

Franz Breisig

Theoretische Telegraphie



Franz Breisig

# Theoretische Telegraphie

Eine Anwendung der Maxwellschen  
Elektrodynamik auf Vorgänge  
in Leitungen und Schaltungen



Zweite Auflage

Mit 240 Figuren im Text

---

Springer Fachmedien Wiesbaden GmbH 1924

Telegraphen- und Fernsprechtechnik  
in Einzeldarstellungen  
Band VII



ISBN 978-3-663-00824-8      ISBN 978-3-663-02737-9 (eBook)  
DOI 10.1007/978-3-663-02737-9

Alle Rechte vorbehalten  
Softcover reprint of the hardcover 2nd edition 1924

## Aus dem Vorwort zur ersten Auflage.

Zu den notwendigen Nebenwissenschaften des höheren Telegraphentechnikers gehört auch die theoretische Elektrizitätslehre; fast aus allen ihren Gebieten ergeben sich Anwendungen auf die Telegraphentechnik. Damit er sich über die im Fortschritt der Technik auftretenden Fragen ein sicheres und selbständiges Urteil bilden könne, braucht er daher eine auf genügend breiter Grundlage aufgebaute Darstellung der Elektrizitätslehre; andererseits kann diese gegenüber den eigentlichen Aufgaben des Berufs nicht höher als für eine Hilfswissenschaft gerechnet werden. Aus dieser Lage ergibt sich für den normalen Fall die Notwendigkeit eines Buches, das grundsätzlich das ganze Gebiet umfaßt, während es in der Ausführung diejenigen Fragen besonders eingehend behandelt, welche für die Telegraphentechnik am wichtigsten sind.

Unter diesem Gesichtspunkt ist das vorliegende Buch verfaßt worden, und zu seiner Einführung mögen einige Worte über seine Anlage und über die Art der Darstellung dienen.

Diese geht aus von den Maxwell'schen Feldgleichungen für ruhende Körper, die in ihrer allgemeinsten Form als Grundgesetze der Elektrodynamik aufgestellt werden. Sie erscheinen dabei als Verallgemeinerungen des Biot-Savartschen und des Induktionsgesetzes, die beide durch den Versuch gefunden sind. Die Verallgemeinerung beruht auf der die Grundlage der Nahewirkungstheorie bildenden Voraussetzung, daß die Verschiebungsströme denselben Gesetzen folgen, wie die Leitungsströme, und daß ein grundsätzlicher Unterschied zwischen schnellen und langsamen Vorgängen nicht besteht.

Indem man die Feldgleichungen in dieser Weise einführt, gewinnt man den Vorteil, daß alle die verschiedenartigen Vorgänge sich als besondere Fälle der allgemeinen Grundgesetze herleiten lassen. Es wird also im Fortgang der Darstellung niemals nötig, neue Voraussetzungen zu machen, die eine Erweiterung der ersten bedeuten, vielmehr kommen allenfalls Einschränkungen der ersten Annahmen vor, die daher auch keine neue Prüfung der Richtigkeit der Grundgesetze notwendig machen.

Bei diesem Vorgehen vom allgemeinsten Falle zu dem besonderen kommt es sehr auf das mathematische Werkzeug an, zumal in einem Buche, das sich an Kreise wendet, in denen der Regel nach die Übung in der mathematischen Rechnung nicht groß ist.

Die erforderlichen mathematischen Formeln dienen zwei erheblich verschiedenen Zwecken. Bei denen der ersten Art handelt es sich vor allem um Schlußfolgerungen aus den Grundgesetzen, die in die Form von Gleichungen gekleidet sind. Diese dienen dazu, das, was einem größeren Gebiete zusammengehöriger Fälle gemeinsam ist, aus den allgemeinen Voraussetzungen herauszuarbeiten; als Beispiel diene die Verknüpfung des magnetischen Feldes einer Strömung mit ihrem elektrischen durch das Vektorpotential. Hierbei bleiben Einzelfälle völlig außer Betracht, daher tritt auch das Verfahren des Rechnens gegen das des Folgerns ganz zurück. Aus dem auf diese Weise vorgearbeiteten Material wird dann in den Verfahren der zweiten Art ein Einzelfall herausgegriffen, z. B. aus dem genannten das magnetische Feld einer Doppelleitung, und bis in die Einzelheiten verfolgt. Hier tritt im Gegensatz zu dem vorigen die Rechnung mehr hervor.

Nach der Verschiedenheit des Zwecks beider Arten von Mathematik ist auch die ihrer Hilfsmittel erklärlich. Die erste Form muß, da es sich um räumliche Vorgänge handelt, für solche anschaulich und der Übersichtlichkeit halber knapp sein. Hierfür eignet sich vortrefflich die Vektorenrechnung, weil in ihr die im Raume gerichteten Größen mit ihren Beträgen und ihren Richtungsunterschieden gegeneinander unmittelbar auftreten. Eine gewisse Schwierigkeit liegt zwar darin, daß die Vektorenrechnung nicht als bekannt vorausgesetzt werden kann; aber einmal gehört zu dem unbedingt notwendigen mathematischen Werkzeug nicht viel, andererseits ist auch dem Praktiker das Rechnen in räumlichen Koordinaten nicht besonders geläufig, wenn es sich um die schwierigeren Integralumformungen handelt. Dagegen stellt die Rechnung in Koordinaten bei der Zerlegung und Zusammensetzung der Komponenten große Ansprüche an die Vorstellungskraft. Die Erfahrung im Unterricht hat die Annahme, daß die Vektorenrechnung selbst die geringsten Schwierigkeiten mache, völlig bestätigt.

Der praktische Zweck des Buches macht neben der Darstellung der Grundlagen die Durchführung bestimmter Rechnungen unentbehrlich. Für diese eignet sich allein die gewöhnliche Algebra, und für den Leser ist es am bequemsten, wenn der Gang der Rechnung ausführlich wiedergegeben ist. Auf diese Weise ist das Maß der erforderlichen bereiten Kenntnisse der Infinitesimalrechnung auf die Kenntnis des Differenzierens im einzelnen und der Bedeutung des Integrals im allgemeinen eingeschränkt worden.

Berlin, im Juni 1910.

**Dr. F. Breisig.**

## Vorwort zur zweiten Auflage.

Seit dem Erscheinen der ersten Auflage haben Telegraphie und Telephonie eine außerordentliche Entwicklung erfahren, der eine lebhaftere theoretische Forschung die Wege gewiesen hat. Sie verfolgt mit verbesserten Hilfsmitteln das alte Ziel, die Bedingungen zu untersuchen, unter denen Leitungen und Schaltungen ein an einem Ort gegebenes Zeichen an einem anderen möglichst formgetreu, nach den Erfordernissen des einzelnen Falles, wiedergeben können. Hierbei tritt die Untersuchung der flüchtigen Vorgänge zu Beginn und am Ende jedes Zeichens oder jeder Lautgruppe in den Vordergrund, und zu ihrem Verständnis ist es geboten, den Wellencharakter der Vorgänge in den Leitungen mehr als früher hervorzuheben. Es ergab sich hieraus eine fast vollständige Umarbeitung der auf die Eigenschaften der Leitungen bezüglichen Teile.

Hinsichtlich der mathematischen Hilfsmittel bin ich bei den Grundsätzen der ersten Auflage geblieben. Als viel benutztes Hilfsmittel ist die Formel von Heaviside für die Ausgleichströme hinzugekommen, auch wird von Besselschen Funktionen etwas mehr als vorher Gebrauch gemacht. Ich habe mich aber bemüht, die Rechnungen überall so weit auf elementare Grundlagen zurückzuführen, daß der früher bezeichnete Grad mathematischer Kenntnisse auch jetzt ausreicht, um die Herleitungen zu verstehen.

Abgesehen von Rücksichten auf den Umfang mußte ich mir nach zwei Richtungen Beschränkungen auferlegen. Eine Reihe bedeutsamer Aufsätze führt zu wichtigen praktischen Folgerungen, die ich nur andeuten, nicht ausführlich wiederholen konnte; ferner betreffen Veröffentlichungen der letzten Jahre in verschiedenen Ländern Fälle, in denen entsprechend enger gewählten Voraussetzungen der Aufgabe, deren Wichtigkeit anzuerkennen ist, auch größere mathematische Hilfsmittel erfordert werden, oder in denen mit solchen Hilfsmitteln eine für den Kundigen elegantere Lösung erreicht wird. In solchen Fällen muß sich ein Lehrbuch, das sich in erster Linie an Studierende und Praktiker wendet, auf die Nennung solcher Arbeiten als Material beschränken.

Berlin, im Februar 1924.

**Dr. F. Breisig.**

# Übersicht des Inhalts.

## Erster Teil.

### Grundbegriffe und Rechnungsweisen.

	Seite
§ 1—7. <b>Erster Abschnitt. Das elektromagnetische Feld und seine Bestimmungsgrößen.</b> — 1. Ältere und neuere Anschauungen über die elektrischen und magnetischen Vorgänge. — 2. Einheiten der elektrischen und magnetischen Menge. — 3. Elektrische und magnetische Feldstärke. — 4. Vektoren und Skalare. — 5. Elektrischer Strom, dielektrische Verschiebung und magnetische Induktion. — 6. Die elektromagnetische Energie des Feldes. — 7. Grundgesetze der Elektrodynamik . . . . .	1 — 8
§ 8—20. <b>Zweiter Abschnitt. Vektorenrechnung.</b> — 8. Addition und Subtraktion von Vektoren. — 9. Produkte von Vektoren. — 10. Gemischte Produkte von Vektoren. — 11. Geometrische Darstellung der Felder von Skalaren und Vektoren. — 12. Das Oberflächenintegral eines Vektors. — 13. Die Divergenz. — 14. Darstellung von $\operatorname{div} \mathfrak{A}$ in verschiedenen Koordinatensystemen. — 15. Untersuchung eines Vektorfeldes. — 16. Das Linienintegral eines Vektors. — 17. Die Rotation eines Vektors. — 18. Der Satz von Stokes. — 19. Der Gradient. — 20. Besondere Rechnungsregeln . . . . .	9—28
§ 21—24. <b>Dritter Abschnitt. Die Maxwell'schen Feldgleichungen für ruhende Körper.</b> — 21. Die erste Maxwell'sche Feldgleichung. — 22. Die zweite Maxwell'sche Feldgleichung. — 23. Die Kontinuitätsgleichung für die Vektoren $\mathfrak{c}$ und $\mathfrak{B}$ . — 24. Einteilung der theoretischen Telegraphie . . . . .	29—33

## Zweiter Teil.

### Das ruhende elektrische Feld.

§ 25—32. <b>Erster Abschnitt. Potentialtheorie.</b> — 25. Grundgleichungen. — 26. Das elektrische Potential. — 27. Differentialgleichung des Potentials. — 28. Grenzbedingungen an Trennflächen in Nichtleitern. — 29. Grenzbedingungen an Leitern. — 30. Wesentliche Eigenschaften des Potentials. — 31. Niveauflächen des Potentials. — 32. Konstruktion von Feldlinien . . . . .	34—43
§ 33—43. <b>Zweiter Abschnitt. Felder gegebener Form.</b> — 33. Verteilung auf konzentrischen Kugeln. — 34. Elektrische Massenpunkte. — 35. Systeme elektrischer Massenpunkte. — 36. Potential und Feldstärke in einem sehr fernen Punkte. — 37. Kapazität eines Körpers beliebiger Form. — 38. Einheiten der Kapazität. — 39. Der ebene Kondensator. — 40. Kondensatoren mit koaxialen	

	Seite
Zylinderflächen. — 41. Telegraphenkabel mit Guttapercha-Isolation. — 42. Kapazität von Litzenkabeln. — 43. Praktische Formeln zur Kapazitätsberechnung . . . . .	43—52
<b>§ 44—45. Dritter Abschnitt. Ermittlung elektrischer Verteilungen aus der Potentialfunktion.</b> — 44. Eindeutigkeit der Lösungen der Gleichung $\Delta\varphi = 0$ . — 45. Feststellung von Leiteroberflächen aus einer gegebenen Potentialfunktion . . . . .	52—55
<b>§ 46—55. Vierter Abschnitt. Verteilungen auf gestreckten Leitern.</b> — 46. Vereinfachung der Gleichung $\Delta\varphi = 0$ ; allgemeine Lösung. — 47. Verteilungen auf zwei parallelen gestreckten Leitern. — 48. Kapazität einer einfachen Leitung gegen Erde. — 49. Systeme paralleler Leitungen. — 50. Mehrfachleitersysteme. — 51. Doppelleitung. — 52. Teilkapazitäten. — 53. Teilkapazitäten einer Doppelleitung. — 54. Kapazität von Doppelleitungskabeln. — 55. Kapazität von Doppelleitungen in vielpaarigen Kabeln . . .	56—73
<b>§ 56—58. Fünfter Abschnitt. Verteilung auf Leitern mit veränderlicher Krümmung.</b> — 56. Unterschiede der Flächendichte. — 57. Wirkung von Spitzen. — 58. Antennen für Telegraphie ohne Draht . . . . .	73—79

## Dritter Teil.

## Stationäre Felder.

<b>§ 59.</b> Grundgleichungen des stationären Zustandes . . . . .	80
<b>§ 60—68. Erster Abschnitt. Das elektrische Feld stationärer Ströme.</b> — 60. Das elektrische Potential im Felde stationärer Ströme. — 61. Anwendung auf die Berechnung des Isolationswiderstandes von Telegraphenkabeln. — 62. Strömung in einem einseitig unbegrenzten leitenden Mittel. — 63. Strömung in einer ebenen Platte. — 64. Ströme in linearen Leitern. — 65. Strömung in einem Kabel mit zylindrischer Hülle. — 66. Strömung in einer symmetrischen Doppelleitung. — 67. Leiter mit Ableitung. — 68. Gleichstrommessungen an Leitungen . . . . .	80—96
<b>§ 69—81. Zweiter Abschnitt. Das magnetische Feld stationärer Ströme.</b> — 69. Das Vektorpotential. — 70. Stetigkeit des Vektorpotentials und seiner Ableitungen. — 71. Untersuchung von $\operatorname{div} \mathbf{H}$ . — 72. Untersuchung von $\mathcal{A} \mathbf{H}$ außerhalb der Strömung. — 73. Verkettung. — 74. Das Linienintegral über einen mit dem Stromleiter verketteten Weg. — 75. Änderungen am Leiter und am Integrationswege. — 76. Berechnung des Linienintegrals. — 77. Zusammenfassung für Aufgaben über stationäre Felder. — 78. Das magnetische Feld einer symmetrischen Doppelleitung. — 79. Biot-Savartsches Gesetz und Ampèresche Regel. — 80. Magnetisches Potential außerhalb der Strömung. — 81. Magnetische Doppelschicht. Ampèresche Theorie des Magnetismus.	96—112
<b>§ 82—101. Dritter Abschnitt. Magnetische Felder von Dauermagneten und Elektromagneten.</b> — 82. Anwendung der Ampèreschen Theorie. — 83. Die magnetische Feldstärke und das magnetische Potential. — 84. Die magnetische Induktion $\mathfrak{B}$ . — 85. Anfangs- und reversible Permeabilität. — 86. Verhalten von $\mathfrak{H}$ und $\mathfrak{B}$ an Trennflächen. — 87. Magnetische Hysterese. — 88. Magnetpole. — 89. Die magnetische Energie eines Feldes mit ruhenden Magneten. Zugkraft. — 90. Berechnung von Elektromagneten. — 91. Der magnetische Kreis mit vollständigem Eisen-schluß. — 92. Geteilte magnetische Kreise. — 93. Beispiel einer	

- Lösung der Gleichung  $\Delta\psi = 0$ . — 94. Anwendung der Sätze vom magnetischen Kreise. — 95. Elektromagnete von Telegraphenapparaten. — 96. Apparate mit neutralen Elektromagneten. — 97. Polarisirte Relais. Magnetischer Aufbau. — 98. Grundsätze für die Einstellung. — 99. Bewegungsgleichung des polarisirten Relais. — 100. Verhalten bei Einfachstrom. — 101. Verhalten bei Doppelstrom . . . . . 113—140
- § 102—107. **Vierter Abschnitt. Stromleiter im magnetischen Felde.** — 102. Magnetischer Fluß in Verkettung mit einem Stromleiter. — 103. Leiter, die in einem magnetischen Felde drehbar sind. — 104. Magnetische Wirkungen zwischen Stromleitern. — 105. Das Neumannsche Potential zweier Stromkreise. — 106. Energie des magnetischen Feldes einer Strömung. — 107. Magnetische Energie eines Systems von Strömen und Magneten . . . . . 140—148
- § 108—116. **Fünfter Abschnitt. Induktivität von Stromkreisen.** — 108. Magnetische Energie von linearen Strömen in eisenfreiem Felde. — 109. Induktivitäten von Systemen gerader paralleler Leiter. — 110. Theorie störungsfreier Schleifen. — 111. Selbstinduktivität und Gegeninduktivität bei körperlichen Leitern. — 112. Der mittlere geometrische Abstand. — 113. Gegeninduktivität von Schleifen mit parallelen Leitern kreisförmigen Querschnittes. — 114. Selbstinduktivität einer Schleife aus zwei parallelen Drähten. — 115. Selbstinduktivität einer Schleife aus konzentrischer Hin- und Rückleitung. — 116. Induktivität einer Schleife aus Drähten, die Eisen in konzentrischen Schichten enthalten . . . . . 148—163
- § 117—122. **Sechster Abschnitt. Induktivitäten geerdeter Einzelleitungen.** — 117. Schwierigkeit ihrer Feststellung. — 118. Stromkreise mit teilweise flächenförmigen Leitern. — 119. Leiter mit allseitiger Rückleitung. — 120. Berechnung der gemeinsamen magnetischen Energie. — 121. Gegeninduktivität zweier Leiter mit allseitiger Rückleitung. — 122. Formeln für die Induktivitäten geerdeter Einzelleiter 163—175

## Vierter Teil.

## Quasistationäre Felder.

- § 123—129. **Erster Abschnitt. Allgemeine Beziehungen.** — 123. Begriff des quasistationären Feldes. — 124. Form der Feldgleichungen. — 125. Abhängigkeit des Linienintegrals vom Wege. — 126. Energiegleichung. — 127. Kondensatoren in quasistationären Stromkreisen. — 128. Elektrische Energie in Kondensatoren. — 129. Stromkreise mit Induktivität und Kapazität . . . . . 176—182
- § 129—137. **Zweiter Abschnitt. Veränderliche Ströme unter der Wirkung konstanter EMK.** — 130. Stromkreise mit Widerstand und Induktivität. — 131. Stromkreis mit Widerstand und Kapazität. — 132. Scheinbare Unstetigkeiten der Vorgänge. — 133. Widerstand parallel einer Induktivität. — 134. Widerstand parallel einer Kapazität. — 135. Anwendung auf Telegraphenkabel. — 136. Induktivität parallel mit Kapazität. — 137. Kondensatoren zur Überbrückung von Relaiskontakten . . . . . 182—194

- § 138—142. **Dritter Abschnitt. Stromintegrale.** — 138. Gesetze der Verzweigung von Elektrizitätsmengen. — 139. Integral der EMK einer Spule mit Induktivität. — 140. Die Maxwell-Erde. — 141. Die Gegenstromrollen nach Godfroy. — 142. Scheinbare Selbstinduktivität von Leitungen . . . . . 194—201
- § 143—151. **Vierter Abschnitt. Neuere Rechnungsweisen für die Berechnung von veränderlichen Vorgängen.** — 143. Ausgleichsvorgänge. — 144. Allgemeines Integrationsverfahren nach Heaviside. — 145. Zeitfunktion eines sprungweise ansteigenden Vorgangs. — 146. Die Darstellung der abhängigen Veränderlichen. — 147. Fall einer Stammfunktion mit gleichen Wurzeln. — 148. Anpassung der Heavisideschen Formel für veränderliche elektromotorische Kräfte. — 149. Die Heavisidesche Formel für einen Anstieg nach regelmäßigen Wechseln. — 150. Die Formel nach Heaviside für den Anstieg nach einzelnen vorausgehenden Zeichen. — 151. Der Vorgang des Einschwingens unter sinusartig veränderlichen elektromotorischen Kräften . . . . . 201—216

## Fünfter Teil.

**Elektrische Schwingungen in Kondensatorkreisen.**

- § 152—156. **Erster Abschnitt. Erzeugung und Eigenschaften freier Schwingungen.** — 152. Der einfache Schwingungskreis. — 153. Bestimmungsgrößen einer Schwingung. — 154. Anwendung auf den einfachen Schwingungskreis. — 155. Die Energie im Schwingungskreise. — 156. Potentielle und kinetische Energie . . . . . 217—224
- § 157—161. **Zweiter Abschnitt. Der einfache Schwingungskreis als Empfänger.** — 157. Erregung durch eine gedämpfte Schwingung. — 158. Erregung durch eine ungedämpfte Schwingung. — 159. Resonanzkurve. — 160. Bestimmung des Dekrements durch Aufnahme einer Resonanzkurve. — 161. Stromverlauf in einem Kondensatorkreise als Empfänger. 224—234
- § 162—166. **Dritter Abschnitt. Schwingungen gekoppelter Systeme.** — 162. Begriff gekoppelter Systeme. — 163. Der gekoppelte Sender. — 164. Darstellung durch schwebende Schwingungen. — 165. Anstoß gekoppelter Kreise durch Sinusschwingungen. — 166. Energiewanderung in gekoppelten Schwingungskreisen . 234—245

## Sechster Teil.

**Andauernde elektrische Schwingungen.**

- § 167—169. **Erster Abschnitt. Begriffe und Eigenschaften.** — 167. Begriff andauernder Schwingungen. — 168. Mittlere Leistung bei andauernden Wechselströmen. — 169. Effektive Werte von Wechselstromgrößen . . . . . 246—249
- § 170—175. **Zweiter Abschnitt. Besondere Rechnungsweisen.** — 170. Geometrische und algebraische Darstellung andauernder Schwingungen. — 171. Darstellung von Wechselstromgrößen in komplexer Form. — 172. Allgemeine Form der Wechselstromgrößen. — 173. Rechnen mit komplexen Wechselstromgrößen. — 174. Gerichtete Widerstände und Leitwerte. — 175. Die Ermittlung der Leistung bei komplexer Form von Spannung und Strom . . . . . 250—258

- § 176—182. **Dritter Abschnitt. Meßeinrichtungen für schwache andauernde Wechselströme.** — 176. Übersicht der Meßverfahren. — 177. Die Wechselstrommeßbrücke. — 178. Kompensationsmethoden für Wechselströme. — 179. Die Frankesche Maschine. — 180. Der komplexe Kompensator von Larsen. — 181. Das Potentiometer von Pedersen. — 182. Anwendung von Ausschlagsmethoden . . . . . 258—266
- § 183—191. **Vierter Abschnitt. Verlauf andauernder Wechselströme in quasistationären Kreisen.** — 183. Kreise ohne Eigenschwingung. — 184. Der Verlustwinkel. — 185. Kreise mit Eigenschwingung. — 186. Der Transformator. — 187. Transformator der Starkstromtechnik. — 188. Fernsprechübertrager. — 189. Das Mikrophon als Wechselstromerzeuger. — 190. Apparate mit Energiestreuung. — 191. Fernsprechapparate als Sender und als Empfänger . . . . . 267—279
- § 192—197. **Fünfter Abschnitt. Theorie des Telephons als Empfänger.** — 192. Grundgleichungen. — 193. Die Gleichungen von Lagrange. — 194. Freie Schwingungen der Telephonmembran. — 195. Erzwungene Schwingungen der Membran. — 196. Schwingungen der Membran in der Nähe der Eigenfrequenz. — 197. Der Wirkungsgrad des Fernhörers . . . . . 280—293
- § 198—205. **Sechster Abschnitt. Elektrische Störungen von Schwachstromleitungen durch Starkstromleitungen.** — 198. Arten der Störungen. — 199. Magnetische Induktion von Starkstromleitungen auf Schwachstromleitungen. — 200. Störungen durch elektrische Influenz in Mehrfachleitersystemen. — 201. Berechnung der Grundwerte für ein gegebenes Leitersystem. — 202. Eine störende und eine gestörte Leitung. — 203. Einwirkung einer Drehstromleitung auf eine Einzelleitung. — 204. Influenz einer Doppelleitung durch eine einzelne Hochspannungsleitung. — 205. Ersatzleiter für Leitungsbündel . . . . . 293—305

## Siebenter Teil.

**Fortpflanzung elektrischer Wellen auf Leitungen.**

- § 206—211. **Erster Abschnitt. Allgemeine Grundlagen.** — 206. Die Telegraphengleichung. — 207. Bedeutung der Wellenausbreitung für die Zweige der Fernmeldetechnik. — 208. Die Energiebilanz einer Leitung. — 209. Allgemeine Form der Telegraphengleichung. — 210. Fortpflanzungsgeschwindigkeit elektrischer Wellen auf Leitungen. — 211. Mechanische Modelle elektrischer Leitungen . . . . . 306—313
- § 212—213. **Zweiter Abschnitt. Wellenverlauf auf einer idealen Leitung.** — 212. Die ideale Leitung. — 213. Gesetze der Reflexionen . . . . . 313—320
- § 214—217. **Dritter Abschnitt. Die Verzerrung der Wellenform.** — 214. Integration der Telegraphengleichung für eine Welle auf unbegrenzter Leitung. — 215. Längenmaß und zeitlicher Verlauf des Stromes. — 216. Stromverlauf in Leitungen endlicher Länge. — 217. Die verzerrungsfreie Leitung . . . . . 320—327

## Achter Teil.

**Fortpflanzung andauernder Sinusströme auf Leitungen.**

- § 218. Beschränkung auf den eingeschwungenen Zustand . . . . . 328

- § 219–232. Erster Abschnitt. Eigenschaften gleichmäßiger Leitungen.** — 219. Integration der Grundgleichungen. — 220. Stehende elektrische Wellen. — 221. Das Spiralendiagramm einer am Ende offenen Leitung. — 222. Das Spiralendiagramm einer am Ende auf einen Apparat geschalteten Leitung. — 223. Die Bestimmungsgrößen der elektrischen Wellen. — 224. Wirksame Werte der Größen  $R, L, G, K$ . — 225. Leitungen mit erheblicher Induktivität. — 226. Leitungen ohne Verzerrung der Wellen. — 227. Bedeutung der Verzerrung für das Fernsprechen. — 228. Leitungen mit starker Verzerrung. — 229. Verzerrung gemäß dem Winkelmaß. — 230. Scheinwiderstände einer Wechselstromleitung. — 231. Der Wellenwiderstand bei Wechselstrom. — 232. Scheinwiderstände einer Leitung bei verschiedenen Frequenzen . . . . . 328—351
- § 233–243. Zweiter Abschnitt. Eigenschaften zusammengesetzter Leitungen.** — 233. Verschiedene Formen zusammengesetzter Leitungen. — 234. Das lineare Gleichungspaar. — 235. Zur Mitte symmetrische Leitung. — 236. Die Konstanten einer beliebig zusammengesetzten Leitung. — 237. Umkehrungssatz. — 238. Scheinwiderstände von Leitungen beliebiger Zusammensetzung. — 239. Dämpfungsfaktor einer Leitung. — 240. Dämpfungsfaktor nicht symmetrischer Leitungen. — 241. Die Bedeutung des Dämpfungsmaßes für das Fernsprechen. — 242. Reflexionen in zusammengesetzten Leitungen. — 243. Der Wellenwiderstand einer ungleichmäßig zusammengesetzten Leitung . . . . . 351—368
- § 244–245. Dritter Abschnitt. Anpassung von Apparaten an Wechselstromleitungen.** — 244. Verbindungen verschiedener Leitungen durch Übertrager. — 245. Günstigster Scheinwiderstand bei Fernsprechapparaten . . . . . 368—376
- § 246–259. Vierter Abschnitt. Kettenleiter.** — 246. Allgemeines. — 247. Glied und Kette. — 248. Ersatzleitung für das Glied. — 249. Fortpflanzungskonstante und Frequenz. — 250. Die Spulenleitung. — 251. Die Kondensatorleitung. — 252. Die Siebketten. — 253. Eichleitungen. — 254. Eichleitungen absoluten Maßes. — 255. Eigenfrequenzen einer Leitung. — 256. Leitungen mit Verstärkern. — 257. Das elektrische Feld in einer Elektronenröhre. — 258. Arbeitsweise der Elektronenröhre als Verstärker. — 259. Die Gleichungen des Verstärkers als Leitungselement . . . . . 376—396
- § 260–263. Fünfter Abschnitt. Messungen an Wechselstromleitungen.** — 260. Messung der wirksamen Größen einer Leitung. — 261. Messung von Leerlauf- und Kurzschlußwiderstand. — 262. Messungen an zusammengesetzten Leitern. — 263. Rechnungsbehelfe . . . . . 397—406
- § 264–267. Sechster Abschnitt. Das Nebensprechen in mehrfachen Fernsprechkabeln.** — 264. Allgemeines. — 265. Die Kopplungskapazitäten eines Vierers. — 266. Die Messung des Nebensprechens. — 267. Das Nebensprechen zusammengesetzter Leitungen . . . . . 406—415
- § 268–276. Siebter Abschnitt. Verfahren zur Verminderung der Dämpfung durch Erhöhung der Induktivität.** — 268. Übersicht. — 269. Vergrößerung der Induktivität durch stetig verteiltes Eisen. — 270. Kabel mit Bewicklungen aus dünnen Eisendrähten. — 271. Leitungen mit stellenweise eingeschalteten Induktionsspulen (Pupinleitungen). — 272. Die Wellen-

- ausbreitung auf mit Spulen belasteten Leitungen. — 273. Das Dämpfungsmaß einer mit Spulen belasteten Leitung. — 274. Die Bedeutung der Ableitung für belastete Leitungen. — 275. Nachbildung des Scheinwiderstandes einer belasteten Leitung. — 276. Vereinfachte Nachbildung . . . . . 415—429
- § 277—278. **Achter Abschnitt. Die Berechnung von Fernsprechverbindungen.** — 277. Stellung der Aufgabe. — 278. Vollständige und annähernde Lösung . . . . . 429—431

## Neunter Teil.

**Fortpflanzung von Stromstößen auf langen Leitungen.**

- § 279—291. **Erster Abschnitt. Vorgänge auf reinen Leitungen.** — 279. Bezeichnung der Aufgabe und der Methode. — 280. Die Stammfunktion bei Leitungsproblemen. — 281. Die Stammfunktion für Kettenleiter. — 282. Zurückführung auf die Fortpflanzungskonstanten. — 283. Der ankommende Strom bei kurzem Schluß am Ende der Leitung. — 284. Der Endstrom einer Leitung geringen Längenmaßes. — 285. Stromverlauf an beliebiger Stelle einer am Ende kurz geschlossenen Leitung. — 286. Stromanstieg auf einer Leitung mit sehr geringen Verlusten. — 287. Die Thomsonkurve bei kurz geschlossener Leitung. — 288. Der Vorgang des Einschwingens bei Sinusströmen. — 289. Das Zusammenwirken des beständigen und des flüchtigen Stromanteils. — 290. Ein Mittel zum Abkürzen der Einschwingungszeit. — 291. Regelmäßige Wechselzeichen auf einem Kabel . . . . . 432—455
- § 292—299. **Zweiter Abschnitt. Anwendung auf betriebsmäßige Schaltungen.** — 292. Allgemeine Grundlagen. — 293. Die Stammfunktion für betriebsmäßige Schaltungen. — 294. Das *KR*-Gesetz. — 295. Telegraphiergeschwindigkeit auf Leitungen. — 296. Das Dauerzeichen. — 297. Leitung mit Endschaltung. — 298. Verschiedene Endschaltungen. — 299. Gedämpfte Schwingungen in der Endschaltung . . . . . 455—470

## Zehnter Teil.

**Ausbreitung der elektromagnetischen Energie.**

- § 300—305. **Erster Abschnitt. Der Energiestrom.** — 300. Untersuchung der Änderung der Energie eines Raumes. — 301. Der Strahlungsvektor. — 302. Stationärer Energiestrom in einem einadrigen Telegraphenkabel. — 303. Energiestrom im Felde einer symmetrischen Doppelleitung. — 304. Stromverdrängung bei Wechselströmen. — 305. Reflexion und Absorption einer ebenen elektrischen Welle an einer ebenen Leiterfläche . . 471—481
- § 306—317. **Zweiter Abschnitt. Elektrische Wellen im Raume.** — 306. Allgemeines. — 307. Fortpflanzung elektrischer Wellen längs der Oberfläche eines Leiters. — 308. Oberflächenladungen bei elektrischen Wellen. — 309. Aussendung elektrischer Wellen. Hertzsche Lösung. — 310. Das elektromagnetische Feld im Nahbereich und im Fernbereich. — 311. Schwingungsformen des Luftleiters. — 312. Symmetrische Ergänzung eines Luftleiterkreises. — 313. Offene und geschlossene Schwingungssysteme. — 314. Strahlung eines geradlinigen Luftleiters. — 315. Gleichwertiger Strahlungswiderstand. — 316. Logarithmisches Dekrement der Antenne. Strahlungsdokrement. — 317. Gerichtete drahtlose Telegraphie. 482—505

<b>§ 318—326. Dritter Abschnitt. Elektrische Wellen im Felde gestreckter Leiter.</b> — 318. Stellung der Aufgabe. — 319. Das elektromagnetische Feld eines konzentrischen Leitersystems. — 320. Der Wechselstromwiderstand von Drähten. — 321. Vergrößerung des Widerstandes bei Hochfrequenz. — 322. Wellenleiter in allseitig ausgedehntem Mittel. — 323. Gleichungen eines zylindrischen Feldes mit zwei singulären Punkten. — 324. Feld eines einzelnen Stromfadens. — 325. Anwendung auf ein einadriges Seekabel. — 326. Das Feld einer Doppelleitung . . . . .	506—524
Anhang I. Elektromagnetisches (cgs) und praktisches Maßsystem . . . . .	525
Anhang II. Rechnen mit Determinanten . . . . .	526—529
Anhang III. Linienintegrale von Funktionen einer komplexen Veränderlichen . . . . .	529—532
Anhang IV. Werte von $\log^{10} J_0(iu)$ . . . . .	533
Anhang V. Dielektrizitätskonstante $\epsilon$ . . . . .	533
Anhang VI. Spezifische Leitfähigkeit $\sigma$ einiger Stoffe in elektromagnetischem Maße . . . . .	533—534
Anhang VII. Exponentialfunktionen . . . . .	534
Anhang VIII. Elektrische Eigenschaften von Leitungen . . . . .	535—536

---

## Erster Teil.

# Grundbegriffe und Rechnungsweisen.

---

### Erster Abschnitt.

## Das elektromagnetische Feld und seine Bestimmungsgrößen.

§ 1. **Ältere und neuere Anschauungen über die elektrischen und magnetischen Vorgänge.** Zur Erklärung der elektrischen und magnetischen Erscheinungen hat man frühzeitig die Annahme gemacht, daß sie von besonderen Stoffen, den als gewichtlos angesehenen elektrischen und magnetischen Massen oder Flüssigkeiten, herrührten. Auch heute spielen diese, wenn auch in veränderter Auffassung, eine Rolle. Dagegen unterscheidet sich die heute geltende Theorie von der früheren wesentlich in der Vorstellung über die Art, in welcher elektrische oder magnetische Körper, die räumlich voneinander getrennt sind, die der Beobachtung zugänglichen Kräfte aufeinander ausüben.

Die ältere Anschauung nennt man die Fernwirkungstheorie. Zwischen elektrisierten oder magnetisierten Körpern lassen sich mechanische Kräfte nachweisen, welche ähnlich wie die Gravitationskräfte nach dem Newtonschen Gesetz wirken, also dem Produkt der Mengen direkt und dem Quadrat der Entfernung umgekehrt proportional sind. Die Gravitationskräfte galten bis in die neueste Zeit als Fernkräfte. Es besteht noch kein Erfahrungsbeweis dafür, daß die Schwerkraft oder die Anziehung zwischen Himmelskörpern von einer anderen, als den oben genannten Größen, abhängig sei, so daß, wenn die Massen und ihre Entfernungen gegeben sind, auch die Kräfte als völlig bestimmt gelten können.

Für die elektromagnetischen Kräfte hat H. Hertz die endliche Ausbreitungsgeschwindigkeit durch Versuche nachgewiesen. Änderungen der Lage oder Größe einer Menge Elektrizität oder Magnetismus bringen an einem entfernten Orte Änderungen der von den Mengen ausgehenden Kräfte hervor, die außer von den Mengen und den Entfernungen auch von der Zeit abhängen; da diese Kräfte nicht unvermittelt den Raum überspringen, sondern sich von Stelle zu Stelle fortpflanzen, werden sie auch durch die Eigenschaften der ponderablen Körper bestimmt, die den Raum erfüllen.

Diese neuere Anschauung beruht also auf der von Faraday aufgestellten, von Maxwell durch Rechnung begründeten Nahwirkungstheorie. Ein elektrischer Vorgang an irgend einem Orte des Raumes ruft elektrische Kräfte hervor, die den elektrischen Zustand der zunächst liegenden Stellen verändern und sich von Stelle zu Stelle mit endlicher Geschwindigkeit, nämlich der Lichtgeschwindigkeit, wellenförmig fortpflanzen.

**§ 2. Einheiten der elektrischen und magnetischen Menge.** Die Vorstellung von elektrischen und magnetischen Mengen kann auch gegenwärtig nicht entbehrt werden, es beruhen auf ihnen die grundlegenden Definitionen.

Zwei elektrisierte oder magnetisierte Körper üben aufeinander, wie schon erwähnt, mechanische Kräfte aus, die dem Newtonschen Gesetz folgen. Man kann demnach zunächst zwei Mengen miteinander vergleichen, indem man sie auf eine dritte wirken läßt und die mechanischen Kräfte mißt. Es ist daher grundsätzlich möglich, von zwei magnetischen oder elektrischen Mengen festzustellen, daß sie einander gleich sind.

Zwei magnetische Mengen  $m$  im Abstände  $r$  cm üben im leeren Raume aufeinander eine gewisse mechanische Kraft aus; ist diese gleich  $p$  Dynen, so setzt man nach dem Newtonschen Gesetz, welches in der Anwendung auf elektrische und magnetische Mengen auch das Coulombsche genannt wird, zur Bestimmung der Mengen  $m$

$$p = \frac{m^2}{r^2}.$$

Praktisch gilt diese Formel nicht nur für den leeren Raum, sondern für jeden von unmagnetischen Stoffen erfüllten Raum. Hiernach ist also die Einheit der magnetischen Menge in elektromagnetischem Maße diejenige, welche auf eine gleich große im Abstände  $r$  cm mit der mechanischen Kraft  $1/r^2$  Dynen wirkt.

Auch die Kräfte zwischen ruhenden elektrischen Massen kann man in mechanischem Maße bestimmen. Wenn Elektrizitätsmengen in demselben Maßsystem wie Magnetismen, also in elektromagnetischem Maße gemessen werden, so wird diejenige Elektrizitätsmenge als Einheit bezeichnet, welche im leeren Raume auf eine gleich große im Abstände  $r$  cm die Kraft  $c^2/r^2$  Dynen ausübt, wobei  $c = 3 \cdot 10^{10}$  cm die Lichtgeschwindigkeit bezeichnet.

In der Praxis gebraucht man das aus dem elektromagnetischen abgeleitete<sup>1)</sup> praktische Maßsystem (Anhang I). Die elektromagnetische und die praktische Einheit des Magnetismus stimmen überein; dagegen ist die praktische Einheit der Elektrizitätsmenge (1 Coulomb) gleich  $1/10$  der elektromagnetischen Einheit. — In einzelnen Fällen rechnet man in elektrostatischen Einheiten, von denen  $9 \cdot 10^{20}$  auf eine elektromagnetische Einheit gehen.

Wenn nichts anderes bemerkt wird, gelten in diesem Buche die elektromagnetischen Einheiten.

Auf Grund dieser Definitionen lassen sich wenigstens grundsätzlich Einheiten der elektrischen und magnetischen Menge feststellen. Wir wollen uns solche auf geeigneten Trägern angesammelt denken und benutzen diese nun in gedachten Versuchen, um den Raum auf das Vorhandensein elektrischer oder magnetischer Kräfte zu untersuchen.

**§ 3. Elektrische und magnetische Feldstärke.** Bringen wir den elektrischen oder magnetischen Probekörper an eine bestimmte Stelle des Raumes, so wird man mit geeigneten Vorrichtungen, z. B. Wagen, entweder eine auf ihn wirkende mechanische Kraft feststellen können, oder nicht. Im letzteren Falle nennen wir den Ort je nachdem unelektrisch oder unmagnetisch, im anderen Falle schließen wir auf das Vorhandensein von elektrischen oder magnetischen Körpern an anderen Orten und auf elektrische oder magnetische Kräfte, die von ihnen ausgehen.

Einen Raum, in welchem elektrische oder magnetische Kräfte wirken, nennen wir ein elektrisches oder magnetisches Feld. Man kann sich ein derartiges Feld topographisch aufgenommen denken, indem man an zahlreichen Stellen bestimmt, welchen Wert nach Größe und Richtung die auf den Probekörper wirkende Kraft hat. So bestimmt man auch tatsächlich das magnetische Feld der Erde mittels der Magnetnadel und eines geeichten Hilfsmagnets. Die mechanische Kraft, welche im elektrischen Felde im leeren Raum auf einen die Einheit der positiven Elektrizität tragenden (kleinen) Körper ausgeübt wird, nennt man die elektrische Feldstärke  $\mathcal{E}$  oder auch die elektrische Kraft dieses Feldes; analog nennt man die in einem magnetischen Felde im leeren Raume auf einen Magnetpol mit der magnetischen Menge Eins wirkende Kraft die magnetische Feldstärke  $\mathcal{H}$  oder auch die magnetische Kraft.

Es ist zu beachten, daß die magnetische und die elektrische Feldstärke wohl durch mechanische Kräfte unter Zuhilfenahme eines Einheitspoles gemessen werden, aber nicht mechanische Kräfte an sich sind. Man erkennt dies schon daraus, daß ihre Maßzahl von der Wahl des Einheitspoles abhängt. Die Feldstärken sind also auch nicht in Dynen angebbbar, sondern haben ihre besonderen Maße.

**§ 4. Vektoren und Skalare.** Die elektrische Feldstärke  $\mathcal{E}$  und die magnetische Feldstärke  $\mathcal{H}$  sind mit Absicht durch gotische Buchstaben bezeichnet worden, um eine besondere Eigenschaft dieser Größen anzudeuten, auf welche schon bei ihrer Definition hingewiesen wurde; zur Feststellung dieser Größen an einem bestimmten Orte des Raumes bedarf man der Angaben ihrer Größe und ihrer Richtung. Im allgemeinen hat man dazu drei Stücke anzugeben, z. B. drei Koordinaten in einem räumlichen Koordinatensystem. Man nennt solche gerichteten Größen Vektoren. Auch in anderen Zweigen der Physik kommen Vektoren vor, z. B. Geschwindigkeit, Beschleunigung, Strömung.

Den Gegensatz zu den Vektoren bilden die Skalare, welche durch eine Angabe völlig bestimmt sind. Beispiele sind Masse, Länge, Höhe, Temperatur; elektrische und magnetische Skalargrößen werden uns die folgenden Abschnitte noch lehren. Um den Unterschied anzudeuten, werden für Skalare die lateinischen oder griechischen Buchstaben benutzt.

Ein gotischer Buchstabe bezeichnet also zunächst eine physikalische Größe bestimmter Art, enthält aber außerdem den Hinweis, daß diese durch Größe und Richtung zu bestimmen ist. Kommt es in einem gegebenen Falle lediglich auf die Größe des Vektors  $\mathcal{E}$ , nicht auf die Richtung an, so benutzt man dafür das Zeichen  $|\mathcal{E}|$ , gelesen „Betrag von  $\mathcal{E}$ “. Wir werden in § 8

bis 19 einige Rechnungsweisen kennen lernen, in denen die Eigenschaften des Vektors besonders berücksichtigt werden.

**§ 5. Elektrischer Strom, dielektrische Verschiebung und magnetische Induktion.** Nach dem in § 3 Gesagten äußert sich das Vorhandensein einer elektrischen oder magnetischen Feldstärke dadurch, daß die elektrischen oder magnetischen Mengen mechanischen Kräften unterworfen werden.

Es ist wahrscheinlich, daß auch scheinbar unelektrische Körper Elektrizitätsmengen enthalten, und zwar in den kleinsten Teilen gleich große Mengen positiver wie negativer Elektrizität, so daß sie nach außen unelektrisch erscheinen. Ähnliches wird in bezug auf den Magnetismus von magnetisierbaren Körpern angenommen.

Wenn in einem Felde mit derartigen Eigenschaften eine elektrische oder magnetische Feldstärke zustande kommt, so wird sie nach der Annahme auf die kleinsten Mengen mechanische Kräfte ausüben.

In bezug auf ihr Verhalten gegen elektrische Feldstärken zerfallen die bekannten Körper in zwei Klassen. Leiter nennen wir solche Körper, in denen eine elektrische Kraft eine Bewegung der elektrischen Mengen über endliche Wege, einen elektrischen Strom, zustande bringt, Nichtleiter dagegen solche Körper, bei denen die elektrischen Mengen in der Regel nur über sehr kleine Strecken bewegt werden können.

Der elektrische Strom wird, wie später näher dargestellt wird, durch die von ihm hervorgebrachte mechanische Kraft auf einen magnetischen Einheitspol gemessen; als Einheit des elektrischen Stromes gilt derjenige, bei welchem in jeder Sekunde eine Einheit der Elektrizitätsmenge, wie sie in § 2 definiert ist, durch den Querschnitt des stromführenden Leiters tritt.

Unter elektrischer Stromdichte  $i$  versteht man die Elektrizitätsmenge, welche in einer Sekunde durch eine zur Stromrichtung senkrechte Fläche von  $1 \text{ cm}^2$  Querschnitt tritt, oder auch das Verhältnis des Stromes zum Querschnitt. Die Stromdichte ist also ein Vektor.

Erfahrungsgemäß ist die von einer gegebenen Feldstärke bewirkte Stromdichte in Leitern verschiedener Art verschieden. Man setzt das Verhältnis  $i : \mathcal{E} = \sigma$ , wonach also

$$i = \sigma \mathcal{E} \dots \dots \dots (1)$$

ist, und nennt  $\sigma$  die spezifische Leitfähigkeit des betrachteten Leiters.

Die durch  $i$  bezeichnete Strömung im Leiter, welche so lange dauert, wie auch  $\mathcal{E}$  besteht, nennt man auch den Leitungsstrom.

Zur Erklärung der Erscheinungen in Nichtleitern macht man die Annahme, daß in ihnen die elektrischen Doppelmengen, je eine positive und eine negative gleich große Menge, als Ganzes innerhalb des Molekularverbandes an ihrer Stelle verharren müssen, daß sie sich dagegen unter der Wirkung der elektrischen Kraft an ihrer Stelle richten können. Von jedem Doppelpole gehen elektrische Kräfte aus, die auf die nächstliegenden Doppelpole wirken und sich durch diese auf die ferneren übertragen. Wenn keine äußere elektrische Kraft in dem Felde besteht, so stellt sich jeder Doppelpol in die Resultierende der von den benachbarten ausgeübten Kräfte. Daher wird in einem Felde ohne äußere elektrische Kraft keine bestimmte Richtung bei der

Lage der Achsen der Doppelpole vorherrschen. Tritt in einem solchen Felde eine elektrische Kraft auf, so wirkt sie auf die positive Hälfte jedes Doppelpoles in dem einen, auf die negative in dem entgegengesetzten Sinne, und es kommt eine Drehung jedes Doppelpoles zustande. Denkt man sich senkrecht zur Richtung der elektrischen Kraft eine Fläche gelegt, so werden auf derjenigen Seite dieser Fläche, aus welcher die Kraft heraustritt, mehr positive, auf der anderen mehr negative Pole sein. Hört die elektrische Kraft auf, so gehen die Doppelpole wieder in die Anfangslage zurück, und auf jeder Seite der Fläche liegen wieder ebensoviele positive wie negative Pole. Die Kraft bewirkt also, daß eine bestimmte Menge Pole durch die Fläche treten, wie man sagt, verschoben werden. Man nennt die Menge positiver Elektrizität, welche von einer elektrischen Feldstärke gegebener Größe durch eine Fläche von  $1 \text{ cm}^2$  senkrecht zu ihrer Richtung verschoben wird, die dielektrische Verschiebung  $\mathcal{D}$ .

Erfahrungsgemäß ergeben sich bei gleichem  $\mathcal{E}$  in verschiedenen Körpern verschiedene Werte von  $\mathcal{D}$ . Man nennt das Verhältnis  $4\pi c^2 \mathcal{D} : \mathcal{E}$  die Dielektrizitätskonstante  $\varepsilon$  des betreffenden Körpers und bezieht alle auf den leeren Raum, für welchen  $\varepsilon = 1$  gesetzt wird. Es ist also:

$$\mathcal{D} = \frac{\varepsilon}{4\pi c^2} \mathcal{E} \dots \dots \dots (2)$$

In dem von ponderabler Masse freien, leeren Raume setzt man als Träger und Übertrager der elektrischen und magnetischen Kräfte den Äther voraus; man nimmt an, daß auch dieser durch die Kräfte eine Änderung erfährt, etwa in Form von Zug- und Druckspannungen. Wenn es nicht auf die Bewegung freier Pole, der Elektronen, im leeren Raume ankommt, wie sie beispielsweise bei Kathodenstrahlen stattfindet, kann man den massefreien leeren Raum wie einen Nichtleiter ansehen. Für ihn gilt, daß die Verschiebung der Feldstärke numerisch gleich ist.

Bringt man einen stabförmigen, aus zwei längsweise äneinandergesetzten Teilen bestehenden Leiter in ein elektrisches Feld, so daß er der Richtung der Feldstärke parallel ist, so zeigt er sich auf der in der Richtung der Feldstärke liegenden Hälfte positiv, auf der anderen negativ elektrisch. Löst man die Verbindung der Teile und trennt sie voneinander, so bleibt der eine Teil positiv, der andere negativ. Unter der Wirkung einer elektrischen Feldstärke kann also eine Trennung der beiden Elektrizitäten eintreten, und es gibt für sich bestehende positive und negative elektrische Mengen.

Eine elektrische Verschiebung kann nicht plötzlich, sondern nur innerhalb einer, wenn auch kleinen Zeit zustande kommen. Während dieser Zeit tritt also durch eine senkrecht zur Krafrichtung gelegte Fläche Elektrizität hindurch. Es ist anzunehmen, daß diese bewegte Elektrizität dieselben Wirkungen im umgebenden Raume hervorbringen wird, wie die in Leitern bewegte. Man nennt deshalb das Verhältnis der in einer gewissen Zeit bewirkten dielektrischen Verschiebung zu dieser Zeit, oder die auf eine sehr kleine Zeiteinheit bezogene Menge der dielektrisch verschobenen Elektrizität den Verschiebungsstrom. Der analytische Ausdruck dafür ist  $\frac{\partial \mathcal{D}}{\partial t}$ . Sollte

irgendwo Leitungsstrom  $\sigma \mathfrak{E}$  mit dem Verschiebungsstrom gleichzeitig auftreten, so nennt man ihre Summe den wahren Strom  $c$ . Es ist also

$$c = i + \frac{\partial \mathfrak{D}}{\partial t} \dots \dots \dots (3)$$

Mit Bezug auf die magnetischen Kräfte verhalten sich alle bekannten Körper wie die Nichtleiter gegen die elektrischen Kräfte. Der dielektrischen Verschiebung  $\mathfrak{D}$  entspricht die magnetische Induktion  $\mathfrak{B}$ . Sie ist gleich der Menge positiven (Nord-) Magnetismus, die von einer magnetischen Feldstärke gegebener Größe  $\mathfrak{H}$  durch eine Fläche von  $4\pi \text{ cm}^2$  senkrecht zu ihrer Richtung verschoben wird. Man nennt das Verhältnis  $\mu = \mathfrak{B}/\mathfrak{H}$  die magnetische Permeabilität. Es ist also

$$\mathfrak{B} = \mu \mathfrak{H} \dots \dots \dots (4)$$

Alle Körper sind wieder auf den leeren Raum bezogen, für den  $\mu = 1$  gesetzt wird. Außer bei Eisen, Nickel und einigen anderen „paramagnetischen“ Metallen, bei denen  $\mu$  große Werte hat, und bei einigen „diamagnetischen“ Metallen, deren  $\mu < 1$  ist (hauptsächlich Wismut und Antimon) kann man  $\mu$  ohne merklichen Fehler gleich Eins setzen bei Luft, ferner bei Kupfer, Zink und anderen in elektrischen Apparaten gebrauchten Materialien.

Da es keine magnetischen Leiter gibt, gibt es auch keine freien Magnetismen. Legt man zwei aneinandergesetzte Eisenstäbe in ein magnetisches Feld, so zeigt sich zwar der eine nordmagnetisch, der andere süd magnetisch, aber bei der Trennung beider ist jeder wieder in der einen Hälfte nordmagnetisch, in der anderen süd magnetisch. Für magnetische Mengen gilt also der Satz, daß jeder Körper gleich viel positive und negative Mengen enthalte.

Zwischen den elektrischen Größen  $\mathfrak{E}$  und  $\mathfrak{D}$  einerseits und den magnetischen  $\mathfrak{H}$  und  $\mathfrak{B}$  andererseits besteht eine Unsymmetrie, wie sich zeigt in den Beziehungen

$$\mathfrak{D} = \frac{\epsilon}{4\pi c^2} \mathfrak{E}; \quad \mathfrak{B} = \mu \mathfrak{H}$$

und darin, daß die Menge verschobener Elektrizität für  $1 \text{ cm}^2$  gleich  $\mathfrak{D}$ , dagegen die Menge verschobenen Magnetismus für dieselbe Fläche gleich  $\frac{\mathfrak{B}}{4\pi}$  ist.

Diese Unsymmetrie beruht auf der historischen Entwicklung und ist rein konventionell durch die einmal getroffene Wahl der Bedeutung von  $\epsilon$  und  $\mu$ . Aus diesem Grunde soll sie auch fernerhin beibehalten werden.

**§ 6. Die elektromagnetische Energie des Feldes.** Wir haben in § 5 die Vorstellung gebildet, daß durch die elektrischen oder die magnetischen Kräfte die kleinsten Doppelmengen Elektrizität oder Magnetismus, welche sich in den dielektrischen oder in magnetisierbaren Körpern befinden, gerichtet werden, so daß eine Fläche bestimmter Größe senkrecht zur Krafrichtung auf der einen Seite mehr positive, auf der anderen mehr negative Pole enthält.

Es ergibt sich dadurch eine Art Schichtung der Elektrizität oder des Magnetismus in Flächen senkrecht zur Krafrichtung.

Faßt man ein Raumelement von der Form eines geraden Zylinders ins Auge, dessen Grundfläche  $df$  auf der Krafrichtung senkrecht steht, während seine Höhe  $ds$  mit der Krafrichtung zusammenfällt, so befindet sich auf jedem Querschnitt die Elektrizitätsmenge  $\pm |\mathfrak{D}| df$  oder die magnetische Menge  $\pm \frac{1}{4\pi} |\mathfrak{H}| df$ , und zwar der positive Betrag auf derjenigen Seite der Fläche, auf welcher die Kraft heraustritt, während im unerregten Zustande diese Beträge in jeder Schicht gleich Null waren.

Für das ganze Raumelement kommt dies darauf hinaus, daß von den Elektrizitäten, die sich in der Grundfläche, durch welche die Kraft eintritt, befanden, durch die elektrische Kraft die Beträge  $\pm |\mathfrak{D}| df$  voneinander getrennt wurden, und daß dann durch Fortsetzung dieser Wirkung die Trennung bis zur Austrittsfläche fortgepflanzt wurde, also daß die Menge  $+\ |\mathfrak{D}| df$  von der Eintrittsfläche bis zur Austrittsfläche bewegt wurde.

Dazu ist eine gewisse Arbeitsleistung erforderlich gewesen, welche als Energie im Felde aufgespeichert ist und beim Aufhören der elektrischen Kraft wiedergewonnen werden kann.

