

А.Л. Карацуба



Основы аналитической
теории чисел

А.Л. Карацуба

ОСНОВЫ АНАЛИТИЧЕСКОЙ
ТЕОРИИ ЧИСЕЛ

А.Л.Карацуба

ОСНОВЫ АНАЛИТИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ ЧИСЕЛ

2-е над.— М.: Паука. Главная редакция физико-математической литературы, 1983, 240 с.

В книге на примере решения ряда классических проблем налагаются основы аналитических методов теории чисел. Второе издание значительно отличается от первого: добавлена глава о целых точках, переработаны главы о дзета-функции и ее применениях, даны указания к решению задач.

Книга будет полезна научным работникам, аспирантам и студентам, желающим творчески усвоить аппарат современной аналитической теории чисел.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие	5
Обозначения	7
ГЛАВА I. Целые точки	9
§ 1. Постановка задачи, вспомогательные утверждения и простейшие результаты	9
§ 2. Связь проблем теории целых точек с тригонометрическими суммами	14
§ 3. Теоремы о тригонометрических суммах	18
§ 4. Целые точки в круге и под гиперболой	29
Задачи	34
ГЛАВА II. Целые функции конечного порядка	36
§ 1. Бесконечные произведения. Формула Вейерштрасса	36
§ 2. Целые функции конечного порядка	41
Задачи	48
ГЛАВА III. Гамма-функция Эйлера	51
§ 1. Определение и простейшие свойства	51
§ 2. Формула Стерлинга	54
§ 3. Бета-функция Эйлера и интеграл Дирихле	56
Задачи	59
ГЛАВА IV. Дзета-функция Римана	61
§ 1. Определение и простейшие свойства	61
§ 2. Простейшие теоремы о нулях	67
§ 3. Приближение конечной суммой	72
Задачи	72
ГЛАВА V. Связь между суммой коэффициентов ряда Дирихле и функцией, задаваемой этим рядом	75
§ 1. Общая теорема	75
§ 2. Асимптотический закон распределения простых чисел	78
§ 3. Представление функции Чебышева в виде суммы по нулям дзета-функции	80
Задачи	82
ГЛАВА VI. Метод И. М. Виноградова в теории дзета-функции	84
§ 1. Теорема о среднем значении модуля тригонометрической суммы	84
§ 2. Оценка дзетовой суммы	94
§ 3. Оценка дзета-функции вблизи единичной прямой	98

§ 4. Теоретико-функциональная лемма	99
§ 5. Новая граница нулей дзета-функции	100
§ 6. Новый остаточный член в асимптотической формуле распределения простых чисел	102
Задачи	103
ГЛАВА VII. Плотность нулей дзета-функции и проблема распределения простых чисел в интервалах малой длины	106
§ 1. Простейшая плотностная теорема	106
§ 2. Простые числа и интервалах малой длины	111
Задачи	112
ГЛАВА VIII. L-ряды Дирихле	114
§ 1. Характеры и их свойства	114
§ 2. Определение L -рядов и их простейшие свойства	124
§ 3. Функциональное уравнение	127
§ 4. Нетривиальные пули; разложение логарифмической производной в ряд по нулям	131
§ 5. Простейшие теоремы о нулях	132
Задачи	134
ГЛАВА IX. Простые числа в арифметических прогрессиях	137
§ 1. Явная формула	137
§ 2. Теоремы о границе нулей	139
§ 3. Асимптотический закон распределения простых чисел в арифметических прогрессиях	151
Задачи	155
ГЛАВА X. Проблема Гольдбаха	157
§ 1. Вспомогательные утверждения	157
§ 2. Круговой метод в проблеме Гольдбаха	158
§ 3. Линейные тригонометрические суммы с простыми числами	165
§ 4. Эффективная теорема	170
Задачи	175
ГЛАВА XI. Проблема Варинга	177
§ 1. Круговой метод в проблеме Варинга	177
§ 2. Оценка суммы Г. Вейля и асимптотическая формула в проблеме Варинга	190
§ 3. Оценка $G(n)$	193
Задачи	196
Указания к решению задач	200
Таблица простых чисел <4070 и их наименьших первообразных корней	236
Литература	239

ПРЕДИСЛОВИЕ

Теория чисел занимается изучением свойств целых чисел. Аналитическая теория чисел — часть теории чисел, в которой наряду с собственными методами существенно используется аналитический аппарат математики.

Цель настоящей книги — познакомить широкий круг читателей с центральными проблемами аналитической теории чисел. Оставляя в стороне второстепенные детали, я старался изложить то главное, что привело к современному состоянию теории. Поэтому часто даны не лучшие известные к настоящему времени результаты, однако все они принципиально не отличаются от последних.

Книга посвящена четырем проблемам аналитической теории чисел — проблеме целых точек в плоских областях, проблеме распределения простых чисел в натуральном ряде и арифметических прогрессиях, проблеме Гольдбаха и проблеме Варинга. На примере решения этих проблем изложены основные методы аналитической теории чисел — метод тригонометрических сумм И. М. Виноградова, метод комплексного интегрирования, круговой метод Г. Харди, Д. Литлвуда и С. Рамануджана.

После каждой главы помещены задачи; они объединены по темам и решать их рекомендуется в порядке следования. Задачи уточняют доказанные теоремы или вводят в круг новых идей современной теории чисел.

От читателя требуется знание теории чисел в объеме книги И. М. Виноградова «Основы теории чисел», математического анализа в объеме университетского курса, теории функций комплексного переменного в объеме книги И. И. Привалова «Введение в теорию функций комплексного переменного».

Книгу рекомендуется читать подряд, так как все главы связаны между собой. Если какой-то прием в книге

повторяется несколько раз, то первое его употребление изложено подробно, следующее — менее подробно. Каждое утверждение, включая переход от одного соотношения к другому (равенство, неравенство), должно быть читателем понято (обосновано). Только такое чтение принесет пользу.

Особое место в книге занимают задачи, которые, в основном, очень трудные; они могут служить темами серьезной исследовательской работы.

Темы, близкие к изложенным в книге, исторические справки и литературу можно найти в монографиях [1]—[12].

Нумерация утверждений и формул в каждой главе своя; при ссылках на утверждения из других глав указывается глава, например, теорема 2, III означает: теорема 2 гл. III.

Второе издание значительно отличается от первого: добавлена глава о целых точках, перестроены доказательства ряда теорем в главах III—VII, X, XI, даны краткие решения или указания к решению задач.

Большую помощь при работе над книгой мне оказали Г. И. Архинов, С. М. Воронин, А. Ф. Лаврик, В. Н. Чубариков. Рукопись была перепечатана и оформлена Л. Н. Абрамочкиной и Р. И. Сорокиной.

Я глубоко благодарен всем названным товарищам.

А. А. Карацуба

ОБОЗНАЧЕНИЯ

c, c_0, c_1, \dots — абсолютные положительные постоянные, в разных теоремах, вообще говоря, разные.

При положительном A записи $B = O(A)$, $B \ll A$ означают, что $|B| \leq cA$; запись $A \asymp B$ означает, что

$$c_1 A \leq B \leq c_2 A.$$

$\varepsilon, \varepsilon_1$ — положительные сколь угодно малые постоянные числа, n, m, k, l, N — натуральные числа; везде кроме гл. II p, p_1, \dots — простые числа. $\mu(n)$ — функция Мёбиуса,

$$\mu(n) = \begin{cases} 1, & \text{если } n = 1; \\ 0, & \text{если } n = p^2 m; \\ (-1)^k, & \text{если } n = p_1 \dots p_k. \end{cases}$$

При $x > 0$

$$\ln x = \log x = \int_1^x \frac{du}{u}; \quad \text{Li } x = \int_2^x \frac{du}{\ln u} + c_0,$$

где

$$c_0 = \lim_{\delta \rightarrow 0} \left(\int_0^{1-\delta} \frac{du}{\ln u} + \int_{1+\delta}^2 \frac{du}{\ln u} \right); \quad \exp F = e^F.$$

$\Lambda(n)$ — функция Мангольда,

$$\Lambda(n) = \begin{cases} \log p, & \text{если } n = p^k; \\ 0, & \text{если } n \neq p^k. \end{cases}$$

$\varphi(k)$ — функция Эйлера — число натуральных чисел, меньших k и взаимно простых с k .

$\psi(x)$ — функция Чебышёва,

$$\psi(x) = \sum_{n \leq x} \Lambda(n); \quad \pi(x) = \sum_{p \leq x} 1;$$

при $l \leq k$, $(l, k) = 1$,

$$\psi(x; k, l) = \sum_{\substack{n \equiv l \pmod{k} \\ n \leq x}} \Lambda(n); \quad \pi(x; k, l) = \sum_{\substack{p \equiv l \pmod{k} \\ p < x}} 1.$$

$\tau(n)$ — число натуральных делителей n ; $\tau_k(n)$ — число решений уравнения $x_1 \dots x_k = n$ в натуральных числах x_1, \dots, x_k ; таким образом, $\tau_2(n) = \tau(n)$; $\Omega(n)$ — число простых делителей n . При вещественном α , $[\alpha]$ — целая часть α — наибольшее целое число, не превосходящее α ; $\{\alpha\} = \alpha - [\alpha]$ — дробная часть α ; $\|\alpha\| = \min(\{\alpha\}, 1 - \{\alpha\})$ — расстояние от α до ближайшего целого числа.

s — комплексное число, $s = \sigma + it$, где $i^2 = -1$, $\operatorname{Re} s = \sigma$, $\operatorname{Im} s = t$; $\bar{s} = \sigma - it$; вообще \bar{f} — величина, комплексно-сопряженная с f ; везде $\ln s = \log s$ — главная ветвь логарифма; γ — постоянная (константа) Эйлера,

$$\gamma = \lim_{m \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{m} - \ln m \right);$$

нетривиальные нули дзета-функции Римана и L -рядов Дирихле нумеруются в порядке возрастания абсолютной величины их мнимых частей; тригонометрическая сумма — конечная сумма вида

$$\sum_{n \leq P} G(n) \exp(2\pi i F(n)),$$

где G и F — действительные функции натурального аргумента n , $\exp(i\varphi) = \cos \varphi + i \sin \varphi$.

Г Л А В А I

ЦЕЛЫЕ ТОЧКИ

В этой главе рассматриваются первые задачи теории целых точек, именно «проблема Гаусса о числе целых точек в круге» и «проблема делителей Дирихле». Далее считаем, что на плоскости задана декартова система координат XOY .

§ 1. Постановка задачи, вспомогательные утверждения и простейшие результаты

Определение. Точка M с координатами (x, y) называется целой, если x и y — целые числа.

Рассмотрим круг $x^2 + y^2 \leq R$ и обозначим через $K(R)$ число целых точек в этом круге. При больших R величина $K(R)$ близка к площади круга πR . Обозначим через $\Delta(R)$ разность между $K(R)$ и πR , $\Delta(R) = K(R) - \pi R$.

Проблема Гаусса о числе целых точек в круге состоит в том, чтобы для величины $|\Delta(R)|$ получить возможно более точную оценку сверху при $R \rightarrow +\infty$.

Аналогично формулируется проблема делителей Дирихле. Рассмотрим гиперболу $xy = R$ и число $L(R)$ целых точек с положительными координатами под ней. Пусть

$$\Delta_1(R) = L(R) - R(\ln R + 2\gamma - 1), \quad R \rightarrow +\infty,$$

где γ — постоянная Эйлера. Для величины $|\Delta_1(R)|$ требуется получить возможно более точную оценку сверху.

Из определения $L(R)$ и функции $\tau(n)$ — числа делителей n — следует равенство

$$L(R) = \sum_{n \leq R} \tau(n),$$

которое объясняет название проблемы.

Сформулированные проблемы являются частными случаями более общей проблемы о числе целых точек в области, ограниченной кривой $y = f(x)$, где $f(x)$ — непрерывная неотрицательная на отрезке $[a, b]$ функция, и прямыми $x = a$, $x = b$, $y = 0$, причем считаются точки $M = (x, y)$

с условием $a < x \leq b$, $0 < y \leq f(x)$. Обозначим это число буквой T . Тогда

$$T = \sum_{a < x \leq b} [f(x)] = \sum_{a < x \leq b} f(x) - \sum_{a < x \leq b} \{f(x)\}. \quad (1)$$

Тем самым возникают две задачи: 1) нахождение значения первой суммы; 2) нахождение возможно более точных асимптотических формул для второй суммы. Решение первой задачи при достаточно общих предположениях относительно $f(x)$ дается теоремой 1. Вторая задача составляет основную трудность проблем теории целых точек.

Теорема 1 (формула Эйлера — Маклорена). Пусть $f(x)$ дважды непрерывно дифференцируема на отрезке $[a, b]$ и функции $\rho(x)$, $\sigma(x)$ определяются равенствами

$$\rho(x) = \frac{1}{2} - \{x\}, \quad \sigma(x) = \int_0^x \rho(u) du.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \sum_{a < x \leq b} f(x) = \int_a^b f(x) dx + \rho(b) f(b) - \rho(a) f(a) + \sigma(a) f'(a) - \\ - \sigma(b) f'(b) + \int_a^b \sigma(x) f''(x) dx. \end{aligned}$$

Доказательство. Будем предполагать, что на интервале (a, b) лежит по крайней мере одна целая точка. Разбивая промежуток интегрирования целыми точками на новые, получаем равенство

$$\begin{aligned} \int_a^b \sigma(x) f''(x) dx = \int_a^{[a]+1} \sigma(x) f''(x) dx + \\ + \sum_{n=[a]+1}^{[b]-1} \int_n^{n+1} \sigma(x) f''(x) dx + \int_{[b]}^b \sigma(x) f''(x) dx. \end{aligned}$$

На каждом из получившихся интервалов интегрирования функции $\rho(x)$, $\sigma(x)$ — непрерывно дифференцируемые, причем $\sigma'(x) = \rho(x)$. Поэтому, интегрируя дважды по

частям, найдем

$$\int_a^{[a]+1} \sigma(x) f''(x) dx =$$

$$= -\sigma(a) f'(a) + \frac{1}{2} f([a] + 1) + \rho(a) f(a) - \int_a^{[a]+1} f(x) dx;$$

$$\int_n^{n+1} \sigma(x) f''(x) dx = \frac{1}{2} f(n+1) + \frac{1}{2} f(n) - \int_n^{n+1} f(x) dx;$$

$$\int_{[b]}^b \sigma(x) f''(x) dx =$$

$$= \sigma(b) f'(b) - \rho(b) f(b) + \frac{1}{2} f([b]) - \int_{[b]}^b f(x) dx.$$

Подставляя эти формулы в предыдущее соотношение, получим утверждение теоремы.

З а м е ч а н и е. Часто применяется более простая формула суммирования:

$$\sum_{a < x < b} f(x) =$$

$$= \int_a^b f(x) dx + \rho(b) f(b) - \rho(a) f(a) - \int_a^b \rho(x) f'(x) dx. \quad (2)$$

Здесь уже достаточно, чтобы $f(x)$ была непрерывно дифференцируема на $[a, b]$.

Перейдем к проблемам Гаусса и Дрихле.

Теорема 2 (Гаусс). Для $K(R)$ справедлива следующая асимптотическая формула:

$$K(R) = \pi R + \Delta(R),$$

$$\Delta(R) = O(\sqrt{R}).$$

Доказательство. Рассмотрим криволинейную трапецию

$$0 < x \leq \sqrt{R}/2, \quad 0 < y \leq \sqrt{R-x^2}$$

(см. рис. 1). Весь круг $K: x^2 + y^2 \leq R$, состоит из восьми областей, равных этой трапеции. Учитывая пересечения этих областей по квадратам со стороной $\sqrt{R}/2$ и

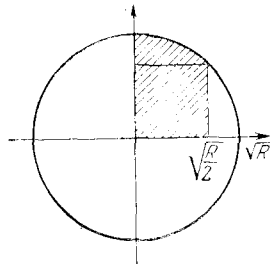


Рис. 1.

применяя формулу 1, находим

$$K(R) = 1 + 4 \left[\sqrt{R} \right] + 8 \sum_{0 < x \leq \sqrt{R/2}} \left[\sqrt{R-x^2} \right] - \\ - 4 \left(\left[\sqrt{R/2} \right] \right)^2 = 8 \sum_{0 < x \leq \sqrt{R/2}} \sqrt{R-x^2} - 2R + \\ + 4\sqrt{2R} \left\{ \sqrt{R/2} \right\} + 4\sqrt{R} - 8 \sum_{0 < x \leq \sqrt{R/2}} \left\{ \sqrt{R-x^2} \right\} + O(1).$$

Вычислим предпоследнюю сумму, пользуясь теоремой 1:

$$\sum_{0 < x \leq \sqrt{R/2}} \sqrt{R-x^2} = \int_0^{\sqrt{R/2}} \sqrt{R-u^2} du + \left(\frac{1}{2} - \left\{ \sqrt{\frac{R}{2}} \right\} \right) \sqrt{\frac{R}{2}} - \\ - \frac{\sqrt{R}}{2} + \sigma(\sqrt{R/2}) \frac{\sqrt{R/2}}{\sqrt{R/2}} + \int_0^{\sqrt{R/2}} \sigma(u) \frac{d^2}{du^2} (\sqrt{R-u^2}) du.$$

Так как $|\sigma(u)| \leq 1/8$ и первый интеграл равен площади рассматриваемой криволинейной трапеции $\pi R/8 + R/4$, то

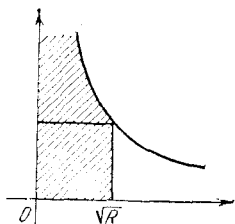


Рис. 2.

$$\sum_{0 < x \leq \sqrt{R/2}} \sqrt{R-x^2} = \frac{\pi R}{8} + \frac{R}{4} + \frac{\sqrt{R}}{2\sqrt{2}} - \\ - \sqrt{\frac{R}{2}} \left\{ \sqrt{\frac{R}{2}} \right\} - \frac{\sqrt{R}}{2} + O(1).$$

Отсюда находим

$$K(R) = \pi R + \Delta(R),$$

где

$$\Delta(R) = 2\sqrt{2R} - 8 \sum_{0 < x \leq \sqrt{R/2}} \left\{ \sqrt{R-x^2} \right\} + O(1) = O(\sqrt{R}), \quad (3)$$

что и требовалось доказать.

Теорема 3 (Дирхле). Для $L(R)$ справедлива следующая асимптотическая формула:

$$L(R) = R(\ln R + 2\gamma - 1) + \Delta_1(R), \quad \Delta_1(R) = O(\sqrt{R}),$$

где γ — постоянная Эйлера.

Доказательство. Рассмотрим криволинейную трапецию (см. рис. 2) $1 \leq x \leq \sqrt{R}$, $0 < y \leq R/x$. Область L состоит из двух областей, равных этой трапеции.

Применяя формулу 1, пайдём

$$\begin{aligned} L(R) &= 2 \sum_{1 \leq x \leq \sqrt{R}} \left[\frac{R}{x} \right] - ([\sqrt{R}])^2 = \\ &= 2R \sum_{1 \leq x \leq \sqrt{R}} \frac{1}{x} - 2 \sum_{1 \leq x \leq \sqrt{R}} \left\{ \frac{R}{x} \right\} - R + 2\sqrt{R} \{ \sqrt{R} \} + O(1). \end{aligned}$$

Из теоремы 1 следует

$$\begin{aligned} \sum_{1 \leq x \leq \sqrt{R}} \frac{1}{x} &= \int_1^{\sqrt{R}} \frac{du}{u} + \left(\frac{1}{2} - \{ \sqrt{R} \} \right) \frac{1}{\sqrt{R}} - \frac{1}{2} + \sigma(\sqrt{R}) \frac{1}{R} - \\ &- \sigma(1) + 2 \int_1^{\sqrt{R}} \sigma(u) \frac{du}{u^3} = \ln \sqrt{R} + \left(\frac{1}{2} - \{ \sqrt{R} \} \right) \frac{1}{\sqrt{R}} - \\ &- \frac{1}{2} + 2 \int_1^{\infty} \sigma(u) \frac{du}{u^3} + O\left(\frac{1}{R} \right). \end{aligned}$$

По определению постоянной Эйлера,

$$\gamma = \lim_{Y \rightarrow +\infty} \left(\sum_{1 \leq n \leq Y} \frac{1}{n} - \ln Y \right);$$

применяя к сумме в скобках теорему 1, найдём

$$\gamma = -\frac{1}{2} + 2 \int_1^{\infty} \sigma(u) \frac{du}{u^3}.$$

Тем самым для величины $L(R)$ получаем формулу

$$\begin{aligned} L(R) &= R \ln R + 2\sqrt{R} \left(\frac{1}{2} - \{ \sqrt{R} \} \right) + (2\gamma - 1)R - \\ &- 2 \sum_{1 \leq x \leq \sqrt{R}} \left\{ \frac{R}{x} \right\} + 2\sqrt{R} \{ \sqrt{R} \} + O(1) = \\ &= R (\ln R + 2\gamma - 1) + \Delta_1(R), \end{aligned}$$

где

$$\Delta_1(R) = \sqrt{R} - 2 \sum_{1 \leq x \leq \sqrt{R}} \left\{ \frac{R}{x} \right\} + O(1) = O(\sqrt{R}), \quad (4)$$

что и требовалось доказать.

Замечание. Если дробные доли функций $f(x) = \sqrt{R} - x^2$ при $0 < x \leq \sqrt{R}/2$ и $f(x) = R/x$ при $0 < x \leq \sqrt{R}$

распределены «равномерно», т. е. количество дробных долей $f(x)$, попадающих на любой интервал $(a, b) \subset [0, 1]$, пропорционально длине (a, b) , то

$$\sum_{0 < x \leq \sqrt{R/2}} \{ \sqrt{R - x^2} \} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{R}{2}} + o(\sqrt{R}),$$

$$\sum_{0 < x \leq \sqrt{R}} \left\{ \frac{R}{x} \right\} = \frac{1}{2} \sqrt{R} + o(\sqrt{R})$$

(для этого достаточно $[0, 1]$ разбить на «малые» равные интервалы), и в теоремах 2 и 3 получается уточнение

$$\Delta(R) = o(\sqrt{R}), \quad \Delta_1(R) = o(\sqrt{R}).$$

§ 2. Связь проблем теории целых точек с тригонометрическими суммами

Проблема целых точек в § 1 сведена к проблеме асимптотического поведения суммы дробных долей $f(x)$. Последняя тесно связана с проблемой распределения значений $\{f(x)\}$, которая в свою очередь сводится к исследованию тригонометрических сумм. Установление этих связей и составляет основное содержание § 2.

В рассматриваемых вопросах часто полезными бывают функции, близкие к характеристическим функциям интервалов, но значительно более гладкие.

В следующей лемме строятся такие функции.

Лемма А. Пусть $r \geq 1$, r — целое, α и β — вещественные, $0 < \Delta < 1/4$, $\Delta \leq \beta - \alpha \leq 1 - \Delta$. Тогда существует периодическая с периодом 1 функция $\psi(x)$, удовлетворяющая условиям

1) $\psi(x) = 1$ в промежутке $\alpha + \frac{\Delta}{2} \leq x \leq \beta - \frac{\Delta}{2}$;

2) $0 < \psi(x) < 1$ в промежутках

$$\alpha - \frac{\Delta}{2} < x < \alpha + \frac{\Delta}{2} \quad \text{и} \quad \beta - \frac{\Delta}{2} < x < \beta + \frac{\Delta}{2};$$

3) $\psi(x) = 0$ в промежутке $\beta + \frac{\Delta}{2} \leq x \leq 1 + \alpha - \frac{\Delta}{2}$;

4) $\psi(x)$ разлагается в ряд Фурье вида

$$\psi(x) = \beta - \alpha + \sum_{\substack{m=-\infty \\ m \neq 0}}^{+\infty} g(m) e^{2\pi i m x},$$

где $|g(m)| \leq \min\left(\beta - \alpha, \frac{1}{\pi|m|}, \frac{1}{\pi|m|} \left(\frac{r}{\pi|m|\Delta}\right)^r\right)$.

Доказательство. Зададим функцию $\psi_0(x)$ равенствами (см. рис. 3)

- 1) $\psi_0(x) = 1$ при $\alpha < x < \beta$;
- 2) $\psi_0(\alpha) = \psi_0(\beta) = 1/2$;
- 3) $\psi_0(x) = 0$ при $\beta < x < 1 + \alpha$;
- 4) $\psi_0(x) = \psi_0(x + 1)$.

Раскладывая ее в ряд Фурье, найдем

$$\psi_0(x) = a_{0,0} + \sum_{\substack{m=-\infty \\ m \neq 0}}^{+\infty} a_{m,0} e^{2\pi i m x},$$

причем

$$a_{0,0} = \int_0^1 \psi_0(x) dx = \beta - \alpha;$$

$$a_{m,0} = \int_0^1 \psi_0(x) e^{-2\pi i m x} dx = \int_{\alpha}^{\beta} e^{-2\pi i m x} dx = i \frac{e^{-2\pi i m \beta} - e^{-2\pi i m \alpha}}{2\pi m} \quad \text{при } m \neq 0.$$

Возьмем теперь $\delta = \Delta/(2r)$ и последовательно определим

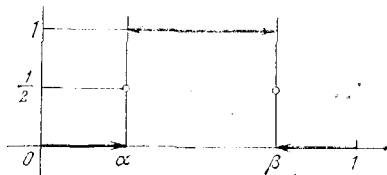


Рис. 3.

$\psi_1(x), \dots, \psi_\rho(x)$ равенствами

$$\psi_\rho(x) = \frac{1}{2\delta} \int_{-\delta}^{+\delta} \psi_{\rho-1}(x + u) du.$$

Функция $\psi_\rho(x)$ обладает свойствами

- 1) $\psi_\rho(x) = 1$ при $\alpha + \rho\delta \leq x \leq \beta - \rho\delta$;
- 2) $0 < \psi_\rho(x) < 1$ при $\alpha - \rho\delta < x < \alpha + \rho\delta$ и при $\beta - \rho\delta < x < \beta + \rho\delta$;
- 3) $\psi_\rho(x) = 0$ при $\beta + \rho\delta \leq x \leq 1 + \alpha - \rho\delta$;

$$4) \psi_\rho(x) = \beta - \alpha + \sum_{\substack{m=-\infty \\ m \neq 0}}^{+\infty} a_{m,\rho} e^{2\pi i m x},$$

$$\text{где } a_{m,\rho} = i \frac{e^{-2\pi i m \beta} - e^{-2\pi i m \alpha}}{2\pi m} \left(\frac{e^{2\pi i m \delta} - e^{-2\pi i m \delta}}{4\pi i m \delta} \right)^\rho.$$

Свойства 1—3 следуют непосредственно из определения $\psi_\rho(x)$ и свойств $\psi_{\rho-1}(x)$. Докажем свойство 4, предполагая, что оно верно для $\psi_{\rho-1}(x)$.

Имеем

$$\begin{aligned} a_{0,\rho} &= \int_0^1 \psi_\rho(x) dx = \int_0^1 \frac{1}{2\delta} \left(\int_{-\delta}^{+\delta} \psi_{\rho-1}(x+u) du \right) dx = \\ &= \frac{1}{2\delta} \int_{-\delta}^{+\delta} du \left(\int_0^1 \psi_{\rho-1}(x+u) dx \right) = \beta - \alpha; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_{m,\rho} &= \int_0^1 \psi_\rho(x) e^{-2\pi i m x} dx = \\ &= \int_0^1 \frac{1}{2\delta} \left(\int_{-\delta}^{+\delta} \psi_{\rho-1}(x+u) du \right) e^{-2\pi i m x} dx = \\ &= \frac{1}{2\delta} \int_{-\delta}^{+\delta} du \left(\int_0^1 \psi_{\rho-1}(x+u) e^{-2\pi i m x} dx \right) = \\ &= \frac{1}{2\delta} \int_{-\delta}^{+\delta} e^{2\pi i m u} du \left(\int_0^1 \psi_{\rho-1}(x+u) e^{-2\pi i m(x+u)} dx \right) = \\ &= \frac{a_{m,\rho-1}}{2\delta} \cdot \frac{e^{2\pi i m \delta} - e^{-2\pi i m \delta}}{2\pi i m} = \\ &= i \frac{e^{-2\pi i m \beta} - e^{-2\pi i m \alpha}}{2\pi m} \left(\frac{e^{2\pi i m \delta} - e^{-2\pi i m \delta}}{4\pi i m \delta} \right)^\rho \quad \text{при } m \neq 0, \end{aligned}$$

что и требовалось доказать. Полагая $\rho = r$, получим утверждение леммы.

Построенная функция $\psi(x)$ изображена на рис. 4.

Следующая лемма сводит вопрос об асимптотическом поведении суммы дробных долей различных функций к оценке тригонометрических сумм.

Лемма В. Пусть $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_Q$ — вещественные числа, $0 \leq \delta_s < 1$, $s = 1, 2, \dots, Q$. Пусть, далее, r — целое число, $r \geq 1$, $0 < \Delta < 1/8$, R, α и β — вещественные числа с условием $\Delta \leq \beta - \alpha \leq 1 - \Delta$, $\psi(x)$ — функция леммы А, от-

вечающая заданным Δ , α , β , τ . Если теперь при любых допустимых значениях α и β для суммы

$$U(\alpha, \beta) = \sum_{s=1}^Q \psi(\delta_s) \text{ выполняется соотношение } U(\alpha, \beta) = (\beta - \alpha)Q + O(R), \text{ то}$$

а) при любом σ с условием $0 < \sigma \leq 1$ число A_σ значений δ_s , подчиненных неравенству $\delta_s < \sigma$, выражается формулой $A_\sigma = \sigma Q + R_\sigma$, где $R_\sigma = O(R) + O(\Delta Q)$;

б) имеет место равенство

$$S = \sum_{s=1}^Q \delta_s = \frac{1}{2} Q + O(R) + O(\Delta Q).$$

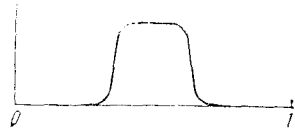


Рис. 4.

Доказательство. а) При $0 < \beta - \alpha \leq 1$ обозначим через $D(\alpha, \beta)$ количество чисел δ_s с условием $\alpha \leq \delta_s < \beta \pmod{1}$. Если $2\Delta < \beta - \alpha \leq 1 - 2\Delta$, то из очевидного неравенства

$$U\left(\alpha + \frac{\Delta}{2}, \beta - \frac{\Delta}{2}\right) \leq D(\alpha, \beta) \leq U\left(\alpha - \frac{\Delta}{2}, \beta + \frac{\Delta}{2}\right)$$

и условий леммы следует, что

$$D(\alpha, \beta) = (\beta - \alpha)Q + O(R) + O(\Delta Q).$$

Это соотношение распространяется на случай произвольных α и β , $0 < \beta - \alpha \leq 1$, с помощью таких равенств: если $0 < \beta - \alpha < 2\Delta$, то

$$D(\alpha, \beta) = D(\alpha, \alpha + 1 - 2\Delta) - D(\beta, \alpha + 1 - 2\Delta);$$

если $1 - 2\Delta \leq \beta - \alpha < 1$, то

$$D(\alpha, \beta) = D\left(\alpha, \alpha + \frac{1}{2}\right) + D\left(\alpha + \frac{1}{2}, \beta\right).$$

Отсюда при $\alpha = 0$, $\beta = \sigma$ следует первое утверждение леммы.

б) Будем считать $R < 0,4Q$, так как в противном случае утверждение становится тривиальным. Возьмем $n = [QR^{-1}]$, $\nu = 1/n$; согласно а) находим (полагаем $A_0 = 0$, $R_0 = 0$)

$$\begin{aligned} A_\nu &= \nu Q + R_\nu, & A_\nu - A_0 &= \nu Q + R_\nu - R_0, \\ A_{2\nu} &= 2\nu Q + R_{2\nu}, & A_{2\nu} - A_\nu &= \nu Q + R_{2\nu} - R_\nu, \\ A_{3\nu} &= 3\nu Q + R_{3\nu}, & A_{3\nu} - A_{2\nu} &= \nu Q + R_{3\nu} - R_{2\nu}, \\ &\dots & \dots & \dots \\ A_{n\nu} &= n\nu Q + R_{n\nu}, & A_{n\nu} - A_{(n-1)\nu} &= \nu Q + R_{n\nu} - R_{(n-1)\nu}. \end{aligned}$$

Количество чисел δ_s с условием $(k-1)v \leq \delta_s < kv$ равно $A_{kv} - A_{(k-1)v}$, $k = 1, 2, \dots, n$. Поэтому, умножая получившиеся выражения для $A_{kv} - A_{(k-1)v}$ на $(k-1)v$ и складывая, получим нижнюю оценку для S , а умножая на kv и складывая, — верхнюю оценку, т. е.

$$\sum_{k=1}^n (vQ + R_{kv} - R_{(k-1)v})(k-1)v \leq \\ \leq S \leq \sum_{k=1}^n (vQ + R_{kv} - R_{(k-1)v})kv.$$

Далее,

$$\sum_{k=1}^n v^2 Q (k-1) = v^2 Q \frac{n(n-1)}{2} = \frac{Q}{2} + O(R);$$

$$\sum_{k=1}^n v^2 Q k = v^2 Q \frac{n(n+1)}{2} = \frac{Q}{2} + Q(R);$$

$$\sum_{k=1}^n vk(R_{kv} - R_{(k-1)v}) = v \sum_{k=1}^n (kR_{kv} - (k-1)R_{(k-1)v} - \\ - R_{(k-1)v}) = v(nR_{nv} - R_{1v} - \dots - R_{(n-1)v}) = O(R) + O(\Delta Q);$$

$$\sum_{k=1}^n (R_{kv} - R_{(k-1)v})(k-1)v = O(R) + O(\Delta Q).$$

Отсюда утверждение б) следует тривиально.

Из доказанной леммы видно, что для асимптотического вычисления суммы $\{f(x)\}$ надо уметь вычислять сумму $\psi(f(x))$, а из леммы А следует, что это вычисление сводится к оценкам тригонометрических сумм вида

$$\sum_x e^{2\pi i m f(x)}, \quad m \neq 0.$$

§ 3. Теоремы о тригонометрических суммах

При определенных условиях, наложенных на функцию $f(x)$, стоящую в экспоненте, тригонометрическую сумму можно с хорошей точностью заменить другой, более «короткой», т. е. с меньшим числом слагаемых в ней; тривиальная оценка последней уже дает не тривиальную оценку первоначальной суммы.

Лемма 1. Пусть $f(x)$ и $\varphi(x)$ — действительные функции, удовлетворяющие на отрезке $[a, b]$ следующим

условиям: существуют числа $H, U, A,$

$$H > 0, \quad U \gg A \gg 1, \quad 0 < b - a \leq U,$$

такие, что

$$A^{-1} \ll f''(x) \ll A^{-1}, \quad \varphi(x) \ll H, \quad \varphi'(x) \ll HU^{-1},$$

и число участков монотонности функции $\frac{f'(x)}{\varphi(x) - n}$, где n — произвольное целое число, ограничено абсолютной постоянной. Тогда при любом Δ из интервала $(0, 1)$ справедливо равенство

$$\sum_{a < x \leq b} \varphi(x) e^{2\pi i f(x)} = \sum_{f'(a) - \Delta \leq n \leq f'(b) + \Delta} \int_a^b \varphi(x) e^{2\pi i (f(x) - nx)} dx + O(H \ln U) + O(H(f'(b) - f'(a))), \quad (5)$$

причем постоянные в знаках O зависят только от Δ .

Доказательство. Будем считать $b - a \geq c > 10$, так как в противном случае утверждение леммы тривиально. Кроме того, можно считать, что $0 < f'(x) \ll UA^{-1}$, $a \leq x \leq b$. Действительно, если (5) доказано при последнем ограничении, то

$$\begin{aligned} 0 &\leq \frac{d}{dx} (f(x) - [f'(a)]x) = f'(x) - [f'(a)] = \\ &= (x - a) f''(\xi) + 0 \ll UA^{-1}; \\ \sum_{a < x \leq b} \varphi(x) e^{2\pi i f(x)} &= \sum_{a < x \leq b} \varphi(x) e^{2\pi i (f(x) - [f'(a)]x)} = \\ &= \sum_{f'(a) - [f'(a)] - \Delta \leq n \leq f'(b) - [f'(a)] + \Delta} \int_a^b \varphi(x) e^{2\pi i (f(x) - [f'(a)]x - nx)} dx + \\ &\quad + O(H \ln U) + O((f'(b) - f'(a))H) = \\ &= \sum_{f'(a) - \Delta \leq n \leq f'(b) + \Delta} \int_a^b \varphi(x) e^{2\pi i (f(x) - nx)} dx + \\ &\quad + O(H \ln U) + O((f'(b) - f'(a))H). \end{aligned}$$

Возьмем $m = [10U^3]$ и при $[a] + 2 \leq M \leq [b] - 1$ рассмотрим интеграл W_M ,

$$W_M = \int_{-0,5}^{+0,5} \varphi(M + x) e^{2\pi i f(M+x)} \frac{\sin(2m+1)\pi x}{\sin \pi x} dx.$$

Так как

$$\frac{\sin (2m+1) \pi x}{\sin \pi x} = \sum_{n=-m}^m e^{2\pi i n x}, \quad (6)$$

то $\int_{-0,5}^{+0,5} \frac{\sin (2m+1) \pi x}{\sin \pi x} dx = 1$, и, следовательно, $W_M =$
 $= \varphi(M) e^{2\pi i f(M)} + V_M$, где

$$V_M = \int_{-0,5}^{+0,5} \frac{\sin (2m+1) \pi x}{\sin \pi x} (\varphi(M+x) e^{2\pi i f(M+x)} - \varphi(M) e^{2\pi i f(M)}) dx.$$

Оценим V_M . Для этого представим V_M в виде суммы трех интегралов:

$$V_M = \int_{-1/m}^{+1/m} + \int_{-1/2}^{-1/m} + \int_{+1/m}^{1/2}.$$

Первый интеграл оценим тривиально, воспользовавшись формулой конечных приращений:

$$\int_{-1/m}^{+1/m} \ll \int_{-1/m}^{+1/m} \frac{(|\varphi'| + |\varphi| |f'|) |x|}{|x|} dx \ll \frac{U}{A} \frac{H}{m}.$$

Второй и третий интегралы оцениваются одинаково. Оценим, например, второй, предварительно проинтегрировав по частям:

$$\int_{1/m}^{1/2} \frac{\sin (2m+1) \pi x}{\sin \pi x} (\varphi(M+x) e^{2\pi i f(M+x)} - \varphi(M) e^{2\pi i f(M)}) dx =$$

$$= - \frac{\varphi(M+x) e^{2\pi i f(M+x)} - \varphi(M) e^{2\pi i f(M)}}{\sin \pi x} \cdot \frac{\cos (2m+1) \pi x}{(2m+1) \pi} \Big|_{1/m}^{1/2} +$$

$$+ \int_{1/m}^{1/2} \frac{\cos (2m+1) \pi x}{(2m+1) \pi} Y_x dx,$$

где

$$Y_x = \frac{e^{2\pi i f(M+x)} (\varphi'(M+x) + 2\pi i f'(M+x))}{\sin \pi x} -$$

$$- \frac{(\varphi(M+x) e^{2\pi i f(M+x)} - \varphi(M) e^{2\pi i f(M)}) \pi \cos \pi x}{\sin^2 \pi x},$$

Первое слагаемое является величиной порядка $O\left(\frac{UH}{Am}\right)$.
Оценим оставшийся интеграл. Имеем

$$Y_x \ll \frac{UH}{A|x|},$$

$$\int_{1/m}^{1/2} \frac{\cos(2m+1)\pi x}{(2m+1)\pi} Y_x dx \ll \frac{UH}{Am} \int_{1/m}^{1/2} \frac{dx}{x} \ll \frac{UH}{Am} \ln m.$$

Таким образом,

$$V_M \ll \frac{UH}{Am} \ln m \ll \frac{H}{AU};$$

$$W_M = \varphi(M) e^{2\pi i f(M)} + O(HA^{-1}U^{-1}).$$

Суммируя последнее соотношение по M , пользуясь определением W_M и формулой (6), последовательно получаем

$$\begin{aligned} \sum_{a < x < b} \varphi(x) e^{2\pi i f(x)} &= \sum_{M=[a]+2}^{[b]-1} W_M + O(H) = \\ &= \sum_{M=[a]+2}^{[b]-1} \int_{-0,5}^{+0,5} \sum_{n=-m}^m \varphi(M+x) e^{2\pi i (f(M+x)-nx)} dx + O(H) = \\ &= \sum_{n=-m}^m \sum_{M=[a]+2}^{[b]-1} \int_{M-0,5}^{M+0,5} \varphi(x) e^{2\pi i (f(x)-nx)} dx + O(H) = \\ &= \sum_{n=-m}^m I_n + O(H), \quad (7) \end{aligned}$$

где

$$I_n = \int_{[a]+1,5}^{[b]-0,5} \varphi(x) e^{2\pi i (f(x)-nx)} dx.$$

Оценим I_n при $n \leq f'(a) - \Delta$. Так как $f''(x) > 0$, то функция $f'(x) - n$ монотонно возрастает, т. е.

$$f'(x) \geq f'([a] + 1,5) \geq f'(a),$$

поэтому

$$I_n = \frac{\varphi(x)}{f'(x) - n} \Big|_{[a]+1,5}^{[b]-0,5} - \int_{[a]+1,5}^{[b]-0,5} e^{2\pi i (f(x)-nx)} d \frac{\varphi(x)}{f'(x) - n}.$$

По условию леммы функция $\varphi(x)/(f'(x) - n)$ имеет

конечное число участков монотонности. Следовательно,

$$I_n \ll \frac{H}{f'([a] + 1,5) - n} \leq \frac{H}{f'(a) - n}.$$

При $n \geq f'(b) + \Delta$ получаем аналогичную оценку:

$$I_n \ll H/(n - f'(b)).$$

Тем самым из (7) и полученных оценок I_n приходим к равенству

$$\sum_{a < x \leq b} \varphi(x) e^{2\pi i f(x)} = \sum_{f'(a) - \Delta \leq n \leq f'(b) + \Delta} I_n + O(H \ln U).$$

Кроме того, имеем

$$I_n = \int_a^b \varphi(x) e^{2\pi i(f(x) - nx)} dx + O(H);$$

отсюда и из последней формулы следует утверждение леммы.

Следствие. Пусть выполняются условия леммы 1 и пусть, кроме того, $|f'(x)| \leq \delta < 1$, $a \leq x \leq b$.

Тогда

$$\sum_{a < x \leq b} \varphi(x) e^{2\pi i f(x)} = \int_a^b \varphi(x) e^{2\pi i f(x)} dx + O(H \ln U),$$

где постоянная в знаке O зависит только от δ .

Лемма 2. Пусть $F(x)$ и $\varphi(x)$ — действительные функции, удовлетворяющие на отрезке $[a, b]$ следующим условиям: 1) существуют числа H, U, A ,

$$H > 0, \quad U \gg A \gg 1,$$

такие, что

$$A^{-1} \ll F''(x) \ll A^{-1}, \quad F'''(x) \ll A^{-1}U^{-1}, \\ \varphi(x) \ll H, \quad \varphi'(x) \ll HU^{-1}, \quad \varphi''(x) \ll HU^{-2};$$

2) при некотором c , $a \leq c \leq b$,

$$F'(c) = 0;$$

3) функция G ,

$$G = \frac{\varphi(x+c)}{F'(x+c)} - \frac{\varphi(c)}{\sqrt{2(F(x+c) - F(c))F''(c)}},$$

имеет конечное число участков монотонности. Тогда

имеет место следующая асимптотическая формула:

$$\int_a^b \varphi(x) e^{2\pi i F(x)} dx = \frac{1+i}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\varphi(c) e^{2\pi i F(c)}}{\sqrt{F''(c)}} + O(H) + \\ + O\left(H \min\left(\frac{1}{|F'(a)|}, \sqrt{A}\right)\right) + O\left(H \min\left(\frac{1}{|F'(b)|}, \sqrt{A}\right)\right).$$

Доказательство. Разбивая точкой c промежуток интегрирования на две части, получаем

$$\int_a^b \varphi(x) e^{2\pi i F(x)} dx = \int_a^c + \int_c^b. \quad (8)$$

Вычислим второй интеграл. Имеем

$$J = \int_c^b \varphi(x) e^{2\pi i F(x)} dx = e^{2\pi i F(c)} \int_0^{b-c} \varphi(x+c) e^{2\pi i (F(x+c) - F(c))} dx.$$

В последнем интеграле сделаем замену переменной интегрирования вида $F(x+c) - F(c) = u$:

$$J = e^{2\pi i F(c)} \int_0^{F(b)-F(c)} \frac{\varphi(x+c)}{F'(x+c)} e^{2\pi i u} du$$

(здесь $\varphi(x+c)$ и $F'(x+c)$ следует рассматривать как функции u). Сравним теперь J с интегралом J' ,

$$J' = e^{2\pi i F(c)} \int_0^{F(b)-F(c)} \varphi(\tilde{c}) \sqrt{\frac{1}{2uF''(c)}} e^{2\pi i u} du.$$

Имеем оценку

$$|J - J'| \leq \left| \int_0^{F(b)-F(c)} G(u) e^{2\pi i u} du \right|,$$

$$\text{где } G(u) = \frac{\varphi(x+c)}{F'(x+c)} - \frac{\varphi(c)}{\sqrt{2uF''(c)}}.$$

По условию леммы функция $G(u)$ будет кусочно-монотонной. Поэтому, представляя $e^{2\pi i u}$ в виде $\cos 2\pi u + i \sin 2\pi u$, разбивая промежуток интегрирования на промежутки единичной длины и пользуясь кусочной монотонностью $G(u)$, приходим к оценке

$$|J - J'| \ll \max_{0 \leq u \leq F(b)-F(c)} |G(u)| \leq \\ \leq \max_{0 \leq x \leq b-c} \left| \frac{\varphi(x+c)}{F'(x+c)} - \frac{\varphi(c)}{\sqrt{2(F'(x+c) - F(c))F''(c)}} \right|.$$

Далее,

$$\begin{aligned} F(x+c) - F(c) &= \frac{1}{2} F''(c) x^2 (1 + O(xU^{-1})), \\ F'(x+c) &= F''(c) x (1 + O(xU^{-1})), \\ \varphi(x+c) &= \varphi(c) + O(xHU^{-1}); \end{aligned}$$

поэтому

$$\begin{aligned} \frac{\varphi(x+c)}{F'(x+c)} - \frac{\varphi(c)}{\sqrt{2(F(x+c) - F(c)) F''(c)}} &= \\ = \frac{\varphi(c) + O(xHU^{-1})}{F''(c) x (1 + O(xU^{-1}))} - \frac{\varphi(c)}{F''(c) x \sqrt{1 + O(xU^{-1})}} &= \\ = O(HU^{-1}A) = O(H). \end{aligned}$$

Вычислим теперь J' . Обозначая через λ разность $F(b) - F(c)$, будем иметь

$$\begin{aligned} J' &= \frac{\varphi(c) e^{2\pi i F(c)}}{\sqrt{2F''(c)}} \int_0^\lambda \frac{e^{2\pi i u}}{\sqrt{u}} du = \\ &= \frac{\varphi(c) e^{2\pi i F(c)}}{\sqrt{2F''(c)}} \int_0^\infty \frac{e^{2\pi i u}}{\sqrt{u}} du - \frac{\varphi(c) e^{2\pi i F(c)}}{\sqrt{2F''(c)}} \int_\lambda^\infty \frac{e^{2\pi i u}}{\sqrt{u}} du. \end{aligned}$$

Оценим последний интеграл двумя способами. Прежде всего

$$\left| \int_\lambda^\infty \frac{e^{2\pi i u} du}{\sqrt{u}} \right| \leq \int_\lambda^{\lambda+1} \frac{du}{\sqrt{u}} + \left| \int_{\lambda+1}^\infty \frac{e^{2\pi i u}}{\sqrt{u}} du \right| \ll 1;$$

кроме того, при $\lambda > 0$

$$\left| \int_\lambda^\infty \frac{e^{2\pi i u}}{\sqrt{u}} du \right| \ll \frac{1}{\sqrt{\lambda}} = \frac{1}{\sqrt{F(b) - F(c)}}.$$

Так как

$$F(b) - F(c) = \frac{1}{2} F''(\xi) (b-c)^2 \gg (b-c)^2 A^{-1},$$

$$|F'(b)| = |F'(c + b - c)| = F''(\xi_1) |b - c| \ll |b - c| A^{-1},$$

то

$$\frac{1}{\sqrt{F(b) - F(c)}} \ll \frac{\sqrt{A}}{|b - c|} \ll \frac{1}{|F'(b)| \sqrt{A}}.$$

Тем самым получили

$$J' = \frac{\varphi(c) e^{2\pi i F(c)}}{\sqrt{2F''(c)}} \int_0^{\infty} \frac{e^{2\pi i u} du}{\sqrt{u}} + O\left(H \min\left(\frac{1}{|F'(b)|}, \sqrt{A}\right)\right),$$

$$J = \frac{\varphi(c) e^{2\pi i F(c)}}{\sqrt{2F''(c)}} \int_0^{\infty} \frac{e^{2\pi i u} du}{\sqrt{u}} + O(H) + \\ + O\left(H \min\left(\frac{1}{|F'(b)|}, \sqrt{A}\right)\right).$$

Аналогично вычисляется первый интеграл в (8):

$$\int_a^c \varphi(x) e^{2\pi i F(x)} dx = \frac{\varphi(c) e^{2\pi i F(c)}}{\sqrt{2F''(c)}} \int_0^{\infty} \frac{e^{2\pi i u}}{\sqrt{u}} du + \\ + O(H) + O\left(H \min\left(\frac{1}{|F'(a)|}, \sqrt{A}\right)\right).$$

Так как

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos 2\pi u}{\sqrt{u}} du = \int_0^{\infty} \frac{\sin 2\pi u}{\sqrt{u}} du = \frac{1}{2},$$

то из доказанных соотношений следует утверждение леммы.

Теорема 4. Пусть действительные функции $f(x)$, $\varphi(x)$, $F(x) = f(x) - nx$ удовлетворяют условиям лемм 1 и 2. Тогда, определяя числа x_n из уравнения $f'(x_n) = n$, будем иметь

$$\sum_{a < x < b} \varphi(x) e^{2\pi i f(x)} = \\ = \frac{1+i}{\sqrt{2}} \sum_{f'(a) \leq n \leq f'(b)} \frac{\varphi(x_n)}{\sqrt{f''(x_n)}} e^{2\pi i (f(x_n) - nx_n)} + \\ + O(H \ln U) + O(H (f'(b) - f'(a))) + O(H\sqrt{A}). \quad (9)$$

Доказательство. Из леммы 1 получаем (5). К каждому интегралу I_n ,

$$I_n = \int_a^b \varphi(x) e^{2\pi i (f(x) - nx)} dx, \quad f'(a) + 1 \leq n \leq f'(b) - 1,$$

применим лемму 2, а при $f'(a) - 1 \leq n < f'(a) + 1$, $f'(b) - 1 < n \leq f'(b) + 1$ воспользуемся оценкой $I_n \ll H\sqrt{A}$. Складывая асимптотические формулы для I_n , получим утверждение теоремы.

Следствие. При условиях теоремы 4 справедлива оценка

$$\sum_{a < x < b} \varphi(x) e^{2\pi i f(x)} \ll H \left(\frac{b-a}{\sqrt{A}} + \sqrt{A} + \ln U \right).$$

Доказательство. Тривиальная оценка правой части (9) дает

$$\begin{aligned} \sum_{a < x < b} \varphi(x) e^{2\pi i f(x)} &\ll H((f'(b) - f'(a) + 1)\sqrt{A} + \ln U) \ll \\ &\ll H \left(\frac{b-a}{\sqrt{A}} + \sqrt{A} + \ln U \right). \end{aligned}$$

Из этого следствия и леммы 2 уже легко доказать соотношения

$$\Delta(R) = O(R^{1/3}), \quad \Delta_1(R) = O(R^{1/3} \ln R).$$

Однако в случае проблемы круга и проблемы делителей новую тригонометрическую сумму, стоящую в правой части (9), можно оценить не тривиально, что позволяет получить еще более точные утверждения относительно величин $\Delta(R)$ и $\Delta_1(R)$.

Лемма 3. Пусть $f(x)$ — действительная функция на $[a, b]$, $q \leq b - a$, q — натуральное число. Тогда

$$\left| \sum_{a < n < b} e^{2\pi i f(n)} \right| \ll \frac{b-a}{\sqrt{q}} + \sqrt{\frac{b-a}{q} \sum_{r=1}^{q-1} \left| \sum_{a < n < b-r} e^{2\pi i g(n)} \right|},$$

где $g(n) = f(n+r) - f(n)$, а постоянная в знаке \ll — абсолютная.

Доказательство. Для удобства будем полагать $e^{2\pi i f(n)} = 0$ при $n \leq a$ и $b < n$. Тогда при любом целом m

$$S = \sum_{a < n < b} e^{2\pi i f(n)} = \sum_n e^{2\pi i f(n+m)},$$

и, следовательно,

$$S = \frac{1}{q} \sum_n \sum_{m=1}^q e^{2\pi i f(n+m)}.$$

Заметим, что внутренняя сумма справа в последнем равенстве равна нулю при $n \leq a - q$ и $b < n$, т. е. можно считать $a - q < n < b$. Пользуясь неравенством Коши,

получим

$$\begin{aligned}
 |S|^2 &\leq \frac{1}{q^2} \sum_n 1 \sum_n \left| \sum_{m=1}^q e^{2\pi i f(n+m)} \right|^2 \leq \\
 &\leq \frac{1}{q^2} (b-a+q) \sum_n \left| \sum_{m=1}^q e^{2\pi i f(n+m)} \right|^2 \leq \\
 &\leq \frac{2(b-a)}{q^2} \left\{ 2(b-a)q + 2 \left| \sum_n \sum_{m>s} \sum e^{2\pi i (f(n+m) - f(n+s))} \right| \right\}.
 \end{aligned}$$

Рассмотрим кратную сумму. Функцию в экспоненте представим в виде разности $f(v+r) - f(v)$, где $r=1, 2, \dots, q-1$ и $v=[a]+1, \dots, [b]-r$, так как при остальных значениях параметров получим нуль. При фиксированных r и v система уравнений

$$\begin{cases} n+m = v+r \\ n+s = v, \end{cases} \quad 1 \leq s < m \leq q,$$

имеет ровно $q-r$ решений, так как $m-s=r$ и решениями будут наборы $s=1, m=r+1, n=v-1; s=2, m=r+2, n=v-2, \dots; s=q-r, m=q, n=v-q+r$. Тем самым находим

$$\begin{aligned}
 \left| \sum_n \sum_{m>s} \sum e^{2\pi i (f(n+m) - f(n+s))} \right| &= \left| \sum_v \sum_{r=1}^{q-1} (q-r) e^{2\pi i (f(v+r) - f(v))} \right| = \\
 &= \left| \sum_{r=1}^{q-1} (q-r) \sum_{a < v \leq b-r} e^{2\pi i (f(v+r) - f(v))} \right| \leq \\
 &\leq q \sum_{r=1}^{q-1} \left| \sum_{a < n \leq b-r} e^{2\pi i g(n)} \right|.
 \end{aligned}$$

Отсюда следует утверждение леммы.

Теорема 5. Пусть $k \geq 2$, $K=2^{k-1}$, функция $f(x)$ имеет k -ю непрерывную производную на $[a, b]$, причем

$$0 < \lambda_k \leq f^{(k)}(\xi) \leq h \lambda_k \quad \text{при всех } \xi \in [a, b].$$

Тогда справедлива следующая оценка:

$$\left| \sum_{a < n \leq b} e^{2\pi i f(n)} \right| \ll (b-a) \lambda_k^{\frac{1}{2K-2}} h^{\frac{2}{K}} + (b-a)^{1-\frac{2}{K}} \lambda_k^{-\frac{1}{2K-2}},$$

где постоянная в знаке \ll — абсолютная.

Доказательство. Будем предполагать, что

$$(b-a)^{-4\left(1-\frac{1}{K}\right)} \ll \lambda_k \ll 1,$$

так как в противном случае утверждение теоремы становится тривиальным. Докажем теорему по индукции. При $k=2$ из следствия теоремы 4 имеем (все условия теоремы 4 выполняются)

$$\sum_{a < n \leq b} e^{2\pi i f(n)} \ll (b-a) h \lambda_2^{1/2} + \lambda_2^{-1/2}.$$

Предполагая справедливость теоремы для $k-1$, докажем ее для k ($k > 2$). Возьмем $q = \left\lfloor \lambda_h^{-\frac{1}{K-1}} \right\rfloor$ и применим лемму 3. Так как

$$\lambda_h \gg (b-a)^{-1\left(1-\frac{1}{K}\right)}; \quad K > 4,$$

то

$$1 \leq q \leq \lambda_h^{-\frac{1}{K-1}} < b-a,$$

и утверждение леммы дает

$$\left| \sum_{a < n \leq b} e^{2\pi i f(n)} \right| \leq c_0 (b-a) \lambda_h^{\frac{1}{2K-2}} + \\ + c_0 \left((b-a) \lambda_h^{\frac{1}{K-1}} \sum_{r=1}^{q-1} \left| \sum_{a < n \leq b-r} e^{2\pi i g(n)} \right| \right)^{\frac{1}{2}}$$

где $g(n) = f(n+r) - f(n)$. Так как

$$g^{(h-1)}(x) = f^{(h-1)}(x+r) - f^{(h-1)}(x) = r f^{(h)}(\xi)$$

при некотором $\xi \in [a, b]$, то

$$r \lambda_h \leq g^{(h-1)}(x) \leq r h \lambda_h, \quad x \in [a, b].$$

Поэтому к внутренней сумме применима индукционная оценка: $K_1 = 2^{h-2}$, $2K_1 = K$,

$$\sigma_r = \left| \sum_{a < n \leq b-r} e^{2\pi i g(n)} \right| \leq c_{h-1} (b-a) (r \lambda_h)^{\frac{1}{2K_1-2}} h^{\frac{2}{K_1}} + \\ + c_{h-1} (b-a)^{1-\frac{2}{K_1}} (r \lambda_h)^{-\frac{1}{2K_1-2}}.$$

Отсюда находим

$$\sum_{r=1}^{q-1} \sigma_r \leq c_{h-1} (b-a) q^{1+\frac{1}{K-2}} \lambda_h^{\frac{1}{K-2}} h^{\frac{4}{K}} + \\ + 2c_{h-1} (b-a)^{1-\frac{4}{K}} q^{1-\frac{1}{K-2}} \lambda_h^{-\frac{1}{K-2}} \leq \\ \leq c_{h-1} (b-a) h^{\frac{4}{K}} + 2c_{h-1} (b-a)^{1-\frac{4}{K}} \lambda_h^{-\frac{2}{K-1}}.$$

Тем самым для нашей суммы получаем оценку

$$\left| \sum_{a < n \leq b} e^{2\pi i f(n)} \right| \leq c_0 (b-a) \lambda_h \frac{1}{2K-2} + \\ + c_0 c_{k-1}^{\frac{1}{2}} (b-a) \lambda_h \frac{1}{2K-2} h^{\frac{2}{K}} + c_0 (2c_{k-1})^{\frac{1}{2}} (b-a)^{1-\frac{2}{K}} \lambda_h \frac{1}{2K-2} \leq \\ \leq c_k \left((b-a) \lambda_h \frac{1}{2K-2} h^{\frac{2}{K}} + (b-a)^{1-\frac{2}{K}} \lambda_h \frac{1}{2K-2} \right),$$

где $c_k \leq \max(c_0 + c_0 c_{k-1}^{1/2}, c_0 (2c_{k-1})^{1/2})$. Не ограничивая общности, будем считать $c_1 = 4c_0^2$. Тогда $c_k \leq c_1$, и теорема доказана.

§ 4. Целые точки в круге и под гиперболой

Прежде чем применять развитую теорию к проблемам целых точек, докажем еще одну лемму.

Лемма 4 (преобразование Абеля). Пусть $f(x)$ — непрерывно дифференцируема на $[a, b]$, c_n — произвольные комплексные числа,

$$C(x) = \sum_{a < n \leq x} c_n.$$

Тогда

$$\sum_{a < n \leq b} c_n f(n) = - \int_a^b C(x) f'(x) dx + C(b) f(b).$$

Доказательство. Имеем

$$C(b) f(b) - \sum_{a < n \leq b} c_n f(n) = \sum_{a < n \leq b} c_n (f(b) - f(n)) = \\ = \sum_{a < n \leq b} \int_n^b c_n f'(x) dx = \sum_{a < n \leq b} \int_a^b c_n g(n; x) f'(x) dx,$$

$$\text{где } g(n; x) = \begin{cases} 1, & \text{если } n \leq x \leq b; \\ 0, & \text{если } x < n. \end{cases}$$

Меняя в последней сумме порядок суммирования и интегрирования и замечая, что

$$\sum_{a < n \leq b} c_n g(n; x) = \sum_{a < n \leq x} c_n = C(x),$$

получаем утверждение леммы.

Теорема 6. Для $K(R)$ справедлива следующая асимптотическая формула:

$$K(R) = \pi R + O\left(R^{\frac{1}{3} - \frac{1}{264}} \ln R\right).$$

Доказательство. Вычислим σ ,

$$\sigma = \sum_{0 < x \leq \sqrt{R/2}} \{ \sqrt{R - x^2} \}.$$

Для этого возьмем $r = \lfloor \ln R \rfloor \geq 1$, $\Delta = R^{-1/6 - 1/264}$; пусть α и β — произвольные действительные числа, $0 \leq \alpha < \beta < 1$, и $\psi(x)$ — функция леммы A, отвечающая заданным r, Δ, α, β . По лемме B достаточно оценить σ_0 ,

$$\sigma_0 = \sum_{\substack{m=-\infty \\ m \neq 0}}^{+\infty} g(m) U_m,$$

где $U_m = \sum_{0 < x \leq \sqrt{R/2}} e^{2\pi i m \sqrt{R-x^2}}$, $|g(m)| \leq \min\left(\frac{1}{\pi|m|}, \frac{1}{\pi|m|} \times \left(\frac{r}{\pi|m|\Delta}\right)^r\right)$. Имеем

$$\left| \sum_{|m| > \Delta^{-1} \ln R} g(m) U_m \right| \leq 2 \sqrt{\frac{R}{2}} \sum_{m > \Delta^{-1} \ln R} \frac{1}{\pi m} \left(\frac{r}{\pi m \Delta}\right)^r \ll 1.$$

Осталось оценить сумму по m , $1 \leq |m| \leq \Delta^{-1} \ln R$. К тригонометрической сумме \bar{U}_m ,

$$\bar{U}_m = \sum_{0 < x \leq \sqrt{R/2}} e^{-2\pi i m \sqrt{R-x^2}},$$

применим теорему 4, полагая в ней $H=1$, $f(x) = -m\sqrt{R-x^2}$, $U = \sqrt{R/2}$, $a=0$, $b = \sqrt{R/2}$, $A = \sqrt{R}/m$. Все условия теоремы выполняются, и мы имеем

$$f'(x) = \frac{mx}{\sqrt{R-x^2}}; \quad x_n = \frac{n\sqrt{R}}{\sqrt{n^2+m^2}};$$

$$g(n) = f(x_n) - n(x_n) = -\sqrt{R(n^2+m^2)};$$

$$f''(x) = \frac{mR}{(R-x^2)^{3/2}}; \quad \sqrt{f''(x_n)} = \frac{(n^2+m^2)^{3/4}}{m^4\sqrt{R}};$$

$$f'(0) = 0; \quad f'\left(\sqrt{\frac{R}{2}}\right) = m;$$

$$\bar{U}_m = \sum_{0 < n < m} \frac{1+i}{\sqrt{2}} \frac{m^4\sqrt{R}}{(m^2+n^2)^{3/4}} e^{-2\pi i \sqrt{R(n^2+m^2)}} + O(\sqrt[4]{R}/\sqrt{m}).$$

Отсюда находим, пользуясь оценкой $|g(m)| \leq \frac{1}{\pi|m|}$,

$$\left| \sum_{0 < |m| \leq \Delta^{-1} \ln R} g(m) U_m \right| \ll \ll \sqrt[4]{R} \sum_{10 < m \leq \Delta^{-1} \ln R} \left| \sum_{0 < n \leq m} (m^2 + n^2)^{-3/4} e^{2\pi i \sqrt{R(n^2 + m^2)}} \right| + \sqrt[4]{R}. \quad (10)$$

Оценим внутреннюю сумму. Применим лемму 4 (преобразование Абеля), полагая в ней

$$c_n = e^{2\pi i \sqrt{R(n^2 + m^2)}}, \quad f(n) = (m^2 + n^2)^{-3/4}.$$

Тогда

$$S = \sum_{10 < n \leq m} (m^2 + n^2)^{-3/4} e^{2\pi i \sqrt{R(n^2 + m^2)}} = = \frac{3}{2} \int_{10}^m \mathbf{C}(x) x (m^2 + x^2)^{-7/4} dx + \mathbf{C}(m) (2m^2)^{-3/4},$$

где $\mathbf{C}(x) = \sum_{10 < n \leq x} e^{2\pi i \sqrt{R(n^2 + m^2)}}$, $x \leq m$.

Для оценки суммы $\mathbf{C}(x)$ применим теорему 5. Прежде всего находим $f^{(\nu)}(n)$:

$$f^{(\nu)}(n) = 360 \sqrt[4]{R} (n^2 + m^2)^{-11/2} m^2 \left(n^4 - \frac{3}{2} n^2 m^2 + \frac{1}{8} m^4 \right).$$

На промежутке суммирования $\mathbf{C}(x)$ может лежать нуль $f^{(\nu)}(n)$, равный n_0 ,

$$n_0 = \frac{\sqrt{3 - \sqrt{7}}}{2} m.$$

Рассматривая самый общий случай, промежуток суммирования $\mathbf{C}(x)$ разобьем на $\ll \ln m$ промежутков $E_0, E_1, E_2, \dots, E_{-1}, E_{-2}, \dots$, где

$$E_0 = \{n; n_0 - 1 \leq n \leq n_0 + 1\},$$

$$E_\nu = \{n; n_0 + 2^{\nu-1} < n \leq n_0 + 2^\nu\}, \quad \nu = 1, 2, \dots,$$

$$E_{-\nu} = \{n; n_0 - 2^\nu \leq n < n_0 - 2^{\nu-1}\}, \quad \nu = 1, 2, \dots$$

Длина E_0 равна 2, длина $E_{\pm \nu}$ равна $2^{\nu-1}$, $\nu \geq 1$. Далее, при $n \in E_{\pm \nu}$, $\nu \geq 1$,

$$|f^{(\nu)}(n)| \asymp \sqrt[4]{R} m^{-6} 2^\nu.$$

Поэтому, полагая в теореме 5 $k=6$, $\lambda_6 = \sqrt[4]{R} m^{-6} 2^\nu$,

находим ($v \geq 1$)

$$\begin{aligned} \sum_{n \in E_{\pm v}} e^{2\pi i \sqrt{R(n^2+m^2)}} &\ll \\ &\ll 2^v (\sqrt{R} \cdot 2^v m^{-6})^{1/62} + 2^{v(1-1/16)} (\sqrt{R} 2^v m^{-6})^{-1/62}; \\ C(x) &\ll \left| \sum_{n \in E_0} \right| + \sum_{1 \leq v \leq \log_2 m} \left| \sum_{n \in E_{\pm v}} \right| \ll \\ &\ll m (\sqrt{R} m^{-5})^{1/62} + m^{1-1/16} (\sqrt{R} m^{-5})^{-1/62}; \\ S &\ll m^{-1/2} (\sqrt{R} m^{-5})^{1/62} + m^{-9/16} (\sqrt{R} m^{-5})^{-1/62}. \end{aligned}$$

Подставляя полученную оценку в (10), будем иметь

$$\left| \sum_{0 < |m| \leq \Delta^{-1} \ln R} g(m) U_m \right| \ll R^{\frac{1}{3} - \frac{1}{264}} \ln R.$$

Отсюда и из леммы В следует утверждение теоремы.

Теорема 7. Для числа $L(R)$ целых точек с положительными координатами под гиперболой $xy = R$ справедлива следующая асимптотическая формула:

$$L(R) = R (\ln R + 2\gamma - 1) + O\left(R^{\frac{1}{3} - \frac{1}{246}} \ln^2 R\right).$$

Доказательство. Достаточно доказать формулу

$$\sum_{x \leq \sqrt{R}} \left\{ \frac{R}{x} \right\} = \frac{1}{2} \sqrt{R} + O\left(R^{\frac{1}{3} - \frac{1}{246}} \ln^2 R\right).$$

Точками $2^{-k} \sqrt{R}$, где $k = 0, 1, 2, \dots$, поделим промежуток $\left(R^{\frac{1}{3} - \frac{1}{246}}, \sqrt{R}\right]$ на $\ll \ln R$ промежутков вида $(a, 2a)$, $2a \leq \sqrt{R}$, $a > R^{\frac{1}{3} - \frac{1}{246}}$. Докажем неравенство

$$\sum_{a < x \leq 2a} \left\{ \frac{R}{x} \right\} - \frac{a}{2} \ll R^{\frac{1}{3} - \frac{1}{246}} \ln R.$$

Перейдем к тригонометрическим суммам, считая в лемме А $r = [\ln R]$. Как и в теореме 6, надо оценить сумму

$$\sum_{0 < m \leq \Delta^{-1} \ln R} \frac{1}{m} |U(m)|,$$

где Δ — пока некоторый параметр,

$$U(m) = \sum_{a < x \leq 2a} e^{-2\pi i \frac{mR}{x}}.$$

Сумму $U(m)$ будем оценивать по-разному, в зависимости от величины a , другими словами, в зависимости от длины промежутка суммирования величин $\{R/x\}$.

