двух состояний:

C — работает,

\bar{C} — не работает (ремонтируется).

Что же касается прибора, то для него мы учитываем возможность находиться в одном из четырех состояний:

Π_1^c — прибор работает при работающем стабилизаторе,

Π_2^c — прибор не работает (ремонтируется) при работающем стабилизаторе,

$\Pi_1^{\bar{c}}$ — прибор работает при неработающем стабилизаторе,

$\Pi_2^{\bar{c}}$ — прибор ремонтируется при неработающем стабилизаторе.

Состояние стабилизатора в момент t характеризуется одним из событий $C = C(t)$, $\bar{C} = \bar{C}(t)$ (до сих пор мы для краткости все время опускали t). Вероятности этих событий обозначим $p(t)$ и $\bar{p}(t) = 1 - p(t)$. Как видно, это уже известные нам вероятности состояния стабилизатора.

Численности состояний Π_1^c , Π_2^c , $\Pi_1^{\bar{c}}$, $\Pi_2^{\bar{c}}$ мы уже ввели в рассмотрение: это $X_1^c = X_1^c(t)$, $X_2^c = X_2^c(t)$, $X_1^{\bar{c}} = X_1^{\bar{c}}(t)$, $X_2^{\bar{c}} = X_2^{\bar{c}}(t)$.

Соответствующие математические ожидания обозначим:

$$\left. \begin{aligned} m_1^c(t) &= M[X_1^c(t)], \\ m_2^c(t) &= M[X_2^c(t)], \\ m_1^{\bar{c}}(t) &= M[X_1^{\bar{c}}(t)], \\ m_2^{\bar{c}}(t) &= M[X_2^{\bar{c}}(t)]. \end{aligned} \right\} \quad (12.14)$$

Очевидно, для любого момента времени t

$$m_1^c(t) + m_2^c(t) + m_1^{\bar{c}}(t) + m_2^{\bar{c}}(t) = N. \quad (12.15)$$

Определим интенсивности потоков событий для графа рис. 6.41. Прежде всего, по условию;

$$\lambda_{c\bar{c}} = \lambda^c = \varphi(X_1), \quad (12.16)$$

$$\lambda_{\bar{c}c} = \frac{1}{f_{\text{рем}}^c} = \frac{1}{\psi(X_2)}. \quad (12.17)$$

Далее, прибор переходит из состояния Π_1^c в $\Pi_1^{\bar{c}}$ или из состояния Π_2^c в $\Pi_2^{\bar{c}}$ не сам по себе, а только вместе и одновременно со стабилизатором (когда тот выходит из строя); поэтому

$$\lambda_{1c, 1\bar{c}} = \lambda_{2c, 2\bar{c}} = \lambda_{c\bar{c}} = \varphi(X_1). \quad (12.18)$$

Аналогично,

$$\lambda_{1\bar{c}, 1c} = \lambda_{2\bar{c}, 2c} = \lambda_{\bar{c}c} = \frac{1}{\psi(X_2)}. \quad (12.19)$$

Что касается переходов прибора из Π_1 , $\Pi_1^{\bar{c}}$ в Π_2^c , $\Pi_2^{\bar{c}}$ и наоборот (по вертикальным стрелкам), то нетрудно установить соответствующие интенсивности:

$$\lambda_{1c, 2c} = \mu_c; \quad \lambda_{1\bar{c}, 2\bar{c}} = \mu_{\bar{c}}; \quad (12.20)$$

$$\lambda_{2c, 1c} = \frac{1}{f_c(X_2)}, \quad (12.21)$$

$$\lambda_{2\bar{c}, 1\bar{c}} = \frac{1}{f_{\bar{c}}(X_2)}. \quad (12.22)$$

Теперь, согласно нашему видоизменению принципа квазирегулярности, при составлении дифференциальных уравнений мы должны заменить X_1 , X_2 их условными математическими

о ж и д а н и я м и; а именно, там, где идет речь о переходах из л е в о й ч а с т и г р а ф а (в л е в у ю ж е и л и в п р а в у ю) — условными математическими ожиданиями при условии, что стабилизатор исправен (условие C); а там, где переходы совершаются из п р а в о й ч а с т и — при условии \bar{C} . Это означает, что в формулах (12.16), (12.18), (12.21) мы заменим

$$X_1 \text{ на } M[X_1/C], \quad X_2 \text{ на } M[X_2/C],$$

а в формулах (12.17), (12.19), (12.22)

$$X_1 \text{ на } M[X_1/\bar{C}], \quad X_2 \text{ на } M[X_2/\bar{C}].$$

Так как формулы (12.20) не содержат X_1, X_2 , то в них ничего заменять не надо.

Пользуясь формулами (12.9) — (12.12), находим условные математические ожидания:

$$\left. \begin{aligned} M[X_1/C] &= \frac{1}{\rho(t)} m_1^c(t), \\ M[X_2/C] &= \frac{1}{\rho(t)} m_2^c(t), \\ M[X_1/\bar{C}] &= \frac{1}{\bar{\rho}(t)} m_1^{\bar{c}}(t), \\ M[X_2/\bar{C}] &= \frac{1}{\bar{\rho}(t)} m_2^{\bar{c}}(t). \end{aligned} \right\} \quad (12.23)$$

Итак, мы можем, наконец, выписать дифференциальные уравнения смешанного типа, приближенно описывающие нашу систему (аргумент t для краткости опускаем):

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\rho}{dt} &= -\varphi\left(\frac{m_1^c}{\rho}\right) \cdot \rho + \frac{1}{\psi\left(\frac{m_2^{\bar{c}}}{\bar{\rho}}\right)} \cdot \bar{\rho}; \\ \frac{d\bar{\rho}}{dt} &= -\frac{1}{\psi\left(\frac{m_2^{\bar{c}}}{\bar{\rho}}\right)} \cdot \bar{\rho} + \varphi\left(\frac{m_1^c}{\rho}\right) \cdot \rho; \\ \frac{dm_1^c}{dt} &= -\varphi\left(\frac{m_1^c}{\rho}\right) \cdot m_1^c + \mu_c \cdot m_1^c + \\ &\quad + \frac{1}{\psi\left(\frac{m_2^{\bar{c}}}{\bar{\rho}}\right)} \cdot m_1^{\bar{c}} + \frac{1}{f_c\left(\frac{m_2^c}{\rho}\right)} \cdot m_2^c; \\ \frac{dm_2^c}{dt} &= -\varphi\left(\frac{m_1^c}{\rho}\right) \cdot m_2^c - \frac{1}{f_c\left(\frac{m_2^c}{\rho}\right)} \cdot m_2^c + \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} &+ \mu_c m_1^c + \frac{1}{\psi\left(\frac{m_2^{\bar{c}}}{\bar{\rho}}\right)} \cdot m_2^{\bar{c}}; \\ \frac{dm_1^{\bar{c}}}{dt} &= -\frac{1}{\psi\left(\frac{m_2^{\bar{c}}}{\bar{\rho}}\right)} \cdot m_1^{\bar{c}} - \mu_c m_1^{\bar{c}} + \\ &+ \varphi\left(\frac{m_1^c}{\rho}\right) \cdot m_1^c + \frac{1}{f_c\left(\frac{m_2^c}{\rho}\right)} \cdot m_2^{\bar{c}}; \\ \frac{dm_2^{\bar{c}}}{dt} &= -\frac{1}{\psi\left(\frac{m_2^{\bar{c}}}{\bar{\rho}}\right)} \cdot m_2^{\bar{c}} - \frac{1}{f_c\left(\frac{m_2^c}{\rho}\right)} \cdot m_2^{\bar{c}} + \\ &+ \mu_c m_1^{\bar{c}} + \varphi\left(\frac{m_1^c}{\rho}\right) \cdot m_2^c. \end{aligned} \right\} \quad (12.24)$$

Заметим, что из этой системы уравнений можно исключить два уравнения: одно из первых двух, пользуясь условием $\rho + \bar{\rho} = 1$, и одно — из последующих четырех, пользуясь соотношением (12.15).

Эти уравнения могут решаться при любых начальных условиях; например, если в начале стабилизатор и все приборы работают:

$$\begin{aligned} t = 0; \quad \rho = 1; \quad \bar{\rho} = 0; \quad m_1^c = N; \\ m_2^c = m_1^{\bar{c}} = m_2^{\bar{c}} = 0. \end{aligned}$$

В случае, если нам важно исследовать, скажем, как быстро система выходит из «затора», созданного случайным выходом из строя значительного числа приборов (L) и стабилизатора, начальные условия нужно выбрать другими:

$$\begin{aligned} t = 0; \quad \rho = 0; \quad \bar{\rho} = 1; \quad m_1^c = 0; \quad m_2^c = 0; \\ m_1^{\bar{c}} = N - L; \quad m_2^{\bar{c}} = L. \end{aligned}$$

13. НЕКОТОРЫЕ УТОЧНЕНИЯ МЕТОДА ДИНАМИКИ СРЕДНИХ

До сих пор, рассматривая уравнения динамики средних, мы всюду пользовались принципом квазирегулярности. Напомним, в чем состоит этот принцип. Если интенсивности потоков событий, переводящих элементы системы из одного состояния в другое, определенным образом зависели от численностей состояний, мы заменяли в выражениях этих зависимостей сами численности (случайные) их средними значениями — математическими ожиданиями. То же самое, хотя и в несколь-

ко усложненном виде, мы делали в уравнениях смешанного типа, заменяя аргументы, от которых зависели интенсивности, условными математическими ожиданиями. При этом точность и приемлемость самого принципа квазирегулярности нами не обсуждалась.

В действительности сам принцип представляет собой некоторое допущение, и при пользовании им мы неизбежно допускаем какие-то ошибки. Мы уже упоминали о том, что эти ошибки сравнительно малы для случаев, когда число элементов в системе велико, а также не малы средние численности тех состояний, от которых зависят интенсивности. В данном параграфе мы коснемся вопроса об ошибках метода динамики средних, связанных с принципом квазирегулярности и внесем в уравнения динамики средних некоторые уточнения, которые позволят, в первом приближении, оценить порядок этих ошибок.

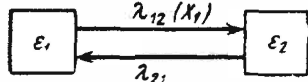


Рис. 6.42

Для простоты мы рассмотрим случай, когда элемент \mathcal{E} имеет всего два состояния: \mathcal{E}_1 и \mathcal{E}_2 , и от численности X_1 состояния \mathcal{E}_1 зависит только одна интенсивность λ_{12} , а интенсивность λ_{21} постоянна: $\lambda_{21} = \text{const}$. Граф состояний элемента \mathcal{E} дан на рис. 6.42.

Для дальнейшего нам удобно будет ввести особое обозначение $\Lambda_{12}(X_1)$ для суммарной интенсивности потоков событий, переводящих элементы системы из состояния \mathcal{E}_1 в \mathcal{E}_2 , а интенсивность λ_{12} потока, действующего на один элемент, выразить через эту суммарную интенсивность:

$$\lambda_{12} = \frac{\Lambda_{12}(X_1)}{X_1}. \quad (13.1)$$

Оказывается, для средних численностей $m_1(t)$, $m_2(t)$ состояний \mathcal{E}_1 , \mathcal{E}_2 можно вывести, не пользуясь принципом квазирегулярности, совершенно точные дифференциальные уравнения, выражающие производные $\frac{dm_1}{dt}$, $\frac{dm_2}{dt}$ через математическое ожидание случайной величины $\Lambda_{12}(X_1)$. А именно:

$$\frac{dm_1}{dt} = -M[\Lambda_{12}(X_1)] + \lambda_{21} m_2 \quad (13.2)$$

(уравнение для m_2 не выписываем, так как в данном случае $\frac{dm_2}{dt} = \frac{d(N-m_1)}{dt} = -\frac{dm_1}{dt}$).

Покажем, как выводится уравнение (13.2). Для этого рассмотрим граф состояний уже не одного отдельного элемента, а системы в целом (рис. 6.43). Состояния системы $S_0, S_1, S_2, \dots, S_N$ будем нумеровать соответственно числу X_1 элементов, находящихся в состоянии \mathcal{E}_1 .

При большом числе элементов N число состояний чрезвычайно велико, и составление и решение системы дифференциальных уравнений

для вероятностей состояний системы затруднительно; именно поэтому и обращаемся мы к методу динамики средних. Все же мы запишем уравнения Колмогорова для вероятностей состояний системы S (поскольку мы не собираемся их решать, — количество уравнений нам безразлично). Система уравнений имеет вид:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dp_0}{dt} &= -N\lambda_{21} p_0 + \Lambda_{12}(1) p_1; \\ &\dots \dots \dots \\ \frac{dp_k}{dt} &= -(N-k)\lambda_{21} p_k - \Lambda_{12}(k) p_k + \\ &\quad + (N-k+1)\lambda_{21} p_{k-1} + \Lambda_{12}(k+1) p_{k+1}; \\ &\dots \dots \dots \\ \frac{dp_N}{dt} &= -\Lambda_{12}(N) p_N + \lambda_{21} p_{N-1}, \end{aligned} \right\} \quad (13.3)$$

где $p_k(t) = P(X_1 = k)$ — вероятность того, что в момент t система будет в состоянии S_k ($k = 0, 1, 2, \dots, N$).

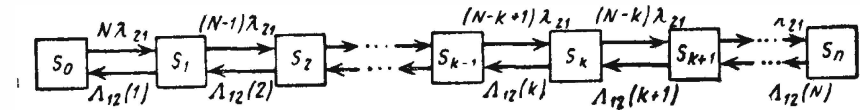


Рис. 6.43

Заметим, что первое и последнее уравнения (13.3) можно свести к общему виду, в котором записано $\frac{dp_k}{dt}$, если естественным образом положить

$$\Lambda_{12}(0) = 0; \quad p_{-1} = p_{N+1} = 0. \quad (13.4)$$

Мы знаем, что математическое ожидание дискретной случайной величины $X_1(t)$, возможные значения которой — целые числа от 0 до N , выражается формулой:

$$m_1(t) = M[X_1(t)] = \sum_{k=0}^N k p_k(t). \quad (13.5)$$

Поэтому производную от этого математического ожидания мы получим, умножив k -е уравнение системы (13.3) на k и просуммировав от 0 до N :

$$\begin{aligned} \frac{dm_1}{dt} &= - \sum_{k=0}^N k(N-k)\lambda_{21} p_k - \sum_{k=0}^N k\Lambda_{12}(k) p_k + \\ &+ \sum_{k=0}^N k(N-k+1)\lambda_{21} p_{k-1} + \sum_{k=0}^N k\Lambda_{12}(k+1) p_{k+1}. \end{aligned} \quad (13.6)$$

Первые две суммы в этом выражении оставим как они есть, а третью и четвертую преобразуем. Рассмотрим третью сумму. Учитывая, что в этой сумме член, соответствующий $k = 0$, обращается в нуль, имеем:

$$\sum_{k=1}^N k(N-k+1)\lambda_{21}p_{k-1} = \sum_{k=1}^N k(N-k+1)\lambda_{21}p_{k-1}. \quad (13.7)$$

Далее изменим индекс суммирования, положив $k-1 = i$:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^N k(N-k+1)\lambda_{21}p_{k-1} &= \sum_{i=0}^{N-1} (i+1)(N-i)\lambda_{21}p_i = \\ &= \sum_{i=0}^N (i+1)(N-i)\lambda_{21}p_i. \end{aligned} \quad (13.8)$$

Последнее равенство справедливо, так как при $i = N$ множитель $(N-i)$ обращается в нуль. Наконец, возвращаясь к обозначению k для индекса суммирования (напомним, что сумма не зависит от того, какой буквой обозначить этот индекс), получим выражение для третьей суммы:

$$\sum_{k=0}^N k(N-k+1)\lambda_{21}p_{k-1} = \sum_{k=0}^N (k+1)(N-k)\lambda_{21}p_k. \quad (13.9)$$

Аналогично преобразуем четвертую сумму; учитывая, что $p_{N+1} = \Lambda_{12}(0) = 0$, имеем:

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^N k\Lambda_{12}(k+1)p_{k+1} &= \sum_{k=0}^{N-1} k\Lambda_{12}(k+1)p_{k+1} = \\ &= \sum_{i=1}^N (i-1)\Lambda_{12}(i)p_i = \sum_{i=0}^N (i-1)\Lambda_{12}(i)p_i = \\ &= \sum_{k=0}^N (k-1)\Lambda_{12}(k)p_k. \end{aligned} \quad (13.10)$$

Подставим выражения (13.9) и (13.10) в формулу (13.6):

$$\begin{aligned} \frac{dm_1}{dt} &= - \sum_{k=0}^N k(N-k)\lambda_{21}p_k + \sum_{k=0}^N k\Lambda_{12}(k)p_k + \\ &+ \sum_{k=0}^N (k+1)(N-k)\lambda_{21}p_k + \sum_{k=0}^N (k-1)\Lambda_{12}(k)p_k = \\ &= \lambda_{21} \sum_{k=0}^N (N-k)p_k - \sum_{k=0}^N \Lambda_{12}(k)p_k. \end{aligned} \quad (13.11)$$

Здесь первая сумма — не что иное, как $M[X_2]$, т. е. m_2 , а вторая — это $M[\Lambda_{12}(X_1)]$. Таким образом, мы вывели совершенно точное дифференциальное уравнение (13.2) для средней численности m_1 состояния \mathcal{E}_1 .

Однако, это уравнение в своем точном виде для нас совершенно бесполезно. Дело в том, что в его правую часть входят не только неиз-

вестные функции m_1 и m_2 , но также и математическое ожидание $M[\Lambda_{12}(X_1)]$. Но для того, чтобы знать это математическое ожидание, нам нужно знать большое число (N) вероятностей $p_k(t)$ ($k = 1, \dots, N$). Их, конечно, можно в принципе найти, решая систему (13.3); но мы как раз для того и применяем метод динамики средних, чтобы избежать решения большого числа уравнений для вероятностей состояний системы.

Возникает вопрос о том, как найти приближенно математическое ожидание $M[\Lambda_{12}(X_1)]$, не зная вероятностей состояний системы p_k ($k = 1, 2, \dots, N$).

Один из способов, позволяющих найти приближенное значение $M[\Lambda_{12}(X_1)]$ — это принцип квазирегулярности, которым мы до сих пор пользовались. Он состоит по существу в том, что мы приближенно заменяем математическое ожидание функции от случайной величины той же функцией от математического ожидания, т. е. полагаем:

$$M[\Lambda_{12}(X_1)] \approx \Lambda_{12}(M[X_1]) = \Lambda_{12}(m_1). \quad (13.12)$$

После этого точное уравнение (13.2) превращается в приближенное уравнение

$$\frac{dm_1}{dt} \approx -\Lambda_{12}(m_1) + \lambda_{21}m_2,$$

или, если пользоваться интенсивностью в пересчете на один элемент:

$$\frac{dm_1}{dt} \approx -\lambda_{12}(m_1)m_1 + \lambda_{21}m_2.$$

Таким образом, ошибки при применении принципа квазирегулярности — те же, что ошибки от замены математического ожидания функции той же функцией от математического ожидания.

Относительно ошибки, возникающей при такой замене, можно высказать следующие общие соображения. Эта ошибка мала, если функция $\Lambda_{12}(x)$ почти линейна в диапазоне практически возможных значений случайной величины X_1 . Если в этом диапазоне функция $\Lambda_{12}(x)$ сильно отличается от линейной, ошибка может быть значительной. Если функция $\Lambda_{12}(x)$ выпукла вверх, как это типично для задач динамики средних (рис. 6.44), то ошибка от применения формулы (13.12) будет всегда в большую сторону, т. е.

$$\Lambda_{12}(m_1) > M[\Lambda_{12}(X_1)].$$

Для функции $\Lambda_{12}(x)$, выпуклой вниз, ошибка, наоборот, будет в меньшую сторону. Однако эти соображения не дают возможности оценить величину ошибки.

Для того, чтобы хотя бы грубо оценить ошибку в приближенной формуле (13.12), можно применить следующий прием. Мы знаем, что

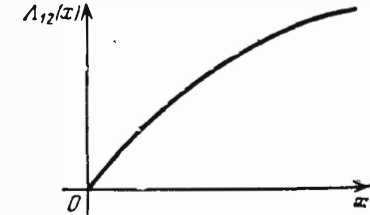


Рис. 6.44

если интенсивности потоков событий, переводящих элементы из состояния в состояние, не зависят от самих численностей состояний (т. е. элементы переходят из состояния в состояние независимо друг от друга), то численности состояний будут распределены по биномиальному закону (см. § 1). В частности, численность состояния \mathcal{E}_1 будет распределена по биномиальному закону с математическим ожиданием m_1 и средним квадратическим отклонением $\sigma_1 = \sqrt{m_1(1 - \frac{m_1}{N})}$, где N — общее число элементов в системе. Мы знаем также (см. § 2), что если интенсивности потоков событий зависят от численностей состояний, то это, вообще говоря, не так. Однако для грубо приближенного учета случайности аргумента X_1 в функции $\Lambda_{12}(X_1)$ допустим, что и в этом случае закон распределения численности состояния будет биномиальный, с математическим ожиданием m_1 и средним квадратическим отклонением $\sigma_1 = \sqrt{m_1(1 - \frac{m_1}{N})}$. Это, конечно, будет неточно, но все же гораздо точнее, чем просто полагать численность X_1 не случайной и равной своему математическому ожиданию (что мы фактически делаем, пользуясь принципом квазирегулярности).

Запишем это распределение вероятностей. Вероятность того, что численность состояния \mathcal{E}_1 будет равна k , выражается известной формулой:

$$p_k = C_N^k \left(\frac{m_1}{N}\right)^k \left(1 - \frac{m_1}{N}\right)^{N-k}. \quad (13.13)$$

Таким образом (если считать, что X_1 имеет биномиальное распределение) $M[\Lambda_{12}(X_1)]$ выразится формулой:

$$M[\Lambda_{12}(X_1)] = \sum_{k=0}^N \Lambda_{12}(k) C_N^k \left(\frac{m_1}{N}\right)^k \left(1 - \frac{m_1}{N}\right)^{N-k}. \quad (13.14)$$

При большом числе элементов вычисления по формуле (13.14) очень громоздки; чтобы избежать этого, можно воспользоваться предельными свойствами биномиального распределения при большом числе опытов. Известно, что биномиальное распределение при большом числе опытов N в некоторых условиях приближается к нормальному, а в других — к распределению Пуассона (см. например [7]). Первый случай будет иметь место тогда, когда вероятность события в каждом опыте не слишком мала и не слишком велика; об этом можно судить по тому, что весь интервал $m_1 \pm 3\sigma_1$ укладывается на участке $(0, N)$, т. е.

$$m_1 - 3\sigma_1 > 0; \quad m_1 + 3\sigma_1 < N. \quad (13.15)$$

Если оба эти условия выполнены, то среднее значение интенсивности $M[\Lambda_{12}(X_1)]$ можно вычислить, приближенно заменяя дискретную случайную величину X_1 непрерывной, распределенной по нормальному закону, а сумму (13.14) — интегралом:

$$M[\Lambda_{12}(x_1)] = \int_0^N \Lambda_{12}(x) f(x) dx, \quad (13.16)$$

где

$$f(x) = \frac{1}{\sigma_1 \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m_1)^2}{2\sigma_1^2}}. \quad (13.17)$$

Условие (13.15) при большом N может не выполняться в двух случаях.

1. Когда среднее число m_1 элементов в состоянии \mathcal{E}_1 слишком мало по сравнению с N ; тогда

$$\sigma_1^2 = m_1 \left(1 - \frac{m_1}{N}\right) \approx m_1, \quad (13.18)$$

т. е. дисперсия величины X_1 приближенно равна ее математическому ожиданию, а это — признак того, что биномиальное распределение близко к пуассоновскому.

2. Когда среднее число m_1 элементов в состоянии \mathcal{E}_1 , напротив, близко к N и, значит, по пуассоновскому закону распределяется не X_1 , а его дополнение до N , т. е. случайная величина $Y_1 = N - X_1$.*

Покажем, как вычислить приближенно значение $M[\Lambda_{12}(X_1)]$ в том и другом случае.

1. Случайная величина X_1 распределена по закону Пуассона с математическим ожиданием m_1 . Математическое ожидание ее функции $\Lambda_{12}(X_1)$ равно

$$M[\Lambda_{12}(X_1)] = \sum_{k=0}^N \Lambda_{12}(k) p_k, \quad (13.19)$$

где

$$p_k = \frac{m_1^k}{k!} e^{-m_1}.$$

Для расчетов по формуле (13.19) могут быть применены таблицы пуассоновского распределения (выдержки из таких таблиц даны, например, в приложении, табл. 2).

2. Случайная величина $Y_1 = N - X_1$ распределена по закону Пуассона с математическим ожиданием $N - m_1$. Математическое ожидание функции $\Lambda_{12}(X_1)$ будет выражаться формулой

$$M[\Lambda_{12}(X_1)] = \sum_{k=0}^N \Lambda_{12}(N-k) p_k^*, \quad (13.20)$$

где

$$p_k^* = \frac{(N-m_1)^k}{k!} e^{-(N-m_1)}$$

— вероятности распределения Пуассона, также определяемые по таблицам.

* В нашем случае $Y_1 = X_2$, но если число состояний больше, чем два, это будет уже не так, поэтому мы сохраним для случайной величины $N - X_1$ отдельное обозначение Y_1 .

Предположим, что мы приближенно выразили таким образом $M[\Lambda_{12}(X_1)]$ в виде некоторой функции $\tilde{\Lambda}_{12}(m_1)$; эта функция будет задаваться тремя разными формулами (13.16), (13.19) и (13.20) в зависимости от того, на какой части отрезка $(0, N)$ находится m_1 . Конечно, можно было бы подставить соответствующее выражение в уравнение (13.2) для средней численности m_1 (в данном случае достаточно решить одно это уравнение):

$$\frac{dm_1}{dt} = -\tilde{\Lambda}_{12}(m_1) + \lambda_{21} m_2, \quad (13.21)$$

но оно окажется слишком сложным. Поэтому задачу имеет смысл приближенно решать в два приема. Сначала (в первом приближении) ре-

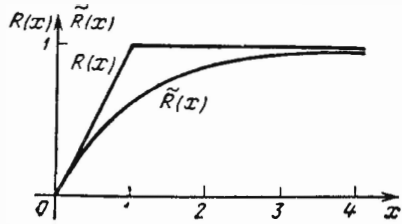


Рис. 6.45

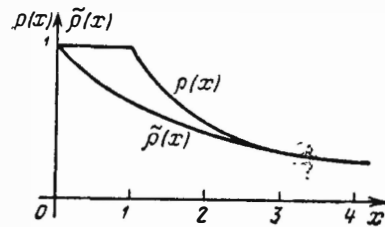


Рис. 6.46

шить уравнения динамики средних, полученные с помощью обычного принципа квазирегулярности. Затем, оценив в первом грубом приближении среднюю численность состояния \mathcal{E}_1 — величину m_1 — найти приближенное значение для

$$M[\Lambda_{12}(X_1)] \approx \tilde{\Lambda}_{12}(m_1) = \Lambda_{12}^*(t)$$

(непрерывно для ряда значений величины t), пользуясь при этом той или другой из формул (13.16), (13.19), (13.20). Между полученными таким образом значениями $\Lambda_{12}^*(t)$ можно проинтерполировать промежуточные. Таким образом строится функция времени $\Lambda_{12}^*(t)$, которая подставляется в правую часть уравнения (13.2):

$$\frac{dm_1}{dt} = -\Lambda_{12}^*(t) + \lambda_{21}(N - m_1). \quad (13.22)$$

Получается л и н е й н о е дифференциальное уравнение с переменными коэффициентами, решение которого затруднений не вызывает. В результате этого будет получена функция $m_1(t)$, более точная, чем первое приближение. Сравнивая второе приближение с первым, можно приближенно оценить ошибки, возникающие от применения принципа квазирегулярности.

Совершенно аналогично можно решить задачу уточнения уравнений и тогда, когда число состояний элемента больше двух и когда от численностей состояний зависит не одна интенсивность, а две или более. Вся разница в том, что придется оценивать математическое ожидание не одной функции, а нескольких.

Изложенный выше способ введения поправок к уравнениям динамики средних сравнительно трудоемок; однако для функций суммарной интенсивности некоторых специальных видов, часто встречающихся в уравнениях динамики средних, поправки могут быть учтены достаточно просто.

Пусть, например, в условиях простейшей задачи с графом состояний элемента (см. рис. 6.42) суммарная интенсивность $\Lambda_{12}(X_1)$ равна константе λ_0 при всех значениях $X_1 = 1, 2, \dots$, (а при $X_1 = 0$, естественно, $\Lambda_{12}(X_1) = 0$). Тогда, если m_1 велико, то $M[\Lambda_{12}(X_1)] \approx \lambda_0$ с очень большой точностью. Для того, чтобы приближенно найти это математическое ожидание при небольших значениях m_1 , примем для величины X_1 пуассоновское распределение с параметром m_1 . Тогда получим:

$$M[\Lambda_{12}(X_1)] = 0 p_0 + \lambda_0 p_1 + \lambda_0 p_2 + \dots + \lambda_0 p_N = \\ = \lambda_0 (p_1 + p_2 + \dots + p_N) = \lambda_0 (1 - p_0) \approx \lambda_0 [1 - e^{-m_1}]. \quad (13.23)$$

Обозначим функцию $1 - e^{-x}$ через $\tilde{R}(x)$, а $\frac{\tilde{R}(x)}{x}$ через $\tilde{\rho}(x)$. Приближенное уравнение для средней численности m_1 запишется тогда так:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dm_1}{dt} &= -\lambda_0 \tilde{R}(m_1) + \lambda_{21} m_2, \\ \text{или} \\ \frac{dm_1}{dt} &= -\lambda_0 \tilde{\rho}(m_1) m_1 + \lambda_{21} m_2. \end{aligned} \right\} \quad (13.24)$$

Заметим, что менее точное уравнение, получаемое по принципу квазирегулярности, здесь имело бы вид:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dm_1}{dt} &= -\lambda_0 R(m_1) + \lambda_{21} m_2, \\ \text{или} \\ \frac{dm_1}{dt} &= -\lambda_0 \rho(m_1) m_1 + \lambda_{21} m_2, \end{aligned} \right\} \quad (13.25)$$

где $R(x)$ и $\rho(x)$ функции, введенные в § 4.

Изобразим, для сравнения, графики функций $R(x)$ и $\tilde{R}(x)$ (рис. 6.45) и функций $\rho(x)$ и $\tilde{\rho}(x)$ (рис. 6.46).

Как видно из графиков, ошибка при замене правой части в уравнениях (13.24) соответствующей правой частью в уравнениях (13.25) довольно существенна при небольших значениях m_1 , тогда как при больших m_1 она становится пренебрежимо малой.

Таким образом, во всех задачах, где мы использовали функции R, ρ в качестве поправочных коэффициентов в правых частях уравнений динамики средних, более точные результаты будут получаться, если мы заменим R на \tilde{R} , ρ на $\tilde{\rho}$.

МЕТОДЫ УЧЁТА НАДЕЖНОСТИ ТЕХНИЧЕСКИХ УСТРОЙСТВ

1. ПРОБЛЕМА ОЦЕНКИ НАДЕЖНОСТИ

подавляющее большинство операций, подлежащих количественному исследованию, в современном обществе выполняется с применением тех или других технических устройств. Оценка эффективности таких операций и выработка рациональных решений по их организации требуют учета надежности применяемых технических устройств.

Под «надежностью» в широком смысле слова понимается способность технического устройства к бесперебойной (безотказной) работе в течение заданного промежутка времени в определенных условиях. Этот промежуток времени обычно обусловлен временем выполнения некоторой задачи, которая осуществляется техническим устройством и является частью общей задачи операции.

В настоящее время, в связи с возрастающей сложностью технических устройств и широким внедрением автоматизации во все области практики, проблема надежности становится одной из узловых проблем техники и организации управления. Обеспечение надежной работы всех элементов оборудования — задача первостепенной важности.

Борьба за надежность требует специального рассмотрения и количественного анализа явлений, связанных со случайными отказами аппаратуры. За последние годы теория надежности превратилась в специальную науку, широко применяющую вероятностные методы исследования.

В теории надежности принято различать два типа отказов: внезапные и постепенные.

Под внезапным отказом устройства разумеется мгновенный выход из строя, означающий невозможность его применения. Внезапный отказ возникает в какой-то, вообще говоря, случайный момент времени. Примерами внезапных отказов могут служить: перегорание электроламп, обрыв проводника, пробой конденсатора и т. п.

Под постепенным разумеется отказ устройства, связанный с постепенным ухудшением («сползанием») его характеристик. Для устранения таких отказов требуется регулировка прибора.

Постепенные отказы можно условно рассматривать как внезапные, если условиться считать, что какие-то отклонения параметров устройства от номинала являются еще допустимыми, а большие — недопустимыми; как только параметры выходят за эти пределы, устройство считается отказавшим. Однако назначение таких пределов в ряде слу-

чаев затруднительно. Правильнее будет рассматривать параметры устройства как случайные функции времени, связать с ними какой-то показатель эффективности устройства (например, вероятность решения задачи или математическое ожидание производительности) и этот показатель вычислять с учетом «сползания» характеристик. Такой подход требует внимательного изучения структуры и работы конкретного технического устройства и применения сравнительно сложного математического аппарата. В данной главе мы будем рассматривать только внезапные отказы.

Надежность технического устройства или, как мы будем говорить, системы зависит от состава и количества образующих систему элементов (узлов), от способа их объединения в систему и от характеристик каждого отдельного элемента.

Деление технических устройств на «системы» и образующие их «элементы» носит условный характер и зависит от постановки задачи и целей исследования. Одно и то же устройство, например радиолокационный прицел истребителя, может рассматриваться и как «система», состоящая из элементов: радиоламп, конденсаторов, реле и т. д., и как «элемент» более сложной системы — оборудования самолета. В свою очередь, самолет-истребитель является «элементом» системы ПВО.

В дальнейшем мы будем называть «элементом» любое техническое устройство, не подлежащее дальнейшему расчленению, надежность которого считается заданной или определяется экспериментально. Соединяя такие элементы различным образом в «системы», мы будем решать задачу определения надежности системы по надежностям ее элементов.

2. НАДЕЖНОСТЬ ЭЛЕМЕНТА. ПЛОТНОСТЬ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ВРЕМЕНИ БЕЗОТКАЗНОЙ РАБОТЫ. СРЕДНЕЕ ВРЕМЯ БЕЗОТКАЗНОЙ РАБОТЫ.

Оценка надежности системы и элементов требует введения количественных характеристик. Рассмотрим здесь некоторые из этих характеристик. Для краткости будем определять их применительно к «элементу»; однако те же определения будут относиться и к «системе».

Надежностью элемента (в узком смысле слова) называется вероятность того, что данный элемент в данных условиях будет работать безотказно в течение времени t . Эту вероятность мы будем обозначать $p(t)$. Функция $p(t)$ называется иногда «законом надежности».

Естественно, с увеличением времени функция $p(t)$ убывает (рис. 7.1). При $t = 0$ естественно предположить $p(t) = 1$.

Ненадежностью элемента называется вероятность $q(t)$ того, что элемент откажет (выйдет из строя) в течение времени t . Очевидно,

$$q(t) = 1 - p(t). \quad (2.1)$$

Рассмотрим время T безотказной работы элемента как случайную величину. Функция распределения $F(t)$ этой случайной величины определяется как

$$F(t) = P(T < t). \quad (2.2)$$

Очевидно, $F(t)$ — вероятность того, что за время t элемент откажет — представляет собой не что иное, как ненадежность элемента:

$$F(t) = q(t), \quad (2.3)$$

а его надежность дополняет $F(t)$ до единицы:

$$p(t) = 1 - F(t). \quad (2.4)$$

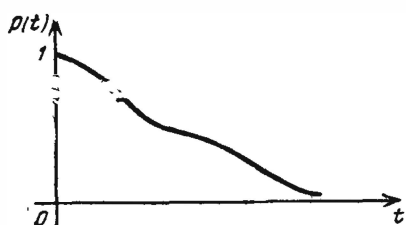


Рис. 7.1

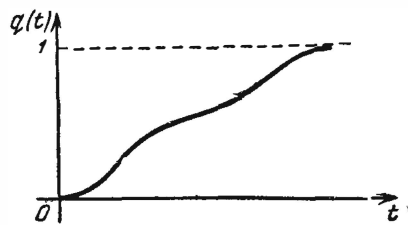


Рис. 7.2

Таким образом, ненадежность $q(t)$ обладает свойствами функции распределения неотрицательной случайной величины. Она равна нулю при $t = 0$, не убывает при возрастании t и стремится к единице при $t \rightarrow \infty$ (рис. 7.2).

На практике обычно вместо функции распределения $F(t)$ пользуются ее производной — п л о т н о с т ь ю распределения или плотностью вероятности:

$$f(t) = F'(t) = q'(t). \quad (2.5)$$

График плотности $f(t)$ показан на рис. 7.3. Площадь, ограниченная кривой $f(t)$, равна единице.

Величина $f(t)dt$ — элемент вероятности — истолковывается как вероятность того, что время T примет значение, лежащее в пределах элементарного участка $(t, t + dt)$.

В литературе по надежности функцию $f(t)$ часто называют «плотностью отказов». Во избежание недоразумений, связанных с нечеткой терминологией, мы будем называть $f(t)$ более точно: *плотностью распределения времени безотказной работы*.

Плотность $f(t)$ может быть приближенно определена из опыта, для чего ставится следующий эксперимент: наблюдается работа большого числа N однородных элементов; каждый из них работает до момента отказа. Время, в течение которого работал элемент, регистрируется. Полученные значения времени:

$$t_1, t_2, \dots, t_N$$

обрабатываются обычными методами математической статистики: строится гистограмма (рис. 7.4) и выравняется с помощью какой-нибудь плавной кривой, обладающей свойствами плотности.

Ордината гистограммы на каждом элементарном участке времени Δt представляет собой не что иное, как *среднее число отказов за единицу времени, приходящееся на один испытанный элемент*. Тот же смысл можно приписать и функции $f(t)$. Приближенно плотность $f(t)$ определяется по формуле

$$f(t) \approx \frac{m(t, t + \Delta t)}{N \Delta t}, \quad (2.6)$$

где $m(t, t + \Delta t)$ — число элементов, отказавших на участке времени от t до $t + \Delta t$ (время отсчитывается от момента включения); N — общее число элементов; Δt — длина элементарного участка времени.

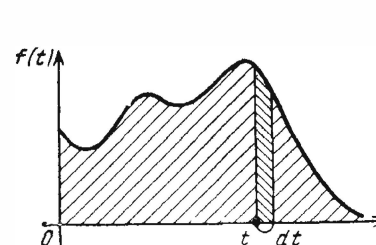


Рис. 7.3

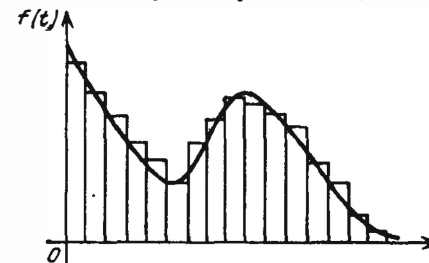


Рис. 7.4

Пример. Было испытано $N = 1000$ ламп на длительность безотказной работы. Результаты испытаний приведены в табл. 2.1.

Таблица 2.1

Длительность работы в часах (от—до)	0—10	10—20	20—30	30—40	40—50	50—60	60—80	80—100	100—150	150—200
Число ламп $m(t, t + \Delta t)$	151	102	77	61	79	120	200	69	91	50

Найти приближенно плотность $f(t)$ для каждого участка времени, построить гистограмму и выровнять (от руки) плавной кривой.

Решение. На первом участке (0—10 час) имеем:

$$f(t) \approx \frac{151}{1000 \cdot 10} \approx 0,0151,$$

на втором

$$f(t) \approx \frac{102}{1000 \cdot 10} \approx 0,0102$$

и т. д. Значения плотности $f(t)$ приведены в табл. 2.2.

Таблица 2.2

Длительность работы в часах (от-до)	0-10	10-20	20-30	30-40	40-50	50-60	60-80	80-100	100-150	150-200
Плотность $f(t)$	0,0151	0,0102	0,0077	0,0061	0,0079	0,0120	0,0100	0,0038	0,0017	0,0010

Гистограмма и выравнивающая кривая приведены на рис. 7.5. Отметим, что плотность $f(t)$, изображенная на рис. 7.5, имеет максимум при $t = 0$, т. е. максимальная частота отказов приходится на

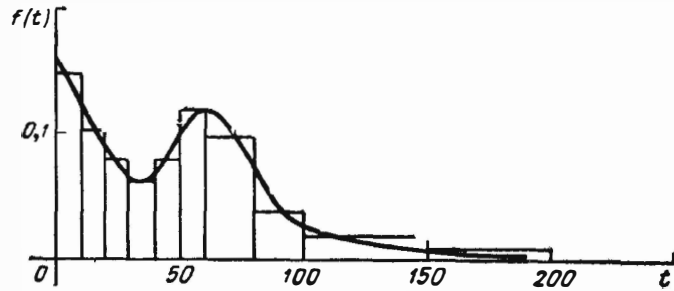


Рис. 7.5

начальный период работы элемента. Такой характер кривой $f(t)$ нередко наблюдается на практике, особенно при работе с электро- и радиодеталями, т. к. они часто имеют тенденцию отказывать немедленно или вскоре после включения. Иногда это повышение плотности в точке $t = 0$ сказывается настолько резко, что заметную долю элементов можно считать отказавшими точно в момент включения. При этом время безотказной работы T превращается из непрерывной в смешанную случайную величину, у которой одно значение ($t = 0$) обладает отличной от нуля вероятностью p_0 , а для других существует только какая-то плотность распределения. Функция распределения такой случайной величины показана на рис. 7.6 — в точке $t = 0$ она имеет скачок, равный p_0 , а при $t > 0$ — непрерывна.

Дифференцируя функцию $F(t)$ при $t > 0$, получим кривую «плотности» $\tilde{f}(t)$ (рис. 7.7). Она характерна тем, что ограничивает площадь, равную уже не единице, а $1 - p_0$. При обработке экспериментальных данных в таком случае отбирают в отдельную группу элементы, отказавшие при включении, и отношение их числа m_0 к общему числу N испытанных элементов считают за приближенное значение p_0 :

$$p_0 \approx \frac{m_0}{N},$$

а для остальных данных строится обычная гистограмма (при этом частоты находятся делением числа наблюдений в разряде на общее число наблюдений N).

В качестве характеристики надежности элемента часто применяется среднее время безотказной работы, т. е. математическое ожидание величины T :

$$\bar{t} = M\{T\}.$$

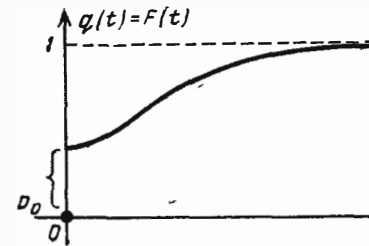


Рис. 7.6

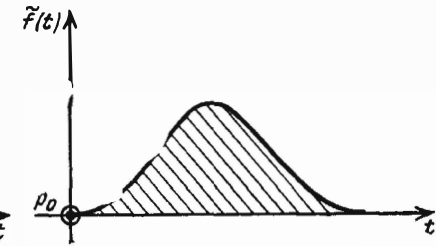


Рис. 7.7

В случае, если величина T непрерывна (т. е. ее функция распределения $F(t)$ не имеет скачка при $t = 0$)

$$\bar{t} = M\{T\} = \int_0^{\infty} t f(t) dt. \quad (2.7)$$

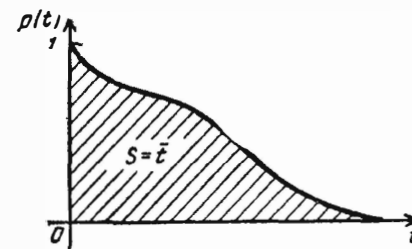


Рис. 7.8

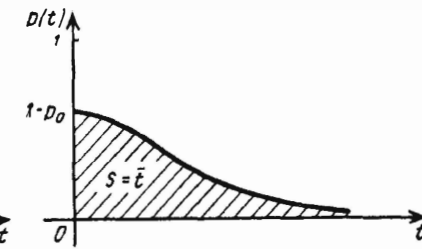


Рис. 7.9

В случае, когда T — смешанная случайная величина, и отдельное значение $t = 0$ имеет вероятность p_0 ,

$$\bar{t} = M\{T\} = \int_0^{\infty} t \tilde{f}(t) dt. \quad (2.8)$$

Величина \bar{t} может быть выражена не через плотность распределения $f(t)$, а непосредственно через надежность $p(t)$. Действительно,

$$\bar{t} = \int_0^{\infty} t \tilde{f}(t) dt = \int_0^{\infty} t q'(t) dt = - \int_0^{\infty} t p'(t) dt.$$

Интегрируя по частям, имеем:

$$\bar{t} = -t p(t) \Big|_0^{\infty} + \int_0^{\infty} p(t) dt. \quad (2.9)$$

Первый член в правой части выражения (2.9) равен нулю, так как для случайной величины T , у которой существует математическое ожидание, разность $1 - F(t) = p(t)$ при $t \rightarrow \infty$ должна убывать быстрее, чем растет t . Поэтому

$$\bar{t} = \int_0^{\infty} p(t) dt. \quad (2.10)$$

Эта формула имеет простую геометрическую интерпретацию: *среднее время безотказной работы элемента равно полной площади S , ограниченной кривой надежности и осями координат (рис. 7.8).*

Очевидно, в случае, когда T — смешанная случайная величина (значение $t = 0$ имеет вероятность p_0), это правило остается в силе; вся разница в том, что кривая $p(t)$ будет начинаться не от 1, а от $1 - p_0$ (рис. 7.9).

3. ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНЫЙ ЗАКОН НАДЕЖНОСТИ. ИНТЕНСИВНОСТЬ ОТКАЗОВ

Наиболее удобным для аналитического описания является так называемый **экспоненциальный** (или показательный) закон надежности, который выражается формулой

$$p(t) = e^{-\lambda t}, \quad (3.1)$$

где $\lambda > 0$ — постоянный параметр.

График экспоненциального закона надежности показан на рис. 7.10. Для этого закона функция распределения времени безотказной работы имеет вид

$$F(t) = q(t) = 1 - e^{-\lambda t}, \quad (3.2)$$

а плотность —

$$f(t) = \lambda e^{-\lambda t} \quad (t > 0). \quad (3.3)$$

Это есть уже известный нам показательный закон распределения, по которому распределено расстояние между соседними событиями в простейшем потоке с интенсивностью λ (см. § 4 гл. 4).

При рассмотрении вопросов надежности часто бывает удобно представлять себе дело так, словно на элемент действует простейший поток отказов с интенсивностью λ ; элемент отказывает в момент, когда приходит первое событие этого потока.

Образ «потока отказов» приобретает реальный смысл, если отказавший элемент немедленно заменяется новым (восстанавливается).

Последовательность случайных моментов времени, в которые происходят отказы (рис. 7.11), представляет собой простейший поток событий, а интервалы между событиями — независимые случайные величины, распределенные по показательному закону (3.3).

Понятие «интенсивности отказов» может быть введено не только для экспоненциального, но и для любого другого закона надежности с плотностью $f(t)$; вся разница будет в том, что при неэкспоненциальном законе $p(t)$ интенсивность отказов λ будет уже не постоянной величиной, а переменной.

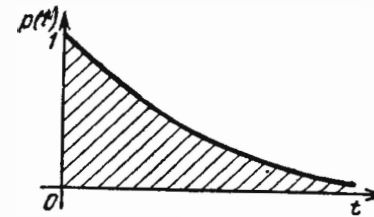


Рис. 7.10

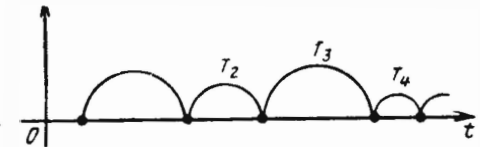


Рис. 7.11

Интенсивностью (или иначе «опасностью») отказов называется отношение плотности распределения времени безотказной работы элемента к его надежности:

$$\lambda(t) = \frac{f(t)}{p(t)}. \quad (3.4)$$

Поясним физический смысл этой характеристики. Пусть одновременно испытывается большое число N однородных элементов, каждый — до момента своего отказа. Обозначим $n(t)$ — число элементов, оказавшихся исправными к моменту t , а $m(t, t + \Delta t)$, как и раньше, — число элементов, отказавших на малом участке времени $(t, t + \Delta t)$. На единицу времени придется среднее число отказов

$$\frac{m(t, t + \Delta t)}{\Delta t}.$$

Разделим эту величину на общее число испытываемых элементов N , а на число исправных к моменту t элементов $n(t)$. Нетрудно убедиться, что при большом N это отношение будет приближенно равно интенсивности отказов $\lambda(t)$:

$$\lambda(t) \approx \frac{m(t, t + \Delta t)}{n(t) \Delta t}. \quad (3.5)$$

Действительно, при большом N

$$n(t) \approx N p(t)$$

и

$$\frac{m(t, t + \Delta t)}{n(t) \Delta t} \approx \frac{m(t, t + \Delta t)}{N \Delta t p(t)}.$$

Но согласно формуле (2.6)

$$\frac{m(t, t + \Delta t)}{N \Delta t} \approx f(t),$$

откуда

$$\frac{m(t, t + \Delta t)}{N \Delta t p(t)} \approx \frac{f(t)}{p(t)} = \lambda(t).$$

В работах по надежности приближенное выражение (3.5) часто рассматривают как определение интенсивности отказов, т. е. определяют ее как *среднее число отказов в единицу времени, приходящееся на один работающий элемент*.

Характеристике $\lambda(t)$ можно дать еще одно истолкование: это есть *условная плотность вероятности отказа элемента в данный момент времени t , при условии, что до момента t он работал безотказно*. Действительно, рассмотрим элемент вероятности $\lambda(t)dt$ — вероятность того, что за время $(t, t + dt)$ элемент перейдет из состояния «работает» в состояние «не работает», при условии, что до момента t он работал. В самом деле, безусловная вероятность отказа элемента на участке $(t, t + dt)$ равна $f(t)dt$. Это — вероятность совмещения двух событий:

A — элемент работал исправно до момента t .

B — элемент отказал на участке времени $(t, t + dt)$. По правилу умножения вероятностей:

$$f(t) dt = P(AB) = P(A) P(B/A).$$

Учитывая, что $P(A) = p(t)$, получим:

$$P(B/A) = \frac{f(t) dt}{p(t)} = \lambda(t) dt;$$

а величина $\lambda(t)$ есть не что иное, как условная плотность вероятности перехода из состояния «работает» в состояние «отказал» для момента t .

Если известна интенсивность отказов $\lambda(t)$, то можно выразить через нее надежность $p(t)$. Учитывая, что $f(t) = -p'(t)$, запишем формулу (3.4) в виде:

$$\lambda(t) = -\frac{p'(t)}{p(t)} = -[\ln p(t)]'.$$

Интегрируя, получим:

$$\ln p(t) = -\int_0^t \lambda(t) dt,$$

откуда

$$p(t) = e^{-\int_0^t \lambda(t) dt}. \quad (3.6)$$

Таким образом надежность выражается через интенсивность отказов.

В частном случае, когда $\lambda(t) = \lambda = \text{const}$, формула (3.6) дает:

$$p(t) = e^{-\lambda t}, \quad (3.7)$$

т. е. уже известный нам экспоненциальный закон надежности.

Пользуясь образом «потока отказов», можно истолковать не только формулу (3.7), но и более общую формулу (3.6). Представим себе (совершенно условно!), что на элемент с произвольным законом надежности $p(t)$ действует поток отказов с переменной интенсивностью $\lambda(t)$. Тогда формула (3.6) для $p(t)$ выражает вероятность того, что на участке времени $(0, t)$ не появится ни одного отказа.

Таким образом, как при экспоненциальном, так и при любом другом законе надежности работу элемента, начиная с момента включения $t = 0$, можно представлять себе так, что на элемент действует пуассоновский поток отказов; для экспоненциального закона надежности это будет поток с постоянной интенсивностью λ , а для неэкспоненциального — с переменной интенсивностью $\lambda(t)$.

Заметим, что этот образ годится только в том случае, когда отказавший элемент не заменяется новым. Если, как мы это делали раньше, медленно заменять отказавший элемент новым, поток отказов уже не будет пуассоновским. Действительно, интенсивность его будет зависеть не просто от времени t , протекшего с начала всего процесса, а и от времени τ , протекшего со случайного момента включения именно данного элемента; значит, поток событий имеет последствие и пуассоновским не является.

Если же на протяжении всего исследуемого процесса данный элемент не заменяется и может отказать не более одного раза, то при описании процесса, зависящего от его функционирования, можно пользоваться схемой марковского случайного процесса, но при переменной, а не постоянной интенсивности потока отказов.

Если неэкспоненциальный закон надежности сравнительно мало отличается от экспоненциального, то можно, в целях упрощения, приближенно заменить его экспоненциальным (рис. 7.12). Параметр λ этого закона выбирается так, чтобы сохранить неизменным математическое ожидание времени безотказной работы, равное, как мы знаем, площади, ограниченной кривой $p(t)$ и осями координат. Для этого нужно положить параметр λ показательного закона равным

$$\lambda^* = \frac{1}{\bar{t}},$$

где \bar{t} — площадь, ограниченная кривой надежности $p(t)$. Таким образом, если мы хотим характеризовать надежность элемента некото-

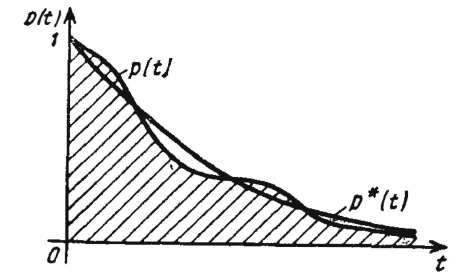


Рис. 7.12

рой средней интенсивностью отказов, нужно в качестве этой интенсивности взять величину, обратную среднему времени безотказной работы элемента.

Выше мы определяли величину \bar{t} как площадь, ограниченную кривой $p(t)$. Однако, если требуется знать только среднее время безотказной работы элемента, проще найти его непосредственно по статистическому материалу как среднее арифметическое всех наблюдаемых значений случайной величины T — времени работы элемента до его отказа. Такой способ может быть применен и в случае, когда число опытов невелико и не позволяет достаточно точно построить кривую $p(t)$.

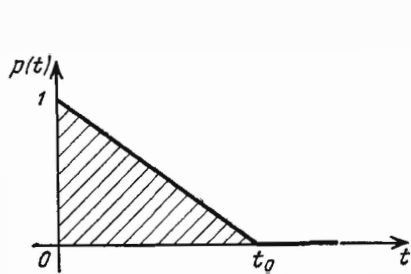


Рис. 7.13

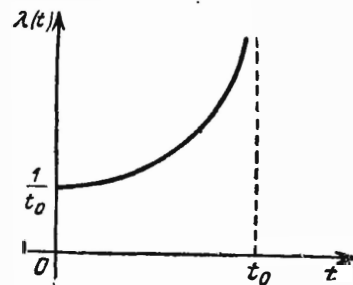


Рис. 7.14

Пример 1. Надежность элемента $p(t)$ убывает со временем по линейному закону (рис. 7.13). Найти интенсивность отказов $\lambda(t)$ и среднее время безотказной работы элемента \bar{t} .

Решение. По формуле (3.4) на участке $(0, t_0)$ имеем:

$$\lambda(t) = \frac{f(t)}{p(t)} = -\frac{p'(t)}{p(t)}.$$

Согласно заданному закону надежности

$$p(t) = 1 - \frac{t}{t_0} \quad (0 < t < t_0),$$

$$p'(t) = -\frac{1}{t_0},$$

$$\lambda(t) = \frac{1}{t_0 \left(1 - \frac{t}{t_0}\right)} = \frac{1}{t_0 - t}.$$

График функции $\lambda(t)$ показан на рис. 7.14. При $t \rightarrow t_0$ $\lambda(t) \rightarrow \infty$. Среднее время безотказной работы равно площади, ограниченной кривой $p(t)$ и осями координат (см. рис. 7.13): $\bar{t} = t_0/2$.

Пример 2. Интенсивность отказов элемента $\lambda(t)$ меняется по закону, представленному на рис. 7.15. Найти закон надежности $p(t)$.

Решение. На участке $(0, 1)$

$$\lambda(t) = 3 - 2t.$$

По формуле (3.6)

$$p(t) = e^{-\int_0^t \lambda(t) dt} = e^{-(3t - t^2)}.$$

Вычислим $p(t)$ на участке $t > 1$. В общей формуле (3.6) разобьем промежутки интегрирования на два: от 0 до 1 и от 1 до t :

$$\int_0^t \lambda(t) dt = \int_0^1 \lambda(t) dt + \int_1^t \lambda(t) dt = \int_0^1 (3 - 2t) dt + \int_1^t dt = 2 + t - 1 = 1 + t$$

$$p(t) = e^{-(1+t)}.$$

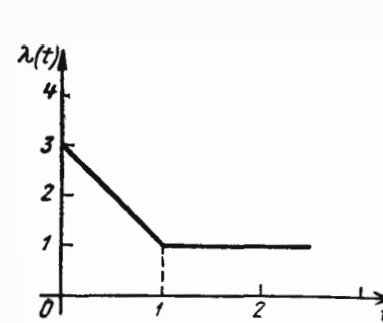


Рис. 7.15

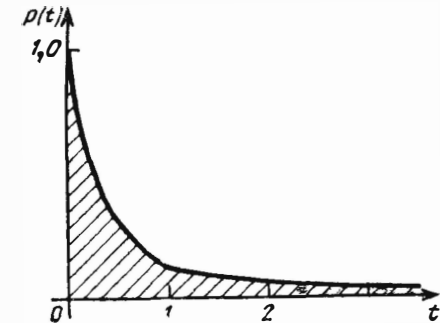


Рис. 7.16

График закона надежности показан на рис. 7.16. Заштрихованная площадь изображает среднее время безотказной работы:

$$\bar{t} = \int_0^1 e^{-(3t - t^2)} dt + \int_1^{\infty} e^{-(1+t)} dt.$$

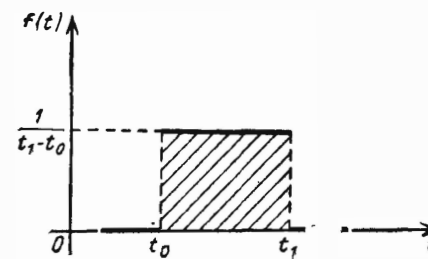


Рис. 7.17

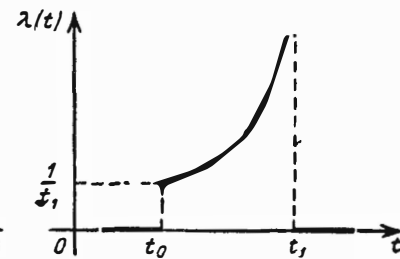


Рис. 7.18

Второй интеграл здесь равен

$$-e^{-(1+t)} \Big|_1^{\infty} = e^{-2} \approx 0,135.$$

Что касается первого, то он вычислен приближенно (численно):

$$\int_0^1 e^{-(3t - t^2)} dt \approx 0,370,$$

откуда

$$\bar{t} \approx 0,370 + 0,135 = 0,505.$$

Пример 3. Плотность распределения времени безотказной работы элемента постоянна на участке (t_1, t_2) и равна нулю вне этого участка (рис. 7.17) Найдите интенсивность отказов $\lambda(t)$.