Der Betrag dieser Energie ergibt sich folgendermaßen: Die Feldstärke  $\mathfrak{E}$  wachse von Null an bis zu einem Endbetrage. Ein Zwischenwert sei  $\mathfrak{E}_t$ . Diesem entspricht ein Zwischenwert von  $\mathfrak{D}$ , der  $\mathfrak{D}_t$  genannt werde. Wird in dem Zeitelement  $dt$  die Feldstärke  $\mathfrak{E}_t$  um  $d\mathfrak{E}_t$  gesteigert, so bedeutet dies die Bewegung der Menge  $+ d\mathfrak{D}_t df$  über die Strecke  $ds$  unter der Wirkung der Kraft  $\mathfrak{E}_t$ . Die Arbeitsleistung ist daher:

$$\mathfrak{E}_t d\mathfrak{D}_t df ds.$$

Da nun

$$\mathfrak{D} = \frac{\epsilon}{4\pi c^2} \mathfrak{E}$$

ist, so ergibt sich für die Arbeitsleistung im Raumelement  $dv = df ds$  während der Zeit  $dt$  der Betrag

$$\frac{\epsilon}{4\pi c^2} \frac{d}{dt} (\mathfrak{E}_t)^2 dt dv.$$

Wenn diese Größe von der Zeit ab, zu der  $\mathfrak{E} = 0$  war, bis zu derjenigen, wo es den Wert  $\mathfrak{E}$  erreicht, integriert wird, so ist unter Berücksichtigung der Tatsache, daß das unelektrische Feld keine Energie besitzt, die elektrische Energie der Raumeinheit  $\frac{\epsilon}{8\pi c^2} \mathfrak{E}^2$ .

Es ist daher die elektrische Energie eines beliebigen Raumes

$$\mathbf{U} = \int \frac{\epsilon}{8\pi c^2} \mathfrak{E}^2 dv \dots \dots \dots (5)$$

Analog ergibt sich die magnetische Energie eines Raumes zu

$$\mathbf{T} = \int \frac{\mu}{8\pi} \mathfrak{H}^2 dv \dots \dots \dots (6)$$

Die Summe beider nennt man die elektromagnetische Energie des Raumes; sie hat den Betrag

$$\mathbf{W} = \int \frac{1}{8\pi} \left( \frac{\epsilon}{c^2} \mathfrak{E}^2 + \mu \mathfrak{H}^2 \right) dv.$$

Erfahrungsgemäß wird die elektromagnetische Energie eines leeren Raumes durch denselben Ausdruck dargestellt, wenn man  $\varepsilon = 1$  und  $\mu = 1$  setzt.

**§ 7. Grundgesetze der Elektrodynamik.** Mit Hilfe der Größen  $\mathcal{E}$ ,  $\mathcal{D}$ ,  $i$ ,  $\mathcal{H}$  und  $\mathcal{B}$  lassen sich alle elektrischen Vorgänge beschreiben. Sie zerfallen aber nach dem Maße, in dem die genannten Größen miteinander in Beziehung treten, in verschiedene Gruppen. Es gibt elektrische Vorgänge, in denen nur  $\mathcal{E}$  und  $\mathcal{D}$  eine Rolle spielen, magnetische, in denen nur  $\mathcal{H}$  und  $\mathcal{B}$  vorkommen, dagegen auch solche, in denen sämtliche Größen und ihre räumlichen und zeitlichen Änderungen berücksichtigt werden müssen.

Die Gesetze, aus denen man theoretisch den Verlauf der elektrischen und magnetischen Erscheinungen ableitet, beruhen auf gewissen Grundannahmen. Die ältere Theorie ging aus von dem Coulombschen Gesetz für die ruhenden Vorgänge, dem Biot-Savartschen Gesetz für die Wirkungen zwischen Strömen und Magneten und verschieden gefaßten Induktionsgesetzen für die Wirkungen zwischen elektrischen Strömen. Auch diese Gesetze sind nicht unmittelbar gefunden worden, da es weder punktförmige Pole noch für sich bestehende Stromelemente gibt, sondern sie sind Endglieder einer mehr oder weniger langen Reihe von Schlüssen.

Um für die Zwecke dieses Buches die elektromagnetischen Vorgänge einheitlich abzuleiten, bedienen wir uns der Maxwellschen Theorie. Diese spricht die Grundgesetze in einer Fassung aus, in der sie sich auf bestimmte gedachte Versuche beziehen, ohne damit zu sagen, daß sie gerade durch diese Versuche gefunden worden seien.

In der Maxwellschen Theorie spielen eine große Rolle die Beträge der mechanischen Arbeit, welche geleistet wird, wenn sich eine bestimmte Menge Elektrizität oder Magnetismus in einem elektrischen oder magnetischen Felde über einen zum Ausgangspunkt zurückkehrenden Weg bewegt.

Eine Analogie bietet die Arbeit, welche zu leisten ist, wenn eine schwere Masse gegen die Kräfte der Schwere auf geschlossenen Wegen befördert wird. Beispiele bieten das Pendel, sowohl das gewöhnliche, bei dem Hin- und Rückweg zusammenfallen, als auch das konische, bei dem das Pendelgewicht eine Fläche umkreist; ferner ein Schwungrad, dessen Teile sämtlich in geschlossenen Bahnen kreisen. Die Erfahrung lehrt, daß, wenn bei solchen Bewegungen die Schwere irgendwo auf dem Wege Arbeit leistet, diese Arbeit in einem anderen Teil der Bewegung wiedergewonnen wird, so daß die Schwere im ganzen keine Arbeit leistet. Die auf dem geschlossenen Wege bei Bewegung der Masse von den Kräften der Schwere geleistete Arbeit ist also Null.

Ähnlich, wie Arbeit geleistet wird, wenn sich eine schwere Masse im Felde der Schwerkraft abwärts bewegt, ist auch die Bewegung einer Menge Elektrizität in einem elektrischen Felde mit der Leistung einer Arbeit verbunden. Aus den elektromagnetischen Erscheinungen ist zu schließen, daß die Gesamtarbeit bei Bewegungen über geschlossene Wege im elektrischen oder magnetischen Felde nicht wie bei der Schwere stets Null ist.

Man kann alle Vorgänge in Körpern, welche ruhen oder sich im Vergleich zur Geschwindigkeit des Lichtes und der Elektrizität wenigstens langsam bewegen, aus zwei Gesetzen ableiten, welche in die Form der sogenannten

Maxwellschen Feldgleichungen gebracht worden sind. Sie betreffen das Wechselverhältnis der elektrischen und magnetischen Kräfte im Felde.

Entsprechend ihrer allgemeinen Geltung sind die Feldgleichungen etwas abstrakt, und sie lassen sich daher leichter in mathematischen Zeichen als in Sätzen aussprechen. Wir werden die mathematische Formulierung vorausgehen lassen. Dafür eignet sich besonders die Darstellung durch Vektoren. Der folgende Abschnitt wird sich daher mit den Vektoren und ihren wichtigsten Funktionen näher beschäftigen.

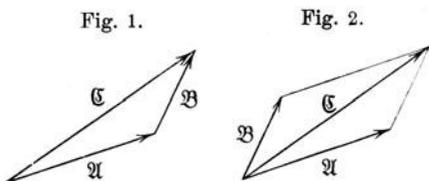
Zweiter Abschnitt.

Vektorenrechnung.

**§ 8. Addition und Subtraktion von Vektoren.** Diese, wie überhaupt das Rechnen mit Vektoren, geschehen nach bestimmten, für alle Vektoren gültigen Regeln, welche hier und da von denen für Skalare abzuweichen scheinen, im Grunde jedoch auch die Rechnungsweisen der Skalare enthalten<sup>3)</sup>.

Wegen der Allgemeingültigkeit der Regeln können wir die für die einzelnen Operationen am besten aus Beispielen erläutern.

Wohin gelangt man, wenn man, von einem Anfangspunkt ausgehend, zuerst eine Strecke  $\mathfrak{A}$  in der dieser zugeschriebenen Richtung (Fig. 1) zurücklegt und darauf eine Strecke  $\mathfrak{B}$  in der damit bezeichneten Richtung?



Es ist ohne weiteres ersichtlich, daß man zu dem durch den vierten Eckpunkt des aus  $\mathfrak{A}$  und  $\mathfrak{B}$  konstruierten Parallelogramms gelangt. Eben dahin würde man unmittelbar auf dem mit  $\mathfrak{C}$  nach Richtung und Länge bezeichneten Wege gelangen. Man schreibt daher

$$\mathfrak{C} = \mathfrak{A} + \mathfrak{B} \dots \dots \dots (7)$$

Man erhält die Summe zweier Vektoren, indem man sie nach Größe und Richtung aneinandersetzt.

Aus der Fig. 2 ist ersichtlich, daß auch

$$\mathfrak{C} = \mathfrak{B} + \mathfrak{A} \dots \dots \dots (7a)$$

Leitet man hieraus nach den Regeln der Algebra ab  $\mathfrak{B} = \mathfrak{C} - \mathfrak{A}$  und interpretiert diesen Satz geometrisch, so lautet er:

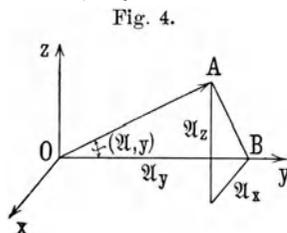
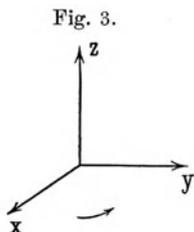
Man erhält die Differenz zweier Vektoren, indem man vom Endpunkt des Minuendus aus den Subtrahendus in entgegengesetzter Richtung ansetzt.

Aus der Form  $\mathfrak{A} + \mathfrak{B} - \mathfrak{C} = 0$  folgt der Satz:

Vektoren, deren Summe Null ist, bilden eine geschlossene Figur.

Die Sätze können ohne weiteres auf Summen oder Differenzen von mehr als zwei Vektoren erweitert werden.

Zur rechnerischen Auswertung solcher Vektorengleichungen muß man in der Regel auf Koordinatensysteme zurückgreifen. Wählen wir ein gewöhnliches rechtwinkliges, so soll es stets ein sogenanntes Rechtssystem sein. Wenn man die  $x$ -Achse (Fig. 3) auf dem kürzesten Wege in die Lage der  $y$ -Achse überführt und dabei das ganze System in der Richtung der  $z$ -Achse vorwärts bewegt, so führt man dieselben Bewegungen wie beim Eindrehen



eines rechtsgängigen Korkziehers aus. Eine andere Merkregel ist, daß  $x, y, z$  zueinander liegen wie die nach drei annähernd aufeinander senkrechten Richtungen ausgespreizten drei ersten Finger der rechten Hand. Legt man durch den Anfangspunkt des Vektors  $\mathfrak{A}$  ein derartiges Koordinatensystem, so habe der Endpunkt von  $\mathfrak{A}$  die Koordinaten  $\mathfrak{A}_x, \mathfrak{A}_y, \mathfrak{A}_z$  (vgl. Fig. 4), der von  $\mathfrak{B}$  die Koordinaten  $\mathfrak{B}_x, \mathfrak{B}_y, \mathfrak{B}_z$ . Es ist bekannt, daß der Endpunkt von  $\mathfrak{C}$  folgende Koordinaten hat:

$$\mathfrak{C}_x = \mathfrak{A}_x + \mathfrak{B}_x, \quad \mathfrak{C}_y = \mathfrak{A}_y + \mathfrak{B}_y, \quad \mathfrak{C}_z = \mathfrak{A}_z + \mathfrak{B}_z \dots \dots (8)$$

Die Vektorgleichung  $\mathfrak{C} = \mathfrak{A} + \mathfrak{B}$  umfaßt diese drei Gleichungen, welche sich ersichtlich als spezielle Fälle der Vektorgleichung für die Komponenten nach jeder der drei Achsen darstellen. Da die Koordinatenachsen an sich beliebig gelegt sind, folgt für die Komponenten nach einer beliebigen Richtung  $s$ :

$$\mathfrak{C}_s = \mathfrak{A}_s + \mathfrak{B}_s \dots \dots \dots (8a)$$

Aus Fig. 4 ergeben sich folgende Beziehungen zwischen dem Vektor und seinen Komponenten. Der Betrag des Vektors oder die Strecke  $\overline{OA}$  ist

$$|\mathfrak{A}| = \sqrt{\mathfrak{A}_x^2 + \mathfrak{A}_y^2 + \mathfrak{A}_z^2} \dots \dots \dots (9)$$

Der Winkel zwischen der Richtung des Vektors und der  $y$ -Achse ist  $\angle AOB$ , sein Kosinus ergibt sich, da das Dreieck  $ABO$  bei  $B$  einen rechten Winkel hat, zu  $\overline{OB} : \overline{OA}$ , oder  $\cos(\mathfrak{A}, y) = \mathfrak{A}_y / |\mathfrak{A}|$ ; daher ist auch

$$\cos(\mathfrak{A}, x) = \mathfrak{A}_x / |\mathfrak{A}| \quad \text{und} \quad \cos(\mathfrak{A}, z) = \mathfrak{A}_z / |\mathfrak{A}| \dots \dots (9a)$$

Eine Summe aus  $n$  gleichen Vektoren ergibt einen Vektor derselben Richtung von  $n$ facher Länge. Vektoren, die sich nur durch einen skalaren Faktor unterscheiden, haben also gleiche Richtung.

**§ 9. Produkte von Vektoren.** Aus Beispielen, wie sie sogleich angeführt werden sollen, ergibt sich, daß ein Produkt zweier Vektoren zu einem Skalar oder zu einem neuen Vektor führen kann. Man hat daher auch für die Rechnung zweierlei Produkte von Vektoren zu unterscheiden.

a) Das skalare oder innere Produkt von Vektoren. Auf einen schweren Körper wirke eine Kraft  $\mathfrak{F}$  von der in Fig. 5 angegebenen Größe

und Richtung. Der Körper bewege sich auf einer Gleitschiene um eine Strecke, die nach Größe und Richtung durch den Vektor  $d\mathfrak{s}$  bezeichnet werde. Es wird gefragt, welche Arbeit dabei von  $\mathfrak{F}$  geleistet wird.

Um diese Frage zunächst außerhalb der Vektorenrechnung zu beantworten, sei daran erinnert, daß die geleistete Arbeit  $A$  gleich ist dem Produkte aus dem Wege und der in dessen Richtung fallenden Komponente der Kraft, oder daß  $A = |\mathfrak{F}| |d\mathfrak{s}| \cos(\mathfrak{F}, d\mathfrak{s})$ , wenn mit  $(\mathfrak{F}, d\mathfrak{s})$  der Winkel zwischen  $\mathfrak{F}$  und  $d\mathfrak{s}$  bezeichnet wird. Eine Arbeit ist eine skalare Größe.

Wenn man daher bei zwei Vektoren  $\mathfrak{A}$  und  $\mathfrak{B}$  das Produkt aus ihren Beträgen und dem Kosinus des eingeschlossenen Winkels bildet,

so entsteht ein Skalar, welches das skalare oder innere Produkt genannt wird und symbolisch durch  $\mathfrak{A}\mathfrak{B}$  bezeichnet wird:

$$\mathfrak{A}\mathfrak{B} = |\mathfrak{A}| |\mathfrak{B}| \cos(\mathfrak{A}, \mathfrak{B}) \dots \dots \dots (10)$$

Wenn es erforderlich, ein skalares Produkt von anderen oder von einem Vektor zu trennen, so setzt man es in runde Klammern. Nach der Definition ist  $(\mathfrak{A}\mathfrak{B})(\mathfrak{C}\mathfrak{D})$  durchaus verschieden von  $(\mathfrak{A}\mathfrak{C})(\mathfrak{B}\mathfrak{D})$ .

Um das skalare Produkt durch die rechtwinkligen Komponenten von  $\mathfrak{A}$  und  $\mathfrak{B}$  auszudrücken, sei daran erinnert, daß in dem ebenen Dreieck aus drei Vektoren  $\mathfrak{A}$ ,  $\mathfrak{B}$  und  $\mathfrak{C}$  die Gleichung gilt

$$2 |\mathfrak{A}| |\mathfrak{B}| \cos(\mathfrak{A}, \mathfrak{B}) = |\mathfrak{A}|^2 + |\mathfrak{B}|^2 - |\mathfrak{C}|^2.$$

Nun ist

$$|\mathfrak{A}|^2 = \mathfrak{A}_x^2 + \mathfrak{A}_y^2 + \mathfrak{A}_z^2, \quad \mathfrak{B}^2 = \mathfrak{B}_x^2 + \mathfrak{B}_y^2 + \mathfrak{B}_z^2,$$

ferner

$$\mathfrak{C}^2 = (\mathfrak{A}_x - \mathfrak{B}_x)^2 + (\mathfrak{A}_y - \mathfrak{B}_y)^2 + (\mathfrak{A}_z - \mathfrak{B}_z)^2.$$

Daher ergibt sich

$$\mathfrak{A}\mathfrak{B} = \mathfrak{A}_x\mathfrak{B}_x + \mathfrak{A}_y\mathfrak{B}_y + \mathfrak{A}_z\mathfrak{B}_z \dots \dots \dots (11)$$

Aus der Herleitung folgt weiter, daß

$$\mathfrak{A}\mathfrak{B} = \mathfrak{B}\mathfrak{A} \dots \dots \dots (12)$$

Da ferner

$$\mathfrak{A}(\mathfrak{B} + \mathfrak{D}) = \mathfrak{A}_x(\mathfrak{B}_x + \mathfrak{D}_x) + \mathfrak{A}_y(\mathfrak{B}_y + \mathfrak{D}_y) + \mathfrak{A}_z(\mathfrak{B}_z + \mathfrak{D}_z)$$

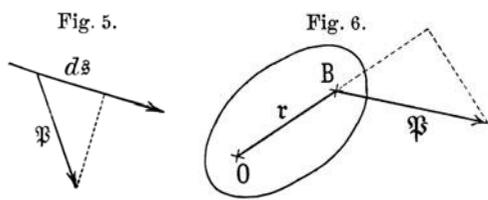
ist, so folgt:

$$\mathfrak{A}(\mathfrak{B} + \mathfrak{D}) = \mathfrak{A}\mathfrak{B} + \mathfrak{A}\mathfrak{D} \dots \dots \dots (13)$$

b) Das vektorielle oder äußere Produkt von Vektoren (Vektorprodukt). Wenn ein Körper (Fig. 6) um einen Punkt  $O$  drehbar ist, und an einem von  $O$  aus nach Richtung und Größe durch  $r$  bestimmten Punkte  $B$  eine Kraft  $\mathfrak{F}$  angreift, so kommt eine Drehung zustande um eine Achse, welche auf der Ebene von  $r$  und  $\mathfrak{F}$  senkrecht ist. Das entstehende Drehmoment wird außer durch seine Größe auch durch seine Beziehung zur Achse, also durch eine Richtung bezeichnet, und ist demnach ein Vektor  $\mathfrak{M}$ . Der Größe nach ist es

$$|\mathfrak{r}| |\mathfrak{F}| \sin(\mathfrak{r}, \mathfrak{F}).$$

Denn das Drehmoment hat den kleinsten Wert, wenn  $\mathfrak{F}$  in der Richtung von  $r$  liegt, den größten, wenn es auf  $r$  senkrecht steht.



Die Größe  $|\mathfrak{r}| |\mathfrak{P}| \sin(\mathfrak{r}, \mathfrak{P})$  ist der doppelte Flächeninhalt des von  $\mathfrak{r}$  und  $\mathfrak{P}$  gebildeten Dreiecks. Man wählt die Richtung von  $\mathfrak{M}$  in der Art senkrecht zur Ebene von  $\mathfrak{r}$  und  $\mathfrak{P}$ , daß man die Bewegung des rechtsgängigen Korkziehers nachahmt (Fig. 7), wenn man  $\mathfrak{r}$  auf dem kürzesten Wege in die Lage von  $\mathfrak{P}$  überführt und dabei das ganze System in der Richtung des  $\mathfrak{M}$  bewegt.

Man nennt den so definierten Vektor  $\mathfrak{M}$  das äußere oder Vektorprodukt der beiden Vektoren  $\mathfrak{r}$  und  $\mathfrak{P}$  und schreibt

$$\mathfrak{M} = [\mathfrak{r}, \mathfrak{P}] \dots \dots \dots (14)$$

Dabei ist also

$$|\mathfrak{M}| = |\mathfrak{r}| |\mathfrak{P}| \sin(\mathfrak{r}, \mathfrak{P}) \dots \dots \dots (15)$$

Ferner steht  $\mathfrak{M}$  auf der Ebene von  $\mathfrak{r}$  und  $\mathfrak{P}$  senkrecht, und die drei Vektoren  $\mathfrak{M}$ ,  $\mathfrak{r}$ ,  $\mathfrak{P}$  bilden in dieser Reihenfolge ein Rechtssystem.

Man sieht aus der Richtungsbestimmung von  $\mathfrak{M}$  nach Fig. 8 leicht, daß

$$[\mathfrak{P}, \mathfrak{r}] = -\mathfrak{M}.$$

Hierin unterscheidet sich das äußere Produkt vom inneren.

In bezug auf ein rechtwinkliges Koordinatensystem hat der Vektor  $\mathfrak{M}$  drei Komponenten, welche sich durch seine Projektionen auf die drei Achsen

Fig. 7.

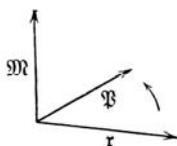


Fig. 8.

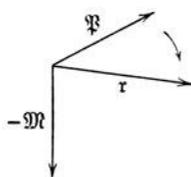
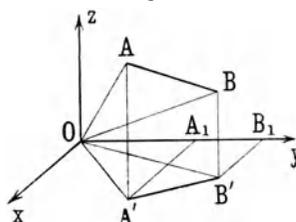


Fig. 9.



ergeben. Da  $\mathfrak{M}$  in die Richtung der  $z$ -Achse fällt, wenn  $\mathfrak{r}$  und  $\mathfrak{P}$  beide in der  $xy$ -Ebene liegen, so sieht man leicht, daß im allgemeinen Falle

$\mathfrak{M}_z$  gleich der Projektion des Dreiecks auf die  $xy$ -Ebene  
 $\mathfrak{M}_x$  " " " " " " " "  $yz$ -Ebene  
 $\mathfrak{M}_y$  " " " " " " " "  $zx$ -Ebene

ist.

Wir wollen für die allgemeine Formel das Vektorprodukt

$$\mathfrak{C} = [\mathfrak{A}, \mathfrak{B}]$$

betrachten. Es ist also (Fig. 9)

$$\mathfrak{C}_z = 2 OA'B'.$$

Nun ist

$$\begin{aligned} 2 OA'B' &= 2(OA'A_1 + A'A_1B_1B' - OB'B_1) \\ &= 2\left(\frac{OA_1 \cdot A'A_1}{2} + A_1B_1 \frac{A_1A' + B_1B'}{2} - \frac{OB_1 \cdot B'B_1}{2}\right). \end{aligned}$$

Daher

$$\begin{aligned} \mathfrak{C}_z &= \mathfrak{A}_y\mathfrak{A}_x + (\mathfrak{B}_y - \mathfrak{A}_y)(\mathfrak{A}_x + \mathfrak{B}_x) - \mathfrak{B}_y\mathfrak{B}_x \\ &= \mathfrak{A}_x\mathfrak{B}_y - \mathfrak{A}_y\mathfrak{B}_x. \end{aligned}$$

Die anderen Komponenten kann man wegen der Symmetrie der Koordinaten durch zyklische Vertauschung der Indizes ermitteln und findet

$$\left. \begin{aligned} \mathfrak{C}_x &= \mathfrak{A}_y \mathfrak{B}_z - \mathfrak{A}_z \mathfrak{B}_y \\ \mathfrak{C}_y &= \mathfrak{A}_z \mathfrak{B}_x - \mathfrak{A}_x \mathfrak{B}_z \\ \mathfrak{C}_z &= \mathfrak{A}_x \mathfrak{B}_y - \mathfrak{A}_y \mathfrak{B}_x \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (16)$$

**§ 10. Gemischte Produkte von Vektoren.** Aus den Definitionen der beiden Arten von Produkten ergibt sich die Gleichung

$$|\mathfrak{A}|^2 |\mathfrak{B}|^2 = (\mathfrak{A}\mathfrak{B})^2 + |[\mathfrak{A}, \mathfrak{B}]|^2 \dots \dots \dots (17)$$

die man zur Berechnung des Betrages des Vektorprodukts benutzen kann.

Von Produkten aus mehr als zwei Vektoren betrachten wir zuerst das skalare Produkt

$$\mathfrak{A} [\mathfrak{B}, \mathfrak{C}].$$

Der Vektor  $\mathfrak{F} = [\mathfrak{B}, \mathfrak{C}]$  ist dem Betrage nach gleich dem Parallelogramm, das mit den Seiten  $\mathfrak{B}$  und  $\mathfrak{C}$  gebildet werden kann; der Richtung nach steht er auf der Ebene dieses Parallelogramms senkrecht. Das skalare Produkt aus  $\mathfrak{A}$  und  $\mathfrak{F}$  ist also gleich dem Produkt aus dem Inhalt des Parallelogramms und der dazu senkrechten Komponente von  $\mathfrak{A}$ , also gleich dem Rauminhalt des aus den drei Vektoren  $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}$  ableitbaren Parallelepipeds. Daraus folgt aber, daß

$$\mathfrak{A} [\mathfrak{B}, \mathfrak{C}] = \mathfrak{B} [\mathfrak{C}, \mathfrak{A}] = \mathfrak{C} [\mathfrak{A}, \mathfrak{B}] \dots \dots \dots (18)$$

ist, weil alle drei Ausdrücke denselben Rauminhalt bedeuten, nur daß man von verschiedenen Grundflächen ausgegangen ist. Es ist wesentlich, daß die zyklische Folge der Vektoren beachtet wird. Es folgt noch, daß

$$\mathfrak{A} [\mathfrak{A}, \mathfrak{B}] = \mathfrak{B} [\mathfrak{A}, \mathfrak{A}] = 0 \dots \dots \dots (19)$$

Das Produkt  $[\mathfrak{A}, [\mathfrak{B}, \mathfrak{C}]]$ , also das äußere Produkt aus den Vektoren  $\mathfrak{A}$  und  $[\mathfrak{B}, \mathfrak{C}]$  ist ein Vektor. Durch Zurückgehen auf die Komponenten kann man leicht nachweisen, daß

$$[\mathfrak{A}, [\mathfrak{B}, \mathfrak{C}]] = \mathfrak{B} (\mathfrak{A}\mathfrak{C}) - \mathfrak{C} (\mathfrak{A}\mathfrak{B}) \dots \dots \dots (20)$$

Geometrisch stellt es einen auf  $\mathfrak{A}$  senkrechten, in die Ebene von  $\mathfrak{B}$  und  $\mathfrak{C}$  fallenden Vektor dar.

**§ 11. Geometrische Darstellung der Felder von Skalaren und Vektoren.**

Allgemein bekannt sind die meteorologischen Karten, in denen gewisse örtlich veränderliche Größen für einen bestimmten Zeitpunkt dargestellt sind. Man bezeichnet an jedem Orte den Wert der veränderlichen Größe und verbindet diejenigen Orte durch eine Linie, an welchen gleiche Werte herrschen. Da man an jedem Orte nur einen Wert auftragen kann, so eignet sich diese Art der Darstellung nur für skalare Größen. Es gibt auch Karten dieser Art, in denen Elemente von Vektoren eingetragen sind, z. B. solche gleicher magnetischer Deklination oder gleicher magnetischer Horizontalintensität; es sind aber Karten von Skalargrößen, da jedem Orte nur eine Bestimmung zugeordnet ist. Zu Karten dieser Art gehören auch die Höhenschichtenkarten.

In meteorologischen Karten, wie den täglichen Wetterkarten, finden sich aber auch die Ansätze einer Vektorendarstellung; es sind nämlich Pfeile ein-

gezeichnet, welche die Richtung und Stärke des an jedem Orte herrschenden Windes darstellen; nicht mehr in skalarer Form, denn es ist nicht jedes dieser Elemente gleichsam als Ordinate dem Orte zugeordnet, sondern nach der tatsächlichen Richtung eingezeichnet, und zwar mit einer Darstellungsweise, welche durch verschiedene Befiederung die Stärke des Windes erkennen läßt.

Ähnlich ist die in der Vektoranalysis gebräuchliche Darstellung von Skalaren- und Vektorenfeldern. In einem skalaren Felde denkt man sich durch alle Punkte, in denen das Skalar denselben Wert hat, eine Fläche gelegt. Meist wählt man die Flächen auch so, daß von einer zur anderen derselbe Unterschied im Werte des Skalars besteht. Solche Flächen können einander nie schneiden, wenn das dargestellte Skalar eindeutig ist, sie umhüllen sich also wie die Schalen einer Zwiebel.

Vektoren stellt man durch Linien dar, deren Tangente an jeder Stelle die Richtung des Vektors angibt. Um auch seinen Betrag darzustellen, verwendet man statt der in der Meteorologie gebräuchlichen verschiedenen Befiederung das Mittel, an einer gegebenen Stelle um so mehr solche Vektorlinien für ein senkrecht zu den Linien liegendes Flächenstück von  $1 \text{ cm}^2$  zu zeichnen, je größer der Betrag ist. Man denkt sich jede Flächeneinheit in so viele gleiche Teile zerlegt, wie der Betrag des Vektors in dessen Einheiten ausmacht, und ordnet jedem solchen Flächenanteil eine Linie zu.

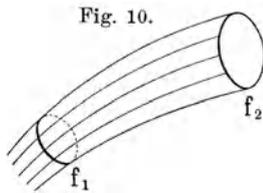
Solche Bilder von Vektoren sind unter dem Namen Kraftlinienbilder allgemeiner bekannt, indessen kann man sie auch von anderen Vektoren, als Kräften zeichnen, weshalb wir zweckmäßiger die zur Darstellung des Vektors  $\mathfrak{A}$  dienenden Linien als  $\mathfrak{A}$ -Linien bezeichnen.

Häufig gibt ein Vektor die Intensität und Richtung einer dauernd oder kurze Zeit durch eine Fläche tretenden Strömung an, oder kann doch so gedeutet werden. Hat man ein flaches Wassergefäß, in welchem an einer Stelle  $a$  Wasser zugeführt wird, während an einer anderen Stelle  $b$  ebensoviel abfließt (s. Fig. 11), so wird das Wasser nicht nur auf der unmittelbaren geraden Verbindungslinie von  $a$  nach  $b$  strömen, sondern auch noch in daneben liegenden krummlinigen Bahnen. Man erhält also ein Strömungsfeld. Wir

wollen uns in einem solchen ungefähr senkrecht zur Richtung der Strömung durch eine geschlossene Linie eine Fläche  $f_1$  gelegt (Fig. 10), und durch deren Randkurve die Linien gezogen denken, welche in jedem Punkt mit der Richtung der Strömung zusammenfallen. Legen wir an einer anderen Stelle wieder eine Fläche  $f_2$ , welche die Strömungslinien unter einem beliebigen Winkel schneidet, so entsteht innerhalb des Strömungsfeldes ein abgeschlossener Raum, den man eine

Röhre des dargestellten Vektors nennt. Er hat folgende wichtige Eigenschaft. Nehmen wir an, daß die Flüssigkeit nicht zusammendrückbar sei, so muß in jedem Augenblick ebensoviel aus dem Raume austreten, wie in ihn eintritt. Nun ist die röhrenförmige Seitenwand überall parallel der Richtung der Strömung, also tritt durch sie weder etwas ein, noch aus; daraus folgt, daß durch die Fläche  $f_1$  so viel eintritt, wie durch  $f_2$  austritt.

In einem Vektorfelde läßt man von jedem  $\text{cm}^2$  senkrecht zu dem Vektor  $\mathfrak{A}$  eine Schar von  $|\mathfrak{A}|$  Vektorlinien ausgehen. Nach dem Erläuterten ist die Zahl



der Vektorlinien, welche durch die beiden Endflächen der Röhre gehen, an jeder Stelle des Feldes dieselbe.

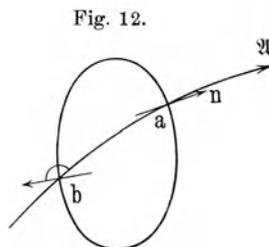
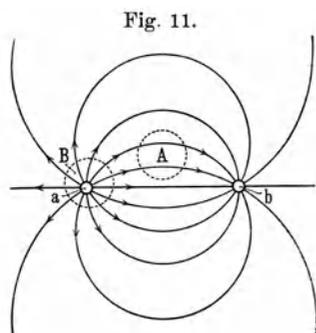
In einer Vektordarstellung erkennt man also die Richtung des Vektors aus der Tangente der Vektorlinie in einem gegebenen Punkte, seinen Betrag an der Zahl der Linien auf  $1 \text{ cm}^2$ .

Man kann daher statt des Betrages  $|\mathfrak{A}|$  eines Vektors  $\mathfrak{A}$  auch die Zahl der  $\mathfrak{A}$ -Linien angeben, die eine zu den  $\mathfrak{A}$ -Linien an der betrachteten Stelle senkrecht liegende Fläche von  $1 \text{ cm}^2$  Inhalt durchsetzen.

**§ 12. Das Oberflächenintegral eines Vektors.** Bei Betrachtung der Windlinien auf einer Wetterkarte findet man, daß die Winde von den Stellen des barometrischen Maximums abströmen und denen des Minimums zuströmen.

Ein Vektorfeld enthält daher im allgemeinen solche Stellen, von denen die Vektorlinien ausgehen, Quellen genannt, und andere Stellen, an denen sie wieder zusammenlaufen, Senken genannt.

Wir stellen uns die Aufgabe, ein Feld auf Quellen und Senken zu untersuchen und betrachten als Beispiel die in § 11 erwähnte Wasserströmung nach Fig. 11. Um sie zu untersuchen, denken wir uns eine Meßeinrichtung angewandt, bestehend aus einem oben und unten offenen zylindrischen Gefäß, in dessen Wand zahlreiche Turbinen angebracht sind, deren Umläufe gezählt



werden können, derart, daß die Drehungen durch ausfließendes Wasser positive Angaben der Zähler ergeben, während die Umläufe bei einfließendem Wasser negative Angaben machen. Es wird vorausgesetzt, daß die Durchlässe so zahlreich sind, daß das Einsetzen der Meßeinrichtung den Verlauf der Strömung nicht ändert. Setzt man dieses Gefäß etwa bei A in die Strömung ein, so werden die Turbinen auf der Seite a negativ zählen, die auf der Seite b dagegen positiv, und wenn man nach einer gewissen Zeit die Mengen Wasser, die ausgetreten sind, mit denjenigen vergleicht, welche eingetreten sind, so wird sich deren Gleichheit ergeben, da sich in dem Gefäß kein Wasser stauen kann. Bringt man dagegen das Meßgefäß nach B, so daß es a umgibt, so werden seine Zähler lauter positive Angaben machen, dagegen, wenn es b umgibt, lauter negative, und es wird sich daher ergeben, daß a eine Quelle, b eine Senke ist, während Räume wie der bei A quellenfrei genannt werden.

Wenden wir dies Beispiel auf ein allgemeines Vektorfeld an, so haben wir zunächst, da es in der Regel nicht wie dasjenige des Beispiels eben ist, sondern die Vektoren im Raume nach verschiedenen Richtungen gehen, eine

Meßvorrichtung zu wählen, welche allseitig geschlossen ist, also eine geschlossene Oberfläche, die einen bestimmten Raum vollständig umgibt. Alle Teile dieser Fläche werden von Vektorlinien durchsetzt, welche zum Teil austreten, zum Teil eintreten. Wenn an der Stelle eines bestimmten Oberflächenelements der Vektor den Wert  $\mathfrak{A}$  hat, so kommen nach § 11 auf  $1 \text{ cm}^2$  senkrecht zu seiner Richtung  $|\mathfrak{A}|$  Linien des Vektors. Bildet die nach außen gehende Normale eines Flächenelements  $d\mathfrak{f}$  mit der Richtung von  $\mathfrak{A}$  den Winkel  $(\mathfrak{A}, d\mathfrak{f})$ , so gehen durch das Flächenstück von innen nach außen hindurch

$$|\mathfrak{A}| |d\mathfrak{f}| \cos(\mathfrak{A}, d\mathfrak{f}) = \mathfrak{A} d\mathfrak{f}$$

Linien des Vektors  $\mathfrak{A}$ . Da, wo der Winkel  $(\mathfrak{A}, d\mathfrak{f})$  spitz ist, wie bei  $a$  in Fig. 12, ist dieser Betrag positiv, bei  $b$  dagegen, wo der Winkel stumpf ist, ist der Betrag negativ. Das richtige Vorzeichen ist aber in  $\mathfrak{A} d\mathfrak{f}$  schon enthalten. Bildet man die Summe für sämtliche  $d\mathfrak{f}$ , so erhält man das Integral

$$\int_{(f)} \mathfrak{A} d\mathfrak{f},$$

welches das Oberflächenintegral des Vektors  $\mathfrak{A}$  über die Oberfläche  $f$  genannt wird.

Nach der Herleitung ist ersichtlich, daß der von der Fläche umschlossene Raum eine Quelle enthält, wenn das Integral einen positiven Wert hat, eine Senke, wenn das Integral negativ ist, und daß der Raum quellenfrei ist, wenn das Integral Null ist.

Die Ausführung der Integration entspricht also der Summierung der Zählungen bei dem Meßinstrument für die Wasserströmungen. Wir kommen auf dieses Beispiel zurück, um darauf aufmerksam zu machen, daß es unter Umständen zu irrigen Folgerungen Anlaß geben kann, und ähnlich auch das Oberflächenintegral.

Wenn nämlich der umgrenzte Raum in dem einen oder dem anderen Falle eine Quelle und zugleich eine Senke enthält, die gleich stark sind, so wird das Meßinstrument sowohl wie das Flächenintegral den Raum im ganzen als quellenfrei bezeichnen, oder, wie man sagt, über die Quellen und Senken hinwegmessen. Es besteht also im allgemeinen die Notwendigkeit, das Oberflächenintegral für einen möglichst kleinen Raumteil zu bilden. Es ergibt alsdann, wieviel Vektorlinien im ganzen aus diesem Raumteil entspringen, wobei solche, die nur hindurchtreten, nicht mitgezählt werden. Um einen endlichen Raum abzusuchen, teilt man ihn in solche kleinen Raumteile. Diejenigen Linien, welche in einem Raumteile entspringen, laufen durch die benachbarten hindurch, werden also dort nicht mehr gezählt. Die Gesamtmenge der in dem Raume entspringenden Vektorlinien ist dann gleich der Summe der in den einzelnen Raumteilen entspringenden.

Die Zahl der in einem gegebenen Raumteil entspringenden Vektorlinien in einem Felde, das gleichmäßig mit Quellpunkten besetzt ist, welche Linien nach allen Richtungen aussenden, ist dem Inhalte des Raumteiles proportional.

**§ 13. Die Divergenz.** Man nennt die Zahl der aus der Raumeinheit an einer bestimmten Stelle des Vektorfeldes  $\mathfrak{A}$  entspringenden  $\mathfrak{A}$ -Linien die Divergenz von  $\mathfrak{A}$ , als Formelzeichen  $div \mathfrak{A}$ .  $div \mathfrak{A}$  ist also positiv, für die Stelle eines positiven Quellpunktes, z. B. eine positive Elektrizitätsmenge. Aus

dem Raum  $dv$  entspringen  $div \mathfrak{A} dv$  Linien des Vektors  $\mathfrak{A}$ , und man erhält die Gesamtzahl der  $\mathfrak{A}$ -Linien, welche aus der den Raum umschließenden Fläche nach außen treten, durch das Integral

$$\int_{(v)} div \mathfrak{A} dv,$$

dieses Integral erstreckt über alle Raumelemente.

Aus der gleichen Bedeutung der beiden Integrale, über die Oberfläche und über den Raum, ergibt sich der Satz

$$\int_{(v)} div \mathfrak{A} dv = \int_{(f)} \mathfrak{A} df \dots \dots \dots (21)$$

wenn  $f$  die Oberfläche des Raumes  $v$  ist. Er wird der Gaußsche Satz genannt.

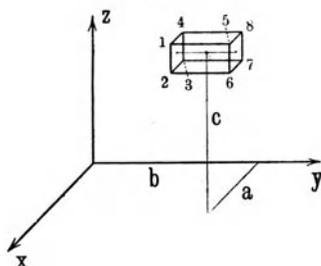
**§ 14. Darstellung von  $div \mathfrak{A}$  in verschiedenen Koordinatensystemen.**

Nach der Herleitung und der Bedeutung der Divergenz ist sie nur von dem Bau des Vektorfeldes abhängig, nicht aber von dem Koordinatensystem, welches man zu seiner rechnerischen Festlegung gebraucht.

Bezieht man aber das Vektorfeld auf ein bestimmtes Koordinatensystem, so kann man das Verhältnis der durch Summation über die Oberfläche des Raumelements sich ergebenden Zahl der entspringenden  $\mathfrak{A}$ -Linien zum Inhalt des Raumelements durch Differentialquotienten der Komponenten von  $\mathfrak{A}$  nach den Koordinaten darstellen und erhält so Formeln, welche die Berechnung von  $div \mathfrak{A}$  erleichtern.

Rechtwinkliges dreiachsiges Koordinatensystem. Wir wollen zunächst  $\mathfrak{A}$  auf ein rechtwinkliges dreiachsiges Koordinatensystem der  $x, y, z$  beziehen. Für eine beliebige, durch die Koordinaten  $a, b, c$  bestimmte Stelle des Raumes seien die drei Komponenten des Vektors  $\mathfrak{A}_x, \mathfrak{A}_y, \mathfrak{A}_z$ .

Fig. 13.



An der Stelle  $a, b, c$  (Fig. 13) sei ein kleines rechtwinkliges Parallelepiped von den Kanten  $dx, dy, dz$  parallel zu den Achsen aus dem Raume herausgeschnitten. Jede seiner sechs Flächen wird von  $\mathfrak{A}$ -Linien durchsetzt. Da  $\mathfrak{A}$  mit dem Orte veränderlich ist, so haben  $\mathfrak{A}_x, \mathfrak{A}_y, \mathfrak{A}_z$  auf den verschiedenen Flächen verschiedene Werte, welche durch Beisetzung der Koordinate wie folgt bezeichnet werden sollen: Der Wert beispielsweise von  $\mathfrak{A}_y$  ist auf der Fläche

$$1, 2, 3, 4 \dots (\mathfrak{A}_y)_y = b - 1/2 dy$$

$$5, 6, 7, 8 \dots (\mathfrak{A}_y)_y = b + 1/2 dy.$$

Die beiden anderen Koordinaten  $x$  und  $z$  haben für beide Flächen bezüglich dieselben Werte  $a$  und  $c$  und werden deshalb nicht besonders verzeichnet. Wir nehmen dabei den Wert der Komponenten auf der ganzen, beliebig kleinen Fläche gleich dem Werte in ihrem Mittelpunkt an. Es soll nun die Zahl der durch die Oberflächen des Raumelements austretenden  $\mathfrak{A}$ -Linien festgestellt werden. Die Zahl der auf jede Fläche entfallenden ergibt

sich aus der Größe dieser Fläche, multipliziert mit der zur Fläche senkrechten Komponente von  $\mathfrak{A}$ . Wenn man mit  $\mathfrak{A}_y$  die im Sinne der positiven  $y$ -Achse verlaufende Komponente bezeichnet, so ist die Komponente im entgegengesetzten Sinne als  $-\mathfrak{A}_y$  zu rechnen. Es treten demnach aus der Fläche

$$\begin{aligned} 5, 6, 7, 8 \dots dx dz \quad (\mathfrak{A}_y)_{y=b+\frac{1}{2}dy} \quad \mathfrak{A}\text{-Linien,} \\ 1, 2, 3, 4 \dots dx dz \quad (-\mathfrak{A}_y)_{y=b-\frac{1}{2}dy} \quad \mathfrak{A}\text{-Linien.} \end{aligned}$$

Soweit diese beiden Flächen in Betracht kommen, treten also aus dem Raumteil aus:

$$dx dz [(\mathfrak{A}_y)_{y=b+\frac{1}{2}dy} - (\mathfrak{A}_y)_{y=b-\frac{1}{2}dy}].$$

Nach einer bekannten Formel ist

$$\begin{aligned} (\mathfrak{A}_y)_{y=b+\frac{1}{2}dy} &= (\mathfrak{A}_y)_{y=b} + \frac{1}{2} dy \left( \frac{\partial \mathfrak{A}_y}{\partial y} \right)_{y=b} \\ &\quad + \frac{1}{1 \cdot 2} \left( \frac{dy}{2} \right)^2 \left( \frac{\partial^2 \mathfrak{A}_y}{\partial y^2} \right)_{y=b} + \dots \\ (\mathfrak{A}_y)_{y=b-\frac{1}{2}dy} &= (\mathfrak{A}_y)_{y=b} - \frac{1}{2} dy \left( \frac{\partial \mathfrak{A}_y}{\partial y} \right)_{y=b} \\ &\quad + \frac{1}{1 \cdot 2} \left( \frac{dy}{2} \right)^2 \left( \frac{\partial^2 \mathfrak{A}_y}{\partial y^2} \right)_{y=b} - \dots \end{aligned}$$

Daher

$$(\mathfrak{A}_y)_{y=b+\frac{1}{2}dy} - (\mathfrak{A}_y)_{y=b-\frac{1}{2}dy} = dy \left( \frac{\partial \mathfrak{A}_y}{\partial y} \right)_{y=b} + \dots$$

Wenn man  $dy$  genügend klein wählt, kann man den Wert der rechten Seite genügend genau durch den ersten Posten angeben; der nächste enthält schon  $(dy)^3$ . Die beiden betrachteten Flächen ergeben also als Zahl der austretenden  $\mathfrak{A}$ -Linien

$$\left( \frac{\partial \mathfrak{A}_y}{\partial y} \right)_{y=b} dx dy dz.$$

Gleiche Überlegungen kann man für je zwei andere Flächen anstellen und erhält so als Gesamtzahl der aus dem Raumteil austretenden  $\mathfrak{A}$ -Linien den Ausdruck

$$\left( \frac{\partial \mathfrak{A}_x}{\partial x} + \frac{\partial \mathfrak{A}_y}{\partial y} + \frac{\partial \mathfrak{A}_z}{\partial z} \right)_{\substack{x=a \\ y=b \\ z=c}} dx dy dz.$$

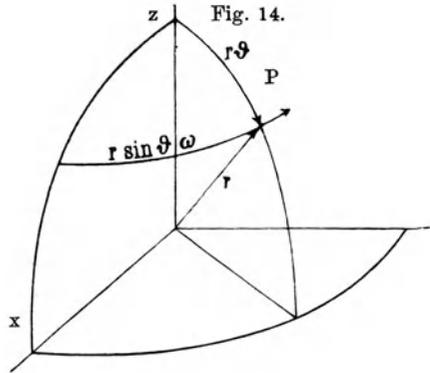
Der Inhalt des Raumteiles ist  $dx dy dz$ . Wenn man die Zahl der aus dem Raumteil austretenden  $\mathfrak{A}$ -Linien durch den Inhalt des Raumteiles dividiert, erhält man die Zahl der  $\mathfrak{A}$ -Linien, welche an der betrachteten Stelle aus der Einheit des Raumes entspringen, also  $div \mathfrak{A}$ .

In dem rechtwinkligen Koordinatensystem ist

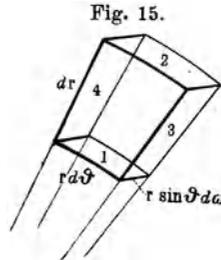
$$div \mathfrak{A} = \frac{\partial \mathfrak{A}_x}{\partial x} + \frac{\partial \mathfrak{A}_y}{\partial y} + \frac{\partial \mathfrak{A}_z}{\partial z} \dots \dots \dots (22)$$

Der Zusatz der Stelle  $abc$  ist nicht mehr erforderlich, da diese an sich beliebig gewählt werden kann.

Räumliche Polarkoordinaten. In diesen Koordinaten bestimmen wir die Lage eines Punktes durch folgende drei Stücke. Wir nehmen eine passende Richtung als Achse, die mit der  $z$ -Achse eines rechtwinkligen dreiachsigen Systems übereinstimme. Durch einen beliebigen Punkt dieser Achse legen wir eine dazu senkrechte Ebene und wählen in dieser eine Richtung, die etwa mit der  $x$ -Richtung übereinstimme. Wir legen ferner durch  $z$  und den zu bestimmenden Punkt eine Ebene, die mit der Ebene  $xz$  den Winkel  $\omega$  bildet, und ziehen vom Anfangspunkt einen Strahl  $r$  nach  $P$ , der mit  $z$  den Winkel  $\vartheta$  bildet. Diese drei Stücke bestimmen die Lage des Punktes vollständig. Um den Punkt ähnlich wie bei dem anderen System durch Strecken festzulegen, schlägt man in der Ebene  $Pz$  einen Kreis (Meridian) mit dem Radius  $r$ , in einer durch  $P$  gelegten, zu  $z$  senkrechten Ebene einen Kreis (Parallelkreis) mit dem Radius  $r \sin \vartheta$  und hat dann als Koordinaten die Strecken  $r$ ,  $r \vartheta$  und  $r \omega \sin \vartheta$ . Diese treffen im Punkt  $P$  rechtwinklig zusammen und bilden in dieser Reihenfolge ein Rechtssystem.



Ein Raumelement in diesen Koordinaten besteht (Fig. 15) aus einem rechtwinkligen Kästchen mit den Kanten  $dr$ ,  $r d\vartheta$  und  $r \sin \vartheta d\omega$ . Zur Bildung des Oberflächenintegrals über dieses Raumelement nehmen wir zuerst die Flächen  $r d\vartheta r \sin \vartheta d\omega$ . Die Komponente des Vektors  $\mathfrak{A}$  in der Richtung des  $r$  sei  $\mathfrak{A}_r$ ; auf der unteren Fläche 1 ist also die nach außen gehende Komponente  $-\mathfrak{A}_r$ , auf der oberen Fläche 2 ist sie  $(+\mathfrak{A}_r)_r = r + dr$ . Beide Flächenelemente liefern zusammen



$$(r^2 \sin \vartheta d \vartheta d \omega \mathfrak{A}_r)_{r+dr} - (r^2 \sin \vartheta d \vartheta d \omega \mathfrak{A}_r)_r.$$

Wir machen ähnliche Entwicklungen, wie im vorigen Beispiel, aber es ist zu beachten, daß nicht nur  $\mathfrak{A}_r$ , sondern auch das Flächenelement sich mit  $r$  ändert. Der Beitrag dieser beiden Elemente ist

$$\sin \vartheta d \vartheta d \omega \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \mathfrak{A}_r) dr = r^2 \sin \vartheta dr d \vartheta d \omega \left[ \frac{1}{r^2} \frac{\partial (r^2 \mathfrak{A}_r)}{\partial r} \right].$$

Die Komponente in der Richtung des wachsenden  $\vartheta$  heiße  $\mathfrak{A}_\vartheta$ ; auf der nach vorn gelegenen Fläche 3 geht sie mit der nach außen gehenden Normale, auf Fläche 4 dieser entgegengesetzt. Wir erhalten also die Beiträge

$$(r \sin \vartheta dr \mathfrak{A}_\vartheta)_{r+\vartheta} - (r \sin \vartheta dr \mathfrak{A}_\vartheta)_{r-\vartheta} \\ = \frac{\partial}{r \partial \vartheta} (r \sin \vartheta dr \mathfrak{A}_\vartheta) r d \vartheta = r^2 \sin \vartheta dr d \vartheta d \omega \left[ \frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial (\sin \vartheta \mathfrak{A}_\vartheta)}{\partial \vartheta} \right].$$

Endlich ergibt sich für die noch übrigen Flächen der Beitrag

$$(r dr d\vartheta \mathcal{A}_\omega)_{r \sin \vartheta} \omega + r \sin \vartheta d\omega - (r dr d\vartheta \mathcal{A}_\omega)_{r \sin \vartheta} \omega$$

$$= \frac{\partial}{r \sin \vartheta \partial \omega} (r dr d\vartheta \mathcal{A}_\omega) r \sin \vartheta d\omega = r^2 \sin \vartheta dr d\vartheta d\omega \left[ \frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial \mathcal{A}_\omega}{\partial \omega} \right],$$

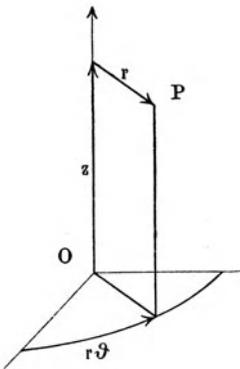
wenn  $\mathcal{A}_\omega$  die Komponente in der Richtung der wachsenden  $\omega$  bezeichnet.

Addiert man diese drei Posten und dividiert die Summe durch das Raumelement  $r^2 dr \sin \vartheta d\vartheta d\omega$ , so ergibt sich

$$\operatorname{div} \mathcal{A} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial (r^2 \mathcal{A}_r)}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial (\sin \vartheta \mathcal{A}_\vartheta)}{\partial \vartheta} + \frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial \mathcal{A}_\omega}{\partial \omega} \dots \quad (23)$$

Zylinderkoordinaten. In Zylinderkoordinaten wird ein Punkt  $P$  (Fig. 16.) bestimmt durch den Abstand  $r$  von der Achse  $z$ , durch die bis zum Fußpunkt des Lotes  $r$  gemessene Länge  $z$  von einem festen Punkt  $O$  der  $z$ -Achse und den Bogen  $r\vartheta$  in einer zur Achse senkrechten Ebene.  $z$ ,  $r$  und  $r\vartheta$  bilden ein Rechtssystem.

Fig. 16.



Das Raumelement ist rechtwinklig und hat die Kanten  $dz$ ,  $dr$  und  $r d\vartheta$  (Fig. 17). Zum Oberflächenintegral liefern die zu  $z$  senkrechten Flächenelemente den Beitrag

$$(r dr d\vartheta \mathcal{A}_z)_{z+dz} - (r dr d\vartheta \mathcal{A}_z)'_z$$

$$= \frac{\partial}{\partial z} (r dr d\vartheta \mathcal{A}_z) dz = r dr d\vartheta dz d\vartheta \left[ \frac{\partial \mathcal{A}_z}{\partial z} \right].$$

Die zu  $dr$  senkrechten Flächenelemente ergeben

$$(r dz d\vartheta \mathcal{A}_r)_{r+dr} - (r dz d\vartheta \mathcal{A}_r)_r$$

$$= \frac{\partial}{\partial r} (r dz d\vartheta \mathcal{A}_r) dr = r dr dz d\vartheta \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial (r \mathcal{A}_r)}{\partial r} \right].$$

Endlich liefern die Flächenelemente senkrecht zu  $r d\vartheta$

$$(dz' dr \mathcal{A}_\vartheta)_{r\vartheta+r d\vartheta} - (dz dr \mathcal{A}_\vartheta)_{r\vartheta}$$

$$= \frac{1}{r \partial \vartheta} (dz dr' \mathcal{A}_\vartheta) r d\vartheta = r dr dz d\vartheta \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial \mathcal{A}_\vartheta}{\partial \vartheta} \right].$$

Da  $r dr dz d\vartheta$  der Inhalt des Raumelementes ist, so folgt

$$\operatorname{div} \mathcal{A} = \frac{\partial \mathcal{A}_z}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial (r \mathcal{A}_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \mathcal{A}_\vartheta}{\partial \vartheta} \dots \dots \dots \quad (24)$$

**§ 15. Untersuchung eines Vektorfeldes.** In einem Raume sei festgestellt, daß die elektrische Feldstärke  $\mathcal{E}$  nach einem Zentralpunkt gerichtet ist und den Betrag  $\frac{a}{r^2}$  hat, wo  $r$  der Abstand des Aufpunktes von dem Zentralpunkt ist. Indessen sei im Innern einer Kugel vom Radius  $R$ , deren Mittelpunkt jener Zentralpunkt ist, überhaupt keine elektrische Feldstärke nachweisbar. An welchen Stellen dieses Feldes befinden sich freie Elektrizitätsmengen?