1. Пусть

$$R^{\frac{1}{3}-\frac{1}{246}} < a \leq R^{\frac{1}{3}+\frac{1}{87}}.$$

Возьмем $\Delta = R^{\frac{1}{7}} a^{-\frac{4}{7}} \ln^{\frac{2}{7}} R < \frac{1}{10}$, и оценим $U(m)$ по

теореме 5, полагая в ней $k=3$, $K=4$, $\lambda_3 = mR/a^4$, $h \ll 1$. Найдем

$$U(m) \ll a(mR/a^4)^{\frac{1}{6}} + a^{1-\frac{1}{2}}(mR/a^4)^{-\frac{1}{6}};$$

$$\sum_{0 < m < \Delta^{-1} \ln R} \frac{1}{m} |U(m)| \ll R^{\frac{1}{3}-\frac{1}{35}} \ln R.$$

2. Пусть теперь $R^{\frac{1}{3}+\frac{1}{87}} \leq a \leq \sqrt{R}$. В этом случае сделаем переход от $U(m)$ к более короткой сумме по теореме 4, а затем применим теорему 5. Возьмем

$$\Delta = R^{11/41} a^{-36/41} \ln^2 R < 1/10$$

(R считаем достаточно большим). Полагая в теореме 4 $f(x) = -mR/x$, находим

$$f'(x) = mR/x^2, \quad f''(x) = -2mR/x^3;$$

$$A = \frac{a^3}{mR} \gg \frac{a^3}{R} \Delta \ln^{-1} R \gg 1;$$

$$x_n = \sqrt{mR/n}, \quad g(n) = -2\sqrt{mnR},$$

$$\sqrt{|f''(x_n)|} = \sqrt{2} n^{3/4} (mR)^{-1/4}; \quad f'(a) = mR/a^2,$$

$$f'(2a) = mR/4a^2;$$

$$U(m) = \frac{1+i}{2} (mR)^{1/4} \sum_{\frac{mR}{4a^2} < n < \frac{mR}{a^2}} n^{-3/4} e^{-2\pi i 2\sqrt{mnR}} + O\left(\sqrt{\frac{a^3}{mR}}\right).$$

Вклад остаточного члена последней формулы дает величину порядка

$$\ll \sum_{m < \Delta^{-1} \ln R} \frac{1}{m} \sqrt{\frac{a^3}{mR}} \ll R^{-1/2} a^{3/2} < R^{1/4}.$$

Далее, применяя преобразование Абеля, находим

$$\sum_{\frac{mR}{4a^2} \leq n \leq \frac{mR}{a^2}} n^{-3/4} e^{-2\pi i 2\sqrt{mnR}} = \\ = \frac{3}{4} \int_{\frac{mR}{4a^2}}^{mR/a^2} x^{-7/4} C(x) dx + C\left(\frac{mR}{a^2}\right) \left(\frac{mR}{a^2}\right)^{-3/4},$$

где $C(x) = \sum_{\frac{mR}{4a^2} \leq n \leq x} e^{-2\pi i 2\sqrt{mnR}}$. Оценим $C(x)$ по теореме 5,

полагая в ней $f(n) = 2\sqrt{mnR}$, $k = 5$. Находим $K = 16$,

$$\lambda_5 = (mR)^{1/2} \left(\frac{mR}{a^2}\right)^{-9/2} = (mR)^{-4} a^9;$$

$$C(x) \ll (mR)^{\frac{13}{15}} a^{-\frac{17}{10}} + (mR)^{\frac{121}{120}} a^{-\frac{41}{20}};$$

$$U(m) \ll (mR)^{11/30} a^{-1/5} + (mR)^{61/120} a^{-11/20};$$

$$\sum_{m \leq \Delta^{-1} \ln R} \frac{1}{m} |U(m)| \ll R^{\frac{1}{3} - \frac{1}{246}} \ln R.$$

Из полученных оценок следует утверждение теоремы.

ЗАДАЧИ

1. Пусть функция $f''(x)$ непрерывна на отрезке $a \leq x \leq b$ и при некоторых $A \geq 1$, $D \geq 1$ удовлетворяет условиям:

$$f''(x) \geq 1/A, \quad |f'(x)| \leq D.$$

Тогда

$$\sum_{a < x \leq b} e^{2\pi i f(x)} \ll (f'(b) - f'(a)) \sqrt{A} + \sqrt{A} + \ln((b-a)D).$$

2. Пусть $b - a \ll A$, $A \geq 1$, и функция $f''(x)$ непрерывна на $[a, b]$, причем

$$f''(x) \geq 1/A, \quad 0 < f'(x) \ll 1, \quad a \leq x \leq b.$$

Тогда имеют место следующие асимптотические равенства:

$$\alpha) \sum_{a < x \leq b} \{f(x)\} = \frac{b-a}{2} + O(A^{2/3}),$$

$$\beta) T_f(a, b) = \int_a^b f(x) dx + \rho(b)f(b) - \rho(a)f(a) - \\ - \frac{b-a}{2} + O(A^{2/3}),$$

где $T_f(a, b)$ — число целых точек в криволинейной трапеции $a < x \leq b$, $0 < y \leq f(x)$, и $\rho(x) = \frac{1}{2} - \{x\}$.

3. Построить кривую $y = f(x)$, удовлетворяющую условиям задачи 2 и такую, чтобы на ней лежало $\gg A^{2/3}$ целых точек (тем самым будет доказано, что остаточный член в формуле β) не может быть заменен на $o(A^{2/3})$).

4. Пусть $V(R)$ — число целых точек в шаре $X^2 + Y^2 + Z^2 \leq \leq R^2$. Справедлива следующая асимптотическая формула:

$$V(R) = \frac{4}{3} \pi R^3 + O(R^{3/2} \ln^2 R).$$

5. Доказать, что при $a \leq \sqrt{|t|}$ выполняются неравенства

$$\alpha) \sum_{a < n \leq 2a} n^{it} \ll \sqrt{a} |t|^{1/6},$$

$$\beta) \sum_{a < n \leq 2a} n^{it} \ll \sqrt{a} |t|^{\frac{1}{6} - \frac{1}{492}}.$$

Г Л А В А II

ЦЕЛЫЕ ФУНКЦИИ КОНЕЧНОГО ПОРЯДКА

Настоящая глава является вспомогательной и содержит необходимые в дальнейшем сведения из теории целых функций.

§ 1. Бесконечные произведения. Формула Вейерштрасса

Введем понятие бесконечного произведения.

Определение 1. Пусть $u_1, u_2, \dots, u_n, \dots$ — бесконечная последовательность комплексных чисел, отличных от -1 . Бесконечным произведением называется выражение вида

$$\prod_{n=1}^{\infty} (1 + u_n) = (1 + u_1)(1 + u_2) \dots (1 + u_n) \dots \quad (1)$$

Выражения вида

$$\prod_{n=1}^k (1 + u_n) = (1 + u_1) \dots (1 + u_k) = v_k \quad (2)$$

называются частичными произведениями.

Определение 2. Если последовательность (2) чисел v_k сходится при $k \rightarrow \infty$ к числу $v \neq 0$, то говорят, что бесконечное произведение (1) сходится и имеет значение, равное v , т. е.

$$v = \lim_{k \rightarrow \infty} v_k = \prod_{n=1}^{\infty} (1 + u_n). \quad (3)$$

Если же последовательность v_k не сходится или $v = 0$, то бесконечное произведение (1) называется расходящимся.

Для большинства приложений достаточно следующего признака сходимости.

Теорема 1. Если ряд

$$u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots \quad (4)$$

абсолютно сходится, то сходится и произведение (1).

Доказательство. Дано, что сходится ряд

$$|u_1| + |u_2| + \dots + |u_n| + \dots,$$

поэтому $\lim_{n \rightarrow \infty} |u_n| = 0$; следовательно, не ограничивая общности, можно считать $|u_n| \leq 1/2$, $n = 1, 2, \dots$. Предположим сначала, что $u_n = a$ — действительные числа, $n = 1, 2, \dots$. Тогда $|\ln(1 + u_n)| \leq 2|u_n|$. Отсюда следует сходимость последовательности $\ln(1 + u_1) + \dots + \ln(1 + u_n) = \ln(1 + u_1) \dots (1 + u_n)$ и, следовательно, произведения (1).

Пусть теперь u_n — произвольные комплексные числа. Надо доказать, что при $n \rightarrow \infty$ сходятся две последовательности действительных чисел

$$|v_n| = |(1 + u_1) \dots (1 + u_n)| = |1 + u_1| \dots |1 + u_n|, \quad (5)$$

$$\begin{aligned} \arg v_n &= \arg(1 + u_1) \dots (1 + u_n) = \\ &= \arg(1 + u_1) + \dots + \arg(1 + u_n). \end{aligned} \quad (6)$$

Чтобы сходилась последовательность (5), необходимо и достаточно сходимости последовательности $|v_n|^2$. Но

$$|1 + u_n|^2 = |1 + \alpha_n + i\beta_n|^2 = 1 + \alpha_n^2 + \beta_n^2 + 2\alpha_n,$$

$$\alpha_n = \operatorname{Re} u_n, \quad \beta_n = \operatorname{Im} u_n,$$

и так как $|\alpha_n^2 + \beta_n^2 + 2\alpha_n| \leq |u_n|^2 + 2|u_n|$, то сходимость $|v_n|^2$ следует из уже доказанного. Сходимость (6) следует из того, что при достаточно большом n_0 и $n > n_0$

$$|\arg(1 + u_n)| = \left| \operatorname{arc} \sin \frac{\beta_n}{\sqrt{(1 + \alpha_n)^2 + \beta_n^2}} \right| < \pi |\beta_n|.$$

Теорема 1 доказана.

Перейдем к изучению бесконечных произведений аналитических в некоторой области функций.

Теорема 2. Пусть $u_n(s)$ — бесконечная последовательность аналитических в области G функций, причем

а) $u_n(s) \neq -1$ при $n = 1, 2, \dots$ и $s \in G$;

б) $|u_n(s)| \leq a_n$ при $n = 1, 2, \dots$ и $s \in G$;

в) числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится.

Тогда произведение

$$\prod_{n=1}^{\infty} (1 + u_n(s)) \quad (7)$$

сходится при любом $s \in G$, а функция $v(s)$, определенная

равенством

$$v(s) = \prod_{n=1}^{\infty} (1 + u_n(s)),$$

является аналитической в области G , причем $v(s) \neq 0$ при $s \in G$.

Доказательство. Сходимость (7) при $s \in G$ следует из теоремы 1. Чтобы доказать аналитичность $v(s)$ в G , достаточно доказать равномерную сходимость к $v_k(s)$, $s \in G$, последовательности аналитических функций $v_k(s)$,

$$v_k(s) = \prod_{n=1}^k (1 + u_n(s)).$$

Положим $\prod_{n=1}^{\infty} (1 + a_n) = p$, $(1 + a_1) \dots (1 + a_n) = p_n$.

Докажем прежде всего, что при любом $s \in G$

$$\left| \frac{v(s)}{v_n(s)} - 1 \right| \leq \frac{p}{p_n} - 1. \quad (8)$$

Действительно, если $k \geq 1$, то

$$\begin{aligned} \left| \frac{v_{n+k}(s)}{v_n(s)} - 1 \right| &= |(1 + u_{n+1}(s)) \dots (1 + u_{n+k}(s)) - 1| = \\ &= |u_{n+1}(s) + \dots + u_{n+k}(s) + u_{n+1}(s)u_{n+2}(s) + \dots \\ &\quad \dots + u_{n+1}(s) \dots u_{n+k}(s)| \leq a_{n+1} + \dots + a_{n+k} + \\ &\quad + a_{n+1}a_{n+2} + \dots + a_{n+1} \dots a_{n+k} = \frac{p_{n+k}}{p_n} - 1. \end{aligned}$$

Переходя к пределу при $k \rightarrow \infty$, получим (8). Теперь имеем

$$\begin{aligned} |v(s) - v_n(s)| &= |v_n(s)| \left| \frac{v(s)}{v_n(s)} - 1 \right| \leq \\ &\leq p_n \left(\frac{p}{p_n} - 1 \right) = p - p_n < \varepsilon \end{aligned}$$

при $n \geq n_0(\varepsilon)$ и любом $s \in G$. Теорема доказана.

Определение 3. Функция $f(s)$, аналитическая в любой конечной части s -плоскости, называется целой.

Докажем теперь две теоремы о существовании целой функции, имеющей своими нулями только числа заданной бесконечной последовательности, и о разложении целой функции в бесконечное произведение по нулям (обобщение основной теоремы алгебры).

Теорема 3. Пусть a_1, \dots, a_n, \dots — бесконечная последовательность комплексных чисел, причем

$$0 < |a_1| \leq |a_2| \leq \dots \leq |a_n| \leq \dots$$

и

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{|a_n|} = 0.$$

Тогда существует целая функция $G(s)$, которая имеет своими нулями только числа a_n (если среди a_n есть равные, то нуль $G(s)$ будет иметь соответствующую кратность).

Доказательство. При $n = 1, 2, \dots$ положим

$$u_n = u_n(s) = \left(1 - \frac{s}{a_n}\right) e^{\frac{s}{a_n} + \frac{1}{2}\left(\frac{s}{a_n}\right)^2 + \dots + \frac{1}{n-1}\left(\frac{s}{a_n}\right)^{n-1}}$$

и рассмотрим бесконечное произведение

$$\prod_{n=1}^{\infty} u_n(s). \quad (9)$$

Докажем, что это произведение сходится во всякой точке $s \neq a_n$, $n = 1, 2, \dots$, плоскости комплексного переменного и является целой функцией $G(s)$ с нулями $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$. Для этого рассмотрим круг C с радиусом $|a_n|$

и бесконечное произведение $\prod_{r=n}^{\infty} u_r(s)$. Докажем, что последнее произведение сходится к аналитической функции в круге $|s| < |a_n|$. Тогда (9) также будет аналитической функцией в этом круге, которая имеет там только нули a_i , $|a_i| < |a_n|$. Так как $|a_n| \rightarrow \infty$, то тем самым теорема будет доказана. При $|s| < |a_n|$, $r \geq n$,

$$\begin{aligned} \ln u_r(s) = \ln \left(1 - \frac{s}{a_r}\right) + \frac{s}{a_r} + \frac{1}{2} \left(\frac{s}{a_r}\right)^2 + \dots \\ \dots + \frac{1}{r-1} \left(\frac{s}{a_r}\right)^{r-1} \end{aligned}$$

Тогда при $r = n, n+1, \dots$ и $|s| < |a_n|$

$$\ln u_r(s) = -\frac{1}{r} \left(\frac{s}{a_r}\right)^r - \frac{1}{r+1} \left(\frac{s}{a_r}\right)^{r+1} - \dots$$

и

$$u_r(s) = e^{-\frac{1}{r} \left(\frac{s}{a_r}\right)^r - \frac{1}{r+1} \left(\frac{s}{a_r}\right)^{r+1} - \dots}$$

Таким образом, достаточно доказать абсолютную сходимость ряда

$$\sum_{r=n}^{\infty} \left[\frac{1}{r} \left(\frac{s}{a_r} \right)^r + \frac{1}{r+1} \left(\frac{s}{a_r} \right)^{r+1} + \dots \right] \quad (10)$$

при $|s| < |a_n|$. Но при любом $0 < \varepsilon < 1/2$ и $|s| \leq (1 - \varepsilon)|a_n|$ имеем

$$\left| \frac{1}{r} \left(\frac{s}{a_r} \right)^r + \frac{1}{r+1} \left(\frac{s}{a_r} \right)^{r+1} + \dots \right| \leq \frac{1}{r} (1 - \varepsilon)^r + \frac{1}{r+1} (1 - \varepsilon)^{r+1} + \dots < \frac{(1 - \varepsilon)^r}{\varepsilon r}.$$

Отсюда следует равномерная абсолютная сходимость (10) в области $|s| \leq (1 - \varepsilon)|a_n|$, т. е. аналитичность (9) в круге S . Теорема доказана.

Следствие 1 (формула Вейерштрасса). Пусть a_1, \dots, a_n, \dots — последовательность комплексных чисел, удовлетворяющая условиям теоремы 3. Тогда функция $G(s)$

$$G(s) = s^m \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{s}{a_n} \right) e^{\frac{s}{a_n} + \frac{1}{2} \left(\frac{s}{a_n} \right)^2 + \dots + \frac{1}{n-1} \left(\frac{s}{a_n} \right)^{n-1}}$$

является целой и имеет своими нулями только числа $0, a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$.

Следствие 2. Пусть последовательность чисел $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ удовлетворяет условиям теоремы 3, и, кроме того, существует целое число $p \geq 0$ такое, что сходится ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{|a_n|^{p+1}}.$$

Тогда функция $G_1(s)$,

$$G_1(s) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{s}{a_n} \right) e^{\frac{s}{a_n} + \frac{1}{2} \left(\frac{s}{a_n} \right)^2 + \dots + \frac{1}{p} \left(\frac{s}{a_n} \right)^p},$$

удовлетворяет теореме 3.

Действительно, в этом случае при $|s| \leq (1 - \varepsilon)|a_n|$ ряд

$$\sum_{r=n}^{\infty} \left[\frac{1}{p+1} \left(\frac{s}{a_r} \right)^{p+1} + \frac{1}{p+2} \left(\frac{s}{a_r} \right)^{p+2} + \dots \right]$$

мажорируется рядом

$$\sum_{r=n}^{\infty} \frac{(1-\varepsilon)^{p+1}}{(p+1)\varepsilon} \cdot \frac{|a_n|^{p+1}}{|a_r|^{p+1}} < +\infty.$$

Теорема 4. Каждая целая функция $G(s)$ может быть представлена в виде

$$G(s) = e^{H(s)s^m} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{s}{a_n}\right) e^{\frac{s}{a_n} + \frac{1}{2}\left(\frac{s}{a_n}\right)^2 + \dots + \frac{1}{n-1}\left(\frac{s}{a_n}\right)^{n-1}}, \quad (*)$$

где $H(s)$ — целая функция, а числа $0, a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ — нули $G(s)$, расположенные в порядке возрастания их модулей. Если, кроме того, последовательность $a_n, n = 1, 2, \dots$, удовлетворяет условиям следствия 2, то

$$G(s) = e^{H(s)s^m} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{s}{a_n}\right) e^{\frac{s}{a_n} + \frac{1}{2}\left(\frac{s}{a_n}\right)^2 + \dots + \frac{1}{p}\left(\frac{s}{a_n}\right)^p}.$$

Доказательство. Нули $G(s)$ не могут иметь предельной точки, т. е. их можно расположить в порядке возрастания модулей. По теореме 3 построим целую функцию $G_1(s)$, имеющую своими нулями нули $G(s)$. Полагая

$$\varphi(s) = \frac{G(s)}{G_1(s)} \quad \text{при } s \neq a_n, \quad \varphi(a_n) = \lim_{s \rightarrow a_n} \varphi(s),$$

видим, что $\varphi(s)$ — целая функция, нигде не равная нулю, т. е. логарифм $\varphi(s)$ — целая функция. Но тогда $\varphi(s) = e^{H(s)}$, где $H(s)$ — целая функция. Так же доказывается второе утверждение теоремы. Теорема доказана.

§ 2. Целые функции конечного порядка

Введем ряд определений, необходимых для дальнейшего.

Определение 4. Пусть $G(s)$ — целая функция и

$$M(r) = M_G(r) = \max_{|s|=r} |G(s)|.$$

Если существует $a > 0$ такое, что

$$M(r) < e^{r^a} \quad \text{при } r > r_0(a) > 0, \quad (11)$$

то $G(s)$ называется целой функцией конечного порядка; в этом случае $\alpha = \inf a$ называется порядком $G(s)$. Если

же (11) не выполняется ни при каком $a > 0$, то говорят, что порядок $G(s)$ равен ∞ .

Определение 5. Пусть $s_1, s_2, \dots, s_n, \dots$ — последовательность комплексных чисел таких, что

$$0 < |s_1| \leq |s_2| \leq \dots \leq |s_n| \leq \dots \quad (12)$$

Если существует $b > 0$, для которого

$$\sum_{n=1}^{\infty} |s_n|^{-b} < +\infty, \quad (13)$$

то говорят, что последовательность (12) имеет конечный показатель сходимости; в этом случае $\beta = \inf b$ называется показателем сходимости (12). Если же (13) не выполняется ни при каком $b > 0$, то говорят, что показатель сходимости (12) равен ∞ .

Основным утверждением этого параграфа является

Теорема 5. Пусть $G(s)$ — целая функция конечно-го порядка α и $G(0) \neq 0$, s_n — последовательность всех нулей $G(s)$, причем $0 < |s_1| \leq |s_2| \leq \dots \leq |s_n| \leq \dots$. Тогда последовательность s_n имеет конечный показатель сходимости $\beta \leq \alpha$,

$$G(s) = e^{g(s)} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{s}{s_n}\right) e^{\frac{s}{s_n} + \frac{1}{2}\left(\frac{s}{s_n}\right)^2 + \dots + \frac{1}{p}\left(\frac{s}{s_n}\right)^p},$$

где $p \geq 0$ — наименьшее целое число, для которого

$$\sum_{n=1}^{\infty} |s_n|^{-(p+1)} < +\infty,$$

$g(s)$ — многочлен степени $g \leq \alpha$ и $\alpha = \max(g, \beta)$. Если, кроме того, для любого $c > 0$ найдется бесконечная последовательность $r_1, r_2, \dots, r_n, \dots, r_n \rightarrow +\infty$, такая, что

$$\max |G(s)| > e^{cr^n}, \quad |s| = r_n, \quad n = 1, 2, \dots,$$

то $\alpha = \beta$ и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |s_n|^{-\beta}$ расходится.

Для доказательства теоремы 5 понадобится ряд вспомогательных утверждений — лемм. В этих леммах будем предполагать выполнение условий теоремы 5, а также будем использовать обозначения этой теоремы.

Лемма 1. Пусть $0 < r < R$ и m — число нулей $G(s)$ в круге $|s| < r$. Тогда

$$\left(\frac{R}{r}\right)^m \leq \frac{M(R)}{|G(0)|}, \quad \text{где } M(R) = \max_{|s|=R} |G(s)|.$$

Доказательство. Рассмотрим

$$F(s) = G(s) \prod_{n=1}^m \frac{R^2 - s\bar{s}_n}{R(s - s_n)}, \quad s \neq s_n,$$

$$F(s_n) = \lim_{s \rightarrow s_n} G(s) \prod_{n=1}^m \frac{R^2 - s\bar{s}_n}{R(s - s_n)},$$

где s_1, s_2, \dots, s_m — нули $G(s)$ в круге $|s| < r$.

Функция $F(s)$ — аналитическая в круге $|s| \leq R$, и при $|s| = R$

$$|F(s)| = |G(s)|.$$

Следовательно, в силу принципа максимума

$$|F(0)| = |G(0)| \prod_{n=1}^m \frac{R}{|s_n|} \leq \max_{|s|=R} |F(s)| = M(R).$$

Отсюда следует утверждение леммы.

Следствие. Если m — число нулей функции $G(s)$ в круге радиуса $r = R/2$, то

$$m \leq \frac{1}{\ln 2} \ln \frac{M(R)}{|G(0)|}.$$

Лемма 2. Если $N(r)$ — число нулей $G(s)$ в круге радиуса r , то при любом $\varepsilon > 0$ найдется $C = C(\varepsilon) > 0$ такое, что

$$N(r) < Cr^{\alpha+\varepsilon};$$

кроме того, $\beta \leq \alpha$.

Доказательство. Первое неравенство следует из леммы 1 и определения порядка $G(s)$. Докажем сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} |s_n|^{-b}$ при любом $b > \alpha$. Отсюда будет следовать второе утверждение леммы. По уже доказанному неравенству $n < c|s_n|^{\alpha+\varepsilon}$ при любом $\varepsilon > 0$, т. е. $|s_n|^{-b} \leq c^{\frac{b}{\alpha+\varepsilon}} n^{-\frac{b}{\alpha+\varepsilon}}$, и если $b > \alpha$, то $\frac{b}{\alpha+\varepsilon} > 1$ при достаточно малом $\varepsilon > 0$, что и доказывает сходимость указанного ряда.

Лемма 3. Пусть s_n — последовательность (12) с конечным показателем сходимости β , $p \geq 0$ — наименьшее целое число, для которого $\sum_{n=1}^{\infty} |s_n|^{-(p+1)} < +\infty$, и

$P(s)$ — целая функция, определенная равенством

$$P(s) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{s}{s_n}\right) e^{\frac{s}{s_n} + \frac{1}{2}\left(\frac{s}{s_n}\right)^2 + \dots + \frac{1}{p}\left(\frac{s}{s_n}\right)^p}. \quad (14)$$

Тогда порядок $P(s)$ равен β . Если, кроме того, $|s_n| \rightarrow +\infty$

и $\sum_{n=1}^{\infty} |s_n|^{-\beta} < +\infty$, то

$$|P(s)| \leq e^{cr^{\beta}}, \quad |s| = r.$$

Доказательство. Пусть α — порядок $P(s)$. Из леммы 2 следует, что $\beta \leq \alpha$. Осталось доказать, что $\alpha \leq \beta + \varepsilon$ при любом $\varepsilon > 0$, т. е. надо доказать, что $\ln |P(s)| < c(\varepsilon) |s|^{\beta+\varepsilon}$ при $|s| \rightarrow \infty$.

Обозначая для краткости множители произведения (14) через $u(s, s_n)$, находим

$$\ln |P(s)| = \sum_1 + \sum_2,$$

где

$$\sum_1 = \sum_{|s/s_n| < 1/2} \ln |u(s, s_n)|, \quad \sum_2 = \sum_{|s/s_n| > 1/2} \ln |u(s, s_n)|.$$

Далее, для слагаемых в \sum_1 имеем

$$\ln |u(s, s_n)| \leq \frac{1}{p+1} \left| \frac{s}{s_n} \right|^{\nu+1} + \frac{1}{p+2} \left| \frac{s}{s_n} \right|^{\nu+2} + \dots \leq 2 \left| \frac{s}{s_n} \right|^{\nu+1}$$

для слагаемых в \sum_2 имеем

$$\begin{aligned} \ln |u(s, s_n)| &\leq \ln \left(1 - \left| \frac{s}{s_n} \right| \right) + \left| \frac{s}{s_n} \right| + \dots + \frac{1}{p} \left| \frac{s}{s_n} \right|^p = \\ &= r_p \left(\left| \frac{s}{s_n} \right| \right) \leq \begin{cases} c(p) \left| \frac{s}{s_n} \right|^p, & \text{если } p \geq 1; \\ c(\varepsilon) \left| \frac{s}{s_n} \right|^\varepsilon, & \text{если } p = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\ln |P(s)| \ll \sum_{|s/s_n| < 1/2} \left| \frac{s}{s_n} \right|^{\nu+1} + \sum_{|s/s_n| > 1/2} r_p \left(\left| \frac{s}{s_n} \right| \right).$$

Если $\beta = p + 1$, то первая сумма $\ll |s|^\beta$.

Пусть $\beta < p + 1$ и $\beta + \varepsilon < p + 1$. Тогда первая сумма

$$\ll |s|^{\beta+\varepsilon} \sum_{|s/s_n| < 1/2} \frac{1}{|s_n|^{\beta+\varepsilon}} \left| \frac{s}{s_n} \right|^{\nu+1-(\beta+\varepsilon)} \ll |s|^{\beta+\varepsilon}.$$

Итак, при любом $p \geq 0$ первая сумма $\ll |s|^{\beta+\varepsilon}$. Если $p \geq 1$, то вторая сумма (так как $\beta \geq p$)

$$\ll \sum_{|s/s_n| > 1/2} \left| \frac{s}{s_n} \right|^p = |s|^{\beta+\varepsilon} \sum_{|s/s_n| > 1/2} \frac{1}{|s_n|^{\beta+\varepsilon}} \cdot \left| \frac{s}{s_n} \right|^{\nu-(\beta+\varepsilon)} \ll |s|^{\beta+\varepsilon};$$

если же $p = 0$, то вторая сумма

$$\ll \sum_{|s/s_n| > 1/2} \left| \frac{s}{s_n} \right|^\varepsilon = |s|^{\beta+\varepsilon} \sum_{|s/s_n| > 1/2} \frac{1}{|s_n|^{\beta+\varepsilon}} \left| \frac{s}{s_n} \right|^{-\beta} \ll |s|^{\beta+\varepsilon}.$$

Тем самым первая часть леммы доказана. Для доказательства второй части заметим, что $\beta > 0$ (так как $|s_n| \rightarrow +\infty$ и ряд $\sum |s_n|^{-\beta}$ сходится). А тогда, заменяя в приведенных рассуждениях $\beta + \varepsilon$ на β (т. е. вынося везде $|s|^\beta$) и беря $0 < \varepsilon < \beta$, получим второе утверждение. Лемма доказана.

Пусть теперь $P(s)$ — целая функция конечного порядка α , $P(0) \neq 0$. По теореме 4

$$P(s) = e^{g(s)} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{s}{s_n} \right) e^{\frac{s}{s_n} + \frac{1}{2} \left(\frac{s}{s_n} \right)^2 + \dots + \frac{1}{n-1} \left(\frac{s}{s_n} \right)^{n-1}}.$$

По лемме 2 показатель сходимости s_n не превосходит α . Пусть $p \geq 0$ — наименьшее целое число, для которого

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{|s_n|^{p+1}} < +\infty.$$

Тогда по теореме 4

$$P(s) = e^{g(s)} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{s}{s_n} \right) e^{\frac{s}{s_n} + \frac{1}{2} \left(\frac{s}{s_n} \right)^2 + \dots + \frac{1}{p} \left(\frac{s}{s_n} \right)^p}, \quad (15)$$

где $g(s)$ — целая функция. Ниже (лемма 5) будет доказано, что $g(s)$ — многочлен. Для этого нужна следующая лемма, которая имеет самостоятельный интерес (см. гл. VI, § 1).

Лемма 4. Пусть $R > 0$, и функция $f(s)$,

$$f(s) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (s - s_0)^n,$$

аналитическая в круге $|s - s_0| \leq R$, причем $\operatorname{Re} f(s) \leq M$ на

окружности $|s - s_0| = R$. Тогда

$$а) \frac{1}{n!} |f^{(n)}(s_0)| = |a_n| \leq 2 \{M - \operatorname{Re} f(s_0)\} R^{-n}, \quad n \geq 1;$$

б) в круге $|s - s_0| \leq r < R$

$$|f(s) - f(s_0)| \leq 2 \{M - \operatorname{Re} f(s_0)\} \frac{r}{R-r},$$

$$|f^{(n)}(s)| \leq 2n! \{M - \operatorname{Re} f(s_0)\} \frac{R}{(R-r)^{n+1}}, \quad n \geq 1.$$

Доказательство. Докажем а) сначала при $s_0 = 0$, $a_0 = f(0) = 0$. Так как $\operatorname{Re} f(s)$ достигает максимума на границе, а $f(s) = 0$ при $s = 0$, то $M \geq 0$. Полагая $a_n = |a_n| e^{i\varphi_n}$, $s = R e^{i\varphi}$, будем иметь

$$\operatorname{Re} f(R e^{i\varphi}) = \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \cos(n\varphi + \varphi_n) R^n. \quad (16)$$

Так как ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| R^n$ сходится, то ряд (16) сходится равномерно при $0 \leq \varphi \leq 2\pi$, т. е. его можно почленно интегрировать, что дает

$$\int_0^{2\pi} \operatorname{Re} f(R e^{i\varphi}) d\varphi = 0.$$

Кроме того,

$$\int_0^{2\pi} \operatorname{Re} f(R e^{i\varphi}) \cos(n\varphi + \varphi_n) d\varphi = \pi |a_n| R^n, \quad n \geq 1.$$

Следовательно ($M \geq 0$, $1 + \cos(n\varphi + \varphi_n) \geq 0$), имеем

$$\begin{aligned} \pi |a_n| R^n &= \int_0^{2\pi} \operatorname{Re} f(R e^{i\varphi}) \{1 + \cos(n\varphi + \varphi_n)\} d\varphi \leq 2\pi M; \\ |a_n| &\leq 2MR^{-n}. \end{aligned}$$

Если же $s_0 \neq 0$, то рассмотрим $F(s')$, где

$$F(s') = f(s' + s_0) - a_0 = a_1 s' + a_2 s'^2 + \dots$$

Тогда $F(0) = 0$, $\operatorname{Re} F(s') \leq M - \operatorname{Re} f(s_0)$ при $|s'| = R$. Отсюда и из доказанного следует утверждение а) леммы.

б) Далее,

$$|f(s) - f(s_0)| \leq 2 \{M - \operatorname{Re} f(s_0)\} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r}{R}\right)^n < \\ < 2 \{M - \operatorname{Re} f(s_0)\} \frac{r}{R-r};$$

почленно дифференцируя ряд для $f(s)$, найдем

$$|f^{(n)}(s)| \leq \sum_{m=n}^{\infty} |a_m| m(m-1) \dots (m-n+1) |s-s_0|^{m-n} \leq \\ \leq 2 \{M - \operatorname{Re} f(s_0)\} \sum_{m=n}^{\infty} m(m-1) \dots (m-n+1) R^{-m} r^{m-n} = \\ = 2 \{M - \operatorname{Re} f(s_0)\} \frac{d^n}{dr^n} \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{r}{R}\right)^m = \\ = 2n! \{M - \operatorname{Re} f(s_0)\} \frac{R}{(R-r)^{n+1}}.$$

Лемма полностью доказана.

Лемма 5. Целая функция $g(s)$ в (15) — многочлен степени $g \leq \alpha$.

Доказательство. Возьмем $k = [\alpha]$; тогда число p в (15) не превосходит k . Докажем, что $g^{(k+1)}(s) \equiv 0$. Для этого, логарифмируя и дифференцируя (15) $k+1$ раз, найдем

$$g^{(k+1)}(s) = \frac{d^k}{ds^k} \frac{P'(s)}{P(s)} + k! \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(s_n - s)^{k+1}}. \quad (17)$$

Рассмотрим круг $|s| \leq R/2$; тогда при $|s_n| > R$

$$|s_n - s| > \frac{1}{2} |s_n|,$$

и так как ряд $\sum |s_n|^{-(k+1)}$ сходится, то

$$k! \sum_{|s_n| > R} \frac{1}{|s_n - s|^{k+1}} < k! 2^{k+1} \sum_{|s_n| > R} |s_n|^{-(k+1)} \rightarrow 0 \quad (18)$$

при $R \rightarrow \infty$. Рассмотрим теперь функцию

$$\frac{d^k}{ds^k} \left(\frac{P'(s)}{P(s)} + \sum_{|s_n| < R} \frac{1}{s_n - s} \right),$$

которая является $(k+1)$ -й производной от

$$g_R(s) = \ln \left\{ \frac{P(s)}{P(0)} \prod_{|s_n| < R} \left(1 - \frac{s}{s_n}\right)^{-1} \right\}.$$

На окружности $|s| = 2R$ выполняется оценка

$$\left| \frac{P(s)}{P(0)} \sum_{|s_n| < R} \left(1 - \frac{s}{s_n}\right)^{-1} \right| < c(\varepsilon) e^{(2R)^{\alpha+\varepsilon}};$$

по принципу максимума это неравенство справедливо и внутри круга $|s| \leq 2R$, т. е. там

$$\operatorname{Re} g_R(s) = \ln \left| \frac{P(s)}{P(0)} \prod_{|s_n| < R} \left(1 - \frac{s}{s_n}\right)^{-1} \right| < c_1(\varepsilon) R^{\alpha+\varepsilon};$$

кроме того, $\operatorname{Re} g_R(0) = 0$. Применяя лемму 4, б) с $r = R/2$, найдем

$$\begin{aligned} |g_R^{(k+1)}(s)| &< 2(k+1)! c_1(\varepsilon) R^{\alpha+\varepsilon} \frac{R}{(R/2)^{k+2}} < \\ &< c_2(\varepsilon) R^{\alpha-(k+1)+\varepsilon}. \end{aligned}$$

Так как $\varepsilon > 0$ сколь угодно мало, то правая часть последнего неравенства стремится к 0 при $R \rightarrow +\infty$. Отсюда из (17) и (18) получаем, что $g^{(k+1)}(s) \rightarrow 0$ при $|s| = R \rightarrow \infty$, т. е. $g^{(k+1)}(s) \equiv 0$. Лемма доказана.

Доказательство теоремы 5. По теореме 4 имеет место формула (15); по лемме 5 $g(s)$ — многочлен степени $g \leq \alpha$. Так как порядок $e^{g(s)}$ равен g , а порядок произведения по пулям в (15) равен β , то порядок $\alpha \leq \max(g, \beta)$, т. е. $\alpha = \max(g, \beta)$. Далее, если $\beta < \alpha$, то $\alpha = g$ и, следовательно,

$$|G(s)| \leq c(\varepsilon) e^{c_1 r^g} e^{c_2 r^{\beta+\varepsilon}},$$

где $c_1 > 0$, $c_2 > 0$ — абсолютные постоянные, $\varepsilon > 0$ — сколь угодно мало, т. е. ε можно взять таким, что $\beta + \varepsilon < \alpha$, что противоречит условию теоремы. Поэтому $\alpha = \beta$. Расходимость ряда $\sum |s_n|^{-\beta}$ следует из леммы 3. Теорема 5 доказана.

Следствие. Если $G_1(s)$ — целая функция конечного порядка α , то $G_1(s) = s^m G(s)$, где $G(s)$ — целая функция теоремы 5, $m \geq 0$.

ЗАДАЧИ

1. Пусть $f(x)$ — многочлен с действительными коэффициентами, $f(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \dots + \alpha_{n-1} x^{n-1}$, $A > 0$, и $\mu = \mu(A, f)$ — мера тех точек x отрезка $[0, 1]$, для которых $|f(x)| \leq A$. Доказать, что

$$\mu \leq \min \left(1, 4e (A\alpha^{-1})^{\frac{1}{n-1}} \right),$$

где

$$\alpha = \max |\alpha_j|, \quad j = 0, 1, \dots, n-1.$$

2. Пусть $f(x)$ — многочлен с действительными коэффициентами

$$f(x) = a_1 x + \dots + \alpha_n x^n, \quad \alpha = \max |\alpha_j|, \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

Доказать, что

$$\left| \int_0^1 e^{2\pi i f(x)} dx \right| \leq \min(1, 32\alpha^{-1/n}).$$

3. Пусть $f(x_1, \dots, x_r)$ — многочлен с действительными коэффициентами,

$$f(x_1, \dots, x_r) = \sum_{t_1=0}^n \dots \sum_{t_r=0}^n \alpha(t_1, \dots, t_r) x_1^{t_1} \dots x_r^{t_r},$$
$$\alpha(0, \dots, 0) = 0, \quad \alpha = \max_{0 \leq t_1, \dots, t_r \leq n} |\alpha(t_1, \dots, t_r)|.$$

Рассмотрим кратный тригонометрический интеграл I ,

$$I = \int_0^1 \dots \int_0^1 e^{2\pi i f(x_1, \dots, x_r)} dx_1 \dots dx_r.$$

Тогда справедлива оценка

$$I \leq \min(1, 32^r \alpha^{-1/n} (\ln(\alpha + 1) + 1)^{r-1}).$$

4. Пусть $\alpha \geq 1$, $r \geq 1$, $n \geq 1$,

$$J = \int_0^1 \dots \int_0^1 e^{2\pi i \alpha x_1^n \dots x_r^n} dx_1 \dots dx_r.$$

Тогда

$$|J| \geq \frac{1}{2\pi n^r (r-1)!} \alpha^{-1/n} (\ln \alpha)^{r-1}.$$

5. Пусть при $0 < x < 1$ вещественная функция $f(x)$ имеет производную n -го порядка, $n > 1$, и при некотором $A > 0$ выполняется неравенство

$$A \leq |f^{(n)}(x)|, \quad 0 < x < 1.$$

Тогда мера U тех точек x , где $|f'(x)| \leq B$, не превосходит

$$(2n-2)(BA^{-1})^{\frac{1}{n-1}}.$$

6. При условиях задачи 5 для интеграла J ,

$$J = \int_0^1 e^{2\pi i f(x)} dx,$$

справедлива оценка

$$|J| \leq \min(1, 6nA^{-1/n}).$$

7. Пусть $f(x)$ — многочлен с действительными коэффициентами,

$$f(x) = \alpha_1 x + \dots + \alpha_n x^n,$$

$$\beta_r(x) = \frac{1}{r!} f^{(r)}(x), \quad r = 1, \dots, n,$$

$$H = H(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = \min_{a < x < b} \sum_{r=1}^n |\beta_r(x)|^{1/r}.$$

Доказать, что промежуток $a < x < b$ можно покрыть непересекающимися промежутками в количестве m ,

$$m \leq \frac{n^2 + n}{2} - 1,$$

так, что на каждом из них при некотором r , $1 \leq r \leq n$, выполняется неравенство

$$|\beta_r(x)| \geq (n^{-1}H)^r.$$

8. При условиях задачи 7 для интеграла J ,

$$J = \int_a^b e^{2\pi i f(x)} dx,$$

справедлива оценка

$$|J| \leq \min(b - a, 6en^3H^{-1}).$$

9. Пусть $\theta = \theta(k)$ — несобственный интеграл («особый интеграл проблемы Терри») вида

$$\theta = \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} \left| \int_0^1 e^{2\pi i(\alpha_1 x + \dots + \alpha_n x^n)} dx \right|^{2k} d\alpha_1 \dots d\alpha_n.$$

Доказать, что θ сходится при

$$2k > \frac{n^2 + n}{2} + 1.$$

Г Л А В А III

ГАММА-ФУНКЦИЯ ЭЙЛЕРА

§ 1. Определение и простейшие свойства

Определение. Гамма-функция Эйлера $\Gamma(s)$ задается равенством

$$\frac{1}{\Gamma(s)} = se^{\gamma s} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{s}{n}\right) e^{-s/n},$$

где γ — постоянная Эйлера.

Из определения и теорем гл. II следует, что $\Gamma^{-1}(s)$ — целая функция порядка не выше первого. Далее, $\Gamma(s)$ — функции, аналитическая во всей s -плоскости, за исключением точек $s = 0, -1, -2, \dots$, где она имеет простые полюсы.

Теорема 1 (формула Эйлера). Имеет место равенство

$$\Gamma(s) = \frac{1}{s} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^s \left(1 + \frac{s}{n}\right)^{-1}. \quad (1)$$

Доказательство. Из определения бесконечного произведения (гл. II, § 1) и определения функции $\Gamma(s)$ последовательно получаем

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Gamma(s)} &= s \lim_{m \rightarrow \infty} e^{s(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{m} - \log m)} \cdot \lim_{m \rightarrow \infty} \prod_{n=1}^m \left(1 + \frac{s}{n}\right) e^{-\frac{s}{n}} = \\ &= s \lim_{m \rightarrow \infty} m^{-s} \prod_{n=1}^m \left(1 + \frac{s}{n}\right) = s \lim_{m \rightarrow \infty} \prod_{n=1}^{m-1} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-s} \prod_{n=1}^m \left(1 + \frac{s}{n}\right) = \\ &= s \lim_{m \rightarrow \infty} \prod_{n=1}^m \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-s} \left(1 + \frac{s}{n}\right) \left(1 + \frac{1}{m}\right)^s = \\ &= s \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-s} \left(1 + \frac{s}{n}\right), \end{aligned}$$

что и требовалось доказать.

Следствие 1.

$$\Gamma(s) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 \cdot 2 \dots (n-1)n^s}{s(s+1) \dots (s+n-1)}.$$

Следствие 2.

$$\Gamma(1) = \Gamma(2) = 1.$$

Теорема 2 (функциональное уравнение).
Имеет место равенство

$$\Gamma(s+1) = s\Gamma(s).$$

Доказательство. Из (1) получаем

$$\begin{aligned} \frac{\Gamma(s+1)}{\Gamma(s)} &= \frac{s}{s+1} \lim_{m \rightarrow \infty} \prod_{n=1}^m \frac{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{s+1} \left(1 + \frac{s+1}{n}\right)^{-1}}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^s \left(1 + \frac{s}{n}\right)^{-1}} = \\ &= \frac{s}{s+1} \lim_{m \rightarrow \infty} \prod_{n=1}^m \frac{n+1}{n} \cdot \frac{n+s}{n+s+1} = \frac{s}{s+1} \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{(m+1)(s+1)}{m+1+s} = s. \end{aligned}$$

Теорема доказана.

Следствие 1. $\Gamma(n+1) = n!$, n — натуральное.

Следствие 2. При натуральном n

$$\Gamma(2n) \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = 2^{2n-1} \Gamma(n) \Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right)$$

(формула удвоения).

Теорема 3 (формула дополнения). При s , не равном целому числу, имеем

$$\Gamma(s) \Gamma(1-s) = \frac{\pi}{\sin \pi s}.$$

Доказательство. Прежде всего представим $\sin \pi s$ в виде бесконечного произведения. Функция $\sin \pi s$ — целая, первого порядка, имеет нули $s = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, т. е. по теореме 5, II

$$\sin \pi s = se^{H(s)} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{s^2}{n^2}\right),$$

где $H(s) = as + b$.

Логарифмируя это равенство, а затем дифференцируя, найдем

$$\pi \frac{\cos \pi s}{\sin \pi s} = \frac{1}{s} + H'(s) - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2s}{n^2 - s^2},$$

Переходя к пределу при $s \rightarrow 0$, получаем $a = 0$, т. е. $H(s) = b$. Далее, $\frac{\sin \pi s}{s} = c \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{s^2}{n^2}\right)$. Опять при $s \rightarrow 0$ найдем $c = \pi$, т. е.

$$\sin \pi s = \pi s \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{s^2}{n^2}\right).$$

Из определения функции $\Gamma(s)$ имеем

$$\Gamma(s) \Gamma(-s) = -\frac{1}{s^2} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{s^2}{n^2}\right)^{-1} = -\frac{\pi}{s \sin \pi s},$$

а по теореме 2 $\Gamma(1-s) = -s\Gamma(-s)$. Отсюда следует утверждение теоремы.

Следствие. $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$.

Теорема 4 (интегральная формула). При $\operatorname{Re} s > 0$

$$\Gamma(s) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{s-1} dt.$$

Доказательство. Заметим, что интеграл справа при $\operatorname{Re} s \geq \sigma_0 > 0$ сходится равномерно и, следовательно, представляет функцию, аналитическую в полуплоскости $\operatorname{Re} s > 0$. Из (1)

$$\Gamma(s) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 \cdot 2 \dots (n-1)}{s(s+1) \dots (s+n-1)} n^s.$$

Рассмотрим функцию

$$\begin{aligned} \Pi(s; n) &= \int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \cdot t^{s-1} dt = n^s \int_0^1 (1-t)^n t^{s-1} dt = \\ &= \frac{n^s}{s} \int_0^1 (1-t)^n dt^s = n^s \frac{n}{s} \int_0^1 (1-t)^{n-1} t^s dt = \dots \\ &\dots = n^s \frac{n(n-1) \dots 1}{s(s+1) \dots (s+n-1)} \int_0^1 t^{s+n-1} dt = \\ &= n^s \frac{n(n-1) \dots 1}{s(s+1) \dots (s+n)}. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\Gamma(s) = \lim_{n \rightarrow \infty} \Pi(s; n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{s-1} dt.$$

Пусть $\Gamma_1(s) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{s-1} dt$. Тогда

$$\Gamma_1(s) - \Gamma(s) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^n t^{s-1} \left(e^{-t} - \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \right) dt.$$

При $|t| < n$ $\left(1 + \frac{t}{n}\right)^n \leq e^t$; кроме того, при $0 < y < 1$
 $1 - ny \leq (1 - y)^n$.

Поэтому

$$0 \leq e^{-t} - \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n = e^{-t} \left(1 - e^t \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n\right) \leq \\ \leq e^{-t} \left(1 - \left(1 - \frac{t^2}{n^2}\right)^n\right) \leq e^{-t} \frac{t^2}{n};$$

$$\left| \int_0^n t^{s-1} \left(e^{-t} - \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \right) dt \right| \leq \frac{1}{n} \int_0^{\infty} t^{\sigma+1} e^{-t} dt;$$

$$\Gamma_1(s) = \Gamma(s),$$

что и требовалось доказать.

С л е д с т в и е.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2} du = \sqrt{\pi}.$$

§ 2. Формула Стирлинга

В приложениях важно знать поведение $\Gamma(s)$ при $|s| \rightarrow \infty$.

Теорема 5. При $\delta > 0$ и $-\pi + \delta \leq \arg s \leq \pi - \delta$ имеет место формула (Стирлинга):

$$\log \Gamma(s) = \left(s - \frac{1}{2}\right) \log s - s + \log \sqrt{2\pi} + O\left(\frac{1}{|s|}\right),$$

причем постоянная в знаке O зависит только от δ .

Доказательство. Из определения $\Gamma(s)$ находим

$$\log \Gamma(s) = -\gamma s - \log s + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{s}{n} - \log \left(1 + \frac{s}{n}\right) \right). \quad (2)$$

При натуральном N рассмотрим две суммы:

$$\Sigma_1 = \sum_{1/2 < n \leq N+1/2} 1/n, \quad \Sigma_2 = \sum_{1/2 < n \leq N+1/2} \log(n+s).$$

Применяя к каждой из них теорему 1, I, найдем

$$\Sigma_1 = \log N + \gamma + O\left(\frac{1}{N}\right);$$

$$\begin{aligned} \Sigma_2 = & \left(N + \frac{1}{2} + s\right) \log \left(N + \frac{1}{2} + s\right) - \left(N + \frac{1}{2} + s\right) - \\ & - \left(s + \frac{1}{2}\right) \log \left(s + \frac{1}{2}\right) + \left(s + \frac{1}{2}\right) + \\ & + \frac{\sigma\left(\frac{1}{2}\right)}{s + \frac{1}{2}} - \frac{\sigma\left(N + \frac{1}{2}\right)}{N + \frac{1}{2} + s} - \int_{1/2}^{N+1/2} \frac{\sigma(x) dx}{(x+s)^2}. \end{aligned}$$

Из (2) и полученных формул для Σ_1, Σ_2 следует

$$\log \Gamma(s) = \left(s - \frac{1}{2}\right) \log s - s + c + J, \quad (3)$$

где c — абсолютная постоянная,

$$J = \int_{1/2}^{+\infty} \frac{\sigma(x) dx}{(x+s)^2}.$$

Далее,

$$J = O\left(\int_{1/2}^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + |s|^2 - 2x|s|\cos\delta}\right) = O\left(\frac{1}{|s|}\right).$$

Итак, получили

$$\log \Gamma(s) = \left(s - \frac{1}{2}\right) \log s - s + c + O\left(\frac{1}{|s|}\right).$$

Возьмем в этой формуле $s = n, n + 1/2, 2n$, воспользуемся формулой удвоения и тем, что $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$; при $n \rightarrow +\infty$ получим $c = \log \sqrt{2\pi}$. Теорема доказана.

Следствие 1. Функция $\Gamma^{-1}(s)$ является целой первого порядка.

Следствие 2. При $\alpha \leq \sigma \leq \beta$ и $t \rightarrow +\infty$

$$\Gamma(\sigma + it) = t^{\sigma+it-\frac{1}{2}} e^{-\frac{\pi t}{2}-it+i\frac{\pi}{2}(\sigma-\frac{1}{2})} \sqrt{2\pi} \{1 + O(1/t)\},$$

причем постоянная в знаке O зависит только от α, β .

Следствие 3. Дифференцируя (3), найдем ($|\arg s| < \pi$)

$$\frac{\Gamma'(s)}{\Gamma(s)} = \log s + O\left(\frac{1}{|s|}\right).$$

§ 3. Бета-функция Эйлера и интеграл Дирихле

С гамма-функцией тесно связана бета-функция Эйлера, простейшее свойство которой докажем ниже, и интеграл Дирихле.

Определение. Бета-функция Эйлера $B(u, v)$ при $\operatorname{Re} u > 0$, $\operatorname{Re} v > 0$ задается равенством

$$B(u, v) = \int_0^1 x^{u-1} (1-x)^{v-1} dx.$$

Лемма. Справедливо равенство

$$B(u, v) = \frac{\Gamma(u)\Gamma(v)}{\Gamma(u+v)}.$$

Доказательство. Не ограничивая общности, можно считать $\sigma_1 = \operatorname{Re} u > 1$, $\sigma_2 = \operatorname{Re} v > 1$. Далее, при $Y \geq 0$

$$\left| \int_0^Y t^{u-1} e^{-t} dt \right| \leq \int_0^Y t^{\sigma_1-1} e^{-t} dt = O(\min(1, Y)),$$

при $X \geq 1$

$$\left| \int_X^\infty t^{u-1} e^{-t} dt \right| \leq \int_X^\infty t^{\sigma_1-1} e^{-t} dt = O(e^{-X}),$$

где постоянные в знаках O зависят только от σ_1 . Пусть $X > 1$, $Y = X^{-0,5}$; тогда

$$\Gamma(u) = \int_Y^X t^{u-1} e^{-t} dt + O(Y); \quad \Gamma(v) = \int_0^{X^2} \tau^{v-1} e^{-\tau} d\tau + O(Y).$$

Перемножая эти соотношения, получим

$$\Gamma(u)\Gamma(v) = J + O(Y),$$

где

$$J = \int_Y^X t^{u-1} e^{-t} \left(\int_0^{X^2} \tau^{v-1} e^{-\tau} d\tau \right) dt.$$

Во внутреннем интеграле сделаем замену переменной интегрирования вида $\tau = zt$, $0 \leq z \leq X^2 t^{-1}$. Тогда получим

$$\begin{aligned} J &= \int_Y^X t^{u+v-1} e^{-t} \left(\int_0^{X^2 t^{-1}} z^{v-1} e^{-tz} dz \right) dt = \\ &= \int_Y^X t^{u+v-1} e^{-t} \left(\int_0^X z^{v-1} e^{-tz} dz \right) dt + O(e^{-\sqrt{X}}) = J_1 + O(e^{-\sqrt{X}}), \end{aligned}$$

где

$$J_1 = \int_0^X z^{v-1} \left(\int_Y^X t^{u+v-1} e^{-t(z+1)} dt \right) dz.$$

Во внутреннем интеграле сделаем замену переменной интегрирования вида $t(z+1) = x$, $(z+1)Y \leq x \leq (z+1)X$; получим

$$\begin{aligned} J_1 &= \int_0^X \frac{z^{v-1}}{(z+1)^{u+v}} \left(\int_{(z+1)Y}^{(z+1)X} x^{u+v-1} e^{-x} dx \right) dz = \\ &= \int_0^{\sqrt[4]{X}} \frac{z^{v-1}}{(z+1)^{u+v}} \left(\int_{(z+1)Y}^{(z+1)X} x^{u+v-1} e^{-x} dx \right) dz + R, \end{aligned}$$

$$\text{где } |R| \leq \int_{\sqrt[4]{X}}^X \frac{z^{\sigma_2-1} \Gamma(\sigma_1 + \sigma_2)}{(z+1)^{\sigma_1 + \sigma_2}} dz = O(Y^{0,5\sigma_1}).$$

Кроме того, при $0 \leq z \leq \sqrt[4]{X} = Y^{-0,5}$

$$\int_{(z+1)Y}^{(z+1)X} x^{u+v-1} e^{-x} dx = \Gamma(u+v) + O(\sqrt{Y}).$$

Следовательно,

$$J_1 = \Gamma(u+v) \int_0^{\sqrt[4]{X}} \frac{z^{v-1}}{(z+1)^{u+v}} dz + O(\sqrt{Y}) + O(Y^{0,5\sigma_1}).$$

Наконец,

$$\begin{aligned} \int_0^{\sqrt[4]{X}} \frac{z^{v-1}}{(z+1)^{u+v}} dz &= \int_0^{+\infty} \frac{z^{v-1}}{(z+1)^{u+v}} dz + O(Y^{0,5\sigma_1}) = \\ &= 2 \int_0^{\pi/2} (\cos \theta)^{2u-1} (\sin \theta)^{2v-1} d\theta + O(Y^{0,5\sigma_1}) = \\ &= \int_0^1 x^{u-1} (1-x)^{v-1} dx + O(Y^{0,5\sigma_1}) = B(u, v) + O(Y^{0,5\sigma_1}). \end{aligned}$$

Тем самым получили соотношение

$$\Gamma(u)\Gamma(v) = \Gamma(u+v)B(u, v) + O(\sqrt{Y}) + O(\bar{Y}^{0,5\sigma_1}).$$

Переходя в этом равенстве к пределу при $X \rightarrow +\infty$, получим утверждение леммы.

Теорема 6. Пусть $f(u)$ — непрерывная функция, $\alpha_1 > 0, \alpha_2 > 0, \dots, \alpha_n > 0$,

$$I = \int_{\substack{t_1+t_2+\dots+t_n \leq 1 \\ 0 \leq t_1, t_2, \dots, t_n \leq 1}} \dots \int f(t_1 + t_2 + \dots + t_n) t_1^{\alpha_1-1} t_2^{\alpha_2-1} \dots \dots t_n^{\alpha_n-1} dt_1 dt_2 \dots dt_n.$$

Тогда

$$I = \frac{\Gamma(\alpha_1) \Gamma(\alpha_2) \dots \Gamma(\alpha_n)}{\Gamma(\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n)} \int_0^1 f(u) u^{\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n - 1} du.$$

Доказательство. Обозначим $\lambda = t_3 + \dots + t_n$ и рассмотрим интеграл

$$I_1 = \int_0^{1-\lambda} \left(\int_0^{1-\lambda-t_2} f(t_1 + t_2 + \lambda) t_1^{\alpha_1-1} dt_1 \right) t_2^{\alpha_2-1} dt_2.$$

Сделаем в I_1 замену $t_1 = \frac{t_2(1-v)}{v}$, а затем поменяем порядок интегрирования:

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_0^{1-\lambda} \left(\int_{\frac{t_2}{1-\lambda}}^1 f\left(\lambda + \frac{t_2}{v}\right) (1-v)^{\alpha_1-1} v^{-\alpha_1-1} dv \right) t_2^{\alpha_1+\alpha_2-1} dt_2 = \\ &= \int_0^1 \left(\int_0^{(1-\lambda)v} f\left(\lambda + \frac{t_2}{v}\right) t_2^{\alpha_1+\alpha_2-1} dt_2 \right) (1-v)^{\alpha_1-1} v^{-\alpha_1-1} dv. \end{aligned}$$

Сделаем во внутреннем интеграле замену $t_2 = \tau v$:

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_0^1 \left(\int_0^{1-\lambda} f(\lambda + \tau) \tau^{\alpha_1+\alpha_2-1} d\tau \right) (1-v)^{\alpha_1-1} v^{\alpha_2-1} dv = \\ &= \frac{\Gamma(\alpha_1) \Gamma(\alpha_2)}{\Gamma(\alpha_1 + \alpha_2)} \int_0^{1-\lambda} f(\lambda + \tau) \tau^{\alpha_1+\alpha_2-1} d\tau. \end{aligned}$$

Для I получаем формулу

$$I = \frac{\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_2)}{\Gamma(\alpha_1 + \alpha_2)} \int_{\substack{\tau+t_3+\dots+t_n \leq 1 \\ 0 < \tau, t_3, \dots, t_n < 1}} \dots \int f(\tau + t_3 + \dots + t_n) \times \\ \times \tau^{\alpha_1 + \alpha_2 - 1} t_3^{\alpha_3 - 1} \dots t_n^{\alpha_n - 1} d\tau dt_3 \dots dt_n.$$

Отсюда следует утверждение теоремы.

Интеграл I теоремы 6 называется *интегралом Дирихле*.

ЗАДАЧИ

1. Пусть M и N — натуральные числа, $M \geq 2$,

$$I(n) = \int_0^1 \frac{\sin \pi(2M+1)u}{\sin \pi u} e^{2\pi i \frac{(n+u)^2}{N}} du.$$

Доказать, что

$$I(n) = e^{2\pi i \frac{n^2}{N}} + O\left(\frac{\ln M}{M}\right).$$

2. При условиях задачи 1 справедливо равенство

$$S = \sum_{n=0}^{N-1} e^{2\pi i \frac{n^2}{N}} = \sum_{k=-M}^M J(k) + O\left(\frac{N \ln M}{M}\right),$$

где $J(k) = N e^{-2\pi i \frac{Nk^2}{4}} \int_{0,5k}^{0,5k+1} e^{2\pi i Nu^2} du.$

3. При обозначениях задачи 2 доказать равенство

$$\sum_{k=-2M}^{2M} J(k) = N \int_{-M}^{M+1} e^{2\pi i Nu^2} du + N e^{-2\pi i \frac{N}{4}} \int_{-M+0,5}^{M+0,5} e^{2\pi i Nu^2} du.$$

4. Доказать равенство («сумма Гаусса и ее аргумент»):

$$S = \sum_{n=0}^{N-1} e^{2\pi i \frac{n^2}{N}} = \frac{1+i^{-N}}{1+i^{-1}} \sqrt{N}.$$

5. Пусть $p \geq 2$, p — простое число, p делит произведение двух натуральных чисел n и m . Методом математической индукции (индукцию вести по p) доказать, что p делит либо n , либо m .

6. Доказать, что если

$$n = p_1^{\alpha_1} \dots p_r^{\alpha_r} = q_1^{\beta_1} \dots q_s^{\beta_s},$$

где $p_1, \dots, p_r, q_1, \dots, q_s$ — простые числа, $p_1 < \dots < p_r, q_1 < \dots < q_s, \alpha_1, \dots, \alpha_r, \beta_1, \dots, \beta_s$ — натуральные числа, то

$$r = s, \quad p_1 = q_1, \quad \alpha_1 = \beta_1, \dots, p_r = q_r, \quad \alpha_r = \beta_r$$

(теорема об однозначном разложении натуральных чисел на простые сомножители).

7. а) Доказать, что если a_0, a_1, \dots, a_h — целые числа, m — натуральное число, $kl < m$, и, кроме того,

$$a_0 \ln m + a_1 \ln(m+1) + \dots + a_h \ln(m+k) = 0,$$

то

$$a_0 = a_1 = \dots = a_h = 0.$$

б) Доказать, что при любом натуральном числе m и $k \geq 8\sqrt[3]{m}$ найдутся целые числа a_0, a_1, \dots, a_h не все равные нулю и такие, что

$$a_0 \ln m + a_1 \ln(m+1) + \dots + a_h \ln(m+k) = 0.$$

8. При любом натуральном числе k справедливы неравенства

$$а) \sum_{n < X} \tau_h(n) \leq \frac{1}{(k-1)!} X (\ln X + k - 1)^{h-1};$$

$$б) \sum_{n < X} \tau_h^2(n) \leq k^2 (k!)^{-(h+1)} X (\ln X + k^2 - 1)^{h^2-1}.$$

9. Пусть $1 \leq u < N$; тогда для любой комплекснозначной функции $f(x)$ справедливо тождество

$$\begin{aligned} \sum_{u < n \leq N} \Lambda(n) f(n) &= \sum_{d \leq u} \mu(d) \sum_{l < Nd-1} (\log l) f(ld) - \\ &- \sum_{d \leq u} \mu(d) \sum_{n \leq u} \Lambda(n) \sum_{r < N(dn)-1} f(ndr) - \\ &- \sum_{u < m \leq Nu-1} \left(\sum_{\substack{d \setminus m \\ d \leq u}} \mu(d) \right) \sum_{u < n \leq Nm-1} \Lambda(n) f(nm). \end{aligned}$$

ДЗЕТА-ФУНКЦИЯ РИМАНА

§ 1. Определение и простейшие свойства

Определение. При $\operatorname{Re} s = \sigma > 1$ функция $\zeta(s)$ — дзета-функция Римана — задается равенством

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}.$$

Из определения следует, что $\zeta(s)$ — аналитическая функция в полуплоскости $\operatorname{Re} s > 1$.

Лемма 1 (формула или тождество Эйлера). При $\operatorname{Re} s > 1$ справедливо равенство

$$\zeta(s) = \prod_p \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{-1}.$$

Доказательство. При целом $X \geq 2$, $\operatorname{Re} s > 1$, в силу абсолютной сходимости рядов $1 + \frac{1}{p^s} + \frac{1}{p^{2s}} + \dots$ в однозначности разложения натуральных чисел на простые сомножители, имеем

$$\begin{aligned} \prod_{p < X} \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{-1} &= \prod_{p < X} \left(1 + \frac{1}{p^s} + \frac{1}{p^{2s}} + \dots\right) = \\ &= \sum_{n < X} \frac{1}{n^s} + R(s; X), \end{aligned}$$

где $|R(s; X)| \leq \sum_{n > X} \left|\frac{1}{n^s}\right| = \sum_{n > X} \frac{1}{n^\sigma} \leq \frac{1}{\sigma-1} X^{1-\sigma}$. Переходя к пределу при $X \rightarrow +\infty$, получим утверждение леммы.

Следствие. $\zeta(s) \neq 0$ при $\operatorname{Re} s > 1$.

Действительно, при $\operatorname{Re} s = \sigma > 1$

$$\begin{aligned} \frac{1}{|\zeta(s)|} &= \left| \prod_p \left(1 - \frac{1}{p^s}\right) \right| \leq \prod_p \left(1 + \frac{1}{p^\sigma}\right) < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\sigma} \leq \\ &\leq 1 + \int_1^{\infty} \frac{du}{u^\sigma} = \frac{\sigma}{\sigma-1}; \quad |\zeta(s)| > \frac{\sigma-1}{\sigma} > 0. \end{aligned}$$

Продолжим $\zeta(s)$ в полуплоскость $\operatorname{Re} s > 0$.

Лемма 2. При $\operatorname{Re} s > 0$, $N \geq 1$, имеет место равенство

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^N \frac{1}{n^s} + \frac{N^{1-s}}{s-1} - \frac{1}{2} N^{-s} + s \int_N^{\infty} \frac{\rho(u)}{u^{s+1}} du,$$

где $\rho(u) = \frac{1}{2} - \{u\}$.

Доказательство. Возьмем натуральное число $M > N$, применим формулу (2) гл. I, получим

$$\begin{aligned} \sum_{N+\frac{1}{2} < n < M+\frac{1}{2}} \frac{1}{n^s} &= \int_{N+\frac{1}{2}}^{M+\frac{1}{2}} \frac{du}{u^s} + s \int_{N+\frac{1}{2}}^{M+\frac{1}{2}} \frac{\rho(u)}{u^{s+1}} du = \\ &= \frac{1}{1-s} \left(M + \frac{1}{2} \right)^{1-s} + \frac{1}{s-1} N^{1-s} - \frac{1}{2} N^{-s} + \\ &\quad + s \int_N^{M+\frac{1}{2}} \frac{\rho(u)}{u^{s+1}} du. \end{aligned}$$

Следовательно, при $\operatorname{Re} s > 1$

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^N \frac{1}{n^s} + \frac{N^{1-s}}{s-1} - \frac{1}{2} N^{-s} + s \int_N^{\infty} \frac{\rho(u)}{u^{s+1}} du.$$

Но последний интеграл определяет аналитическую функцию в полуплоскости $\operatorname{Re} s > 0$. В силу принципа аналитического продолжения следует утверждение леммы.

Следствие. $\zeta(s)$ — функция аналитическая в полуплоскости $\operatorname{Re} s > 0$ за исключением точки $s = 1$; в точке $s = 1$ дзета-функция $\zeta(s)$ имеет простой полюс с вычетом, равным 1.

Прежде чем продолжить $\zeta(s)$ на всю s -плоскость, докажем лемму.