Решение. Имеем:

$$\lambda(t) = \frac{f(t)}{p(t)} = \frac{-f'(t)}{1-q(t)} \quad (t_0 < t < t_1),$$

где

$$q(t) = \int_{t_0}^t \frac{1}{t_1 - t_0} dt = \frac{t - t_0}{t_1 - t_0},$$

откуда

$$\lambda(t) = \frac{1}{t_1 - t_0}.$$

график интенсивности отказов показан на рис. 7.18: при $t \rightarrow t_1$, $\lambda(t) \rightarrow \infty$.

4. ОПРЕДЕЛЕНИЕ НАДЕЖНОСТИ СИСТЕМЫ ПО НАДЕЖНОСТИ ЕЕ ЭЛЕМЕНТОВ. НАДЕЖНОСТЬ НЕРЕЗЕРВИРОВАННОЙ СИСТЕМЫ

Пусть некоторая техническая система S составлена из n элементов (узлов): $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2, \dots, \mathcal{E}_n$.

Допустим, что надежности элементов нам известны. Возникает вопрос об определении надежности системы. Она зависит от того, каким образом элементы объединены в систему, какова функция каждого из них и в какой мере исправная работа каждого элемента необходима для работы системы в целом.

В ряде систем недостаточная надежность элементов повышается за счет их дублирования (резервирования). Резервирование состоит в том, что наряду с элементом \mathcal{E}_i в систему вводится запасной (резервный) элемент \mathcal{E}_i' , на который система переключается в случае отказа основного элемента. Число резервных элементов может быть и более одного.

Самым простым случаем в расчетном смысле является простая система (или система без резервирования). В такой системе отказ любого элемента равносильен отказу системы в целом. По аналогии с цепочкой последовательно соединенных проводников, обрыв каждого из которых равносильен размыканию всей цепи, мы будем называть такое соединение элементов «последовательным» (рис. 7.19). Следует оговориться, что «последовательным» такое соединение элементов является только в смысле надежности, физически же они могут быть соединены как угодно.

Выразим надежность простой системы через надежности ее элементов. Пусть имеется некоторый промежуток времени $(0, \tau)$, в течение которого требуется обеспечить безотказную работу системы. Тогда,

если надежность системы характеризуется законом надежности $P(t)$, нам важно знать значение этой надежности при $t = \tau$, т. е. $P(\tau)$. Это не функция, а определенное число; отбросим аргумент τ и обозначим надежность системы просто P . Аналогично обозначим надежности отдельных элементов p_1, p_2, \dots, p_n .

Для безотказной работы простой системы в течение времени τ нужно, чтобы работал безотказно каждый из ее элементов. Обозначим: S — событие, состоящее в безотказной работе системы за время τ ; $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2, \dots, \mathcal{E}_n$ — события, состоящие в безотказной работе соответствующих элементов. Событие S есть произведение (совмещение) событий $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2, \dots, \mathcal{E}_n$:

$$S = \mathcal{E}_1 \cdot \mathcal{E}_2 \cdot \dots \cdot \mathcal{E}_n.$$



Рис. 7.19

Предположим, что элементы $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2, \dots, \mathcal{E}_n$ отказывают независимо друг от друга (или, как мы будем говорить для краткости, «независимы по отказам», а совсем кратко «независимы»). Тогда по правилу умножения вероятностей для независимых событий

$$P(S) = P(\mathcal{E}_1) P(\mathcal{E}_2) \dots P(\mathcal{E}_n),$$

или в других обозначениях,

$$P = p_1 \cdot p_2 \cdot \dots \cdot p_n, \quad (4.1)$$

а короче

$$P = \prod_{i=1}^n p_i, \quad (4.2)$$

т. е. надежность простой системы, составленной из независимых элементов, равна произведению надежностей ее элементов.

В частном случае, когда все элементы обладают одинаковой надежностью

$$p_1 = p_2 = \dots = p_n = p,$$

формула (4.2) принимает вид:

$$P = p^n. \quad (4.3)$$

Пример 1. Простая система состоит из 10 независимых элементов, надежность каждого из которых равна $p = 0,95$. Определить надежность системы.

Решение. По формуле (4.3).

$$P = 0,95^{10} \approx 0,6.$$

Из примера видно, как резко падает надежность простой системы при увеличении числа элементов. Если число элементов n велико, то для обеспечения хотя бы приемлемой надежности P системы каждый элемент должен обладать очень высокой надежностью.

Поставим вопрос: какой надежностью p должен обладать отдельный элемент для того, чтобы система, составленная из n таких элементов, обладала заданной надежностью P ?

Полагая в формуле (4.3) $P = \mathcal{P}$, получим:

$$p = \sqrt[n]{\mathcal{P}}. \quad (4.4)$$

Пример 2. Простая система состоит из 1000 одинаково надежных, независимых элементов. Какой надежностью должен обладать каждый из них для того, чтобы надежность системы была не меньше 0,9?

Решение. По формуле (4.4):

$$p = \sqrt[1000]{\mathcal{P}} = \sqrt[1000]{0,9}; \quad \lg p = \frac{1}{1000} \lg 0,9, \quad p \approx 0,9999.$$

Выразим интенсивность отказов простой системы $\Lambda(t)$ через интенсивности отказов $\lambda_i(t)$ отдельных ее элементов. Имеем:

$$P(t) = \exp \left\{ - \int_0^t \Lambda(t) dt \right\}^*,$$

$$p_i(t) = \exp \left\{ - \int_0^t \lambda_i(t) dt \right\} \quad (i = 1, \dots, n).$$

Подставим эти выражения в формулу (4.2); получим:

$$\exp \left\{ - \int_0^t \Lambda(t) dt \right\} =$$

$$= \exp \left\{ - \left[\int_0^t \lambda_1(t) dt + \int_0^t \lambda_2(t) dt + \dots + \int_0^t \lambda_n(t) dt \right] \right\} =$$

$$= \exp \left\{ - \int_0^t [\lambda_1(t) + \lambda_2(t) + \dots + \lambda_n(t)] dt \right\}$$

или, короче,

$$\exp \left\{ - \int_0^t \Lambda(t) dt \right\} = \exp \left\{ - \int_0^t \sum_{i=1}^n \lambda_i(t) dt \right\},$$

откуда

$$\int_0^t \Lambda(t) dt = \int_0^t \sum_{i=1}^n \lambda_i(t) dt. \quad (4.5)$$

Дифференцируя (4.5) по t , получим:

$$\Lambda(t) = \sum_{i=1}^n \lambda_i(t), \quad (4.6)$$

*) Здесь $\exp \{x\} = e^x$.

т. е. при «последовательном» соединении независимых элементов интенсивности отказов складываются.

Это и естественно, так как для простой системы отказ элемента равносильен отказу системы, значит, все потоки отказов отдельных элементов складываются в один поток отказов системы с интенсивностью, равной сумме интенсивностей отдельных потоков.

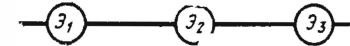


Рис. 7.20

Пример 3. Простая система S состоит из трех независимых элементов $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2, \mathcal{E}_3$ (рис. 7.20), плотности распределения времени безотказной работы которых заданы формулами:

$$\left. \begin{aligned} f_1(t) &= 1, \\ f_2(t) &= 2t, \\ f_3(t) &= 2(1-t) \end{aligned} \right\} \text{ при } 0 < t < 1$$

(рис. 7.21 — 7.23). Найти интенсивность отказов системы.

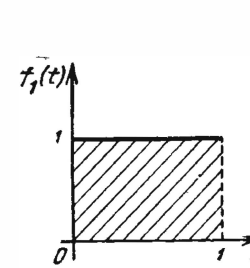


Рис. 7.21

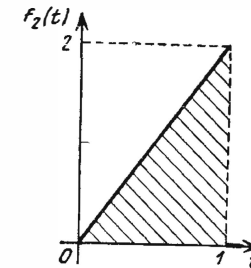


Рис. 7.22

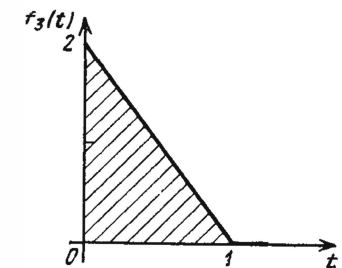


Рис. 7.23

Решение. Определяем ненадежность каждого элемента:

$$\left. \begin{aligned} q_1(t) &= t, \\ q_2(t) &= t^2, \\ q_3(t) &= 2t - t^2 \end{aligned} \right\} \text{ при } 0 < t < 1.$$

Отсюда надежности элементов:

$$\left. \begin{aligned} p_1(t) &= 1 - t, \\ p_2(t) &= 1 - t^2, \\ p_3(t) &= 1 - 2t + t^2 \end{aligned} \right\} \text{ при } 0 < t < 1.$$

Интенсивности отказов элементов:

$$\left. \begin{aligned} \lambda_1(t) &= \frac{1}{1-t}, \\ \lambda_2(t) &= \frac{2t}{1-t^2}, \\ \lambda_3(t) &= \frac{2(1-t)}{1-2t+t^2} = \frac{2}{1-t}. \end{aligned} \right\} \text{при } 0 < t < 1.$$

Складывая, имеем:

$$\begin{aligned} \Lambda(t) &= \lambda_1(t) + \lambda_2(t) + \lambda_3(t) = \\ &= \frac{1}{1-t} + \frac{2t}{1-t^2} + \frac{2}{1-t} = \frac{3+5t}{1-t^2}. \end{aligned}$$

5. НАДЕЖНОСТЬ РЕЗЕРВИРОВАННОЙ СИСТЕМЫ («ГОРЯЧИЙ РЕЗЕРВ»)

Одним из путей повышения надежности системы является введение в нее дублирующих (резервных) элементов. Резервные элементы включаются в систему как бы «параллельно» тем, надежность которых недостаточна.

Рассмотрим самый простой пример резервированной системы: два «параллельно» включенных элемента \mathcal{E}_1 и \mathcal{E}_2 (рис. 7.24). Вначале работает «основной» элемент \mathcal{E}_1 ; если он отказал, система автоматически переключается на «резервный» элемент \mathcal{E}_2 . Предположим, что элементы \mathcal{E}_1 и \mathcal{E}_2 независимы по отказам и что их надежности (вероятности безотказной работы) за интересующее нас время $t = \tau$ равны соответственно p_1 и p_2 . Предположим также, что надежность второго элемента не зависит от того, включался ли этот элемент в работу за время τ и когда включался. Такая картина наблюдается, например, если элемент \mathcal{E}_2 независимо от того, работает он или нет, держится под рабочим напряжением (так называемый «горячий резерв»).

Определим при этих условиях надежность резервированной системы \mathcal{S} . Перейдем к вероятности противоположного события — отказа системы \mathcal{S} . Обозначим отказ системы $\bar{\mathcal{S}}$. Чтобы событие $\bar{\mathcal{S}}$ произошло, необходимо, чтобы отказали оба элемента: и первый и второй:

$$\bar{\mathcal{S}} = \bar{\mathcal{E}}_1 \bar{\mathcal{E}}_2.$$

Отсюда по правилу умножения вероятностей независимых событий:

$$P(\bar{\mathcal{S}}) = P(\bar{\mathcal{E}}_1) P(\bar{\mathcal{E}}_2).$$

Обозначая ненадежность системы Q , а ненадежности элементов q_1, q_2 , получим:

$$Q = q_1 q_2, \quad (5.1)$$

т. е. при «параллельном» соединении независимых элементов их ненадежности перемножаются.

Переходя в формуле (5.1) от ненадежностей к надежностям, имеем:

$$1 - P = (1 - p_1)(1 - p_2), \quad (5.2)$$

откуда

$$P = 1 - (1 - p_1)(1 - p_2).$$

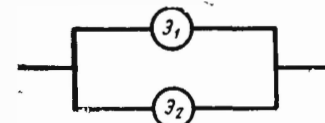


Рис. 7.24

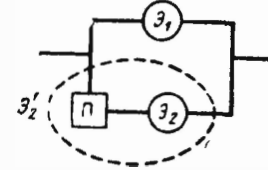


Рис. 7.26

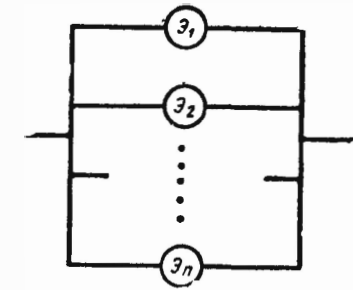


Рис. 7.25

При произвольном числе n дублирующих друг друга независимых элементов надежность блока из таких элементов (рис. 7.25) вычисляется по формуле

$$P = 1 - (1 - p_1)(1 - p_2) \dots (1 - p_n), \quad (5.3)$$

или, короче,

$$P = 1 - \prod_{i=1}^n (1 - p_i). \quad (5.4)$$

В частном случае, когда надежности всех элементов одинаковы:

$$p_1 = p_2 = \dots = p,$$

формула (5.4) принимает вид:

$$P = 1 - (1 - p)^n. \quad (5.5)$$

Пример 1. Предохранительное устройство, обеспечивающее безопасность работы с материальной частью, состоит из трех дублирующих друг друга предохранителей. Надежность каждого из них $p = 0,9$. Предохранитель независим в смысле надежности. Найти надежность всего устройства.

Решение. По формуле (5.5)

$$P = 1 - (1 - 0,9)^3 = 0,999.$$

До сих пор, говоря о «переключении» на резервный элемент, мы предполагали, что либо для этого не требуется специального переключающего устройства (как в случае с предохранителями), либо на-

дежность переключающего устройства равна единице. Если это не так, то легко учесть его неполную надежность.

Предположим, что блок состоит из двух «параллельно» включенных элементов \mathcal{E}_1 и \mathcal{E}_2 (рис. 7.26). В случае, когда элемент \mathcal{E}_1 выходит из строя, переключающее устройство П переключает систему на другой, резервный элемент \mathcal{E}_2 . Надежности элементов \mathcal{E}_1 , \mathcal{E}_2 и переключателя П равны соответственно p_1 , p_2 и $p_{\text{п}}$. Определим надежность всего блока. Для этого объединим переключатель П и элемент \mathcal{E}_2 в одну «последовательную» цепь с надежностью

$$p_2' = p_{\text{п}} p_2.$$

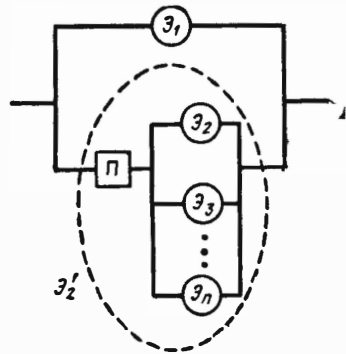


Рис. 7.27

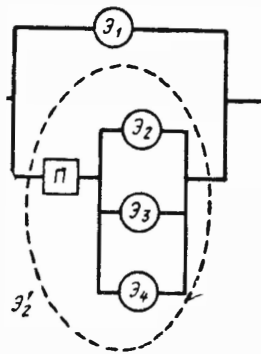


Рис. 7.28

Рассматривая эту цепочку как один параллельно включенный условный элемент \mathcal{E}_2' , найдем по формуле (5.2) надежность блока:

$$P = 1 - (1 - p_1) (1 - p_2') = 1 - (1 - p_1) (1 - p_{\text{п}} p_2). \quad (5.6)$$

Таким образом, *неполная надежность переключателя может быть учтена простым умножением надежности резервного элемента на надежность переключателя.*

Если резервных элементов не один, а больше: $\mathcal{E}_2, \dots, \mathcal{E}_n$ и каждый из них снабжен своим переключателем с надежностью соответственно $p_{\text{п}}^{(2)}, p_{\text{п}}^{(3)}, \dots, p_{\text{п}}^{(n)}$, то в формуле (5.3) нужно умножить надежность каждого резервного элемента на надежность переключателя:

$$P = 1 - (1 - p_1) (1 - p_{\text{п}}^{(2)} p_2) (1 - p_{\text{п}}^{(3)} p_3) \dots (1 - p_{\text{п}}^{(n)} p_n). \quad (5.7)$$

Может оказаться, что переключение на любой резервный элемент осуществляется одним и тем же переключателем П (рис. 7.27). Тогда переключатель П вместе со всем блоком резервных элементов может рассматриваться как один условный элемент \mathcal{E}_2' с надежностью p_2' , равной

$$p_2' = p_{\text{п}} [1 - (1 - p_2) (1 - p_3) \dots (1 - p_n)], \quad (5.8)$$

а надежность всего блока вычислится по формуле

$$P = 1 - (1 - p_1) (1 - p_2'). \quad (5.9)$$

Пример 2. Определить надежность блока, состоящего из основного элемента \mathcal{E}_1 с надежностью $p_1 = 0,9$ и трех резервных элементов: $\mathcal{E}_2, \mathcal{E}_3, \mathcal{E}_4$, имеющих ту же надежность:

$$p_2 = p_3 = p_4 = 0,9.$$

Переключение на резервные элементы в случае отказа любого из элементов осуществляется с помощью одного и того же переключателя, имеющего надежность $p_{\text{п}} = 0,95$ (рис. 7.28) Найти надежность блока.

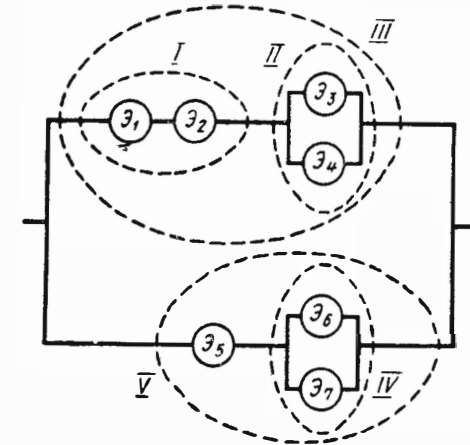


Рис. 7.29

Решение. Объединим переключатель с резервными элементами $\mathcal{E}_2, \mathcal{E}_3, \mathcal{E}_4$ в условный элемент \mathcal{E}_2' с надежностью

$$p_2' = p_{\text{п}} [1 - (1 - p_2) (1 - p_3) (1 - p_4)] = 0,95 (1 - 0,1^3) \approx 0,949.$$

Надежность всего блока:

$$P = 1 - (1 - 0,9) (1 - 0,949) \approx 0,995.$$

Заметим, что в данном примере сравнительно низкая надежность переключателя практически обесценивает большое количество (три!) резервных элементов. Значительно большую надежность системы мы получили бы, если бы каждый элемент был снабжен своим переключателем:

$$P' = 1 - (1 - 0,9) (1 - 0,95 \cdot 0,9^3) \approx 0,9997.$$

До сих пор мы рассматривали системы, дублирующие один основной элемент. В общем случае в резервированных системах могут применяться как «последовательные», так и «параллельные» соединения элементов, причем как правило, дублируются наименее надежные элементы. При оценке надежности такой системы нужно расчленить ее на ряд «подсистем», не имеющих общих элементов, найти надежность каждой из них и, рассматривая подсистемы как условные элементы, оценить надежность системы в целом.

Пример 3 Определить надежность системы, состоящей из элементов $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2, \dots, \mathcal{E}_7$ с надежностями p_1, p_2, \dots, p_7 (рис. 7.29)

Решение. Подсистема I — «последовательно» соединенные элементы \mathcal{E}_1 и \mathcal{E}_2 ; надежность:

$$P_I = p_1 p_2$$

Подсистема II — «параллельно» соединенные элементы \mathcal{E}_3 и \mathcal{E}_4 ; надежности:

$$P_{II} = 1 - (1 - p_3)(1 - p_4).$$

Подсистема III — «последовательно» включенные I и II; надежность:

$$P_{III} = P_I P_{II}.$$

Подсистема IV — «параллельно» включенные \mathcal{E}_6 и \mathcal{E}_7 ; надежность:

$$P_{IV} = 1 - (1 - p_6)(1 - p_7).$$

Подсистема V — «последовательно» включенные \mathcal{E}_5 и IV; надежность:

$$P_V = p_5 P_{IV}.$$

Вся система — «параллельно» включенные III и V; надежность:

$$P = 1 - (1 - P_{III})(1 - P_V).$$

6. НАДЕЖНОСТЬ РЕЗЕРВИРОВАННОЙ СИСТЕМЫ («ХОЛОДНЫЙ» И «ОБЛЕГЧЕННЫЙ» РЕЗЕРВ)

До сих пор мы рассматривали только случай, когда надежность каждого дублирующего элемента не зависит от того, когда включился в работу этот элемент. Этот случай, который мы условно назвали «горячим резервированием», самый простой из всех возможных. Гораздо сложнее случай, когда резервный элемент до своего включения в работу вообще не может отказывать («холодное» резервирование) или может отказывать, но с другой, меньшей плотностью вероятности, чем после включения («облегченное» резервирование).

При рассмотрении задач, связанных с холодным или облегченным резервированием, нам недостаточно будет вводить надежности системы и элементов для одного, заранее фиксированного, значения времени t ; необходимо будет проанализировать весь случайный процесс функционирования системы.

Рассмотрим несколько задач, относящихся к холодному и облегченному резервированию.

Задача 1. Общий случай расчета надежности резервированной системы («облегченный» или «холодный» резерв). Система (блок) состоит из «параллельно» включенных элементов \mathcal{E}_1 и \mathcal{E}_2 (основного и резервного). Интенсивность потока отказов первого элемента $\lambda_1(t)$; при отказе первого элемента происходит автоматическое и безотказное переключение на резервный ($p_{II} = 1$). Интенсивность потока отказов резервного элемента до его включения в работу $\lambda_2(t)$ (элемент работает в «облегченном» режиме). После его включения в работу, в момент отказа первого элемента, интенсивность мгновенно подскакивает (рис. 7.30) и становится равной интенсивности $\tilde{\lambda}_2$, которую естествен-

но предполагать зависящей не только от текущего времени t , но и от того срока t_1 , в течение которого элемент работал в облегченном режиме:

$$\tilde{\lambda}_2 = \tilde{\lambda}_2(t/t_1).$$

Требуется найти надежность системы $P(t)$.

Рассмотрим совокупность двух случайных величин:

T_1 — момент отказа основного элемента,

T_2 — момент отказа резервного элемента.

Событие A — безотказная работа системы до момента t — состоит в том, что хотя бы одна из величин T_1, T_2 примет значение, большее, чем t (хотя бы один элемент будет работать к моменту t). Вероятность противоположного события — отказа системы до момента t — будет

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A) = P(T_1 < t, T_2 < t).$$

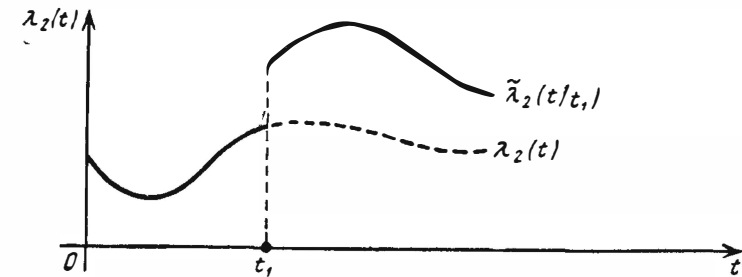


Рис. 7.30

Найдем совместную плотность распределения случайных величин T_1 и T_2 , обозначая ее $f(t_1, t_2)$. Случайные величины T_1, T_2 зависимы, и

$$f(t_1, t_2) = f_1(t_1) f(t_2 | t_1), \quad (6.1)$$

где $f_1(t_1)$ — безусловная плотность распределения величины T_1 , $f(t_2 | t_1)$ — условная плотность распределения величины T_2 (при условии, что величина T_1 приняла значение t_1).

Найдем обе плотности. По формуле (3.4) § 3

$$f_1(t_1) = \lambda_1(t_1) p_1(t_1),$$

где $p_1(t_1)$ — надежность элемента \mathcal{E}_1 , в силу формулы (3.6) равная

$$p_1(t_1) = \exp \left\{ - \int_0^{t_1} \lambda_1(t) dt \right\}.$$

Отсюда

$$f_1(t_1) = \lambda_1(t_1) \exp \left\{ - \int_0^{t_1} \lambda_1(t) dt \right\}. \quad (6.2)$$

Найдем условную плотность $f(t_2/t_1)$. Условная интенсивность отказов резервного элемента при условии, что $T_1 = t_1$, будет:

$$\lambda_2(t_2/t_1) = \begin{cases} \lambda_2(t_2) & \text{при } t_2 < t_1, \\ \tilde{\lambda}_2(t_2/t_1) & \text{при } t_2 > t_1. \end{cases} \quad (6.3)$$

При этой интенсивности найдем условную плотность распределения времени безотказной работы резервного элемента:

$$f(t_2/t_1) = \begin{cases} \lambda_2(t_2) \exp\left\{-\int_0^{t_2} \lambda_2(t) dt\right\} & \text{при } t_2 < t_1, \\ \tilde{\lambda}_2(t_2/t_1) \exp\left\{-\int_0^{t_1} \lambda_2(t) dt - \int_{t_1}^{t_2} \tilde{\lambda}_2(t/t_1) dt\right\} & \text{при } t_2 > t_1. \end{cases} \quad (6.4)$$

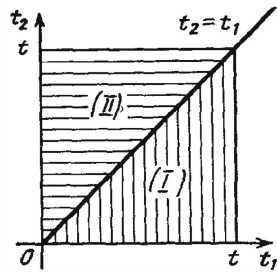


Рис. 7.31

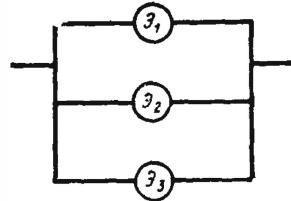


Рис. 7.32

Таким образом, совместная плотность распределения системы случайных величин T_1, T_2 найдена:

$$f(t_1, t_2) = f_1(t_1)f(t_2/t_1) = \begin{cases} \lambda_1(t_1)\lambda_2(t_2) \exp\left\{-\int_0^{t_1} \lambda_1(t) dt - \int_0^{t_2} \lambda_2(t) dt\right\} & \text{при } t_2 < t_1, \\ \lambda_1(t_1)\tilde{\lambda}_2(t_2/t_1) \exp\left\{-\int_0^{t_1} \lambda_1(t) dt - \int_0^{t_1} \lambda_2(t) dt - \int_{t_1}^{t_2} \tilde{\lambda}_2(t/t_1) dt\right\} & \text{при } t_2 > t_1. \end{cases} \quad (6.5)$$

Зная эту совместную плотность, можно найти вероятность отказа системы до момента t :

$$P(\bar{A}) = P(T_1 < t, T_2 < t) = \int_0^t \int_0^t f(t_1, t_2) dt_1 dt_2,$$

откуда искомая надежность системы:

$$P(t) = 1 - \int_0^t \int_0^t f(t_1, t_2) dt_1 dt_2. \quad (6.6)$$

При вычислении по формулам (6.5) — (6.6) необходимо иметь в виду, что выражение функции $f(t_1, t_2)$ неодинаково по одну и другую сторону от прямой $t_2 = t_1$ — биссектрисы первого координатного угла (рис. 7.31). Области интегрирования на рис. 7.31 отмечены разной штриховкой. В области I функция $f(t_1, t_2)$ выражается первой из формул (6.5), в области II — второй; следовательно,

$$P(t) = 1 - \left\{ \int_{(I)} \lambda_1(t_1)\lambda_2(t_2) \times \exp\left\{-\int_0^{t_1} \lambda_1(t) dt - \int_0^{t_2} \lambda_2(t) dt\right\} dt_1 dt_2 + \int_{(II)} \lambda_1(t_1)\tilde{\lambda}_2(t_2/t_1) \times \exp\left\{-\int_0^{t_1} \lambda_1(t) dt - \int_0^{t_1} \lambda_2(t) dt - \int_{t_1}^{t_2} \tilde{\lambda}_2(t/t_1) dt\right\} dt_1 dt_2 \right\}. \quad (6.7)$$

При заданном конкретном виде функций $\lambda_1(t), \lambda_2(t), \tilde{\lambda}_2(t/t_1)$ интеграл (6.7) может быть вычислен, в простейших случаях аналитически, чаще — численно.

Заметим, что найденное нами решение задачи оценки надежности для случая «облегченного» резерва относится и к случаю «холодного» резерва — при этом $\lambda_2(t) = 0$, так что в формуле (6.7) остается только один интеграл — второй, да и тот тоже упростится.

Мы видим, что в случае даже одного резервного элемента, работающего в облегченном (или холодном) резерве задача оценки надежности системы довольно сложна. Если же число резервных элементов более одного, задача еще больше усложняется.

Однако задача может быть сильно упрощена, если предположить, что потоки неисправностей, действующие на все элементы (основной и резервные), представляют собой простейшие потоки, интенсивность каждого из которых постоянна (это допущение равносильно тому, что закон надежности каждого элемента — экспоненциальный, а включение элемента в работу меняет только параметр этого закона). При таком допущении надежность системы S может быть найдена путем решения дифференциальных уравнений для вероятностей ее состояний.

Задача 2. Система с холодным резервом и простейшими потоками отказов. Резервированная система (блок) S состоит из основного элемента \mathcal{E}_1 и двух резервных: $\mathcal{E}_2, \mathcal{E}_3$. При отказе элемента \mathcal{E}_1 в работу включается \mathcal{E}_2 , при отказе \mathcal{E}_2 — \mathcal{E}_3 (рис. 7.32). До включения каждый из резервных элементов находится

в «холодном» резерве и отказать не может. Интенсивность потока отказов основного элемента λ_1 ; интенсивность потока отказов каждого из резервных элементов, когда они работают, одинакова и равна λ_2 . Все потоки отказов простейшие. Требуется определить надежность системы S .

Представим процесс, протекающий в системе S , как марковский случайный процесс (см. гл. 4) с непрерывным временем и с дискретными состояниями:

- S_1 — работает основной элемент \mathcal{E}_1 ,
- S_2 — работает резервный элемент \mathcal{E}_2 ,
- S_3 — работает резервный элемент \mathcal{E}_3 ,
- S_4 — не работает ни один элемент.

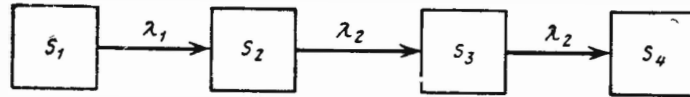


Рис. 7.33

Граф состояний системы показан на рис. 7.33. Так как восстановления элементов не происходит, все стрелки на графе ведут в одну сторону.

Система уравнений Колмогорова для вероятностей состояний будет:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dp_1}{dt} &= -\lambda_1 p_1, \\ \frac{dp_2}{dt} &= -\lambda_2 p_2 + \lambda_1 p_1, \\ \frac{dp_3}{dt} &= -\lambda_2 p_3 + \lambda_2 p_2, \\ \frac{dp_4}{dt} &= \lambda_2 p_3. \end{aligned} \right\} \quad (6.8)$$

К ним надо прибавить нормировочное условие:

$$p_1 + p_2 + p_3 + p_4 = 1. \quad (6.9)$$

Из первого уравнения выражаем p_1 как функцию t :

$$p_1(t) = e^{-\lambda_1 t} \quad (6.10)$$

(начальное условие, при котором мы проинтегрировали это уравнение, $p_1(0) = 1$). Подставляя (6.10) во второе уравнение, получим:

$$\frac{dp_2}{dt} = -\lambda_2 p_2 + \lambda_1 e^{-\lambda_1 t}. \quad (6.11)$$

Проинтегрируем это уравнение с начальным условием $p_2(0) = 0$; получим:

$$p_2(t) = \frac{\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} e^{-\lambda_1 t} - \frac{\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} e^{-\lambda_2 t}. \quad (6.12)$$

Эту функцию подставим в третье уравнение (6.8); получим:

$$\frac{dp_3}{dt} = -\lambda_2 p_3 + \frac{\lambda_1 \lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1} e^{-\lambda_1 t} - \frac{\lambda_1 \lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1} e^{-\lambda_2 t}. \quad (6.13)$$

Уравнение (6.13) нужно проинтегрировать тоже при начальном условии $p_3(0) = 0$; получим:

$$p_3(t) = \frac{\lambda_1 \lambda_2}{(\lambda_2 - \lambda_1)^2} e^{-\lambda_1 t} - \frac{\lambda_1 \lambda_2}{(\lambda_2 - \lambda_1)^2} e^{-\lambda_2 t} - \frac{\lambda_1 \lambda_2 t}{\lambda_2 - \lambda_1} e^{-\lambda_2 t}. \quad (6.14)$$

Для нахождения функции $p_4(t)$ не нужно интегрировать последнее уравнение (6.8) — ее можно найти из условия (6.9):

$$\begin{aligned} p_4(t) &= 1 - P(t) = 1 - (p_1(t) + p_2(t) + p_3(t)) = \\ &= 1 - \frac{\lambda_2^2}{(\lambda_2 - \lambda_1)^2} e^{-\lambda_1 t} - \left[\frac{\lambda_1^2 - 2\lambda_1 \lambda_2}{(\lambda_2 - \lambda_1)^2} - \frac{\lambda_1 \lambda_2 t}{\lambda_2 - \lambda_1} \right] e^{-\lambda_2 t}. \end{aligned}$$

Задача 3. Система с облегченным резервом и простейшими потоками отказов. Резервирующая система (блок) S состоит из основного элемента \mathcal{E}_1 и трех резервных: $\mathcal{E}_2, \mathcal{E}_3, \mathcal{E}_4$ (рис. 7.34). Основной элемент подвергается простейшему потоку отказов с интенсивностью λ_1 ; каждый из резервных до своего включения подвергается потоку отказов с интенсивностью λ_2 ; после включения резервного элемента эта интенсивность мгновенно подскакивает до значения λ_2 . При отказе основного элемента \mathcal{E}_1 включается в работу резервный \mathcal{E}_2 , при отказе \mathcal{E}_2 — \mathcal{E}_3 и т. д.

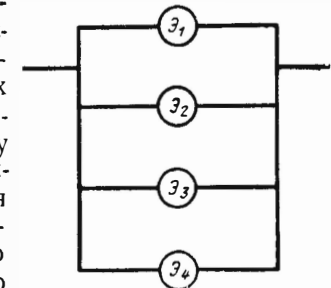


Рис. 7.34

Требуется определить надежность системы.

Будем нумеровать состояния системы двумя индексами: первый равен единице, если основной элемент работает, и нулю — если не работает; второй равен числу исправных резервных элементов:

- S_{13} — основной элемент исправен (работает), все три резервных исправны;
- S_{12} — основной элемент исправен (работает), из трех резервных один отказал, два исправны;
- S_{11} — основной элемент исправен (работает), из трех резервных два отказали, один исправен;
- S_{10} — основной элемент исправен (работает), все три резервных отказали;
- S_{03} — основной элемент отказал, работает один из резервных, остальные два исправны;
- S_{02} — основной элемент отказал, работает один из резервных, из остальных резервных один исправен, другой отказал;
- S_{01} — основной элемент отказал, работает один из резервных, остальные два резервных отказали;
- S_{00} — все элементы отказали.

Граф состояний системы показан на рис. 7.35.

Система уравнений Колмогорова для вероятностей состояний имеет вид:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dp_{13}}{dt} &= -(3\lambda_2 + \lambda_1) p_{13}, \\ \frac{dp_{12}}{dt} &= -(2\lambda_2 + \lambda_1) p_{12} + 3\lambda_2 p_{13}, \\ \frac{dp_{11}}{dt} &= -(\lambda_2 + \lambda_1) p_{11} + 2\lambda_2 p_{12}, \\ \frac{dp_{10}}{dt} &= -\lambda_1 p_{10} + \lambda_2 p_{11}, \\ \frac{dp_{03}}{dt} &= -(\tilde{\lambda}_2 + 2\lambda_2) p_{03} + \lambda_1 p_{13}, \\ \frac{dp_{02}}{dt} &= -(\tilde{\lambda}_2 + \lambda_2) p_{02} + \lambda_1 p_{12} + (\tilde{\lambda}_2 + 2\lambda_2) p_{03}, \\ \frac{dp_{01}}{dt} &= -\tilde{\lambda}_2 p_{01} + \lambda_1 p_{11} + (\tilde{\lambda}_2 + \lambda_2) p_{02}, \\ \frac{dp_{00}}{dt} &= \lambda_1 p_{10} + \tilde{\lambda}_2 p_{01}. \end{aligned} \right\} (6.15)$$

К этим уравнениям нужно добавить условие:

$$p_{13} + p_{12} + p_{11} + p_{10} + p_{03} + p_{02} + p_{01} + p_{00} = 1,$$

позволяющее отбросить любое из уравнений (6.15).

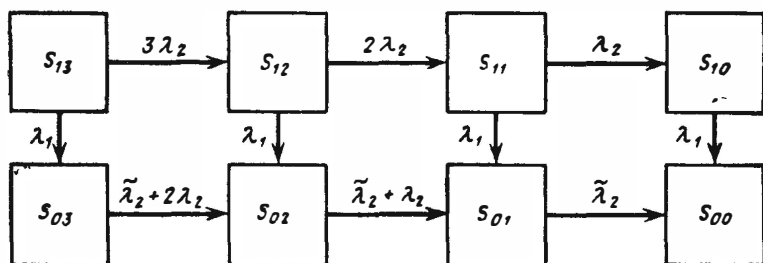


Рис. 7.35

Интегрирование системы (6.15) может быть осуществлено в следующем порядке: из первого уравнения находим $p_{13}(t)$:

$$p_{13}(t) = e^{-(3\lambda_2 + \lambda_1)t}. \quad (6.16)$$

Это выражение подставляется во второе уравнение, которое теперь содержит только одну неизвестную функцию $p_{12}(t)$; находим ее, подставляем в третье уравнение, и так далее. На каждом шаге такого

процесса новые функции мы выражаем через уже известные, пока, наконец, не дойдем до p_{00} , которую выражаем через все остальные:

$$p_{00}(t) = 1 - (p_{13}(t) + p_{12}(t) + p_{11}(t) + p_{10}(t) + p_{03}(t) + p_{02}(t) + p_{01}(t)).$$

После того, как вычисления произведены и функции $p_{13}(t), \dots, p_{00}(t)$ найдены, можно найти надежность системы $P(t)$. Очевидно, она равна сумме вероятностей всех состояний, при которых система работает:

$$P(t) = p_{13}(t) + p_{12}(t) + p_{11}(t) + p_{10}(t) + p_{03}(t) + p_{02}(t) + p_{01}(t),$$

или, что то же,

$$P(t) = 1 - p_{00}(t). \quad (6.17)$$

7. НАДЕЖНОСТЬ СИСТЕМЫ С ВОССТАНОВЛЕНИЕМ

До сих пор, рассматривая задачи надежности, мы исходили из того, что отказавший элемент выходит из строя окончательно и никакого восстановления его функций не производится. Представляет интерес исследование задач надежности в предположении, что отказавшие элементы восстанавливаются — мгновенно заменяются новыми или ремонтируются.

При решении такого рода задач мы будем предполагать, что все потоки событий, переводящие систему из состояния в состояние, — простейшие (иначе мы с такими задачами не справимся).

Предварительно сделаем следующее замечание: все процессы, связанные с надежностью систем, которые мы рассматривали до сих пор, были существенно нестационарными; так как восстановления элементов не было, естественно, что при $t \rightarrow \infty$ надежность системы стремилась к нулю, и «предельным режимом» системы просто было «не работает».

В задачах с восстановлением нас будут интересовать не только переходные процессы в системе, но и установившиеся режимы, достигаемые при $t \rightarrow \infty$. В данном параграфе мы рассмотрим несколько задач из области надежности систем с восстановлением.

Задача 1 (задача о запасных элементах)

Работает простая система, состоящая из одного элемента Э, который подвергается простейшему потоку отказов с интенсивностью λ . При отказе элемент мгновенно заменяется новым с такими же характеристиками. В нашем распоряжении имеется N запасных элементов, находящихся в «холодном» резерве. Определить вероятность того, что этого числа запасных элементов нам хватит для обеспечения работы системы в течение времени t (другими словами, найти надежность $P(t)$ системы с восстановлением).

Решение. Нетрудно заметить, что поставленная задача эквивалентна задаче оценки надежности резервированной системы с N резервными элементами, работающими в холодном резерве и, как таковая, может быть решена методами, предложенными выше. Но мы решим ее несколько иным, более простым методом.

Рассмотрим на оси Ot «поток восстановлений», т. е. последовательность моментов времени, в которые выходят из строя и мгновенно восстанавливаются элементы (рис. 7.36). Очевидно, это — простейший поток с интенсивностью λ . Надежность системы $P(t)$ есть вероятность того, что к моменту t система будет работать. Для этого нужно, чтобы на участке $(0, t)$ отказало не более N элементов (один основной и $N - 1$ запасных).

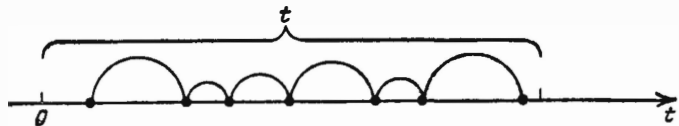


Рис. 7.36

Мы знаем (см. § 4 гл. 4), что число событий простейшего потока, попадающих на участок длиной t , распределено по закону Пуассона:

$$P_m = \frac{a^m}{m!} e^{-a},$$

где $a = \lambda t$, т. е.

$$P_m = \frac{(\lambda t)^m}{m!} e^{-\lambda t} \quad (m = 0, 1, \dots). \quad (7.1)$$

Найдем вероятность того, что число точек (событий), попадающих на участок $(0, t)$, будет не больше N . Эта вероятность и будет надежностью системы

$$P(t) = P_0 + P_1 + \dots + P_N,$$

или, короче,

$$P(t) = \sum_{m=0}^N P_m. \quad (7.2)$$

Подставляя (7.1) в (7.2), получим:

$$P(t) = \sum_{m=0}^N \frac{(\lambda t)^m}{m!} e^{-\lambda t}, \quad (7.3)$$

или, вынося $e^{-\lambda t}$ за знак суммы,

$$P(t) = e^{-\lambda t} \sum_{m=0}^N \frac{(\lambda t)^m}{m!}. \quad (7.4)$$

Вычисления по формулам (7.3) или (7.4) удобно производить, пользуясь таблицами пуассоновского распределения P_m (или вероятностей $R_m = 1 - \sum_{n=0}^{m-1} P_n$, которые несколько удобнее табулируются).

В приложении (табл. 2) приведены выдержки из таблиц пуассоновского распределения (вероятности P_m).

Пример 1 Рассматривается работа элемента с восстановлением (задача 1); интенсивность потока отказов $\lambda = 2$ (отказа в час). В нашем распоряжении $N = 6$ запасных элементов. Определить надежность системы $P(t)$ в функции времени до $\tau = 5$ час (максимальное время работы).

Решение. Воспользуемся табл. 2 приложения. Первый столбец таблицы, где P_7 отлично от нуля — это столбец, соответствующий $a = 1$, т. е. $t = 0,5$. Полагая $t = 0,5$ и складывая все вероятности для $m > 6$ (из них отлична от нуля только P_7), получаем:

$$P(0,5) = 1 - 0,0001 = 0,9999.$$

Для $t = 1$ ($a = 2$) имеем:

$$P(1) = 1 - (0,0037 + 0,0009 + 0,0002) = 1 - 0,0048 = 0,9952 \approx 0,995.$$

Для $t = 2$ ($a = 4$):

$$P(2) = 1 - (0,0595 + 0,0298 + 0,0132 + 0,0053 + 0,0019 + 0,0006 + 0,0002 + 0,0001) = 1 - 0,1106 \approx 0,889.$$

Для $t = 3$ ($a = 6$) уже удобнее не переходить к противоположному событию, а вычислять вероятность того, что число отказов будет меньше семи:

$$P(3) = 0,0025 + 0,0149 + 0,0466 + 0,0892 + 0,1339 + 0,1606 + 0,1606 \approx 0,608.$$

Для $t = 4$ ($a = 8$):

$$P(4) = 0,0003 + 0,0027 + 0,0107 + 0,0286 + 0,0572 + 0,0916 + 0,1221 \approx 0,313.$$

Для $t = 5$ ($a = 10$):

$$P(5) = 0,0000 + 0,0005 + 0,0023 + 0,0076 + 0,0189 + 0,0378 + 0,0631 \approx 0,130$$

Наносим полученные значения на график (рис. 7.37).

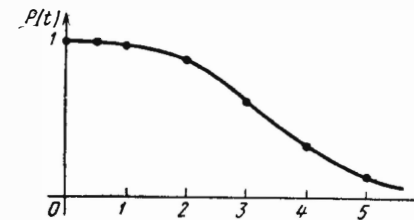


Рис. 7.37

Задача 2. Система состоит не из одного, как в задаче 1, а из нескольких элементов; среди них

n_1 элементов группы 1,

n_2 элементов группы 2,

...

n_k элементов группы k .

Каждый из элементов любой группы, независимо от других, может отказывать; интенсивность потока отказов для элементов разных групп равна соответственно: $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$.

Все потоки отказов — простейшие. Отказавший элемент немедленно заменяется новым. В запасе имеется N_1, N_2, \dots, N_k элементов соответствующих групп. Отсутствие запасного элемента при очередном отказе означает отказ устройства. Требуется определить надежность системы $P(t)$.

Решение. Так как отсутствие запасного элемента любой группы равносильно отказу устройства, будем рассматривать группы как «последовательно» включенные элементы; тогда надежность системы будет равна произведению надежностей всех групп. Надежность i -й группы определяется как в задаче 1:

$$P^{(i)}(t) = e^{-\lambda_i t} \sum_{m=0}^{N_i} \frac{(\lambda_i t)^m}{m!}. \quad (7.5)$$

Перемножая эти надежности, получим надежность системы:

$$P(t) = P^{(1)}(t) \cdot P^{(2)}(t) \cdot \dots \cdot P^{(k)}(t),$$

или, короче,

$$P(t) = \prod_{i=1}^k P^{(i)}(t). \quad (7.6)$$

Заметим, что, пользуясь выведенными формулами, можно не только оценивать надежность системы при заданном числе запасных элементов, но и определять, сколько запасных элементов нужно иметь в распоряжении для того, чтобы система при заданном t имела определенную надежность.

Пример 2. Определить число запасных элементов N , которое надо иметь в распоряжении для того, чтобы система, состоящая из одного основного элемента и N запасных с интенсивностью потока отказов $\lambda = 0,5$, имела при $t=8$ надежность не меньше 0,95.

Решение. Имеем $a = \lambda t = 4$. В столбце табл. 2 приложения, соответствующем $a = 4$, складываем все вероятности, начиная с последней, до тех пор, пока сумма не дойдет до

$$1 - 0,95 = 0,05.$$

Получаем:

$$0,0001 + 0,0002 + 0,0006 + 0,0019 + 0,0053 + 0,0132 + 0,0298 = 0,0511.$$

Итак, вероятность того, что число отказавших элементов будет больше семи, равна 0,0511, т. е. $N = 7$ не удовлетворяет нашему требованию; если же взять $N = 8$, то вероятность нехватки элементов будет меньше 0,05:

$$0,0001 + 0,0002 + 0,0006 + 0,0019 + 0,0053 + 0,0132 = 0,0213.$$

Отсюда, число запасных элементов, удовлетворяющее условию задачи, $N=8$.

Во всех рассмотренных выше задачах восстановление элемента происходило мгновенно; теперь мы рассмотрим задачу, где оно задерживается.

Задача 3 (система из одного элемента с задержанным восстановлением).

Система состоит из одного элемента \mathcal{E} , находящегося под действием простейшего потока отказов с интенсивностью λ . Отказавший элемент немедленно начинает восстанавливаться (ремонтиться). Поток восстановлений — простейший, с интенсивностью μ . Запас средств для ремонта неограничен. Требуется определить:

396

— обобщенную надежность системы $P(t)$ — вероятность того, что в момент t система будет работать;

— предельное значение обобщенной надежности p — вероятность того, что в произвольный, достаточно удаленный от начала момент система будет работать;

— вероятность $\tilde{P}(t)$ того, что до определенного момента система будет работать вообще безотказно (т. е. не будет ни одного перерыва в работе для восстановления).

Решение. Состояния системы (в данном случае элемента) будут:

S_0 — работает,

S_1 — восстанавливается.

Граф состояний показан на рис. 7.38. Сравнивая граф состояний 7.38 с графом состояний одноканальной системы массового обслужи-

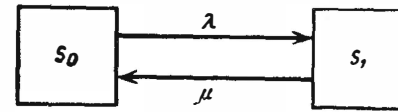


Рис. 7.38

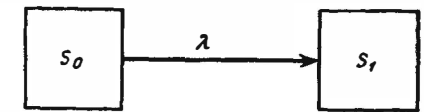


Рис. 7.39

вания с отказами (см. § 3 гл. 5, рис. 5.1), мы видим, что они совпадают; значит, совпадают и вероятности состояний, т. е.

$$\left. \begin{aligned} p_0(t) &= \frac{\mu}{\lambda + \mu} + \frac{\lambda}{\lambda + \mu} e^{-(\lambda + \mu)t}, \\ p_1(t) &= 1 - p_0(t) = \frac{\lambda}{\lambda + \mu} (1 - e^{-(\lambda + \mu)t}). \end{aligned} \right\} \quad (7.7)$$

Обобщенная надежность системы — вероятность того, что в момент t она будет работать:

$$P(t) = p_0(t) = \frac{\mu}{\lambda + \mu} + \frac{\lambda}{\lambda + \mu} e^{-(\lambda + \mu)t}. \quad (7.8)$$

При $t \rightarrow \infty$ эта надежность стремится к предельному значению:

$$p = \frac{\mu}{\lambda + \mu},$$

т. е. равна относительной доле интенсивности потока восстановлений в суммарной интенсивности потока восстановлений и отказов.

Вероятность $\tilde{P}(t)$ того, что до момента t не произойдет ни одного отказа, определим следующим образом. Предположим, что восстановлений отказавшего элемента нет, т. е. граф состояний имеет вид, показанный на рис. 7.39. Искомая вероятность $\tilde{P}(t)$ будет равна вероятности $\tilde{p}_0(t)$ того, что система с графом состояний, показанным на рис. 7.39, будет к моменту t в состоянии S_0 ; эта вероятность получится решением дифференциального уравнения

$$\frac{d\tilde{p}_0}{dt} = -\lambda\tilde{p}_0,$$

откуда

$$\tilde{p}_0(t) = e^{-\lambda t}.$$

Таким образом,

$$\bar{P}(t) = e^{-\lambda t}. \quad (7.9)$$

Задача 4 (система из нескольких элементов с задержанным восстановлением).

Система S состоит из n элементов, каждый из которых находится под действием простейшего потока отказов с интенсивностью λ . При отказе любого элемента система выключается и начинается восстановление элемента. При неработающей системе элементы отказывать не могут. Интенсивность потока восстановлений равна μ . Все потоки — простейшие. Найти:

- обобщенную надежность системы $P(t)$ (вероятность того, что в момент t система будет работать);
- предельную обобщенную надежность системы p ;
- вероятность $\tilde{P}(t)$ того, что до момента t отказов вообще не будет.

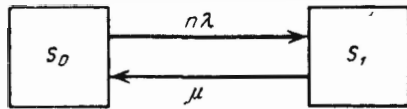


Рис. 7.40

Решение. Система по-прежнему может быть только в двух состояниях:

- S_0 — работает,
- S_1 — выключена, восстанавливается один элемент*).

Граф состояний показан на рис. 7.40. Как видно, он отличается от графа на рис. 7.38 только тем, что вместо λ стоит $n\lambda$. Отсюда, на основе решения предыдущей задачи,

$$P(t) = \frac{\mu}{n\lambda + \mu} + \frac{n\lambda}{n\lambda + \mu} e^{-(n\lambda + \mu)t}, \quad (7.10)$$

$$p = \frac{\mu}{n\lambda + \mu}, \quad (7.11)$$

$$\tilde{P}(t) = e^{-n\lambda t}. \quad (7.12)$$

Иную картину мы получим, если предположим, что во время восстановления одного элемента другие продолжают работать и могут выходить из строя.

Задача 5. Система S состоит из n элементов, каждый из которых находится под действием потока отказов (неисправностей) с интенсивностью λ . При отказе элемента он немедленно начинает восстанавли-

*) Одновременный выход из строя двух или более элементов не рассматривается в силу ординарности потока отказов.

ливаться, остальные же элементы продолжают работать (активно или в горячем резерве). Интенсивность потока восстановлений элемента (независимо от числа одновременно восстанавливаемых элементов) равна μ .

Найти:

- вероятность $P(t)$ того, что в момент t все элементы будут исправны;
- предельную вероятность p того же события;
- среднее число исправно работающих элементов для предельного режима (при $t \rightarrow \infty$).

Решение. Будем нумеровать состояния системы по числу неисправных элементов:

- S_0 — все элементы исправны;
- S_1 — один элемент восстанавливается, остальные исправны;
- ...
- S_k — k элементов восстанавливаются, остальные исправны;
- ...
- S_n — все n элементов восстанавливаются.

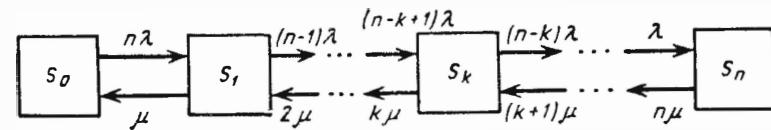


Рис. 7.41

Граф состояний системы показан на рис. 7.41. Сравнивая его с графом состояний замкнутой СМО в случае, когда число m рабочих, обслуживающих станки, равно числу n станков (см. § 8 гл. 5), видим, что они совпадают. Следовательно, для обоих графов совпадают и дифференциальные уравнения для вероятностей состояний, и предельные вероятности. Дифференциальные уравнения имеют вид:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dp_0}{dt} &= -n\lambda p_0 + \mu p_1, \\ \frac{dp_1}{dt} &= -[(n-1)\lambda + \mu] p_1 + n\lambda p_0 + 2\mu p_2, \\ &\dots \dots \dots \\ \frac{dp_k}{dt} &= -[(n-k)\lambda + k\mu] p_k + (n-k+1)\lambda p_{k-1} + (k+1)\mu p_{k+1}, \\ &\dots \dots \dots \\ \frac{dp_n}{dt} &= -n\mu p_n + \lambda p_{n-1}, \end{aligned} \right\} (7.13)$$

плюс условие

$$p_1 + p_2 + \dots + p_n = 1.$$

Искомая вероятность $P(t)$ есть не что иное, как $p_0(t)$, которую получим, интегрируя систему уравнений (7.13) при начальных условиях:

$$t = 0; \quad p_0 = 1; \quad p_1 = \dots = p_n = 0.$$

Предельные вероятности состояний находим по формулам § 8 гл. 5, полагая $m = n$, $\lambda/\mu = \rho$:

$$\begin{aligned} p_0 &= \frac{1}{1 + \frac{n}{1!} \rho + \dots + \frac{n(n-1) \dots (n-r+1)}{r!} \rho^r + \dots + \frac{n(n-1) \dots 2 \cdot 1}{n!} \rho^n} = \\ &= \frac{1}{1 + C_n^1 \rho + \dots + C_n^r \rho^r + \dots + C_n^n \rho^n} = \frac{1}{(1 + \rho)^n}; \\ p_r &= C_n^r \rho^r p_0; \quad r = 1, \dots, n. \end{aligned}$$

Искомая предельная вероятность p будет равна предельной вероятности p_0 .

Среднее число исправно работающих элементов \bar{n} будет равно числу элементов n , умноженному на вероятность того, что отдельный элемент работает исправно. Эта вероятность для предельного режима равна $\frac{\mu}{\lambda + \mu}$, откуда

$$\bar{n} = \frac{n\mu}{\lambda + \mu} = \frac{n}{1 + \rho}.$$

Рассмотренные задачи и примеры показывают, что математический аппарат, применяемый для анализа надежности технических устройств, в сущности, совпадает с аппаратом теории массового обслуживания, и исследование процессов, протекающих в системах с ненадежными элементами, при известных условиях может быть проведено методами теории непрерывных марковских цепей. Для этого нужно, чтобы потоки событий, переводящие элементы из состояния в состояние, были (точно или приближенно) пуассоновскими. Эти потоки обязательно должны быть стационарными, но во всяком случае такими, чтобы интенсивности потоков событий не зависели от случайных моментов переходов системы из состояния в состояние. Для наиболее простого, стационарного случая это означает, что, в частности, все законы надежности должны быть экспоненциальными, а законы распределения времени восстановления — тоже показательными или близкими к показательным.

8. УЧЕТ ЗАВИСИМОСТИ ОТКАЗОВ ПРИ ОЦЕНКЕ НАДЕЖНОСТИ ТЕХНИЧЕСКИХ УСТРОЙСТВ

До сих пор, анализируя надежность технических устройств (систем), составленных из элементов, мы предполагали, что отказы этих элементов происходят независимо друг от друга. Это допущение не

всегда справедливо: в ряде случаев отказы элементов могут быть зависимыми.

Зависимость между отказами может быть двух типов.

1. Отказ какого-либо элемента меняет режим работы системы (например, может возникнуть короткое замыкание или резкие колебания напряжения; или же выход из строя одного элемента, являющегося регулятором, меняет режим работы других).

2. На всю совокупность элементов действует какой-то один случайный фактор (температура, вибрация и т. д.), одновременно влияющий на надежность всех элементов или части из них.

Остановимся вкратце на способах учета обоих типов зависимости.

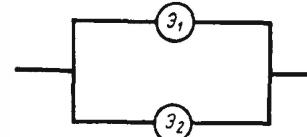


Рис. 7.42

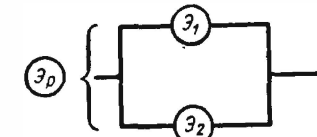


Рис. 7.43

Пусть имеется наличие зависимости отказов первого типа — выход из строя одного элемента влияет на режим работы и, значит, на надежность остальных. Очевидно, если мы имеем дело с простой (нерезервированной) системой при отсутствии восстановления, то зависимость первого типа не может сказаться на надежности системы. Если же система резервирована (или происходит восстановление), зависимость такого типа должна учитываться.

Пример 1. Система состоит из двух элементов: основного E_1 и резервного E_2 , работающего в «горячем резерве» (рис. 7.42). При отказе основного элемента система автоматически переключается на резервный. Интенсивность потока отказов обоих элементов в нормальном рабочем состоянии одинакова и равна λ . Выход из строя основного элемента влияет на режим работы резервного так, что интенсивность отказов λ увеличивается на величину $f(t - t_1)$, где t_1 — момент отказа основного элемента. Таким образом, условная интенсивность отказов резервного элемента при условии, что основной отказал в момент t_1 , равна:

$$\lambda_2(t/t_1) = \begin{cases} \lambda & \text{при } t < t_1, \\ \lambda + f(t - t_1) & \text{при } t > t_1. \end{cases}$$

Требуется определить надежность системы $P(t)$.