Von jeder Elektrizitätsmenge gehen Verschiebungslinien,  $\mathfrak{D}$ -Linien aus. Wir untersuchen, wieviel  $\mathfrak{D}$ -Linien an einem beliebigen Punkt entspringen, bilden also  $\text{div } \mathfrak{D}$ .

Außerhalb des Raumes der Kugel, wo die Feldstärke stetig ist, wenden wir eine passende Formel für  $\text{div } \mathfrak{D}$  an; hier zweckmäßig die für Kugelkoordinaten (23):

$$\text{div } \mathfrak{D} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial (r^2 \mathfrak{D}_r)}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial (\sin \vartheta \mathfrak{D}_\vartheta)}{c \partial \vartheta} + \frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial \mathfrak{D}_\omega}{\partial \omega}.$$

Im vorliegenden Falle ist außerhalb der Kugel, weil  $\mathfrak{E}$  und  $\mathfrak{D}$  in die Richtung von  $r$  fallen, nach Gl. (2)

$$\mathfrak{D}_r = \frac{\varepsilon}{4 \pi c^2} \frac{a}{r^2}, \quad \mathfrak{D}_\vartheta = 0, \quad \mathfrak{D}_\omega = 0,$$

also ist  $\text{div } \mathfrak{D} = 0$  außerhalb der Kugel. Dort befinden sich also nirgendwo freie Elektrizitätsmengen. Ebenso ist innerhalb der Kugel  $\text{div } \mathfrak{D} = 0$ , weil dort  $\mathfrak{D}$  überall Null ist. Die Mengen können also nur in der Grenzschicht sein. Da dort  $\mathfrak{D}$  unstetig ist, kann man die Formel nicht anwenden, sondern hat die Divergenz nach ihrer Definition zu berechnen.

Wir grenzen einen kleinen dosenförmigen Raum ab, der durch Mantelteile eines Kegels mit dem körperlichen Winkel  $d\alpha$  und von zwei Segmenten von konzentrischen Kugeln begrenzt ist, die der Kugeloberfläche mit dem Radius  $R$  sehr benachbart sind (Fig. 18). Der Inhalt dieses Raumes ist

$$dv = R^2 \cdot d\alpha \cdot dn,$$

wenn  $dn$  der Abstand der beiden Kugelflächen ist. Nur zu der außerhalb der Kugel liegenden Oberfläche dieses Raumes hat  $\mathfrak{D}$  eine von Null verschiedene Komponente, also ist

$$\text{div } \mathfrak{D} dv = \frac{\varepsilon}{4 \pi c^2} \frac{a}{R^2} R^2 d\alpha.$$

Die linke Seite dieser Gleichung stellt das Raumintegral für den abgegrenzten kleinen Raum dar, die rechte Seite das Integral über seine Oberfläche (Gl. 16).  $\text{div } \mathfrak{D} dv$  ist die in dem Raumelement befindliche Elektrizitätsmenge. Da sie in der Grenzschicht, also flächenmäßig verteilt ist, kann man die Flächendichte  $h$  einführen durch die Gleichung

$$\text{div } \mathfrak{D} dv = h \cdot R^2 d\alpha.$$

Dann ergibt sich

$$h = \frac{\varepsilon}{4 \pi c^2} \frac{a}{R^2}.$$

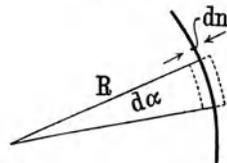
Auf der ganzen Kugel befindet sich die Menge

$$Q = 4 \pi R^2 h = \frac{\varepsilon a}{c^2}.$$

Das Feld außerhalb der Kugel ist also

$$\mathfrak{E} = \frac{c^2}{\varepsilon} \frac{Q}{r^2}.$$

Fig. 18.



Es ist so gestaltet, als wenn es von einer im Mittelpunkt der Kugel befindlichen Elektrizitätsmenge vom Gesamtbetrage der auf der Kugel verteilten herrührte.

**§ 16. Das Linienintegral eines Vektors.** Mit der Feststellung der Orte der Quellen und Senken ist die Beschreibung einer Strömung noch nicht abgeschlossen. Bei einer Wasserströmung z. B. beobachten wir an Stellen, die weder Quellen noch Senken sind, eigenartige Erscheinungen, die wir als Wirbel oder Strudel bezeichnen. Es sind kreisende Bewegungen um eine Achse. Die bei Herleitung der Divergenz besprochene Meßeinrichtung würde eine derartige Bewegung nicht anzeigen, da die Wirbelbewegung tangential erfolgt, also die Turbinen nicht in Drehung setzen würde. Wirbel und Strudel sind aber auf eine andere Weise von davon freien Stellen der Strömung zu unterscheiden. Im Bereich eines Wirbels wird ein im Wasser schwimmender Körper herumgetrieben, er legt also geschlossene Wege unter beständigem Kraftantrieb zurück. Der Wirbel kann daher mittels Antriebes auf einen in geschlossenen Bahnen sich bewegenden Körper Arbeit abgeben. Wenn man dagegen in einer wirbelfreien Strömung einen Körper auf einer geschlossenen Bahn herumführt, so wirkt zwar auf einem Teil der Bahn die Strömung im Sinne, auf dem anderen aber entgegengesetzt der Bewegung; die insgesamt geleistete Arbeit ist also eine Differenz, die in der Regel Null ist.

Im Felde der Schwere wird bei Bewegung von Körpern über geschlossene Bahnen, z. B. bei Drehung eines Schwungrades, keine Arbeit gegen die Schwere geleistet, man kann daher dies Feld wirbelfrei nennen.

Ein Magnetpol dagegen erfährt durch einen Strom, wenn er ihn umkreist, fortgesetzt Antriebe in demselben Sinne, hier besteht also ein Wirbel.

Zur Untersuchung eines Vektorfeldes auf das Vorhandensein von Wirbeln eignet sich die Feststellung der Arbeit, welche von dem Felde an einem geeigneten Objekt geleistet wird, wenn dies einen Umlauf auf einer geschlossenen

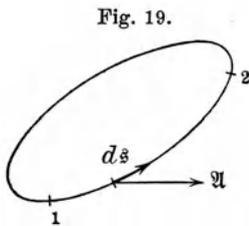


Fig. 19.

Bahn macht, also z. B. derjenigen Arbeit, die von einem elektrischen Felde an der Einheit der Elektrizitätsmenge geleistet wird. Im allgemeinen Falle sei die auf die Einheit des Agens der betreffenden Erscheinungsform wirksame Kraft durch den Vektor  $\mathfrak{A}$  bezeichnet, der an jeder Stelle des Feldes als nach Größe und Richtung bekannt vorausgesetzt wird.

Auch eine Wegstrecke ist ein Vektor, da sie an jeder Stelle sowohl nach Größe wie Richtung gegeben sein muß (Fig. 19). Die geleistete Arbeit ist gleich dem Produkt aus dem Wege in die längs der Richtung des Weges entfallende Kraftkomponente. In gewöhnlicher Schreibweise ist sie also

$$|\mathfrak{A}| |d s| \cos (\mathfrak{A}, d s)$$

oder in der Schreibweise der Vektorenrechnung  $\mathfrak{A} d s$ . Dieser Betrag ist ein Skalar; die Gesamtarbeit ist bei einer Bewegung von einem Ort 1 bis zu einem Ort 2, wo  $s$  die Werte  $s_1$  und  $s_2$  hat,

$$\int_{s=s_1}^{s=s_2} \mathfrak{A} d s.$$

Das Integral über einen geschlossenen Weg bezeichnet man durch

$$\oint \mathfrak{A} d\mathfrak{s}$$

und nennt es das Linienintegral des Vektors  $\mathfrak{A}$  über den geschlossenen Weg.

**§ 17. Die Rotation eines Vektors.** Bei der tatsächlichen Berechnung des Linienintegrals über den geschlossenen Weg liegen ähnliche Umstände vor, wie bei der Berechnung der aus einem geschlossenen Raum austretenden Vektorlinien. Ein Linienintegral, das zufällig zwei entgegengesetzt gleiche Wirbel umfaßt, würde keinen von ihnen erkennen lassen. Wie in § 12 und 13 ein Mittel angegeben wurde, die Anwesenheit oder Abwesenheit von Quellen und Senken in einem Vektorfelde durch einen für eine bestimmte Stelle zu bildenden Ausdruck  $div \mathfrak{A}$  zu untersuchen, so soll jetzt ermittelt werden, wie man durch eine geeignete Untersuchung der Vektorfunktion an einer bestimmten Stelle feststellen kann, ob dort ein Wirbel besteht oder nicht.

Durch die Linie des geschlossenen Weges sei eine beliebige Fläche  $f$  gelegt. Wir zerlegen sie auf willkürliche Weise in Teile (Fig. 20). Der Umfang jedes dieser Teile ist wieder eine geschlossene Linie. Bilden wir das Linienintegral des Vektors  $\mathfrak{A}$  mit einem bestimmten Umlaufsinn für zwei Flächenteile 1 und 2, so ist es bei leicht verständlichen Bezeichnungen:

für 1	$\mathfrak{A}_{(ab)} \overline{ab} + \mathfrak{A}_{(bc)} \overline{bc} + \mathfrak{A}_{(cd)} \overline{cd} + \mathfrak{A}_{(da)} \overline{da}$	
für 2	$\mathfrak{A}_{(dc)} \overline{dc} +$	$+ \mathfrak{A}_{(ce)} \overline{ce}$
		$+ \mathfrak{A}_{(ef)} \overline{ef}$
		$+ \mathfrak{A}_{(fd)} \overline{fd}$

Hierin ist also z. B.  $\mathfrak{A}_{ab}$  die Komponente von  $\mathfrak{A}$  in der Richtung des Stückes  $ab$  von  $a$  nach  $b$ , und  $\overline{ab}$  die Länge des Stückes  $ab$ . Da  $\mathfrak{A}_{(cd)} = -\mathfrak{A}_{(dc)}$ ,

Fig. 20.

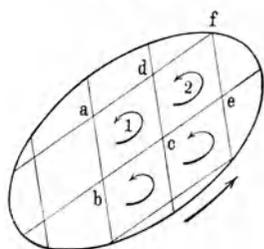
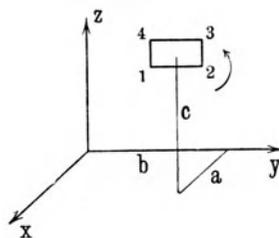


Fig. 21.



so fällt der Beitrag der den beiden Flächen gemeinschaftlichen Seite  $cd$  aus der Summe heraus, wenn man die Linienintegrale für 1 und für 2 addiert. Fügt man die Integrale über weitere Flächenteile hinzu, so fallen stets die Beiträge derjenigen Seiten der Teilflächen weg, welche zwei Teilflächen gemeinsam sind. Bildet man also die Summe der Linienintegrale um sämtliche Teilflächen, so ist diese gleich dem Linienintegrale über die umrandende geschlossene Linie.

Man kann also letzteres auch aus den Linienintegralen um Teilflächen durch Addition der Einzelbeträge zusammensetzen.

Es handelt sich nunmehr wieder um die Aufgabe, das Linienintegral um eine kleine Fläche zu berechnen.

Wir denken uns als solche im Felde eines Vektors  $\mathfrak{A}$  parallel der  $(yz)$  Ebene (Fig. 21) eine Fläche mit den Kanten  $dy$  und  $dz$  parallel den Achsen  $y$  und  $z$ . Ihr Mittelpunkt habe die Koordination  $a, b, c$ . Der positive Umlaufsinn ist der gezeichnete, weil er einem Drehen von  $y$  nach  $z$  und einem gleichzeitigen Vorseiben nach  $+$  entspricht. In Betracht kommen für das Linienintegral nur die Komponenten  $\mathfrak{A}_y$  und  $\mathfrak{A}_z$ , weil  $\mathfrak{A}_x$  auf der Fläche senkrecht steht. Die Komponenten haben an allen Stellen verschiedene Werte, indessen kann man, wenn  $dy$  und  $dz$  genügend klein sind, für die Komponenten diejenigen Werte einsetzen, welche sie in der Mitte der Seiten haben. Das Linienintegral wird dann

$$(\mathfrak{A}_y)_{y=b} dy + (\mathfrak{A}_z)_{y=b + 1/2 dy} dz + (-\mathfrak{A}_y)_{y=b} dy + (-\mathfrak{A}_z)_{y=b - 1/2 dy} dz$$

$\begin{matrix} z=c - 1/2 dz & z=c & z=c + 1/2 dz & z=c \end{matrix}$

Entwickelt man wieder, wie in § 14 und vereinigt, so ergibt sich

$$\left( \frac{\partial \mathfrak{A}_z}{\partial y} - \frac{\partial \mathfrak{A}_y}{\partial z} \right) dy dz.$$

Der Zusatz der Koordinaten  $abc$  ist nicht mehr erforderlich. Hierbei diene die  $x$ -Achse als Umlaufachse. Würde man den Wert der Linienintegrale berechnen bei einem Umlauf um ein der  $zx$ -Ebene paralleles Flächenstück  $dz dx$  oder um ein der  $xy$ -Ebene paralleles Flächenstück  $dx dy$ , so erhielte man für

$$y \text{ als Umlaufachse } \left( \frac{\partial \mathfrak{A}_x}{\partial z} - \frac{\partial \mathfrak{A}_z}{\partial x} \right) dz dx,$$

$$z \text{ als Umlaufachse } \left( \frac{\partial \mathfrak{A}_y}{\partial x} - \frac{\partial \mathfrak{A}_x}{\partial y} \right) dx dy.$$

Der Wert des Linienintegrals um eine kleine Fläche ist also, auch wenn man  $dx, dy, dz$  gleich lang wählt, von der Wahl der Umlaufachse abhängig, er ist also einer bestimmten Richtung zugeordnet.

Definiert man einen Vektor  $\mathfrak{R}$  durch seine Komponenten:

$$\left. \begin{aligned} \mathfrak{R}_x &= \frac{\partial \mathfrak{A}_z}{\partial y} - \frac{\partial \mathfrak{A}_y}{\partial z} \\ \mathfrak{R}_y &= \frac{\partial \mathfrak{A}_x}{\partial z} - \frac{\partial \mathfrak{A}_z}{\partial x} \\ \mathfrak{R}_z &= \frac{\partial \mathfrak{A}_y}{\partial x} - \frac{\partial \mathfrak{A}_x}{\partial y} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (25)$$

so nennt man  $\mathfrak{R}$  die Rotation von  $\mathfrak{A}$  und schreibt

$$\mathfrak{R} = \text{rot } \mathfrak{A}.$$

Nach englischem Gebrauch wird auch die Bezeichnung  $\mathfrak{R} = \text{curl } \mathfrak{A}$  gebraucht.

Nach der Herleitung ist die Rotation von  $\mathfrak{A}$  ein Vektor, dessen Komponente nach einer bestimmten Richtung den Betrag der Arbeit ergibt, die bei einem vollständigen Umlauf um eine Flächeneinheit senkrecht zu jener Richtung von den Kräften des Feldes geleistet wird. Der Vektor selbst gibt durch seine Richtung diejenige Achse an, bei welcher die Arbeit den größten Wert hat, und durch seinen Betrag den Betrag der Arbeit. Er ist demnach von dem gewählten Koordinatensystem unabhängig.

Bei der Beziehung der Größe  $\text{rot } \mathfrak{A}$  auf einen Umlauf um eine Achse ist es wichtig, die Komponenten auch für ein zylindrisches Koordinatensystem zu bestimmen.

Bei dem Flächenelement  $r \, d\vartheta \, dz$  in Fig. 22 ist  $r$  die Umlaufachse, die Umlaufrichtung ist die des Linienzuges 1234. Das Linienintegral ergibt

$$(\mathfrak{A}_\vartheta r \, d\vartheta)_z + (\mathfrak{A}_z \, dz)_\vartheta + a \, \vartheta - (\mathfrak{A}_\vartheta r \, d\vartheta)_{z+dz} - (\mathfrak{A}_z \, dz)_\vartheta.$$

Nach der Entwicklung und Reduktion ergibt sich

$$\text{rot}_r \mathfrak{A} \, r \, dr \, d\vartheta = \left( \frac{\partial \mathfrak{A}_z}{r \, \partial \vartheta} - \frac{\partial \mathfrak{A}_\vartheta}{\partial z} \right) r \, dr \, d\vartheta.$$

Bei dem Element  $dr \, dz$  ist  $r \, d\vartheta$  die Umlaufachse und der Umlauf geschieht in der Reihenfolge 1485. Daher ist das Linienintegral

$$(\mathfrak{A}_z \, dz)_r + (\mathfrak{A}_r \, dr)_{z+dz} - (\mathfrak{A}_z \, dz)_{r+dr} - (\mathfrak{A}_r \, dr)_z.$$

Also ist

$$\text{rot}_\vartheta \mathfrak{A} \, dr \, dz = \left( \frac{\partial \mathfrak{A}_r}{\partial z} - \frac{\partial \mathfrak{A}_z}{\partial r} \right) dr \, dz.$$

Bei dem Umlauf um das Flächenelement  $r \, d\vartheta \, dr$  ist die  $z$ -Achse die Umlaufachse, das Linienintegral wird in der Richtung 1562 gebildet und hat den Wert

$$(\mathfrak{A}_r \, dr)_\vartheta + (\mathfrak{A}_\vartheta r \, d\vartheta)_{r+dr} - (\mathfrak{A}_r \, dr)_{\vartheta+a\vartheta} - (\mathfrak{A}_\vartheta r \, d\vartheta)_r.$$

Daher ist

$$\text{rot}_z \mathfrak{A} \, r \, d\vartheta \, dr = \left( \frac{1}{r} \frac{\partial (r \mathfrak{A}_\vartheta)}{\partial r} - \frac{\partial \mathfrak{A}_r}{r \, \partial \vartheta} \right) r \, dr \, d\vartheta.$$

Bei der Reduktion auf die Flächeneinheit als Flächenelement ergibt sich

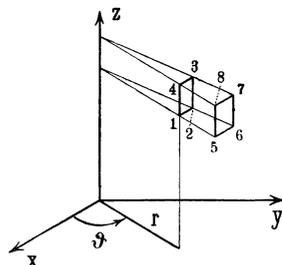
$$\left. \begin{aligned} \text{rot}_r \mathfrak{A} &= \frac{\partial \mathfrak{A}_z}{r \, \partial \vartheta} - \frac{\partial \mathfrak{A}_\vartheta}{\partial z} \\ \text{rot}_\vartheta \mathfrak{A} &= \frac{\partial \mathfrak{A}_r}{\partial z} - \frac{\partial \mathfrak{A}_z}{\partial r} \\ \text{rot}_z \mathfrak{A} &= \frac{1}{r} \frac{\partial (r \mathfrak{A}_\vartheta)}{\partial r} - \frac{\partial \mathfrak{A}_r}{r \, \partial \vartheta} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (26)$$

Für Polarkoordinaten ergeben sich die Gleichungen

$$\left. \begin{aligned} \text{rot}_r \mathfrak{A} &= \frac{1}{r \sin \vartheta} \left( \frac{\partial (\sin \vartheta \mathfrak{A}_\omega)}{\partial \vartheta} - \frac{\partial \mathfrak{A}_\vartheta}{\partial \omega} \right) \\ \text{rot}_\vartheta \mathfrak{A} &= \frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial \mathfrak{A}_r}{\partial \omega} - \frac{1}{r} \frac{\partial (r \mathfrak{A}_\omega)}{\partial r} \\ \text{rot}_\omega \mathfrak{A} &= \frac{1}{r} \frac{\partial (r \mathfrak{A}_\vartheta)}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial \mathfrak{A}_r}{\partial \vartheta} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (27)$$

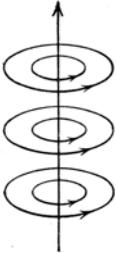
Beispiel. Angenommen, der Vektor  $\mathfrak{A}$  habe die Eigenschaft, daß  $\mathfrak{A}_r = 0$ ,  $\mathfrak{A}_z = 0$  seien, so daß an jeder Stelle nur eine Komponente in der Richtung der Tangente eines um die  $z$ -Achse gelegten Zylinders übrig bleibt, nämlich  $\mathfrak{A}_\vartheta$ .

Fig. 22.



Dessen Wert soll sich mit  $z$  nicht ändern, so daß also an jeder Stelle des Mantels dieses Zylinders derselbe Wert von  $\mathfrak{A}_\vartheta$  herrscht; wohl aber ändere sich  $\mathfrak{A}_\vartheta$  mit  $r$ , so daß der Betrag des Vektors in größerem Abstände von der Achse anders ist als in der Nähe der Achse (Fig. 23). Vektoren dieser Art bilden einen zylindrischen Wirbel um die  $z$ -Achse. Nach den Komponentengleichungen ist

Fig. 23.



$$\text{rot}_r \mathfrak{A} = 0, \text{rot}_\vartheta \mathfrak{A} = 0, \text{rot}_z \mathfrak{A} = \frac{1}{r} \frac{\partial (r \mathfrak{A}_\vartheta)}{\partial r}.$$

Die letzte Gleichung sagt dasselbe wie die Anschauung, daß nämlich in einem solchen Felde nur ein Wirbel um die  $z$ -Achse besteht.

Handelt es sich beispielsweise um eine Flüssigkeit, welche sich in allen Teilen mit gleichmäßiger Winkelgeschwindigkeit  $\omega$  um die  $z$ -Achse dreht, so kann für  $\mathfrak{A}_\vartheta$  die lineare Geschwindigkeit  $r \omega$  gesetzt werden. Dann ergibt sich

$$\text{rot}_z \mathfrak{A} = 2 \omega.$$

**§ 18. Der Satz von Stokes.** Bei der bisherigen Ableitung der Komponenten der Rotation hat sich ergeben, daß das Linienintegral von  $\mathfrak{A}$  um eine kleine Fläche gleich dem Produkt aus dem Inhalt der Fläche in die zur Fläche senkrechte Komponente des Vektors  $\text{rot } \mathfrak{A}$  ist. Dabei muß der Umlaufsinn mit der als positiv gerechneten Komponente ein Rechtssystem bilden. Ein Flächenelement ist ebenfalls gerichtet, also ein Vektor und kann dargestellt werden durch eine Gerade von der Richtung der Normalen des Flächenelements und einer Länge gleich dessen Flächeninhalt. Dieser Vektor heiße  $d\mathfrak{f}$ . Dann ist das skalare Produkt

$$\text{rot } \mathfrak{A} d\mathfrak{f} = |\text{rot } \mathfrak{A}| |d\mathfrak{f}| \cos(\mathfrak{A}, d\mathfrak{f}),$$

oder gleich dem Betrage des Linienintegrals um die Fläche  $d\mathfrak{f}$ . Da das Linienintegral um eine endliche Fläche gleich der Summe der Linienintegrale um ihre Teile ist, so wird es auch gleich  $\int_{(f)} \text{rot } \mathfrak{A} d\mathfrak{f}$ . Durch Gleichsetzung erhält man

$$\int_{\odot} \mathfrak{A} d\mathfrak{s} = \int_{(f)} \text{rot } \mathfrak{A} d\mathfrak{f} \dots \dots \dots (28)$$

Die beiden bisher abgeleiteten Sätze

$$\int_{(f)} \mathfrak{A} d\mathfrak{f} = \int_{(v)} \text{div } \mathfrak{A} dv \quad (21; \text{Gauß}),$$

$$\int_{\odot} \mathfrak{A} d\mathfrak{s} = \int_{(f)} \text{rot } \mathfrak{A} d\mathfrak{f} \quad (28; \text{Stokes})$$

stellen wichtige Integralumformungen dar, die in der Folge häufig gebraucht werden. Es ist festzuhalten, daß im Falle des Gaußschen Satzes  $f$  eine Fläche ist, die den Raum  $v$  völlig umschließt, während in dem Stokesschen Satze die Fläche  $f$  von der Linie  $s$  zusammenhängend berandet wird.

**§ 19. Der Gradient.** Man kann sich nach § 11 das Feld einer skalaren Größe  $U$  durch Flächen dargestellt denken, in denen die Größe konstante

Werte hat. Wenn man von einem Punkte einer solchen Fläche aus nach verschiedenen Richtungen um gleiche kleine Strecken voranschreitet, so wird der Wert des Skalars sich verschieden ändern; bei Richtungen, die in die Tangentialebene fallen, ändert sich der Wert gar nicht, bei solchen nach der einen Seite der Tangentialebene wird er größer, nach der entgegengesetzten Seite wird er kleiner.

Unter den Richtungen, in denen der Wert größer wird, gibt es eine bestimmte, in der er die größte Änderung erfährt. Wir bestimmen nun einen Vektor, den wir den Gradient des Skalars  $U$  nennen, als Formelzeichen

$$\text{grad } U,$$

durch folgende Stücke: Seine Richtung ist diejenige, in welcher die Änderung des Skalars auf die (kleine) Längeneinheit den größten Wert hat, sein Betrag ist der Betrag dieser Änderung auf die Längeneinheit.

Man kann diesen Vektor in beliebiger Weise in Komponenten zerlegen und daher auch aus solchen zusammensetzen. Man erhält daher beispielsweise für Cartesische Koordinaten den Wert des Gradienten, indem man der Reihe nach bildet

$$\text{grad}_x U = \frac{\partial U}{\partial x}, \text{grad}_y U = \frac{\partial U}{\partial y}, \text{grad}_z U = \frac{\partial U}{\partial z} \cdot \cdot \cdot \quad (29)$$

Denn es ist z. B.  $\frac{\partial U}{\partial x}$  der Betrag der Änderung von  $U$  auf die kleine Längeneinheit in der  $x$ -Richtung. Daher ist

$$\begin{aligned} \text{grad } |U| &= \sqrt{\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial z}\right)^2} \\ \cos(\text{grad } U, x) &= \frac{\frac{\partial U}{\partial x}}{\sqrt{\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial z}\right)^2}} \text{ usw.} \end{aligned}$$

In der erläuterten Weise spricht man von dem barometrischen Gradient einer Luftdruckverteilung, von dem Temperaturgradient in einem Zimmer.

Bei manchen Skalaren liegen die Stellen konstanter Werte auf Linien. So ist die Meereshöhe in einem geographischen Gebiet eine skalare Größe, die in allen Punkten der bekannten Schichtlinien denselben Wert hat. Will man die Änderung der Meereshöhe mit dem Orte feststellen, so kommen offenbar nur solche Richtungen in Betracht, die in der dargestellten Erdoberfläche liegen. Unter diesen ergeben die beiden, welche mit der Tangente der Schichtlinie zusammenfallen, für die Änderung auf die Längeneinheit den Wert Null, für alle Richtungen nach oben ergeben sich positive, für alle Richtungen nach unten negative Werte. Auch hier gibt es eine Richtung der größten Änderung, des Gradienten, und es ist anschaulich, daß sie in einer Erdkarte an jeder Stelle der Richtung des fließenden Wassers entgegenläuft.

**§ 20. Besondere Rechnungsregeln.** Mit Rücksicht auf den Gebrauch bei späteren Anwendungen seien einige Rechnungsregeln mit den Vektoroperationen nachgewiesen.

Was ergibt  $\text{rot}(\text{rot } \mathfrak{A})$ ?

Wenn dieser Ausdruck unter Benutzung Cartesischer Koordinaten in einen anderen Vektorausdruck umgeformt sein wird, so wird dieser unabhängig von dem als Hilfsmittel benutzten Koordinatensystem gelten.

Nach der Definition ist

$$\begin{aligned} \text{rot}_x(\text{rot } \mathfrak{A}) &= \frac{\partial}{\partial y}(\text{rot}_z \mathfrak{A}) - \frac{\partial}{\partial z}(\text{rot}_y \mathfrak{A}) \\ &= \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial \mathfrak{A}_y}{\partial x} - \frac{\partial \mathfrak{A}_x}{\partial y} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial \mathfrak{A}_x}{\partial z} - \frac{\partial \mathfrak{A}_z}{\partial x} \right). \end{aligned}$$

Nach Ausführung der Differentiationen und Hinzufügung von

$$+ \frac{\partial^2 \mathfrak{A}_x}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \mathfrak{A}_x}{\partial x^2}$$

erhält man

$$\text{rot}_x(\text{rot } \mathfrak{A}) = - \left( \frac{\partial^2 \mathfrak{A}_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \mathfrak{A}_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \mathfrak{A}_x}{\partial z^2} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial \mathfrak{A}_x}{\partial x} + \frac{\partial \mathfrak{A}_y}{\partial y} + \frac{\partial \mathfrak{A}_z}{\partial z} \right).$$

Man bezeichnet allgemein

$$\frac{\partial^2 \mathfrak{A}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \mathfrak{A}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \mathfrak{A}}{\partial z^2} = \Delta \mathfrak{A} \dots \dots \dots (30)$$

daher wird in Vektorsymbolen

$$\text{rot}_x(\text{rot } \mathfrak{A}) = -\Delta \mathfrak{A}_x + \frac{\partial}{\partial x} \text{div } \mathfrak{A}.$$

Was für die  $x$ -Komponente gilt, ist auch für jede andere gültig; man kann daher allgemein schreiben

$$\text{rot}(\text{rot } \mathfrak{A}) = -\Delta \mathfrak{A} + \text{grad } \text{div } \mathfrak{A} \dots \dots \dots (31)$$

Aus dieser Gleichung geht noch hervor, daß  $\Delta \mathfrak{A}$ , gesprochen Delta  $\mathfrak{A}$ , auch eine von dem Koordinatensystem unabhängige Vektorfunktion ist.

Zwei fernere wichtige Formeln beziehen sich auf die Berechnung von  $\text{div rot } \mathfrak{A}$  und  $\text{rot grad } U$ .

Führen wir die erste Berechnung in Cartesischen Koordinaten aus; es ergibt sich

$$\begin{aligned} \text{div rot } \mathfrak{A} &= \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial \mathfrak{A}_z}{\partial y} - \frac{\partial \mathfrak{A}_y}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial \mathfrak{A}_x}{\partial z} - \frac{\partial \mathfrak{A}_z}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial \mathfrak{A}_y}{\partial x} - \frac{\partial \mathfrak{A}_x}{\partial y} \right) \\ \text{div rot } \mathfrak{A} &= 0 \dots \dots \dots (32) \end{aligned}$$

Ist also ein Vektor  $\mathfrak{B}$  als Rotation eines anderen,  $\mathfrak{A}$ , bekannt, so folgt, daß das Feld des ersten Vektors  $\mathfrak{B}$  quellenfrei ist, da  $\text{div } \mathfrak{B} = 0$ .

Die zweite Vektorrechnung werde für zylindrische Koordinaten ausgeführt. Wenn man  $\text{grad } U = \mathfrak{A}$  setzt, so sind für den Vektor  $\mathfrak{A}$  die drei Komponenten zu bilden

$$\mathfrak{A}_r = \frac{\partial U}{\partial r}, \quad \mathfrak{A}_\vartheta = \frac{\partial U}{r \partial \vartheta}, \quad \mathfrak{A}_z = \frac{\partial U}{\partial z}.$$

Nun ist nach Gl. (21)

$$\begin{aligned} \operatorname{rot}_r \mathfrak{A} &= \frac{\partial}{r \partial \vartheta} \frac{\partial U}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial U}{r \partial \vartheta} = 0, \\ \operatorname{rot}_\vartheta \mathfrak{A} &= \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial U}{\partial r} - \frac{\partial}{\partial r} \frac{\partial U}{\partial z} = 0, \\ \operatorname{rot}_z \mathfrak{A} &= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial U}{r \partial \vartheta} \right) - \frac{\partial}{r \partial \vartheta} \left( \frac{\partial U}{\partial r} \right) = 0. \end{aligned}$$

Da aber drei rechtwinklige Komponenten von  $\operatorname{rot} \mathfrak{A}$  Null sind, so ist dies selbst Null, also ist

$$\operatorname{rot} \operatorname{grad} U = 0 \dots \dots \dots (33)$$

Läßt sich ein Vektor als Gradient darstellen, so ist sein Feld wirbelfrei. Dieser Satz gilt auch in der Umkehrung.

Wir berechnen ferner  $\operatorname{div} [\mathfrak{A}, \mathfrak{B}]$

$$\begin{aligned} &= \frac{\partial}{\partial x} (\mathfrak{A}_y \mathfrak{B}_z - \mathfrak{A}_z \mathfrak{B}_y) + \frac{\partial}{\partial y} (\mathfrak{A}_z \mathfrak{B}_x - \mathfrak{A}_x \mathfrak{B}_z) + \frac{\partial}{\partial z} (\mathfrak{A}_x \mathfrak{B}_y - \mathfrak{A}_y \mathfrak{B}_x) \\ &= - \left[ \mathfrak{A}_x \left( \frac{\partial \mathfrak{B}_z}{\partial y} - \frac{\partial \mathfrak{B}_y}{\partial z} \right) + \mathfrak{A}_y \left( \frac{\partial \mathfrak{B}_x}{\partial z} - \frac{\partial \mathfrak{B}_z}{\partial x} \right) + \mathfrak{A}_z \left( \frac{\partial \mathfrak{B}_y}{\partial x} - \frac{\partial \mathfrak{B}_x}{\partial y} \right) \right] \\ &+ \left[ \mathfrak{B}_x \left( \frac{\partial \mathfrak{A}_z}{\partial y} - \frac{\partial \mathfrak{A}_y}{\partial z} \right) + \mathfrak{B}_y \left( \frac{\partial \mathfrak{A}_x}{\partial z} - \frac{\partial \mathfrak{A}_z}{\partial x} \right) + \mathfrak{B}_z \left( \frac{\partial \mathfrak{A}_y}{\partial x} - \frac{\partial \mathfrak{A}_x}{\partial y} \right) \right]. \end{aligned}$$

In Vektorform heißt dies

$$\operatorname{div} [\mathfrak{A}, \mathfrak{B}] = \mathfrak{B} \operatorname{rot} \mathfrak{A} - \mathfrak{A} \operatorname{rot} \mathfrak{B} \dots \dots \dots (34)$$

Endlich ergibt sich für  $\operatorname{div} (U \operatorname{rot} \mathfrak{A})$ , wo  $U$  ein Skalar ist,

$$\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial x} (U \operatorname{rot}_x \mathfrak{A}) + \frac{\partial}{\partial y} (U \operatorname{rot}_y \mathfrak{A}) + \frac{\partial}{\partial z} (U \operatorname{rot}_z \mathfrak{A}) \\ &= \frac{\partial U}{\partial x} \operatorname{rot}_x \mathfrak{A} + \frac{\partial U}{\partial y} \operatorname{rot}_y \mathfrak{A} + \frac{\partial U}{\partial z} \operatorname{rot}_z \mathfrak{A} \\ &+ U \left( \frac{\partial}{\partial x} \operatorname{rot}_x \mathfrak{A} + \frac{\partial}{\partial y} \operatorname{rot}_y \mathfrak{A} + \frac{\partial}{\partial z} \operatorname{rot}_z \mathfrak{A} \right), \end{aligned}$$

also

$$\operatorname{div} (U \operatorname{rot} \mathfrak{A}) = \operatorname{grad} U \operatorname{rot} \mathfrak{A} \dots \dots \dots (35)$$

weil der zweite Posten den Faktor  $\operatorname{div} \operatorname{rot} \mathfrak{A}$  enthält, das nach Gl. (32) den Wert Null hat.

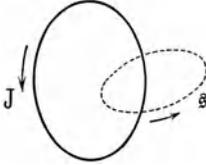
### Dritter Abschnitt.

## Die Maxwellschen Feldgleichungen für ruhende Körper.

**§ 21. Die erste Maxwellsche Feldgleichung.** Sie bezieht sich auf das magnetische Feld als eine Folge einer vorhandenen elektrischen Strömung. Gehen wir aus von dem einfachen Fall einer Strömung in einem zu einem Stromkreis geschlossenen linearen Leiter, so ist es bekannt, daß in der Nähe des stromführenden Leiters magnetische Kräfte bestehen. Über deren Richtung

gibt die Amperesche Handregel Auskunft. Richtet man die rechte Handfläche dem Draht zu, die Finger nach der Seite des positiven Stromes, so wird der Nordpol einer jenseits des Stromleiters befindlichen Magnetnadel in der Richtung des seitlich ausgestreckten Daumens abgestoßen. Dies gilt in allen Lagen, welche man um den Leiter herum einnehmen kann. Einfacher drückt diese Beziehungen der Satz aus: Die Richtung des positiven Stromes

Fig. 24.



und die Linien der von ihm erzeugten positiven magnetischen Feldstärke bilden ein Rechtssystem. Auf einem geschlossenen Wege § (Fig. 24), der den Leiter mit dem Strom  $J$  einmal umschlingt, hat also die magnetische Feldstärke stets eine Komponente derselben Richtung, in der die Stücke des Weges § durchlaufen werden. Im Gegensatz zu einer geschlossenen Bahn im Felde der Erdschwere ist in diesem Falle das

Linienintegral der magnetischen Feldstärke nicht Null, sondern die erste Maxwellsche Feldgleichung gibt für den Fall der Fig. 24 den Wert

$$\int_{\circ} \mathfrak{H} d\mathfrak{s} = 4\pi J.$$

Wenn dagegen der geschlossene Weg, über welchen man die Magnetnadel zu führen hätte, den Leiter nicht umschlingt, so sagt die Erfahrung, daß bei einem Umlauf in bestimmter Richtung die magnetische Feldstärke auf einem Teil des Weges eine Komponente in der Richtung des Umlaufs, auf einem anderen aber eine Komponente entgegengesetzt dieser Richtung hat. Dann liegen also ähnliche Verhältnisse vor, wie im Felde der Erdschwere. Die erste Maxwellsche Feldgleichung gilt für diesen Fall ebenfalls, in dem Sinne, daß  $J$  den von dem geschlossenen Wege umschlungenen Strom bedeuten soll. Im zweiten Falle ist dieser umschlungene Strom gleich Null, also auch das Linienintegral der magnetischen Feldstärke.

Der Satz, daß das Linienintegral der magnetischen Feldstärke für jeden geschlossenen Weg gleich dem  $4\pi$ fachen des von dem Wege umschlungenen Stromes sei, ist aus den Erfahrungen an linearen Leitern abgeleitet worden. Die Maxwellsche Elektrodynamik macht die Annahme, daß dieser Satz auch für Strömungen beliebiger Art gelte. Diese Annahme ist beim Ausbau der Theorie keineswegs als selbstverständlich betrachtet worden; sie hat sich aber für alle bekannten Fälle bestätigt.

Statt an lineare Leiter haben wir an körperliche Leiter, also an räumliche Verteilung des Stromes zu denken; im allgemeinsten Falle haben wir außer dem Leitungsstrom auch noch den gleichzeitigen Verschiebungsstrom zu berücksichtigen.

Um dem ersten Grundgesetz für den allgemeinen Fall eine Fassung zu geben, denken wir uns durch den Weg des Linienintegrals eine von dem Wege berandete Fläche gelegt, und in Elemente  $d\mathfrak{f}$  geteilt, die also sowohl nach ihrem Flächeninhalt, als auch nach der Richtung ihrer Normalen bekannt sind. Die Fläche wird entweder an allen oder doch an einigen Stellen vom Strome durchsetzt. Wir wollen die auf die (kleine) Flächeneinheit an der Stelle des Elements  $d\mathfrak{f}$  entfallende Stromstärke oder die Stromdichte des wahren Stromes (Leitungsstrom + Verschiebungsstrom) nach Größe und

Richtung mit  $c$  bezeichnen. Dann ist  $c d\mathfrak{f}$  der senkrecht durch das Flächenelement hindurchtretende Strom. Bildet man

$$\int_{(f)} c d\mathfrak{f}$$

für die ganze von der Randkurve umgrenzte Fläche, so erhält man den gesamten von der Randkurve umschlungenen Strom. Nunmehr heißt die erste Hauptgleichung

$$\oint_{\circ} \mathfrak{H} d\mathfrak{s} = 4\pi \int_{(f)} c d\mathfrak{f} \dots \dots \dots (36)$$

Sie kann mit Hilfe des Satzes von Stokes sogleich in einer anderen Form angegeben werden, nämlich

$$\int_{(f)} \text{rot } \mathfrak{H} d\mathfrak{f} = 4\pi \int_{(f)} c d\mathfrak{f}.$$

Da die Integration auf beiden Seiten über dieselbe Fläche  $f$  zu erstrecken ist, kann man dies schreiben:

$$\int_{(f)} (\text{rot } \mathfrak{H} - 4\pi c) d\mathfrak{f} = 0.$$

Soll dies Integral aber in jedem Falle Null sein, so muß

$$\text{rot } \mathfrak{H} = 4\pi c \dots \dots \dots (36 a)$$

sein. Die Komponenten von  $\text{rot } \mathfrak{H}$  bauen sich aus den ersten Ableitungen von  $\mathfrak{H}$  nach den Koordinatenrichtungen auf; ihre Existenz beruht demnach auf der Verschiedenheit der Werte der magnetischen Feldstärke an den verschiedenen Stellen des Feldes. Gleichung (36 a) stellt also die räumliche Verteilung der magnetischen Feldstärke in der Abhängigkeit von der Stromdichte dar. Sie betrifft daher dasselbe, was durch die Ampèresche Regel und das Biot-Savartsche Gesetz von einem linearen Stromkreis ausgesagt wird.

**§ 22. Die zweite Maxwellsche Feldgleichung.** Diese stellt das elektrische Feld und gegebenenfalls die elektrische Strömung als eine Folge bestimmter elektromotorischer Kräfte und magnetischer Änderungen dar. Wir gehen wieder von einem linearen Stromleiter aus. Damit ein Strom entstehe, müssen chemische oder thermoelektrische Stromquellen in ihm vorgesehen werden, oder magnetische Felder in seiner Nähe sich ändern. Wenn ein Strom fließt, so hat die elektrische Feldstärke an jeder Stelle des geschlossenen Leiters eine Komponente in der Richtung des Umlaufsinnes des positiven Stromes. Das Linienintegral der elektrischen Feldstärke ist also in diesem Falle von Null verschieden.

Wir denken uns einen bestimmten Stromfaden als Randlinie einer Fläche  $f$ , die wir in Elemente  $d\mathfrak{f}$  teilen. Wenn in der Nähe des Leiters magnetische Kräfte bestehen, etwa durch einen Dauermagnet, so wird an jeder Stelle der Fläche  $f$  eine bestimmte Induktion  $\mathfrak{B}$  erzeugt. Bildet die Normale von  $d\mathfrak{f}$  mit dem positiven Umlaufsinn der Randlinie ein Rechtssystem, so ist  $\int_{(f)} \mathfrak{B} d\mathfrak{f}$  die Gesamtzahl der Linien des Vektors, welche die Fläche durchsetzen und dadurch von dem Stromfaden umschlungen sind. Man nennt sie auch den magnetischen Fluß  $\Phi$  durch die Fläche  $f$ .

Wenn dieser sich ändert, so entsteht im Leiter eine elektrische Feldstärke und gegebenenfalls ein Strom. Man weiß, daß sein Umlaufsinn und die positive Richtung des magnetischen Feldes ein Linkssystem bilden, so daß, wenn der positive Fluß zunimmt, ein Strom negativen Umlaufsinn entsteht.

Enthält der Leiter chemische oder thermoelektrische Stromquellen, so soll angenommen werden, daß diese an einigen Stellen elektrische Feldstärken hervorbringen, die, auf die Längeneinheit an dieser Stelle bezogen, gleich  $\mathfrak{E}_e$  seien. Dann entfällt auf die Strecke  $d\mathfrak{s}$  der Betrag  $\mathfrak{E}_e d\mathfrak{s}$ . Infolge der beiden Wirkungen, der eingepprägten und der induzierten Kräfte, erhält das Linienintegral der elektrischen Feldstärke die Form

$$\int_{\bigcirc} \mathfrak{E} d\mathfrak{s} = \int_{\bigcirc} \mathfrak{E}_e d\mathfrak{s} - \int_{(r)} \frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial t} d\mathfrak{f} \dots \dots \dots (37)$$

Man erhält daraus nach Anwendung von Gl. (28) die Differentialform

$$\text{rot}(\mathfrak{E} - \mathfrak{E}_e) = - \frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial t} \dots \dots \dots (37 a)$$

Als zweite Maxwellsche Feldgleichung wird diese Gleichung in der Verallgemeinerung gebraucht, daß sie für die elektrischen Vorgänge in beliebigen Feldern, in denen magnetische Kräfte sich ändern, maßgebend ist.

**§ 23. Die Kontinuitätsgleichung für die Vektoren  $\mathfrak{c}$  und  $\mathfrak{B}$ .** Nach der Rechenregel  $\text{div rot } \mathfrak{A} = 0$  erhält man

$$\text{div rot } \mathfrak{S} = 4 \pi \text{div } \mathfrak{c} = 0, \text{div rot} (\mathfrak{E} - \mathfrak{E}_e) = - \text{div } \frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial t} = 0,$$

also  $\text{div } \mathfrak{c} = 0$  und  $\text{div } \mathfrak{B} = \text{const} (t)$ .

Nach § 13 bedeutet die Divergenz eines Vektors die Zahl von Linien dieses Vektors, welche aus der Raumeinheit entspringen. Da sich ergibt, daß

$$\text{div } \mathfrak{c} = 0 \dots \dots \dots (38)$$

so geht also aus den Feldgleichungen hervor, daß nirgendwo Linien des Vektors  $\mathfrak{c}$  entspringen oder endigen können. Dies heißt aber, daß durch die Oberfläche jedes Raumes im ganzen ebensoviel wahrer Strom austritt wie eintritt, daß es also nur geschlossene Ströme gibt.

Was den Vektor  $\mathfrak{B}$  betrifft, so sagen die Feldgleichungen nur aus, daß nirgendwo durch einen elektromagnetischen Vorgang freier Magnetismus entstehen oder verschwinden kann. Die Erfahrung geht in dieser Beziehung noch einen Schritt über die Feldgleichungen hinaus; es ist bisher noch nirgendwo freier Magnetismus beobachtet worden.

Es ist daher stets

$$\text{div } \mathfrak{B} = 0 \dots \dots \dots (39)$$

zu setzen

**§ 24. Einteilung der theoretischen Telegraphie.** Obwohl die elektromagnetischen Erscheinungen durch die Feldgleichungen einheitlich bestimmt sind, ist es in der Elektrodynamik üblich, das Gebiet in Teile zu zerlegen, die Gruppen von Erscheinungen mit gemeinsamen Eigenschaften umfassen. Diese Abteilungen ergeben sich aus den Feldgleichungen, wenn man über die Veränderlichkeit der Größen mit der Zeit einschränkende Annahmen macht.

Wir teilen die theoretische Telegraphie in derselben Weise ein und machen zunächst die Voraussetzung, daß die elektrische Feldstärke zeitlich unveränderlich sei und daß keine Strömung bestehe. Dann sind zeitliche Änderungen der magnetischen Feldstärke ebenfalls ausgeschlossen. Sehen wir von magnetischen Kräften im Felde überhaupt ab, so bleiben die Vorgänge in ruhenden elektrischen Feldern übrig, die zunächst besprochen werden sollen. Die Anwendungen betreffen hauptsächlich die Kapazität elektrischer Leitungen.

Im folgenden Teile nehmen wir Felder elektrischer Strömungen an, die sich mit der Zeit nicht ändern sollen; wir nennen solche Felder stationär. Mit stationären Strömen sind auch zeitlich unveränderliche magnetische Felder verbunden. Wir wenden die Ergebnisse dieses Teiles hauptsächlich auf die Induktivität von Leitungen und die Elektromagnete der Telegraphenapparate an.

Weiterhin besprechen wir die Vorgänge, die mit zeitlichen Änderungen der elektrischen und magnetischen Feldstärken verknüpft sind. Unter diese gehören die veränderlichen Vorgänge in den Telegraphen- und Fernsprechleitungen und -apparaten, sowie die Erscheinungen der drahtlosen Telegraphie. Wegen der Mannigfaltigkeit der Vorgänge und ihrer großen technischen Bedeutung werden wir ihre Darstellung in mehrere selbständige Teile zerlegen.

---

## Zweiter Teil.

# Das ruhende elektrische Feld.

### Erster Abschnitt.

### Potentialtheorie.

**§ 25. Grundgleichungen.** In dem ruhenden elektrischen oder dem elektrostatischen Felde sind die elektrischen Größen  $\mathfrak{E}$  und  $\mathfrak{D}$  zeitlich unveränderlich und die Stromdichte gleich Null. Daraus folgt zunächst, daß innerhalb der Leiter kein ruhendes elektrisches Feld bestehen kann. Wenn dort die elektrische Feldstärke eine endliche Größe hätte, so würde sie auf die elektrischen Mengen bewegend wirken, also Strömungen hervorbringen. Innerhalb eines von leitenden Massen erfüllten Raumes besteht also überhaupt kein  $\mathfrak{E}$ - oder  $\mathfrak{D}$ -Feld, dieses erstreckt sich nur auf die nichtleitenden Räume.

In diesen gilt wegen der Abwesenheit magnetischer Änderungen nach der zweiten Hauptgleichung

$$\operatorname{rot} \mathfrak{E} = 0,$$

da ein Nichtleiter auch keine eingepprägten EMK besitzt. Aus der Gleichung  $\operatorname{rot} \mathfrak{E} = 0$  ergibt sich, daß im ruhenden elektrischen Felde jedes Linienintegral über einen geschlossenen Weg den Wert Null hat.

Wird ein elektrisches Feld von einer leitenden Hülle umschlossen, innerhalb deren, wie vorher gezeigt, die elektrische Feldstärke Null ist, so muß auch jeder Weg, der von einem Punkt der Hülle durch das Feld zu einem anderen Punkt der Hülle und durch die Hülle zurückführt, das Linienintegral Null ergeben. Da in der Hülle  $\mathfrak{E}$  überall den Wert Null hat, ist also für zwei beliebige Punkte der Hülle

$$\int_1^2 \mathfrak{E} d\mathfrak{s} = 0.$$

Dies kann entweder so geschehen, daß auf einem Teile des Weges die Komponente von  $\mathfrak{E}$ , die in die Richtung von  $d\mathfrak{s}$  fällt, auch dem Sinne nach mit  $d\mathfrak{s}$  zusammenfällt, während sie in einem anderen Teile des Weges gegen  $d\mathfrak{s}$  gerichtet ist. Dann muß sich innerhalb des Feldes eine Quelle oder Senke, d. h. eine von der Hülle isolierte Menge Elektrizität befinden. Ist dieses aber nicht der Fall, so kann das genannte Integral nur dadurch Null werden, daß  $\mathfrak{E}$  überall Null ist.

Befinden sich innerhalb der Hülle freie Elektrizitäten, z. B. auf den Drähten eines von einem Bleimantel umschlossenen Kabels, so gehen von diesen doch keine elektrischen Kräfte in den Raum außerhalb der Hülle über, weil innerhalb der Hülle überall  $\mathcal{E} = 0$  ist. Die ruhenden elektrischen Kräfte können einen Leiter nicht durchdringen.

Bildet man für einen Raum das Integral

$$\int_{(v)} \operatorname{div} \mathcal{D} \, d v,$$

so bedeutet dies nach § 13 die Summe der aus dem Raume austretenden  $\mathcal{D}$ -Linien oder die algebraische Summe der in dem Raume befindlichen Elektrizitätsmengen. Nehmen wir an, daß sich innerhalb einer Hülle elektrisierte Körper befinden, beispielsweise die Leiter eines Kabels in einem Bleimantel, so wollen wir das Raumintegral über den Raum, welcher durch eine ganz innerhalb der Hülle gelegene Fläche  $f_2$  begrenzt ist (Fig. 25), in der Weise bilden, daß wir die Summierung teilen in diejenige über den Raum I und die über den Raum II. Der Raum I soll durch eine Fläche  $f_1$  abgeschlossen sein, die alle elektrisierten Körper umschließt. Dann ist

$$\int_{\text{I}} \operatorname{div} \mathcal{D} \, d v$$

die Summe der Elektrizitäten auf diesen Körpern,

$$\int_{\text{II}} \operatorname{div} \mathcal{D} \, d v$$

die Summe der Elektrizitäten auf der inneren Seite der Hülle.

Das Integral über den ganzen Raum ist nach Gl. (21) gleich dem Oberflächenintegral von  $\mathcal{D}$  genommen über die umschließende Fläche, also die Fläche  $f_2$ . Da aber in der Hülle  $\mathcal{D}$  mit  $\mathcal{E}$  überall Null ist, so ist auch dieses Integral Null. Demnach ist

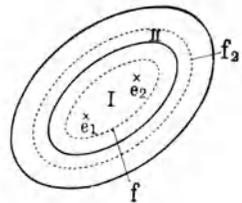
$$\int_{\text{II}} \operatorname{div} \mathcal{D} \, d v = - \int_{\text{I}} \operatorname{div} \mathcal{D} \, d v.$$

Es befindet sich daher auf der Hülle ebensoviel Elektrizität wie auf den im Innern befindlichen elektrischen Körpern, aber mit entgegengesetztem Vorzeichen.

Da ein durch eine Hülle begrenztes Feld in dem äußeren Raume keine Kräfte hervorbringt, also auch von dort nicht beeinflußt werden kann, so nennt man es ein geschlossenes Feld. Die letzte Entwicklung läßt sich also so zusammenfassen, daß ein geschlossenes Feld ebensoviel positive wie negative Elektrizität enthält.

In der Meßtechnik werden elektrische Felder, die man dem Einfluß äußerer Störungen entziehen will, also zwischen Leitungen, in Drehkondensatoren, zwischen den Klötzen von Widerstandskästen und ähnlichen Apparaten, dadurch zu geschlossenen Feldern gemacht, daß man die gesamte Meßeinrichtung oder ihre Einzelteile in geerdete Metallhüllen, Röhren u. a. einschließt.

Fig. 25.



**§ 26. Das elektrische Potential.** Aus der Gleichung  $\text{rot } \mathfrak{E} = 0$ , der Form der zweiten Hauptgleichung für das elektrostatische Feld, folgt nach der in (Gl. 33) abgeleiteten Rechenregel, daß  $\text{rot grad } U = 0$ , daß  $\mathfrak{E}$  sich als Gradient einer skalaren Funktion darstellen läßt. Man setzt

$$\mathfrak{E} = -\text{grad } \varphi \dots \dots \dots (40)$$

und nennt  $\varphi$  das elektrische Potential des Feldes.

Bedeutet  $ds$  die Länge eines von einem Aufpunkte nach einer bestimmten Richtung gehenden Linienelements, so ist die Kraftkomponente in dieser Richtung

$$\mathfrak{E}_s = -\frac{\partial \varphi}{\partial s} \dots \dots \dots (41)$$

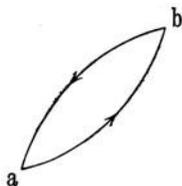
Man erhält also aus der als bekannt angenommenen Funktion  $\varphi$  die nach einer beliebigen Richtung  $s$  wirkende Komponente der elektrischen Feldstärke, indem man die Differenz der Werte von  $\varphi$  in zwei benachbarten Punkten durch den Abstand der Punkte dividiert; die Kraft liegt in der Richtung der Verbindungslinie beider Punkte und geht von höheren Werten von  $\varphi$  zu geringeren. Weil  $\mathfrak{E}_s$  endlich sein muß, ist  $\varphi$  eine stetige Funktion.