Лемма 3. Пусть $x > 0$, α — вещественное,

$$\theta(x, \alpha) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-\pi x(n+\alpha)^2},$$

тогда

$$\theta\left(\frac{1}{x}, \alpha\right) = \sqrt{x} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-\pi n^2 x + 2\pi i n \alpha}.$$

Доказательство. Не нарушая общности, можно считать $0 \leq \alpha < 1$. Возьмем $N > 10$, $M = N^5$, и рассмотрим

интеграл

$$I(n) = \int_{-0,5}^{+0,5} \frac{\sin \pi (2M+1) u}{\sin \pi u} e^{-\pi x(n+\alpha+u)^2} du.$$

Так как

$$\int_{-0,5}^{+0,5} \frac{\sin \pi (2M+1) u}{\sin \pi u} du = \sum_{k=-M}^{+M} \int_{-0,5}^{+0,5} e^{-2\pi i k u} du = 1,$$

то

$$I(n) = e^{-\pi x(n+\alpha)^2} + R(n), \quad (1)$$

где

$$R(n) = \int_{-0,5}^{+0,5} \frac{\sin \pi (2M+1) u}{\sin \pi u} (e^{-\pi x(n+\alpha+u)^2} - e^{-\pi x(n+\alpha)^2}) du.$$

Оценим $|R(n)|$ при условии, что $-N \leq n \leq N$. Прежде всего имеем

$$R(n) = I_1 + I_2 + I_3,$$

где

$$I_1 = \int_{-0,5}^{-N^{-3}} \Phi(u) du, \quad I_2 = \int_{-N^{-3}}^{+N^{-3}} \Phi(u) du, \quad I_3 = \int_{+N^{-3}}^{+0,5} \Phi(u) du,$$

$$\Phi(u) = \frac{\sin \pi (2M+1) u}{\sin \pi u} (e^{-\pi x(n+\alpha+u)^2} - e^{-\pi x(n+\alpha)^2}).$$

Оценим I_2 . Для этого оценим $|\Phi(u)|$, $|u| \leq N^{-3}$, пользуясь формулой конечных приращений:

$$|\Phi(u)| = O\left(\frac{|u| N}{|\sin \pi u|}\right) = O(N).$$

Следовательно,

$$I_2 = O\left(\frac{1}{N^2}\right).$$

Интегралы I_1, I_3 оцениваются одинаково. Оценим I_3 . Интегрируя по частям, приходим к равенству

$$I_3 = \frac{-\cos \pi (2M+1) u}{\pi (2M+1) \sin \pi u} (e^{-\pi x(n+\alpha+u)^2} - e^{-\pi x(n+\alpha)^2}) \Big|_{N^{-3}}^{0,5} +$$

$$+ \int_{N^{-3}}^{0,5} \frac{\cos \pi (2M+1) u}{\pi (2M+1)} Y(u) du,$$

где $Y(u) = \frac{d}{du} \left(\frac{e^{-\pi x(n+\alpha+u)^2} - e^{-\pi x(n+\alpha)^2}}{\sin \pi u} \right)$. Оценивая грубо $|Y(u)|$, $N^{-3} \leq u \leq 0,5$, находим

$$Y(u) = O\left(\frac{1}{u^2}\right) + O\left(\frac{N}{u}\right).$$

Следовательно,

$$I_3 = O\left(\frac{N^3}{M}\right) + O\left(\frac{N \ln N}{M}\right) = O\left(\frac{1}{N^2}\right).$$

Таким образом,

$$R(n) = O\left(\frac{1}{N^2}\right).$$

Суммируя (1) по n , $-N \leq n \leq N$, получим

$$\begin{aligned} \sum_{n=-N}^N e^{-\pi x(n+\alpha)^2} + O\left(\frac{1}{N}\right) &= \\ &= \sum_{n=-N}^{+N} \int_{-0,5}^{+0,5} \sum_{k=-M}^{+M} e^{-2\pi i k u - \pi x(n+\alpha+u)^2} du = \\ &= \sum_{k=-M}^{+M} \sum_{n=-N}^{+N} \int_{-0,5}^{0,5} e^{-2\pi i k(n+u) - \pi x(n+u+\alpha)^2} du = \\ &= \sum_{k=-M}^{+M} \int_{-N-0,5}^{N+0,5} e^{-2\pi i k u - \pi x(u+\alpha)^2} du = \sum_{k=-M}^{+M} J(k). \end{aligned}$$

Далее,

$$\begin{aligned} J(k) &= \int_{-N-0,5}^{N+0,5} e^{-2\pi i k u - \pi x(u+\alpha)^2} du = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2\pi i k u - \pi x(u+\alpha)^2} du + \\ &+ O(e^{-\pi x N}) = e^{2\pi i k \alpha} J(k; x) + O(e^{-\pi x N}), \end{aligned}$$

$$\text{где } J(k; x) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2\pi i k u - \pi x u^2} du.$$

Вычислим $J\left(k; \frac{1}{x}\right)$. Имеем

$$J\left(k; \frac{1}{x}\right) = x \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2\pi i k u x - \pi x u^2} du = x e^{-\pi x k^2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\pi x(u+k i)^2} du.$$

Пусть $X > 1$ и Γ — контур прямоугольника с вершинами $-X, +X, -X + ik, X + ik$. Тогда

$$0 = \int_{\Gamma} e^{-\pi x u^2} du = \int_{-X}^{+X} e^{-\pi x u^2} du - \int_{-X}^{+X} e^{-\pi x(u+ki)^2} du + \\ + \int_0^k e^{-\pi x(X+iu)^2} du - \int_0^k e^{-\pi x(-X+iu)^2} du. \quad (2)$$

Оба последних интеграла по абсолютной величине не превосходят

$$\int_0^k e^{-\pi x X^2} e^{+\pi x u^2} du \leq k e^{\pi x k^2} e^{-\pi x X^2}.$$

Переходя в (2) к пределу при $X \rightarrow +\infty$, получим

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\pi x(u+ki)^2} du = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\pi x u^2} du = \frac{1}{\sqrt{\pi x}} \int_0^{\infty} e^{-v} v^{-\frac{1}{2}} dv = \\ = \frac{1}{\sqrt{\pi x}} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{x}}.$$

Итак,

$$J\left(k; \frac{1}{x}\right) = e^{-\pi x k^2} \sqrt{x};$$

$$\sum_{n=-N}^N e^{-\pi \frac{1}{x}(n+\alpha)^2} + O\left(\frac{1}{N}\right) = \sqrt{x} \sum_{h=-M}^{+M} e^{-\pi x h^2 + 2\pi i h \alpha} + \\ + O\left(e^{-\pi \frac{1}{x} N}\right).$$

Переходя в последнем соотношении к пределу при $N \rightarrow +\infty$, получим утверждение леммы.

Следствие 1. Пусть $\operatorname{Re} s > 0$, α — вещественное,

$$\theta(s, \alpha) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-\pi s(n+\alpha)^2};$$

тогда

$$\theta\left(\frac{1}{s}, \alpha\right) = \sqrt{s} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-\pi n^2 s - 2\pi i n \alpha}.$$

Следствие 2. $\theta\left(\frac{1}{x}, 0\right) = \sqrt{x} \theta(x, 0)$.

Теорема 1 (функциональное уравнение дзета-функции). *Имеет место равенство*

$$\pi^{-s/2} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \zeta(s) = \pi^{-(1-s)/2} \Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right) \zeta(1-s).$$

Доказательство. По теореме 4, III при $\operatorname{Re} s > 0$ и натуральном n

$$\Gamma\left(\frac{s}{2}\right) = \int_0^{\infty} e^{-u} u^{\frac{s}{2}-1} du = n^s \int_0^{\infty} e^{-\pi n^2 x} \pi^{\frac{s}{2}} x^{\frac{s}{2}-1} dx,$$

т. е.

$$\pi^{-\frac{s}{2}} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) n^{-s} = \int_0^{\infty} e^{-\pi n^2 x} x^{\frac{s}{2}-1} dx.$$

Следовательно, при $\operatorname{Re} s > 1$

$$\pi^{-\frac{s}{2}} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \zeta(s) = \int_0^{\infty} x^{\frac{s}{2}-1} \left(\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\pi n^2 x} \right) dx \quad (3)$$

(возможность перемены порядка суммирования и интегрирования следует из того, что $\sum_{n>N} e^{-\pi n^2 x} = O(e^{-\pi N^2 x})$,

$x \geq 1$, а $\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\pi n^2 x} = O\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$ при $0 < x < 1$).

Далее, если $\omega(x) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\pi n^2 x}$, то из следствия 2 леммы 3 $\omega\left(\frac{1}{x}\right) = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} x^{1/2} + x^{1/2} \omega(x)$. Поэтому

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} x^{\frac{s}{2}-1} \omega(x) dx &= \int_0^1 x^{\frac{s}{2}-1} \omega(x) dx + \int_1^{\infty} x^{\frac{s}{2}-1} \omega(x) dx = \\ &= \int_1^{\infty} \left(x^{-\frac{s}{2}-1} \omega\left(\frac{1}{x}\right) + x^{\frac{s}{2}-1} \omega(x) \right) dx = \frac{1}{s(s-1)} + \\ &\quad + \int_1^{\infty} \left(x^{\frac{s}{2}-1} + x^{-\frac{s}{2}-\frac{1}{2}} \right) \omega(x) dx. \quad (4) \end{aligned}$$

Так как $\omega(x) = O(e^{-\pi x})$ при $x \rightarrow +\infty$, то из (4) следует, что правая часть (3) является аналитической функцией

при любом $s \neq 0, 1$ и не меняется от замены s на $1 - s$, т. е.

$$\pi^{-\frac{s}{2}} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \zeta(s) = \pi^{-\frac{1-s}{2}} \Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right) \zeta(1-s).$$

Следствие. *Функция*

$$\xi(s) = \frac{1}{2} s(s-1) \pi^{-s/2} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \zeta(s)$$

является целой и

$$\xi(s) = \xi(1-s).$$

§ 2. Простейшие теоремы о нулях

Из теоремы 1 видим, что при $s = -2, -4, \dots, -2n, \dots$ дзета-функция равна 0, так как при этих значениях s $\Gamma^{-1}(0,5s) = 0$; при $s = 0$ дзета-функция не равна 0, так как нуль $\Gamma^{-1}(0,5s)$ гасится полюсом $\zeta(1-s)$. Выписанные нули называются тривиальными. Кроме тривиальных дзета-функция имеет бесконечно много нетривиальных нулей, лежащих в полосе (критической полосе) $0 \leq \operatorname{Re} s \leq 1$.

Теорема 2. *Функция $\xi(s)$ является целой функцией первого порядка, имеющей бесконечно много нулей ρ_n таких, что $0 \leq \operatorname{Re} \rho_n \leq 1$; ряд $\sum |\rho_n|^{-1}$ расходится, а ряд $\sum |\rho_n|^{-1-\varepsilon}$ сходится при любом $\varepsilon > 0$. Нули $\xi(s)$ являются нетривиальными нулями $\zeta(s)$.*

Доказательство. При $\operatorname{Re} s > 1$ дзета-функция, а следовательно, и $\xi(s)$ не имеет нулей; из теоремы 1 следует, что $\xi(s) \neq 0$ и при $\operatorname{Re} s < 0$. Так как $\xi(0) = \xi(1) \neq 0$, то нулями $\xi(s)$ будут только нетривиальные нули $\zeta(s)$.

Определим порядок $\xi(s)$. Для этого оценим $\xi(s)$ при $|s| \rightarrow +\infty$ (достаточно это сделать при $\operatorname{Re} s \geq 1/2$). Из леммы 2 при $\operatorname{Re} s \geq 1/2$ следует, что $\zeta(s) = O(|s|)$. Так как $|\Gamma(s)| \leq e^{d|s|\ln|s|}$, то порядок $\xi(s)$ не выше первого. Но при $s \rightarrow +\infty$ $\ln \Gamma(s) \sim s \ln s$, поэтому порядок $\xi(s)$ равен 1. Из теоремы 5, II следует, что ряд $\sum |\rho_n|^{-1}$, где ρ_n — нули $\xi(s)$, расходится и, следовательно, $\xi(s)$ имеет бесконечно много нулей, а ряд $\sum |\rho_n|^{-1-\varepsilon}$ сходится при любом $\varepsilon > 0$. Теорема доказана.

Следствие 1. *Имеет место формула*

$$\xi(s) = e^{A+Bs} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{s}{\rho_n}\right) e^{\frac{s}{\rho_n}}. \quad (5)$$

Следствие 2. *Нетривиальные нули дзета-функции расположены симметрично относительно прямых $\operatorname{Re} s = \frac{1}{2}$ и $\operatorname{Im} s = 0$.*

Везде ниже нетривиальные нули дзета-функции будем нумеровать в порядке возрастания абсолютной величины их мнимых частей, а при одинаковых абсолютных величинах мнимых частей — в произвольном порядке.

Теорема 3. *Имеет место равенство*

$$\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = -\frac{1}{s-1} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{s-\rho_n} + \frac{1}{\rho_n} \right) + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{s+2n} - \frac{1}{2n} \right) + B_0,$$

где ρ_n — все нетривиальные нули $\zeta(s)$, B_0 — абсолютная постоянная.

Доказательство. Борзя от левой и правой частей (5) логарифмическую производную, получим утверждение теоремы.

Теорема 4. *Пусть $\rho_n = \beta_n + i\gamma_n$, $n = 1, 2, \dots$, — все нетривиальные нули $\zeta(s)$, $T \geq 2$. Тогда*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1 + (T - \gamma_n)^2} \leq c \log T.$$

Доказательство. Возьмем $s = 2 + iT$. Тогда

$$\left| \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{s+2n} - \frac{1}{2n} \right) \right| \leq \sum_{n \leq T} \left(\frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} \right) + \sum_{n > T} \frac{|s|}{4n^2} \leq c_0 \log T, \quad (6)$$

и, следовательно (теорема 3),

$$\begin{aligned} -\operatorname{Re} \frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} &= \operatorname{Re} \left(\frac{1}{s-1} - B_0 - \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{s+2n} - \frac{1}{2n} \right) \right) - \\ &= \operatorname{Re} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{s-\rho_n} + \frac{1}{\rho_n} \right) \leq c_1 \log T - \operatorname{Re} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{s-\rho_n} + \frac{1}{\rho_n} \right). \end{aligned}$$

Так как $\left| \frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} \right| = \left| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{n^{2+iT}} \right| < c_2$, то

$$\operatorname{Re} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{s-\rho_n} + \frac{1}{\rho_n} \right) \leq c_3 \log T.$$

Далее, из того, что

$$\operatorname{Re} \frac{1}{s - \rho_n} = \operatorname{Re} \frac{1}{(2 - \beta_n) + i(T - \gamma_n)} = \frac{2 - \beta_n}{(2 - \beta_n)^2 + (T - \gamma_n)^2} \geq \frac{0,5}{1 + (T - \gamma_n)^2},$$

$$\operatorname{Re} \frac{1}{\rho} = \frac{\beta_n}{\beta_n^2 + \gamma_n^2} \geq 0,$$

следует утверждение теоремы.

Следствие 1. Число нулей ρ_n дзета-функции, для которых $T \leq |\operatorname{Im} \rho_n| \leq T + 1$, не превосходит $c_1 \log T$.

Следствие 2. При $T \geq 2$ справедлива оценка

$$\sum_{|T - \gamma_n| > 1} \frac{1}{|T - \gamma_n|^2} = O(\log T).$$

Следствие 3. При $-1 \leq \sigma \leq 2$, $s = \sigma + it$, $|t| \geq 2$,

$$\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = \sum_{|t - \gamma_n| < 1} \frac{1}{s - \rho_n} + O(\log |t|),$$

причем суммирование в последней сумме ведется по нулям ρ_n функции $\zeta(s)$, у которых $|t - \operatorname{Im} \rho_n| \leq 1$.

Доказательство. Так как оценка (6) справедлива при $s = \sigma + it$, $|t| \geq 2$, $-1 \leq \sigma \leq 2$, то

$$\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{s - \rho_n} + \frac{1}{\rho_n} \right) + O(\log |t|).$$

Вычтем из этого соотношения такое же при $s = 2 + it$:

$$\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{s - \rho_n} - \frac{1}{2 + it - \rho_n} \right) + O(\log |t|).$$

Если $|\gamma_n - t| > 1$, то

$$\left| \frac{1}{\sigma + it - \rho_n} - \frac{1}{2 + it - \rho_n} \right| \leq \frac{2 - \sigma}{(\gamma_n - t)^2} \leq \frac{3}{(\gamma_n - t)^2}$$

и утверждение следует из следствий 1 и 2.

Теорема 5 (Ш. Валле-Пуссен). Существует абсолютная постоянная $c > 0$ такая, что в области s — плоскости

$$\operatorname{Re} s = \sigma \geq 1 - \frac{c}{\log(|t| + 2)}$$

нет нулей дзета-функции.

Доказательство. Функция $\zeta(s)$ в точке $s=1$ имеет полюс, поэтому при некотором положительном числе γ_0 в области $|s-1| \leq \gamma_0$ у нее нет нулей. Пусть $\rho_n = \beta_n + i\gamma_n$ — нуль $\zeta(s)$, причем $|\gamma_n| > \gamma_0$. При $\operatorname{Re} s = \sigma > 1$

$$-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{n^s} = \sum_{n=1}^{\infty} \Lambda(n) n^{-\sigma} e^{-it \log n},$$

и, следовательно,

$$-\operatorname{Re} \frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = \sum_{n=1}^{\infty} \Lambda(n) n^{-\sigma} \cos(t \log n).$$

Так как для вещественных φ справедливо неравенство

$$3 + 4 \cos \varphi + \cos 2\varphi = 2(1 + \cos \varphi)^2 \geq 0,$$

то

$$3 \left\{ -\frac{\zeta'(\sigma)}{\zeta(\sigma)} \right\} + 4 \left\{ -\operatorname{Re} \frac{\zeta'(\sigma + it)}{\zeta(\sigma + it)} \right\} + \left\{ -\operatorname{Re} \frac{\zeta'(\sigma + i2t)}{\zeta(\sigma + i2t)} \right\} \geq 0. \quad (7)$$

Оценим сверху каждое слагаемое, стоящее в левой части (7). Из теоремы 3 и следствия 1 теоремы 4 при $s = \sigma$, $1 < \sigma \leq 2$, получаем

$$-\frac{\zeta'(\sigma)}{\zeta(\sigma)} < \frac{1}{\sigma-1} + B_1,$$

где $B_1 > 0$ — абсолютная постоянная. Далее, опять из теоремы 3 при $s = \sigma + it$, $1 < \sigma \leq 2$, $|t| > \gamma_0$, находим

$$-\operatorname{Re} \frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} < A \log(|t| + 2) - \sum_{k=1}^{\infty} \operatorname{Re} \left(\frac{1}{s - \rho_k} + \frac{1}{\rho_k} \right),$$

где $A > 0$ — абсолютная постоянная. Так как $0 \leq \beta_k \leq 1$, $\rho_k = \beta_k + i\gamma_k$, то

$$\operatorname{Re} \frac{1}{s - \rho_k} = \operatorname{Re} \frac{1}{\sigma - \beta_k + i(t - \gamma_k)} = \frac{\sigma - \beta_k}{(\sigma - \beta_k)^2 + (t - \gamma_k)^2} > 0;$$

кроме того,

$$\operatorname{Re} \frac{1}{\rho_k} = \frac{\beta_k}{\beta_k^2 + \gamma_k^2} \geq 0.$$

Поэтому

$$-\operatorname{Re} \frac{\zeta'(\sigma + it)}{\zeta(\sigma + it)} < A \log(|t| + 2) - \frac{\sigma - \beta_n}{(\sigma - \beta_n)^2 + (t - \gamma_n)^2}.$$

Из этого неравенства следует и такое:

$$-\operatorname{Re} \frac{\zeta'(\sigma + i2t)}{\zeta(\sigma + i2t)} < A \log(2|t| + 2).$$

Подставляя найденные оценки в (7), получим

$$\frac{3}{\sigma - 1} - 4 \frac{\sigma - \beta_n}{(\sigma - \beta_n)^2 + (t - \gamma_n)^2} + A_1 \log(|t| + 2) \geq 0,$$

где $A_1 > 1$ — абсолютная постоянная. Последнее неравенство имеет место при любом t , $|t| > \gamma_0$, и любом σ , $1 < \sigma \leq 2$. Возьмем в нем $t = \gamma_n$, $\sigma = 1 + \frac{1}{2A_1 \log(|\gamma_n| + 2)}$;

тогда будем иметь

$$\begin{aligned} \frac{4}{\sigma - \beta_n} &\leq \frac{3}{\sigma - 1} + A_1 \log(|\gamma_n| + 2), \\ \beta_n &\leq 1 - \frac{1}{14A_1 \log(|\gamma_n| + 2)}, \end{aligned}$$

что и требовалось доказать.

Следствие. Пусть $T \geq 2$ и $c > 0$ — абсолютная постоянная теоремы. Тогда в области

$$\sigma \geq 1 - \frac{c}{2 \log(T + 2)}, \quad 2 \leq |t| \leq T,$$

имеет место оценка

$$\left| \frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} \right| = O(\log^2 T).$$

Доказательство. По следствию 3 теоремы 4

$$\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = \sum_{|t - \gamma_n| \leq 1} \frac{1}{s - \rho_n} + O(\log T),$$

и, следовательно,

$$\left| \frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} \right| \leq \sum_{|t - \gamma_n| \leq 1} \frac{1}{|\sigma - \beta_n + i(t - \gamma_n)|} + O(\log T).$$

Так как

$$\beta_n \leq 1 - \frac{c}{\log(T + 2)}, \quad \sigma \geq 1 - \frac{c}{2 \log(T + 2)},$$

то

$$\left| \frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} \right| \leq \frac{2}{c} \log(T + 2) \sum_{|t - \gamma_n| \leq 1} 1 + O(\log T) = O(\log^2 T),$$

что и требовалось доказать.

§ 3. Приближение конечной суммой

Для решения ряда задач теории чисел требуется оценка $|\zeta(s)|$ в критической полосе. Поэтому $\zeta(s)$ приближают суммой первых членов ряда, которым она определяется при $\operatorname{Re} s > 1$, а затем оценивают эту сумму. Ниже будет получено простейшее приближение $\zeta(s)$.

Теорема 6. При $0 < \sigma_0 \leq \sigma \leq 2$, $\pi x \geq |t| \geq 2\pi$, имеет место формула

$$\zeta(s) = \sum_{n \leq x} \frac{1}{n^s} + \frac{x^{1-s}}{s-1} + O(x^{-\sigma} \ln x),$$

где постоянная в знаке O зависит только от σ_0 .

Доказательство. По лемме 2 при $N > x$

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^N \frac{1}{n^s} - \frac{N^{1-s}}{1-s} - \frac{1}{2} N^{-s} + s \int_N^{\infty} \frac{\frac{1}{2} - \{u\}}{u^{s+1}} du. \quad (8)$$

Последнее слагаемое есть величина порядка $O(|t|N^{-\sigma})$. Рассмотрим сумму S ,

$$S = \sum_{x < n < N} \frac{1}{n^s}, \quad s = \sigma + it.$$

Вводя обозначения $\varphi(n) = n^{-\sigma}$, $f(n) = -\frac{t}{2\pi} \ln n$, видим, что к S применимо следствие леммы 1, I, т. е.

$$S = \int_x^N u^{-s} du + O(x^{-\sigma} \ln x) = \frac{N^{1-s}}{1-s} + \frac{x^{1-s}}{s-1} + O(x^{-\sigma} \ln x).$$

Отсюда, из (8), устремляя N к $+\infty$, получим утверждение теоремы.

ЗАДАЧИ

1. Доказать, что если $|\arg \tau| < \pi/2$, то

$$\begin{aligned} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \zeta(s) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Gamma\left(\frac{s}{2}, \pi n^2\right)}{n^s} + \\ &+ \pi^{s-\frac{1}{2}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Gamma\left(\frac{1-s}{2}, \frac{\pi n^2}{\tau}\right)}{n^{1-s}} - \pi^{\frac{1}{2}} \frac{(\pi\tau)^{\frac{s-1}{2}}}{1-s} - \frac{(\pi\tau)^{\frac{s}{2}}}{s}, \end{aligned}$$

где $\Gamma(z, x)$ — неполная гамма-функция,

$$\Gamma(z, x) = \int_x^{\infty} e^{-\xi} \xi^{z-1} d\xi.$$

2. Вывести из формулы задачи 1 соотношения:

а) $\pi^{-\frac{s}{2}} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \zeta(s) = \pi^{-\frac{1-s}{2}} \Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right) \zeta(1-s);$

б) пусть $h > 0$, $2\pi xy = |t|$, $x > h$, $y > h$, $K > 0$. Тогда при $-K < \sigma < K$

$$\zeta(s) = \sum_{n < x} \frac{1}{n^s} + \pi^{s-\frac{1}{2}} \frac{\Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)} \sum_{n < y} \frac{1}{n^{1-s}} + O(x^{-\sigma}) + O\left(|t|^{\frac{1}{2}-\sigma} y^{\sigma-1}\right).$$

3. Функция $Z(t)$,

$$Z(t) = e^{i\theta(t)} \zeta\left(\frac{1}{2} + it\right),$$

где $e^{i\theta(t)} = \frac{\pi^{-it/2} \Gamma\left(\frac{1}{4} + \frac{it}{2}\right)}{\left|\Gamma\left(\frac{1}{4} + \frac{it}{2}\right)\right|}$, принимает действительные значения при действительных значениях t .

4. Доказать, что функция $\theta(t)$, $t \geq 2$, определенная в задаче 3, имеет вид

$$\theta(t) = t \ln \sqrt{\frac{t}{2\pi}} - \frac{t}{2} - \frac{\pi}{8} + \Delta(t),$$

$$\Delta(t) = \frac{t}{4} \ln\left(1 + \frac{1}{4t^2}\right) + \frac{1}{4} \operatorname{arctg} \frac{1}{2t} - \frac{t}{2} \int_0^{\infty} \frac{\rho(u) du}{\left(u + \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{t^2}{4}},$$

$$\rho(u) = \frac{1}{2} - \{u\}.$$

5. При любом целом $k \geq 0$, $t \geq 2$, справедливы формулы

$$Z^{(2k)}(t) = (-1)^k \cdot 2 \sum_{n < \sqrt{t/2\pi}} \frac{(\theta'(t) - \ln n)^{2k}}{\sqrt{n}} \cos(\theta(t) - t \ln n) + O(t^{-1/4} (\ln t)^{2k+1}),$$

$$Z^{(2k+1)}(t) = (-1)^{k+1/2} \sum_{n < \sqrt{t/2\pi}} \frac{(\theta'(t) - \ln n)^{2k+1}}{\sqrt{n}} \sin(\theta(t) - t \ln n) + O(t^{-1/4} (\ln t)^{2k+2}),$$

где постоянные в знаках O зависят только от k .

6. Пусть $k \geq 0$, k — целое фиксированное число, $T \geq 2$, $P = \sqrt{T/2\pi}$, функция $\Phi(t)$ определена равенством

$$\Phi(t) = \sum_{n < P} \frac{\left(\ln \frac{P}{n}\right)^k}{\sqrt{n}} \cos\left(t \ln \frac{P}{n}\right) + O\left(T^{-\frac{1}{4}} (\ln T)^{k+1}\right).$$

Пусть, далее,

$$v_0 = \left[\frac{T \ln P}{\pi} \right] + 1, \quad r = [\ln T], \quad H_1 = \left[\frac{H \ln P}{\pi r} \right],$$

$$v = v_0 + v_1 + \dots + v_r, \quad 0 \leq v_1, \dots, v_r \leq H_1 - 1.$$

Сравнивая $|S_1|$ и $|S_2|$,

$$S_1 = \sum_{v_1=0}^{H_1-1} \dots \sum_{v_r=0}^{H_1-1} \Phi(t_v), \quad S_2 = \sum_{v_1=0}^{H_1-1} \dots \sum_{v_r=0}^{H_1-1} (-1)^v \Phi(t_v),$$

доказать существование нуля нечетного порядка функции $\Phi(t)$ на промежутке $(T, T+H)$, где

$$H \geq T^{\frac{1}{6k+6}} (\ln T)^2, \quad T \geq T_0.$$

7. Пусть k — целое, $k \geq 0$, $T \geq T_0$,

$$H \geq T^{\frac{1}{6k+6}} (\ln T)^2.$$

Тогда промежуток $(T, T+H)$ содержит нуль нечетного порядка функции $Z^{(k)}(t)$.

Г Л А В А V

СВЯЗЬ МЕЖДУ СУММОЙ КОЭФФИЦИЕНТОВ РЯДА ДИРИХЛЕ И ФУНКЦИЕЙ, ЗАДАВАЕМОЙ ЭТИМ РЯДОМ

Метод, которым доказываются теоремы этой главы, носит название метода комплексного интегрирования.

§ 1. Общая теорема

Определение 1. *Рядом Дирихле называется выражение*

$$f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s}, \quad (1)$$

где a_n — комплексные числа (коэффициенты ряда Дирихле), $s = \sigma + it$.

Рассмотрим сумматорную функцию коэффициентов ряда Дирихле $\Phi(x) = \sum_{n \leq x} a_n$. Функцию $\Phi(x)$ можно выразить при определенных условиях на ряд (1) через $f(s)$.

Теорема 1. *Пусть ряд (1) для $f(s)$ абсолютно сходится при $\sigma > 1$, $|a_n| \leq A(n)$, где $A(n) > 0$ — монотонно возрастающая функция n и при $\sigma \rightarrow 1 + 0$*

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| n^{-\sigma} = O((\sigma - 1)^{-\alpha}), \quad \alpha > 0.$$

Тогда при любых $b_0 \geq b > 1$, $T \geq 1$, $x = N + \frac{1}{2}$, имеет место формула

$$\begin{aligned} \Phi(x) = \sum_{n \leq x} a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{b-iT}^{b+iT} f(s) \frac{x^s}{s} ds + O\left(\frac{x^b}{T(b-1)^\alpha}\right) + \\ + O\left(\frac{x A(2x) \log x}{T}\right), \end{aligned}$$

где постоянная в знаке O зависит только от b_0 .

Доказательство. Прежде всего имеем

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{b-iT}^{b+iT} \frac{a^s}{s} ds = \begin{cases} 1 + O\left(\frac{a^b}{T|\log a|}\right), & \text{если } a > 1; \\ O\left(\frac{a^b}{T|\log a|}\right), & \text{если } 0 < a < 1. \end{cases} \quad (2)$$

Действительно, пусть $a > 1$ ($0 < a < 1$). Возьмем $U > b$ и рассмотрим контур $\Gamma(\Gamma_1)$ (см. рис. 5).

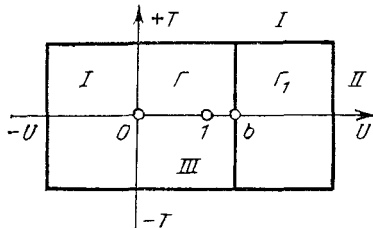


Рис. 5.

По теореме Коши

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{a^s ds}{s} = 1 \quad (a > 1),$$

и соответственно

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_1} \frac{a^s ds}{s} = 0 \quad (a < 1),$$

т. е.

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_{b-iT}^{b+iT} \frac{a^s ds}{s} &= 1 + R \quad (a > 1), \\ \frac{1}{2\pi i} \int_{b-iT}^{b+iT} \frac{a^s ds}{s} &= R_1 \quad (0 < a < 1), \end{aligned} \quad (3)$$

где R и R_1 — соответствующие интегралы по сторонам I, II, III. Интегралы по I и III равны по абсолютной величине; поэтому если $a > 1$, то

$$\frac{1}{2\pi i} \left| \int_I \frac{a^s}{s} ds \right| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-U}^b \frac{a^\sigma d\sigma}{\sqrt{T^2 + \sigma^2}} \leq \frac{a^b}{T \log a};$$

если $0 < a < 1$, то

$$\frac{1}{2\pi} \left| \int_I \frac{a^s}{s} ds \right| \leq \frac{1}{2\pi} \int_b^U \frac{a^\sigma d\sigma}{\sqrt{T^2 + \sigma^2}} \leq \frac{a^b}{T |\log a|}.$$

Кроме того, если $a > 1$, то

$$\frac{1}{2\pi} \left| \int_{II} \frac{a^s}{s} ds \right| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-T}^{+T} \frac{a^{-U} dt}{\sqrt{U^2 + t^2}} = O(a^{-U}) \rightarrow 0$$

при $U \rightarrow +\infty$,

и если $0 < a < 1$, то

$$\frac{1}{2\pi} \left| \int_{II} \frac{a^s}{s} ds \right| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-T}^{+T} \frac{a^U dt}{\sqrt{U^2 + t^2}} = O(a^U) \rightarrow 0$$

при $U \rightarrow +\infty$.

Переходя в (3) к пределу при $U \rightarrow +\infty$, получим (2). Так как $x = N + \frac{1}{2}$, то $\frac{x}{n} \neq 1$ при натуральном n . Ряд (1) абсолютно сходится при $s = b + it$. Интегрируя его почленно, найдем

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{b-iT}^{b+iT} f(s) \frac{x^s}{s} ds = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \left(\frac{1}{2\pi i} \int_{b-iT}^{b+iT} \left(\frac{x}{n} \right)^s \frac{ds}{s} \right) = \sum_{n \leq x} a_n + R,$$

где

$$R = O \left(\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \left(\frac{x}{n} \right)^b T^{-1} \left| \log \frac{x}{n} \right|^{-1} \right).$$

Сумму под знаком O разобьем на две: в первую отнесем те слагаемые, где $\frac{x}{n} \leq \frac{1}{2}$ или $\frac{x}{n} \geq 2$; для них $\left| \log \frac{x}{n} \right| \geq \log 2$, и так как по условию теоремы $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|a_n|}{n^b} = O \left(\frac{1}{(b-1)^\alpha} \right)$, то первая сумма будет

$$O \left(\frac{x^b}{T (b-1)^\alpha} \right);$$

вторая сумма имеет вид

$$\sum_{\frac{1}{2}x < n < 2x} |a_n| \left(\frac{x}{n} \right)^b T^{-1} \left| \log \frac{x}{n} \right|^{-1} \leq T^{-1} A(2x) 2^b \sum_{\frac{1}{2}x < n < 2x} \left| \log \frac{N+0,5}{n} \right|^{-1}.$$

Выделяя в последней сумме слагаемые с $n = N-1, N, N+1$, которые являются величинами порядка $O(x)$, для

оставшейся части x находим оценку

$$x \leq \int_{x/2}^{N-1} \left(\log \frac{N+0,5}{u} \right)^{-1} du + \int_{N+1}^{2x} \left(\log \frac{u}{N+0,5} \right)^{-1} du = \\ = O(x \log x).$$

Из полученных оценок следует утверждение теоремы.

§ 2. Асимптотический закон распределения простых чисел

Асимптотическим законом распределения простых чисел называется утверждение $\pi(x) \sim \frac{x}{\ln x}$ или, эквивалентное ему, $\psi(x) \sim x$. Сейчас будет доказано более сильное утверждение.

Теорема 2 (Ш. Валле-Пуссен). *Существует абсолютная постоянная $c > 0$ такая, что*

$$\psi(x) = \sum_{n \leq x} \Lambda(n) = x + O(xe^{-c\sqrt{\ln x}});$$

$$\pi(x) = \sum_{p \leq x} 1 = \int_2^x \frac{du}{\ln u} + O\left(xe^{-\frac{c}{2}\sqrt{\ln x}}\right).$$

Доказательство. При $\operatorname{Re} s > 1$ имеем

$$-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{n^s}.$$

Не ограничивая общности, будем предполагать $x = (N + 1/2) \geq 100$. Применим теорему 1; из гл. IV следует, что в теореме 1 можно взять $\alpha = 1$, $A(n) = \log n$. Возьмем теперь

$$b = 1 + \frac{1}{\log x}, \quad T = e^{\sqrt{\log x}}.$$

Тогда

$$\psi(x) = \sum_{n \leq x} \Lambda(n) = \frac{1}{2\pi i} \int_{b-iT}^{b+iT} \left(-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} \right) \frac{x^s}{s} ds + O\left(\frac{x \ln^2 x}{T}\right).$$

По теореме 5, IV и следствию из нее при некоторой абсолютной постоянной $c_1 > 0$ в области $\operatorname{Re} s = \sigma \geq \sigma_1 = 1 - \frac{c_1}{2 \log(T+2)}$, $|t| \leq T$, дзета-функция $\zeta(s)$ не обраща-

ется в нуль, и, кроме того,

$$\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = O(\log^2 T)$$

при $s = \sigma_1 + it$, $s = \sigma \pm iT$, $\sigma_1 \leq \sigma \leq b$, $s = b + it$.

Рассмотрим интеграл J по контуру Γ (см. рис. 6):

$$J = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \left(-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} \right) \frac{x^s}{s} ds.$$

Подынтегральная функция имеет внутри контура полюс первого порядка с вычетом, равным x . Поэтому

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{b-iT}^{b+iT} \left(-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} \right) \frac{x^s}{s} ds = x + R,$$

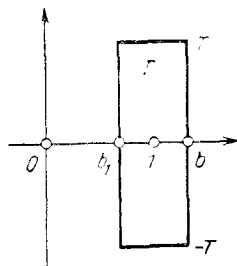


Рис. 6.

где R — сумма интегралов по верхней, нижней и левой стороне Γ . Оценим эти интегралы. Первые два равны по абсолютной величине и оцениваются

$$\left| \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma_1+iT}^{b+iT} \left(-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} \right) \frac{x^s}{s} ds \right| \leq \int_{\sigma_1}^b \left| \frac{\zeta'(\sigma + iT)}{\zeta(\sigma + iT)} \right| \frac{x^\sigma}{T} d\sigma = O\left(\frac{x \log^2 T}{T}\right);$$

интеграл по левой стороне равен

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma_1-iT}^{\sigma_1+iT} \left(-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} \right) \frac{x^s}{s} ds \right| &= \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{-T}^{+T} \frac{\zeta'(\sigma_1 + it) x^{\sigma_1 + it}}{\zeta(\sigma_1 + it) (\sigma_1 + it)} dt \right| = \\ &= O\left(x^{\sigma_1} \log^2 T \left(\int_0^1 \frac{dt}{\sigma_1} + \int_1^T \frac{dt}{t} \right)\right) = O(x^{\sigma_1} \log^3 T). \end{aligned}$$

Из полученных оценок, определения T и σ_1 следует первое утверждение теоремы.

Рассмотрим

$$S = \sum_{n < x} \frac{\Lambda(n)}{\log n} = \sum_{p < x} 1 + \sum_{\substack{n=p^k \\ k \geq 2}} \frac{\Lambda(n)}{\log n}.$$

Во второй сумме $k \leq \log x$ и при каждом $k \geq 2$ в сумме $\leq \sqrt{x}$ слагаемых, не превосходящих 1. Поэтому

$$S = \pi(x) + O(\sqrt{x} \log x). \quad (4)$$

Полагая в лемме 4, I $c_n = \Lambda(n)$, $f(x) = 1/\log x$, т. е. $C(x) = \sum_{n \leq x} c_n = \psi(x) = x + O(xe^{-c\sqrt{\log x}})$, $f'(x) = -1/x \log^2 x$, найдем

$$S = \int_2^x \frac{\psi(u)}{u \log^2 u} du + \frac{\psi(x)}{\log x} = \int_2^x \frac{du}{\log^2 u} + \frac{x}{\log x} + R,$$

где

$$\begin{aligned} R &= O\left(\int_2^x e^{-c\sqrt{\log u}} \frac{du}{\log^2 u} + xe^{-c\sqrt{\log x}}\right) = \\ &= O\left(\int_2^{\sqrt{x}} du + \int_{\sqrt{x}}^x e^{-c\sqrt{\log u}} du + xe^{-c\sqrt{\log x}}\right) = O\left(xe^{-\frac{c}{2}\sqrt{\ln x}}\right) \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} \int_2^x \frac{du}{\log^2 u} + \frac{x}{\log x} &= -\frac{u}{\log u} \Big|_2^x + \int_2^x \frac{du}{\log u} + \frac{x}{\log x} = \\ &= \int_2^x \frac{du}{\log u} + \frac{2}{\log 2}. \end{aligned}$$

Отсюда и из (4) следует второе утверждение теоремы.

§ 3. Представление функции Чебышёва в виде суммы по нулям дзета-функции

Метод комплексного интегрирования позволяет написать явные формулы, связывающие различного вида суммы по простым числам с нулями дзета-функции. Одна из таких формул будет сейчас доказана.

Теорема 3. Пусть $2 \leq T \leq x$. Тогда

$$\psi(x) = \sum_{n \leq x} \Lambda(n) = x - \sum_{|\operatorname{Im} \rho| < T} \frac{x^\rho}{\rho} + O\left(\frac{x \log^2 x}{T}\right),$$

где ρ — нули дзета-функции в критической полосе.

Доказательство. По теореме 3, IV при $\operatorname{Re} s > 1$

$$\begin{aligned}
 -\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{n^s} = \\
 &= \frac{1}{s-1} - \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{s-\rho_n} + \frac{1}{\rho_n} \right) - \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{s+2n} - \frac{1}{2n} \right) - B_0, \quad (5)
 \end{aligned}$$

где ρ_n — все нетривиальные нули $\zeta(s)$. Как и при доказательстве теоремы 2 $\left(b = 1 + \frac{1}{\log x} \right)$,

$$\psi(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{b-iT_1}^{b+iT_1} \left(-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} \right) \frac{x^s}{s} ds + O\left(\frac{x \log^2 x}{T} \right), \quad (6)$$

где $T \leq T_1 \leq T+1$ и T_1 взято так, что расстояние от прямой $\operatorname{Im} s = T_1$ до ближайшего нуля $\zeta(s)$

$$\gg \frac{1}{\log T}$$

(это всегда можно сделать, так как (теорема 4, IV, следствие 1) число нулей $\zeta(s)$, у которых $T \leq \operatorname{Im} \rho \leq T+1$, есть $O(\log T)$). Рассмотрим интеграл J ,

$$J = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \left(-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} \right) \frac{x^s}{s} ds,$$

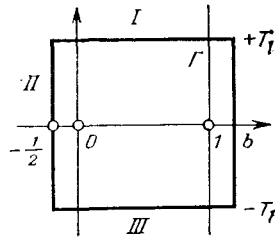


Рис. 7.

где Γ — прямоугольник (см. рис. 7). По теореме Коши и (5)

$$J = x - \sum_{|\operatorname{Im} \rho| \leq T_1} \frac{x^\rho}{\rho} - \frac{\zeta'(0)}{\zeta(0)}. \quad (7)$$

Осталось оценить интегралы по сторонам Γ I, II и III. Интегралы по I и III равны по абсолютной величине и оцениваются величиной

$$\frac{1}{2\pi} \left| \int_{-0,5+iT_1}^{b+iT_1} \left(-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} \right) \frac{x^s}{s} ds \right| < \frac{x}{T_1} \int_{-0,5}^b \left| \frac{\zeta'(\sigma + iT_1)}{\zeta(\sigma + iT_1)} \right| d\sigma. \quad (8)$$

Интеграл по Π не превосходит

$$\frac{1}{2\pi} \left| \int_{-0,5-iT_1}^{-0,5+iT_1} \left(-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} \right) \frac{x^s}{s} ds \right| < \\ < \frac{1}{\sqrt{x}} \int_{-T_1}^{T_1} \left| \frac{\zeta'(-0,5+it)}{\zeta(-0,5+it)} \right| \frac{dt}{(\log x)^{-1} + |t|}. \quad (9)$$

Оценим величину $\left| \frac{\zeta'(\sigma+it)}{\zeta(\sigma+it)} \right|$, где $-0,5 \leq \sigma \leq b$ и $t = T_1$, или $\sigma = -0,5$ и $2 \leq |t| \leq T_1$. Опять (теорема 4, IV, следствие 3)

$$\frac{\zeta'(\sigma+it)}{\zeta(\sigma+it)} = \sum_{|t-\gamma_n| < 1} \frac{1}{\sigma - \sigma_n + i(t - \gamma_n)} + O(\log(|t| + 2)).$$

Последняя сумма имеет порядок $O(\log^2 x)$, так как если $|t| \leq T_1$, то $\sigma = -0,5$ и нулей $\zeta(s)$ таких, что $|t - \gamma_n| \leq 1$, не больше $O(\log(|t| + 2))$; если же $t = T_1$, $-0,5 \leq \sigma \leq b$, то в силу выбора T_1

$$|T_1 - \gamma_n| \gg (\log T)^{-1}.$$

Из полученной оценки, (8), (9) и (7) следует утверждение теоремы.

Замечание. Возьмем в доказанной теореме $T = \exp(\sqrt{\ln x})$. Из теорем 4 и 5 гл. IV будет следовать еще одно доказательство теоремы 2.

ЗАДАЧИ

1. Пусть ряд $f(s)$, $f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s}$, абсолютно сходится при

$\operatorname{Re} s > 1$, и пусть при некотором $b > 1$ $A(\xi) = \sum_{n < \xi} a_n$, $B(b) =$

$= \int_1^{\infty} \frac{A(\xi)}{\xi^{b+1}} d\xi$. Тогда при $x \geq 1$ и $T \geq 2$ имеет место равенство

$$\int_1^x A(\xi) d\xi = \frac{1}{2\pi i} \int_{b-iT}^{b+iT} \frac{f(s)}{s(s+1)} x^{s+1} ds + R,$$

$$\text{где } |R| \leq c \left\{ B(b) \frac{x^{b+1}}{T} + 2^b \left(\frac{x \log x}{T} + \log T \right) \max_{\frac{1}{2}x < \xi < \frac{3}{2}x} |A(\xi)| \right\}.$$

2. Доказать, что при $T \geq 2$

$$\int_T^{2T} \left| \zeta \left(\frac{1}{2} + it \right) \right|^4 dt = O(T \ln^4 T).$$

3. Доказать, что при $X \geq 2$

$$\sum_{n < X} \tau_4(n) = XP_3(\ln X) + O(\sqrt{X} \ln^5 X),$$

где $P_3(u)$ — многочлен третьей степени.

4. Доказать, что при $X \geq 2$

$$M(X) = \sum_{n < X} \mu(n) = O(Xe^{-c\sqrt{\log X}}).$$

5. Чтобы $\zeta(s)$ не имела нулей в полуплоскости $\operatorname{Re} s > \gamma$, $1/2 < \gamma < 1$, необходимо и достаточно выполнения одного из соотношений ($\varepsilon > 0$ — произвольно мало): а) $\psi(x) = x + O(x^{\gamma+\varepsilon})$;

б) $\pi(x) = \int_2^x \frac{du}{\log u} + O(x^{\gamma+\varepsilon})$; в) $M(x) = O(x^{\gamma+\varepsilon})$.

6. Пусть $0 \leq \alpha < 1$, $N \geq 2$. Тогда

$$S = \sum_{n=2}^{\infty} e^{-n/N} e^{-2\pi i \alpha n} \Lambda(n) = \frac{1}{x} - \sum_{\rho_k} x^{-\rho_k} \Gamma(\rho_k) + O(\log^3 N),$$

где ρ_k — нули $\zeta(s)$ и $x = \frac{1}{N} + 2\pi i \alpha$.

7. Полагая $\psi_0(x) = \frac{\psi(x+0) + \psi(x-0)}{2}$, доказать, что при $x \geq 2$

$$\psi_0(x) = x - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{\rho_n}}{\rho_n} - \frac{\zeta'(0)}{\zeta(0)} - \frac{1}{2} \log \left(1 - \frac{1}{x^2} \right).$$

8. а) Пусть $r(n)$ — число решений уравнения $\varphi(n) = n$. Тогда

$$\sum_{n < x} r(n) = c_0 x + O\left(\frac{x}{\ln x}\right). \quad \text{б) Доказать, что } \sum_{n < x} \frac{1}{\varphi(n)} = c_0 \ln x + O(\ln \ln x).$$

9. Пусть $x > 2$. Тогда

$$\sum_{p < x} \frac{1}{p} = c_1 + \ln \ln x + O\left(\frac{1}{\ln x}\right),$$

$$\prod_{p < x} \left(1 - \frac{1}{p} \right) = \frac{c_2}{\ln x} + O\left(\frac{1}{\ln^2 x}\right).$$

$$e) \sum_{\lambda_1, \dots, \lambda_n} J_{k,n}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = P^{2k};$$

$$e) |\lambda_1| < kP, \dots, |\lambda_n| < kP^n;$$

$$e) J = J_{k,n}(P) > (2k)^{-n} P^{2k - \frac{n^2+n}{2}};$$

e) если x_1, \dots, x_{2k} удовлетворяют (1) с $\lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0$, то $x_1 + A, \dots, x_{2k} + A$ удовлетворяют (1) с $\lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0$ при любом A .

Доказательство. При целом λ имеем

$$\int_0^1 e^{2\pi i \alpha \lambda} d\alpha = \begin{cases} 1, & \text{если } \lambda = 0; \\ 0, & \text{если } \lambda \neq 0. \end{cases}$$

Отсюда а) следует, если возвести модуль подынтегральной функции в степень $2k$ и проинтегрировать по $\alpha_1, \dots, \alpha_n$; б) следует из того, что модуль интеграла не превосходит интеграла от модуля подынтегральной функции; в) следует из того, что левая часть равенства есть число всех возможных наборов x_1, \dots, x_{2k} системы (1), т. е. P^{2k} ; г) следует из условий на x_1, \dots, x_{2k} ;

д) следует из в), б) и г); е) следует, если последовательно подставим в первое, второе, \dots , последнее уравнение системы (1) числа $x_1 + A, \dots, x_{2k} + A$. Лемма доказана.

Лемма 2. Пусть $u_v, v_v \geq 0, \alpha > 0, \beta > 0, \alpha + \beta = 1$. Тогда

$$\sum_{v=1}^P u_v v_v \leq \left(\sum_{v=1}^P u_v^{1/\alpha} \right)^\alpha \left(\sum_{v=1}^P v_v^{1/\beta} \right)^\beta$$

(неравенство Гёльдера).

Доказательство. При $x \geq 1$ имеем

$$x^\alpha \leq \alpha x + \beta,$$

так как функция $x^\alpha - \alpha x - \beta$ — убывающая. Отсюда при $a, b \in [0, 1]$ получаем

$$a^\alpha b^\beta \leq \alpha a + \beta b. \quad (2)$$

Полагая

$$a = \frac{u_v^{1/\alpha}}{\sum_{v=1}^P u_v^{1/\alpha}}, \quad b = \frac{v_v^{1/\beta}}{\sum_{v=1}^P v_v^{1/\beta}},$$

получим утверждение леммы.

Следствия.

1. Неравенство Коши:

$$\left(\sum_{v=1}^P u_v v_v \right)^2 \leq \left(\sum_{v=1}^P u_v^2 \right) \left(\sum_{v=1}^P v_v^2 \right);$$

$$2. \left(\sum_{v=1}^P u_v v_v \right)^k \leq \left(\sum_{v=1}^P u_v \right)^{k-1} \sum_{v=1}^P u_v v_v^k;$$

$$3. \left(\sum_{v=1}^P u_v \right)^k \leq P^{k-1} \sum_{v=1}^P u_v^k.$$

4. Пусть $u_i \geq 0$, $i = 1, \dots, k$; тогда

$$u_1 \dots u_k \leq \frac{u_1^k + \dots + u_k^k}{k}$$

(среднее геометрическое неотрицательных чисел не превосходит их среднего арифметического). При $k=1$ неравенство очевидно; предполагая его правильность при $k-1$ и пользуясь (2), получим

$$\begin{aligned} u_1 \dots u_k &= ((u_1 \dots u_{k-1})^{h/(h-1)})^{(h-1)/h} (u_k^h)^{1/h} = \\ &= \frac{k-1}{k} (u_1 \dots u_{k-1})^{\frac{k}{k-1}} + \frac{1}{k} u_k^h \leq \frac{u_1^k + \dots + u_k^k}{k}. \end{aligned}$$

Лемма 3. Пусть $n > 2$, $P > (2n)^{4n}$, $H = (2n)^4$, R — наименьшее целое число с условием $HR \geq P$, наконец, v_1, \dots, v_n пробегают целые числа интервалов

$$X_1 < v_1 \leq Y_1, \dots, X_n < v_n \leq Y_n,$$

где при некотором ω с условием $0 \leq \omega < P$ имеем

$$\begin{aligned} -\omega < X_1, \quad X_1 + R = Y_1, \quad Y + R \leq X_2, \dots, \\ X_n + R = Y_n, \quad Y_n \leq -\omega + P. \end{aligned}$$

Тогда число E_1 систем значений v_1, \dots, v_n таких, что суммы $V_1 = v_1 + \dots + v_n, \dots, V_n = v_1^n + \dots + v_n^n$ лежат соответственно в каких-либо интервалах с длинами

$$1, \dots, P^{n-1}, \quad (3)$$

удовлетворяет неравенству

$$E_1 < e^{r(n)-1} H^{\frac{n(n-1)}{2}}, \quad r(n) = -\frac{n^2}{2} \ln n + \frac{3}{4} n^2 + \frac{3}{2} n.$$

А если v_1^*, \dots, v_n^* пробегают те же значения, что и v_1, \dots

Получим новое равенство, где элементы первого столбца заменяются соответственно числами $1, \dots, x_1^{s-1}$ с некоторым x_1 , подчиненным условию $X_1 < x_1 < Y_1$. Проведя далее аналогичное преобразование в отношении второго, третьего и т. д. и наконец предпоследнего столбца и затем еще в отношении последнего столбца, но только лишь для первого определителя, получим

$$\Delta_s \xi_s - \Delta'_s = 0,$$

$$\Delta_s = \begin{vmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots \\ x_1^{s-1} & \dots & x_s^{s-1} \end{vmatrix}, \quad \Delta'_s = \begin{vmatrix} 1 & \dots & 1 & \theta_0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_1^{s-1} & \dots & x_{s-1}^{s-1} & \frac{\theta_{s-1}}{s} P^{s-1} \end{vmatrix},$$

$$X_1 < x_1 < Y_1, \dots, X_s < x_s < Y_s.$$

Отсюда находим

$$\Delta'_s = \sum_{r=0}^{s-1} \frac{\theta_r}{r+1} P^r U_r,$$

где U_r является коэффициентом при x_s^r в разложении

$$\Delta_s = (x_s - x_1) \dots (x_s - x_{s-1}) \Delta_{s-1}$$

по степеням x_s и, следовательно, равен произведению Δ_{s-1} на сумму произведений чисел $-x_1, \dots, -x_{s-1}$, взятых по $s-1-r$. Поэтому будем иметь

$$U_r \leq \Delta_{s-1} \binom{s-1}{r} P^{s-1-r},$$

$$\xi_s < \sum_{r=1}^{s-1} \frac{\binom{s-1}{r} P^{s-1}}{(r+1)(x_s - x_1) \dots (x_s - x_{s-1})},$$

откуда, ввиду справедливого при $t \geq 1$ неравенства $x_{j+t} - x_j \geq (2t-1)R$, получим

$$\xi_s < \sum_{r=1}^s \frac{\binom{s}{r} H^{s-1}}{1 \cdot 3 \dots (2s-3) s} < \frac{(2^{s+1}-2) H^{s-1}}{3 \dots (2s-1)} < L_s H^{s-1} - 1;$$

$$L_s = \frac{4}{(2-0,5) \dots (s-0,5)},$$

где, ввиду

$$\ln(2-0,5) + \dots + \ln(s-0,5) > \int_1^s \ln x dx = s \ln s - s + 1,$$

будем иметь

$$L_s < 4e^{s-1}s^{-s}.$$

Из доказанного следует, что v_s при $s > 1$ и при заданных v_{s+1}, \dots, v_n может иметь лишь меньше чем $4e^{s-1}s^{-s}H^{s-1}$ различных значений. А так как v_1 при заданных v_2, \dots, v_n лежит в интервале с длиной 1 и, следовательно, не может иметь более двух различных значений, то имеем

$$E_1 < 2 \prod_{s=2}^n (4e^{s-1}s^{-s}H^{s-1}) = 2 \cdot 4^{n-1} (eH)^{n(n-1)/2} \prod_{s=2}^n s^{-s},$$

откуда, ввиду

$$\sum_{s=2}^n s \ln s > \int_1^n s \ln s \, ds > \frac{n^2}{2} \ln n - \frac{n^2}{4},$$

получим

$$E_1 < e^{r(n)-1} H^{n(n-1)/2}.$$

А отсюда, ввиду

$$\left(\frac{P^{1-1/n}}{1} + 1\right) \dots \left(\frac{P^{(n-1)(1-1/n)}}{P^{n-1}} + 1\right) < eP^{(n-1)/2},$$

для числа E' систем значений v_1, \dots, v_n таких, что суммы V_1, \dots, V_n лежат соответственно в каких-либо интервалах с длинами (4), получим неравенство

$$E' < e^{r(n)} H^{n(n-1)/2} P^{(n-1)/2}.$$

Наконец, замечая, что число всех систем v_1, \dots, v_n меньше, чем $2P^n H^{-n}$, пайдем

$$E < 2e^{r(n)} H^{n(n-3)/2} P^{(3n-1)/2}.$$

Лемма полностью доказана.

Теорема 1 (о среднем И. М. Виноградова). Пусть $\tau \geq 0$ — целое, $k \geq n\tau$, $P \geq 1$. Тогда

$$J = J_k(P) = J_{k, n}(P) \leq D_\tau \cdot P^{2k - \Delta(\tau)},$$

где

$$\Delta(\tau) = \frac{n(n+1)}{2} \left(1 - \left(1 - \frac{1}{n}\right)^\tau\right),$$

$$D_\tau = (n\tau)^{6n\tau} (2n)^{4n(n+1)\tau}.$$

Доказательство. Очевидно, теорему достаточно доказать лишь для $k = n\tau$. При $\tau = 1$ и любом P теорема верна, т. к. интеграл $J_n(P)$ равен числу решений системы

где

$$J_{\mu} = \int_0^1 \dots \int_0^1 |W_{\mu}|^2 d\alpha_1 \dots d\alpha_n, \quad \mu = 1, 2.$$

Оценим J_1 . Применяя лемму 2, следствие 3, найдем

$$J_1 \leq H^{2k} \max_{y_1, \dots, y_k} \int_0^1 \dots \int_0^1 |S(y_1) \dots S(y_k)|^2 d\alpha_1 \dots d\alpha_n.$$

Будем считать, что максимум достигается на числах y_1, \dots, y_k , и числа y_1, \dots, y_k расположены так, что $y_1 < y_2 < \dots < y_n$, причем $y_{v+1} - y_v > 1$, $v = 1, 2, \dots, n-1$. Сумму $S(y_v)$, $v \geq n+1$, мы разобьем на $\leq t = [RP^{-1+t/n} + 1]$ малых сумм, каждая с длиной интервала суммирования $P^{1-1/n}$ или, быть может, меньшей (последняя). Тогда произведение

$$S(y_{n+1}) \dots S(y_k)$$

представится суммой не более чем t^{k-n} слагаемых вида

$$S'(y_{n+1}) \dots S'(y_k),$$

где $S'(y_v)$ — одна из сумм, полученных разбиением $S(y_v)$. Далее, пользуясь тем, что среднее геометрическое неотрицательных чисел не превосходит их среднего арифметического, найдем

$$|S'(y_{n+1})|^2 \dots |S'(y_k)|^2 \leq \frac{|S'(y_{n+1})|^{2(k-n)} + \dots + |S'(y_k)|^{2(k-n)}}{k-n}.$$

Следовательно,

$$J_1 \leq \leq t^{2(k-n)} H^{2k} \int_0^1 \dots \int_0^1 |S(y_1) \dots S(y_n)|^2 |S'(y)|^{2(k-n)} d\alpha_1 \dots d\alpha_n,$$

где y — одно из y_{n+1}, \dots, y_k . Но последний интеграл равен числу решений следующей системы уравнений:

$$\begin{aligned} (z_1 + Ry_1)^v + \dots + (z_n + Ry_n)^v - \\ - (z_{n+1} + Ry_1)^v - \dots - (z_{2n} + Ry_n)^v = \\ = (z_{2n+1} + a)^v + \dots - (z_{2k} + a)^v, \quad v = 1, 2, \dots, n, \end{aligned}$$

в которой y_1, \dots, y_n, a — фиксированные целые числа, $0 \leq a = A + Ry < P$, $y_{\mu+1} - y_{\mu} > 1$, $\mu = 1, 2, \dots, n-1$, известные z_1, \dots, z_{2n} меняются в пределах от 1 до R ,

а неизвестные z_{2n+1}, \dots, z_{2k} меняются в пределах от 1 до $P' \leq P^{1-1/n}$. Эта система эквивалентна такой (лемма 1, e):

$$\begin{aligned} & (z_1 + Ry_1 - a)^v + \dots + (z_n + Ry_n - a)^v - \\ & - (z_{n+1} + Ry_1 - a)^v - \dots - (z_{2n} + Ry_n - a)^v = \\ & = z_{2n+1}^v + \dots - z_{2k}^v, \quad v = 1, 2, \dots, n. \end{aligned}$$

Пусть J — число решений последней системы уравнений, $J'(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ и $J''(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ — числа решений таких систем:

$$\begin{aligned} & (z_1 + Ry_1 - a)^v + \dots + (z_n + Ry_n - a)^v - (z_{n+1} + Ry_1 - a)^v - \dots \\ & \dots - (z_{2n} + Ry_n - a)^v = \lambda_v, \quad v = 1, 2, \dots, n \end{aligned}$$

и

$$z_{2n+1}^v + \dots + z_{k+n}^v - z_{k+n+1}^v - \dots - z_{2k}^v = \lambda_v, \quad v = 1, 2, \dots, n.$$

Тогда

$$J = \sum_{\lambda_1, \dots, \lambda_n} J'(\lambda_1, \dots, \lambda_n) J''(\lambda_1, \dots, \lambda_n).$$

Применяя лемму 1, б), паходим

$$\begin{aligned} J & \leq J''(0, \dots, 0) \sum_{\lambda_1, \dots, \lambda_n} J'(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = \\ & = J_{k-n}(P^{1-1/n}) \sum_{\lambda_1, \dots, \lambda_n} J'(\lambda_1, \dots, \lambda_n). \end{aligned}$$

Но последняя сумма равняется числу решений системы неравенств

$$\begin{aligned} & |(z_1 + Ry_1 - a)^v + \dots + (z_n + Ry_n - a)^v - \\ & - (z_{n+1} + Ry_1 - a)^v - \dots - (z_{2n} + Ry_n - a)^v| < (k-n)P^{v(1-1/n)}, \\ & \quad v = 1, 2, \dots, n. \end{aligned}$$

Применяя второе утверждение леммы 3, пауааем

$$\sum_{\lambda_1, \dots, \lambda_n} J'(\lambda_1, \dots, \lambda_n) < (2k)^n 2e^{r(n)} H^{\frac{n(n-3)}{2}} P^{\frac{3n-1}{2}}.$$

Объединяя найденные оценки, паходим к неравенству

$$\begin{aligned} J_1 & \leq \\ & \leq 2(2k)^n e^{r(n)} \left(RP^{-1+\frac{1}{n}} + 1 \right)^{2(k-n)} H^{2k+\frac{n(n-3)}{2}} P^{\frac{3n-1}{2}} J_{k-n} \left(P^{1-\frac{1}{n}} \right). \end{aligned}$$

По предположению индукций

$$J_{k-n}(P^{1-1/n}) < D_m P^{(1-1/n)(2k-2n-\Delta(m))}.$$

Далее находим (пользуемся тем, что $P > D \frac{1}{m+1} \Delta(m+1)$)

$$k = n(m+1) > \Delta(m+1) = \frac{n(n+1)}{2} \left(1 - \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{m+1}\right) \leq \leq \frac{(m+1)(n+1)}{2}$$

и

$$P > (2n)^{8n} \text{ при } m \leq n;$$

$$\Delta(m+1) \leq n(n+1)/2$$

и

$$P > (2n)^{8(m+1)} \text{ при } m > n.$$

Поэтому

$$(RP^{-1+1/n} + 1)^{2(k-n)} \leq P^{2(k-n)/n} H^{-2(k-n)} (1 + 2P^{-1/n}H)^{2mn} \leq \leq 2P^{2(k-n)/n} H^{-2(k-n)};$$

$$J_1 \leq 2(2k)^n e^{r(n)} \cdot 2P^{\frac{2(k-n)}{n}} H^{-2(k-n)} H^{2k + \frac{n(n-3)}{2}} P^{\frac{3n-1}{2}} \times \times D_m P^{(1-\frac{1}{n})(2k-2n-\Delta(m))} < \frac{1}{4} D_{m+1} P^{2k-\Delta(m+1)}.$$

Теперь оценим J_2 . Из чисел $0, 1, \dots, H-1$ можно не более чем $H^{n-1}/(n-1)!$ способами выбрать возрастающий ряд из $n-1$ чисел. С каждым таким рядом связано $(2n-2)^k$ наборов y_1, \dots, y_k . Поэтому общее число неправильных наборов y_1, \dots, y_k будет не больше чем

$$\frac{H^{n-1}}{(n-1)!} (2n-2)^k = B.$$

Следовательно, J_2 не превосходит

$$B^2 \int_0^1 \dots \int_0^1 |S(y_1) \dots S(y_k)|^2 d\alpha_1 \dots d\alpha_n,$$

где y_1, \dots, y_k — такой набор чисел, при котором последний интеграл принимает максимальное значение. Опять пользуясь неравенством между средним арифметическим и геометрическим, леммой 2, и предположением индукций,

получаем, что

$$J_2 \leq B^2 \int_0^1 \dots \int_0^1 |S(y)|^{2k} d\alpha_1 \dots d\alpha_n = \\ = B^2 J_k(R) \leq B^2 D_{m+1} R^{2k-\Delta(m+1)} < \frac{1}{4} D_{m+1} P^{2k-\Delta(m+1)}.$$

Из оценок интегралов J_1 и J_2 следует доказываемое утверждение.

§ 2. Оценка дзетовой суммы

Тригонометрические суммы вида

$$\sum_{n=1}^N n^{it}, \quad \sum_{a < n \leq 2a} n^{it}$$

будем называть дзетовыми суммами.

Для оценок таких сумм потребуются две леммы.

Лемма 4. При $P \geq 1$

$$\left| \sum_{x=1}^P e^{2\pi i \alpha x} \right| \leq \min \left(P, \frac{1}{2\|\alpha\|} \right).$$

Доказательство. Можно предположить, что $0 < \alpha < 1$. Тогда

$$\left| \sum_{x=1}^P e^{2\pi i \alpha x} \right| = \frac{|e^{2\pi i \alpha P} - 1|}{|e^{2\pi i \alpha} - 1|} \leq \frac{1}{|\sin \pi \alpha|} \leq \frac{1}{2\|\alpha\|}.$$

Лемма 5. Пусть

$$\alpha = \frac{a}{q} + \frac{\theta}{q^2}, \quad (a, q) = 1, \quad q \geq 1, \quad |\theta| \leq 1.$$

Тогда при любом β , $U > 0$, $P \geq 1$ имеем

$$\sum_{x=1}^P \min \left(U, \frac{1}{\|\alpha x + \beta\|} \right) \leq 6 \left(\frac{P}{q} + 1 \right) (U + q \log q).$$

Доказательство. Достаточно доказать, что при любом β_1

$$S = \sum_{x=1}^q \min \left(U, \frac{1}{\|\alpha x + \beta_1\|} \right) \leq 6(U + q \log q).$$

Имеем

$$\alpha x + \beta_1 = \frac{ax + [q\beta_1]}{q} + \frac{\theta'(x)}{q^2},$$

$$\theta'(x) = \theta x + \{q\beta_1\}q, \quad |\theta'(x)| < 2q.$$

Так как функция $\|x\|$ — периодическая с периодом 1, то, делая замену $y = ax + [q\beta_1]$, найдем

$$S = \sum_{|y| < q/2} \min \left(U, \frac{1}{\left\| \frac{y}{q} + \frac{\theta''(y)}{q} \right\|} \right),$$

где $|\theta''(y)| < 2$. Если $2 < |y| \leq q/2$, то

$$\left\| \frac{y}{q} + \frac{\theta''(y)}{q} \right\| \geq \frac{|y| - 2}{q}$$

и

$$S \leq 5U + \sum_{2 < |y| \leq q/2} \frac{q}{|y| - 2} < 6(U + q \log q).$$

Лемма доказана.

Теорема 2. *Существуют две абсолютные постоянные $c > 0$ и $\gamma > 0$ такие, что при $2 \leq N \leq t$*

$$\left| \sum_{n=1}^N n^{it} \right| \leq cN \exp \left(-\gamma \frac{\log^3 N}{\log^2 t} \right). \quad (6)$$

Доказательство. Пусть $100 \leq M \leq N$; оценим

$$S = \sum_{n=M}^{2M} n^{it}.$$

Возьмем $a = [M^{5/14}]$, $1 \leq x, y \leq a$. Имеем

$$S = \sum_{n=M}^{2M} e^{it \log(n+xy)} + 2\theta a^2, \quad |\theta| \leq 1.$$

Отсюда

$$|S| \leq a^{-2} \sum_{n=M}^{2M} |W(n)| + 2a^2,$$

где $W(n) = W = \sum_{x=1}^a \sum_{y=1}^a e^{it \log \left(1 + \frac{xy}{n} \right)}$. Оценим $|W|$. Так как

$$|e^{i\varphi} - 1| = 2 \left| \sin \frac{\varphi}{2} \right| \leq |\varphi|, \quad \text{то при } r \geq 1$$

$$e^{it \log(1+xy/n)} = e^{itF_r(xy)} + t\theta_1 \left(\frac{a^2}{n} \right)^{r+1},$$

где

$$F_r(xy) = \sum_{m=1}^r \frac{(-1)^{m-1}}{m} \left(\frac{xy}{n}\right)^m, \quad |\theta_1| \leq 1.$$

Определим целое число r из условий

$$r-1 < \frac{11 \log t}{\log M} \leq r.$$

Тогда

$$W = W_1 + 4\theta_2 a^2 M^{-1/13},$$

где

$$W_1 = \sum_{x=1}^a \sum_{y=1}^a e^{2\pi i(\alpha_1 xy + \dots + \alpha_r x^r y^r)},$$

$$\alpha_m = \frac{(-1)^{m-1}}{2\pi m} \cdot \frac{t}{n^m}, \quad m = 1, \dots, r; \quad |\theta_2| \leq 1.$$

При целом $k \geq 1$ (леммы 2 и 1)

$$|W_1|^{2k} \leq a^{2k-1} \sum_{x=1}^a \left| \sum_{y=1}^a e^{2\pi i(\alpha_1 xy + \dots + \alpha_r x^r y^r)} \right|^{2k} \leq$$

$$\leq a^{2k-1} \sum_{\lambda_1, \dots, \lambda_r} J_{k,r}(\lambda_1, \dots, \lambda_r) \left| \sum_{x=1}^a e^{2\pi i(\alpha_1 \lambda_1 x + \dots + \alpha_r \lambda_r x^r)} \right|.$$

Далее (леммы 1, 2, 4),

$$|W_1|^{4k^2} \leq a^{4k^2-2k} \left(\sum_{\lambda_1, \dots, \lambda_r} J_{k,r}(\lambda_1, \dots, \lambda_r) \right)^{2k-1} \times$$

$$\times \sum_{\lambda_1, \dots, \lambda_r} J_{k,r}(\lambda_1, \dots, \lambda_r) \left| \sum_{x=1}^a e^{2\pi i(\alpha_1 \lambda_1 x + \dots + \alpha_r \lambda_r x^r)} \right|^{2k} \leq$$

$$\leq a^{8k^2-4k} J_{k,r}(0, \dots, 0) \times$$

$$\times \left| \sum_{\substack{\lambda_1, \dots, \lambda_r \\ \mu_1, \dots, \mu_r}} J_{k,r}(\mu_1, \dots, \mu_r) e^{2\pi i(\alpha_1 \lambda_1 \mu_1 + \dots + \alpha_r \lambda_r \mu_r)} \right| \leq$$

$$\leq a^{8k^2-4k} J_{k,r}(0, \dots, 0) \sum_{\mu_1, \dots, \mu_r} J_{k,r}(\mu_1, \dots, \mu_r) \times$$

$$\times \min\left(2A_1, \frac{1}{\|\alpha_1 \mu_1\|}\right) \dots \min\left(2A_r, \frac{1}{\|\alpha_r \mu_r\|}\right) \leq$$

$$\leq a^{8k^2-4k} J_{k,r}^2(0, \dots, 0) \prod_{m=1}^r \sum_{|\mu_m| < A_m} \min\left(2A_m, \frac{1}{\|\alpha_m \mu_m\|}\right),$$

где

$$A_m = 2ka^m, \quad m = 1, \dots, r.$$

Для целых m из отрезка

$$4 \frac{\log t}{\log M} \leq m \leq 8 \frac{\log t}{\log M} \quad (7)$$

сумму по μ_m оценим, пользуясь леммой 5; для остальных m сумму по μ_m оценим тривиально, именно, величиной $(2A_m)^2$. Имеем (m из (7))

$$\begin{aligned} \sigma_m &= \sum_{\mu_m} \min \left(2A_m, \frac{1}{\|\alpha_m\|^{1/m}} \right) \leq \\ &\leq 6 \left(\frac{2A_m}{q_m} + 1 \right) (2A_m + q_m \ln q_m) \leq \\ &\leq 6 (2A_m)^2 \left(\frac{1}{q_m} + \frac{1}{A_m} + \frac{q_m}{4A_m^2} \right) \ln q_m, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} \alpha_m &= \frac{(-1)^{m-1} t}{2\pi m n^m} = \frac{a_m}{q_m} + \frac{\theta_m}{q_m^2}, \\ a_m &= (-1)^{m-1}, \quad q_m = \left[\frac{2\pi m n^m}{t} \right], \quad |\theta_m| \leq 1. \end{aligned}$$

Из условий на m находим

$$\sigma_m \leq 400 \cdot (32)^r (2A_m)^2 t^{-2/11};$$

$$|W_1|^{4k^2} \leq$$

$$\leq a^{8k^2-4k} J_{k,r}^2(0, \dots, 0) \cdot (400)^r (32)^{r^2} (4k)^{2r} a^{r^2+r} t^{-\frac{8}{11} \log M}.$$

Так как $a \leq M^{5/11}$, то, выбирая наименьшее целое τ из условия $e^\tau \geq 380^r$ и применяя к оценке $J_{k,r}(0, \dots, 0)$ теорему 1 при $k = r\tau$, получим

$$\begin{aligned} |W_1|^{4k^2} &\leq a^{8k^2} (400)^r (32)^{r^2} (4k)^{2r} (2r\tau)^{10r^2} \tau^{-\frac{4}{11} \log t}; \\ |W_1| &\leq c_1 a^2 \exp \left(-\gamma_1 \frac{\log^3 M}{\log^2 t} \right), \end{aligned}$$

где $c_1 > 0$ и $\gamma_1 > 0$ — абсолютные постоянные.