Решение Данная задача сводится к уже решенной ранее. Действительно, полагая $\lambda_1(t) = \lambda_2(t) = \lambda$; $\tilde{\lambda}_2(t/t_1) = \lambda + f(t - t_1)$, мы приходим к той схеме, которая рассматривалась в задаче 1 § 6.

Первый тип зависимости отказов (влияние отказов одних элементов на надежность других) наблюдается и тогда, когда некоторые элементы (регуляторы) предназначены для поддержания нормального режима работы других.

Пример 2. Система S состоит из двух «параллельно» включенных элементов: основного E_1 и резервного E_2 , находящегося в облегченном резерве (рис. 7.43).

Регулятор \mathcal{E}_p предназначен для того, чтобы поддерживать нормальный режим работы обоих элементов: \mathcal{E}_1 и \mathcal{E}_2 . В нормальном режиме интенсивности отказов работающего и неработающего (исправного) элементов равны соответственно λ_1 и λ_2 . При отказе регулятора эти интенсивности мгновенно увеличиваются и становятся равными $\tilde{\lambda}_1$ и $\tilde{\lambda}_2$. Интенсивность потока отказов самого регулятора равна λ_p . Все потоки событий — простейшие. Определить надежность системы.

Решение. При постоянных интенсивностях отказов процесс, происходящий в системе — марковский.

Будем нумеровать состояния системы тремя индексами: первый равен нулю, если исправен регулятор, и равен единице, если он вышел из строя. Второй индекс равен нулю, если исправен основной элемент \mathcal{E}_1 , и единице, если он вышел из строя. Третий индекс — то же для резервного элемента \mathcal{E}_2 .

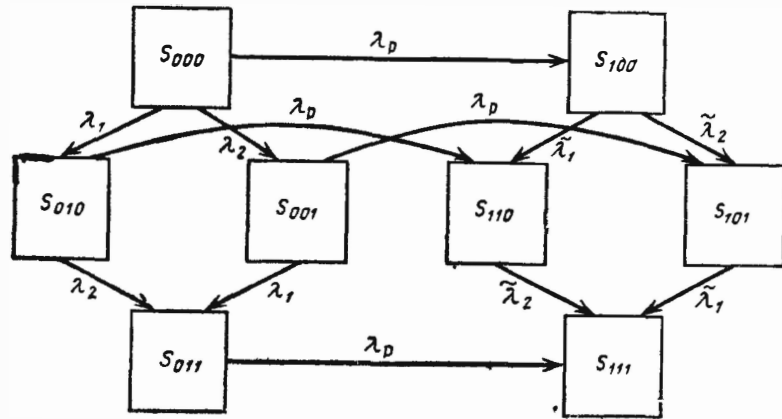


Рис. 7.44

Состояния системы (рис. 7.44):

S_{000} — все три элемента исправны,

S_{010} — регулятор исправен, элемент \mathcal{E}_1 вышел из строя, работает \mathcal{E}_2 ;

S_{001} — регулятор исправен, элемент \mathcal{E}_1 исправен, работает \mathcal{E}_2 , вышел из строя;

S_{011} — регулятор исправен, оба элемента \mathcal{E}_1 и \mathcal{E}_2 вышли из строя;

S_{100} — регулятор вышел из строя; оба элемента \mathcal{E}_1 и \mathcal{E}_2 исправны, из них \mathcal{E}_1 работает;

S_{110} — регулятор вышел из строя, элемент \mathcal{E}_1 вышел из строя, работает \mathcal{E}_2 ;

S_{101} — регулятор вышел из строя, элемент \mathcal{E}_1 работает, \mathcal{E}_2 вышел из строя;

S_{111} — все три элемента вышли из строя.

Составив по этому графу систему дифференциальных уравнений (предоставляем это сделать читателю) и решив эти уравнения при начальных условиях:

$$t=0; p_{000}=1; p_{100}=\dots=p_{111}=0,$$

получим вероятности состояний. Надежность системы $P(t)$ выразится как сумма вероятностей всех состояний, кроме S_{011} и S_{111} , в которых не работает ни один из элементов \mathcal{E}_1 и \mathcal{E}_2 :

$$P(t) = 1 - p_{011}(t) - p_{111}(t). \quad (8.1)$$

Остановимся теперь на втором типе зависимости между отказами. Этот тип зависимости обусловлен наличием каких-то случайных факторов, влияющих одновременно на работу всех элементов. Будем считать, что эти факторы определяют тот или иной режим работы

т е с и с т е м ы. Рассмотрим сначала самый простой случай, когда режим работы системы не меняется в ходе ее эксплуатации, а остается постоянным. Так, например, можно считать, что метеорологические условия не меняются или мало меняются в процессе полета ракеты класса «Земля — Земля».

Пусть возможны несколько режимов работы:

$$R_1, R_2, \dots, R_k$$

с вероятностями, равными соответственно

$$P(R_1), P(R_2), \dots, P(R_k).$$

Имеется некоторая система S , надежность которой зависит от режима, при котором она работает. Обозначим условную надежность системы при i -м режиме (R_i):

$$P(t/R_i) \quad (i=1, \dots, k).$$

Найдем теперь полную (безусловную) надежность системы $P(t)$. По формуле полной вероятности:

$$P(t) = P(R_1)P(t/R_1) + P(R_2)P(t/R_2) + \dots + P(R_k)P(t/R_k),$$

или, короче,

$$P(t) = \sum_{i=1}^k P(R_i)P(t/R_i). \quad (8.2)$$

Пример 3. Система S состоит из двух «последовательно» соединенных элементов \mathcal{E}_1 и \mathcal{E}_2 и может работать в одном из трех режимов: R_1, R_2, R_3 , вероятности которых

$$P(R_1)=0,4; P(R_2)=0,3; P(R_3)=0,3.$$

При режиме R_1 интенсивности потоков отказов элементов \mathcal{E}_1 и \mathcal{E}_2 равны 0,1 и 0,2 (отказов в час), при режиме R_2 они равны 0,3 и 0,4, при режиме R_3 — 0,4 и 0,5. Определить надежность системы и вычислить ее для $t=2$ час.

Решение. При «последовательном» соединении элементов интенсивности отказов складываются. Находим условные надежности системы при трех режимах:

$$P(t/R_1) = e^{-(0,1+0,2)t} = e^{-0,3t},$$

$$P(t/R_2) = e^{-(0,3+0,4)t} = e^{-0,7t},$$

$$P(t/R_3) = e^{-(0,4+0,5)t} = e^{-0,9t}.$$

Отсюда

$$P(t) = 0,4 e^{-0,3t} + 0,3 e^{-0,7t} + 0,3 e^{-0,9t}.$$

Полагая $t=2$, получим:

$$P(2) = 0,4 e^{-0,6} + 0,3 e^{-1,4} + 0,3 e^{-1,8} = \\ = 0,4 \cdot 0,549 + 0,3 \cdot 0,247 + 0,3 \cdot 0,165 = 0,343.$$

Аналогично рассмотренной дискретной схеме нескольких режимов можно определить надежность системы, если режим работы характеризуется некоторой непрерывной случайной величиной R (скажем,

температурой), имеющей известную плотность распределения $f(r)$. Тогда в формуле (8.2) вместо суммы будет фигурировать интеграл:

$$P(t) = \int_{(R)} P(t/r) f(r) dr, \quad (8.3)$$

где $P(t/r)$ — условная надежность системы при условии, что $R = r$; $f(r)$ — плотность распределения параметра R .

Интеграл распространяется на всю область (R) возможных значений параметра R .

Пример 4 Система S состоит из двух элементов Θ_1, Θ_2 , включенных «параллельно»; резервный элемент Θ_2 находится в «горячем» резерве. Интенсивности потока отказов каждого элемента постоянны во времени, но зависят от режима работы системы — температуры Θ ; эта зависимость выражается формулой

$$\lambda(\Theta) = \lambda_0 + \alpha\Theta.$$

Плотность распределения температуры Θ постоянна на интервале от ϑ_1 до ϑ_2 :

$$f(\vartheta) = 1/(\vartheta_2 - \vartheta_1) \text{ при } \vartheta_1 < \vartheta < \vartheta_2.$$

Определить надежность системы.

Решение. Определяем условную надежность системы при заданном значении $\Theta = \vartheta$:

$$P(t/\vartheta) = 1 - (1 - e^{-(\lambda_0 + \alpha\vartheta)t})^2.$$

По формуле (8.3)

$$\begin{aligned} P(t) &= \int_{\vartheta_1}^{\vartheta_2} [1 - (1 - e^{-(\lambda_0 + \alpha\vartheta)t})^2] \frac{1}{\vartheta_2 - \vartheta_1} d\vartheta = \frac{1}{\vartheta_2 - \vartheta_1} \int_{\vartheta_1}^{\vartheta_2} [2e^{-(\lambda_0 + \alpha\vartheta)t} - e^{-2(\lambda_0 + \alpha\vartheta)t}] d\vartheta = \\ &= \frac{1}{\alpha(\vartheta_2 - \vartheta_1)t} \left[2e^{-(\lambda_0 + \alpha\vartheta_1)t} - 2e^{-(\lambda_0 + \alpha\vartheta_2)t} - \frac{1}{2}e^{-2(\lambda_0 + \alpha\vartheta_1)t} + \frac{1}{2}e^{-2(\lambda_0 + \alpha\vartheta_2)t} \right]. \end{aligned}$$

Заметим, что неучет зависимости отказов, если она имеется и существенна, может привести к большим ошибкам, особенно, если система состоит из многих элементов.

Пример 5. Система S состоит из 50 однородных элементов, соединенных «последовательно», и может работать в одном из двух режимов:

R_1 — нормальном,
 R_2 — ненормальном.

Вероятности этих режимов равны соответственно:

$$P(R_1) = 0,9; \quad P(R_2) = 0,1.$$

В нормальном режиме надежность каждого элемента (за определенное время τ) равна $p = 0,998$, в ненормальном $p' = 0,9$. Определить полную надежность системы S и сравнить с той, которая получилась бы, если бы элементы выходили из строя независимо.

Решение: Условная надежность системы при первом режиме:

$$P_{R_1} = 0,998^{50} \approx 0,904;$$

при втором.

$$P_{R_2} = 0,9^{50} \approx 0,004.$$

Полная надежность системы:

$$P \approx 0,9 \cdot 0,904 + 0,1 \cdot 0,004 = 0,814.$$

Подсчитаем ту же надежность, считая отказы элементов независимыми и приписывая каждому из них надежность, равную

$$\tilde{p} = 0,9p + 0,1p' = 0,988.$$

Перемножая надежности 50 элементов, получим:

$$\tilde{P} = 0,988^{50} \approx 0,551.$$

Как видно из примера, пренебрежение зависимостью отказов при «последовательном» соединении элементов может привести к существенному занижению надежности. При «параллельном» соединении элементов тот же неучет зависимости приводит не к занижению надежности, а, наоборот, к ее завышению.

Пример 6. Резервированная система состоит из основного элемента Θ_1 и трех резервных: $\Theta_2, \Theta_3, \Theta_4$, работающих в «горячем» резерве. Система может работать в одном из двух режимов: R_1 — нормальном и R_2 — ненормальном с вероятностями $P(R_1) = 0,7$ и $P(R_2) = 0,3$.

Надежность всех элементов одинакова; в нормальном режиме она равна $p = 0,99$, в ненормальном $p' = 0,4$. Определить полную надежность системы P и сравнить ее с той \tilde{P} , которая получится, если считать отказы независимыми.

Решение. Условная надежность системы при каждом режиме:

$$P_{R_1} = 1 - (1 - 0,99)^4 \approx 1,000, \quad P_{R_2} = 1 - (1 - 0,4)^4 \approx 0,870.$$

Полная надежность системы:

$$P \approx 0,7 \cdot 1,000 + 0,3 \cdot 0,870 \approx 0,961.$$

Если считать отказы элементов независимыми и приписать каждому из них надежность

$$\tilde{p} = 0,7 \cdot 0,99 + 0,3 \cdot 0,4 = 0,813,$$

то надежность системы будет другая:

$$\tilde{P} = 1 - (1 - \tilde{p})^4 \approx 0,999,$$

т. е. значительно выше, чем истинная надежность 0,961.

Завышение надежности резервированного блока, которое получается при пренебрежении зависимостью отказов, тем больше, чем больше число резервных элементов.

Если техническая система состоит из элементов, соединенных как «последовательно», так и «параллельно» (например, если дублированы только наиболее важные узлы), то пренебрежение зависимостью отказов может приводить как к завышению, так и к занижению надежности.

Наконец, рассмотрим случай, когда в процессе работы системы режим может меняться случайным образом.

Пример 7. Система S , состоящая из двух «последовательно» соединенных элементов, может работать в одном из двух режимов: R_1 и R_2 . Переход системы из режима R_1 в режим R_2 происходит под действием простейшего потока событий с интенсивностью λ_{12} ; обратный переход — под действием простейшего потока событий с интенсивностью λ_{21} . В режиме R_1 интенсивность потока отказов первого элемента равна $\lambda_1^{(1)}$, второго — $\lambda_2^{(1)}$; в режиме R_2 эти интенсивности равны $\lambda_1^{(2)}$, $\lambda_2^{(2)}$. Все потоки — простейшие. Определить надежность системы $P(t)$.

Решение. Состояния системы будут:

- $S_{1и}$ — режим R_1 , оба элемента исправны;
- $S_{1н}$ — режим R_1 , хотя бы один элемент неисправен;
- $S_{2и}$ — режим R_2 , оба элемента исправны;
- $S_{2н}$ — режим R_2 , хотя бы один элемент неисправен.

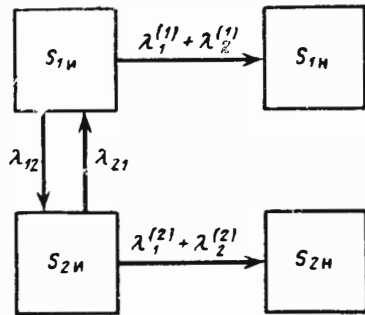


Рис. 7.45

Граф состояний системы показан на рис. 7.45. Стрелки, переводящие систему из состояния $S_{1н}$ в $S_{2и}$ и обратно, не показаны, так как, если система не исправна, нам все равно, какой режим имеет место.

Уравнения Колмогорова для вероятностей состояний будут:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dp_{1и}}{dt} &= -(\lambda_1^{(1)} + \lambda_2^{(1)} + \lambda_{12}) p_{1и} + \lambda_{21} p_{2и}, \\ \frac{dp_{2и}}{dt} &= -(\lambda_1^{(2)} + \lambda_2^{(2)} + \lambda_{21}) p_{2и} + \lambda_{12} p_{1и}. \end{aligned} \right\} \quad (8.4)$$

Другие вероятности нас в данном случае не интересуют, так как они соответствуют неисправной (неработающей) системе.

Если мы знаем, в каком режиме (R_1 или R_2) система начинает работу, то уравнения (8.4) будут интегрироваться при вполне определенных начальных условиях. Например, если система начинает работу в режиме R_1 , начальные условия будут:

$$t=0, \quad p_{1и}=1, \quad p_{2и}=0. \quad (8.5)$$

Проинтегрируем систему (8.4), например, при численных значениях параметров:

$$\lambda_{12}=1, \quad \lambda_{21}=3, \quad \lambda_1^{(1)}=1, \quad \lambda_2^{(1)}=2, \quad \lambda_1^{(2)}=2, \quad \lambda_2^{(2)}=4.$$

Уравнения (8.4) примут вид:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dp_{1и}}{dt} &= -4p_{1и} + 3p_{2и}, \\ \frac{dp_{2и}}{dt} &= p_{1и} - 9p_{2и}. \end{aligned} \right\} \quad (8.6)$$

Прежде всего найдем, при каких λ пара функций $Ce^{-\lambda t}$, $De^{-\lambda t}$ может удовлетворять уравнениям. Подстановка такой пары в систему (8.6) дает:

$$\left. \begin{aligned} -\lambda C &= -4C + 3D, \\ -\lambda D &= C - 9D \end{aligned} \right\}$$

или

$$\left. \begin{aligned} (\lambda - 4)C + 3D &= 0, \\ C + (\lambda - 9)D &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (8.7)$$

Чтобы система уравнений (8.7) имела какое-нибудь решение (C, D), кроме нулевого, необходимо и достаточно, чтобы был равен нулю определитель из коэффициентов этой системы:

$$(\lambda - 4)(\lambda - 9) - 1 \cdot 3 = 0$$

или

$$\lambda^2 - 13\lambda + 33 = 0.$$

Решая это уравнение, находим два значения λ :

$$\lambda_1 = 6,5 - \sqrt{6,5^2 - 33} \approx 3,459,$$

$$\lambda_2 = 6,5 + \sqrt{6,5^2 - 33} \approx 9,541.$$

При значении $\lambda = \lambda_1$ решение системы (8.7) дается формулой

$$D^{(1)} = \frac{4 - \lambda_1}{3} C^{(1)} = 0,180 C^{(1)},$$

при $\lambda = \lambda_2$ — формулой

$$D^{(2)} = \frac{4 - \lambda_2}{3} C^{(2)} = -1,847 C^{(2)}.$$

Отсюда вытекает, что общий вид решения системы дифференциальных уравнений (8.7) — это пара функций:

$$p_{1и}(t) = C^{(1)} e^{-3,459t} + C^{(2)} e^{-9,541t},$$

$$p_{2и}(t) = 0,180 C^{(1)} e^{-3,459t} - 1,847 C^{(2)} e^{-9,541t}.$$

Начальным условиям мы можем удовлетворить соответствующим выбором произвольных постоянных $C^{(1)}$ и $C^{(2)}$. Для того чтобы выполнялось условие $p_{1и}(0) = 1$, $p_{2и}(0) = 0$, нужно, чтобы было

$$\left. \begin{aligned} C^{(1)} + C^{(2)} &= 1, \\ 0,180 C^{(1)} - 1,847 C^{(2)} &= 0. \end{aligned} \right\}$$

Из второго уравнения $C^{(2)} = 0,097 C^{(1)}$; подставляя это в первое, получаем:

$$C^{(1)} = 1/1,097 = 0,912; \quad C^{(2)} = 0,088.$$

Окончательно

$$\begin{aligned} p_{1н}(t) &= 0,912 e^{-3,459 t} + 0,088 e^{-9,541 t}, \\ p_{2н}(t) &= 0,164 (e^{-3,459 t} - e^{-9,541 t}). \end{aligned}$$

Надежность системы, очевидно, будет равна сумме вероятностей исправной работы:

$$P^{(1)}(t) = p_{1н}^{(1)}(t) + p_{2н}^{(1)}(t) = 1,076 e^{-3,459 t} - 0,076 e^{-9,541 t},$$

где верхний индекс (1) показывает, что они вычислены для определенного начального режима R_1 .

Аналогично, для начального режима R_2 :

$$\begin{aligned} p_{1н}^{(2)}(t) &= 0,493 (e^{-3,459 t} - e^{-9,541 t}), \\ p_{2н}^{(2)}(t) &= 0,089 e^{-3,459 t} + 0,911 e^{-9,541 t}, \\ P^{(2)}(t) &= p_{1н}^{(2)}(t) + p_{2н}^{(2)}(t) = 0,582 e^{-3,459 t} + 0,418 e^{-9,541 t}. \end{aligned}$$

Если начальный режим работы системы в точности неизвестен, а известны только вероятности режимов R_1 и R_2 в начале процесса, надежность системы может быть подсчитана по формуле полной вероятности:

$$P(t) = P(R_1) P^{(1)}(t) + P(R_2) P^{(2)}(t),$$

где $P(R_1)$, $P(R_2)$ — вероятности того, что в начальный момент имеют место режимы R_1 и R_2 соответственно.

МОДЕЛИРОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ МЕТОДОМ СТАТИСТИЧЕСКИХ ИСПЫТАНИЙ

1. МЕТОД СТАТИСТИЧЕСКИХ ИСПЫТАНИЙ (МОНТЕ-КАРЛО)

В ряде предшествующих глав мы познакомились с методами построения некоторых математических моделей, дающих возможность установить аналитическую (формульную) связь между заданными условиями операции (в том числе принятым нами решением) и результатом (исходом) операции, характеризующимся одним или несколькими параметрами — показателями эффективности. Если в ход операции вмешиваются случайные факторы, то она представляет собой случайный процесс, а показатель эффективности — вероятность какого-то события или же математическое ожидание какой-то случайной величины. Иногда удается построить аналитическую модель случайного процесса (например, систему дифференциальных уравнений для вероятностей состояний или алгебраических уравнений для предельных вероятностей состояний) и связать заданные условия операции с ее исходом аналитическими зависимостями. Однако это удается далеко не всегда, — главным образом, в тех случаях, когда случайный процесс, протекающий в рассматриваемой системе, марковский или близок к марковскому.

На практике далеко не все случайные процессы, наблюдаемые в операциях, являются марковскими или близкими к ним. Например, в реальных системах массового обслуживания поток заявок отнюдь не всегда бывает пуассоновским; еще реже наблюдается показательное (или близкое к нему) распределение времени обслуживания. Для произвольных же потоков событий, переводящих систему из состояния в состояние, аналитические решения получены только для отдельных частных случаев, а в общем случае удовлетворительных методов математического описания соответствующих процессов не существует.

В тех случаях, когда построение аналитической модели явления по той или другой причине трудно осуществимо, применяется другой метод моделирования, известный под названием метода статистических испытаний или, иначе, метода Монте-Карло.

В настоящее время при моделировании операций и вообще случайных процессов метод Монте-Карло применяется очень широко. Такое широкое распространение метода связано, главным образом,

с появлением ЭЦВМ, позволяющих в обозримые сроки выполнять массовые расчеты по этому методу (без машин весьма трудоемкие). Однако в принципе метод Монте-Карло может применяться и без помощи ЭЦВМ. В данном параграфе мы изложим существо метода, безотносительно к способу его осуществления.

Идея метода Монте-Карло чрезвычайно проста и состоит она в следующем. Вместо того, чтобы описывать случайное явление с помощью аналитических зависимостей, производится «розыгрыш» — моделирование случайного явления с помощью некоторой процедуры, дающей случайный результат. Так же как в жизни конкретное осуществление процесса складывается каждый раз по-иному, так же и в результате «розыгрыша» мы получаем один экземпляр — одну «реализацию» случайного явления. Произведя такой «розыгрыш» очень большое число раз, мы получим статистический материал — множество реализаций случайного явления, — который можно обработать обычными методами математической статистики.

Нередко такой прием оказывается проще, чем попытки построить аналитическую модель явления и исследовать зависимость между его параметрами на этой модели. Для сложных операций, в которых участвует большое число элементов (машин, систем, людей, коллективов) и в которых случайные факторы сложным образом взаимодействуют между собой, метод статистических испытаний, как правило, оказывается проще аналитического.

В сущности, методом «розыгрыша» может быть решена любая вероятностная задача; однако оправданным он становится только в случае, когда процедура «розыгрыша» проще, а не сложнее применения аналитических, вычислительных методов.

Рассмотрим элементарный пример. Решается задача: по некоторой цели Ц производится четыре независимых выстрела, каждый из которых попадает в нее с вероятностью $p = 0,5$. Для поражения (уничтожения) цели одного попадания недостаточно, требуется не менее двух попаданий. Определить вероятность поражения цели.

Поставленную вероятностную задачу можно решить двумя способами: а) аналитически и б) «розыгрышем».

Сначала решим задачу аналитически. Вероятность поражения цели W вычислим через вероятность противоположного события — непоражения цели. Вероятность непоражения цели равна сумме вероятностей ни одного попадания и ровно одного попадания; вероятность ни одного попадания равна $0,5^4$; вероятность ровно одного попадания равна $C_4^1 \cdot 0,5^1 \cdot 0,5^3 = 4 \cdot 0,5^4$, следовательно,

$$W = 1 - (0,5^4 + 4 \cdot 0,5^4) \approx 0,688.$$

Теперь попробуем решить ту же задачу «розыгрышем». Будем моделировать процедуру стрельбы с помощью другой, тоже случайной, процедуры. Вместо четырех выстрелов по цели будем бросать четыре монеты: появление герба будет условно означать «попадание», а решки — «промах». Если из четырех брошенных монет не менее двух упадут гербом, это будет значить, что цель «поражена». «Опыт» или «розыгрыш» в нашем случае будет бросание четырех монет; «результатом» или «исходом» этого опыта — «поражение» или «непоражение» цели.

Повторим такой «опыт», состоящий в бросании четырех монет, очень много раз подряд. Тогда, согласно теореме Бернулли, частота «поражения» цели почти наверняка будет мало отличаться от вероятности этого события W ; значит, если мы бросим четыре монеты большое число раз N и разделим число «поражений» цели на N , мы почти наверняка получим число, близкое к W , т. е. к 0,688.

В данном примере определение вероятности W розыгрышем было несравненно труднее, чем аналитическим расчетом. Однако далеко не всегда это бывает так. Очень часто оказывается, что получение вероятности события (или среднего значения случайной величины) аналитическим, расчетным путем настолько сложно и громоздко, что проще оказывается розыгрыш.

Рассмотрим пример такой задачи. Пусть производится бомбометание по некоторой цели Ц (рис. 8.1); зона разрушительного действия бомбы имеет вид круга радиуса r . Сбрасывается n бомб. Для поражения цели (вывода ее из строя) нужно покрыть разрушениями не менее $k\%$ площади цели. Требуется найти вероятность поражения цели W .

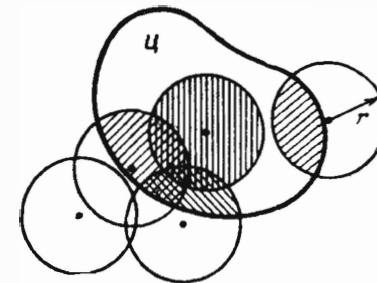


Рис. 8.1

Несмотря на видимую простоту постановки задачи, ее аналитическое решение чрезвычайно сложно. Гораздо проще будет решить задачу «розыгрышем». Для этого надо будет «разыграть» координаты n точек попадания (как это сделать — будет рассказано в дальнейшем); вокруг каждой точки попадания описать круг радиуса r и подсчитать общую пораженную площадь цели (на рис. 8.1 она заштрихована). Если эта площадь оказалась больше $k\%$ площади цели, считать, что цель «поражена», если меньше $k\%$ — «не поражена». Такой «опыт», состоящий в «бросании» n бомб, нужно повторить очень много раз, отмечая каждый раз условным знаком (например, «+») опыт, в котором цель была «поражена». При большом числе «опытов» N вероятность поражения цели W может быть приближенно оценена как частота «поражения» цели:

$$W \approx \frac{M}{N}, \quad (1.1)$$

где M — число «опытов», отмеченных плюсом.

Оказывается, что даже для рассмотренной нами сравнительно элементарной задачи процедура «розыгрыша» (получение вероятности методом Монте-Карло) будет значительно проще, чем нахождение той же вероятности аналитическим, расчетным методом. Пример является хорошим образцом типично «монте-карловской» задачи.

Заметим, что методом статистических испытаний (Монте-Карло) можно находить не только вероятности событий, но и средние значения (математические ожидания) случайных величин. При этом мы будем пользоваться уже не теоремой Бернулли, а законом больших чисел (теоремой Чебышева). Согласно этой теореме при большом числе независимых опытов среднее арифметическое наблюдаемых значений случайной величины почти наверняка мало отличается от ее математического ожидания.

Так, если в условиях последнего примера (бомбометание по цели Ц) нам требуется найти не вероятность поражения, а математическое ожидание площади разрушений S_p :

$$M[S_p] = \bar{s}_p,$$

то его можно определить приближенно как среднее арифметическое площадей разрушений в большом числе N разыгранных «опытов»:

$$\bar{s}_p \approx \frac{\sum_{i=1}^N S_{pi}}{N}, \quad (1.2)$$

где S_{pi} — значение площади разрушений в i -м «опыте».

Аналогичным способом могут быть найдены не только математические ожидания, но и дисперсии интересующих нас случайных величин. Не забудем, что дисперсия случайной величины есть не что иное, как математическое ожидание квадрата центрированной случайной величины; оно может быть приближенно найдено как среднее арифметическое этих квадратов в отдельных «опытах». Так, в нашем примере дисперсия площади разрушений может быть приближенно найдена по формуле

$$D[S_p] = M[(S_p - \bar{s}_p)^2] \approx \frac{\sum_{i=1}^N (S_{pi} - \bar{s}_p)^2}{N}$$

или, что проще, через второй начальный момент:

$$D[S_p] = M[S_p^2] - \bar{s}_p^2 \approx \frac{\sum_{i=1}^N S_{pi}^2}{N} - \bar{s}_p^2. \quad (1.3)$$

Таким образом, метод Монте-Карло в исследовании операций есть метод математического моделирования случайных явлений, в котором сама случайность непосредственно включается в процесс моделирования и представляет собой его существенный элемент. Каждый раз, когда в ход операции вмешивается тот или другой случайный фактор, его влияние имитируется с помощью специально организованного «розыгрыша» или «жребия». Таким образом строится одна реализация случайного явления, представляющая собой как бы результат

одного «опыта». При большом числе реализаций интересующие нас характеристики случайного явления (вероятности, математические ожидания) находятся так же, как они находятся из опыта: вероятности — как частоты событий, математические ожидания — как средние арифметические значений соответствующих случайных величин.

Моделирование случайных явлений методом Монте-Карло имеет общие черты с процессом набора опыта отдельными людьми и человеческими коллективами. И тут, и там каждая отдельная реализация случайна; устойчивые закономерности обнаруживаются лишь при многократном наблюдении явления, при обширном опыте.

Большое число реализаций, требующееся при применении метода Монте-Карло, делает его вообще громоздким и трудоемким. Прежде чем пускаться в ход метод Монте-Карло, всегда имеет смысл попытаться решить задачу аналитически, и только если это не удастся, прибегать к статистическому моделированию. Полезным оказывается хотя бы приближенное предварительное аналитическое решение задачи — это помогает выявить основные факторы, от которых зависит результат, и наметить план дальнейшей работы.

Моделирование случайных явлений методом Монте-Карло часто производится с целью проверить правомочность в данном случае того или другого математического аппарата, всегда основанного на некоторых допущениях. Пусть, например, рассматривая систему массового обслуживания, мы приближенно заменили не-пуассоновский поток заявок пуассоновским и непоказательное время обслуживания — показательным. Моделирование того же процесса методом Монте-Карло покажет, допустимы ли эти упрощения, к каким ошибкам они приводят, и позволит ввести в расчетные формулы соответствующие поправки.

2. ЕДИНИЧНЫЙ ЖРЕБИЙ

Основным элементом, из совокупности которых складывается монте-карловская модель, является одна случайная реализация моделируемого явления, например: один «обстрел» цели, один «день работы» транспорта, одна «эпидемия» и т. п.

Реализация представляет собой как бы один случай осуществления моделируемого случайного явления (процесса) со всеми присущими ему случайностями. Она разыгрывается с помощью специально разработанной процедуры или алгоритма, в котором важную роль играет собственно «розыгрыш» или «бросание жребия». Каждый раз, когда в ход моделируемого процесса вмешивается случайность, ее влияние учитывается не расчетом, а бросанием жребия.

Предположим, что в ходе моделируемого процесса наступил момент, когда его дальнейшее развитие (а значит, и результат) зависит от того, появилось ли на данном этапе событие A или не появилось? Например: произошло ли попадание в цель? Обнаружен ли некоторый объект? Исправна ли аппаратура? Появилась ли заявка на обслуживание? и т. д.

Тогда нужно «бросанием жребия» решить вопрос: появилось событие A или не появилось? Для этого нужно привести в действие некоторый случайный механизм розыгрыша (скажем, бросить игральную кость, или несколько монет, или выбрать число из таблицы случайных чисел) и условиться о том, какой результат жребия означает появление, а какой — непоявление события A . Ниже мы увидим, что розыгрыш всегда может быть организован так, чтобы событие A имело любую наперед заданную вероятность.

Кроме событий, появляющихся случайным образом, на ход и исход операции могут также влиять разные случайные величины (на пример, время обслуживания заявки каналом СМО; координаты точки попадания снаряда; время, в течение которого выполняется рейс автомашины; число вышедших из строя узлов и т. д.). С помощью жребия можно разыграть значение любой случайной величины или совокупность значений нескольких случайных величин.

Условимся называть **единичным жребием** любой элементарный опыт, в котором решается один из вопросов:

1. Произошло или не произошло событие A ?
2. Какое из возможных событий A_1, A_2, \dots, A_k произошло?
3. Какое значение приняла случайная величина X ?

4. Какую совокупность значений приняла система случайных величин X_1, X_2, \dots, X_k ?

Каждая реализация случайного явления методом Монте-Карло состоит из цепочки единичных жребиев, перемежающихся обычными расчетами. Расчетами учитывается влияние исхода единичного жребия на ход операции (в частности, на условия, в которых будет осуществляться следующий единичный жребий).

Рассмотрим способы организации всех разновидностей единичного жребия. Как уже было сказано выше, при любой организации единичного жребия должен быть пущен в ход какой-то механизм случайного выбора (бросание монет, костей, вынимание жетона из вращающегося барабана, числа из набора чисел, и т. д.). Такие механизмы могут быть самыми разнообразными, однако любой из них может быть заменен стандартным механизмом, позволяющим решить одну-единственную задачу: *получить случайную величину, распределенную с постоянной плотностью от 0 до 1*. Условимся для краткости называть такую случайную величину «случайное число от 0 до 1» и обозначать R (от английского *random* — случайный).

Покажем, что любая задача единичного жребия может быть решена с помощью стандартного механизма, дающего число R .

1. Появилось или нет событие A ?

Пусть вероятность события A равна p :

$$P(A) = p.$$

Выберем с помощью стандартного механизма случайное число R и будем считать, что если оно меньше p , событие A произошло, если больше p — не произошло*).

*) Получение R , в точности равного p , будем считать практически невозможным

Действительно, если R — случайное число от 0 до 1, то

$$P(R < p) = \int_0^p f(r) dr,$$

где $f(r) = 1$ при $0 < r < 1$, или

$$P(R < p) = \int_0^p dr = p = P(A).$$

2. Какое из нескольких возможных событий появилось?

Пусть имеется полная группа несовместных событий:

$$A_1, A_2, \dots, A_k$$

с вероятностями

$$p_1, p_2, \dots, p_k.$$

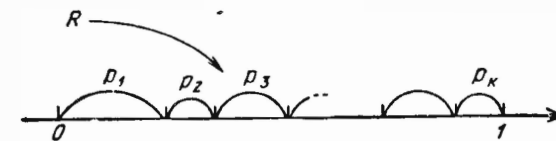


Рис. 8.2

Так как события несовместны и образуют полную группу, то

$$p_1 + p_2 + \dots + p_k = 1.$$

Разделим весь интервал от 0 до 1 на k участков длиной p_1, p_2, \dots, p_k (рис. 8.2). Если случайное число R , выданное стандартным механизмом, попало, например, на участок p_3 , это означает, что появилось событие A_3 .

3. Какое значение приняла случайная величина?

Пусть нам требуется «разыграть» значение случайной величины X , имеющей известный закон распределения. Случай, когда величина X дискретна (т. е. имеет отдельные значения x_1, x_2, \dots, x_k с вероятностями p_1, p_2, \dots, p_k) рассматривать не будем, так как он сводится к предыдущему пункту 2. Действительно, если обозначить A_i событие, состоящее в том, что величина X приняла значение x_i , то розыгрыш значения случайной величины X сводится к решению вопроса: какое из событий A_1, A_2, \dots, A_k появилось?

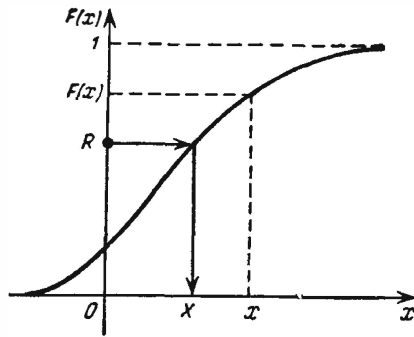


Рис. 8.3

Рассмотрим случай, когда случайная величина X непрерывна и имеет заданную непрерывную функцию распределения $F(x)$ (рис. 8.3).

Докажем следующее утверждение: *если взять на оси ординат случайное число R (от 0 до 1) и найти то значение X , при котором $F(X) = R$ (см. стрелки на рис. 8.3), то полученная случайная величина X будет иметь функцию распределения $F(x)$.*

Действительно, возьмем случайную величину X и найдем ее функцию распределения, т. е. вероятность

$$P(X < x).$$

Из рис. 8.3 видно, что для того чтобы выполнялось неравенство $X < x$, величина R должна принять значение, меньшее, чем $F(x)$:

$$P(X < x) = P(R < F(x)).$$

Но случайное число R имеет постоянную плотность распределения $f(r)$, равную 1 на отрезке $(0, 1)$; значит,

$$P(X < x) = \int_0^{F(x)} f(r) dr = \int_0^{F(x)} 1 \cdot dr = F(x), \quad (2.1)$$

что и требовалось доказать.

Таким образом, розыгрыш значения случайной величины X с заданной функцией распределения $F(x)$ сводится к следующей процедуре.

Получить случайное число R от 0 до 1 и в качестве значения X взять:

$$X = F^{-1}(R),$$

где F^{-1} — функция, обратная по отношению к F .

4. Какую совокупность значений примет система случайных величин?

Пусть имеется система случайных величин:

$$X_1, X_2, \dots, X_n \quad (2.2)$$

с совместной плотностью распределения

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n).$$

Если случайные величины независимы, то

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = f_1(x_1) f_2(x_2) \dots f_n(x_n),$$

и розыгрыш совокупности значений системы (2.2) сводится к тому, чтобы разыграть каждую из них в отдельности, т. е. организовать n единичных жребиев типа, описанного в п. 3.

Если случайные величины (2.2) зависимы, то

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = f_1(x_1) f(x_2/x_1) f(x_3/x_1, x_2) \dots,$$

где каждая последующая плотность распределения берется условная, при условии, что предыдущие случайные величины приняли определенные значения. При розыгрыше последовательности значений случайных величин (2.2) получается сначала значение x_1 случайной

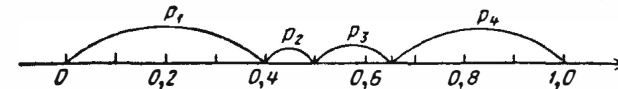


Рис. 8.4

величины X_1 ; это значение берется в качестве аргумента в условной плотности $f(x_2/x_1)$; разыгрывается значение x_2 случайной величины X_2 , оба значения x_1, x_2 берутся в качестве аргументов в условной плотности $f(x_3/x_1, x_2)$ и т. д.

Рассмотрим несколько примеров на организацию единичного жребия.

Пример 1. Летательный аппарат, совершающий полет над территорией противника, после стрельбы по нему может оказаться в одном из следующих состояний:

- A_1 — невредим, продолжает полет;
- A_2 — поврежден, продолжает полет;
- A_3 — совершил вынужденную посадку;
- A_4 — сбит.

Вероятности этих четырех событий заданы:

$$p_1 = P(A_1) = 0,4; \quad p_2 = P(A_2) = 0,1; \quad p_3 = P(A_3) = 0,15; \quad p_4 = P(A_4) = 0,35.$$

Построить процедуру единичного жребия для розыгрыша результата обстрела

Решение. Делим участок $(0, 1)$ на четыре части, как показано на рис. 8.4. При попадании случайного числа R на участок от 0 до 0,4 считать, что произошло событие A_1 , на участок от 0,4 до 0,5 — событие A_2 и т. д.

Пример 2 Случайная величина X распределена по показательному закону с плотностью:

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x} \quad (x > 0).$$

Построить процедуру единичного жребия для получения значения X .

Решение. По заданной плотности $f(x)$ находим функцию распределения:

$$F(x) = \int_0^x f(x) dx = \int_0^x \lambda e^{-\lambda x} dx = 1 - e^{-\lambda x} \quad (x > 0).$$

График функции $F(x)$ дан на рис. 8.5. Графически значение случайной величины X можно разыграть так: взять случайное число от 0 до 1 на оси ординат

и найти соответствующее ему значение абсциссы X (см. стрелки на рис. 8.5). Это же можно сделать не графически, а расчетом, если написать:

$$R = 1 - e^{-\lambda X} \quad (2.3)$$

и решить это уравнение относительно X (т. е. найти обратную по отношению к F функцию). Имеем:

$$e^{-\lambda X} = 1 - R; \quad -\lambda X = \ln(1 - R),$$

откуда

$$X = -\frac{1}{\lambda} \ln(1 - R). \quad (2.4)$$

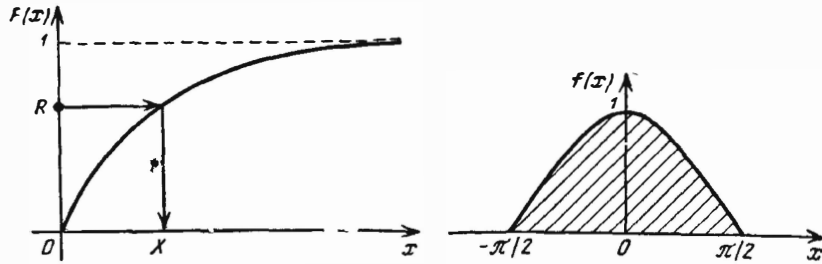


Рис. 8.5

Рис. 8.6

Формулу (2.4) можно упростить; вспомним, что если R — случайное число от 0 до 1, то $(1 - R)$ — также случайное число от 0 до 1; поэтому вместо (2.4) можно взять

$$X = -\frac{1}{\lambda} \ln R. \quad (2.5)$$

Таким образом, процедура розыгрыша сводится к следующему: взять случайное число от 0 до 1, прологарифмировать его при натуральном основании, изменить знак и разделить на λ .

Пример 3. Построить процедуру розыгрыша значения случайной величины X , плотность распределения которой

$$f(x) = \frac{1}{2} \cos x \quad \text{при } -\pi/2 < x < \pi/2 \quad (2.6)$$

(рис. 8.6).

Решение. Находим функцию распределения:

$$F(x) = \int_{-\pi/2}^x \frac{1}{2} \cos x dx = \frac{1}{2} (\sin x + 1).$$

График функции распределения дан на рис. 8.7. Там же показана процедура розыгрыша значения случайной величины X . Аналитически это выражается так:

$$R = \frac{1}{2} (\sin X + 1),$$

откуда обратная функция

$$X = \arcsin(2R - 1).$$

Таким образом, для розыгрыша значения случайной величины X с плотностью (2.6) нужно: взять случайное число от 0 до 1, удвоить его, вычесть единицу и от результата взять арксинус.

Заметим, что в рассмотренных нами примерах 2 и 3 функция распределения F случайной величины X легко допускала получение в явном виде обратной функции F^{-1} ; на практике это далеко не всегда бы-

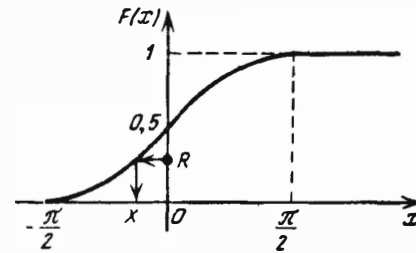


Рис. 8.7

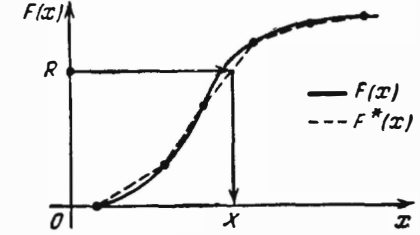


Рис. 8.8

вает так. Если явного выражения для обратной функции получить не удастся, можно, как показано на рис. 8.3, определить эту обратную функцию по графику; если же расчет производится не вручную, а на ЭЦВМ, можно воспользоваться приемом, предложенным Н. П. Бусленко [15]; он состоит в том, что функция распределения $F(x)$ заменяется функцией $F^*(x)$, составленной из отрезков прямых (рис. 8.8); это можно сделать с любой заданной степенью точности. На каждом из таких линейных участков обратная функция находится без труда.

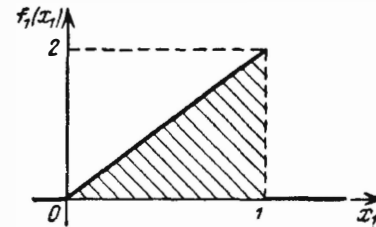


Рис. 8.9

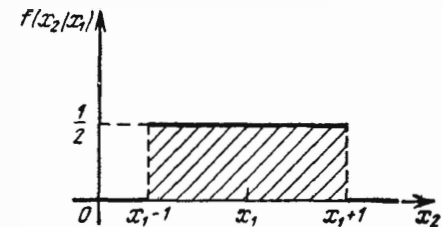


Рис. 8.10

Пример 4. Имеется система зависимых случайных величин: X_1 и X_2 . Случайная величина X_1 распределена по закону прямоугольного треугольника на участке от 0 до 1 (рис. 8.9):

$$f_1(x_1) = 2x_1 \quad \text{при } 0 < x_1 < 1.$$

Случайная величина X_2 распределена с постоянной плотностью на участке длиной 2, с центром в точке x_1 , где x_1 — значение, принятое случайной величиной X_1 (рис. 8.10). Организовать процедуру единичного жребия для розыгрыша пары значений случайных величин X_1, X_2 .

Решение. Розыграем сначала значение величины X_1 ; для этого построим ее функцию распределения:

$$F_1(x_1) = \begin{cases} 0 & \text{при } x_1 < 0, \\ x_1^2 & \text{при } 0 < x_1 < 1, \\ 1 & \text{при } x_1 > 1. \end{cases} \quad (2.7)$$

(рис. 8.11). Величину X_1 получим как обратную функцию по отношению к (2.7) от случайного числа R :

$$R = X_1^2; \quad X_1 = \sqrt{R}. \quad (2.8)$$

После того, как разыграно значение X_1 , оно уже не случайно; обозначим его x_1 . При известном значении x_1 строим условную функцию распределения $F(x_2/x_1)$ случайной величины X_2 (рис. 8.12). Выражение этой функции распределения будет:

$$F(x_2/x_1) = 1/2(x_2 - x_1 + 1) \quad \text{при } x_1 - 1 < x_2 < x_1 + 1. \quad (2.9)$$

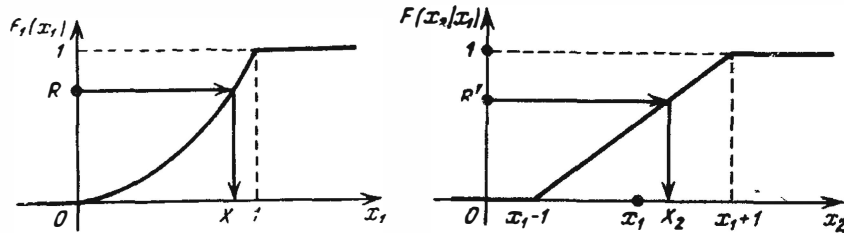


Рис. 8.11

Рис. 8.12

Возьмем новое случайное число R' от 0 до 1 и найдем от него функцию, обратную (2.9):

$$R' = 1/2(X_2 - x_1 + 1), \quad X_2 = 2R' + x_1 - 1. \quad (2.10)$$

Таким образом, процедура розыгрыша сводится к следующему: берется случайное число R от 0 до 1 и из него извлекается корень; полученное значение \sqrt{R} есть разыгранное значение первой случайной величины $X_1 = x_1$. Далее берется еще одно случайное число R' от 0 до 1, удваивается, к нему прибавляется ранее полученное x_1 и вычитается единица; получается разыгранное значение второй случайной величины X_2 .

3. РОЗЫГРЫШ ЗНАЧЕНИЯ НОРМАЛЬНО РАСПРЕДЕЛЕННОЙ СЛУЧАЙНОЙ ВЕЛИЧИНЫ

Остановимся специально на одной очень часто встречающейся задаче: розыгрыш значения случайной величины X , распределенной по нормальному закону (короче — «нормальной») с математическим ожиданием m_x и средним квадратическим отклонением σ_x . Плотность распределения случайной величины X имеет вид:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma_x \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m_x)^2}{2\sigma_x^2}}. \quad (3.1)$$

Согласно общему правилу надо было бы поступить так: построить функцию распределения $F(x)$ и найти для нее обратную функцию F^{-1} ,

затем этому преобразованию подвергнуть случайное число R от 0 до 1. Однако удобнее поступить иначе: перейти от случайной величины X к другой, так называемой «нормированной» случайной величине:

$$Z = \frac{X - m_x}{\sigma_x}, \quad (3.2)$$

разыграть значение этой случайной величины, а затем уже по ней найти X . Это удобно потому, что математическое ожидание величины Z равно нулю, а ее среднее квадратическое отклонение — единице:

$$m_z = 0, \quad \sigma_z = 1,$$

и придется только один раз и навсегда найти обратную функцию.

Действительно, обозначим плотность распределения нормированной величины Z

$$f_n(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}}. \quad (3.3)$$

Нормированная функция распределения будет:

$$F_n(z) = \int_{-\infty}^z \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}} dz = 0,5 + \Phi(z), \quad (3.4)$$

где

$$\Phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^z e^{-\frac{z^2}{2}} dz$$

— функция Лапласа.

График функции $F_n(z)$ дан на рис. 8.13. Там же стрелками показано получение случайного числа X с плотностью (3.3). Аналитически это записывается в виде:

$$\begin{aligned} R &= 0,5 + \Phi(Z), \\ Z &= \Phi^{-1}(R - 0,5), \end{aligned} \quad (3.5)$$

где Φ^{-1} — функция, обратная функции Лапласа Φ .

Разыграв значение нормированной случайной величины Z , перейдем от нее к величине X по формуле

$$X = \sigma_x Z + m_x. \quad (3.6)$$

Таким образом, значение нормальной случайной величины X с характеристиками m_x, σ_x разыгрывается по формуле

$$X = \sigma_x \Phi^{-1}(R - 0,5) + m_x, \quad (3.7)$$

т. е. нужно взять случайное число R от 0 до 1, вычесть из него 0,5, взять от результата обратную функцию Лапласа, умножить на σ_x и прибавить m_x .

В случае, когда розыгрыш нормальной случайной величины осуществляется не вручную, а на машине, обычно применяется другой способ, основанный на центральной предельной теореме теории вероятностей. Согласно этой теореме, при сложении достаточно большого числа независимых случайных величин, сравнимых по своим дисперсиям, получается случайная величина, распределенная приближенно по нормальному закону, причем этот закон тем ближе к нормальному, чем больше случайных величин складывается. Опыт показывает, что для получения практически нормального распределения достаточно сравнительно небольшого числа слагаемых.

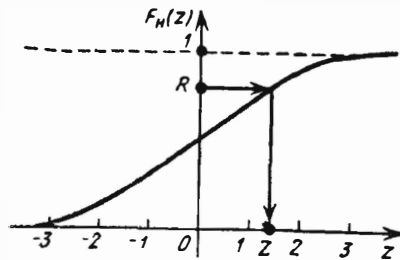


Рис. 8.13

Например, при сложении всего шести случайных чисел от 0 до 1 получается случайная величина, которая с точностью, достаточной для большинства прикладных задач, может считаться нормальной.

Отсюда возникает такой способ розыгрыша нормально распределенной случайной величины X : зложить шесть случайных чисел от 0 до 1; пронормировать эту

сумму, т. е. получить нормированную величину Z , а затем от нее перейти к X по формуле (3.6).

Прделаем соответствующие преобразования. Обозначим

$$V = R_1 + R_2 + R_3 + R_4 + R_5 + R_6,$$

где R_1, \dots, R_6 — шесть независимых экземпляров случайного числа от 0 до 1. Найдем математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение случайной величины V . По теореме сложения математических ожиданий:

$$M[V] = m_v = m_{r_1} + m_{r_2} + \dots + m_{r_6},$$

где m_{r_1}, \dots, m_{r_6} — математические ожидания величин R_1, \dots, R_6 . Очевидно, они все одинаковы и равны 0,5, отсюда

$$m_v = 6 \cdot 0,5 = 3.$$

Дисперсию случайной величины V найдем по теореме сложения дисперсий:

$$D_v = D_{r_1} + D_{r_2} + \dots + D_{r_6},$$

где D_{r_1}, \dots, D_{r_6} — дисперсии величин R_1, \dots, R_6 . Известно, что дисперсия случайной величины R , распределенной с постоянной плотностью на участке (α, β) , равна

$$D_r = \frac{(\beta - \alpha)^2}{12};$$

в нашем случае это будет $D_r = 1/12$, откуда

$$D_v = 6 \cdot 1/12 = 1/2,$$

а среднее квадратическое отклонение

$$\sigma_v = \sqrt{D_v} = 1/\sqrt{2}.$$

Пронормируем величину V , т. е. перейдем от нее к величине

$$Z = \frac{V - m_v}{\sigma_v} = (V - 3)\sqrt{2}; \quad (3.8)$$

далее от величины Z перейдем к нужной нам величине X по формуле

$$X = \sigma_x Z + m_x. \quad (3.9)$$

Подставляя в эту формулу вместо Z его выражение (3.8), а в (3.8), в свою очередь, вместо V его выражение

$$V = \sum_{i=1}^6 R_i,$$

получим окончательно:

$$X = \sigma_x \sqrt{2} \left(\sum_{i=1}^6 R_i - 3 \right) + m_x. \quad (3.10)$$

Таким образом, чтобы разыграть значение нормальной случайной величины X с математическим ожиданием m_x и средним квадратическим отклонением σ_x , нужно: *взять шесть случайных чисел от 0 до 1, сложить их, из суммы вычесть 3, результат умножить на $\sigma_x \sqrt{2}$ и прибавить m_x .*

Теперь предположим, что нам нужно разыграть значение не одной, а нескольких нормально распределенных случайных величин. Если случайные величины независимы, задача просто сводится к осуществлению нескольких жребиев по вышеописанной процедуре. Если же величины зависимы, то при каждом следующем розыгрыше надо брать не просто закон распределения очередной случайной величины, а ее условный закон распределения (при условии, что предыдущие случайные величины приняли именно те значения, которые получены розыгрышем).

Пример. Система двух случайных величин (X, Y) распределена по нормальному закону с характеристиками:

$$m_x, m_y, \sigma_x, \sigma_y, r,$$

где r — коэффициент корреляции. Построить процедуру розыгрыша пары значений X, Y .

Решение. Разыгрываем сперва значение одной из случайных величин, например X , согласно процедуре, описанной выше для одной нормально распределенной случайной величины с характеристиками m_x и σ_x . Значение другой случайной величины Y разыгрываем уже по условному закону распределения*) с ма-

*) См., например, [7].

тематическим ожиданием и средним квадратическим отклонением:

$$\left. \begin{aligned} m_{y|x} &= m_y + r \frac{\sigma_y}{\sigma_x} (x - m_x), \\ \sigma_{y|x} &= \sigma_y \sqrt{1 - r^2}, \end{aligned} \right\} \quad (3.11)$$

где x — значение, принятое случайной величиной X в результате предыдущего жребия.

Заметим, что от x в формулах (3.11) зависит только математическое ожидание условного закона, но не его среднее квадратическое отклонение, которое при любом x остается равным $\sigma_y \sqrt{1 - r^2}$.

4. ПОЛУЧЕНИЕ СЛУЧАЙНОГО ЧИСЛА R ОТ 0 ДО 1

Если метод Монте-Карло осуществляется вручную (без помощи машин), то для получения случайного числа от 0 до 1 чаще всего применяются так называемые таблицы случайных чисел. Эти таблицы приводятся во многих руководствах по математической статистике и вычислительной технике (см. например, [18, 19]). Таблицы содержат чередующиеся в случайном порядке цифры 0, 1, 2, ..., 9.

При составлении таблиц приняты меры к тому, чтобы каждая из этих цифр встречалась примерно одинаково часто и независимо от других.

Пользуясь таблицей случайных чисел, можно легко разыграть случайное число R от 0 до 1 с любым числом десятичных знаков после запятой.

Пусть, например, требуется получить число R с четырьмя знаками после запятой. Обратимся к таблице случайных чисел и возьмем отсюда любую группу из четырех рядом стоящих знаков, например 7643. Будем считать, что наше случайное число приняло значение 0,7643. Следующий раз, когда придется бросать единственный жребий, возьмем следующие четыре цифры. Пусть они, например, будут 3312 — значит, следующее случайное число будет 0,3312, и т. д. Можно брать цифры, стоящие не рядом, а через одну; или же в начале и в конце столбца, или строки — словом, любым способом, лишь бы принцип выбора не был никак связан со значениями самих цифр.

Для розыгрыша случайного числа R вручную можно применять не только таблицы случайных чисел, но и другие датчики, например диск, проградуированный в мелких делениях, размеченных числами от 0 до 1 (рис. 8.14). В центре диска закреплена хорошо уравновешенная стрелка, приводимая во вращение, например, электромотором, включаемым нажатием кнопки. После отпускания кнопки стрелка останавливается в случайном положении, и конец ее указывает случайное число R .

Если метод Монте-Карло осуществляется не вручную, а на ЭЦВМ, то для выбора случайного числа от 0 до 1 могут применяться как физические датчики случайных чисел, так и вычислительные алгоритмы для получения так называемых «псевдослучайных» чисел.

Остановимся, прежде всего, на физических датчиках. Как правило, они основаны на преобразовании случайных сигналов (шумов),

либо естественного, либо искусственного происхождения. Пусть имеет ся случайный шум (т. е. случайным образом меняющееся напряжение $U(t)$ (рис. 8.15), который мы сравниваем с некоторым постоянным уровнем u_0 . Такой шум может быть положен в основу правила выработки случайного числа от 0 до 1. Предположим, что ЭЦВМ работает в двоичном коде; тогда случайное число от 0 до 1 представляет собой двоичную правильную дробь, в которой на каждом месте одинаково вероятны знаки 0 или 1. Условимся считать, что очередной двоичный знак случайного числа будет 0, если за некоторый промежуток времени T шум $U(t)$ превысил уровень u_0 четное число раз, и 1 — если нечетное. Теперь предположим, что n таких датчиков работают одновременно и посылают случайные знаки 0 и 1 в n двоичных разрядов регистра

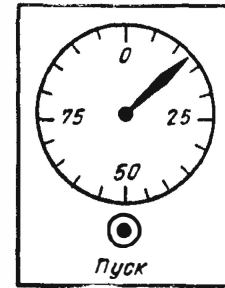


Рис. 8.14

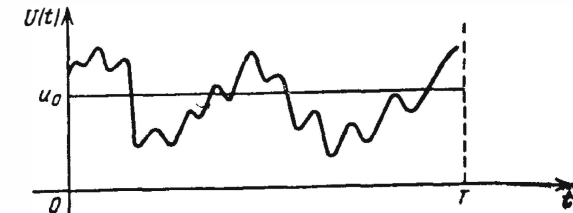


Рис. 8.15

некоторого числа R . Тогда, если интервал времени T взять достаточно большим так, чтобы на нем укладывалось достаточно много колебаний шума $U(t)$, то четное и нечетное числа превышений уровня u_0 будут встречаться в среднем одинаково часто, и n -разрядное двоичное число будет распределено приблизительно равномерно на участке 0,1.