Wird die Elektrizitätsmenge Eins von den Feldkräften über die Strecke  $ds$  verschoben, so wird die Arbeit geleistet

$$\mathfrak{E}_s ds = -\frac{\partial \varphi}{\partial s} ds.$$

Setzen sich solche Strecken zusammen zu einem Wege zwischen  $a$  und  $b$  (Fig. 26), so ist die Arbeit das Integral

Fig. 26.



$$\int_a^b \mathfrak{E} d\mathfrak{s} = \varphi_a - \varphi_b \dots \dots \dots (42)$$

Wird derselbe Weg in umgekehrter Richtung durchlaufen, so bleiben die  $\mathfrak{E}_s$  unverändert, aber die  $d\mathfrak{s}$  haben umgekehrte Vorzeichen. Es ist also

$$\int_b^a \mathfrak{E} d\mathfrak{s} = \varphi_b - \varphi_a.$$

Wenn man von  $b$  aus einen neuen Weg nach  $a$  wählt, und auf dem anderen zurückgeht, so ist das Linienintegral über den ganzen Weg Null wegen  $\text{rot } \mathfrak{E} = 0$ , daher ist das Linienintegral über den neuen Weg auch gleich  $\varphi_b - \varphi_a$ . Das Linienintegral

$$\int_a^b \mathfrak{E} d\mathfrak{s} = \varphi_a - \varphi_b$$

nennt man auch in anderen Feldern als elektrostatischen die elektrische Spannung des Ortes  $a$  gegen den Ort  $b$ . Im elektrostatischen Felde ist die Spannung zwischen zwei Punkten von dem Wege des Linienintegrals unabhängig und gleich der Potentialdifferenz. In anderen Feldern besteht die Unabhängigkeit vom Wege nicht oder nur in beschränktem Maße. In solchen Feldern, die kein Potential haben, kann man also auch nur von der Spannung zweier Orte, nicht von ihrer Potentialdifferenz sprechen.

§ 27. Differentialgleichung des Potentials. Bildet man von

$$\mathfrak{D} = \frac{\varepsilon}{4 \pi c^2} \mathfrak{E}$$

den Ausdruck

$$\operatorname{div} \mathfrak{D} = - \frac{\varepsilon}{4 \pi c^2} \left( \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} \right) \dots \dots \dots (43)$$

so ist nach der Bedeutung von  $\operatorname{div} \mathfrak{D}$  dies die Zahl der in der Raumeinheit entspringenden  $\mathfrak{D}$ -Linien, oder die räumliche Dichte  $\rho$  der Elektrizität. Daher erfüllt die Funktion  $\varphi$  die Differentialgleichung

$$\Delta \varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = - 4 \pi \rho \frac{c^2}{\varepsilon} \dots \dots \dots (44)$$

Diese Gleichung wird die Poissonsche Differentialgleichung genannt. Als Beispiel wird in § 257 das Feld in einer Elektronenröhre dargestellt werden.

Handelt es sich um ein Dielektrikum, das keine freien Elektrizitäten enthält, außer an den begrenzenden Leitern, so ist  $\rho = 0$ .

Im allgemeinen ist also die Differentialgleichung des Potentials im elektrischen Felde

$$\Delta \varphi = 0 \dots \dots \dots (45)$$

sie heißt Laplacesche Differentialgleichung.

Die Elektrostatik beschäftigt sich damit, Lösungen dieser Differentialgleichungen zu suchen und für bestimmte Fälle zu diskutieren.

§ 28. Grenzbedingungen an Trennflächen in Nichtleitern. In den praktischen Fällen ist das elektrische Feld durch Leiter vollständig oder zum Teil begrenzt und enthält häufig im Innern Flächen, an denen verschiedene Nichtleiter zusammenstoßen. Das Potential ist auch hier stetig, wir haben noch festzustellen, welchen Bedingungen seine Ableitungen, die Feldstärken, zu genügen haben.

Handelt es sich um eine Fläche innerhalb des Dielektrikums, in der zwei Isolatoren mit verschiedenen Dielektrizitätskonstanten  $\varepsilon_1$  und  $\varepsilon_2$  aneinanderstoßen (Fig. 27), so sei das Linienintegral über einen geschlossenen Weg gebildet, der auf jeder Seite der Trennfläche in deren unmittelbarer Nähe verläuft. Die Wege 2, 3 und 4, 1 können so klein gemacht werden, daß sie keinen Beitrag im Vergleich zu den Wegen 1, 2 und 3, 4 bringen. Es ist daher

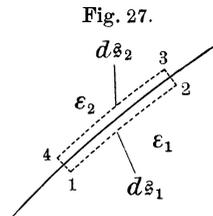


Fig. 27.

$$\int_1^2 \mathfrak{E}_1 d\hat{s}_1 + \int_3^4 \mathfrak{E}_2 d\hat{s}_2 = 0.$$

Wir wählen die Linienelemente  $d\hat{s}_1$  und  $d\hat{s}_2$  so, daß sie einander entgegengesetzt parallel gehen und unmittelbar benachbart, nur durch die Fläche getrennt sind. Der Betrag beider sei  $|d\hat{s}|$ . Ist  $\mathfrak{E}_{1s}$  die Komponente von  $\mathfrak{E}_1$  nach  $d\hat{s}$ , so ist die Komponente von  $\mathfrak{E}_2$  nach  $d\hat{s}$  gleich  $-\mathfrak{E}_{2s}$ . Daher ist

$$\int_1^2 (\mathfrak{E}_{1s} - \mathfrak{E}_{2s}) |d\hat{s}| = 0.$$

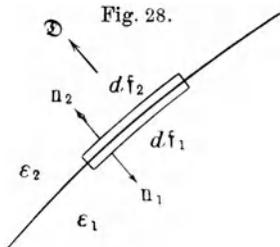
Dies bedeutet aber, daß

$$\mathfrak{E}_{1s} = \mathfrak{E}_{2s}.$$

An einer Trennfläche im Dielektrikum sind also die der Fläche parallelen Komponenten der Feldstärke einander gleich.

Mit Bezug auf das Potential heißt dies auch, daß die Größe  $\frac{\partial \varphi}{\partial s}$  zu beiden Seiten der Trennfläche denselben Wert hat.

Um den Verlauf der zur Fläche normalen Komponente von  $\mathfrak{E}$  zu ermitteln, sei aus dem Raume in der Nähe der Fläche ein kleiner dosenförmiger Teil abgegrenzt (Fig. 28), bestehend aus einem niedrigen Zylinder mit den Grundflächen  $d\tilde{f}_1$  und  $d\tilde{f}_2$ , die einander sehr nahe benachbart, aber durch die Trennfläche geschieden sind. Die gesamte Zahl der aus diesem Raume austretenden  $\mathfrak{D}$ -Linien muß Null sein. Wählt man die Entfernung der Flächen voneinander hinreichend klein, so kommen die durch den Mantel des Zylinders austretenden Linien gegen die durch die Grundflächen austretenden nicht in Betracht. Das Oberflächenintegral ist dann



$$\mathfrak{D}_1 d\tilde{f}_1 + \mathfrak{D}_2 d\tilde{f}_2 = 0.$$

Darin bezeichnen  $\mathfrak{D}_1$  und  $\mathfrak{D}_2$  die Werte von  $\mathfrak{D}$  an den Orten der beiden Flächenelemente  $d\tilde{f}_1$  und  $d\tilde{f}_2$ . Wenn man beide Flächenelemente sehr nahe zusammenfallen läßt und den Inhalt eines jeden mit  $|d\tilde{f}|$ , die Komponenten von  $\mathfrak{D}_1$  und  $\mathfrak{D}_2$  in der Richtung der aus dem Raume 1 nach dem Raume 2 gehenden Normale der Trennfläche mit  $\mathfrak{D}_{1n}$  und  $\mathfrak{D}_{2n}$  bezeichnet, so treten aus der Fläche  $|d\tilde{f}|$  im Raume 2 im ganzen  $\mathfrak{D}_{2n} |d\tilde{f}|$  Linien des Vektors  $\mathfrak{D}$  aus, aus der im Raume 1 gelegenen Fläche aber  $-\mathfrak{D}_{1n} |d\tilde{f}|$ . Daher ist

$$\mathfrak{D}_{1n} = \mathfrak{D}_{2n}$$

oder auch

$$\epsilon_1 \mathfrak{E}_{1n} = \epsilon_2 \mathfrak{E}_{2n}.$$

Für die Funktion  $\varphi$  gilt hiernach an einer Trennfläche zweier Isolatoren die Gleichung

$$\epsilon_1 \left( \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right)_1 = \epsilon_2 \left( \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right)_2.$$

Es ergibt sich also, daß an einer Trennfläche im Dielektrikum die zur Fläche tangentialen Komponenten von  $\mathfrak{E}$  und die zur Trennfläche normalen Komponenten von  $\mathfrak{D}$  stetig bleiben.

**§ 29. Grenzbedingungen an Leitern.** Nach § 25 ist die elektrische Feldstärke  $\mathfrak{E}$ , also auch die Verschiebung  $\mathfrak{D}$  in Leitern stets gleich Null. Daher hat dort das Potential einen auch räumlich unveränderlichen Wert. An der Trennfläche zwischen Leiter und Dielektrikum erleiden beide Vektoren eine Unstetigkeit. Vom Leiter gehen, falls er Elektrizität der einen oder anderen Polarität enthält,  $\mathfrak{D}$ -Linien aus; wenn man kleine Teile des Leiters in geschlossene Flächen einschließt, so ist das Oberflächenintegral von  $\mathfrak{D}$  über die den Leiterteil umschließende Fläche im allgemeinen von Null verschieden. Im Innern des Leiters kann sich keine Elektrizität befinden, weil dort  $\mathfrak{D} = 0$  ist, daher muß sie in der Grenzschicht sein.

Da man über die Dicke dieser Schicht von Elektrizität keinerlei Erfahrung hat, so spricht man statt von der räumlichen Dichte, von der Flächendichte  $h$ , indem man das Verhältnis der auf einer Fläche  $df$  befindlichen Ladung  $dq$  zum Inhalt der Fläche derart bezeichnet. Wir definieren also

$$h = \frac{dq}{df} \dots \dots \dots (46)$$

Es bleibt zu untersuchen, welches Verhalten die tangentialen und die normalen Komponenten von  $\mathfrak{E}$  und  $\mathfrak{D}$  an der Grenzfläche zeigen.

Denkt man sich das Linienintegral über einen geschlossenen Weg gebildet, ähnlich dem in Fig. 28, der zu beiden Seiten der Trennfläche, aber ihr beliebig benachbart gewählt ist und derart, daß je zwei Elemente der beiden Weghälften einander parallel liegen, so ergibt das Integral den Wert Null. Im Leiter ist, da  $\mathfrak{E}$  überall Null ist, auch die tangentielle Komponente Null; es muß daher auch auf der Seite des Dielektrikums die tangentielle Komponente von  $\mathfrak{E}$  an jeder Stelle Null sein. Demnach steht an der Leiteroberfläche  $\mathfrak{E}$  überall senkrecht auf der Fläche. Die  $\mathfrak{E}$ -Linien, also auch die  $\mathfrak{D}$ -Linien, treffen senkrecht auf. Man erkennt die Richtigkeit dieses Satzes auch daraus, daß, falls  $\mathfrak{E}$  eine tangentielle Komponente hätte, es dadurch die Elektrizität an der Oberfläche verschieben würde; daß also kein Gleichgewichtszustand bestehen kann, solange nicht  $\mathfrak{E}$  senkrecht zur Oberfläche steht.

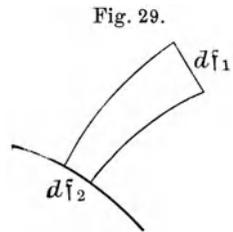
Um das Verhalten des Vektors  $\mathfrak{D}$  zu finden, grenzen wir auf der Oberfläche des Leiters eine kleine Fläche  $d\mathfrak{f}_2$  ab, und konstruieren darüber nach Fig. 29 den röhrenförmigen Körper, dessen Mantel überall der Richtung des Vektors  $\mathfrak{D}$  parallel ist. Dieser Körper werde durch eine Fläche  $d\mathfrak{f}_1$  abgeschlossen, die im allgemeinen beliebig gelegt werden kann, für den vorliegenden Fall aber senkrecht zu  $\mathfrak{D}$  angenommen werde. Bildet man das Raumintegral der Divergenz über diesen Raum, so ist es gleich der eingeschlossenen Elektrizitätsmenge; also gleich  $h|d\mathfrak{f}_2|$ , da diese Menge allein sich innerhalb des Raumes befindet. Der Wert des Integrals ergibt sich aber auch als das Oberflächenintegral der aus dem Raume austretenden Komponente von  $\mathfrak{D}$ . Nun hat  $\mathfrak{D}$  keine Komponente senkrecht zur Oberfläche des Mantels der Röhre und ist im Innern des Leiters überall Null. Für das Oberflächenintegral bleibt also nur der auf die Fläche  $d\mathfrak{f}_1$  entfallende Wert, oder  $\mathfrak{D}_1 d\mathfrak{f}_1$ , wenn  $\mathfrak{D}_1$  den Wert von  $\mathfrak{D}$  an der Stelle des  $d\mathfrak{f}_1$  bezeichnet. In den Beträgen geschrieben ist dies

$$\mathfrak{D}_{1n} |d\mathfrak{f}_1|.$$

Dies ist gleich dem Betrage  $h|d\mathfrak{f}_2|$ . Wir erhalten so mit einer etwas anderen Ableitung als in der allgemeinen Vektorentheorie den Satz, daß in jedem Querschnitt einer Vektorröhre sich dieselbe Zahl von Vektorlinien befindet; für den Vektor  $\mathfrak{D}$  speziell, daß der Betrag der Verschiebung auf allen Querschnitten der Röhre derselbe ist.

Dieselben Überlegungen gelten noch, wenn wir die Fläche  $d\mathfrak{f}_1$  sehr nahe an  $d\mathfrak{f}_2$  heranlegen. Dann geht  $|d\mathfrak{f}_1|$  über in  $|d\mathfrak{f}_2|$  und  $\mathfrak{D}_{1n}$  in  $\mathfrak{D}_n$ , die Normalkomponente von  $\mathfrak{D}$  an der Leiteroberfläche. Dann ist

$$\mathfrak{D}_n = h.$$



$\mathfrak{D}_n$  ist also an der Leiteroberfläche gleich der Flächendichte der Elektrizität. Für den Vektor  $\mathfrak{E}$  folgt, daß an der Leiteroberfläche

$$\mathfrak{E}_n = 4 \pi h \frac{c^2}{\epsilon} \dots \dots \dots (47)$$

Da im Innern des Leiters  $\mathfrak{E} = 0$  ist, so ist also  $\mathfrak{E}$  an einer Leiterfläche unstetig.

Diesen Zusammenhang von  $h$  und  $\mathfrak{E}$  benutzt man, um aus der Potentialfunktion mit Hilfe von  $\mathfrak{E}_n$  auch die Flächendichte  $h$  zu berechnen, nach der Formel

$$h = - \frac{\epsilon}{4 \pi c^2} \frac{\partial \varphi}{\partial n} \dots \dots \dots (48)$$

**§ 30. Wesentliche Eigenschaften des Potentials.** Von dem elektrostatischen Potential haben wir folgende Eigenschaften kennen gelernt: Das Potential ist allgemein eine stetige Funktion des Ortes. Auf der Oberfläche von Leitern ist es konstant. Seine partielle Ableitung nach irgend einer Richtung ergibt negativ genommen die in diese Richtung fallende Komponente der elektrischen Feldstärke.

Die elektrische Feldstärke steht auf Leiteroberflächen senkrecht, an Flächen, in denen zwei Dielektrika verschiedener Dielektrizitätskonstante zusammentreffen, sind die zur Fläche tangentialen Komponenten der Feldstärke auf beiden Seiten der Fläche einander gleich, die senkrechten Komponenten verhalten sich umgekehrt wie die Dielektrizitätskonstanten.

**§ 31. Niveauflächen des Potentials.** Das Potential ist eine Ortsfunktion, man kann es daher z. B. auf Cartesische Koordinaten beziehen. Gibt man ihm einen festen Wert  $C$ , so stellt

$$\varphi(x, y, z) = C$$

eine Fläche dar. Auf dieser Fläche steht die elektrische Feldstärke überall senkrecht; denn weil sich in der Fläche der Wert von  $\varphi$  nicht ändert, so ist die Kraftkomponente nach jeder Richtung in der Fläche gleich Null. Eine solche Fläche nennt man eine Niveaufläche. Zu ihnen gehören zunächst die Leiteroberflächen.

Niveauflächen, welche verschiedenen Werten von  $C$  zugehören, können einander nicht schneiden, sie umgeben einander also schalenartig.

Für die Beurteilung der Kräfteverteilung in einem elektrischen Felde ist die Zeichnung einer Anzahl von Niveauflächen, genauer ihrer Schnittlinien mit einer geeigneten Ebene sehr dienlich.

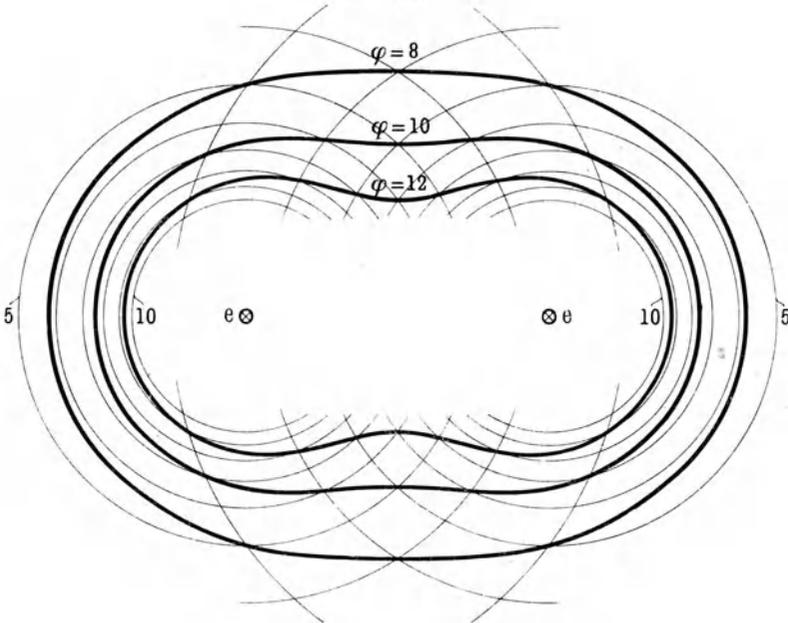
Wenn nicht aus der Form der Potentialfunktion die geometrische Gestalt der Flächen konstanten Potentials ersichtlich ist, wie etwa in den Beispielen der §§ 33 bis 43, so bleibt in der Regel nichts anderes übrig, als für eine genügende Zahl von Punkten des Feldes die Werte des Potentials zu berechnen und Punkte gleichen Potentials durch einen Linienzug zu verbinden. Dies letztere Verfahren stimmt also mit demjenigen überein, nach welchem die meteorologischen Karten der Luftdruck- oder Temperaturverteilung angefertigt werden.

In anderen Fällen ist es möglich, die Verteilung auf einer Oberfläche komplizierter Gestalt auf wenige Quellpunkte zurückzuführen; in diesem Falle lassen sich die Potentialflächen leichter zeichnen.

Fig. 30 gibt die Schnittlinien der Niveauflächen eines Feldes an, das von zwei gleichen Massenpunkten herrührt. Deren Potentialfunktion ist, wenn  $e$  eine der Massen einschließlich des Faktors  $\frac{e^2}{\varepsilon}$  bedeutet,  $r_1$  und  $r_2$  ihre Abstände von dem Aufpunkte sind [vgl. § 34, Gl. (55)]

$$\varphi = \frac{e}{r_1} + \frac{e}{r_2}.$$

Fig. 30.



Man kann also Flächen gleichen Potentials ermitteln, wenn man erst diejenigen Linien zieht, in denen  $\frac{e}{r_1}$  bestimmte Werte hat, d. h. Kreise, und darauf gleiche Linien für  $\frac{e}{r_2} = \text{Const.}$  Wo z. B. der Kreis mit  $\frac{e}{r_1} = 3$  mit dem für  $\frac{e}{r_2} = 9$  sich schneidet, ist  $\varphi = 12$ . Denselben Wert erhält  $\varphi$  in dem Schnittpunkte der Kreise  $\frac{e}{r_1} = 4$ ,  $\frac{e}{r_2} = 8$  usw.

Man kann auf diese Weise leicht genügend viele Punkte feststellen, in denen  $\varphi$  denselben Wert hat und sie durch eine Linie verbinden. Die Ermittlung der Linien für verschiedene Werte ergibt eine Kurvenschar, aus der man die Verteilung der Kräfte leicht ersehen kann. Man erhält nämlich nach diesem Verfahren Linien, in denen das Potential sich um gleiche Werte unterscheidet. Geht man von einem Punkte einer Niveaufläche auf dem kürzesten Wege zu der nächsten niedrigeren, so gibt dieser Weg die Richtung

der elektrischen Feldstärke an; der Betrag der Änderung, dividiert durch den Abstand der Linien, ergibt, wenigstens wenn die Änderungen hinreichend klein sind, den Betrag der elektrischen Feldstärke. Diese ist also um so größer, je dichter an einer bestimmten Stelle die Niveaulinien sind. Dies gilt natürlich auch für Scharen von Niveaulinien, die nach einem anderen Verfahren ermittelt worden sind.

**§ 32. Konstruktion von Feldlinien.** Man kann die Feldlinien aus einer Zeichnung der Niveaulinien ermitteln, indem man darin die Kurven einzeichnet, die alle Niveaulinien senkrecht schneiden. Man hat dabei ihre Häufigkeit nach § 11 so zu bemessen, daß ihre Zahl für ein bestimmtes Stück der Niveaulinie der Feldstärke proportional ist. In der Regel wird dies Verfahren genügenden Überblick über den Lauf der Feldlinien geben.

Da die Feldlinien die Niveaulinien senkrecht schneiden, so kann man aus der Gleichung  $\varphi = \text{Const}$  die Differentialgleichung der Feldlinie als der orthogonalen Trajektorie ableiten. In einzelnen Fällen ist es möglich, diese Gleichung zu integrieren, so daß man danach die Feldlinien bestimmen kann; indessen ist dies Verfahren auf wenige Fälle beschränkt und soll nicht weiter erörtert werden.

Wenn man die im Felde befindlichen Mengen durch solche ersetzen kann, die in einzelnen Punkten oder auch geraden Linien (§ 46 u. f.) angehäuft sind, so lassen sich die  $\mathcal{E}$ -Linien eines solchen Feldes angenähert durch Konstruktion finden.

Wir beschränken uns auf den für die Telegraphentechnik wichtigeren Fall, daß man die Elektrizitätsmengen des Feldes durch solche auf geraden Linien ersetzt denken kann, die für jede Längeneinheit dieselbe Elektrizitätsmenge tragen. Aus Symmetriegründen ist das Feld einer solchen Linie symmetrisch um die Linie als Achse verteilt, und in einem Querschnitt senkrecht zur Achse erscheinen die Feldlinien als Radien mit gleichem Winkelabstand.

Befinden sich in dem Felde mehrere solche, wie wir annehmen, parallele Linien, so kreuzen sich die Radien, und es gilt, den Verlauf der resultierenden Kräfte zu zeichnen.

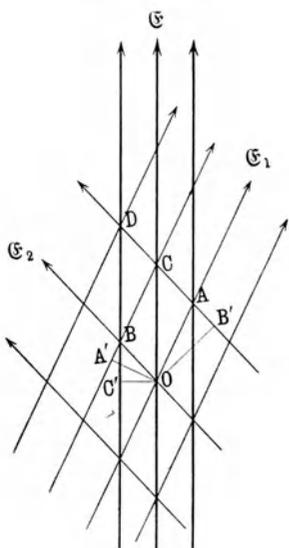
Ein hinreichend kleines Stück des Feldes kann man als homogen ansehen. Haben wir zwei sich kreuzende homogene Vektorfelder  $\mathcal{E}_1$  und  $\mathcal{E}_2$ , so ist die Stärke jedes umgekehrt proportional der Zahl der Linien auf  $1 \text{ cm}^2$ , in der Zeichnung also etwa auf  $1 \text{ cm}$  Breite, senkrecht zur Richtung der Vektoren gemessen.

In Fig. 31 sind Flächen gleichen Rauminhalts:

$$OACB = OA \cdot OA' = OA \cdot d_1 = OB \cdot OB' = OB \cdot d_2$$

und

$$OCDB = OC \cdot OC' = OC \cdot d_r,$$



wenn  $d_1$ ,  $d_2$  und  $d_r$  bezüglich die Abstände der Vektorlinien  $\mathfrak{E}_1$ ,  $\mathfrak{E}_2$  und der Diagonalen  $\mathfrak{E}$  untereinander bedeuten. Aus

$$OA:OB = d_2:d_1$$

folgt, daß  $OA$  dem Betrage des Vektors  $\mathfrak{E}_1$ ,  $OB$  dem des Vektors  $\mathfrak{E}_2$  proportional ist. Daher ist  $OC$  die Richtung der resultierenden Feldstärke  $\mathfrak{E}$ . Da aber auch

$$OA:OC = d_r:d_1$$

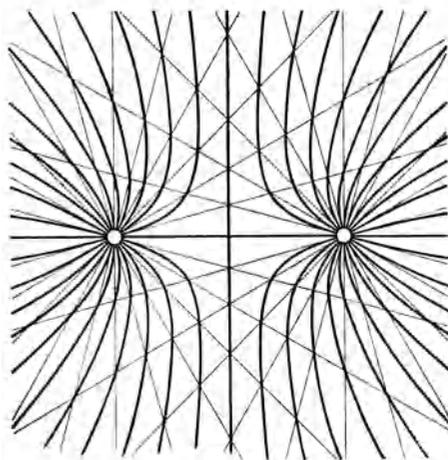
ist, so folgt, daß  $OC$  dem  $\mathfrak{E}$  ebenso proportional ist, wie  $OA$  dem  $\mathfrak{E}_1$ .

Man erhält also für die Konstruktion der Vektorlinien die Regel, daß man durch das Netz der sich schneidenden Vektorlinien jeder Quelle oder Senke die Kurven legen soll, die in jedem Schnittpunkt mit der Diagonale zusammenfallen.

Danach ist Fig. 32 für das Feld zweier gleich stark geladener paralleler Linien ausgeführt. Von dieser Art ist das elektrische Feld vor einer aus mehreren parallelen Drähten bestehenden Mehrfachantenne. Je mehr solche parallele Drähte nebeneinander liegen, um so mehr werden die Linien vor den mittleren in eine zur Ebene der Drähte senkrechte Lage gebracht. Für einen Aufpunkt, der in einem Abstand von der Größe des Drahtabstandes oder mehr vor einem derartigen aus parallelen Drähten gebildeten Gitter liegt, wirkt also die Ladung der Drähte, wie wenn die Kräfte von einer geladenen Ebene ausgingen.

Man beobachtet ferner, daß das Feld in der nächsten Nähe der angenommenen geladenen Linien, d. h. der Quellen, fast radial von den Linien ausgeht, also daß die Verteilung in der nächsten Nähe jeder Linie durch die anderen nicht merklich geändert wird.

Fig. 32.



## Zweiter Abschnitt.

### Felder gegebener Form.

**§ 33. Verteilung auf konzentrischen Kugeln.** Wenn ein geschlossenes Feld durch zwei konzentrische Kugeln gebildet wird, so ist aus Symmetriegründen der Abstand  $r$  vom Mittelpunkte die einzige Größe, mit der sich  $\mathfrak{E}$  oder  $\varphi$  ändern können. Nun ist, da  $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ ,

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{d\varphi}{dr} \frac{\partial r}{\partial x} = \frac{d\varphi}{dr} \frac{x}{r}, \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = \frac{d^2 \varphi}{dr^2} \left(\frac{x}{r}\right)^2 + \frac{d\varphi}{dr} \frac{r - x^2}{r^2}.$$

$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}$  und  $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2}$  sind hiernach leicht hinzuschreiben. Es ergibt sich

$$\Delta \varphi = \frac{d^2 \varphi}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{d\varphi}{dr} = 0 \quad \dots \quad (49)$$

Daraus folgt, wenn  $\frac{d\varphi}{dr} = u$  gesetzt wird,  $\frac{du}{u} = -\frac{2dr}{r}$  oder  $u = -\frac{C_1}{r^2}$ ,

wo  $C_1$  eine Konstante ist; endlich ergibt  $d\varphi/dr = -C_1/r^2$ , daß

$$\varphi = C_2 + \frac{C_1}{r}.$$

$C_2$  ist eine zweite Konstante. Diese Gleichung stellt also die Potentialfunktion des Feldes innerhalb der Kugeln dar.

Das Potential soll auf der inneren Kugel ( $r = R_1$ ) den Wert  $\varphi_1$  haben, auf der äußeren ( $r = R_2$ ) den Wert  $\varphi_2$ . Dann ist

$$\varphi = -\frac{\varphi_1 R_1 - \varphi_2 R_2}{R_2 - R_1} + \frac{R_1 R_2}{r} \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{R_2 - R_1} \quad \dots \quad (50)$$

Für die Komponenten der Feldstärke folgt, wenn wir der Kürze halber die Bezeichnung  $C_1$  beibehalten,

$$\mathfrak{E}_x = \frac{C_1 \cdot x}{r^3}, \quad \mathfrak{E}_y = \frac{C_1 y}{r^3}, \quad \mathfrak{E}_z = \frac{C_1 z}{r^3}.$$

Daraus ergibt sich, daß

$$|\mathfrak{E}| = \frac{C_1}{r^2} \quad \dots \quad (51)$$

Da aber auch  $\mathfrak{E}_r = -\frac{\partial \varphi}{\partial r} = \frac{C_1}{r^2}$  ist, so folgt, daß die elektrische Feldstärke dem Quadrate des  $r$  umgekehrt proportional ist und in die Richtung von  $r$  fällt. Die Richtungen aller Kräfte gehen also durch den Mittelpunkt der Kugeln.

Die Elektrizitätsmenge auf der inneren Kugel ergibt sich als Produkt ihrer Fläche in den Betrag von  $\mathfrak{D}$  an der Oberfläche, also gleich

$$4\pi R_1^2 \frac{\varepsilon}{4\pi c^2} \frac{C_1}{R_1^2} = \frac{\varepsilon C_1}{c^2}.$$

Nennen wir diese Menge  $Q$ , so ergibt sich unter Beachtung von Gl. (49) und (50)

$$Q = \frac{\varepsilon}{c^2} \frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1} (\varphi_1 - \varphi_2) \quad \dots \quad (52)$$

Diese Menge ist der Spannung  $V = \varphi_1 - \varphi_2$  der beiden Flächen proportional, außerdem einem Faktor, der lediglich die Maße der Kugeln, die Dielektrizitätskonstante und, des Maßsystems halber, das Quadrat der Lichtgeschwindigkeit enthält. Dieser Faktor ist für ein Kugelpaar von gegebenen Maßen eine Konstante. Man nennt das Verhältnis  $Q/V$  die Kapazität  $K$  des Kugelkondensators. Sie ist

$$K = \frac{\varepsilon}{c^2} \frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1} \quad \dots \quad (53)$$

Wenn gegenüber  $R_1$  die Länge  $R_2$  sehr groß wird, so nähert sich  $K$  dem Werte

$$K' = \frac{\varepsilon}{c^2} R_1 \dots \dots \dots (54)$$

als Grenze. Man nennt letztere Größe die Kapazität einer Kugel vom Radius  $R_1$ . Die Formel gilt nur unter der Voraussetzung, daß die Kugel von allen anderen leitenden Körpern weit entfernt sei.

**§ 34. Elektrische Massenpunkte.** Die Konstante  $C_1$  läßt sich auch durch die gesamte Menge auf der inneren Kugel bestimmen,  $C_1 = c^2 Q/\varepsilon$ , und es fällt dabei der Kugelradius aus der Rechnung heraus. Man erhält also in dem Dielektrikum dieselben Kräfte, wenn man statt der über die innere Kugel ausgebreiteten Menge eine in ihrem Mittelpunkte konzentrierte gleiche Menge als wirksam voraussetzt. Eine derartige gedachte Menge nennt man einen elektrischen Massenpunkt.

Das Potential eines Massenpunktes  $Q$  auf einen im Abstände  $r$  befindlichen Träger der Menge Eins ist nach dem Bisherigen

$$\varphi = C_2 + \frac{c^2}{\varepsilon} \frac{Q}{r}.$$

Das Potential hat für uns hauptsächlich die Bedeutung, daß wir aus ihm durch Differentiation die Kraftkomponente nach einer beliebigen Richtung gewinnen können. In dieser Beziehung ist der Wert der Konstante  $C_2$  belanglos, jede additive Konstante  $C_2$  gibt einen richtigen Wert. Nach Übereinkunft wird  $C_2$  so gewählt, daß das Potential in unendlich großer Entfernung von dem Massenpunkte den Wert Null erhält. Daher wird also  $C_2 = 0$  gesetzt, und es folgt, daß

$$\varphi = \frac{c^2}{\varepsilon} \frac{Q}{r} \dots \dots \dots (55)$$

das Potential eines Massenpunktes im Abstände  $r$  darstellt. Dies läßt sich auch so aussprechen, daß wir unter dem Potential eines Massenpunktes die Spannung gegen einen unendlich entfernten Leiter verstehen. Das Potential von irdischen Körpern, die mit der Erde verbunden sind, wird gleich Null gesetzt; wird einem solchen Körper etwa als zweiter Belegung eines Kondensators durch die andere Belegung eine Elektrizitätsmenge zugeführt und mit ihm der Erde, so ist die dadurch erzielbare Änderung des Erdpotentials, wenigstens bei den bisher angewendeten Maßen und Spannungen, unmerkbar klein.

Aus der Definition der Massenpunkte folgt, daß sie das Coulombsche Gesetz erfüllen; ferner daß man Körper, welche im Vergleich zu den Abständen, in denen ihre Wirkung betrachtet wird, nach jeder Richtung kleine Maße haben, angenähert als solche Massenpunkte betrachten darf.

**§ 35. Systeme elektrischer Massenpunkte.** Die Elektrostatik in der älteren Form führte alle Elektrizitätsverteilungen auf solche Massenpunkte zurück. Hat man deren mehrere,  $q_1, q_2, q_3 \dots$ , an den Punkten  $a_1, b_1, c_1,$

$a_2, b_2, c_2 \dots$  des Koordinatensystems, welche von dem Aufpunkte  $x, y, z$  die Entfernungen  $r_1, r_2, \dots$  haben, so ist

$$\varphi = \frac{c^2}{\varepsilon} \sum_1^n \frac{q}{r} \dots \dots \dots (56)$$

wenn  $n$  die Zahl der Massenpunkte. Diese Größe genügt, wie leicht zu zeigen, der Gleichung  $\Delta \varphi = 0$ . Die nach der  $x$ -Richtung wirkende Kraft ist

$$\mathfrak{E}_x = - \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{c^2}{\varepsilon} \sum_1^n \frac{q}{r^2} \frac{x - a_h}{r} = \frac{c^2}{\varepsilon} \sum_1^n \frac{q}{r^2} \cos(r, x) \dots (57)$$

d. h. sie ist die Summe der Komponenten der von den einzelnen Massenpunkten ausgehenden Kräfte nach der Richtung der  $x$ -Achse.

Ist die Verteilung der Massenpunkte stetig, so nimmt  $\varphi$  die Form an:

$$\varphi = \frac{c^2}{\varepsilon} \int \frac{dq}{r} = \frac{c^2}{\varepsilon} \int \rho \frac{dv}{r} \dots \dots \dots (58)$$

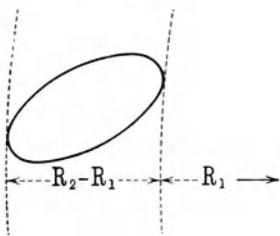
wenn  $\rho$  die räumliche Dichte und  $v$  den erfüllten Raum bedeutet.

Diese Darstellungsweise führt nur in einzelnen Fällen zu Resultaten über Elektrizitätsverteilungen, da ja in der Regel die Verteilungsart nicht von vornherein bekannt ist, also weder die Lage noch die Masse jedes Massenpunktes.

Wir werden daher im allgemeinen die verschiedenen Fälle der elektrischen Verteilungen als Lösungen der Gleichung  $\Delta \varphi = 0$  ableiten.

**§ 36. Potential und Feldstärke in einem sehr fernen Punkte.** Um festzustellen, welche Eigenschaften das Potential und die Feldstärke in sehr großem Abstände von den Massenpunkten haben, schließe man die sämtlichen Massenpunkte in eine Fläche ein und schlage (Fig. 33) um den fernen Punkt Kugeln, von denen die kleinere gerade bis an die genannte Fläche heranreicht, ohne einen der Massenpunkte einzuschließen, der andere sie mit sämtlichen Massenpunkten einschließt. Dann liegt das Potential in den Grenzen

Fig. 33.



oder

$$\int_{R_2}^{dq} < \frac{\varepsilon}{c^2} \varphi < \int_{R_1}^{dq}$$

$$\frac{Q}{R_2} < \frac{\varepsilon}{c^2} \varphi < \frac{Q}{R_1}$$

Läßt man den Aufpunkt beliebig fern rücken, so unterscheiden sich  $R_1$  und  $R_2$  beliebig wenig von einem zwischen ihnen liegenden Wert  $R$ . Dann ist also

$$\varphi = \frac{c^2}{\varepsilon} \frac{Q}{R}$$

In sehr großem Abstände ist also das Potential unendlich klein von der ersten Ordnung. Aus ähnlichen Überlegungen folgt, daß die Feldstärke unendlich klein von der zweiten Ordnung ist.

§ 37. **Kapazität eines Körpers beliebiger Form.** Die Vorstellung elektrischer Massenpunkte ist nützlich zum Nachweise des Satzes, daß auch bei beliebig gestalteten Körpern das Verhältnis zwischen Ladung und Spannung, also die Kapazität, eine konstante Größe ist.

Wenn man nämlich allen Raumelementen des Leiters oder richtiger allen Oberflächenelementen statt der Ladung  $dq$  die  $p$ -fache Ladung gibt, so geht das Potential aus dem Werte  $\frac{c^2}{\epsilon} \int dq/r$  in den Wert  $p \frac{c^2}{\epsilon} \int dq/r$  über, das Potential bleibt also der Ladung proportional.

§ 38. **Einheiten der Kapazität.** Die Kapazitätseinheit des elektromagnetischen Maßsystems kommt dem Leiter zu, der unter der Spannungseinheit die Elektrizitätsmenge Eins aufnimmt. Die Spannungseinheit des praktischen Maßsystems ist  $1 V = 10^8$  cgs-Einheiten; die praktische Einheit der Elektrizitätsmenge ist 1 Coul. = 0,1 cgs-Einheiten. Ein Kondensator von der Einheit des elektromagnetischen Maßsystems würde bei 1 V Klemmenspannung die Menge  $10^9$  Coul. aufnehmen. Die Kapazität eines Kondensators, der bei 1 V Klemmenspannung 1 Coul. aufnehmen könnte, nennt man 1 Farad; es ist also 1 elektromagnetische (cgs)-Einheit der Kapazität =  $10^9$  Farad (F).

Das Gebrauchsmaß der Kapazität ist das Mikrofarad;  $1 \mu F = 10^{-6}$  F. Man erhält also aus einer im elektromagnetischen Maßsystem (c, g, s) durchgeführten Rechnung die Kapazität in Mikrofarad durch Multiplikation mit  $10^{15}$ .

Werte des  $\epsilon$  für verschiedene Stoffe findet man im Anhang V.

§ 39. **Der ebene Kondensator.** Wenn das Dielektrikum von zwei parallelen leitenden Ebenen begrenzt wird, deren Abstand voneinander sehr gering gegen die übrigen Dimensionen ist, so werden die elektrischen Größen innerhalb des Dielektrikums nur von dem Abstände des betrachteten Punktes von den Leiterflächen abhängen, wenn wir von Stellen in der Nähe der Ränder absehen. Legt man die  $xy$ -Ebene eines Koordinatensystems in die eine der beiden Flächen (Fig. 34), so ist  $\varphi$  nur von  $z$  abhängig, es ist also

$$\Delta \varphi = \frac{d^2 \varphi}{dz^2} = 0$$

oder

$$\varphi = az + b.$$

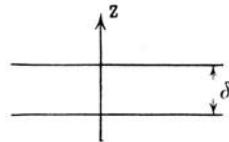
Hat auf der ersten Fläche, also für  $z = 0$ ,  $\varphi$  den Wert  $\varphi_1$ , während für  $z = \delta$  sein Wert  $\varphi_2$  ist, so ergibt sich

$$\varphi = \varphi_1 + (\varphi_2 - \varphi_1) \frac{z}{\delta}.$$

Die Flächendichte ergibt sich aus

$$h = - \frac{\epsilon}{4\pi c^2} \frac{\partial \varphi}{\partial z} = \frac{\epsilon}{4\pi c^2} \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{\delta}.$$

Fig. 34.



Hat die Fläche einer Belegung den Inhalt  $F$ , so ist die Elektrizitätsmenge

$$Q = \frac{\varepsilon F}{4\pi c^2 \delta} (\varphi_1 - \varphi_2).$$

Da  $\varphi_1 - \varphi_2$  die Spannung zwischen den Platten des Kondensators ist, so ist seine Kapazität

$$K = \frac{\varepsilon F}{4\pi c^2 \delta} \text{ (cgs)} = 0,0885 \cdot 10^{-6} \frac{\varepsilon F}{\delta} \mu F \dots \dots (59)$$

wenn alle Längen in Zentimetern gemessen werden.

**§ 40. Kondensatoren mit koaxialen Zylinderflächen.** Kondensatoren, welche von zwei einander umhüllenden Zylindern gebildet werden, sind nicht mehr, wie die Kugelkondensatoren, geschlossen, sondern sie sind an zwei Stellen offen. Für die praktisch wichtigen Anwendungen kann man sie aber wie geschlossene betrachten, weil die Länge der Zylinder in der Regel gegen die Dicke des Dielektrikums außerordentlich groß ist. Dies zieht nach sich, daß die elektrischen Linien überall, außer in der nächsten Nähe der Enden, in zu der Zylinderachse senkrechten Ebenen verlaufen, und aus Symmetriegründen die Richtung der Radien der Zylinder haben. Der Abstand  $r$  von der Achse ist also die einzige Variable, mit der sich die elektrischen Größen ändern; sie sind namentlich von der gewählten Stelle auf der Zylinderachse unabhängig, die zur  $z$ -Achse gewählt werde. Setzt man also  $\frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0$

und  $\frac{\partial \varphi}{r \partial \vartheta} = 0$ , so ergibt sich für  $\Delta \varphi = 0$  die Form

$$\frac{d^2 \varphi}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\varphi}{dr} = 0.$$

Das Integral dieser Gleichung lautet

$$\varphi = C_1 \log r + C_2 \dots \dots \dots (60)$$

Wenn nichts anderes bemerkt wird, soll  $\log r$  hinfort stets den natürlichen Logarithmus von  $r$  bezeichnen.

Konzentrische Kabel. Wir wollen diese Lösung auf ein Kabel anwenden, das aus einem inneren zylindrischen Leiter mit dem Radius  $R_1$  besteht, der von einem anderen leitenden Zylinder mit dem Radius  $R_2$  umgeben ist. Der Raum zwischen beiden sei mit zylindrischen Schichten von Nichtleitern erfüllt, und zwar gehe von dem inneren Zylinder bis zum Radius  $R$  ein Dielektrikum mit der Konstante  $\varepsilon_1$ , von da bis zum äußeren Zylinder ein solches mit der Konstante  $\varepsilon_2$ .

Die Potentialfunktionen in den beiden Räumen mit verschiedenen Dielektrizitätskonstanten unterscheiden sich durch die Werte der Integrationskonstanten. Sie haben die Form

$$\begin{aligned} \text{für den Raum } \varepsilon_1 \dots \varphi' &= C_1' \log r + C_2', \\ \text{„ „ „ } \varepsilon_2 \dots \varphi'' &= C_1'' \log r + C_2''. \end{aligned}$$

Zur Bestimmung der Konstanten dient zunächst die Festsetzung, daß das Potential auf dem inneren Zylinder den Wert  $\varphi_1$ , auf dem äußeren Zylinder den Wert  $\varphi_2$  haben soll. Ferner muß für  $r = R$  der Wert von  $\varphi'$

dem von  $\varphi''$  gleich sein; endlich sind in der Trennfläche die dielektrischen Verschiebungen auf beiden Seiten gleich.

Daraus ergeben sich folgende Bestimmungsgleichungen:

$$\begin{aligned}\varphi_1 &= C'_1 \log R_1 + C'_2 \\ \varphi_2 &= C'_1 \log R_2 + C'_2 \\ C'_1 \log R + C'_2 &= C'_1 \log R + C'_2 \\ \varepsilon_1 C'_1 &= \varepsilon_2 C'_2.\end{aligned}$$

Die Werte der vier Konstanten lassen sich somit aus den Konstruktionsbedingungen ( $R, R_1, R_2, \varepsilon_1, \varepsilon_2$ ) und den Betriebsbedingungen ( $\varphi_1, \varphi_2$ ) bestimmen.

Zur Kapazitätsberechnung genügt die Kenntnis einer der Größen  $C'_1$  oder  $C'_2$ . Denn aus ihnen kann man die elektrische Feldstärke und die Verschiebung an jeder der beiden Grenzflächen finden, also die Elektrizitätsmenge ermitteln.

Zur Berechnung von  $C'_1$  dient die Determinante (Anhang IV):

$$\begin{vmatrix} -\varphi_1 + C'_1 \log R_1, & 0 & , & 1, & 0 \\ -\varphi_2 & , & \log R_2, & 0, & 1 \\ & C'_1 \log R, & -\log R, & 1, & -1 \\ \varepsilon_1 C'_1 & , & -\varepsilon_2 & , & 0, & 0 \end{vmatrix} = 0$$

und diese ergibt:

$$\varepsilon_2 (\varphi_1 - \varphi_2) = C'_1 [(\varepsilon_1 - \varepsilon_2) \log R - \varepsilon_1 \log R_2 + \varepsilon_2 \log R_1].$$

Die auf einer Länge von 1 cm des inneren Leiters befindliche Menge berechnet sich, weil  $\frac{\partial \varphi'}{\partial r} = \frac{C'_1}{r}$  ist, zu dem Werte

$$Q = -\frac{\varepsilon_1}{4\pi c^2} \frac{C'_1}{R_1} \cdot 2\pi R_1 = -\frac{\varepsilon_1 C'_1}{2c^2}.$$

Daraus ergibt sich:

$$\frac{Q}{\varphi_1 - \varphi_2} = K = \frac{\varepsilon_1 \varepsilon_2}{2c^2} \frac{1}{(\varepsilon_2 - \varepsilon_1) \log R + \varepsilon_1 \log R_2 - \varepsilon_2 \log R_1}. \quad (61)$$

Diese Formel liefert also die Kapazität von einadrigen Kabeln mit Hüllen aus Isoliermaterialien von verschiedenen Dielektrizitätskonstanten. Sie ist z. B. anwendbar auf Gummiadern, bei denen der Draht schichtenweise mit Gummi verschiedener Zusammensetzung isoliert ist.

Von größerer Bedeutung sind Kapazitätsberechnungen an Kabeln mit gleichartigem Dielektrikum. Die Kapazitätsformel könnte leicht aus der Gleichung des Potentials hergeleitet werden; sie ergibt sich aber auch aus der Formel für das Kabel mit doppelter Isolation, wenn man darin  $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon$  setzt. Die letztere Formel ist auch weniger wegen ihrer praktischen Bedeutung als deswegen abgeleitet worden, weil sie eine leicht zu übersehende Anwendung der in § 28 und 29 aufgestellten Grenzbedingungen für das Potential ermöglicht.

§ 41. **Telegraphenkabel mit Guttapercha-Isolation.** Indem man die Dielektrizitätskonstanten gleichsetzt, erhält man für ein einadriges Kabel die Kapazitätsformel:

$$K = \frac{\varepsilon}{2c^2 \log \frac{R_2}{R_1}} \text{ (cgs) } \dots \dots \dots (62)$$

und zwar für ein Stück Kabel von 1 cm Länge. Für 1 km hat man mit  $10^5$ , zur Umwandlung in  $\mu F$  mit  $10^{15}$  zu multiplizieren, so daß die Formel in praktischem Maße lautet:

$$K = \frac{\varepsilon}{18 \log \frac{R_2}{R_1}} \mu F/\text{km} \dots \dots \dots (63)$$

Unter  $R_1$  ist der halbe Durchmesser des inneren Drahtes, unter  $R_2$  der halbe Durchmesser der mit Guttapercha umpreßten Ader zu verstehen; als äußerer Leiter gilt das Seewasser oder das feuchte Erdreich, die das Kabel umgeben.

In der Praxis werden bei der Beschreibung eines Seekabels nicht diese Durchmesser, sondern die Gewichte von Kupfer und Guttapercha für eine bestimmte Länge, meist eine Seemeile, angegeben. Es ist leicht, die Größen  $R_1$  und  $R_2$  darauf zurückzuführen.

Bezeichnet  $\sigma_k$  das spezifische Gewicht des Kupfers,  $\sigma_g$  dasjenige der Guttapercha, so sind, wenn  $R_1$  und  $R_2$  in Zentimetern bestimmt sind, das Kupfergewicht  $Ku$  und das Guttaperchagewicht  $Ga$  für 1 km:

$$Ku = 100 R_1^2 \pi \sigma_k \text{ kg,}$$

$$Ga = 100 (R_2^2 - R_1^2) \pi \sigma_g \text{ kg.}$$

Daher ist

$$\frac{R_2^2}{R_1^2} = 1 + \frac{\sigma_k}{\sigma_g} \cdot \frac{Ga}{Ku}.$$

Man hat daher

$$K = \frac{\varepsilon}{9 \log \left( 1 + \frac{\sigma_k}{\sigma_g} \cdot \frac{Ga}{Ku} \right)} \mu F/\text{km} \dots \dots \dots (64)$$

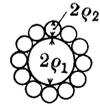
An der Form dieser Gleichung ist zu erkennen, daß es gleichgültig ist, in welchen Einheiten die Gewichte  $Ga$  und  $Ku$  bestimmt sind, da nur ihr Verhältnis in Betracht kommt.

Für  $\varepsilon$  hat man etwa 3,5 zu setzen.

Es bleibt noch der Faktor  $\frac{\sigma_k}{\sigma_g}$  zu bestimmen. Man darf für  $\sigma_k$  in der Regel nicht das bekannte spezifische Gewicht 8,94 für gezogenes Kupfer einsetzen, weil der Kupferleiter in den meisten Kabeln nicht die vorausgesetzte zylindrische Form hat.

Aus technischen Gründen bestehen die Kupferleiter der Kabel nicht aus einem Drahte, sondern aus mehreren miteinander verseilten Drähten. Ursprünglich hat man dazu sieben gleich starke Drähte genommen, von denen sechs um den siebenten herum verseilt waren. Später hat man den inneren

Draht stärker genommen als die äußeren. Eine heute fast allgemein benutzte Konstruktion (Fig. 35) besteht darin, daß um einen inneren zylindrischen Draht 12 schwächere, ebenfalls zylindrische herumgelegt sind. Damit diese aneinander anschließen, muß der Durchmesser des inneren Drahtes das 2,83fache des Durchmessers der äußeren Drähte betragen. Eine später für lange Seekabel wieder aufgegebene Konstruktion eigener Art zeigt das erste Deutsch-Amerikanische Kabel von 1900. Um einen zylindrischen Draht sind vier Drähte von trapezförmigem Querschnitt so herumgelegt, daß das Ganze möglichst genau einen zylindrischen Draht ergibt.



**§ 42. Kapazität von Litzenkabeln.** Kabel mit gleich großem Kupfergewicht und gleich großem Guttaperchagewicht werden um so größere Kapazität haben, je größer die Oberfläche der Kupferseele ist. Litzenkabel haben eine größere Oberfläche, als solche mit massivem Leiter.

Um die Kapazität eines Kabels mit einer Kupferlitze als Seele anzugeben, hätte man, wie dies in § 45 näher begründet ist, für das Potential eine Funktion zu suchen, die auf der Oberfläche der Litze und auf der äußeren Fläche der isolierten Ader konstante Werte hat und die bekannten Grenzbedingungen erfüllt. Statt dessen kann man sich für die gebräuchliche Konstruktion mit einem starken und 12 schwächeren Drähten mit einer Einschließung des Wertes der Kapazität in Grenzen begnügen.

Die Kapazität des Kabels mit Kupferlitze ist sicher kleiner, als die eines Kabels mit einem massiven Leiter, dessen Durchmesser so groß ist, wie der größte Durchmesser der Litze, also  $2(q_1 + 2q_2)$ .

Dagegen ist die Kapazität des Kabels mit Litze größer, als die eines Kabels mit kreiszylindrischem Leiter, der in derselben Hülle vom Radius  $R_2$  entstände, wenn man das Kupfer der äußeren Hälfte der äußeren Drähte in gleichmäßiger Schicht über den Umfang des verbleibenden Querschnitts verteilte. Der Radius  $\varrho$  dieses Leiters ist bestimmt durch die Gleichung

$$\varrho^2 = (q_1 + q_2)^2 + \frac{n}{2} q_2^2,$$

wo  $n$  die Zahl der äußeren Drähte ist.

Die Kapazität liegt also in den Grenzen

$$\frac{3,5}{18 \log \frac{R_2}{q_1 + 2q_2}} > K > \frac{3,5}{18 \log \frac{R_2}{\varrho}}.$$

Nehmen wir  $R = 5,5$ ,  $q_1 = 1,46$ ,  $q_2 = 0,52$  in Millimetern, und  $p = 12$ , so ist  $\varrho = 2,36$ , also ist

$$0,247 > K > 0,230.$$

Engere Grenzen als diese lassen sich mit einfachen Mitteln nicht angeben. Ihre Unterschiede stimmen nach der Größenordnung mit denjenigen überein, welche bei den  $\varepsilon$  der Guttaperchasorten vorkommen. Man kann daher ohne praktischen Fehler Unterschiede der Kapazität für Litzen- und Zylinderform vernachlässigen, wenn die Leiter gleiche größte Durchmesser haben und die isolierten Adern gleich stark sind.

**§ 43. Praktische Formeln zur Kapazitätsberechnung.** Zur Bestimmung des Wertes, der für die Dichte des Kupfers in die Formel einzusetzen ist, hat man bei einer Litze das Verhältnis des Kupferquerschnittes in der Litze zum umschließenden Kreise zu berechnen. Für die angenommene Form ist dies 0,783. Demnach ist  $\sigma_k = 8,94 \cdot 0,783 = 7,00$  zu setzen. Bei  $\sigma_g = 0,97$  ergibt sich

$$\frac{\sigma_k}{\sigma_g} = 7,22 \dots \dots \dots (65)$$

Nach einer von Dearlove aufgestellten Tabelle<sup>2)</sup> hat ein Kabel, das gleiches Gewicht von Kupfer und Guttapercha für eine bestimmte Länge aufweist, für eine Seemeile eine Kapazität von  $0,355 \mu F$ , also für 1 km  $0,192 \mu F$ . Daher ist

$$0,192 = \frac{\varepsilon}{9 \cdot \log 8,22}.$$

Da andererseits für ein beliebiges Kabel

$$K = \frac{\varepsilon}{9 \log \left( 1 + 7,22 \frac{Ga}{Ku} \right)},$$

so folgt, daß

$$K = \frac{0,175}{\log \text{ brigg.} \left( 1 + 7,22 \frac{Ga}{Ku} \right)} \mu F/\text{km} \dots \dots \dots (66)$$

Diese Formel gilt streng nur für Kabel, deren Leiter die beschriebene Form der Litze hat; aber auch bei etwas abweichender Form bietet sie noch ziemliche Genauigkeit, da durch den Logarithmus geringe Unterschiede des Wertes  $1 + 7,22 \frac{Ga}{Ku}$  einflußlos gemacht werden.

---

Dritter Abschnitt.

**Ermittlung elektrischer Verteilungen aus der Potentialfunktion.**

**§ 44. Eindeutigkeit der Lösungen der Gleichung  $\Delta \varphi = 0$ .** In den bisher besprochenen Fällen war es möglich, die Gleichung  $\Delta \varphi = 0$  in eine totale Differentialgleichung umzuwandeln und zu integrieren. Wenn dies, wie zumeist, nicht möglich ist, geht man so vor, daß man aus den etwa bekannten Funktionen, die der Gleichung  $\Delta \varphi = 0$  genügen, eine solche herausucht, welche die Grenzbedingungen ebenso erfüllt, wie es in einem bestimmten Falle vom Potential verlangt wird. Es ist nachzuweisen, daß eine Lösung, welche die verlangten Grenzbedingungen erfüllt, auch die einzige Lösung für einen bestimmten Fall ist, daß sie also wirklich das Potential ist, von dem ja Eindeutigkeit verlangt wird.