Отсюда следует пущая оценка $|S|$, а из нее — оценка теоремы (6). Теорема доказана.

Следствие. При $|t| \geq 2$

$$\zeta(1+it) = O(\log^{2/3} |t|).$$

Доказательство получается из леммы 4, IV и леммы 4, I.

§ 3. Оценка дзета-функции вблизи единичной прямой

Оценку типа оценки следствия теоремы 2 можно получить и в окрестности прямой $\operatorname{Re} s = 1$.

Теорема 3. *Существует абсолютная постоянная $\gamma_1 > 0$ такая, что при $\sigma \geq 1 - \gamma_1 \log^{-2/3} |t|$, $|t| \geq 2$, выполняется оценка*

$$\zeta(\sigma + it) = O(\log^{2/3} |t|).$$

Доказательство. Можно предполагать $\sigma \leq 2$. Возьмем $\gamma_1 = \gamma/2$, где $\gamma > 0$ — абсолютная постоянная теоремы 2, $N = [\exp(\ln^{2/3} |t|)]$, $x = |t|$. По лемме 4, IV

$$\zeta(s) = \sum_{n \leq N} \frac{1}{n^s} + \sum_{N < n \leq x} \frac{1}{n^s} + O(1).$$

Модуль первой суммы не превосходит

$$\begin{aligned} \sum_{n \leq N} \frac{1}{n^\sigma} &\leq 1 + \int_1^N \frac{du}{u^\sigma} = 1 + \int_1^N \frac{u^{1-\sigma}}{u} du = \\ &= O(\ln N) = O(\ln^{2/3} |t|). \end{aligned}$$

Для оценки второй суммы применим лемму 4, I, полагая

$$c_n = n^{-it}, \quad \mathbf{C}(u) = \sum_{N < n \leq u} n^{-it}, \quad f(u) = u^{-\sigma},$$

и теорему 2:

$$\begin{aligned} \left| \sum_{N < n \leq x} \frac{1}{n^s} \right| &\leq \sigma \int_N^x |\mathbf{C}(u)| u^{-1-\sigma} du + |\mathbf{C}(x)| x^{-\sigma} = \\ &= O\left(\int_N^x u^{-\sigma} \exp\left(-\frac{\gamma \log^3 u}{\log^2 |t|}\right) du \right) + O(|t|^{1-\sigma-\nu}) = \\ &= O\left(\int_{\log N}^{\log x} \exp\left(\nu(1-\sigma) - \frac{\gamma v^3}{\log^2 |t|}\right) dv \right) + O(1) = \\ &= O\left(\int_{\log N}^{\log x} \exp\left(-\frac{\gamma}{2} \frac{v^3}{\log^2 |t|}\right) dv \right) + O(1) = O(\log^{2/3} |t|). \end{aligned}$$

Теорема доказана.

§ 4. Теоретико-функциональная лемма

Для уточнения границы нулей дзета-функции требуется следующее вспомогательное утверждение.

Лемма 6. Пусть $F(s)$ — аналитическая в круге $|s - s_0| \leq r$ функция, $F(s_0) \neq 0$, и в этом круге

$$\left| \frac{F(s)}{F(s_0)} \right| \leq M.$$

Если $F(s) \neq 0$ в области $|s - s_0| \leq r/2$, $\operatorname{Re}(s - s_0) \geq 0$, то

$$a) \operatorname{Re} \frac{F'(s_0)}{F(s_0)} \geq -\frac{4}{r} \log M;$$

$$б) \operatorname{Re} \frac{F'(s_0)}{F(s_0)} \geq -\frac{4}{r} \log M + \operatorname{Re} \frac{1}{s_0 - \rho},$$

где ρ — любой нуль $F(s)$ в области $|s - s_0| \leq r/2$, $\operatorname{Re}(s - s_0) < 0$.

Доказательство. Рассмотрим функцию

$$g(s) = F(s) \prod_{\rho} (s - \rho)^{-1}, \quad s \neq \rho, \quad g(\rho) = \lim_{s \rightarrow \rho} g(s),$$

где ρ — все нули $F(s)$ в круге $|s - s_0| \leq r/2$ с кратностью; $g(s)$ — аналитическая в круге $|s - s_0| \leq r$ функция. На окружности $|s - s_0| = r$ имеем

$$\left| \frac{g(s)}{g(s_0)} \right| = \left| \frac{F(s)}{F(s_0)} \prod_{\rho} \frac{s_0 - \rho}{s - \rho} \right| \leq M.$$

Следовательно, такое же неравенство имеет место в круге $|s - s_0| \leq r$. Рассмотрим меньший круг $|s - s_0| \leq r/2$; в нем $g(s) \neq 0$. Поэтому, беря главную ветвь логарифма, видим, что $f(s) = \ln \frac{g(s)}{g(s_0)}$ — аналитическая функция в этом же круге и

$$\operatorname{Re} f(s) = \log \left| \frac{g(s)}{g(s_0)} \right| \leq \log M$$

($M \geq 1$ по принципу максимума, так как при $s = s_0$ $\frac{g(s)}{g(s_0)} = 1$ и $\operatorname{Re} f(s_0) = 0$). Поэтому, применяя лемму 4, а),

II, получим

$$|f'(s_0)| = \left| \frac{g'(s_0)}{g(s_0)} \right| \leq \frac{4}{r} \log M;$$

$$\left| \frac{g'(s_0)}{g(s_0)} \right| = \left| \frac{F'(s_0)}{F(s_0)} - \sum_{\rho} \frac{1}{s_0 - \rho} \right| \leq \frac{4}{r} \log M,$$

т. е.

$$\operatorname{Re} \left\{ \frac{F'(s_0)}{F(s_0)} - \sum_{\rho} \frac{1}{s_0 - \rho} \right\} \geq -\frac{4}{r} \log M.$$

Так как $\operatorname{Re}(s_0 - \rho) > 0$, то из

$$\operatorname{Re} \frac{F'(s_0)}{F(s_0)} \geq -\frac{4}{r} \log M + \operatorname{Re} \sum_{\rho} \frac{1}{s_0 - \rho}$$

следуют утверждения леммы.

§ 5. Новая граница нулей дзета-функции

Уточнением результатов гл. IV, § 3, является

Теорема 4. *Существует абсолютная постоянная $c > 0$ такая, что $\zeta(s) \neq 0$ в области*

$$\sigma \geq 1 - \frac{c}{\ln^{\frac{2}{3}}(|t| + 10) \ln \ln(|t| + 10)}.$$

Доказательство. Пусть $t \geq t_0 > 0$, t — ордината нуля $\rho = \sigma + it$; положим

$$\sigma = 1 - \frac{d}{\ln^{\frac{2}{3}}(2t + 2) \ln \ln(2t + 2)}, \quad d \leq 1.$$

Надо доказать, что $d \geq c_1 > 0$. Будем считать, что t_0 настолько велико, что

$$\frac{1}{\ln \ln(2t + 2)} < \frac{\gamma_1}{10},$$

где $\gamma_1 > 0$ — постоянная теоремы 3. Тогда

$$\frac{d}{\ln \ln(2t + 2)} < \frac{\gamma_1}{10}.$$

Рассмотрим точку

$$s_0 = 1 + \frac{4d}{\ln^{2/3}(2t + 2) \ln \ln(2t + 2)} + it = \sigma_0 + it$$

(см. рис. 8). Из точки s_0 опишем круг радиуса r ,

$$r = \frac{\gamma_1}{\ln^{2/3}(2t + 2)};$$

точка ρ будет лежать внутри круга радиуса $r/2$ с центром s_0 , ввиду того, что

$$\frac{\gamma_1}{2 \ln^{2/3}(2t+2)} > \frac{5d}{\ln^{2/3}(2t+2) \ln \ln(2t+2)}.$$

Полагая в лемме 6 $F(s) = \zeta(s)$, оценим

$$\left| \frac{\zeta(s)}{\zeta(s_0)} \right|$$

в круге $|s - s_0| \leq r$. По теореме 3 в круге $|s - s_0| \leq r$

$$\zeta(s) = O(\log^{2/3} t).$$

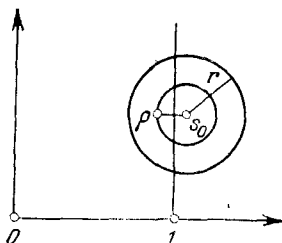


Рис. 8.

Кроме того,

$$\frac{1}{|\zeta(s_0)|} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\sigma_0}} \leq 1 + \int_1^{\infty} \frac{du}{u^{\sigma_0}} = \frac{\ln^{2/3}(2t+2) \ln \ln(2t+2)}{4d} + 1.$$

Поэтому

$$\left| \frac{\zeta(s)}{\zeta(s_0)} \right| \leq M = c_2 \frac{\log^2 t}{d}.$$

Точно такая же оценка имеет место в круге $|s - s_1| \leq r$, $s_1 = \sigma_0 + i2t$. Так как $\zeta(s) \neq 0$ в областях $|s - s_0| \leq r/2$, $\operatorname{Re}(s - s_0) \geq 0$ и $|s - s_1| \leq r/2$, $\operatorname{Re}(s - s_1) \geq 0$, то, применяя лемму 6, найдем

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \frac{\zeta'(s_0)}{\zeta(s_0)} &\geq -\frac{4}{r} \log M + \operatorname{Re} \frac{1}{s_0 - \rho} = \\ &= -\frac{4}{\gamma_1} \ln^{2/3}(2t+2) \ln M + \frac{\ln^{2/3}(2t+2) \ln \ln(2t+2)}{5d}, \end{aligned}$$

$$\operatorname{Re} \frac{\zeta'(s_1)}{\zeta(s_1)} \geq -\frac{4}{r} \log M = -\frac{4}{\gamma_1} \ln^{2/3}(2t+2) \ln M.$$

Кроме того, при $\sigma_0 > 1$

$$-\frac{\zeta'(\sigma_0)}{\zeta(\sigma_0)} < \frac{1}{\sigma_0 - 1} + c_3.$$

Далее (как в гл. IV, § 3),

$$3 \left\{ -\frac{\zeta'(\sigma_0)}{\zeta(\sigma_0)} \right\} + 4 \left\{ -\operatorname{Re} \frac{\zeta'(\sigma_0 + it)}{\zeta(\sigma_0 + it)} \right\} + \left\{ -\operatorname{Re} \frac{\zeta'(\sigma_0 + i2t)}{\zeta(\sigma_0 + i2t)} \right\} \geq 0.$$

Подставляя полученные оценки в последнее неравенство и производя сокращения, найдем

$$-\frac{\ln \ln (2t+2)}{20d} - \frac{20}{\gamma_1} \ln d + \frac{40}{\gamma_1} \ln \ln (2t+2) + c_4 \geq 0,$$

или

$$-\frac{1}{d} \left(\frac{\ln \ln (2t+2)}{20} + \frac{20d}{\gamma_1} \ln d \right) + \left(\frac{40}{\gamma_1} \ln \ln (2t+2) + c_4 \right) \geq 0.$$

Так как $d \ln d \rightarrow 0$ и $\frac{1}{d} \rightarrow \infty$ при $d \rightarrow 0$, то из последнего неравенства видим, что $d \geq c_1 > 0$. Утверждение теоремы следует из уже доказанного и теоремы 5, IV.

§ 6. Новый остаточный член в асимптотической формуле распределения простых чисел

Простым следствием теоремы 4 и результатов § 3, V является

Теорема 5. *Справедливы следующие асимптотические формулы ($x \geq x_0 > 0$):*

$$\psi(x) = x + O\left(x \exp\left(-c_1 \left(\frac{\ln x}{\ln \ln x}\right)^{0,6}\right)\right),$$

$$\pi(x) = \int_2^x \frac{du}{\ln u} + O\left(x \exp\left(-c_2 \left(\frac{\ln x}{\ln \ln x}\right)^{0,6}\right)\right).$$

Доказательство. Возьмем T , $\ln T = \ln^{3/5} x \times (\ln \ln x)^{-3/5}$, применим теорему 3, V и теорему 4; будем иметь

$$\begin{aligned} & |\psi(x) - x| \leq \\ & \leq \left| \sum_{|\operatorname{Im} \rho| < T} \frac{x^\rho}{\rho} \right| + O\left(\frac{x \ln^2 x}{T}\right) \leq x^\sigma \sum_{|\operatorname{Im} \rho| < T} \frac{1}{|\rho|} + O\left(\frac{x \ln^2 x}{T}\right), \end{aligned}$$

где

$$\sigma = 1 - \frac{c}{\ln^{2/3} T \ln \ln T}.$$

Отсюда получаем первое утверждение теоремы. Второе утверждение следует из первого (см. § 2, V).

ЗАДАЧИ

1. Пусть $c > 0$ — произвольное фиксированное число, γ — постоянная, $1 < \gamma < 3/2$, $m \neq 0$, $P \geq 1$,

$$f(x) = e^{c(\log x)^\gamma}, \quad S = \sum_{x=1}^P e^{2\pi i m f(x)}.$$

Если $0 < |m| < e^{(\log P)^{3-2\gamma-\varepsilon}}$, где $0 < \varepsilon < 3-2\gamma$, то

$$|S| \leq c_1 P e^{-c_2 (\log P)^{3-2\gamma}}.$$

2. Пусть $0 < \sigma \leq 1$ и $D(\sigma)$ — количество чисел ряда $x = 1, 2, \dots, P$ с условием $\{f(x)\} < \sigma$,

$$D(\sigma) = \sigma P + \lambda(\sigma).$$

Если $f(x)$ удовлетворяет условиям задачи 1, то

$$\lambda(\sigma) = O\left(P e^{-c_2 (\log P)^{3-2\gamma}}\right).$$

3. Пусть $0,5 \leq \operatorname{Re} s \leq 1$, $|t| \geq 2$; тогда

$$\zeta(s) = O\left(|t|^{c(1-\sigma)^{3/2}} \log |t|\right).$$

4. При $x \geq 1$ имеем

$$\sum_{n \leq X} \tau_k(n) = X P_{k-1}(\log X) + O X^{1-\rho} (c_1 \log X)^k,$$

где $\rho = c/k^{2/3}$, $|0| \leq 1$, $P_{k-1}(u)$ — многочлен степени $k-1$.

5. Пусть вещественные числа $\alpha_1, \dots, \alpha_N$ линейно независимы над полем рациональных чисел, $0 < \varepsilon < 1/4$. Тогда для любых вещественных чисел β_1, \dots, β_N найдется t такое, что $\| \alpha_i t - \beta_i \| < \varepsilon, \dots, \| \alpha_N t - \beta_N \| < \varepsilon$.

6. Пусть

$$\Phi(X; s, \vec{\theta}) = \sum_{n \leq X} n^{-s} e^{2\pi i \sum_p \alpha_p(n) \theta_p},$$

где $n = \prod_p p^{\alpha_p(n)}$ — каноническое разложение n на простые сомножители, θ_p — независимые вещественные переменные, индексированные простыми числами. Если

$$\Phi(X; s_0, \vec{\theta}) = 0,$$

то для всякого $\delta > 0$ найдется s_1 такое, что $\operatorname{Re} s_1 > \operatorname{Re} s_0 - \delta$ и

$$\Phi(X; s_1) = \sum_{n \leq X} \frac{1}{n^{s_1}} = 0.$$

7. При $\operatorname{Re} s > 1$ справедливо равенство

$$\frac{\zeta(2s)}{\zeta(s)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda(n)}{n^s} = \prod_p \left(1 - \frac{\lambda(p)}{p^s}\right)^{-1},$$

где

$$\lambda(n) = (-1)^{\sum \alpha_p(n)}, \quad n = \prod_p \alpha_p(n).$$

8. Доказать, что

$$\text{а) } \frac{\zeta(2s)}{\zeta(s)} \Big|_{s=1} = 0; \quad \text{б) } \frac{d}{ds} \frac{\zeta(2s)}{\zeta(s)} \Big|_{s=1} > 0.$$

9. Пусть

$$F(\theta_{p_1}, \theta_{p_2}, \dots, \theta_{p_k}) = \sum_{n=1}^k \ln \left(1 - \frac{e^{2\pi i \theta_{p_n}}}{p_n} \right)^{-1},$$

где $\theta_{p_1}, \theta_{p_2}, \dots, \theta_{p_k}$ — независимые вещественные переменные, индексированные простыми числами в порядке следования. Доказать, что для всякого натурального m найдется $k_0 = k_0(m)$ такое, что при любом $k \geq k_0$ уравнение

$$\operatorname{Im} F(\theta_{p_1}, \dots, \theta_{p_k}) = \pi m$$

имеет вещественное решение $(\theta_{p_1}, \dots, \theta_{p_k})$.

10. Доказать, что существует вполне мультипликативная функция $\lambda'(n)$, т. е. $\lambda'(nm) = \lambda'(n)\lambda'(m)$ при любых натуральных n и m , с условиями

- а) $|\lambda'(n)| = 1$;
- б) равенство $\lambda'(p) = \lambda(p) = -1$ выполняется для всех простых p кроме конечного их числа;
- в) функция $F(s)$, определенная при $\operatorname{Re} s > 1$ равенством

$$F(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda'(n)}{n^s},$$

имеет мероморфное продолжение на всю s -плоскость;

- г) $F'(s)|_{s=1} < 0$;
- д) справедливы соотношения
- а) $\sum_{n < X} \frac{\lambda'(n)}{n} = O(e^{-c\sqrt{\ln X}})$,
- б) при $\sigma \geq 1$

$$\frac{d}{d\sigma} \left(\sum_{n < X} \frac{\lambda'(n)}{n^\sigma} \right) = F'(\sigma) + O(e^{-c\sqrt{\ln X}}).$$

11. При любом $\sigma \in \left[1, 1 + \frac{1}{\ln X} \right]$, $X \geq X_0 > 0$, множество значений функции F_1 ,

$$F_1 = F_1(\vec{\theta}_p) = \sum_{0,5X < p \leq X} \left(\frac{1}{p^\sigma} + \frac{e^{2\pi i \theta_p}}{p^\sigma} \right),$$

от вещественных переменных θ_p , $0,5X < p \leq X$, является кругом $K = K(R)$ радиуса $R > c/\ln X$ с центром в точке $(R, 0)$.

12. Существует $c_1 > 0$ такая, что при $X \geq X_0 > 0$ и $\sigma = 1 + c_1/\ln X$ имеет место соотношение

$$-\sum_{n < X} \frac{\lambda'(n)}{n^\sigma} \in K = K(R).$$

13. При $\sigma = 1 + c_1/\ln X$, $X \geq X_0 > 0$, существует решение уравнения

$$\Phi(X; \sigma, \vec{\theta}) = \sum_{n < X} n^{-\sigma} \cdot e^{2\pi i \sum_p \alpha_p(n) \theta_p} = 0$$

с вещественными $\theta_{p_1}, \theta_{p_2}, \dots$ ($\Phi(X; \sigma, \vec{\theta})$ из задачи 6).

14. При $X \geq X_0 > 0$ уравнение

$$\Phi(X; s) = \sum_{n < X} \frac{1}{n^s} = 0$$

имеет решение s_1 такое, что

$$\operatorname{Re} s_1 > 1 + \frac{c_1}{2 \ln X}.$$

Г Л А В А VII

ПЛОТНОСТЬ НУЛЕЙ ДЗЕТА-ФУНКЦИИ И ПРОБЛЕМА РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ПРОСТЫХ ЧИСЕЛ В ИНТЕРВАЛАХ МАЛОЙ ДЛИНЫ

Из асимптотической формулы для $\pi(x)$ (теорема 5, VI) следует, что на интервале $(x, x + y)$, $x > x_0 > 0$,

$$y = x \exp\left(-c \left(\frac{\ln x}{\ln \ln x}\right)^{0,6}\right)$$

есть простое число. Применение теорем о плотности распределения нулей дзета-функции в критической полосе позволяет получить значительно более сильный результат (см. следствие теоремы 2).

§ 1. Простейшая плотностная теорема

Определение. При $0 \leq \sigma \leq 1$, $T \geq 2$ функции $N(T)$ и $N(\sigma, T)$ задаются равенствами

$$N(T) = \sum_{|\operatorname{Im} \rho| < T} 1, \quad N(\sigma, T) = \sum_{\substack{|\operatorname{Im} \rho| < T \\ \operatorname{Re} \rho \geq \sigma}} 1;$$

другими словами, $N(T)$ — число нетривиальных нулей дзета-функции в прямоугольнике $|\operatorname{Im} \rho| \leq T$, $N(\sigma, T)$ — число нулей дзета-функции в прямоугольнике $|\operatorname{Im} \rho| \leq T$, $\operatorname{Re} \rho \geq \sigma$.

Проблема состоит в том, чтобы для $N(\sigma, T)$ получить возможно более точную оценку. Предварительно докажем лемму.

Лемма. Пусть $S(t)$ — комплекснозначная непрерывно дифференцируемая на отрезке $[t_0, t_k]$ функция,

$$t_0 < t_1 < \dots < t_{k-1} < t_k.$$

Тогда, полагая $\delta = \min_{0 < r < k} (t_{r+1} - t_r)$, будем иметь

$$\begin{aligned} \sum_{r=1}^k |S(t_r)|^2 &\leq \\ &\leq \frac{1}{\delta} \int_{t_0}^{t_k} |S(t)|^2 dt + 2 \left(\int_{t_0}^{t_k} |S(t)|^2 dt \right)^{1/2} \left(\int_{t_0}^{t_k} |S'(t)|^2 dt \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

Доказательство. Определим функцию $\omega_r(t)$ следующим образом (характеристическая функция интервала (t_r, t_{r+1})):

$$\omega_r(t) = \begin{cases} 1, & \text{если } t_r \leq t \leq t_{r+1}; \\ 0 & \text{в остальных точках.} \end{cases}$$

Положим

$$\varphi_r(t) = \frac{1}{t_{r+1} - t_r} \int_{t_0}^t \omega_r(u) du.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \int_{t_r}^{t_{r+1}} \varphi_r(t) (|S(t)|^2)' dt &= \varphi_r(t) |S(t)|^2 \Big|_{t_r}^{t_{r+1}} - \\ &- \frac{1}{t_{r+1} - t_r} \int_{t_r}^{t_{r+1}} |S(t)|^2 \omega_r(t) dt = |S(t_{r+1})|^2 - \\ &- \frac{1}{t_{r+1} - t_r} \int_{t_r}^{t_{r+1}} |S(t)|^2 dt, \\ |S(t_{r+1})|^2 &\leq \frac{1}{\delta} \int_{t_r}^{t_{r+1}} |S(t)|^2 dt + 2 \int_{t_r}^{t_{r+1}} |S(t)| |S'(t)| dt. \end{aligned}$$

Суммируя обе части неравенства по r и применяя к интегралу от произведения неравенство Коши (квадрат интеграла от произведения неотрицательных функций не превосходит произведения интегралов от квадратов функций), получим утверждение леммы.

Теорема 1. При $1/2 \leq \sigma \leq 1$ имеет место оценка

$$N(\sigma, T) \leq c T^{4\sigma(1-\sigma)} (\log T)^{12}.$$

Доказательство. Пусть $T \geq 2$; возьмем в теореме 6, IV $x = T$. Тогда при $\frac{1}{2} \leq \sigma \leq 1, |t| \leq T$

$$\zeta(s) = \sum_{n \leq X} \frac{1}{n^s} + \frac{T^{s-1}}{s-1} + O(T^{-\sigma} \ln T).$$

Умножая последнее равенство на

$$M_X(s) = \sum_{n \leq X} \frac{\mu(n)}{n^s}, \quad X = T^{2\sigma-1},$$

найдем

$$\zeta(s)M_X(s) = \Phi(s) + R(s), \quad (1)$$

где

$$\Phi(s) = M_X(s) \sum_{n \leq T} \frac{1}{n^s}, \quad R(s) = O\left(\frac{T^{1-\sigma} \ln T}{|t|+1} |M_X(s)|\right).$$

Далее,

$$\Phi(s) = \sum_{m \leq X} \frac{\mu(m)}{m^s} \sum_{n \leq T} \frac{1}{n^s} = \sum_{n \leq XT} \frac{a_n}{n^s},$$

где

$$a_n = \sum_{\substack{m \wedge n \\ m \leq X \leq T \\ n/m \leq T}} \mu(m) = \begin{cases} 1, & \text{если } n = 1; \\ 0, & \text{если } 1 < n \leq X. \end{cases} \quad (2)$$

Кроме того, всегда $|a_n| \leq \tau(n)$. Пусть теперь $s = \rho$, $\zeta(\rho) = 0$; тогда из (1) и (2)

$$1 \leq \left| \sum_{X < n \leq XT} \frac{a_n}{n^\rho} \right| + O\left(\frac{T^{1-\sigma} \ln T}{|t|+1} |M_X(\rho)|\right);$$

$$1 \ll \left| \sum_{X < n \leq XT} \frac{a_n}{n^\rho} \right|^2 + \frac{T^{2-2\sigma} \ln^2 T}{|t|^2+1} |M_X(\rho)|^2.$$

Суммируя обе части последнего неравенства по всем нулям дзета-функции из прямоугольника $\sigma \leq \operatorname{Re} \rho \leq 1$, $|\operatorname{Im} \rho| \leq T$, пайдем

$$N(\sigma, T) \ll \sum_{\rho} \left\{ \left| \sum_{X < n \leq XT} \frac{a_n}{n^\rho} \right|^2 + \frac{T^{2-2\sigma} \ln^2 T}{|t|^2+1} |M_X(\rho)|^2 \right\}.$$

Преобразуем сумму по ρ так, чтобы можно было применить лемму. Возьмем $A = [\ln T]$ и разобьем отрезок $[-T, +T]$ на отрезки длины 1 вида

$$Am + n, \quad n = 1, \dots, A; \quad |m| < TA^{-1} + 1.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \sum_{\rho} &= \sum_{|m| < TA^{-1} + 1} \sum_{n=1}^A \sum_{Am+n-1 < \operatorname{Im} \rho \leq Am+n} \leq \\ &\leq A \max_{1 \leq n \leq A} \sum_{|m| < TA^{-1} + 1} \sum_{Am+n-1 < \operatorname{Im} \rho \leq Am+n}. \end{aligned}$$

Так как в каждом прямоугольнике $Am + n - 1 < \operatorname{Im} \rho \leq Am + n$ не более $c_2 \ln T$ нулей, то, выбирая по одному нулю из каждого такого прямоугольника, получим не бо-

лее $c_3 \ln T$ сумм; обозначая через \sum'_ρ наибольшую из них, найдем

$$\sum_\rho \ll \ln^2 T \sum'_\rho.$$

Разбивая \sum'_ρ на не более чем $c_4 \ln T$ сумм, объединяя в одну сумму слагаемые, у которых $T_1 \leq |\operatorname{Im} \rho| \leq 2T_1$, $2T_1 \leq T$, найдем

$$N(\sigma, T) \ll \ln^3 T \sum''_\rho \left\{ \left| \sum_{X < n < TX} \frac{a_n}{n^\rho} \right|^2 + \frac{T^{2-2\sigma} \ln^2 T}{T_1^2 + 1} |M_X(\rho)|^2 \right\}, \quad (3)$$

причем суммирование в Σ'' ведется по нулям ρ дзета-функции, $T_1 \leq |\operatorname{Im} \rho| \leq 2T_1 \leq T$, $\sigma \leq \operatorname{Re} \rho \leq 1$, $|\operatorname{Im} \rho - \operatorname{Im} \rho'| \geq \ln T - 1$. Оценим теперь сумму

$$\sum''_\rho \left| \sum_{Y < n < 2Y} \frac{b_n}{n^\rho} \right|^2,$$

где b_n — произвольные числа с условием $|b_n| \leq \tau(n)$, $Y \geq 1$ — любое целое.

Имеем ($\rho = \sigma_r + it_r$)

$$\begin{aligned} \sum_{Y < n < 2Y} \frac{b_n}{n^{\sigma_r}} n^{-it_r} &= \sum_{Y < n < 2Y} \left(\frac{1}{n^{\sigma_r}} - \frac{1}{(n+1)^{\sigma_r}} \right) \times \\ &\times \sum_{Y < m < n} b_m m^{-it_r} + \frac{1}{(2Y)^{\sigma_r}} \sum_{Y < m < 2Y} b_m m^{-it_r}. \end{aligned}$$

Так как $\sigma \leq \sigma_r \leq 1$, то

$$\begin{aligned} \sum''_\rho \left| \sum_{Y < n < 2Y} \frac{b_n}{n^\rho} \right|^2 &\ll Y^{-2\sigma-1} \sum_{Y < n < 2Y} \sum_r \left| \sum_{Y < m < n} b_m m^{it_r} \right|^2 + \\ &+ Y^{-2\sigma} \sum_r \left| \sum_{Y < m < 2Y} b_m m^{it_r} \right|^2. \end{aligned}$$

К сумме S_n по r , $Y < n \leq 2Y$, применим лемму; получим

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_r \left| \sum_{Y < m < n} b_m m^{it_r} \right|^2 \ll \frac{1}{\ln T} \int_{T_1}^{2T_1} \left| \sum_{Y < m < n} b_m m^{it} \right|^2 dt + \\ &+ \left(\int_{T_1}^{2T_1} \left| \sum_{Y < m < n} b_m m^{it} \right|^2 dt \right)^{1/2} \left(\int_{T_1}^{2T_1} \left| \sum_{Y < m < n} b_m m^{it} \log m \right|^2 dt \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

Осталось оценить интеграл J ,

$$J = \int_{T_1}^{2T_1} \left| \sum_{Y < m < n} c_m m^{it} \right|^2 dt,$$

где $|c_m| \leq \tau(m) \log m$.

Возводя модуль суммы по m в квадрат, интегрируя, найдем

$$\begin{aligned} J &\ll T_1 \sum_{Y < m < 2Y} |c_m|^2 + \sum_{Y < m < k < 2Y} |c_m| |c_k| \frac{1}{\log \frac{k}{m}}; \\ \sum_{Y < m < 2Y} |c_m|^2 &\ll \log^2 Y \sum_{Y < m < 2Y} \tau^2(m) \ll Y \log^5 Y; \\ \sum_{Y < m < k < 2Y} |c_m| |c_k| \frac{1}{\log \frac{k}{m}} &\leq \sum_{Y < m < 2Y} \sum_{r=1}^Y |c_m| |c_{m+r}| \frac{m}{r} \ll \\ &\ll Y \sum_{r=1}^Y \frac{1}{r} \sqrt{\sum_{Y < m < 2Y} |c_m|^2 \sum_{Y < m < 2Y} |c_{m+r}|^2} \ll Y^2 \log^6 Y. \end{aligned}$$

Отсюда

$$J \ll (T_1 Y + Y^2) \log^6 Y; \quad S_n \ll (T_1 Y + Y^2) \log^6 Y; \quad (4)$$

$$\sum_{\rho}'' \left| \sum_{Y < n < 2Y} \frac{b_n}{n^{\rho}} \right|^2 \ll (T_1 Y^{1-2\sigma} + Y^{2-2\sigma}) \log^6 Y.$$

Теперь, разбивая в (3) первую сумму в фигурных скобках на $\ll \ln T$ сумм и применяя полученную оценку (4) (заметим, что в этом случае $X < Y \leq XT$), найдем

$$\sum_{\rho}'' \left| \sum_{X < n < XT} \frac{a_n}{n^{\rho}} \right|^2 \ll (T_1 X^{1-2\sigma} + (XT)^{2-2\sigma}) \ln^7 T;$$

аналогично, разбивая вторую сумму в фигурных скобках (3) на $\ll \ln T$ сумм вида (4) (заметим, что в этом случае $1 \leq Y \leq X$), найдем

$$\begin{aligned} \frac{T^{2-2\sigma}}{T_1^2 + 1} \sum_{\rho}'' |M_X(\rho)|^2 &\ll \frac{T^{2-2\sigma}}{T_1^2 + 1} (T_1 + X^{2-2\sigma}) \ln^7 T \ll \\ &\ll (T^{2-2\sigma} + (TX)^{2-2\sigma}) \ln^7 T \ll T^{4\sigma(1-\sigma)} \ln^7 T. \end{aligned}$$

Из полученных оценок, выбора X и (3), следует утверждение теоремы.

§ 2. Простые числа в интервалах малой длины

Теорема 2. Пусть $h \geq x^{0.75} \exp(\ln^{0.8} x)$, $x \geq x_0 > 0$; тогда справедлива асимптотическая формула

$$\psi(x+h) - \psi(x) = h + O(h \exp(-\ln^{0.4} x)).$$

Доказательство. При $2 \leq T \leq x$ (теорема 3, IV)

$$\psi(x) = x - \sum_{|\operatorname{Im} \rho| < T} \frac{x^\rho}{\rho} + O\left(\frac{x \ln^2 x}{T}\right).$$

Следовательно (можно считать $h \leq x$),

$$\psi(x+h) - \psi(x) = h - \sum_{|\operatorname{Im} \rho| < T} \frac{(x+h)^\rho - x^\rho}{\rho} + O\left(\frac{x \ln^2 x}{T}\right). \quad (5)$$

Оценим сумму по ρ . Имеем

$$\left| \frac{(x+h)^\rho - x^\rho}{\rho} \right| = \left| \int_x^{x+h} u^{\rho-1} du \right| \leq \int_x^{x+h} u^{\sigma-1} du \leq hx^{\sigma-1},$$

где $\sigma = \operatorname{Re} \rho$. Далее,

$$\begin{aligned} S &= \sum_{|\operatorname{Im} \rho| < T} x^\sigma = \sum_{|\operatorname{Im} \rho| < T} \left(\log x \int_0^\sigma x^u du + 1 \right) = \\ &= N(T) + \log x \sum_{|\operatorname{Im} \rho| < T} \int_0^1 x^u F(u, \sigma) du, \end{aligned}$$

где

$$F(u, \sigma) = \begin{cases} 1, & \text{если } 0 \leq u \leq \sigma; \\ 0, & \text{если } \sigma < u \leq 1. \end{cases}$$

Из определения $F(u, \sigma)$ следует равенство

$$\sum_{|\operatorname{Im} \rho| < T} F(u, \sigma) = N(u, T).$$

Теперь заметим, что если $u \geq 1/2$, то по теореме 1

$$N(u, T) \ll T^{u(1-u)} (\ln T)^{10};$$

если же $0 \leq u < 1/2$, то будем пользоваться тривиальной оценкой (следствие 1 теоремы 4, IV):

$$N(u, T) \ll N(T) \ll T \ln T.$$

Кроме того, по теореме 2, VI

$$N(u, T) = 0, \text{ если только}$$

$$u > 1 - \frac{c}{\ln^{2/3}(T+10) \ln \ln(T+10)} = 1 - \gamma(T).$$

Учитывая все это, приходим к оценке (считаем $x \geq 2T^4$)

$$\begin{aligned} S &\ll T \ln T + \log x \int_0^{1/2} x^u T \ln T du + \\ &+ \log x \int_{1/2}^{1-\gamma(T)} x^u T^{4(1-u)} (\ln T)^{10} du \ll \\ &\ll x^{1/2} T \ln T + (xT^{-4})^{1-\gamma(T)} T^4 (\ln T)^{10} \ln x. \end{aligned}$$

Отсюда и из (5) получаем

$$\begin{aligned} \frac{\psi(x+h) - \psi(x)}{h} &= 1 + O\left(\frac{T \ln T}{\sqrt{x}}\right) + \\ &+ O\left(\left(\frac{T^4}{x}\right)^{\gamma(T)} (\ln T)^{10} \ln x\right) + O\left(\frac{x \ln^2 x}{Th}\right). \end{aligned}$$

Полагая в последнем соотношении

$$T^4 = x \exp(-\ln^{0.8} x),$$

видим, что при

$$h \geq x^{0.75} \exp(\ln^{0.8} x)$$

остаточные члены есть

$$O(\exp(-\ln^{0.4} x)).$$

Теорема доказана.

Следствие. При обозначениях и условиях теоремы 2 на интервале $(x, x+h)$ есть простое число.

Доказательство. Имеем

$$\begin{aligned} \sum_{x < p < x+h} \ln p &= \psi(x+h) - \psi(x) + O(\sqrt{x} \ln^2 x) = \\ &= h + O(h \exp(-\ln^{0.4} x)) \geq 1, \end{aligned}$$

если $x \geq x_0$.

ЗАДАЧИ

1. Пусть α — произвольное фиксированное число из промежутка $0 < \alpha \leq 1/4$, $t \geq t_0 > 0$, $X \leq \sqrt{t}$. Рассмотрим два соотношения А и В:

$$\text{A. } \zeta\left(\frac{1}{2} + it\right) = O(t^{\alpha+\varepsilon}),$$

$$\text{B. } \sum_{n \leq X} n^{it} = O(\sqrt{X} t^{\alpha+\varepsilon}).$$

Доказать, что выполнение одного из них влечет за собой выполнение другого.

2. Для того чтобы выполнялось соотношение (гипотеза Линделёфа)

$$\zeta\left(\frac{1}{2} + it\right) = O(|t|^\varepsilon),$$

необходимо и достаточно выполнение любого из условий:

$$\text{а) } \frac{1}{T} \int_1^T \left| \zeta\left(\frac{1}{2} + it\right) \right|^{2k} dt = O(T^\varepsilon), \quad k = 1, 2, \dots;$$

$$\text{б) } \frac{1}{T} \int_1^T |\zeta(\sigma + it)|^{2k} dt = O(T^\varepsilon), \quad \sigma > 1/2, \quad k = 1, 2, \dots;$$

$$\text{в) } \frac{1}{T} \int_1^T |\zeta(\sigma + it)|^{2k} dt \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\tau_k^2(n)}{n^{2\sigma}}, \quad \sigma > \frac{1}{2}, \quad k = 1, 2, \dots;$$

$$\text{г) } \zeta^k(s) = \sum_{n < |t|^\delta} \frac{\tau_k(n)}{n^s} + O(|t|^{-\lambda}), \quad k = 1, 2, \dots; \quad \sigma \geq \\ \geq \sigma_0 > 1/2, \quad 0 < \delta < 1 \text{—любое, } \lambda = \lambda(k, \delta, \sigma_0) > 0.$$

$$\text{д) } T_k(X) = \sum_{n \leq X} \tau_k(n) = XP_{k-1}(\ln X) + O(X^{1/2+\varepsilon}), \quad k = 2, 3, \dots$$

3. Пусть $\varepsilon > 0$ — фиксированное число, и пусть выполняется гипотеза Линделёфа. Доказать, что

$$N(\sigma, T) = O(T^{(2+\varepsilon)(1-\sigma)} \ln^c T).$$

4. а) Доказать, что при $N \geq N_0$ найдутся простые числа p и p' с условием

$$N = p + p' + O(N^\gamma), \quad \gamma > 1/2. \quad (6)$$

б) При выполнении условий задачи 3, доказать (6) с произвольным $\gamma > 0$.

5. При выполнении условий задачи 3 доказать, что

$$\psi(x+h) - \psi(x) = h + O(h \exp(-\ln^0 x)),$$

где $h \geq x^{0.5+\varepsilon}$.

Г Л А В А VIII

L-РЯДЫ ДИРИХЛЕ

Подобно задачам о распределении простых чисел в натуральном ряде можно ставить и решать задачи о распределении простых чисел в арифметических прогрессиях с разностью $k \geq 1$ и начальным членом l , $1 \leq l \leq k$, $(l, k) = 1$. Эти задачи важны не только как обобщения классических, они имеют исключительно большое значение при решении многих аддитивных проблем с простыми числами (см., например, гл. X).

Благодаря существовавшей мультипликативной функции, позволяющей выделить из заданной последовательности целых чисел подпоследовательность, принадлежащую арифметической прогрессии вида $kn + l$, $n = \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots$, удастся применить уже развитые в гл. V методы. Такой функцией является функция $\chi(n)$, введенная Дирихле и названная им характером. Везде ниже под характером будем понимать характеры Дирихле.

§ 1. Характеры и их свойства

Прежде всего определим характеры по модулю k , равному степени простого числа, и докажем их основные свойства. Характеры по произвольному модулю k определим затем через характеры по модулю, равному степени простого числа; при этом основные свойства последних сохранятся.

Пусть $k = p^\alpha$, где $p > 2$ — простое число, $\alpha \geq 1$. Как известно, по модулю k существуют первообразные корни, и пусть g — наименьший из них. Через $\text{ind } n$ будем обозначать индекс числа n , $(n, k) = 1$, по модулю k при основании g , т. е. число $\gamma = \gamma(n) = \text{ind } n$ такое, что

$$g^\gamma \equiv n \pmod{k}.$$

Таким образом, индекс числа определяется с точностью до слагаемых, кратных $\varphi(k)$.

Определение 1. Характером по модулю $k = p^\alpha$, $p > 2$ — простое, $\alpha \geq 1$, называется функция $\chi(n)$, областью определения которой является множество целых чисел n , и такая, что

$$\chi(n) = \chi(n; k) = \chi(n; k, m) = \begin{cases} 0, & \text{если } (n, k) > 1; \\ e^{2\pi i \frac{m \operatorname{Ind} n}{\varphi(k)}}, & \text{если } (n, k) = 1, \end{cases}$$

где m — целое число.

Из определения характера видно, что функция $\chi(n) = \chi(n; k, m)$ зависит от параметра m , является периодической по m с периодом $\varphi(k)$, т. е. существует, вообще говоря, $\varphi(k)$ характеров по модулю k , которые получаются, если брать m равным $0, 1, \dots, \varphi(k) - 1$.

Пусть теперь $k = 2^\alpha$, $\alpha \geq 3$. Как известно, для любого нечетного числа n существует система индексов $\gamma_0 = \gamma_0(n)$ и $\gamma_1 = \gamma_1(n)$ по модулю k , т. е. такие числа γ_0 и γ_1 , что

$$n \equiv (-1)^{\gamma_0} 5^{\gamma_1} \pmod{k}.$$

Таким образом, числа γ_0 и γ_1 определяются с точностью до слагаемых, кратных соответственно 2 и $2^{\alpha-2}$.

Определение 2. Характером по модулю $k = 2^\alpha$, $\alpha \geq 1$, называется функция $\chi(n)$, областью определения которой является множество целых чисел n , определенная одной из следующих формул:

$$\chi(n) = \chi(n; 2) = \chi(n; 2, 0, 0) = \begin{cases} 0, & \text{если } (n, 2) > 1; \\ 1, & \text{если } (n, 2) = 1, \end{cases}$$

$$\chi(n) = \chi(n; 4) = \chi(n; 4; m_0, 0) = \begin{cases} 0, & \text{если } (n, 4) > 1; \\ (-1)^{m_0 \gamma_0}, & \text{если } (n, 4) = 1, \end{cases}$$

где $n \equiv (-1)^{\gamma_0} \pmod{4}$, m_0 — целое;

$$\chi(n) = \chi(n; 2^\alpha) = \chi(n; 2^\alpha; m_0, m_1) = \begin{cases} 0, & \text{если } (n, 2^\alpha) > 1; \\ (-1)^{\gamma_0 m_0} e^{2\pi i \frac{m_1 \gamma_1}{2^{\alpha-2}}}, & \text{если } (n, 2^\alpha) = 1, \quad \alpha \geq 3, \end{cases}$$

где m_0, m_1 — целые числа.

Из определения 2 видно, что функция $\chi(n) = \chi(n; 2^\alpha, m_0, m_1)$ зависит от параметров m_0 и m_1 , является периодической по m_0 и m_1 с периодами соответственно 2 и $2^{\alpha-2}$, т. е. существует, вообще говоря, $\varphi(k) = \varphi(2^\alpha)$ характеров по модулю $k = 2^\alpha$, которые получаются, если брать m_0 равным 0, 1, а m_1 равным 0, 1, ..., $2^{\alpha-2} - 1$.

Ввиду того, что индекс числа или система индексов числа периодические с периодом, равным модулю функции, аддитивные, т. е. индекс произведения (соответственно система индексов произведения) равняется сумме индексов сомножителей (соответственно сумме систем индексов сомножителей), получаем следующие свойства характера $\chi(n)$:

1. $\chi(n)$ по модулю k — периодическая с периодом k функция, т. е. $\chi(n) = \chi(n + k)$;

2. $\chi(n)$ — мультипликативная функция, т. е. $\chi(nt) = \chi(n)\chi(t)$.

Очевидно также, что $\chi(1) = 1$.

Лемма 1. Существует ровно $\varphi(k)$ характеров по модулю $k = p^\alpha$, $\alpha \geq 1$.

Доказательство. Надо доказать, что из определенных $\varphi(k)$ характеров нет двух тождественных. Прежде всего при любом целом a справедливо равенство

$$\frac{1}{m} \sum_{x=0}^{m-1} e^{2\pi i \frac{ax}{m}} = \begin{cases} 0, & \text{если } a \not\equiv 0 \pmod{m}; \\ 1, & \text{если } a \equiv 0 \pmod{m}. \end{cases} \quad (1)$$

Первое равенство следует из того, что сумма равняется

$$\frac{e^{2\pi i \frac{am}{m}} - 1}{e^{2\pi i \frac{a}{m}} - 1} = 0, \text{ так как } e^{2\pi i \frac{a}{m}} \neq 1;$$

второе равенство очевидно. Далее, если n по модулю k пробегает приведенную систему вычетов, то $\gamma(n)$ или соответственно $\gamma_0(n)$ и $\gamma_1(n)$ пробегает полные системы вычетов по модулю $\varphi(k)$ или соответственно по модулям 2 и $2^{\alpha-2}$ (случаи $k = 2$, $k = 4$ тривиальны). Если теперь $\chi(n; k, m_1)$ и $\chi(n; k, m_2)$ — разные характеры $k = p^\alpha$, $p > 2$, т. е. $m_1 \not\equiv m_2 \pmod{\varphi(k)}$, то из тождественного их равенства следует противоречие:

$$\varphi(k) = \sum_{\substack{n=1 \\ (n,k)=1}}^k \frac{\chi(n; k, m_1)}{\chi(n; k, m_2)} = \sum_{x=0}^{\varphi(k)-1} e^{2\pi i \frac{(m_1 - m_2)x}{\varphi(k)}} = 0.$$

Случай $k = 2^\alpha$ доказывается так же.

Определение 3. Характер $\chi(n)$, равный 1 на числах, взаимно простых с модулем, называется главным и обозначается $\chi_0(n)$.

Из определений 1—3 следует, что по модулю $k=2$ $\chi_0(n) = \chi(n)$, по модулю $k=4$ $\chi_0(n) = \chi(n; 4, 0)$, по модулю $k=2^\alpha$, $\alpha \geq 3$, $\chi_0(n) = \chi(n; k, 0, 0)$, и по модулю $k=p^\alpha$, $p > 2$, $\chi_0(n) = \chi(n; k, 0)$.

Основное свойство характеров — свойство ортогональности — содержится в следующей лемме.

Лемма 2. Справедливы равенства

$$\frac{1}{\varphi(k)} \sum_{\chi \bmod k} \chi(n) = \begin{cases} 1, & \text{если } n \equiv 1 \pmod{k}; \\ 0, & \text{если } n \not\equiv 1 \pmod{k}, \end{cases}$$

где суммирование ведется по всем $\varphi(k)$ характерам модуля k ;

$$\frac{1}{\varphi(k)} \sum_{n=1}^k \chi(n) = \begin{cases} 1, & \text{если } \chi = \chi_0; \\ 0, & \text{если } \chi \neq \chi_0. \end{cases}$$

Доказательство леммы получается из (1) и определений 1—3.

Наименьший период характера $\chi(n)$ может быть меньше, чем его модуль. Важную роль в дальнейшем будут играть характеры, называемые примитивными (иногда первообразными), наименьший период которых равен их модулю.

Определение 4. Неглавный характер $\chi(n) = \chi(n; k, t)$ по модулю $k=p^\alpha$, $p > 2$ — простое, называется примитивным (первообразным), если $(t, k) = 1$; неглавный характер $\chi(n) = \chi(n; k) = \chi(n; k, t_0, t_1)$ по модулю $k=2^\alpha$, $\alpha \geq 3$, называется примитивным (первообразным), если $t_0 = 1$, $(t_1, 2) = 1$; неглавный характер по модулю 4 называется примитивным (первообразным). Все остальные неглавные характеры по модулю k называются производными.

Непосредственным следствием определения 4 является тот факт, что каждому производному характеру по модулю $k=p^\alpha$ отвечает равный ему тождественно примитивный характер по модулю $k_1=p^\beta$, $\beta < \alpha$.

Для примитивных характеров справедлива формула, которая устанавливает связь между значениями примитивных характеров и значениями сумм Гаусса S :

$$S = S(k; a, \chi) = \sum_{n=1}^k \chi(n) e^{2\pi i \frac{an}{k}}.$$

Лемма 3. Если $\chi(n)$ — примитивный характер по модулю k , то

$$\tau(\bar{\chi})\chi(n) = \sum_{a=1}^k \bar{\chi}(a) e^{2\pi i \frac{an}{k}}, \quad (2)$$

где

$$\tau(\chi) = \sum_{a=1}^k \chi(a) e^{2\pi i \frac{a}{k}}, \quad |\tau(\chi)| = \sqrt{k}. \quad (3)$$

Доказательство. При $k=4$ равенства (2) и (3) проверяются непосредственно. Пусть $k \neq 4$, $(n, k) = 1$; определяя m из сравнения $mn \equiv 1 \pmod{k}$, будем иметь

$$\begin{aligned} \chi(n)\tau(\bar{\chi}) &= \sum_{a=1}^k \bar{\chi}(a)\bar{\chi}(m) e^{2\pi i \frac{a}{k}} = \\ &= \sum_{a=1}^k \bar{\chi}(am) e^{2\pi i \frac{a}{k}} = \sum_{a=1}^k \bar{\chi}(a) e^{2\pi i \frac{an}{k}} \end{aligned}$$

(воспользовались мультипликативностью $\bar{\chi}(n)$, периодичностью $\bar{\chi}(n)$ и $e^{2\pi i n/h}$ и тем, что вместе с a числа am пробегают полную систему вычетов по модулю k). Осталось рассмотреть случай $(n, k) > 1$. Слева в (2) стоит нуль. Если $k = p > 2$, то $(n, k) = p$, и справа в (2) также будет нуль, так как $\chi \neq \chi_0$ и

$$\sum_{n=1}^k \chi(n) = 0.$$

Пусть теперь $k = p^\alpha$, $\alpha > 1$, $n = rp$. Тогда

$$\sum_{a=1}^{p^\alpha} \bar{\chi}(a) e^{2\pi i \frac{arp}{p^\alpha}} = \sum_{\substack{v=1 \\ (v,p)=1}}^{p-1} \sum_{u=0}^{p-1} \bar{\chi}(up^{\alpha-1} + v) e^{2\pi i \frac{vr}{p^{\alpha-1}}}.$$

Докажем, что

$$\sum_{u=0}^{p-1} \bar{\chi}(up^{\alpha-1} + v) = 0.$$

Пользуясь тем, что $(v, p) = 1$, периодичностью и мультипликативностью $\bar{\chi}$, достаточно доказать равенство

$$\sum_{u=0}^{p-1} \bar{\chi}(up^{\alpha-1} + 1) = 0.$$

Пусть $p > 2$. Тогда первообразным корнем по модулю p^α

будет число $g + pt$, где g — первообразный корень по модулю p , t — такое, что

$$(g + pt)^{p-1} = 1 + pb, \quad (b, p) = 1.$$

Если γ — индекс числа $1 + up^{\alpha-1}$ по модулю p^α , то $\gamma = (p-1)\gamma_1$;

$$(g + pt)^\gamma = (1 + pb)^{\gamma_1} \equiv 1 + up^{\alpha-1} \pmod{p^\alpha}.$$

Отсюда находим

$$\gamma_1 = ub_1 p^{\alpha-2}, \quad bb_1 \equiv 1 \pmod{p}.$$

Следовательно,

$$\bar{\chi}(up^{\alpha-1} + 1) = e^{-2\pi i \frac{\text{mind}(1+up^{\alpha-1})}{\varphi(p^\alpha)}} = e^{-2\pi i \frac{mub_1}{p}},$$

где

$$(mb_1, p) = 1; \quad \sum_{u=0}^{p-1} e^{-2\pi i \frac{mub_1}{p}} = 0.$$

Пусть $p = 2$, $k = 2^\alpha$, $\alpha \geq 3$. Тогда система индексов числа $1 + u2^{\alpha-1}$ равна 0, $2^{\alpha-3}$, поэтому $(m_0, 1) = 1$, $(m_1, 2) = 1$,

$$\sum_{u=0}^1 \bar{\chi}(1 + u \cdot 2^{\alpha-1}) = 1 + (-1)^0 e^{-2\pi i \frac{m_1 2^{\alpha-3}}{2^{\alpha-2}}} = 0.$$

Таким образом, (2) доказано при любом n . Из (2) и (1) находим

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^k |\tau(\bar{\chi})|^2 |\chi(n)|^2 &= \varphi(k) |\tau(\bar{\chi})|^2 = \sum_{n=1}^k \left| \sum_{a=1}^h \bar{\chi}(a) e^{2\pi i \frac{an}{k}} \right|^2 = \\ &= \sum_{a,b=1}^k \bar{\chi}(a) \chi(b) \sum_{n=1}^k e^{2\pi i \frac{(a-b)n}{k}} = k\varphi(k), \end{aligned}$$

что доказывает (3).

Лемма полностью доказана.

Определим теперь характер по произвольному модулю k . Везде ниже $k = p_1^{\alpha_1} \dots p_r^{\alpha_r}$ — каноническое разложение k на простые сомножители.

Определение 5. Характером $\chi(n)$ по модулю k называется функция, задаваемая равенством

$$\chi(n) = \chi(n; k) = \prod_{i=1}^r \chi(n; p_i^{\alpha_i}). \quad (4)$$

Определение 6. Характер по модулю k называется главным, если в (4)

$$\chi(n; p_t^{\alpha t}) = \chi_0(n; p_t^{\alpha t}), \quad t = 1, \dots, r.$$

Определение 7. Неглавный характер по модулю k называется примитивным (первообразным), если в (4) $\chi(n; p_t^{\alpha t})$ — примитивные характеры по модулю $p_t^{\alpha t}$, $t = 1, \dots, r$. В противном случае $\chi(n)$ называется производным.

Из определения (7) следует, что каждому производному характеру $\chi(n)$ по модулю k отвечает равный ему на числах, взаимно простых с k , примитивный характер $\chi_1(n)$ по модулю k_1 , причем k_1 делит k . В этом случае говорят, что $\chi(n)$ является характером, индуцированным $\chi_1(n)$, а $\chi_1(n)$ называют примитивным (первообразным характером, отвечающим (порожденным) χ .

Все доказанные выше утверждения относительно характеров по модулю $k = p^{\alpha}$ справедливы для произвольного k и являются простыми следствиями уже доказанных.

Сформулируем основные свойства характера $\chi(n)$ по модулю k .

1. Характер $\chi(n)$ по модулю k — периодическая с периодом k функция, не равная тождественно нулю, причем $\chi(n) = 0$, если $(n, k) > 1$, и $\chi(n) \neq 0$, если $(n, k) = 1$.

2. $\chi(nt) = \chi(n)\chi(t)$ при любых n и t (мультипликативность).

3. Существует ровно $\varphi(k)$ различных характеров по модулю k .

4. Свойство ортогональности:

$$\frac{1}{\varphi(k)} \sum_{\chi \bmod k} \chi(n) = \begin{cases} 1, & \text{если } n \equiv 1 \pmod{k}; \\ 0, & \text{если } n \not\equiv 1 \pmod{k}, \end{cases}$$

где суммирование ведется по всем $\varphi(k)$ характерам модуля k ;

$$\frac{1}{\varphi(k)} \sum_{n=1}^k \chi(n) = \begin{cases} 1, & \text{если } \chi = \chi_0; \\ 0, & \text{если } \chi \neq \chi_0. \end{cases}$$

5. Пусть χ — примитивный характер по модулю k . Тогда

$$\tau(\bar{\chi}) \chi(n) = \sum_{m=1}^k \bar{\chi}(m) e^{\frac{2\pi i mn}{k}}, \quad (5)$$

где

$$\tau(\chi) = \sum_{n=1}^k \chi(n) e^{2\pi i \frac{n}{k}}, \quad |\tau(\bar{\chi})| = \sqrt{k}.$$

Свойства 1—5 доказываются просто. Докажем, например, свойство 5. Пусть $k = k_1 k_2$, $(k_1, k_2) = 1$; тогда

$$\chi(m; k) = \chi(m; k_1) \chi(m; k_2).$$

Выражение $m_1 k_2 + m_2 k_1$ пробегает полную систему вычетов по модулю $k_1 k_2$, когда m_1 и m_2 пробегают полные системы вычетов соответственно по модулям k_1 и k_2 . Поэтому

$$\begin{aligned} S &= S(n, k) = \sum_{m=1}^k \bar{\chi}(m) e^{2\pi i \frac{mn}{k}} = \\ &= \sum_{m_1=1}^{k_1} \sum_{m_2=1}^{k_2} \bar{\chi}(m_1 k_2 + m_2 k_1; k_1) \bar{\chi}(m_1 k_2 + m_2 k_1; k_2) \times \\ &\quad \times e^{2\pi i \frac{(m_1 k_2 + m_2 k_1) n}{k_1 k_2}} = \\ &= \left(\sum_{m_1=1}^{k_1} \bar{\chi}(m_1 k_2; k_1) e^{2\pi i \frac{m_1 n}{k_1}} \right) \left(\sum_{m_2=1}^{k_2} \bar{\chi}(m_2 k_1; k_2) e^{2\pi i \frac{m_2 n}{k_2}} \right) = \\ &= \bar{\chi}(k_2; k_1) \bar{\chi}(k_1; k_2) S(n, k_1) S(n, k_2). \end{aligned}$$

Кроме того, $\tau(\chi) = S(1, k)$. Отсюда и из леммы 3 получаем (5).

Характер $\chi(n)$ по модулю k можно определять свойствами 1 и 2.

Лемма 4. Пусть $Y(n)$ — периодическая с периодом k функция целочисленного аргумента n , не равная тождественно нулю, мультипликативная, т. е. $Y(nt) = Y(n)Y(t)$, причем $Y(n) = 0$, если $(n, k) > 1$. Тогда

$$Y(n) = \chi(n; k, t)$$

при некотором t .

Доказательство. Пусть $(a, k) = 1$; тогда

$$T = \sum_{n=1}^k Y(n) \bar{\chi}(n) = \sum_{n=1}^k Y(an) \bar{\chi}(an) = Y(a) \bar{\chi}(a) T.$$

Поэтому либо $Y(a) = \chi(a)$ при некотором χ , либо $T = 0$

при любом χ . Но тогда при любом b , $(b, k) = 1$,

$$0 = \sum_{\chi} \chi(b) \sum_{n=1}^k Y(n) \bar{\chi}(n) = \sum_{n=1}^k Y(n) \sum_{\chi} \chi(b) \chi(\bar{n}) = Y(b) \varphi(k),$$

что противоречит условию. Лемма доказана.

Следствие. Произведение двух характеров по модулям k_1 и k_2 есть характер по модулю $k_1 k_2$.

Характеры являются комплекснозначными функциями. Особое место занимают характеры, отличные от главных и принимающие только действительные значения; они называются действительными (вещественными). Например, если $p > 2$ — простое, то действительным характером по модулю p будет такой:

$$\chi(n) = \chi\left(n; p, \frac{p-1}{2}\right) = \begin{cases} 0, & \text{если } (n, p) > 1; \\ (-1)^{\text{ind } n}, & \text{если } (n, p) = 1. \end{cases}$$

Этот характер называется символом Лежандра и обозначается $\left(\frac{n}{p}\right)$. Характер, принимающий хотя бы одно комплексное значение, называется комплексным характером $\chi(n)$, а характер, принимающий значения, комплексно-сопряженные к $\chi(n)$, называется комплексно-сопряженным к $\chi(n)$ и обозначается $\bar{\chi}(n)$. Для любого характера $\chi(n)$ по модулю k выполняется равенство

$$\chi^{\Phi(k)}(n) = \chi_0(n).$$

Наименьшее натуральное r , для которого $\chi^r(n) = \chi_0(n)$, называется степенью характера; таким образом, главный характер имеет первую степень, действительный — вторую, комплексный — третью или выше.

В силу мультипликативности характера

$$\chi^2(-1) = 1,$$

т. е. $\chi(-1) = \pm 1$. Характеры, для которых $\chi(-1) = +1$, называются четными, а характеры, для которых $\chi(-1) = -1$, называются нечетными.

Отметим еще одно свойство характеров. Если $\chi \neq \chi_0$ — характер по модулю k , то при любом M

$$\left| \sum_{n=1}^M \chi(n) \right| \leq \varphi(k).$$

Последнее неравенство можно уточнить, если χ — примитивный характер.

Лемма 5. Пусть χ — примитивный характер по модулю k ,

$$S = \sum_{n < M} \chi(n).$$

Тогда

$$|S| < \sqrt{k} \ln k.$$

Доказательство. Можно считать $M \leq k-1$. По свойству 5

$$\chi(n) = \frac{1}{\tau(\chi)} \sum_{m=1}^k \bar{\chi}(m) e^{2\pi i \frac{mn}{k}},$$

и поэтому

$$S = \frac{1}{\tau(\chi)} \sum_{m=1}^k \bar{\chi}(m) \sum_{n < M} e^{2\pi i \frac{mn}{k}} = \frac{1}{\tau(\chi)} \sum_{m=1}^{k-1} \bar{\chi}(m) \frac{e^{2\pi i \frac{mM}{k}} - 1}{e^{2\pi i \frac{m}{k}} - 1}.$$

Переходя к неравенствам, найдем

$$|S| \leq \frac{1}{\sqrt{k}} \sum_{m=1}^{k-1} \frac{|\sin \pi \frac{mM}{k}|}{|\sin \pi \frac{m}{k}|} < \frac{1}{\sqrt{k}} \sum_{m=1}^{k-1} \frac{1}{|\sin \pi \frac{m}{k}|}.$$

Если k — нечетное число, то

$$|S| \leq \frac{2}{\sqrt{k}} \sum_{m=1}^{(k-1)/2} \frac{1}{\sin \pi \frac{m}{k}} \leq \sqrt{k} \sum_{m=1}^{(k-1)/2} \frac{1}{m},$$

так как $\sin \pi \alpha \geq 2\alpha$ при $0 \leq \alpha \leq 1/2$.

Если k — четное число, то

$$|S| < \frac{2}{\sqrt{k}} \sum_{m=1}^{k/2-1} \frac{1}{\sin \pi \frac{m}{k}} + \frac{1}{\sqrt{k}} \leq \sqrt{k} \sum_{m=1}^{k/2-1} \frac{1}{m} + \frac{1}{\sqrt{k}}.$$

Далее,

$$\frac{1}{m} \leq \ln \frac{2m+1}{2m-1}, \quad m \geq 1,$$

$$\sum_{m=1}^{(k-1)/2} \frac{1}{m} \leq \ln k, \quad k \text{ — нечетное};$$

$$\sum_{m=1}^{k/2-1} \frac{1}{m} \leq \ln(k-1) \leq \ln k - \frac{1}{k}, \quad k \text{ — четное}.$$

Отсюда следует утверждение леммы.

§ 2. Определение L -рядов и их простейшие свойства

L -ряды Дирихле — функции комплексного переменного, подобные дзета-функции Римана, введены Дирихле при исследовании вопроса о распределении простых чисел в арифметических прогрессиях. Везде ниже под L -рядом будем понимать L -ряд Дирихле.

Пусть k — натуральное число и χ — какой-либо характер по модулю k .

Определение 8. L -рядом называется ряд

$$L = L(s, \chi) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi(n)}{n^s}, \quad \operatorname{Re} s > 1.$$

Ввиду того, что $|\chi(n)| \leq 1$, следует аналитичность $L(s, \chi)$ в полуплоскости $\operatorname{Re} s > 1$. Для $L(s, \chi)$ имеет место аналог формулы Эйлера (эйлеровское произведение).

Лемма 6. При $\operatorname{Re} s > 1$ справедливо равенство

$$L(s, \chi) = \prod_p \left(1 - \frac{\chi(p)}{p^s}\right)^{-1}. \quad (6)$$

Доказательство. При $X > 1$ рассмотрим функцию

$$\Phi(s; X) = \prod_{p < X} \left(1 - \frac{\chi(p)}{p^s}\right)^{-1}.$$

Так как $\operatorname{Re} s > 1$, то

$$\left(1 - \frac{\chi(p)}{p^s}\right)^{-1} = 1 + \frac{\chi(p)}{p^s} + \frac{\chi(p^2)}{p^{2s}} + \dots;$$

следовательно,

$$\begin{aligned} \Phi(s; X) &= \prod_{p < X} \left\{1 + \frac{\chi(p)}{p^s} + \frac{\chi(p^2)}{p^{2s}} + \dots\right\} = \\ &= \sum_{n < X} \frac{\chi(n)}{n^s} + R(s, X) \quad (7) \end{aligned}$$

(воспользовались мультипликативностью $\chi(n)$ и однозначностью разложения натуральных чисел на простые множители). Далее,

$$|R(s; X)| \leq \sum_{n > X} \frac{1}{n^\sigma} < \int_X^\infty \frac{du}{u^\sigma} = \frac{1}{\sigma-1} X^{1-\sigma},$$

где $\sigma = \operatorname{Re} s > 1$. Переходя в (7) к пределу $X \rightarrow +\infty$, получим утверждение леммы.

Из (6) находим

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{L(s, \chi)} \right| &= \left| \prod_p \left(1 - \frac{\chi(p)}{p^s} \right) \right| \leq \\ &\leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\sigma} < 1 + \int_1^{\infty} \frac{du}{u^\sigma} = 1 + \frac{1}{\sigma-1}, \\ |L(s, \chi)| &> \frac{\sigma-1}{\sigma}, \end{aligned}$$

т. е. $L(s, \chi) \neq 0$ при $\operatorname{Re} s > 1$. Если характер χ по модулю k является главным, то $L(s, \chi)$ лишь простым множителем отличается от дзета-функции $\zeta(s)$.

Лемма 7. Пусть $\chi(n) = \chi_0(n)$ по модулю k . Тогда при $\operatorname{Re} s > 1$

$$L(s, \chi_0) = \zeta(s) \prod_{p \nmid k} \left(1 - \frac{1}{p^s} \right).$$

Доказательство леммы следует из (6) и определения главного характера $\chi_0(n)$.