Можно предложить и другие принципы формирования случайных чисел на основе того или другого физического случайного процесса; все они требуют оборудования ЭЦВМ специальными датчиками случайных чисел. Для неспециализированной ЭЦВМ, только эпизодически привлекаемой к моделированию операций методом Монте-Карло, это оборудование себя не оправдывает. Гораздо чаще при моделировании методом Монте-Карло пользуются так называемыми псевдослучайными числами. Так называются числа, вырабатываемые (вычисляемые) самой машиной по некоторому правилу (алгоритму), построенному так, чтобы знаки 0 и 1 встречались в среднем одинаково часто, и, кроме того, чтобы зависимость как между отдельными знаками, так и между сформированными из них многозначными числами практически отсутствовала. Для получения псевдослучайных чисел используются разными приемами. Например, можно перемножить два произвольных n -значных двоичных числа a_1 и a_2 и из произведения взять n средних знаков — это будет число a_3 ; затем перемножить a_2 и a_3 и повторить процедуру и т. д. Существуют способы получения псевдослучайных чисел, основанные не на перемножении

чисел, а на их сдвиге друг относительно друга на несколько разрядов; после сдвига производится сложение и затем выбор из суммы n средних знаков, и т. д. Различные способы получения псевдослучайных чисел подробно описываются в специальных руководствах (см., например, [15, 27]).

Следует заметить, что псевдослучайные числа, строго говоря, случайными не являются (вся их последовательность может быть предсказана на основе исходного материала). В частности, любой алгоритм вычисления псевдослучайных чисел является **циклическим**, т. е. через какое-то большое число Π выработанных таким способом чисел они неизбежно начнут повторяться. Однако, если при моделировании операции нам придется воспользоваться количеством розыгрышей, меньшим, чем Π , такая цикличность никакого значения не имеет.

В настоящее время при моделировании операций методом Монте-Карло на ЭЦВМ обычно пользуются псевдослучайными числами, выбирая один из хорошо обследованных и проверенных алгоритмов, обеспечивающий достаточную длину цикла, приемлемую равномерность и независимость чисел при сравнительной простоте их вычисления. К достоинствам псевдослучайных чисел относится то, что они допускают возможность вторичного контрольного просчета той же самой реализации случайного процесса; другие способы формирования случайных чисел (физические датчики) этой возможности не допускают.

5. ПРИМЕРЫ МОДЕЛИРОВАНИЯ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ МЕТОДОМ МОНТЕ-КАРЛО

В данном параграфе будут рассмотрены некоторые примеры практических задач, которые, в силу своей сравнительной сложности, недоступны для аналитического решения и требуют моделирования методом Монте-Карло. В каждом примере мы построим схему моделирования, т. е. последовательность расчетов и единичных жребиев, а также способ обработки реализаций.

Пример 1. Техническое устройство состоит из трех узлов: $У_1$, $У_2$ и $У_3$. Исправная работа узлов $У_1$ и $У_2$ безусловно необходима для работы устройства; узел $У_3$ предназначен для поддержания нормального режима работы узлов $У_1$ и $У_2$. Устройство должно работать в течение времени t . Время безотказной работы каждого узла случайно; для узлов $У_1$, $У_2$, $У_3$ оно имеет плотность распределения соответственно $f_1(t)$, $f_2(t)$, $f_3(t)$. В нашем распоряжении имеются два запасных экземпляра узла $У_1$ и три запасных экземпляра узла $У_2$. При выходе из строя (отказе) узла $У_1$ техническое устройство останавливается на случайное время, распределенное с плотностью $\Phi_1(t)$, после чего узел заменяется запасным (если они еще не все израсходованы), и работа устройства возобновляется. При отказе узла $У_2$ устройство также останавливается на случайное время, распределенное с плотностью $\Phi_2(t)$, узел заменяется запасным (если такие еще имеются в наличии), после чего работа устройства возобновляется. Если одновременно не работают узлы $У_1$ и $У_2$, работа устройства возобновляется только после того, как закончена замена последнего узла. Если вышел из строя (отказал) узел $У_3$, его не заменяют, но закон распределения времени безотказной работы узлов $У_1$ и $У_2$ меняется: если до выхода из строя узла $У_3$ узел $У_1$ проработал время t_1 , то

условная плотность распределения оставшегося времени безотказной работы узла $У_1$ будет $i_1(t/t_1)$; узла $У_2$ — $f_2(t/t_2)$

Требуется найти следующие характеристики работы устройства:

- вероятность исправной работы устройства $p_H(t)$ как функцию времени;
- вероятность того, что окончательный отказ устройства раньше времени τ произойдет по причине нехватки запасных узлов $У_1$;
- среднее время \bar{T}_p работы системы, т. е. среднее время, которое устройство будет проводить в работающем состоянии;
- среднее число \bar{y}_1 запасных узлов $У_1$, которое будет израсходовано, а также среднее число \bar{y}_2 израсходованных запасных узлов $У_2$.

Решение. Так как законы распределения, фигурирующие в задаче, отличны от показательных, применять для описания явления схему марковских процессов мы не можем. Строим схему моделирования случайного процесса методом Монте-Карло. Прежде всего, определяем розыгрышем время безотказной работы узла $У_3$ (который не восстанавливается). Для этого находим функцию распределения

$$F_3(t) = \int_0^t f_3(t) dt,$$

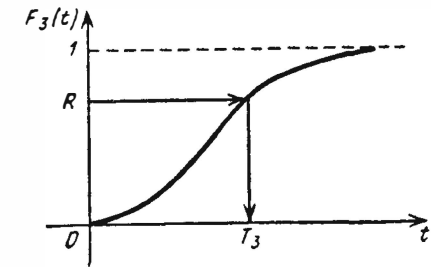


Рис. 8.16

берем случайное число R от 0 до 1 и подвергаем его преобразованию $F_3^{-1}(R)$ (рис. 8.16)*)

Если в результате этого розыгрыша значение T_3 оказалось меньше τ , то фиксируем T_3 как момент отказа узла $У_3$; если же оказалось, что $T_3 > \tau$, считаем, что за время τ узел $У_3$ не отказал. Предположим, имел место первый (более сложный) вариант, и узел $У_3$ отказал в момент $T_3 < \tau$.

Рассмотрим четыре параллельные оси $0t$ с одним отсчетом времени (рис. 8.17). На оси (1) мы будем отмечать состояние первого узла (жирной линией — «работает», тонкой — «отказал»). На оси (2) также отмечаются состояния второго узла, на оси (3) — третьего, на оси (4) — состояние системы в целом («работает», «не работает»).

Так как момент отказа T_3 узла $У_3$ нам известен, то мы можем сразу же заполнить ось (3). После этого будем заполнять (1) и (2). Сначала разыграем время T_1 , в течение которого будет работать основной узел $У_1$ — для этого мы воспользуемся функцией распределения

$$F_1(t) = \int_0^t f_1(t) dt. \quad (5.1)$$

Далее, разыграем время τ_1 , в течение которого этот узел будет заменен запасным. Для этого мы воспользуемся функцией распределения

$$\Phi_1(t) = \int_0^t \phi_1(t) dt. \quad (5.2)$$

Если в момент $T_1 + \tau_1$ окончания этой замены третий узел еще работает ($T_1 + \tau_1 < T_3$), то снова разыгрываем значение времени работы первого запасного узла T_1' с помощью функции (5.1) и, после этого — опять время замены это-

*) F_3^{-1} — функция, обратная F_3 .

го узла τ_1 , с помощью функции (5.2). Предположим, что момент окончания этой замены (как показано на рис 8.17) оказался после момента T_3 :

$$T_1 + \tau_1 + T_1' + \tau_1' > T_3. \quad (5.3)$$

Тогда при розыгрыше нового значения времени безотказной работы узла Y_1 мы должны будем воспользоваться уже не функцией (5.1) а новой условной функцией распределения

$$F_1(t/0) = \int_0^t f_1(t/0) dt, \quad (5.4)$$

полагая, что до момента отказа узла Y_3 новый узел Y_1 не работал ($t_1 = 0$). Пусть это разыгранное значение равно T_1'' . Предположим, что, как показано на рис 8.17

$$T_1 + \tau_1 + T_1' + \tau_1' + T_1'' < \tau. \quad (5.5)$$

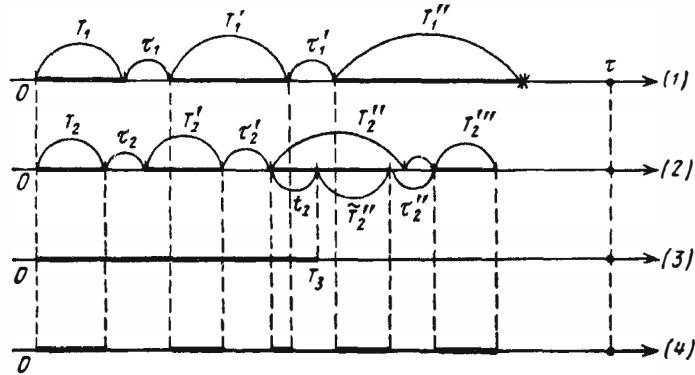


Рис. 8.17

Это значит, что в момент, отмеченный на рисунке звездочкой, узел Y_1 вышел из строя, заменить его уже нечем (всега два запасных узла) и, значит, в этот момент окончательно отказало все устройство. Очевидно дальше этой точки вести розыгрыш не нужно.

Займемся осью (2), на которой будет отражаться состояние второго узла Y_2 . Для этой оси проведем вторую, аналогичную первой, серию розыгрышей, с той разницей, что функции распределения, которыми преобразуется случайное число R , будут другие:

$$F_2(t) = \int_0^t f_2(t) dt, \quad (5.6)$$

$$\Phi_2(t) = \int_0^t \varphi_2(t) dt, \quad (5.7)$$

$$F_3(t/t_2) = \int_0^t f_3(t/t_2) dt. \quad (5.8)$$

Пусть по истечении времени второй замены τ_2' мы разыграли значение T_2'' времени работы второго запасного узла Y_2 , и оно оказалось таким, что момент T_3 выхода из строя третьего узла пришелся на период работы второго узла. Так как при выходе из строя третьего узла условия работы второго узла ухудшаются, нужно в величину T_2'' «внести поправку» на время безотказной работы данного

экземпляра Y_2 , учесть, что он уже проработал время t_2 , а остаток времени T_2'' после момента T_3 разыграть заново, уже по измененному (условному) закону распределения (5.8).

Полученное таким образом значение \tilde{T}_2'' нужно прибавить к уже прошедшему времени t_2 .

После этого разыгрывается время замены τ_2'' этого узла (по закону (5.7)) и, наконец, время T_2''' безотказной работы последнего (третьего) запасного узла Y_3 ; так как узел Y_3 уже отказал, то при этом мы пользуемся законом (5.8) при $t_2 = 0$. Если разыгранное значение времени, в сумме со всеми ранее отложенными на оси (2) временами, кончается правее точки, отмеченной звездочкой, то, значит, причиной отказа устройства в данном случае была нехватка запасных узлов Y_1 . Если серия интервалов, отложенных на оси (2), кончается левее точки, отмеченной звездочкой — значит, в данной реализации причиной отказа устройства послужила нехватка запасных узлов Y_2 .

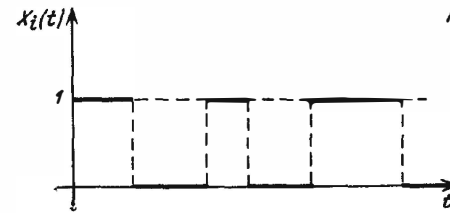


Рис. 8.18

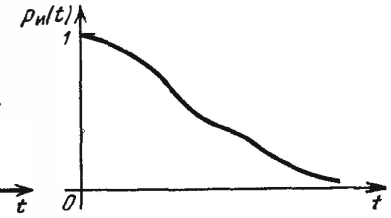


Рис. 8.19

Наконец, заполним последнюю ось (4), на которой отражается работа устройства в целом. Согласно условию устройство работает только в те моменты, когда работают два узла Y_1 и Y_2 одновременно. Поэтому на оси (4) мы отмечаем жирной линией только те участки времени, для которых жирные участки осей (1) и (2) совпадают.

Таким образом, разыгранна одна реализация нашего случайного процесса. Разумеется, если моделирование производится на ЭЦВМ, никаких графиков, осей и участков строить не нужно; розыгрыш обеспечивается приведением в действие машинного расчетного алгоритма, который сочетает единичные жребии — розыгрыши со сравнением между собой моментов осуществления разных событий (что произошло раньше — восстановление первого (второго) узла или выход из строя третьего?).

Предположим, что тем или другим способом нами получено большое количество (N) реализаций случайного процесса. Тогда, пользуясь предельными теоремами теории вероятностей и заменяя искомые вероятности частотами, а математические ожидания средними арифметическими, мы сможем приближенно ответить на все поставленные в задаче вопросы.

Вероятность $p_n(t)$ исправной работы устройства в момент t можно подсчитать следующим образом: для каждой (i -й) реализации ввести в рассмотрение случайную функцию времени $X_i(t)$, которая равна нулю, когда устройство не работает, и единице — когда работает. Возможный вид отдельной реализации случайной функции $X_i(t)$ показан на рис. 8.18. Вероятность исправной работы устройства в момент t есть не что иное, как математическое ожидание случайной функции $X(t)$ или, приближенно, среднее арифметическое реализаций $X_i(t)$:

$$p_n(t) \approx \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N X_i(t). \quad (5.9)$$

Возможный вид вероятности $p_n(t)$ показан на рис. 8.19. Убывание функции $p_n(t)$ связано с тем, что с течением времени увеличивается вероятность отказа третьего узла и, кроме того, повышаются шансы на то, что запасных узлов не хватит.

Найдем вероятность того, что отказ устройства произойдет по причине нехватки запасных узлов Y_1 . Рассмотрим событие A , состоящее в том, что отказ устройства раньше времени τ произойдет по этой причине. Свяжем с каждой реализацией случайную величину Y_i , равную единице, если в этой реализации событие A произошло, и нулю — если не произошло. При большом числе реализаций N вероятность $P(A)$ события A приближенно равна его частоте, а последняя есть не что иное, как отношение суммы всех случайных величин Y_i к числу реализаций N :

$$P(A) \approx \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N Y_i. \quad (5.10)$$

Определим среднее время t_p , которое устройство будет проводить в рабочем состоянии. Для этого надо для каждой реализации определить ее рабочее время $t_p^{(i)}$ — сумму длин всех рабочих участков оси (4) до момента τ — и найти их среднее арифметическое:

$$\bar{t}_p \approx \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N t_p^{(i)}. \quad (5.11)$$

Наконец, среднее число \bar{y}_1 запасных узлов Y_1 , которое будет израсходовано, найдется как среднее арифметическое чисел израсходованных узлов $y_1^{(i)}$ для всех реализаций:

$$\bar{y}_1 \approx \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N y_1^{(i)}, \quad (5.12)$$

где $y_1^{(i)}$ — число запасных узлов Y_1 , израсходованных в i -й реализации.

Аналогично определяется

$$\bar{y}_2 \approx \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N y_2^{(i)}. \quad (5.13)$$

Таким образом, мы построили схему моделирования процесса методом Монте-Карло. Отметим одну характерную особенность метода. В примере 1 мы поставили задачу определения всего пяти величин: $p_u(t)$, $P(A)$, \bar{t}_p , \bar{y}_1 и \bar{y}_2 . Однако объем расчетов почти не увеличился бы, если бы мы захотели кроме этих пяти величин определить еще и целый ряд других, например вероятность того, что оба узла Y_1 и Y_2 будут стоять (не работать) одновременно, или среднее отношение рабочих времен первого и второго узлов, или дисперсию времени исправной работы устройства, или любую другую вероятностную характеристику процесса. Действительно, при моделировании методом Монте-Карло львиную долю времени занимает само моделирование реализации и только ничтожную долю — их обработка. Поэтому, организовав моделирование операции на ЭВМ методом Монте-Карло, всегда имеет смысл позаботиться о том, чтобы «вывести» из машины побольше сведений о каждой реализации и подсчитать побольше характерных параметров, не ограничиваясь подсчетом одного-единственного показателя эффективности.

Пример 2. Рассмотрим задачу, подобную той, которая уже упоминалась в § 1. Производится стрельба n ракетами по площадной цели сложной конфигурации (рис. 8.20). Зона разрушений от одной ракеты представляет собой круг радиуса r . В результате n выстрелов будет поражена какая-то часть S_{Π} площади цели (см. заштрихованную область на рис. 8.20) Π , составляющая какую-то долю полной площади цели:

$$U = \frac{S_{\Pi}}{S_{\Pi}}.$$

Чтобы избежать ненужных перекрытий зон поражения, прицеливание n ракетами производится не по одной точке, а по n различным точкам: O_1, O_2, \dots, O_n . Заданы характеристики рассеивания ракет: средние квадратические отклонения по осям Ox и Oy , равные σ_x, σ_y . Систематические ошибки отсутствуют, координаты X, Y каждой точки попадания независимы друг от друга и от координат других точек попадания. Требуется при заданном расположении точек прицеливания O_1, O_2, \dots, O_n вычислить следующие характеристики эффективности операции:

— среднюю долю пораженной площади цели:

$$m_u = M[U];$$

— дисперсию доли пораженной площади цели:

$$D_u = D[U];$$

— вероятность того, что будет поражено не менее заданной доли u площади цели:

$$P(U \geq u);$$

— математическое ожидание \bar{r}_0 числа ракет, которые не причинили цели никакого ущерба (попали мимо).

Решение. Если не делать никаких упрощающих предположений о форме цели и зоны поражения, аналитическое решение поставленной задачи чрезвычайно сложно и практически неосуществимо; проще будет решать ее методом Монте-Карло. Каждая реализация будет представлять собой «обстрел» цели n ракетами, в котором точки попадания ракет разыграны по жребию. Моделирование каждой реализации будет состоять из n единичных жребиев, плюс расчет пораженной площади S_{Π} .

В каждом единичном жребии разыгрывается точка попадания одной (j -й) ракеты, т. е. две случайные величины X_j, Y_j , распределенные по нормальному закону с характеристиками

$$m_{x_j}, m_{y_j}, \sigma_x, \sigma_y,$$

где m_{x_j}, m_{y_j} — координаты точки O_j (коэффициент корреляции равен нулю, так как величины X_j, Y_j по условию независимы).

Предположим, что моделирование производится на ЭЦВМ. Тогда наиболее удобным способом розыгрыша пары нормальных величин X_j, Y_j будет описанное в § 3 сложение нескольких независимых случайных чисел от 0 до 1 с последующей перенормировкой. При таком способе координаты j -й точки попадания могут быть разыграны по формулам:

$$\left. \begin{aligned} X_j &= \sigma_x \sqrt{2} \left(\sum_{k=1}^6 R_k - 3 \right) + m_{x_j}, \\ Y_j &= \sigma_y \sqrt{2} \left(\sum_{k=7}^{12} R_k - 3 \right) + m_{y_j}, \end{aligned} \right\} \quad (5.14)$$

где R_1, R_2, \dots, R_{12} — 12 отдельных независимых экземпляров случайного числа от 0 до 1*).

Предположим, что этот этап моделирования выполнен, и мы получили n точек попадания в данной реализации. Теперь надо подсчитать пораженную площадь S_{Π} для данной (i -й) реализации. Для этого нужно вокруг каждой точки попадания описать круг радиуса r и подсчитать площадь той части цели, которая накрыта хотя бы одним из кругов. Если бы розыгрыш производился вручную, можно было бы определить эту площадь планиметрированием. При моделировании на машине поступают иначе: вся цель разделяется на большое число элементарных площадок dS (рис. 8.21) и для каждой из них определяется, каково ее расстояние ρ_j от точки попадания j -й ракеты ($j = 1, \dots, n$). Если хотя бы для одной из точек попадания это расстояние оказалось меньше r (радиуса поражения), то площадка ds считается пораженной, после чего производится суммирование (интегрирование) пораженных площадок ds_{Π} по всей цели:

$$S_{\Pi} = \sum_{\Pi} ds_{\Pi}.$$

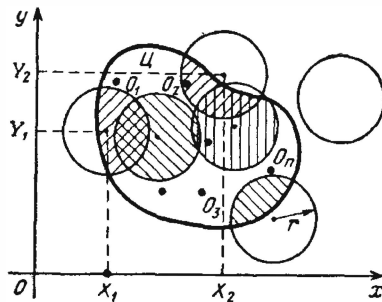


Рис. 8.20

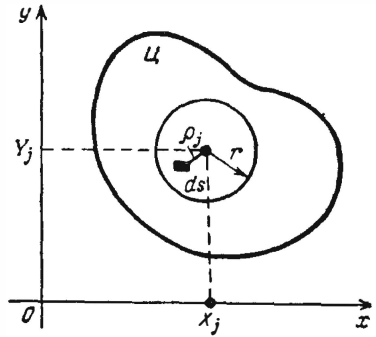


Рис. 8.21

Деля полученное в i -й реализации значение $S_{\Pi}^{(i)}$ на площадь цели, получим долю пораженной площади в данной реализации:

$$U^{(i)} = \frac{S_{\Pi}^{(i)}}{S_{\Pi}}.$$

Попутно с величиной $U^{(i)}$ для каждой реализации вычисляем $r_0^{(i)}$ — количество ракет, расстояние от точек попадания которых до цели превышает r (в данной реализации эти ракеты не причинили ущерба цели). Имея эти данные для большого числа реализаций N , мы можем ответить на все поставленные вопросы. Средняя доля пораженной площади:

$$m_u \approx \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N U^{(i)}.$$

Дисперсия доли пораженной площади:

$$D_u \approx \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (U^{(i)})^2 - m_u^2.$$

*). Разумеется, для розыгрыша координат каждой новой точки попадания нужно взять новые 12 случайных чисел.

Вероятность того, что доля пораженной площади будет не меньше u , определяется следующим образом: с каждой реализацией связывается число X_i , равное единице, если в данной реализации $U^{(i)} \geq u$, и нулю, если $U^{(i)} < u$. Тогда

$$P(U \geq u) \approx \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N X_i.$$

Математическое ожидание \bar{r}_0 числа ракет, не причинивших ущерба цели, найдется по формуле

$$\bar{r}_0 \approx \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N r_0^{(i)},$$

где $r_0^{(i)}$ — число ракет, не причинивших ущерба цели в i -й реализации.

6. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ХАРАКТЕРИСТИК СТАЦИОНАРНОГО СЛУЧАЙНОГО ПРОЦЕССА МЕТОДОМ МОНТЕ-КАРЛО ПО ОДНОЙ РЕАЛИЗАЦИИ

При статистическом моделировании операций нередко приходится встречаться со случаем, когда моделируемый случайный процесс является стационарным и протекает неограниченно долго, имея не зависящие от времени вероятностные характеристики.

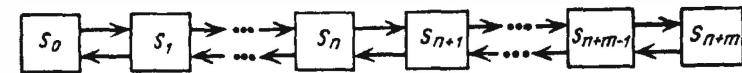


Рис. 8.22

В качестве примера рассмотрим работу n -канальной системы массового обслуживания с m местами в очереди, граф состояний которой показан на рис. 8.22. Предположим, что поток заявок, переводящий систему из состояния в состояние (слева направо), — стационарный, но не пуассоновский, например поток Пальма с произвольным законом распределения $f(t)$ интервала времени T между заявками. Время обслуживания одной заявки тоже распределено не по показательному закону, а по произвольному закону $\varphi(t)$. Так как процесс, протекающий в системе, не-марковский (потоки событий — не-пуассоновские), то его не удастся описать с помощью стандартного математического аппарата марковских случайных процессов — обыкновенных дифференциальных уравнений для вероятностей состояний и алгебраических уравнений — для предельных вероятностей состояний. И вообще, попытка описать данный случайный процесс с помощью аналитических зависимостей привела бы к чересчур громоздкому аппарату, не оправдывающему себя на практике. Единственным практически пригодным методом исследования подобных не-марковских систем является моделирование процесса методом Монте-Карло.

Если речь идет об изучении начального, нестационарного периода функционирования системы, то моделирование производится обычным

способом — разыгрывается множество реализаций процесса, и нужные нам вероятностные характеристики, например, вероятность отказа, среднее число занятых каналов, среднее число заявок в очереди и др., находятся обработкой «опытного» материала как *статистические средние по множеству реализаций*.

Однако, когда речь идет об изучении не переходного, начального периода, а стационарного, установившегося режима, достигаемого при $t \rightarrow \infty$, обстановка меняется. Дело в том, что при моделировании стационарных случайных процессов обычно можно пользоваться не множеством реализаций, а одной достаточно длинной реализацией.

При этом интересующие нас вероятностные характеристики случайного процесса могут быть получены не как средние по множеству реализаций, а как средние по времени для одной достаточной длинной реализации.

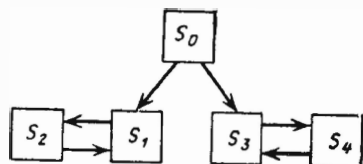


Рис. 8.23

Строго говоря, одной стационарности процесса для этого недостаточно. Процесс должен обладать еще так называемым эргодическим свойством. В элементарном истолковании это свойство состоит в том, что предельный режим, устанавливающийся в системе через некоторое время ее работы, не зависит от того, каковы были начальные условия и первоначальный период работы системы — каждая отдельная реализация является как бы «полномочным представителем» всего класса реализаций. Это значит, что какую бы мы реализацию ни выбрали, при $t \rightarrow \infty$ мы получим процесс с одними и теми же характеристиками.

Можно привести пример процесса стационарного, но не обладающего эргодическим свойством. Пусть, например, рассматривается система с графом состояний, показанным на рис. 8.23. Все потоки событий, переводящих систему из состояния в состояние, считаем стационарными. Пусть в начальный момент $t = 0$ система находится в состоянии S_0 ; из него она может перейти либо в состояние S_1 , либо в S_3 . Перейдя в состояние S_1 , система начнет «циркулировать» по состояниям S_1 и S_2 . Благодаря стационарности потоков событий, вызывающих эту циркуляцию, через достаточно время вероятности $p_1(t)$ и $p_2(t)$ состояний S_1 и S_2 станут постоянными, а процесс циркуляции — стационарным:

$$p_1(t) \rightarrow p_1 = \text{const}; \quad p_2(t) \rightarrow p_2 = \text{const}.$$

Если же из состояния S_0 система перешла не в S_1 , а в S_3 , то она будет циркулировать не по состояниям S_1, S_2 , а по состояниям S_3, S_4 ; вероятности этих состояний тоже будут стремиться к постоянным:

$$p_3(t) \rightarrow p_3 = \text{const}; \quad p_4(t) \rightarrow p_4 = \text{const},$$

но уже к другим, чем p_1 и p_2 .

Таким образом, в приведенном примере процесс, протекающий в системе, будет стационарным, но не эргодическим, и его вероятностные характеристики существенно зависят от начального периода (начального поведения системы). Ясно, что моделирование такого процесса с помощью одной (хотя бы и очень длинной) реализации недостаточно для получения его вероятностных характеристик.

К счастью, эргодические случайные процессы на практике встречаются чаще, чем неэргодические и, как правило, моделирование одной реализации дает возможность получить все вероятностные характеристики. В частности, эргодическими оказываются процессы, протекающие в системах, граф состояний которых относится к схеме «гибели и размножения», как показано, например, на рис. 8.22. Здесь система может через какое-то число шагов перейти из каждого состояния в каждое другое и «расщепления» процесса, подобного происходящему в системе с графом рис. 8.23, не происходит.

Если система имеет бесконечное множество возможных состояний, то, мы знаем, даже при стационарности всех потоков событий, предельного режима при $t \rightarrow \infty$ может не существовать — мы это видели на примере системы массового обслуживания с неограниченной очередью (см. § 6 гл. 5), где при $t \rightarrow \infty$ очередь при $\mu > 1$ растет неограниченно. Однако, если предельный режим существует, то при моделировании процесса методом Монте-Карло можно ограничиться одной реализацией.

Доказать существование предельного режима мы, строго говоря, можем только для марковской системы, а моделирование методом Монте-Карло применяется, как правило, к системам не-марковским. Однако с помощью косвенных рассуждений часто и в этом случае удается убедиться в существовании предельного режима.

Для пояснения изложенного рассмотрим пример, относящийся к моделированию методом Монте-Карло работы не-марковской системы массового обслуживания с очередью.

Пример. Имеется двухканальная ($n = 2$) СМО с очередью. Число мест в очереди $m = 3$; заявка, пришедшая в момент, когда все три места в очереди заняты, получает отказ и покидает систему. Поток заявок — пальмовский, т. е. интервалы времени между заявками представляют собой независимые случайные величины, распределенные по одному и тому же (непоказательному) закону $f(t)$ (рис. 8.24). Время обслуживания одной заявки — также случайная величина, распределенная по непоказательному закону $\varphi(t)$ (рис. 8.25), отличному от $f(t)$, но одинаковому для всех заявок.

Требуется, моделируя работу СМО методом Монте-Карло и располагая только одной длинной реализацией, оценить приближенно предельные характеристики системы (при $t \rightarrow \infty$):

- вероятности состояний (вероятности того, что будут заняты 0, 1, 2 канала; вероятности того, что в очереди будут находиться 0, 1, 2, 3 заявки);
- среднее число занятых каналов;
- среднее время ожидания заявки в очереди; дисперсию времени ожидания заявки в очереди;
- вероятность отказа (того, что заявка покинет СМО необслуженной).

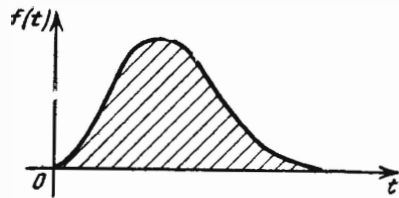


Рис. 8.24

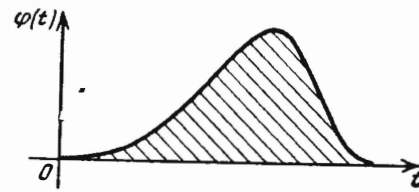


Рис. 8.25

Построить схему моделирования и схему обработки его результатов.

Решение. Граф состояний системы имеет вид, показанный на рис. 8.26. Число состояний конечно; из каждого состояния можно перейти в каждое; потоки событий, переводящие систему из состояния в состояние, стационарны (хотя и непуассоновские); из этого заключаем, что система обладает эргодическим свойством и моделирование по одной реализации возможно.

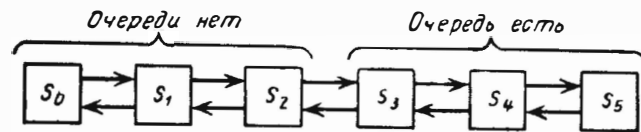


Рис. 8.26

Предположим для простоты, что в начальный момент ($t = 0$) система находится в состоянии S_0 (свободна)*. Начнем моделирование с того, что разыграем на оси $0t$ поток заявок, т. е. ряд случайных точек t_1, t_2, t_3, \dots — моментов прихода соответствующих заявок — первой, второй и т. п. (рис. 8.27). Розыгрыш потока заявок производится следующим образом. Строится функция распределения случайной величины T — интервала между заявками:

$$F(t) = \int_0^t f(t) dt \quad (6.1)$$

* Это не имеет значения, так как предельный режим не зависит от начального состояния

и разыгрывается значение случайной величины T_1 , как это описано в § 2; для этого берется функция, обратная F , от случайного числа R от 0 до 1: $T_1 = F^{-1}(R)$.

Расстояние T_1 откладывается от начала координат; получается момент t_1 прихода первой заявки. Затем процедура розыгрыша повторяется (разумеется, уже при другом R) и новое значение T_2 откладывается от t_1 , получается момент t_2 прихода второй заявки, и т. д.^{*)} Таким образом мы построим цепочку моментов прихода заявок (рис. 8.27). Разумеется, эту цепочку надо сделать достаточно длинной, разыграв, во всяком случае, не менее нескольких сот значений случайной величины T .

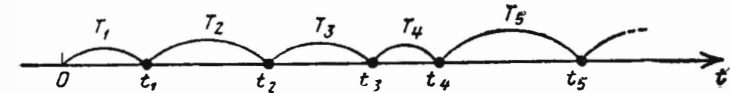


Рис. 8.27

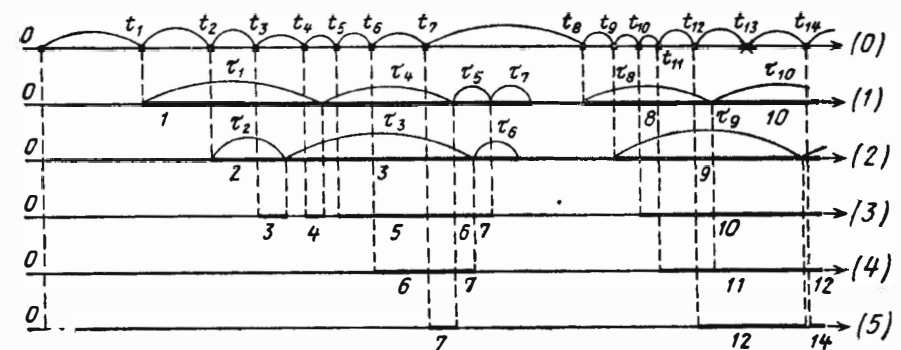


Рис. 8.28

Изобразим процедуру моделирования с помощью наглядной схемы (рис. 8.28). Вверху мы поместим ось времени (0) с отмеченными на ней моментами поступления заявок. Ниже ее мы поместим еще пять осей: (1), (2), (3), (4), (5). На осях (1) и (2) мы будем изображать состояния первого и второго каналов (жирная черта — «занят», тонкая — «свободен»). На осях (3), (4), (5) мы будем изображать состояния первого, второго и третьего мест в очереди (жирная черта — «занято», тонкая — «свободно»). Все пять осей имеют тот же отсчет времени, что и ось (0).

До момента t_1 — прихода первой заявки — все каналы и все места в очереди свободны. В момент t_1 приходит первая заявка и зани-

^{*)} При моделировании на машине удобнее не строить цепочку приходов заявок заранее, а «подавать» их на СМО по одной, по мере прихода; в целях удобства объяснения мы предположим, что заявки разыгрываются заранее

мает первый канал. Сколько времени он будет занят — решается розыгрышем. Для этого мы подвергнем случайное число R (разумеется, новое) преобразованию $\Phi^{-1}(R)$, где Φ — функция распределения времени обслуживания:

$$\Phi(t) = \int_0^t \varphi(t) dt. \quad (6.2)$$

Первое разыгранное значение времени обслуживания τ обозначаем τ_1 и откладываем на оси (1) от точки с абсциссой t_1 , отмечая его жирной линией (рис. 8.28). В момент прихода t_2 второй заявки первый канал еще занят; заявка занимает второй канал. Разыграем еще одно значение τ , обозначим его τ_2 и отложим жирной линией на оси (2) от точки с абсциссой t_2 .

Заявка t_3 , пришедшая в момент, когда оба канала заняты, становится в очередь, занимает в ней первое место (ось (3)) и ждет до того момента, когда освободится один из каналов. В нашем случае раньше освобождается канал (2) — в этот момент точка с оси (3) перескакивает на ось (2) — и снова разыгрывается время обслуживания τ_3 этой заявки. На оси (2) строится новый жирный участок, а ось (3) продолжается тонкой линией — место в очереди свободно.

Не будем продолжать подробное описание процедуры розыгрыша реализации — она достаточно ясна из рис. 8.28. На этом рисунке против каждого участка занятости канала (места в очереди) для удобства обработки проставлен номер заявки, занимающей это место; можно проследить, как заявка «путешествует» с последних мест в очереди на первые, затем — на обслуживание. Заявка, получившая отказ, отмечается звездочкой (она покидает СМО необслуженной).

Предположим, что моделирование реализации продолжено нами достаточно долго (настолько долго, что влияние начальных условий уже перестает сказываться). Посмотрим, как по этой реализации определить интересующие нас вероятностные характеристики работы СМО. Вероятности p_0, p_1, p_2 того, что будут заняты 0, 1, 2 канала*, найдем следующим образом. Разделим всю ось $0t$ на участки соответственно числу занятых каналов. Участки времени, на которых не занят ни один канал, отметим цифрой 0, один канал — цифрой 1, два канала — цифрой 2. На большом участке времени T сложим длины всех участков, помеченных нулем — получим T_0 ; сумма длин всех участков, помеченных единицей, будет T_1 , двойкой — T_2 .

Очевидно,

$$T_0 + T_1 + T_2 = T.$$

При большом T вероятности p_0, p_1 и \tilde{p}_2 будут приблизительно равны отношениям соответствующих времен к общему времени:

$$p_0 \approx T_0/T; \quad p_1 \approx T_1/T; \quad \tilde{p}_2 = T_2/T. \quad (6.3)$$

* Обозначение \tilde{p}_2 введено потому, что эта вероятность не совпадает с ранее (см. гл. 5) введенной вероятностью p_2 , а равна $\tilde{p}_2 = p_2 + p_3 + p_4 + p_6$

Заметим, что участок T целесообразно отсчитывать не с самого начала процесса, где еще сказывается влияние начальных условий, а от более удаленного по времени момента $0'$, где влияние начальных условий уже практически перестает сказываться.

Найдем вероятности $\hat{p}_0, \hat{p}_1, \hat{p}_2, \hat{p}_3$ того, что в очереди будут стоять 0, 1, 2, 3 заявки. Снова разобьем большой участок оси времени T на части, помеченные $\hat{0}, \hat{1}, \hat{2}, \hat{3}$, на которых в очереди находится соответственно 0, 1, 2, 3 заявки. Складывая длины всех одинаково помеченных участков и деля суммы \hat{T}_i на T , получим:

$$\hat{p}_0 \approx \hat{T}_0/T; \quad \hat{p}_1 \approx \hat{T}_1/T; \quad \hat{p}_2 \approx \hat{T}_2/T; \quad \hat{p}_3 \approx \hat{T}_3/T. \quad (6.4)$$

Среднее число занятых каналов \bar{z} получится обычным способом как математическое ожидание дискретной случайной величины Z — числа занятых каналов:

$$\bar{z} = 1 \cdot p_1 + 2 \cdot \tilde{p}_2 = p_1 + 2\tilde{p}_2. \quad (6.5)$$

Среднее время ожидания заявки в очереди $\bar{t}_{\text{ож}}$ находим следующим образом: рассмотрим ряд заявок, поступивших на большом участке времени T в моменты

$$t_k, t_{k+1}, \dots, t_{k+i}, \dots, t_{k+N},$$

и для каждой из них непосредственно подсчитаем время ожидания в очереди $t_{\text{ож}}^{k+i}$, равное нулю, если $(k+i)$ -я заявка была сразу принята к обслуживанию (или получила отказ), и сумме времен ожидания этой заявки на разных осях ((3), (4) и (5)), если она стояла в очереди. Среднее время ожидания заявки в очереди приближенно найдется как среднее арифметическое этих времен:

$$\bar{t}_{\text{ож}} \approx \frac{1}{N} \sum_{i=0}^N t_{\text{ож}}^{(k+i)}. \quad (6.6)$$

Если нас интересует не просто среднее время ожидания, а условие **о в н о е** среднее время, вычисленное при условии, что заявка была принята к обслуживанию, то среднее арифметическое времен ожидания вычисляется не для всех заявок, а только для тех, которые были обслужены.

Дисперсия времени ожидания найдется аналогичным образом, как среднее арифметическое квадратов времен ожидания минус квадрат среднего времени ожидания:

$$D[T_{\text{ож}}] \approx \frac{1}{N} \sum_{i=0}^N (t_{\text{ож}}^{(k+i)})^2 - \bar{t}_{\text{ож}}^2. \quad (6.7)$$

Наконец, вероятность отказа найдется на большом участке времени T как отношение числа N^* заявок, помеченных звездочкой (получивших отказ), к общему числу N заявок, поступивших за это время:

$$P_{\text{отк}} \approx \frac{N^*}{N}. \quad (6.8)$$

7. ОЦЕНКА ТОЧНОСТИ ХАРАКТЕРИСТИК, ПОЛУЧЕННЫХ МЕТОДОМ МОНТЕ-КАРЛО. НЕОБХОДИМОЕ ЧИСЛО РЕАЛИЗАЦИЙ

Метод Монте-Карло основан на предельных теоремах теории вероятностей, утверждающих, что при большом числе опытов N частота события приближается к его вероятности, а среднее арифметическое наблюдаемых значений случайной величины — к ее математическому ожиданию. Пользуясь методом Монте-Карло, мы, произведя большое число опытов (реализаций), приближенно заменяем вероятность события его частотой, а математическое ожидание — средним арифметическим.

Естественно встает вопрос — насколько велика будет ошибка, возникающая от такой приближенной замены? И каково должно быть число реализаций N для того, чтобы эта ошибка с практической достоверностью не вышла за данные пределы? Другими словами, возникает вопрос об оценке точности характеристик случайного явления, полученных методом Монте-Карло.

При ответе на эти вопросы мы будем базироваться на центральной предельной теореме теории вероятностей. Согласно этой теореме, при большом числе опытов N их средний результат (частота P^* события A или среднее арифметическое \bar{X} наблюдаемых значений случайной величины X) распределяется приближенно по нормальному закону. Приведем относящиеся сюда формулы.

1. Закон распределения частоты события при большом числе опытов.

Если производится большое число N независимых опытов, в каждом из которых событие A появляется с вероятностью p , то частота события A

$$P^* = \frac{M_A}{N} \quad (7.1)$$

(где M_A — число появлений события A в N опытах) распределяется приближенно по нормальному закону, с математическим ожиданием

$$m_{P^*} = p \quad (7.2)$$

и средним квадратическим отклонением

$$\sigma_{P^*} = \sqrt{\frac{p(1-p)}{N}}. \quad (7.3)$$

2. Закон распределения среднего арифметического при большом числе опытов.

Если производится большое число N независимых опытов, в которых случайная величина X принимает значения:

$$X_1, X_2, \dots, X_N, \quad (7.4)$$

то среднее арифметическое этих значений:

$$\bar{X} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N X_i \quad (7.5)$$

распределяется приближенно по нормальному закону, с математическим ожиданием

$$m_{\bar{x}} = m_x \quad (7.6)$$

и средним квадратическим отклонением

$$\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma_x}{\sqrt{N}}, \quad (7.7)$$

где m_x , σ_x — математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение случайной величины X .

Основываясь на этих законах распределения и формулах, мы можем поставить и решить несколько задач, относящихся к точности метода Монте-Карло.

Задача 1. Произведено N независимых опытов (реализаций), в каждом из которых событие A появляется с вероятностью p . В результате этих опытов получена частота P^* события A . Найти вероятность того, что частота P^* отличается от вероятности p не больше чем на заданную величину $\varepsilon > 0$.

Решение. Считая число N достаточно большим для того, чтобы полагать частоту P^* распределенной по нормальному закону с характеристиками (7.2), (7.3), получим:

$$P(|P^* - p| < \varepsilon) = 2\Phi\left(\frac{\varepsilon\sqrt{N}}{\sqrt{p(1-p)}}\right), \quad (7.8)$$

где Φ — функция Лапласа*).

Пример 1 Произведено $N = 1000$ независимых опытов в каждом из которых событие A появлялось с вероятностью $p = 0,3$. Найти вероятность того, что полученная при этом частота P^* события A отличается от вероятности меньше чем на $\varepsilon = 0,02$.

Решение По формуле (7.8) имеем:

$$P(|P^* - 0,3| < 0,02) = 2\Phi\left(\frac{0,02 \cdot 31,6}{0,459}\right) = 2\Phi(1,38) \approx 0,83.$$

Итак, если вероятность p события A нам известна, мы можем оценить точность определения этой вероятности по частоте P^* и зависимость этой точности от числа опытов N . Беда в том, что вероятность p нам неизвестна: ведь и сами-то опыты мы производили для того, чтобы ее найти. Однако для оценки точности метода Монте-Карло нам не очень существенно знать точное значение самой вероятности p — в правую часть формулы (7.8) ее можно подставить ориентировочным значением, взяв вместо p , например, частоту P^* события A в данной серии опытов.

* Значения функции Лапласа см. в табл. 1 приложения

Таким образом, мы решили прямую задачу оценки точности нахождения вероятностей методом Монте-Карло: если известно число опытов N и ориентировочное значение вероятности p , мы можем найти вероятность того, что частота P^* отклонится от вероятности не больше чем на заданную величину ε .

Поставим теперь обратную задачу: сколько опытов N нужно произвести для того, чтобы с практической уверенностью ожидать, что частота отклонится от вероятности не больше чем на заданную величину?

Задача 2. Производится ряд независимых опытов, в каждом из которых событие A появляется с вероятностью p . Каково должно быть число опытов (реализаций) для того, чтобы с заданной, достаточно высокой вероятностью Q можно было ожидать, что частота P^* события A отклонится от его вероятности p меньше, чем на ε ?

Решение. Зададимся каким-нибудь достаточно близким к единице значением вероятности Q — назовем его «уровнем доверия». Если вероятность того, что частота и вероятность расходятся меньше чем на ε , будет Q или больше, будем считать задачу решенной. На практике уровень доверия Q выбирается каким-нибудь круглым значением, близким к единице, например, 0,95 или 0,99 или 0,995 и т. д., в зависимости от важности задачи, которую мы преследуем. Предположим, что вероятность Q задана. Приравняем этому значению Q правую часть равенства (7.8):

$$2\Phi\left(\frac{\varepsilon\sqrt{N}}{\sqrt{p(1-p)}}\right) = Q \quad (7.9)$$

и разрешим уравнение (7.9) относительно N :

$$\Phi\left(\frac{\varepsilon\sqrt{N}}{\sqrt{p(1-p)}}\right) = \frac{1}{2}Q, \quad \frac{\varepsilon\sqrt{N}}{\sqrt{p(1-p)}} = \Phi^{-1}\left(\frac{1}{2}Q\right), \quad (7.10)$$

где Φ^{-1} — функция, обратная функции Лапласа. Отсюда получаем формулу для числа опытов N :

$$N = \frac{p(1-p)}{\varepsilon^2} \left[\Phi^{-1}\left(\frac{1}{2}Q\right) \right]^2. \quad (7.11)$$

Если по формуле (7.11) N оказывается не целым, его надо округлить в большую сторону до ближайшего целого.

Для вычислений по формуле (7.11) удобно иметь в распоряжении таблицу значений функции $[\Phi^{-1}(\frac{1}{2}Q)]^2$. В табл. 7.1 приведены значения этой функции для некоторых, наиболее типичных значений уровня доверия Q .

Таблица 7.1

Q	0,80	0,85	0,90	0,95	0,96	0,97	0,98	0,99	0,995	0,999	0,9995	0,9999
$[\Phi^{-1}(\frac{1}{2}Q)]^2$	1,64	2,08	2,71	3,84	4,21	4,49	5,43	6,61	7,90	10,9	12,25	15,2

Пример 2. Производится ряд независимых опытов (реализаций), в каждом из которых регистрируется появление или непоявление события A , вероятность которого $p = 0,2$. Сколько опытов нужно произвести для того, чтобы частота P^* события A с вероятностью (уровнем доверия) $Q = 0,95$ отличалась от p не больше чем на $\varepsilon = 0,01$?

Решение. Число опытов N вычисляем по формуле (7.11). По табл. 7.1 для $Q = 0,95$ находим

$$\left[\Phi^{-1}\left(\frac{1}{2}Q\right) \right]^2 = 3,84.$$

Подставляя в формулу (7.11) получим:

$$N = \frac{0,2 \cdot 0,8}{0,01^2} \cdot 3,84 \approx 6140.$$

г. е. для надежного ($Q = 0,95$) определения вероятности $p = 0,2$ по частоте с ошибкой не более 0,01 (т. е. в пределах $0,19 \div 0,21$) требуется осуществить более 6000 реализаций*).

Задача 3. Производится N независимых опытов, в каждом из которых наблюдается значение случайной величины X , имеющей математическое ожидание m_x и среднее квадратическое отклонение σ_x . Вычисляется среднее арифметическое наблюдаемых значений случайной величины \bar{X} :

$$\bar{X} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N X_i. \quad (7.12)$$

Найти вероятность того, что среднее арифметическое \bar{X} отклонится от математического ожидания m_x меньше чем на заданную величину ε :

$$P(|\bar{X} - m_x| < \varepsilon).$$

Решение. На основании центральной предельной теоремы, считая число опытов большим, можно утверждать, что случайная величина \bar{X} распределена нормально, с характеристиками (7.6) и (7.7). Отсюда

$$P(|\bar{X} - m_x| < \varepsilon) = 2\Phi\left(\frac{\varepsilon}{\sigma_{\bar{X}}}\right)$$

или

$$P(|\bar{X} - m_x| < \varepsilon) = 2\Phi\left(\frac{\varepsilon\sqrt{N}}{\sigma_x}\right). \quad (7.13)$$

По формуле (7.13) может быть оценена точность определения математического ожидания по среднему арифметическому.

Пример 3. Производится $N = 1600$ независимых опытов, в которых наблюдаются значения случайной величины X с характеристиками $m_x = 2$ и $\sigma_x = 1$. Найти вероятность того, что среднее арифметическое наблюдаемых

* Значение вероятности p , входящее в формулу (7.11), на практике можно брать ориентировочно, по частоте события в первой серии реализаций, уточняя его по мере накопления материала

значений случайной величины X будет отличаться от ее математического ожидания меньше чем на 0,05, т. е. будет заключено в интервале $1,95 \div 2,05$.

Решение. По формуле (7.13), пользуясь табл. 1 приложения, находим:

$$P(|X - m_x| < 0,05) = 2\Phi\left(\frac{0,05 \cdot 40}{1}\right) = 2\Phi(2) \approx 0,954.$$

Заметим, что для оценки точности определения математического ожидания m_x методом Монте-Карло не требуется заранее знать самого математического ожидания случайной величины, зато существенно знать ее среднее квадратическое отклонение σ_x , которое входит в правую часть формулы (7.13).

Обычно на практике, приступая к моделированию случайного явления методом Монте-Карло, мы не знаем ни математического ожидания, ни среднего квадратического отклонения интересующей нас случайной величины. Однако для приближенной оценки точности моделирования можно в первом приближении вместо σ_x воспользоваться ее статистической оценкой, полученной в самой серии из N реализаций:

$$\sigma_x \approx \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N X_i^2 - \bar{X}^2}, \quad (7.14)$$

где \bar{X} — среднее арифметическое. Если точность окажется недостаточной, следует продолжить испытания, внося в среднее квадратическое соответствующие поправки по мере увеличения числа реализаций.

Задача 4. Производится ряд независимых опытов над случайной величиной X . Сколько надо сделать опытов, чтобы с заданной вероятностью (уровнем доверия) Q ожидать, что среднее арифметическое \bar{X} наблюдаемых значений случайной величины отклонится от ее математического ожидания не больше, чем на ε ?

Решение. Положим правую часть формулы (7.13) равной уровню доверия Q :

$$2\Phi\left(\frac{\varepsilon\sqrt{N}}{\sigma_x}\right) = Q \quad (7.15)$$

и разрешим уравнение (7.15) относительно N . Получим:

$$N = \left(\frac{\sigma_x}{\varepsilon}\right)^2 \left[\Phi^{-1}\left(\frac{1}{2}Q\right)\right]^2, \quad (7.16)$$

где $\left[\Phi^{-1}\left(\frac{1}{2}Q\right)\right]^2$ — функция, данная в табл. 7.1.

Пример 4. Производятся опыты над случайной величиной X с целью приближенно определить ее математическое ожидание m_x . Среднее квадратическое отклонение случайной величины X , оцененное предварительно (по первой серии экспериментов) по формуле (7.14), приближенно равно $\sigma_x \approx 0,1$. Какое число опытов N нужно для того, чтобы (с уровнем доверия $Q = 0,99$) среднее арифметическое \bar{X} наблюдаемых значений случайной величины X отличалось от ее математического ожидания не больше, чем на $\varepsilon = 0,01$?

Решение. Пользуясь табл. 7.1, для $Q = 0,99$ находим:

$$\left[\Phi^{-1}\left(\frac{1}{2}Q\right)\right]^2 = 6,61; \quad \left(\frac{\sigma_x}{\varepsilon}\right)^2 = 100.$$

Отсюда по формуле (7.16)

$$N = 100 \cdot 6,61 = 661.$$

В заключение остановимся кратко на оценке точности определения характеристик стационарной случайной функции по одной реализации (см. § 6). Так как здесь нет множества реализаций, а есть только одна длинная реализация, возникают естественные вопросы:

— Какова ошибка определения характеристик случайного процесса по одной реализации длины T ?

— Какова должна быть длина реализации T для того, чтобы с данным уровнем доверия Q ошибка не превысила данного ε ?

Точное решение этих задач не просто и требует тонких рассуждений. Грубо-приближенно на эти вопросы можно ответить, сведя их к вопросам, уже решенным для множества реализаций, если условно приравнять по точности одну длинную реализацию продолжительности T множеству реализаций длины T' той же общей продолжительности:

$$T = NT',$$

где длина реализации T' определяется как такое время, для которого корреляция между значениями исследуемой случайной функции $X(t)$ становится пренебрежимо малой.

На практике при моделировании случайного процесса по одной реализации часто возникает вопрос: пора ли уже остановиться? Стали ли уже устойчивыми вероятностные характеристики процесса? В таких случаях вместо кропотливой оценки точности моделирования можно воспользоваться следующим грубым приемом: резко изменить начальные условия, при которых производится моделирование (например, предположить, что в начальный момент не «все каналы свободны», а «все каналы заняты») и повторить моделирование при измененных начальных условиях. Если при этом на достаточно удаленных от начала участках времени получатся практически те же вероятностные характеристики процесса, это хорошее свидетельство в пользу того, что им можно доверять.

ИГРОВЫЕ МЕТОДЫ ОБОСНОВАНИЯ РЕШЕНИЙ

1. ЗАДАЧИ ТЕОРИИ ИГР И СТАТИСТИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ

Во многих задачах исследования операций нам приходится сталкиваться с проблемой принятия решения в условиях неопределенности.

Неопределенными могут быть как условия выполнения операции, так и сознательные действия противников или других лиц, от которых зависит успех операции. Кроме того, неопределенность в той или другой степени может относиться также и к целям (задачам) операции, успех которой далеко не всегда может быть исчерпывающим образом охарактеризован одним-единственным числом — показателем эффективности.

Разумеется, когда речь идет о неопределенной в каком-то смысле ситуации, рекомендации, вытекающие из научного исследования, не могут быть столь же четкими и однозначными, как в случаях полной определенности. Однако и при отсутствии полной определенности количественный анализ ситуации все же может принести пользу и помочь при выборе решения.

Разработаны специальные математические методы, предназначенные для обоснования решений в условиях неопределенности. В некоторых, наиболее простых случаях эти методы дают возможность фактически найти и выбрать оптимальное решение. В более сложных случаях эти методы доставляют вспомогательный материал, позволяющий глубже разобраться в сложной ситуации и оценить каждое из возможных решений с различных (иногда противоречивых) точек зрения, взвесить его преимущества и недостатки и в конечном счете принять решение, если не единственно правильное, то, по крайней мере, до конца продуманное.

Необходимо учитывать, что при выборе решения в условиях неопределенности всегда неизбежен элемент произвола и, значит, риска. Недостаточность информации всегда опасна, и за нее приходится платить. Однако в условиях сложной ситуации всегда полезно представить варианты решения и их возможные последствия в такой форме, чтобы сделать произвол выбора менее грубым, а риск — минимальным.

В ряде случаев задача о принятии решения в условиях неопределенности ставится в таком виде: какой ценой можно заплатить за недостающую информацию, чтобы экономический эффект всей операции был максимальным?

Задачами о принятии решений в условиях неопределенности занимается теория игр и статистических решений.

В данной главе излагаются некоторые элементарные сведения из этой области. Для более подробного ознакомления могут быть рекомендованы работы [24, 25, 29].

2. ПРЕДМЕТ ТЕОРИИ ИГР. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ

При решении ряда практических задач исследования операций (в области экономики, военного дела и т. д.) приходится анализировать ситуации, в которых сталкиваются две (или более) враждующие стороны, преследующие различные цели, причем результат любого мероприятия каждой из сторон зависит от того, какой образ действий выберет противник. Такие ситуации мы будем называть **конфликтными ситуациями**.

Примеры конфликтных ситуаций весьма многообразны. Любая ситуация, складывающаяся в ходе военных действий, принадлежит к конфликтным: каждое решение в этой области должно приниматься с учетом сознательного противодействия разумного противника. К той же категории принадлежат и ситуации, возникающие при выборе системы вооружения, способов его боевого применения и вообще при планировании боевых операций. Ряд ситуаций в области экономики (особенно при наличии капиталистической конкуренции) также принадлежит к конфликтным; в роли борющихся сторон выступают торговые фирмы, промышленные предприятия, тресты, монополии и т. д. Встречаются конфликтные ситуации также в судопроизводстве, спорте и в других областях человеческой деятельности.

Необходимость анализировать такие ситуации вызвала к жизни специальный математический аппарат — теорию игр. Теория игр есть математическая теория конфликтных ситуаций. Задача этой теории — выработка рекомендаций по рациональному образу действий участников конфликта.

Каждая непосредственно взятая из практики конфликтная ситуация очень сложна, и ее анализ затруднен наличием многих входящих, несущественных факторов. Чтобы сделать возможным математический анализ ситуации, надо отвлечься от этих второстепенных факторов и построить упрощенную, схематизированную модель ситуации. Такую модель мы будем называть **игрой**.

От реальной конфликтной ситуации игра отличается тем, что ведется по вполне определенным правилам. Человечество издавна пользуется такими формализованными моделями конфликтов — «играми» в буквальном смысле слова (шашки, шахматы, карточные игры и т. д.). Все эти игры носят характер соревнования, происходящего по известным правилам и заканчивающегося «победой» (выигрышем) того или другого игрока.

Такие формализованные игры представляют собой наиболее удобный материал для иллюстрации и усвоения основных понятий теории игр. Это отразилось и на ее терминологии: стороны, участвующие

в конфликте, условно именуется «игроками», исход конфликта — «выиграем» и т. д.

В игре могут сталкиваться интересы двух или более противников; в первом случае игра называется «парной», во втором — «множественной». Участники множественной игры могут образовывать коалиции (постоянные или временные). Множественная игра с двумя постоянными коалициями обращается в парную. Наибольшее практическое значение имеют парные игры; мы ограничимся рассмотрением только таких игр.

Пусть имеется парная игра **И**, в которой участвуют два игрока **А** и **В** с противоположными интересами. Под «игрой» будем понимать мероприятие, состоящее из ряда действий или «ходов» сторон **А** и **В**. Чтобы игра могла быть подвергнута математическому анализу, должны быть четко сформулированы правила игры, т. е. система условий, регламентирующая:

— возможные варианты действий игроков,

— объем информации каждой стороны о поведении другой,

— результат (исход) игры, к которому приводит каждая данная совокупность ходов.

Этот результат (выигрыш или проигрыш) вообще не всегда имеет количественное выражение, но обычно можно, хотя бы условно, выразить его числом (например, в шахматной игре выигрышу приписать значение 1, проигрышу — 0, ничьей — 1/2).

Игра называется *игрой с нулевой суммой*, если один игрок выигрывает ровно столько, сколько проигрывает другой, т. е. сумма выигрышей сторон равна нулю. В игре с нулевой суммой интересы противников прямо противоположны. Здесь мы будем рассматривать только такие игры.