Das Potential  $\varphi$  selbst ist tatsächlich stetig und hat an den Grenzen des Feldes, also an den Leitern, vorgeschriebene konstante Werte. Seine

negativen ersten Ableitungen, die Komponenten der elektrischen Feldstärke, sind im Felde stetig, außer an etwaigen Trennflächen verschiedener Nichtleiter; an den Grenzen des Feldes steht die elektrische Kraft senkrecht zur Oberfläche und hat einen durch die Flächendichte gegebenen Wert. Diese Bedingungen sind rein physikalischer Natur und unabhängig davon, ob für das Potential eine mathematische Formel angegeben werden kann.

Nehmen wir nun an, es sei eine Funktion  $\varphi'$  gefunden, die der Gleichung  $\Delta \varphi' = 0$  genügt; ferner soll sie an den Leiterflächen dieselben konstanten Werte haben, wie das Potential; auch ihre ersten Ableitungen sollen an den Grenzflächen so bestimmt sein, daß sie nur eine zur Grenzfläche senkrechte Komponente haben, und zwar von dem Werte, welchen dort die elektrische Feldstärke hat. Kommen Trennflächen im Nichtleiter vor, so sollen für die ersten Ableitungen von  $\varphi'$  dieselben Bedingungen gelten, wie für die Komponenten der elektrischen Feldstärke.

Das Potential  $\varphi$  und die Funktion  $\varphi'$  einerseits, die elektrische Feldstärke und  $-\text{grad } \varphi'$  andererseits stimmen also an den Grenzflächen und an den Trennflächen überein; sie könnten allenfalls im Felde selbst verschieden sein, wo man ja über den Verlauf des Potentials zunächst nichts weiß.

Es bleibt zu beweisen, daß überall  $\varphi = \varphi'$  ist.

Greenscher Satz. Bildet man von zwei Skalaren  $U$  und  $W$  den Ausdruck

$$\text{div } (U \text{ grad } W),$$

so ist dieser nach der Bedeutung der Operatoren

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( U \frac{\partial W}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( U \frac{\partial W}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( U \frac{\partial W}{\partial z} \right) = U \Delta W + \text{grad } U \text{ grad } W.$$

Nach dem Gaußschen Satze ist (Gl. 16)

$$\int_{(f)} U \text{ grad } W \, d\mathfrak{f} = \int_{(v)} dv \text{ div } (U \text{ grad } W),$$

also

$$\int_{(f)} U \text{ grad } W \, d\mathfrak{f} = \int_{(v)} dv (U \Delta W + \text{grad } U \text{ grad } W) \dots \dots (67)$$

Dieser Satz heißt der Greensche Satz.

Wir machen die besondere Annahme, daß  $\Delta W = 0$  sei; dann ergibt sich

$$\int_{(f)} U \text{ grad } W \, d\mathfrak{f} = \int_{(v)} \text{grad } U \text{ grad } W \, dv.$$

In dieser Gleichung werden die Werte von  $U$  und  $\text{grad } W$  an der Grenzfläche eines Feldes in Beziehung gesetzt zu den Werten der Gradienten von  $U$  und  $W$  innerhalb des Feldes; diese Form ist offenbar für den vorliegenden Zweck brauchbar.

Anwendung auf das Potential. Wir setzen nun  $U = \varphi - \varphi'$ ,  $W = \varepsilon U$ . Da die für  $\varphi$  zu suchende Funktion die Gleichung  $\Delta \varphi = 0$  erfüllen soll, und die Funktion  $\varphi'$  die Gleichung  $\Delta \varphi' = 0$  nach Annahme erfüllt, so genügt auch  $W = \varepsilon (\varphi - \varphi')$  der Gleichung  $\Delta W = 0$ . Wir erhalten demnach

$$\int_{(f)} U \varepsilon \text{ grad } U \, d\mathfrak{f} = \int_{(v)} \varepsilon (\text{grad } U)^2 \, dv.$$

Die Funktion  $U = \varphi - \varphi'$  hat an den Grenzen den Wert Null, weil ja  $\varphi'$  dort denselben Wert haben soll wie  $\varphi$ ; ebenso ist an den Grenzen  $\text{grad } U = 0$ , weil die Ableitungen von  $\varphi'$  mit den Komponenten der elektrischen Feldstärke gleich gemacht worden sind. Nehmen wir zunächst noch an, daß im Isolator keine Trennflächen seien, so bezieht sich das Oberflächenintegral lediglich auf die Leiterflächen.

Das Oberflächenintegral  $\int_{(f)} \varepsilon U \text{ grad } U \, df$  hat unter den genannten Bedingungen den Wert Null, weil alle Einzelbeträge Null sind. Daher ist auch  $\int_{(v)} \varepsilon (\text{grad } U)^2 \, dv = 0$ .  $(\text{grad } U)^2$  ist ein skalares Produkt aus zwei gleichen Faktoren und demnach gleich dem Quadrat des Betrages jedes Faktors, also z. B. in Cartesischen Koordinaten

$$(\text{grad } U)^2 = \left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial z}\right)^2.$$

$(\text{grad } U)^2$  ist also wesentlich positiv, ebenso  $dv$ , die Gleichung  $\int_{(v)} \varepsilon (\text{grad } U)^2 \, dv = 0$  kann daher nur dadurch erfüllt werden, daß  $\text{grad } U = 0$  ist. Daraus könnte man folgern, daß  $U = \text{const}$  wäre, aber da  $U$  an der Grenzfläche den Wert Null hat, so muß die Konstante den Wert Null haben. In einem Felde mit gleichmäßigem Dielektrikum ist also  $\varphi = \varphi'$ . Man erkennt, daß in Feldern mit homogenem Dielektrikum schon die Tatsache, daß an der Oberfläche  $\varphi = \varphi'$  ist, genügt, um auch die Identität im Felde zu folgern; die Übereinstimmung der Potentiale an den Grenzflächen schließt also in solchen Feldern schon diejenige der Kräfte ein.

Haben wir eine Trennfläche im Dielektrikum, so denken wir uns diese durch Oberflächen eingehüllt, die wir dann zur Grenzfläche des Feldes hinzurechnen. Wir schließen auf diese Weise die Trennfläche aus dem Felde aus, aber indem wir schließlich die einhüllenden Flächen unendlich nahe zusammenfallen lassen, berücksichtigen wir doch das ganze Feld. Es kommt also zu dem als Null nachgewiesenen Oberflächenintegral  $\int_{(f)} \varepsilon U \text{ grad } U \, df$  über die das

Feld begrenzenden Leiterflächen hinzu das Oberflächenintegral über die beiden die Trennfläche einhüllenden Flächen. Dieses Oberflächenintegral erstreckt sich auf  $\varepsilon U \text{ grad } U$  in der Richtung der aus dem Felde heraustretenden Normale, also für die Seite  $\varepsilon_1$  auf die Normale  $n_1$ , für die Seite  $\varepsilon_2$  auf die Normale  $n_2$ . Die Bezeichnungen sind dieselben wie in Fig. 28.

Die Grenzbedingungen lauten nun für die Feldstärken

$$\varepsilon_1 \frac{\partial \varphi}{\partial n_1} = -\varepsilon_2 \frac{\partial \varphi}{\partial n_2},$$

für die Ableitungen von  $\varphi'$

$$\varepsilon_1 \frac{\partial \varphi'}{\partial n_1} = -\varepsilon_2 \frac{\partial \varphi'}{\partial n_2},$$

und zwar gilt die erste Bedingung der obwaltenden Tatsachen halber, die zweite, weil  $\varphi'$  so bestimmt wird. Daher gilt für die Differenzen

$$\varepsilon_1 \frac{\partial U}{\partial n_1} = -\varepsilon_2 \frac{\partial U}{\partial n_2}.$$

Fassen wir nun bei der Integration über die einhüllenden Flächen je zwei auf beiden Seiten der Trennfläche nebeneinander liegende Flächenelemente zusammen, so bringen sie in der Summe den Beitrag Null zu dem Oberflächenintegral; dieses ist also überhaupt Null. Das Vorhandensein einer Trennfläche ändert also nichts an dem Werte des Raumintegrals. Daher bleibt auch im allgemeinen Falle bestehen, daß  $\varphi - \varphi' = 0$  ist.

Wir erhalten also den Satz:

Eine Funktion, welche der Gleichung  $\Delta \varphi = 0$  genügt und sowohl selbst, als durch ihre ersten Ableitungen an Grenz- und Trennflächen die für das Potential und die elektrische Feldstärke durch die Eigenschaften des Feldes vorgeschriebenen Grenzbedingungen erfüllt, ist das elektrische Potential dieses Feldes.

**§ 45. Feststellung von Leiteroberflächen aus einer gegebenen Potentialfunktion.** Es sei auf irgend einem Wege eine Funktion  $\varphi$  gefunden, die der Gleichung  $\Delta \varphi = 0$  genügt; sie kann dann als Potentialfunktion einer noch unbekanntem elektrischen Verteilung betrachtet werden. Stellt man  $\varphi$  etwa in Cartesischen Koordinaten dar und setzt  $\varphi(x, y, z) = \text{const}$ , wobei man für die Konstante der Reihe nach verschiedene Werte einsetzt, so gehört zu jedem Werte der Konstanten eine Fläche, die also eine Niveaufläche der Funktion  $\varphi$  ist.

Die Ableitungen von  $\varphi$ , allgemeiner die *grad*  $\varphi$  haben bei gegebener Form von  $\varphi$  für jeden Punkt des Feldes feste Werte, sie lassen sich also nicht mehr besonderen Grenzbedingungen anpassen, außer, wenn man die in  $\varphi$  vorhandenen Parameter änderte. Eine gegebene Funktion  $\varphi$ , für die  $\Delta \varphi = 0$  ist, entspricht demnach einem ganz bestimmten elektrischen Felde. Man kann nun unter Feststellung von  $\mathcal{E} = - \text{grad } \varphi$  nach den in § 5 dargelegten Vorstellungen jeder Niveaufläche bestimmte dielektrische Verschiebungen zuordnen, deren Summe für alle Flächen dieselbe ist. Angenommen, die Funktion  $\varphi$  nehme ab, wenn man den Aufpunkt in der Richtung der aus der Fläche austretenden Normale verlegt, dann sind alle Flächen außen mit positiven, innen mit negativen Belegungen zu versehen; durch die Feldkräfte werden die positiven nach außen, die negativen nach innen gedrängt.

Man denke sich nun den Raum zwischen zwei Niveauflächen durch leitende Stoffe ausgefüllt; dann werden sich die negativen Belegungen der äußeren Fläche gegen die positiven der inneren Fläche ausgleichen, und der Leiter wird im Innern unelektrisch sein.

Der von diesem leitenden Körper umschlossene Innenraum bildet ein geschlossenes Feld, dessen Kräfte sich in den Raum außerhalb des Leiters nicht fortpflanzen und daher außer Betracht bleiben können. Die elektrische Feldstärke des Raumes außerhalb des Leiters endet an diesem senkrecht, sie hat also kein Bestreben, eine Änderung der dort befindlichen Ladungen herbeizuführen. Diese bleiben demnach in Ruhe, und damit behält auch das äußere Feld seine Gestalt bei.

Es ergibt sich daher, daß man aus jeder Funktion  $\varphi$ , die der Gleichung  $\Delta \varphi = 0$  genügt, Flächen ableiten kann, die, mit einer bestimmten Elektrizitätsmenge belegt, in der Umgebung das Potential  $\varphi$  hervorbringen. Beispiele hierfür bieten die folgenden Abschnitte.

Vierter Abschnitt.

**Verteilungen auf gestreckten Leitern.**

**§ 46. Vereinfachung der Gleichung  $\Delta \varphi = 0$ ; allgemeine Lösung.**

Unter gestreckten Leitern versteht man solche, bei welchen die Abmessungen in einer der drei Richtungen außerordentlich groß gegen diejenigen in den beiden anderen Richtungen sind. Verlaufen mehrere Leiter dieser Art parallel nebeneinander, so sind in den praktischen Fällen die Abmessungen der Leiter und ihre gegenseitigen Abstände in allen Querschnitten, welche senkrecht zu der Achse der größten Dimension ( $z$ ) gelegt werden, unverändert.

Unter Anordnungen, bei denen mehrere Leiter ein Feld bilden, rechnen die oberirdischen und unterirdischen Telegraphen- und Fernsprechleitungen, und daher ist ihre Behandlung hier besonders wichtig.

Wenn, wie vorausgesetzt, die geometrische Anordnung des Feldes mit der  $z$ -Koordinate sich nicht ändert, so trifft dies auch für die elektrische Verteilung zu. Es ist also  $\frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0$ , und für Mehrfachleitersysteme ist die

Verteilung der elektrischen Kräfte durch die Gleichung

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0 \dots \dots \dots (68)$$

gegeben.

Als Lösung dieser Gleichung ist jede beliebige Funktion von  $(x + iy)$  brauchbar, z. B.  $\log(x + iy)$ ,  $\sin(x + iy)$  u. a. m. Setzt man

$$u = \varphi + i\chi = f(x + iy) \dots \dots \dots (69)$$

wo also  $\varphi$  den reellen,  $i\chi$  den imaginären Teil von  $u$  bedeutet, so ist

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= f'(x + iy); & \frac{\partial u}{\partial y} &= if'(x + iy) \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= f''(x + iy); & \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= -f''(x + iy), \end{aligned}$$

wenn mit  $f'$  und  $f''$  Ableitungen nach  $x + iy$  selbst bezeichnet werden. Die Summe der beiden zweiten Ableitungen ist Null, also Gl. (68) erfüllt. Jede Funktion des Arguments  $(x + iy)$  liefert also eine mögliche Lösung oder vielmehr deren zwei, weil sowohl der reelle Teil  $\varphi$ , als der Faktor  $\chi$  von  $i$  jeder für sich der Differentialgleichung genügen.

Ferner ist

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial \varphi}{\partial x} + i \frac{\partial \chi}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= \frac{\partial \varphi}{\partial y} + i \frac{\partial \chi}{\partial y}. \end{aligned}$$

Daher ist

$$i \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} + i \frac{\partial \chi}{\partial x} \right) = \frac{\partial \varphi}{\partial y} + i \frac{\partial \chi}{\partial y},$$

also

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \chi}{\partial y}; \quad \frac{\partial \chi}{\partial x} = -\frac{\partial \varphi}{\partial y}.$$

Sind  $\varphi = const$  und  $\chi = const$  die Gleichungen zweier Kurven, so wird der Winkel  $\alpha_1$ , den die Tangente von  $\varphi = const$  im Punkte  $x, y$  mit der  $x$ -Achse bildet, gegeben durch

$$tg \alpha_1 = \frac{dy}{dx}, \quad \text{wo} \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x} dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y} dy = 0.$$

Daher ist

$$tg \alpha_1 = - \frac{\partial \varphi / \partial x}{\partial \varphi / \partial y}.$$

Für denselben Punkt wird der Winkel  $\alpha_2$  zwischen der Tangente von  $\chi = const$  und der  $x$ -Achse bestimmt durch

$$tg \alpha_2 = - \frac{\partial \chi / \partial x}{\partial \chi / \partial y}.$$

Wegen der für die Ableitungen von  $\varphi$  und  $\chi$  nachgewiesenen Beziehungen ist daher

$$tg \alpha_1 \cdot tg \alpha_2 = - 1.$$

Dies heißt aber, daß die Linien  $\varphi = const$  und  $\chi = const$  sich rechtwinklig schneiden. Wählt man also die Zylinder  $\varphi = const$  als Niveauflächen des Potentials, so stellen die Linien  $\chi = const$  die  $\mathfrak{E}$ - oder  $\mathfrak{D}$ -Linien dar.

Die Gleichung für das Potential koaxialer Zylinder läßt sich herleiten aus dem Ansatz  $u = \log(x + iy)$ . Dieser genügt nach Gleichung (69) der Gleichung  $\Delta \varphi = 0$ . Setzt man

$$x = r \cos \vartheta, \quad y = r \sin \vartheta,$$

so ist

$$x + iy = r e^{i\vartheta}, \quad tg \vartheta = \frac{y}{x}, \quad r = \sqrt{x^2 + y^2};$$

also ist

$$\varphi = \log \sqrt{x^2 + y^2} = \log r,$$

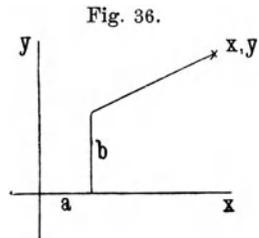
$$\chi = \vartheta = \text{arctg} \frac{y}{x}.$$

Koaxiale Zylinderflächen ( $r = const$ ) sind daher die Potentialflächen, und Linien  $\frac{y}{x} = const$ , also Radien, sind die  $\mathfrak{E}$ - oder  $\mathfrak{D}$ -Linien.

Liegt der Leiter nicht in der  $z$ -Achse selbst, sondern außerhalb dieser Achse, aber ihr parallel mit der Spur  $a, b$  in der  $x$ - $y$ -Ebene (Fig. 36), so wird man den Ansatz

$$u = C \log r$$

zu machen haben, wo aber  $\log r = \log [(x - a) + i(y - b)]$  ist. Die Konstante  $C$  ist der Ladung der Längeneinheit des Leiters proportional.



**§ 47. Verteilungen auf zwei parallelen gestreckten Leitern.** Wir wollen nun auf den Fall zweier paralleler Linien mit gleich großen und entgegengesetzten Ladungen eingehen, von denen die eine die Abszissenachse im Abstände  $+a$  von dem Ursprunge schneidet, die andere im Abstände  $-a$ .

Da das Potential beider sich aus der Summe der einzelnen Potentiale ergibt (§ 35), so machen wir den Ansatz

$$u = C \log(x + a + iy) - C \log(x - a + iy).$$

Daraus ergibt sich

$$\varphi = \frac{C}{2} \log \frac{(x+a)^2 + y^2}{(x-a)^2 + y^2}, \quad \chi = C \operatorname{arctg} \frac{2ay}{x^2 + y^2 - a^2}.$$

Die Flächen  $\varphi = \text{const}$  sind Kreiszyylinder. Setzt man

$$\sqrt{\frac{(x+a)^2 + y^2}{(x-a)^2 + y^2}} = \kappa,$$

so ergibt eine Umformung die Gleichung

$$\left(x - a \frac{\kappa^2 + 1}{\kappa^2 - 1}\right)^2 + y^2 = \left(a \frac{2\kappa}{\kappa^2 - 1}\right)^2.$$

In einem beliebigen Querschnitte liegen daher die Mittelpunkte aller Niveaureise in der  $x$ -Achse. Der Mittelpunktabstand jedes Kreises bestimmt sich durch

$$d = a \frac{\kappa^2 + 1}{\kappa^2 - 1} \dots \dots \dots (70)$$

und sein Radius durch

$$\varrho = \frac{2a\kappa}{\kappa^2 - 1} \dots \dots \dots (71)$$

In der Mittelebene ( $x = 0$ ) ist  $\kappa = 1$ , daher  $\varphi = 0$ ; wenn  $\kappa > 1$  ist, so ist  $\varphi$  positiv; für solche  $\kappa$ , die kleiner als eins sind, ist  $\varphi$  negativ.

Haben wir zwei Werte  $\kappa_1$  und  $\kappa_2 = \frac{1}{\kappa_1}$ , so ist für den durch  $\kappa_1$  bestimmten Zylinder

$$\varphi_1 = C \log \kappa_1,$$

für den durch  $\kappa_2$  bestimmten Zylinder ist

$$\varphi_2 = C \log \frac{1}{\kappa_1} = -\varphi_1.$$

Die beiden Zylinder haben folgende Mittelpunktabstände:

$$d_1 = a \frac{\kappa_1^2 + 1}{\kappa_1^2 - 1}, \quad d_2 = a \frac{1/\kappa_1^2 + 1}{1/\kappa_1^2 - 1} = -d_1;$$

ihre Halbmesser sind bestimmt durch

$$\varrho_1 = \sqrt{\left(\frac{2a\kappa_1}{\kappa_1^2 - 1}\right)^2}, \quad \varrho_2 = \sqrt{\left(\frac{2a/\kappa_1}{1/\kappa_1^2 - 1}\right)^2} = \varrho_1.$$

Die Zylinder, welche entgegengesetzt gleichen Potentialen entsprechen, liegen also symmetrisch zur  $y$ -Achse und haben gleichen Durchmesser.

Die Linien  $\frac{2ay}{x^2 + y^2 - a^2} = b$ , wo  $b$  eine wählbare Konstante ist, stellen ebenfalls Kreise dar. In der Normalform lautet ihre Gleichung

$$x^2 + \left(y - \frac{a}{b}\right)^2 = a^2 + \frac{a^2}{b^2}.$$

Die beiden Punkte  $x = a, y = 0$  und  $x = -a, y = 0$  erfüllen die Gleichung unabhängig von dem gewählten Werte von  $b$ . Alle  $\mathcal{E}$ -Linien eines senkrechten Schnittes durch die Zylinder konvergieren also in diesen beiden Punkten, welche demnach die Quelle und die Senke des Feldes darstellen.

Wir gelangen so zu folgendem Satze:

Verteilungen von Elektrizität auf parallelen, leitenden Kreiszyklindern wirken wie gleiche und entgegengesetzte Ladungen auf zwei parallelen geraden Linien, welche gleichmäßig mit gleichen und entgegengesetzten Ladungen behaftet sind.

Es bleibt noch die Beziehung der Konstanten  $A$  zur Elektrizitätsmenge festzustellen.

Die gesamte Elektrizitätsmenge, welche sich auf einer der leitend gemachten Potentialflächen befinden würde, läßt sich am einfachsten berechnen aus der ihr gleichen dielektrischen Verschiebung in der Mittelebene. Sei

$$\varphi = \frac{C}{2} \log \frac{(a+x)^2 + y^2}{(a-x)^2 + y^2},$$

so ist

$$\mathcal{E}_x = -\frac{\partial \varphi}{\partial x} = C \left( \frac{a+x}{(a+x)^2 + y^2} - \frac{x-a}{(a-x)^2 + y^2} \right).$$

In der  $y$   $z$ -Ebene, der Mittelebene, ist daher

$$(\mathcal{E}_x)_{x=0} = \frac{2Ca}{a^2 + y^2}.$$

Man erhält die gesamte dielektrische Verschiebung auf einem Streifen von 1 cm Breite in der Richtung der  $y$ -Achse als das Integral

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dy (\mathcal{D}_x)_{x=0} = \left[ \frac{C\epsilon}{2\pi c^2} \operatorname{arctg} \frac{y}{a} \right]_{-\infty}^{+\infty} = \frac{\epsilon}{c^2} \frac{C}{2}.$$

Eine dieser Verschiebung gleiche Menge befindet sich auf jeder Niveaufläche. Nennt man die Ladung jeder Niveaufläche für 1 cm Länge in der  $z$ -Richtung  $q$ , so ist also

$$q = \frac{\epsilon}{c^2} \frac{C}{2},$$

also

$$\varphi = q \frac{c^2}{\epsilon} \log \frac{(a+x)^2 + y^2}{(a-x)^2 + y^2} \dots \dots \dots (72)$$

Als zylindrische Fläche im Sinne dieser Betrachtung gilt auch die Mittelebene. In dieser Auffassung gibt die vorstehende Entwicklung das Mittel, die Kapazität eines in der Nähe der Erde ihr parallel gespannten Drahtes oder mehrerer Drähte zu berechnen.

**§ 48. Kapazität einer einfachen Leitung gegen Erde.** Bringt man eine Leitung vom Durchmesser  $2\rho$ , deren Abstand von der Erde  $h$  ist, auf die Spannung  $V$  gegen Erde, so hat man mit dem im vorigen Beispiele entwickelten Falle folgende Analogie.

Auf einer zylindrischen Fläche befindet sich, auf die Längeneinheit gerechnet, eine Menge  $+q$ , auf einer der Achse des Zylinders parallelen Ebene

auf jedem Streifen von 1 cm senkrecht zur Achse des Zylinders die gleiche Menge entgegengesetzten Vorzeichens.

Macht man daher

$$h = a \frac{\kappa^2 + 1}{\kappa^2 - 1}, \quad \varrho = \frac{2 a \kappa}{\kappa^2 - 1},$$

so stellt  $a$  die Höhe der die Leitung vertretenden geladenen Linie dar, und aus  $\kappa$  ergibt sich die Spannung des Leiters gegen die Erde durch

$$V = 2 q c^2 \log nat \kappa.$$

$\varepsilon$  ist hier gleich Eins gesetzt. Nun ist aber

$$a = \sqrt{h^2 - \varrho^2},$$

$$\kappa = \frac{h}{\varrho} + \sqrt{\left(\frac{h}{\varrho}\right)^2 - 1}.$$

Da  $h$  in der Regel mehrere Meter,  $\varrho$  einige Millimeter beträgt, so kann man praktisch genügend genau setzen:

$$a = h, \quad \kappa = \frac{2h}{\varrho}.$$

Es ist also

$$V = 2 q c^2 \log \frac{2h}{\varrho}$$

und die Kapazität

$$K = \frac{1}{2 c^2 \log 2 h / \varrho} \text{ (cgs)} = \frac{1}{18 \log nat 2 h / \varrho} \mu F / \text{km} \dots (73)$$

Das Potential in dem Raume oberhalb der Erdoberfläche hat also dieselbe Verteilung, als wenn statt der auf der Erdoberfläche durch Influenz verteilten elektrischen Mengen ein zweiter Leiter angenommen würde, welcher sich hinter der mit der Erdoberfläche zusammenfallenden Mittelebene befindet und ein Spiegelbild der Leitung oberhalb der Erde darstellt. Wir führen so die Verteilung in dem Leitersystem Draht—Erde zurück auf die Verteilung zwischen zwei mit Elektrizität geladenen Linien, die sich in einem allseits unbegrenzten homogenen Dielektrikum befinden und symmetrisch zu einer an der Stelle der Erdoberfläche gedachten Ebene liegen. Da wir ferner  $a = h$  und  $\kappa = \frac{r_1}{r_2} = \frac{2h}{\varrho}$  fanden, so bedeutet dies, daß wir bei oberirdischen Leitungen ohne merklichen Fehler die an Stelle der Leitung gedachte geladene Linie in die Achse des Leitungsdrahtes legen können.

**§ 49. Systeme paralleler Leitungen.** Wenn mehrere Leitungen parallel der Erde gespannt sind, so wird man das für eine einzelne Leitung Entwickelte sinngemäß so zu erweitern haben, daß man für jede einzelne Leitung eine mit Elektrizitätsmengen belastete Linie oberhalb der Erde einführt und die Verteilungen auf der leitenden Erdoberfläche ersetzt durch die Spiegelbilder der angenommenen belasteten Linien, bezogen auf eine mit der Erdoberfläche zusammenfallende Fläche. Das Potential an einem beliebigen Orte  $P$  ergibt sich bei dieser Annahme als Summe der Potentiale, welche die einzelnen Paare von geladenen Linien hervorbringen. Bezeichnet man die auf die Längen-

einheit bezogenen Ladungen der Linien mit  $q_1, q_2, \dots, q_n$ , die Abstände der die Leitungen darstellenden geladenen Linien von dem Punkte  $P$  (Fig. 37) mit  $a_1, a_2, \dots, a_n$ , die Abstände der Spiegelbilder von  $P$  mit  $D_1, D_2, \dots, D_n$ , so ist das Potential in  $P$

$$\varphi = \frac{c^2}{\varepsilon} \left( 2 q_1 \log \frac{D_1}{a_1} + 2 q_2 \log \frac{D_2}{a_2} + \dots + 2 q_n \log \frac{D_n}{a_n} \right) \quad \dots \quad (74)$$

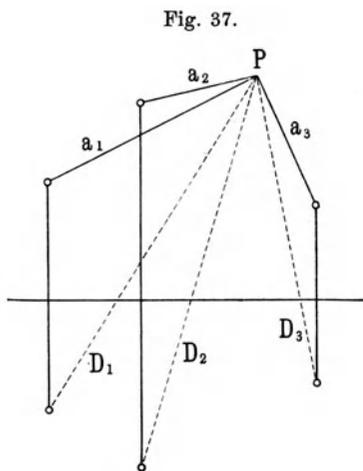
Bei Zahlenrechnungen ist  $\varepsilon = 1$  zu setzen; es wird aber hier der Vollständigkeit halber mitgeführt.

Für die Kapazitätsberechnung kommt es wieder darauf an, den Wert des Potentials auf einer Niveaufläche zu der auf dieser Fläche befindlichen Elektrizitätsmenge ins Verhältnis zu setzen. Wir haben also die Form der Niveauflächen festzustellen. Diese sind Zylinder, aber ihr Schnitt in einer zu den Leitungen senkrechten Ebene ist nicht mehr, wie in dem Falle des § 48, ein Kreiszyylinder. Insbesondere in größeren Abständen von den geladenen Linien weichen sie von dieser Form durchaus ab. Wie aber im Falle eines Drahtes die allgemeinen Formeln über die Lage der Niveauflächen durch die Maßverhältnisse eine Vereinfachung in dem Sinne erfahren, daß die Achse des zylindrischen Leiters mit der geladenen Linie zusammenfällt, so kann man sich auch im vorliegenden Falle überzeugen, daß die Niveauflächen des Potentials in solchen Entfernungen von den Linien, wie sie für die Oberfläche eines Drahtes gelten, dessen Achse mit der geladenen Linie zusammenfällt, nur außerordentlich wenig von der Form der Kreiszyylinder abweichen.

Wir wollen dies an einem etwas einfacheren Falle erläutern, nämlich an zwei Leitungen von  $2 \varrho = 5$  mm Stärke, welche in der gleichen Höhe von  $h = 7$  m über dem Erdboden einander parallel gespannt sind, mit einem Achsenabstande von  $a = 20$  cm. Sie mögen zur weiteren Vereinfachung als entgegengesetzt gleich geladen angenommen werden. Wir ersetzen die Leitungen durch zwei mit derselben Ladung belastete Linien und deren Spiegelbilder. Ist die Ladung der Längeneinheit  $q$ , so ist das Potential

$$\varphi = \frac{c^2}{\varepsilon} 2 q \log \frac{D_1}{a_1} \frac{a_2}{D_2}.$$

Wir wollen feststellen, in welchen Grenzen das Potential auf einer Zylinderfläche schwankt, die eine der beiden Linien mit Abstand  $\varrho$  umgibt; wir setzen also etwa  $a_1 = \varrho$ . Zur weiteren Vereinfachung wollen wir statt der wirklichen Werte von  $a_2, D_1$  und  $D_2$  solche bequemerer Form einsetzen, welche den größten Wert, den  $\varphi$  auf der Fläche  $a_1 = \varrho$  hat, noch vergrößern, und den kleinsten Wert noch verkleinern.



Wir erhalten dann

$$\varphi < \frac{2c^2}{\varepsilon} q \log \frac{2h + \varrho}{\varrho} \frac{a + \varrho}{\sqrt{(2h + \varrho)^2 + (a + \varrho^2)}}$$

$$\varphi > \frac{2c^2}{\varepsilon} q \log \frac{2h - \varrho}{\varrho} \frac{a - \varrho}{\sqrt{(2h - \varrho)^2 + (a - \varrho^2)}}.$$

Unter den angegebenen Verhältnissen reduzieren sich die Brüche merklich auf  $\frac{(a + \varrho)}{\varrho}$  und  $\frac{(a - \varrho)}{\varrho}$ . Man erhält

$$\log \frac{a + \varrho}{\varrho} > \frac{\varepsilon}{2c^2 q} \varphi > \log \frac{a - \varrho}{\varrho}.$$

Der Unterschied der Grenzen beträgt für  $a = 20$ ,  $\varrho = 0,25$  etwa 0,48 v. H. Würde man andererseits berechnen, welche Durchmesser der Leiter in horizontaler und in senkrechter Richtung haben müßte, damit seine Oberfläche auf konstantem Potential wäre, so würde sich ergeben, daß die beiden Durchmesser in höherem Maße übereinstimmen, als es bei den wirklichen Drähten zu erwarten ist.

Für oberirdische Leitungen folgt daher, daß man ihre Oberflächen mit genügender Genauigkeit als solche Flächen ansehen kann, in denen das durch die obige Formel angegebene Potential  $\varphi$  konstante Werte hat, und daß man die Ladungen auf jeder Oberfläche durch solche auf einer in der Achse des Drahtes liegenden Linie ersetzen kann.

Die Werte der Potentiale auf den verschiedenen Leiteroberflächen ergeben sich aus der für  $\varphi$  aufgestellten Gleichung, wenn man für den Abstand des Aufpunktes von der gerade betrachteten geladenen Linie den Radius des zugehörigen Drahtes, für die übrigen Abstände die Achsenabstände der Linien setzt. Wir bezeichnen den Achsenabstand der beiden Leitungen  $m$  und  $n$  als  $a_{mn}$ , denjenigen der Leitung  $m$  vom Spiegelbilde der Leitung  $n$  als  $D_{mn}$ . Dabei ist  $a_{mn} = a_{nm}$  und  $D_{mn} = D_{nm}$ . Auf der Mittelebene, an der alle Leitungen gespiegelt sind, hat  $\varphi$  den Wert Null; denkt man sie sich leitend, so stellt sie die Erdoberfläche dar. Beziehen wir alle Potentiale auf die Mittelebene, so sind sie mit den Spannungen  $V$  der Leiter gegen Erde identisch; wir nennen die Spannung des Leiters  $m$  gegen Erde  $V_m$  und erhalten nunmehr das System:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\varepsilon}{c^2} V_1 &= 2 q_1 \log \frac{D_{11}}{a_{11}} + 2 q_2 \log \frac{D_{12}}{a_{12}} + \dots + 2 q_n \log \frac{D_{1n}}{a_{1n}} \\ \frac{\varepsilon}{c_2} V_2 &= 2 q_1 \log \frac{D_{21}}{a_{21}} + 2 q_2 \log \frac{D_{22}}{a_{22}} + \dots + 2 q_n \log \frac{D_{2n}}{a_{2n}} \\ &\dots \dots \dots \end{aligned} \right\} \dots \quad (75)$$

und zwar hat man so viele Gleichungen wie Leitungen. Sind also die Spannungen der Leitungen gegen Erde gegeben, so lassen sich ihre Ladungen  $q_1, q_2 \dots$  berechnen, ebenso aus den Ladungen die Spannungen.

Für die Technik wichtige Anwendungen finden diese Formeln einerseits für die Bestimmung der Kapazität von Mehrfachleitungen, andererseits für die Theorie der elektrischen Influenz zwischen Hochspannungsleitungen und benachbarten Schwachstromleitungen.

**§ 50. Mehrfachleitersysteme.** Mit diesem Namen bezeichnet man Systeme paralleler gestreckter Leiter, die in derartiger gegenseitiger Abhängigkeit betrieben werden, daß der Verlauf der elektrischen, allgemeiner der elektromagnetischen Vorgänge in einem der Leiter durch die gleichzeitigen in den übrigen Leitern wesentlich bestimmt wird. Mehrfachleitersysteme sind demnach z. B. Doppelleitungen, deren Zweige als Hin- und Rückleitung in einem von anderen Leitern getrennten Leitersystem dienen; ferner Drehstrom- oder andere Mehrphasenstromleitungen.

In der relativen Bedeutung des Wortes „wesentlich“ liegt es, daß man in anderen Fällen über die Anwendbarkeit der Bezeichnung als Mehrfachleitersystem zweifelhaft sein kann. Wenn es z. B. auf den Verlauf der Ströme in einer Kraftübertragungsleitung ankommt, so wird die aus Fernsprechleitungen an demselben Gestänge sich ergebende Rückwirkung so gering sein, daß sie für den Verlauf der Starkströme als nicht wesentlich zu bezeichnen ist; ferner darf man, um lediglich die Fortpflanzung der Fernsprechströme zu studieren, die durch die Sprechströme in den Kraftleitungen hervorgerufenen elektromagnetischen Vorgänge und deren Rückwirkung auf die Vorgänge in den Fernsprechleitungen vernachlässigen. Will man aber die Beeinflussung der Fernsprechleitung durch die Ströme der Kraftleitung untersuchen, so bilden ohne Zweifel beide Arten von Leitungen ein Mehrfachleitersystem.

Telegraphenleitungen in derselben Linie sind im allgemeinen nicht als Mehrfachleitersysteme anzusehen, da sie so gut wie unabhängig voneinander arbeiten; wenn aber die Untersuchung die Feststellung der Störungen zum Ziel hat, so ergibt sich wieder ein Mehrfachleitersystem.

**§ 51. Doppelleitung.** Durch die Anwendung ist in der Regel die Spannung  $V$  der beiden Zweige gegeneinander bestimmt; durch die geometrischen Verhältnisse ergibt sich dann, welche Spannungen  $V_1$  und  $V_2$  beide Zweige gegen Erde annehmen. Den Zusammenhang dieser Größen findet man auf folgendem Wege.

$V$  bedeute die Spannung des Leiters 1 gegen den Leiter 2; sie ist also positiv, wenn  $V_1 > V_2$  ist (Fig. 38). Läßt man von Leiter 1 eine Einheit der Elektrizitätsmenge erst nach 2 und dann zur Erde führen, so wird die Arbeit  $V + V_2$  geleistet. Wird dieselbe Menge von 1 unmittelbar zur Erde geführt, so ist die Arbeit gleich  $V_1$ ; daher ist

$$V = V_1 - V_2.$$

Für die beiden Spannungen  $V_1$  und  $V_2$  erhält man

$$\left. \begin{aligned} \frac{\epsilon}{c^2} V_1 &= 2 q_1 \log \frac{2 h_1}{\rho_1} + 2 q_2 \log \frac{h_1 + h_2}{a} \\ \frac{\epsilon}{c^2} V_2 &= 2 q_1 \log \frac{h_1 + h_2}{a} + 2 q_2 \log \frac{2 h_2}{\rho_2} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (76)$$

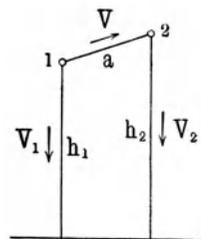


Fig. 38.

Dabei ist der geringe Betrag, um den der Abstand einer Leitung von dem Spiegelbilde der anderen den Wert  $h_1 + h_2$  übertrifft, der Einfachheit halber vernachlässigt. Man hat folgende Fälle zu unterscheiden:

1. Die Zweige dienen als Hin- und Rückleitung eines isolierten Systems. Dann ist  $q_1 = -q_2 = q$ , weil für jedes Stück der Leitung die Gleichung  $\text{div } i = 0$  gilt. Dann ist also

$$\frac{\varepsilon}{c^2} V_1 = 2q \log \frac{a}{\varrho_1} \frac{2h_1}{h_1 + h_2},$$

$$\frac{\varepsilon}{c^2} V_2 = -2q \log \frac{a}{\varrho_2} \frac{2h_2}{h_1 + h_2}.$$

Die Spannung  $V$  teilt sich dann derart, daß

$$V_1 = V \frac{\log \frac{a}{\varrho_1} \frac{2h_1}{h_1 + h_2}}{\log \frac{a}{\varrho_1} \frac{2h_1}{h_1 + h_2} + \log \frac{a}{\varrho_2} \frac{2h_2}{h_1 + h_2}},$$

$$V_2 = -V \frac{\log \frac{a}{\varrho_2} \frac{2h_2}{h_1 + h_2}}{\log \frac{a}{\varrho_1} \frac{2h_1}{h_1 + h_2} + \log \frac{a}{\varrho_2} \frac{2h_2}{h_1 + h_2}}.$$

Die Spannungen der Leitungen werden entgegengesetzt gleich im allgemeinen Falle, wenn  $\frac{h_1}{\varrho_1} = \frac{h_2}{\varrho_2}$  ist. Wenn man, wie dies praktisch wohl stets geschieht,  $\varrho_1 = \varrho_2$  macht, so bleiben die Spannungen ungleich, außer wenn  $h_1 = h_2$  ist. Eine im strengen Sinne symmetrische Doppelleitung besteht also nur, wenn die Zweige gleich hoch angebracht sind. Bei der praktischen Ausführung ist sie aber auch in diesem Falle nicht zu verwirklichen, weil die verschiedene Annäherung der Leitungen an die Stangen oder andere Leiter die Symmetrie doch beeinträchtigt.

Tatsächlich ist die Unsymmetrie gering. Nehmen wir z. B. an, daß  $h_1 = 700$ ,  $h_2 = 720$ ,  $a = 20$  und  $\varrho_1 = \varrho_2 = 0,2$  seien, so ist

$$\frac{\varepsilon}{c^2} V_1 = 2q \cdot 2,3 \cdot 1,994,$$

$$\frac{\varepsilon}{c^2} V_2 = -2q \cdot 2,3 \cdot 2,006,$$

so daß

$$V_1 = 0,4975 V, \quad V_2 = -0,5025 V$$

wird. Man kann also bis auf kleine Fehler eine oberirdische Doppelleitung aus gleich starken Drähten als eine hinsichtlich der elektrischen Eigenschaften symmetrische betrachten.

Machen wir nun auch  $h_1 = h_2$ , so bemerken wir, daß aus den Gleichungen der Abstand von der Erde völlig herausfällt. Allerdings ist in den Gleichungen schon vorausgesetzt, daß  $(2h)^2$  gegen  $a^2$  groß sei, eine Bedingung, der in der Wirklichkeit weitgehend Rechnung getragen ist. Leitungen, welche im Vergleich zu ihrem gegenseitigen Abstand weit von der Erde entfernt sind, verhalten sich also im wesentlichen, als wenn die Erde überhaupt nicht vorhanden wäre. Dies gilt freilich nur für solche Stellen, die weit von der Erde entfernt sind, während in der Nähe der Erde die Niveaulächen des Potentials durch die Erde eine Änderung erfahren<sup>3)</sup>.

Man kann also für eine symmetrische oberirdische Doppelleitung mit großer Genauigkeit setzen:

$$\frac{\epsilon}{c^2} V_1 = 2 q \log \frac{a}{\varrho},$$

$$\frac{\epsilon}{c^2} V_2 = - 2 q \log \frac{a}{\varrho},$$

woraus sich dann ergibt

$$\frac{\epsilon}{c^2} V = 4 q \log \frac{a}{\varrho}.$$

Diese Formel kann dazu dienen, die auf der Längeneinheit des positiv geladenen Zweiges der Leitung befindliche Elektrizitätsmenge  $q$  aus den Dimensionen und der Spannung der beiden Zweige zu berechnen. Man pflegt das Verhältnis  $q/V$  als die Schleifenkapazität der Doppelleitung zu bezeichnen. Diese ist also

$$K = \frac{\epsilon}{4 c^2 \log a/\varrho} \dots \dots \dots (77)$$

Durch diese Benennung soll darauf aufmerksam gemacht werden, daß durch die Bezeichnung Kapazität allein die Ladungsverhältnisse eines Mehrfachleitersystems nicht genügend genau bestimmt sind, sodann, daß sich die angegebene Größe auf einen ganz bestimmten Betriebsfall, hier den mit isolierter Hin- und Rückleitung, bezieht.

2. Die Leitungen dienen in Parallelschaltung als Leiter eines an den Enden geerdeten Systems.

Schneidet man aus der Doppelleitung ein kurzes Stück heraus, so haben die beiden Zweige dieselbe Spannung  $V_1$  gegen Erde, und daher gelten die Gleichungen:

$$2 q_1 \log \frac{2 h_1}{\varrho_1} + 2 q_2 \log \frac{h_1 + h_2}{a} = \frac{\epsilon}{c^2} V_1,$$

$$2 q_1 \log \frac{h_1 + h_2}{a} + 2 q_2 \log \frac{2 h_2}{\varrho_2} = \frac{\epsilon}{c^2} V_1.$$

Aus diesen folgt:

$$\frac{q_1}{V_1} = \frac{1}{2} \frac{\frac{\epsilon}{c^2} \log \frac{2 h_2}{\varrho_2} \frac{a}{h_1 + h_2}}{\log \frac{2 h_1}{\varrho_1} \log \frac{2 h_2}{\varrho_2} - \left( \log \frac{h_1 + h_2}{a} \right)^2},$$

$$\frac{q_2}{V_1} = \frac{1}{2} \frac{\frac{\epsilon}{c^2} \log \frac{2 h_1}{\varrho_1} \frac{a}{h_1 + h_2}}{\log \frac{2 h_1}{\varrho_1} \log \frac{2 h_2}{\varrho_2} - \left( \log \frac{h_1 + h_2}{a} \right)^2}.$$

Unter der Voraussetzung der symmetrischen Anordnung der Leitungen werden  $\frac{q_1}{V_1}$  und  $\frac{q_2}{V_1}$  einander gleich; unter den im Bau obwaltenden Verhältnissen stimmen sie fast genau überein. Auch diese Quotienten haben die Dimension einer Kapazität; sie können wieder nicht schlechthin als die

Kapazitäten der Leitungen bezeichnet werden, weil sie sich auf die besondere und willkürliche Voraussetzung  $V_1 = V_2$  beziehen. Wir wollen den Quotienten  $q_1/V_1$  als Simultankapazität des ersten Leiters bezeichnen, weil der Leiter bei der Simultanschaltung (für gleichzeitige Telegraphie und Telephonie) den Telegraphierströmen gegenüber diese Kapazität zeigt.

Für eine symmetrische Doppelleitung ist die Simultankapazität jedes Drahtes

$$K = \frac{\varepsilon}{2 c^2 \log 4 h^2/a \varrho} \dots \dots \dots (78)$$

Vergleicht man diesen Wert mit der Kapazität einer Einzelleitung

$$\frac{\varepsilon}{2 c^2 \log 2 h/\varrho'}$$

so findet man, daß die Kapazität jedes einzelnen von zwei parallel geschalteten Drähten kleiner ist als die Kapazität eines einzelnen Drahtes. Die Kapazität der beiden Drähte zusammengenommen ist zwar größer als die eines einzelnen Drahtes, aber sie beträgt nicht das Doppelte davon.

Ähnliches gilt auch, wenn man mehr als zwei Drähte parallel anordnet, wie es, wenigstens angenähert, in den Antennen der drahtlosen Telegraphie der Fall ist; die Kapazität eines solchen Senders wächst langsamer als die Zahl der Drähte.

**§ 52. Teilkapazitäten.** Wenn es sich um einen Überblick über die Elektrizitätsverteilung in Mehrfachleitungen mit zahlreichen Leitern handelt, so ist die Anwendung des Begriffes der Teilkapazitäten sehr bequem.

Wir gelangen zu diesem auf folgendem Wege.

In dem Gleichungssystem (75)

$$\begin{aligned} \frac{\varepsilon}{c^2} V_1 &= 2 q_1 \log \frac{D_{11}}{\varrho_1} + 2 q_2 \log \frac{D_{12}}{a_{12}} + \dots \\ \frac{\varepsilon}{c^2} V_2 &= 2 q_1 \log \frac{D_{21}}{a_{21}} + 2 q_2 \log \frac{D_{22}}{\varrho_2} + \dots \\ &\dots \dots \dots \end{aligned}$$

welches den Zusammenhang zwischen Spannungen und Ladungen auf einem System mit vergleichsweise dünnen und voneinander weit entfernten Leitern darstellt, ist durch die Größen  $D$ ,  $a$  und  $\varrho$ , also die Konstruktionsdaten, eine eindeutige Abhängigkeit zwischen den Größen  $V$  und  $q$  gegeben. Aus diesem Gleichungssystem kann man ein anderes bilden von der Form

$$\left. \begin{aligned} q_1 &= c_{11} V_1 + c_{12} V_2 + \dots + c_{1n} V_n \\ q_2 &= c_{21} V_1 + c_{22} V_2 + \dots + c_{2n} V_n \\ &\dots \dots \dots \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (79)$$

Hat der Leiter  $e$  das Potential Eins, während die Potentiale aller übrigen Leiter Null sind, so besitzt nach Gl. (79) der Leiter  $e$  die Menge  $c_{ee}$ , ein Leiter  $f$  die Menge  $c_{ef}$ . Nach Maxwell<sup>4)</sup> heißt  $c_{ee}$  die Kapazität des  $e$ ten Leiters,  $c_{ef}$  der Induktionskoeffizient der Leiter  $e$  und  $f$ .

Man kann statt dieses Gleichungssystems wieder ein anderes schreiben:

$$\left. \begin{aligned} q_1 &= k_{10}V_1 + k_{12}(V_1 - V_2) + k_{13}(V_1 - V_3) + \dots + k_{1n}(V_1 - V_n) \\ q_2 &= k_{20}V_2 + k_{21}(V_2 - V_1) + k_{23}(V_2 - V_3) + \dots + k_{2n}(V_2 - V_n) \\ &\dots \dots \dots \end{aligned} \right\} (80)$$

Die Koeffizienten  $k$  sind durch die Koeffizienten  $c$  völlig bestimmt. So ist z. B.:

$$\left. \begin{aligned} c_{11} &= k_{10} + k_{12} + k_{13} + \dots + k_{1n}, \\ c_{12} &= -k_{12}, c_{13} = -k_{13}, \dots, c_{1n} = -k_{1n} \end{aligned} \right\} \dots \dots (81)$$

Die Koeffizienten  $k$  ergeben sich demnach ebenfalls aus den Dimensionen, sind also von den gerade obwaltenden Werten der Spannungen und Mengen unabhängig.

Durch jedes der beiden Systeme (79) und (80) wird die auf einem beliebigen Leiter  $e$  befindliche Menge  $q_e$  in Teile zerlegt; aus (80) geht hervor, wie diese Teile von den Spannungen zweier Leiter gegeneinander abhängen.

Man würde dasselbe Ergebnis hinsichtlich der Spannungen und Mengen erhalten, wenn man sich die Leiter selbst dimensionslos, also auch kapazitätsfrei dächte und zwischen je zwei Leiter  $e$  und  $f$  einen Kondensator von der Größe  $k_{ef}$  legte. Man erkennt hieraus auch, daß  $k_{ef} = k_{fe}$ , also auch  $c_{ef} = c_{fe}$  ist. Die  $k_{ef}$  haben positive, die  $c_{ef}$  negative Werte.

Diese Kondensatoren  $k_{ef}$ , auf gleiche Leiterlängen gerechnet, heißen die Teilkapazitäten der Leiter gegeneinander.

Die Koeffizienten  $k_{10}, k_{20}, \dots$  geben an, welcher Teil der Ladung jedes Leiters von der Spannung des Leiters gegen Erde herrührt; sie heißen die Teilkapazitäten der Leiter gegen Erde.

Der Begriff der Teilkapazitäten ist hier zwar von einem bestimmten Mehrfachleitersystem hergeleitet worden. Gehen wir aber auf den § 35 zurück, nach welchem sich in einer beliebigen Verteilung das Potential an jeder Stelle als  $\frac{c^2}{\epsilon} \sum \frac{q}{r}$ , also als lineare Funktion der einzelnen Mengen darstellen läßt, so ist zu erkennen, daß die Gleichungssysteme (79) und (80) unter veränderten Werten der Koeffizienten  $c$  und  $k$  für jede beliebige Anordnung von Leitern gelten.

Die Teilkapazitäten haben also für jedes System von Leitern bestimmte Werte, die sich aus den Konstruktionsgrößen Form, Abstände, Dielektrikum ergeben, und von den Betriebsgrößen Menge und Spannung völlig unabhängig sind. Dagegen sei, um Irrtümer zu vermeiden, hervorgehoben, daß die Teilkapazität zweier Leiter nicht lediglich durch ihre Lage zueinander bestimmt ist, sondern auch durch alle übrigen Leiter des Systems.

Zur Erläuterung besprechen wir die

**§ 53. Teilkapazitäten einer Doppelleitung.** Aus Fig. 39 ergibt sich, daß

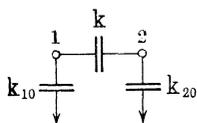
$$\begin{aligned} q_1 &= k_{10}V_1 + k(V_1 - V_2), \\ q_2 &= k_{20}V_2 + k(V_2 - V_1). \end{aligned}$$

Macht man  $q_1 = -q_2 = q$ , so wird, wenn  $V_1 - V_2 = V$  gesetzt wird,

$$V_1 = \frac{k_{20}}{k_{10} + k_{20}} V; \quad V_2 = \frac{k_{10}}{k_{10} + k_{20}} V.$$

Man erhält die Bedingung für die elektrische Symmetrie der Doppelleitung, daß  $k_{10} = k_{20}$ . Dies wird nur der Fall sein, wenn beide Leiter auch geometrische Symmetrie zeigen.

Fig. 39.



Wird, Symmetrie vorausgesetzt,  $k_{10} = k_{20} = k_0$ , so ist die Schleifenkapazität

$$K_1 = k + \frac{1}{2} k_0.$$

Legt man beide Leiter an dieselbe Spannung, so hat das Paar die Kapazität

$$K_2 = 2k_0.$$

Wird ein Leiter geerdet, so ist die Kapazität des anderen

$$K_3 = k_0 + k.$$

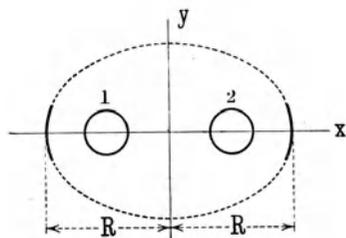
Diese drei an der Doppelleitung nach bekannten Verfahren meßbaren Kapazitäten hängen also durch die Gleichung zusammen:

$$4K_1 + K_2 = 4K_3.$$

**§ 54. Kapazität von Doppelleitungskabeln.** In dem für die Telephonie sehr wichtigen Falle eines Kabels mit zwei symmetrischen, in einer isolierten Hin- und Rückleitung betriebenen Leitungen liegen die Drähte einander benachbarter Leiter so nahe, daß es nicht angängig ist, den Durchmesser der Drähte gegen die Abstände zu vernachlässigen.

Eine Lösung, welche auf solche Leitungen anwendbar ist, bietet sich folgendermaßen. Gefordert wird eine Anordnung (Fig. 40), in der das

Fig. 40.



Potential auf dem Leiter 1 den Wert  $+V$ , auf dem Leiter 2 das Potential  $-V$  hat; der Symmetrie halber ist es in der Mittelebene Null; außerdem soll es auf einer Hülle den Wert Null haben, welche die durch die Achsen der Leiter gelegte Ebene im Abstände  $R$  von der Mittelebene beiderseits schneidet. Im übrigen muß diese Hülle etwa kreisförmigen Querschnitt haben; es würde z. B. keine brauchbare

Lösung ergeben, wenn die Hülle sich beiderseits mit zwei Ästen der  $y$ -Achse asymptotisch näherte.

Wir werden versuchsweise an Stelle der beiden Leitungen zwei entgegengesetzt geladene elektrische Linien setzen, welche zunächst in der Mittelebene das Potential auf dem Werte Null lassen. Damit es in den Punkten  $x = \pm R, y = 0$  auch den Wert Null habe, muß offenbar außerhalb der Hülle auf der positiven  $x$ -Achse eine negativ geladene Linie und ihr entsprechend auf der anderen Seite eine positive gleicher Einheitsladung angenommen werden. Mit diesen Annahmen können wir den Forderungen genügen, daß das Potential zu beiden Seiten der Mittelebene symmetrische Werte und an einer bestimmten Stelle der  $x$ -Achse den Wert Null habe. Für einen beliebigen Punkt  $P$  erhält man das Potential

$$\varphi = \frac{c^2}{\varepsilon} \left( 2q \log \frac{r_2}{r_1} + 2q_1 \log \frac{r_2'}{r_1'} \right).$$

Man kann hierin verfügen über die Werte  $q_1, a, b$ . (Fig. 41.) Es vereinfacht die Gleichungen erheblich, wenn man  $q_1 = q$  setzt, man erhält dann

$$\varphi = \frac{c^2}{\varepsilon} 2q \log \frac{r_2 r_2'}{r_1 r_1'}$$

Das Potential hat den Wert Null auf der hinsichtlich ihres Schnittes in der  $xy$ -Ebene durch die Gleichung

$$r_2 r_2' = r_1 r_1'$$

oder

$$[(x + a)^2 + y^2][(b - x)^2 + y^2] = [(x - a)^2 + y^2][(b + x)^2 + y^2]$$

bestimmten Fläche.