Следствие. $L(s, \chi_0)$ — аналитическая функция во всей s -плоскости, за исключением точки $s=1$, где она имеет простой полюс с вычетом, равным

$$\prod_{p \nmid k} \left(1 - \frac{1}{p} \right).$$

Если характер $\chi(n)$ является производным, а $\chi_1(n)$ — примитивный характер по модулю k_1 , $k_1 \nmid k$, отвечающий $\chi(n)$, то $L(s, \chi)$ лишь простым множителем отличается от $L(s, \chi_1)$.

Лемма 8. Пусть χ_1 — примитивный характер по модулю k_1 и χ — индуцированный χ_1 производный характер по модулю k , $k_1 \neq k$. Тогда при $\operatorname{Re} s > 1$

$$L(s, \chi) = L(s, \chi_1) \prod_{\substack{p \nmid k \\ p \times k_1}} \left(1 - \frac{\chi_1(p)}{p^s} \right).$$

Доказательство леммы следует из (6) и свойств χ_1 и χ .

Функцию $L(s, \chi)$ легко продолжить в полуплоскость $\operatorname{Re} s > 0$.

Лемма 9. Пусть $\chi \neq \chi_0$; тогда при $\operatorname{Re} s > 0$ справедливо равенство

$$L(s, \chi) = s \int_1^{\infty} S(x) x^{-s-1} dx, \quad (8)$$

где

$$S(x) = \sum_{n \leq x} \chi(n).$$

Доказательство. Пусть $N \geq 1$, $\operatorname{Re} s > 1$. Применяя преобразование Абеля (лемма 4.1), будем иметь

$$\sum_{n=1}^N \frac{\chi(n)}{n^s} = 1 + s \int_1^N c(x) x^{-s-1} dx + \frac{c(N)}{N^s},$$

где

$$c(x) = S(x) - 1.$$

Переходя к пределу $N \rightarrow +\infty$, получим (8) при $\operatorname{Re} s > 1$. Но $|S(x)| \leq \varphi(k)$; поэтому интеграл в (8) сходится в полуплоскости $\operatorname{Re} s > 0$ и определяет там аналитическую функцию, что и требовалось доказать.

Следствие. При $\operatorname{Re} s \geq 1/2$, $\chi \neq \chi_0$, выполняется оценка

$$|L(s, \chi)| \leq 2|s|\varphi(k).$$

Логарифмируя, а затем дифференцируя (6), получаем

Лемма 10. При $\operatorname{Re} s > 1$ справедливо равенство

$$\frac{L'(s, \chi)}{L(s, \chi)} = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Lambda(n) \chi(n)}{n^s}. \quad (9)$$

Применим теперь к (9) теорему 1, $\forall c, b = 1 + \frac{1}{\ln x}$, $\alpha = 1$, $T \geq 2$, будем иметь

$$\psi(x, \chi) =$$

$$= \sum_{n \leq x} \Lambda(n) \chi(n) = \frac{1}{2\pi i} \int_{b-iT}^{b+iT} \left(- \frac{L'(s, \chi)}{L(s, \chi)} \right) \frac{x^s}{s} ds + O\left(\frac{x \ln^2 x}{T}\right); \quad (10)$$

далее, при $(k, l) = 1$

$$\psi(x; k, l) = \frac{1}{\varphi(k)} \sum_{\chi \bmod k} \psi(x, \chi) \bar{\chi}(l).$$

Таким образом, чтобы знать поведение $\psi(x; k, l)$, надо знать поведение $\psi(x, \chi)$ при всех χ по модулю k , т. е.

надо знать поведение интеграла в (10), а чтобы исследовать интеграл в (10), надо об $L(s, \chi)$ иметь те же сведения, что и о дзета-функции (см. гл. IV—V).

Изучение $L(s, \chi)$ проводится по той же схеме, что и $\zeta(s)$, однако здесь появляются специфические трудности. Прежде всего $L(s, \chi)$ продолжается на всю s -плоскость; доказывается, что соответствующая ей функция $\xi(s, \chi)$ является целой функцией первого порядка, к которой применяется теорема 5, II.

§ 3. Функциональное уравнение

Функциональное уравнение будет получено для $L(s, \chi)$ с примитивным характером χ ; тем самым и в силу леммы 8 $L(s, \chi)$ будет продолжена на всю s -плоскость при любом χ . Вид функционального уравнения зависит от того, четным или нечетным является характер χ , т. е. $\chi(-1) = +1$ или $\chi(-1) = -1$.

Прежде чем вывести функциональное уравнение для $L(s, \chi)$ и продолжить $L(s, \chi)$ на всю s -плоскость, докажем вспомогательное утверждение, аналогичное функциональному уравнению для $\theta(x)$ (см. лемму 3, IV).

Лемма 11. Пусть χ — примитивный характер по модулю k . Для четного характера χ определим функцию $\theta(x, \chi)$ равенством

$$\theta(x, \chi) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \chi(n) e^{-\frac{n^2 \pi x}{k}}, \quad x > 0,$$

а для нечетного характера χ определим функцию $\theta_1(x, \chi)$ равенством

$$\theta_1(x, \chi) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} n \chi(n) e^{-\frac{n^2 \pi x}{k}}, \quad x > 0.$$

Тогда для введенных функций $\theta(x, \chi)$ и $\theta_1(x, \chi)$ справедливы следующие соотношения (функциональные уравнения):

$$\tau(\bar{\chi}) \theta(x, \chi) = \sqrt{\frac{k}{x}} \theta\left(\frac{1}{x}, \bar{\chi}\right); \quad (11)$$

$$\tau(\bar{\chi}) \theta_1(x, \chi) = i \sqrt{\frac{k}{x^3}} \theta_1\left(\frac{1}{x}, \bar{\chi}\right), \quad (12)$$

где $\tau(\chi)$ — сумма Гаусса.

Доказательство. Воспользуемся доказанным в лемме 3, IV равенством

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{\pi(n+\alpha)^2}{x}} = \sqrt{x} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-\pi n^2 x + 2\pi i n \alpha}, \quad (13)$$

где $x > 0$, α — вещественное.

Имеем

$$\begin{aligned} \tau(\bar{\chi}) \theta(x, \chi) &= \sum_{m=1}^k \bar{\chi}(m) \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{n^2 \pi x}{k} + \frac{2\pi i m n}{k}} = \\ &= \sum_{m=1}^k \bar{\chi}(m) \sqrt{\frac{k}{x}} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{k\pi \left(n + \frac{m}{k}\right)^2}{x}} = \\ &= \sqrt{\frac{k}{x}} \sum_{m=1}^k \bar{\chi}(m) \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{\pi(kn+m)^2}{kx}} = \\ &= \sqrt{\frac{k}{x}} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \bar{\chi}(m) e^{-\frac{\pi m^2}{kx}} = \sqrt{\frac{k}{x}} \theta\left(\frac{1}{x}, \bar{\chi}\right), \end{aligned}$$

что доказывает равенство (11).

Чтобы доказать равенство (12), продифференцируем почленно (13) и заменим x на x/k , α на m/k (указанные ряды можно почленно дифференцировать, так как получающиеся после этого ряды равномерно сходятся). Получим

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} n e^{-\frac{\pi n^2 x}{k} + \frac{2\pi i m n}{k}} = i \sqrt{\frac{k}{x^3}} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (kn+m) e^{-\frac{\pi(kn+m)^2}{kx}}.$$

Отсюда, как и выше, выводим

$$\begin{aligned} \tau(\bar{\chi}) \theta_1(x, \chi) &= \sum_{m=1}^k \bar{\chi}(m) \sum_{n=-\infty}^{+\infty} n e^{-\frac{n^2 \pi x}{k} + \frac{2\pi i m n}{k}} = \\ &= i \sqrt{\frac{k}{x^3}} \sum_{m=1}^k \bar{\chi}(m) \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (kn+m) e^{-\frac{\pi(kn+m)^2}{kx}} = \\ &= i \sqrt{\frac{k}{x^3}} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} n \bar{\chi}(n) e^{-\frac{\pi n^2}{kx}} = i \sqrt{\frac{k}{x^3}} \theta_1\left(\frac{1}{x}, \bar{\chi}\right). \end{aligned}$$

Лемма доказана.

Теорема 1 (функциональное уравнение).
 Пусть χ — примитивный характер по модулю k ,

$$\delta = \begin{cases} 0, & \text{если } \chi(-1) = +1; \\ 1, & \text{если } \chi(-1) = -1; \end{cases}$$

$$\xi(s, \chi) = \left(\frac{\pi}{k}\right)^{-(s+\delta)/2} \Gamma\left(\frac{s+\delta}{2}\right) L(s, \chi).$$

Тогда справедливо равенство

$$\xi(1-s, \bar{\chi}) = \frac{i^\delta \sqrt{k}}{\tau(\chi)} \xi(s, \chi). \quad (14)$$

Доказательство, по существу, повторяет вывод функционального уравнения для дзета-функции (теорема 1, IV).

Предположим, что $\chi(-1) = +1$. Имеем

$$\pi^{-\frac{s}{2}} k^{\frac{s}{2}} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) n^{-s} = \int_0^\infty e^{-\frac{n^2 \pi x}{k}} x^{\frac{s}{2}-1} dx.$$

Умножая последнее равенство на $\chi(n)$ и суммируя по n , при $\operatorname{Re} s > 1$ получим

$$\pi^{-\frac{s}{2}} k^{\frac{s}{2}} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) L(s, \chi) = \int_0^\infty x^{\frac{s}{2}-1} \left(\sum_{n=1}^\infty \chi(n) e^{-\frac{n^2 \pi x}{k}} \right) dx.$$

Ввиду того, что χ — четный характер, имеем

$$\sum_{n=1}^\infty \chi(n) e^{-\frac{n^2 \pi x}{k}} = \frac{1}{2} \theta(x, \chi);$$

$$\left(\frac{\pi}{k}\right)^{-\frac{s}{2}} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) L(s, \chi) = \frac{1}{2} \int_0^\infty x^{\frac{s}{2}-1} \theta(x, \chi) dx.$$

Разбивая последний интеграл на два, производя в одном из них замену переменной интегрирования ($x \rightarrow 1/x$) и пользуясь (11), найдем

$$\begin{aligned} \left(\frac{\pi}{k}\right)^{-\frac{s}{2}} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) L(s, \chi) &= \\ &= \frac{1}{2} \int_1^\infty x^{\frac{s}{2}-1} \theta(x, \chi) dx + \frac{1}{2} \int_1^\infty x^{-\frac{s}{2}-1} \theta\left(\frac{1}{x}, \chi\right) dx = \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2} \int_1^{\infty} x^{\frac{s}{2}-1} \theta(x, \chi) dx + \frac{1}{2} \frac{\sqrt{k}}{\tau(\bar{\chi})} \int_1^{\infty} x^{-\frac{s}{2}-\frac{1}{2}} \theta(x, \bar{\chi}) dx. \quad (15)$$

Правая часть этого равенства является аналитической функцией при любом s и, следовательно, дает аналитическое продолжение $L(s, \chi)$ на всю s -плоскость. Так как $\Gamma(s/2) \neq 0$, то $L(s, \chi)$ — регулярная всюду функция. Далее, при замене s на $1-s$ и χ на $\bar{\chi}$, правая часть (15) умножается на $\sqrt{k}/\tau(\chi)$, так как $\chi(-1) = 1$ и, следовательно, $\tau(\chi)\tau(\bar{\chi}) = \tau(\chi)\tau(\bar{\chi}) = k$. Отсюда получаем утверждение теоремы при $\delta = 0$.

Предположим, что $\chi(-1) = -1$. Имеем

$$\left(\frac{\pi}{k}\right)^{-\frac{s+1}{2}} \Gamma\left(\frac{s+1}{2}\right) n^{-s} = \int_0^{\infty} n e^{-\frac{\pi n^2 x}{k}} x^{\frac{s}{2}-\frac{1}{2}} dx.$$

Следовательно, при $\operatorname{Re} s > 1$

$$\begin{aligned} \left(\frac{\pi}{k}\right)^{-\frac{s+1}{2}} \Gamma\left(\frac{s+1}{2}\right) L(s, \chi) &= \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \theta_1(x, \chi) x^{\frac{s}{2}-\frac{1}{2}} dx = \\ &= \frac{1}{2} \int_1^{\infty} \theta_1(x, \chi) x^{\frac{s}{2}-\frac{1}{2}} dx + \frac{i\sqrt{k}}{2\tau(\bar{\chi})} \int_1^{\infty} \theta_1(x, \bar{\chi}) x^{-\frac{s}{2}} dx. \end{aligned}$$

Последнее равенство дает регулярное продолжение $L(s, \chi)$ на всю s -плоскость; правая часть его при замене s на $1-s$ и χ на $\bar{\chi}$ умножается на $i\sqrt{k}\tau(\chi)$ ввиду того, что

$$\tau(\chi)\tau(\bar{\chi}) = -k.$$

Отсюда получаем утверждение теоремы при $\delta = 1$. Теорема доказана.

Следствие. $\xi(s, \chi)$ — целая функция; если $\chi(-1) = +1$, то единственными нулями $L(s, \chi)$ при $\operatorname{Re} s \leq 0$ являются полюсы $\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)$, т. е. точки $s = 0, -2, -4, \dots$; если $\chi(-1) = -1$, то единственными нулями $L(s, \chi)$ при $\operatorname{Re} s \leq 0$ являются полюсы $\Gamma\left(\frac{s+1}{2}\right)$, т. е. точки $s = -1, -3, -5, \dots$

Ниже (см. § 2 гл. IX) будет доказано, что $L(1, \chi) \neq 0$. Отсюда и в силу (14) следует $\xi(0, \chi) \neq 0$.

§ 4. Нетривиальные нули; разложение логарифмической производной в ряд по нулям

Из следствия к теореме 1 видно, что функция $L(s, \chi)$, χ — примитивный характер, имеет в полуплоскости $\text{Re } s < 0$ лишь действительные нули; эти нули являются полюсами $\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)$ или $\Gamma\left(\frac{s+1}{2}\right)$ и называются тривиальными; тривиальным также называется нуль $s=0$. Кроме тривиальных функция $L(s, \chi)$ имеет подобно дзета-функции бесконечно много нетривиальных нулей, лежащих в полосе (критическая полоса) $0 \leq \text{Re } s \leq 1$.

Теорема 2. Пусть χ — примитивный характер. Тогда функция $\xi(s, \chi)$ является целой функцией первого порядка, имеющей бесконечно много нулей ρ_n таких, что

$0 \leq \text{Re } \rho_n \leq 1$, $\rho_n \neq 0$, причем ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |\rho_n|^{-1}$ расходится,

а ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |\rho_n|^{-1-\varepsilon}$ сходится при любом $\varepsilon > 0$. Нули $\xi(s, \chi)$ являются нетривиальными нулями $L(s, \chi)$.

Доказательство. При $\text{Re } s \geq 1/2$

$$|L(s, \chi)| \leq 2|s|\varphi(k) < 2|s|k;$$

$$|\xi(s, \chi)| \leq 2k^{\frac{\sigma}{2} + \frac{3}{2}} |s| \left| \Gamma\left(\frac{s+\delta}{2}\right) \right| \ll k^{\frac{\sigma}{2} + \frac{3}{2}} e^{c|s||\ln|s||}$$

Последняя оценка $|\xi(s, \chi)|$ в силу функционального уравнения (14) и равенства

$$\left| \frac{i^\delta \sqrt{k}}{\tau(\chi)} \right| = 1$$

справедлива также при $\text{Re } s < 1/2$; кроме того, $\xi(0, \chi) \neq 0$. Поскольку $\ln \Gamma(s) \sim s \ln s$ при $s \rightarrow +\infty$, по теореме 5, II получаем первое утверждение теоремы. Так как $L(s, \chi) \neq 0$ при $\text{Re } s > 1$, то из (14) следует, что $\xi(s, \chi) \neq 0$ при $\text{Re } s < 0$, т. е. нули $\xi(s, \chi)$ являются нетривиальными нулями $L(s, \chi)$, лежащими в полосе $0 \leq \text{Re } s \leq 1$. Теорема доказана.

Следствие. Имеет место формула

$$\xi(s, \chi) = e^{A+Bs} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{s}{\rho_n}\right) e^{\frac{s}{\rho_n}}, \quad (16)$$

где $A = A(\chi)$, $B = B(\chi)$ — постоянные.

Нетривиальные нули $L(s, \chi)$ симметричны относительно прямой $\text{Re } s = 1/2$, что следует из (14). Везде ниже будем считать, что нули ρ_n , $n = 1, 2, \dots$, нумеруются в порядке возрастания абсолютной величины их мнимой части.

Следующее вспомогательное утверждение устанавливает связь постоянной $B = B(\chi)$ с нетривиальными нулями $L(s, \chi)$.

Лемма 12. При обозначениях следствия из теоремы 2 справедливо равенство

$$\text{Re } B(\chi) + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\rho_n} + \frac{1}{\bar{\rho}_n} \right) = 0. \quad (17)$$

Доказательство. Возьмем логарифмическую производную от обеих частей (16) и применим (14):

$$B(\chi) = \frac{\xi'(0, \chi)}{\xi(0, \chi)} = -\frac{\xi'(1, \bar{\chi})}{\xi(1, \bar{\chi})} = -\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{1 - \bar{\rho}_n} + \frac{1}{\bar{\rho}_n} \right) - B(\bar{\chi}).$$

Так как $L(\rho_n, \chi) = L(1 - \rho_n, \bar{\chi}) = L(\bar{\rho}_n, \bar{\chi}) = L(1 - \bar{\rho}_n, \chi) = 0$, то $\bar{\rho}_n$ и $1 - \bar{\rho}_n$ — нули $L(s, \chi)$. Отсюда следует утверждение леммы.

§ 5. Простейшие теоремы о нулях

Докажем несколько простых утверждений о нетривиальных нулях $L(s, \chi)$, аналогичных соответствующим утверждениям о нулях дзета-функции.

Теорема 3. Пусть $\rho_n = \beta_n + i\gamma_n$, $n = 1, 2, \dots$, — все нетривиальные нули $L(s, \chi)$, χ — примитивный характер по модулю k , $T \geq 2$. Тогда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1 + (T - \gamma_n)^2} \leq c \log kT.$$

Доказательство. При $s = 2 + iT$ имеем ($\delta = 0$ или 1)

$$\left| \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{s + \delta + 2n} - \frac{1}{2n} \right) \right| \leq \sum_{n < T} \frac{1}{n} + \sum_{n > T} \frac{|s|}{n^2} \leq c_1 \log T;$$

из (16) и (14)

$$\begin{aligned}
 -\operatorname{Re} \frac{L'(s, \chi)}{L(s, \chi)} &= \frac{1}{2} \log \frac{k}{\pi} - \operatorname{Re} B(\chi) - \\
 &-\operatorname{Re} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{s - \rho_n} + \frac{1}{\rho_n} \right) - \frac{\gamma}{2} - \operatorname{Re} \frac{1}{s + \delta} - \\
 &-\operatorname{Re} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{s + \delta + 2n} - \frac{1}{2n} \right);
 \end{aligned}$$

отсюда и из (17)

$$\operatorname{Re} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{s - \rho_n} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{n^2} + c_1 \log kT < c_2 \log kT;$$

кроме того,

$$\begin{aligned}
 \operatorname{Re} \frac{1}{s - \rho_n} &= \operatorname{Re} \frac{1}{(2 - \beta_n) + i(T - \gamma_n)} = \\
 &= \frac{2 - \beta_n}{(2 - \beta_n)^2 + (T - \gamma_n)^2} \geq \frac{1}{4 + (T - \gamma_n)^2}.
 \end{aligned}$$

Объединяя полученные оценки, из первого равенства выводим утверждение теоремы.

При условиях и обозначениях теоремы 3 справедливы следующие следствия.

Следствие 1. Число нулей ρ_n , для которых $T \leq |\operatorname{Im} \rho_n| \leq T + 1$, не превосходит $c \log kT$.

Следствие 2. Имеет место оценка

$$\sum_{|T - \gamma_n| > 1} \frac{1}{(T - \gamma_n)^2} \leq c_1 \log kT.$$

Теорема 4. При $-1 \leq \sigma \leq 2$, $s = \sigma + it$, $|t| \geq 2$, имеет место равенство

$$\frac{L'(s, \chi)}{L(s, \chi)} = \sum_{|t - \gamma_n| < 1} \frac{1}{s - \rho_n} + O(\log k|t|),$$

причем суммирование ведется по нулям ρ_n функции $L(s, \chi)$, χ — примитивный характер, у которых $|t - \operatorname{Im} \rho_n| = |t - \gamma_n| \leq 1$.

Доказательство. Как и при доказательстве теоремы 3, имеем

$$\frac{L'(s, \chi)}{L(s, \chi)} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{s - \rho_n} + \frac{1}{\rho_n} \right) + B(\chi) - \frac{1}{2} \log \frac{k}{\pi} + \frac{\gamma}{2} + \frac{1}{s + \delta} + O(\log |t|),$$

где $s = \sigma + it$, $|t| \geq 2$, $-1 \leq \sigma \leq 2$.

Вычитая из этого соотношения такое же при $s = 2 + it$, найдем

$$\frac{L'(s, \chi)}{L(s, \chi)} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{s - \rho_n} - \frac{1}{2 + it - \rho_n} \right) + O(\log |t|).$$

Если $|\gamma_n - t| > 1$, то

$$\left| \frac{1}{\sigma + it - \rho_n} - \frac{1}{2 + it - \rho_n} \right| \leq \frac{2 - \sigma}{(\gamma_n - t)^2} \leq \frac{3}{(\gamma_n - t)^2},$$

и утверждение теоремы получается из следствия 2.

ЗАДАЧИ

1. Пусть $f(t) = \alpha_0 + \alpha_1 t + \alpha_2 t^2 + \dots$, где $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \dots$ произвольные комплексные числа. Доказать, что для любого $n \geq 0$ найдутся два многочлена

$$P = p_0 + p_1 t + \dots + p_n t^n, \quad Q = q_0 + q_1 t + \dots + q_n t^n$$

также, что

$$f(t) - \frac{P}{Q} = r_{2n+1} t^{2n+1} + r_{2n+2} t^{2n+2} + \dots$$

2. Пусть $p \geq 3$, p — простое число, $a, b, c, \dots, a_i, b_i, i = 0, 1, \dots$ — целые числа; будем говорить, что 1) многочлен $F(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n + a_{n+1} x^{n+1} + \dots + a_m x^m$, имеет степень $n \geq 0$ по модулю p , если $a_m \equiv \dots \equiv a_{n+1} \equiv 0 \pmod{p}$, $a_n \not\equiv 0 \pmod{p}$; 2) многочлен $G(x) = b_0 + b_1 x + \dots + b_m x^m$ сравним с $F(x)$ по модулю p , если $b_i \equiv a_i \pmod{p}$, $i = 0, 1, \dots, m$; 3) число a является корнем $F(x)$ по модулю p кратности $k \geq 1$, если

$$F(x) \equiv (x - a)^k (bx^r + cx^{r-1} + \dots + d) \pmod{p}.$$

Доказать, что 1) если числа a_1, \dots, a_r различны по модулю p , являются корнями многочлена $F(x)$ по модулю p с кратностями k_1, \dots, k_r , степень $F(x)$ по модулю p равна n , то $k_1 + \dots + k_r \leq n$; 2) если $F(a) \equiv 0 \pmod{p}$, то a является корнем $F(x)$

по модулю p ; 3) если $k \geq 1$ и $F(a) \equiv \frac{1}{1!} F'(a) \equiv \dots \equiv$

$\equiv \frac{1}{(k-1)!} F^{(k-1)}(a) \equiv 0 \pmod{p}$, то a является корнем $F(x)$ по

модулю p кратности k .

3. Пусть $f(x) = x^3 + ax + b$, $F(x) = \pm(f(x))^{(p-1)/2} + 1$, $g(x) = 2f(x)(\pm(f(x))^{(p-1)/2} + 1) + f'(x)(x^p - x)$.

Доказать, что каждый корень $F(x)$ по модулю p является по крайней мере двукратным корнем $g(x)$. Вывести отсюда, что для числа N_p решений сравнения $y^2 \equiv x^3 + ax + b \pmod{p}$ справедлива оценка

$$|N_p - p| \leq (p + 3)/2.$$

4. Пусть n — нечётное положительное число,

$$f(x) = ax^n + bx^{n-1} + \dots + c, \quad (a, p) = 1,$$

$$F_1(x) = f^{(p-1)/2}(x) + 1, \quad F_2(x) = f^{(p-1)/2}(x) - 1, \quad F(x) = F_1(x).$$

Раскладывая разность $F(x^p) - F(x)$ по степеням $H = x^p - x$ и пользуясь задачей 1, доказать существование многочлена $g(x)$ степени m ,

$$1 \leq m \leq kp + (k^2 + k)(n - 1) + \frac{p-1}{2}n$$

и такого, что каждый корень $F(x)$ является корнем g кратности $2k + 1$, $k \leq (p-1)/4$.

5. При условиях задачи 4 доказать неравенство

$$\left| \sum_{x=1}^p \left(\frac{f(x)}{p} \right) \right| < 2n \sqrt{p}.$$

6. Если $V(X)$ и $N(X)$ — число квадратичных вычетов и, соответственно, невычетов по модулю p на отрезке $[1, X]$, то

$$V(X) = \frac{1}{2}X + O(\sqrt{p} \log p), \quad N(X) = \frac{1}{2}X - O(\sqrt{p} \log p),$$

$$|O| \leq 1.$$

7. Пусть $X = X(p) \rightarrow +\infty$ при $p \rightarrow +\infty$ и для каждого $Y \geq X$ выполняется равенство $V(Y) = Y/2 + o(Y)$. Обозначая через $n = n(p)$ наименьший квадратичный невычет по модулю p , будем иметь

$$n \leq cX^{1/\sqrt{e}}.$$

8. При $k \geq 1$, $1 \leq Z < p$, справедливо неравенство

$$\sum_{\lambda=1}^p \left(\sum_{m=1}^Z \left(\frac{\lambda + m}{p} \right) \right)^{2k} \leq (2k)^k Z^k p + 4kZ^{2k} \sqrt{p}.$$

9. Пусть U и V — целые числа, $p \geq p_0(\varepsilon)$, $p^{0,5+\varepsilon} \leq U < p$,

$$p^\varepsilon < V < p, \quad W = \sum_u^U \sum_v^V \left(\frac{u+v}{p} \right),$$

где u и v в последней сумме

ме пробегают соответственно U и V различных по модулю p значений. Тогда

$$|W| \leq cUVp^{-\varepsilon}, \quad \delta = \delta(\varepsilon) > 0, \quad c = c(\varepsilon).$$

10. Пусть $X \geq p^{0.25+\varepsilon}$. Тогда

$$|S| = \left| \sum_{m < X} \left(\frac{m}{p} \right) \right| < cXp^{-\delta}, \quad \delta = \delta(\varepsilon) > 0, \quad c = c(\varepsilon).$$

11. Для наименьшего квадратичного невычета $n = n(p)$ по модулю p справедлива оценка

$$n = n(p) = O\left(p^{\frac{1}{4\sqrt{\varepsilon}} + \varepsilon}\right).$$

12. Пусть x_r — последовательность вещественных чисел такая, что $\|x_r - x_m\| > \delta > 0$, $r \neq m$. Тогда при любых a_n

$$\sum_{r=1}^R \left| \sum_{n=M+1}^{M+N} a_n e^{2\pi i n x_r} \right|^2 \leq c \left(N + \frac{1}{\delta}\right) \sum_{n=M+1}^{M+N} |a_n|^2.$$

13. Для $\pi(x)(1 + o(1))$ значений p , $p \leq x$, наименьший квадратичный невычет $n = n(p)$ и наименьший простой квадратичный вычет $v = v(p)$ не превосходят с $\log^{2+\varepsilon} x$.

ГЛАВА IX

ПРОСТЫЕ ЧИСЛА В АРИФМЕТИЧЕСКИХ ПРОГРЕССИЯХ

Метод комплексного интегрирования и доказанные в гл. VIII утверждения об L -рядах позволяют выписать явную формулу, связывающую сумму значений функции $\Lambda(n)$ по числам, принадлежащим заданной арифметической прогрессии, с нулями L -рядов. Асимптотический закон распределения простых чисел в арифметических прогрессиях будет следовать из этой явной формулы и теорем о границе нулей L -рядов. Всюду ниже предполагаем $k \leq x$.

§ 1. Явная формула

Введем две функции, подобные ψ -функции Чебышёва.

Определение. Пусть χ — произвольный характер по модулю k . Функции $\psi(x, \chi)$ и $\psi(x; k, l)$, $1 \leq l \leq k$, $(l, k) = 1$, задаются равенствами

$$\psi(x, \chi) = \sum_{\substack{n \leq x \\ n \equiv 1 \pmod{k}}} \Lambda(n) \chi(n),$$

$$\psi(x; k, l) = \sum_{\substack{n \leq x \\ n \equiv l \pmod{k}}} \Lambda(n).$$

В силу свойства ортогональности характеров (свойство 4, VIII) имеем

$$\begin{aligned} \psi(x; k, l) &= \frac{1}{\varphi(k)} \sum_{\chi \pmod{k}} \psi(x, \chi) \bar{\chi}(l) = \\ &= \frac{1}{\varphi(k)} \sum_{\substack{n \leq x \\ (n, k) = 1}} \Lambda(n) + \frac{1}{\varphi(k)} \sum_{\chi \neq \chi_0} \psi(x, \chi) \bar{\chi}(l). \end{aligned} \quad (1)$$

Первое слагаемое отличается от $\frac{1}{\varphi(k)} \psi(x)$ на величину

$$\frac{1}{\varphi(k)} \sum_{\substack{n \leq x \\ (n, k) > 1}} \Lambda(n) \leq \frac{\ln^2 x}{\varphi(k)}.$$

Далее, если χ_1 — примитивный характер по модулю $k_1, k_1 \setminus k$, порожденный характером χ , то в силу свойства χ_1

$$\begin{aligned} \psi(x, \chi) &= \psi(x, \chi_1) + \theta \sum_{\substack{n \leq x \\ (n, k) > 1}} \Lambda(n) = \\ &= \psi(x, \chi_1) + \theta_1 \log^2 x, \quad |\theta| \leq 1, |\theta_1| \leq 1. \end{aligned}$$

Тем самым изучение $\psi(x; k, l)$ свелось к изучению $\psi(x, \chi_1)$, где χ_1 — примитивный характер по модулю $k_1, k_1 \setminus k$.

Теорема 1. Пусть χ — примитивный характер по модулю k , $2 \leq T \leq x$; тогда

$$\psi(x, \chi) - \psi(k, \chi) = - \sum_{|\operatorname{Im} \rho| \leq T} \frac{x^\rho - k^\rho}{\rho} + O\left(\frac{x \log^2 x}{T}\right),$$

где ρ — нетривиальные нули $L(s, \chi)$.

Доказательство. По следствию 1, VIII найдется T_1 , $T \leq T_1 \leq T + 1$, такое, что $|T_1 - \operatorname{Im} \rho_n| > 1/c \log kT$, где ρ_n — нули $L(s, \chi)$. Рассмотрим прямоугольник Γ с вершинами в точках $b - iT_1$, $b + iT_1$, $-0,5 + iT_1$, $-0,5 - iT_1$, где $b = 1 + (\log x)^{-1}$. Интегрируя $\frac{x}{s} \frac{d}{ds} (\ln L(s, \chi))$ по контуру Γ , найдем

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \left\{ - \frac{L'(s, \chi)}{L(s, \chi)} \right\} \frac{x^s - k^s}{s} ds = - \sum_{|\operatorname{Im} \rho| \leq T_1} \frac{x^\rho - k^\rho}{\rho} + \theta \ln x,$$

где $|\theta| \leq 1$. По теореме 1, V ($\alpha = 1$, $x = N + 0,5$)

$$\psi(x, \chi) = \frac{1}{2\pi i} \int_{b-iT_1}^{b+iT_1} \left\{ - \frac{L'(s, \chi)}{L(s, \chi)} \right\} \frac{x^s}{s} ds + O\left(\frac{x \log^2 x}{T}\right).$$

Осталось оценить интегралы по верхней, нижней и левой сторонам прямоугольника Γ . Интегралы по верхней и нижней сторонам Γ оцениваются одинаково. Пользуясь теоремой 4, VIII и выбором T_1 , получаем

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{-0,5+iT_1}^{b+iT_1} \left\{ - \frac{L'(s, \chi)}{L(s, \chi)} \right\} \frac{x^s}{s} ds \right| &\leq \frac{e}{2\pi} \int_{-0,5}^b \left| \frac{L'(\sigma + iT_1)}{L(\sigma + iT_1)} \right| \frac{x}{T_1} d\sigma = \\ &= \frac{e}{2\pi} \int_{-0,5}^b \sum_{|T_1 - \nu_n| < 1} \frac{1}{\sigma - \sigma_n + i(T_1 - \nu_n)} + \\ &+ O(\log kT) \Big| \frac{x}{T_1} d\sigma = O\left(\frac{x \log^2 kT}{T}\right) = O\left(\frac{x \log^2 x}{T}\right). \end{aligned}$$

Интеграл по левой стороне Γ оценивается так:

$$\left| \frac{1}{2\pi} \int_{-T_1}^{+T_1} \left\{ -\frac{L'(-0,5+it)}{L(-0,5+it)} \right\} \frac{x^{-0,5+it}}{-0,5+it} dt \right| \leqslant$$

$$\leqslant x^{-0,5} \int_{-T_1}^{+T_1} \left| \frac{L'(-0,5+it)}{L(-0,5+it)} \right| \frac{dt}{0,5+|t|} = O\left(\frac{\log^2 kT}{\sqrt{x}}\right),$$

так как из теоремы 4, VIII

$$\left| \frac{L'(-0,5+it)}{L(-0,5+it)} \right| = O(\ln k(|t|+2)).$$

Объединяя оценки, получим утверждение теоремы.

§ 2. Теоремы о границе нулей

Как и при доказательстве теоремы 5, IV о границе нулей дзета-функции, будет использоваться неравенство

$$3 + 4\cos\varphi + \cos 2\varphi \geqslant 0,$$

φ — вещественное, и оценки сверху величин

$$-\operatorname{Re} \frac{L'(s, \chi)}{L(s, \chi)}$$

при $s = \sigma + it$, $\chi = \chi_1$ и $s = \sigma + i2t$, $\chi = \chi_1^2$. Особую трудность доставляет вопрос о границе вещественных нулей $L(s, \chi)$ с вещественным характером χ .

Теорема 2. Если χ — комплексный характер по модулю k , $s = \sigma + it$, то $L(s, \chi)$ не имеет нулей в области

$$\operatorname{Re} s = \sigma \geqslant 1 - \frac{c}{\log k(|t|+2)}.$$

Если же χ — действительный характер по модулю k , $s = \sigma + it$, то $L(s, \chi)$ не имеет нулей в области

$$\operatorname{Re} s = \sigma \geqslant 1 - \frac{c}{\log k(|t|+2)}, \quad |t| > 0.$$

Доказательство. Рассмотрим сначала случай примитивных характеров χ . Пусть χ — комплексный характер, $s = \sigma + it$, $\sigma > 1$, $t \geqslant 0$; тогда $\chi(n) = e^{i\omega(n)}$,

$$-\frac{L'(s, \chi)}{L(s, \chi)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Lambda(n) \chi(n)}{n^s} = \sum_{n=1}^{\infty} \Lambda(n) n^{-\sigma} e^{-it \log n + i\omega(n)};$$

$$\begin{aligned}
& - \operatorname{Re} \frac{L'(s, \chi)}{L(s, \chi)} = \sum_{n=1}^{\infty} \Lambda(n) n^{-\sigma} \cos \{t \log n - \omega(n)\}, \\
& - \operatorname{Re} \frac{L'(\sigma + i2t, \chi^2)}{L(\sigma + i2t, \chi^2)} = \sum_{n=1}^{\infty} \Lambda(n) n^{-\sigma} \cos 2 \{t \log n - \omega(n)\}.
\end{aligned}$$

Поэтому

$$\begin{aligned}
3 \left\{ - \frac{L'(\sigma, \chi_0)}{L(\sigma, \chi_0)} \right\} + 4 \left\{ - \operatorname{Re} \frac{L'(\sigma + it, \chi)}{L(\sigma + it, \chi)} \right\} + \\
+ \left\{ - \operatorname{Re} \frac{L'(\sigma + i2t, \chi^2)}{L(\sigma + i2t, \chi^2)} \right\} \geq 0. \quad (2)
\end{aligned}$$

Оценим сверху каждое слагаемое в (2), при этом будем пользоваться леммой 12, VIII и оценкой $\left| \frac{\Gamma'(s)}{\Gamma(s)} \right|$ (см., например, доказательство теоремы 3, VIII):

$$\begin{aligned}
& - \frac{L'(\sigma, \chi_0)}{L(\sigma, \chi_0)} = \sum_{n=1}^{\infty} \chi_0(n) \Lambda(n) n^{-\sigma} \leq - \frac{\zeta'(\sigma)}{\zeta(\sigma)} < \frac{1}{\sigma-1} + c_1; \\
& - \operatorname{Re} \frac{L'(s, \chi)}{L(s, \chi)} = - \operatorname{Re} \frac{L'(\sigma + it, \chi)}{L(\sigma + it, \chi)} = \\
& = \frac{1}{2} \log \frac{k}{\pi} - \operatorname{Re} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{s - \rho_n} + \frac{1}{\rho_n} \right) - \frac{\gamma}{2} - \operatorname{Re} \frac{1}{s + \delta} - \\
& - \operatorname{Re} B(\chi) - \operatorname{Re} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{s + \delta + 2n} - \frac{1}{2n} \right) \leq c_2 \log k (t + 2) - \\
& \quad - \operatorname{Re} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{s - \rho_n}. \quad (3)
\end{aligned}$$

Если через χ_1 обозначить примитивный характер, индуцированный χ^2 , то $\chi_1 \neq \chi_0$ и

$$\left| \frac{L'(s, \chi^2)}{L(s, \chi^2)} - \frac{L'(s, \chi_1)}{L(s, \chi_1)} \right| \leq \sum_{p \nmid h} \frac{p^{-\sigma} \log p}{1 - p^{-\sigma}} \leq \sum_{p \nmid h} \log p \leq \log k.$$

Следовательно, применяя уже полученную оценку (3), найдем

$$\begin{aligned}
- \operatorname{Re} \frac{L'(\sigma + i2t, \chi^2)}{L(\sigma + i2t, \chi^2)} \leq - \operatorname{Re} \frac{L'(\sigma + i2t, \chi_1)}{L(\sigma + i2t, \chi_1)} + \log k \leq \\
\leq c_3 \log k (t + 2). \quad (4)
\end{aligned}$$

Так как $\operatorname{Re} \frac{1}{s-\rho} = \frac{\sigma-\beta}{|s-\rho|^2} \geq 0$, то

$$\frac{3}{\sigma-1} - 4\operatorname{Re} \frac{1}{s-\rho} + c \log k(t+2) \geq 0. \quad (5)$$

Пусть теперь $\rho = \beta + i\gamma$ — нуль $L(s, \chi)$; не ограничивая общности, можно считать $\gamma \geq 0$. Возьмем в (5) $t = \gamma$, $\sigma = 1 + 1/2c \log k(t+2)$; получим

$$\beta \leq 1 - 1/4c \log k(\gamma+2).$$

Докажем утверждение теоремы для действительного примитивного характера χ . Имеем $\chi^2 = \chi_0$,

$$\left| \frac{L'(s, \chi^2)}{L(s, \chi^2)} - \frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} \right| \leq \log k;$$

из теорем 3 и 4 гл. IV

$$-\operatorname{Re} \frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} < \operatorname{Re} \frac{1}{s-1} + c_2 \log(t+2).$$

Подставим эту оценку и оценки (3) в (2), возьмем $t = \gamma$, где $\rho = \beta + i\gamma$ — нуль $L(s, \chi)$, $\gamma \geq 0$, получим

$$\frac{3}{\sigma-1} - \frac{4}{\sigma-\beta} + \operatorname{Re} \frac{1}{\sigma-1+i2\gamma} + c_4 \log k(\gamma+2) \geq 0;$$

$$\operatorname{Re} \frac{1}{\sigma-1+i2\gamma} = \frac{\sigma-1}{(\sigma-1)^2+4\gamma^2};$$

$$\frac{4}{\sigma-\beta} \leq \frac{3}{\sigma-1} + \frac{\sigma-1}{(\sigma-1)^2+4\gamma^2} + c_4 \log k(\gamma+2).$$

Рассмотрим два случая — случай больших γ и случай малых γ . Пусть $\gamma > \kappa/\log k$, где $0 < \kappa < 1/5c_4$, κ — абсолютная постоянная. Полагая $\sigma = 1 + \kappa/\log k(\gamma+2)$, найдем

$$\beta \leq 1 - \frac{c_5}{\log k(\gamma+2)}, \quad c_5 \geq \frac{3}{5c_4 + 16\kappa^{-1}}.$$

Пусть теперь $0 < \gamma < \kappa/\log k$. Тогда, пользуясь (3), будем иметь

$$-\frac{L'(\sigma, \chi)}{L(\sigma, \chi)} < c_2 \log k - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sigma-\rho_n} < c_2 \log k - \frac{2(\sigma-\beta)}{(\sigma-\beta)^2+\gamma^2}, \quad (6)$$

так как нули ρ функции $L(s, \chi)$ имеют вид $\rho = \beta \pm i\gamma$.

Далее,

$$\begin{aligned}
 -\frac{L'(\sigma, \chi)}{L(\sigma, \chi)} &= \sum_{n=1}^{\infty} \chi(n) \Lambda(n) n^{-\sigma} \geq -\sum_{n=1}^{\infty} \Lambda(n) n^{-\sigma} = \\
 &= \frac{\zeta'(\sigma)}{\zeta(\sigma)} > -\frac{1}{\sigma-1} - c_6.
 \end{aligned}$$

Отсюда и из (6)

$$\frac{2(\sigma - \beta)}{(\sigma - \beta)^2 + \gamma^2} < \frac{1}{\sigma - 1} + c_7 \log k.$$

Возьмем $\sigma = 1 - \lambda / \log k$, $\kappa = \lambda / 10$; тогда из последнего неравенства найдем

$$\beta \leq 1 - \frac{\lambda}{10 \log k}, \quad \lambda > \frac{2}{3c_7}.$$

Таким образом, теорема доказана для примитивного характера χ . Для производного характера χ теорема следует из уже доказанного и леммы 8, VIII.

Перейдем к исследованию расположения действительных нулей $L(s, \chi)$ с действительным примитивным характером χ . Граница для таких нулей к настоящему времени значительно более грубая, чем та, которая получена в теореме 2. Прежде всего оценим снизу $L(1, \chi)$.

Лемма 1. Пусть χ — действительный примитивный характер по модулю k . Тогда

$$L(1, \chi) \geq \frac{c}{\sqrt{k} \log^2 k}.$$

Доказательство. Пользуясь оценкой суммы характеров (лемма 5, VIII) и преобразованием Абеля (лемма 4, I), находим ($m > 0$)

$$\begin{aligned}
 &\left| \sum_{m < n \leq M} \frac{\chi(n)}{n} \right| = \\
 &= \left| \int_m^M \left(\sum_{m < n \leq x} \chi(n) \right) x^{-2} dx + \frac{1}{M} \sum_{m < n \leq M} \chi(n) \right| \leq c_1 \frac{\sqrt{k} \log k}{m}; \\
 &\left| L(1, \chi) - \sum_{n \leq x} \frac{\chi(n)}{n} \right| \leq \frac{c_1 \sqrt{k} \log k}{x}.
 \end{aligned}$$

Рассмотрим при $1/2 \leq t < 1$ функцию $H(t)$,

$$H(t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n t^n, \quad a_n = \sum_{d \mid n} \chi(d).$$

Если $n = p_1^{\alpha_1} \dots p_u^{\alpha_u}$ — каноническое разложение n на простые сомножители, то

$$a_n = \prod_{r=1}^u \left(1 + \chi(p_r) + \dots + \chi(p_r^{\alpha_r}) \right);$$

поэтому $a_n \geq 0$, $a_{m^2} \geq 1$. Отсюда

$$\begin{aligned} H(t) &> \sum_{m=1}^{\infty} t^{m^2} > \int_2^{\infty} t^{u^2} du > \int_0^{\infty} t^{u^2} du - 2 = \\ &= \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{-\ln(1-(1-t))}} - 2 > \frac{1}{2\sqrt{1-t}} - 2. \end{aligned}$$

Далее,

$$H(t) = \sum_{m=1}^{\infty} \left(\sum_{n \mid m} \chi(n) \right) t^m = \sum_{n=1}^{\infty} \chi(n) \sum_{r=1}^{\infty} t^{rn} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi(n) t^n}{1-t^n}.$$

Оценим сверху разность $H(t) - \frac{L(1, \chi)}{1-t} = G(t)$,

$$\begin{aligned} G(t) &= \sum_{n=1}^{\infty} \chi(n) \frac{t^n}{1-t^n} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi(n)}{n} \frac{t^n}{1-t} + \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} (S_n - S_{n+1}) \frac{t^n}{1-t} - \frac{L(1, \chi)}{1-t} = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \chi(n) \left\{ \frac{t^n}{1-t^n} - \frac{t^n}{n(1-t)} \right\} - \sum_{n=0}^{\infty} S_{n+1} t^n, \end{aligned}$$

где $S_n = \sum_{m=n}^{\infty} \frac{\chi(m)}{m}$. Имеем

$$|S_n| \leq \frac{c_1 \sqrt{k} \log k}{n},$$

$$\left| \sum_{n=0}^{\infty} S_{n+1} t^n \right| < c_1 \sqrt{k} \log k \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n}{n} = c_1 \sqrt{k} \log k \log \frac{1}{1-t};$$

$$\begin{aligned}
& \left| \sum_{n=1}^{\infty} \chi(n) \left\{ \frac{t^n}{1-t} - \frac{t^n}{n(1-t)} \right\} \right| = \\
& = \left| \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{m=1}^n \chi(m) \right) \left\{ \frac{t^n}{1-t^n} - \frac{t^n}{n(1-t)} - \frac{t^{n+1}}{1-t^{n+1}} + \right. \right. \\
& \left. \left. + \frac{t^{n+1}}{(n+1)(1-t)} \right\} \right| \leq \frac{c_1 \sqrt{k} \log k}{1-t} \sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{t^n}{1+t+\dots+t^{n-1}} - \right. \\
& \quad \left. - \frac{t^{n+1}}{1+t+\dots+t^n} - \frac{t^n}{n(n+1)} - \frac{(1-t)t^n}{n+1} \right| < \\
& < \frac{c_1 \sqrt{k} \log k}{1-t} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{t^n}{1+t+\dots+t^{n-1}} - \frac{t^{n+1}}{1+t+\dots+t^n} - \right. \\
& \left. - \frac{t^n}{n(n+1)} \right) + c_1 \sqrt{k} \log k \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n}{n+1} < 2c_1 \sqrt{k} \log k \log \frac{1}{1-t}.
\end{aligned}$$

Получили $|G(t)| < 3c_1 \sqrt{k} \log k \log \frac{1}{1-t}$. Отсюда

$$\frac{L(1, \chi)}{1-t} = H(t) - G(t) > \frac{1}{2\sqrt{1-t}} + 3c_1 \sqrt{k} \log k \log(1-t) - 2.$$

Возьмем

$$t = 1 - \frac{1}{c_0 k \log^4 k}, \quad c_0 = (64(c_1 + 1))^2;$$

тогда

$$\frac{L(1, \chi)}{1-t} > \frac{1}{4} \sqrt{c_0 k} \log^2 k,$$

что и требовалось доказать.

Докажем теперь теорему А. Пейджа о границе действительного нуля и следствия из нее.

Теорема 3. Пусть χ — действительный примитивный характер по модулю k . Тогда

$$L(\sigma, \chi) \neq 0 \text{ при } \sigma > 1 - \frac{c}{\sqrt{k} \log^4 k}.$$

Доказательство. Рассмотрим σ на отрезке $[1 - 1/8 \log k, 1]$. По теореме о среднем значении

$$L(1, \chi) = L(\sigma, \chi) + (1 - \sigma)L'(\sigma, \chi),$$

где $\sigma \leq \sigma_1 \leq 1$. Применяя преобразование Абеля (лемма 4, I)

п оценку суммы характеров (лемма 5, VIII), находим

$$|L'(\sigma_1, \chi)| = \left| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi(n) \log n}{n^{\sigma_1}} \right| \leq \\ \leq \sum_{n \leq h} \frac{\log n}{n^{\sigma_1}} + \int_h^{\infty} \left| \sum_{h < n \leq x} \chi(n) \right| \left(\frac{1}{x^{1+\sigma_1}} + \frac{\log x}{x^{1+\sigma_1}} \right) dx \leq c_1 \log^2 k.$$

Отсюда п из леммы 1

$$L(\sigma, \chi) \geq L(1, \chi) - (1-\sigma) c_1 \log^2 k > \\ > \frac{c_0}{\sqrt{k} \log^2 k} - (1-\sigma) c_1 \log^2 k > 0,$$

если $\sigma > 1 - \frac{c}{\sqrt{k} \log^2 k}$, $c < \frac{c_0}{c_1}$. Теорема доказана.

Следствием теорем 2, 3 и теоремы 5, IV является отличие от нуля $L(1, \chi)$ при любом χ , т. е. отличие от нуля $\xi(0, \chi)$ при любом χ (см. доказательство теоремы 2, VIII).

В приложениях часто недостаточно полученной в теореме 3 границы действительных нулей $L(s, \chi)$. Однако модули, для которых действительный нуль может быть большим, расположены крайне редко. Это обстоятельство может быть использовано для доказательства утверждений, которые дают возможность во многих приложениях с успехом применять теорему 3 (см., например, гл. X).

Теорема 4. Пусть χ_1 — действительный примитивный характер по модулю k_1 , χ_2 — действительный примитивный характер по модулю k_2 , $\chi_1 \neq \chi_2$, $L(s, \chi_1)$ и $L(s, \chi_2)$ имеют действительные нули соответственно β_1 и β_2 , тогда

$$\min(\beta_1, \beta_2) < 1 - \frac{c}{\log k_1 k_2}.$$

Доказательство. Рассмотрим характер $\chi(n) = \chi_1(n)\chi_2(n)$ — характер по модулю $k_1 k_2$ (см. следствие, лемма 4, VIII), причем $\chi(n) \neq \chi_0(n)$, так как $\chi_1 \neq \chi_2$. При $\sigma > 1$ имеем

$$0 \leq \sum_{n=1}^{\infty} \Lambda(n) (1 + \chi_1(n))(1 + \chi_2(n)) n^{-\sigma} = \\ = - \frac{\zeta'(\sigma)}{\zeta(\sigma)} - \frac{L'(\sigma, \chi_1)}{L(\sigma, \chi_1)} - \frac{L'(\sigma, \chi_2)}{L(\sigma, \chi_2)} - \frac{L'(\sigma, \chi)}{L(\sigma, \chi)}. \quad (7)$$

Подобно тому, как доказывалось неравенство (4), находим

$$- \frac{L'(\sigma, \chi)}{L(\sigma, \chi)} < c_1 \log k_1 k_2;$$

кроме того, из (3)

$$-\frac{L'(\sigma, \chi_1)}{L(\sigma, \chi_1)} < c_1 \log k_1 - \frac{1}{\sigma - \beta_1},$$

$$-\frac{L'(\sigma, \chi_2)}{L(\sigma, \chi_2)} < c_1 \log k_2 - \frac{1}{\sigma - \beta_2}.$$

Подставим полученные оценки в (7):

$$\frac{1}{\sigma - \beta_1} + \frac{1}{\sigma - \beta_2} < \frac{1}{\sigma - 1} + c_2 \log k_1 k_2.$$

Возьмем $\sigma = 1 + \frac{1}{2c_2 \log k_1 k_2}$, тогда найдем

$$\min(\beta_1, \beta_2) \leq 1 - \frac{1}{7c_2 \log k_1 k_2}.$$

Теорема доказана.

Следствие 1. Пусть χ — все характеры по модулю k и $L(s, \chi)$ — отвечающие им функции. Тогда лишь одна из $L(s, \chi)$ может иметь действительный нуль β с условием

$$\beta \geq 1 - \frac{c}{\log k}.$$

Доказательство. Если χ_1 и χ_2 — два нетождественных характера по модулю k , то порожденные ими примитивные характеры χ_1^ и χ_2^* нетождественны, а модули их k_1^* и k_2^* не больше k . Отсюда получаем утверждение следствия.*

Следствие 2. Пусть $3 \leq k \leq x$. Существует не более одного k_0 , $3 \leq k_0 \leq x$, и не более одного действительного примитивного характера χ_1 по модулю k_0 , для которого $L(s, \chi_1)$ имеет однократный действительный нуль β_1 такой, что

$$\beta_1 \geq 1 - \frac{c}{\log x}.$$

Если, кроме того, есть $L(s, \chi)$, где χ — действительный характер по модулю k , такие, что

$$L(\beta, \chi) = 0, \quad \beta \geq 1 - \frac{c}{\log x},$$

то $k \equiv 0 \pmod{k_0}$.

Доказательство. Если β_1 — m -кратный нуль $L(s, \chi_1)$, $m \geq 2$, то, повторяя доказательство теоремы 4,

найдем

$$0 \leq \sum_{n=1}^{\infty} \Lambda(n)(1 + \chi_1(n)) n^{-\sigma} = -\frac{\zeta'(\sigma)}{\zeta(\sigma)} - \frac{L'(\sigma, \chi_1)}{L(\sigma, \chi_1)}, \quad \sigma > 1;$$

$$-\frac{\zeta'(\sigma)}{\zeta(\sigma)} < \frac{1}{\sigma-1} + c_1, \quad -\frac{L'(\sigma, \chi_1)}{L(\sigma, \chi_1)} < c_1 \log x - \frac{m}{\sigma - \beta_1};$$

$$\frac{2}{\sigma - \beta_1} \leq \frac{m}{\sigma - \beta_1} < \frac{1}{\sigma-1} + c_2 \log x; \quad \beta_1 \leq 1 - \frac{1}{7c_2 \log x},$$

что противоречит условию следствия. Далее, если имеется еще один действительный примитивный характер χ_2 , не тождественный χ_1 , для которого $L(s, \chi_2)$ имеет большой действительный нуль β_2 ,

$$\beta_2 \geq 1 - \frac{c}{\log x},$$

то получаем противоречие с утверждением теоремы. Пусть теперь χ — действительный характер по модулю k такой, что

$$L(\beta, \chi) = 0, \quad \beta \geq 1 - \frac{c}{\log x}.$$

Если χ_2 — примитивный характер, порожденный χ , по модулю k_2 , то $k \equiv 0 \pmod{k_2}$ и

$$L(\beta, \chi_2) = 0, \quad \beta \geq 1 - \frac{c}{\log x}.$$

Отсюда следует, что $k_2 = k_0$, $\chi_2 \equiv \chi_1$. Следствие доказано.

Следствие 3. В обозначениях и при условиях следствия 2 выполняется неравенство

$$k_0 \geq \frac{c' \log^2 x}{(\log \log x)^8}.$$

Доказательство. По теореме 3 и условию следствия

$$1 - \frac{c}{\log x} < \beta_1 \leq 1 - \frac{c_1}{\sqrt{k_0} \log^4 k_0}.$$

Отсюда получаем утверждение.

Следующая теорема К. Зигеля устанавливает более точную границу действительного нуля, чем предыдущая.

Теорема 5. Для любого $\varepsilon > 0$ существует $c = c(\varepsilon) > 0$ такое, что если χ — действительный характер по модулю k и β — действительный нуль $L(s, \chi)$, то

$$\beta \leq 1 - \frac{c(\varepsilon)}{k^\varepsilon}.$$

Предварительно докажем вспомогательное утверждение.

Лемма 2. Пусть χ_1 и χ_2 — различные действительные примитивные характеры по модулям соответственно k_1 и k_2 . Пусть, далее,

$$F(s) = \xi(s)L(s, \chi_1)L(s, \chi_2)L(s, \chi_1\chi_2).$$

Тогда при $9/10 < \sigma < 1$ имеет место оценка

$$F(\sigma) > \frac{1}{2} - \frac{c\lambda}{1-\sigma} (k_1 k_2)^{s(1-\sigma)},$$

где $\lambda = L(1, \chi_1)L(1, \chi_2)L(1, \chi_1\chi_2)$.

Доказательство. Прежде всего $\chi_1\chi_2$ — неглавный характер по модулю $k_1 k_2$. Следовательно, $F(s)$ — регулярная во всей s -плоскости функция, за исключением точки $s=1$, где она имеет полюс первого порядка с вычетом $\lambda = L(1, \chi_1)L(1, \chi_2)L(1, \chi_1\chi_2)$. При $\text{Re } s > 1$ разложим $F(s)$ в ряд Дирихле:

$$F(s) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n n^{-s}.$$

Так как при $\text{Re } s > 1$

$$F(s) = \prod_p \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{-1} \left(1 - \frac{\chi_1(p)}{p^s}\right)^{-1} \left(1 - \frac{\chi_2(p)}{p^s}\right)^{-1} \times \\ \times \left(1 - \frac{\chi_1(p)\chi_2(p)}{p^s}\right)^{-1},$$

а $\chi_1(p) = 0, \pm 1, \chi_2(p) = 0, \pm 1$, то легко найти, что

$$b_1 = 1, \quad b_n \geq 0 \quad \text{при } n > 1.$$

Действительно, если $\chi_1(p) = -1, \chi_2(p) = +1$, то

$$\prod_1 = \prod_p' \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{-1} \left(1 + \frac{1}{p^s}\right)^{-1} \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{-1} \left(1 + \frac{1}{p^s}\right)^{-1} = \\ = \prod_p' \left(1 - \frac{1}{p^{2s}}\right)^{-2} = \left(\prod_p' \left(1 + \frac{1}{p^{2s}} + \frac{1}{p^{4s}} + \dots\right)\right)^2;$$

если $\chi_1(p) = 0, \chi_2(p) = +1$, то

$$\prod_2 = \prod_p'' \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{-1} \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{-1} = \\ = \left(\prod_p' \left(1 + \frac{1}{p^s} + \frac{1}{p^{2s}} + \dots\right)\right)^2;$$

если $\chi_1(p) = 0$, $\chi_2(p) = -1$, то

$$\begin{aligned} \Pi_3 &= \prod_p \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{-1} \left(1 + \frac{1}{p^s}\right)^{-1} = \\ &= \prod_p \left(1 + \frac{1}{p^{2s}} + \frac{1}{p^{4s}} + \dots\right); \end{aligned}$$

если $\chi_1(p) = \chi_2(p) = 0$, то

$$\Pi_4 = \prod_p \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{-1} = \prod_p \left(1 + \frac{1}{p^s} + \frac{1}{p^{2s}} + \dots\right).$$

Остальные возможные случаи аналогичны уже разобранным. Перемножая все Π_i , получим ряд Дирихле $\tilde{F}(s)$, причем $b_1 = 1$, $b_n \geq 0$.

Следовательно, при $|s - 2| < 1$

$$F(s) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m (2-s)^m, \quad a_0 \geq 1, \quad a_m \geq 0,$$

так как

$$F^{(m)}(2) = (-1)^m \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{n^2} \log^m n.$$

Функция $g(s)$, задаваемая равенством

$$g(s) = F(s) - \frac{\lambda}{s-1},$$

регулярна во всей s -плоскости. Поэтому равенство

$$g(s) = F(s) - \frac{\lambda}{s-1} = \sum_{m=0}^{\infty} (a_m - \lambda) (2-s)^m \quad (8)$$

имеет место и в круге

$$|s - 2| \leq 3/2. \quad (9)$$

Оценим $g(s)$ в круге (9). На границе $|s - 2| = 3/2$ имеем

$$\zeta(s) = O(1), \quad \frac{1}{s-1} = O(1);$$

$$|L(s, \chi_1)| < ck_1, \quad |L(s, \chi_2)| < ck_2, \quad |L(s, \chi_1 \chi_2)| < ck_1 k_2$$

(следствие к лемме 9, VIII); следовательно,

$$|g(s)| < c_1 (k_1 k_2)^2, \quad |s - 2| = 3/2.$$

Последнее неравенство по принципу максимума имеет место и внутри круга (9). Оценивая $a_m - \lambda$ в (8) по тео-

реме Коши о коэффициентах степенного ряда, найдем

$$|a_m - \lambda| < c_2(k_1 k_2)^2 (2/3)^m, \quad m = 0, 1, 2, \dots$$

При $M > 1$ и $9/10 < \sigma < 1$ имеем

$$\sum_{m=M}^{\infty} |a_m - \lambda| (2 - \sigma)^m \leq \sum_{m=M}^{\infty} c_2 (k_1 k_2)^2 \left(\frac{2}{3} (2 - \sigma)\right)^m < < c_3 (k_1 k_2)^2 \left(\frac{11}{15}\right)^M;$$

$$\begin{aligned} F(\sigma) - \frac{\lambda}{\sigma - 1} &\geq 1 - \lambda \sum_{m=0}^{M-1} (2 - \sigma)^m - c_3 (k_1 k_2)^2 \left(\frac{11}{15}\right)^M = \\ &= 1 - \lambda \frac{(2 - \sigma)^M - 1}{1 - \sigma} - c_3 (k_1 k_2)^2 \left(\frac{11}{15}\right)^M. \end{aligned}$$

Определим целое M из соотношения

$$c_3 (k_1 k_2)^2 \left(\frac{11}{15}\right)^M < \frac{1}{2} \leq c_3 (k_1 k_2)^2 \left(\frac{11}{15}\right)^{M-1};$$

тогда

$$F(\sigma) \geq \frac{1}{2} - \frac{\lambda}{1 - \sigma} (2 - \sigma)^M.$$

Так как $M < 8 \log k_1 k_2 + c_4$, то

$$(2 - \sigma)^M = e^{M \log(1 + 1 - \sigma)} < e^{M(1 - \sigma)} < c_5 (k_1 k_2)^{8(1 - \sigma)}.$$

Лемма доказана.

Доказательство теоремы. Прежде всего докажем существование такого $k_0 = k_0(\varepsilon)$, что при $k > k_0$ и $\sigma > 1 - 1/k^\varepsilon$

$$L(\sigma, \chi) \neq 0, \quad (10)$$

где χ — действительный примитивный характер по модулю k . Отсюда будет следовать утверждение теоремы.

Предположим, что нет таких k , для которых есть нуль $L(s, \chi)$ на отрезке $1 - \frac{\varepsilon}{10} \leq \sigma < 1$. Обозначая через $k_1 = k_1(\varepsilon)$ наименьшее k с условием $k^\varepsilon \geq 10/\varepsilon$, получим (10) при $k > k_1(\varepsilon)$.

Предположим теперь существование такого k_1 , для которого $L(s, \chi_1)$, χ_1 — действительный примитивный характер по модулю k_1 , имеет нуль $s = \sigma_1$ на отрезке $\left[1 - \frac{\varepsilon}{10}, 1\right)$. Пусть k_2 — пока произвольное натуральное число, большее k_1 , и χ_2 — действительный примитивный характер по модулю k_2 ($\chi_2 \neq \chi_1$, так как $k_2 > k_1$).

По лемме 2, ввиду равенства $L(\sigma_1, \chi_1) = 0$,

$$0 = F(\sigma_1) > \frac{1}{2} - \frac{c\lambda}{1-\sigma_1} (k_1 k_2)^{8(1-\sigma_1)}, \quad 1 - \frac{\varepsilon}{10} \leq \sigma_1 < 1,$$

где

$$F(s) = \xi(s)L(s, \chi_1)L(s, \chi_2)L(s, \chi_1\chi_2),$$

$$\lambda = L(1, \chi_1)L(1, \chi_2)L(1, \chi_1\chi_2).$$

Таким образом,

$$L(1, \chi_1)L(1, \chi_2)L(1, \chi_1\chi_2) > c_1(1-\sigma_1)(k_1 k_2)^{-0,8\varepsilon}.$$

Применяя оценки для $L(1, \chi_2)$ и $L(1, \chi_1\chi_2)$ из следствия леммы 9, VIII, найдем

$$L(1, \chi_2) \geq c_2(1-\sigma_1)(k_1 k_2)^{-0,8\varepsilon}(\log k_1 k_2)^{-2}.$$

Возьмем теперь $k_2 = k_2(\varepsilon, k_1, \sigma_1)$ настолько большим, чтобы было $k_1^{-0,8\varepsilon} c_2(1-\sigma_1)(\ln k_1 k_2)^{-2} > k_2^{-0,1\varepsilon}$. Тогда при всех $k > k_2$ будем иметь

$$L(1, \chi) > k^{-0,9\varepsilon},$$

где χ — действительный примитивный характер по модулю k . Отсюда и из оценки сверху для $L'(\sigma, \chi)$ получаем

$$\begin{aligned} L(\sigma, \chi) &= L(1, \chi) - (1-\sigma)L'(\sigma, \chi) \geq \\ &\geq k^{-0,9\varepsilon} - (1-\sigma)c_3 \log^2 k > 0, \end{aligned}$$

если $1 - \frac{1}{k^\varepsilon} \leq \sigma < 1$, $k \geq k_3(\varepsilon) = k_3$. Следовательно, при $k > \max(k_1, k_3)$ получим (10). Теорема доказана.

З а м е ч а н и е. Постоянная $c = c(\varepsilon)$ в доказанной теореме неэффективна, т. е. по заданному $\varepsilon > 0$ найти $c = c(\varepsilon)$ нельзя. Поэтому все утверждения, в которых, по существу, применяется эта теорема, неэффективны (см., например, следствие 2 теоремы 6).

§ 3. Асимптотический закон распределения простых чисел в арифметических прогрессиях

Применяя результаты предыдущих параграфов, получим асимптотические формулы для величин $\psi(x; k, l)$ и $\pi(x; k, l)$.

Теорема 6. При $x > 1$ справедливы равенства

$$\psi(x; k, l) = \frac{x}{\varphi(k)} - E_1 \frac{x^{\beta_1 \chi_1(l)}}{\beta_1 \varphi(k)} + O\left(xe^{-c_0 \sqrt{\log x}}\right),$$

$$\pi(x; k, l) = \frac{L_1 x}{\varphi(k)} - E_1 \frac{\chi_1(l)}{\varphi(k)} \int_2^x \frac{u^{\beta_1 - 1}}{\log u} du + O\left(xe^{-c'_0 \sqrt{\log x}}\right),$$

где $E_1 = 1$, если по модулю k существует действительный характер χ_1 такой, что $L(s, \chi_1)$ имеет действительный нуль $\beta_1 > 1 - c/\log k$ и $E_1 = 0$ в противном случае.

Доказательство. Предполагаем $k \leq e^{\sqrt{\log x}}$. Характер χ_1 , для которого $E_1 = 1$, может быть только один (следствие 1 теоремы 4). По формуле (1)

$$\psi(x; k, l) = \frac{\psi(x)}{\varphi(k)} - \frac{E_1}{\varphi(k)} \chi_1(l) \psi(x, \chi_1) + \frac{1}{\varphi(k)} \sum_{\chi \neq \chi_0, \chi_1} \psi(x, \chi) \bar{\chi}(l) + O(\log^2 x).$$

Пусть $\chi \neq \chi_0, \chi_1$ и χ^* — примитивный характер по модулю $k_1, k_1 \nmid k$, порожденный χ . Тогда по теореме 1 при $T = e^{\sqrt{\log x}}$

$$\psi(x, \chi^*) = \sum_{n < x} \Lambda(n) \chi^*(n) = - \sum_{|\operatorname{Im} \rho| < T} \frac{x^\rho}{\rho} + O\left(xe^{-0,5\sqrt{\log x}}\right),$$

где ρ — нетривиальные нули $L(s, \chi^*)$. По теореме 2

$$\operatorname{Re} \rho = \beta \leq 1 - \frac{c_1}{\log kT} \leq 1 - \frac{c_2}{\sqrt{\log x}};$$

поэтому

$$|\psi(x, \chi^*)| \leq \sum_{|\operatorname{Im} \rho| < T} \frac{x^\beta}{\sqrt{\beta^2 + \gamma^2}} + c_3 x e^{-0,5\sqrt{\log x}} \leq x e^{-c_0 \sqrt{\log x}}$$

(воспользовались следствием 1 теоремы 3, VIII).

Таким образом,

$$\psi(x, \chi) = \psi(x, \chi^*) + \theta_1 \log^2 x = O\left(xe^{-c_0 \sqrt{\log x}}\right).$$

Пусть теперь $\chi = \chi_1$. Тогда

$$\psi(x, \chi_1) = -E_1 \frac{x^{\beta_1}}{\beta_1} - \sum_{\substack{|\operatorname{Im} \rho| < T \\ \rho \neq \beta_1}} \frac{x^\rho}{\rho} + O\left(xe^{-0,5\sqrt{\log x}}\right),$$

причем

$$\operatorname{Re} \rho = \beta \leq 1 - \frac{c_1}{\log kT} \leq 1 - \frac{c_2}{\sqrt{\log x}}.$$

Оценивая последнюю сумму по $\rho \neq \beta_1$ так же, как это было сделано выше, найдем

$$\psi(x; k, l) = \frac{\psi(x)}{\varphi(k)} - E_1 \frac{\chi_1(l)}{\beta_1} \frac{x^{\beta_1}}{\varphi(k)} + O\left(xe^{-c_0\sqrt{\log x}}\right).$$

Так как

$$\psi(x) = x + O\left(xe^{-c_0\sqrt{\log x}}\right),$$

получаем первое утверждение теоремы.