Обозначим a выигрыш игрока **А**, b — выигрыш игрока **В** в игре с нулевой суммой. Так как $a = -b$, то при анализе такой игры нет необходимости рассматривать оба эти числа — достаточно рассматривать выигрыш одного из игроков; пусть это будет, скажем, **А**. В дальнейшем мы, для удобства изложения, сторону **А** будем условно именовать «мы», а сторону **В** — «противник»^{*)}.

Развитие игры во времени мы будем представлять состоящим из ряда последовательных этапов или «ходов». *Ходом* в теории игр называется выбор одного из предусмотренных правилами игры действий и его осуществление

Ходы бывают *личными* и *случайными*. *Личным ходом* называется сознательный выбор игроком одного из возможных вариантов действий и его осуществление (пример — любой ход в шахматной игре). *Случайным ходом* называется выбор из ряда возможностей, осуществляемый не решением игрока, а каким-либо механизмом случайного выбора (бросание монеты, выбор карты из перетасованной колоды и т. п.). Для каждого случайного хода правила игры определяют *распределение вероятностей возможных исходов*.

^{*)} Это формальное условие, очевидно, не дает никаких реальных преимуществ игроку **А**.

Некоторые игры состоят только из случайных ходов (так называемые чисто азартные игры) или только из личных ходов (шахматы, шашки). Большинство карточных игр содержит как личные, так и случайные ходы.

Теория игр занимается анализом только тех игр, которые содержат личные ходы; ее задача — дать указания игрокам при выборе их личных ходов, т. е. рекомендовать им определенные «стратегии».

Стратегией игрока называется совокупность правил, определяющих выбор варианта действий при каждом личном ходе этого игрока в зависимости от ситуации, сложившейся в процессе игры.

Понятие стратегии — одно из основных в теории игр; остановимся на нем несколько подробнее. Обычно, принимая участие в игре, игрок не следует каким-то жестким, фиксированным правилам: выбор (решение) при каждом личном ходе принимается им в ходе игры, в зависимости от сложившейся конкретной ситуации. Однако теоретически дело не изменится, если мы представим себе, что все эти решения приняты игроком заранее («если сложится такая-то ситуация, я поступлю так-то»). В принципе (если не практически) это возможно для любой игры. Если такая система решений будет принята, это будет означать, что игрок выбрал определенную *стратегию*. Теперь он может и не участвовать в игре лично, а заменить свое участие списком правил, которые за него будет применять незаинтересованное лицо (судья). Стратегия может быть также задана машине-автомату в виде программы (именно так играют в шахматы электронные вычислительные машины).

В зависимости от числа возможных стратегий игры делятся на «конечные» и «бесконечные».

Игра называется *конечной*, если у каждого игрока имеется только конечное число стратегий, и *бесконечной*, если хотя бы у одного из игроков имеется бесконечное число стратегий.

Целью теории игр является выработка рекомендаций для разумного поведения игроков в конфликтной ситуации, т. е. определение «оптимальной стратегии» для каждого из них.

Оптимальной стратегией игрока называется такая стратегия, которая при многократном повторении игры обеспечивает данному игроку максимально возможный средний выигрыш (или, что то же, минимально возможный средний проигрыш). При выборе этой стратегии основой рассуждений является предположение, что *противник по меньшей мере так же разумен, как и мы сами, и делает все для того, чтобы помешать нам добиться своей цели*.

В теории игр все рекомендации вырабатываются исходя именно из этих принципов; следовательно, в ней не учитываются просчеты и ошибки игроков, неизбежные в каждой конфликтной ситуации, а также элементы азарта и риска.

Теория игр, как и всякая математическая модель сложного явления, имеет свои ограничения. Важнейшим из них является то, что выигрыш искусственно сводится к одному-единственному числу. В большинстве конфликтных ситуаций при выборе разумной стратегии приходится принимать во внимание не один, а несколько числовых

параметров — показателей эффективности. Стратегия, оптимальная по одному показателю, обязательно будет оптимальной по другим. Сознывая эти ограничения и поэтому не придерживаясь слепо рекомендаций, полученных игровыми методами, можно все же разумно использовать математический аппарат теории игр для выработки, если не в точности оптимальной, то, во всяком случае «приемлемой» стратегии.

3. ПЛАТЕЖНАЯ МАТРИЦА

Рассмотрим конечную игру, в которой игрок A («мы») имеет m стратегий, а игрок B («противник») — n стратегий. Такая игра называется игрой $m \times n$. Будем обозначать наши стратегии A_1, A_2, \dots, A_m ; стратегии противника — B_1, B_2, \dots, B_n . Предположим, что каждая сторона выбрала определенную стратегию: мы выбрали A_i , противник — B_j . Если игра состоит только из личных ходов, то выбор стратегий A_i, B_j однозначно определяет исход игры — наш выигрыш (положительный или отрицательный); обозначим его a_{ij} .

Если игра содержит кроме личных случайные ходы, то выигрыш при паре стратегий A_i, B_j есть величина случайная, зависящая от исходов всех случайных ходов. В этом случае естественной оценкой ожидаемого выигрыша является математическое ожидание случайного выигрыша. Мы будем обозначать одним и тем же знаком a_{ij} как сам выигрыш (в игре без случайных ходов), так и его математическое ожидание (в игре со случайными ходами).

Предположим, что нам известны значения a_{ij} при каждой паре стратегий. Эти значения можно записать в виде прямоугольной таблицы (матрицы), строки которой соответствуют нашим стратегиям (A_i), а столбцы — стратегиям противника (B_j):

$A_i \backslash B_j$	B_1	B_2	...	B_n
A_1	a_{11}	a_{12}	...	a_{1n}
A_2	a_{21}	a_{22}	...	a_{2n}
...
A_m	a_{m1}	a_{m2}	...	a_{mn}

Такая таблица называется платежной матрицей или просто матрицей игры.

Заметим, что построение платежной матрицы, особенно для игр с большим количеством стратегий, может само по себе представлять весьма непростую задачу. Например, для шахматной игры число воз-

можных стратегий так велико, что построение платежной матрицы (даже с привлечением вычислительных машин) является пока практически неосуществимым. Однако в принципе любая конечная игра может быть приведена к матричной форме.

Рассмотрим несколько элементарных примеров игр и построим для них платежные матрицы.

Пример 1. Игра «поиск».

Имеется два игрока A и B ; игрок A прячется, а B его ищет. В распоряжении A имеется два убежища (I и II), любое из которых он может выбрать по своему усмотрению. Условия игры таковы: если B найдет A в том убежище, где A спрятался, то A платит ему штраф 1 руб; если B не найдет A (т. е. будет искать в другом убежище), то он сам должен заплатить A такой же штраф. Требуется построить платежную матрицу.

Решение. Игра состоит всего из двух ходов, оба — личные. У нас (A) две стратегии:

- A_1 — прятаться в убежище I,
- A_2 — прятаться в убежище II.

У противника (B) тоже две стратегии:

- B_1 — искать в убежище I,
- B_2 — искать в убежище II.

Перед нами — игра 2×2 . Ее матрица имеет вид:

$A_i \backslash B_j$	B_1	B_2
A_1	-1	1
A_2	1	-1

На примере этой игры, как она ни элементарна, можно уяснить себе некоторые важные идеи теории игр.

Предположим сначала, что данная игра выполняется только один раз (играется единственная «партия»). Тогда, очевидно, нет смысла говорить о преимуществах тех или других стратегий — каждый из игроков может с равным основанием принять любую из них. Однако при многократном повторении игры положение меняется.

Действительно, допустим, что мы (игрок A) выбрали какую-то стратегию (скажем, A_1) и придерживаемся ее. Тогда, уже по результатам первых нескольких партий, противник догадается о нашей стратегии, начнет всегда искать в убежище I и выигрывать. То же будет, если мы выберем стратегию A_2 . Нам явно невыгодно придерживаться одной какой-то стратегии; чтобы не оказаться в проигрыше, мы должны чередовать их. Однако, если мы будем чередовать убежища I и II в какой-то определенной последовательности (скажем, через одну партию), противник тоже догадается об этом и ответит наилучшим для

нас образом. Очевидно, надежным способом, гарантирующим нас от верного проигрыша, будет такая организация выбора в каждой партии, когда мы сами его наперед не знаем. Например, можно бросить монету, и, если выпадет герб, выбрать убежище I, а если решка — убежище II.

Печальное положение, в котором оказался игрок A (чтобы не проигрывать, выбирать убежище случайным образом), очевидно, присуще не только ему, но и его противнику B , для которого справедливы все вышеприведенные рассуждения. Оптимальной стратегией каждого оказывается «смешанная» стратегия, в которой две возможные стратегии игрока чередуются случайным образом, с одинаковыми вероятностями.

Таким образом, мы путем интуитивных рассуждений подошли к одному из существенных понятий теории игр — к понятию смешанной стратегии — т. е. такой, в которой отдельные «чистые» стратегии чередуются случайным образом с какими-то вероятностями. В данном примере из соображений симметрии ясно, что стратегии A_1 и A_2 должны применяться с одинаковыми вероятностями; в более сложных примерах решение может быть далеко не тривиальным.

Пример 2. Игра «три пальца».

Игроки A и B одновременно и независимо друг от друга показывают один, два или три пальца. Выигрыш или проигрыш решает общее число показанных пальцев. Выигрыш (в рублях) равен этому числу; если оно четное — выигрывает A , а B ему платит; если нечетное — наоборот. Требуется построить платежную матрицу.

Решение. У каждого игрока по три стратегии: показывать один, два или три пальца. Матрица игры 3×3 имеет вид:

$A_i \backslash B_j$	B_1	B_2	B_3
A_1	2	-3	4
A_2	-3	4	-5
A_3	4	-5	6

Проанализируем ситуацию. Очевидно, на любую нашу стратегию противник может ответить наихудшим для нас образом. Например, если мы выберем A_1 , он ответит нам B_2 , и мы проиграем 3 руб. На стратегию A_2 он нам ответит B_3 , и мы проиграем 5 руб.; на стратегию A_3 — B_2 , и мы снова проиграем 5 руб. Очевидно, некоторое преимущество имеет стратегия A_1 (при ней проигрыш минимален), но и она для нас явно невыгодна, так как всегда ведет к проигрышу.

Однако попробуем стать на точку зрения второго игрока (B). Его положение тоже не из блестящих. Если он выберет B_1 , мы ответим ему A_3 , и он отдаст нам 4 руб; если B_2 — мы ответим A_2 и снова получим 4 руб; также и на B_3 у нас есть ответ A_3 , приводящий к еще худшему результату: B проиграет 6 руб.

Выходит, игра невыгодна ни тому, ни другому из игроков: каждый из них, выбрав какую-то определенную стратегию, осужден на проигрыш! Это наводит на мысль, что и здесь выход — в применении смешанных стратегий; действительно, так оно и есть, но в данном примере дело обстоит не так просто, как в предыдущем, и чтобы найти оптимальные стратегии сторон, нужно научиться решать игры. В дальнейшем мы вернемся к этому примеру и найдем его решение.

Пример 3. Игра «вооружение и самолет». В нашем распоряжении имеются три вида вооружения: A_1, A_2, A_3 ; у противника — три вида самолетов: B_1, B_2, B_3 . Наша задача — поразить самолет; задача противника — сохранить его непораженным. Наш личный ход — выбор типа вооружения; личный ход противника — выбор самолета для боевых действий. В данной игре имеется еще и случайный ход — применение вооружения. Вооружением A_1 самолеты B_1, B_2, B_3 поражаются соответственно с вероятностями 0,5, 0,6, 0,8; вооружением A_2 — с вероятностями 0,9, 0,7, 0,8; вооружением A_3 — с вероятностями 0,7, 0,5, 0,6. Построить матрицу игры и проанализировать ситуацию.

Решение. Матрица игры 3×3 имеет вид:

$A_i \backslash B_j$	B_1	B_2	B_3
A_1	0,5	0,6	0,8
A_2	0,9	0,7	0,8
A_3	0,7	0,5	0,6

где выигрыш — вероятность поражения самолета (мы стремимся его максимизировать, а противник — минимизировать).

Над этой игрой стоит подумать, так как она обладает некоторыми особыми свойствами, незаметными на первый взгляд.

Станем сперва на точку зрения игрока A и переберем одну за другой все его стратегии. На A_1 противник ответит нам B_1 , и мы выиграем 0,5; на A_2 — B_2 , и мы выиграем 0,7; на A_3 — снова B_2 , и мы выиграем 0,5. Очевидно, некоторое преимущество над другими имеет стратегия A_2 — при ней мы выиграем больше, а именно 0,7.

Станем теперь на точку зрения противника; не забудем, что он хочет отдать поменьше! Пусть он выбирает B_1 — мы отвечаем ему A_2 , и он отдает 0,9; на B_2 мы отвечаем ему A_2 , и он отдает 0,7; на B_3 — A_3 , и он отдает 0,8. Естественно, он предпочтет B_2 , чтобы отдать только 0,7.

Мы видим, что в данном примере стратегии A_2 и B_2 с выигрышем 0,7 являются наивыгоднейшими сразу для обеих сторон; игроку A выгоднее всего выбрать стратегию A_2 , игроку B — стратегию B_2 , и максимальный выигрыш A совпадает с минимальным проигрышем B . Достигнуто как бы положение равновесия: если A выберет стратегию A_2 , то B не может найти лучшего выхода, чем B_2 , и наоборот: если B выберет стратегию B_2 , то A не может найти лучшего выхода, чем A_2 .

В дальнейшем мы увидим, что пара стратегий, обладающих таким свойством, являются оптимальными стратегиями сторон и образуют так называемое решение игры.

4. НИЖНЯЯ И ВЕРХНЯЯ ЦЕНА ИГРЫ. ПРИНЦИП МИНИМАКСА

Рассмотрим игру $m \times n$ с матрицей

$A_i \backslash B_j$	B_1	B_2	...	B_n
A_1	a_{11}	a_{12}	...	a_{1n}
A_2	a_{21}	a_{22}	...	a_{2n}
...
A_m	a_{m1}	a_{m2}	...	a_{mn}

Буквой i будем обозначать номер нашей стратегии, буквой j — номер стратегии противника.

Отбросим вопрос о смешанных стратегиях и будем рассматривать пока только чистые. Поставим задачу: определить наилучшую среди наших стратегий A_1, A_2, \dots, A_m . Проанализируем последовательно каждую из них, начиная с A_1 и кончая A_m . Выбирая A_i , мы должны рассчитывать, что противник ответит на нее той из стратегий B_j , для которой наш выигрыш минимален. Найдем минимальное из чисел a_{ij} в i -й строке и обозначим его α_i :

$$\alpha_i = \min_j a_{ij} \quad (4.1)$$

(знак \min обозначает минимальное значение данного параметра при всех возможных j).

Выпишем числа α_i (минимумы строк) рядом с матрицей справа в виде добавочного столбца:

$A_i \backslash B_j$	B_1	B_2	...	B_n	α_i
A_1	a_{11}	a_{12}	...	a_{1n}	α_1
A_2	a_{21}	a_{22}	...	a_{2n}	α_2
...
A_m	a_{m1}	a_{m2}	...	a_{mn}	α_m
β_j	β_1	β_2	...	β_n	

(Максимумы столбцов)

(Минимумы строк)

(4.2)

Выбирая какую-то стратегию A_i , мы должны рассчитывать на то, что в результате разумных действий противника мы выиграем только α_i . Естественно, действуя наиболее осторожно (т. е. избегая всякого риска), мы должны предпочесть другим ту стратегию, для которой число α_i максимально. Обозначим это максимальное значение α :

$$\alpha = \max_i \alpha_i$$

или, принимая во внимание формулу (4.1),

$$\alpha = \max_i \min_j a_{ij} \quad (4.3)$$

Величина α называется нижней ценой игры, иначе — максиминным выигрышем или максиминном. Та стратегия игрока A , которая соответствует максимуму α , называется максиминной стратегией.

Очевидно, если мы будем придерживаться максиминной стратегии, то нам при любом поведении противника гарантирован выигрыш, во всяком случае, не меньший α . Поэтому величина α и называется «нижней ценой игры». Это — тот гарантированный минимум, который мы можем себе обеспечить, придерживаясь своей наиболее осторожной («перестраховочной») стратегии.

Очевидно, аналогичное рассуждение можно провести и за противника B . Он заинтересован в том, чтобы обратить наш выигрыш в минимум; значит, он должен просмотреть все свои стратегии, выделяя для каждой из них максимальное значение выигрыша. Выпишем внизу матрицы (4,2) максимальные значения a_{ij} по столбцам:

$$\beta_j = \max_i a_{ij}$$

и найдем их минимальное:

$$\beta = \min \beta_j$$

или

$$\beta = \min_j \max_i a_{ij}. \quad (4.4)$$

Величина β называется верхней ценой игры, иначе минимаксным выигрышем или минимаксом. Соответствующая выигрышу β стратегия противника называется его минимаксной стратегией. Придерживаясь своей наиболее осторожной минимаксной стратегии, противник гарантирован, что в любом случае он проиграет не больше β .

Принцип осторожности, диктующий игрокам выбор соответствующих стратегий (максиминной и минимаксной), является в теории игр основным и называется принципом минимакса. Он вытекает из предположения о разумности каждого игрока, стремящегося достигнуть цели, противоположной цели противника. Наиболее «осторожные» максиминную и минимаксную стратегии часто обозначают общим термином «минимаксные стратегии».

Определим нижнюю и верхнюю цены игры, а также минимаксные стратегии, для трех примеров, рассмотренных в предыдущем параграфе.

Пример 1. (Игра «поиск»). Определяя минимумы строк α_i и максимумы столбцов β_j , получим

$A_i \backslash B_j$	B_1	B_2	α_i
A_1	-1	+1	-1
A_2	+1	-1	-1
β_j	1	1	

Так как величины α_i и β_j постоянны и равны соответственно -1 и +1, нижняя и верхняя цены игры также равны -1 и +1:

$$\alpha = -1, \beta = +1.$$

Любая стратегия игрока A является его максиминной, а игрока B — его минимаксной стратегией. Вывод тривиален: придерживаясь любой из своих стратегий, игрок A может гарантировать, что он проиграет не более 1 руб.; то же может гарантировать и игрок B при любой своей стратегии.

Пример 2. (Игра «три пальца»). Выписывая минимумы строк и максимумы столбцов, найдем нижнюю цену игры $\alpha = -3$ и верхнюю $\beta = 4$ (выделены в таблице жирным шрифтом). Наша максиминная стратегия A_1 (применяя ее систематически, мы гарантируем,

$A_i \backslash B_j$	B_1	B_2	B_3	β_j
A_1	2	-3	4	-3
A_2	-3	4	-5	-5
A_3	4	-5	6	-5
β_j	4	4	6	

что выиграем не меньше -3, т. е. проиграем не больше 3). Минимаксная стратегия противника — любая из стратегий B_1 и B_2 ; применяя их систематически, он может гарантировать, что не отдаст более 4. Если мы отступим от своей максиминной стратегии (например, выберем A_2), то противник может нас «наказать» за это, применив B_3 и сведя наш выигрыш к -5; равным образом и отступление противника от его минимаксной стратегии может быть «наказано» увеличением его проигрыша до 6.

Обратим внимание на то, что минимаксные стратегии в данном случае неустойчивы. Действительно, пусть, например, противник выбрал одну из своих минимаксных стратегий B_1 и придерживается ее. Узнав об этом, мы перейдем к стратегии A_3 и будем выигрывать 4. На это противник ответит стратегией B_2 и будет выигрывать 5; на это мы, в свою очередь, ответим стратегией A_2 и будем выигрывать 4, и т. д. Таким образом, положение, при котором оба игрока пользуются своими минимаксными стратегиями, является неустойчивым и может быть нарушено поступившими сведениями о стратегии, которую применяет противная сторона. Однако такая неустойчивость наблюдается не всегда; в этом мы убедимся на следующем примере.

Пример 3. (Игра «вооружение и самолет»). Определяем минимумы строк и максимумы столбцов:

$A_i \backslash B_j$	A_1	A_2	A_3	α_i
A_1	0,5	0,6	0,8	0,5
A_2	0,9	0,7	0,8	0,7
A_3	0,7	0,5	0,6	0,5
β_j	0,9	0,7	0,8	

В данном случае нижняя цена игры равна верхней:

$$\alpha = \beta = 0,7.$$

Минимаксные стратегии A_2 и B_2 являются устойчивыми: если один из игроков придерживается своей минимаксной (максиминной) стратегии, то другой игрок никак не может улучшить свое положение, отступая от своей.

Таким образом, мы видим, что существуют игры, для которых нижняя цена равна верхней:

$$\alpha = \beta.$$

Эти игры занимают особое место в теории игр и называются играми с седловой точкой. В матрице такой игры существует элемент, являющийся одновременно минимальным в своей строке и максимальным в своем столбце; такой элемент называется «седловой точкой» (по аналогии с седловой точкой на поверхности, где достигается минимум по одной координате и максимум по другой).

Общее значение нижней и верхней цены игры

$$\alpha = \beta = \nu$$

называется чистой ценой игры.

Седловой точке соответствует пара минимаксных стратегий; эти стратегии называются оптимальными, а их совокупность — решением игры. Решение игры обладает следующим свойством: если один из игроков придерживается своей оптимальной стратегии, то для другого не может быть выгодным отклоняться от своей оптимальной (такое отклонение либо оставит положение неизменным, либо ухудшит его).

Действительно, пусть в игре с седловой точкой игрок A придерживается своей оптимальной стратегии, а игрок B — своей. До тех пор, пока это так — выигрыш остается постоянным и равным цене игры ν . Теперь допустим, что B допустил отклонение от своей оптимальной стратегии. Так как элемент ν является минимальным в своей строке, такое отклонение не может быть выгодным для B ; равным образом и для A , если B придерживается своей оптимальной стратегии, не может быть выгодно отклонение от своей.

Мы видим, что для игры с седловой точкой минимаксные стратегии обладают устойчивостью. Пара оптимальных стратегий в игре с седловой точкой является как бы положением равновесия: отклонение от оптимальной стратегии вызывает такое изменение выигрыша, которое невыгодно для отклоняющегося игрока и вынуждает его вернуться к своей оптимальной стратегии.

Чистая цена игры ν в игре с седловой точкой является тем значением выигрыша, которое в игре против разумного противника игрок A не может увеличить, а игрок B — уменьшить.

Заметим, что в платежной матрице может быть не одна седловая точка, а несколько. Например, в матрице

$A_i \backslash B_j$	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	α_i
A_1	2	2	1	1	2	1
A_2	0	1	1	1	1	0
A_3	1	1	1	1	2	1
A_4	1	2	1	1	2	1
β_j	2	2	1	1	2	

имеется шесть седловых точек, с общим значением выигрыша $\alpha = \beta = \nu = 1$ и соответствующими парами оптимальных стратегий: A_1B_3 , A_1B_4 , A_3B_3 , A_3B_4 , A_4B_3 , A_4B_4 . Нетрудно доказать (мы этого делать не будем), что если в матрице игры несколько седловых точек, то все они дают одно и то же значение выигрыша.

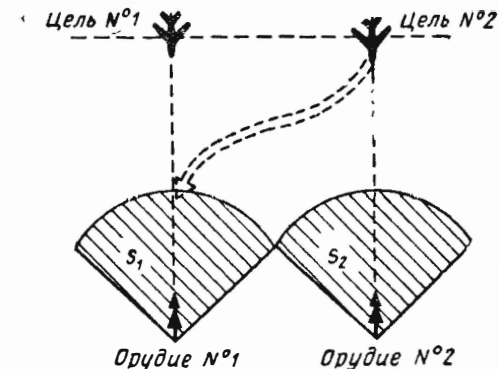


Рис. 9.1

Пример. Сторона A — средства ПВО — обороняет от воздушного налета участок территории, располагая двумя орудиями № 1 и № 2, зоны действия которых S_1 , S_2 не перекрываются (рис. 9.1). Каждое орудие может обстрелять только самолет, проходящий через его зону действия, но для этого оно должно заранее (до входа цели в зону) следить за ней и выработать прицельные данные. Если цель обстреляна, она поражается с вероятностью $p = 1$. Сторона B располагает двумя самолетами, каждый из которых может быть направлен в любую зону B в момент, когда сторона A осуществляет целераспределение (назначает, какому орудию по какой цели стрелять), движение самолета-цели № 1 направлено в зону действия S_1 орудия № 1, а цели № 2 — в зону действия S_2 орудия № 2. Однако после принятия решения по целераспределению каждая цель может

сманеврировать, применив «обманный маневр» (см. пунктирные стрелки на рис 9 1). Задача стороны A — обратить в максимум, а стороны B — обратить в минимум число пораженных целей. Найти решение игры (оптимальные стратегии сторон)

Решение. У стороны A (средства ПВО) четыре возможные стратегии

A_1 — каждое орудие следит за направляющейся в его зону целью,

A_2 — орудия следят за целями «крест-накрест» (каждое — за целью направляющейся к соседу),

A_3 — оба орудия следят за целью № 1,

A_4 — оба орудия следят за целью № 2

У стороны B (самолеты-цели) тоже четыре стратегии:

B_1 — обе цели не меняют направления,

B_2 — обе цели применяют обманный маневр.

B_3 — первая цель применяет обманный маневр, а вторая нет,

B_4 — вторая цель применяет обманный маневр, а первая нет.

Получается игра 4×4 , матрица которой дана в таблице:

$A_i \backslash B_j$	B_1	B_2	B_3	B_4	α_i
A_1	↕↕	✕	↘↘	↘↘	0
A_2	↗↗	0	1	1	0
A_3	✕	0	1	1	0
A_4	↗↘	1	1	1	1
A_4	↗↖	1	1	1	1
β_j	2	2	1	1	

Находя минимумы строк и максимумы столбцов, убеждаемся, что нижняя цена игры равна верхней цене игры: $\alpha = \beta = \nu = 1$; значит, игра имеет седловую точку и решение в чистых стратегиях, приводящее к чистой цене игры $\nu = 1$. В данном случае седловых точек не одна, а целых четыре. Каждой из них соответствует пара оптимальных стратегий, дающая решение игры. Цена игры $\nu = 1$ означает, что при оптимальном поведении сторон самолеты будут неизбежно терять один самолет, и никакие ухищрения не помогут им терять меньше, а средствам ПВО — сбить больше одного самолета. Достигается это состояние равновесия, когда обе стороны пользуются своими оптимальными стратегиями: орудия следят оба за одним и тем же самолетом (любым), а самолеты направляются после целераспределения в одну и ту же зону (любую)

Класс игр, имеющих седловую точку, весьма интересен как с теоретической, так и с практической точки зрения. К нему принадлежат, в частности, все так называемые «игры с полной информацией».

Игра с полной информацией называется такая игра, в которой каждый игрок при каждом личном ходе знает результаты всех предыдущих ходов — как личных, так и случайных. Примерами игр с полной информацией могут служить: шашки, шахматы, известная игра в «крестики и нолики» и др.

В теории игр доказывается, что каждая игра с полной информацией имеет седловую точку и следовательно, решение в чистых стратегиях. Другими словами, в каждой игре с полной информацией существует пара оптимальных стратегий той и другой стороны, дающая устойчивый выигрыш, равный чистой цене игры. Если игра с полной информацией состоит только из личных ходов, то при применении каждой стороной своей оптимальной стратегии игра должна кончаться всегда вполне определенным исходом, равным цене игры ν .

В качестве примера приведем следующую игру с полной информацией. Два игрока поочередно кладут одинаковые монеты на круглый стол, выбирая произвольно положение монеты (взаимное перекрытие монет не допускается). Выигрывает тот, кто положит последнюю монету (когда места для других уже не останется). Нетрудно убедиться, что исход этой игры предсказан, и существует определенная стратегия, обеспечивающая достоверный выигрыш тому из игроков, кто кладет монету первым. А именно, он должен первый раз положить монету в центр стола, а далее на каждый ход противника отвечать симметричным ходом. Очевидно, как бы ни вел себя противник, ему не избежать проигрыша. Поэтому игра имеет смысл только для лиц, не знающих ее решения. Точно так же дело обстоит с шахматами и другими играми с полной информацией; любая из этих игр обладает седловой точкой и, значит, решением, указывающим каждому игроку его оптимальную стратегию, так что игра имеет смысл только до тех пор, пока неизвестно решение. Решение шахматной игры не найдено (и в обозримом будущем вряд ли будет найдено) только потому, что число стратегий (комбинаций ходов) в шахматах слишком велико, чтобы можно было построить платежную матрицу и найти в ней седловую точку.

5. РЕШЕНИЕ ИГРЫ В СМЕШАННЫХ СТРАТЕГИЯХ

Среди конечных игр, имеющих практическое значение, не так уж часто встречаются игры с седловой точкой; более типичным является случай, когда нижняя и верхняя цены игры различны. Анализируя матрицы таких игр, мы пришли к выводу, что если каждому игроку предоставить выбор одной-единственной чистой стратегии, то в расчете на разумного противника этот выбор должен определяться принципом минимакса. При этом игрок A гарантирует себе выигрыш, равный нижней цене игры α . Возникает вопрос: нельзя ли гарантировать выигрыш, больший α , если применять не одну-единственную, «чистую» стратегию, а чередовать случайным образом несколько стратегий? Такие стратегии, состоящие в случайном чередовании чистых стратегий, называются в теории игр смешанными. При использовании смешанной стратегией перед каждой партией игры пускается в ход какой-то механизм случайного выбора (бросание монеты, игральной кости или вычисление машиной случайного числа от 0 до 1), обеспечивающий появление каждой стратегии с некоторой вероятностью, и затем принимается та стратегия, на которую пал жребий

Смешанные стратегии представляют собой математическую модель изменчивой, гибкой тактики, при которой противник не знает, и не может узнать заранее, с какой обстановкой ему придется встретиться. Таким случайным чередованием приемов (разумеется, без четко определенных вероятностей) часто пользуются в карточных играх.

Введем специальное обозначение для смешанных стратегий. Пусть имеется игра \mathbf{I} , в которой у нас (A) m стратегий: A_1, A_2, \dots, A_m , а у противника (B) — n стратегий: B_1, B_2, \dots, B_n . Будем обозначать

$$S_A = (p_1, p_2, \dots, p_m)$$

нашу смешанную стратегию, в которой стратегии A_1, A_2, \dots, A_m применяются с вероятностями p_1, p_2, \dots, p_m , причем $p_1 + p_2 + \dots + p_m = 1$.

Аналогичное обозначение для смешанной стратегии противника будет

$$S_B = (q_1, q_2, \dots, q_n),$$

где $q_1 + q_2 + \dots + q_n = 1$.

Очевидно, каждая чистая стратегия является частным случаем смешанной: все стратегии, кроме данной, имеют вероятности, равные нулю, а данная — единице.

Оказывается, если допустить не только чистые, но и смешанные стратегии, то можно для каждой конечной игры найти решение, т. е. пару устойчивых оптимальных стратегий игроков.

Решением игры называется пара оптимальных стратегий S_A^*, S_B^* , в общем случае смешанных, обладающих следующим свойством: *если один из игроков придерживается своей оптимальной стратегии, то другому не может быть выгодно отступить от своей.*

Выигрыш, соответствующий решению, называется ценой игры; мы будем (как раньше — чистую цену) обозначать ее v .

Существует так называемая основная теорема теории игр, состоящая в следующем.

Каждая конечная игра имеет по крайней мере одно решение, возможно, в области смешанных стратегий.

Мы не будем останавливаться на строгом доказательстве этой теоремы, тем более, что в дальнейшем существование решения игры будет достаточно очевидно из других соображений.

Из основной теоремы следует, что *каждая конечная игра имеет цену*. Цена игры v всегда лежит между нижней ценой игры α и верхней ценой игры β :

$$\alpha \leq v \leq \beta.$$

Действительно, α есть максимальный гарантированный выигрыш, который мы можем себе обеспечить, применяя только свои чистые стратегии. Так как смешанные стратегии содержат в качестве частного случая все чистые, то, допуская кроме чистых еще и смешанные стратегии, мы, во всяком случае, не ухудшим своих возможностей; значит,

$$v \geq \alpha.$$

Аналогично, рассматривая возможности противника, докажем, что

$$v \leq \beta,$$

откуда $\alpha \leq v \leq \beta$.

Предположим, что в игре $m \times n$ нами найдено решение, состоящее из двух оптимальных стратегий:

$$S_A^* = (p_1, p_2, \dots, p_m); \quad S_B^* = (q_1, q_2, \dots, q_n).$$

В общем случае, некоторые из чисел $p_1, p_2, \dots, p_m; q_1, q_2, \dots, q_n$ могут быть равными нулю, т. е. не все стратегии, доступные игроку, входят в его оптимальную смешанную стратегию. Будем называть активными стратегиями игрока те, которые входят в его оптимальную смешанную стратегию с отличными от нуля вероятностями. Для решения игр существенное значение имеет следующая теорема об активных стратегиях.

Если один из игроков придерживается своей оптимальной смешанной стратегии, то выигрыш остается неизменным и равным цене игры v , независимо от того, что делает другой игрок, если только тот не выходит за пределы своих активных стратегий (т. е. пользуется любой из них в чистом виде или смешивает их в любых пропорциях).

Докажем эту теорему. Пусть имеется решение игры $m \times n$ в смешанных стратегиях, в котором некоторые стратегии являются активными, а другие нет. Перенумеруем стратегии так, чтобы активными были первые k стратегий игрока A и первые l стратегий игрока B . Решение будет иметь вид:

$$S_A^* = (p_1, p_2, \dots, p_k, 0, \dots, 0), \quad (p_1 + p_2 + \dots + p_k = 1);$$

$$S_B^* = (q_1, q_2, \dots, q_l, 0, \dots, 0), \quad (q_1 + q_2 + \dots + q_l = 1),$$

и его применение приводит к выигрышу, равному цене игры v .

Утверждается, что если мы (A) будем придерживаться своей стратегии S_A^* , то противник (B) может применять свои стратегии B_1, B_2, \dots, B_l (но не B_{l+1}, \dots, B_n) в любых пропорциях; выигрыш при этом останется постоянным и равным v .

Обозначим v_1, v_2, \dots, v_l выигрыш, образующийся, если мы пользуемся оптимальной стратегией S_A^* , а противник — чистыми стратегиями B_1, B_2, \dots, B_l . Из определения решения игры следует, что одностороннее отклонение противника от его оптимальной стратегии не может быть ему выгодно; поэтому

$$v_1 \geq v; \quad v_2 \geq v; \quad \dots; \quad v_l \geq v.$$

Посмотрим, может ли хотя бы одна из величин v_1, v_2, \dots, v_l оказаться действительно больше v . Оказывается, нет. Действительно, выразим выигрыш v при оптимальных стратегиях S_A^*, S_B^* через выигрыши v_1, v_2, \dots, v_l . Так как в смешанной стратегии S_B^*

чистые стратегии B_1, B_2, \dots, B_l применяются с вероятностями q_1, q_2, \dots, q_l , то средний выигрыш будет:

$$v = v_1 q_1 + v_2 q_2 + \dots + v_l q_l = \sum_{j=1}^l v_j q_j, \quad (5.1)$$

причем

$$q_1 + q_2 + \dots + q_l = 1.$$

Очевидно, что если из величин v_1, v_2, \dots, v_l хотя бы одна была больше v , то и их среднее взвешенное значение (5.1) было бы больше v , что противоречит условию. Таким образом, доказана теорема, которую мы будем широко применять при решении игр.

6. УПРОЩЕНИЕ ИГР

Если игра $m \times n$ не имеет седловой точки, то отыскание ее решения, особенно при больших m и n , представляет собой довольно трудную задачу. Иногда эту задачу удается упростить, если предварительно «редуцировать» игру, т. е. сократить число стратегий путем вычеркивания некоторых излишних.

Излишние стратегии бывают двух родов: дублирующие и заведомо невыгодные.

Рассмотрим, например игру **И** с матрицей:

$A_i \backslash B_j$	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	1	2	4	3
A_2	0	2	3	2
A_3	1	2	4	3
A_4	4	3	1	0

Из матрицы видно, что стратегия A_3 в точности повторяет («дублирует») стратегию A_1 ; поэтому любую из этих двух стратегий можно вычеркнуть. Далее, сравнивая почленно строки A_1 и A_2 , видим, что все элементы строки A_2 меньше (или равны) соответствующих элементов строки A_1 . Значит, стратегия A_2 для нас, желающих выиграть, заведомо невыгодна. Вычеркивая A_3 и A_2 , приведем матрицу к более простому виду:

$A_i \backslash B_j$	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	1	2	4	3
A_4	4	3	1	0

Далее замечаем, что для противника стратегия B_3 заведомо невыгодна; вычеркиваем и ее, и матрица приведена к виду:

$A_i \backslash B_j$	B_1	B_2	B_4
A_1	1	2	3
A_4	4	3	0

Таким образом, игра 4×4 сведена к игре 2×3 .

Иногда удается упростить игру искусственным введением вместо чистых стратегий — смешанных. Пусть, например, имеется игра 3×4 с матрицей:

$A_i \backslash B_j$	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	0	5	5	2
A_2	5	0	2	5
A_3	5	5	1	1

Рассматривая матрицу, замечаем, что, в силу симметрии элементов столбцов B_1 и B_2 ; B_3 и B_4 , а также строк A_1 и A_2 , эти стратегии, если входят в решение, то только с одинаковыми вероятностями: $p_1 = p_2, q_1 = q_2, q_3 = q_4$. Отсюда возникает идея: заранее объединить стратегии B_1 и B_2 в одну смешанную стратегию $B_{1,2}$, состоящую наполовину из B_1 , наполовину из B_2 ; так же поступить со стратегиями B_3 и B_4 , т. е. объединить их в одну смешанную стратегию $B_{3,4}$, в которую B_3 и B_4 входят с одинаковыми вероятностями $1/2$. Приведем матрицу к виду:

$A_i \backslash B_j$	$B_{1,2}$	$B_{3,4}$
A_1	2,5	3,5
A_2	2,5	3,5
A_3	5	1

Теперь видно, что если противник пользуется стратегиями $B_{1,2}, B_{3,4}$, стратегии A_1 и A_2 дублируют друг друга; вычеркивая какую-либо из них (или объединяя A_1 и A_2 в одну $A_{1,2}$), приведем матрицу к виду 2×2 :

	B_j	B_{12}	B_{14}
A_i			
	A_{12}	2,5	3,5
	A_3	5	1

Таким образом, игра 3×4 сведена к игре 2×2 .

Приступая к решению любой игры $m \times n$, необходимо прежде всего выполнить следующие процедуры:

- посмотреть, нет ли в матрице седловой точки: если есть, решение уже найдено;
- если седловой точки нет, сравнить между собой почленно столбцы и строки с целью вычеркивания дублирующих и заведомо невыгодных стратегий;
- посмотреть, нельзя ли уменьшить число стратегий путем замены некоторых групп чистых — смешанными.

7. ИГРА 2×2

Наиболее простым случаем конечной игры является игра 2×2 , где у каждого игрока две стратегии. Рассмотрим игру 2×2 с матрицей:

	B_j	B_1	B_2
A_i			
	A_1	a_{11}	a_{12}
	A_2	a_{21}	a_{22}

Здесь могут встретиться два случая:

- 1) игра имеет седловую точку;
- 2) игра не имеет седловой точки.

В первом случае решение очевидно: это — пара стратегий, пересекающихся в седловой точке. Нетрудно доказать, что если игра 2×2 имеет седловую точку, то в этой игре всегда какая-нибудь из стратегий может быть отброшена как заведомо невыгодная или дублирующая. Не будем этого доказывать. Предоставим читателю доказать это положение или убедиться в его справедливости на ряде произвольно выбранных примеров.

Рассмотрим второй случай: предположим, что в матрице 2×2 седловой точки нет. При этом нижняя цена игры не равна верхней: $\alpha \neq \beta$. Решение должно быть в смешанных стратегиях. Найдем это решение, т. е. пару оптимальных смешанных стратегий:

$$S_A^* = (p_1, p_2); \quad S_B^* = (q_1, q_2).$$

Сначала определим оптимальную смешанную стратегию S_A^* . Согласно теореме об активных стратегиях (см. § 5), если мы будем при-

держиваться этой стратегии, то, независимо от образа действий противника (если он только не выходит за пределы своих активных стратегий), выигрыш будет оставаться равным цене игры v . В игре 2×2 обе стратегии противника являются активными (иначе игра имела бы седловую точку). Значит, если мы придерживаемся своей оптимальной стратегии $S_A^* = (p_1, p_2)$, то противник может, не меняя выигрыша, применить любую из своих чистых стратегий. Отсюда имеем два уравнения:

$$\left. \begin{aligned} a_{11} p_1 + a_{21} p_2 &= v, \\ a_{12} p_1 + a_{22} p_2 &= v, \end{aligned} \right\} \quad (7.1)$$

из которых, принимая во внимание условие $p_1 + p_2 = 1$, получим:

$$\left. \begin{aligned} p_1 &= \frac{a_{22} - a_{21}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}}, \\ p_2 &= 1 - p_1 = \frac{a_{11} - a_{12}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}}. \end{aligned} \right\} \quad (7.2)$$

Цену игры v найдем, подставляя значения p_1, p_2 в любое из уравнений (7.1):

$$v = \frac{a_{22} a_{11} - a_{12} a_{21}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}}. \quad (7.3)$$

Аналогично находится оптимальная стратегия противника:

$$S_B^* = (q_1, q_2)$$

из уравнений

$$\left. \begin{aligned} a_{11} q_1 + a_{12} q_2 &= v, \\ a_{21} q_1 + a_{22} q_2 &= v, \end{aligned} \right\} \quad (7.4)$$

откуда

$$\left. \begin{aligned} q_1 &= \frac{a_{22} - a_{12}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}}, \\ q_2 &= 1 - q_1. \end{aligned} \right\} \quad (7.5)$$

Пример 1. Найти решение игры «поиск» (см. пример 1 § 2).

Решение. Игра 2×2 с матрицей

	B_j	B_1	B_2
A_i			
	A_1	-1	1
	A_2	1	-1

не имеет седловой точки: $\alpha = -1, \beta = +1$. Ищем решение в смешанных стратегиях. По формулам (7.2), (7.3), (7.5) получаем:

$$p_1 = 1/2; \quad p_2 = 1/2; \quad v = 0; \quad q_1 = 1/2; \quad q_2 = 1/2; \\ S_A^* = (1/2, 1/2); \quad S_B^* = (1/2, 1/2).$$

Следовательно, оптимальная стратегия каждого игрока состоит в том, чтобы случайным образом чередовать свои чистые стратегии, пользуясь каждой из них с вероятностью 1/2; при этом средний выигрыш будет равен нулю (этот вывод уже был получен нами из интуитивных соображений). В следующем примере мы рассмотрим игру, решение которой не является столь очевидным.

Пример 2. Игра «Два бомбардировщика и истребитель».

Сторона *A* посылает в район расположения противника *B* два бомбардировщика I и II; I летит спереди, II — сзади. Один из бомбардировщиков (заранее неизвестно, какой) должен нести бомбу; другой выполняет только функцию сопровождения. В районе противника бомбардировщики подвергаются нападению истребителя стороны *B* (рис. 9.2). Оба бомбардировщика вооружены пушками. Если истребитель атакует задний бомбардировщик, то по нему ведут огонь пушки только этого бомбардировщика, поражающие истребитель с вероятностью 0,3. Если же истребитель атакует передний бомбардировщик, то по нему ведут огонь пушки как переднего, так и заднего бомбардировщика; совместно они поражают его с вероятностью

$$1 - (1 - 0,3)^2 = 0,51.$$

Если истребитель не сбит ответным огнем бомбардировщиков, то он поражает выбранную им цель с вероятностью 0,8.

Задача бомбардировщиков — донести бомбу до цели; задача истребителя — воспрепятствовать этому.

Требуется найти оптимальные стратегии сторон:

- Для стороны *A* — какой бомбардировщик сделать носителем?
- Для стороны *B* — какой бомбардировщик атаковать?

Решение. Составим матрицу игры, для чего найдем средний выигрыш при каждой комбинации стратегий. Выигрыш — вероятность непоражения носителя.

1. A_1B_1 — носитель I, атакуется I.

Носитель не будет поражен, если бомбардировщики собьют истребитель, или же если они его не собьют, но и он не поразит свою цель. Вероятность того, что оба бомбардировщика вместе поразят истребитель, равна 0,51, поэтому

$$a_{11} = 0,51 + (1 - 0,51)(1 - 0,8) = 0,608.$$

2. A_2B_1 — носитель II, атакуется I;

$$a_{21} = 1.$$

3. A_1B_2 — носитель I, атакуется II;

$$a_{12} = 1.$$

4. A_2B_2 — носитель II, атакуется II;

$$a_{22} = 0,3 + 0,7 \cdot 0,2 = 0,44.$$

Матрица игры с добавочным столбцом и строкой:

$A_i \backslash B_j$	B_1	B_2	α_i
A_1	0,608	1	0,608
A_2	1	0,44	0,44
β_j	1	1	

Нижняя — цена игры $\alpha = 0,608$, верхняя $\beta = 1$. Игра не имеет седловой точки; решение достигается в смешанных стратегиях. По формулам (7.2), (7.3), (7.5) находим (с точностью до третьего знака после запятой):

$$p_1 = \frac{0,44 - 1}{0,608 + 0,44 - 1} = 0,588;$$

$$p_2 = 1 - p_1 = 0,412;$$

$$v = \frac{0,44 \cdot 0,608 - 1 \cdot 1}{0,608 + 0,44 - 1} =$$

$$= 0,768; \quad q_1 = 0,588; \quad q_2 = 0,412.$$

(В данном случае $q_1 = p_2$, $q_2 = p_1$ в силу того, что $a_{12} = a_{21}$.)

Итак, оптимальные стратегии сторон и цена игры найдены:

$$S_A^* = (0,588, 0,412).$$

$$S_B^* = (0,588, 0,412), \quad v = 0,768,$$

т. е. наша оптимальная стратегия состоит в том, чтобы в 58,8% всех случаев (с вероятностью 0,588) делать носителем I, а в 41,2% случаев — II. Аналогично противник должен с вероятностью 0,588 атаковать первый бомбардировщик, а с вероятностью 0,412 — второй. При этом сторона *A* будет выполнять свою задачу — доносить бомбы до цели — с вероятностью 0,768, что больше нижней цены игры 0,608 и меньше верхней цены игры 1.

Решению игры 2×2 можно дать удобную геометрическую интерпретацию. Пусть имеется игра 2×2 с матрицей:

$A_i \backslash B_j$	B_1	B_2
A_1	a_{11}	a_{12}
A_2	a_{21}	a_{22}

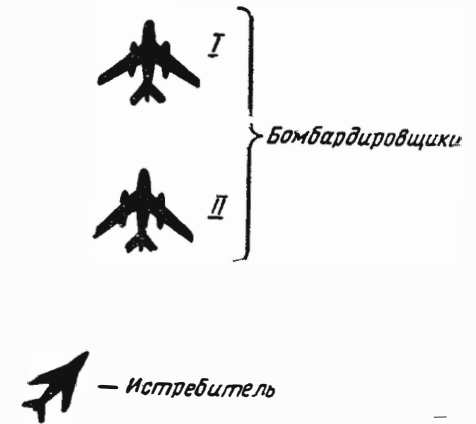


Рис. 9.2

Возьмем участок оси абсцисс длиной единица (рис. 9.3). Левый конец участка (точка с абсциссой $x = 0$) будет изображать стратегию A_1 , правый конец участка ($x = 1$) — стратегию A_2 ; все промежуточные точки участка будут изображать смешанные стратегии игрока A , причем вероятность p_1 стратегии A_1 будет равна расстоянию от точки S_A до правого конца участка, а вероятность p_2 стратегии A_2 — расстоянию до левого конца. Проведем через точки A_1 и A_2 два перпендикуляра к оси абсцисс: ось $I-I$ и ось $II-II$. На оси $I-I$ будем откладывать выигрыш при стратегии A_1 , а на оси $II-II$ — выигрыши при стратегии A_2 .

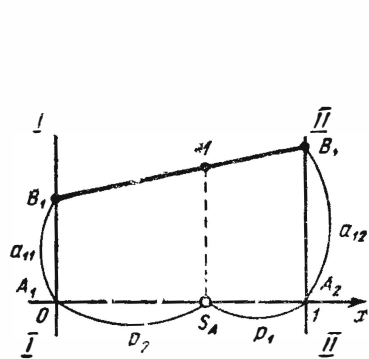


Рис. 9.3

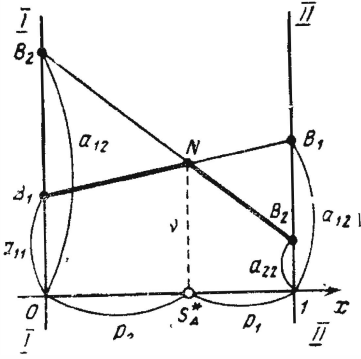


Рис. 9.4

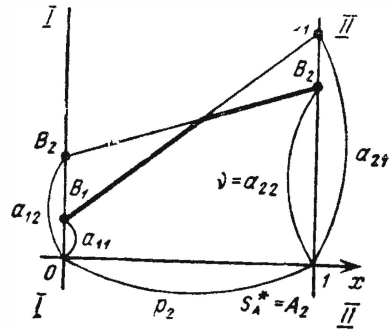


Рис. 9.5

Пусть противник применяет стратегию B_1 ; она дает на осях $I-I$ и $II-II$ соответственно точки с ординатами a_{11} и a_{21} . Проведем через эти точки прямую B_1B_1 . Очевидно, при любой смешанной стратегии $S_A = (p_1, p_2)$ наш выигрыш выразится точкой M на прямой B_1B_1 , соответствующей точке S_A на оси абсцисс, делящей отрезок в отношении $p_2 : p_1$. Прямую B_1B_1 условно будем называть «стратегией B_1 ».

Очевидно, точно таким же способом может быть построена и стратегия B_2 (рис. 9.4).

Нам нужно найти оптимальную стратегию S_A^* , т. е. такую, при которой наш минимальный выигрыш (при наихудшем для нас поведе-

нии B) обращался бы в максимум. Для этого построим нижнюю границу выигрыша при стратегиях B_1, B_2 , т. е. ломаную B_1NB_2 , отмеченную на рис. 9.4 жирной линией. На этой границе будет лежать минимальный выигрыш игрока A при любой его смешанной стратегии; точка N , в которой этот выигрыш достигает максимума, и определяет решение и цену игры. Нетрудно убедиться, что ордината точки N есть не что иное, как цена игры v , ее абсцисса равна p_2 , а расстояние до правого конца отрезка равно p_1 , т. е. расстояния от точки S_A^* до концов отрезка равны вероятностям p_2 и p_1 стратегий A_2 и A_1 в оптимальной смешанной стратегии игрока A .

В нашем случае решение игры определялось точкой пересечения стратегий B_1, B_2 ; это не всегда будет так. На рис. 9.5 показан случай, когда оптимальной стратегией игрока A является чистая стратегия A_2 ,

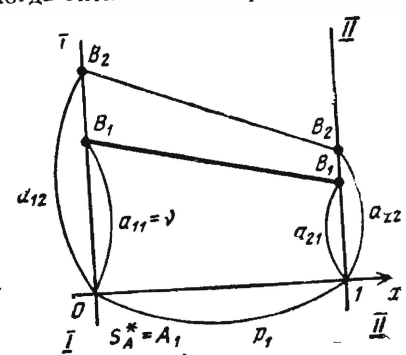


Рис. 9.6

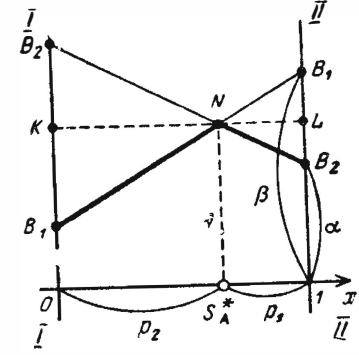


Рис. 9.7

хотя это и не соответствует точке пересечения стратегий. Здесь стратегия A_2 игрока A явно (при любой стратегии противника) выгоднее стратегии A_1 . На рис. 9.6 показан случай, когда заведомо невыгодная стратегия имеется у противника.

Геометрическая интерпретация дает возможность наглядно изобразить также нижнюю цену игры α и верхнюю β (рис. 9.7). На том же графике можно дать и геометрическую интерпретацию оптимальных стратегий противника B . Действительно, нетрудно убедиться, что доля q_1 стратегии B_1 в оптимальной смешанной стратегии

$$S_B^* = (q_1, q_2)$$

равна отношению длины отрезка KB_2 к сумме длин отрезков KB_2 и KB_1 на оси $I-I$:

$$q_1 = \frac{KB_2}{KB_2 + KB_1},$$

или, что то же,

$$q_1 = \frac{LB_2}{LB_2 + LB_1}$$

на оси $II-II$.

Оптимальную стратегию $S_B^* = (q_1, q_2)$ можно найти и другим, непосредственным способом, если поменять местами игроков A и B , а вместо максимума нижней границы выигрыша рассмотреть минимум верхней границы (рис. 9.8).

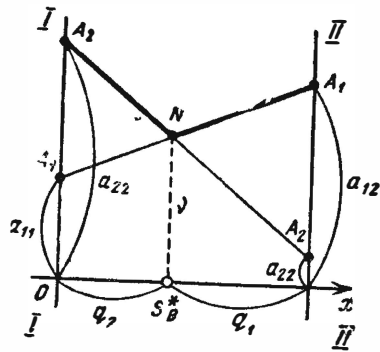


Рис. 9.8

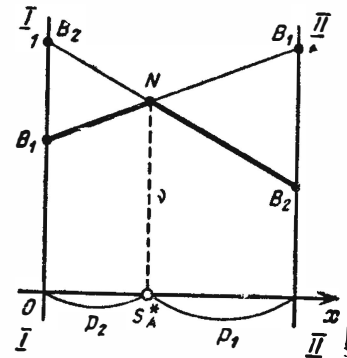


Рис. 9.9

На рис. 9.9 дана геометрическая интерпретация решения игры «два бомбардировщика и истребитель» (пример 2).

8. ИГРЫ $2 \times n$ И $m \times 2$

Мы убедились, что любая игра 2×2 может быть решена элементарными приемами. Совершенно аналогично может быть решена любая игра $2 \times n$, где у нас (A) имеются всего две стратегии, а у противника (B) — произвольное число (n).

Итак, пусть имеется матрица игры $2 \times n$: она состоит из двух строк и n столбцов. Аналогично случаю 2×2 дадим задаче геометрическую интерпретацию; n стратегий противника изобразятся n прямыми (рис. 9.10). Построим нижнюю границу выигрыша (ломаную $B_1MN B_2$) и найдем на ней точку N с максимальной ординатой; эта ордината и будет ценой игры v , а абсцисса точки N будет равна вероятности p_2 стратегии A_2 в оптимальной смешанной стратегии игрока A :

$$S_A^* = (p_1, p_2).$$

Зная, какие стратегии пересекаются в точке N , можно указать активные стратегии противника. В нашем случае (рис. 9.10) оптимальная смешанная стратегия противника

$$S_B^* = (0, q_2, 0, q_4)$$

состоит из смеси двух активных стратегий B_2, B_4 , пересекающихся в точке N . Стратегия B_3 является заведомо невыгодной, а стратегия B_1 — невыгодной при оптимальной стратегии S_A^* . Вероятности q_2 и q_4 относятся как длины отрезков KB_4 и KB_2 , на рис. 9.10. Если A бу-

дет пользоваться своей оптимальной стратегией S_A^* , то выигрыш не изменится, какой бы из своих активных стратегий ни пользовался B , однако он изменится, если B перейдет к стратегиям B_1 или B_3 .

Можно доказать, что у любой конечной игры $m \times n$ существует решение, в котором число активных стратегий каждой стороны не превосходит наименьшего из чисел m и n .

Из этого, в частности, следует, что у игры $2 \times n$ всегда имеется решение, в котором с каждой стороны участвует не более двух активных стратегий. Стоит только найти эти стратегии — и игра $2 \times n$ превращается в игру 2×2 , которая решается элементарно.

Отсюда вытекает такой практический прием решения игры $2 \times n$: строится геометрическая интерпретация (рис. 9.10), ищется пара стратегий, пересекающихся в точке N (если в ней пересекается более двух стратегий, берется любая пара) — эти стратегии представляют собой активные стратегии игрока B , и игра $2 \times n$ сведена к игре 2×2 .

Очевидно, так же может быть решена и игра $m \times 2$, с той разницей, что строится не нижняя, а верхняя граница выигрыша, и на ней ищется не максимум, а минимум (рис. 9.11).

Пример 1. Игра «самолеты и зенитные орудия».

Сторона A (самолеты) нападает на объект, сторона B (зенитные орудия) обороняет его. У стороны A два самолета, у стороны B — три зенитных орудия. Каждый самолет является носителем мощного поражающего средства: для поражения объекта достаточно, чтобы к нему прорвался хотя бы один самолет. Самолеты могут выбирать для подхода к объекту любое из трех направлений: I, II или III, не меняя его в дальнейшем (рис. 9.12). Противник (B) может разместить любое из своих орудий на любом направлении; каждое из орудий простреливает только область пространства, относящуюся к данному направлению, и не простреливает соседних направлений. Каждое орудие может обстрелять только один самолет; обстрелянный самолет поражается с полной достоверностью. Сторона A не знает, где размещены орудия; сторона B не знает, откуда прилетят самолеты. Задача стороны A — поразить объект, стороны B — не допустить поражения. Найти решение игры.

Решение. Если в качестве стратегий рассматривать все возможные способы выбора направлений самолетами и расстановки орудий, коли-

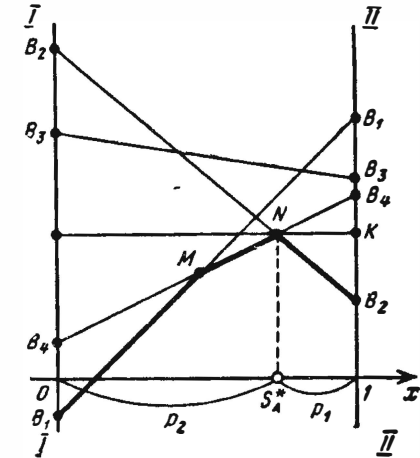


Рис. 9.10

чество стратегий будет очень велико — 9 с одной стороны и 27 с другой. Однако можно ограничиться гораздо меньшим числом стратегий, если заранее их «смешать» и рассмотреть для A только две стратегии:

A_1 — послать по одному самолету на два разных (любых) направления;

A_2 — послать оба самолета по одному (любому) направлению, а для противника — три стратегии:

B_1 (1+1+1) — поставить по одному орудью на каждое направление;

B_2 (2+1+0) — поставить два орудия на одно (любое) направление, одно — на другое, а третье оставить незащищенным;

B_3 (3+0+0) — поставить все три орудия на одно (любое) направление, а два других оставить незащищенными.