Nach Ausscheidung der auf beiden Seiten gleichen Posten erhält man

$$x(b - a)(x^2 + y^2 - ab) = 0.$$

Daß  $b$  und  $a$  verschieden seien, ist hier notwendige Voraussetzung. Das Potential ist also Null, wo  $x = 0$  ist, also in der Mittelebene und außerdem auf einem Kreise, der mit dem Radius  $R = \sqrt{ab}$  um den Anfangspunkt geschlagen ist.

Die angenommene Anordnung von vier Linien ergibt also hinsichtlich der Fläche mit dem Potential Null eine befriedigende Lösung.

Man kann übersehen, daß sich bei einer anderen Wahl des Verhältnisses  $q_1/q$  andere Formen der geerdeten Hülle als die des Kreiszyinders geben. Macht man z. B.  $q_1 > q$ , so wird die Hülle einen länglichen Querschnitt erhalten. Indessen dürfte die Annahme eines kreiszylindrischen Querschnittes für alle praktischen Erfordernisse genügen.

Wenn  $R$  gegeben ist, ist jetzt nur noch eine der Größen  $a$  und  $b$  wählbar. Man kann innerhalb des Kreises  $a$  größer oder kleiner wählen, und danach wird eine bestimmte Potentialfläche die  $x$ -Achse an diesen oder jenen Stellen schneiden. Nun soll  $a$  so bestimmt werden, daß ein bestimmter Wert des Potentials  $\varphi$ , für welchen nämlich

$$\frac{r_2 r_2'}{r_1 r_1'} = u$$

Fig. 41.

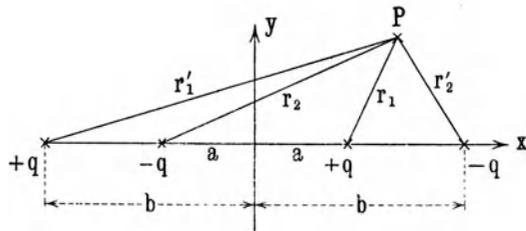
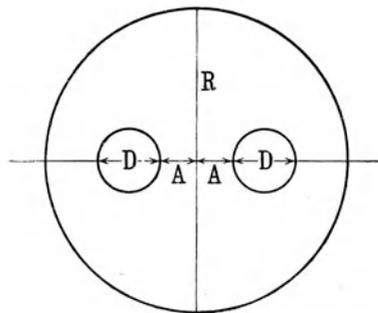


Fig. 42.



ist, an den Stellen der  $x$ -Achse herrscht, wo diese die Leiteroberflächen trifft. Diese Stellen seien  $x_1 = A$  und  $x_2 = A + D$ , worin  $A$  und  $D$  nach Fig. 42 aus den Konstruktionsverhältnissen entnommen werden können.

Da die Größen  $r$  ihrer Natur nach positive Größen sind, so erhält man für  $x_1$  und  $x_2$  die Bestimmungsgleichungen

$$\begin{aligned}(a + x_1)(b - x_1) &= u(a - x_1)(b + x_1) \\ (a + x_2)(b - x_2) &= u(x_2 - a)(b + x_2).\end{aligned}$$

Daraus ergibt sich

$$\begin{aligned}(b - a)x_1 \frac{u + 1}{u - 1} &= R^2 - x_1^2 \\ (b - a)x_2 \frac{u - 1}{u + 1} &= R^2 - x_2^2.\end{aligned}$$

Aus diesen Gleichungen lassen sich  $b - a$  und  $u - 1/u + 1$  bestimmen. Für die letztere Größe ergibt sich

$$\frac{u - 1}{u + 1} = \sqrt{\frac{R^2 - (A + D)^2}{R^2 - A^2} \frac{A}{A + D}}.$$

Man erhält daraus für  $u$  die Gleichung

$$u^2 - 2u \left( \frac{2A}{D} \frac{R^2 - (A^2 + AD)}{R^2 + (A^2 + AD)} - 1 \right) + 1 = 0.$$

Sie geht in eine bequemere Form über, wenn man den Achsenabstand der Leiter mit  $2d$ , ihren Durchmesser mit  $2\varrho$  bezeichnet, so daß

$$D = 2\varrho, \quad A = d - \varrho$$

wird. Dann ergibt sich die Gleichung

$$u^2 - 2u \frac{d}{\varrho} \frac{R^2 - (d^2 - \varrho^2)}{R^2 + (d^2 - \varrho^2)} + 1 = 0.$$

Von den beiden Wurzeln dieser Gleichung ist mit Rücksicht darauf, daß der  $\log$  einen positiven Wert ergeben muß, nur die mit zwei positiven Gliedern zu gebrauchen.

Man erhält daher auf der durch die angegebenen Maße bestimmten Fläche das Potential

$$\varphi = \frac{c^2}{\varepsilon} 2q \log \left[ \frac{d}{\varrho} \frac{R^2 - (d^2 - \varrho^2)}{R^2 + (d^2 - \varrho^2)} + \sqrt{\left(\frac{d}{\varrho}\right)^2 \left(\frac{R^2 - (d^2 - \varrho^2)}{R^2 + (d^2 - \varrho^2)}\right)^2 - 1} \right] \quad (82)$$

In der Regel ist das Quadrat unter der Wurzel groß gegen Eins, wenn nämlich der Achsenabstand erheblich gegen die Drahtstärke ist. Dann kann man auch  $\varrho^2$  gegen  $d^2$  vernachlässigen.

Die Schleifenkapazität der Doppelleitung ist das Verhältnis  $q/2\varphi$ ; mit der zuletzt genannten Vereinfachung erhalten wir den Wert

$$\left. \begin{aligned} K &= \frac{\varepsilon}{4c^2 \log \frac{2d}{\varrho} \frac{R^2 - d^2}{R^2 + d^2}} \text{ (cgs)} \\ &= \frac{\varepsilon}{36 \log \text{nat} \frac{2d}{\varrho} \frac{R^2 - d^2}{R^2 + d^2}} \mu \text{ F/km} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (83)$$

Für die praktische Brauchbarkeit dieser Formel kommt es darauf an, ob die Niveaufläche, welche nach ihrer Bestimmung zwar die  $x$ -Achse in denselben Punkten schneidet wie die Oberfläche des Leiters, auch sonst genügend genau mit ihr zusammenfällt, so daß man statt der ganzen Leiterfläche die Niveaufläche setzen darf. Diese Prüfung läßt sich nur von Fall zu Fall durch numerische Rechnung ausführen. Man hat dazu noch die Werte  $a$  und  $b$  zu berechnen und dann eine Reihe von Stellen außerhalb der  $x$ -Achse aufzusuchen, in denen das Potential den vorgeschriebenen Wert hat.

Fig. 43 zeigt eine Reihe von Potentialflächen der angenommenen Potentialfunktion, wobei für die innersten als Leiteroberflächen die Werte  $R = 0,3$  cm,  $D = 0,07$  cm,  $A = 0,08$  cm gewählt sind. Es wurde angenommen, daß diese Maße (1898) ungefähr bei einem vielpaarigen Telephonkabel zutreffen, wenn man sich statt der eine Doppelader umgebenden geerdeten Adern eine elektrisch gleichwertige geschlossene Zylinderfläche denkt.

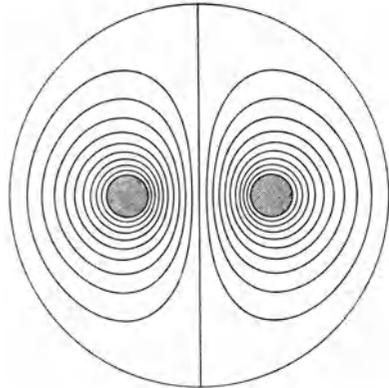
Nicht nur die innersten Flächen, sondern auch noch mehrere der daran sich anschließenden sind mit großer Genauigkeit Kreiszyklindern gleich.

Es sei noch darauf aufmerksam gemacht, daß die Kapazität von Kabeln sich nicht ändert, wenn man alle linearen

Dimensionen in gleichem Maße vergrößert. Kabel ähnlichen Querschnitts haben also bei gleichem Dielektrikum auch gleiche Kapazität.

Eine Diskussion der Formel für die Kapazitätsberechnung ergab zunächst, daß die Kapazität um so größer ist, je kleiner  $u$ , je kleiner also auch  $u - 1/u + 1$  ist. Demnach ist die Kapazität um so kleiner, je größer  $R$  und je kleiner  $D$  ist; diese Aussagen decken sich mit der Anschauung. In betreff der Größe  $A$  ist zu sagen, daß die Kapazität sowohl groß wird, wenn die Leiter sehr nahe aneinanderkommen, wodurch ihre gegenseitige Teilkapazität gesteigert wird, als auch, wenn sie dem Bleimantel sehr nahe kommen, weil dies die Teilkapazität gegen Ende vergrößert. Es wird also eine bestimmte Lage der Adern innerhalb des Mantels geben, für welche die Kapazität einen Mindestwert hat; die Rechnung ergibt kein einfaches Resultat; die Adern sind so zu legen, daß ihr kürzester Abstand voneinander etwas kleiner als das Doppelte ihres kürzesten Abstandes vom Bleimantel ist.

Fig. 43.



**§ 55. Kapazität von Doppelleitungen in vielpaarigen Kabeln.** Bei vielpaarigen Kabeln kommt nicht der Bleimantel, der das ganze Kabel umschließt, für die Bestimmung der Kapazität in Betracht, die geerdete Hülle wird vielmehr durch die benachbarten Adern dargestellt. Dies ist ohne weiteres ersichtlich bei der Messung der Kapazität, da nach Vorschrift während der Messung jeder Doppelader die anderen geerdet sein sollen. Auch im Fernsprechnetze können die Nachbaradern in Ansehung des Verlaufs der Wechselströme in der zum Sprechen benutzten Ader als geerdet gelten.

Bei den meisten  $ZB$ -Schaltungen hat wenigstens eine Ader sowohl in der Ruhe- als auch in der Arbeitsschaltung Erde im Amte.

Von einer zylindrischen Hülle kann daher bei den Adern vielpaariger Telephonkabel nicht gesprochen werden; die Hülle wird von einzelnen, bald näher, bald weiter ab von der besprochenen Ader liegenden Drähten gebildet. Hat man ein Kabel im Schnitt vor sich, so kann man durch Ausmessung den mittleren Wert des Abstandes der benachbarten Drähte vom Mittelpunkte einer Schleife feststellen und diesen in der Formel (82) für  $R$  einsetzen. Mit gleicher Genauigkeit wird man aber auch die Kapazität bestimmen können, indem man statt des  $R$  eine Größe einsetzt, die man aus der mittleren Raumbeanspruchung einer Doppelader und dem Durchmesser ihrer Drähte berechnet.

Wir wollen zu diesem Zwecke annehmen, die Doppelader nehme einen zylindrischen Raum vom Radius  $R'$  ein und alle Doppeladern seien gleichmäßig über die Fläche des Kabelquerschnittes verteilt. Letztere Annahme trifft zu, die andere ist etwas idealisiert, aber durch keine einfachere zu ersetzen. Unter diesen Annahmen liegen je sechs Doppeladern gleichmäßig verteilt um eine siebente herum; verbindet man die Mittelpunkte der sechs äußeren Adern, so erhält man ein regelmäßiges Sechseck, dessen Flächeninhalt den Raum von  $\frac{6}{3} + 1 = 3$  Doppeladern umschließt. Die Seite dieses Sechsecks ist  $2 R'$ , daher ergibt sich der Flächeninhalt, der auf jede Doppelader fällt, zu  $2 R'^2 \sqrt{3}$ . Nennen wir diese Fläche  $F$ , so ist

$$R' = 0,537 \sqrt{F}.$$

Aus dem lichten Maße des Bleimantels und der Zahl der Adern kann man also die Größe  $R'$  bestimmen.

Es bleiben von den in Fig. 42 vorkommenden Größen noch  $R$  und  $A$  zu bestimmen, da  $D = 2 \varrho$  ist, wenn  $2 \varrho$  den Durchmesser der Drähte bezeichnet.

Für  $R$  wird man den ungünstigsten Wert wählen; dieser ergibt sich, wenn die Ebene der Drähte der Nachbarader durch die Achse der besprochenen Ader geht, und für  $R$  gilt der Wert von dieser Achse bis an die zunächst liegende Stelle des nächsten Drahtes der Nachbarader. Man findet so  $R = 2 R' - (A + D)$ . Der Abstand  $2 A$  der Drähte einer Schleife hängt nicht unmittelbar von  $R'$  und  $\varrho$  ab, da man nach Belieben die Drähte mehr gegeneinander und mehr nach außen isolieren kann. Bei der Betrachtung der Verteilung der Adern in einem fertigen Kabel gewöhnlicher Bauart findet man aber keine sonderlichen Unterschiede zwischen den Abständen von Adern, die demselben Paare angehören und den Abständen von Adern verschiedener Paare. Man kann daher annähernd setzen

$$A = \frac{1}{2} (R' - D).$$

In der Kapazitätsformel (82) ist statt des nächsten Abstandes  $2 A$  der Drähte ihr Achsenabstand  $2 d$  eingeführt; für diesen erhält man unter obiger Annahme

$$d = \frac{R'}{2}$$

und ferner

$$R = \frac{3}{2} R' - \varrho.$$

Setzt man diese Werte in Gl. (83) ein und entwickelt unter der Annahme, daß  $\left(\frac{\varrho}{R'}\right)^2$  gegen Eins zu vernachlässigen sei, so erhält man die Formel

$$K = \frac{\varepsilon}{36 \log nat \left[ \frac{8}{10} \frac{R'}{\varrho} \left( 1 - \frac{3}{10} \frac{\varrho}{R'} \right) \right]} \mu F / km \quad \dots \quad (84)$$

Nach den von der Reichs-Telegraphenverwaltung aufgestellten Bedingungen ergibt sich bei Kabeln von 350 bis 500 Paaren für jede Doppelader im Mittel eine Raumbeanspruchung, wie sie aus nachstehender Tabelle ersichtlich ist, welche auch den für die vertragsmäßig gewährleistete Kapazität von  $0,037 \mu F / km$  geltenden Wert von  $\varepsilon$  enthält.

Drahtstärke in mm	$F'$ in mm <sup>2</sup>	$R'$ in mm	$\varepsilon$
0,6	6,85	1,41	1,67
0,8	9,75	1,68	1,51
0,9	13,42	1,97	1,57

Bei Kabeln, die aus Lagen verschiedener Drahtstärke aufgebaut sind, ist die Fläche  $F'$  für jede Lage besonders zu berechnen.

Fünfter Abschnitt.

**Verteilung auf Leitern mit veränderlicher Krümmung.**

§ 56. **Unterschiede der Flächendichte.** Wir haben bisher das elektrische Feld zwischen Leitern betrachtet, die eben, zylindrisch oder kugelförmig waren, oder wenigstens von einer dieser Formen so wenig, wie praktisch ausführbar, abweichen. Das gemeinsame Kennzeichen dieser Formen ist, daß alle Teile der Oberfläche eines Leiters irgend einer dieser Formen gleiche Krümmung haben.

Es ist wichtig, auch die Verteilung auf Leitern zu untersuchen, deren Oberflächen an verschiedenen Stellen erheblich verschieden gekrümmt sind. Während für diese Untersuchung meistens das dreiaxige Ellipsoid gewählt wird, das aber eine verwickelte Rechnung nötig macht, wollen wir den Einfluß der Krümmung der Oberfläche auf das elektrische Feld an einigen erheblich einfacheren Beispielen betrachten.

Nach § 35 bieten sich Lösungen der Gleichung  $\Delta \varphi = 0$  in der allgemeinen Form  $\varphi = \frac{c^2}{\varepsilon} \sum \frac{q}{r}$ , worin die  $q$  Mengen von Elektrizität bedeuten, die stellenweise oder stetig verteilt sein können. Nach § 45 kann man jede Fläche  $\varphi = const$  als eine Leiteroberfläche auffassen, deren Ladungen dasselbe Feld erzeugen, wie die Elektrizitätsmengen  $q$  in der gegebenen Anordnung.

Schon ganz einfache Beispiele dieser Art genügen dem vorliegenden Zwecke.

Wir untersuchen zunächst das Feld zweier Mengen  $q_1$  und  $q_2$ . Seine Potentialfunktion ist:

$$\varphi = \frac{c^2}{\varepsilon} \left( \frac{q_1}{r_1} + \frac{q_2}{r_2} \right),$$

wo  $r_1$  und  $r_2$  die Abstände des Aufpunktes von den beiden Mengen sind.

Die Niveauflächen sind offenbar drehrund nach der die Mengen verbindenden Linie, wir zeichnen sie für einen Meridianschnitt.

Für Fig. 44 ist angenommen, daß  $\frac{c^2}{\varepsilon} q_1 = 100$ ,  $\frac{c^2}{\varepsilon} q_2 = 1$  sei. Gezeichnet sind die Flächen  $\varphi = 10$ ,  $\varphi = 9,5$ ,  $\varphi = 9$ ,  $\varphi = 8,5$ ,  $\varphi = 8$ . Alle diese Flächen sind im großen und ganzen Kugelflächen, aber mit einem Buckel an einer Stelle in der Nähe von  $q_2$ . Diese Stelle ist in Fig. 45 in größerem Maßstabe gezeichnet.

Fig. 44.

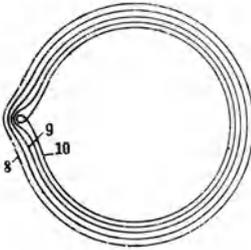
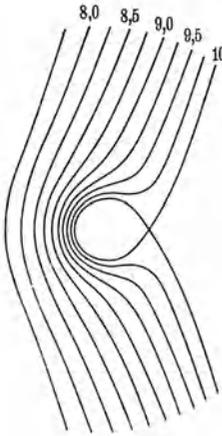


Fig. 45.



Wir betrachten zunächst die Fläche  $\varphi = 9,5$  als Leiteroberfläche. Die Feldstärke ist uns gegeben als  $\mathfrak{E} = -\text{grad } \varphi$  und wir finden sie angenähert, indem wir von einer Stelle der Fläche  $\varphi = 9,5$  auf dem kürzesten Wege zur Fläche  $\varphi = 9,0$  übergehen und den Unterschied 0,5 durch den Abstand der Flächen dividieren.

Die Flächen liegen einander auffällig näher vor dem Buckel, als an den übrigen Teilen der Oberfläche; an dieser Stelle der Oberfläche, wo die Krümmung am größten ist, herrscht also die größte Feldstärke, demnach auch die größte Flächendichte der Elektrizität.

Nach der Feldstärke richtet sich auch die Beanspruchung des Isoliermaterials. Diese ist also am größten vor den Stellen größter Krümmung.

Die Feldstärke in der Richtung der Achse ergibt sich auf der Seite des Buckels als

$$\mathfrak{E}_1 = \frac{q_1}{x_1^2} + \frac{q_2}{(x_1 - a)^2},$$

wenn  $x_1$  der in der Richtung von  $q_1$  nach  $q_2$  positiv gemessene Abstand des Aufpunktes von  $q_1$  ist; dagegen ist die Feldstärke in der Richtung der Achse auf der dem Buckel entgegengesetzten Seite des nahezu kugelförmigen Körpers

$$\mathfrak{E}_2 = \frac{q_1}{x_2^2} + \frac{q_2}{(x_2 + a)^2},$$

wenn  $x_2$  der Abstand des Aufpunktes von  $q_1$  in der von  $q_2$  abgewendeten Richtung ist. Wenn, wie hier angenommen,  $q_1$  beträchtlich größer als  $q_2$  ist,

so ist  $\frac{q_1}{x_1^2}$  etwa gleich  $\frac{q_1}{x_2^2}$ ;

dagegen ist

$$\frac{q_2}{(x_1 - a)^2} \text{ beträchtlich größer als } \frac{q_2}{(x_2 + a)^2}.$$

**§ 57. Wirkung von Spitzen.** Spitzen sind Stellen, an denen die Krümmung einer Oberfläche sehr beträchtlich wird. Die Feldstärke wird also dort sehr groß werden.

Wir untersuchen dazu folgendes Beispiel: Auf der negativen Seite der  $x$ -Achse seien in bestimmten Abständen vom Nullpunkte elektrische Massenpunkte angeordnet, und zwar seien Elektrizitätsmengen und Abstände bezüglich

$$q, \quad \frac{q}{k^2}, \quad \frac{q}{k^4} \cdots, \quad \frac{q}{k^{2n}} \cdots,$$

$$a, \quad \frac{a}{k}, \quad \frac{a}{k^2} \cdots, \quad \frac{a}{k^n} \cdots,$$

wo  $k$  eine Zahl sei.

Die Zahl dieser Massenpunkte kann beliebig groß sein. Ihre Gesamtmenge ist auch bei unendlich großer Anzahl endlich, wenn  $k > 1$ , da die Mengen eine geometrische Reihe mit dem Exponenten  $\frac{1}{k^2}$  darstellen; deren Summe ist dann

$$Q_n = qk^2 \frac{1 - (1/k^2)^n}{k^2 - 1}, \quad \text{für } n = \infty, \quad Q = q \frac{k^2}{k^2 - 1}.$$

Wir nehmen zunächst die Anzahl  $n$  der Massenpunkte als endlich an.

Ihr Potential in einem Aufpunkte  $x, y$  ist die Summe der Potentiale der einzelnen Massenpunkte, also

$$\varphi_n = \frac{c^2}{\varepsilon} \sum_0^n \frac{q}{k^{2h}} \frac{1}{\sqrt{\left(x + \frac{a}{k^h}\right)^2 + y^2}}.$$

Solange  $x, y$  nicht mit einem der Massenpunkte zusammenfällt, also außerhalb der negativen  $x$ -Achse, ist  $\varphi_n$  eindeutig, endlich und stetig. Wir wollen den Wert des Potentials im Anfangspunkte untersuchen: es ist dort

$$\varphi_{0n} = \frac{c^2}{\varepsilon} \frac{q}{a} \sum_0^n \frac{1}{k^h} = \frac{c^2}{\varepsilon} \frac{q}{a} \frac{k}{k-1} \left[ 1 - \left(\frac{1}{k}\right)^n \right].$$

Läßt man die Zahl der Punkte beliebig groß werden, so nähert sich dieser Ausdruck der endlichen Grenze  $\frac{c^2}{\varepsilon} \frac{q}{a} \frac{k}{k-1}$ .

Die Feldstärke im Anfangspunkte ergibt sich aus der Überlegung, daß alle von den einzelnen Massenpunkten ausgehenden Kräfte in der Richtung der positiven  $x$ -Achse wirken, und daß der Massenpunkt  $\frac{q}{k^{2h}}$  aus der Entfernung  $\frac{a}{k^h}$  die Kraft  $\frac{c^2}{\varepsilon} \frac{q}{a^2}$  in der Richtung der  $x$ -Achse äußert. Die Gesamtkraft ist also

$$\mathcal{E}_0 = n \frac{c^2}{\varepsilon} \frac{q}{a^2}.$$

Sie ist also um so größer, je größer  $n$  gewählt wird, obwohl dabei, wie vorhin gezeigt, weder die Menge der Elektrizität, noch das Potential sich merklich ändern.

Wenn man die Niveaufäche mit dem Potential  $\varphi_n$  feststellt und durch eine kongruente metallische Fläche ersetzt, so nimmt diese bei der endlichen Ladung  $Q_n$  das Potential  $\varphi_n$  an, aber sie hat bei großem  $n$  in einem Punkte eine außerordentlich hohe Feldstärke.

Das Krümmungsmaß einer Kurve, die durch eine Gleichung  $\varphi(x, y) = 0$  gegeben ist, wird durch die Formel dargestellt:

$$\frac{1}{\rho} = - \frac{\left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}}{\left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2\right]^{3/2}}.$$

Wir wollen die Krümmung in den Punkten der positiven  $x$ -Achse untersuchen, die in der Nähe des Anfangspunktes liegen. In den Ableitungen, deren Berechnung nicht schwierig ist, haben wir also  $y = 0$  zu setzen. Die Rechnung ergibt, daß dann  $\frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0$  und  $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} = 0$  werden. Es verbleibt also

$$\frac{1}{\rho} = - \frac{\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}}{\frac{\partial \varphi}{\partial x}}$$

und dies ergibt

$$\frac{1}{\rho} = - \frac{\sum_1^n \frac{1}{k^{2h} \left(x + \frac{a}{k^h}\right)^3}}{\sum_1^n \frac{1}{k^{2h} \left(x + \frac{a}{k^h}\right)^2}}.$$

Für  $x = 0$  geht dies über in

$$\frac{1}{\rho} = - \frac{1}{a} \frac{\sum_1^n k^h}{n} = - \frac{k}{a(k-1)} \frac{k^n - 1}{n}.$$

Dieser Ausdruck wächst mit  $n$  über jedes Maß hinaus, die Potentialfläche der angegebenen Verteilung hat im Anfangspunkte eine Spitze. Wir sehen also, daß die Feldstärke an einer Oberfläche um so größer wird, je stärker dort die Fläche gekrümmt ist.

Diese Wirkung von Spitzen ist bekannt. Sie findet in einigen Fällen eine nützliche technische Anwendung, vor allem in den Blitzableitern der verschiedenen Konstruktionen, deren gemeinschaftliches Prinzip ist, Spitzen verschiedenen Potentials gegeneinander zu stellen. Als solche werden verwandt Körper mit einzelnen Spitzen oder Zähnen, oder mit Schneiden, oder mit einer rauhen, aus vielen kleinen Krümmungen bestehenden Oberfläche (Retortenkohle).

In anderen Fällen hat die höhere Flächendichte an Stellen großer Krümmung unerwünschte Folgen.

Die Feldstärke an der Oberfläche eines bestimmten Leiters ist der Spannung proportional, und daher zeigen sich an Leitern für Hochspannung auch bei solchen Krümmungen, die für Niederspannung unbedenklich sind, die aus zu hoher Flächendichte folgenden Vorgänge.

§ 58. **Antennen für Telegraphie ohne Draht.** Im Bereiche der Telegraphentechnik sind es hauptsächlich die Antennen der drahtlosen Telegraphie, bei denen betriebsmäßig hohe Spannungen verwendet werden.

Die Verteilung der Elektrizitäten auf der Antenne ist zwar, während sie arbeitet, wegen der Wellenausbildung anders als bei einer statischen Ladung, wie später näher gezeigt werden wird; die Flächendichten sind nämlich im allgemeinen am oberen Ende, wo sie schon unter statischen Verhältnissen am größten sind, noch höher unter den Verhältnissen der Schwingungen. Indessen kommt bei den Antennen der großen Stationen mit langer Welle die tatsächliche Verteilung der statischen ziemlich nahe. Wir können deshalb schon das Wesentliche feststellen, wenn wir die ruhende Verteilung an einem einfachen Beispiele betrachten.

Wir fragen nach der Form einer Antenne, die einer über eine senkrechte gerade Linie gleichmäßig verteilten Elektrizitätsmenge entspricht.

Damit das Potential einer solchen Anordnung in der Erdoberfläche Null sei, muß die Linie durch ihr Spiegelbild (Fig. 46) unterhalb der Erdoberfläche ergänzt werden. Zum Werte der Potentialfunktion, in einem Punkte  $a$ ,  $b$ , bringt die mit  $q$  Einheiten in der Längeneinheit geladene Linie den Beitrag

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= \frac{c^2}{\varepsilon} \int_h^{l+h} \frac{q \, dy}{\sqrt{a^2 + (y-b)^2}} = \frac{c^2}{\varepsilon} q \left[ \log \sqrt{a^2 + (y-b)^2} + y - b \right]_{y=h}^{y=l+h} \\ &= \frac{c^2}{\varepsilon} q \log \frac{\sqrt{a^2 + (l+h-b)^2} + (l+h-b)}{\sqrt{a^2 + (h-b)^2} + (h-b)}. \end{aligned}$$

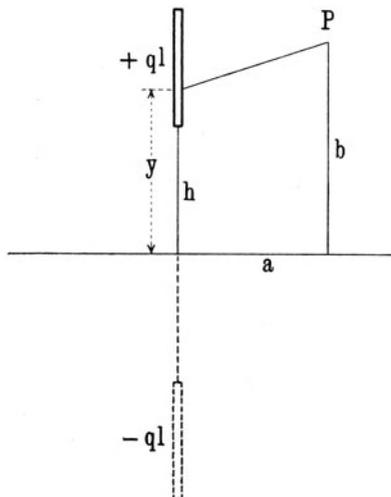
Das Spiegelbild ergibt in demselben Punkte den Beitrag

$$\begin{aligned} \varphi_2 &= -\frac{c^2}{\varepsilon} \int_h^{l+h} \frac{q \, dy}{\sqrt{a^2 + (y+b)^2}} \\ &= -\frac{c^2}{\varepsilon} q \log \frac{\sqrt{a^2 + (l+h+b)^2} + (l+h+b)}{\sqrt{a^2 + (h+b)^2} + (h+b)}. \end{aligned}$$

Daher ist die Potentialfunktion der geladenen Linie oberhalb der Erdoberfläche

$$\varphi = \frac{c^2 q}{\varepsilon} \log \frac{\sqrt{a^2 + (l+h-b)^2} + (l+h-b)}{\sqrt{a^2 + (h-b)^2} + (h-b)} \cdot \frac{\sqrt{a^2 + (h+b)^2} + (h+b)}{\sqrt{a^2 + (l+h+b)^2} + (l+h+b)}.$$

Fig. 46.



Wie leicht festzustellen, ist diese Funktion in der Tat Null, wenn man  $b = 0$  setzt, d. h. für alle Punkte der Erdoberfläche.

Die Kapazität gegen Erde für eine Antenne, die die Form einer bestimmten Niveaufläche hat, erhalten wir als  $\frac{ql}{\varphi}$  in elektromagnetischen Einheiten. Es ist im Bereiche der Hochfrequenztechnik üblich, Kapazitäten in elektrostatischen Einheiten anzugeben. Nach der Bemerkung in § 2 ist daher die Kapazität gleich dem Quotienten  $\frac{c^2 ql}{\varepsilon \varphi}$ .

Fig. 47 enthält für eine 50 m lange Antenne, die 2 m über dem Erdboden endet (oder in Leiter ohne merkliche Kapazität übergeht), die Niveauflächen, die einer Kapazität von 1000, 1500, 2000 cm entsprechen. Die innere dieser Flächen nähert sich in der Form der einer stabförmigen Antenne, während die äußere Ähnlichkeit mit einer trichterförmigen Antenne hat. Die Wirkung einer Antenne wird offenbar vermehrt, wenn die Ladung sich hauptsächlich in den hochgelegenen Teilen der Antennen ansammelt; da die stabförmige Antenne mit einer gleichmäßig geladenen Linie übereinstimmt, so folgt für sie, daß eine Verbreiterung der Antenne am oberen Ende vorteilhaft ist.

Fig. 47.

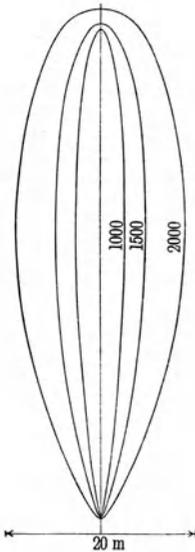
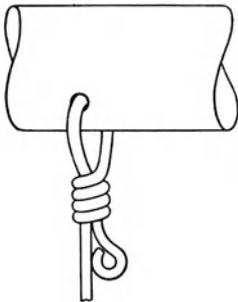


Fig. 48.



Man erkennt an den Potentialflächen der Fig. 47, daß bei einer Antenne länglicher Form am oberen Ende das größte Gefälle der Spannung besteht, wenn man von den Zuständen am unteren Ende absieht, die hauptsächlich durch die Zuleitungen vom Erregersystem bestimmt werden. An jener Stelle ist sie also auch der Gefahr von Verlusten über Flächenstücke zu großer Krümmung am meisten ausgesetzt.

Zweckmäßig werden die Antennen deshalb am oberen Ende mit einem Antennenkopf versehen, z. B. Harfenantennen mit einem starken Metallrohr, dessen Ränder sorgfältig gerundet sind.

Nach dem am Schluß des § 32 Gesagten ist die Flächendichte auf der Oberfläche eines zu einem Netze gehörenden Leiters, bei einer im Vergleich zum Durchmesser großen Maschenweite, dieselbe, als wenn der Leiter allein vorhanden wäre. Bei Mehrfachantennen ist es daher nicht zweckmäßig, zu dünne Drähte zu verwenden; auch sind Litzen aus dünnen Drähten in elektrischer Beziehung weniger zweckmäßig, als zylindrische Leiter, weil sie bei gleichem Querschnitt größere Krümmungen haben.

Scharfe Ecken kommen bei Antennen auch dort vor, wo die Drähte untereinander oder mit dem Antennenkopf verbunden und abgeknipt sind; man könnte sie nur durch gelötete Verbindungen vermeiden, was aber mit

Rücksicht auf die Festigkeit des Materials meist nicht zulässig ist. Auch wenn man die Enden rund feilte, würden sie doch noch Anlaß zum Sprühen geben. Man muß daher die Spitzen auf andere Weise unschädlich machen. Wie dies geschehen kann, läßt sich aus Fig. 44 und 45 erkennen. Die Fläche mit dem Potential 10 besteht aus zwei Teilen, die in zwei gegeneinander gerichteten Spitzen zusammenstoßen. Man sieht aus dem Verlauf der Flächen  $\varphi = 10$  und  $\varphi = 9,5$ , daß die Feldstärke gerade in der Nähe dieser beiden Spitzen die geringsten Werte hat. Daraus folgt, daß man eine Spitze unschädlich macht, wenn man sie gegen einen Leiter desselben Potentials, also gegen eine andere Stelle desselben Leiters richtet.

Man hätte also einen in einen Antennenkopf eingezogenen und durch eine Wickelstelle befestigten Draht in der in Fig. 48 bezeichneten Weise in sich zurückzubiegen, um schädliche Spitzenwirkungen zu vermeiden.

### Dritter Teil.

## Stationäre Felder.

**§ 59. Grundgleichungen des stationären Zustandes.** Als stationär bezeichnet man solche Felder, deren Zustände sich mit der Zeit nicht ändern. Wir erhalten demnach die Grundgleichungen des stationären Zustandes, indem wir in der ersten Hauptgleichung von den beiden Komponenten des wahren Stromes

$$c = \sigma \mathfrak{E} + \frac{\partial \mathfrak{D}}{\partial t}$$

nur die erste beibehalten, die andere aber gleich Null setzen. In der zweiten Hauptgleichung ist  $\frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial t} = 0$  zu setzen, da sonst bei der gegenseitigen Abhängigkeit der elektrischen und magnetischen Größen die Strömung nicht stationär sein könnte.

Die Grundgleichungen nehmen also die Form an

$$\operatorname{rot} \mathfrak{H} = 4 \pi \sigma \mathfrak{E}, \quad \operatorname{rot} (\mathfrak{E} - \mathfrak{E}_e) = 0 \quad \dots \dots \dots (85)$$

### Erster Abschnitt.

## Das elektrische Feld stationärer Ströme.

**§ 60. Das elektrische Potential im Felde stationärer Ströme.** Die zweite Hauptgleichung bedeutet, daß

$$\int_{\circ} (\mathfrak{E} - \mathfrak{E}_e) d\mathfrak{s} = 0,$$

$$\int_{\circ} \mathfrak{E} d\mathfrak{s} = \int_{\circ} \mathfrak{E}_e d\mathfrak{s}.$$

Soweit die Integrationswege keine eingepprägten Kräfte enthalten, also für den Raum außerhalb der Leiter und für das Innere homogener Leiter ist

$$\int_{\circ} \mathfrak{E}_e d\mathfrak{s} = 0,$$

daher auch

$$\int_{\circ} \mathfrak{E} d\mathfrak{s} = 0.$$

Demnach besitzen die elektrischen Kräfte ein Potential, derart, daß

$$\mathfrak{E} = - \text{grad } \varphi \dots \dots \dots (86)$$

Die Gleichung  $\text{div } \mathfrak{i} = 0$  (38) wird im Falle homogener Leiter zu  $\text{div } \mathfrak{s} \mathfrak{E} = 0$ , also auch  $\text{div } \mathfrak{E} = 0$ , und daraus folgt

$$\Delta \varphi = 0 \dots \dots \dots (87)$$

für das Innere homogener Leiter und den umgebenden Raum.

Lösungen der Gleichung  $\Delta \varphi = 0$  ergeben  $\mathfrak{E}$ , also auch die Stromdichte. Es handelt sich noch um die Grenzbedingungen. Bilden wir  $\int \mathfrak{E} d\mathfrak{s}$  für einen geschlossenen Weg, der an der Grenze zweier Leiter zum Teil in dem einen, zum Teil in dem anderen verläuft, so kann dies zerlegt werden (Fig. 49) in

$$\int_a^b \mathfrak{E}_{t_1} ds_1 + \int_b^c \mathfrak{E}_{n_{12}} dn_{12} + \int_c^d \mathfrak{E}_{t_2} ds_2 + \int_d^a \mathfrak{E}_{n_{21}} dn_{21},$$

wo  $ds_1$  und  $ds_2$  zwei einander unendlich benachbarte durch die Grenzschicht getrennte kurze Strecken sind,  $\mathfrak{E}_{t_1}$  und  $\mathfrak{E}_{t_2}$  die in deren Richtungen fallenden tangentialen Komponenten.  $dn_{12}$  und  $dn_{21}$  sind die zur Trennfläche normalen Wegstrecken,  $\mathfrak{E}_{n_{12}}$  und  $\mathfrak{E}_{n_{21}}$  die in deren Richtungen fallenden Komponenten.

Die Integrale über die Strecken von  $b$  bis  $c$  und von  $d$  bis  $a$  sind trotz der Kleinheit ihres Weges nicht zu vernachlässigen, denn sie bedeuten die Kontaktpotentialdifferenz der beiden verschiedenartigen Metalle. Da diese aber einmal in dem einen, das andere Mal im entgegengesetzten Sinne auftritt, so heben die beiden Integrale normal zur Fläche sich auf, und es ergibt sich

$$\int_a^b \mathfrak{E}_{t_1} ds_1 + \int_b^c \mathfrak{E}_{t_2} ds_2 = 0.$$

Ist der Weg von  $a$  bis  $b$  im Leiter 1 nur das Stück  $ds_1$ , der von  $b$  bis  $a$  im Leiter 2 nur das Stück  $ds_2$ , und wir lassen beide unmittelbar nebeneinander liegen, so ist

$$\mathfrak{E}_{t_1} = \mathfrak{E}_{t_2} \dots \dots \dots (88)$$

Durch eine Trennfläche zweier Metalle geht daher die tangentiale Komponente stetig durch.

Handelt es sich um die Grenze zwischen einem Leiter und einem Nichtleiter, so ergeben die Integrale auf den Wegen senkrecht zur Trennfläche jedes für sich Null; es bleibt dann für die tangentialen Komponenten der elektrischen Feldstärke die Bestimmung bestehen, daß sie stetig durch die Fläche gehen.

Um das Verhalten der normalen Komponente zu erkennen, denken wir uns, wie in § 28, einen durch die Grenzfläche geteilten dosenförmigen Raum abgegrenzt, dessen Boden und Deckelfläche einander sehr nahe liegen und beliebig groß gegen die Mantelfläche sind. Wendet man auf diesen Raum die Bestimmung  $\text{div } \mathfrak{i} = 0$  an, so ergibt sich durch Überlegungen, die denen

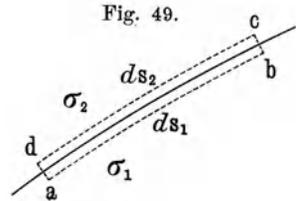


Fig. 49.

im § 28 durchaus ähneln, daß die Stromdichte auf beiden Seiten der Grenzfläche denselben Wert haben muß. Dies bedeutet aber, daß

$$\sigma_1 \mathfrak{E}_{n_1} = \sigma_2 \mathfrak{E}_{n_2} \dots \dots \dots (89)$$

ist. Liegt an Stelle des zweiten Leiters ein Nichtleiter ( $\sigma_2 = 0$ ), so muß auch  $\sigma_1 \mathfrak{E}_{n_1} = 0$  oder  $\mathfrak{E}_{n_1} = 0$  sein.

Es gelten also für eine stationäre Strömung folgende Bestimmungen :

1. Das elektrische Potential
  - a) ist stetig in homogenen Leitern und erfüllt dort die Gleichung  $\Delta \varphi = 0$ ;
  - b) erleidet an einer Grenzfläche zweier Leiter eine Änderung gleich der Kontaktpotentialdifferenz.
2. Die elektrische Feldstärke ist im Innern jedes homogenen Leiters stetig; an der Grenzfläche zweier Leiter oder eines Leiters gegen einen Nichtleiter bleibt die tangentielle Komponente stetig, während die normale sich zwar sprunghaft ändert, die normale Komponente der Stromdichte aber auf beiden Seiten denselben Wert hat.
3. Für die Strömung ist überall  $\operatorname{div} i = 0$ .

In diesen Sätzen kommt die magnetische Feldstärke gar nicht vor; die Strömung ist also für sich allein bestimmt.

Vergleicht man diese Sätze mit denen für die statische Verteilung (§ 30), so findet man weitgehende Ähnlichkeit; es tritt indessen der Vektor  $i$  an die Stelle von  $\mathfrak{D}$  und damit  $\sigma$  an die Stelle von  $\varepsilon$ . Manche Fälle aus der Elektrostatik geben daher die Lösung von Aufgaben aus der Lehre stationärer Ströme an. Einige Angaben über Leitfähigkeiten findet man in Anhang VI.

**§ 61. Anwendung auf die Berechnung des Isolationswiderstandes von Telegraphenkabeln.** Die gewöhnlichen Isoliermittel verhindern den Übergang von Gleichströmen nicht vollkommen, sondern sie besitzen eine im Vergleich zu der des feuchten Erdreichs allerdings sehr geringe Leitfähigkeit. Diese vermindert sich auch mit der Dauer der Elektrisierung. Wir wollen den Isolationswiderstand eines Telegraphenkabels unter der Voraussetzung berechnen, daß die zylindrische Seele auf dem Potential  $\varphi_1$ , die äußere Fläche des die Seele konzentrisch umschließenden Isoliermittels auf dem Potential Null gehalten werde, und daß das Isoliermittel zu einer bestimmten Zeit (etwa nach 1 Minute) die Leitfähigkeit  $\sigma$  habe. Nimmt man für das Potential, ähnlich wie in § 40, die Form an

$$\varphi = C_1 \log r + C_2,$$

so bestimmen sich  $C_1$  und  $C_2$ , unter Geltung der Bezeichnungen des § 40, durch die Gleichungen

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= C_1 \log R_1 + C_2, \\ 0 &= C_1 \log R_2 + C_2, \end{aligned}$$

so daß also

$$\varphi = \varphi_1 \frac{\log R_2 / r}{\log R_2 / R_1}$$

wird. Die Strömung hat nur eine Komponente in der Richtung von  $r$ , sie ist

$$i_r = \sigma \cdot \varphi_1 \frac{1/r}{\log R_2 / R_1}.$$

Durch eine Zylinderfläche von 1 cm Höhe, längs der Achse gemessen und vom Radius  $r$  fließt der Strom

$$J = 2 \pi r i_r = \frac{2 \pi \sigma \varphi_1}{\log R_2/R_1}.$$

Als Widerstand der Hülle bezeichnet man nach dem Ohmschen Gesetz das Verhältnis  $\varphi_1/J$  oder

$$W = \frac{1}{2 \pi \sigma} \log \frac{R_2}{R_1} \dots \dots \dots (90)$$

Setzt man für  $\sigma$  den in elektromagnetischem Maße geltenden Wert ein, so erhält man aus der Rechnung den Isolationswiderstand in absoluten Einheiten für 1 cm Kabellänge. Um die gesuchte Größe in Megohm für 1 km zu erhalten, hat man das Ergebnis mit  $10^6 \cdot 10^9 \cdot 10^5 = 10^{20}$  zu dividieren.

Nach Messungen von Zielinski<sup>5)</sup> hat die Leitfähigkeit der Guttapercha nach einer Elektrisierung von 1 Minute und bei 15°C Werte zwischen  $1 \cdot 10^{-25}$  und  $2,6 \cdot 10^{-25}$  in elektromagnetischem Maße.

Bedeutet also  $a$  eine Zahl zwischen 1 und 2,6, so erhält man für den Isolationswiderstand eines Guttaperchakabels nach 1 Minute und bei 15°C den Wert

$$W = \frac{10^5}{2 \pi a} \log \text{nat} \frac{R_2}{R_1} \text{ (Megohm/km)}.$$

**§ 62. Strömung in einem einseitig unbegrenzten leitenden Mittel.**

Die Telegraphenleitungen sind an beiden Enden mit der Erde durch Erdplatten verbunden, durch welche der die Leitung durchfließende Strom der Erde zugeführt wird, um darin die Bahn zu schließen (Fig. 50). Wir wollen, um die Ausbreitung der Ströme in der Erde annähernd kennen zu lernen, den Fall annehmen, daß einem durch eine Ebene von einem Nichtleiter getrennten leitenden Körper von unendlich großer Ausdehnung an zwei Punkten der  $y$ -Achse, die vom Anfangspunkt des Systems die Abstände  $b$  haben, in der Zeiteinheit gleiche und entgegengesetzte Elektrizitätsmengen zugeführt werden (Fig. 51).

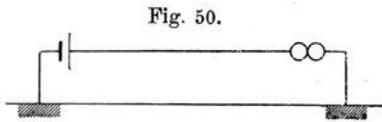


Fig. 50.

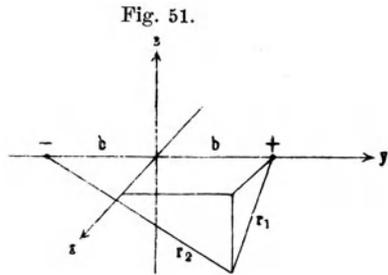


Fig. 51.

In dem ähnlichen elektrostatischen System, das sich nur durch die Ruhe der Elektrizitätsmengen unterscheidet, würde sich für das Potential die Lösung ergeben:

$$\varphi = C \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right).$$

Der Analogie halber wird man es hier mit derselben Lösung versuchen, und zwar gelte zunächst:

$$\varphi' = C_1 \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) \text{ für den Leiter,}$$

$$\varphi'' = C_2 \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) \text{ für den Nichtleiter.}$$

Da aber das Potential in der Trennfläche stetig ist, so fällt der Unterschied von  $C_1$  und  $C_2$  wieder fort. Wir haben es also mit

$$\varphi = C \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right)$$

für den ganzen Raum zu tun.

Damit die Lösung für den vorliegenden Fall zutreffe, muß die Strömung senkrecht zur Trennfläche überall Null sein, d. h. es muß  $\mathfrak{E}_z = 0$  sein für  $z = 0$ . Dies ergibt, da

$$r_1^2 = x^2 + (y - b)^2 + z^2,$$

$$r_2^2 = x^2 + (y + b)^2 + z^2,$$

$$\mathfrak{E}_z = + C \left( \frac{z}{r_1^3} - \frac{z}{r_2^3} \right).$$

Man sieht, daß für  $z = 0$  überall auch  $\mathfrak{E}_z = 0$  ist; wir schließen aber die Erdungspunkte  $r_1 = 0$  und  $r_2 = 0$  von der Betrachtung aus, weil in ihrer Nähe die Annahme, daß die Ströme an zwei Punkten zugeführt werden, wegen der Form der Erdplatten nicht mehr zutrifft.

Man erhält die Konstante  $C$  aus der Stromstärke  $J$  durch die Überlegung, daß alle Strömung die Mittelebene in der Richtung der negativen  $y$ -Achse durchsetzen muß. Bilden wir also

$$\mathfrak{E}_y = C \left( \frac{y - b}{\sqrt{[x^2 + (y - b)^2 + z^2]^3}} - \frac{y + b}{\sqrt{[x^2 + (y + b)^2 + z^2]^3}} \right)$$

und setzen darin  $y = 0$ , so erhalten wir die Stromdichte an der Stelle  $x, z$  der Mittelebene zu

$$i = \sigma C \frac{2b}{\sqrt{(b^2 + x^2 + z^2)^3}}.$$

Die Stromdichte hat also gleiche Werte an allen Stellen der  $xz$ -Ebene, die auf dem Umfange eines um den Anfangspunkt als Mittelpunkt geschlagenen Halbkreises mit dem Radius  $\varrho = \sqrt{x^2 + z^2}$  liegen. Bilden wir einen Halbring mit dem Radius  $\varrho$ , der Breite  $d\varrho$ , so wird dieser Halbring von der Stromstärke durchflossen:

$$\sigma C \frac{2b\pi\varrho d\varrho}{\sqrt{(b^2 + \varrho^2)^3}}.$$

Die gesamte Stromstärke ist

$$J = \int_0^\infty d\varrho \sigma C \frac{2b\pi\varrho}{\sqrt{(b^2 + \varrho^2)^3}} = \int_{b^2}^\infty \pi\sigma b C \frac{du}{u^{3/2}},$$

worin  $b^2 + \varrho^2 = u$  gesetzt ist. Daher ist

$$J = -2\pi\sigma b C \left[ \frac{1}{\sqrt{u}} \right]_{u=b^2}^{u=\infty} = 2\pi\sigma C.$$

Es ist daher endgültig

$$\varphi = \frac{J}{2\pi\sigma} \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) \dots \dots \dots (91)$$

Legen wir durch die beiden Punkte, in denen der Strom zu- und abfließt, eine Ebene, die mit der  $x y$ -Ebene den Winkel  $\alpha$  bildet, so ist für alle Punkte dieser Ebene

$$z = -x \operatorname{tg} \alpha.$$

Die Komponente der elektrischen Kraft senkrecht zu dieser Ebene ergibt sich als

$$\mathcal{E}_a = \mathcal{E}_x \sin \alpha + \mathcal{E}_z \cos \alpha.$$

Dies hat den Wert

$$\mathcal{E}_a = -\frac{J}{2\pi\sigma} \left[ x \sin \alpha \left( \frac{1}{r_1^3} - \frac{1}{r_2^3} \right) + z \cos \alpha \left( \frac{1}{r_1^3} - \frac{1}{r_2^3} \right) \right].$$

Setzt man  $z = -x \operatorname{tg} \alpha$ , so wird die Klammer gleich Null. Die Strömung verläuft also an jeder beliebigen Stelle innerhalb einer durch die Verbindungslinie des Zufluß- und des Abflußpunktes gelegten Ebene.

Führt man an Stelle der bisherigen Koordinaten zylindrische ein, nämlich  $y$ ,  $\alpha$  und  $\varrho$ , letzteres als Abstand jedes Punktes von der  $y$ -Achse, so wird

$$\varphi = \frac{J}{2\pi\sigma} \left( \frac{1}{\sqrt{\varrho^2 + (y-b)^2}} - \frac{1}{\sqrt{\varrho^2 + (y+b)^2}} \right).$$

Wählt man ein festes  $y$ , d. h. eine bestimmte Ebene senkrecht zur Verbindungslinie des Zuflußpunktes mit dem Abflußpunkte, so hängt  $\varphi$  nur von  $\varrho$  ab. Wie in der Mittelebene befinden sich also auch in jeder anderen solche Punkte, die gleichweit von der  $y$ -Achse liegen, unter den gleichen elektrischen Verhältnissen. Von  $\alpha$  hängt  $\varphi$  nicht ab.

Um die Stromverteilung zu übersehen, wollen wir auf die Berechnung der Stromstärke zurückgehen, aber die Integration nicht bis ins Unendliche, sondern nur bis zu einem bestimmten  $\varrho$  ausdehnen. Dann ist

$$J_\varrho = 2\pi\sigma b C \left( \frac{1}{b} - \frac{1}{\sqrt{b^2 + \varrho^2}} \right) \cdot \dots \dots \dots (92)$$

Das Verhältnis von  $J_\varrho$  zum Gesamtstrome ist

$$\frac{J_\varrho}{J} = 1 - \frac{b}{\sqrt{b^2 + \varrho^2}}.$$

Dies Verhältnis ist beispielsweise 0,8, wenn  $\varrho = 4,9 b$ ; oder 0,9, wenn  $\varrho = 9,95 b$ . In einem einseitig unbegrenzten Leiter verzweigen sich daher die Ströme sehr weit.

Wendet man dies auf die aus den Erdplatten der Telegraphenleitungen in die Erde gehenden Ströme an, so ist ersichtlich, daß man mit einiger Wahrscheinlichkeit nur für kurze Leitungen das Erdreich als einen einseitig unbegrenzten homogenen Leiter ansehen darf. Über die Massen, welche das Innere der Erde bilden, ist so wenig bekannt, daß man vorsichtigerweise nur eine mäßig dicke Schicht an der Oberfläche, die Wasser führt, als leitend ansehen darf.

In den meisten Fällen hat man die Verteilung der Ströme in der Erde eher so anzusehen, als ob es sich um eine leitende ebene Fläche handelte, die an zwei Stellen mit den Stromzuführungen verbunden ist.

§ 63. **Strömung in einer ebenen Platte.** Für diese Aufgabe bietet sich eine Analogie in der Potentialverteilung um zwei gleichmäßig elektrisierte gerade Linien. Die von diesen ausgehenden  $\mathfrak{D}$ -Linien verlaufen in Ebenen, welche zu jenen Linien senkrecht stehen.

Demnach würden, wie in Fig. 11, die Strömungslinien Kreise sein, welche durch die Erdungspunkte der Telegraphenleitung hindurchgehen. Wir legen die Zuführungen in die Punkte  $+b$  und  $-b$  der  $y$ -Achse. Das Potential ist gegeben durch

$$\varphi = C \log \left( \frac{r_2}{r_1} \right)^2.$$

Die Stromdichte in der zu der Verbindungslinie der Erdungspunkte senkrechten Mittelebene ergibt sich aus

$$\mathfrak{E}_y = -2C \left( \frac{y+b}{x^2 + (y+b)^2} - \frac{y-b}{x^2 + (y-b)^2} \right),$$

für  $y = 0$ ; die Stromdichte an der Stelle  $x$  ist also

$$i_y = -\frac{4C\sigma b}{x^2 + b^2}.$$

Der Gesamtstrom, welcher durch die Mittelebene geht, hat den Wert

$$-J = \int_{-\infty}^{+\infty} i_y h dx = -4\pi\sigma h C,$$

wenn mit  $J$  der an der positiven Elektrode eintretende Strom und mit  $h$  die Dicke der leitenden Schicht bezeichnet wird. Man erhält daher

$$\varphi = \frac{J}{4\pi\sigma h} \log \frac{x^2 + (y+b)^2}{x^2 + (y-b)^2}.$$

Bildet man daraus

$$\mathfrak{E} = \sqrt{\left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2},$$

so findet man die Stromdichte an einer beliebigen Stelle zu

$$|i| = \frac{J}{\pi h} \frac{b}{\sqrt{[x^2 + (y+b)^2][x^2 + (y-b)^2]}} \dots \dots \dots (93)$$

Um einen Überblick zu erhalten, wollen wir die Stromdichte für  $x = 0$ , also die Verbindungslinie der Erdungsstellen näher verfolgen; dort hat sie für gleiche Abstände von der Erdplatte größere Werte als an anderen Stellen des Feldes. Der Ausdruck reduziert sich auf

$$|i| = \frac{J}{\pi h} \frac{b}{\sqrt{(b^2 - y^2)^2}},$$

wo der Quadratwurzel stets das positive Zeichen zu geben ist. Es ergibt sich hieraus, daß die Stromdichte schon in geringem Abstände von der Eintrittsstelle, verglichen mit der Leitungslänge, außerordentlich klein geworden ist. Man kann sich also ohne erheblichen Fehler vorstellen, daß die in die Erde gehenden Elektrizitätsmengen in der Nähe der Erdplatte wie von einem großen Reservoir aufgenommen werden, während entferntere Stellen keine merkliche Strömung zeigen.

**§ 64. Ströme in linearen Leitern.** Von überragender Wichtigkeit sind für die Technik solche Leiter, deren Länge im Vergleich zu den Dimensionen des Querschnittes sehr groß ist, sogenannte lineare Leiter. Diese Leiter sind durch Isoliermittel gegen seitliche Stromverluste geschützt, und daher tritt durch zwei Querschnitte  $F_1$  und  $F_2$  dieselbe Elektrizitätsmenge in der Zeiteinheit ein und aus. Die Feldstärke und die Strömung haben an allen Stellen die Richtung des Leiterelementes  $d\mathfrak{s}$  und man nennt das Produkt aus Stromdichte und Querschnitt den Strom  $J$ .