Второе утверждение теоремы получается из первого преобразованием Абеля (лемма 4, I):

$$\pi(x; k, l) = \sum_{2 < n \leq x} \frac{\Lambda(n) \alpha(n)}{\log n} + O\left(\sqrt{x} \log^2 x\right),$$

где

$$\alpha(n) = \alpha(n; k, l) = \begin{cases} 1, & \text{если } n \equiv l \pmod{k}; \\ 0, & \text{если } n \not\equiv l \pmod{k}; \end{cases}$$

отсюда

$$\begin{aligned} \pi(x; k, l) &= \int_2^x \frac{\psi(u; k, l)}{u \log^2 u} du + \frac{\psi(x; k, l)}{\log x} + O\left(\sqrt{x} \log^2 x\right) = \\ &= \frac{1}{\varphi(k)} \int_2^x \frac{du}{\log^2 u} - E_1 \frac{\chi_1(l)}{\beta_1 \varphi(k)} \int_2^x \frac{u^{\beta_1-1} du}{\log^2 u} + \\ &+ \frac{x}{\varphi(k) \log x} - E_1 \frac{\chi_1(l) x^{\beta_1}}{\beta_1 \varphi(k) \log x} + O\left(xe^{-c_0'\sqrt{\log x}}\right) = \\ &= \frac{\operatorname{Li} x}{\varphi(k)} - E_1 \frac{\chi_1(l)}{\varphi(k)} \int_2^x \frac{u^{\beta_1-1}}{\log u} du + O\left(xe^{-c_0'\sqrt{\log x}}\right), \end{aligned}$$

что и требовалось доказать.

Из доказанной теоремы, теорем 3, 5 и следствий 2 и 3 теоремы 4 выведем три следствия о распределении простых чисел в арифметических прогрессиях.

Следствие 1. Пусть $1 \leq k \leq (\log x)^{2-\varepsilon}$, где $0 < \varepsilon < 1/2$. Тогда

$$\psi(x; k, l) = \frac{x}{\varphi(k)} + O\left(xe^{-c(\log x)^{\varepsilon/3}}\right),$$

$$\pi(x; k, l) = \frac{\text{Li } x}{\varphi(k)} + O\left(xe^{-c'(\log x)^{\varepsilon/3}}\right).$$

Доказательство. По теореме 3

$$\beta_1 \leq 1 - \frac{c}{\sqrt{k} \log^4 k};$$

поэтому

$$x^{\beta_1} \leq xe^{-\frac{c \log x}{\sqrt{k} \log^4 k}} = O\left(xe^{-c(\log x)^{\varepsilon/3}}\right),$$

что и требовалось доказать.

Следствие 2. Для любого фиксированного $A > 1$ и $1 \leq k \leq (\ln x)^A$ справедливы асимптотические формулы

$$\psi(x; k, l) = \frac{x}{\varphi(k)} + O\left(xe^{-c_1 \sqrt{\log x}}\right),$$

$$\pi(x; k, l) = \frac{\text{Li } x}{\varphi(k)} + O\left(xe^{-c_1 \sqrt{\log x}}\right),$$

где $c_1 = c_1(A) > 0$.

Доказательство. По теореме 5 при любом $\varepsilon > 0$

$$\beta_1 \leq 1 - c(\varepsilon)/k^\varepsilon.$$

Возьмем $\varepsilon = 1/2A$, тогда

$$x^{\beta_1} \leq xe^{-\frac{c(\varepsilon) \log x}{k^\varepsilon}} \leq xe^{-c(\varepsilon)(\log x)^{1-A\varepsilon}} = xe^{-c_1 \sqrt{\log x}},$$

что и требовалось доказать.

Замечание. Постоянная $c_1 = c_1(A)$ неэффективна, т. е. $c_1 = c_1(A)$ не может быть вычислена по заданному A (см. теорему 5).

Следствие 3. Пусть $x \geq y > 3$, и рассмотрим все k , не превосходящие y . Тогда, за исключением, быть может, «особых» модулей k , которые кратны некоторому k_0 , $k_0 \geq c \log^2 y (\log \log y)^{-3}$, для остальных справедливы асимптотические формулы

$$\psi(x; k, l) = \frac{x}{\varphi(k)} + O\left(xe^{-c_2 \sqrt{\log x}}\right) + O\left(xe^{-c_2 \frac{\log x}{\log y}}\right),$$

$$\pi(x; k, l) = \frac{\text{Li } x}{\varphi(k)} + O\left(xe^{-c_2' \sqrt{\log x}}\right) + O\left(xe^{-c_2' \frac{\log x}{\log y}}\right).$$

Доказательство получается из следствий 2 и 3 к теореме 4.

ЗАДАЧИ

1. а). Пусть χ — примитивный характер по модулю k , $\operatorname{Re} s = \sigma > 0$, $Z \geq k(|t| + 1)$. Тогда (простейшее приближение)

$$L(s, \chi) = \sum_{n < Z} \frac{\chi(n)}{n^s} + O(kZ^{-\sigma}).$$

б) Пусть χ — примитивный характер по модулю k , $|\arg \eta| \leq \pi/2$; тогда (в обозначениях гл. VIII)

$$\begin{aligned} \Gamma\left(\frac{s+\delta}{2}\right) L(s, \chi) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi(n)}{n^s} \Gamma\left(\frac{s+\delta}{2}, \frac{\pi\eta n^2}{k}\right) + \\ &+ \frac{i\sqrt{k}}{\tau(\chi)} \left(\frac{k}{\pi}\right)^{0,5-s} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\bar{\chi}(n)}{n^{1-s}} \Gamma\left(\frac{1-s+\delta}{2}, \frac{\pi n^2}{k\eta}\right), \end{aligned}$$

где $\Gamma(z, x)$ — неполная гамма-функция (см. гл. IV, задача 1).

2. Пусть χ — примитивный характер по модулю k , $k \leq Q$; тогда при любых a_n выполняется неравенство

$$\sum_{k < Q} \sum'_{\chi \bmod k} \left| \sum_{n=M+1}^{M+N} a_n \chi(n) \right|^2 \leq c(Q^2 + N) \sum_{n=M+1}^{M+N} |a_n|^2.$$

3. Пусть $2 \geq \operatorname{Re} s_x = \sigma_x \geq 0$, $\operatorname{Im} s_x = t_x$, $A \leq t_x \leq A + 1$; при условиях задачи 2 имеем

$$\sum_{k < Q} \sum'_{\chi \bmod k} \left| \sum_{n=M+1}^{M+N} a_n \chi(n) n^{-s_x} \right|^2 \leq c(Q^2 + N) L^2 \sum_{n=M+1}^{M+N} |a_n|^2,$$

$$L = \ln N.$$

4. Пусть $\operatorname{Re} s > 0$, χ — характер по модулю k . Доказать, что при $s = \rho$, $L(\rho, \chi) = 0$, $\operatorname{Re} \rho > 0$, $Z \geq k(|t| + 1)$, $1 \leq X < Y < Z$, выполняется одно из неравенств:

$$1 \leq c_2 \left| \sum_{X < n < X^2} a(n) \chi(n) n^{-\rho} \right|^4 = \kappa_1;$$

$$1 \leq c_2 \left| \sum_{X^2 < n < XY} a(n) \chi(n) n^{-\rho} \right|^2 = \kappa_2;$$

$$1 \leq c_2 \left| \sum_{n < X} \mu(n) \chi(n) n^{-\rho} \right|^{4/3} \left| \sum_{Y < n < Z} \chi(n) n^{-\rho} \right|^{4/3} = \kappa_3;$$

$$1 \leq c_2 k^2 Z^{-2\sigma} \left| \sum_{n < X} \mu(n) \chi(n) n^{-\rho} \right|^2 = \kappa_4,$$

где $|a_n| \leq \tau(n)$.

5. Пусть $N(\alpha, T, \chi)$ — число нулей $L(s, \chi)$ в области $\operatorname{Re} s \geq \alpha$, $|\operatorname{Im} s| \leq T$; тогда для $0,5 \leq \alpha \leq 1$, $T \geq 2$, $Q \geq 1$, и при условиях

задачи 2 имеем

$$\sum_{k < Q} \sum'_{\chi \bmod k} N(\alpha, T, \chi) \leq cT(Q^2 + QT)^{\frac{4(1-\alpha)}{3-2\alpha}} \log^{10}(Q+T).$$

6. а) При любом $A > 0$ найдется $B = B(A) > 0$ такое, что

$$\sum_{k < \sqrt{X}(\ln X)^{-B}} \max_{(l,k)=1} \left| \psi(X; k, l) - \frac{X}{\varphi(k)} \right| \leq c \frac{X}{(\ln X)^A},$$

где постоянная $c = c(A) > 0$ эффективно не вычисляется.

б) Существует константа $B > 0$ такая, что

$$\sum_{k < \sqrt{X}(\ln X)^{-B}} \max_{(l,k)=1} \left| \psi(X; k, l) - \frac{X}{\varphi(k)} \right| \leq c_1 \frac{X}{(\ln X)^{2-\varepsilon}},$$

где $c_1 > 0$ — эффективно вычисляемая постоянная.

7. Пусть $k = p^n$, $p \geq 3$ — простое число, s и m — натуральные числа, причем $s \leq n-1$, $n-s \leq sm < n+s-1$, $\text{ind } v$ — индекс числа v по модулю k ; тогда

$$\frac{\text{ind}(1+p^s u)}{p-1} \equiv a_1 p^s u + \frac{1}{2} a_2 (p^s u)^2 + \dots + \frac{1}{m} a_m (p^s u)^m \pmod{p^{n-1}},$$

где $(a_1, p) = (a_2, p) = \dots = (a_m, p) = 1$, и число $v^{-1} \pmod{p^{n-1}}$ определяется из сравнения $vv_1 \equiv 1 \pmod{p^{n-1}}$.

8. Пусть χ — произвольный неглавный характер по модулю $k = p^n$, $p \geq 3$, p — фиксированное простое число; тогда при $1 \leq r \leq 0,5n$, $N^r = k$, выполняется оценка

$$\left| \sum_{m < N} \chi(m) \right| \leq c_1 N^{1-c/r^2}.$$

9. При условиях задачи 8 функция $L(s, \chi) \neq 0$ в области

$$|\text{Im } s| < e^{c_2 (\ln \ln k)^2}, \quad \text{Re } s = \sigma > 1 - \frac{c_3}{(\ln k)^{2/3} (\ln \ln k)^2}.$$

10. Доказать, что при $k = p^n$, $p \geq 3$, p — фиксированное простое число, $k \leq x^{1/9}$, $x \rightarrow +\infty$, справедлива асимптотическая формула

$$\psi(x; k, l) = \frac{x}{\varphi(k)} \left\{ 1 + O\left(e^{-c(\ln \ln x)^2}\right) \right\}.$$

Г Л А В А X

ПРОБЛЕМА ГОЛЬДБАХА

Настоящая глава посвящена исследованию вопроса о представимости нечетного N суммой трех простых чисел (проблема Гольдбаха). Здесь будет доказана теорема И. М. Виноградова об асимптотической формуле для числа представлений N суммой трех простых чисел, из которой следует представимость всех достаточно больших нечетных N суммой трех простых чисел.

Сначала дано более простое, но неэффективное доказательство (теорема 3), которое затем заменено эффективным (теорема 4).

§ 1. Вспомогательные утверждения

Выразим аналитической формулой число представлений натурального числа N суммой трех простых чисел.

Лемма 1. Пусть $J(N)$ — число решений в простых числах p_1, p_2, p_3 уравнения $N = p_1 + p_2 + p_3$. Тогда

$$J(N) = \int_0^1 S^3(\alpha) e^{-2\pi i \alpha N} d\alpha, \quad (1)$$

где $S(\alpha) = \sum_{p < N} e^{2\pi i \alpha p}$.

Доказательство. Если m — целое отличное от нуля число, то

$$\int_0^1 e^{2\pi i \alpha m} d\alpha = \left. \frac{e^{2\pi i \alpha m}}{2\pi i m} \right|_0^1 = 0.$$

Следовательно,

$$\int_0^1 e^{2\pi i \alpha m} d\alpha = \begin{cases} 1, & \text{если } m = 0, \\ 0, & \text{если } m \text{ — целое число, } m \neq 0. \end{cases}$$

Отсюда получаем

$$J(N) = \sum_{p_1, p_2, p_3 < N} \int_0^1 e^{2\pi i \alpha (p_1 + p_2 + p_3 - N)} d\alpha = \\ = \int_0^1 (S(\alpha))^3 e^{-2\pi i \alpha N} d\alpha,$$

что и требовалось доказать.

Существо кругового метода Г. Харди, Д. Литтлвуда и С. Рамануджаца в форме тригонометрических сумм И. М. Виноградова состоит в том, что из $J(N)$ выделяется предполагаемый главный член асимптотической формулы для величины $J(N)$ при $N \rightarrow +\infty$. Для этого интервал интегрирования $[0, 1)$ в (1) разбивается несократимыми рациональными дробями (дроби Фарей) на непересекающиеся интервалы; сумма интегралов по интервалам, отвечающим дробям с малыми знаменателями, и дает предполагаемый главный член. Нам нужна будет лемма о приближении действительных чисел рациональными.

Лемма 2. Пусть $\tau \geq 1$, α — вещественное число, тогда существуют целые взаимно простые числа a и q , $1 \leq q \leq \tau$, такие, что

$$\left| \alpha - \frac{a}{q} \right| \leq \frac{1}{q\tau}.$$

Доказательство. Не ограничивая общности, можно считать $0 \leq \alpha < 1$. Рассмотрим при $m = 0, 1, \dots, [\tau]$ числа $\{\alpha m\}$. Они лежат на промежутке $[0, 1)$, следовательно найдутся значения m , $m = m_1$, $m = m_2$, такие, что

$$\{\alpha m_1\} - \{\alpha m_2\} = \theta/\tau, \quad |\theta| \leq 1,$$

или

$$\alpha(m_1 - m_2) - [\alpha m_1] + [\alpha m_2] = \theta/\tau,$$

где $1 \leq |m_1 - m_2| \leq [\tau] \leq \tau$. Отсюда следует утверждение леммы.

§ 2. Круговой метод в проблеме Гольдбаха

Выделим предполагаемый главный член асимптотической формулы величины $J(N)$. Во всех дальнейших рассуждениях будем считать $N \geq N_0$, где N_0 — достаточно большое фиксированное положительное число. Предварительно преобразуем $J(N)$.

Пусть A и B — два положительных числа (конкретные значения A и B выберем позднее), $L = \ln N$, $\tau = = N \cdot L^{-B}$, $Q = L^A$, $\kappa\tau = 1$. В силу периодичности подынтегральной функции в (1) по α , имеем

$$J(N) = \int_{-\kappa}^{1-\kappa} S^3(\alpha) e^{-2\pi i \alpha N} d\alpha. \quad (2)$$

По лемме 2 каждое α из промежутка $[-\kappa, 1-\kappa]$ представим в виде

$$\alpha = \frac{a}{q} + z, \quad 1 \leq q \leq \tau, \quad (a, q) = 1, \quad |z| \leq \frac{1}{q\tau}. \quad (3)$$

Легко видеть, что в этом представлении $0 \leq a \leq q-1$, причем $a=0$ лишь при $q=1$. Через E_1 обозначим те α , для которых в представлении (3) $q \leq Q$, через E_2 обозначим оставшиеся α . Множество E_1 состоит из непересекающихся отрезков. Действительно, E_1 состоит из отрезков $E(a, q)$ вида

$$\frac{a}{q} - \frac{1}{q\tau} \leq \alpha \leq \frac{a}{q} + \frac{1}{q\tau}, \quad 0 \leq a < q, \\ (a, q) = 1, \quad q = 1, 2, \dots, [Q].$$

Если $E(a, q)$ и $E(a_1, q_1)$ — два разных отрезка E_1 , т. е. $(a - a_1)^2 + (q - q_1)^2 \neq 0$, то расстояние между центрами этих отрезков равно

$$\left| \frac{a}{q} - \frac{a_1}{q_1} \right| \geq \frac{1}{qq_1},$$

а сумма полудлин их равна

$$\frac{1}{q\tau} + \frac{1}{q_1\tau} < \frac{1}{qq_1}.$$

Следовательно, $E(a, q)$ и $E(a_1, q_1)$ не пересекаются.

Обозначая через J_1 интеграл по множеству E_1 , а через J_2 — интеграл по множеству E_2 , т. е.

$$J_1 = J_1(N) = \int_{E_1} S^3(\alpha) e^{-2\pi i \alpha N} d\alpha,$$

$$J_2 = J_2(N) = \int_{E_2} S^3(\alpha) e^{-2\pi i \alpha N} d\alpha,$$

будем иметь

$$J = J_1 + J_2.$$

Цель настоящего параграфа — получить асимптотическую формулу для величины J_1 . Нам нужна будет

Лемма 3. Пусть α имеет вид (3) и $\alpha \in E_1$. Тогда

$$S(\alpha) = \frac{\mu(q)}{\varphi(q)} M(z) + O(Ne^{-c\sqrt{L}}),$$

где

$$M(z) = \sum_{n=3}^N \frac{e^{2\pi izn}}{\log n} = \int_3^N \frac{e^{2\pi izu}}{\log u} du + O(1).$$

Доказательство. При любом n из промежутка $\sqrt{N} < n \leq N$ по следствию 2 теоремы 6, IX имеем

$$\pi(n; q, l) = \frac{\text{Lin}}{\varphi(q)} + O(ne^{-c_1\sqrt{L}}).$$

Поэтому

$$\begin{aligned} S(\alpha) = S\left(\frac{a}{q} + z\right) &= \sum_{\sqrt{N} < p \leq N} e^{2\pi i \frac{ap}{q}} e^{2\pi izp} + O(\sqrt{N}) = \\ &= \sum_{\substack{l=1 \\ (l,q)=1}}^q e^{2\pi i \frac{al}{q}} T(l) + O(\sqrt{N}), \quad (4) \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} T(l) &= \sum_{\substack{p=l \pmod{q} \\ \sqrt{N} < p \leq N}} e^{2\pi izp} = \\ &= \sum_{\sqrt{N} < n \leq N} (\pi(n; q, l) - \pi(n-1; q, l)) e^{2\pi izn}. \end{aligned}$$

Применим к последней сумме преобразование Абеля (лемма 4, I), полагая $c_n = \pi(n; q, l) - \pi(n-1; q, l)$, $f(u) = e^{2\pi izu}$. Пользуясь асимптотической формулой для $C(u)$,

$$C(u) = \sum_{\sqrt{N} < n \leq u} c_n = \frac{1}{\varphi(k)} \text{Li } u + O(ue^{-c_1\sqrt{L}}),$$

и тем, что при $n \geq 3$

$$\int_{n-1}^n \frac{e^{2\pi izu}}{\log u} du = \frac{e^{2\pi izn}}{\log n} + O(|z|) + O\left(\frac{1}{n \log^2 n}\right),$$

из (4) получим утверждение леммы.

Замечание. Постоянная в знаке O не эффективна, так как мы существенно пользовались следствием 2 теоремы 6, IX.

Лемма 4. Для величины J_1 справедлива следующая формула:

$$J_1 = \sigma\kappa + O(N^2L^{-A-1}) + O(N^2L^{-2B+2A}),$$

где

$$\sigma = \sum_{q=1}^{\infty} \gamma(q); \quad \gamma(q) = \frac{\mu(q)}{\varphi^3(q)} \sum_{\substack{a=1 \\ (a,q)=1}}^q e^{-2\pi i \frac{a}{q} N},$$

$$\kappa = \int_{-0,5}^{+0,5} M^3(z) e^{-2\pi i z N} dz; \quad M(z) = \sum_{n=3}^N \frac{e^{2\pi i z n}}{\log n}.$$

Доказательство. По определению

$$J_1 = \int_{E_1} S^3(\alpha) e^{-2\pi i \alpha N} d\alpha = \sum_{q \leq Q} \sum_{\substack{a=0 \\ (a,q)=1}}^{q-1} I(a, q),$$

где

$$I(a, q) = \int_{-1/q\tau}^{+1/q\tau} S^3\left(\frac{a}{q} + z\right) e^{-2\pi i \left(\frac{a}{q} + z\right) N} dz.$$

По лемме 3 в этой формуле

$$S\left(\frac{a}{q} + z\right) = \frac{\mu(q)}{\varphi(q)} M(z) + O(Ne^{-c\sqrt{L}});$$

отсюда

$$S^3\left(\frac{a}{q} + z\right) = \frac{\mu(q)}{\varphi^3(q)} M^3(z) + O(N^3e^{-c\sqrt{L}}).$$

Тем самым для $I(a, q)$ находим

$$I(a, q) = \frac{\mu(q)}{\varphi^3(q)} e^{-2\pi i \frac{a}{q} N} \int_{-1/q\tau}^{+1/q\tau} M^3(z) e^{-2\pi i z N} dz +$$

$$+ O(N^2L^B q^{-1} e^{-c\sqrt{L}}).$$

Интеграл в последней формуле заменим близким к нему интегралом κ . Имеем

$$\int_{-1/q\tau}^{+1/q\tau} M^3(z) e^{-2\pi i z N} dz = \int_{-0,5}^{+0,5} M^3(z) e^{-2\pi i z N} dz + R = \kappa + R,$$

где $|R| \leq 2 \int_{+1/q\tau}^{+0,5} |M(z)|^3 dz.$

Оценим $|M(z)|$ при $0 < |z| \leq 1/2$. Интегрируя один раз по частям, найдем

$$\int_3^N \frac{e^{2\pi izu}}{\log u} du = \frac{1}{2\pi iz} \frac{e^{2\pi izu}}{\log u} \Big|_3^N - \frac{1}{2\pi iz} \int_3^N e^{2\pi izu} d \frac{1}{\log u};$$

$$|M(z)| = O\left(\frac{1}{|z|}\right).$$

Поэтому

$$|R| \ll \int_{+1/q\tau}^{+0,5} \frac{dz}{z^3} \ll q^2 \tau^2 \ll N^2 L^{-2B+2A}.$$

Итак, последовательно получаем

$$I(a, q) = \frac{\mu(q)}{\varphi^3(q)} e^{-2\pi i \frac{a}{q} N} \kappa + O\left(\frac{1}{\varphi^3(q)} N^2 L^{-2B+2A}\right);$$

$$J_1 = \kappa \sum_{q < Q} \frac{\mu(q)}{\varphi^3(q)} \sum_{\substack{a=0 \\ (a,q)=1}}^{q-1} e^{-2\pi i \frac{a}{q} N} + O(N^2 L^{-2B+2A}).$$

Двойную сумму в последнем равенстве преобразуем так же, как раньше преобразовали интеграл по z . Имеем

$$\sum_{q < Q} \frac{\mu(q)}{\varphi^3(q)} \sum_{\substack{a=0 \\ (a,q)=1}}^{q-1} e^{-2\pi i \frac{a}{q} N} = \sum_{q=1}^{\infty} \frac{\mu(q)}{\varphi^3(q)} \sum_{\substack{a=0 \\ (a,q)=1}}^{q-1} e^{-2\pi i \frac{a}{q} N} - R_1 = \sigma - R_1,$$

где

$$|R_1| < \left| \sum_{q > Q} \frac{\mu(q)}{\varphi^3(q)} \sum_{\substack{a=0 \\ (a,q)=1}}^{q-1} e^{-2\pi i \frac{a}{q} N} \right| \ll$$

$$\ll \sum_{q > Q} \frac{1}{\varphi^2(q)} \ll \int_Q^{\infty} \frac{(\log \log u)^2}{u^2} du \ll L^{-A+1}.$$

Следовательно,

$$J_1 = \sigma \kappa + O(\kappa L^{-A+1}) + O(N^2 L^{-2B+2A}).$$

Наконец,

$$|\kappa| = \left| \int_{-0,5}^{+0,5} M^3(z) e^{-2\pi izN} dz \right| \leq N \int_{-0,5}^{+0,5} |M(z)|^2 dz =$$

$$= N \sum_{3 \leq n \leq N} \frac{1}{\log^2 n} \ll N^2 L^{-2}.$$

Таким образом, получили окончательную формулу:

$$J_1 = \sigma \kappa + O(N^2 L^{-A-1}) + O(N^2 L^{-2B+2A}),$$

что и требовалось доказать.

Исследуем более подробно величины κ и σ .

Лемма 5. *Имеет место равенство*

$$\kappa = \kappa(N) = \frac{N^2}{2 \log^3 N} + O\left(\frac{N^2}{\log^4 N}\right).$$

Доказательство. Пусть

$$M_0(z) = \sum_{n=3}^N \frac{e^{2\pi izn}}{\log N}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} |M(z) - M_0(z)| &\leq \sum_{n=3}^N \left(\frac{1}{\log n} - \frac{1}{\log N} \right) \leq \\ &\leq \int_2^N \left(\frac{1}{\log u} - \frac{1}{\log N} \right) du = O\left(\frac{N}{\log^2 N}\right). \end{aligned}$$

Полагая, далее,

$$\kappa_0 = \kappa_0(N) = \int_{-0,5}^{+0,5} M_0^3(z) e^{-2\pi izN} dz,$$

находим

$$|\kappa - \kappa_0| \leq \frac{N}{\log^2 N} \int_{-0,5}^{+0,5} (|M(z)|^2 + |M(z_0)|^2) dz \ll \frac{N^2}{\log^4 N}.$$

Следовательно,

$$\kappa = \kappa_0 + O\left(\frac{N^2}{\log^4 N}\right) = \frac{1}{\log^3 N} I_0(N) + O\left(\frac{N^2}{\log^4 N}\right),$$

где $I_0(N)$ — число решений уравнения

$$n_1 + n_2 + n_3 = N, \quad 3 \leq n_1, n_2, n_3 \leq N - 6.$$

При фиксированном n_3 , $3 \leq n_3 \leq N - 6$, уравнение

$$n_1 + n_2 = N - n_3, \quad 3 \leq n_1, n_2 \leq N - 6$$

имеет $N - n_3 - 5$ решений; поэтому

$$I_0(N) = \sum_{n_3=3}^{N-6} (N - n_3 - 5) = \frac{N^2}{2} + O(N).$$

Итак,

$$\kappa(N) = \frac{N^2}{2 \log^3 N} + O\left(\frac{N^2}{\log^4 N}\right),$$

что и требовалось доказать.

Лемма 6. *Имеет место равенство*

$$\sigma = \sigma(N) = \prod_{p \setminus N} \left(1 - \frac{1}{(p-1)^2}\right) \prod_{p \times N} \left(1 + \frac{1}{(p-1)^3}\right).$$

Доказательство. Покажем прежде всего, что сумма $T(q)$,

$$T(q) = \sum_{\substack{a=1 \\ (a,q)=1}}^q e^{-2\pi i \frac{a}{q} N},$$

является мультипликативной функцией q . Пусть $q = q_1 q_2$, $(q_1, q_2) = 1$. Тогда

$$\begin{aligned} T(q_1 q_2) &= \sum_{\substack{a=1 \\ (a,q)=1}}^{q_1 q_2} e^{-2\pi i \frac{a}{q} N} = \sum_{\substack{a_1=1 \\ (a_1, q_1)=1}}^{q_1} \sum_{\substack{a_2=1 \\ (a_2, q_2)=1}}^{q_2} e^{-2\pi i \frac{a_2 q_1 + a_1 q_2}{q_1 q_2} N} = \\ &= T(q_1) T(q_2). \end{aligned}$$

Отсюда следует мультипликативность $T(q)$ и $\gamma(q)$. Далее, так как

$$|\gamma(q)| \leq 1/\varphi^2(q),$$

то

$$\begin{aligned} \prod_{p < X} (1 + \gamma(p) + \gamma(p^2) + \dots) &= \sum_{q < X} \gamma(q) + O\left(\sum_{q > X} \frac{1}{\varphi^2(q)}\right) = \\ &= \sum_{q < X} \gamma(q) + O\left(\frac{\log \log X}{X}\right). \end{aligned}$$

Переходя к пределу $X \rightarrow +\infty$, найдем

$$\sigma = \prod_p (1 + \gamma(p) + \gamma(p^2) + \dots).$$

Из определения $\gamma(q)$ получаем

$$\gamma(p) = \begin{cases} -\frac{1}{(p-1)^2}, & \text{если } p \setminus N; \\ \frac{1}{(p-1)^3}, & \text{если } p \times N; \end{cases}$$

$$\gamma(p^r) = 0, \quad \text{если } r \geq 2.$$

Таким образом,

$$\begin{aligned}\sigma &= \prod_{p \setminus N} \left(1 - \frac{1}{(p-1)^2}\right) \prod_{p \times N} \left(1 + \frac{1}{(p-1)^3}\right) = \\ &= \prod_p \left(1 + \frac{1}{(p-1)^3}\right) \prod_{p \setminus N} \left(1 - \frac{1}{p^2 - 3p + 3}\right),\end{aligned}$$

что и требовалось доказать.

Из доказанных лемм следует основной результат настоящего параграфа.

Теорема 1. *Для J_1 справедлива асимптотическая формула*

$$J_1 = J_1(N) = \frac{N^2}{2(\log N)^3} \sigma + O\left(\frac{N^2}{(\log N)^4}\right),$$

где

$$\sigma = \sigma(N) = \prod_{p \setminus N} \left(1 - \frac{1}{(p-1)^2}\right) \prod_{p \times N} \left(1 + \frac{1}{(p-1)^3}\right).$$

Замечания.

1. Постоянная в знаке O в доказанной теореме неэффективна, так как, по существу, применялось следствие 2 теоремы 6, IX.

2. Ниже (см. § 3) будет получена асимптотическая формула для J_1 с эффективной постоянной в знаке O .

3. При нечетном N ввиду очевидных неравенств

$$\prod_{p \setminus N} \left(1 - \frac{1}{(p-1)^2}\right) > \prod_p \left(1 - \frac{1}{p^2}\right) = \frac{6}{\pi^2}, \quad \prod_{p \times N} \left(1 + \frac{1}{(p-1)^3}\right) > 2$$

находим

$$\sigma(N) > 1.$$

Чтобы получить асимптотическую формулу для $J = J(N)$, надо оценить J_2 , а для этого нужна оценка $|S(\alpha)|$ при α , принадлежащих множеству E_2 .

§ 3. Линейные тригонометрические суммы с простыми числами

Докажем теорему И. М. Виноградова об оценке линейной тригонометрической суммы с простыми числами. Следствием этой теоремы и теоремы 1 будет асимптотическая формула для числа представлений нечетного N суммой трех простых чисел.

Теорема 2. Пусть

$$H = e^{0,5\sqrt{\log N}}, \quad \alpha = \frac{a}{q} + \frac{\theta}{q^2},$$

$$(a, q) = 1, \quad |\theta| \leq 1, \quad 1 < q \leq N;$$

$$S = S(\alpha) = \sum_{p \leq N} e^{2\pi i \alpha p}.$$

Тогда

$$S \ll N(\log N)^3 \Delta,$$

где

$$\Delta = \frac{1}{H} + \sqrt{\frac{1}{q} + \frac{q}{N}}.$$

Доказательство. Возьмем

$$P = \prod_{p \leq \sqrt{N}} p;$$

пользуясь свойством функции Мёбиуса, найдем

$$\sum_{\substack{n=1 \\ (n, P)=1}}^N e^{2\pi i \alpha n} = \sum_{d \mid P} \mu(d) S(d),$$

$$S(d) = \sum_{0 < m \leq Nd^{-1}} e^{2\pi i \alpha m d}.$$

Отсюда

$$S = S_0 - S_1 + O(\sqrt{N}), \quad (5)$$

где

$$S_0 = \sum_{d_0 m \leq N} e^{2\pi i \alpha m d_0}, \quad \mu(d_0) = +1,$$

$$S_1 = \sum_{m d_1 \leq N} e^{2\pi i \alpha m d_1}, \quad \mu(d_1) = -1.$$

Суммы S_0 и S_1 оцениваются одинаково. Оценим S_0 . Отрезок $0 < m \leq N$ разобьем на $\ll \log N$ отрезков вида $M < m \leq M'$, $M' \leq 2M$ и рассмотрим сумму

$$S(M) = \sum_{\substack{m d_0 \leq N \\ M < m \leq M'}} e^{2\pi i \alpha m d_0}. \quad (6)$$

Если $M \geq H$, то, применяя лемму 5, VI, найдем

$$S(M) = \sum_{d_0 \leq NM^{-1}} \sum_{M < m \leq \min(M', \frac{N}{d_0})} e^{2\pi i \alpha m d_0} \ll$$

$$\ll \sum_{d_0 \leq NM^{-1}} \min\left(\frac{N}{d_0}, \frac{1}{\|\alpha d_0\|}\right) \leq \sum_{n \leq NM^{-1}} \min\left(\frac{N}{n}, \frac{1}{\|\alpha n\|}\right) \ll$$

$$\leq \sum_{0 < n < 0,5q} + \sum_{0,5q < n \leq 1,5q} + \dots + \sum_{(r-0,5)q < n \leq (r+0,5)q}, \quad (7)$$

где $r \leq NM^{-1}q^{-1}$. Пусть k — наименьший неотрицательный вычет числа an по модулю q при $1 \leq n < q$; тогда

$$\| \alpha n \| = \left\| \frac{an}{q} + \frac{\theta n}{q^2} \right\| = \left\| \frac{k + 0,5 \theta_1}{q} \right\|, \quad |\theta_1| \leq 1.$$

Отсюда, полагая

$$u = \begin{cases} k, & \text{если } k \leq 0,5q; \\ q - k, & \text{если } k > 0,5q, \end{cases}$$

найдем

$$\| \alpha n \| \geq \frac{u - 0,5}{q}.$$

Поэтому первое слагаемое в (7)

$$\leq q \sum_{0 < u \leq 0,5q} \frac{1}{u - 0,5} \ll q \log q.$$

К остальным слагаемым в (7) применим лемму 6, VI; получим

$$\begin{aligned} S(M) &\ll q \log q + \sum_{l=1}^r \left(\frac{N}{(l-0,5)q} + q \log q \right) \ll \\ &\ll q \log q + Nq^{-1} \log N + NM^{-1} \log q \ll \\ &\ll N(\log N) \left(\frac{q}{N} + \frac{1}{q} + \frac{1}{H} \right). \quad (8) \end{aligned}$$

Пусть теперь $M < H$. Сумму $S(M)$ представим в виде

$$S(M) = \sum_{M < m \leq M'} \sum_{d_0 \leq Nm^{-1}} e^{2\pi i \alpha m d_0}.$$

Обозначим буквой δ_k каждое d_0 , имеющее ровно k простых сомножителей, превосходящих H^2 . Если k_0 — максимальное значение k для $d_0 \leq N$, то $2^{k_0} \leq N$, т. е. $k_0 \leq \log N$. Имеем

$$\begin{aligned} S(M) &= \sum_{k=0}^{k_0} S_k(M), \\ S_k(M) &= \sum_{M < m \leq M'} \sum_{\delta_k \leq Nm^{-1}} e^{2\pi i \alpha m \delta_k}. \end{aligned}$$

Оценим $S_0(M)$. Пусть κ — число простых сомножителей δ_0 , $\delta_0 > NM^{-1}H^{-1}$; тогда

$$H^{2\kappa} > NH^{-2}; \quad (2\kappa + 2) 0,5 \sqrt{\log N} > \log N;$$

$$\kappa > \sqrt{\log N} - 1; \quad \tau(\delta_0) > 2^{\sqrt{\log N} - 1}.$$

Применяя тривиальное неравенство

$$\sum_{n \leq x} \tau(n) = \sum_{n \leq x} \left[\frac{x}{n} \right] \ll x \log x,$$

будем иметь

$$\begin{aligned} S_0(M) &\ll \sum_{M < m \leq M'} \left(\sum_{\delta_0 < nM^{-1}H^{-1}} 1 + \sum_{NM^{-1}H^{-1} < \delta_0 < Nm^{-1}} \frac{\tau(\delta_0)}{2^{\sqrt{\log N}}} \right) \ll \\ &\ll M \left(\frac{N}{MH} + \frac{N \log N}{M \cdot 2^{\sqrt{\log N}}} \right) \ll \frac{N}{H}. \end{aligned}$$

Оценим $S_k(M)$, $k > 0$. Сравним $S_k(M)$ с суммой

$$T_k = \sum_{M < m \leq M'} \sum_{pt \leq Nm^{-1}} e^{2\pi i \alpha m p t},$$

где p пробегает простые числа интервала $H^2 < p \leq \sqrt{N}$, а t пробегает значения d_1 , имеющие ровно $k-1$ простых сомножителей, превосходящих H^2 . Пусть $k > 1$. Членов с $(p, t) = p$ сумма T_k имеет

$$\ll \sum_{M < m \leq M'} \sum_{H^2 < p \leq \sqrt{N}} \frac{NM^{-1}}{p^2} \ll \frac{N}{H}.$$

Остальные члены суммы T_k такие же, что и члены суммы $S_k(M)$, причем каждый член суммы $S_k(M)$ входит в T_k ровно k раз. Поэтому

$$S_k(M) = \frac{1}{k} T_k + O\left(\frac{N}{kH}\right).$$

Последнее равенство справедливо и при $k=1$. Оценим T_k . Обозначим $mp = u$; интервал

$$MH^2 < u \leq M'\sqrt{N}$$

разобьем на $\ll \log N$ интервалов $U < u \leq U'$, $U < U' \leq 2U$, и пусть

$$T_k(U) = \sum'_{U < u \leq U'} \sum_{ut \leq N} e^{2\pi i \alpha u t}.$$

Применяя лемму 6, VI, получим

$$\begin{aligned} |T_k(U)|^2 &\leq U \sum_{u=U+1}^{2U} \left| \sum_{ut \leq N} e^{2\pi i \alpha u t} \right|^2 = \\ &= U \sum_{t_1 < NU^{-1}} \sum_{t_2 < NU^{-1}} \sum_{U < u \leq \min\left(2U, \frac{N}{t_1}, \frac{N}{t_2}\right)} e^{2\pi i \alpha u (t_1 - t_2)} \ll \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\ll U \sum_{t_1 \leq NU^{-1}} \sum_{t_2 \leq NU^{-1}} \min\left(U, \frac{1}{\|\alpha(t_1 - t_2)\|}\right) \ll \\
&\ll U \frac{N}{U} \left(\frac{N}{Uq} + 1\right) (U + q \log q) \ll N^2 \left(\frac{1}{q} + \frac{U}{N} + \frac{1}{U} + \frac{q}{N}\right) \times \\
&\quad \times \log N \ll N^2 \left(\frac{1}{q} + \frac{q}{N} + \frac{1}{H^2}\right) \log N; \\
&|T_h(U)| \ll N \sqrt{\log N} \left(\frac{1}{H} + \sqrt{\frac{1}{q} + \frac{q}{N}}\right); \\
&|T_k| \ll N (\log N)^{3/2} \left(\frac{1}{H} + \sqrt{\frac{1}{q} + \frac{q}{N}}\right).
\end{aligned}$$

Отсюда и из (8)

$$\begin{aligned}
S(M) &\ll |S_0(M)| + \sum_{k=1}^{h_0} \left(\frac{1}{k} |T_k| + \frac{N}{kH}\right) \ll \\
&\ll N (\log N)^{3/2} (\log \log N) \left(\frac{1}{H} + \sqrt{\frac{1}{q} + \frac{q}{N}}\right); \\
S &\ll N (\log N)^3 \left(\frac{1}{H} + \sqrt{\frac{1}{q} + \frac{q}{N}}\right),
\end{aligned}$$

что и требовалось доказать.

Теорема 3. Для числа $J(N)$ представлений нечетного N суммой трех простых чисел справедлива следующая асимптотическая формула:

$$\begin{aligned}
J(N) &= \sigma(N) \frac{N^2}{2(\log N)^3} + O\left(\frac{N^2}{(\log N)^4}\right), \\
\sigma(N) &= \prod_p \left(1 + \frac{1}{(p-1)^3}\right) \prod_{p \setminus N} \left(1 - \frac{1}{p^2 - 3p + 3}\right) > 1.
\end{aligned} \tag{9}$$

Доказательство. Из леммы 1, формул § 2 и теоремы 1 при $A = 15$ имеем

$$\begin{aligned}
J(N) = J_1(N) + J_2(N) &= \sigma(N) \frac{N^2}{2(\log N)^3} + J_2(N) + \\
&\quad + O\left(\frac{N^2}{(\log N)^4}\right),
\end{aligned}$$

где

$$J_2(N) = \int_{E_2} S^3(\alpha) e^{-2\pi i \alpha N} d\alpha.$$

По определению множества E_2 для $\alpha \in E_2$ выполняется равенство

$$\alpha = \frac{a}{q} + \frac{0}{q^2}, \quad (a, q) = 1,$$

$$|\theta| \leq 1, \quad (\log N)^{15} < q < N (\log N)^{-20};$$

по теореме 2

$$S(\alpha) \ll N (\log N)^{-4}, \quad \alpha \in E_2.$$

Поэтому

$$J_2(N) \ll \max_{\alpha \in E_2} |S(\alpha)| \int_0^1 |S(\alpha)|^2 d\alpha \ll N^2 (\log N)^{-5}.$$

Отсюда следует утверждение теоремы.

Следствие (проблема Гольдбаха). *Существует такое N_0 , что каждое нечетное $N > N_0$ есть сумма трех простых чисел.*

В силу замечания к теореме 1 постоянная в знаке O в формуле (9) неэффективна, поэтому и постоянная N_0 неэффективна. В следующем параграфе будет получена эффективная асимптотическая формула для $J(N)$, тем самым и постоянная N_0 в следствии станет эффективной.

§ 4. Эффективная теорема

Прежде всего получим нетривиальную оценку тригонометрической суммы с простыми числами $S(\alpha)$ и в том случае, когда знаменатель рационального приближения α мал.

Лемма 7. *Пусть $\varepsilon_0 > 0$ — достаточно малое постоянное число,*

$$\tau \geq N e^{-\varepsilon_0 \sqrt{\log N}}, \quad N_1 \geq N e^{-\varepsilon_0 \sqrt{\log N}},$$

$$\alpha = \frac{a}{q} + z; \quad (a, q) = 1, \quad 0 < q \leq e^{\varepsilon_0 \sqrt{\log N}}, \quad |z| \leq \frac{1}{q\tau}.$$

Тогда

$$S(\alpha) = \sum_{N-N_1 < p \leq N} e^{2\pi i \alpha p} \ll \frac{N_1 \log \log q}{\sqrt{q} \log N}.$$

Доказательство. По теореме 6, IX

$$\pi(n; q, l) = \frac{\text{Li } n}{\varphi(q)} - E_1 \frac{\chi_1(l)}{\varphi(q)} \int_2^n \frac{u^{\beta_1-1}}{\log u} du + \\ + O\left(ne^{-c'\sqrt{\log n}}\right), \quad \sqrt{N} \leq n \leq N.$$

Поэтому, повторяя первую часть доказательства теоремы 1 — преобразование $S\left(\frac{a}{q} + z\right)$, будем иметь

$$S(\alpha) = S\left(\frac{a}{q} + z\right) = \sum_{\substack{l=1 \\ (l,q)=1}}^q T(l) e^{2\pi i \frac{\alpha}{q} l} + O(\sqrt{N}),$$

$$T(l) = \sum_{N-N_1 < n < N} (t(n) - t(n-1)) e^{2\pi i \alpha n} + \\ + O\left(Ne^{-c_1\sqrt{\log N}}\right) + O\left(N^2 e^{-c_1\sqrt{\log N}} |z|\right),$$

где

$$t(n) = \frac{\text{Li } n}{\varphi(q)} - E_1 \frac{\chi_1(l)}{\varphi(q)} \int_2^n \frac{u^{\beta_1-1}}{\log u} du;$$

таким образом,

$$S(\alpha) = \frac{\mu(q)}{\varphi(q)} \sum_{N-N_1 < n < N} \left(\int_{n-1}^n \frac{du}{\log u} \right) e^{2\pi i \alpha n} - \\ - \frac{E_1}{\varphi(q)} \left(\sum_{l=1}^q \chi_1(l) e^{2\pi i \frac{\alpha}{q} l} \right) \sum_{N-N_1 < n < N} \left(\int_{n-1}^n \frac{u^{\beta_1-1}}{\log u} du \right) e^{2\pi i \alpha n} + \\ + O\left(qNe^{-c_1\sqrt{\log N}}\right) + O\left(qN^2 e^{-c_1\sqrt{\log N}} |z|\right). \quad (10)$$

Так как χ_1 — некоторый действительный характер по модулю q , то (см. гл. VIII, § 1)

$$\left| \sum_{l=1}^q \chi_1(l) e^{2\pi i \frac{\alpha}{q} l} \right|^2 = \frac{1}{\varphi(q)} \sum_{\substack{m=1 \\ (m,q)=1}}^q \left| \sum_{l=1}^q \chi_1(l) e^{2\pi i \frac{m}{q} l} \right|^2 \leq \\ \leq \frac{1}{\varphi(q)} \sum_{m=1}^q \sum_{l=1}^q \sum_{\substack{n=1 \\ (l,q)=1 \\ (n,q)=1}}^q \chi_1(l) \chi_1(n) e^{2\pi i \frac{m}{q} (l-n)} \leq q.$$

Переходя к неравенствам в (10), найдем

$$S(\alpha) \ll \frac{\text{Li } N - \text{Li}(N - N_1)}{\varphi(q)} + \frac{\sqrt{q}(\text{Li } N - \text{Li}(N - N_1))}{\varphi(q)} + \\ + qNe^{-c_1\sqrt{\log N}} + qN^2e^{-c_1\sqrt{\log N}} |z| \ll \frac{N_1}{\log N} \cdot \frac{\log \log q}{\sqrt{q}},$$

что и требовалось доказать.

Теорема 4. Для числа $J(N)$ представлений нечетного N суммой трех простых чисел справедлива следующая асимптотическая формула:

$$J(N) = \sigma(N) \frac{N^2}{2(\log N)^3} + O\left(\frac{N^2}{(\log N)^{3.4}}\right),$$

где

$$\sigma(N) = \prod_p \left(1 + \frac{1}{(p-1)^3}\right) \prod_{p \mid N} \left(1 - \frac{1}{p^2 - 3p + 3}\right)$$

и постоянная в знаке O — эффективная.

Доказательство. Возьмем $\tau = N(\log N)^{-20}$; по лемме 2 для $\alpha \in \left[-\frac{1}{\tau}, 1 - \frac{1}{\tau}\right]$

$$\alpha = \frac{a}{q} + z, \quad 1 \leq q \leq \tau, \quad (a, q) = 1, \quad |z| \leq \frac{1}{q\tau}. \quad (11)$$

Через E_1 обозначим те α , для которых $q \leq (\log N)^3$, а через E_2 — множество остальных α . Как и раньше,

$$J = J_1 + J_2,$$

$$\text{где } J_1 = \int_{E_1} S^3(\alpha) e^{-2\pi i \alpha N} d\alpha, \quad J_2 = \int_{E_2} S^3(\alpha) e^{-2\pi i \alpha N} d\alpha.$$

Оценим J_2 . Если в представлении (11)

$$q \geq (\log N)^{20},$$

то по теореме 2

$$S(\alpha) \ll N(\log N)^{-7};$$

если же $(\log N)^3 < q \leq (\log N)^{20}$, то по лемме 7

$$S(\alpha) \ll N(\log N)^{-2.5}(\log \log N).$$

Поэтому

$$J_2 \ll \max_{\alpha \in E_2} |S(\alpha)| \int_0^1 |S(\alpha)|^2 d\alpha \ll N^2 (\log N)^{-3.5} (\log \log N).$$

Вычислим теперь J_1 . Прежде всего рассмотрим множество всех q , не превосходящих y ,

$$y = e^{\frac{\log N}{(\log \log N)^2}};$$

по следствию 3 теоремы 6, IX при $\sqrt{N} \leq x \leq N$, за исключением, быть может, «особых» модулей q , которые кратны некоторому q_0 ,

$$q_0 \geq c \log^2 y (\log \log y)^{-8} \geq c \log^2 N (\log \log N)^{-12},$$

для остальных справедлива асимптотическая формула

$$\pi(x; q, l) = \frac{\text{Li } x}{\varphi(q)} + O\left(xe^{-c_1(\log \log x)^2}\right).$$

Интеграл J_1 представим в виде суммы двух интегралов:

$$J_1 = J_1' + J_1'',$$

где интегрирование в J_1' ведется по таким α , у которых в представлении (11) $q \leq (\log N)^3$ не принадлежат к «особым» модулям, а в J_1'' интегрирование ведется по таким α , у которых в представлении (11) $q \leq (\log N)^3$ принадлежат множеству «особых» модулей. Повторяя доказательство теоремы 1 для неособых модулей, будем иметь

$$J_1' = \frac{N^2}{2(\log N)^3} \sum'_{q < (\log N)^3} \gamma(q) + O\left(\frac{N^2}{\log^4 N}\right), \quad (12)$$

где суммирование в последней сумме ведется по q , не принадлежащим к «особым» модулям,

$$\gamma(q) = \frac{\mu(q)}{\varphi^3(q)} \sum_{\substack{\alpha=1 \\ (\alpha, q)=1}}^q e^{-2\pi i \frac{\alpha}{q} N}.$$

Оценим J_1'' . Возьмем $D = [(\log N)^{30}]$, $A = ND^{-1}$. Тогда

$$\begin{aligned} S\left(\frac{a}{q} + z\right) &= \sum_{s=1}^D \sum_{(s-1)A < p \leq sA} e^{2\pi i \left(\frac{a}{q} + z\right)p} = \\ &= \sum_{s=1}^D \sum_{(s-1)A < p \leq sA} e^{2\pi i \frac{a}{q} p} \cdot e^{2\pi i z s A} + O(|z|AN) = \\ &= \sum_{s=1}^D e^{2\pi i z s A} \sum_{(s-1)A < p \leq sA} e^{2\pi i \frac{a}{q} p} + O(Nq^{-1}(\log N)^{-10}); \end{aligned}$$

отсюда

$$S^3 \left(\frac{a}{q} + z \right) e^{-2\pi i \left(\frac{a}{q} + z \right) N} = \\ = \sum_{s_1, s_2, s_3=1}^D e^{2\pi i z A (s_1 + s_2 + s_3 - D)} W(s_1, s_2, s_3) + \\ + O \left(\left| S \left(\frac{a}{q} + z \right) \right|^2 N q^{-1} (\log N)^{-10} \right) + O(N^3 q^{-3} (\log N)^{-30}),$$

где

$$W(s_1, s_2, s_3) = \\ = \sum_{(s_1-1)A < p_1 \leq s_1 A} \sum_{(s_2-1)A < p_2 \leq s_2 A} \sum_{(s_3-1)A < p_3 \leq s_3 A} e^{2\pi i \frac{a}{q} (p_1 + p_2 + p_3 - N)}.$$

Таким образом, для J_1'' получаем оценку

$$J_1'' \ll \sum_{q < (\log N)^3}'' \sum_{\substack{a=1 \\ (a, q)=1}}^q \left(\frac{1}{q\tau} \sum_{\substack{s_1, s_2, s_3=1 \\ s_1 + s_2 + s_3 = D}}^D |W(s_1, s_2, s_3)| + \right. \\ \left. + \sum_{\substack{s_1, s_2, s_3=1 \\ s_1 + s_2 + s_3 \neq D}}^D \frac{1}{|s_1 + s_2 + s_3 - D| A} |W(s_1, s_2, s_3)| \right) + \\ + N^2 (\log N)^{-10}.$$

Для оценки $|W(s_1, s_2, s_3)|$ применим лемму 7; находим

$$|W(s_1, s_2, s_3)| \ll \left(\frac{A \log \log N}{\sqrt{q} \log N} \right)^3.$$

Далее, число решений уравнения

$$s_1 + s_2 + s_3 - D = \lambda$$

не превосходит D^2 , $\lambda \ll D$.

Поэтому

$$J_1'' \ll \sum_{q < (\log N)^3}'' \left(\frac{1}{\tau} D^2 \frac{A^3 (\log \log N)^3}{q^{3/2} (\log N)^3} + \frac{q}{A} D^2 \frac{A^3 (\log \log N)^4}{q^{3/2} (\log N)^3} \right) + \\ + N^2 (\log N)^{-10} \ll N^2 (\log N)^{-10} + \frac{N^2 (\log \log N)^4}{(\log N)^3} \sum_{q < (\log N)^3}'' \frac{1}{\sqrt{q}},$$

причем суммирование в последней сумме ведется по «особым» q . Поэтому

$$\begin{aligned} \sum_{q \leq (\log N)^3} \frac{1}{\sqrt{q}} &\ll \frac{1}{\sqrt{q_0}} \sum_{q_0 m \leq (\log N)(\log \log N)^{22}} \frac{1}{\sqrt{m}} \ll \\ &\ll \frac{1}{\sqrt{q_0}} \sqrt{\log N} (\log \log N)^6 \ll \frac{(\log \log N)^{12}}{\sqrt{\log N}}. \end{aligned}$$

Окончательно получаем

$$J_1'' \ll \frac{N^2 (\log \log N)^{16}}{(\log N)^{3,5}}. \quad (13)$$

Из определения $\gamma(q)$ и «особых» модулей q следует

$$\begin{aligned} \sum_{q \leq (\log N)^3} \gamma(q) &\ll \sum_{q \leq (\log N)^3} \frac{1}{\varphi^2(q)} \ll \sum_{q \leq (\log N)^3} \frac{(\log \log q)^2}{q^2} \ll \\ &\ll q_0^{-2} (\log \log N)^2 \ll (\log N)^{-4} (\log \log N)^{25}, \end{aligned}$$

из (13) и последней оценки находим

$$J_1'' = \frac{N^2}{2(\log N)^3} \sum_{q \leq (\log N)^3} \gamma(q) + O\left(\frac{N^2 (\log \log N)^{16}}{(\log N)^{3,5}}\right).$$

Объединяя полученное выражение для J_1'' с (12), будем иметь асимптотическую формулу для J_1 , а следовательно, и для J :

$$\begin{aligned} J_1 &= \frac{N^2}{2(\log N)^3} \sum_{q \leq (\log N)^3} \gamma(q) + O\left(\frac{N^2 (\log \log N)^{16}}{(\log N)^{3,5}}\right) = \\ &= \sigma(N) \frac{N^2}{2(\log N)^3} + O\left(\frac{N^2}{(\log N)^{3,4}}\right); \end{aligned}$$

$$J = \sigma(N) \frac{N^2}{2(\log N)^3} + O\left(\frac{N^2}{(\log N)^{3,4}}\right),$$

что и требовалось доказать.

ЗАДАЧИ

1. При фиксированных натуральных числах n, m, k получить асимптотическую формулу для числа решений уравнения

$$np_1 + mp_2 + kp_3 = N$$

в простых числах p_1, p_2, p_3 .

2. Пусть $K(X)$ — число четных чисел, не превосходящих X и не представимых суммой двух простых чисел. Доказать, что при

любом фиксированном $D > 0$

$$K(X) = O(X(\ln X)^{-D}).$$

3. Пусть P — целое положительное число; z пробегает целые числа z_1, \dots, z_n ; S' обозначает сумму значений функции $f(z) \geq 0$, распространенную на значения z , взаимно простые с P ; S_d означает сумму значений функции $f(z)$, распространенную на значения z , кратные d . Тогда при четном $m > 0$ имеем

$$S' \leq \sum_{\substack{d \setminus P \\ \Omega(d) \leq m}} \mu(d) S_d.$$

4. а) Пусть $k \leq x^{0,9}$, $\ln b = \ln x \cdot (1000 \ln \ln x)^{-1}$; $0 \leq l < k$, $(l, k) = 1$. Тогда для числа T чисел вида $kn + l$, $n = 0, 1, \dots$, не делящихся на простые $\leq b$ и не превосходящих x , имеем оценку

$$T \leq \frac{cx \ln \ln x}{\varphi(k) \ln x}.$$

б) Пусть $0 < \alpha < 1$, $k \leq x^\alpha$, $x \geq x_0 > 0$. Тогда

$$\pi(x; k, l) \leq \frac{cx \ln \ln x}{\varphi(k) \ln x}.$$

5. Доказать, что

$$\sum_{p < x} \tau(p-1) = c_0 x + O\left(\frac{x(\ln \ln x)^3}{\ln x}\right),$$

где $c_0 > 0$ — абсолютная постоянная.

6. а) Пусть p — простое число, $(k, p) = 1$, q — простые числа. Тогда существует абсолютная постоянная $\gamma > 0$ такая, что

$$\sigma = \left| \sum_{q < p^\gamma} \left(\frac{q+k}{p} \right) \right| \leq c p^{\gamma-\delta},$$

где $\delta = \delta(\gamma) > 0$.

б) При условиях а) число квадратичных вычетов (невыветов) вида $q+k$, $q \leq p^\gamma$, по модулю p равно

$$\pi(p^\gamma) + O(p^{\gamma-\delta}).$$

7. Пусть p — простое число, $(k, p) = 1$; существует абсолютная постоянная $\gamma > 0$ такая, что

$$\text{а) } \left| \sum_{\substack{n < p^\gamma \\ \mu(n) \neq 0}} \left(\frac{\mu(n)n+k}{p} \right) \right| \leq c p^{\gamma-\delta}, \quad \delta = \delta(\gamma) > 0;$$

б) число квадратичных вычетов (невыветов) вида $\mu(n)n+k$, $\mu(n) \neq 0$, $n \leq p^\gamma$, по модулю p равно

$$\frac{6}{\pi^2} p^\gamma + O(p^{\gamma-\delta}), \quad \delta = \delta(\gamma) > 0.$$

ПРОБЛЕМА ВАРИНГА

В настоящей главе исследуется вопрос о представимости натуральных чисел N суммой фиксированного числа одних и тех же фиксированных степеней натуральных чисел, т. е. вопрос о разрешимости в натуральных числах x_1, x_2, \dots, x_k уравнения

$$x_1^n + x_2^n + \dots + x_k^n = N, \quad (1)$$

где $n \geq 3$, $k = k(n)$ (проблема Варинга). Проблема Варинга обобщает теорему Лагранжа о том, что каждое натуральное число есть сумма четырех квадратов целых чисел.

Здесь будут доказаны два утверждения И. М. Виноградова относительно $J_{k,n}(N)$ — числа решений уравнения (1); одно касается асимптотической формулы для $J_{k,n}(N)$, $N \rightarrow +\infty$, которая будет получена при числе слагаемых k порядка $n^2 \log n$; отсюда, в частности, следует существование $k = k(n)$, для которого (1) разрешимо в целых неотрицательных числах при любом $N \geq 1$; другое утверждение касается оценки сверху наименьшего k как функции n , при котором уравнение (1) разрешимо для всех достаточно больших N ; именно, будет доказано существование такого $N_0 = N_0(n)$, что все $N \geq N_0$ представляются в виде (1) при числе слагаемых k порядка $n \log n$, и будет доказано существование бесконечной последовательности N , которые непредставимы в виде (1) при $k \leq n$.

§ 1. Круговой метод в проблеме Варинга

Пусть $J_{k,n}(N)$ — число решений в натуральных числах x_1, x_2, \dots, x_k уравнения

$$x_1^n + x_2^n + \dots + x_k^n = N.$$

Везде ниже будем предполагать, что натуральное число N больше некоторого фиксированного $N_0 = N_0(n) > 0$, ко-

торое зависит только от n , $n \geq 3$. Как и при доказательстве леммы 1, X, имеем формулу, выражающую $J_{k,n}(N)$ через интеграл от тригонометрической суммы:

$$J = J_{k,n}(N) = \int_0^1 S^k(\alpha) e^{-2\pi i \alpha N} d\alpha = \int_{-\kappa}^{1-\kappa} S^k(\alpha) e^{-2\pi i \alpha N} d\alpha,$$

где теперь

$$S(\alpha) = \sum_{0 < x \leq P} e^{2\pi i \alpha x^n}, \quad P = N^{1/n}, \quad \tau = 2nP^{n-1}, \quad \kappa\tau = 1.$$

По лемме 2, X каждое α из промежутка $[-\kappa, 1-\kappa)$ представим в виде

$$\alpha = \frac{a}{q} + z, \quad 1 \leq q \leq \tau, \quad (a, q) = 1, \quad |z| \leq \frac{1}{q\tau};$$

через E_1 обозначим те α , для которых в последнем представлении $q \leq P^{0,25}$, через E_2 обозначим оставшиеся α . Множество E_1 состоит из непересекающихся отрезков $E(a, q)$ вида

$$\frac{a}{q} - \frac{1}{q\tau} \leq \alpha \leq \frac{a}{q} + \frac{1}{q\tau}, \quad 0 \leq a < q, \quad (a, q) = 1, \\ q = 1, 2, \dots, [P^{0,25}].$$

Обозначая через J_1 интеграл по множеству E_1 , а через J_2 — интеграл по множеству E_2 , будем иметь

$$J = J_1 + J_2.$$

Цель настоящего параграфа — получить асимптотическую формулу для J_1 . Прежде всего оценим сверху модуль «полной» тригонометрической суммы $S(a, q)$ и модуль тригонометрического интеграла $\gamma(z)$,

$$S(a, q) = \sum_{x=1}^q e^{2\pi i \frac{ax^2}{q}}, \quad (a, q) = 1; \\ \gamma(z) = \int_0^1 e^{2\pi i zx^n} dx.$$

Лемма 1. Для $|S(a, q)|$ справедливо неравенство

$$|S(a, q)| \leq n^6 q^{1-1/n}.$$

Доказательство. Если $q = q_1 q_2$, $(q_1, q_2) = 1$, то

$$S(a, q) = S(a_1, q_1) S(a_2, q_2).$$

Действительно, выражение $x_1q_2 + x_2q_1$ пробегает полную систему вычетов по модулю q , когда x_1 и x_2 пробегают полные системы вычетов по модулям соответственно q_1 и q_2 ; кроме того,

$$(x_1q_2 + x_2q_1)^n \equiv x_1^n q_2^n + x_2^n q_1^n \pmod{q}.$$

Поэтому

$$\begin{aligned} S(a, q) &= \sum_{x_1=1}^{q_1} \sum_{x_2=1}^{q_2} e^{2\pi i \frac{a(x_1q_2 + x_2q_1)^n}{q}} = \\ &= \sum_{x_1=1}^{q_1} e^{2\pi i \frac{aq_2^{n-1}}{q_1} x_1^n} \sum_{x_2=1}^{q_2} e^{2\pi i \frac{aq_1^{n-1}}{q_2} x_2^n} = S(a_1, q_1) S(a_2, q_2), \end{aligned}$$

где

$$a_1 \equiv a q_2^{n-1} \pmod{q_1}, (a_1, q_1) = 1, a_2 \equiv a q_1^{n-1} \pmod{q_2}, (a_2, q_2) = 1.$$

Отсюда

$$S(a, q) = S(a_1, p_1^{\alpha_1}) \dots S(a_r, p_r^{\alpha_r}), \quad (2)$$

где $q = p_1^{\alpha_1} \dots p_r^{\alpha_r}$ — каноническое разложение числа q . Оценим $|S(a, p^\alpha)|$, $\alpha \geq 1$, p — простое. Пусть $\alpha = 1$. Тогда

$$S(a, p) = \sum_{x=1}^p e^{2\pi i \frac{ax^n}{p}} = \frac{1}{p-1} \sum_{y=1}^{p-1} \sum_{x=1}^p e^{2\pi i \frac{ax^n y^n}{p}}.$$

Так как сравнение $y^n \equiv \lambda \pmod{p}$, $1 \leq y \leq p-1$, имеет не более n решений, то

$$\begin{aligned} |S(a, p)|^2 &\leq \frac{1}{p-1} \sum_{y=1}^{p-1} \left| \sum_{x=1}^p e^{2\pi i \frac{ax^n}{p} y^n} \right|^2 \leq \\ &\leq \frac{n}{p-1} \sum_{\lambda=1}^{p-1} \left| \sum_{x=1}^p e^{2\pi i \frac{ax^n}{p} \lambda} \right|^2 = \frac{n}{p-1} (pK - p^2), \end{aligned}$$

где через K обозначено число решений сравнения

$$x_1^n \equiv x_2^n \pmod{p}, \quad 1 \leq x_1, x_2 \leq p.$$

Далее, $K \leq 1 + n(p-1)$, следовательно,

$$\begin{aligned} |S(a, p)|^2 &\leq \frac{n}{p-1} (p - p^2 + np(p-1)) < n^2 p, \\ |S(a, p)| &< n \sqrt{p}. \end{aligned}$$

Пусть теперь $1 < \alpha \leq n$, $(n, p) = 1$. Тогда

$$\begin{aligned} S(a, p^\alpha) &= \sum_{y=0}^{p-1} \sum_{z=1}^{p^\alpha-1} e^{2\pi i \frac{a(y p^{\alpha-1} + z)^n}{p^\alpha}} = \\ &= \sum_{z=1}^{p^\alpha-1} e^{2\pi i \frac{az^n}{p^\alpha}} \sum_{y=0}^{p-1} e^{2\pi i \frac{anz^{n-1}y}{p}} = p \sum_{\substack{z=1 \\ z \equiv 0 \pmod{p}}}^{p^\alpha-1} e^{2\pi i \frac{az^n}{p^\alpha}} = p^{\alpha-1}. \end{aligned}$$

Если $\alpha > n$, то, обозначая через τ показатель, с которым p входит в каноническое разложение числа n , будем иметь

$$\begin{aligned} S(a, p^\alpha) &= \sum_{y=0}^{p^{\tau+1}-1} \sum_{z=1}^{p^{\alpha-\tau-1}} e^{2\pi i \frac{a(p^{\alpha-\tau-1}y+z)^n}{p^\alpha}} = \\ &= \sum_{z=1}^{p^{\alpha-\tau-1}} e^{2\pi i \frac{az^n}{p^\alpha}} \sum_{y=0}^{p^{\tau+1}-1} e^{2\pi i \frac{anz^{n-1}y}{p^{\tau+1}}} = p^{\tau+1} \sum_{\substack{z=1 \\ z \equiv 0 \pmod{p}}}^{p^{\alpha-\tau-1}} e^{2\pi i \frac{az^n}{p^\alpha}} = \\ &= p^{\tau+1} \sum_{z=1}^{p^{\alpha-\tau-2}} e^{2\pi i \frac{az^n}{p^{\alpha-n}}} = p^{n-1} S(a, p^{\alpha-n}). \end{aligned}$$

Для дальнейших рассуждений введем функцию $T(a, q)$,

$$T(a, q) = q^{-1+1/n} S(a, q).$$

Из полученных оценок $S(a, p^\alpha)$ находим: при $1 \leq \alpha \leq n$, $(p, n) = p$

$$|T(a, p^\alpha)| = p^{-\alpha(1-1/n)} |S(a, p^\alpha)| \leq p^{\alpha/n} \leq p \leq n;$$

при $\alpha = 1$, $(p, n) = 1$

$$|T(a, p^\alpha)| < p^{-1+1/n} n \sqrt{p} \leq np^{-1/6};$$

при $1 < \alpha \leq n$, $(p, n) = 1$

$$|T(a, p^\alpha)| = p^{-\alpha(1-\frac{1}{n})} p^{\alpha-1} = p^{\frac{\alpha}{n}-1} \leq 1.$$

Таким образом, при $1 \leq \alpha \leq n$

$$|T(a, p^\alpha)| \leq \begin{cases} n, & \text{если } p \leq n^6; \\ 1, & \text{если } p > n^6. \end{cases}$$

Последние неравенства справедливы при любом α , так как при $\alpha > n$

$$T(a, p^\alpha) = p^{-\alpha(1-1/n)} p^{n-1} S(a, p^{\alpha-n}) = T(a, p^{\alpha-n}).$$

Из (2) получаем

$$|S(a, q)| q^{-1+1/n} = |T(a_1, p_1^{\alpha_1})| \dots |T(a_r, p_r^{\alpha_r})| \leq n^{n^6},$$

что и требовалось доказать.

Следствие. При $k \geq 2n + 1$ сходится «особый» ряд $\sigma = \sigma(N)$ проблемы Варинга:

$$\sigma = \sigma(N) = \sum_{q=1}^{\infty} \sum_{\substack{0 \leq a < q \\ (a, q)=1}} \left(\frac{1}{q} S(a, q) \right)^k e^{-2\pi i \frac{aN}{q}}.$$

Лемма 2. Для $|\gamma(z)|$ справедливо неравенство

$$|\gamma(z)| \leq \min(1, 2|z|^{-1/n}) = Z(z).$$

Доказательство. Будем считать $z > 2^n$ и докажем второе утверждение леммы, так как при $0 \leq z \leq 2^n$ утверждение леммы тривиально. Замена переменной интегрирования $zx^n = u$ дает

$$\begin{aligned} \int_0^1 e^{2\pi i z x^n} dx &= \frac{1}{n} z^{-\frac{1}{n}} \int_0^z u^{-1+\frac{1}{n}} e^{2\pi i u} du = \\ &= \frac{1}{n} z^{-\frac{1}{n}} \left(\int_0^1 u^{-1+\frac{1}{n}} e^{2\pi i u} du + \int_1^z u^{-1+\frac{1}{n}} e^{2\pi i u} du \right). \end{aligned}$$

Первый интеграл по абсолютной величине не превосходит

$$\int_0^1 u^{-1+1/n} du = n;$$

второй интеграл, взятый один раз по частям, равен

$$\begin{aligned} \int_1^z u^{-1+1/n} e^{2\pi i u} du &= \frac{1}{2\pi i} u^{-1+1/n} e^{2\pi i u} \Big|_1^z + \\ &+ \frac{1}{2\pi i} \left(1 - \frac{1}{n} \right) \int_1^z u^{-2+1/n} e^{2\pi i u} du, \end{aligned}$$

и по абсолютной величине не превосходит

$$\frac{1}{\pi} + \frac{1}{2\pi} \left(1 - \frac{1}{n} \right) \int_1^z u^{-2+1/n} du < \frac{3}{2\pi} < n.$$

Отсюда получаем

$$|\gamma(z)| < 2z^{-1/n},$$

что и требовалось доказать.