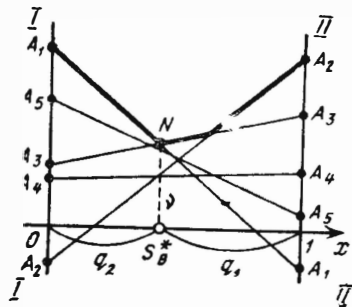


Рис. 9.11

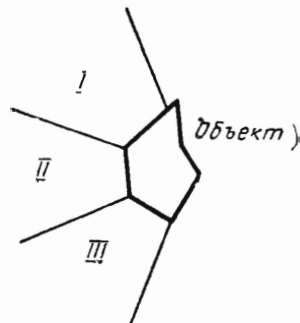


Рис. 9.12

При этом предполагается, что выбор каждого из направлений производится случайным образом и с одинаковой вероятностью.

Составим матрицу игры. Выигрыш A в данном случае — вероятность поражения объекта, иначе — вероятность того, что к объекту прорвется хотя бы один самолет.

Рассмотрим выигрыши для всех комбинаций стратегий.

1. A_1B_1 — самолеты летят по разным направлениям, орудия расставлены по одному (1+1+1). Выигрыш a_{11} — вероятность того, что хотя бы один самолет прорвется к объекту — в данном случае равен нулю: $a_{11} = 0$.

2. A_2B_1 — самолеты летят по одному и тому же направлению, орудия расставлены по одному (1+1+1). Очевидно, при этом один из самолетов, не будучи обстрелянным, наверняка прорвется к объекту: $a_{21} = 1$.

3. A_1B_2 — самолеты летят по одному; противник ставит два орудия на одно направление, одно — на другое и оставляет незащищенным третье (2+1+0). Для того чтобы прорваться к объекту, хотя бы один из самолетов должен выбрать незащищенное направление. Вероятность этого события найдем через вероятность противоположного события: «оба самолета выберут защищенное направление». Вероят-

ность этого события равна $2/3 \cdot 1/2 = 1/3$, откуда вероятность интересующего нас события: $a_{12} = 1 - 1/3 = 2/3$.

4. A_2B_2 — самолеты летят вместе; орудия поставлены по схеме (1+2+0). Снова найдем вероятность того, что оба самолета будут поражены. Для этого они должны выбрать направление, защищенное двумя орудиями; вероятность этого $1/3$, вероятность противоположного события: $a_{22} = 1 - 1/3 = 2/3$.

5. A_1B_3 — самолеты летят порознь, орудия поставлены все три на одно направление (3+0+0). Очевидно, в этом случае оба самолета сбиты не могут быть, и $a_{13} = 1$.

6. A_2B_3 — самолеты летят вместе, орудия поставлены все три на одно направление (3+0+0). Для того чтобы оба самолета были поражены, они должны выбрать то направление, на котором стоят все три орудия. Вероятность этого $1/3$. Вероятность того, что хотя бы один самолет прорвется к объекту, будет $a_{23} = 2/3$.

Составляем матрицу игры:

$A_i \backslash B_j$	B_1	B_2	B_3	α_i
A_1	0	2/3	1	0
A_2	1	2/3	2/3	2/3
β_j	1	2/3	1	

Из матрицы видно, что нижняя цена игры равна верхней: $\alpha = \beta = v = 2/3$; значит, игра имеет седловую точку и решается в чистых стратегиях: сторона A (самолеты) должна всегда пользоваться стратегией A_2 (лететь вместе), а сторона B должна всегда расставлять орудия по схеме (1+2+0), т. е. ставить два орудия на одно какое-то направление, одно орудие — на другое, и одно направление оставлять вообще незащищенным.

На рис. 9.13 дана геометрическая интерпретация игры.

Пример 2 (вариант той же игры). Условия те же, но для стороны A возможны не три, а четыре направления подхода к объекту, а сторона B располагает четырьмя орудиями.

Решение. У нас по-прежнему две возможные стратегии:

A_1 — посылать самолеты порознь,

A_2 — посылать самолеты вместе.

У противника пять возможных стратегий:

B_1 (1+1+1+1) — ставить по одному орудью на каждое направление;

B_2 (2+1+1+0) — ставить два орудия на одно направление, по одному — на два других и одно оставить незащищенным;

B_3 (2+2+0+0) — ставить по два орудия на два направления, а два оставить незащищенными;

B_4 (3+1+0+0) — ставить три орудия на одно направление, одно — на другое, и два оставить незащищенными;

1. A_1B_1 . На одной дороге встречаются один батальон нападения с двумя батальонами обороны; атака на этой дороге отбивается. На другой дороге встречаются два батальона нападения с двумя оборонами; согласно условию нападение побеждает с вероятностью 0,4: $a_{11} = 0,4$.

2. A_2B_1 . При этом на одной из дорог с полной достоверностью будет перевес сил нападения, и $a_{21} = 1$.

3. A_1B_2 . Так как выбор любой дороги для каждой стороны равновероятен, то с вероятностью 1/2, на одной дороге встретятся два батальона A с тремя B , на другой — один батальон A с одним B ; на первой дороге атака будет отбита, на другой — произойдет занятие объекта с вероятностью 0,4. С той же вероятностью 1/2 встретятся на одной дороге один батальон A с тремя B , на другой — два батальона A с одним B , и объект будет занят с полной достоверностью. Применяя формулу полной вероятности, находим:

$$a_{12} = 1/2 \cdot 0,4 + 1/2 \cdot 1 = 0,7.$$

4. A_2B_2 . С вероятностью 1/2 на одной дороге встретятся три батальона A с тремя B , на другой — столкновения не будет; в этом случае вероятность занятия объекта 0,4. С той же вероятностью 1/2 три батальона A встретятся только с одним батальоном B , пройдут и займут объект. По формуле полной вероятности:

$$a_{22} = 1/2 \cdot 0,4 + 1/2 \cdot 1 = 0,7.$$

5. A_1B_3 . Так как силы A идут по двум дорогам, а силы B расположены только на одной из дорог, сторона A с достоверностью займет объект: $a_{13} = 1$.

6. A_2B_3 . С вероятностью 1/2 силы A пойдут по той дороге, где нет обороны, и займут объект; с вероятностью 1/2 они будут отбиты превосходящими силами обороны; отсюда

$$a_{23} = 1/2 \cdot 1 + 1/2 \cdot 0 = 0,5.$$

Матрица игры 2×3 имеет вид:

$A_i \backslash B_j$	$B_1 (2+2)$	$B_2 (3+1)$	$B_3 (4+0)$
$A_1 (2+1)$	0,4	0,7	1
$A_2 (3+0)$	1	0,7	0,5

Нижняя цена игры $\alpha = 0,5$, верхняя цена игры $\beta = 0,7$; игра не имеет седловой точки. Ищем решение в смешанных стратегиях. Геометрическая интерпретация игры дана на рис. 9.16. Нижняя граница выигрыша достигает максимума в точках N' и N'' на всем участке между ними; этот максимум есть цена игры $v = 0,7$. В данном случае решение игры получилось неоднозначным: сторона A может применить любую из своих смешанных стратегий, соответствующих точкам оси

абсцисс от K' до K'' . Таким образом, у стороны A существует бесчисленное множество оптимальных стратегий. Найдем абсциссы точек N' и N'' . Они будут равны соответственно p_2' и p_2'' — границам, в которых заключена вероятность стратегии A_2 в оптимальной смешанной стратегии игрока A . Из чертежа имеем:

$$\frac{0,7-0,4}{p_2'} = \frac{1-0,7}{1-p_2'},$$

откуда $p_2' = 0,5$. Аналогично получаем

$$\frac{1-0,7}{p_2''} = \frac{0,7-0,5}{1-p_2''},$$

откуда $p_2'' = 0,6$.

Итак, в качестве оптимальной смешанной стратегии сторона A может применять любую $S_A^*(p_1, p_2)$, в которой вероятности p_1 и p_2 лежат: первая — между 0,4 и 0,5; вторая соответственно между 0,6 и 0,5.

Разумеется, крайние значения p_1 и p_2 тоже дают оптимальные стратегии игрока A :

$$S_A^* = (0,5, 0,5), \quad S_B^* = (0,4, 0,6).$$

Таким образом, оптимальная стратегия игрока A найдена: она состоит в том, чтобы с вероятностью, принимающей любое значение между 0,4 и 0,5, направлять два батальона по одной из дорог (любой), а оставшийся батальон — по другой дороге; во всех же остальных случаях послать все три батальона по одной из дорог (любой).

Что касается оптимальной стратегии противника (B), то, как видно из рис. 9.16, она сводится к применению одной единственной чистой стратегии, а именно B_2 :

$$S_B^* = (0, 1, 0),$$

т. е. обороняющийся всегда должен выставлять три батальона на одну дорогу (любую), а один батальон — на другую дорогу. Цена игры, т. е. устойчивый выигрыш стороны A при этом будет равен верхней цене игры 0,7*).

* Из рис. 9.16 можно сделать заключение, что активными стратегиями стороны B , кроме B_2 , являются еще и B_1 и B_3 (так как соответствующие линии стратегий пересекаются в точках N' и N''). Однако нетрудно убедиться, что так как линия B_2B_2 параллельна оси абсцисс, фактическая доля стратегий B_1 и B_3 в оптимальной смешанной стратегии обороны должна быть равна нулю.

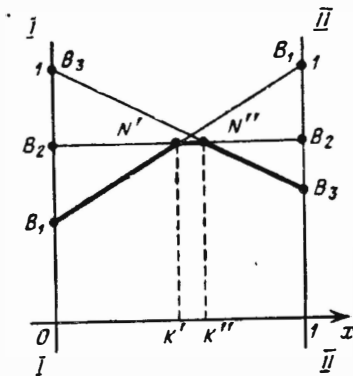


Рис. 9.16

где y_1, y_2, \dots, y_n — неотрицательные переменные, равные

$$y_1 = q_1/v, \quad y_2 = q_2/v, \quad \dots, \quad y_n = q_n/v.$$

Требуется так выбрать переменные y_1, y_2, \dots, y_n , чтобы они удовлетворяли условиям (9.6) и обращали в максимум линейную функцию

$$L = y_1 + y_2 + \dots + y_n = \frac{1}{v} \quad (9.7)$$

Вместо того чтобы максимизировать функцию (9.7), можно, как мы знаем, минимизировать функцию

$$L' = -L = -y_1 - y_2 - \dots - y_n = -\frac{1}{v}. \quad (9.8)$$

Таким образом, мы свели задачу решения любой конечной игры $m \times n$ к паре задач линейного программирования; методы решения таких задач нам уже хорошо известны (см. гл. 2).

Попутно заметим, что из сведения задачи решения игры к задаче линейного программирования вытекают соображения по поводу существования решения игры $m \times n$.

Действительно, пусть задача о нахождении оптимальной стратегии $S_A^* = (p_1, p_2, \dots, p_m)$ игрока A сведена к задаче линейного программирования с условиями-неравенствами (9.3) и минимизируемой функцией (9.5). Всегда ли существует ее решение? Мы знаем (см. гл. 2), что решение задачи линейного программирования может и не существовать; оно отсутствует, если:

- 1) условия (равенства или неравенства) вообще не имеют допустимых неотрицательных решений;
- 2) допустимые решения существуют, но среди них нет оптимального, так как минимизируемая функция не ограничена снизу.

Посмотрим, как обстоит дело в нашем случае. Нетрудно убедиться, что допустимое решение ЗЛП в нашем случае всегда существует. Действительно, сделаем элементы матрицы (a_{ij}) строго положительными (для этого достаточно прибавить к каждому из них достаточно большое число M) и обозначим наименьший элемент матрицы (a_{ij}) через μ :

$$\mu = \min_i \min_j a_{ij}.$$

Положим теперь $x_1 = 1/\mu, x_2 = x_3 = \dots = x_m = 0$. Нетрудно видеть, что эта система значений переменных x_1, x_2, \dots, x_m представляет собой допустимое решение ЗЛП — все они неотрицательны, и их совокупность удовлетворяет условиям (9.3).

Теперь убедимся, что линейная функция (9.5) не может быть не ограничена снизу. Действительно, все x_1, x_2, \dots, x_m неотрицательны, а коэффициенты при них в выражении (9.5) положительны, значит, функция L в формуле (9.5) тоже неотрицательна, значит, она ограничена снизу (нулем) и решение задачи линейного программирования (а следовательно, и игры $m \times n$) существует.

Пример 1. Найти методом линейного программирования решение игры «три пальца» из примера 2 § 4

Решение. Матрица игры имеет вид:

B_j	B_1	B_2	B_3	b_i	
A_i	A_1	A_2	A_3		

(9.9)

Прибавляя ко всем элементам матрицы одно и то же число $M = 5$, сделаем их неотрицательными:

B_j	B_1	B_2	B_3	b_i	
A_i	A_1	A_2	A_3		

(9.10)

При этом цена игры увеличится на 5, а решение не изменится. Обозначим новую цену игры $v' = v + 5$. Найдем оптимальную смешанную стратегию $S_A^* = (p_1, p_2, p_3)$ игрока A . Условия (9.3) примут вид:

$$\left. \begin{aligned} 7x_1 + 2x_2 + 9x_3 &> 1, \\ 2x_1 + 9x_2 &> 1, \\ 9x_1 + 11x_3 &> 1. \end{aligned} \right\} \quad (9.11)$$

Минимизируемая линейная функция

$$L = x_1 + x_2 + x_3. \quad (9.12)$$

Перейдем от условий-неравенств (9.11) к условиям-равенствам:

$$\begin{aligned} y_1 &= -1 - (-7x_1 - 2x_2 - 9x_3), \\ y_2 &= -1 - (-2x_1 - 9x_2), \\ y_3 &= -1 - (-9x_1 - 11x_3). \end{aligned}$$

Заполним симплекс-таблицу (табл. 9.1). Так как свободные члены отри-

Таблица 9.1

	Свободный член	x_1	x_2	x_3
y_1	-1	-7	-2	-9
y_2	-1	-2	-9	0
y_3	-1	-9	0	-11

Таблица 9.2

	Свободный член	x_1	x_2	x_3
y_1	-1 $\frac{9}{11}$	-7 $\frac{81}{11}$	-2 0	-9 $-\frac{9}{11}$
y_2	-1 0	-2 0	-9 0	0 0
y_3	-1 $\frac{1}{11}$	-9 $\frac{9}{11}$	0 0	(-11) $-\frac{1}{11}$

Таблица 9.3

	Свободный член	x_1	x_2	y_3
y_1	$-\frac{2}{11}$ $\frac{2}{9}$	$\frac{4}{11}$ $\frac{4}{9}$	-2 $-\frac{2}{9}$	$-\frac{9}{11}$ 0
y_2	-1 $\frac{1}{9}$	-2 $\frac{2}{9}$	(-9) $-\frac{1}{9}$	0 0
x_3	$\frac{1}{11}$ 0	$\frac{9}{11}$ 0	0 0	$-\frac{1}{11}$ 0

Таблица 9.4

	Свободный член	x_1	y_2	y_3
y_1	$\frac{4}{99}$	$\frac{80}{99}$	$-\frac{2}{9}$	$-\frac{9}{11}$
x_2	$\frac{1}{9}$	$\frac{2}{9}$	$-\frac{1}{9}$	0
x_3	$\frac{1}{11}$	$\frac{9}{11}$	0	$-\frac{1}{11}$

цательны, то, полагая $x_1 = x_2 = x_3 = 0$, мы не получим опорного решения. Применяя аппарат симплекс-метода (см гл. 2, § 7), находим опорное решение (табл 9.2, 9.3, 9.4) Табл 9.4 дает опорное решение ОЗЛП:

$$x_1 = y_2 = y_3 = 0; \quad y_1 = \frac{4}{99}, \quad x_2 = \frac{1}{9}, \quad x_3 = \frac{1}{11}.$$

Надо проверить, является ли оно оптимальным, т. е. обращает ли в минимум выражение (9.12) Пользуясь табл. 9.4, выразим L через новые свободные переменные x_1, y_2, y_3 :

$$L = x_1 + x_2 + x_3 = x_1 + \left(\frac{1}{9} - \frac{2}{9}x_1 + \frac{1}{9}y_2\right) + \left(\frac{1}{11} - \frac{9}{11}x_1 + \frac{1}{11}y_3\right) = \\ = \frac{20}{99} - \left(\frac{4}{99}x_1 - \frac{1}{9}y_2 - \frac{1}{11}y_3\right)$$

Таблица 9.5

	Свободный член	x_1	y_2	y_3
L	$\frac{20}{99}$ $-\frac{1}{5 \cdot 99}$	$\frac{4}{99}$ $-\frac{1}{20}$	$-\frac{1}{9}$ $\frac{1}{90}$	$-\frac{1}{11}$ $\frac{9}{220}$
y_1	$\frac{4}{99}$ $\frac{1}{20}$	(80) $\frac{99}{80}$	$-\frac{2}{9}$ $-\frac{11}{40}$	$-\frac{9}{11}$ $-\frac{81}{80}$
x_2	$\frac{1}{9}$ $-\frac{1}{90}$	$\frac{2}{9}$ $-\frac{11}{40}$	$-\frac{1}{9}$ $\frac{11}{180}$	0 $\frac{9}{40}$
x_3	$\frac{1}{11}$ $-\frac{9}{220}$	$\frac{9}{11}$ $-\frac{81}{80}$	0 $\frac{9}{40}$	$-\frac{1}{11}$ $\frac{729}{880}$

и запишем свободный член и коэффициенты при x_1, y_2, y_3 в верхней строке табл. 9.5. Из того, что коэффициент при x_1 положителен, видно, что увеличение x_1 уменьшает L , т. е. минимум еще не достигнут. Производим замену $x_1 \leftrightarrow y_1$ (табл. 9.5, 9.6).

Таблица 9.6

	Свободный член	y_1	y_2	y_3
L	$\frac{1}{5}$	$-\frac{1}{20}$	$-\frac{1}{10}$	$-\frac{1}{20}$
x_1	$\frac{1}{20}$	$\frac{99}{80}$	$-\frac{11}{40}$	$-\frac{81}{80}$
x_2	$\frac{1}{10}$	$-\frac{11}{40}$	$-\frac{1}{20}$	$\frac{9}{40}$
x_3	$\frac{1}{20}$	$-\frac{81}{80}$	$\frac{9}{40}$	$\frac{59}{80}$

Из табл. 9.6 видно, что функция L принимает минимальное значение $L_{\min} = 1/5$ при

$$y_1 = y_2 = y_3 = 0, \\ x_1 = 1/20, \quad x_2 = 1/10, \quad x_3 = 1/20.$$

Отсюда $v' = 1/L_{\min} = 5$, т. е. цена игры с матрицей (9.10) $v' = 5$.

Следовательно, цена исходной игры с матрицей (9.9):

$$v = v' - 5 = 0.$$

Это значение выигрыша достигается при

$$x_1 = 1/20, \quad x_2 = 1/10, \quad x_3 = 1/20,$$

т. е. для вероятностей стратегий

$$p_1 = x_1 v' = 1/4; \quad p_2 = x_2 v' = 1/2; \quad p_3 = x_3 v' = 1/4.$$

Таким образом, найдено решение игры — оптимальная стратегия игрока A_1

$$S_A^* = (1/4, 1/2, 1/4)$$

и цена игры $v = 0$.

Оптимальная стратегия игрока B может быть найдена точно таким же способом, если составить условия, аналогичные (9.7), но не по столбцам, а по строкам, заменив в них знаки \geq на \leq , а величину L обращать не в минимум, а в максимум. Однако в данном случае в этом надобности нет: из симметрии строк и столбцов матрицы ясно, что оптимальная стратегия игрока B должна быть такой же, как и оптимальная стратегия игрока A :

$$S_B^* = (1/4, 1/2, 1/4).$$

Таким образом, в игре «три пальца» оптимальная стратегия каждого из игроков состоит в том, чтобы с вероятностью $1/4$ показывать один палец, с вероятностью $1/2$ — два пальца и с вероятностью $1/4$ — три пальца. При этом средний выигрыш каждого игрока будет равен нулю ($v = 0$).

В этом примере все три стратегии каждого игрока были активными. Такая игра, в которой все стратегии активны, называется **полностью усредненной**. В следующем примере мы рассмотрим пример не полностью усредненной игры.

Пример 2. Игра «вооружение — помехи».

Сторона A располагает тремя видами вооружения A_1, A_2, A_3 , а сторона B — тремя видами помех B_1, B_2, B_3 . Вероятность решения боевой задачи стороной A при различных видах вооружения и помех задана матрицей:

$A_i \backslash B_j$	B_1	B_2	B_3
A_1	0,8	0,2	0,4
A_2	0,4	0,5	0,6
A_3	0,1	0,7	0,3

Сторона A стремится решить боевую задачу, сторона B — воспрепятствовать этому. Найти оптимальные стратегии сторон.

Решение. Избавляясь от дробей, перепишем матрицу в виде:

$A_i \backslash B_j$	B_1	B_2	B_3
A_1	8	2	4
A_2	4	5	6
A_3	1	7	3

и обозначим цену новой игры с такой матрицей $v' = 10v$. Запишем условия (9.3):

$$8x_1 + 4x_2 + x_3 > 1,$$

$$2x_1 + 5x_2 + 7x_3 > 1,$$

$$4x_1 + 6x_2 + 3x_3 > 1,$$

откуда (переходя к условиям-равенствам)

$$\left. \begin{aligned} y_1 &= -1 - (-8x_1 - 4x_2 - x_3), \\ y_2 &= -1 - (-2x_1 - 5x_2 - 7x_3), \\ y_3 &= -1 - (-4x_1 - 6x_2 - 3x_3). \end{aligned} \right\} \quad (9.13)$$

Требуется найти неотрицательные значения $x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3$, удовлетворяющие условиям (9.13) и обращающие в минимум линейную функцию:

$$L = 1/v = x_1 + x_2 + x_3.$$

Решаем задачу симплекс-методом (опуская подробности, приведем сразу оптимальное решение, табл. 9.7).

Таблица 9.7

	Свободный член	y_1	x_3	y_2
L	$\frac{7}{32}$	$-\frac{3}{32}$	$-\frac{1}{32}$	$-\frac{1}{8}$
x_1	$\frac{1}{32}$	$-\frac{5}{32}$	$-\frac{23}{32}$	$\frac{1}{8}$
y_3	$\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{4}$	$\frac{17}{4}$	-1
x_2	$\frac{3}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{27}{16}$	$-\frac{1}{4}$

Из табл. 9.7 видно, что минимум L достигнут и равен $L_{\min} = 7/32$. Это значение достигается при

$$y_1 = x_3 = y_2 = 0; \quad x_1 = 1/32, \quad y_3 = 1/4, \quad x_2 = 3/16.$$

Отсюда находим вероятности p_1, p_2, p_3 , с которыми игрок A должен применять свои стратегии A_1, A_2, A_3 :

$$p_1 = x_1 v', \quad p_2 = x_2 v', \quad p_3 = x_3 v'$$

и цену игры:

$$v' = 1/L_{\min}$$

В данном случае

$$v' = 3^2/7; \quad p_1 = 1/32 \cdot 3^2/7 = 1/7;$$

$$p_2 = 3/16 \cdot 3^2/7 = 6/7; \quad p_3 = 0 \cdot 3^2/7 = 0.$$

Таким образом, оптимальная стратегия игрока A найдена:

$$S_A^* = (1/7, 6/7, 0),$$

т. е., мы должны пользоваться с вероятностью $1/7$ первым видом вооружения, с вероятностью $6/7$ — вторым, а третий вид вооружения не применять вовсе. При этом вероятность выполнения боевой задачи будет максимальна:

$$v = v'/10 = 3^2/70 \approx 0,457.$$

Теперь найдем оптимальную стратегию S_B^* противника. В общем случае для этого надо поступать так, как сказано выше: решать задачу для противника так, как мы ее решали для себя, с заменой столбцов матрицы на строки, знаков $>$ на $<$ и минимума на максимум. Однако в данном случае в этом надобности нет: нам помогает то обстоятельство, что нам уже известны активные стратегии игрока A , и их только две: A_1 и A_2 . Игра, таким образом, обратилась в игру 2×3 , которую можно решить элементарно. Опуская подробности, приведем только решение:

$$S_B^* = (3/7, 4/7, 0),$$

т. е. оптимальная стратегия противника состоит в том, чтобы с вероятностью $3/7$ пользоваться помехами B_1 , с вероятностью $4/7$ — помехами B_2 , а третий вид помех (B_3) не применять вовсе.

В заключение заметим, что продемонстрированный в данном параграфе общий метод решения игр $m \times n$ — сведение к задаче линейного программирования — не всегда оказывается самым простым. Часто игру — особенно с небольшими m и n — удается решить проще, если заранее угадать, какие стратегии являются активными. Например, если матрица игры — квадратная ($m = n$), то можно попробовать — не является ли игра полностью усредненной? В этом случае все стратегии обеих сторон являются активными, а неравенства (9.3) обращаются в равенства. Если, решив эту систему уравнений, мы получим положительные значения x_1, x_2, \dots, x_m , то, складывая их, найдем величину $1/v$:

$$x_1 + x_2 + \dots + x_m = 1/v,$$

откуда цена игры:

$$v = \frac{1}{x_1 + x_2 + \dots + x_m},$$

а вероятности p_1, p_2, \dots, p_m в оптимальной стратегии S_A^* найдутся как

$$p_1 = x_1 v, \quad p_2 = x_2 v, \quad \dots, \quad p_m = x_m v.$$

10. РЕШЕНИЕ КОНЕЧНЫХ ИГР МЕТОДОМ ИТЕРАЦИЙ

В практических задачах часто нет необходимости находить точное решение игры; достаточно бывает найти приближенное решение, обеспечивающее средний выигрыш, близкий к цене игры.

Ориентировочно цену игры v можно определить непосредственно из матрицы, зная нижнюю цену игры α и верхнюю β . Если α и β близки, то практически нет надобности заниматься поисками точного решения, а достаточно будет в качестве оптимальных взять чистые минимаксные стратегии. В тех же случаях, когда α и β не близки, приближенное решение игры можно получить, пользуясь методом итераций.

Идея этого метода сводится к следующему. Разыгрывается «мысленный эксперимент», в котором стороны A и B применяют друг против друга свои стратегии. Эксперимент состоит из последовательности отдельных «партий» данной игры. Начинается он с того, что один из игроков (скажем A или «мы») выбирает произвольно одну из своих стратегий, например A_i . Противник (B) на это отвечает той из своих стратегий B_j , которая наименее выгодна для нас, т. е. обращает выигрыш при стратегии A_i в минимум. На этот ход мы отвечаем той своей стратегией A_k , которая дает максимальный выигрыш при стратегии противника B_j . Далее — снова очередь противника. Он отвечает на нашу пару ходов A_i и A_k той своей стратегией B_l , которая дает наименьший средний выигрыш на одну партию при этих двух стратегиях, и т. д. На каждом шаге итерационного процесса каждый игрок отвечает на очередной ход другого той своей стратегией, которая является оптимальной относительно всех предыдущих ходов противника, рассматриваемых как некая «смешанная стратегия», в которую чистые стратегии входят в пропорциях, определяемых частотой их применения.

Такой метод построения оптимальных стратегий представляет собой некоторую модель практического «взаимного обучения» игроков, когда каждый из них на опыте «прощупывает» способ поведения противника и старается отвечать на него наилучшим для себя образом.

Можно доказать, что процесс итераций сходится; если такую чередующуюся последовательность партий продолжать достаточно долго, то средний выигрыш, приходящийся на одну партию, будет стремиться к цене игры v , а частоты $P_1^*, P_2^*, \dots, P_m^*, Q_1^*, Q_2^*, \dots, Q_n^*$, с которыми применялись стратегии $A_1, A_2, \dots, A_m; B_1, B_2, \dots, B_n$ в этом «розыгрыше», будут приближаться к вероятностям $p_1, p_2, \dots, p_m; q_1, q_2, \dots, q_n$ в оптимальных смешанных стратегиях: $S_A^* = (p_1, p_2, \dots, p_m); S_B^* = (q_1, q_2, \dots, q_n)$.

Расчеты показывают, что сходимость метода — очень медленная, однако для быстродействующих ЭЦВМ это не является серьезным препятствием. Преимущество метода итераций состоит в том, что его сложность сравнительно мало возрастает с увеличением размера таблицы $m \times n$, тогда как сложность решения задачи линейного программирования резко растет при увеличении m и n .

Продemonстрируем применение итерационного метода на примере игры «три пальца», решенной нами точно в предыдущем параграфе. Тот факт, что мы знаем решение игры и ее цену ($v = 5$), поможет нам оценить точность метода итераций.

Пример. Решить методом итераций игру с матрицей

	B_1	B_2	B_3
A_1	7	2	9
A_2	2	9	0
A_3	9	0	11

Решение. В табл. 10.1 приведены первые 30 шагов процесса итераций. В первом столбце дан номер партии (пары выборов) k , во втором — номер i выбранной в данной партии стратегии игрока A . В последующих трех столбцах — «накопленный выигрыш» за первые k партий при тех стратегиях, которые применяли оба игрока в предыдущих партиях, при стратегии A_i игрока A в данной партии и при стратегиях B_1, B_2, B_3 игрока B в данной партии. Из этих накопленных выигрышей подчеркнут минимальный (если таких минимальных выигрышей несколько, то подчеркиваются они все). Подчеркнутое число определяет собой наиболее выгодную стратегию игрока B в данной партии — она соответствует номеру той стратегии B_j , для которой достигается минимум накопленного выигрыша (если таких минимумов несколько, берется любой из них, например, случайным розыгрышем). Таким образом проставляется в следующем столбце номер оптимальной ответной стратегии противника j . В последующих трех столбцах приводится накопленный выигрыш за k партий соответственно при стратегиях A_1, A_2, A_3 игрока A . Из этих значений надчеркнуто максимальное; оно определяет собой выбор стратегии игрока A в следующей партии (следующей строке таблицы). В дальнейших столбцах табл. 10.1 помещаются такие данные:

\underline{v} — минимальный накопленный выигрыш, деленный на число партий k ;

\overline{v} — максимальный накопленный выигрыш, деленный на число партий k ;

$v^* = \frac{\underline{v} + \overline{v}}{2}$ — их среднее арифметическое (помещено в таблице между \underline{v} и \overline{v}).

Величина v^* может служить (лучше чем \underline{v} и \overline{v}) приближенным значением цены игры.

Подсчитывая число случаев применения игроком каждой стратегии и деля его на число партий k , получим приближенные значения

k	i	B_1	B_2	B_3	j	A_1	A_2	A_3	\underline{v}	v^*	\overline{v}
1	3	9	0	11	2	2	9	0	0	4,5	9
2	2	11	9	11	2	4	18	0	4,5	6,75	9
3	2	13	18	11	3	13	18	11	3,67	1,84	6
4	2	15	27	11	3	22	18	22	2,75	4,13	5,50
5	1	22	29	20	3	31	18	33	4,00	5,30	6,60
6	3	31	29	31	2	33	27	33	4,84	5,17	5,50
7	1	38	31	40	2	35	36	33	4,43	4,79	5,14
8	2	40	40	40	2	37	45	33	5,00	5,30	5,61
9	2	42	49	40	3	46	45	44	4,45	4,78	5,11
10	1	49	51	49	1	53	47	53	4,90	5,10	5,30
11	3	58	51	60	2	55	56	53	4,64	4,87	5,09
12	2	60	60	60	2	57	65	53	5,00	5,20	5,41
13	2	62	69	60	3	66	65	64	4,61	4,84	5,07
14	1	69	71	69	1	73	67	73	4,93	5,07	5,21
15	3	78	71	80	2	75	76	73	4,74	4,90	5,06
16	2	80	80	80	2	77	85	73	5,00	5,16	5,31
17	2	82	89	80	3	86	85	84	4,71	4,89	5,07
18	1	89	91	89	1	93	87	93	4,95	5,06	5,17
19	3	98	91	100	2	95	96	93	4,79	4,93	5,06
20	2	100	100	100	2	97	105	93	5,00	5,15	5,31
21	2	102	109	100	3	106	105	104	4,76	4,90	5,04
22	1	109	111	109	1	113	107	113	4,97	5,05	5,14
23	3	118	111	120	2	115	116	113	4,83	4,94	5,04
24	2	120	120	120	2	117	125	113	5,00	5,10	5,20
25	2	122	129	120	3	126	125	124	4,80	4,92	5,04
26	1	129	131	129	1	133	127	133	4,96	5,04	5,11
27	3	133	131	140	2	135	136	133	4,86	4,95	5,04
28	2	140	140	140	2	137	145	133	5,00	5,10	5,09
29	2	142	149	140	3	146	145	144	4,84	4,94	5,04
30	1	149	151	149	1	153	147	153	4,97	5,04	5,10

вероятностей, с которыми применяются стратегии в оптимальной смеси

$$S_A^* = (p_1, p_2, p_3); \quad S_B^* = (q_1, q_2, q_3).$$

Как видно из табл. 10.1, величина v^* незначительно колеблется около цены игры $v = 5$ (цена исходной игры была 0, мы прибавили ко всем элементам матрицы по 5). Подсчитывая по табл. 10.1 частоты применения стратегий A_1, A_2, A_3 в первых 30 партиях, получим:

$$P_1^* = 8/30 \approx 0,267; \quad P_2^* = 15/30 = 0,5; \quad P_3^* = 7/30 \approx 0,233.$$

Они оказались довольно близкими к известным нам из решения игры вероятностям:

$$p_1 = 1/4 = 0,25; \quad p_2 = 1/2 = 0,5; \quad p_3 = 1/4 = 0,25^*).$$

Аналогично для игрока B находим частоты стратегий B_1, B_2, B_3 в первых 30 партиях:

$$Q_1^* = 6/30 = 0,2; \quad Q_2^* = 15/30 = 0,5; \quad Q_3^* = 9/30 = 0,3.$$

Это уже сильнее отличается от решения игры, согласно которому:

$$q_1 = 0,25; \quad q_2 = 0,5; \quad q_3 = 0,25.$$

Но для нас ведь важны не точные значения вероятностей q_1, q_2, q_3 , а выигрыш, который нам обеспечивается применением смешанных стратегий. Если противник будет пользоваться смешанной стратегией

$$\tilde{S}_B^* = (0,2; 0,5; 0,3),$$

то наш выигрыш (его проигрыш) будет не больше 5,10 (последняя строка в табл. 10.1), что лишь немного отличается от цены игры 5,0. Заметим, что, ставя практическую игровую задачу, мы обычно делаем упрощения и допущения, которые делают излишней погоню за большой точностью решения, так что ориентировочное решение игры, получаемое методом итераций (даже при небольшом числе «партий»), часто может оказаться достаточным.

Сделаем по поводу табл. 10.1 еще одно замечание. В ней встречаются строки (например, восьмая, двенадцатая, двадцатая и т. д.), где все три значения выигрышей подчеркнуты; это означает, что достигнуто «положение равновесия», при котором л ю б о е п о в е д е н и е п р о т и в н и к а дает нам один и тот же выигрыш, а именно, цену игры v . Обратим внимание на то, что для этих строк действительно величина \underline{v} достигает точно значения v . По таким признакам можно находить приближенное значение цены игры: если в каких-то последовательных столбцах при всех стратегиях противной стороны обеспечивается приблизительно один и тот же выигрыш, это означает, что он может быть принят за приближенное значение цены игры. Знание приближенного значения цены игры важно для того, чтобы во время остановить процесс итераций.

) Точное совпадение $P_2^ = p_2 = 0,5$ является, конечно, случайным.

Как же найти практически оптимальные стратегии после того, как процесс итераций прекращен? Вернемся к табл. 10.1 и рассмотрим в ней столбец \underline{v} . Найдем в этом столбце максимальный элемент. В нашем случае это оказался $\underline{v}_{\max} = 5$ (случайно равный цене игры, но, приступая к итерациям, мы ведь ее не знаем!). Из этого мы заключаем, что, применяя смешанную стратегию, соответствующую этой строке, мы обеспечиваем себе выигрыш, не меньший 5. Подсчитаем частоты стратегий для 20-й строки. Стратегия A_1 применялась нами 5 раз из 20, стратегия A_3 — тоже 5 раз, стратегия A_2 — 10 раз, откуда берем вероятности стратегий:

$$p_1 = 0,25, \quad p_2 = 0,5, \quad p_3 = 0,25,$$

что, как и следовало ожидать, совпадает (в данном случае точно, а не приближенно) с оптимальной стратегией игрока A в решении игры. Сделаем то же для игрока B . Рассмотрим столбец \bar{v} и найдем в нем минимальное число \bar{v}_{\min} . Это будет 5,04, достигаемое, например, в 29-й строке. Это значит, что если игрок B будет применять смешанную стратегию, соответствующую всему «прошлому» для этой строки: $q_1 = 5/29 = 0,172$; $q_2 = 15/29 = 0,517$; $q_3 = 9/29 = 0,311$, то он может гарантировать, что проиграет не больше чем 5,04. Это — лучше, чем значение 5,10, достигаемое \bar{v} в самой последней строке.

Таким образом, даже при небольшом числе итераций ($k = 30$) цена игры и решение находятся с удовлетворительной точностью.

11. ФИЗИЧЕСКАЯ СМЕСЬ СТРАТЕГИЙ

Решая задачи теории игр, мы неоднократно приходили к выводам, рекомендуя игрокам применять не чистые, а смешанные стратегии. Рассмотрим вопрос о фактическом осуществлении смешанных стратегий на практике.

Основная область, где применяется теория игр — конфликтные ситуации, связанные с боевыми действиями, где обдуманное противодействие разумного противника не подлежит сомнению и всегда должно включаться в модель операции.

Задачи исследования операций, связанные с боевыми действиями, можно условно разделить на два класса: — «технические» и «тактические» задачи. В «технических» задачах речь идет о выборе рациональных конструктивных параметров применяемых образцов боевой техники. В «тактических» задачах речь идет о методах боевого применения уже имеющихся технических средств с заданными параметрами; это — более подвижные, более «злободневные» решения. Значительная часть из них будет приниматься и обосновываться в ходе самих боевых действий.

Рассмотрим вопрос о применении смешанных стратегий в тех и других задачах.

Что касается «тактических» задач, — здесь применимость смешанных стратегий сомнений не вызывает: они означают гибкую, подвижную, всегда неожиданную для противника тактику. Целесообразность такой тактики была очевидна всегда; игровыми методами можно только обосновать пропорции разных тактических приемов.

В «технических» задачах дело обстоит несколько иначе. Пусть, например, речь идет о том, чтобы выбрать из нескольких возможных вариантов и осуществить новый образец вооружения. Вряд ли будет целесообразно предоставить этот выбор случайности, например подбросить монету и, если выпадет герб, выбрать первый вариант, а если цифра — второй. Это нецелесообразно хотя бы потому, что суть смешанной стратегии в том, что конкретная ее реализация всегда остается тайной для противника, а когда речь идет о долговременном решении, у противника, как правило, будет время и возможность собрать информацию о принятой стратегии и поступить соответственно ей.

В подобных задачах игровые принципы могут применяться иначе: в виде так называемой «физической смеси стратегий». Физической смесью стратегий называется такая их смесь, при которой одновременно (в одной или нескольких операциях) применяются несколько стратегий в определенных пропорциях; например, несколько образцов вооружения, обладающих разными свойствами. Если применяемые образцы резко различны по своим характеристикам, то, пользуясь физической смесью стратегий, мы можем заметно увеличить свой выигрыш по сравнению со случаем, когда применяется лишь одна стратегия. Пропорции, в которых должны смешиваться разные образцы, могут быть обоснованы исходя из принципов теории игр.

В качестве примеров физической смеси стратегий можно привести:

- применение в пушках-автоматах патронной ленты, укомплектованной снарядами разных типов (бронебойные, зажигательные, фугасные);
- расстановка в полосе ПВО зенитных комплексов с различными характеристиками;
- применение в боевых действиях однотипных самолетов-истребителей с различным вооружением и т. д.

Строго говоря, физически смешанная стратегия является не смешанной, а чистой; ее параметрами являются пропорции, в которых смешиваются отдельные образцы. Однако поставленная так игровая задача оказывается, как правило, весьма сложной (хотя бы потому, что число стратегий в данном случае бесконечно). В первом приближении можно решить задачу об установлении этих пропорций исходя из теории конечных игр и заменяя оптимальную смешанную стратегию физической смесью. Такое приближенное решение игры более всего подходит в случае, когда обстановка боевого применения образцов вооружения заранее не вполне ясна; при этом наличие на вооружении одновременно нескольких образцов с разными характеристиками в какой-то мере обеспечивает их применение в боевых действиях в тех пропорциях в среднем, в каких они имеются в наличии.

Пример. В нашем распоряжении имеются разработанные четыре образца зенитных управляемых ракет: A_1, A_2, A_3, A_4 , предназначенные для стрельбы по самолетам; известны типы самолетов противника B_1, B_2, B_3, B_4, B_5 , которые он может применять, однако неизвестно заранее — в какой пропорции. Вероятность поражения самолета противника при применении каждого типа вооружения задана матрицей:

$A_i \backslash B_j$	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5
A_1	0,2	0,4	0,6	0,4	0,7
A_2	0,3	0,4	0,6	0,5	0,8
A_3	0,4	0,5	0,6	0,5	0,8
A_4	0,7	0,4	0,5	0,2	0,1

Требуется, исходя из принципов теории игр, обосновать пропорции, в которых надо заказывать вооружение различных типов.

Решение. Замечаем, что стратегия A_1 заведомо невыгодна по сравнению с A_2 ; стратегия же A_2 заведомо невыгодна по сравнению с A_3 ; игра сводится к игре 2×5 с матрицей:

$A_i \backslash B_j$	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5
A_3	0,4	0,5	0,6	0,5	0,8
A_4	0,7	0,3	0,5	0,2	0,1

Далее, замечаем, что стратегия B_3 для противника явно невыгодна по сравнению с B_2 , а B_5 — по сравнению с B_4 . Остается игра 2×3 с матрицей:

$A_i \backslash B_j$	B_1	B_2	B_4
A_3	0,4	0,5	0,8
A_4	0,7	0,2	0,1

Построим геометрическую интерпретацию игры (рис. 9.17). Из графика видно, что активными стратегиями противника являются B_1 и B_4 ; игра сведена к игре 2×2 :

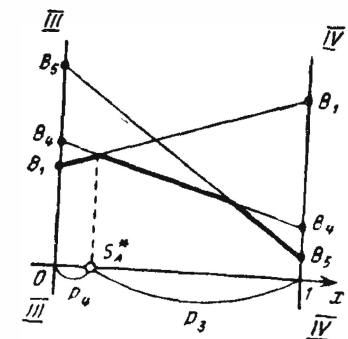


Рис. 9.17

$A_i \backslash B_j$	B_1	B_2
A_3	0,4	0,5
A_4	0,7	0,2

Находим решение игры:

$$S_{A^*} = (0, 0, p_3, p_4),$$

где

$$p_3 = \frac{0,2 - 0,7}{0,4 + 0,2 - 0,5 - 0,7} = \frac{5}{6}; \quad p_4 = 1 - p_3 = \frac{1}{6};$$

$$v = \frac{0,2 \cdot 0,4 - 0,5 \cdot 0,7}{0,4 + 0,2 - 0,5 - 0,7} = \frac{9}{20} = 0,45.$$

Таким образом, исходя из принципов теории игр, принимаем рекомендацию: не заказывать вовсе образцов A_1 и A_2 , а образцы A_3 , A_4 заказывать в пропорции 5:1. При этом средняя вероятность поражения самолета противника (при массовом применении образцов вооружения) будем максимальна (не ниже 0,45).

12. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ СТАТИСТИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ

В задачах теории игр, рассматривая операции, проводимые в условиях неопределенности, мы связывали эту неопределенность с неизвестным для нас поведением противника и исходили из того, что этот противник является «разумным и злонамеренным» и предпринимает те и именно те действия, которые для нас наименее выгодны.

Однако при исследовании операций приходится встречаться не только с таким видом неопределенности. Очень часто неопределенность, сопровождающая операцию, связана не с сознательным противодействием противника, а просто с нашей недостаточной осведомленностью об условиях, в которых будет проводиться операция. Так, например, могут быть заранее неизвестны: погода в некотором районе, покупательский спрос на определенный вид продукции, объем перевозок, который придется выполнять железной дороге, и т. д.

Во всех такого рода случаях условия выполнения операции зависят не от сознательно противодействующего нам противника, а от объективной действительности, которую в теории решений принято называть «природой». Соответствующие ситуации часто называются «играми с природой». «Природа» в теории статистических решений рассматривается как некая незаинтересованная инстанция, «поведение» которой неизвестно, но, во всяком случае, не содержит элемента сознательного противодействия нашим планам.

Рассмотрим такого рода ситуацию. Пусть у нас (сторона A) имеется m возможных стратегий: A_1, A_2, \dots, A_m ; что касается обстановки, то о ней можно сделать n предположений $\Pi_1, \Pi_2, \dots, \Pi_n$ — рассмотрим их как «стратегии природы». Наш выигрыш a_{ij} при каждой паре стратегий A_i, Π_j задан матрицей (табл. 12.1):

Таблица 12.1

$A_i \backslash \Pi_j$	Π_1	Π_2	...	Π_n
A_1	a_{11}	a_{12}	...	a_{1n}
A_2	a_{21}	a_{22}	...	a_{2n}
...
A_m	a_{m1}	a_{m2}	...	a_{mn}

Требуется выбрать такую стратегию игрока A (чистую или смешанную), которая является предпочтительной (более выгодной) по сравнению с другими.

С первого взгляда может показаться, что поставленная задача проще игровой, так как она не содержит противодействия. Действительно, принимающему решение в игре с природой легче в том отношении, что он, скорее всего, получит в этой игре больший выигрыш, чем в игре против сознательного противника; однако ему труднее принять обоснованное решение, которое даст хороший выигрыш. Дело в том, что в игровой конфликтной ситуации предположение о диаметральной противоположности интересов противника нашим в некотором смысле как бы снимает неопределенность. Если же такого предположения сделать нельзя, неопределенность сказывается в гораздо более сильной степени.

Наиболее простым случаем выбора решения в условиях неопределенности является случай, когда какая-то из стратегий игрока A превосходит другие («доминирует» над ними) как, например, показано в табл. 12.2.

Таблица 12.2

$A_i \backslash \Pi_j$	Π_1	Π_2	Π_3	Π_4
A_1	1	2	3	5
A_2	7	4	4	5
A_3	3	4	4	1
A_4	7	4	2	2

В этой таблице выигрыш при стратегии A_2 при любом состоянии природы Π_j не меньше, чем выигрыш при любой другой стратегии; значит, стратегия A_2 является предпочтительной («доминирует» над всеми другими), и ею рекомендуется пользоваться.

Если в даже в матрице нет доминирующей стратегии, все же следует просмотреть ее под углом зрения стратегий, заведомо невыгодных

для игрока, худших, чем по крайней мере одна из остальных, или дублирующих, которые надо отбросить. Например, в табл. 12.3 можно отбросить стратегии A_1, A_2 , заведомо невыгодные по сравнению с A_4 , и стратегию A_5 — по сравнению с A_3 , в результате чего матрица сведется к матрице 2×5 (см. табл. 12.4).

Таблица 12.3

$A_i \backslash \Pi_j$	Π_1	Π_2	Π_3	Π_4	Π_5
A_1	5	3	4	2	1
A_2	5	3	2	1	1
A_3	1	2	5	4	3
A_4	7	6	7	3	1
A_5	1	2	3	4	3

Таблица 12.4

$A_i \backslash \Pi_j$	Π_1	Π_2	Π_3	Π_4	Π_5
A_3	1	2	5	5	3
A_4	7	6	7	3	1

Обратим внимание на следующее: в игре против разумного противника мы бы отбросили за него стратегию Π_3 как невыгодную по сравнению с Π_4 , а Π_4 — по сравнению с Π_5 ; в игре против природы этого делать нельзя, так как «природа» не выбирает свою стратегию (состояние) так, чтобы как можно больше нам «навредить».

В дальнейшем мы будем предполагать, что анализ матрицы и отбрасывание заведомо невыгодных и дублирующих стратегий уже произведены.

Чем же нам руководствоваться в деле принятия решения в ситуации неопределенности, если ни одна стратегия не доминирует над другими? Ясно, что мы должны исходить из матрицы выигрышей (a_{ij}). Однако иногда картина ситуации, которую дает матрица выигрышей, содержит своего рода «искажения».

Поясним, что мы имеем в виду. Предположим, что выигрыш при стратегии A_i и состоянии природы Π_j , больше, чем при стратегии A_k и состоянии природы Π_l :

$$a_{ij} > a_{kl}.$$

Но первый выигрыш может быть больше второго не за счет того, что мы выбрали более удачную стратегию, а просто за счет того, что состояние природы Π_j «выгоднее» для нас, чем состояние Π_l . Напри-

мер, для какой-нибудь экономической операции состояние «отсутствие стихийных бедствий» вообще более благоприятно, чем состояния «наводнение», «землетрясение» и т. п. Представляется желательным ввести такие показатели, которые не просто давали бы выигрыш в каждой ситуации, а описывали бы «удачность» или «неудачность» применения данной стратегии в данной ситуации, с учетом того, насколько вообще эта ситуация благоприятна для нас.

С этой целью в теории решений вводится важное понятие «риска». Риском игрока при пользовании стратегией A_i в условиях Π_j называется разность между выигрышем, который он получил бы, если бы знал Π_j , и выигрышем, который он получит в тех же условиях, применяя стратегию A_i .

Обозначим r_{ij} риск игрока при его стратегии A_i в условиях Π_j . Выразим риск r_{ij} через элементы матрицы выигрышей (a_{ij}). Очевидно, если бы игрок знал заранее состояние природы (условия) Π_j , он выбрал бы ту стратегию, которой соответствует максимальный выигрыш в данном столбце, короче, «максимум столбца» — обозначим его, как и ранее, β_j . Согласно определению риска,

$$r_{ij} = \beta_j - a_{ij}, \quad (12.1)$$

где $\beta_j = \max_i a_{ij}$.

Из этого определения следует, что риск не может быть отрицательным:

$$r_{ij} \geq 0.$$

При вычислении риска, соответствующего каждой стратегии в данных условиях, учитывается общая благоприятность или неблагоприятность для нас данного состояния природы: величина β_j служит как бы мерилем благоприятности состояния.

Матрица рисков (r_{ij}) дает зачастую более наглядную картину неопределенной ситуации, чем матрица выигрышей (a_{ij}).

Пример 1. Планируется операция в заранее неясных условиях, касающихся, например, рыночной конъюнктуры. Относительно этих условий можно сделать различные предположения:

$\Pi_1, \Pi_2, \Pi_3, \Pi_4$.

Выгодность операции (ожидаемая прибыль) при наших стратегиях (A_i) для различных условий (Π_j) задана матрицей выигрышей (a_{ij}) (табл. 12.5).

Таблица 12.5

$A_i \backslash \Pi_j$	Π_1	Π_2	Π_3	Π_4
A_1	1	4	5	9
A_2	3	8	4	3
A_3	4	6	6	2

Построить матрицу рисков (r_{ij}).

Решение. Каждый элемент матрицы вычитаем из максимального в данном столбце значения (в первом столбце это $\beta_1 = 4$, в остальных $\beta_2 = 8$, $\beta_3 = 6$, $\beta_4 = 9$). Получаем матрицу рисков (табл. 12.6).

Таблица 12.6

$A_i \backslash P_j$	P_1	P_2	P_3	P_4
A_1	3	4	1	0
A_2	1	0	2	6
A_3	0	2	0	7

При взгляде на эту матрицу нам становятся яснее некоторые черты данной «игры с природой». Так, в матрице с выигрышей (a_{ij}) (см. табл. 12.5) во второй строке первый и последний элементы были равны друг другу: $a_{21} = a_{24} = 3$.

Однако эти выигрыши совсем неравноценны друг другу в смысле того, насколько удачно выбрана стратегия: при состоянии природы P_1 мы могли выиграть самое большое всего 4, и выбор стратегии A_2 почти совершенно хорош; а вот при состоянии P_4 мы могли, выбрав стратегию A_1 , выиграть на целых 6 единиц больше, т. е. выбор стратегии A_2 очень плох. Это отражается элементами матрицы рисков: $r_{21} = 1$, $r_{24} = 6$.

То, что мы делали до сих пор — всего лишь различные способы группировки исходных данных; что касается критериев для принятия решений, мы их рассмотрим в следующем параграфе.

13. КРИТЕРИЙ, ОСНОВАННЫЙ НА ИЗВЕСТНЫХ ВЕРОЯТНОСТЯХ УСЛОВИЙ. КРИТЕРИЙ ВАЛЬДА, ГУРВИЦА, СЭВИДЖА

Наиболее просто решается задача о выборе решения в условиях неопределенности, когда нам хотя и неизвестны условия выполнения операции (состояние природы) P_1, P_2, \dots, P_n , но известны их вероятности:

$$Q_1 = P(P_1); \quad Q_2 = P(P_2); \quad \dots; \quad Q_n = P(P_n)$$

$$\left(\sum_{j=1}^n Q_j = 1 \right).$$

В этом случае в качестве показателя эффективности, который мы стремимся обратить в максимум, естественно взять среднее значение, или математическое ожидание выигрыша,

с учетом вероятностей всех возможных условий. Обозначим это среднее значение для i -й стратегии игрока через \bar{a}_i :

$$\bar{a}_i = Q_1 a_{i1} + Q_2 a_{i2} + \dots + Q_n a_{in},$$

или, короче,

$$\bar{a}_i = \sum_{j=1}^n Q_j a_{ij}. \quad (13.1)$$

Очевидно, \bar{a}_i есть не что иное, как взвешенное среднее n выигрышей i -й строки, взятых с весами Q_1, Q_2, \dots, Q_n . В качестве оптимальной стратегии естественно выбрать ту из стратегий $A^* = A_i$, для которой величина \bar{a}_i обращается в максимум.

С помощью такого приема задача о выборе решения в условиях неопределенности превращается в задачу о выборе решения в условиях определенности, только принятое решение является оптимальным не в каждом отдельном случае, а в среднем.

Пример 1. Планируется операция в заранее неизвестных метеорологических условиях; варианты этих условий: P_1, P_2, P_3, P_4 . Согласно материалам метеосводок за много лет частоты (вероятности) этих вариантов равны соответственно:

$$Q_1 = 0,1; \quad Q_2 = 0,2; \quad Q_3 = 0,5; \quad Q_4 = 0,2$$

Возможные варианты организации операции в различных метеосостояниях приносят различную выгоду. Значения «дохода» для каждого решения в разных условиях приведены в табл. 13.1

Таблица 13.1

$A_i \backslash P_j$	P_1	P_2	P_3	P_4	\bar{a}_i
A_1	1	4	5	9	5,2*
A_2	3	8	4	3	4,5
A_3	4	6	6	2	5,0
Q_j	0,1	0,2	0,5	0,2	

В последней строке даны вероятности условий. Средние выигрыши \bar{a}_i приведены в последнем столбце. Из него видно, что оптимальной стратегией игрока является его стратегия $A^* = A_1$, дающая средний выигрыш $\bar{a}_1 = 5,2$ (отмечен звездочкой).

При выборе оптимальной стратегии в неизвестных условиях с известными вероятностями можно пользоваться не только средним выигрышем

$$\bar{a}_i = \sum_{j=1}^n Q_j a_{ij},$$

но и средним риском

$$\bar{r}_i = \sum_{j=1}^n Q_j r_{ij},$$

который, разумеется, нужно обратить не в максимум, а в минимум.

Покажем, что стратегия, максимизирующая средний выигрыш \bar{a}_i , совпадает со стратегией, минимизирующей средний риск \bar{r}_i . Вычислим оба эти показателя и сложим их:

$$\begin{aligned} \bar{a}_i + \bar{r}_i &= \sum_{j=1}^n Q_j a_{ij} + \sum_{j=1}^n Q_j (\beta_j - a_{ij}) = \\ &= \sum_{j=1}^n Q_j a_{ij} - \sum_{j=1}^n Q_j a_{ij} + \sum_{j=1}^n Q_j \beta_j = \sum_{j=1}^n Q_j \beta_j. \end{aligned} \quad (13.2)$$

Эта сумма (среднее взвешенное значение максимумов столбцов) для данной матрицы есть величина постоянная. Обозначим ее C :

$$\sum_{j=1}^n Q_j \beta_j = C.$$

Тогда

$$\bar{a}_i + \bar{r}_i = C,$$

откуда средний риск равен

$$\bar{r}_i = C - \bar{a}_i. \quad (13.3)$$

Очевидно, эта величина обращается в минимум тогда же, когда \bar{a}_i — в максимум, следовательно, стратегия, выбранная из условий минимального среднего риска, совпадает со стратегией, выбранной из условий максимального среднего выигрыша.

Заметим, что в случае, когда известны вероятности состояний природы Q_1, Q_2, \dots, Q_n , при решении игры с природой всегда можно обойтись одними чистыми стратегиями, не применяя смешанных. Действительно, если мы будем применять какую-то смешанную стратегию

$$S_A = (p_1, p_2, \dots, p_m),$$

т. е. стратегию A_1 с вероятностью p_1 , стратегию A_2 с вероятностью p_2 и т. д., то наш средний выигрыш, осредненный и по условиям (состояниям природы) и по нашим стратегиям, будет:

$$\bar{a} = p_1 \bar{a}_1 + p_2 \bar{a}_2 + \dots + p_m \bar{a}_m.$$

Это — взвешенное среднее выигрышей \bar{a}_i , соответствующих нашим чистым стратегиям. Но ясно, что любое среднее не может превос-

ходить максимальной из осредняемых величин:

$$\bar{a} \leq \max_i \bar{a}_i.$$

Поэтому применение смешанной стратегии S_A с любыми вероятностями p_1, p_2, \dots не может быть выгоднее для игрока, чем применение чистой стратегии A^* .

Вероятности условий (состояний природы) Q_1, Q_2, \dots, Q_n могут быть определены из статистических данных, связанных с многократным выполнением подобных операций или просто с проведением наблюдений над состояниями природы. Например, если железной дороге за данный промежуток времени предстоит выполнить не вполне известный объем перевозок, то данные о распределении условий могут быть взяты из опыта прошлых лет. Если, как в предыдущем примере, успех операции зависит от метеоусловий, данные о них могут быть взяты из статистики метеосводок.

Однако часто встречаются случаи, когда, приступая к выполнению операции, мы не имеем представления о вероятностях состояний природы; все наши сведения сводятся к перечню вариантов состояний, а оценить их вероятности мы не можем. Так, например, вряд ли нам удастся разумно оценить вероятность того, что в течение ближайших k лет будет предложено и реализовано важное техническое изобретение.

Разумеется, в подобных случаях вероятности условий (состояний природы) могут быть оценены субъективно: некоторые из них представляются нам более, а другие — менее правдоподобными. Для того чтобы наши субъективные представления о большей или меньшей «правдоподобности» той или другой гипотезы превратить в численные оценки, могут применяться различные технические приемы. Так, если мы не можем предпочесть ни одной гипотезы, если они все для нас равноправны, то естественно назначить их вероятности равными друг другу:

$$Q_1 = Q_2 = \dots = Q_n = 1/n.$$

Это — так называемый «принцип недостаточного основания» Лапласа. Другой часто встречающийся случай — когда мы имеем представление о том, какие условия более вероятны, а какие — менее, т. е. можем расположить имеющиеся гипотезы в порядке убывания их правдоподобности: всего правдоподобнее первая гипотеза (Π_1), затем вторая (Π_2) и т. д.; менее всего правдоподобна n -я гипотеза (Π_n). Однако, насколько одна из них вероятнее другой — мы не знаем. В этом случае можно, например, назначить вероятности гипотез пропорциональными членам убывающей арифметической прогрессии:

$$Q_1 : Q_2 : \dots : Q_n = n : (n-1) : \dots : 1,$$

или, учитывая, что $Q_1 + Q_2 + \dots + Q_n = 1$,

$$Q_i = \frac{2(n-i+1)}{n(n+1)} \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

Иногда удается, исходя из опыта и здравого смысла, оценить и более тонкие различия между степенями правдоподобия гипотез.