Aus der zweiten Hauptgleichung folgt

$$\int \mathfrak{E} d\mathfrak{s} = \int \mathfrak{E}_e d\mathfrak{s} = E \dots \dots \dots (94)$$

Die Summe der im Kreise verteilten eingepprägten elektromotorischen Kräfte ist die gesamte EMK  $E$ . Andererseits ergibt sich aus  $i = \sigma \mathfrak{E}$  und

$$|i| = \frac{J}{F} \qquad \mathfrak{E} d\mathfrak{s} = J \int \frac{|d\mathfrak{s}|}{\sigma F}$$

Den Ausdruck  $\frac{|d\mathfrak{s}|}{\sigma F}$  nennt man den elektrischen Widerstand des Leiterstückes von der Länge  $|d\mathfrak{s}|$ , dem Querschnitte  $F$  und der Leitfähigkeit  $\sigma$ . Das Integral stellt also den Gesamtwiderstand  $R$  des Stromkreises dar, wir setzen

$$R = \int \frac{|d\mathfrak{s}|}{\sigma F} \dots \dots \dots (95)$$

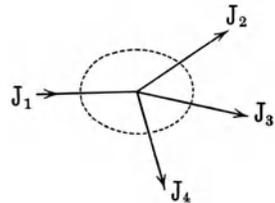
und erhalten so das Ohmsche Gesetz

$$E = JR \dots \dots \dots (96)$$

Dies ist demnach auch in den Feldgleichungen enthalten.

Bei verzweigten Leitern ist die zweite Hauptgleichung auf jede Schleife des Netzes anzuwenden und ergibt den Satz: Die Summe der eingepprägten EMK ist gleich der Summe der Spannungsverluste. Die Gleichung  $\text{div } i = 0$ , auf einen Knotenpunkt angewandt (Fig. 52), heißt, daß die Summe der abfließenden Ströme Null ist, wobei man die zufließenden Ströme als negativ zu rechnen hat. So ergeben sich also die sogenannten Kirchhoffschen Regeln:

Fig. 52.



1. An jedem Verzweigungspunkte ist die Summe der zufließenden Ströme gleich derjenigen der abfließenden Ströme.

2. In jeder Schleife des Netzes ist die Summe der EMK gleich der Summe der Spannungsverluste. Aus der Gleichung

$$\int (\mathfrak{E} - \mathfrak{E}_e) d\mathfrak{s} = 0$$

folgt, daß die elektrischen Kräfte in solchen Bereichen, in denen keine eingepprägten Kräfte in den Leitern enthalten sind, ein Potential haben.

**§ 65. Strömung in einem Kabel mit zylindrischer Hülle.** Zur Anwendung dieser Sätze wollen wir die Potentialverteilung in dem inneren

Leiter und dem Dielektrikum eines in einem leitenden Mittel liegenden Kabels betrachten.

Im inneren Leiter fließt Strom nur in der Richtung der Achse, welche mit der  $z$ -Richtung zusammenfallen möge; die elektrische Kraft reduziert sich also dort auf die Komponente  $\mathfrak{E}_z$ . Das Potential erfüllt die Gleichung

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0 \quad \text{oder} \quad \varphi = az + b.$$

In den Punkten  $z_1$  und  $z_2$  habe  $\varphi$  die Werte  $V_1$  und  $V_2$ , dann ergibt sich nach Elimination von  $a$  und  $b$

$$\varphi = \frac{V_1 z_2 - V_2 z_1}{z_2 - z_1} - \frac{V_1 - V_2}{z_2 - z_1} z.$$

Daraus ergibt sich

$$\mathfrak{E}_z = \frac{V_1 - V_2}{z_2 - z_1}.$$

$V_1 - V_2$  ist die Spannung zwischen den beiden Stellen  $z_1$  und  $z_2$  des Kabels,  $z_2 - z_1$  ihr Abstand,  $\mathfrak{E}_z$  ist also die Spannung auf die Längeneinheit.

Da  $\sigma \mathfrak{E}_z = i_z$  ist, und bei einem Durchmesser  $2R_1$  des Leiters

$$R_1^2 \pi i_z = J$$

die Stromstärke des Leiters ist, so folgt, daß

$$\mathfrak{E}_z = \frac{J}{R_1^2 \pi \sigma}.$$

Um das Potential im Dielektrikum festzustellen, benutzen wir für die Gleichung  $\text{rot } \mathfrak{E} = 0$  am besten die Differentialform für die Zylinderkoordinaten. Danach ist

$$\begin{aligned} \frac{1}{r} \frac{\partial \mathfrak{E}_z}{\partial \vartheta} - \frac{\partial \mathfrak{E}_\vartheta}{\partial z} &= 0, \\ \frac{\partial \mathfrak{E}_r}{\partial z} - \frac{\partial \mathfrak{E}_z}{\partial r} &= 0, \\ \frac{1}{r} \frac{\partial (r \mathfrak{E}_\vartheta)}{\partial r} - \frac{\partial \mathfrak{E}_r}{r \partial \vartheta} &= 0. \end{aligned}$$

Aus Symmetriegründen ist die Potentialverteilung dieselbe in jeder durch die Achse gelegten Ebene, d. h. auch im Dielektrikum ist  $\mathfrak{E}_\vartheta = 0$ . Daraus folgt außerdem, daß

$$\frac{\partial \mathfrak{E}_z}{\partial \vartheta} = 0 \quad \text{und} \quad \frac{\partial \mathfrak{E}_r}{\partial \vartheta} = 0$$

sind, so daß also  $\mathfrak{E}_z$  und  $\mathfrak{E}_r$  nicht von  $\vartheta$  abhängen. Die mittlere Gleichung

$$\frac{\partial \mathfrak{E}_r}{\partial z} = \frac{\partial \mathfrak{E}_z}{\partial r}$$

wird erfüllt, wenn man

$$\mathfrak{E}_r = -\frac{\partial U}{\partial r}, \quad \mathfrak{E}_z = -\frac{\partial U}{\partial z}$$

setzt;  $U$  ist also das Potential im Dielektrikum.

Dies hat die Laplacesche Differentialgleichung  $\Delta U = 0$  zu befolgen. In Zylinderkoordinaten ergibt sich diese aus Gl. (24)

$$\operatorname{div} \mathfrak{E} = \frac{1}{r} \frac{\partial (r \mathfrak{E}_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \mathfrak{E}_\vartheta}{\partial \vartheta} + \frac{\partial \mathfrak{E}_z}{\partial z},$$

indem man für  $\mathfrak{E}_r$  und  $\mathfrak{E}_z$  die partiellen Differentialquotienten einsetzt und  $\mathfrak{E}_\vartheta = 0$  setzt:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial r} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = 0.$$

Macht man den Ansatz  $U = f_1(r) \cdot f_2(z)$ , so ergibt sich

$$f_2(z) \left( \frac{d^2 f_1(r)}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{df_1(r)}{dr} \right) + f_1(r) \frac{d^2 f_2(z)}{dz^2} = 0.$$

Man erfüllt diese Gleichung, indem man setzt

$$\begin{aligned} \frac{d^2 f_1(r)}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{df_1(r)}{dr} &= 0, \\ \frac{d^2 f_2(z)}{dz^2} &= 0. \end{aligned}$$

Die erste Gleichung ist identisch mit

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{df_1(r)}{dr} \right) = 0;$$

sie ergibt

$$f_1(r) = a_1 + a_2 \log r.$$

Aus der zweiten folgt

$$f_2(z) = b_1 + b_2 z.$$

Es ist also

$$U = (b_1 + b_2 z) (a_1 + a_2 \log r).$$

Die Konstanten werden mittels der Grenzbedingungen bestimmt. Der innere Leiter habe den Durchmesser  $2R_1$ , der Durchmesser der Ader mit Isolation sei  $2R_2$ .

Dann ist  $U = 0$  für  $r = R_2$  und jeden Wert von  $z$ . Daraus folgt, daß

$$a_1 + a_2 \log R_2 = 0.$$

Durch diese Bestimmung erhält  $U$  die Form

$$U = (b_1 + b_2 z) a_1 \frac{\log R_2 - \log r}{\log R_2}.$$

An der Oberfläche des Leiters, also für  $r = R_1$ , muß  $U$  für jedes  $z$  mit  $V$  übereinstimmen; es ist also

$$\frac{V_1 z_2 - V_2 z_1}{z_2 - z_1} - \frac{V_1 - V_2}{z_2 - z_1} z = (a_1 b_1 + a_1 b_2 z) \frac{\log R_2 - \log R_1}{\log R_2}.$$

Daraus folgt

$$a_1 b_1 = \frac{(V_1 z_2 - V_2 z_1) \log R_2}{(z_2 - z_1) (\log R_2 - \log R_1)}, \quad a_1 b_2 = - \frac{(V_1 - V_2) \log R_2}{(z_2 - z_1) (\log R_2 - \log R_1)}.$$

Demnach wird

$$U = \frac{(V_1 z_2 - V_2 z_1) - (V_1 - V_2) z \log R_2 - \log r}{z_2 - z_1 \log R_2 - \log R_1}.$$

Bezeichnet  $\left(\frac{U}{\varphi}\right)$  das Verhältnis des Potentials im Dielektrikum zu dem auf der Leiteroberfläche in demselben Querschnitt, also für dasselbe  $z$ , so ist

$$\left(\frac{U}{\varphi}\right) = \frac{\log R_2 - \log r}{\log R_2 - \log R_1}.$$

Die Komponenten der elektrischen Kraft im Dielektrikum sind

$$\mathfrak{E}_z = \frac{J \log R_2 - \log r}{R_1^2 \pi \sigma \log R_2 - \log R_1}, \quad \mathfrak{E}_r = \frac{\varphi}{r \log R_2 / R_1}.$$

Auf der Oberfläche des stromführenden Leiters ( $r = R_1$ ) ist

$$\mathfrak{E}_z = \frac{J}{R_1^2 \pi \sigma}, \quad \mathfrak{E}_r = \frac{\varphi}{R_1 \log R_2 / R_1};$$

es steht also dort die elektrische Kraft nicht genau senkrecht. Der Winkel weicht aber unter den wirklichen Verhältnissen nicht viel von  $90^\circ$  ab. Wenn der Leiter für  $1 \text{ mm}^2$  Querschnitt einen Strom von 1 Amp. führte, so wäre der Spannungsabfall für 1 cm, also  $\mathfrak{E}_z$ , bei Kupfer nur etwa 0,00018 Volt, wogegen in der Regel auf die wenigen Millimeter Dicke des Isolators eine Spannung von mehreren Volt entfällt;  $\mathfrak{E}_r$  ist also stets erheblich größer als  $\mathfrak{E}_z$ .

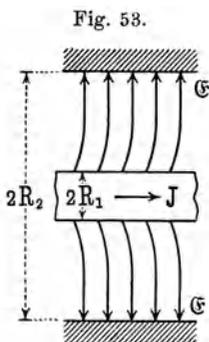


Fig. 53.

Übertrieben gezeichnet stellt Fig. 53 den Verlauf der E-Linien im Dielektrikum dar. Die zugehörige Richtung des Stromes ist durch  $J$  bezeichnet.

Den von der Oberfläche ausgehenden E-Linien entspricht auch eine Oberflächenladung des Leiters. Für  $1 \text{ cm}^2$  ist sie

$$\mathfrak{D}_{R_1} = \frac{\varepsilon}{4 \pi c^2} (\mathfrak{E}_r)_{r=R_1}.$$

Auf einer um den Draht gelegten Zylinderfläche von der Höhe  $dz$  befindet sich die Ladung

$$q = 2 \pi R_1 dz \mathfrak{D}_{R_1} = \frac{\varepsilon \varphi}{2 c^2 \log R_2 / R_1} dz.$$

Das Verhältnis  $q/\varphi$  oder die Kapazität ist für die Längeneinheit

$$K = \frac{\varepsilon}{2 c^2 \log R_2 / R_1}.$$

Die Kapazität ist also ebenso groß, wie die statische.

An der äußeren Fläche des Dielektrikums, wo dieses an die leitende Schicht anstößt, ist  $r = R_2$ , also

$$U = 0, \quad \mathfrak{E}_z = 0, \quad \mathfrak{E}_r = \frac{\varphi}{R_2 \log R_2 / R_1}.$$

Dort münden also sowohl die E-Linien, als auch die D-Linien senkrecht ein.

Der angenommene Fall weicht von der Wirklichkeit um ein geringes ab, da, wenn die äußere Hülle die Rückleitung bildet, in dieser auch ein Spannungsabfall stattfindet, der hier vernachlässigt worden ist. Der Unterschied ist aber nur sehr gering, da, wie in § 62 und 63 gezeigt, die Stromdichte außer an den Erdplatten selbst außerordentlich klein ist.

**§ 66. Strömung in einer symmetrischen Doppelleitung.** Wir nehmen an, daß die Doppelleitung so weit von der Erde entfernt sei, daß deren Einwirkung auf das elektrische Feld nicht von Belang ist. Wir legen die Achsen der Leiter in die  $xz$ -Ebene parallel und symmetrisch zur  $z$ -Achse.

Nach Art der Entwicklung in § 65 und unter Benutzung der in § 47 abgeleiteten Sätze über die statische Verteilung im Felde der Doppelleitung kommen wir zu folgenden Ansätzen für die Potentiale:

$$\text{Für die positive Leitung } \varphi_1 = + C_1 - \frac{JR}{2} z,$$

$$\text{für die negative Leitung } \varphi_2 = - C_1 + \frac{JR}{2} z,$$

$$\text{im Dielektrikum } U = C_2 \left( C_1 - \frac{JR}{2} z \right) \log \frac{(x+a)^2 + y^2}{(x-a)^2 + y^2}.$$

Darin bedeutet  $R$  den Widerstand der Doppelleitung für die Längeneinheit,  $C_1$ ,  $C_2$  und  $a$  sind Konstante, deren Werte zu bestimmen sind; dafür kommen in Betracht die Drahtstärke  $2\varrho$  und der Achsenabstand  $2d$  der Leitungen.

Ohne weiteres sieht man, daß  $\mathcal{A}\varphi_1 = 0$  und  $\mathcal{A}\varphi_2 = 0$ , sowie daß die elektrische Feldstärke innerhalb der Leiter den Betrag  $\frac{JR}{2}$  und im positiven Leiter die Richtung  $+z$ , im negativen die entgegengesetzte Richtung hat. Die Konstante  $C_1$  bezieht sich auf die Werte des Potentials an der Stelle der Leitungen, von der aus  $z$  gerechnet ist; für die Komponenten der Feldstärke ist sie ohne Belang.

Auch die Funktion  $U$  erfüllt die Gleichung  $\mathcal{A}U = 0$ , und zwar, weil  $\frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = 0$  ist, und weil  $U$  nach § 46 die Gleichung  $\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = 0$  erfüllt.

Wie dort näher gezeigt ist, hat der Faktor  $\log \frac{(x+a)^2 + y^2}{(x-a)^2 + y^2}$  konstante Werte auf Kreiszyklindern, deren Achsen der  $z$ -Richtung parallel laufen, und wir können ein Paar solcher Zylinder mit den beiden Leitern in Übereinstimmung bringen nach den Gl. (70) und (71). Ist auf der Oberfläche der Leiter

$$\begin{aligned} (x+a)^2 + y^2 \\ (x-a)^2 + y^2 \end{aligned} = k^2,$$

so haben  $a$  und  $k$  nach diesen Gleichungen die Werte

$$\begin{aligned} a &= \sqrt{d^2 - \varrho^2}, \\ k &= \frac{\sqrt{d + \varrho} + \sqrt{d - \varrho}}{\sqrt{d + \varrho} - \sqrt{d - \varrho}}. \end{aligned}$$

Soll auf der Oberfläche des positiven Leiters  $U = \varphi_1$  sein, bei beliebigem  $z$ , so erfordert dies, daß

$$C_2 = \frac{1}{2 \log k}.$$

Man erhält daher

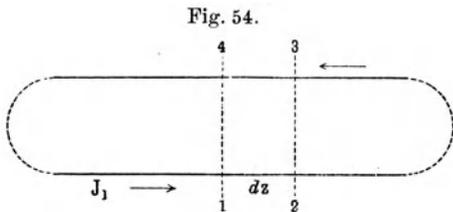
$$U = \frac{1}{2} \left( C_1 - \frac{JR}{2} z \right) \log \frac{(x + \sqrt{d^2 - \varrho^2})^2 + y^2}{(x - \sqrt{d^2 - \varrho^2})^2 + y^2} \cdot \log \frac{\sqrt{d + \varrho} + \sqrt{d - \varrho}}{\sqrt{d + \varrho} - \sqrt{d - \varrho}}.$$

Auf der Oberfläche des zweiten Leiters nimmt das so bestimmte  $U$  nach den Ausführungen in § 47 von selbst die dem Vorzeichen nach entgegengesetzten Werte an, stimmt also dort mit  $\varphi_2$  überein.

Für ein bestimmtes  $z$  hat  $U$  dieselbe Form, wie das statische Potential zweier paralleler Drähte; daher sind auch hier die Feldlinien der Komponente von  $\mathfrak{E}$  in der  $xy$ -Ebene Kreisbögen, die von der einen Leitung zur anderen hinübergehen.

Die Komponente  $\mathfrak{E}_z$  hat an der Oberfläche des positiven Leiters den Wert  $\frac{JR}{2}$ , in der Mittelebene,  $x = 0$ , hat sie den Wert Null, und an der Oberfläche des negativen Leiters hat sie den Wert  $-\frac{JR}{2}$ . Die Linien des Vektors  $\mathfrak{E}$  setzen also in diesem Falle an beiden Leitern schräg an und passieren die Symmetrieebene senkrecht.

**§ 67. Leiter mit Ableitung.** Es handle sich um eine Doppelleitung aus zwei geradlinigen Leitern, deren Isolation gegeneinander nicht vollkommen



sei. Wird die Entfernung von einem festen Punkte mit  $z$  bezeichnet, so sei an der Stelle  $z$  die Spannung der beiden Leiter  $V_z$ , der Strom im ersten  $J_z$ .

$J_z$  ist mit  $z$  veränderlich, weil infolge der Isolationsfehler Ströme von dem ersten zum

zweiten Leiter verlaufen, die demnach den Strom  $J_z$  schwächen. Aus Symmetriegründen gehen diese Seitenströme im homogenen Dielektrikum senkrecht zwischen den Leitern über, und daher erhält man an der Stelle  $z$  des zweiten Leiters wieder dieselbe Stromstärke, aber entgegengesetzter Richtung, wie an der Stelle  $z$  des ersten Leiters.

Wendet man auf ein Flächenstück 1, 2, 3, 4 im Dielektrikum (Fig. 54), das von je einem Element  $dz$  und zwei in senkrechten Ebenen zu den Leitern verlaufenden Linien begrenzt ist, den Satz an, daß

$$\int \mathfrak{E} d\mathfrak{s} = 0,$$

so ergibt sich, wenn  $R_1$  und  $R_2$  die Widerstände jedes der beiden Leiter für die Längeneinheit sind:

$$J_z R_1 dz + \int_2^3 \mathcal{E} d\mathfrak{s} + J_z R_2 dz + \int_4^1 \mathcal{E} d\mathfrak{s} = 0.$$

Nun ist

$$\int_1^4 \mathcal{E} d\mathfrak{s} = V_z, \quad \int_2^3 \mathcal{E} d\mathfrak{s} = V_{z+dz},$$

also ist

$$\int_2^3 \mathcal{E} d\mathfrak{s} + \int_4^1 \mathcal{E} d\mathfrak{s} = V_{z+dz} - V_z = \frac{dV_z}{dz} dz;$$

daher kommt

$$-\frac{dV_z}{dz} = J_z(R_1 + R_2) \dots \dots \dots (97)$$

Ferner muß an jeder Stelle des Leiters  $div i = 0$  sein. Durch den Querschnitt bei 1 tritt ein  $J_z$ , bei 2 tritt aus  $J_{z+dz}$ ; der Unterschied geht durch die Oberfläche des Leiters verloren. Der Betrag hängt von der Spannung und der Leitfähigkeit des Materials ab. Man setzt den Verluststrom, den das Element  $dz$  herbeiführt, gleich  $G V_z dz$ , und nennt  $G$  die Ableitung für die Längeneinheit. Dann ist also

$$J_z = J_{z+dz} + G V_z dz,$$

oder

$$-\frac{dJ_z}{dz} = G V_z \dots \dots \dots (98)$$

Wenn  $R$  den Gesamtwiderstand beider Zweige für die Längeneinheit bezeichnet, so ergibt sich aus beiden Gleichungen entweder

$$\frac{d^2 V_z}{dz^2} = G R V_z \quad \text{oder} \quad \frac{d^2 J_z}{dz^2} = G R J_z \dots \dots \dots (99)$$

Wir können weiterhin den die Stelle  $z$  kennzeichnenden Index fortlassen. Aus Gleichung (97) folgt

$$V = a_1 e^{z\sqrt{G\bar{R}}} + a_2 e^{-z\sqrt{G\bar{R}}}$$

und mit Hilfe von  $JR = -\frac{dV}{dz}$

$$J = \sqrt{\frac{G}{R}} (-a_1 e^{z\sqrt{G\bar{R}}} + a_2 e^{-z\sqrt{G\bar{R}}}).$$

An der Stelle  $z = 0$  habe  $V$  den Wert  $V_0$  und  $J$  den Wert  $J_0$ ; man kann  $a_1$  und  $a_2$  durch diese Größen eliminieren und erhält:

$$\left. \begin{aligned} V &= V_0 \frac{e^{z\sqrt{G\bar{R}}} + e^{-z\sqrt{G\bar{R}}}}{2} - \sqrt{\frac{R}{G}} J_0 \frac{e^{z\sqrt{G\bar{R}}} - e^{-z\sqrt{G\bar{R}}}}{2} \\ J &= J_0 \frac{e^{z\sqrt{G\bar{R}}} - e^{-z\sqrt{G\bar{R}}}}{2} - \sqrt{\frac{G}{R}} V_0 \frac{e^{z\sqrt{G\bar{R}}} + e^{-z\sqrt{G\bar{R}}}}{2} \end{aligned} \right\} \dots (100)$$

Aus diesen Gleichungen ergeben sich noch folgende:

$$\left. \begin{aligned} V_0 &= V \frac{e^{z\sqrt{GR}} + e^{-z\sqrt{GR}}}{2} + \sqrt{\frac{R}{G}} J \frac{e^{z\sqrt{GR}} - e^{-z\sqrt{GR}}}{2} \\ J_0 &= J \frac{e^{z\sqrt{GR}} + e^{-z\sqrt{GR}}}{2} + \sqrt{\frac{G}{R}} V \frac{e^{z\sqrt{GR}} - e^{-z\sqrt{GR}}}{2} \end{aligned} \right\} \dots (100 a)$$

Das Verhältnis  $V_0/J_0$ , welches angibt, welche Spannung erforderlich ist, um die Einheit der Stromstärke in die Leitung zu treiben, nennt man ihren scheinbaren Widerstand. Es hängt von  $V$  und  $J$  ab, also vom Widerstand des am Ende angeschlossenen Apparates.

**§ 68. Gleichstrommessungen an Leitungen.** Um die Größen  $G$  und  $R$  durch Messung zu bestimmen, läßt man zuerst die beiden Zweige am fernen Ende isolieren, und dann sie kurz verbinden; die dazu gehörenden Werte von  $V_0/J_0$  heißen der scheinbare Isolationswiderstand  $U_1$  und der scheinbare Kurzschlußwiderstand  $U_2$ . Beim Isolieren ist  $J = 0$  für  $z = l$ , beim Kurzschluß  $V = 0$  für  $z = l$ , daher

$$\left. \begin{aligned} U_1 &= \sqrt{\frac{R}{G} \frac{e^{l\sqrt{GR}} + e^{-l\sqrt{GR}}}{e^{l\sqrt{GR}} - e^{-l\sqrt{GR}}}} \\ U_2 &= \sqrt{\frac{R}{G} \frac{e^{l\sqrt{GR}} - e^{-l\sqrt{GR}}}{e^{l\sqrt{GR}} + e^{-l\sqrt{GR}}}} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (101)$$

Daraus geht zunächst hervor, daß

$$\sqrt{\frac{R}{G}} = \sqrt{U_1 U_2} \dots \dots \dots (102)$$

Ferner ergibt sich

$$\frac{e^{l\sqrt{GR}} - e^{-l\sqrt{GR}}}{e^{l\sqrt{GR}} + e^{-l\sqrt{GR}}} = \sqrt{\frac{U_2}{U_1}}$$

und daraus

$$e^{2l\sqrt{GR}} = \frac{1 + \sqrt{U_2/U_1}}{1 - \sqrt{U_2/U_1}} \dots \dots \dots (103)$$

Man findet weiter

$$\begin{aligned} e^{l\sqrt{GR}} + e^{-l\sqrt{GR}} &= 2 \sqrt{\frac{U_1}{U_1 - U_2}}, \\ e^{l\sqrt{GR}} - e^{-l\sqrt{GR}} &= 2 \sqrt{\frac{U_2}{U_1 - U_2}}. \end{aligned}$$

Nennt man  $V_e$  und  $J_e$  die Werte von Spannung und Stromstärke am Ende der Leitung, so ergibt sich

$$\left. \begin{aligned} V_0 &= \sqrt{\frac{U_1}{U_1 - U_2}} (V_e + U_2 J_e) \\ J_0 &= \sqrt{\frac{U_1}{U_1 - U_2}} \left( J_e + \frac{V_e}{U_1} \right) \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (104)$$

Ist mit der Leitung (Fig. 55) am Anfange eine EMK  $E$  und ein Widerstand  $R_0$ , am Ende ein Widerstand  $R_e$  verbunden, so ist

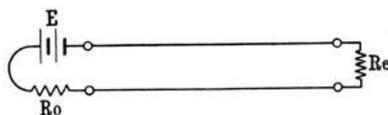
$$V_0 = E - R_0 J_0, \quad V_e = R_e J_e,$$

daher

$$J_e = E \sqrt{\frac{U_1 - U_2}{U_1}} \frac{1}{R_0 + R_e + \frac{R_0 R_e}{U_1} + U_2} \dots \dots \dots (105)$$

Wenn, wie bei Telegraphenleitungen, nur eine Leitung und Erdrückleitung vorhanden ist, so kann man die vorstehenden Überlegungen anwenden, indem man unter  $V$  die Spannung der Leitung gegen Erde versteht; die Doppelleitung verhält sich, wie zwei aneinander stoßende mit entgegengesetzten Spannungen betriebene Einzelleitungen.

Fig. 55.



Beispiel: Eine 394 km lange Eisenleitung von 5 mm Durchmesser ergab die Widerstände

$$\begin{aligned} \text{bei Isolation} & \dots \dots U_1 = 6000 \text{ Ohm,} \\ \text{bei Erdung} & \dots \dots U_2 = 2330 \text{ Ohm.} \end{aligned}$$

Daraus folgen

$$\sqrt{\frac{U_2}{U_1}} = 0,623, \quad \sqrt{U_1 U_2} = 3740, \quad \frac{1 + \sqrt{U_2/U_1}}{1 - \sqrt{U_2/U_1}} = 4,31.$$

Daher ist

$$\sqrt{GR} = 0,00185, \quad \sqrt{\frac{R}{G}} = 3740,$$

und daraus erhält man

$$R = 6,92; \quad G = 0,495 \cdot 10^{-6}.$$

Würde man den Leitungswiderstand für 1 km als  $\frac{U_2}{l} = 5,92$  berechnen, so würde man einen erheblich zu günstigen Wert erhalten, während andererseits die Ableitung zu groß, also zu ungünstig berechnet wird, wenn man den Quotienten  $\frac{1}{l U_1}$  bildet.

Bei kürzeren Leitungen ist dies eher zulässig. An einer 146 km langen Leitung wurden  $U_1 = 40\,000$ ,  $U_2 = 1350$  gemessen; daraus erhält man

$$R = 9,36, \quad G = 0,174 \cdot 10^{-6},$$

während

$$\frac{U_2}{l} = 9,25, \quad \frac{1}{l U_1} = 0,171 \cdot 10^{-6}$$

ist.

Beim Messen von Telegraphenleitungen wird zur Kontrolle der Ergebnisse gelegentlich ein bekannter Widerstand am Ende angeschaltet, und die Summe des bekannten und des vorher gemessenen Leitungswiderstandes nochmals bestimmt.

Als scheinbarer Widerstand einer Leitung stellt sich das Verhältnis  $V_0 J_0$  dar, welches hier ergibt

$$U = \frac{V_0}{J_0} = \frac{V_e + U_2 J_e}{J_e + V_e/U_1}$$

Liegt am Ende der Leitung der Kontrollwiderstand  $R_e$ , so ist  $V_e = R_e J_e$ , daher

$$U = \frac{R_e + U_2}{1 + R_e/U_1} \dots \dots \dots (106)$$

$U$  ist demnach nur insoweit gleich der Summe von  $R_e$  und  $U_2$ , als  $R_e/U_1$  klein gegen Eins ist. Dies ist um so weniger der Fall, je größer  $R_e$  und je länger die Leitung ist.

Beispiel: An die vorher genannte Leitung von 394 km Länge wurde ein Widerstand von 4700 Ohm angeschaltet, und man erhielt  $U = 4000$ . Nach der Formel würde sich  $U = 3930$  ergeben. In Anbetracht des Umstandes, daß die Isolation der Leitungen nie vollkommen gleichmäßig ist, ist diese Übereinstimmung als sehr gut zu bezeichnen. Gegen die Summe  $R_e + U_2 = 7030$  weicht  $U$  sehr erheblich ab.

Dagegen ergab die kürzere Leitung von 146 km Länge mit  $R_e = 1400$  ein  $U = 2600$ . Aus  $U_1$ ,  $U_2$  und  $R_e$  berechnet hätte sich  $U = 2650$  ergeben. Die Summe von  $U_2 + R_e$  ist 2750, also die Abweichung von  $U$  gegen diese Summe vergleichsweise gering.

Man erkennt, daß bei Messungen an oberirdischen Leitungen die Ergänzungsmessung mit dem Zusatzwiderstand nicht ohne einige Berechnungen zur Kontrolle des Meßergebnisses dienen kann. Nach vorliegenden Messungen, welche anzuführen zu weit führen würde, weichen die gemessenen Werte von  $U$  auch häufig erheblich stärker, als bei den angeführten Messungen, von dem berechneten ab. Da kein Grund vorliegt, einzelne Messungen einer Reihe für weniger zuverlässig zu halten, als andere, so ist die Abweichung auf die mangelnde Richtigkeit der Voraussetzungen, hier einer gleichmäßigen Ableitung, zurückzuführen. Die Messung mit dem Zusatzwiderstand bietet demnach die Möglichkeit eines Urteils darüber, ob die Leitung gleichmäßig oder an einzelnen Stellen weniger gut isoliert ist.

---

Zweiter Abschnitt.

**Das magnetische Feld stationärer Ströme.**

§ 69. **Das Vektorpotential.** Im vorigen Abschnitt ist gezeigt worden, daß es grundsätzlich möglich ist, die Stromdichte  $i$  an jeder Stelle eines bestimmten Feldes zu berechnen. Aus der bekannten Stromdichte folgt, wie jetzt gezeigt werden soll, auch der Wert der magnetischen Feldstärke an jeder Stelle des Feldes. Nach der ersten Hauptgleichung ist  $rot \mathfrak{H} = 4 \pi i$ , und es handelt sich um Auffindung eines Integrals dieser Gleichung, die eine Differentialgleichung in einer der Formen (25) bis (27) ist. Man benutzt dazu eine Hilfsfunktion  $\mathfrak{U}$ , indem man für ein Feld ohne Eisen den Ansatz macht:

$$\mathfrak{H} = rot \mathfrak{U} \dots \dots \dots (107)$$

Der Vektor  $\mathbf{u}$  muß nach der Rechenregel (31) für  $\text{rot}(\text{rot } \mathbf{u})$  die Bedingung erfüllen:

$$4 \pi \mathbf{i} = - \Delta \mathbf{u} + \text{grad } \text{div } \mathbf{u} \dots \dots \dots (108)$$

Man kann dieser Bedingung durch eine Funktion genügen, für welche

$$\text{grad } \text{div } \mathbf{u} = 0, \quad \Delta \mathbf{u} = - 4 \pi \mathbf{i} \dots \dots \dots (109)$$

ist. Die zweite Bedingung stimmt der Form nach überein mit der Gleichung  $\Delta \varphi = - 4 \pi \rho c^2/\epsilon$  für das skalare elektrostatische Potential, indessen tritt auf der rechten Seite statt der skalaren räumlichen Dichte der Vektor  $\mathbf{i}$  der Stromdichte auf, wie links statt des Skalars  $\varphi$  der Vektor  $\mathbf{u}$ . Es verspricht Erfolg, für  $\mathbf{u}$  die dem skalaren Potential nachgebildete Form zu wählen:

$$\mathbf{u} = \int_{(v)} \frac{\mathbf{i}}{r} dv \dots \dots \dots (110)$$

Dabei ist die Integration über den ganzen von der Strömung erfüllten Raum zu erstrecken; sie kann aber auch beliebig weiter ausgedehnt werden, weil für alle übrigen Raumelemente  $\mathbf{i} = 0$  ist. Die Funktion  $\mathbf{u}$  wird das Vektorpotential der Strömung genannt.

Bevor nachgewiesen wird, daß  $\mathbf{u}$  in der Form (110) die Bedingungen (109) erfüllt, soll zunächst das allgemeine Verhalten dieses Vektors festgestellt werden.

**§ 70. Stetigkeit des Vektorpotentials und seiner Ableitungen.** Das Vektorpotential hat die Komponenten

$$u_x = \int \frac{i_x}{r} dv, \quad u_y = \int \frac{i_y}{r} dv, \quad u_z = \int \frac{i_z}{r} dv.$$

Befindet sich das Stromelement  $i dv$  an der Stelle  $a_1, b_1, c_1$ , der Aufpunkt, für welchen das Vektorpotential bestimmt werden soll, an der Stelle  $x, y, z$ , so ist

$$r = \sqrt{(x - a_1)^2 + (y - b_1)^2 + (z - c_1)^2}.$$

Es ist ersichtlich, daß  $u_x, u_y, u_z$ , also auch  $\mathbf{u}$  für einen Punkt außerhalb der Strömung endlich, eindeutig und stetig sind; dagegen wird  $\mathbf{u}$  für einen Aufpunkt innerhalb der Strömung unbestimmt. Um die Stetigkeit zu prüfen, schlage man um den Aufpunkt als Mittelpunkt eine kleine Kugel mit dem Radius  $R$ . Das Integral über den ganzen Raum ist die Summe der Integrale über die Kugel und über den Rest des Raumes. Letzteres Integral enthält nur endliche  $|r|$ , ist also endlich.

Um das andere Integral zu untersuchen, werde  $dv$  als Raumelement in Kugelkoordinaten nach § 14 gewählt, also zu

$$dv = |r|^2 d|r| \sin \vartheta d\vartheta d\omega.$$

Dann wird

$$\mathbf{u} = \int_{r=0}^{r=R} \int_{\vartheta=0}^{\vartheta=\pi} \int_{\omega=0}^{\omega=2\pi} \frac{\mathbf{i}}{|r|} |r|^2 d|r| \sin \vartheta d\vartheta d\omega.$$

Auch bei unendlich kleinem  $|r|$  bleibt dieses Integral endlich, daher ist  $\mathbf{u}$  auch für einen Punkt im Innern der Strömung endlich.

Von den ersten Ableitungen wollen wir eine Komponente untersuchen. Es ist z. B.:

$$\frac{\partial u_x}{\partial x} = - \int i_x \frac{x - a_1}{r^3} dv.$$

Außerhalb der Strömung ist daher die erste Ableitung von  $u$  endlich und stetig. Für einen Aufpunkt innerhalb der Strömung zerlege man wieder den Raum wie vorher und setze  $dv = r^2 \cdot dr \sin \vartheta d\vartheta d\omega$ . Dann ist

$$\frac{\partial u_x}{\partial x} = - \iiint i_x \frac{x - a_1}{r^3} dr \sin \vartheta d\vartheta d\omega.$$

Da  $\frac{x - a_1}{r} = \cos(\vartheta, x)$  stets unter 1 liegt und  $i$  als stetig angenommen wird, so bleiben auch diese Integrale für jeden Punkt innerhalb der Strömung endlich.

Leitet man die zweiten Ableitungen aus der Form (110) für  $u$  her, so bleiben sie für Punkte im Inneren der Strömung unbestimmt. Es ist nämlich

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = - \int i_x \left( \frac{1}{r^3} - 3 \frac{(x - a_1)^2}{r^5} \right) dv.$$

Außerhalb der Strömung ist auch die zweite Ableitung endlich und stetig. Innerhalb der Strömung bleibt aber der Ausdruck unter dem Integral unbestimmt. Dies hat zur Folge, daß man die aus  $u = \int \frac{i}{r} dv$  gebildeten Werte für die zweiten Ableitungen nicht zur Untersuchung von Eigenschaften des Vektors  $u$ , z. B. zur Feststellung des Wertes von  $\mathcal{A}u$  für einen Punkt innerhalb der Strömung verwenden kann.

**§ 71.<sup>a</sup> Untersuchung von  $\text{div } u$ .** Wir finden den Wert aus den nunmehr als stetig bekannten ersten Ableitungen, welche die Werte haben:

$$\frac{\partial u_x}{\partial x} = - \int i_x \frac{x - a_1}{r^3} dv,$$

$$\frac{\partial u_y}{\partial y} = - \int i_y \frac{y - b_1}{r^3} dv,$$

$$\frac{\partial u_z}{\partial z} = - \int i_z \frac{z - c_1}{r^3} dv.$$

Dann ist

$$\text{div } u = - \int \frac{dv}{r^3} [(x - a_1) i_x + (y - b_1) i_y + (z - c_1) i_z].$$

Der Faktor  $(x - a_1) i_x + (y - b_1) i_y + (z - c_1) i_z$  ist gleich dem skalaren Produkt  $i r$ , weil z. B.  $x - a_1$  die  $x$ -Komponente von  $r$ ,  $i_x$  die von  $i$  ist.

Er ist also gleich  $i r \cdot \cos(i, r)$  und die Gleichung lautet:

$$\text{div } u = - \int dv \frac{i \cdot \cos(i, r)}{r^2}.$$

Die Beziehung  $\text{div } i = 0$  hat die Bedeutung, daß alle Strömung in geschlossenen Bahnen vor sich geht. Wir wollen sie in Stromfäden zerlegen

und davon einen beliebigen auswählen, von dem zunächst angenommen wird, daß er nicht durch den Aufpunkt gehen soll.

Die Kurve in Fig. 56 sei ein beliebiger Stromfaden, welcher den Strom  $dJ$  führt. Hat der Stromfaden den Querschnitt  $d\mathfrak{F}$ , so ist  $d\mathfrak{F} dl = dv$ , wenn  $dl$  ein Stück des Fadens ist. Dann ist

$$dJ |dl| = i |d\mathfrak{F} dl| = i \cdot dv.$$

Da  $dJ$  überall denselben Wert hat, so ist jetzt

$$\operatorname{div} \mathfrak{U} = -dJ \int_C \frac{dl \cdot \cos(r, dl)}{r^2}.$$

Man sieht aber, daß  $|dl| \cos(r, dl) = |dr|$  ist, nämlich die Änderung des Betrages von  $r$ , wenn man von einem Punkte des Stromfadens bis zu dem benachbarten geht. Nun ergibt  $\int \frac{dr}{r^2} = -\int d\left(\frac{1}{r}\right)$ , über einen geschlossenen Weg genommen, den Wert Null, weil  $\frac{1}{r}$  dabei im ganzen ebensoviel zu-, wie abnimmt.

Dies trifft aber auch dann zu, wenn der Aufpunkt einem Punkte des Stromfadens beliebig nahe kommt. Da vorher gezeigt worden ist, daß die Größen  $\frac{\partial \mathfrak{U}_x}{\partial x}$  usw. auch für Punkte innerhalb der Strömung endlich bleiben, so ergibt sich, daß für jeden beliebigen Aufpunkt

$$\operatorname{div} \mathfrak{U} = 0$$

ist. Die erste Bedingung von Gleichung (109) ist also erfüllt.

**§ 72. Untersuchung von  $\mathcal{A} \mathfrak{U}$  außerhalb der Strömung.** Es bleibt aus § 69 noch zu beweisen, daß

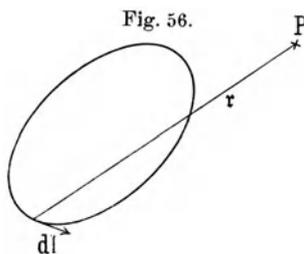
$$\mathcal{A} \mathfrak{U} = -4\pi i$$

für jede Stelle des Raumes ist. Für Stellen, an denen  $i = 0$  ist, also solche außerhalb der Strömung, kann man die zweiten Ableitungen aus dem  $\int \frac{i}{r} dv$  ableiten, weil alles endlich ist.

Man erhält

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \mathfrak{U}}{\partial x^2} &= \int i dv \left( 3 \frac{(x - a_1)^2}{r^5} - \frac{1}{r^3} \right), \\ \frac{\partial^2 \mathfrak{U}}{\partial y^2} &= \int i dv \left( 3 \frac{(y - b_1)^2}{r^5} - \frac{1}{r^3} \right), \\ \frac{\partial^2 \mathfrak{U}}{\partial z^2} &= \int i dv \left( 3 \frac{(z - c_1)^2}{r^5} - \frac{1}{r^3} \right). \end{aligned}$$

Daraus ergibt sich, daß für einen Punkt außerhalb der Strömung  $\mathcal{A} \mathfrak{U} = 0$  ist. Da dort auch  $i = 0$  ist, so ist für einen solchen Punkt die Gleichung  $\mathcal{A} \mathfrak{U} = 4\pi i$  erfüllt.



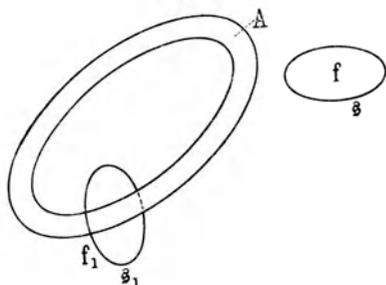
Der Nachweis, daß diese Gleichung auch für einen Punkt innerhalb der Strömung gilt, ist nicht durch Bildung der zweiten Differentialquotienten zu führen, weil diese innerhalb der Strömung unbestimmt werden.

Wir werden für diesen Fall die Richtigkeit des Ansatzes indirekt erweisen.

**§ 73. Verkettung.** Aus dem bisherigen folgt, daß für einen außerhalb der Strömung gelegenen Punkt die Gleichung  $\text{rot } \mathfrak{H} = 0$  erfüllt wird, wenn

man  $\mathfrak{H} = \text{rot} \int \frac{i}{r} dv$  setzt. Die Gleichung  $\text{rot } \mathfrak{H} = 0$  bedeutet, daß die Feldstärke im ganzen keine Arbeit leistet, wenn die magnetische Einheit um ein vom Strome nicht durchsetztes Flächenstück auf einem geschlossenen Wege herumgeführt wird. Aus § 17 ist bekannt, daß die Arbeit bei der Umkreisung einer beliebigen Fläche gleich Null ist, wenn sie bei Umkreisung jedes Flächenelementes diesen Wert hat. Ist  $A$  (Fig. 57) das Gebiet der Strömung und  $\mathfrak{s}$

Fig. 57.



eine geschlossene Linie, die nicht vom Strom durchsetzt wird, so ist das Linienintegral von  $\mathfrak{H}$  über  $\mathfrak{s}$  genommen gleich Null.

Durch die Linie  $\mathfrak{s}_1$  dagegen läßt sich keine Fläche legen, welche nicht von der Strömung durchsetzt würde. Das Linienintegral von  $\mathfrak{H}$  über  $\mathfrak{s}_1$ , dargestellt durch das Flächenintegral von  $\text{rot } \mathfrak{H}$  über  $f_1$  enthält also Teile, in denen der Aufpunkt innerhalb der Strömung

liegt; der Wert des Linienintegrals um  $\mathfrak{s}_1$  ist nach dem bisher bewiesenen noch nicht festgestellt.

Man kann diese Beziehungen von Strömung und Integrationsweg in einfacher Form mittels des Begriffes der Verkettung ausdrücken.

Zwei geschlossene Linien heißen verkettet, wenn man sie nicht trennen kann, ohne eine davon aufzuschneiden.

Daher gilt der Satz:

Das Linienintegral von  $\mathfrak{H} = \text{rot } \mathfrak{U}$  über einen mit der Strombahn nicht verketteten Weg hat den Wert Null.

**§ 74. Das Linienintegral über einen mit dem Stromleiter verketteten Weg.** Der noch zu beweisende Satz, daß für einen Punkt innerhalb der Strömung  $\mathcal{A}\mathfrak{U} = -4\pi i$  ist, kommt nach der Herleitung in § 69 darauf hinaus, zu zeigen, daß  $\text{rot } \mathfrak{H} = 4\pi i$ , wenn man für  $\mathfrak{H}$  den Wert setzt

$$\mathfrak{H} = \text{rot} \int \frac{i}{r} dv.$$

Andererseits ist der Satz  $\text{rot } \mathfrak{H} = 4\pi i$  gleichwertig mit dem anderen

$$\oint \mathfrak{H} d\mathfrak{s}_1 = 4\pi \int i d\mathfrak{f}_1 = 4\pi J,$$

wo  $J$  der Strom ist, der die von dem Wege  $s_1$  (Fig. 57) berandete Fläche  $f_1$  durchsetzt. Es soll also

$$\int_{\bigcirc} rot \mathfrak{U} d s_1 = 4 \pi J$$

sein, wenn der Weg  $s_1$  den Strom  $J$  umschlingt.

Wir werden zunächst  $\mathfrak{H} = rot \mathfrak{U}$  geeignet umformen. Die Komponenten von  $\mathfrak{H}$  setzen sich aus den ersten Ableitungen von  $\mathfrak{U}$  zusammen, die nach § 70 auch für Punkte innerhalb der Strömung endlich bleiben; die Berechnung des Linienintegrals mittels der Komponenten von  $\mathfrak{H} = rot \mathfrak{U}$  ist also zulässig.

Nach der Definition der Operation  $rot$  in Gleichung (25) ist

$$\begin{aligned} \mathfrak{H}_x = rot_x \mathfrak{U} &= \frac{\partial \mathfrak{U}_z}{\partial y} - \frac{\partial \mathfrak{U}_y}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial y} \int_{(v)} \frac{i_z}{r} dv - \frac{\partial}{\partial z} \int_{(v)} \frac{i_y}{r} dv \\ &= - \int_{(v)} \frac{dv}{r^3} [i_z(y - b_1) - i_y(z - c_1)]. \end{aligned}$$

Da  $x - a_1, y - b_1, z - c_1$  die Komponenten von  $r$  sind, so ist nach Gleichung (16)

$$i_y(z - c_1) - i_z(y - b_1) = [i, r]_x.$$

Daher ist also

$$\mathfrak{H}_x = \int_{(v)} \frac{[i, r]_x}{r^3} dv,$$

oder allgemein

$$\mathfrak{H} = rot \mathfrak{U} = \int_{(v)} \frac{[i, r]}{r^3} dv \dots \dots \dots (111)$$

Von diesem Ausdrucke haben wir das Linienintegral über einen geschlossenen Weg zu bilden.

Wir zerlegen die Strömung in einzelne Stromfäden und beschränken uns zunächst auf einen davon.

Er bildet eine geschlossene Linie, deren Längenelement  $d\mathfrak{l}$  ist und führe den Strom  $J'$ . Die Strömung geht dem  $d\mathfrak{l}$  parallel, also ist

$$i d v = J' d\mathfrak{l}.$$

Die Stromstärke ist an allen Stellen dieselbe, also ist

$$\mathfrak{H} = J' \int_{\bigcirc_1} \frac{[d\mathfrak{l}, r]}{r^3} \dots \dots \dots (112)$$

Das Integral über den Raum der Strömung ist in ein Linienintegral über die Länge des Stromfadens übergegangen.

**§ 75. Änderungen am Leiter und am Integrationswege.** Mit dem Stromfaden sei der Weg  $s$  verkettet (Fig. 58), über den das Linienintegral  $\int_{\bigcirc_s} \mathfrak{H} d s$  zu nehmen ist. Wir denken uns nun einen zweiten Stromfaden  $l_1$ , der einer anderen Strömung, als der bisher betrachteten angehört, neben den

Stromfaden  $l$  gelegt.  $l_1$  soll auch den Strom  $J'$  führen, aber mit  $s$  nicht verkettet sein.

Dieser zweite Stromfaden erzeugt an den einzelnen Stellen des Integrationsweges eine Feldstärke

$$\mathfrak{H}_1 = J' \int_{\bigcirc_{l_1}} \frac{[d l_1, \mathbf{r}]}{r^3},$$

und es ist, weil keine Verkettung besteht,  $\int_{\bigcirc_s} \mathfrak{H}_1 d\mathfrak{s} = 0$ . Daher ist

$$\int_{\bigcirc_s} (\mathfrak{H} + \mathfrak{H}_1) d\mathfrak{s} = \int_{\bigcirc_s} \mathfrak{H} d\mathfrak{s}.$$

Wenn die Integrationen über beide Leiter in gleichem Umlaufsinn ausgeführt werden, so kann man zerlegen:

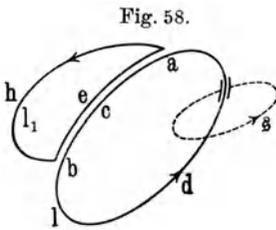


Fig. 58.

$$\mathfrak{H} = J' \int_{\substack{a \text{ über } c \\ b \text{ über } d}} \frac{[d l, \mathbf{r}]}{r^3} + J' \int_{\substack{a \text{ über } d \\ b \text{ über } c}} \frac{[d l_1, \mathbf{r}]}{r^3},$$

$$\mathfrak{H}_1 = J' \int_{\substack{b \text{ über } e \\ a \text{ über } h}} \frac{[d l_1, \mathbf{r}]}{r^3} + J' \int_{\substack{a \text{ über } e \\ b \text{ über } h}} \frac{[d l, \mathbf{r}]}{r^3}.$$

Liegen aber  $l$  und  $l_1$  von  $a$  über  $c$  nach  $b$  und von  $a$  über  $e$  nach  $b$  unendlich nahe nebeneinander, so sind die beiden ersten Posten jeder Summe einander entgegengesetzt gleich, und es ist daher

$$\mathfrak{H} + \mathfrak{H}_1 = J' \int_{\bigcirc_{l+l_1}} \frac{[d l, \mathbf{r}]}{r^3}$$

genommen über den geschlossenen Weg  $ahbda$ , unter Weglassung des doppelten Weges  $acb$ .

Das Linienintegral der von diesem erweiterten Stromfaden herrührenden Feldstärke  $\mathfrak{H} + \mathfrak{H}_1$  über  $s$  ist dasselbe, wie das von  $\mathfrak{H}$  allein über  $s$ .

Dies führt zu dem Satze:

Das Linienintegral der magnetischen Kraft auf einem mit einem Stromleiter verketteten Wege ist unabhängig von der geometrischen Gestalt des Stromleiters, vorausgesetzt, daß die Stromstärke und die Verkettung durch eine Änderung der Gestalt des Stromkreises nicht geändert werden.

Wenn man andererseits neben den Weg  $s$  noch einen zweiten  $s_1$  legt (Fig. 59), der mit  $l$  nicht verkettet ist und auf einem Teil seiner Länge mit  $s$  zusammenfällt, so ist das Linienintegral  $\int_{(s_1)} \mathfrak{H} d\mathfrak{s} = 0$ . Daher ist auch

$$\int_{(s) + (s_1)} \mathfrak{H} d\mathfrak{s} = \int_{(s)} \mathfrak{H} d\mathfrak{s},$$

wenn  $(s) + (s_1)$  bedeutet, daß das Linienintegral erst über den Weg  $s$ , dann über den Weg  $s_1$  genommen werden soll. Aus Gründen, die denen bei der

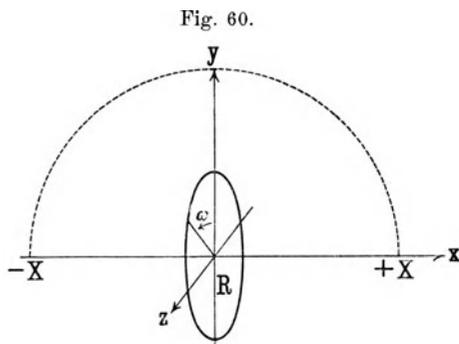
vorhergehenden Überlegung ähnlich sind, ist das Linienintegral über  $s$  und dann über  $s_1$  gleich dem über die nicht gemeinsamen Teile der Wege.

Man sieht hieraus, daß das Linienintegral auch unverändert bleibt, wenn man den Integrationsweg beliebig erweitert, vorausgesetzt, daß die Verkettung unverändert erhalten bleibt.

Aus diesen Überlegungen geht hervor, daß man für die Berechnung des Linienintegrals über einen mit einem Leiter verketteten Weg einen Leiter und einen Weg ganz beliebiger Form wählen darf, wenn diese nur miteinander in derselben Weise wie bei dem vorgelegten Leiter verkettet sind.

**§ 76. Berechnung des Linienintegrals.** Der Leiter mit dem Strome  $J$  sei (Fig. 60) ein Kreisring in der  $y, z$ -Ebene, und der Integrationsweg werde genommen von  $-X$  bis  $+X$  über die  $x$ -Achse und auf einem Halbkreis in der  $x y$ -Ebene nach  $-X$  zurück. Leiter und Integrationsweg sind also verkettet.

Da der Leiter in der  $y z$ -Ebene liegt, so ist  $a_1 = 0$ , und da ferner der Integrationsweg in der  $x y$ -Ebene liegt, so kommen für das Linienintegral nur  $\mathfrak{H}_x$  und  $\mathfrak{H}_y$  in Betracht; ferner ist für jeden Punkt des Weges  $z = 0$  zu setzen.



Die Stromelemente  $i dr = J d\mathfrak{l}$  haben an jeder Stelle tangentielle Richtung; das Bogenelement  $d\mathfrak{l}$  des Kreises hat die Komponenten  $0, db_1, dc_1$ , und daher ist

$$i dv = 0, \quad i_b dv = J db_1, \quad i_c dv = J dc_1.$$

Daher wird

$$\mathfrak{H}_x = - \int_{r_3}^J [c_1 db_1 + (y - b_1) dc_1]$$

$$\mathfrak{H}_y = \int_{r_3}^J x dc_1.$$

Die Integrale sind über den Umfang des Leiterkreises auszudehnen.