Следствие. При $k > n$ сходится «особый» интеграл $\gamma = \gamma(n, k)$ проблемы Варинга:

$$\gamma = \gamma(n, k) = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_0^1 e^{2\pi i z x^n} dx \right)^k e^{-2\pi i z} dz.$$

Теорема 1. Для величины J_1 при $k \geq 2n + 1$ справедлива следующая формула:

$$J_1 = \sigma \gamma N^{\frac{k}{n}-1} + O\left(N^{\frac{k}{n}-1-\frac{1}{4n^2}}\right),$$

где

$$\sigma = \sigma(N) = \sum_{q=1}^{\infty} \sum_{\substack{0 \leq a < q \\ (a,q)=1}} \left(\frac{1}{q} S(a, q) \right)^k e^{-2\pi i \frac{aN}{q}},$$

$$\gamma = \gamma(n, k) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_0^1 e^{2\pi i z x^n} dx \right)^k e^{-2\pi i z} dz.$$

Доказательство. По определению J_1 и свойству множества E_1 имеем

$$J_1 = \sum_{q < P^{0,25}} \sum_{\substack{0 \leq a < q \\ (a,q)=1}} \int_{-1/q\tau}^{+1/q\tau} S^k\left(\frac{a}{q} + z\right) e^{-2\pi i \left(\frac{a}{q} + z\right)N} dz.$$

Преобразуем $S\left(\frac{a}{q} + z\right)$. Представляя x , $1 \leq x \leq P$, в виде $x = qt + s$, где $s = 1, 2, \dots, q$, а при фиксированном s переменная t меняется в пределах $\frac{1-s}{q} \leq t \leq \frac{P-s}{q}$, будем иметь

$$S\left(\frac{a}{q} + z\right) = \sum_{1 \leq x \leq P} e^{2\pi i \left(\frac{a}{q} + z\right)x^n} =$$

$$= \sum_{s=1}^q e^{2\pi i \frac{a}{q}s^n} \sum_{\frac{1-s}{q} \leq t \leq \frac{P-s}{q}} e^{2\pi i z (qt+s)^n}.$$

Так как

$$\left| \frac{d}{dt} z (qt + s)^n \right| = |nzq (qt + s)^{n-1}| \leq 1/2,$$

то по следствию к лемме 1. I

$$\begin{aligned} \sum_{\frac{1-s}{q} \leq t \leq \frac{P-s}{q}} e^{2\pi iz(qt+s)^n} &= \int_{(1-s)/q}^{(P-s)/q} e^{2\pi iz(qt+s)^n} dt + O(1) = \\ &= \frac{1}{q} \int_0^P e^{2\pi izx^n} dx + O(1) = \frac{P}{q} \gamma(zN) + O(1). \end{aligned}$$

Таким образом,

$$S\left(\frac{a}{q} + z\right) = \frac{P}{q} S(a, q) \gamma(zN) + O(q). \quad (3)$$

Из лемм 1 и 2 находим

$$\begin{aligned} S^h\left(\frac{a}{q} + z\right) e^{-2\pi i\left(\frac{a}{q} + z\right)N} &= \\ &= P^h \gamma^h(zN) e^{-2\pi izN} \left(\frac{1}{q} S(a, q)\right)^h e^{-2\pi i\frac{aN}{q}} + \\ &\quad + O\left(P^{h-1} q^{-\frac{h-1}{n}+1} J_1^{h-1}(zN)\right) + O(q^h); \\ J_1 &= P^h V + O(R), \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} V &= \sum_{q < P^{0,25}} \sum_{\substack{0 < a < q \\ (a, q) = 1}} \left(\frac{1}{q} S(a, q)\right)^h e^{-2\pi i\frac{aN}{q} + 1/q\tau} \int_{-1/q\tau}^{+1/q\tau} \gamma^h(zN) e^{-2\pi izN} dz, \\ R &= P^{h-0,75} \int_{-\infty}^{+\infty} |\gamma(zN)|^h dz + P^{\frac{h+1}{4} - n + 1} \leq \\ &\leq 2P^{h-0,75} \left(\int_0^{2^{nN-1}} dz + \int_{2^{nN-1}}^{\infty} 2^h (zN)^{-h/n} dz \right) + P^{h-n-1} = \\ &= O(P^{h-n-0,75}). \end{aligned}$$

Преобразуем V . Прежде всего имеем

$$\begin{aligned} \int_{-1/q\tau}^{+1/q\tau} \gamma^h(zN) e^{-2\pi izN} dz &= \frac{1}{N} \int_{-N/q\tau}^{+N/q\tau} \gamma^h(z) e^{-2\pi iz} dz = \\ &= \frac{1}{N} \int_{-\infty}^{\infty} \gamma^h(z) e^{-2\pi iz} dz + O(R_1) = \frac{1}{N} \gamma + O(R_1), \end{aligned}$$

где

$$R_1 \leq \frac{1}{N} \int_{N/q\tau}^{\infty} |\gamma(z)|^k dz \leq \frac{2^k}{N} \int_{N/q\tau}^{\infty} z^{-\frac{k}{n}} dz = O\left((q\tau)^{\frac{k}{n}-1} P^{-k}\right).$$

Следовательно,

$$V = \frac{1}{N} \gamma \sum_{q < P^{0,25}} \sum_{\substack{0 \leq a < q \\ (a,q)=1}} \left(\frac{1}{q} S(a, q)\right)^k e^{-2\pi i \frac{aN}{q}} + \\ + O(P^{-n-0,75}) = \frac{1}{N} \gamma \sigma + O(R_2) + O(P^{-n-0,75}),$$

где

$$R_2 \leq \frac{1}{N} \sum_{q > P^{0,25}} \sum_{\substack{0 \leq a < q \\ (a,q)=1}} |S(a, q)|^k q^{-k} = O(P^{-n-1/4n}).$$

Окончательно находим

$$V = \frac{1}{N} \gamma \sigma + O(P^{-n-1/4n}); \\ J_1 = \gamma \sigma N^{\frac{k}{n}-1} + O\left(N^{\frac{k}{n}-1-\frac{1}{4n^2}}\right),$$

что и требовалось доказать.

Исследуем $\sigma = \sigma(N)$ и вычислим $\gamma = \gamma(n, k)$.

Лемма 3. Существует положительная постоянная c , зависящая только от n и k , $c = c(n, k) > 0$, такая, что сингулярный ряд $\sigma = \sigma(N)$ теоремы 1, при $k \geq 4n$ больше c , т. е. $\sigma > c > 0$.

Доказательство. Функция

$$\Phi(q) = \sum_{\substack{(a,q)=1 \\ 0 < a < q}} \left(\frac{S(a, q)}{q}\right)^k e^{-2\pi i \frac{aN}{q}}$$

мультипликативна. Действительно, если $q = q_1 q_2$, $(q_1, q_2) = 1$, $a = a_1 q_2 + a_2 q_1$, то

$$S(a, q) = \sum_{x_1=1}^{q_1} \sum_{x_2=1}^{q_2} e^{2\pi i \frac{a(x_1 q_2 + x_2 q_1)}{q}} = \\ = \sum_{x_1=1}^{q_1} e^{2\pi i \frac{a q_2^{n-1} x_1^n}{q_1}} \sum_{x_2=1}^{q_2} e^{2\pi i \frac{a q_1^{n-1} x_2^n}{q_2}} = \sum_{x_1=1}^{q_1} e^{2\pi i \frac{a_1 x_1^n}{q_1}} \sum_{x_2=1}^{q_2} e^{2\pi i \frac{a_2 x_2^n}{q_2}};$$

$$\begin{aligned} \Phi(q) &= \\ &= \sum_{\substack{(a_1, q_1)=1 \\ 0 < a_1 < q_1}} \sum_{\substack{(a_2, q_2)=1 \\ 0 < a_2 < q_2}} \left(\frac{S(a_1 q_2 + a_2 q_1) q_1 q_2}{q_1 q_2} \right)^k e^{-2\pi i \left(\frac{a_1 N}{q_1} + \frac{a_2 N}{q_2} \right)} = \\ &= \Phi(q_1) \Phi(q_2). \end{aligned}$$

Далее, так как

$$\Phi(q) \ll q^{-\frac{k}{n}+1}, \quad (4)$$

то

$$\prod_{p < X} (1 + \Phi(p) + \Phi(p^2) + \dots) = \sum_{q < X} \Phi(q) + R(X),$$

где

$$R(X) \ll \sum_{q > X} |\Phi(q)| \ll X^{-\frac{k}{n}+2}.$$

Переходя к пределу при $X \rightarrow +\infty$ в последнем равенстве, получим

$$\sigma(N) = \prod_p (1 + \Phi(p) + \Phi(p^2) + \dots).$$

Заметим, что $\Phi(p^r)$ — действительные числа, $r \geq 1$.

Применим еще раз оценку (4):

$$\left| \sum_{r=1}^{\infty} \Phi(p^r) \right| \leq c_1(k, n) \sum_{r=1}^{\infty} p^{-\left(\frac{k}{n}-1\right)r} \leq c_2(k, n) p^{-3};$$

поэтому при $p > c_2(k, n)$

$$1 + \Phi(p) + \Phi(p^2) + \dots > 1 - 1/p^2,$$

т. е.

$$\begin{aligned} \sigma(N) &= \left(\prod_{p < c_2(k, n)} (1 + \Phi(p) + \Phi(p^2) + \dots) \right) \times \\ &\quad \times \prod_{p > c_2(k, n)} (1 + \Phi(p) + \Phi(p^2) + \dots) \geq \\ &\geq \frac{6}{\pi^2} \prod_{p < c_2(k, n)} (1 + \Phi(p) + \Phi(p^2) + \dots). \end{aligned}$$

Осталось доказать, что каждая скобка последнего произведения больше нуля.

Обозначим $T_k(p^m)$ число решений сравнения

$$x_1^n + x_2^n + \dots + x_k^n \equiv N \pmod{p^m}. \quad (5)$$

Тогда будем иметь

$$\begin{aligned}
 \Phi(p^r) &= \sum_{\substack{a=1 \\ (a,p)=1}}^{p^r} \left(p^{-r} \sum_{x=1}^{p^r} e^{2\pi i \frac{ax^n}{p^r}} \right)^k e^{-2\pi i \frac{a}{p^r} N} = \\
 &= p^{-rk} \sum_{a=1}^{p^r} \left(\sum_{x=1}^{p^r} e^{2\pi i \frac{ax^n}{p^r}} \right)^k e^{-2\pi i \frac{a}{p^r} N} - \\
 &- p^{-rk+k} \sum_{a=1}^{p^r-1} \left(\sum_{x=1}^{p^r-1} e^{2\pi i \frac{ax^n}{p^r-1}} \right)^k e^{-2\pi i \frac{a}{p^r-1} N} = \\
 &= p^{-r(k-1)} T_k(p^r) - p^{-(r-1)(k-1)} T_k(p^{r-1}); \\
 1 + \sum_{r=1}^m \Phi(p^r) &= p^{-m(k-1)} T_k(p^m). \quad (6)
 \end{aligned}$$

Оценим снизу $T_k(p^m)$ при достаточно большом m . Прежде всего рассмотрим $T_k(p^\tau)$, где

$$\tau = \begin{cases} \tau + 1, & \text{если } p > 2, n = p^\tau n_1, (n_1, p) = 1; \\ \tau + 2, & \text{если } p = 2, n = p^\tau n_1, (n_1, p) = 1. \end{cases}$$

Докажем, что $T_k(p^\tau) > 0$ при $k \geq 4n$, т. е. сравнение (5) имеет решение $x_1^{(0)}, \dots, x_k^{(0)}$, причем такое, что хотя бы одно из $x_j^{(0)}$, $1 \leq j \leq k$, не делится на p . Не ограничивая общности, можно считать $0 < N < p^\tau$, $(N, p) = 1$, $k = 4n - 1$.

Если $p = 2$, то $p^\tau = 2^{\tau+2} \leq 4n$, и нужным решением будет следующий набор чисел:

$$x_1 = \dots = x_N = 1, \quad x_{N+1} = \dots = x_k = 0.$$

Пусть $p > 2$ и g — первообразный корень по модулю p^τ . Если

$$N \equiv g^\alpha \pmod{p^\tau}, \quad N_1 \equiv g^\beta \pmod{p^\tau}, \quad \alpha \equiv \beta \pmod{n},$$

то количество решений сравнения

$$x_1^n + \dots + x_k^n \equiv N \pmod{p^\tau} \quad (7)$$

совпадает с количеством решений сравнения

$$x_1^n + \dots + x_k^n \equiv N_1 \pmod{p^\tau},$$

так как $\alpha = \beta + n\delta$,

$$(x_1 g^\delta)^n + \dots + (x_k g^\delta)^n \equiv N g^{\delta n} \equiv N_1 \pmod{p^\tau}.$$

Обозначим $k(N)$ наименьшее k , при котором (7) имеет нужное решение, и пусть m — число всех различных

$k(N)$. Очевидно, что $m \leq n$. Множество всех N разобьем на m классов, относя в один класс числа N_1 и N_2 , для которых $k(N_1) = k(N_2)$, и пусть N_1, N_2, \dots, N_m — наименьшие натуральные представители своих классов, расположенные в порядке возрастания. Докажем, что $k(N_r) \leq 2r - 1$, $r = 1, 2, \dots, m$. При $r = 1$ должно быть $N_1 = 1$, $k(N_1) = 1 \leq 2 \cdot 1 - 1$. Если неравенство доказано для $r = 1, 2, \dots, h$, то, рассматривая два числа $N_{h+1} - 1$ и $N_{h+1} - 2$, видим, что одно из них не кратно p , меньше N_{h+1} и, следовательно, принадлежит к одному из уже рассмотренных классов, т. е. $k(N_{h+1}) \leq 2h - 1 + 2 = 2(h + 1) - 1$, что и требовалось доказать. Итак, $k(N) \leq k(N_m) \leq 2m - 1 \leq 2n - 1 < 4n$. Таким образом, сравнение (7) имеет решение $x_1^{(0)}, \dots, x_k^{(0)}$ такое, что $(x_1^{(0)}, p) = 1$.

Далее, покажем, что если разрешимо сравнение

$$y^n \equiv a \pmod{p^\gamma}, \quad (8)$$

причем $(y, p) = 1$, то при любом $m > \gamma$ разрешимо сравнение

$$x^n \equiv a \pmod{p^m}. \quad (9)$$

Пусть y_0 — решение сравнения (8), $(y_0, p) = 1$ и g — первообразный корень по модулю p^m , если $p > 2$; $g = 5$, если $p = 2$. Возьмем натуральное b таким, чтобы

$$g^b y_0^n \equiv a \pmod{p^m};$$

тогда

$$g^b \equiv 1 \pmod{p^\gamma}, \quad b = p^\tau(p - 1)b_1.$$

При произвольном натуральном r рассмотрим выражение

$$b + rp^{m-1}(p - 1) = p^\tau(p - 1)(b_1 + rp^{m-1-\tau});$$

так как $n = p^\tau n_1$, $(n_1, p) = 1$, то возьмем r таким, чтобы $b_1 + rp^{m-1-\tau}$ делилось на n_1 ; тогда

$$b_1 + rp^{m-1-\tau} = n_1 h; \quad b + rp^{m-1}(p - 1) = nh(p - 1);$$

$$g^{b+rp^{m-1}(p-1)} \equiv g^b \pmod{p^m}; \quad g^{b+rp^{m-1}(p-1)} y_0^n \equiv a \pmod{p^m}$$

и $x_0 = y_0 g^{h(p-1)}$ — решение сравнения (9).

Перейдем к оценке снизу $T_k(p^m)$. Рассмотрим сравнение

$$x_1^n + (x_2 + p^\nu y_2)^n + \dots + (x_k + p^\nu y_k)^n \equiv N \pmod{p^\nu},$$

$$1 \leq x_1, x_2, \dots, x_k \leq p^\nu, \quad 1 \leq y_2, \dots, y_k \leq p^{m-\nu}.$$

При $k \geq 4n$ оно имеет решение $x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_k^{(0)}$ такое,

что $(x_1^{(0)}, p) = 1$, т. е. оно имеет

$$p^{(k-1)(m-1)}$$

решений в числах $x_1^{(0)}, \dots, x_k^{(0)}, y_2, \dots, y_k$. Но тогда сравнение

$$x_1^n \equiv N - (x_2^{(0)} + p^\nu y_2)^n - \dots - (x_k^{(0)} + p^\nu y_k)^n \pmod{p^m}$$

разрешимо относительно x_1 при любых y_2, \dots, y_k , $1 \leq y_2, \dots, y_k \leq p^{m-1}$, т. е.

$$T_k(p^m) \geq p^{(k-1)(m-1)}.$$

Отсюда и из (6) следует

$$1 + \sum_{r=1}^m \Phi(p^r) = p^{-m(k-1)} T_k(p^m) \geq p^{-\nu(k-1)};$$

$$1 + \sum_{r=1}^{\infty} \Phi(p^r) \geq p^{-\nu(k-1)};$$

$$\prod_{p < c_2(k, n)} (1 + \Phi(p) + \Phi(p^2) + \dots) \geq \prod_{p < c_2(k, n)} p^{-\nu(k-1)} \geq \geq c_3(k, n) > 0;$$

$$\sigma = \sigma(N) > c(k, n) > 0.$$

Лемма полностью доказана.

Лемма 4. При $k \geq n + 1$ справедливо равенство

$$\gamma = \gamma(n, k) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_0^1 e^{2\pi i z u^n} du \right)^k e^{-2\pi i z} dz = \frac{\left(\Gamma\left(1 + \frac{1}{n}\right) \right)^k}{\Gamma\left(\frac{k}{n}\right)}.$$

Доказательство. Рассмотрим более общий интеграл

$$g(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_0^1 e^{2\pi i z u^n} du \right)^k e^{-2\pi i x z} dz, \quad 0 \leq x \leq 2.$$

Так как

$$\left| \int_0^1 e^{2\pi i z u^n} du \right| \ll \min\left(1, \frac{1}{|z|^{1/n}}\right),$$

то $g(x)$ сходится абсолютно при $k \geq n + 1$.

Функция $g(x)$ непрерывна на интервале $0 < x < 2$. Действительно,

$$|g(x + \Delta x) - g(x)| < 4 \int_0^{+\infty} \left| \int_0^1 e^{2\pi i z u^n} du \right|^k |\sin \pi \Delta x z| dz < \\ < 4\pi |\Delta x| \int_0^{|\Delta x|^{-1/3}} z dz + 8 \cdot 2^k \int_{|\Delta x|^{-1/3}}^{\infty} z^{-k/n} dz \ll |\Delta x|^{1/3n}.$$

Поэтому $F(c)$, $0 < c < 2$,

$$F(c) = \int_0^c g(x) dx,$$

дифференцируема. Далее, при $0 < c \leq 1$

$$F(c) = \int_0^c g(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_0^1 e^{2\pi i z u^n} du \right)^k \frac{1 - e^{-2\pi i z c}}{2\pi i z} dz = \\ = \int_0^1 \dots \int_0^1 du_1 \dots du_k \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{2\pi i z (u_1^n + \dots + u_k^n)} - e^{2\pi i z (u_1^n + \dots + u_k^n - c)}}{2\pi i z} dz = \\ = \frac{1}{\pi} \int_0^1 \dots \int_0^1 du_1 \dots du_k \int_0^{\infty} \left(\frac{\sin 2\pi z \lambda}{z} - \frac{\sin 2\pi z (\lambda - c)}{z} \right) dz,$$

где $\lambda = u_1^n + \dots + u_k^n$.

Так как $\int_0^{\infty} \frac{\sin \alpha x}{x} dx = \frac{\pi}{2} \text{sign } \alpha$, то

$$F(c) = \frac{1}{2} \int_0^1 \dots \int_0^1 (\text{sign } \lambda - \text{sign } (\lambda - c)) du_1 \dots du_k = \\ = \int_{0 \leq \lambda < c} \dots \int du_1 \dots du_k.$$

Сделаем замену переменных интегрирования $u_1 = t_1^{1/n} c^{1/n}, \dots, u_k = t_k^{1/n} c^{1/n}$; получим интеграл Дирихле (теорема 7, III):

$$F(c) = n^{-k} c^{k/n} \int_{\substack{0 \leq t_1 + \dots + t_k \leq 1 \\ 0 \leq t_1, \dots, t_k \leq 1}} \dots \int t_1^{\frac{1}{n}-1} \dots t_k^{\frac{1}{n}-1} dt_1 \dots dt_k = \\ = n^{-k} c^{k/n} \frac{\Gamma^k\left(\frac{1}{n}\right)}{\Gamma\left(\frac{k}{n} + 1\right)} = \frac{n}{k} c^{k/n} \frac{\left(\Gamma\left(1 + \frac{1}{n}\right)\right)^k}{\Gamma\left(\frac{k}{n}\right)}.$$

Дифференцируя $F(c)$, найдем $g(c)$:

$$g(c) = c^{\frac{k}{n}-1} \frac{\left(\Gamma\left(1 + \frac{1}{n}\right)\right)^k}{\Gamma(k/n)}.$$

При $c = 1$ получаем утверждение леммы.

§ 2. Оценка суммы Г. Вейля и асимптотическая формула в проблеме Варинга

Чтобы получить асимптотическую формулу для $J_{k,n}(N)$, необходимо нетривиально оценить сверху $|J_2|$, а для этого надо уметь оценивать $|S(\alpha)|$ при $\alpha \in E_2$.

Определение. Суммой Г. Вейля называется тригонометрическая сумма вида

$$S = S(\alpha_{n+1}, \dots, \alpha_1) = \sum_{x=1}^P e^{2\pi i f(x)},$$

где $f(x) = \alpha_{n+1}x^{n+1} + \dots + \alpha_1 x$, α_ν — действительные числа, $\nu = n+1, n, \dots, 1$.

Теорема 2. Пусть $\alpha_{n+1} = \frac{a}{q} + \frac{\theta}{q^2}$, $(a, q) = 1$, $|\theta| \leq 1$, $P^{1/4} \leq q \leq P^{n+1-1/4}$, S — сумма Г. Вейля. Тогда

$$|S| \leq C(n) P^{1 - \frac{1}{800n^2 \log n}}.$$

Доказательство. Будем применять введенные в лемме 1, VI обозначения, пользоваться леммами 1, 3, 5, 6 гл. VI и теоремой 1, VI. Схема доказательства теоремы близка к схеме доказательства теоремы 2, VI.

Прежде всего при $Y = [P^{1-1/n^2}]$ имеем

$$S = W + O(Y),$$

где $W = Y^{-1} \sum_{y=1}^Y \sum_{x=1}^P e^{2\pi i f(x+y)}$. Разложим $f(x+y)$ по степеням x :

$$f(x+y) = \alpha_{n+1}x^{n+1} + g_1(y)x^n + \dots + g_n(y)x + g_0(y).$$

При целом $k \geq 1$, применяя леммы 3 и 1 гл. VI, находим

$$\begin{aligned} |W|^{2k} &\leq Y^{-1} \sum_{y=1}^Y \left| \sum_{x=1}^P e^{2\pi i (\alpha_{n+1}x^{n+1} + g_1(y)x^n + \dots)} \right|^{2k} = \\ &= Y^{-1} \sum_{y=1}^Y \sum_{\lambda_1, \dots, \lambda_n, \lambda_{n+1}} J_{k, n+1}(\lambda_1, \dots, \lambda_n, \lambda_{n+1}) \times \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times e^{2\pi i(\alpha_{n+1}\lambda_{n+1} + g_1(y)\lambda_n + \dots)} \leq \\
& \leq Y^{-1} \sum_{\lambda_1, \dots, \lambda_n, \lambda_{n+1}} J_{k, n+1}(\lambda_1, \dots, \lambda_n, \lambda_{n+1}) \times \\
& \quad \times \left| \sum_{y=1}^Y e^{2\pi i(\alpha_{n+1}\lambda_{n+1} + g_1(y)\lambda_n + \dots)} \right| = \\
& = Y^{-1} \sum_{\lambda_1, \dots, \lambda_n} J_{k, n}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \left| \sum_{y=1}^Y e^{2\pi i(g_1(y)\lambda_n + \dots + g_n(y)\lambda_1)} \right| \leq \\
& \leq Y^{-1} \sqrt{\sum_{\lambda_1, \dots, \lambda_n} J_{k, n}^2(\lambda_1, \dots, \lambda_n)} \times \\
& \quad \times \sqrt{\sum_{\lambda_1, \dots, \lambda_n} \left| \sum_{y=1}^Y e^{2\pi i(g_1(y)\lambda_n + \dots + g_n(y)\lambda_1)} \right|^2}. \quad (10)
\end{aligned}$$

По лемме 1, VI

$$\sum_{\lambda_1, \dots, \lambda_n} J_{k, n}^2(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \leq J_{k, n}(0, \dots, 0) P^{2k}; \quad (11)$$

по теореме 1, VI при $k \geq n\tau$

$$J_{k, n}(0, \dots, 0) \leq (n\tau)^{6n\tau} (2n)^{4n(n+1)\tau} P^{2k - \frac{n(n+1)}{2}} \left(1 - \left(1 - \frac{1}{n}\right)^\tau\right). \quad (12)$$

Далее,

$$g_1(y) = (n+1)\alpha_{n+1}y + \alpha_n, \quad |\lambda_\nu| < kP^\nu, \quad \nu = 1, \dots, n;$$

поэтому, применяя лемму 4, VI, получим

$$\begin{aligned}
& \sum_{\lambda_1, \dots, \lambda_n} \left| \sum_{y=1}^Y e^{2\pi i(g_1(y)\lambda_n + \dots + g_n(y)\lambda_1)} \right|^2 = \\
& = \sum_{y, y_1=1}^Y \sum_{\lambda_1, \dots, \lambda_n} e^{2\pi i(\lambda_n(n+1)\alpha_{n+1}(y-y_1) + \dots + \lambda_1(g_n(y) - g_n(y_1)))} \leq \\
& \leq \sum_{y, y_1=1}^Y \min\left(2kP^n, \frac{1}{\|((n+1)(y-y_1)\alpha_{n+1})\|}\right) \sum_{\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}} 1 \leq \\
& \leq (2k)^{n-1} P^{\frac{n(n-1)}{2}} Y \sum_{y=1}^{(n+1)Y} \min\left(2kP^n, \frac{1}{\|(\alpha_{n+1}y + \beta)\|}\right). \quad (13)
\end{aligned}$$

Наконец, пользуясь леммой 5, VI, найдем оценку последней суммы:

$$\sum_{y=1}^{(n+1)Y} \min\left(2kP^n, \frac{1}{\|(\alpha_{n+1}^y + \beta)\|}\right) \leq \\ \leq 6\left(\frac{(n+1)Y}{q} + 1\right)(2kP^n + q \log q) \leq 8knP^{n+0.75} \log P.$$

Из (10)–(13) при $\tau = [4n \log n] + 1$, получаем

$$|W| \leq c_1(n) P^{1 - \frac{1}{800n^2 \log n}}, \quad |S| \leq c(n) P^{1 - \frac{1}{800n^2 \log n}},$$

что и требовалось доказать.

Теорема 3. Для числа $J_{k,n}(N)$ представлений натурального N в виде (1) при $k \geq cn^2 \log n$ справедлива асимптотическая формула

$$J_{k,n}(N) = \gamma \sigma(N) N^{\frac{k}{n}-1} + O\left(N^{\frac{k}{n} - \frac{c_1}{n^2} - 1}\right),$$

где

$$\gamma = \frac{\left(\Gamma\left(1 + \frac{1}{n}\right)\right)^k}{\Gamma\left(\frac{k}{n}\right)}, \quad \sigma(N) > c_0(n, k) > 0.$$

Доказательство. Применяя круговой метод (см. § 1), будем иметь

$$J = J_{k,n}(N) = J_1 + J_2,$$

$$\text{где } J_1 = \int_{E_1} S^h(\alpha) e^{-2\pi i \alpha N} d\alpha, \quad J_2 = \int_{E_2} S^h(\alpha) e^{-2\pi i \alpha N} d\alpha.$$

Из теоремы 1, лемм 2 и 3 следует

$$J_1 = \gamma \sigma(N) N^{\frac{k}{n}-1} + O\left(N^{\frac{k}{n}-1 - \frac{1}{4n^2}}\right).$$

Из теоремы 2 для $\alpha \in E_2$

$$|S(\alpha)| \leq c_3(n) P^{1 - \frac{1}{800n^2 \log n}}.$$

Отсюда, пользуясь обозначениями леммы 1, VI и теоремой 1, VI при $n\tau \leq k_1 < k/2$, находим

$$|J_2| \leq c_4(n, k) P^{(k-2k_1)} \left(1 - \frac{1}{800n^2 \log n}\right) \int_0^1 |S(\alpha)|^{2k_1} d\alpha = \\ = c_4(n, k) P^{(k-2k_1)} \left(1 - \frac{1}{800n^2 \log n}\right) \times$$

Прежде всего

$$4^{-n}N = P_1^n \leq u_1^n + \dots + u_m^n + u_{m+1}^n + \dots + u_{2m}^n \leq 4(2P_1)^n = 2^{-n+2}N.$$

Далее, уравнение

$$u_1^n + \dots + u_m^n = u_{m+1}^n + \dots + u_{2m}^n \quad (15)$$

имеет только решения вида $u_1 = u_{m+1}$, $u_2 = u_{m+2}$, ..., $u_m = u_{2m}$. Действительно, если, например, $u_s \neq u_{m+s}$, $s < m$, и $u_1 = u_{m+1}$, ..., $u_{s-1} = u_{m+s-1}$, то

$$|u_s^n - u_{m+s}^n| > nP_s^{n-1},$$

$$|u_{s+1}^n + \dots + u_m^n - u_{m+s+1}^n - \dots - u_{2m}^n| \leq (2P_{s+1})^n = P_s^{n-1},$$

и равенство (15) невозможно.

Пусть $I(N)$ — число решений уравнения (14). Тогда

$$I(N) = \int_0^1 S^h(\alpha) T_1^2(\alpha) \dots T_m^2(\alpha) e^{-2\pi i \alpha N} d\alpha,$$

где

$$S(\alpha) = \sum_{1 \leq x \leq P} e^{2\pi i \alpha x^n}, \quad P = N^{1/n},$$

$$T_1(\alpha) = \sum_{u_1} e^{2\pi i \alpha u_1^n},$$

$$\dots \dots \dots$$

$$T_m(\alpha) = \sum_{u_m} e^{2\pi i \alpha u_m^n}.$$

Пользуясь определением множеств E_1 , E_2 § 1, будем иметь

$$I(N) = I_1(N) + I_2(N).$$

Оценим $I_2(N)$. По теореме 2 для $\alpha \in E_2$

$$|S(\alpha)| \leq c_3(n) P^{1 - \frac{1}{800n^2 \log n}}, \quad P = N^{1/n}.$$

Поэтому

$$|I_2(N)| \leq$$

$$\leq c_4(n, k) P^{k \left(1 - \frac{1}{800n^2 \log n}\right)} \int_0^1 |T_1(\alpha)|^2 \dots |T_m(\alpha)|^2 d\alpha.$$

Последний интеграл равен числу решений уравнения (15), т. е. числу наборов u_1, \dots, u_m , и не превосходит

$$P_1 P_2 \dots P_m \leq c_5(n, m) N^{1 - \left(1 - \frac{1}{n}\right)^m}.$$

Следовательно,

$$|I_2(N)| \leq c_4(n, k) P_1 P_2 \dots P_m N^{\frac{k}{n} - \frac{k}{800n^3 \log n}}.$$

Оценим снизу $I_1(N)$. По определению $I_1(N)$

$$I_1(N) = \sum_{u_1, u_{m+1}} \dots \sum_{u_m, u_{2m}} \int_{E_1} S^k(\alpha) e^{-2\pi i \alpha (N - u_1^n - \dots - u_{2m}^n)} d\alpha.$$

Но интеграл

$$\int_{E_1} S^k(\alpha) e^{-2\pi i \alpha N_1} d\alpha$$

при $\left(1 - \frac{4}{2^n}\right)N \leq N_1 \leq \left(1 - \frac{1}{4^n}\right)N$ и $k \geq 4n$ вычисляется по теореме 1 (см. также леммы 2 и 3):

$$\begin{aligned} \int_{E_1} S^k(\alpha) e^{-2\pi i \alpha N_1} d\alpha &= \gamma \sigma(N_1) N_1^{\frac{k}{n}-1} + O\left(N_1^{\frac{k}{n}-1 - \frac{1}{4n^2}}\right) \geq \\ &\geq c(k, n) N^{\frac{k}{n}-1} - c_1(k, n) N^{\frac{k}{n}-1 - \frac{1}{4n^2}}. \end{aligned}$$

Отсюда

$$\begin{aligned} I_1(N) &\geq \sum_{u_1, u_{m+1}} \dots \sum_{u_m, u_{2m}} \left(c(k, n) N^{\frac{k}{n}-1} - \right. \\ &- \left. c_1(k, n) N^{\frac{k}{n}-1 - \frac{1}{4n^2}} \right) \geq 2^{-2m} (P_1 P_2 \dots P_m)^2 c(k, n) N^{\frac{k}{n}-1} - \\ &- c_1(k, n) (P_1 P_2 \dots P_m)^2 N^{\frac{k}{n}-1 - \frac{1}{4n^2}}. \end{aligned}$$

Так как

$$P_1 P_2 \dots P_m \geq c_6(n, m) N^{1 - \left(1 - \frac{1}{n}\right)^m},$$

то при $k = 4n$, $m = [c_0 n \log n]$, $N \geq N_0(n)$ будем иметь

$$I(N) = I_1(N) + I_2(N) > 0,$$

что и требовалось доказать.

$|\theta| \leq 1$; тогда

$$\sum_{x \leq P} e^{2\pi i(\alpha_{n+1}x^{n+1} + \dots + \alpha_1 x)} \Big| \leq c_2(n) P \Delta,$$

где $\Delta = (\min(P, P^{n+1}q^{-1}, q))^{-\frac{1}{16c_2 n^2 \ln n}}$.

15. а) Найти асимптотическую формулу для числа решений уравнения

$$p_1 + p_2 + x^n = N,$$

где $n \geq 2$, n фиксировано, p_1, p_2 — простые числа, x — натуральные числа.

б) Найти асимптотическую формулу для числа решений уравнения

$$p + x^2 + y^2 + z^n = N,$$

где $n \geq 2$, n фиксировано, p — простые числа, x, y, z — натуральные числа.

УКАЗАНИЯ К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ

ГЛАВА I

1. Повторить доказательство теоремы 4, полагая $m = [10(b-a)D]$; вместо асимптотической формулы для I_n , воспользоваться оценкой $I_n \ll \sqrt{A}$.

2. а) Взять в лемме 1 $r = 1$, $\Delta = A^{-1/3}$; для коэффициентов ряда Фурье функции $\psi(x)$ применить оценки

$$|g(m)| \leq \begin{cases} \frac{1}{|m|}, & \text{если } 1 \leq |m| \leq A^{1/3}; \\ \frac{1}{|m|^2} A^{1/3}, & \text{если } |m| > A^{1/3}; \end{cases}$$

сумму U_m , $1 \leq |m| \leq A^{2/3}$,

$$U_m = \sum_{a < x < b} e^{2\pi i m f(x)},$$

оценить, пользуясь результатом задачи 1 (см. также доказательство теорем 6 и 7).

б) Следует из а) и теоремы 1.

3. (В. Ярник). Пусть $N \geq 1$, $m = \sum_{n=1}^N \varphi(n)$, $\xi_v = l_v/k_v$, $v =$

$= 1, 2, \dots, m$, ξ_v — дроби Фарея, отвечающие N , $K_v = \sum_{r=1}^v k_r$,

$L_v = \sum_{r=1}^v l_r$, M_v — точки на плоскости $X \circ Y$ с координатами K_v ,

L_v , $M_v = (K_v, L_v)$.

Через точки M_v провести кривую $y = f(x)$ так, чтобы

$$f''(x) \gg 1/N^3, \quad 1 = K_1 \leq x \leq K_m, \quad K_m \gg N^3,$$

$$0 < f'(x) \ll 1, \quad K_1 \leq x \leq K_m.$$

(См. также Jarnik V. Über die Gitterpunkte auf konvexen Kurven, Math. Zeitschrift, 1925, Band. 24, h. 3, 500—518.)

4. Плоскостями $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $x = y$, $y = z$, $z = x$ область шара разбивается на 48 равновеликих областей. Рассмотреть одну такую область:

$$0 \leq y \leq R/\sqrt{3}, \quad y \leq x \leq \sqrt{(R^2 - y^2)}/2, \quad x \leq z \leq \sqrt{R^2 - y^2 - x^2}$$

и провести рассуждения, аналогичные доказательству теоремы 2. (См. также [3], с. 29—39.)

5. а) Следствие теоремы 5;

б) Взять $q = [a^{36/41} t^{-11/41}]$, применить к сумме лемму 3, к новой тригонометрической сумме применить теорему 4, к новой тригонометрической сумме применить теорему 5 при $k = 5$. (См. также [4], с. 117—119).

ГЛАВА II

1. Пусть E — множество тех точек отрезка $[0, 1]$, для которых $|f(x)| \leq A$ (следовательно, $\mu(E) = \mu$). Тогда в E найдется n точек x_1, x_2, \dots, x_n таких, что $|x_k - x_j| \geq |k - j| \frac{\mu}{n-1}$. Рассмотреть линейную относительно $a_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}$ систему уравнений вида

$$f(x_i) = \theta_i A, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad |\theta_i| \leq 1$$

и найти из нее α_j , $|\alpha_j| = \alpha$.

2. Пусть

$$U = \int_0^1 \cos 2\pi f(x) dx.$$

Интервал интегрирования разбить на два множества E_1 и E_2 : к E_1 отнести те точки, для которых

$$|f'(x)| \leq \left(\frac{n-1}{4e}\right)^{1-\frac{1}{n}} \alpha^{-\frac{1}{n}};$$

к E_2 отнести остальные точки. Интеграл по E_1 оценить тривиально, т. е. величиной $\mu(E_1)$; множество E_2 разбить на $\leq 2n-2$ интервала, в каждом из которых $f'(x)$ монотонна и знакопостоянна, рассмотреть интеграл по одному такому интервалу (воспользоваться при этом приемом оценки интеграла, который применялся при доказательстве теоремы 4.1). (См. также [1], с. 27—30.)

3. Доказательство вести индукцией по числу переменных r , пользоваться результатами задач 1 и 2, предварительно представив многочлен $f(x_1, \dots, x_r)$ в следующем виде:

$$f(x_1, \dots, x_r) = \sum_{t_1=0}^n \dots \sum_{t_{r-1}=0}^n x_1^{t_1} \dots x_{r-1}^{t_{r-1}} \varphi(x_r).$$

(См. также Чубариков В. Н., О кратных рациональных тригонометрических суммах и кратных интегралах, Матем. заметки, 20, № 1, 1976, 61—68.)

4. Предварительно доказать равенство

$$J = \frac{(-1)^{r-1}}{(r-1)!} \int_0^1 e^{2\pi i \alpha x^n} (\ln x)^{r-1} dx.$$

5. Как и в задаче 1, выбрать n точек x_1, \dots, x_n , принадлежащих U и таких, что

$$|x_k - x_j| \geq |k - j| \frac{\mu}{n-1}, \quad \mu = \mu(U),$$

построить интерполяционный многочлен Лагранжа $g(x)$, отвечающий $f'(x)$ и узлам интерполяции x_1, \dots, x_n ,

$$g(x) = \sum_{v=1}^n f'(x_v) \frac{(x-x_1) \dots (x-x_{v-1})(x-x_{v+1}) \dots (x-x_n)}{(x_v-x_1) \dots (x_v-x_{v-1})(x_v-x_{v+1}) \dots (x_v-x_n)},$$

и к функции $F(x) = g(x) - f'(x)$ применить последовательно $n-1$ раз теорему Ролля. (См. также Архипов Г. И., Карацуба А. А., Чубариков В. Н., Тригонометрические интегралы.—Изв. АН СССР, сер. Матем., 43, № 5, 1979, 971—1003.)

6. Следует по схеме задачи 2 с использованием задачи 5.

7. Покрытие произвести за $\leq n$ шагов, рассматривая последовательно при $k = 0, 1, \dots, n-1$ функции

$$\beta_{n-k}(x) = \frac{1}{(n-k)!} f^{(n-k)}(x)$$

и замечая, что при любом $D > 0$ число промежутков, в каждой точке которых выполняется неравенство

$$|\beta_{n-k}(x)| < D,$$

не превосходит k , а число промежутков, в каждой точке которых выполняется неравенство

$$|\beta_{n-k}(x)| \geq D,$$

не превосходит $k+1$.

8. Следует из задач 6 и 7.

9. Воспользоваться результатом задачи 8, предварительно оценив сверху объем области $\Omega = \Omega(\alpha_n, \dots, \alpha_1)$ тех точек $\alpha_n, \dots, \alpha_1$, где величина H не превосходит P , P — натуральное число; для этого рассмотреть при $r = 1, 2, \dots, P$ области $\Omega_r = \Omega_r(\alpha_n, \dots, \alpha_1)$ тех точек $\alpha_n, \dots, \alpha_1$, где выполняются неравенства

$$\left| \beta_s \left(\frac{r}{P} \right) \right| \leq 2^n P^s, \quad s = 1, 2, \dots, n,$$

доказать равенство

$$\mu(\Omega_r) = \int_{\Omega_r} \dots \int d\alpha_n \dots d\alpha_1 = 2^{n^2+n} P^{(n^2+n)/2},$$

и, далее, доказать, что каждая точка области Ω принадлежит при некотором r , $1 \leq r \leq P$, области Ω_r . (Доказательство расходимости θ при $2k \leq 0,5(n^2+n)+1$, а также обобщения задач 5—9, литературу, см. в статье к задаче 5).

ГЛАВА III

1. См. доказательство теоремы 4.1.

2. Следует из задачи 1.

3. Следует из задачи 2.

4. Воспользоваться задачами 2, 3 и тем, что при $N=1$ сумма $S=1$.

(К задачам 1—4 см. также [6], с. 19—24).

5. Если n_1 и m_1 — остатки от деления n и m на p , $0 < n_1 < p$, $0 < m_1 < p$, то по условию $n_1 m_1 = kp$; каждый простой делитель

$n_1 m_1$ меньше p ; по предположению индукции он делит k ; производя сокращения, получим противоречивое равенство: $1 = k_1 p$.

6. Следует из задачи 5.

7. а) Пусть $0 < a_q = \max_{0 < j \leq k} |a_j|$, $p^u \|m + q$, $p^v \|k!$; тогда $u \leq v$.

(См. также Никишин Е. М. О логарифмах натуральных чисел.— Изв. АН СССР, сер. Матем., 43, № 6, 1979, 1319—1327.)

б) (В. К. Рыжов). Следует из тождества

$$\begin{aligned} ((n+2)(n-1)^2)((n-2)(n+1)^2)(n^3) &= \\ &= ((n+2)(n-2)n)((n-1)(n+1)n)^2. \end{aligned}$$

8. а) При $k=1$ по определению $\tau_k(n) \equiv 1$; поэтому

$$\sum_{n < X} \tau_1(n) \leq X.$$

Предполагая справедливость утверждения при $k=m$, докажем его при $k=m+1$. Так как $\tau_{k+1}(n) = \sum_{d \setminus n} \tau_k(d)$, то

$$\begin{aligned} \sum_{n < X} \tau_{k+1}(n) &= \sum_{n < X} \sum_{d \setminus n} \tau_k(d) = \sum_{d < X} \tau_k(d) \sum_{\substack{n=0 \pmod{d} \\ n < X}} 1 \leq \\ &\leq X \sum_{d < X} \frac{\tau_k(d)}{d} = X \left(\int_1^X \left(\sum_{d \leq u} \tau_k(d) \right) u^{-2} du + X^{-1} \sum_{d < X} \tau_k(d) \right) < \\ &< X \left(\int_1^X \frac{1}{(k-1)!} u^{-1} (\ln u + k - 1)^{k-1} du + \frac{1}{(k-1)!} (\ln X + k - 1)^{k-1} \right) \leq \\ &\leq X \left(\frac{1}{k!} (\ln X + k - 1)^k + \frac{1}{(k-1)!} (\ln X + k - 1)^{k-1} \right) \leq \\ &\leq \frac{1}{k!} X (\ln X + k)^k, \end{aligned}$$

что и требовалось доказать.

б) Как и в а), неравенство доказывается по индукции. При $k=1$ оно тривиально. Предполагая, что неравенство имеет место при $k=m$, доказать его при $k=m+1$, пользуясь преобразованием Абеля, неравенством $\tau_k(nr) \leq \tau_k(n)\tau_k(r)$ и рассуждениями а) (см. также Марджанишвили К. К. Оценка одной арифметической суммы.— ДАН СССР, 22, № 7, 1939, 391—393).

9. Пусть $F(m, n)$ — произвольная функция натуральных аргументов; тогда

$$\begin{aligned} \sum_{n < N} F(1, n) &= \sum_{m < u} \sum_{n < Nm^{-1}} F(m, n) \sum_{d \setminus m} \mu(d) = \\ &= \sum_{d < u} \sum_{r < ud^{-1}} \sum_{n < N(dr)^{-1}} \mu(d) F(dr, n) = \\ &= \sum_{d < u} \sum_{r < Nd^{-1}} \sum_{n < N(dr)^{-1}} \mu(d) F(dr, n) - \\ &\quad - \sum_{d < u} \sum_{ud^{-1} < r < Nd^{-1}} \sum_{n < N(dr)^{-1}} \mu(d) F(dr, n); \end{aligned}$$

полагая $m = dr$, последнюю кратную сумму перепишем так:

$$\sum_{u < m \leq N} \sum_{\substack{d \setminus m \\ d \leq u}} \mu(d) \sum_{n < Nm^{-1}} F(m, n).$$

Если взять теперь

$$F(m, n) = \begin{cases} \Lambda(n) f(nm), & u < n; \\ 0, & u \geq n, \end{cases}$$

то получим требуемое:

$$\begin{aligned} \sum_{u < n \leq N} \Lambda(n) f(n) &= \sum_{d \leq u} \sum_{r \leq Nd^{-1}} \sum_{u < n \leq N(dr)^{-1}} \mu(d) \Lambda(n) f(n dr) - \\ &- \sum_{u < m \leq N} \sum_{\substack{n \leq Nm^{-1} \\ u < n}} \left(\sum_{\substack{d \setminus m \\ d \leq u}} \mu(d) \right) \Lambda(n) f(nm) = S_1 - S_2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_1 &= \sum_{d \leq u} \sum_{rd \leq N} \sum_{ndr \leq N} \mu(d) \Lambda(n) f(n dr) - \\ &- \sum_{d \leq u} \sum_{rd \leq N} \sum_{\substack{n \leq u \\ nrd \leq N}} \mu(d) \Lambda(n) f(n dr) = \\ &= \sum_{d \leq u} \mu(d) \sum_{l \leq Nd^{-1}} (\log l) f(ld) - \\ &- \sum_{d \leq u} \mu(d) \sum_{n \leq u} \Lambda(n) \sum_{r \leq N(dn)^{-1}} f(n dr), \end{aligned}$$

$$S_2 = \sum_{u < m \leq Nu^{-1}} \left(\sum_{\substack{d \setminus m \\ d \leq u}} \mu(d) \right) \sum_{u < n \leq Nm^{-1}} \Lambda(n) f(nm).$$

(См. также Vaughan R. C. On the distribution of αp modulo 1. — *Mathematika*, vol. 24, p. 2, № 48, 1977, 135—141.)

ГЛАВА IV

1. При $\operatorname{Re} \tau > 0$, $\operatorname{Re} s > 1$, производя замену переменной интегрирования $x \rightarrow \tau x$ (поворот луча интегрирования на угол $\varphi = \arg \tau$) и пользуясь следствием 1 леммы 3, будем иметь (см. также доказательство теоремы 1):

$$\begin{aligned} \pi^{-\frac{s}{2}} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \zeta(s) &= \int_0^{\infty} x^{\frac{s}{2}-1} \left(\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\pi n^2 x} \right) dx = \\ &= \int_0^{\infty} (\tau x)^{\frac{s}{2}-1} \left(\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\pi n^2 \tau x} \right) d(\tau x) = \tau^{\frac{s}{2}} \int_1^{\infty} x^{\frac{s}{2}-1} \left(\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\pi n^2 \tau x} \right) dx + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \tau^{\frac{s}{2}} \int_1^{\infty} x^{-\frac{s}{2}-1} \left(\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\pi n^2 \frac{\tau}{x}} \right) dx = \tau^{\frac{s}{2}} \int_1^{\infty} x^{\frac{s}{2}-1} \left(\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\pi n^2 \tau x} \right) dx - \\
 & - \frac{\tau^{\frac{s}{2}}}{s} - \frac{\tau^{\frac{s}{2}-1}}{1-s} + \tau^{\frac{s}{2}-1} \int_1^{\infty} x^{-\frac{s}{2}-\frac{1}{2}} \left(\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\pi n^2 \frac{1}{\tau} x} \right) dx;
 \end{aligned}$$

кроме того,

$$\begin{aligned}
 & \int_1^{\infty} x^{\frac{s}{2}-1} e^{-\pi n^2 \tau x} dx = \pi^{-\frac{s}{2}} n^{-s} \tau^{-\frac{s}{2}} \Gamma\left(\frac{s}{2}, \pi n^2 \tau\right); \\
 & \int_1^{\infty} x^{-\frac{s}{2}-\frac{1}{2}} e^{-\pi n^2 \frac{1}{\tau} x} dx = \tau^{-\frac{s}{2}+\frac{1}{2}} \pi^{\frac{s}{2}-\frac{1}{2}} n^{s-1} \Gamma\left(\frac{1-s}{2}, \pi n^2 \frac{1}{\tau}\right).
 \end{aligned}$$

Отсюда следует утверждение задачи.

2. а) Взять $\tau = 1$ и повторить рассуждения доказательства теоремы 1.

б) Взять $\tau = \frac{t}{\pi X^2} e^{i\left(\frac{\pi}{2} - \frac{1}{t}\right)}$, $t > 0$, соответствующие интегралы

оценивать, пользуясь леммой 2.1. (См. также Лаврик А. Ф. Приближенные функциональные уравнения функций Дирихле.— Изв. АН СССР, сер. Матем., 32, № 1, 1968, 134—185.)

3. Из функционального уравнения дзета-функции (теорема 1) при $s = \frac{1}{2} + it$ следует

$$\pi^{-\frac{it}{2}} \Gamma\left(\frac{1}{4} + it\right) \zeta\left(\frac{1}{2} + it\right) = \pi^{\frac{it}{2}} \Gamma\left(\frac{1}{4} - \frac{it}{2}\right) \zeta\left(\frac{1}{2} - it\right),$$

т. е.

$$Z(t) = \overline{Z(t)}.$$

4. Следует воспользоваться равенством

$$e^{it\theta(t)} = \frac{\pi^{-it} \Gamma\left(\frac{1}{4} + \frac{it}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{4} - \frac{it}{2}\right)}$$

и формулой

$$\ln \Gamma(s) = \left(s - \frac{1}{2}\right) \ln s - s + \ln \sqrt{2\pi} + \int_0^{\infty} \frac{\rho(u) du}{u+s}.$$

5. По формуле Лейбница при целом k , $k \geq 0$,

$$Z^{(k)}(t) = \sum_{r=0}^k \binom{k}{r} \frac{d^r}{dt^r} (e^{i\theta(t)}) \frac{d^{k-r}}{dt^{k-r}} \left(\zeta\left(\frac{1}{2} + it\right) \right). \quad (1)$$

Из задачи 4

$$\frac{d^r}{dt^r} (e^{i\theta(t)}) = i^r (\theta'(t))^r e^{i\theta(t)} + O(t^{-1}). \quad (2)$$

Из леммы 2 при $0 \leq m \leq k$, $N \geq 1$,

$$\zeta^{(m)}\left(\frac{1}{2} + it\right) = (-i)^m \sum_{n=1}^N \frac{(\ln n)^m}{n^{\frac{1}{2} + it}} + \frac{d^m}{dt^m} \left(\frac{N^{\frac{1}{2} - it}}{it - \frac{1}{2}} \right) + O\left(\frac{t \ln^m N}{\sqrt{N}}\right).$$

Полагая $N > N_0 = t/2\pi$, преобразуем сумму S ,

$$S = \sum_{N_0 < n \leq N} \frac{(\ln n)^m}{n^{\frac{1}{2} + it}},$$

применив к ней следствие леммы 1, I (см. доказательство теоремы 6). Устремляя $N \rightarrow +\infty$, получим

$$\zeta^{(m)}\left(\frac{1}{2} + it\right) = (-i)^m \sum_{n \leq t/2\pi} \frac{(\ln n)^m}{n^{\frac{1}{2} + it}} + O\left(\frac{(\ln t)^m}{\sqrt{t}}\right).$$

Применяя теорему 2, I, доказать соотношение

$$\sqrt{\frac{t}{2\pi}} \sum_{\frac{t}{2\pi} < n \leq \frac{t}{2\pi}} \frac{(\ln n)^m}{\sqrt{n}} n^{-it} = e^{i\theta_1(t)} \sum_{n < \sqrt{\frac{t}{2\pi}}} \frac{\left(\ln \frac{t}{2\pi n}\right)^m}{n^{\frac{1}{2} - it}} + O(t^{-1/4} (\ln t)^{m+1}),$$

где $\theta_1(t) = -t \ln t + t \ln 2\pi + t + \pi/4$.

Из приближенного функционального уравнения

для $\zeta^{(m)}\left(\frac{1}{2} + it\right)$:

$$\zeta^{(m)}\left(\frac{1}{2} + it\right) = (-i)^m \left\{ \sum_{n < \sqrt{\frac{t}{2\pi}}} \frac{(\ln n)^m}{n^{\frac{1}{2} + it}} + e^{i\theta_1(t)} \sum_{n < \sqrt{\frac{t}{2\pi}}} \frac{\left(\ln \frac{t}{2\pi n}\right)^m}{n^{\frac{1}{2} - it}} \right\} + O(t^{-1/4} (\ln t)^{m+1}),$$

формул (1), (2), следует задача.

6. Взять $\Delta = 8H_1^{-1} \ln P$ и сумму S_1 разбить на две:

$$S_1 = S_{11} + S_{12},$$

$$\text{где } S_{11} = \sum_{n < (1-\Delta)P}, \quad S_{12} = \sum_{P \geq n > (1-\Delta)P}.$$

Для S_{11} имеем

$$S_{11} \ll \sum_{n < (1-\Delta)P} \frac{\left(\ln \frac{P}{n}\right)^k}{\sqrt{n}} \left| \sum_{\nu=0}^{H_1-1} e^{2\pi i \nu \alpha} \right|^r;$$

$$\left| \sum_{\nu=0}^{H_1-1} e^{2\pi i \nu \alpha} \right| \ll \min\left(H_1, \frac{1}{\|\alpha\|}\right) \ll \frac{H_1}{4}.$$

Для S_{12} имеем

$$S_{12} \ll H_1^r \left| \sum_{P(1-\Delta) < n < P} \frac{\left(\ln \frac{P}{n}\right)^k}{\sqrt{n}} e^{i \frac{\pi \nu}{\ln P} \ln n} \right|,$$

где ν — некоторое целое число с условием $T < \frac{\pi \nu}{\ln P} < T + H$.

После замены переменных и преобразований, приходим к суммам σ , $\sigma(a)$:

$$\sigma = \sum_{m < \Delta P} \frac{\left(-\ln\left(1 - \frac{m}{P}\right)\right)^k}{\sqrt{P-m}} e^{it \ln(P-m)},$$

$$\sigma(a) = \sum_{a < m < 2a} \frac{\left(-\ln\left(1 - \frac{m}{P}\right)\right)^k}{\sqrt{P-m}} e^{it \ln(P-m)}.$$

Наконец, преобразование Абеля дает

$$\sigma(a) \ll a^k P^{-k-1/2} \left| \sum_{a < m < a_1} e^{it \ln(P-m)} \right|, \quad a_1 \leq 2a.$$

Последнюю сумму оценим тривиально, если $a \leq \sqrt[3]{P}$, и по третьей производной (теорема 5, I), если $a > \sqrt[3]{P}$. Для $|S_1|$ получим

$$|S_1| \ll H_1^r (\ln P)^k (T^{1/6} H^{-k-1} \ln^2 T + T^{-1/4} \ln T).$$

В $|S_2|$ выделим слагаемое при $n = 1$, а оставшуюся часть оценим так же, как оценивали S_{11} . Получим

$$S_2 = H_1^r (\ln P)^k \{1 + O(T^{1/4} (4H_1^{-1} \ln P)^r) + O(T^{-1/4} \ln T)\}.$$

7. Следует из задач 5 и 6. (См. также Мозер Я. Об одной теореме Харди — Литтлвуда в теории дзета-функции Римана. — Acta Arithm., 31, 1976, 45—51; Карацуба А. А. О расстоянии между соседними нулями дзета-функции Римана, лежащими на критической прямой. — Труды МИАН, 157, 1981, 49—63.)

ГЛАВА V

1. При $\operatorname{Re} s > 1$ преобразованием Абеля получаем

$$\frac{f(s)}{s} = \int_1^{\infty} A(\xi) \frac{d\xi}{\xi^{s+1}}.$$

Умножить обе части равенства на $x^{s+1}/(s+1)$, проинтегрировать по отрезку $[b+iT, b-iT]$ и применить рассуждения теоремы 1. (См. также Карацуба А. А. Равномерная оценка остаточного члена в проблеме делителей Дирихле.—Изв. АН СССР, сер. Матем., 36, № 3, 1972, 475—483.)

2. Применяя следствие теоремы 6, IV, получаем

$$\int_T^{2T} \left| \zeta\left(\frac{1}{2} + it\right) \right|^4 dt \ll \int_T^{2T} \left| \sum_{n \leq T} \frac{\tau'(n)}{\sqrt{n}} n^{it} \right|^2 dt + 1,$$

где $0 \leq \tau'(n) \leq \tau(n)$. Последний интеграл оценить, пользуясь рассуждениями, подобными тем, которые применялись при доказательстве теоремы 1, и оценкой

$$\sum_{n < X} \tau^2(n) \ll X \ln^3 X.$$

3. (Харди — Литтлвуд). При $\operatorname{Re} s > 1$.

$$\zeta^4(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\tau_4(n)}{n^s};$$

применить теорему 1 и задачу 2. (См. также Hardy G. H., Littlewood I. E. The approximate functional equation in the theory of the zeta-function, with applications to the divisor problems of Dirichlet and Piltz.—Proc. London Math. Soc. (2), 21, 1922, 39—74.)

4. По следствию к теореме 5, IV при некотором $c > 0$ в области $2 \leq |t| \leq T$, $\sigma \geq 1 - c/\log T$, выполняется оценка

$$\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = O(\log^2 T).$$

В этой же области

$$1 + \frac{1}{\log T} \int_{\sigma}^{\sigma + i|t|} d(\ln \zeta(u + i|t|)) = \ln \zeta\left(1 + \frac{1}{\log T} + i|t|\right) - \ln \zeta(\sigma + i|t|),$$

т. е.

$$|\ln \zeta(\sigma + i|t|)| \ll \ln \ln T, \quad \frac{1}{|\zeta(\sigma + i|t|)|} \ll \ln^A |t|.$$

Кроме того, при $b > 1$ по теореме 1

$$\sum_{n < X} \mu(n) = \frac{1}{2\pi i} \int_{b-iT}^{b+iT} \frac{1}{\zeta(s)} \cdot \frac{X^s}{s} ds + O\left(\frac{X^b}{T(b-1)}\right) + O\left(\frac{X \ln X}{T}\right).$$

Далее следует повторить рассуждения теоремы 2.

5. Достаточность. Во-первых, а) и б) следуют одно из другого с помощью преобразования Абеля (см. теорему 2). Далее, при $\operatorname{Re} s > 1$ применяя преобразование Абеля, находим

$$-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{n^s} = s \int_1^{\infty} \psi(x) x^{-s-1} dx = s \int_1^{\infty} x^{-s} dx + \\ + s \int_1^{\infty} R(x) x^{-s-1} dx = \frac{s}{s-1} + s \int_1^{\infty} R(x) x^{-s-1} dx,$$

где $R(x) = O(x^{\gamma+\varepsilon})$. Последний интеграл определяет аналитическую функцию в полуплоскости $\operatorname{Re} s > \gamma$. Следовательно, в силу принципа аналитического продолжения, функция $\zeta'(s)/\zeta(s)$ в полуплоскости $\operatorname{Re} s > \gamma$ является аналитической во всех точках, за исключением точки $s = 1$, где она имеет полюс первого порядка; отсюда следует, что $\zeta(s)$ не имеет нулей при $\operatorname{Re} s > \gamma$. Если же в полуплоскости $\operatorname{Re} s > \gamma$ нет нулей, то а) и б) следуют из теоремы 3 (см. следствие). Утверждение с) следует по схеме решения задачи 4.

6. (Литтлвуд Д. Е.) Воспользоваться формулой (преобразование Меллина)

$$e^{-x} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty} x^{-w} \Gamma(w) dw \quad (\operatorname{Re} x > 0, \alpha > 0)$$

и теоремой 3.

7. Доказать, что при $c > 0, T \geq 2$

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{c-iT}^{c+iT} \frac{ds}{s} = \frac{1}{2} + O\left(\frac{1}{T}\right),$$

воспользоваться формулой (2), V, теоремой 3, IV и методом доказательства теоремы 3.

8. а) При $\operatorname{Re} s > 1$ рассмотреть функцию $f(s)$,

$$f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r(n)}{n^s} = \prod_p \left(1 + \frac{1}{\varphi^s(p)} + \frac{1}{\varphi^s(p^2)} + \dots \right),$$

которую сравнить с $\zeta(s)$;

б) При $\operatorname{Re} s > 0$ рассмотреть функцию $\Phi(s)$,

$$\Phi(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{s\varphi(n)}} = \prod_p \left(1 + \frac{1}{p^{s\varphi(p)}} + \frac{1}{p^{2s\varphi(p^2)}} + \dots \right).$$

9. Следует из теоремы 2.

Замечание. В задачах 8 и 9 получить остаточные члены, отвечающие остаточному члену теоремы 2 (см. также теорему 3, VI).

ГЛАВА VI

1. Повторить доказательство теоремы 2: рассмотреть сумму S ,

$$S = \sum_{x=N+1}^{2N} e^{2\pi i m f(x)}, \quad P^{9/10} < N < P,$$

взять $a = [N^{5/11}]$, $r = c_1(\log N)^{\gamma-1}$, разложить функцию $mf(n+xy)$ в ряд Тейлора по степеням xy и оценить (как в теореме 2) двойную сумму W ,

$$W = \sum_{x=1}^a \sum_{y=1}^a e^{2\pi i F(xy)}, \quad F(xy) = \sum_{s=1}^r \alpha_s x^s y^s$$

(нетривиально оценить сумму минимумов для тех s , которые лежат в промежутке $c_2(\log N)^{\gamma-1} < s < c_3(\log N)^{\gamma-1}$, где c_1, c_2, c_3 следует подобрать, пользуясь условиями задачи).

2. Следует из задачи 1 и леммы В, I.

3. Следует из теоремы 2 и теоремы 6, IV (применить преобразование Абеля).

4. К функции $f(s) = \xi^k(s)$ применить задачу 1, V: для оценки $A(\xi)$ воспользоваться задачей 7, III; взять $\alpha = 1 - (2ck)^{-2/3}$, где $c > 0$ — постоянная задачи 3, $T = X^{1-\alpha}$, и рассмотреть соответствующий интеграл по контуру прямоугольника с вершинами $b+iT, a+iT, a-iT, b-iT$, ($b = 1 + (\log X)^{-1}$); так как $A(\xi)$ — неубывающая функция ξ , то при $h = X^{(\alpha+1)/2}$

$$\frac{1}{h} \int_{X-h}^X A(\xi) d\xi \leq A(X) \leq \frac{1}{h} \int_X^{X+h} A(\xi) d\xi.$$

(См. также Карацуба А. А. Оценки тригонометрических сумм методом И. М. Виноградова и их применения. — Труды МИАН, 112, 1971, 241—255, и статью к задаче 1, V).

5. При каждом $j, j = 1, \dots, N$, построить ε -«стаканчик» точки β_j , т. е. функцию $\varphi_j(x_j) = 0$ при $|x_j - \beta_j| \geq \varepsilon$, $\varphi_j(\beta_j) = 1$ (см. лемму А. I), разложить в ряд Фурье $f(x_1, \dots, x_N) = \varphi_1(x_1) \dots \varphi_N(x_N)$ и доказать, что

$$\int_0^T f(\alpha_1 t, \dots, \alpha_N t) dt = T \int_0^1 \dots \int_0^1 f(x_1, \dots, x_N) dx_1 \dots dx_N + o(T).$$

6. Рассмотреть две функции комплексного переменного z : $\Phi(X; s_0 + z, \theta)$ и $\Phi(X; s_0 + z)$, воспользоваться принципом аргумента и задачей 5.

7. Воспользоваться эйлеровским произведением для $\xi(s)$.

8. Использовать соотношение (4), § 1, IV, провести вычисления.

9. Функцию $F(\theta_{p_1}, \theta_{p_2}, \dots, \theta_{p_k})$ можно представить в виде

$$F = \sum_{n=1}^k \frac{1}{p_n} e^{2\pi i \theta_{p_n}} + O(1) = L(\theta_{p_1}, \dots, \theta_{p_k}) + O(1),$$

причем $O(1)$ является непрерывной функцией аргументов $\theta_{p_1}, \dots, \theta_{p_k}$.

Множество значений $L(\theta_{p_1}, \dots, \theta_{p_k})$ есть круг ($k > 10$) радиуса

$$\sum_{n=1}^k \frac{1}{p_n}.$$

В силу расходимости ряда $\sum p^{-1}$ (см. задачу 9, V) утверждение задачи является следствием непрерывности F .

10. Воспользовавшись предыдущей задачей, изменить конечное количество $\lambda(p)$ так, чтобы выполнялись пункты а), б), в), г). Справедливость пункта д) проверить методом комплексного интегрирования (см. гл. V).

11. См. указание к решению задачи 9.

12. Используя результаты д) а) и д) б) задачи 10, применить теорему Лагранжа о конечном приращении.

13. При $X > X_i$ рассмотреть

$$F_2(\bar{\theta}) = \sum_{n \leq X} \frac{\lambda'(n)}{n^\sigma} + \sum_{\frac{1}{2}X < p < X} \left(\frac{1}{p^\sigma} + \frac{1}{p^\sigma} e^{2\pi i \theta p} \right),$$

и применить задачи 11 и 12.

14. Воспользоваться задачами 13 и 6.

(К задачам 5—14 см. также Воронин С. М. О нулях частных сумм ряда Дирихле дзета-функции Римана.— ДАН СССР 216, № 5, 1974, 964—967).

ГЛАВА VII

1. Для доказательства В применить теорему 1, V и воспользоваться А. Для доказательства А воспользоваться результатом задачи 2, IV, применить преобразование Абеля и В.

2. Необходимость: а) и б) следуют из задачи 1; в) следует из г); для доказательства г) получить предварительно оценку

$$\left| \sum_{n \leq X} \tau_k(n) n^{it} \right| \ll \sqrt{X} |t|^k, \quad 1 \ll X \leq |t|^k$$

(см. задачу 1, B); д) следует из теоремы 1, V.

Достаточность. Пусть выполняется а) и пусть при некотором $\varepsilon_0 > 0$ существует последовательность чисел $T_j \rightarrow +\infty$ такая, что

$$\left| \zeta\left(\frac{1}{2} + iT_j\right) \right| \geq T_j^{\varepsilon_0};$$

из теоремы 6, IV следует, что при $|t - T_j| \leq 1/2$.

$$\zeta\left(\frac{1}{2} + it\right) = \zeta\left(\frac{1}{2} + iT_j\right) + O\left(|t - T_j| T_j^{\frac{1}{4}} \ln T_j\right) + O(1),$$

т. е.

$$\left| \zeta\left(\frac{1}{2} + it\right) \right| \gg T_j^{\varepsilon_0} \text{ при } |t - T_j| \ll T_j^{-1/4};$$

отсюда

$$\int_1^{2T_j} \left| \zeta \left(\frac{1}{2} + it \right) \right|^{2k} dt \gg T_j^{2k\varepsilon_0 - 1/4},$$

при $k > 1/\varepsilon_0$ получаем противоречие.

Достаточность б) и в) доказывается аналогично, г) тривиально. Докажем д). При $\operatorname{Re} s > 1$

$$\begin{aligned} \zeta^k(s) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\tau_k(n)}{n^s} = s \int_1^{\infty} T_k(X) X^{-s-1} dX = \\ &= s \int_1^{\infty} X P_{k-1}(\ln X) X^{-s-1} dX + s \int_1^{\infty} R_k(X) X^{-s-1} dX = f(s) + g(s); \end{aligned}$$

функция $f(s)$ регулярна при любом $\operatorname{Re} s > 0$, $s \neq 1$, $g(s)$ — регулярна при $\operatorname{Re} s > 1/2$; оценивая $|f(s)|$ и $|g(s)|$ при $\operatorname{Re} s \geq s_0 > 1/2$, $|t| \geq 2$, найдем

$$|\zeta^k(s)| \ll |t|; \quad |\zeta(\sigma + it)| \ll |t|^{1/k}$$

при любом $k \geq 2$; отсюда следует, например, б) (см. также [4], с. 324—326).

3. Воспользоваться задачей 2, г) и повторить доказательство теоремы 1.