Подобные методы субъективной оценки «вероятности-правдоподобности» разных гипотез о состоянии природы могут иногда помочь при выборе решения. Однако нельзя забывать, что «оптимальное решение», выбранное на основе субъективных вероятностей, неизбежно окажется тоже субъективным. Степень субъективности решения можно уменьшить, если вместо вероятностей Q_1, Q_2, \dots, Q_n , назначенных произвольно одним лицом, ввести средние из таких вероятностей, назначенных, независимо друг от друга, группой квалифицированных лиц («экспертов»). Метод опроса экспертов вообще широко применяется в современной науке, когда речь идет об оценке неопределенной ситуации (например, в футурологии). Опыт применения подобных методов учит, что зачастую оценки экспертов (принятые независимо одним от другого) оказываются далеко не столь разноречивыми, как это можно было предположить заранее, и вывести из них некоторые предпосылки для принятия разумного решения вполне возможно.

Выше мы осветили вопрос о выборе решения на основе объективно вычисленных или субъективно назначенных вероятностей состояний природы. Этот подход в теории решений — не единственный. Кроме него существуют еще несколько «критериев» или подходов к выбору оптимального решения в условиях неопределенности. Остановимся на некоторых из них.

1. Максиминный критерий Вальда

Согласно этому критерию в качестве оптимальной выбирается та стратегия игрока A , при которой минимальный выигрыш максимален, т. е. стратегия, гарантирующая при любых условиях выигрыш, не меньший, чем максимин:

$$W^* = \max_i \min_j a_{ij}. \quad (13.4)$$

Если руководствоваться этим критерием, надо всегда ориентироваться на худшие условия и выбирать ту стратегию, для которой в худших условиях выигрыш максимален. Пользуясь таким критерием в играх с природой, мы как бы ставим взамен этой безличной и незаинтересованной инстанции активного и злонамеренного противника. Очевидно, такой подход может быть продиктован только крайним пессимизмом в оценке обстановки — «всегда надо рассчитывать на худшее!» —, но как один из возможных подходов заслуживает рассмотрения.

2. Критерий минимаксного риска Сэвиджа

Этот критерий рекомендует в условиях неопределенности выбирать ту стратегию, при которой величина риска принимает наименьшее значение в самой неблагоприятной ситуации (когда риск максимален):

$$S = \min_i \max_j r_{ij}. \quad (13.5)$$

Сущность этого критерия в том, чтобы любыми путями избежать большого риска при принятии решения.

Критерий Сэвиджа, так же как и критерий Вальда — это критерий крайнего пессимизма, но только пессимизм здесь понимается по-другому: худшим объявляется не минимальный выигрыш, а максимальная потеря выигрыша по сравнению с тем, чего можно было бы достичь в данных условиях (максимальный риск).

3. Критерий пессимизма-оптимизма Гурвица

Этот критерий рекомендует в условиях неопределенности при выборе решения не руководствоваться ни крайним пессимизмом (всегда рассчитывай на худшее!) ни крайним, легкомысленным оптимизмом (все обойдется наилучшим образом!) Критерий Гурвица имеет вид:

$$\mathcal{H} = \max_i \left\{ \kappa \min_j a_{ij} + (1 - \kappa) \max_j a_{ij} \right\}, \quad (13.6)$$

где κ — коэффициент, выбираемый между нулем и единицей.

Проанализируем структуру выражения (13.6). При $\kappa = 1$ критерий Гурвица превращается в пессимистический критерий Вальда, а при $\kappa = 0$ — в критерий «крайнего оптимизма», рекомендуемый выбирать ту стратегию, для которой в наилучших условиях выигрыш максимален. При $0 < \kappa < 1$ получается нечто среднее между крайним пессимизмом и крайним оптимизмом (коэффициент κ выражает как бы «меру пессимизма» исследователя). Этот коэффициент выбирается из субъективных соображений — чем опаснее ситуация, чем больше мы хотим в ней «подстраховаться», тем ближе к единице выбирается κ .

При желании можно построить критерий, аналогичный критерию оптимизма-пессимизма Гурвица исходя не из выигрыша, а из риска, как в критерии Сэвиджа, но мы на этом не будем останавливаться.

Несмотря на то, что выбор критерия, как и выбор параметра в критерии Гурвица, являются субъективным, все же может оказаться полезным посмотреть ситуацию с точки зрения этих критериев. Если рекомендации, вытекающие из различных критериев, совпадают — тем лучше, можно смело выбирать рекомендуемое ими решение. Если же, как это часто бывает, рекомендации противоречат друг другу — всегда имеет смысл задуматься над этим и принять окончательное решение с учетом его сильных и слабых сторон. Анализ матрицы игры с природой под углом зрения разных критериев часто дает лучшее представление о ситуации, о достоинствах и недостатках каждого решения, чем непосредственное рассмотрение матрицы, особенно, когда ее размеры велики.

Пример 2. Рассматривается игра с природой 4×3 с четырьмя стратегиями игрока: A_1, A_2, A_3, A_4 и тремя вариантами условий (состояний природы): P_1, P_2, P_3 . Матрица выигрышей дана в табл. 13.2.

Таблица 13.2

$A_i \backslash \Pi_j$	Π_1	Π_2	Π_3
A_1	0,20	0,30	0,15
A_2	0,75	0,20	0,35
A_3	0,25	0,80	0,25
A_4	0,85	0,05	0,45

Найти оптимальное решение (стратегию), пользуясь критериями Вальда, Сэвиджа и критерием Гурвица при $\alpha = 0,6$.

Решение. 1. Критерий Вальда.

В каждой строке матрицы берем наименьший выигрыш (табл. 13.3).

Из величин α_i максимальная (отмечена звездочкой) равна 0,25, следовательно, по критерию Вальда оптимальной является стратегия A_3 .

2. Критерий Сэвиджа.

Строим матрицу рисков и помещаем в правом добавочном столбце максимальный риск в каждой строке γ_i (табл. 13.4).

Минимальным из значений γ_i является 0,60 (отмечено звездочкой); следовательно, по критерию Сэвиджа, оптимальной является любая из стратегий A_2, A_3 .

Таблица 13.3

$A_i \backslash \Pi_j$	Π_1	Π_2	Π_3	α_i
A_1	0,20	0,30	0,15	0,15
A_2	0,75	0,20	0,35	0,20
A_3	0,25	0,80	0,25	0,25*
A_4	0,85	0,05	0,45	0,05

3. Критерий Гурвица ($\alpha = 0,6$).

Записываем в правых трех столбцах матрицы (табл. 13.5) «пессимистическую» оценку выигрыша α_i , «оптимистическую» ω_i и их среднее взвешенное по формуле (13.6):

$$h_i = 0,6\alpha_i + 0,4\omega_i,$$

Максимальное значение h_i (отмечено звездочкой) соответствует стратегии A_3 . Следовательно, по критерию Гурвица с легким перевесом в сторону пессимизма ($\alpha = 0,6$) оптимальной стратегией является A_3 . Таким образом, все три критерия согласно говорят в пользу стратегии A_3 , которую мы имеем все основания выбрать.

Таблица 13.4

$A_i \backslash \Pi_j$	Π_1	Π_2	Π_3	γ_i
A_1	0,65	0,50	0,30	0,65
A_2	0,10	0,60	0,10	0,60*
A_3	0,60	0	0,20	0,60*
A_4	0	0,75	0	0,75

Таблица 13.5

$A_i \backslash \Pi_j$	Π_1	Π_2	Π_3	α_i	ω_i	h_i
A_1	0,20	0,30	0,15	0,15	0,30	0,21
A_2	0,75	0,20	0,35	0,20	0,75	0,42
A_3	0,25	0,80	0,25	0,25	0,80	0,47*
A_4	0,85	0,05	0,45	0,05	0,85	0,37

Таблица 13.6

$A_i \backslash \Pi_j$	Π_1	Π_2	Π_3	Π_4
A_1	2	3	4	5
A_2	5	4	1	2
A_3	7	2	8	1

Таблица 13.7

$A_i \backslash \Pi_j$	Π_1	Π_2	Π_3	Π_4	α_i
A_1	2	3	4	5	2*
A_2	5	4	1	2	1
A_3	7	2	8	1	1

Таблица 13.8

$A_i \backslash \Pi_j$	Π_1	Π_2	Π_3	Π_4	γ_i
A_1	5	1	4	0	5
A_2	2	0	7	3	7
A_3^*	0	2	0	4	4*

Таблица 13.9

$A_i \backslash \Pi_j$	Π_1	Π_2	Π_3	Π_4	α_i	ω_i	h_i
A_1	2	3	4	5	2	5	3,5
A_2	5	4	1	2	1	5	3,0
A_3^*	7	2	8	1	1	8	4,5*

Пример 3. Рассматривается игра против природы 3×4 с матрицей выигрышей, помещенной в табл. 13.6.

Выбрать оптимальную стратегию по критериям Вальда, Сэвиджа и Гурвица при $\lambda = 0,5$

Решение 1. Критерий Вальда (табл. 13.7).

Оптимальная стратегия A_1

2. Критерий Сэвиджа (табл. 13.8).

Оптимальная стратегия A_3 .

3. Критерий Гурвица ($\lambda = 0,5$) (табл. 13.9).

Оптимальная стратегия A_3 .

Таким образом, критерии Сэвиджа и Гурвица говорят в пользу стратегии A_3 , тогда как критерий Вальда рекомендует A_1 . Если у принимающего решение нет особых оснований становится на точку зрения крайнего пессимизма, можно остановиться на стратегии A_3 .

В заключение заметим следующее. Все три критерия — Вальда, Сэвиджа и Гурвица — были сформулированы нами для чистых стратегий; но совершенно таким же образом можно сформировать их и для смешанных стратегий. Например, согласно критерию Сэвиджа следует выбирать ту смешанную стратегию

$$S_A = (p_1, p_2, \dots, p_m),$$

для которой достигается

$$\min_{(p_1, p_2, \dots, p_m)} \max_i (p_1 r_{1j} + p_2 r_{2j} + \dots + p_m r_{mj})$$

(минимум берется по всем $p_1, p_2, \dots, p_m \geq 0, p_1 + p_2 + \dots + p_m = 1$)
Найти этот минимакс (или максимин в критерии Вальда) можно обычными методами линейного программирования.

Могут быть случаи, когда применение смешанных стратегий при пользовании критериями Вальда, Сэвиджа, Гурвица даст преимущество по сравнению с тем решением, где применяются одни чистые страте-

гии, однако мы будем рассматривать эти критерии только для чистых стратегий. Одна из причин этого — в том, что мы хотим избежать сложных вычислений, когда их результат может быть сведен на нет недостатком сведений о ситуации (незнание вероятностей условий). Другая, более важная причина — в том, что основное содержание теории статистических решений (мы коснемся его в следующем параграфе) — это планирование получения и использования дополнительной информации о состоянии природы, которую можно добыть путем эксперимента. Исследования показывают, что в типичных случаях, когда речь идет о получении сколько-нибудь значительного количества дополнительной информации, критерии, не пользующиеся вероятностями состояний (Вальда и др.), становятся практически равносильными критерию, основанному на вероятностях состояний. Но мы знаем, что при пользовании таким критерием применение смешанных стратегий не имеет смысла; стало быть, если мы можем получить сколько-нибудь много дополнительной информации, применение смешанных стратегий теряет смысл (каким бы из критериев выбора решения мы ни пользовались). Если же мы не можем, производя эксперименты, добывать новую информацию, то различные критерии могут давать противоречащие друг другу рекомендации, как мы видели в примере 3.

14. ПЛАНИРОВАНИЕ ЭКСПЕРИМЕНТА В УСЛОВИЯХ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ

В этом параграфе мы коснемся очень важного в теории статистических решений вопроса о том, как нам могут помочь в принятии решения эксперименты, предпринятые с целью выяснения действительной обстановки? Этот вопрос является центральным в теории, как показывает само название: ведь слово «статистический» как раз и употребляется, когда речь идет о выводах из экспериментов, об их планировании и обработке.

Соответствующую теорию можно развивать как исходя из известных вероятностей состояний природы, так и из критериев, подобных критерию Вальда; мы будем здесь рассматривать теорию, исходящую из известных вероятностей состояний природы, как более простую.

Рассмотрим следующий вопрос. Нам предстоит предпринять некоторую операцию в недостаточно выясненных условиях. Имеет ли смысл для уточнения условий в нашей неопределенной ситуации предпринимать некоторый эксперимент \mathcal{E} ? Естественно, этот вопрос возникает только тогда, когда затраты на эксперимент существенны и сравнимы с тем увеличением выигрыша, которое мы можем получить, узнав обстановку более точно. Если же затраты на эксперимент пренебрежимо малы, ответ на этот вопрос всегда положителен.

Рассмотрим сначала случай «идеального» эксперимента \mathcal{E} , приводящего к совершенно точному знанию того состояния природы Π_j , которое имеет место в данной ситуации. Пусть задана матрица выигрышей $\|a_{ij}\|$ ($i = 1, \dots, m; j = 1, \dots, n$), а, кроме того, известны ве-

роятности Q_1, Q_2, \dots, Q_n различных условий $\Pi_1, \Pi_2, \dots, \Pi_n$. Пусть затраты на проведение эксперимента \mathcal{E} равны C . Сравним наш средний выигрыш без проведения эксперимента \mathcal{E} и средний выигрыш с проведением этого эксперимента.

Как мы видели в § 13, если не проводить дополнительно никакого эксперимента, то нужно в качестве решения выбрать ту стратегию $A^* = A_i$, для которой достигается максимальный средний выигрыш:

$$\max_i \{Q_1 a_{i1} + Q_2 a_{i2} + \dots + Q_n a_{in}\}, \quad (14.1)$$

Это и будет наш выигрыш без проведения эксперимента \mathcal{E} .

Теперь предположим, что мы произвели эксперимент \mathcal{E} и выяснили, какое из состояний $\Pi_1, \Pi_2, \dots, \Pi_n$ является действительным состоянием природы. Если это оказалось Π_1 , то мы должны применять ту стратегию A_{i1} , для которой достигается

$$\max_i a_{i1} = \beta_1,$$

и наш выигрыш будет равен β_1 ; если действительное состояние природы оказалось Π_2 , наш выигрыш будет β_2 , и т. д. Вообще, при действительном состоянии природы Π_j наш выигрыш будет равен максимальному выигрышу в j -м столбце:

$$\max_i a_{ij} = \beta_j.$$

Но нам нужно заранее решить, будем ли мы производить эксперимент \mathcal{E} или нет; нам неизвестно, какое из состояний Π_j на самом деле имеет место и каков будет наш выигрыш β_j . Поэтому осредним этот выигрыш с весами, равными вероятностям Q_j :

$$Q_1 \beta_1 + Q_2 \beta_2 + \dots + Q_n \beta_n.$$

С учетом стоимости эксперимента (которую нужно вычесть из выигрыша) наш средний выигрыш с применением идеального эксперимента \mathcal{E} равняется

$$Q_1 \beta_1 + Q_2 \beta_2 + \dots + Q_n \beta_n - C. \quad (14.2)$$

Итак, мы должны проводить эксперимент, если величина (14.2) больше, чем (14.1); если же, наоборот, величина (14.1) больше, то эксперимент \mathcal{E} нам не нужен.

Можно несколько видоизменить это правило, сделав его более простым. Мы видели, что эксперимент \mathcal{E} нам полезен (т. е. «по средству»), если

$$\begin{aligned} \max_i \{Q_1 a_{i1} + Q_2 a_{i2} + \dots + Q_n a_{in}\} < \\ < Q_1 \beta_1 + Q_2 \beta_2 + \dots + Q_n \beta_n - C. \end{aligned} \quad (14.3)$$

Перенесем C в левую часть, а «максимум» из левой части в правую, переменяя знак перед суммой и заменяя «максимум» на «минимум»; условие (14.3) переписывается в виде:

$$C < \min_i \{Q_1 (\beta_1 - a_{i1}) + Q_2 (\beta_2 - a_{i2}) + \dots + Q_n (\beta_n - a_{in})\}$$

или, короче

$$C < \min_i \left\{ \sum_{j=1}^n Q_j (\beta_j - a_{ij}) \right\}. \quad (14.4)$$

Но $\beta_j - a_{ij}$ есть не что иное, как риск r_{ij} , а сумма в правой части — средний ожидаемый риск:

$$\bar{r}_i = \sum_{j=1}^n Q_j r_{ij}.$$

Поэтому правило решения о выполнении эксперимента \mathcal{E} приобретает следующий вид.

Эксперимент \mathcal{E} нужно проводить, если затраты на его осуществление меньше минимального среднего риска:

$$C < \min_i \bar{r}_i. \quad (14.5)$$

В противном случае следует воздержаться от эксперимента, и применить ту стратегию A^ , для которой достигается этот минимум среднего риска.*

Пример 1. Рассматривается игра с природой 3×4 , условия которой приведены в табл. 14.1 (такую матрицу мы уже рассматривали в § 13).

Таблица 14.1

$A_i \backslash \Pi_j$	Π_1	Π_2	Π_3	Π_4
A_1	1	4	5	9
A_2	3	8	4	3
A_3	4	6	6	2

Вероятности состояний природы $\Pi_1, \Pi_2, \Pi_3, \Pi_4$ равны соответственно: $Q_1 = 0,1, Q_2 = 0,2, Q_3 = 0,5, Q_4 = 0,2$.

Таблица 14.2

$A_i \backslash \Pi_j$	Π_1	Π_2	Π_3	Π_4	\bar{r}_i
A_1	3	4	1	0	1,6
A_2	1	0	2	6	2,3
A_3	0	2	0	7	1,8

Определить, является ли целесообразным «идеальный» эксперимент, стоимость которого (в тех же единицах, в которых выражены выигрыши) равна 2.

Решение. Переходим от матрицы выигрышей к матрице рисков (табл. 14.2). В правом дополнительном столбце проставлены значения среднего риска. Минимальное из этих значений равно 1,6; следовательно, проведение эксперимента со стоимостью 2 единицы нецелесообразно.

Выше мы рассмотрели случай «идеального» эксперимента \mathcal{E} , в результате которого обстановка полностью выясняется.

Теперь рассмотрим случай не идеального эксперимента \mathcal{E} , который не приводит к выяснению в точности состояния природы Π_j , а лишь дает какие-то косвенные свидетельства в пользу тех или других состояний. В наиболее общем виде мы можем предположить, что эксперимент \mathcal{E} приводит к появлению одного из k несовместных событий

$$B_1, B_2, \dots, B_k,$$

причем вероятности этих событий (исходов эксперимента) зависят от условий, в которых он проводится: Π_1, Π_2, \dots или Π_n . Обозначим условную вероятность появления события B_l в условиях Π_j через

$$P(B_l/\Pi_j), \quad (j = 1, 2, \dots, n; l = 1, 2, \dots, k)$$

и будем считать, что все эти условные вероятности нам известны.

После осуществления эксперимента \mathcal{E} , давшего исход B_l , нам придется пересмотреть вероятности условий: состояния природы $\Pi_1, \Pi_2, \dots, \Pi_n$ будут характеризоваться не прежними (априорными) вероятностями

$$Q_1, Q_2, \dots, Q_n,$$

а новыми, «апостериорными» вероятностями состояний:

$$\tilde{Q}_{1l}, \tilde{Q}_{2l}, \dots, \tilde{Q}_{nl}$$

т. е. условными вероятностями состояний $\Pi_1, \Pi_2, \dots, \Pi_n$ при условии, что эксперимент дал результат B_l . Эти апостериорные вероятности подсчитываются по известной формуле Байеса:

$$\tilde{Q}_{jl} = \frac{Q_j P(B_l/\Pi_j)}{\sum_{i=1}^n Q_i P(B_l/\Pi_i)}, \quad (j = 1, \dots, n) \quad (14.6)$$

(с этим как раз и связано то, что соответствующий подход к принятию решения в ситуации неопределенности называется бейсовским).

Поскольку априорные вероятности состояний природы Q_1, Q_2, \dots, Q_n заменяются новыми, апостериорными $\tilde{Q}_{1l}, \tilde{Q}_{2l}, \dots, \tilde{Q}_{nl}$, то, значит, и оптимальная стратегия A^* в общем случае заменится новой оптимальной стратегией \tilde{A}^* , вычисленной с учетом апостериорных вероятностей (при условии события B_l).

Пример 2. В условиях примера 1 с априорными вероятностями условий

$$Q_1 = 0,1, \quad Q_2 = 0,2, \quad Q_3 = 0,5, \quad Q_4 = 0,2$$

производится эксперимент \mathcal{E} , служащий для уточнения обстановки. Этот эксперимент, вообще говоря, может иметь три возможных исхода:

$$B_1, B_2, B_3.$$

Условные вероятности этих исходов $P(B_l/\Pi_j)$ для разных состояний природы $\Pi_1, \Pi_2, \Pi_3, \Pi_4$ приведены в матрице условных вероятностей (табл. 14.3).

Таблица 14.3

$B_l \backslash \Pi_j$	Π_1	Π_2	Π_3	Π_4
B_1	0,2	0,9	0,4	0,3
B_2	0,1	0,1	0,5	0,3
B_3	0,7	0	0,1	0,4

Известно, что в эксперименте \mathcal{E} имел место исход B_1 . Вычислить апостериорные вероятности \tilde{Q}_{j1} . Указать новую оптимальную стратегию A_1^* .

Решение. По формуле (14.6) имеем:

$$\tilde{Q}_{11} = \frac{0,1 \cdot 0,2}{0,1 \cdot 0,2 + 0,2 \cdot 0,9 + 0,5 \cdot 0,4 + 0,2 \cdot 0,3} \approx 0,043,$$

$$\tilde{Q}_{21} = \frac{0,18}{0,46} \approx 0,392; \quad \tilde{Q}_{31} = \frac{0,20}{0,46} \approx 0,435;$$

$$\tilde{Q}_{41} = \frac{0,06}{0,46} \approx 0,130.$$

Таблица 14.4

$A_i \backslash \Pi_j$	Π_1	Π_2	Π_3	Π_4	$\tilde{a}_i^{(1)}$
A_1	1	4	5	8	4,96
A_2^*	3	8	4	3	5,20*
A_3	4	6	6	2	5,09
\tilde{Q}_{j1}	0,043	0,392	0,435	0,130	

Вычислим средние выигрыши $\tilde{a}_i^{(1)}$ при каждой стратегии с учетом найденных апостериорных вероятностей (табл. 14.4). В последней строке таблицы помещены апостериорные вероятности, в правом, дополнительном столбце — средние выигрыши при новых значениях вероятностей состояний, вычисленные по формуле

$$\tilde{a}_i^{(1)} = \tilde{Q}_{11} a_{i1} + \tilde{Q}_{21} a_{i2} + \tilde{Q}_{31} a_{i3} + \tilde{Q}_{41} a_{i4}.$$

Значения \tilde{Q}_{j1} даны в нижней строке таблицы.

Таким образом, с учетом результата B_1 опыта \mathcal{E} , оптимальной стратегией будет уже не A_1 , а A_2 .

Конечно, для того чтобы заранее решить, стоит ли нам проводить эксперимент \mathcal{E} или нет, нужно заранее произвести подобные расчеты не только для одного исхода B_1 , но и для всех остальных. Продолжим рассмотрение примеров.

Пример 3. В условиях примеров 1 и 2 выработать правило решения, которое указывало бы, при каком исходе эксперимента какую стратегию выбирать. Выяснить, насколько средний выигрыш при выполнении эксперимента \mathcal{E} больше среднего выигрыша без выполнения этого эксперимента.

Решение. Вычислим остальные апостериорные вероятности всех состояний природы $\tilde{Q}_{j2}, \tilde{Q}_{j3}$ ($j = 1, 2, 3, 4$) при условии, что эксперимент дал исходы B_2, B_3 соответственно. Вычисления будем производить по той же формуле (14.6):

$$\begin{aligned}\tilde{Q}_{12} &= \frac{0,1 \cdot 0,1}{0,1 \cdot 0,1 + 0,2 \cdot 0,1 + 0,5 \cdot 0,5 + 0,2 \cdot 0,3} \approx 0,029; \\ \tilde{Q}_{22} &= \frac{0,02}{0,34} \approx 0,059; \quad \tilde{Q}_{32} = \frac{0,25}{0,34} \approx 0,735; \quad \tilde{Q}_{42} = \frac{0,06}{0,34} \approx 0,177; \\ \tilde{Q}_{13} &= \frac{0,1 \cdot 0,7}{0,1 \cdot 0,7 + 0,2 \cdot 0 + 0,5 \cdot 0,1 + 0,2 \cdot 0,4} \approx 0,35; \\ \tilde{Q}_{23} &= \frac{0}{0,20} = 0; \quad \tilde{Q}_{33} = \frac{0,05}{0,25} = 0,25; \quad \tilde{Q}_{43} = \frac{0,08}{0,20} = 0,40.\end{aligned}$$

Сведем все новые (апостериорные) вероятности состояний природы при каждом из исходов B_1, B_2, B_3 в табл. 14.5.

Таблица 14.5

$B_l \backslash \Pi_j$	Π_1	Π_2	Π_3	Π_4
B_1	0,043	0,392	0,435	0,130
B_2	0,029	0,059	0,735	0,177
B_3	0,350	0	0,250	0,400

Таблица 14.6

$A_i \backslash \Pi_j$	Π_1	Π_2	Π_3	Π_4	$\bar{a}_i^{(2)}$
A_1^*	1	4	5	9	5,53*
A_2	3	8	4	3	4,03
A_3	4	6	6	2	5,23
\tilde{Q}_{j2}	0,029	0,059	0,735	0,177	

Таблица 14.7

$A_i \backslash \Pi_j$	Π_1	Π_2	Π_3	Π_4	$\bar{a}_i^{(3)}$
A_1^*	1	4	5	9	5,20*
A_2	3	8	4	3	3,25
A_3	4	6	6	2	3,70
\tilde{Q}_{j3}	0,350	0	0,250	0,400	

Теперь для каждого из событий B_2, B_3 (для B_1 мы уже это сделали) найдем средний выигрыш, осредняя его с весами, равными новым, апостериорным вероятностям. Оптимальную стратегию отмечаем звездочкой. Результаты расчетов для событий B_2 и B_3 соответственно приводятся в табл. 14.6 и 14.7. В нижней строке каждой таблицы приведены апостериорные вероятности состояний, а в правом столбце — средние выигрыши.

Теперь, на основе табл. 14.4, 14.6, и 14.7 мы можем сформулировать правило решения:

Если эксперимент \mathcal{E} дал результат B_1 — применять стратегию A_2 ; если он дал не B_1 (т. е. B_2 или B_3) — применять стратегию A_1 . При этом, если эксперимент дал исход B_1 , наш средний выигрыш будет равен 5,20; если B_2 — 5,53, а если B_3 , то 5,20.

Среднее значение среднего выигрыша при данном правиле решения может быть вычислено так: найдем полную вероятность события B_1 :
 $P(B_1) = Q_1 P(B_1/\Pi_1) + Q_2 P(B_1/\Pi_2) + Q_3 P(B_1/\Pi_3) + Q_4 P(B_1/\Pi_4) = 0,1 \cdot 0,2 + 0,2 \cdot 0,9 + 0,5 \cdot 0,4 + 0,2 \cdot 0,3 = 0,46;$

Аналогично находим вероятности событий B_2 и B_3 :
 $P(B_2) = Q_1 P(B_2/\Pi_1) + Q_2 P(B_2/\Pi_2) + Q_3 P(B_2/\Pi_3) + Q_4 P(B_2/\Pi_4) = 0,1 \cdot 0,1 + 0,2 \cdot 0,1 + 0,5 \cdot 0,5 + 0,2 \cdot 0,3 = 0,34;$
 $P(B_3) = Q_1 P(B_3/\Pi_1) + Q_2 P(B_3/\Pi_2) + Q_3 P(B_3/\Pi_3) + Q_4 P(B_3/\Pi_4) = 0,1 \cdot 0,7 + 0,2 \cdot 0 + 0,5 \cdot 0,1 + 0,2 \cdot 0,4 = 0,20.$

Полный средний выигрыш при данном правиле решения будет:

$$\bar{a}^* = 0,46 \cdot 5,20 + 0,34 \cdot 5,53 + 0,20 \cdot 5,20 = 5,345.$$

Сравним этот выигрыш с тем, который мы получили бы при отсутствии эксперимента (см. пример 1 § 13). Там мы получили $\bar{a}^* = 5,20$. Таким образом, выполнение эксперимента увеличило наш средний выигрыш на $5,345 - 5,20 = 0,145$. Отсюда следует вывод: если стоимость эксперимента меньше чем 0,145, то выполнение его целесообразно, если же она превышает 0,145 — нецелесообразно.

Расчеты целесообразности проведения эксперимента, разумеется, могут производиться исходя не из среднего выигрыша, а из среднего риска; при этом будут получаться те же самые результаты.

Аналогичным образом можно заранее подсчитать, выгодно ли нам не сколько раз провести эксперимент \mathcal{E} . Действительно, пусть, скажем, есть возможность произвести два независимых повторения $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2$ эксперимента \mathcal{E} , характеризующегося условными вероятностями исходов: $P(B_l/\Pi_j)$ ($j = 1, 2, \dots, n$; $l = 1, 2, \dots, k$) при условии данного состояния природы Π_j . Это равносильно проведению одного сложного эксперимента \mathcal{E} с исходами B_{ls} ($l = 1, 2, \dots, k$; $s = 1, 2, \dots, k$), где B_{ls} обозначено событие, состоящее в том, что первый эксперимент дал B_l , а второй — B_s . Условные вероятности этих исходов по правилу умножения вероятностей независимых событий будут: $P(B_{ls}/\Pi_j) = P(B_l/\Pi_j) P(B_s/\Pi_j)$. Таким образом задача сводится к ранее рассмотренной, только в эксперименте будет уже не k возможных исходов, а k^2 .

Так обстоит дело, когда повторное проведение экспериментов планируется заранее. Однако, когда речь идет о проведении ряда испытаний для уточнения сведений о действительных условиях в рассматриваемой ситуации, выгоднее не назначать число испытаний заранее, а решать после каждого испытания — стоит ли нам проводить следующее. Оказывается, что такой метод в ряде случаев дает заметную экономию в средствах, затрачиваемых на эксперимент.

МЕТОД СЕТЕВОГО ПЛАНИРОВАНИЯ

1. ЗАДАЧА ПЛАНИРОВАНИЯ КОМПЛЕКСА РАБОТ

При исследовании операций на практике часто приходится встречаться с задачей рационального планирования сложных, комплексных работ.

Примерами таких работ могут быть:

- строительство большого промышленного объекта,
- перевооружение армии или отдельных видов вооруженных сил,
- развертывание системы медицинских или профилактических мероприятий,

— выполнение комплексной научно-исследовательской темы с участием ряда организаций и т. д.

Характерным для каждого такого комплекса работ является то, что он состоит из ряда отдельных, элементарных работ или «звеньев», которые не просто выполняются независимо друг от друга, а взаимно обуславливают друг друга, так что выполнение некоторых работ не может быть начато раньше, чем завершены некоторые другие. Так, например, при строительстве промышленного предприятия рытье котлована не может быть начато раньше, чем будут доставлены и смонтированы соответствующие агрегаты; укладка фундамента не может быть начата раньше, чем будут доставлены необходимые материалы, для чего, в свою очередь, требуется завершение строительства подъездных путей; для всех этапов строительства необходимо наличие соответствующей технической документации, и т. д.

Планирование любого такого комплекса работ должно производиться с учетом следующих существенных элементов:

- времени, потребного на выполнение всего комплекса работ и его отдельных звеньев;
- стоимости всего комплекса работ и его отдельных звеньев;
- сырьевых, энергетических и людских ресурсов.

Рациональное планирование комплекса работ требует, в частности, ответа на следующие вопросы:

- Как распределить имеющиеся материальные средства и трудовые ресурсы между звеньями комплекса?
- В какие моменты начинать и когда заканчивать отдельные звенья?
- Какие могут возникнуть препятствия к своевременному завершению комплекса работ и как их устранять? и т. д.

При планировании сравнительно небольших по объему (количеству звеньев) комплексов работ ответ на такие вопросы обычно дает руководитель, причем без специальных математических расчетов, просто на основе опыта и здравого смысла. Однако, когда речь идет об очень сложных, дорогостоящих комплексах работ, состоящих из большого числа звеньев, сложным образом обуславливающих друг друга, такие приемы становятся недопустимыми. В этих случаях возникает необходимость в специальных расчетах, позволяющих обоснованно ответить на поставленные выше вопросы и ряд других.

Одним из математических методов, широко применяемых при решении такого рода задач, является метод сетевого планирования или, как его часто называют, СПУ (сетевое планирование управления).

Метод сетевого планирования позволяет решать как прямые, так и обратные задачи исследования операций. Прямые задачи отвечают на вопрос: что будет, если мы примем данную схему организации операции? Обратные отвечают на вопрос: как нужно организовать (спланировать) операцию, чтобы она обладала, в каком-то смысле, максимальной эффективностью?

Обратные задачи, как правило, гораздо сложнее прямых. Чтобы решать обратные задачи, нужно прежде всего научиться решать прямые. Естественно, с такого рода задач мы и начнем.

Основным материалом для сетевого планирования является список или перечень работ (звеньев) комплекса, в котором указаны не только работы, но и их взаимная обусловленность (окончание каких работ требуется для начала выполнения каждой работы). Будем называть такой список структурной таблицей комплекса работ.

Условимся обозначать работы a_1, a_2, \dots . В структурной таблице для каждой работы a_i должно быть указано, выполнения каких работ

Таблица 1.1

№ п/п	Работа	Опирается на работы
1	a_1	—
2	a_2	a_1, a_3
3	a_3	—
4	a_4	a_1, a_2, a_3
5	a_5	—
6	a_6	—
7	a_7	a_1, a_4, a_{10}
8	a_8	a_1, a_2
9	a_9	a_3, a_4, a_5
10	a_{10}	a_9
11	a_{11}	a_7, a_{12}
12	a_{12}	a_1, a_2
13	a_{13}	a_4, a_5, a_{10}
14	a_{14}	a_3, a_4, a_5
15	a_{15}	a_{10}

Таблица 1.2

№ п/п	Работа	Опирается на работы	Ранг	Обозначение в новой нумерации
1	a_1	—	1	b_1
2	a_2	a_1, a_3	2	b_5
3	a_3	—	1	b_2
4	a_4	a_1, a_2, a_3	3	b_6
5	a_5	—	1	b_3
6	a_6	—	1	b_4
7	a_7	a_1, a_4, a_{10}	6	b_{12}
8	a_8	a_1, a_2	3	b_7
9	a_9	a_3, a_4, a_5	4	b_9
10	a_{10}	a_1	5	b_{11}
11	a_{11}	a_7, a_{12}	7	b_{15}
12	a_{12}	a_1, a_2	3	b_8
13	a_{13}	a_3, a_4, a_{10}	6	b_{13}
14	a_{14}	a_3, a_4, a_5	4	b_{10}
15	a_{15}	a_{10}	6	b_{14}

Таблица 1.3

№ п/п	Работа	Опирается на работы
1	b_1	—
2	b_2	—
3	b_3	—
4	b_4	—
5	b_5	b_1, b_2
6	b_6	b_1, b_5, b_2
7	b_7	b_1, b_5
8	b_8	b_1, b_5
9	b_9	b_2, b_6, b_3
10	b_{10}	b_9
11	b_{11}	b_9
12	b_{12}	b_1, b_6, b_{11}
13	b_{13}	b_6, b_3, b_{11}
14	b_{14}	b_{11}
15	b_{15}	b_{12}, b_7

она требует, или, как мы будем говорить далее, на какие работы она опирается. Пример структурной таблицы комплекса работ дан в табл. 1.1.

В табл. 1.1 последний столбец содержит перечисление всех работ, без завершения которых данная работа не может быть начата. Прочерк в этой графе означает, что данная работа может быть начата непосредственно, сразу после принятия решения о проведении комплекса работ.

Первая операция, которую мы проведем со структурной таблицей, называется упорядочением. При упорядочении работам придается некоторая новая, более удобная нумерация (каждая работа может опираться только на работы с меньшими порядковыми номерами).

Для упорядочения все работы подразделяются на ранги. Работа называется работой первого ранга, если для ее начала не требуется выполнения никаких других работ. В табл. 1.1, как мы видим, имеются четыре работы первого ранга: a_1, a_3, a_5 и a_6 . Работа называется работой второго ранга, если она опирается на одну или несколько работ первого ранга. Работа называется работой k -го ранга, если она опирается на одну или несколько работ не выше $(k-1)$ -го ранга, среди которых есть хотя бы одна работа $(k-1)$ -го ранга.

После того как произведено распределение работ по рангам, работам приписываются новые номера, начиная с работ первого ранга, затем второго, третьего и т. д. Внутри каждого ранга работы нумеруются в произвольном порядке.

Для примера произведем упорядочение работ, помещенных в табл. 1.1 (см. табл. 1.2). В двух первых столбцах табл. 1.2 приведены: номер и обозначения работы в прежней нумерации, в двух последних — ранг работы и ее новое обозначение в упорядоченной структурной таблице.

После того как упорядочение работ по рангам произведено, можно составить новую, упорядоченную таблицу, где работы помещены в порядке их новых номеров (табл. 1.3).

Нетрудно видеть, что в новой, упорядоченной структурной табл. 1.3 каждая из работ опирается только на работы с меньшими порядковыми номерами.

В дальнейшем, приводя структурные таблицы различных комплексов работ, мы будем с самого начала считать их упорядоченными, а для работ сохраним первоначально взятые обозначения: a_1, a_2, \dots

2. СЕТЕВОЙ ГРАФИК КОМПЛЕКСА РАБОТ. ВРЕМЕННОЙ СЕТЕВОЙ ГРАФИК

Предположим, что нам задана упорядоченная структурная таблица комплекса работ, например, табл. 2.1.

Таблица 2.1

Работа	Опирается на работу
a_1	—
a_2	—
a_3	—
a_4	a_1, a_2
a_5	a_2, a_3
a_6	a_4
a_7	a_5, a_6
a_8	a_3, a_5, a_6
a_9	a_7
a_{10}	a_5, a_8

Связи между работами, входящими в этот комплекс, можно изобразить графически, в виде как называемого сетевого графика

к а (или графа). Этот график можно строить по-разному. Чаще всего изображают работы, входящие в комплекс, стрелками, а события, состоящие в выполнении каких-то работ и возможности начать новые работы — кружками или «узлами».

Для примера изобразим в виде сетевого графика структуру табл. 2.1 (рис. 10.1). Узлы будем обозначать A_0, A_1, A_2, \dots , работы a_1, a_2, \dots .

Исходный узел всего комплекса работ обозначим A_0 и будем понимать под ним «начало работ» или «принятие решения о начале работ». Из этого узла исходят стрелки a_1, a_2, a_3 , изображающие соответствующие работы и идущие соответственно в узлы A_1, A_2, A_3 . Совместное выполнение работ a_1, a_2 мы будем изображать дополнительным

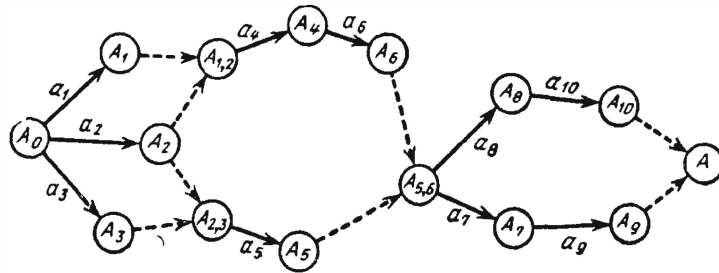


Рис. 10.1

узлом $A_{1,2}$, в который ведут пунктирные стрелки, не изображающие никаких работ, а означающие только логическую связь. Из узла $A_{1,2}$ исходит стрелка a_4 , изображающая работу a_4 , опирающуюся на работы a_1, a_2 ; в конце стрелки стоит узел A_4 , означающий выполнение работы a_4 , и т. д. Завершающий узел A означает конец всего комплекса работ. На графе опущены связи, логически вытекающие из других; например, работа a_8 в табл. 2.1 опирается на работы a_3, a_5, a_6 ; на графе она показана опирающейся только на a_5, a_6 , так как сама работа a_5 опирается на a_3 и без ее выполнения не может быть начата.

Как уже было сказано, существуют разные формы сетевых графиков (см., например, [17]). В одних стрелками графа обозначаются работы, а узлами — события, состоящие в выполнении одной или нескольких работ; в других — узлами обозначаются работы, а стрелками — логические связи между ними. Структурную табл. 2.1 можно изобразить графически и по этому, второму способу (см. рис. 10.2). На этом рисунке жирной линией обведены кружки a_9, a_{10} , изображающие последние работы комплекса, на которые не опираются уже никакие дальнейшие работы.

Каждый из способов построения сетевого графика имеет свои преимущества и свои недостатки. Преимуществом второго способа является то, что в него легко вносить новые, ранее не указанные связи, которые обнаруживаются в ходе выполнения работ. Преимуществом первого, на взгляд более сложного, способа является то, что он может быть сравнительно просто приспособлен к учету в р е м е н и выполнения

отдельных работ и комплекса в целом. Поэтому мы будем пользоваться первым способом.

Таблица 2.2

№ п/п	Работа a_i	Опирается на работы	Время t_i
1	a_1	—	10
2	a_2	—	5
3	a_3	—	15
4	a_4	a_1, a_2	18
5	a_5	a_2, a_3	19
6	a_6	a_4	18
7	a_7	a_5, a_6	8
8	a_8	a_5, a_6	25
9	a_9	a_7	30
10	a_{10}	a_8	8

Предположим, что нам задана структурная таблица комплекса работ, в которой проставлены времена выполнения каждой работы: t_1, t_2, \dots . Эти значения времен выполнения отдельных работ мы предполагаем не случайными, а известными заранее. Получится таблица

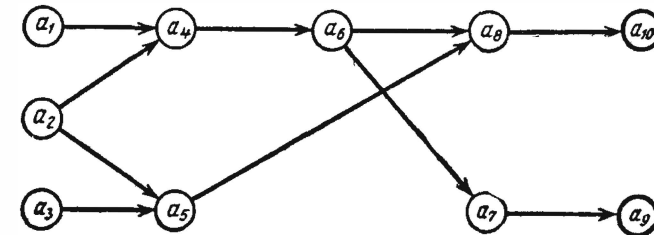


Рис. 10.2

вида табл. 2.2, в которой структурные связи — те же, что в табл. 2.1 и на графиках рис. 10.1, 10.2 (устранены только «лишние» связи), но в правом столбце указаны времена выполнения отдельных работ, выраженные в любых единицах времени (часы, недели, месяцы). Такую таблицу мы будем называть структурно-временной.

Временную структуру комплекса работ, вместе с логической структурой, можно изобразить на одном и том же графике, который мы будем называть в р е м е н н ы м с е т е в ы м г р а ф и к о м. Мы будем его строить следующим образом. График ориентируется вдоль оси времени $0t$, на которой в каком-то масштабе откладываются времена выполнения работ. Как и на графике рис. 10.1, стрелками изображаются работы, но длина каждой стрелки не произвольна, а такова, что ее проекция на ось абсцисс $0t$ равна времени выполнения данной работы. Логические связи между работами по-прежнему обозначаются пунктирными стрелками, не означающими никакой реальной работы (иногда их толкуют как «фиктивные» работы). Начальный узел A_0 по-прежнему

му изображает начало комплекса работ; кроме него, вводится конечный узел A , изображающий окончание комплекса (это точка графика с наибольшей абсциссой).

Временной сетевой график для комплекса работ, заданного в табл. 2.2, показан на рис. 10.3. При построении временного сетевого графика расположение узлов по вертикали (по оси ординат) берется произвольным, абсцисса же каждого узла равна времени окончания соответствующей работы. Длина каждой стрелки считается от центра до центра кружка.

Проследим, как строится временной сетевой график на рис. 10.3. Начинаем его с узла A_0 , помещенного в начале координат. Из этого узла исходят три стрелки: a_1 , a_2 , и a_3 , проекции которых на ось Ox

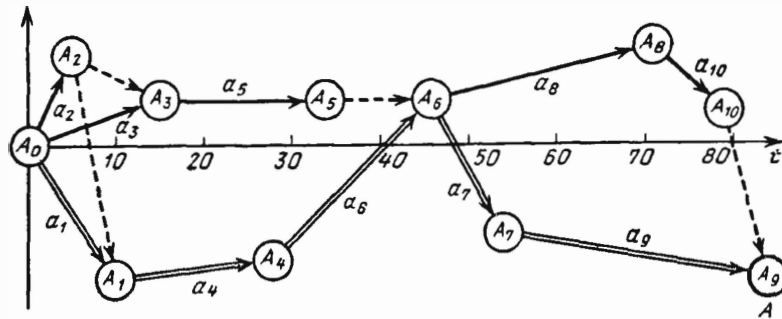


Рис. 10.3

равны временам выполнения соответствующих работ: $t_1 = 10$, $t_2 = 5$ и $t_3 = 15$. Работа a_4 опирается на работы a_1 и a_2 ; из них работа a_2 кончается в момент $t_2 = 5$, а работа a_1 — в момент $t_1 = 10$; значит, работа a_4 может начаться не раньше, чем в момент $t_1 = 10$, когда окончена a_1 . Начнем стрелку a_4 из узла A_1 , а узел A_2 соединим с A_1 пунктирной стрелкой. Проекция стрелки a_4 равна $t_4 = 18$, следовательно, абсцисса узла A_4 , в котором эта стрелка кончается, должна быть $T_4 = t_1 + t_4 = 10 + 18 = 28$.

Стрелка a_5 , опирающаяся на a_2 и a_3 , должна начаться в узле A_3 , имеющем наибольшую абсциссу из $t_2 = 5$ и $t_3 = 15$; узел A_2 соединим с A_3 пунктирной стрелкой. Узел A_5 , которым заканчивается стрелка a_5 , имеет абсциссу $T_5 = t_3 + t_5 = 15 + 19 = 34$.

Стрелка a_6 начинается в узле A_4 и кончается в узле A_6 с абсциссой $T_6 = T_4 + t_6 = 28 + 18 = 46$. Стрелка a_7 , опирающаяся на a_5 , a_6 , должна начинаться от узла A_6 , имеющего, по сравнению с A_5 , большую абсциссу; из A_6 направляем пунктирную стрелку. Стрелка a_7 кончается в узле A_7 с абсциссой $T_7 = 46 + 8 = 54$. Стрелка a_8 начинается в том же узле A_6 с абсциссой $T_8 = 46$ и кончается в узле A_8 с абсциссой $T_8 = 46 + 25 = 71$. Стрелка a_9 с проекцией $t_9 = 30$ начинается в узле A_7 и кончается в узле A_9 с абсциссой $T_9 = 54 + 30 = 84$. Стрелка a_{10} , опирающаяся на a_8 , начинается в узле A_8 и кончается в узле A_{10} с абсциссой $T_{10} = 71 + 8 = 79$.

Так как работа a_9 завершается последней, то узел $A_9 = A$ означает окончание всего комплекса работ; отметим этот узел жирным кружком и соединим с ним пунктирной стрелкой узел A_{10} — окончание предыдущей работы a_{10} , на которую, кроме конца работ, ничто не опирается.

Таким образом, временной сетевой график комплекса работ построен.

Время $T = 84$ от начального узла A_0 до завершающего $A = A_9$ представляет собой минимальное время, за которое может быть завершён комплекс работ.

Обратим внимание на следующее обстоятельство: время T представляет собой сумму времен исполнения не всех работ, а только некоторых из них:

$$T = t_1 + t_4 + t_6 + t_7 + t_9 = 10 + 18 + 18 + 8 + 30 = 84.$$

Работы a_1 , a_4 , a_6 , a_7 , a_9 , из длительностей которых составлено время T , называются критическими работами, а цепочка соответствующих им стрелок на сетевом графике — критическим путем. На рис. 10.3 критический путь показан двойными стрелками.

Особенность критических работ состоит в следующем: для того чтобы было соблюдено минимальное время выполнения комплекса, каждая из них должна начинаться точно в момент, когда закончена последняя из работ, на которые она опирается, и продолжаться не более того времени, которое ей отведено по плану; малейшее запоздание в выполнении каждой из критических работ приводит к соответствующей задержке выполнения плана в целом. Таким образом, критический путь на сетевом графике — это совокупность наиболее уязвимых, «слабых мест» плана, которые должны укладываться во временной план с наибольшей четкостью. Что касается остальных, «некритических» работ (в нашем случае это a_2 , a_3 , a_5 , a_8 , a_{10}), то с ними дело обстоит не так плохо: каждая из этих работ имеет известные временные резервы и может быть закончена с некоторым опозданием без того, чтобы это отразилось на сроке выполнения комплекса в целом.

Резервы, соответствующие некритическим работам, легко могут быть определены по сетевому графику.

Назовем «некритической дугой» совокупность некритических работ и узлов, начинающуюся и кончающуюся на критическом пути (принимая во внимание и пунктирные стрелки). На рис. 10.3 имеются четыре некритических дуги:

$$\begin{aligned} &A_0 - a_2 - A_2 - A_1, \\ &A_0 - a_3 - A_3 - a_5 - A_5 - A_6, \\ &A_0 - a_2 - A_2 - A_3 - a_5 - A_5 - A_6, \\ &A_6 - a_8 - A_8 - a_{10} - A_{10} - A_9. \end{aligned}$$

На первой из этих дуг лежит одна некритическая работа a_2 ; на второй — две некритические работы a_3 , a_5 ; на третьей — две некритические работы a_2 , a_5 ; на четвертой — две некритические работы a_8 , a_{10} .

Каждой некритической дуге соответствует определенный временной резерв, который может быть произвольным образом распределен между некритическими работами, лежащими на данной дуге. Этот резерв равен разности между суммой времен критических работ, лежащих на критическом пути, замыкающем дугу, и некритических, лежащих на самой дуге.

Например, на дуге $A_0 - a_2 - A_2 - A_1$ лежит только одна некритическая работа a_2 ; на замыкающем ее отрезке критического пути $A_0 - a_1 - A_1$ — одна критическая работа a_1 ; резерв времени, приходящийся на работу a_2 , равен $R_2 = t_1 - t_2 = 10 - 5 = 5$. Следовательно, выполнение работы a_2 может быть, без ущерба для общего срока, задержано на 5 единиц времени.

На второй некритической дуге $A_0 - a_3 - A_3 - a_5 - A_5 - A_6$ лежат две некритические работы a_3, a_5 ; на замыкающем участке критического пути — три критические работы a_1, a_4, a_6 . Значит, общий резерв времени, приходящийся на работы a_3, a_5 , равен:

$$R_{3,5} = t_1 + t_4 + t_6 - (t_3 + t_5) = 10 + 18 + 18 - (15 + 19) = 12.$$

Его можно любым образом распределить между работами a_3, a_5 .

На третьей некритической дуге резерв равен:

$$R_{2,5} = t_1 + t_4 + t_6 - (t_2 + t_5) = 10 + 18 + 18 - (5 + 19) = 22.$$

Так как нам уже известно, что с работой a_2 мы можем запоздать не более чем на 5 единиц времени, а с работой a_5 — не более чем на 12, то требование, чтобы сумма опозданий была не более 22, не говорит нам ничего нового.

На четвертой некритической дуге имеется резерв

$$R_{8,10} = t_7 + t_9 - (t_8 + t_{10}) = 8 + 30 - (25 + 8) = 5,$$

который может быть произвольно распределен между работами a_8, a_{10} .

Знание критического пути на сетевом графике полезно в двух отношениях: во-первых, оно позволяет выделить из всего комплекса работ совокупность наиболее «угрожаемых», непрерывно наблюдать за ними, и, в случае надобности, форсировать их выполнение; во-вторых, оно дает возможность в принципе ускорить выполнение комплекса работ за счет привлечения резервов, скрытых в некритических работах, если удастся за счет их «безвредного» замедления перебросить часть сил и средств на более важные, критические работы.

Заметим, что на сетевом графике вообще может быть не один критический путь, а два или более; естественно, сумма времен критических работ на каждом из них должна быть одна и та же.

Пример. Построить временной график для комплекса работ, данного в структурно-временной табл. 2.3. Найти на нем критический путь (или пути, если их несколько) и определить резервы времени на некритических дугах

Решение. Сетевой график комплекса дан на рис. 10.4. Критический путь обозначен двойными стрелками и состоит из работ:

$$a_1, a_5, a_7, a_9, a_{12}.$$

Таблица 2.3

№ п/п	Работа a_i	Опирается на работы	Время t_i
1	a_1	—	20
2	a_2	—	15
3	a_3	—	10
4	a_4	—	20
5	a_5	a_1, a_2, a_3	10
6	a_6	a_3, a_4	10
7	a_7	a_5, a_6	20
8	a_8	a_5, a_6	15
9	a_9	a_7, a_8	10
10	a_{10}	a_7, a_8	10
11	a_{11}	a_9, a_{10}	10
12	a_{12}	a_9, a_{10}	20

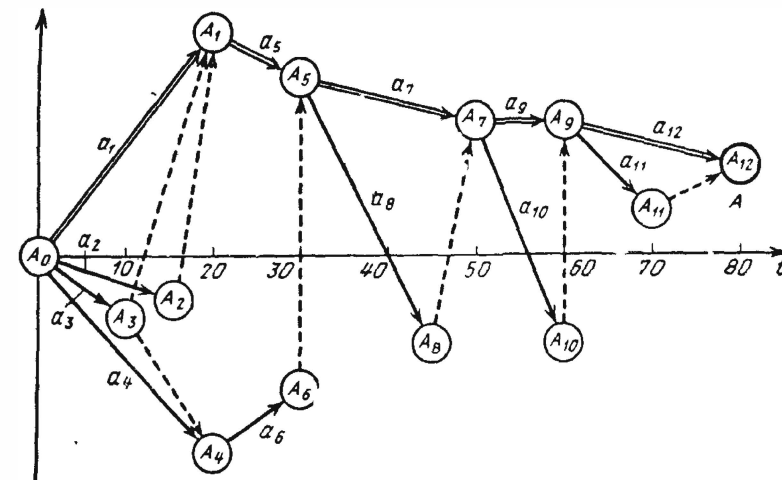


Рис. 10.4

Однако можно построить и другой критический путь, состоящий, например, из работ

$$a_4, a_6, a_7, a_{10}, a_{12};$$

при этом время T окончания комплекса работ по обоим критическим путям будет одно и то же:

$$T = t_1 + t_5 + t_7 + t_9 + t_{12} = 20 + 10 + 20 + 10 + 20 = 80,$$

$$T = t_4 + t_6 + t_7 + t_{10} + t_{12} = 20 + 10 + 20 + 10 + 20 = 80.$$

Кроме этих двух на графике (рис. 10.4) могут быть обнаружены еще некоторые критические пути; предоставляем читателю найти их самостоятельно.

Выделяем на сетевом графике (рис. 10.4) четыре некритические дуги:

$$A_0 - a_2 - A_2 - A_1,$$

$$A_0 - a_3 - A_3 - A_1,$$

$$A_3 - a_6 - A_3 - A_7,$$

$$A_6 - a_{11} - A_{11} - A_{12}.$$

На каждой из этих дуг имеется по одной некритической работе: a_2, a_3, a_8 и a_{11} . Резервы времени для них равны соответственно: $R_2 = t_1 - t_2 = 5$; $R_3 = t_1 - t_3 = 10$; $R_8 = t_7 - t_8 = 5$; $R_{11} = t_{12} - t_{11} = 10$.

Некритическая дуга $A_0 - a_3 - A_3 - A_4$ в наших условиях не дает новых данных о резервах времени.

3. ФОРМАЛЬНАЯ ЗАПИСЬ (АЛГОРИТМ) ЗАДАЧИ СЕТЕВОГО ПЛАНИРОВАНИЯ

Описанный выше графический способ построения и анализа плана работ пригоден только в случае, когда планируемый комплекс не слишком сложен (по количеству работ и логических связей). На практике часто встречаются комплексы работ, состоящие из огромного числа звеньев (порядка тысяч и более), сложным образом опирающихся друг на друга. Естественно, что в таких случаях вычерчивание сетевого графика вручную — тяжелое и неблагодарное занятие, так как основное преимущество сетевого графика — его наглядность — при этом теряется. Для анализа и усовершенствования плана работ в таких случаях обычно привлекают ЭЦВМ.

Для того чтобы машина была способна произвести соответствующие действия, необходимо полностью формализовать процедуру построения сетевого графика, выразить ее в виде четкой последовательности действий или алгоритма.

Опишем один из возможных алгоритмов, которые могут быть применены для этой цели. Прежде всего, выполняется упорядочение структурной таблицы (см. § 2), для чего работы разделяются на ранги, по признаку числа и рангов работ, на которые они опираются. Это — сравнительно простая задача, и на ней мы останавливаться не будем. Предположим, что упорядочение комплекса работ выполнено, и структурно-временная таблица представлена, например, в виде табл. 3.1.

Таблица 3.1

№ п/п	Работа a_i	Опирается на работы	Время t_i
1	a_1	—	t_1
2	a_2	—	t_2
3	a_3	—	t_3
4	a_4	a_1, a_2	t_4
5	a_5	a_1, a_3, a_4	t_5
6	a_6	a_2, a_3	t_6
7	a_7	a_4	t_7
8	a_8	a_4, a_5	t_8
9	a_9	a_4, a_5, a_6	t_9
10	a_{10}	a_8, a_9	t_{10}

Запишем в виде математических формул систему связей, отраженную в структурно-временной таблице комплекса. Для этого обозначим

τ_i — минимально возможный срок начала работы a_i (время отсчитывается от начала процесса), а T_i — минимально возможный срок ее окончания. Очевидно

$$T_i = \tau_i + t_i, \quad (3.1)$$

где t_i — время выполнения работы a_i .

Пользуясь этими обозначениями, можно записать формулами все логические связи между работами комплекса. Действительно, пусть, например, работа a_i опирается на работы a_j, a_l, a_k . Тогда работа a_i не может начаться раньше, чем кончится та из работ a_j, a_l, a_k , которая кончается позже всех. Эту связь мы запишем в виде формулы

$$\tau_i = \max \{T_j, T_l, T_k\}. \quad (3.2)$$

Применяя такие формулы ко всем работам комплекса по очереди, мы найдем все моменты окончания работ T_i и, в конце концов, минимальный срок окончания всего комплекса работ T .

Продemonстрируем, как это делается на материале табл. 3.1. Вычислим величины τ_i и T_i для всех работ комплекса.

Для работ первого ранга a_1, a_2, a_3 имеем:

$$\begin{aligned} \tau_1 = 0; \quad T_1 = t_1; \\ \tau_2 = 0; \quad T_2 = t_2; \\ \tau_3 = 0; \quad T_3 = t_3. \end{aligned}$$

Работа a_4 опирается на работы a_1, a_2 ; она может начаться в момент τ_4 , когда окончится наиболее поздно кончающаяся из работ a_1, a_2 :

$$\tau_4 = \max \{T_1, T_2\}. \quad (3.3)$$

Момент окончания работы a_4 :

$$T_4 = \tau_4 + t_4. \quad (3.4)$$

Аналогично, для работ a_5, a_6 и т. д.:

$$\left. \begin{aligned} \tau_5 &= \max \{T_1, T_3, T_4\}; \\ T_5 &= \tau_5 + t_5; \\ \tau_6 &= \max \{T_2, T_3\}; \\ T_6 &= \tau_6 + t_6; \\ \tau_7 &= \max \{T_4\} = T_4; \\ T_7 &= \tau_7 + t_7; \\ \tau_8 &= \max \{T_4, T_5\}; \\ T_8 &= \tau_8 + t_8; \\ \tau_9 &= \max \{T_4, T_5, T_6\}; \\ T_9 &= \tau_9 + t_9; \\ \tau_{10} &= \max \{T_8, T_9\}; \\ T_{10} &= \tau_{10} + t_{10}. \end{aligned} \right\} \quad (3.5)$$

Таким образом, найдены моменты начала τ_i и окончания T_i всех работ комплекса. Естественно, что время окончания всего комплекса равно максимальному из всех времен окончания:

$$T = \max \{T_1, T_2, \dots, T_{10}\}. \quad (3.6)$$

Чтобы найти критические работы (а стало быть, и критический путь), нужно сделать следующее; прежде всего найти работу a_i , для которой время окончания $T_i = T$ максимально; эта работа, конечно, будет критической. Затем найти среди формул (3.5) ту, которой определяется момент начала этой работы τ_i . Величина τ_i представлена в виде максимума каких-то моментов T_j, T_k, T_l, \dots ; нужно найти тот из них, на котором достигается максимум (если таких моментов несколько, взять любой из них). Та работа a_m , при которой достигается этот максимум, будет второй от конца работой на критическом пути. Далее точно так же определяется третья и т. д. работы на критическом пути. Таким образом, критической будет работа с самым поздним сроком окончания и все работы, на времени окончания которых достигается максимум в выражении, определяющем срок начала очередной критической работы. Конечно, максимум в каких-нибудь из формул (3.5) может достигаться не на одной, а на нескольких работах; соответственно на каждом шагу мы можем получить не один, а несколько критических путей.

Продemonстрируем алгоритм построения критического пути на материале той же структурно-временной табл. 3.1. Для этого, очевидно, надо задаться в этой таблице конкретными значениями времен t_i (табл. 3.2).

Таблица 3.2

№ п/п	Работа a_i	Опирается на работы	Время t_i
1	a_1	—	15
2	a_2	—	12
3	a_3	—	20
4	a_4	a_1, a_2	10
5	a_5	a_1, a_3, a_4	15
6	a_6	a_2, a_3	18
7	a_7	a_4	40
8	a_8	a_4, a_5	8
9	a_9	a_4, a_5, a_6	23
10	a_{10}	a_3, a_9	11

Имеем:

$$T_1 = 15; \quad T_2 = 12; \quad T_3 = 20; \\ \tau_4 = \max \{T_1, T_2\} = \max \{15, 12\} = 15. \quad (3.7)$$

$$T_4 = \tau_4 + t_4 = 15 + 10 = 25; \\ \tau_5 = \max \{T_1, T_3, T_4\} = \max \{15, 20, 25\} = 25. \quad (3.8)$$

$$T_5 = \tau_5 + t_5 = 25 + 15 = 40; \\ \tau_8 = \max \{T_2, T_3\} = \max \{12, 20\} = 20. \quad (3.9)$$

$$T_6 = \tau_6 + t_6 = 20 + 18 = 38; \\ \tau_7 = \max \{T_4\} = T_4 = 25. \quad (3.10)$$

$$T_7 = \tau_7 + t_7 = 25 + 40 = 65; \\ \tau_8 = \max \{T_4, T_5\} = \max \{25, 40\} = 40. \quad (3.11)$$

$$T_8 = \tau_8 + t_8 = 40 + 8 = 48; \\ \tau_9 = \max \{T_4, T_5, T_8\} = \max \{25, 40, 38\} = 40. \quad (3.12)$$

$$T_9 = \tau_9 + t_9 = 40 + 23 = 63; \\ \tau_{10} = \max \{T_8, T_9\} = \max \{48, 63\} = 63. \quad (3.13)$$

$$T_{10} = \tau_{10} + t_{10} = 63 + 11 = 74.$$

Время выполнения всего комплекса работ есть максимальное из всех времен T_i , т. е. $T_{10} = 74$:

$$T = \max \{T_1, T_2, \dots, T_{10}\} = 74. \quad (3.14)$$

Найдем критические работы, начиная с последней. Так как максимум в формуле (3.14) достигается для T_{10} , данная работа a_{10} является критической. Она опирается на работы a_8 и a_9 . Какая же из них является критической? Очевидно, a_9 , так как максимум в формуле (3.13) приходится на T_9 . Переходим к формуле (3.12) — в ней максимум приходится на T_5 , значит, работа a_5 — критическая. Далее, аналогичным способом, просматривая максимумы в формулах (3.11) — (3.7), находим одну за другой все критические работы. Перечисленные в естественном порядке, они будут: $a_1, a_3, a_4, a_6, a_9, a_{10}$.

Таким образом, критический путь найден чисто формальным способом, без построения сетевого графика. В табл. 3.2 подчеркнуты все критические работы.

Совершенно аналогичным формальным способом могут быть определены и не критические дуги, и соответствующие им резервы.

4. ОПТИМИЗАЦИЯ ПЛАНА КОМПЛЕКСА РАБОТ

Мы уже говорили о том, что сетевой график (или заменяющий его формальный алгоритм анализа комплекса работ) может быть использован для улучшения (оптимизации) плана.

Это улучшение может производиться с различными целями. Например, может оказаться, что общее время выполнения комплекса работ T нас не устраивает; возникает вопрос о том, как нужно форсировать работы для того, чтобы общее время не превосходило заданного срока T_0 . Очевидно, для этого имеет смысл форсировать именно критические работы, снижение длительности которых непосредственно скажется на времени T . Однако при этом может оказаться, что критический путь изменится, и наиболее слабыми местами по времени окажутся какие-то другие работы. Естественно предположить, что форсирование работ дается не даром, а требует вложения каких-то средств. Возникает типичная задача исследования операций: какие дополнительные средства и в какие работы следует вложить, чтобы общий срок выполнения комплекса работ был не больше заданной величины T_0 , а расход дополнительных средств был минимальным?

Другая задача оптимизации относится к перераспределению уже имеющихся средств между отдельными работами. Выше мы убедились, что все работы, кроме критических, имеют какие-то временные резервы. В некоторых случаях оказывается возможным, перебросив силы

и средства с не критических участков плана на критические, добиться уменьшения суммарного времени выполнения плана. Снова возникает типичная задача исследования операций: какие силы и средства надо перебросить с одних работ на другие для того, чтобы время выполнения комплекса работ стало минимальным?

Наконец, возможна еще одна постановка задачи оптимизации плана. После построения сетевого графика нам стало известно, что минимальное время выполнения всего комплекса работ укладывается в заданный срок с избытком:

$$T < T_0,$$

т. е. у нас есть известный резерв времени, которым мы вправе распорядиться, несколько растянув работы (но, разумеется, так, чтобы не выйти за заданный срок T_0). Растянув работы, мы можем сэкономить некоторые средства. Возникает вопрос: до каких пределов можно увеличивать времена выполнения работ и каких работ, чтобы полученная от этого экономия средств была максимальной? В такой постановке может ставиться задача оптимизации необязательно всего плана, а может быть, отдельных не критических дуг, на которых выявлены временные резервы.

Дадим постановку каждой из этих задач оптимизации в формульной записи. Для простоты будем предполагать, что критический путь — один (если это не так, очевидно, всегда можно, внося во времена выполнения работ ϵ -изменения, сделать критический путь единственным, подобно тому, как мы поступали в вырожденных задачах линейного программирования).

Задача 1. Комплекс состоит из работ a_1, a_2, \dots, a_n с временами выполнения t_1, t_2, \dots, t_n ; известен критический путь, причем время выполнения комплекса равно

$$T = \sum_{(кр)} t_i > T_0, \quad (4.1)$$

где суммирование распространяется только на критические работы. Заданный срок выполнения комплекса работ равен T_0 .

Известно, что вложение определенной суммы x дополнительных средств в работу a_i сокращает время выполнения с t_i до $t_i' = f_i(x) < t_i$.

Спрашивается, какие дополнительные средства x_1, x_2, \dots, x_n следует вложить в каждую из работ, чтобы:

- срок выполнения комплекса был не выше заданного T_0 ,
- сумма вложенных средств достигала минимума.

Таким образом, нам требуется определить неотрицательные значения переменных x_1, x_2, \dots, x_n (дополнительные вложения) так, чтобы выполнялось условие

$$T' = \sum_{(кр)} f_i(x_i) \leq T_0, \quad (4.2)$$

где суммирование распространяется по всем критическим работам нового критического пути (полученного после перераспределения

средств и изменения времен), и чтобы при этом общая сумма дополнительных вложений была минимальна:

$$x = \sum_{i=1}^n x_i = \min. \quad (4.3)$$

Поставленная задача напоминает задачу линейного программирования, потому что в ней при некоторых ограничениях-неравенствах требуется минимизировать линейную функцию (4.3) от элементов решения. Однако в общем случае входящие в ограничения (4.2) функции $f_i(x_i)$ нелинейны, так как вложение каких-то средств в работу a_i не обязательно вызывает линейное уменьшение времени, затрачиваемого на эту работу. Поэтому в общем виде поставленная задача относится к классу задач нелинейного программирования, которые гораздо сложнее линейных задач и общие способы решения которых не разработаны. Такими нелинейными задачами мы здесь заниматься не будем, отсылая интересующихся к специальным руководствам ([2, 28]). Однако, если ограничиться сравнительно небольшими изменениями плана (такими, при которых время выполнения работ приблизительно линейно зависит от вложенных дополнительных средств, а критический путь не меняется), поставленная задача становится задачей линейного программирования и может быть решена уже известными нам способами (см. гл. 2).

Пример 1. Имеется комплекс работ a_1, a_2, \dots, a_8 , параметры которого даны в структурно-временной табл. 4.1.

Таблица 4.1

№ п/п	Работа a_i	Опирается на работы	Время t_i
1	a_1	—	20
2	a_2	—	10
3	a_3	—	8
4	a_4	a_1, a_2	20
5	a_5	a_1, a_2, a_3	10
6	a_6	a_1, a_2, a_3	5
7	a_7	a_6	5
8	a_8	a_4, a_5, a_7	10

Сетевой график комплекса работ дан на рис. 10.5. Завершение работы — узел $A = A_8$; критический путь состоит из работ a_1, a_4, a_8 . Время окончания комплекса:

$$T = t_1 + t_4 + t_8 = 50.$$

Это время должно быть уменьшено до $T_0 = 40$; для этого нам понадобится форсировать некоторые критические работы. Известно, что в работу a_i можно вложить средства x_i в размере не более, чем c_i , при этом время выполнения работы уменьшается согласно линейной зависимости:

$$x_i \leq c_i, \quad t_i' = t_i(1 - b_i x). \quad (4.4)$$

Для критических работ a_1, a_4, a_8 параметры b_i, c_i равны

$$\left. \begin{aligned} b_1=0,2, c_1=2, \\ b_4=0,3, c_4=2, \\ b_8=0,1, c_8=5. \end{aligned} \right\} \quad (4.5)$$

Требуется определить вложения x_1, x_4, x_8 так, чтобы срок выполнения комплекса был не больше $T_0 = 40$, а сумма вложений достигала минимума

$$x_1 + x_4 + x_8 = \min.$$

Решение. Условия (4.4) и (4.5) дают

$$2 - x_1 > 0; \quad 2 - x_4 > 0; \quad 5 - x_8 > 0. \quad (4.6)$$

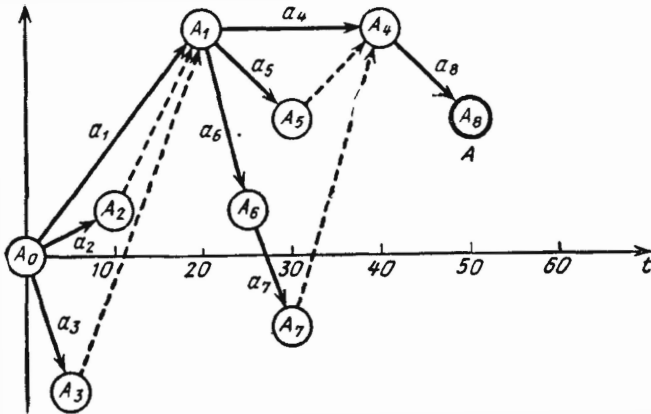


Рис. 10.5

Новый срок выполнения работ (при условии, что критический путь не изменится)

$$\begin{aligned} T' &= t_1' + t_4' + t_8' = t_1(1 - 0,2x_1) + t_4(1 - 0,3x_4) + t_8(1 - 0,1x_8) = \\ &= 20(1 - 0,2x_1) + 20(1 - 0,3x_4) + 10(1 - 0,1x_8) = 50 - 4x_1 - 6x_4 - x_8. \end{aligned}$$

Эта величина не должна превосходить $T_0 = 40$:

$$50 - 4x_1 - 6x_4 - x_8 < 40,$$

откуда

$$4x_1 + 6x_4 + x_8 \geq 10. \quad (4.7)$$

Поставим задачу линейного программирования: найти неотрицательные значения переменных x_1, x_4, x_8 , удовлетворяющие условиям-неравенствам (4.6), (4.7) и обращающие в минимум линейную функцию

$$L = x_1 + x_4 + x_8. \quad (4.8)$$

Решаем задачу согласно общим правилам симплекс-метода (см. гл. 2). Введем дополнительные переменные y_1, y_2, y_3, y_4 условия-неравенства

Таблица 4.2

	Свободный член	x_1	x_4	x_8
L	0	-1	-1	-1
y_1	2	1	0	0
y_2	2	0	1	0
y_3	5	0	0	1
y_4	-10	-4	-6	-1

Таблица 4.3

	Свободный член	x_1	x_4	x_8
y_1	2	1	0	0
y_2	2	$-\frac{5}{3}$	$-\frac{2}{3}$	$\frac{1}{6}$
y_3	5	0	0	1
y_4	-10	$-\frac{4}{3}$	$-\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{6}$

Таблица 4.4

	Свободный член	x_1	y_4	x_8
L	$\frac{5}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{6}$	$-\frac{5}{6}$
y_1	2	1	0	0
y_2	$\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{3}$	$\frac{1}{6}$	$-\frac{1}{6}$
y_3	5	0	0	1
x_4	$\frac{5}{3}$	$\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

(4.6), (4.7) преобразуются в равенства:

$$\left. \begin{aligned} y_1 &= 2 - x_1, \\ y_2 &= 2 - x_4, \\ y_3 &= 5 - x_8, \\ y_4 &= 4x_1 + 6x_4 + x_8 - 10. \end{aligned} \right\}$$

Составляем симплекс-таблицу (табл. 4.2). Полагая свободные переменные равными нулю: $x_1 = x_4 = x_8 = 0$, получим недопустимое решение, в котором $y_4 = -10$, поэтому опорное решение ОЗЛП требуется еще найти. Поступаем согласно общему правилу нахождения опорного решения ОЗЛП (см. § 7 гл. 2) Отбрасывая временно строку L (при нахождении опорного решения она не нужна) и выбирая в качестве разрешающего элемента элемент -6 в последней строке, получим симплекс-таблицу (табл. 4.3).

Продолжая действия, приходим к опорному решению, записанному в табл. 4.4.

В табл. 4.4 все свободные члены уже положительны, значит, опорное решение найдено. В строке L табл. 4.4 помещена (в стандартном виде) линейная функция L , выраженная через новые свободные переменные x_1, y_4, x_8 :

$$\begin{aligned} L &= x_1 + x_4 + x_8 = x_1 + \frac{5}{3} - \frac{2}{3}x_1 + \frac{1}{6}y_4 - \frac{1}{6}x_8 + x_8 = \\ &= \frac{5}{3} + \frac{1}{3}x_1 + \frac{1}{6}y_4 + \frac{5}{6}x_8 = \frac{5}{3} - \left(-\frac{1}{3}x_1 - \frac{1}{6}y_4 - \frac{5}{6}x_8\right). \end{aligned}$$

Все коэффициенты в верхней строке табл. 4.4 отрицательны; следовательно, увеличение каждой из свободных переменных может только увеличить функцию L . Значит, оптимальное решение найдено:

$$\begin{aligned} x_1 &= y_4 = x_8 = 0, \\ y_1 &= 2, y_2 = 1/3, y_3 = 5, x_4 = 5/3. \end{aligned}$$

При этих значениях переменных сумма вложений достигает минимума:

$$L = L_{min} = 5/3.$$

Таким образом, оптимальным решением по вложению средств является следующее: вложить сумму $x_4 = 5/3$ в работу a_4 ; в работы a_1 и a_8 не вкладывать средств. При этом срок T' выполнения работ будет:

$$T' = t_1 + t_4' + t_8 = 20 + 20(1 - 0,3 \cdot 5/3) + 10 = 20 + 10 + 10 = 40 = T_0.$$

Проверим, сохранится ли при таком решении критический путь?

Из рис. 10.5 видно, что сокращение t_4 с 20 до 10 еще не меняет критического пути, но находится уже на самой границе того сокращения, при котором критический путь меняется.

Возникает естественный вопрос: а как быть, если при вложении средств в какие-то работы критический путь изменится? Оказывается, в этом случае задачу оптимизации также можно свести к задаче линейного программирования, но к другой — уже более сложной, с большим числом переменных. Покажем, как это делается, на том же примере, но в буквенном виде, не доводя до численных результатов.

В качестве переменных введем средства x_1, \dots, x_8 , вкладываемые в работы a_1, \dots, a_8 ; моменты τ_4, \dots, τ_8 начала работ a_4, \dots, a_8 (моменты τ_1, τ_2, τ_3 равны 0) и моменты T_1, T_2, \dots, T_8 окончания всех работ. Структурная таблица дает нам следующие ограничения-неравенства:

$$\begin{aligned} \tau_4 &\geq T_1, & \tau_4 &\geq T_2; \\ \tau_5 &\geq T_1, & \tau_5 &\geq T_2, & \tau_5 &\geq T_3; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tau_6 &\geq T_1, & \tau_6 &\geq T_2, & \tau_6 &\geq T_3; \\ & & \tau_7 &\geq T_6; \\ \tau_8 &\geq T_4; & \tau_8 &\geq T_6, & \tau_8 &\geq T_7. \end{aligned}$$

Условия зависимости времени выполнения работы от вложенных средств дадут нам ограничения-равенства:

$$T_i = t_i - t_i b_i x_i + \tau_i \quad (i = 1, \dots, 8)$$

(напомним, что здесь t_i и b_i — постоянные). Далее, сохраняются условия-неравенства

$$x_i \leq c_i, \quad (i = 1, \dots, 8).$$

Наконец, условие выполнения всего комплекса работ в срок обратится в ограничения-неравенства

$$T_1 \leq T_0, \dots, T_8 \leq T_0,$$

из которых, в силу особенностей данной конкретной структурной таблицы, можно оставить лишь последнее: $T_8 \leq T_0$.

При всех этих условиях нужно минимизировать линейную функцию

$$L = x_1 + \dots + x_8.$$

Итак, задача свелась к задаче линейного программирования с 21 переменной, с 8 ограничениями-неравенствами и 21 ограничением-неравенством; введением дополнительных переменных ее можно свести к ОЗЛП с 42 переменными и 29 ограничениями-равенствами. Конечно задача с семью переменными и четырьмя ограничениями-равенствами во много раз проще; так что в таких случаях разумно сначала проверить, не сохранится ли критический путь прежним, как это было при числовых значениях t_i, b_i, c_i , рассмотренных в примере 1.

Задача 2. Имеется совокупность работ: a_1, a_2, \dots, a_n с временами выполнения t_1, t_2, \dots, t_n . Время выполнения комплекса работ выражается формулой

$$T = \sum_{(кр)} t_i. \quad (4.9)$$

На некритических работах имеются некоторые резервы времени; пользуясь этими резервами, т. е. перебрасывая какие-то средства с некритических работ на критические, можно уменьшить времена выполнения критических работ и тем самым время выполнения всего комплекса.

Имеется некоторый неизменный запас подвижных средств B , который распределен между работами a_1, a_2, \dots, a_n так, что каждой работе соответствует количество подвижных средств, равное соответственно

$$b_1, b_2, \dots, b_n; \quad \sum_{i=1}^n b_i = B.$$

Известно, что количество средств $x > 0$, снятое с работы a_i , увеличивает время ее выполнения с t_i до

$$t_i' = f_i(x) > t_i,$$

а количество средств x , вложенное дополнительно в работу a_i , уменьшает время ее выполнения до

$$t_i'' = \varphi_i(x) < t_i.$$

Спрашивается: как надо перераспределить имеющиеся подвижные средства B между работами для того, чтобы срок выполнения комплекса был минимальным?

Покажем, как может быть решена подобная задача.

Обозначим x_i — количество подвижных средств, перебрасываемых на работу a_i (x_i отрицательно, если с работы a_i с ним а е т с я какое-то количество средств).

Величины x_i должны удовлетворять ограничениям:

$$x_i \geq -b_i \quad (i = 1, \dots, n). \quad (4.10)$$

Естественно, что сумма средств, снимаемых с каких-то работ, должна быть равна сумме средств, добавляемых другим работам, так что

$$x_1 + \dots + x_n = 0. \quad (4.11)$$

После переброски средств для тех работ, на которые они перебрасываются, новые времена будут равны

$$t_i' = \varphi_i(x_i), \quad (4.12)$$

для тех же работ, с которых средства снимаются:

$$t_j'' = f_j(|x_j|). \quad (4.13)$$

Общий срок выполнения комплекса работ будет:

$$T' = \sum_{(кр)} \varphi_i(x_i) + \sum_{(кр)} f_j(|x_j|), \quad (4.14)$$

где первая сумма распространяется на все работы, на которые переносятся средства, если они входят в критический путь; вторая — на все работы, с которых переносятся средства, если они входят в критический путь.

Естественно, кажется, считать, что перенос средств имеет смысл только с некритических работ на критические; однако не надо забывать, что при этом некритические работы могут переходить в критические, а наоборот; поэтому в формуле (4.14) в общем случае присутствуют обе суммы.

Итак, перед нами стоит задача: найти такие значения переменных x_i ($i = 1, \dots, n$), чтобы выполнялись ограничения (4.10), а функция (4.14) обращалась в минимум.

Задача представляет собой задачу нелинейного программирования даже в случае, когда функции f_i и f_j (что с некоторой натяжкой можно допустить) линейны. Существенно нелинейным в функции (4.14) является то, что значения i, j — номеров работ, на которые распространяется сумма (т. е. критических работ), сами зависят от x_i .

Как уже говорилось, общих способов решения задач нелинейного программирования не разработано; однако в отдельных случаях можно решать подобного рода задачи, пользуясь сравнительно нехитрыми приемами. В следующем примере мы рассмотрим решение одной из таких задач.

Пример 2. Комплекс работ a_1, a_2, a_3 задан структурно-временной табл. 4.5. Здесь критическими являются работы a_1, a_3 ; время выполнения комплекса $T = 30$. Некритической является работа a_2 . На ней имеется запас подвижных средств $b_2 = 1$. Запасы подвижных средств на остальных двух работах отсутствуют.

Таблица 4.5

№ п/п	Работ. a_i	Опирается на работы	Время t_i
1	a_1	—	20
2	a_2	—	10
3	a_3	a_1, a_2	10

Известно, что переброска средств x с работы a_2 увеличивает время ее выполнения до

$$t_2'' = \frac{10}{1 - 0,1x}.$$

Запас средств x , переброшенный на работу a_1 , уменьшает время ее выполнения до

$$t_1' = \frac{20}{1 + x}.$$

Запас средств x , переброшенный на работу a_3 , уменьшает время ее выполнения до

$$t_3' = \frac{10}{1 + 4x}.$$

Требуется определить, как оптимальным образом перебросить свободные средства с работы a_2 на работы a_1 и a_3 , чтобы срок выполнения комплекса был минимален.

Решение. Обозначим количества средств, перебрасываемые с работы a_2 соответственно на a_1 и a_3 , через x_1 и x_3 . Требуется найти такие неотрицательные значения x_1 и x_3 , чтобы выполнялись условия:

$$x_1 + x_3 < 1, \quad (4.15)$$

$$(t_1')_{кр} + (t_2'')_{кр} + (t_3')_{кр} = \min, \quad (4.1)$$

где индекс «кр» означает, что соответствующий член входит в сумму только если он принадлежит критическому пути.

Посмотрим, при каких условиях работа a_2 войдет в критический путь. Это произойдет, если время ее выполнения станет больше, чем время выполнения работы a_1 :

$$t_2'' > t_1'.$$

«Перескок» работы a_2 на критический путь происходит, когда осуществляется равенство:

$$t_2'' = t_1'$$

или (если с работы a_2 сняты все средства)

$$\frac{10}{1-0,1} = \frac{20}{1+x_1},$$

что осуществляется при $x_1 = 0,8$. Значит, работа a_2 при $x_1 < 0,8$ критической не станет: критическими останутся работы a_1 и a_3 . Предположим, что это так. и в формуле (4.16) второй член будет равным нулю, а два другие t_1' и t_3'

$$T' = t_1' + t_3' = \frac{20}{1+x_1} + \frac{10}{1+4x_3}.$$

Учитывая (4.15), имеем $x_3 = 1 - x_1$, и

$$T' = \frac{20}{1+x_1} + \frac{10}{5-4x_1}.$$

Исследуем эту функцию на максимум; найдем ее производную по x_1 :

$$\frac{dT'}{dx_1} = \frac{20}{(1+x_1)^2} - \frac{40}{(5-4x_1)^2} = \frac{(5-4x_1)^2 20 - (1+x_1)^2 40}{(1+x_1)^2 (5-4x_1)^2}.$$

Производная $\frac{dT'}{dx_1}$ обращается в нуль тогда, когда обращается в нуль числитель. Решая полученное квадратное уравнение и беря тот корень, который лежит между нулем и единицей, получим $x_1 \approx 0,66$.

Нетрудно непосредственно убедиться, что в этой точке достигается минимум, а не максимум величины T' . Так как $x_1 = 0,66 < 0,8$, то критический путь сохранится.

Итак, в нашем примере наиболее выгодное перераспределение средств состоит в следующем: из имеющегося запаса свободных средств $b_2 = 1$ средства $x_1 = 0,66$ должны быть перенесены на работу a_1 , а средства $x_3 = 1 - 0,66 = 0,34$ — на работу a_3 . При этом время выполнения комплекса работ принимает минимальное значение $T' = 16,29$. Времена выполнения отдельных работ a_1 , a_2 и a_3 будут равны соответственно $t_1' = 12,05$, $t_2'' = 11,11$, $t_3' = 4,24$.

Задача 3. Имеется комплекс работ a_1, a_2, \dots, a_n с временами выполнения t_1, t_2, \dots, t_n . Для этого комплекса найден критический путь и установлено, что минимальное время выполнения комплекса $T < T_0$, где T_0 — заданный срок выполнения. Предполагается снизить темпы выполнения некоторых работ с тем, чтобы срок выполнения комплекса довести до заданного значения T_0 ; за счет этого предполагается получить экономию средств. Увеличение времени выполнения работы a_i на τ (т. е. доведение времени выполнения работы a_i до $t_i + \tau$) высвобождает некоторые средства x_i , которые зависят от задержки τ :

$$x_i = f_i(\tau).$$

Требуется определить, насколько следует задержать выполнение каждой работы для того, чтобы срок T_0 был выдержан, а экономия средств получилась максимальная.

Обозначим τ_i время задержки работы a_i . Сумма времен выполнения работ, лежащих на критическом пути, не должна превосходить T_0 :

$$\sum_{(кр)} (t_i + \tau_i) \leq T_0,$$

где сумма, как и ранее, распространяется только на критические работы. Требуется выбрать такие неотрицательные значения переменных τ_i , чтобы сумма высвободившихся средств достигала максимума:

$$\sum_i f_i(\tau_i) = \max.$$

Поставленная задача снова относится к классу задач нелинейного программирования. В случае, когда речь идет только о незначительных задержках τ_i , иногда удается свести ее к задаче линейного программирования (а именно, если функции f_i близки к линейным в диапазоне возможных значений τ_i , а критический путь при задержках не меняется).

5. СЕТЕВОЕ ПЛАНИРОВАНИЕ ПРИ СЛУЧАЙНЫХ ВРЕМЕНАХ ВЫПОЛНЕНИЯ РАБОТ. ПРИМЕНЕНИЕ ЭЦВМ

До сих пор, рассматривая задачи планирования комплекса работ, мы ограничивались случаем, когда времена выполнения отдельных работ были нам в точности известны заранее (так называемый детерминированный случай). На практике это редко бывает так: чаще встречаются случаи, когда фактическое время выполнения работы заранее в точности неизвестно (случайно) и может сильно отклоняться от своего предсказанного значения. Отклонение случайной величины t_i — времени выполнения работы a_i — от ее заранее заданного значения $t_i^{(0)}$ может быть, вообще говоря, в обе стороны — как в большую (опоздание), так и в меньшую (опережение), хотя на практике второе встречается гораздо реже первого.

Возникают следующие вопросы:

— Какова вероятность того, что фактическое время выполнения комплекса работ T не превзойдет заданной величины T_0 ?

— Как следует организовать комплекс работ для того, чтобы величина T не превзошла заданного T_0 с достаточно высокой вероятностью?

Рассмотрим первый вопрос как более простой (тем более, что для ответа на второй, прежде всего, надо уметь ответить на первый). Предположим, что времена выполнения работ t_1, t_2, \dots, t_n представляют собой случайные величины с известными законами распределения. Предположим для простоты, что эти случайные величины независимы, и плотности их равны

$$f_1(t), f_2(t), \dots, f_n(t).$$

Рассматривается функция этих случайных величин — общее время выполнения всего комплекса работ:

$$T = \sum_{(кр)} t_i. \quad (5.1)$$

Поставленная задача будет решена, если удастся найти функцию распределения случайной величины T :

$$F(t) = P(T < t).$$

Тогда, подставляя в нее вместо t величину T_0 , мы найдем искомую вероятность.

Функция (5.1) в общем случае является достаточно сложной, так как сам критический путь случаен и зависит от тех значений, которые принимают случайные величины t_i — времена выполнения отдельных работ: при одних значениях t_i может быть один критический путь, при других — другой. Однако если ограничиться только сравнительно малыми отклонениями случайных величин t_i от своих номинальных значений $t_i^{(0)}$ (настолько малыми, что критический путь остается тем же), то задача сильно упрощается. Тогда в формуле (5.1) фигурируют только несколько вполне определенных случайных величин t_i — времен выполнения критических работ. Закон распределения случайной величины T представляет собой в этом случае не что иное, как композицию законов распределения случайных величин t_i , относящихся к критическим работам.

В дальнейшем нам приходит на помощь сама сложность плана и наличие на критическом пути многих работ. Мы знаем, что при сложении достаточно большого числа независимых случайных величин, распределенных по любым законам и сравнимых по порядку дисперсий, закон распределения суммы оказывается близким к нормальному (центральная предельная теорема). Поэтому, если на критическом пути стоит достаточно большое количество работ (скажем, порядка 5—6 или более), то на практике можно приближенно считать величину T распределенной нормально. Ее математическое ожидание будет равно

$$m_t = \sum_{(кр)} m_{t_i},$$

где m_{t_i} — математическое ожидание времени выполнения i -й работы, а ее среднее квадратическое отклонение:

$$\sigma_t = \sqrt{\sum_{(кр)} \sigma_{t_i}^2},$$

где σ_{t_i} — среднее квадратическое отклонение времени выполнения i -й работы.

Таким образом, в данном случае для нахождения закона распределения времени выполнения комплекса работ нет надобности знать законы распределения $f_i(t)$ отдельных времен t_i ; достаточно знать их математические ожидания и средние квадратические отклонения. Если эти величины известны, вероятность выполнения комплекса в срок T_0 найдется по известной формуле

$$P(T < T_0) = \Phi\left(\frac{T_0 - m_t}{\sigma_t}\right) + 0,5, \quad (5.2)$$

где Φ — функция Лапласа (см. приложение, табл. 1).

Пример 1. При выполнении комплекса работ a_1, a_2, \dots, a_n критическими оказываются работы

$$a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6,$$

времена выполнения которых представляют собой случайные величины

$$t_1, t_2, t_3, t_4, t_5, t_6$$

с математическими ожиданиями

$$m_{t_1} = 10, \quad m_{t_2} = 20, \quad m_{t_3} = 10, \quad m_{t_4} = 5, \quad m_{t_5} = 7, \quad m_{t_6} = 10$$

и средними квадратическими отклонениями:

$$\sigma_{t_1} = 1, \quad \sigma_{t_2} = 1, \quad \sigma_{t_3} = 0,5, \quad \sigma_{t_4} = 0,3, \quad \sigma_{t_5} = 0,5, \quad \sigma_{t_6} = 1.$$

Случайные отклонения времен выполнения работ от их математических ожиданий не меняют критического пути. Задан срок выполнения комплекса $T_0 = 65$. Найти вероятность того, что этот срок будет выполнен.

Решение. Имеем:

$$m_t = 10 + 20 + 10 + 5 + 7 + 10 = 62,$$

$$\sigma_t = \sqrt{1^2 + 1^2 + 0,5^2 + 0,3^2 + 0,5^2 + 1^2} = \sqrt{3,59} \approx 1,9.$$

Вероятность выполнения комплекса работ в срок $T_0 = 65$:

$$P(T < 65) = \Phi\left(\frac{65 - 62}{1,9}\right) + 0,5 = \Phi(1,58) + 0,5.$$

По табл. 1 приложения находим: $\Phi(1,58) \approx 0,44$, откуда вероятность выполнения комплекса в срок $P(T < 65) \approx 0,94$.

Если при случайных изменениях времен t_i может меняться и сам критический путь, задача вычисления вероятности $P(T < T_0)$ затрудняется. При сравнительно малом числе работ в комплексе эта задача может быть решена аналитическим способом, но при большом их числе расчеты становятся чересчур громоздкими, и на практике оказывается удобнее определять эти вероятности методом Монте-Карло на ЭЦВМ (см. гл. 8). При этом разыгрываются значения случайных времен t_i и для каждой совокупности полученных значений определяется время T выполнения комплекса работ тем способом, который применяется для неслучайных времен. Получив достаточно большое число N таких реализаций, мы можем непосредственно найти математическое ожида-

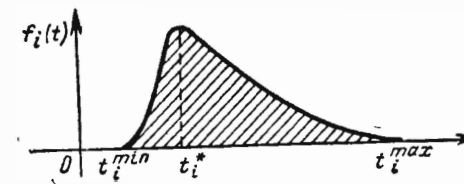


Рис. 10.6

Значения функции Лапласа $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$

ние, дисперсию и среднее квадратическое отклонение случайной величины T . Что касается закона распределения, то он в большинстве случаев для сложных сетей оказывается близким к нормальному. Поэтому вероятность выполнения плана в срок может быть вычислена по той же формуле (5.1). Если имеются основания считать закон распределения величины T не нормальным (так, например, бывает, если рассеивание времени выполнения какой-нибудь одной из критических работ резко превышает рассеивание остальных), то в качестве приближенного значения вероятности $P(T < T_0)$ можно принять частоту этого события в серии реализаций.

Надо заметить, что подобного рода расчеты могут быть только слабо ориентировочными, так как на практике обычно законы распределения $f_i(t)$ неизвестны, а получение их по статистическим данным затруднительно. В лучшем случае удается указать для каждого времени t_i его наиболее вероятное значение t_i^* , а также грубо оценить наименьшее («оптимистическое») значение t_i^{min} и наибольшее («пессимистическое») значение t_i^{max} (рис. 10.6). Что касается самого распределения $f_j(t)$, то его приходится задавать достаточно произвольно, исходя из умозрительных соображений. Например, то что кривая на рис. 10.6 имеет положительную асимметрию (более растянута вправо, чем влево) отражает тот общеизвестный факт, что запаздания по сравнению с плановым сроком могут быть значительно больше, чем опережения.

В заключение остановимся еще на одном вопросе, связанном с применением ЭЦВМ при сетевом планировании. Обычно при выполнении сложных комплексов работ первоначально намеченные планы не выполняются, и их приходится по ходу работы пересматривать. При этом чрезвычайно удобно держать все данные о комплексе — как первоначальный план, так и поступающую информацию о его нарушении — в памяти ЭЦВМ, которая время от времени заново просматривает план работ, находит для каждого момента времени новый критический путь — «угрожаемые» по срокам работы — и оптимизирует план, указывая, какие именно работы и в какой степени следует форсировать.

Плодотворное применение метода сетевого планирования при организации сложных комплексов работ возможно только при условии непрерывного контроля плана и его оптимизации с помощью ЭЦВМ.

x	Φ(x)	x	Φ(x)	x	Φ(x)	x	Φ(x)	x	Φ(x)	x	Φ(x)
0,00	0,0000	0,45	0,1736	0,90	0,3159	1,35	0,4115	1,80	0,4641	2,50	0,4938
01	0040	46	1772	91	3186	36	4131	81	4649	52	4941
02	0080	47	1808	92	3212	37	4147	82	4656	54	4945
03	0120	48	1844	93	3338	38	4162	83	4664	56	4948
04	0160	49	1879	94	3264	39	4177	84	4671	58	4951
05	0199			95	3289			85	4678		
06	0239	0,50	0,1915	96	3315	1,40	0,4192	86	4686	2,60	0,4953
07	0279	51	1950	97	3340	41	4207	87	4693	62	4956
08	0319	52	1985	98	3365	42	4222	88	4699	64	4959
09	0359	53	2019	99	3389	43	4236	89	4706	66	4961
		54	2054			44	4251			68	4963
0,10	0,0398	55	2088	1,00	0,3413	45	4265	1,90	0,4713	2,70	0,4965
11	0438	56	2123	01	3438	46	4279	91	4719	72	4967
12	0478	57	2157	02	3461	47	4292	92	4726	74	4969
13	0517	58	2190	03	3485	48	4306	93	4732	76	4971
14	0557	59	2224	04	3508	49	4319	94	4738	78	4973
15	0596			05	3531			95	4744		
16	0636	0,60	0,2257	06	3554	1,50	0,4332	96	4750	2,80	0,4974
17	0675	61	2291	07	3577	51	4345	97	4756	82	4976
18	0714	62	2324	08	3599	52	4357	98	4761	84	4977
19	0753	63	2357	09	3621	53	4370	99	4767	86	4979
		64	2389			54	4382			88	4980
0,20	0,0793	65	2422	1,10	0,3643	55	4394	2,00	0,4772	2,90	0,4981
21	0832	66	2454	11	3665	56	4406	02	4783	92	4982
22	0871	67	2486	12	3686	57	4418	04	4793	94	4984
23	0910	68	2517	13	3708	58	4429	06	4803	96	4985
24	0948	69	2549	14	3729	59	4441	08	4812	98	4986
25	0987			15	3746			2,10	0,4821		
26	1026	0,70	0,2580	16	3770	1,60	0,4452	12	4830	3,00	0,49865
27	1064	71	2611	17	3790	61	4463	14	4838	3,10	49903
28	1103	72	2642	18	3810	62	4474	16	4846	3,20	49931
29	1141	73	2673	19	3830	63	4484	18	4854	3,30	49952
		74	2703			64	4495			3,40	49966
0,30	0,1179	75	2734	1,20	0,3849	65	4505	2,20	0,4861	3,50	49977
31	1217	76	2764	21	3869	66	4515	22	4868	3,60	49984
32	1255	77	2794	22	3888	67	4525	24	4875	3,70	49989
33	1293	78	2823	23	3907	68	4535	26	4881	3,80	49993
34	1331	79	2852	24	3925	69	4545	28	4887	3,90	49995
35	1368			25	3944			2,30	0,4893		
36	1406	0,80	0,2881	26	3962	1,70	0,4554	32	4898	4,00	0,499968
37	1443	81	2910	27	3980	71	4564	34	4904	4,50	499997
38	1480	82	2939	28	3997	72	4573	36	4909	5,00	0,4999997
39	1517	83	2967	29	4015	73	4582	38	4913		
		84	2995			74	4591				
0,40	0,1554	85	3023	1,30	0,4032	75	4599	2,40	0,4918		
41	1591	86	3051	31	4049	76	4608	42	4922		
42	1628	87	3078	32	4066	77	4616	44	4927		
43	1664	88	3106	33	4083	78	4625	46	4931		
44	1700	89	3133	34	4099	79	4633	48	4934		

Таблица 2

Значения $P_m = \frac{a^m}{m!} e^{-a}$ (распределение Пуассона)

$a \backslash m$	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
0	0,9048	0,8187	0,7408	0,6703	0,6065	0,5488	0,4966	0,4493	0,4066
1	0,0905	0,1638	0,2222	0,2681	0,3033	0,3293	0,3476	0,3595	0,3659
2	0,0045	0,0164	0,0333	0,0536	0,0758	0,0988	0,1217	0,1438	0,1647
3	0,0002	0,0019	0,0033	0,0072	0,0126	0,0198	0,0284	0,0383	0,0494
4		0,0001	0,0002	0,0007	0,0016	0,0030	0,0050	0,0077	0,0111
5				0,0001	0,0002	0,0004	0,0007	0,0012	0,0020
6							0,0001	0,0002	0,0003

Продолжение

$a \backslash m$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	0,3679	0,1353	0,0498	0,0183	0,0067	0,0025	0,0009	0,0003	0,0001	0,0000
1	0,3679	0,2707	0,1494	0,0733	0,0337	0,0149	0,0064	0,0027	0,0011	0,0005
2	0,1389	0,2707	0,2240	0,1465	0,0842	0,0446	0,0223	0,0107	0,0050	0,0023
3	0,0613	0,1804	0,2240	0,1954	0,1404	0,0892	0,0521	0,0286	0,0150	0,0076
4	0,0153	0,0902	0,1680	0,1954	0,1755	0,1339	0,0912	0,0572	0,0337	0,0189
5	0,0031	0,0361	0,1008	0,1563	0,1755	0,1606	0,1277	0,0916	0,0607	0,0378
6	0,0005	0,0120	0,0504	0,1042	0,1462	0,1606	0,1490	0,1221	0,0911	0,0631
7	0,0001	0,0037	0,0216	0,0595	0,1044	0,1377	0,1490	0,1396	0,1171	0,0901
8		0,0009	0,0081	0,0298	0,0653	0,1033	0,1304	0,1396	0,1318	0,1126
9		0,0002	0,0027	0,0132	0,0363	0,0688	0,1014	0,1241	0,1318	0,1251
10			0,0008	0,0053	0,0181	0,0413	0,0710	0,0993	0,1186	0,1251
11			0,0002	0,0019	0,0082	0,0225	0,0452	0,0722	0,0970	0,1137
12			0,0001	0,0006	0,0034	0,0126	0,0263	0,0481	0,0728	0,0948
13				0,0002	0,0013	0,0052	0,0142	0,0296	0,0504	0,0729
14				0,0001	0,0005	0,0022	0,0071	0,0169	0,0324	0,0521
15					0,0002	0,0009	0,0033	0,0090	0,0194	0,0347
16						0,0003	0,0014	0,0045	0,0109	0,0217
17						0,0001	0,0006	0,0021	0,0058	0,0128
18							0,0002	0,0009	0,0029	0,0071
19							0,0001	0,0004	0,0014	0,0037
20								0,0002	0,0006	0,0019
21								0,0001	0,0003	0,0009
22									0,0001	0,0004
23										0,0002
24										0,0001

ЛИТЕРАТУРА

1. Морз Ф. М., Кимбел Д. Е. Методы исследования операций Изд-во «Советское радио», 1956.
2. Зуховицкий С. И., Авдеева Л. И. Линейное и выпуклое программирование. Изд-во «Наука», 1964.
3. Понрягин Л. С., Болтянский В. Г., Гамкрелидзе Р. В., Мищенко Е. Ф. Математическая теория оптимальных процессов. Физматгиз, 1961.
4. Саати Т. Л. Математические методы исследования операций. Воениздат, 1963.
5. Карпелевич Ф. И., Садовский Л. Е. Элементы линейной алгебры и линейного программирования. Изд-во «Наука», 1967.
6. Юдин Д. Б., Гольштейн Е. Г. Линейное программирование. Физматгиз, 1963.
7. Вентцель Е. С. Теория вероятностей. Изд-во «Наука», 1969.
8. Вентцель Е. С., Овчаров Л. А. Теория вероятностей (задачи и упражнения). Изд-во «Наука», 1969.
9. Вентцель Е. С. Элементы динамического программирования. Изд-во «Наука», 1964.
10. Беллман Р. Динамическое программирование. Изд-во иностранной литературы, 1960.
11. Вентцель Е. С. Введение в исследование операций. Изд-во «Советское радио», 1964.
12. Овчаров Л. А. Прикладные задачи теории массового обслуживания. Изд-во «Машиностроение», 1969.
13. Динер И. Я. О некоторых направлениях развития исследования операций. «Морской сборник», 1970, № 1.
14. Гнеденко Б. В., Коваленко И. Н. Введение в теорию массового обслуживания. Изд-во «Наука», 1966.
15. Бусленко Н. П., Шрейдер Ю. А. Метод статистических испытаний. Физматгиз, 1961.
16. Севастьянов Б. А. Формулы Эрланга в телефонии при произвольном законе распределения длительности разговора. Труды III Всесоюзного математического съезда, т. IV. Изд-во АН СССР, 1959.
17. Кофман А., Дебазей Г. Сетевые методы планирования. Изд-во «Прогресс», 1965.
18. Кадыров М. Таблицы случайных чисел Ташкент. Издание Ташкентского Государственного университета, 1936.
19. Романовский В. С. Применение математической статистики в опытном деле. Физматгиз, 1947.
20. Кофман А., Крюон Р. Массовое обслуживание, теория и приложения. Изд-во «Мир», 1965.
21. Фаддеев Д. К., Фаддеева В. Н. Вычислительные методы линейной алгебры. Физматгиз, 1960.
22. Вентцель Е. С. Определение вероятностей состояний в динамике боя многочисленных групп. «Морской сборник», 1962, № 10.
23. Чуев Ю. В., Мельников П. М., Петухов С. И., Степанов Г. Ф., Шор Я. В. Основы исследования операций в военной технике. Изд-во «Советское радио», 1965.

- 4 «Линейные неравенства и смежные вопросы». Сборник переводов с англ. под ред Канторовича Л. В и Новожилова В. В Изд-во иностранной литературы, 1959
- 25 Мак-Кинси Дж. Введение в теорию игр. Физматгиз, 1960.
- 26 Кокс Д. Р., Смит В. Л. Теория восстановления Изд-во «Советское радио», 1967.
27. Соболев И. М. Метод Монте-Карло Физматгиз, 1968.
28. Гурин Л. С., Дымарский Я. С., Меркулов А. Д. Задачи и методы оптимального распределения ресурсов Изд-во «Советское радио», 1968
- 29 Р. Д. Льюс, Х. Райфа Игры и решения. Изд-во иностранной литературы, 1961.

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

- | | |
|--|--|
| А | Дуга некритическая 523 |
| Алгоритм преобразования стандартной таблицы 67 | Ж |
| — циклический 426 | Жребий 412 |
| | — единичный 413 |
| Б | З |
| Бейеса формула 512 | Зависимость между отказами 401 |
| | Задача линейного программирования основная 39 |
| В | — о запасных элементах 393 |
| Вероятности переходные 188 | — о наборе высоты и скорости летательным аппаратом 124 |
| — события 13 | — оптимизации управления 121, 134 |
| — состояний 187 | — распределения ресурсов 142, 156, 162 |
| — — предельные 217, 218, 246 | — о резервировании ресурсов 154 |
| — условий 500 | — транспортная 82 |
| Вероятность отказа 244 | — — по критерию времени 115 |
| — поражения цели 410 | — — по критерию стоимости 83 |
| Ветвящийся циклический процесс 230 | — — с избытком запасов 111 |
| Взаимопомощь между каналами 275 | — — с избытком заявок 112 |
| — — «все как один» 277 | — — с неправильным балансом 110 |
| — — — равномерная 279 | — — с правильным балансом 112 |
| Восстановление единиц 343 | Задачи вариационные 17 |
| — задержанное 396 | — детерминированные 16 |
| Выигрыш условный оптимальный 137 | — динамического программирования 163, 172 |
| Вырожденный случай, вырождение 53, 82 | — на минимум 38 |
| | Закон распределения показательный (экспоненциальный) 204 |
| Г | — — среднего арифметического 440 |
| Граница выигрыша верхняя 472 | — — условный 423 |
| — — нижняя 472 | — — частоты события при большом числе опытов 440 |
| Граф состояний 183 | Заикливание 82 |
| — — размеченный 196 | Заявки «нетерпеливые» 264 |
| | — «терпеливые» 266 |
| Д | И |
| Датчики случайных чисел 424 | Игра бесконечная 449 |
| Динамическое программирование 132 | — «вооружение и самолет» 453 |
| — —, основное функциональное уравнение 139 | — «вооружение — помехи» 486 |
| Дисперсия случайной величины 412 | — «два бомбардировщика и истребитель» 468 |
| — численностей состояний 297 | |
| Дисциплина взаимопомощи 275, 276 | |

Игра конечная « $m \times n$ » 450
— « $m \times 2$ » 472
— «поиск» 451, 456
— полностью усредненная 486
— «распределение сил в наступлении и обороне» 477
— и реальная конфликтная ситуация 447
— «самолеты и зенитные орудия» 473
— с нулевой суммой 448
— с полной информацией 460
— с природой 496
— «три пальца» 452
— « $2 \times n$ » 472
— « 2×2 » 466
Излишние стратегии 464
Интенсивность отказов 373
— потока 201
Исследование операций 7, 8, 11, 16

К

Клетки базисные 86
— свободные 86
Конфликтные ситуации 23, 447
Координаты системы фазовые 134
Коэффициент вариации времени обслуживания 286
Критерий Вальда (максиминный) 504
— Гурвица (пессимизма — оптимизма) 505
— мультипликативный 175
— обобщенный (составной) 25, 26
— оценки (показатель эффективности, целевая функция) 12
— Сэвиджа (минимаксного риска) 504

М

Максимин 455
Марковский процесс циклический 227
Матрица переходных вероятностей 188
— платежная (матрица игры) 450
— рисков 499
— системы уравнений 40
— — — расширенная 40
Метод динамики средних 291, 357
— запрещенных клеток 118
— потенциалов 99
— псевдосостояний 232, 290
— распределительный 97
— «розыгрыша» 410
— сетевого планирования (СПУ) 517
— статистических испытаний (Монте-Карло) 409

— статистического моделирования 15
Механизм розыгрыша случайный 414
Минимум 456
Моделирование 15
— методом Монте-Карло 426
Модели аналитические 15
— статистические 15
Модель бесконечношаговая в задачах динамического программирования 179
— математическая 14
— операции 14
— явления 14
Мультипликативный критерий эффективности 175

Н

Надежность 366
— нерезервированной системы 378
— резервированной системы («горячий резерв») 382
— системы 367
— — с восстановлением 393
— элемента 367
Ненадежность элемента 367

О

Область допустимых решений 46
Обобщенный показатель (критерий) эффективности 25
Операция 11
Оптимальная стратегия игрока 449
Оптимальное управление 121
Оптимизация решения в условиях неопределенности 18, 19, 496
— плана комплекса работ 529
— по нескольким показателям 23
«Оптимизация в среднем» 21
Ординарность потока 202
Основная прямая 50
Отказы внезапные 366
— зависимые 401
— постепенные 366
Оценка операции комплексная (по нескольким критериям) 25
— эффективности 25

П

Параметр показательного закона 204
Перевозки 85
Переменные базисные 44
— добавочные 56
— первоначальные 56
— свободные 44
Планирование комплекса работ 516
— эксперимента 509
План перевозок 85

— — вырожденный 91
— — допустимый 85
— — опорный 85
— — оптимальный 85
— потенциальный 102
Платежи 99
Платежная матрица 450
Плотность вероятности перехода 195
— распределения времени безотказной работы 368
— — условная 417
Показатель аддитивный 122
— эффективности 12
Положение равновесия неустойчивое 324
— — устойчивое 324
Поток восстановлений 394
— заявок 238
— отказов 212, 375
— Пальма 206
— событий 200
— — без последствия 201
— — неординарный 202
— — нестационарный пуассоновский 203
— — ординарный 201
— — простейший (стационарный пуассоновский) 200, 202
— — регулярный 200
— — стационарный 200
— успешных выстрелов 330
— — разведок 339
— Эрланга 207
— — k -го порядка 207
Правила игры 448
Правило решения 513
Принцип квазирегулярности 300, 301
— минимакса 456
— недостаточного основания Лапласа 503
— оптимальности 137
Принятие решений в условиях неопределенности 446
Программирование линейное 18, 28
— динамическое 18, 120
Производительность группы станков 271
Пропускная способность 238
— — абсолютная 240
— — относительная 240
Пространство фазовое 132
— одномерное 134
Процесс бесконечношаговый 177
— гибели и размножения 433
— марковский неоднородный 195
— — однородный 195
— случайный 181, 182
— — с дискретным временем 185

— — с дискретными состояниями 183
— — с непрерывным временем 185
— — стационарный 433
— — эргодический 435
— циклический 227
— — ветвящийся 230
Псевдосостояние 232
Псевдостоймость 99
Пункт назначения фиктивный 111
Путь критический 523

Р

Работа критическая 523
— некритическая 523
— фиктивная 521
Разрешающая строка 65
Разрешающий столбец 65
— элемент 64
Ранг матрицы 41
— работы 519
Распределение показательное 204
— Пуассона 203
— Эрланга 208
— — обобщенное 211, 237
Реализация случайная 413
Режим предельный стационарный 219
— работы системы 402
Резерв временной 524
— «горячий» 382
— «облегченный» 383
— «холодный» 383
Резервирование 368, 378
— ресурсов 154
Решение 7, 11
— допустимое 40
— задачи линейного программирования 39
— игры 458, 462
— компромиссное 22, 27
— локально-оптимальное 22
— неудачное 11
— опорное 39, 53, 71
— оптимальное 11, 22, 39
— приемлемое 22
— удачное 11
Риск 499
— средний 502

С

Свойство эргодическое 434
Седловая точка 458
Сетевой график 519
— — временной 521
— —, формальная запись 526
Симплекс-метод 59
Система массового обслуживания замкнутая 268
— — — многоканальная 238

Система массового обслуживания
одноканальная 238
— — — с неограниченным ожиданием 240
— — — с не-пуассоновскими потоками событий 285
— — — со взаимопомощью между каналами 275
— — — с ограниченным ожиданием 240
— — — с ожиданием (очередью) 280
— — — с отказами 240, 286
— — — с ошибками 281, 282
— с облегченным резервом 391
— операций 12
— простая (без резервирования) 378
— резервированная 382
— управления боем 338
— управляемая 133
— с холодным резервом 389
Системы с неограниченным ожиданием 240
— с ограниченным ожиданием 240
— с отказами 240, 286
Ситуация конфликтная 23, 447
Скорострельность эффективная 330
Случай вырожденный 53, 82
— детерминированный 16
Случайная величина нормированная 421
Случайная реализация 413
Случайное число от 0 до 1 414
Случайные числа 424
Смесь стратегий физическая 493
События несовместные 415
Соединение элементов «параллельное» 382, 383
— — «последовательное» 381
Способ северо-западного угла 87
Среднее время ожидания 277
— — пребывания в системе 277
Средние по времени для одной реализации 434
Средняя длина очереди 250
Стандартная форма записи уравнений 64
Статистические средние по множеству реализаций 434
Статистическое моделирование 16, 409
Стационарность потока 201
Стационарный случайный процесс 433
Стратегия 449
— активная 463
— дублирующая 464
— заведомо невыгодная 464
— игрока 449
— максиминная 455

— минимаксная 456
— оптимальная 449, 458
— смешанная 452, 461
Строка разрешающая 65
Схема ветвящегося цикла 231
— гибели и размножения 223
— циклическая 229

Т

Таблица стандартная 64
— структурная комплекса работ 517
— структурно-временная 520
— транспортная 86
Таблицы случайных чисел 424
Теорема об активных стратегиях 463
— теории игр основная 462
Теория игр 23, 446
— статистических решений 496
Точка опорная 53
— седловая 458

У

Управление оптимальное 121
— — безусловное 178
— — условное 137
— системой 133
— шаговое 121
Упорядочение работ 518
Упрощение игр 464
Уравнение основное функциональное (динамического программирования) 139
Уравнения динамики боя (модель А) 329
— — — (модель Б) 335, 336
— — — (модель В) 338, 340
— — средних 299
— — — для неоднородных элементов 314
— Колмогорова 194, 198
— Ланчестера 329
— — 2-го рода 332
— смешанного типа 350
Уровень доверия 442
Условие балансовое 85
— нормировочное 219
Условия операции заданные 27
Учет пополнения 309

Ф

Физическая смесь стратегий 494
Форма записи уравнения стандартная 64
Формулы Полнчека — Хинчина 286, 287
— Эрланга 246
Функция времени случайная 292
— Лапласа 298

— распределения огня 348
— — эффективности 349

Х

Ход личный 448
— случайный 448

Ц

Цена игры 462
— — верхняя 456
— — нижняя 455
— — чистая 458
— цикла 93
Центральная предельная теорема теории вероятностей 440
Цепь марковская 186
— — неоднородная 188
— — непрерывная 194
— — однородная 188
Цикл 91
— неустойчивый 325
— устойчивый 325

Ч

Чебышева теорема 412
Числа псевдослучайные 424, 425
Численности состояний 292
— — начальные 295
— — предельные средние 320
— — средние 297
Численность критическая 323
Число реализаций 440

Э

Экспоненциальный закон надежности 372
Элемент разрешающий 64
Элементы теории статистических решений 496
Эргодичность 434
Эффективность операций 11, 12

Я

Ячейка транспортной таблицы базисная 86
— — — свободная 86

Елена Сергеевна Вентцель

ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ

Редактор *М. С. Гордон*

Художественный редактор *В. Т. Сидоренко*

Художник *Л. Г. Ларский*

Технический редактор *А. А. Белоус*

Корректоры: *Е. П. Оверецкая, М. Ф. Белякова*

Сдано в набор 2/XI 71 г. Подписано в печать 24/V 72 г.

T-05190 Формат 60×90/16 Бумага типографская № 2

Объем 34,5 усл. п. л., 34,540 уч.-изд. л.

Тираж 31 000 экз. Цена 1 р. 96 к. Зак. 573

Издательство «Советское радио», Москва, Главпочтамт п/я 693

Московская типография № 4 Главполиграфпрома

Комитета по печати при Совете Министров СССР

Москва, Б. Переяславская, 46