4. а) Пусть $N > H > 0$, J — число решений неравенства

$$N - p < p' \leq N - p + H, \quad p \leq N/2,$$

т. е.

$$\begin{aligned} J &= \sum_{p < \frac{N}{2}} (\psi(N - p + H) - \psi(N - p)) = \\ &= H\pi \left(\frac{N}{2} \right) - \sum_{p < \frac{N}{2}} \sum_{|\operatorname{Im} \rho| \leq T} \frac{(N - p + H)^\rho - (N - p)^\rho}{\rho} + O \left(\frac{N^2 \ln N}{T} \right); \end{aligned}$$

двойная сумма по абсолютной величине не превосходит ω ,

$$\omega = \sum_{p < N/2} \int_{N-p}^{N-p+H} \left| \sum_{|\operatorname{Im} \rho| \leq T} x^{\rho-1} \right| dx \ll HN^{-1} \int_{N/2}^{N+H} \left| \sum_{|\operatorname{Im} \rho| \leq T} x^\rho \right| dx.$$

Последний интеграл оценить, пользуясь неравенством Коши и теоремой 1.

б) Следует из задачи 3 подобно а).

5. Повторить доказательство теоремы 2. (См. также Линник Ю. В. Некоторые условные теоремы, касающиеся бинарной проблемы Гольдбаха. — Изв. АН СССР, сер. Матем, 16, № 6, 1952, 503—520.)

где

$$r = \frac{n(p-1)}{2}, \quad a_0 = F(x),$$

$$a_\nu = \frac{1}{\nu!} F^{(\nu)}(x) = (f(x))^{\frac{p-1}{2}-\nu} B_\nu(x),$$

$$B_\nu = B_\nu(x) = C_r^\nu a^\nu x^{(n-1)\nu} + \dots, \quad \nu = 1, 2, \dots, (p-1)/2.$$

Пользуясь задачей 1, найдем многочлен $h(x)$ вида

$$h = h(x) = b_0 + b_1 H + \dots + b_k H^k$$

и такой, что

$$F(x)h(x) = c_0 + c_1 H + \dots + c_k H^k + c_{2k+1} H^{2k+1} + \dots$$

Коэффициенты c_0, c_1, \dots, c_k определяются из системы линейных уравнений:

$$\begin{cases} c_0 = a_0 b_0, \\ c_1 = a_0 b_1 + a_1 b_0, \\ \dots \\ c_k = a_0 b_k + a_1 b_{k-1} + \dots + a_k b_0, \\ 0 = a_1 b_k + a_2 b_{k-1} + \dots + a_{k+1} b_0, \\ \dots \\ 0 = a_k b_k + a_{k+1} b_{k-1} + \dots + a_{2k} b_0. \end{cases}$$

Последние n уравнений этой системы можно записать так ($f(x) = f$):

$$\begin{cases} f^k B_1 b_k + f^{k-1} B_2 b_{k-1} + \dots + B_{k+1} b_0 = 0, \\ f^k B_2 b_k + f^{k-1} B_3 b_{k-1} + \dots + B_{k+2} b_0 = 0, \\ \dots \\ f^k B_k b_k + f^{k-1} B_{k+1} b_{k-1} + \dots + B_{2k} b_0 = 0. \end{cases}$$

Из этой системы находим b_0, b_1, \dots, b_k :

$$b_{k-s+1} = (-1)^s f^{s-1} \begin{vmatrix} B_1 & \dots & B_{s-1} & B_{s+1} & \dots & B_{k+1} \\ B_2 & \dots & B_s & B_{s+2} & \dots & B_{k+2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ B_k & \dots & B_{s+k-2} & B_{s+k} & \dots & B_{2k} \end{vmatrix}.$$

Старший одночлен многочлена b_{k-s+1} имеет вид

$$(-1)^s a^{k(h-1)} x^{k(h+1)(n-1)+s-1} \begin{vmatrix} C_r^1 & \dots & C_r^{s-1} & C_r^{s+1} & \dots & C_r^{k+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ C_r^k & \dots & C_r^{k+s-2} & C_r^{k+s} & \dots & C_r^{2k} \end{vmatrix}.$$

Степень многочлена $a_s(x)$ равна $\frac{p-1}{2} n - s$, а коэффициент при старшей степени $a_s(x)$ равен $a^{(p-1)/2}$. Степень c_k не превосходит степени $a_s b_{k-s}$, $0 \leq s \leq k$; но степень $a_s b_{k-s}$ при любом s ,

$0 \leq s \leq k$, равна

$$k(k+1)(n-1) + \frac{p-1}{2}n.$$

Коэффициент при этой степени в многочлене c_k равен κ ,

$$\begin{aligned} \kappa &= \sum_{s=1}^{k+1} (-1)^{s-1} a^{h(h+1) + \frac{p-1}{2}} \begin{vmatrix} C_r^1 & \dots & C_r^{s-1} & C_r^{s+1} & \dots & C_r^{k+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ C_r^k & \dots & C_r^{k+s-2} & C_r^{k+s} & \dots & C_r^{2k} \end{vmatrix} = \\ &= a^{h(h+1) + \frac{p-1}{2}} \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ C_r^1 & C_r^2 & \dots & C_r^{k+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ C_r^k & C_r^{k+1} & \dots & C_r^{2k} \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

Так как n — нечетное число, $k \leq (p-1)/4$, то $\kappa \not\equiv 0 \pmod{p}$. Таким образом, многочлен $g(x)$,

$$g(x) = c_0 + c_1 H + \dots + c_k H^k,$$

имеет степень m по модулю p ,

$$m = kp + k(k+1)(n-1) + \frac{p-1}{2}n,$$

и каждый корень $F(x)$ по модулю p , является корнем кратности $2k+1$ многочлена $g(x)$.

5. Будем считать $n \geq 3$, $p > 4n^2$. Пусть J_v — число решений сравнения

$$F_v(x) = f^{\frac{p-1}{2}}(x) + (-1)^v \equiv 0 \pmod{p}, \quad v = 1, 2.$$

Тогда

$$S = \sum_{x=1}^p \left(\frac{f(x)}{p} \right) = J_1 - J_2.$$

Возьмем в задаче 4 $k = \left\lfloor \frac{1}{2}(\sqrt{2p} - 1) \right\rfloor + 1$, применим задачу 2, найдем

$$(2k+1)J_v \leq m = kp + k(k+1)(n-1) + \frac{p-1}{2}n,$$

$$J_v \leq \frac{1}{2}p + (n-1) \left(\sqrt{\frac{p}{2}} + \frac{1}{2} \right).$$

Кроме того,

$$J_1 + J_2 \geq p - n.$$

Следовательно,

$$J_2 \geq p - n - J_1 \geq \frac{1}{2}p - (n-1) \left(\sqrt{\frac{p}{2}} + \frac{1}{2} \right) - n;$$

$$S \leq |J_1 - J_2| \leq 2(n-1) \left(\sqrt{\frac{p}{2}} + \frac{1}{2} \right) + n < 2n\sqrt{p}.$$

(К задачам 4—5 см. также Степанов С. А. О числе точек гиперэллиптической кривой над конечным полем.— Изв. АН СССР, сер. Матем., 33, № 5, 1969, 1171—1181; К о р о б о в Н. М. Оценка суммы символов Лежандра.— ДАН СССР, 96, 4, 1971, 764—767.)

6. При $X < p$ имеем

$$V(X) = \frac{1}{2} \sum_{n < X} \left(\left(\frac{n}{p} \right) + 1 \right) = \frac{1}{2} X + \frac{1}{2} \sum_{n < X} \left(\frac{n}{p} \right) + O_1,$$

$$N(X) = \frac{1}{2} X - \frac{1}{2} \sum_{n < X} \left(\frac{n}{p} \right) + O_2;$$

из леммы 5, VIII следует задача

7. Невычетами среди чисел $1, 2, \dots, Y$ будут те числа, которые делятся на простые, больше n , т. е.

$$N(Y) \leq \sum_{\substack{p \leq Y \\ n < p < Y}} \frac{Y}{p} = Y \left(\ln \frac{\ln Y}{\ln n} + O \left(\frac{1}{\ln n} \right) \right).$$

С другой стороны,

$$N(Y) = \frac{1}{2} Y + o(Y),$$

т. е.

$$\frac{1}{2} + o(1) \leq \ln \frac{\ln Y}{\ln n} + O \left(\frac{1}{\ln n} \right)$$

(см. также Виноградов И. М. Основы теории чисел.— М.: Наука, 1981, с. 113).

8. Имеем

$$\sum_{\lambda=1}^p \left(\sum_{m=1}^Z \left(\frac{\lambda+m}{p} \right) \right)^{2k} = \sum_{m_1, \dots, m_{2k}=1}^Z \sum_{\lambda=1}^p \left(\frac{(\lambda+m_1) \dots (\lambda+m_{2k})}{p} \right).$$

Все наборы (m_1, \dots, m_{2k}) разбить на два класса A и B ; в класс A отнести те из них, у которых имеется по крайней мере $k+1$ различных значений m_j , в класс B — все остальные. Число наборов класса B не превосходит $k! Z^k$. Если набор (m_1, \dots, m_{2k}) принадлежит

классу A , $(\lambda+m_1) \dots (\lambda+m_{2k}) = (\lambda+m'_1)^{\alpha_1} \dots (\lambda+m'_r)^{\alpha_r}$, m'_1, \dots, m'_r — попарно различные числа, то одно из α_j равно 1, и к сумме

$$\sum_{\lambda=1}^p \left(\frac{(\lambda+m'_1)^{\alpha_1} \dots (\lambda+m'_r)^{\alpha_r}}{p} \right)$$

применима оценка задачи 5.

9. Взять $k = [(2\epsilon)^{-1}] + 1$, возвести $|W|$ в степень $2k$, применить неравенство Гёльдера и задачу 8. (См. также Карацуба А. А. Суммы характеров с простыми числами, принадлежащими арифметической прогрессии.— Изв. АН СССР, сер. Матем., 35, № 3, 1971, 469—484, лемма 4.)

10. Возьмем $Y = [p^{0,25(1-\varepsilon)}]$, $Z = [p^{0,25\varepsilon}]$, тогда (ср. с доказательством теоремы 2, VI)

$$S = (YZ)^{-1} \sum_{m < X} \sum_{y < Y} \sum_{z < Z} \left(\frac{m + yz}{p} \right) + O(Xp^{-\varepsilon});$$

$$W \leq (YZ)^{-1} \sum_{m < X} \sum_{y < Y} \left| \sum_{z < Z} \left(\frac{my' + z}{p} \right) \right|,$$

где $yy' \equiv 1 \pmod{p}$. Далее, при любом $k \geq 1$

$$\begin{aligned} W^k &\leq (YZ)^{-k} (XY)^{k-1} \sum_{m < X} \sum_{y < Y} \left| \sum_{z < Z} \left(\frac{my' + z}{p} \right) \right|^k = \\ &= X^{k-1} Y^{-1} Z^{-k} \sum_{\lambda=1}^{p-1} \tau'(\lambda) \left| \sum_{z < Z} \left(\frac{\lambda + z}{p} \right) \right|^k, \end{aligned}$$

где $\tau'(\lambda)$ — число решений сравнения

$$my' \equiv \lambda \pmod{p}, \quad m \leq X, \quad y \leq Y.$$

Применим неравенство Коши:

$$W^{2k} \leq X^{2k-2} Y^{-2} Z^{-2k} \sum_{\lambda=1}^{p-1} (\tau'(\lambda))^2 \left| \sum_{z < Z} \left(\frac{\lambda + z}{p} \right) \right|^{2k}.$$

Первая сумма в последнем неравенстве равняется числу решений сравнения $m_1 y_1 \equiv m_2 y \pmod{p}$, $m, m_1 \leq X$, $y, y_1 \leq Y$, которое в свою очередь не превосходит

$$\sum_{\lambda < XY} \tau^2(\lambda) = O(XY \ln^3 p).$$

Ко второй сумме применим задачу 8. Выбирая $k = k(\varepsilon)$, получим утверждение (см. также Burgess D. A. The distribution of quadratic residues and non-residues, *Mathematica*, 4, 1957, 106—112, Карацуба А. А. Суммы характеров и первообразные корни в конечных полях.— ДАН СССР, 180, № 6, 1968, 1287—1289).

11. Следует из задач 7 и 10.

12. Следует из леммы гл. VII.

13. (С. Учицкая). Пусть $0 < \varepsilon < 0,01$, $Y = \ln^{2+\varepsilon} X$, $k = \frac{(2-\varepsilon) \ln X}{2 \ln \ln X}$, $X \geq X_0(\varepsilon)$. Рассмотрим сумму W_m ,

$$W_m = \sum_{p < X} \left(\sum_{q < Y} \left(\frac{q}{p} \right) \right)^{2m},$$

где m — натуральное число, q и p — простые числа. Имеем

$$W_m = \sum_{p < X} \left| \sum_{n < Y^m} \tau'_m(n) \left(\frac{n}{p} \right) \right|^2,$$

где $\tau'_m(n)$ — число решений уравнения $q_1 \dots q_m = n$ в простых числах $q_j \leq Y$, $j = 1, \dots, m$. Пользуясь формулой (5) и задачей

12, приходим к неравенству

$$W_m \leq \sum_{p < X} \sum_{a=1}^{p-1} \left| \sum_{n < Y^m} \tau'_m(n) e^{\frac{2\pi i an}{p}} \right|^2 \leq \\ \leq c(Y^m + X^2) \sum_{n < Y^m} (\tau'_m(n))^2 \leq cm^m Y^m (Y^m + X^2).$$

Пусть теперь для M значений p , $p \leq X$, выполняется равенство

$$\left| \sum_{q < Y} \left(\frac{q}{p} \right) \right|^{2h} = (\pi(Y))^{2h}.$$

Тогда из предыдущего неравенства следует такое:

$$M (\pi(Y))^{2h} \leq ch^k Y^k (Y^k + X^2); \quad M \leq c_1 \frac{X}{\ln^{1+\delta} X}, \quad \delta = \delta(\varepsilon) > 0.$$

Следовательно, для $\pi(X) + O\left(\frac{X}{\ln^{1+\delta} X}\right)$ значений $p \leq X$ выполняется неравенство

$$\left| \sum_{q < Y} \left(\frac{q}{p} \right) \right| < \pi(Y),$$

т. е. среди чисел $q \leq Y$ есть квадратичные вычеты и невычеты по модулю p .

ГЛАВА IX

1. а) Имеем

$$\sum_{z < n \leq N} \frac{\chi(n)}{n^s} = \sum_{z < n \leq N} \frac{1}{n^\sigma} \chi(n) n^{-it} = \sigma \int_z^N C(u) u^{-1-\sigma} du + C(N) N^{-\sigma},$$

где

$$C(u) =$$

$$= \sum_{z < n \leq u} \chi(n) n^{-it} = \sum_{l=0}^{h-1} \chi(l) \sum_{(z-l)k^{-1} < m < (u-l)k^{-1}} e^{-it \log(mk+l)}.$$

К сумме по m применим следствие леммы 1, I; получим

$$C(u) = \sum_{l=0}^{h-1} \chi(l) \left(\int_z^u x^{-it} dx + O(1) \right) = O(k).$$

Отсюда и из первой формулы при $N \rightarrow +\infty$ получим требуемое.

б) Повторить решение задачи 1, IV, заменив $\zeta(s)$ функцией $L(s, \chi)$.

2. Так как χ — примитивный характер по модулю k , то по лемме 3, VIII

$$\chi(n) = \frac{1}{\tau(\bar{\chi})} \sum_{b=1}^k \bar{\chi}(b) e^{\frac{2\pi i bn}{k}}, \quad |\tau(\bar{\chi})| = \sqrt{k}.$$

Распространяя в нужном месте суммирование на все характеры по модулю k и пользуясь мультипликативностью характера, последовательно получаем

$$\begin{aligned} & \sum'_{\chi \bmod k} \left| \sum_{n=M+1}^{M+N} a_n \chi(n) \right|^2 \leq \\ & \leq \frac{1}{k} \sum_{\chi \bmod k} \sum_{n=M+1}^{M+N} \sum_{m=M+1}^{M+N} a_n \bar{a}_m \sum_{\substack{b=1 \\ (b,k)=1}}^k \bar{\chi}(b) \sum_{\substack{c=1 \\ (c,k)=1}}^k \chi(c) e^{2\pi i \frac{bn-cm}{k}} = \\ & = \frac{\varphi(k)}{k} \sum_{\substack{b=1 \\ (b,k)=1}}^k \sum_{n=M+1}^{M+N} \sum_{m=M+1}^{M+N} a_n \bar{a}_m e^{2\pi i \frac{b(n-m)}{k}} = \\ & = \frac{\varphi(k)}{k} \sum_{\substack{b=1 \\ (b,k)=1}}^k \left| \sum_{n=M+1}^{M+N} a_n e^{2\pi i \frac{bn}{k}} \right|^2. \end{aligned}$$

Применяя, далее, задачу 12, VIII, получим требуемое.

3. Применяем преобразование Абеля:

$$\begin{aligned} & \sum_{n=M+1}^{M+N} a_n \chi(n) n^{-s} \chi + iA = \\ & = (s_\chi - iA) \int_{M+1}^{M+N} C(u) u^{-s_\chi + iA - 1} du + C(M+N)(M+N)^{-s_\chi + iA}, \end{aligned}$$

где

$$C(u) = \sum_{M < n \leq u} a_n \chi(n) n^{-iA},$$

$$\begin{aligned} & \left| \sum_{n=M+1}^{M+N} a_n \chi(n) n^{-s_\chi} \right|^2 \leq 20 \left(\int_{M+1}^{M+N} |C(u)| u^{-1} du \right)^2 + \\ & + 20 |C(M+N)|^2 \leq 20L \int_{M+1}^{M+N} u^{-1} |C(u)|^2 du + 20 |C(M+N)|^2. \end{aligned}$$

Суммируя обе части неравенства по χ и k и пользуясь задачей 2, получим требуемое.

4. Умножим равенство а) задачи 1 на

$$M_X(s, \chi) = \sum_{n \leq X} \mu(n) \chi(n) n^{-s}.$$

Пользуясь свойством функции Мёбиуса, при $s = \rho$ получим

$$\begin{aligned} 0 = 1 + \sum_{X < n \leq XY} \frac{a(n) \chi(n)}{n^\rho} + \left(\sum_{Y < n \leq Z} \frac{\chi(n)}{n^\rho} \right) M_X(\rho, \chi) + \\ + O(kZ^{-\sigma} |M_X(\rho, \chi)|), \end{aligned}$$

где

$$a(n) = \sum_{\substack{d \setminus n \\ nY < d < \min(X, nX^{-1})}} \mu(d), \quad |a(n)| \leq \tau(n).$$

Отсюда утверждение следует тривиально.

5. Пусть $s = \rho - \text{пуль}$ $L(s, \chi)$, $\text{Re } s \geq \alpha$, $|\text{Im } s| \leq T$; возьмем в задаче 4

$$X = B^{\frac{1}{2(3-2\alpha)}}, \quad Y = B^{\frac{3}{2(3-2\alpha)}}, \quad B = Q^2 + QT,$$

$$Z = \begin{cases} B, & \text{если } \frac{1}{2} \leq \alpha < \frac{3}{4}; \\ Y, & \text{если } \frac{3}{4} \leq \alpha < 1. \end{cases}$$

Все рассматриваемые нули всех L -рядов с примитивными характеристиками χ по модулю $k \leq Q$ разделим на четыре класса, относя в первый, второй, третий и четвертый классы нули, для которых выполняется соответственно первое, второе, третье или четвертое неравенство задачи 4 (классы могут пересекаться). Суммируя каждое из неравенств по нулям своего класса, а затем складывая все получившиеся неравенства, приходим к такому соотношению:

$$\sum_{k \leq Q} \sum'_{\chi \bmod k} N(\alpha, T, \chi) \leq c_2 \sum_{k \leq Q} \sum_{\chi \bmod k} \sum_{\rho_\chi} (\kappa_1 + \kappa_2 + \kappa_3 + \kappa_4).$$

Каждая из сумм справа оценивается подобно сумме задачи 3: нули ρ_χ разбивают на классы, относя в один из них, для которых $A \leq \text{Im } \rho_\chi < A + 1$, $A = -T, -T + 1, \dots, T - 2, T - 1$; в одном классе будет $\ll \ln(Q + T)$ нулей, а всех классов $\ll T$; при оценке третьей суммы, еще применяется неравенство Гельдера:

$$\begin{aligned} \sum_{k \leq Q} \sum'_{\chi \bmod k} \left| \sum_{n \leq X} \mu(n) \chi(n) n^{-\rho} \right|^{4/3} & \left| \sum_{Y < n \leq Z} \chi(n) n^{-\rho} \right|^{4/3} \leq \\ & \leq \left(\sum_{k \leq Q} \sum'_{\chi \bmod k} \left| \sum_{n \leq X} \mu(n) \chi(n) n^{-\rho} \right|^2 \right)^{2/3} \times \\ & \quad \times \left(\sum_{k \leq Q} \sum'_{\chi \bmod k} \left| \sum_{Y < n \leq Z} \chi(n) n^{-\rho} \right|^4 \right)^{1/3} \end{aligned}$$

Все указанные суммы оцениваются одинаково; оценим, например, самую последнюю, т. е. Σ :

$$\begin{aligned} \Sigma &= \sum_{k \leq Q} \sum'_{\chi \bmod k} \left| \sum_{Y < n \leq Z} \chi(n) n^{-\rho} \right|^4 = \\ &= \sum_{k \leq Q} \sum'_{\chi \bmod k} \left| \sum_{Y^2 < n \leq Z^2} \tau'(n) \chi(n) n^{-\rho} \right|^2, \end{aligned}$$

где $\tau'(n) \leq \tau(n)$, $\rho = \rho_\chi$, $A \leq \text{Im } \rho_\chi < A + 1$. Для этого рассмотрим такую сумму W ,

$$W = \sum_{k \leq Q} \sum'_{\chi \bmod k} \left| \sum_{N < n \leq N_1 < 2N} \tau'(n) n^{-\alpha} \chi(n) n^{\alpha-\rho} \right|^2;$$

эта сумма соответствует сумме задачи 3, с)

$$a_n = \tau'(n)n^{-\alpha}.$$

Поэтому

$$W \leq c(Q^2 + N) \sum_{n=N+1}^{2N} n^{-2\alpha} \tau^2(n) \leq c_1(Q^2 + N) N^{-2\alpha+1} \ln^3(Q + T).$$

Тем самым

$$\sum \leq c_2(Q^2 Y^{2(1-2\alpha)} + Z^{4(1-\alpha)}) \ln^5(Q + T).$$

После несложных вычислений получим утверждение задачи.

6. а) Из § 1

$$\psi(x; k, l) - \frac{\psi(x)}{\varphi(k)} = \frac{1}{\varphi(k)} \sum_{\chi \neq \chi_0} \psi(x, \chi) \bar{\chi}(l) + O(\ln^2 x);$$

$$\psi(x, \chi) = \psi(x, \chi_1) + O(\ln^2 x),$$

где χ_1 — примитивный характер по модулю k_1 , $k_1 \setminus k$, порожденный характером χ . Отсюда

$$\begin{aligned} \sigma &= \sum_{k \leq \sqrt{X}(\ln X)^{-B}} \max_{(l, k)=1} \left| \psi(X; k, l) - \frac{X}{\varphi(k)} \right| \leq \\ &\leq \sum_{k \leq \sqrt{X}(\ln X)^{-B}} \frac{1}{\varphi(k)} \sum_{\chi \neq \chi_0} |\psi(X, \chi)| + O(\sqrt{X}(\ln X)^{-B+2}) \leq \\ &\leq \sum_{k_1 \leq \sqrt{X}(\ln X)^{-B}} \sum_{k_1 r \leq \sqrt{X}(\ln X)^{-B}} \frac{1}{\varphi(k_1 r)} \sum_{\chi_1 \bmod k_1} (|\psi(X, \chi_1)| + \\ &\quad + O(\ln^2 X)) + O(\sqrt{X}(\ln X)^{-B+2}); \end{aligned}$$

так как

$$\varphi(k_1 r) \geq \varphi(k_1) \varphi(r), \quad \varphi(r) > cr(\ln \ln X)^{-1},$$

то

$$\sigma \ll (\ln^2 X) \sum_{k_1 \leq \sqrt{X}(\ln X)^{-B}} \frac{1}{\varphi(k_1)} \sum_{\chi_1 \bmod k_1} |\psi(X, \chi_1)| + \sqrt{X}(\ln X)^{-B+2}.$$

Если $k_1 \leq (\ln X)^N$, $N > 0$ — любое фиксированное число, то пужная оценка следует из теоремы 6. Пусть $(\ln X)^N < k_1 \leq \sqrt{X}(\ln X)^{-B}$. Рассмотрим $\sigma(K)$,

$$\sigma(K) = \sum_{K < k_1 \leq 2K} \frac{1}{\varphi(k_1)} \sum_{\chi_1 \bmod k_1} |\psi(X, \chi_1)|;$$

по теореме 1 при $T = K(\ln X)^{A+10}$

$$|\psi(X, \chi_1)| \ll \sum_{|\operatorname{Im} \rho| \leq T} \frac{|X^\rho|}{|\rho|} + \frac{X}{K(\ln X)^{A+8}}.$$

Теперь оценим такую сумму:

$$\sigma_1 = \sum_{K < k_1 \leq 2K} \sum_{\chi_1 \bmod k_1} \sum_{T_1 < \operatorname{Im} \rho \leq 2T_1} X^\sigma,$$

где $\rho = \sigma + it$. Имеем

$$X^\sigma = X^{1/2} + (\ln X) \int_{0,5}^{\sigma} X^\alpha d\alpha,$$

$$\sum_{\text{Im } \rho \leq 2T} X^\sigma = X^{1/2} N\left(\frac{1}{2}, 2T_1, \chi\right) + (\ln X) \int_{0,5}^1 X^\alpha N(\alpha, 2T_1, \chi) d\alpha.$$

Отсюда

$$\sigma_1 \ll (\ln X) \max_{\alpha} X^\alpha \sum_{K < h_1} \sum_{\chi_1 \bmod h_1} N(\alpha, 2T_1, \chi_1).$$

Подставляя в последнюю оценку результат задачи 5, а затем собирая вместе все предыдущие оценки, получим требуемое с $B = A + 2$.

б) Повторить рассуждения а) и в нужном месте воспользоваться следствиями 2 и 3 к теореме 4 и следствием 3 к теореме 6.

(К задачам 2–6 см. также [6], [8], [11], Виноградов в А. И. О плотностной гипотезе для L -рядов Дирихле.—Изв. АН СССР, сер. Матем., 29, № 4, 1965, 903–934; Bombieri E. On the large sieve, *Mathematica*, 12, 1965, 201–225.)

7. Пользуясь рассуждениями леммы 3, VIII, доказать, что

$$\text{ind}(1 + p^s u) = (p - 1) p^{s-1} \gamma, \text{ где } (\gamma, p) = 1.$$

Рассмотреть, далее, функцию f ,

$$f(1 + p^s z) = p^s z - \frac{1}{2} (p^s z)^2 + \dots + (-1)^{m-1} \frac{1}{m} (p^s z)^m,$$

и доказать, что

$$f(1 + p^s z_1) + f(1 + p^s z_2) \equiv f((1 + p^s z_1)(1 + p^s z_2)) \pmod{p^n}.$$

Отсюда и из предыдущего вывести соотношение

$$\text{ind}(1 + p^s u) \equiv (p - 1) a f(1 + p^s u) \pmod{(p - 1) p^{n-1}},$$

где $(a, p) = 1$. (См. также Постников А. Г. О сумме характеров по модулю, равному степени простого числа.—Изв. АН СССР, сер. Матем., 19, 1955, 11–16.)

8. Оценивать так же, как оценивалась дзетовая сумма (теорема 2, VI): взять $s = [0,5nr^{-1}]$, $a = [N^{0,25}]$, получить неравенство

$$|S| \leq a^{-2} N |W| + 2a^2,$$

где

$$W = \sum_{x=1}^a \sum_{y=1}^a \chi(1 + up^s xy), \quad (u, p) = 1.$$

Пользуясь задачей 7, последнюю сумму заменить тригонометрической и дословно повторить доказательство теоремы 2, VI; в соответствующем месте нетривиально оценивать суммы минимумов с индексом m из интервала $0,5r < m < 1,5r$. (См. также Ро-

зи и С. М. О нулях L -рядов Дирихле.—Изв. АН СССР, сер. Матем., 23, 1959, 503–508; Карацуба А. А. Тригонометрические суммы специального вида и их приложения.—Изв. АН СССР, сер. Матем. 28, № 1, 1964, 237–248; Чубариков В. Н. Уточнение границы нулей L -рядов Дирихле по модулю, равному степени простого числа.—Вестник Московского Университета, № 2, 1973, 46–52.)

9. Пусть $\chi \neq \chi_0$; при любом целом $X \geq 1$, $\operatorname{Re} s = \sigma > 0$, применяя преобразование Абеля, найдем

$$L(s, \chi) = \sum_{n \leq X} \chi(n) n^{-s} + s \int_X^{\infty} \mathbf{C}(u) u^{-s-1} du,$$

где

$$\mathbf{C}(u) = \sum_{n \leq u} \chi(n) = O(k);$$

тем самым

$$L(s, \chi) = \sum_{n \leq k} \chi(n) n^{-s} + O(|t| + 1) k^{1-\sigma}.$$

Разбивая сумму по n на две, $n \leq N$ и $n > N$, применяя в первом случае тривиальную оценку, а во втором — оценку задачи 8, при $N = \exp(\log k)^{2/3}$,

$$\operatorname{Re} s = \sigma \geq 1 - \frac{c}{(\log k)^{2/3}},$$

найдем

$$L(s, \chi) = O(|t| + 1) (\log k)^{2/3}.$$

Далее, при

$$|t| \leq \exp((\log \log k)^2)$$

повторить рассуждения теоремы 2, VI с такими параметрами:

$$\sigma_0 = 1 + \frac{4d}{(\log k)^{2/3} (\log \log k)^2}, \quad \sigma = 1 - \frac{d}{(\log k)^{2/3} (\log \log k)^2},$$

$$M = (|t| + 1) \frac{\log^2 k}{d}, \quad r = \frac{c_1}{(\log k)^{2/3}}.$$

10. Из задачи 5 при $k = p^n$, $\frac{1}{2} x^\delta < k < x^\delta$, $T = \exp(\ln \ln x)^2$ имеем

$$\sum_{\chi \bmod k} N(\alpha, T, \chi) \ll T k^{8(1-\alpha)} \ln^{10} x;$$

следовательно,

$$\Psi(x; k, l) = \frac{\Psi(x)}{\varphi(k)} + O(R) + O\left(\frac{x}{T} \ln^3 x\right),$$

где

$$R = \frac{1}{\varphi(k)} \sum_{\chi \bmod k} \sum_{|\operatorname{Im} \rho_\chi| < T} \frac{x^{\sigma_\chi}}{|\rho_\chi|}.$$

Пользуясь задачей 9 (см. также доказательство теоремы 2, VII), получаем $(\gamma = 1 - c_1 (\ln x)^{-2/3} (\ln \ln x)^{-2})$

$$\sum_{|\operatorname{Im} \rho_\chi| < T_1} x^{\sigma_\chi} \ll x^{1/2} N \left(\frac{1}{2}, T_1, \chi \right) + (\ln x) \int_{0,5}^{\gamma} x^{\alpha} N(\alpha, T_1, \chi) d\alpha,$$

$$\sum_{\chi \bmod k} \sum_{|\operatorname{Im} \rho_\chi| < T_1} x^{\sigma_\chi} \ll x^{1/2} T_1 k^4 \ln^{10} x + (\ln x)^{11} x T_1 \int_{0,5}^{\gamma} \left(\frac{k^8}{x} \right)^{1-\alpha} d\alpha =$$

$$= O(T_1 x \exp(-\ln^{0,25} x)).$$

Разбивая сумму в R по ρ_χ на $\ll \ln T$ сумм и применяя последнюю оценку, получим требуемое. (См. также Барбан М. Б., Линник Ю. В., Чудаков Н. Г. On prime numbers in an arithmetic progression with a prime-power difference, Acta arithm, 9, № 4, 1964, 375—390.)

ГЛАВА X

1. Не ограничивая общности, можно считать $(n, m) = 1$. Повторяя доказательство теоремы И. М. Виноградова о трех простых числах, получим для числа решений I задачи формулу

$$I = \frac{I_0(N)}{\ln^3 N} \sigma + O\left(\frac{N^2}{\ln^{3,4} N}\right),$$

где $I_0(N)$ — число решений в натуральных числах x, y, z уравнения

$$nx + my + kz = N,$$

$$\sigma = \sum_{q=1}^{\infty} \gamma(q), \quad \gamma(q) = \frac{\kappa_n(q) \kappa_m(q) \kappa_k(q) \overline{\kappa_N(q)}}{\varphi^3(q)},$$

$$\kappa_r(q) = \sum_{\substack{a=1 \\ (a,q)=1}}^q e^{2\pi i \frac{ar}{q}}.$$

Так как $\kappa_r(q)$ — мультипликативная функция, то

$$\sigma = \prod_p (1 + \gamma(p) + \gamma(p^2) + \dots);$$

кроме того, из-за условия $(n, m) = 1$ получаем, что

$$\gamma(p^s) = 0 \text{ при } s \geq 2.$$

Поэтому

$$\sigma = \prod_{p \nmid nmkN} (1 + \gamma(p)) \prod_{p \times nmkN} \left(1 + \frac{1}{(p-1)^3}\right).$$

2. Пусть a_n — четные числа, $\frac{1}{2}X < a_n \leq X$, $n = 1, 2, \dots, N$.

Рассмотрим уравнение $p_1 + p_2 = a_n$, p_1, p_2 — простые числа. Как

при доказательстве теоремы 1, возьмем $L = \ln X$, $\tau = XL^{-A}$, $\kappa\tau = 1$, $Q = L^B$, определим множества E_1, E_2 и интегралы I_1, I_2 . Получим

$$I = \int_{-\kappa}^{1-\kappa} S^2(\alpha) T(\alpha) d\alpha = I_1 + I_2,$$

где I — число решений рассматриваемого уравнения,

$$S(\alpha) = \sum_{p < X} e^{2\pi i \alpha p}, \quad T(\alpha) = \sum_{n=1}^N e^{-2\pi i z \alpha n}.$$

По теореме 2

$$\begin{aligned} I_2 &\leq \max_{\alpha \in E_2} |S(\alpha)| \int_0^1 |S(\alpha)| |T(\alpha)| d\alpha \ll \\ &\ll X(L^{-0,5B} + L^{-0,5A}) L^3 \sqrt{\int_0^1 |S(\alpha)|^2 d\alpha \int_0^1 |T(\alpha)|^2 d\alpha} = \\ &= O(X^{1,5} N^{0,5} (L^{-0,5B} + L^{-0,5A}) L^3). \end{aligned}$$

Далее,

$$\begin{aligned} I_1 &= \sum_{n=1}^N J(n), \\ J(n) &= \sum_{q < Q} \sum_{(a,q)=1} \int_{-(q\tau)^{-1}}^{(q\tau)^{-1}} S^2\left(\frac{a}{q} + z\right) e^{-2\pi i \left(\frac{a}{q} + z\right) a_n} dz. \end{aligned}$$

Пользуясь формулой § 2

$$S\left(\frac{a}{q} + z\right) = \frac{\mu(q)}{\psi(q)} \sum_{m < X} \frac{e^{2\pi i z m}}{\log m} + O(Xe^{-c\sqrt{L}})$$

и проводя такие же рассуждения, получим

$$I_1 = \sum_{n=1}^N I(a_n) \sigma(a_n) + O(XNL^{-B}) + O(X^{1,5} N^{0,5} L^{-A+B}),$$

где

$$\begin{aligned} I(a_n) &= \sum_{n+m=a_n} \frac{1}{\log n \log m}, \\ \sigma(a_n) &= \prod_{p \times a_n} \left(1 - \frac{1}{(p-1)^2}\right) \prod_{p \nmid a_n} \left(1 + \frac{1}{p-1}\right). \end{aligned}$$

Отсюда при $A = 2D + 12$, $B = D + 10$, следует требуемое. (См. также Чудаков Н. Г. О проблеме Гольдбаха.— ДАН СССР, 17, № 7, 1937, 331—334.)

3. Пусть $a = p_1^{\alpha_1} \dots p_k^{\alpha_k}$ — каноническое разложение a на простые сомножители, $m < k$, m — четное, тогда

$$\sum_{\substack{d \setminus a \\ \Omega(d) < m}} \mu(d) = \binom{k}{0} - \binom{k}{1} + \dots + (-1)^m \binom{k}{m} = \\ = (-1)^m \left(\binom{k}{m+1} - \binom{k}{m+2} + \dots \right) \geq 0;$$

поэтому

$$S' = \sum_{v=1}^n f(z_v) \sum_{d \setminus (z_v, P)} \mu(d) \leq \\ \leq \sum_{v=1}^n f(z_v) \sum_{\substack{d \setminus (z_v, P) \\ \Omega(d) < m}} \mu(d) = \sum_{\substack{d \setminus P \\ \Omega(d) < m}} \mu(d) S_d.$$

4. а) В задаче 3 возьмем $m = 10[\ln \ln x]$, $x \geq x_0$,

$$P = \prod_{\substack{p < b \\ (p, k) = 1}} p; \quad \Omega(P) = n.$$

Находим (пользуемся задачей 9, V)

$$T \leq \sum_{\substack{d \setminus P \\ \Omega(d) < m}} \mu(d) \left(\frac{x}{kd} + \theta_d \right) \leq T_1 + T_2 + T_3,$$

где

$$T_1 = \frac{x}{k} \sum_{d \setminus P} \frac{\mu(d)}{d} = \frac{x}{k} \frac{\prod_{p < b} \left(1 - \frac{1}{p} \right)}{\prod_{p \setminus k} \left(1 - \frac{1}{p} \right)} \ll \frac{x \ln \ln x}{\varphi(k) \ln x};$$

$$T_2 = \frac{x}{k} \sum_{\substack{d \setminus P \\ \Omega(d) > m}} \frac{1}{d} = \frac{x}{k} \sum_{r=m+1}^n \sum_{\Omega(d)=r} \frac{1}{d} \leq$$

$$\leq \frac{x}{k} \sum_{r=m+1}^n \frac{1}{r!} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{p_n} \right)^r \leq \\ \leq \frac{x}{k} \sum_{r=m+1}^n \left(\frac{\ln \ln b + c_1}{r} e \right)^r \leq \frac{x}{k} \sum_{r=m+1}^n \left(\frac{1}{3} \right)^r \ll \frac{x}{\varphi(k) \ln x};$$

$$T_3 = \sum_{\substack{d \setminus P \\ \Omega(d) < m}} 1 = \sum_{r=0}^m \binom{n}{r} \leq n^m \leq e^m \ln b \leq x^{1/100} \leq \frac{x}{\varphi(k) \ln x}.$$

б) Повторить а) с $\ln b = \ln x (c_1 \ln \ln x)^{-1}$, $m = 2[c_2 \ln \ln x]$, где подобрать c_1 и c_2 (в зависимости от α) нужным образом. (См. также [11], с. 53.)

5. Пользуясь определением $\tau(n)$, имеем равенство

$$\sum_{p < x} \tau(p-1) = 2 \sum_{k \leq \sqrt{x}} \pi(x; k, 1) + O\left(\sum_{\substack{p-1=nm < x \\ n < \sqrt{x}, m < \sqrt{x}}} 1\right).$$

Сумму по k разбить на две: при $k \leq \sqrt{x} (\ln x)^{-B}$ применить задачи 6, IX и 8, V, при $\sqrt{x} (\ln x)^{-B} < k \leq \sqrt{x}$ воспользоваться предыдущей задачей. Сумму σ под знаком O при $n \leq \sqrt{x} (\ln x)^{-B}$ оценить так:

$$\begin{aligned} \sigma &\leq \sum_{r \leq x(\ln x)^{-B}} \tau'(r), \text{ где } \tau'(r) \leq \tau(r); \\ \sigma^2 &\leq x (\ln x)^{-B} \sum_{r \leq x(\ln x)^{-B}} \tau^2(r) \ll x^2 (\ln x)^{-2B+3}. \end{aligned}$$

(См. также [11], с. 477.)

6. а) Можно взять, например, любое $\gamma > 1$. Рассмотрим сумму V ,

$$V = \sum_{n < p^\gamma} \Lambda(n) \left(\frac{n+k}{p}\right),$$

и применим к ней задачу 8, III с $N = p^\gamma$, $u = \sqrt{N}$; получим

$$V = V_1 - V_2 + O(\sqrt{N} \ln N),$$

где

$$V_1 = \sum_{d \leq u} \mu(d) \sum_{l \leq Nd-1} (\log l) \left(\frac{ld+k}{p}\right),$$

$$\begin{aligned} V_2 &= \sum_{d \leq u} \mu(d) \sum_{n < u} \Lambda(n) \sum_{r \leq N(dn)-1} \left(\frac{ndr+k}{p}\right) = \\ &= \sum_{rn \leq u} \Lambda(n) \sum_{d \leq u} \mu(d) \left(\frac{rnd+k}{p}\right) + \\ &\quad + \sum_{u < rn \leq N} \Lambda(n) \sum_{d \leq N(rn)-1} \mu(d) \left(\frac{rnd+k}{p}\right). \end{aligned}$$

Разобьем еще последнюю сумму на две, суммируя по r , $r \leq u$ и $u < r \leq N$. К каждой из четырех образовавшихся сумм применить задачу 9, VIII. Переход к σ осуществляется с помощью преобразования Абеля. б) Следует из а). (См. также Карацуба А. А. Суммы характеров с простыми числами.— Изв. АН СССР, сер. Матем., 34, № 2, 1970, 299—321.)

7. а) и б) следуют, как а) и б) предыдущей задачи.

ГЛАВА XI

1. При любом y , $1 \leq y \leq p-1$, умножая обе части сравнения на y^m , $m = n_1 \dots n_k$, убеждаемся, что оно эквивалентно такому:

$$x_1^{n_1} + \dots + x_k^{n_k} \equiv \lambda y^m \pmod{p},$$

т. е.

$$T = \frac{1}{p-1} \sum_{a=0}^{p-1} \sum_{x_1=0}^{p-1} \dots \sum_{x_k=0}^{p-1} \sum_{y=1}^{p-1} e^{2\pi i a \frac{(x_1^{n_1} + \dots + x_k^{n_k} - \lambda y^m)}{p}} =$$

$$= p^{k-1} + O(p^{0,5(k-1)}).$$

2. Рассмотрим сравнение

$$x_1^n + \dots + x_t^n \equiv N_1 \pmod{Q}, \quad 1 \leq x_1, \dots, x_t \leq P.$$

Пусть $W(N_1)$ — число его решений,

$$W(N_1) = Q^{-1} \sum_{a=1}^Q S^t(a) e^{-2\pi i \frac{aN_1}{Q}} = W_0(N_1) + W_1(N_1);$$

в $W_0(N_1)$ входят слагаемые по a вида

$$a = p^{\alpha-\nu} a_1, \text{ где } (a_1, p) = 1, 0 \leq \nu \leq \alpha/m,$$

в $W_1(N_1)$ — все остальные. Доказать, что при любом t из промежутка $3 \leq t \leq n-1$ и любом N_1

$$W_0(N_1) \gg P^t Q^{-1}$$

(пользоваться при этом результатами леммы 1).

Далее, рассмотрим сравнение

$$x_1^n + \dots + x_t^n + u_1 + u_2 + u_0 v^n \equiv N \pmod{Q},$$

$$1 \leq x_1, \dots, x_t \leq P,$$

u_1, u_2 имеют вид u ,

$$u = \xi_1^n + (p^{2r} \xi_2)^n + \dots + (p^{2r m_1} \xi_{m_1+1})^n,$$

где $m_1 = [m]$, r — целое число, определяемое условиями $2rn \leq \frac{\alpha}{m} < 2(r+1)n$, ξ_ν пробегает целые положительные числа, не кратные p , меньшие $Pp^{-2r(\nu-1)}$ и такие, что ξ_ν^n попарно не сравнимы по модулю $p^{2r\nu}$, $\nu = 1, 2, \dots, m_1 + 1$; числа u_0 имеют вид

$$u_0 = (\zeta_1)^n + (p^r \zeta_2)^n + \dots + (p^{r m_1} \zeta_{m_1+1})^n,$$

где ζ_ν пробегает целые положительные числа, не кратные p , меньшие $\sqrt[p]{P} p^{-r(\nu-1)}$ и такие, что ζ_ν^n попарно не сравнимы по модулю $p^{r\nu}$; ν принимают значения целых чисел, меньшие $\sqrt[p]{P}$ и не кратные p .

тов каждой из линейных систем сравнений имеет в силу попарной несравнимости переменных x_i по модулю p максимальный ранг, и поэтому число ее решений не превышает величины p^s . Для T' и T получаются оценки

$$T' \leq n! p \cdot p^2 \dots p^{r-1} = n! p^{\frac{r(r-1)}{2}}; \quad T \leq n! p^{\frac{r(r-1)}{2}} p^n.$$

4. При $x < 16$ утверждение проверяется непосредственно; пусть $x \geq 16$. Имеем

$$\ln(k!) = \sum_{t \leq k} \ln t = \sum_{t \leq k} \sum_{d|t} \Lambda(d) = \sum_{u \leq k} \psi\left(\frac{k}{u}\right);$$

$$\binom{2m}{m} = \frac{(2m)!}{(m!)^2};$$

$$A = \ln \binom{2m}{m} = \psi(2m) - \psi\left(\frac{2m}{2}\right) + \psi\left(\frac{2m}{3}\right) - \dots + \psi\left(\frac{2m}{2m-1}\right).$$

Отсюда

$$\psi(2m) - \psi(m) \leq A \leq \psi(2m) - \psi(m) + \psi\left(\frac{2}{3}m\right).$$

Пользуясь тем, что

$$\frac{1}{\sqrt{4m}} \leq \frac{1}{4^m} \binom{2m}{m} \leq \frac{1}{\sqrt{2m+1}},$$

методом математической индукции доказать неравенство

$$\psi(x) < x \ln 4.$$

Далее, доказать, что

$$\sum_{m < p < 2m} \ln p \geq \frac{m}{3} \ln 4 - \ln \sqrt{4m} - \sqrt{2m} \ln 4;$$

$$\sum_{m < p < 2m} 1 \geq \frac{m \ln 4}{3 \ln 2m} - 1 - \frac{\sqrt{2m}}{\ln 2m} \ln 4 \geq \sqrt{\frac{m}{2}}.$$

Из последнего неравенства получить утверждение задачи.

5. Оценим число наборов (x_1, \dots, x_k) . Пусть p_s — одно из чисел p_1, \dots, p_n . Для каждого набора (x_1, \dots, x_k) рассмотрим набор $(x_1^{(s)}, \dots, x_k^{(s)})$, состоящий из остатков от деления на p_s чисел x_1, \dots, x_k :

$$x_i \equiv x_i^{(s)} \pmod{p_s}, \quad 0 \leq x_i^{(s)} < p_s, \quad i = 1, \dots, k.$$

Количество всех получившихся таким образом наборов не превосходит (при заданном p_s) числа

$$\binom{p_s}{n-1} (n-1)^k.$$

Тем самым для каждого $\bar{x} = (x_1, \dots, x_k)$ получаем систему сравнений

$$\bar{x} \equiv \bar{x}^{(s)} \pmod{p_s}, \quad \bar{x}^{(s)} = (x_1^{(s)}, \dots, x_k^{(s)}), \quad s = 1, \dots, n.$$

Эту систему сравнений можно заменить одним сравнением вида

$$\bar{x} \equiv \bar{M} \pmod{p_1 \dots p_n},$$

где $\bar{M} = (M_1, \dots, M_k)$ — фиксированный набор чисел, причем $0 \leq M_i < p_1 \dots p_n$, $i = 1, \dots, k$. Так как каждая координата \bar{x} не превосходит $P < p_1 \dots p_n$, то последнее сравнение эквивалентно уравнению $\bar{x} = \bar{M}$, т. е. число наборов $(x_1, \dots, x_k) = \bar{x}$ не превосходит

$$\binom{p_1}{n-1} (n-1)^k \dots \binom{p_n}{n-1} (n-1)^k.$$

Число наборов (y_1, \dots, y_k) , удовлетворяющих системе уравнений задачи, не превосходит $n!P^{k-n}$.

Отсюда следует, что

$$J_2 \leq (n-1)^{kn} \binom{p_1}{n-1} \dots \binom{p_n}{n-1} n!P^{k-n} \leq n^{2kn} P^{k-1}.$$

6. При $P \leq (4n^2)^n$ неравенство задачи тривиально. Пусть $P > (4n^2)^n$; по задаче 4 на отрезке $[P^{1/n}, 2P^{1/n}]$ лежит n различных простых чисел, пусть это будут p_1, \dots, p_n . Полагая $f(x) = \alpha_1 x + \dots + \alpha_n x^n$, будем иметь

$$J = J(P; n, k) =$$

$$= \int_0^1 \dots \int_0^1 \left| \sum_{x_1 < P} \dots \sum_{x_k < P} e^{2\pi i(j(x_1) + \dots + j(x_k))} \right|^2 d\alpha_1 \dots d\alpha_n.$$

Все наборы $\bar{x} = (x_1, \dots, x_k)$ разобьем на два класса A и B : набор $\bar{x} = (x_1, \dots, x_k)$ отнесем к классу A , если среди чисел p_1, \dots, p_n существует такое p_s , что среди чисел x_1, \dots, x_k найдется по крайней мере n попарно не сравнимых по модулю p_s чисел; все остальные наборы отнесем к классу B . Получим

$$J = \int_{\Omega} \left| \sum_{\bar{x} \in A} + \sum_{\bar{x} \in B} \right|^2 d\Omega \leq 2J_1 + 2J_2,$$

где

$$J_1 = \int_{\Omega} \left| \sum_{\bar{x} \in A} \right|^2 d\Omega, \quad J_2 = \int_{\Omega} \left| \sum_{\bar{x} \in B} \right|^2 d\Omega.$$

Интеграл J_2 оценен в задаче 5. Оценим J_1 . Величина J_1 — это число решений системы уравнений задачи 5 при условии, что

$$\bar{x} = (x_1, \dots, x_k) \in A, \quad \bar{y} = (y_1, \dots, y_k) \in A.$$

Все наборы $\bar{x} \in A$ разобьем на n совокупностей A_1, \dots, A_n , относя в одну совокупность те из них, которые отвечают своему $p_s = p$,

$s = 1, \dots, n$. Получаем

$$J_1 = \int_{\Omega} \left| \sum_{s=1}^n \sum_{\bar{x} \in A_s} \right|^2 d\Omega \leq n \sum_{s=1}^n J_{1,s},$$

где

$$J_{1,s} = \int_{\Omega} \left| \sum_{\bar{x} \in A_s} \right|^2 d\Omega.$$

Далее,

$$J_{1,s} \leq \binom{k}{n}^2 \int_{\Omega} \left| \sum'_{x_1, \dots, x_n} \right|^2 \left| \sum_{x < P} e^{2\pi i f(x)} \right|^{2k-2n} d\Omega,$$

где штрих в первой сумме означает суммирование по наборам x_1, \dots, x_n , которые попарно не сравнимы между собой по модулю $p_s = p$. Разбивая сплошное суммирование во второй сумме на p прогрессий с разностью p и применяя неравенство Гёльдера, последовательно получаем

$$J_{1,s} \leq$$

$$\begin{aligned} &\leq \binom{k}{n}^2 p^{2k-2n-1} \sum_{y=1}^p \int_{\Omega} \left| \sum'_{x_1, \dots, x_n} \right|^2 \left| \sum_{0 \leq z < Pp^{-1}} e^{2\pi i f(y+pz)} \right|^{2k-2n} d\Omega \leq \\ &\leq \binom{k}{n}^2 p^{2k-2n} \int_{\Omega} \left| \sum''_{x_1, \dots, x_n} \right|^2 \left| \sum_{0 \leq z < Pp^{-1}} e^{2\pi i f(pz)} \right|^{2k-2n} d\Omega, \end{aligned}$$

где символ Σ'' означает суммирование по всем наборам чисел x_1, \dots, x_n , которые изменяются в пределах от $-y_0$ до $P - y_0$ и попарно не сравнимы по модулю p . Последний интеграл не превосходит величины

$$J(P; n, k - n)T,$$

где $P_1 = Pp^{-1} + 1$, T — число решений системы сравнений задачи 3. Отсюда уже легко следует неравенство задачи.

7. Провести доказательство индукцией по параметру τ , пользуясь неравенством задачи 6. (К задачам 3—7 см. также Карацуба А. А. О системах сравнений.— Изв. АН СССР, сер. Матем., 29, № 4, 1965, 935—944; Карацуба А. А. Теоремы о среднем и полные тригонометрические суммы.— Изв. АН СССР, сер. Матем., 30, № 1, 1966, 183—206; [12], с. 12—29.)

8. Рассмотрим многочлен $F(x)$,

$$\begin{aligned} F(x) &= \frac{x}{1!} - 2 \frac{x(x-1)}{2!} + \dots \pm 2^{n-1} \frac{x(x-1)\dots(x-n+1)}{n!} \equiv \\ &\equiv 2^{-1} (1 + (1-2)^{x+1}) \pmod{2^n}. \end{aligned}$$

Из определения $F(x)$ следует, что

$$F(x) \equiv 0 \pmod{2^n}, \quad \text{если } x \equiv 0 \pmod{2};$$

$$F(x) \equiv 1 \pmod{2^n}, \quad \text{если } x \equiv 1 \pmod{2}.$$

Так как максимальная степень 2, на которую делится $n!$ равна $n-1$, то все знаменатели коэффициентов многочлена $F(x)$ —

нечетные; следовательно, существует многочлен $f(x)$ с целыми коэффициентами $a_n, \dots, a_2, a_1 = 1$ и такой, что при всех x

$$f(x) \equiv F(x) \pmod{2^n}.$$

9. Умножая первое, второе, ..., последнее сравнение на a_n, a_{n-1}, \dots, a_1 и складывая, получим

$$f(x_1) + \dots + f(x_k) \equiv a_n N_n + \dots + a_1 N_1 \equiv l \pmod{2^n}, \quad 0 \leq l < 2^n,$$

В силу свойства $f(x)$ следует, что

$$l \equiv k_1 \pmod{2^n},$$

где k_1 есть число нечетных неизвестных среди x_1, \dots, x_k . Отсюда $k \geq k_1 \geq l$.

(К задачам 8—9 см. также Архипов Г. И. О значении особого ряда в проблеме Гильберта — Камке. — ДАН СССР, 259, № 2, 1981, 265—267.)

10. Если x — нечетное число, то при $n = 2^k$ выполняется сравнение

$$x^n \equiv 1 \pmod{4n}.$$

Отсюда следует утверждение задачи.

11. Если ограничивая общности, можно считать все x_1, \dots, x_k нечетными числами. Представляя каждое $x_j, j = 1, \dots, k$, в виде

$$x_j \equiv \pm 5^{\alpha_j} \pmod{2^n}, \quad \text{определим многочлен } f(t) \text{ равенством } f(t) = t^{\alpha_1} + \dots + t^{\alpha_k}.$$

$$k = f(1) \equiv 0 \pmod{2^u}.$$

Из определения $f(t)$ следует, что

$$f(5^{2^j v}) \equiv 0 \pmod{2^{2^j v}}, \quad v = 1, 2, \dots, m.$$

Представим $f(t)$ в виде

$$\begin{aligned} f(t) = & a_0 + a_1(t - 5^{2^j m}) + a_2(t - 5^{2^j m})(t - 5^{2^j m-1}) + \dots \\ & \dots + a_{m-1}(t - 5^{2^j m})(t - 5^{2^j m-1}) \dots (t - 5^{2^j 2}) + \\ & + g(t)(t - 5^{2^j m})(t - 5^{2^j m-1}) \dots (t - 5^{2^j 2})(t - 5^{2^j 1}), \end{aligned}$$

где $a_0, a_1, a_2, \dots, a_{m-1}$ — целые числа ($a_0 = f(5^{2^j m})$, a_1 равняется частному от деления $f(5^{2^j m-1}) - a_0$ на $5^{2^j m-1} - 5^{2^j m}$, и т. д.), $g(t)$ — многочлен с целыми коэффициентами. Далее,

$$\begin{aligned} \varphi(t) = & a_0 + a_1(t - 5^{2^j m}) + a_2(t - 5^{2^j m})(t - 5^{2^j m-1}) + \dots + \\ & + a_{m-1}(t - 5^{2^j m})(t - 5^{2^j m-1}) \dots (t - 5^{2^j 2}) = \\ = & \sum_{s=1}^m c_s \frac{(t - t_1) \dots (t - t_{s-1})(t - t_{s+1}) \dots (t - t_m)}{(t_s - t_1) \dots (t_s - t_{s-1})(t_s - t_{s+1}) \dots (t_s - t_m)}, \end{aligned}$$

где $t_s = 5^{2j_s}$, $c_s = \varphi(t_s) \equiv 0 \pmod{2^{2j_s}}$, $s = 1, 2, \dots, m$. Если через $\delta(v)$ обозначить наибольшую степень 2, делящую v , то

$$\delta(5^a - 1) = \delta(a) + 2, \quad \delta(a!) = \left[\frac{a}{2} \right] + \left[\frac{a}{2^2} \right] + \dots \text{ и, следовательно,}$$

$$\delta \left(c_s \frac{(1-t_1) \dots (1-t_{s-1})(1-t_{s+1}) \dots (1-t_m)}{(t_s-t_1) \dots (t_s-t_{s-1})(t_s-t_{s+1}) \dots (t_s-t_m)} \right) \geq$$

$$\geq 2j_s - \delta(j_1 - j_s) - \dots - \delta(j_{s-1} - j_s) -$$

$$- \delta(j_{s+1} - j_s) - \dots - \delta(j_m - j_s) \geq$$

$$\geq 2j_s + j_1 - j_m - \log_2(j_s - j_{s-1})(j_{s+1} - j_s) \geq \frac{n}{32}.$$

Кроме того,

$$\delta(g(1)(1-5^{2j_m})(1-5^{2j_{m-1}}) \dots (1-5^{2j_1})) \geq 3m \geq n/32.$$

12. Форму, тривиально представляющую нуль по модулю 2, назовем *особой*. Доказать, что если F — особая форма, то при любом $m \geq 1$ найдется N такое, что из сравнения

$$F = F(x_1, \dots, x_k) \equiv 0 \pmod{2^N}$$

следует

$$x_1 \equiv \dots \equiv x_k \equiv 0 \pmod{2^m}.$$

Пусть теперь при натуральном k величина $\kappa(k)$ равняется наименьшей из степеней n таких, что существует особая форма F степени n от k переменных. Из задачи 10 следует неравенство

$$\kappa(k) \leq \frac{1}{4}(k+1).$$

Далее, доказать, что $\kappa(k) \leq \kappa(k+1)$.

Пусть теперь $n = 4t$, t — натуральное число, $F(y_0, y_1, \dots, y_{t-1})$ — особая форма степени $\kappa(t)$,

$$G(x_1, \dots, x_k) = F(y_0, y_1, \dots, y_{t-1}),$$

где

$$y_j = s_{2j} \cdot s_{n-2j}, \quad j = 0, 1, \dots, t-1,$$

$$s_\nu = x_1^\nu + \dots + x_k^\nu, \quad \nu = 1, \dots, n; \quad s_0 = 1.$$

Степень формы G равна $n\kappa(t)$. Так как форма F — особая, то при некотором N из сравнения

$$F(y_0, y_1, \dots, y_{t-1}) \equiv 0 \pmod{2^N}$$

следует, что

$$y_0 \equiv y_1 \equiv \dots \equiv y_{t-1} \equiv 0 \pmod{2^{2n}},$$

т. е. найдутся числа $1 \leq j_1 < \dots < j_t = 2t$ с условием

$$s_{2j_1} \equiv \dots \equiv s_{2j_t} \equiv 0 \pmod{2^n}.$$

Из задачи 11 следует, что $\kappa(k) \leq n\kappa(t)$, если только $k < 2^u$, $u = \lfloor n/32 \rfloor$.

Отсюда по индукции доказать неравенство

$$\chi(k) < c (\log_2 k) (\log_2 \log_2 k) \dots (\underbrace{\log_2 \dots \log_2 k}_{r+1}) (\underbrace{\log_2 \dots \log_2^3 k}_{r+2}),$$

из которого следует утверждение задачи.

13. Решается так же, как решались задачи 11—12.

(К задачам 11—13 см. также Архипов Г. И., Карацуба А. А. О локальном представлении нуля формой.—Изв. АН СССР, сер. Матем., 45, № 5, 1981, 948—961. Архипов Г. И., Карацуба А. А. Об одной задаче теории сравнений.—УМН, 37, вып 5, 1982, 161—162.)

14. Повторить доказательство теоремы 2, XI. (См. также [1], 44—72; Карацуба А. А. Среднее значение модуля тригонометрической суммы.—Изв. АН СССР, сер. Матем., 37, № 6, 1973, 1203—1227).

15. а) Повторить решение задачи 2, X. Интеграл I_2 оценить, пользуясь задачей 14. Главный член будет иметь вид

$$\sum_{x < P} I(N - x^n) \sigma(N - x^n), \quad P = \sqrt[n]{N},$$

где

$$I(N - x^n) = \sum_{m+m_1=N-x^n} \frac{1}{\log m \log m_1},$$

$$\sigma(N - x^n) = \prod_{p \times N - x^n} \left(1 - \frac{1}{(p-1)^2}\right) \prod_{p \setminus N - x^n} \left(1 + \frac{1}{p-1}\right).$$

(См. также Estermann T. Proof that every large integer is the sum of two primes and a square. Proc. London math. Soc., 11, 1937, 501—516.)

б) Повторить решение а), пользуясь результатами § 1, XI.

**ТАБЛИЦА ПРОСТЫХ ЧИСЕЛ < 4070
И ИХ НАИМЕНЬШИХ ПЕРВООБРАЗНЫХ КОРНЕЙ**

p	g	p	g	p	g	p	g	p	g	p	g	p	g
2	1	127	3	283	3	467	2	661	2	877	2	1087	3
3	2	131	2	293	2	479	13	673	5	881	3	1091	2
5	2	137	3	307	5	487	3	677	2	883	2	1093	5
7	3	139	2	311	17	491	2	683	5	887	5	1097	3
11	2	149	2	313	10	499	7	691	3	907	2	1103	5
13	2	151	6	317	2	503	5	701	2	911	17	1109	2
17	3	157	5	331	3	509	2	709	2	919	7	1117	2
19	2	163	2	337	10	521	3	719	11	929	3	1123	2
23	5	167	5	347	2	523	2	727	5	937	5	1129	11
29	2	173	2	349	2	541	2	733	6	941	2	1151	17
31	3	179	2	353	3	547	2	739	3	947	2	1153	5
37	2	181	2	359	7	557	2	743	5	953	3	1163	5
41	6	191	19	367	6	563	2	751	3	967	5	1171	2
43	3	193	5	373	2	569	3	757	2	971	6	1181	7
47	5	197	2	379	2	571	3	761	6	977	3	1187	2
53	2	199	3	383	5	577	5	769	11	983	5	1193	3
59	2	211	2	389	2	587	2	773	2	991	6	1201	11
61	2	223	3	397	5	593	3	787	2	997	7	1213	2
67	2	227	2	401	3	599	7	797	2	1009	11	1217	3
71	7	229	6	409	21	601	7	809	3	1013	3	1223	5
73	5	233	3	419	2	607	3	811	3	1019	2	1229	2
79	3	239	7	421	2	613	2	821	2	1021	10	1231	3
83	2	241	7	431	7	617	3	823	3	1031	14	1237	2
89	3	251	6	433	5	619	2	827	2	1033	5	1249	7
97	5	257	3	439	15	631	3	829	2	1039	3	1259	2
101	2	263	5	443	2	641	3	839	11	1049	3	1277	2
103	5	269	2	449	3	643	11	853	2	1051	7	1279	3
107	2	271	6	457	13	647	5	857	3	1061	2	1283	2
109	6	277	5	461	2	653	2	859	2	1063	3	1289	6
113	3	281	3	463	3	659	2	863	5	1069	6	1291	2

p	g	p	g	p	g	p	g	p	g	p	g	p	g	p	g
1297	10	1559	19	1823	5	2089	7	2371	2	2663	5	2909	2		
1301	2	1567	3	1831	3	2099	2	2377	5	2671	7	2917	5		
1303	6	1571	2	1847	5	2111	7	2381	3	2677	2	2927	5		
1307	2	1579	3	1861	2	2113	5	2383	5	2683	2	2939	2		
1319	13	1583	5	1867	2	2129	3	2389	2	2687	5	2953	13		
1321	13	1597	11	1871	14	2131	2	2393	3	2689	19	2957	2		
1327	3	1601	3	1873	10	2137	10	2399	11	2693	2	2963	2		
1361	3	1607	5	1877	2	2141	2	2411	6	2699	2	2969	3		
1367	5	1609	7	1879	6	2143	3	2417	3	2707	2	2971	10		
1373	2	1613	3	1889	3	2153	3	2423	5	2711	7	2999	17		
1381	2	1619	2	1901	2	2161	23	2437	2	2713	5	3001	14		
1399	13	1621	2	1907	2	2179	7	2441	6	2719	3	3011	2		
1409	3	1627	3	1913	3	2203	5	2447	5	2729	3	3019	2		
1423	3	1637	2	1931	2	2207	5	2459	2	2731	3	3023	5		
1427	2	1657	11	1933	5	2213	2	2467	2	2741	2	3037	2		
1429	6	1663	3	1949	2	2221	2	2473	5	2749	6	3041	3		
1433	3	1667	2	1951	3	2237	2	2477	2	2753	3	3049	11		
1439	7	1669	2	1973	2	2239	3	2503	3	2767	3	3061	6		
1447	3	1693	2	1979	2	2243	2	2521	17	2777	3	3067	2		
1451	2	1697	3	1987	2	2251	7	2531	2	2789	2	3079	6		
1453	2	1699	3	1993	5	2267	2	2539	2	2791	6	3083	2		
1459	5	1709	3	1997	2	2269	2	2543	5	2797	2	3089	3		
1471	6	1721	3	1999	3	2273	3	2549	2	2801	3	3109	6		
1481	3	1723	3	2003	5	2281	7	2551	6	2803	2	3119	7		
1483	2	1733	2	2011	3	2287	19	2557	2	2819	2	3121	7		
1487	5	1741	2	2017	5	2293	2	2579	2	2833	5	3137	3		
1489	14	1747	2	2027	2	2297	5	2591	7	2837	2	3163	3		
1493	2	1753	7	2029	2	2309	2	2593	7	2843	2	3167	5		
1499	2	1759	6	2039	7	2311	3	2609	3	2851	2	3169	7		
1511	11	1777	5	2053	2	2333	2	2617	5	2857	11	3181	7		
1523	2	1783	10	2063	5	2339	2	2621	2	2861	2	3187	2		
1531	2	1787	2	2069	2	2341	7	2633	3	2879	7	3191	11		
1543	5	1789	6	2081	3	2347	3	2647	3	2887	5	3203	2		
1549	2	1801	11	2083	2	2351	13	2657	3	2897	3	3209	3		
1553	3	1811	6	2087	5	2357	2	2659	2	2903	5	3217	5		

Продолжение

р	г	р	г	р	г	р	г	р	г	р	г	р	г
3221	10	3343	5	3467	2	3581	2	3697	5	3823	3	3931	2
3229	6	3347	2	3469	2	3583	3	3701	2	3833	3	3943	3
3251	6	3359	11	3491	2	3593	3	3709	2	3847	5	3947	2
3253	2	3361	22	3499	2	3607	5	3719	7	3851	2	3967	6
3257	3	3371	2	3511	7	3613	2	3727	3	3853	2	3989	2
3259	3	3373	5	3517	2	3617	3	3733	2	3863	5	4001	3
3271	3	3389	3	3527	5	3623	5	3739	7	3877	2	4003	2
3299	2	3391	3	3529	17	3631	15	3761	3	3881	13	4007	5
3301	6	3407	5	3533	2	3637	2	3767	5	3889	11	4013	2
3307	2	3413	2	3539	2	3643	2	3769	7	3907	2	4019	2
3313	10	3433	5	3541	7	3659	2	3779	2	3911	13	4021	2
3319	6	3449	3	3547	2	3671	13	3793	5	3917	2	4027	3
3323	2	3457	7	3557	2	3673	5	3797	2	3919	3	4049	3
3329	3	3461	2	3559	3	3677	2	3803	2	3923	2	4051	6
3331	3	3463	3	3571	2	3691	2	3821	3	3929	3	4057	5

ЛИТЕРАТУРА

1. Виноградов И. М. Метод тригонометрических сумм в теории чисел.— М.: Наука, 1980.
2. Виноградов И. М. Избранные труды.— М.: Изд-во АН СССР, 1952.
3. Виноградов И. М. Особые варианты метода тригонометрических сумм.— М.: Наука, 1976.
4. Титчмарш Е. К. Теория дзета-функции Римана.— М.: ИЛ, 1953.
5. Хуа Ло-кен. Метод тригонометрических сумм и его применения в теории чисел.— М.: Мир, 1964.
6. Дэвенпорт Г. Мультипликативная теория чисел.— М.: Наука, 1971.
7. Чандрасекхаран К. Арифметические функции.— М.: Наука, 1975.
8. Монтгомери Х. Мультипликативная теория чисел.— М.: Мир, 1974.
9. Чудаков Н. Г. Введение в теорию L -функций Дирихле.— М.: Гостехиздат, 1947.
10. Ингам А. Е. Распределение простых чисел.— М.: ОНТИ, 1936.
11. Прахар К. Распределение простых чисел.— М.: Мир, 1967.
12. Архипов Г. И., Карацуба А. А., Чубариков В. Н. Кратные тригонометрические суммы.— Труды МИАН, 151, М.: Наука, 1980.