Setzt man  $b_1 = R \cos \omega, c_1 = R \sin \omega$ , so wird

$$\mathfrak{H}_x = JR \int_0^{2\pi} d\omega \frac{R - y \cos \omega}{(x^2 + y^2 + R^2 - 2Ry \cos \omega)^{3/2}}$$

$$\mathfrak{H}_y = JR \int_0^{2\pi} d\omega \frac{x \cos \omega}{(x^2 + y^2 + R^2 - 2Ry \cos \omega)^{3/2}}$$

Wir zerlegen das nun zu berechnende Linienintegral  $\int \mathfrak{H} ds$  über den geschlossenen Weg in die beiden Teile von  $-X$  bis  $+X$  über die  $x$ -Achse und von  $+X$  bis  $-X$  über den Halbkreis und berechnen zuerst den zweiten

Teil. In die Richtung des Linienelementes des Halbkreises (Fig. 61). also in die Richtung der Tangente fällt von  $\mathfrak{H}$  die Komponente

$$\mathfrak{H}_t = \mathfrak{H}_y \cos \vartheta - \mathfrak{H}_x \sin \vartheta.$$

Auf dem Halbkreise ist  $x = X \cos \vartheta$ ,  $y = X \sin \vartheta$ . Wir erhalten zunächst

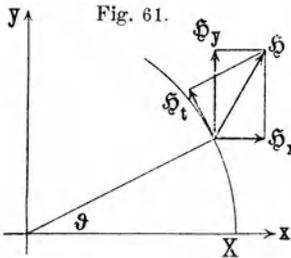
$$\mathfrak{H}_t = JR \int_0^{2\pi} d\omega \frac{X \cos \omega - R \sin \vartheta}{(R^2 + X^2 - 2RX \sin \vartheta \cos \omega)^{3/2}}.$$

Davon ist das Integral zu bilden:

$$\int_0^{\vartheta} \mathfrak{H}_t \cdot X d\vartheta.$$

Wir wollen darin statt  $\mathfrak{H}_t$  eine Größe einführen, die größer als  $\mathfrak{H}_t$  ist, indem wir setzen

$$\mathfrak{H}_t < JR \int_0^{2\pi} d\omega \frac{X}{(X - R)^3} = 2\pi J \frac{RX}{(X - R)^3}.$$



Diese Größe entsteht, indem wir bei  $\mathfrak{H}_t$  im Zähler 1 statt  $\cos \omega$  setzen, das Abziehen des positiven Wertes  $R \sin \vartheta$  unterlassen, und im Nenner statt der Größe  $2RX \sin \vartheta \cos \omega$  die sicher größere  $2RX$  abziehen. Alle diese Maßnahmen vergrößern den Ausdruck.

Der auf den Halbkreis entfallende Teil des Linienintegrals  $\int \mathfrak{H} d\vartheta$  ist also sicher kleiner als

$$\int_0^{\pi} 2\pi J \frac{RX^2}{(X - R)^3} d\vartheta = 2\pi^2 J \frac{RX^2}{(X - R)^3}.$$

Dieser Ausdruck ist um so kleiner, je größer  $X$  ist. Man kann ihn beliebig klein machen, wenn man den Integrationsweg so wählt, daß er von einem sehr weit vom Kreise entfernten Punkte der  $x$ -Achse über diese bis zu einem gleich weit entfernten auf der anderen Seite des Kreises und dann über den Halbkreis zurückführt. Je größer der Halbkreis ist, um so weniger fällt auf ihn von dem ganzen Wert des Linienintegrals. Daher ist dessen Wert der Grenzfall des Integrals über den geradlinigen Teil des Weges, nämlich:

$$\int_{-X}^{+X} \mathfrak{H}_x dx \quad \text{für } X = \infty.$$

Da der ganze Integrationsweg in der  $x$ -Achse liegt, ist in  $\mathfrak{H}_x$  außer  $x = 0$  auch  $y = 0$  zu setzen; man erhält:

$$\mathfrak{H}_x = JR^2 \int_0^{2\pi} \frac{d\omega}{\sqrt{(x^2 + R^2)^3}} = 2\pi J \frac{R^2}{\sqrt{(x^2 + R^2)^3}}.$$

Zur Ausführung der Integration über  $x$  führt man zweckmäßig einen Winkel  $\alpha$  als Integrationsvariable ein durch die Festsetzung:

$$\sin \alpha = \frac{R}{\sqrt{R^2 + x^2}}, \text{ wonach } x = \frac{R}{\operatorname{tg} \alpha},$$

daher wird

$$dx = -R d\alpha / \sin^2 \alpha$$

und

$$\mathfrak{H}_x dx = -2\pi J \sin \alpha d\alpha.$$

Demnach ist das gesuchte Integral

$$\int_{-X}^{+X} \mathfrak{H}_x dx = 2\pi J \left[ \cos \alpha \right]_{\alpha=-X}^{\alpha=+X} = 4\pi J \frac{X}{\sqrt{R^2 + X^2}}.$$

Wird  $X$  gegen  $R$  sehr groß, so ist der Wert des Integrals  $4\pi J$ , und dieser Wert stellt zugleich denjenigen des Linienintegrals  $\int_C \mathfrak{H} d\mathfrak{s}$  über einen mit dem Stromleiter verketteten Weg dar.

Auf den Halbkreis von  $X$  bis  $-X$  entfällt der Betrag

$$4\pi J \left( 1 - \frac{X}{\sqrt{R^2 + X^2}} \right),$$

der bei großem  $X$  näherungsweise den Wert  $2\pi J R^2 / X^2$  hat. Bei  $X = 10R$  entfällt also auf den Halbkreis nur  $1/200$  des Gesamtwertes der bei der Umkreisung des Stromleiters geleisteten Arbeit.

Es ist also bewiesen, daß der Ansatz

$$\mathfrak{H} = \int_{(v)} \frac{[i, \mathbf{r}]}{|\mathbf{r}|^3} dv,$$

der aus der Annahme

$$\mathfrak{U} = \int_{(v)} \frac{i}{|\mathbf{r}|} dv$$

hergeleitet ist, die Gleichung  $\operatorname{rot} \mathfrak{H} = 4\pi i$  in jedem Falle erfüllt. Damit ist die allgemeine Gültigkeit des Ansatzes für das Vektorpotential erwiesen.

**§ 77. Zusammenfassung für Aufgaben über stationäre Felder.** Eine Aufgabe aus dem Gebiete stationärer Ströme wird nach dem vorstehenden gelöst durch folgende Mittel: Die elektrische Feldstärke ist bestimmt durch das elektrische Potential  $\varphi$ , welches die in § 60 angegebenen Eigenschaften besitzt, ferner durch die dort genannten Grenzbedingungen an Übergangsfächen und die Bedingung  $\operatorname{div} i = 0$ .

Wenn eine auf den Fall passende Lösung der Gleichung  $\Delta \varphi = 0$  gefunden ist, so ergibt sich daraus für jede Stelle  $\mathfrak{C}$ , also auch  $i = \sigma \mathfrak{C}$ . Daraus kann aber  $\mathfrak{U}$  oder  $\mathfrak{H}$  nach (110) und (111) an jeder Stelle berechnet werden.

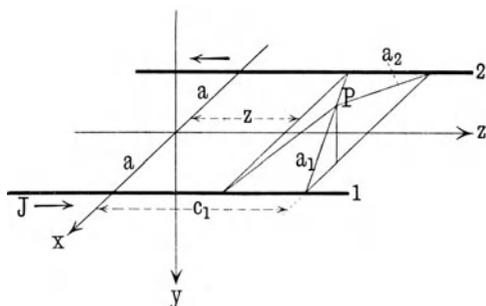
Grundsätzlich ist also jeder stationäre Vorgang bestimmt; indessen bietet die Ausführung der Integrationen für andere als die einfachsten Fälle große Schwierigkeiten. Die tatsächliche Bedeutung der Größe  $\mathfrak{U}$  liegt nicht

sowohl in der Möglichkeit, die Vorgänge an jedem beliebigen Punkte des Feldes zu berechnen, sondern in der Anwendung auf die Berechnung der Energie des gesamten Feldes.

### § 78. Das magnetische Feld einer symmetrischen Doppelleitung.

Doppelleitung aus dünnen Drähten. Wir legen diese, wie in § 66, in

Fig. 62.



die  $xz$ -Ebene so, daß die Leiter der  $x$ -Achse parallel laufen.

Zunächst wollen wir annehmen, der Durchmesser der Leitungen sei sehr klein gegen ihren Abstand; die Stromstärke sei  $J$ . Wir greifen auf jeder Leitung ein Element  $dz$  heraus, das vom Anfangspunkt den Abstand  $z$  hat; das Vektorpotential werde für einen Punkt  $P$  berechnet, der von

der  $xy$ -Ebene den Abstand  $c_1$ , von der Leitung auf der positiven Seite der  $x$ -Achse den Abstand  $a_1$  und von der anderen Leitung den Abstand  $a_2$  habe.

Dann ist

$$\mathfrak{U} = J \int_{-l}^{+l} \frac{dz}{\sqrt{a_1^2 + (z - c_1)^2}} - J \int_{-l}^{+l} \frac{dz}{\sqrt{a_2^2 + (z - c_1)^2}}.$$

$2l$  ist die Länge der Leitung; da die Ströme der  $z$ -Achse parallel laufen, gibt es nur die Komponente  $\mathfrak{U}_z$  von  $\mathfrak{U}$ . Es ist daher

$$\mathfrak{U}_z = J \left[ \log \frac{\sqrt{a_1^2 + (z - c_1)^2} + z - c_1}{\sqrt{a_2^2 + (z - c_1)^2} + z - c_1} \right]_{z=-l}^{z=+l}.$$

Wir wollen unsere Betrachtung auf den Hauptteil der Leitung unter Ausschluß der an den Enden liegenden Stücke beschränken. Von den Enden bleiben wir so weit ab, daß  $l - c_1$  gegen  $a_1$  und  $a_2$  in jedem Falle sehr groß ist.

Diese Einschränkung macht praktisch nichts aus, da wir z. B. bei einer Doppelleitung, die Hunderte von Kilometern lang ist, kaum 100 m außer Betracht lassen müssen, wenn wir selbst am Ende des betrachteten Stückes  $a_1$  und  $a_2$  gleich mehreren Metern wählen wollen. Unter dieser Beschränkung geht das Integral über in

$$\mathfrak{U}_z = J_1 \log \left( \frac{a_2}{a_1} \right)^2 = J_1 \log \frac{(x + a)^2 + y^2}{(x + a)^2 + y^2}.$$

Man erkennt aus dieser Form, daß der Betrag des Vektorpotentials einer Doppelleitung, deren Drähte im Vergleich zu ihrem Abstände voneinander sehr dünn sind, auf denjenigen Flächen konstante Werte hat, die nach § 47 und 66 als Niveauflächen des elektrischen Potentials bestimmt sind, nämlich auf Kreiszyklindern, deren Lage und Durchmesser aus Gleichung (70) und (71) hervorgehen. Man kann also  $\mathfrak{U}_z = C \varphi$  setzen, wo  $C$  eine innerhalb jedes

zu den Leitungen senkrechten Querschnittes konstante Größe ist. Die Komponenten der magnetischen Feldstärke ergeben sich nach der Bedeutung der Gleichung  $\mathfrak{H} = \text{rot } \mathfrak{U}$  im vorliegenden Falle, wo nur die  $z$ -Komponente von  $\mathfrak{U}$  besteht, als

$$\mathfrak{H}_x = C \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \quad \mathfrak{H}_y = -C \frac{\partial \varphi}{\partial x}.$$

Aus der Gleichung  $\text{rot } \mathfrak{H} = 0$ , die an den von Strömung freien Stellen des Raumes gilt, also überall außerhalb der dünnen Drähte, folgt, daß die magnetische Feldstärke als negativer Gradient eines Skalars  $\psi$ , des magnetischen Potentials dargestellt werden kann (vgl. § 80), und daher ist

$$-\frac{\partial \psi}{\partial x} = C \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \quad \frac{\partial \psi}{\partial y} = C \frac{\partial \varphi}{\partial x}.$$

Diese Gleichungen bedeuten aber nach § 46, daß die Linien  $\varphi = \text{const}$  und  $\psi = \text{const}$  aufeinander senkrecht stehen; daher sind also die  $\mathfrak{H}$ -Linien des magnetischen Feldes gleichgerichtet mit den Niveaulinien des elektrischen Feldes, während andererseits die  $\mathfrak{E}$ -Linien des elektrischen Feldes mit den Niveaulinien des magnetischen Potentials zusammenfallen.

Doppelleitung aus starken Drähten. Wir nehmen des Zusammenhanges wegen diese Berechnung hier voraus, obwohl wir uns für ihre Durchführung auf eine erst später näher besprochene Rechnungsweise stützen müssen.

Ist der Abstand der Leiter nicht sehr groß gegen den Durchmesser der Drähte, so hat man den Strom jeder Leitung in Stromfäden zu zerlegen mit der Stromstärke  $J df / R^2 \pi$ , wo  $J$  der Gesamtstrom im Draht,  $R$  der Halbmesser des Drahtes und  $df$  der Querschnitt des Stromfadens ist. Für einen einzelnen Stromfaden gilt die bisherige Entwicklung; bezeichnet man also mit  $a_1$  und  $a_2$  die Abstände des Aufpunktes von den Stromfäden im ersten und zweiten Leiter, so bringt der betrachtete Anteil des Stromes zum Vektorpotential den Beitrag

$$d \mathfrak{U}_z = 2 \frac{J df}{R^2 \pi} \log \frac{a_2}{a_1}.$$

Um den Gesamtwert zu erhalten, hat man diesen Ausdruck über den Querschnitt des Leiters zu integrieren. Die dazu erforderliche Rechnung ist in § 112 für diesen und mehrere andere Fälle unter einem allgemeineren Gesichtspunkte mitgeteilt.

So lange der Aufpunkt außerhalb der Leiterfläche liegt, ist

$$\int \log a_1 df = R^2 \pi \log r_1,$$

nach (3) in § 112, wenn  $r_1$  der Abstand des Aufpunktes von der Achse des positiven Leiters ist; ebenso ist

$$\int \log a_2 df = R^2 \pi \log r_2,$$

wo  $r_2$  den Abstand des Aufpunktes von der Achse des negativen Leiters bezeichnet. Daher ist für eine Schleife aus zylindrischen Leitern mit dem Achsenabstand  $2d$  in einem Aufpunkte außerhalb der Leiter

$$\mathfrak{U}_z^a = J \log \frac{(x+d)^2 + y^2}{(x-d)^2 + y^2}.$$

Der Durchmesser der Drähte spielt hierbei keine Rolle.

Bildet man danach die Komponenten der magnetischen Feldstärke

$$\begin{aligned}\mathfrak{H}_x^a &= -2J \frac{y}{(x-d)^2 + y^2} + 2J \frac{y}{(x+d)^2 + y^2}, \\ \mathfrak{H}_y^a &= +2J \frac{x-d}{(x-d)^2 + y^2} - 2J \frac{x+d}{(x+d)^2 + y^2},\end{aligned}$$

so stellen die ersten Posten die Komponenten von  $2J/r_1$  dar, die zweite dagegen die von  $-2J/r_2$ .

$2J/r$  ist die Feldstärke, die ein langer, in der Nähe des Aufpunktes geradliniger Leiter hervorbringt; die Vorzeichen bei  $2J/r_1$  und  $2J/r_2$  zeigen nach der Ampèreschen Regel die Richtung der magnetischen Kräfte an. Die Feldstärke  $\mathfrak{H}^a$  ist also gleich der Summe der Feldstärken, welche die als selbständig betrachteten Leiter erzeugen würden, und es ergibt sich, daß man bei einer Schleife aus parallelen Drähten die magnetische Feldstärke richtig bildet, wenn man sie berechnet, als wenn jeder Draht einem selbständigen Kreise angehörte.

Liegt der Aufpunkt im Innern eines der Leiter, z. B. des positiven, so ergibt die Integration nach (6) in § 112, daß

$$\int \log a_1 df = R^2 \pi \left\{ \log R - \frac{1}{2} \left[ 1 - \left( \frac{R_1}{R} \right)^2 \right] \right\},$$

wenn  $R_1$  den Abstand des Aufpunktes von der Achse bezeichnet. Da der Aufpunkt außerhalb des negativen Leiters liegt, so bleibt

$$\int \log a_2 df = R^2 \pi \log r_2.$$

Man erhält daher

$$u_z^i = 2J \left\{ \log r_2 - \log R + \frac{1}{2} \left[ 1 - \left( \frac{R_1}{R} \right)^2 \right] \right\}$$

oder in den Koordinaten  $x$  und  $y$  ausgedrückt:

$$u_z^i = J \log \frac{(x+d)^2 + y^2}{R^2} + J \left( 1 - \frac{(x-d)^2 + y^2}{R^2} \right).$$

Für die Komponenten der Feldstärke erhält man

$$\begin{aligned}\mathfrak{H}_x^i &= -2J \frac{y}{R^2} + 2J \frac{y}{(x+d)^2 + y^2}, \\ \mathfrak{H}_y^i &= 2J \frac{x-d}{R^2} + 2J \frac{x+d}{(x+d)^2 + y^2}.\end{aligned}$$

Die beiden ersten Posten sind die Komponenten von

$$2J \frac{R_1}{R^2} = \frac{2JR_1^2/R^2}{R_1}.$$

Der Zähler stellt den Strom dar, der von einem Kreise mit dem Radius  $R_1$  umschlungen wird, der Bruch also die Feldstärke innerhalb des Leiters im Abstände  $R_1$  von der Achse. Die zweiten Posten von  $\mathfrak{H}_x^i$  und  $\mathfrak{H}_y^i$  haben dieselben Werte wie bei  $\mathfrak{H}_x^a$  und  $\mathfrak{H}_y^a$ . Für das innere der Leiter gilt also dasselbe, wie für den Raum außerhalb der Leiter bezüglich der Zusammensetzung der Feldstärke aus den von jedem Leiter einzeln hervorgebrachten Beträgen.

**§ 79. Biot-Savartsches Gesetz und Ampèresche Regel.** In einem Raume, der kein Eisen enthält, hat nach Gleichung (111)  $\mathfrak{H}$  die Form

$$\mathfrak{H} = \int \frac{[i, r]}{|r|^3} dx.$$

Für einen linearen Leiter folgt daraus:

$$\mathfrak{H} = J \int_{(l)} \frac{[dl, r]}{|r|^3}.$$

In der Form der gewöhnlichen Analysis geschrieben, wobei  $dl$  die Länge des Leiterelementes  $dl$  und  $r$  die Länge von  $r$  bedeute, ergibt sich

$$\mathfrak{H} = J \int_{(l)} \frac{dl \sin(r, dl)}{r^2} \dots \dots \dots (113)$$

Dabei ist zu beachten, daß  $dl$ ,  $r$ ,  $\mathfrak{H}$  in der angegebenen Reihenfolge ein Rechtssystem bilden und daß  $\mathfrak{H}$  auf der durch  $dl$  und  $r$  zu legenden Ebene senkrecht steht. Die Integration ist über den ganzen, nach der Natur der Sache geschlossenen Stromkreis zu erstrecken.

Man kann sich dieses Integral aus Teilbeträgen

$$d\mathfrak{H} = \frac{J dl}{r^2} \sin(r, dl)$$

aufgebaut denken und erhält so die Formel des nach Biot und Savart benannten Gesetzes. Dieses Gesetz ist aus Beobachtungen an Strömen, die also geschlossen waren, abgeleitet und kann daher auch nur auf geschlossene Ströme wieder angewandt werden.

Die vorhin angegebene Regel über die Reihenfolge von  $dl$ ,  $r$ ,  $\mathfrak{H}$  im Rechtssystem entspricht der als Ampèresche Regel bezeichneten.

**§ 80. Magnetisches Potential außerhalb der Strömung.** Wie am Ende von § 77 angedeutet wurde, eignen sich die Größen von  $\mathfrak{H}$  und  $U$  selbst weniger zur Beschreibung der Eigenschaften des magnetischen Feldes, als gewisse aus ihnen abgeleitete Größen. Als eine solche wollen wir in dem Raume außerhalb der Strömung das magnetische Potential  $\psi$  berechnen. Daß ein solches besteht, folgt aus der Gleichung  $rot \mathfrak{H} = 0$ , die wiederum aus der Bestimmung  $i = 0$  für den Raum außerhalb der Strömung folgt. Zwischen  $\mathfrak{H}$  und  $\psi$  gilt die Gleichung

$$\mathfrak{H} = -grad \psi \dots \dots \dots (114)$$

Um das magnetische Potential zu berechnen, gehen wir aus von dem in Gl. (112) abgeleiteten Ausdrucke für die magnetische Feldstärke im Raume um einen Stromfaden mit der Stromstärke  $J$ , nämlich

$$\mathfrak{H} = J \int_{(l)} \frac{[dl, r]}{|r|^3}.$$

Wenn man eine im Punkte  $P$  (Fig. 63) befindliche Einheit des Magnetismus um das Stück  $dr$  verschiebt, so wird die Arbeit  $\mathfrak{H} dr$  geleistet. Diese ist demnach gleich

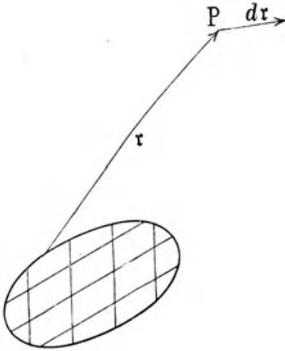
$$J \int_{(l)} \frac{[dl, r] dr}{|r|^3}.$$

Nach Gleichung (18) läßt sich dies in folgender Weise umformen:

$$J \int_{(l)} \frac{[dl, \mathbf{r}] d\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|^3} = J \int_{(l)} \frac{[\mathbf{r}, d\mathbf{r}]}{|\mathbf{r}|^3} dl.$$

Die Arbeit ist nunmehr durch ein Linienintegral um den Stromleiter dargestellt. Nach dem Satze in Gleichung (28)

Fig. 63.



$$\int_{(s)} \mathfrak{A} d\mathfrak{s} = \int_{(f)} \text{rot } \mathfrak{A} df,$$

wo  $f$  eine von  $s$  berandete Fläche ist, kann das Linienintegral um den Leiter auch durch ein Flächenintegral dargestellt werden, welches sich auf eine beliebige, von dem Leiter berandete Fläche bezieht, etwa die in Fig. 63 durch die Koordinateneinteilung angedeutete. Die bei der Verschiebung der magnetischen Einheit geleistete Arbeit ist also

$$J \int_{(f)} \text{rot} \frac{[\mathbf{r}, d\mathbf{r}]}{|\mathbf{r}|^3} df.$$

Hierin bedeutet  $r$  den Abstand des Aufpunktes von einem Flächenelement und die Bildung der Operation  $\text{rot}$  setzt die Verschiebung des Punktes  $a_1, b_1, c_1$  in der Fläche voraus. Die Verschiebungen nach den drei Achsen seien  $da_1, db_1, dc_1$ . Für zwei beliebige Vektoren  $\mathfrak{A}$  und  $\mathfrak{B}$  ist

$$\text{rot}_{a_1} [\mathfrak{A}, \mathfrak{B}] = \frac{\partial}{\partial b_1} (\mathfrak{A}_x \mathfrak{B}_y - \mathfrak{A}_y \mathfrak{B}_x) - \frac{\partial}{\partial c_1} (\mathfrak{A}_z \mathfrak{B}_x - \mathfrak{A}_x \mathfrak{B}_z).$$

Setzen wir

$$\mathfrak{A} = \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|^3}, \quad \mathfrak{B} = d\mathbf{r},$$

so ist

$$\mathfrak{A}_x = \frac{x - a_1}{|\mathbf{r}|^3} = \frac{\partial}{\partial a_1} \left| \frac{1}{r} \right|, \quad \mathfrak{A}_y = \frac{\partial}{\partial b_1} \left| \frac{1}{r} \right|, \quad \mathfrak{A}_z = \frac{\partial}{\partial c_1} \left| \frac{1}{r} \right|.$$

Ferner ist

$$\mathfrak{B}_x = dx, \quad \mathfrak{B}_y = dy, \quad \mathfrak{B}_z = dz.$$

Dadurch wird

$$\begin{aligned} \text{rot}_{a_1} \frac{[\mathbf{r}, d\mathbf{r}]}{|\mathbf{r}|^3} &= \frac{\partial}{\partial a_1} \left( \frac{\partial}{\partial a_1} \left| \frac{1}{r} \right| dx + \frac{\partial}{\partial b_1} \left| \frac{1}{r} \right| dy + \frac{\partial}{\partial c_1} \left| \frac{1}{r} \right| dz \right) \\ &\quad - dx \left( \frac{\partial^2}{\partial a_1^2} \left| \frac{1}{r} \right| + \frac{\partial^2}{\partial b_1^2} \left| \frac{1}{r} \right| + \frac{\partial^2}{\partial c_1^2} \left| \frac{1}{r} \right| \right). \end{aligned}$$

So lange  $|\mathbf{r}|$  von Null verschieden ist, hat der Faktor von  $dx$  im zweiten Posten dieser Summe stets den Wert Null.

Die Klammer des ersten Ausdruckes enthält in

$$\frac{\partial}{\partial a_1} \left| \frac{1}{r} \right|, \quad \frac{\partial}{\partial b_1} \left| \frac{1}{r} \right|, \quad \frac{\partial}{\partial c_1} \left| \frac{1}{r} \right|$$

die Komponenten von  $\text{grad} \left| \frac{1}{r} \right|$ , genommen in der Fläche  $f$ , daher ist

$$\text{rot}_{a_1} \frac{[r, dr]}{|r|^3} = \frac{\partial}{\partial a_1} \left( \text{grad} \left| \frac{1}{r} \right| \right)_f dr,$$

Daraus folgt aber

$$\text{rot} \frac{[r, dr]}{|r|^3} = \text{grad} \left( \text{grad} \left| \frac{1}{r} \right| \right)_f dr,$$

und die bei der Verschiebung der magnetischen Einheit um die Strecke  $dr$  geleistete Arbeit ist

$$J dr \int_{(f)} \text{grad} \left( \text{grad} \left| \frac{1}{r} \right| \right) d\mathfrak{f} = dr \text{grad} \left( J \int_{(f)} \text{grad} \left| \frac{1}{r} \right| d\mathfrak{f} \right).$$

Andererseits ist dieselbe Arbeit, durch das Potential  $\psi$  ausgedrückt, gleich  $-\text{grad} \psi dr$ .

Durch Gleichsetzung dieser Ausdrücke erhält man

$$\psi = -J \int_{(f)} \text{grad} \left| \frac{1}{r} \right| d\mathfrak{f} + \text{const} \dots \dots \dots (115)$$

$\text{grad} \left| \frac{1}{r} \right|$  ist der Differentialquotient von  $\left| \frac{1}{r} \right|$  nach einer bestimmten Richtung  $g$ . Bildet diese mit der Normalen  $n$  von  $|d\mathfrak{f}|$  den Winkel  $(g, n)$ , so ist der Wert jedes der skalaren Produkte, aus denen sich das Integral zusammensetzt, gleich

$$\left| \text{grad} \left| \frac{1}{r} \right| \right| \cos(g, n) |d\mathfrak{f}|. \quad \frac{\partial}{\partial n} \left| \frac{1}{r} \right|$$

Das Produkt der beiden ersten Faktoren ist aber identisch mit  $\frac{\partial}{\partial n} \left| \frac{1}{r} \right|$ . Schreibt man in der Weise der gewöhnlichen Algebra  $r$  für  $|r|$  und  $df$  für  $|d\mathfrak{f}|$ , so wird

$$\psi = -J \int_{(f)} \frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{r} df + \text{const} \dots \dots \dots (116)$$

Die Konstante bestimmt sich dadurch, daß die Arbeit auf einem geschlossenen Wege, der von einem Punkte des Feldes ausgeht und dorthin zurückkehrt, ohne den Strom zu umschlingen, den Wert Null hat; für solche Wege ist auch die Konstante gleich Null zu setzen. Liegen dagegen in einem bestimmten Falle Wege vor, die den Strom einmal oder mehrmals umschlingen, ehe sie zum Ausgangspunkte zurückkehren, so ist die Arbeit, die bei jedem Umgange geleistet wird, nach § 76 gleich  $4\pi J$ , also bei  $n$  Umgängen  $4\pi nJ$ . Ganz allgemein genommen, ist also das Potential vieldeutig; da aber in der Regel entweder keine oder nur eine einmalige Umschlingung des Stromes

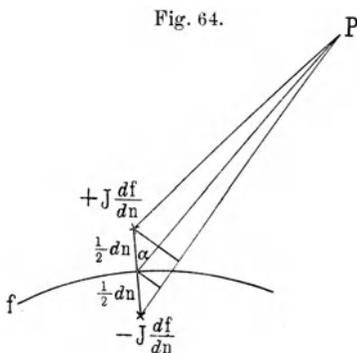
vorliegt, so führt die Vieldeutigkeit des Potentials in bestimmten Fällen nicht zu Zweifeln.

**§ 81. Magnetische Doppelschicht. Ampèresche Theorie des Magnetismus.** Die Schlußformel des vorigen Paragraphen gestattet mehrere anschauliche Darstellungen.

Man denke sich die Fläche gleichmäßig mit magnetischen Mengen belegt, und zwar auf der positiven Seite der Normalen mit Nordmagnetismus, auf der anderen Seite mit Süd magnetismus; ferner sollen die Belegungen für die

Flächeneinheit die Menge  $\pm \frac{J}{dn}$  haben und den Abstand  $dn$  voneinander. Die Belegung einer Fläche  $df$  bildet also einen kleinen Magnet mit den Polen  $\pm \frac{Jdf}{dn}$  und dem Polabstand  $dn$ , also dem Momente  $Jdf$ .

Das Potential dieser beiden Massen im Punkte  $P$  ist (Fig. 64), wenn  $dn$  als sehr klein gegen  $r$  angenommen wird:



$$\left( J \frac{df/dn}{r} \right)_{r - \frac{dn \cos \alpha}{2}} - \left( J \frac{df/dn}{r} \right)_{r + \frac{dn \cos \alpha}{2}}$$

Dies ist aber gleich

$$- J \frac{df}{dn} \frac{\partial \left( \frac{1}{r} \right)}{\partial n \cos \alpha} = - J \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} df.$$

Belegt man also die ganze Fläche gleichmäßig mit einer magnetischen Doppelschicht vom Momente  $J$  für 1 qcm, und zwar positiv auf der Seite, aus welcher ein mit dem Strom ein Rechtssystem bildender Strahl  $r$  austritt, so hat diese Doppelschicht im Punkte  $P$  das Potential

$$\psi = - J \int_{(f)} \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} df,$$

sie ist also in der magnetischen Wirkung auf einen fernen Punkt dem Strom äquivalent.

Da man die magnetische Doppelschicht auf jeder von der Stromfläche berandeten Fläche angebracht annehmen kann, so gelangt man hier wieder zu der schon in § 6 dargelegten Vorstellung über die Schichtung der magnetischen Mengen in einem magnetischen Felde.

Man kann sich aber auch, statt Ströme durch Magnete, umgekehrt solche durch Ströme ersetzt denken, indem man statt eines kleinen kurzen Magnets (Molekularmagnet) vom Momente  $Mdf$  einen die zur magnetischen Achse senkrechte Fläche  $df$  umkreisenden Strom  $J = M$  annimmt. Man gelangt so zu der Ampèreschen Theorie des Magnetismus.

## Dritter Abschnitt.

**Magnetische Felder von Dauermagneten und Elektromagneten.**

**§ 82. Anwendung der Ampèreschen Theorie.** Bei den Elektromagneten ist die Verkettung der magnetischen Linien mit dem erregenden Strom offenkundig, bei den Dauermagneten wird nach der Ampèreschen Theorie angenommen, daß jedes Eisenmolekül von einem Kreisstrom umgeben sei, welcher ihm ein bestimmtes magnetisches Moment erteilt. Die Annahme solcher Ströme, die ohne Energiezufuhr in widerstandslosen Bahnen kreisen, bereitet gewiß der Vorstellung einige Schwierigkeiten; sie ist trotzdem nach den Grundlagen der neueren Anschauungen über den Aufbau der Körper aus kleinsten Teilen wahrscheinlich. Da sie die Erscheinungen des Magnetismus der Dauermagnete auf dieselben Ursachen, wie diejenigen an Elektromagneten zurückführt, wollen wir uns im wesentlichen dieser Theorie anschließen.

Danach würden in einem magnetischen Stück Eisen die Moleküle, die wir uns um ihren Schwerpunkt frei beweglich vorstellen, mit ihren Strömen sich so richten, daß ihre Gesamtwirkung in jedem außerhalb des Eisens gelegenen Punkte aufgehoben ist. Eine magnetische Feldstärke dagegen richtet die Moleküle und bringt ihre Ströme in angenähert parallele Ebenen, so daß sie eine Resultante nach außen erhalten. Geht die magnetische Kraft zurück, so suchen auch die Moleküle ihre Anfangslage wieder einzunehmen. Infolge einer dem Eisen eigentümlichen Eigenschaft ist dies nur nach einer kürzeren oder längeren Zeit möglich; man muß annehmen, daß eine innere Reibung im Eisen der rückkehrenden Bewegung der Moleküle entgegensteht; es bleibt auch nach dem Aufhören der magnetischen Kraft noch Magnetismus übrig, remanenter Magnetismus, der bei weichem Eisen sehr klein, bei hartem Stahl groß ist. Der remanente Magnetismus ist nicht stabil, sondern er kann auch durch andere als magnetische Kräfte, z. B. Erschüttern, Erhitzen, verändert werden; andererseits kennt man empirische Verfahren, um zeitliche Änderungen des Magnetismus an Stahlmagneten fast unmerklich zu machen.

Wir wollen nun zunächst unter der Annahme des einheitlichen Verhaltens von Dauer- und Elektromagneten die in § 3 und 4 erwähnten Größen  $\mathfrak{H}$  und  $\mathfrak{B}$  näher betrachten und ihre für die Technik wichtigsten Beziehungen feststellen.

**§ 83. Die magnetische Feldstärke und das magnetische Potential.**

Die magnetische Feldstärke wird nach § 3 gemessen durch die mechanische Kraft auf einen der Feldstärke unterworfenen magnetischen Einheitspol. Hiernach können wir zunächst von einer magnetischen Feldstärke nur in dem eisenfreien Raume sprechen, da wir in den von Eisen erfüllten Raum nicht mit einem Probepol gelangen können. Für den Raum innerhalb des Eisens wird die Annahme gemacht, daß die magnetische Feldstärke dort dieselbe sei, wie wenn man in der Richtung der magnetischen Kraft einen Raum von sehr geringem Querschnitt ausgebohrt hätte, der den Probepol aufnimmt.

In dem Raume außerhalb des Eisens gibt es bei Dauermagneten keine geschlossenen Linien, welche mit Strömen verkettet sind, da wir die erregenden Ampèreschen Ströme in der Masse des Eisens eingebettet annehmen. Auch bei Elektromagneten werden keine Wege eines ihrer Wirkung unterworfenen Körpers in Betracht kommen, die zwischen dem Eisen und der Spule verlaufen und so die Spule umschlingen. Wir finden daher, daß es in den Feldern ruhender Magnete keine Wege gibt, die mit Strömen verkettet sind; es ist daher stets

$$\operatorname{rot} \mathfrak{H} = 0, \text{ also } \mathfrak{H} = -\operatorname{grad} \psi.$$

Aus der Gl. (39)  $\operatorname{div} \mathfrak{B} = 0$  ergibt sich in jedem homogenen Körper die Gleichung

$$\Delta \psi = 0 \dots \dots \dots (117)$$

Aus Lösungen dieser Gleichung kann man in ähnlicher Weise die Verteilung der magnetischen Kraft in magnetischen Feldern geeigneter Form berechnen, wie dies in den § 33 u. ff. für die elektrische Kraft in elektrischen Feldern mit Hilfe von Lösungen der Gleichung  $\Delta \varphi = 0$  geschehen ist. Ein Beispiel hierfür folgt in § 93.

**§ 84. Die magnetische Induktion  $\mathfrak{B}$ .** Nach den Ausführungen im § 5 bringt die magnetische Feldstärke  $\mathfrak{H}$  eine bestimmte Anordnung der Magnetismen zuwege, welche wir durch den Vektor der magnetischen Induktion  $\mathfrak{B}$  kennzeichnen. Man setzt

$$\mathfrak{B} = \mu \mathfrak{H}.$$

Für die meisten Körper ist  $\mu$  merklich gleich Eins; für die als magnetisch bezeichneten dagegen weicht es von Eins ab. Erfahrungsgemäß ist es aber für einen bestimmten magnetischen Körper keine konstante Größe, sondern die Abhängigkeit des  $\mathfrak{B}$  von  $\mathfrak{H}$  wird durch eine noch von mehreren anderen Größen abhängige Funktion bestimmt, für die ein analytischer Ausdruck noch nicht gefunden worden ist.

Zum Ersatz dafür bedient man sich der Magnetisierungskurven, welche zusammengehörende Werte von  $\mathfrak{H}$  und  $\mathfrak{B}$  darstellen. Geht man vom unmagnetischen Zustande aus, bei dem  $\mathfrak{H} = 0$  und auch  $\mathfrak{B} = 0$  ist und steigert  $\mathfrak{H}$ , etwa durch Einleiten eines Stromes bestimmter Stärke in einer das Eisenstück umgebenden Spule, so nimmt  $\mathfrak{B}$  Werte an, wie sie durch die Ordinaten der Linie  $OC$  der Fig. 65 angegeben werden. Man nennt diese Linie für die erste Magnetisierung die jungfräuliche Kurve. Das eigenartige dieser Magnetisierungskurve ist, daß die Induktion bei mäßigen Werten von  $\mathfrak{H}$  diesem etwa proportional ist, aber bei weiterem Steigen von  $\mathfrak{H}$  zurückbleibt, um schließlich nur noch langsam zuzunehmen. Man nennt diese Erscheinung Sättigung des Eisens. Wenn man, nachdem  $\mathfrak{H}$  den Wert 100 erreicht hat, wobei also  $\mathfrak{B}$  nach der Kurve den Wert 14 500 erhalten hat, die magnetische Feldstärke vermindert, so erhält man erfahrungsgemäß für ein bestimmtes  $\mathfrak{H}$  einen anderen Wert als vorher, und zwar einen größeren, derart, daß  $\mathfrak{B}$ , nachdem die Feldstärke auf den Wert Null gebracht ist, nicht den Wert Null, sondern einen Wert  $OB$  annimmt. Dieser Wert bezeichnet den remanenten Magnetismus des Eisens nach der voraufgegangenen Magnetisierung. Hätte man bei einem geringeren Werte von  $\mathfrak{H}$  als 100 bereits mit der Ver-

minderung der magnetischen Feldstärke begonnen, so würde man auch für  $\mathfrak{H} = 0$  einen anderen, und zwar einen kleineren Wert der Induktion  $\mathfrak{B}$  erhalten. Man würde auch wieder andere Werte von  $\mathfrak{B}$  erreichen, wenn man von  $\mathfrak{H} = 0$  aus die Feldstärke von neuem wachsen und dann abnehmen ließe. Nur in einem stimmen alle möglichen Kurven überein, nämlich daß sie für sehr große Werte von  $\mathfrak{H}$  dieselben Werte für  $\mathfrak{B}$  ergeben.

Fig. 65.

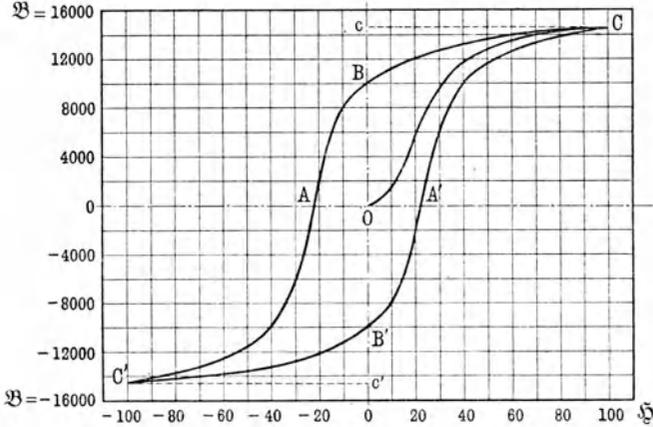
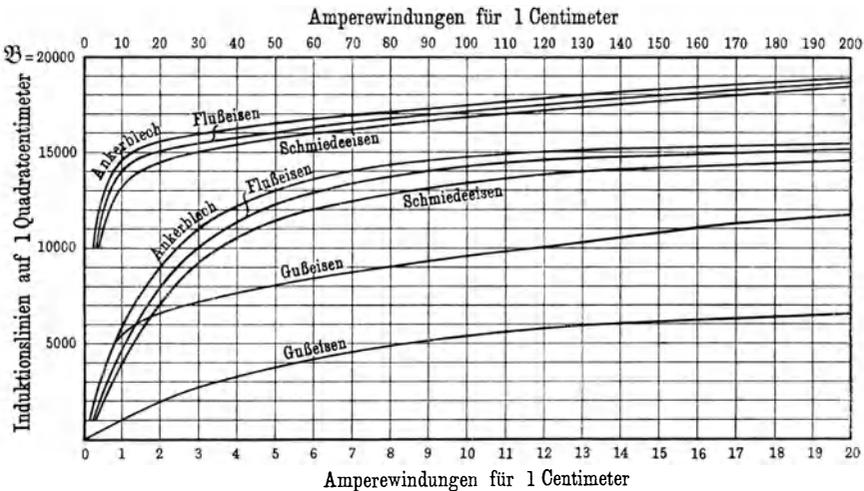


Fig. 66.



Um für verschiedene Eisensorten vergleichbare Resultate zu erhalten, nimmt man daher die Magnetisierungskurven nach einem gleichmäßigen Verfahren auf. Man unterwirft die Eisenprobe Magnetisierungen wechselnder Richtung in Feldern, die bis zu gleich hohen positiven und negativen Werten von  $\mathfrak{H}$  verstärkt werden; die obere Grenze des  $\mathfrak{H}$  hängt aus praktischen Gründen davon ab, ob es sich um ein Material von hoher oder geringer Permeabilität handelt. Wiederholt man die Magnetisierung zwischen den gleichen Grenzwerten von  $\mathfrak{H}$  mehrere Male, so decken sich die Magnetisierungs-

kurven. Sie bilden geschlossene Linien, die Magnetisierungsschleifen genannt werden. Man nennt eine Magnetisierung zwischen gleichen positiven und negativen Werten, bei der die Schleife einmal durchlaufen wird, einen vollen Zyklus. Solche Zyklen werden andauernd bei der Magnetisierung durch Wechselströme durchlaufen.

Wegen der Meßverfahren und der Ergebnisse für verschiedene Eisensorten wird auf die einschlägige Literatur verwiesen<sup>6)</sup>.

Bei der Anwendung der Magnetisierungskurve für die Berechnung von Elektromagneten bedient man sich der mittleren Magnetisierungskurve, deren Ordinaten die Mittelwerte der  $\mathfrak{B}$ -Werte des aufsteigenden und des absteigenden Astes der Magnetisierungskurve für denselben Wert von  $\mathfrak{H}$  sind.

Fig. 66 gibt nach Kapp die Magnetisierungskurve für Gußeisen, Schmiedeeisen, Flußeisen und Ankerblech, und zwar für jedes Material durch zwei Linien, deren untere für die am unteren Rande bezeichneten geringeren magnetisierenden Kräfte gilt, während die obere Kurve sich auf die am oberen Rande angegebenen größeren magnetisierenden Kräfte bezieht. Statt durch die Feldstärken ist die magnetisierende Kraft durch die ihnen proportionalen Ampèrewindungen auf 1 cm Länge angegeben; die Beziehung beider wird in § 89 näher dargelegt werden.

**§ 85. Anfangs- und reversible Permeabilität.** Für die Telegraphentechnik haben die besprochenen Magnetisierungskurven nur insoweit Interesse, als es sich um die Verwendung von Eisen für Elektromagnete handelt, die mit kräftigen Strömen betrieben werden, derart, daß die Feldstärke einige Ampèrewindungen auf das Zentimeter beträgt. Anders ist es mit den Magnetisierungsvorgängen in der Fernsprechtechnik, also bei Hörern, Transformatoren, Pupinspulen, Krarupleitern. Wegen der Kleinheit der Ströme bleibt in diesen Fällen die Feldstärke weit unter den genannten Werten. Es kommt daher für solche Fälle, in denen  $\mathfrak{B}$  in geringen Beträgen um den Wert Null herum schwankt, nur die Anfangspermeabilität in Betracht, welche, wie in Fig. 65 der Anfang der von  $O$  ausgehenden Kurve andeutet, erheblich kleiner ist als die auf dem mittleren Ast der Kurve  $OC$  herrschende. Sie liegt für weiches Eisen in der Nähe von 100. Wenn, wie in Fernhörern, das Eisen, auf welches die geringen magnetischen Feldstärken aus der Elektromagnetbewicklung einwirken, durch einen Dauermagnet schon auf eine höhere Magnetisierungsstufe gehoben worden ist, so hat dies doch für die durch die Ströme erzeugte magnetische Induktion keinen Vorteil. Bei den kleinen Änderungen der Feldstärke folgt die Induktion nur beim ersten Aufstieg der Magnetisierungslinie, welche der gegebenen großen Feldstärke entspricht. Bei dem ersten Abstieg dagegen und den späteren Hin- und Hergängen folgt  $\mathfrak{B}$  einer Linie, die im großen und ganzen nur dieselbe Neigung gegen die Abszissenachse hat, wie die der Anfangspermeabilität. Man spricht von dem zugehörigen Werte von  $\mu$  als der reversiblen Permeabilität<sup>7)</sup>. Es ist also nicht möglich, die aus wechselnden schwachen magnetischen Kräften folgende Induktion durch starke hinzugefügte dauernde Kräfte zu heben.

**§ 86. Verhalten von  $\mathfrak{H}$  und  $\mathfrak{B}$  an Trennflächen.** Für  $\mathfrak{H}$  gilt die Gleichung  $\int \mathfrak{H} d\mathfrak{s} = 0$ , die nur eine andere Form der Gleichung  $\text{rot } \mathfrak{H} = 0$  ist.

Wenden wir diese auf die einer Grenzfläche parallele Komponente von  $\mathfrak{H}$  an, vollständig nach der Analogie des in § 28 für  $\mathfrak{E}$  angegebenen, so folgt wieder, daß die zur Trennfläche parallele Komponente von  $\mathfrak{H}$  in dieser Fläche stetig ist, d. h. auf beiden Seiten der Fläche denselben Wert hat.

Für  $\mathfrak{B}$  folgt aus der Gleichung  $\text{div } \mathfrak{B} = 0$ , wiederum analog dem in § 28 für  $\mathfrak{D}$  bewiesenen, daß die normale Komponente von  $\mathfrak{B}$  auf beiden Seiten der Trennfläche denselben Wert hat.

Liegt also beispielsweise eine Grenzfläche zwischen Luft und Eisen in der  $xy$ -Ebene, so wollen wir ein homogenes ebenes Feld annehmen, derart, daß  $\mathfrak{H}$  in der  $yz$ -Ebene liegt.

Dann hat  $\mathfrak{H}$  die Komponenten  $\mathfrak{H}_y$  und  $\mathfrak{H}_z$ . Ersteres ist zur Grenzfläche parallel, daher ist

$$(\mathfrak{H}_y)_l = (\mathfrak{H}_y)_e \dots \dots \dots (118)$$

wenn durch die Beisätze  $l$  und  $e$  angedeutet wird, daß es sich um die Werte in Luft und in Eisen handle.

Ferner gilt für die zur Grenzfläche normale Komponente von  $\mathfrak{B}$ , also  $\mathfrak{B}_z$ , daß

$$(\mathfrak{B}_z)_l = (\mathfrak{B}_z)_e, \text{ also } (\mathfrak{H}_z)_l = (\mu \mathfrak{H}_z)_e \dots \dots \dots (119)$$

Kommt daher eine  $\mathfrak{H}$ -Linie aus dem Eisen unter einem Winkel  $\varphi_e$  an die Grenzfläche heran, so ist

$$(\mathfrak{H}_y)_l = \mathfrak{H}_e \cos \varphi_e, \quad (\mathfrak{H}_z)_l = \mathfrak{H}_e \sin \varphi_e.$$

Die Komponenten des  $\mathfrak{H}$  in der Luft sind also

$$(\mathfrak{H}_y)_l = \mathfrak{H}_e \cos \varphi_e, \quad (\mathfrak{H}_z)_l = \mu \mathfrak{H}_e \sin \varphi_e.$$

Daher ist  $\text{tg } \varphi_l = \mu \text{tg } \varphi_e$ .

Da  $\mu$  sehr hohe Werte hat, so treten bei Grenzflächen zwischen Luft und Eisen auch die innerhalb des Eisens sehr flach einfallenden  $\mathfrak{B}$ -Linien fast senkrecht in den Luftraum ein. So ist für  $\mu = 2000$  und  $\varphi_e = 1/2^\circ$   $\text{tg } \varphi_l = 17,4$ , also weicht  $\varphi_l$  nur etwa um  $3^\circ$  von  $90^\circ$  ab.

Man kann daher bei den für die praktischen Anwendungen in der Regel notwendigen Annäherungsverfahren annehmen, daß die  $\mathfrak{H}$ -Linien an der Oberfläche des Eisens in jedem Falle senkrecht ansetzen.

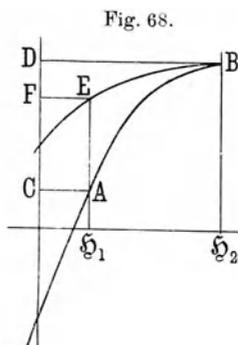
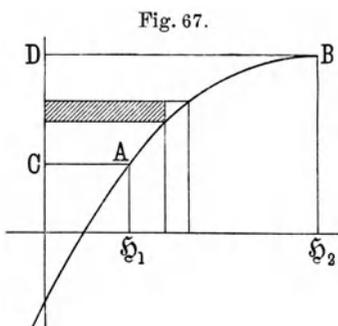
Elektrische  $\mathfrak{E}$ -Linien setzen an Eisen, wie an jedem Leiter, stets senkrecht an (§ 29); für magnetische Linien ist das Eisen kein Leiter, sondern es hat gegen  $\mathfrak{H}$  die Eigenschaften, wie ein Dielektrikum mit hohem  $\varepsilon$  gegen  $\mathfrak{E}$ .

**§ 87. Magnetische Hysterese.** Mit diesem Namen bezeichnet man die Erscheinung, daß die Änderungen der Induktion hinter denen der magnetischen Feldstärke zeitlich zurückbleiben, wodurch der Unterschied der Magnetisierungskurven bei aufsteigender und bei absteigender Magnetisierung entsteht. Sie ist mit einem Arbeitsverlust verbunden. Nach § 6 hat man, um die magnetische Induktion  $\mathfrak{B}$  einer Raumeinheit um  $d\mathfrak{B}$  zu steigern, die Arbeit  $\frac{1}{4\pi} \mathfrak{H} d\mathfrak{B}$  zu leisten. Diese ist, abgesehen von dem Faktor  $\frac{1}{4\pi}$ , der Flächeninhalt der in

Fig. 67 schraffierten Fläche. Bei einer Änderung von  $\mathfrak{H}$  um einen endlichen Betrag ist also

$$\frac{1}{4\pi} \int_{\mathfrak{H}_1}^{\mathfrak{H}_2} \mathfrak{H} d\mathfrak{B}$$

die zur Steigerung der Magnetisierung aufgewendete Arbeit, oder die Fläche  $ABDC$ . Geht  $\mathfrak{H}$  von  $\mathfrak{H}_2$  nach  $\mathfrak{H}_1$  zurück, wobei  $\mathfrak{B}$  andere Werte annimmt (Fig. 68), als vorher für dieselben  $\mathfrak{H}$ , so wird eine Arbeit wiedergewonnen, welche gleich  $\frac{1}{4\pi}$  mal der Fläche  $D'FEB$  ist, die der Fläche  $ABE$  entsprechende Arbeit dagegen ist verloren. Verfolgt man dies über einen geschlossenen Zyklus, so ergibt sich, daß die Fläche der Magnetisierungsschleife, mit  $4\pi$  dividiert, die für die Hin- und Hermagnetisierung erforderliche Arbeit darstellt.



Diese Arbeit hängt bei einer bestimmten Eisensorte von dem erreichten Höchstwerte von  $\mathfrak{B}$  ab. Von Steinmetz ist empirisch gefunden, daß sie der Potenz  $\mathfrak{B}^{1,6}$  proportional ist; nach Kapp<sup>8)</sup> ist für gutes weiches Eisen der Verlust für  $1 \text{ cm}^3$  und einen Zyklus etwa gleich  $0,0015 \mathfrak{B}^{1,6}$  Erg. Die Arbeit ist gleich groß für jeden Zyklus, ob dieser langsam oder schnell durchlaufen wird; auch kann sie nicht durch Unterteilung des Eisens vermindert werden.

Ferner ist es, wenn die Induktion auf eine bestimmte Höhe gebracht wird, gleichgültig, ob dies durch Ausbildung eines geschlossenen magnetischen Kreises, oder durch Anwendung größerer Feldstärken erreicht wird; der Verlust durch Hysterese für  $1 \text{ cm}^3$  Eisen wird dadurch nicht geändert.

Außer von der Höhe der erreichten Induktion  $\mathfrak{B}$  hängt der Verlust durch Hysterese vom Material ab; am wenigsten Verlust findet sich bei weichem Eisen, am meisten bei hartem Stahl. Aus diesem Grunde sind alle diejenigen Teile von Apparaten, in welchen das magnetische Feld häufig wechselt, aus weichem Eisen zu bauen.

Daß sie zweckmäßig auch so weit wie möglich unterteilt werden, hängt nicht unmittelbar mit den magnetischen Eigenschaften zusammen, sondern mit den Wirbelströmen, und wird an anderer Stelle besprochen werden.

§ 88. **Magnetpole.** Wir haben aus den Feldgleichungen in Gl. (33) gefolgert, daß  $\text{div } \mathfrak{B} = 0$  ist. Die  $\mathfrak{B}$ - und die  $\mathfrak{H}$ -Linien sind also geschlossen,

und es gibt nach dieser Auffassung nirgendwo im magnetischen Felde wahre Quellen und Senken. Die Beobachtung scheint etwas anderes zu ergeben durch die Tatsache, daß an stabförmigen Eisenstücken Pole vorkommen, d. h. Stellen, an denen die  $\mathfrak{B}$ -Linien austreten, und solche, an denen sie wieder in das Eisen zurücktreten. Man kann auch, wie Gans<sup>9)</sup> gezeigt hat, die Erscheinungen außerhalb der Magnete ebenso darstellen, wie es den Tatsachen entspricht, wenn man im Eisen das Vorhandensein wahrer Magnetpole annimmt. Eine Entscheidung zwischen der Ampèreschen Theorie und der von Gans läßt sich nicht fällen, weil wir nicht in das Innere des Eisens eindringen können. Jede Theorie hat eine Voraussetzung, die der Nachprüfung durch Beobachtung nicht zugänglich ist: die Ampèresche fordert die Molekularströme, die von Gans den wahren Magnetismus. Wir haben uns der Ampèreschen angeschlossen, weil sie für dauernde Magnete und für Elektromagnete dieselbe Ursache des Feldes annimmt, also eine einheitliche Darstellung zuläßt.

Auch Elektromagnete, in denen gemäß den Feldgleichungen wahrer Magnetismus nicht entstehen oder verschwinden kann, zeigen bei geeigneter Form Pole, nämlich wenn die  $\mathfrak{B}$ -Linien aus dem Eisen in einen Luftraum übertreten, in dem sie sich wegen der geringeren Permeabilität sofort nach allen Seiten auszubreiten streben. Hierdurch wird in dem Luftraum dieselbe Erscheinung hervorgerufen, als wenn die Linien von einer Quelle ausgingen.

Wenn es nur auf die Zustände im Raume außerhalb des Eisens ankommt, so kann man eine bestimmte Verteilung von positivem Magnetismus auf dem einen und negativem auf dem anderen Pole annehmen, die im Raume dieselben Kräfte hervorbringt, wie sie das Feld tatsächlich besitzt. Als einfachste Annäherung kann man für einen Magnet statt dieser Verteilung je einen positiven und negativen Pol setzen, und hiervon wird in der Darstellung der Kräfte stabförmiger Magnete vielfach Gebrauch gemacht. So in der Theorie der Galvanometer mit beweglichen Magneten, bei der Bestimmung der Elemente des Erdmagnetismus.

Wir benutzen die Vorstellung punktförmiger, in dem Felde verteilter Magnetpole in dem folgenden Paragraphen bei der Berechnung der Energie magnetischer Felder mit Dauermagneten; wir stellen uns dann also ein solches Feld ähnlich vor, wie ein elektrisches Feld mit verteilten Elektrizitätsmengen, deren räumliche Dichte mit  $q_m$  bezeichnet wird. Das magnetische Potential dieser Mengen ist  $\psi = \int \frac{q_m dv}{r}$ ; für die zu einem Magnet gehörenden Mengen gilt aber die besondere Forderung, daß  $\int q_m dv = 0$  ist. Das magnetische Potential erfüllt dann, ähnlich wie das elektrische nach Gl. (44) die Gleichung  $\Delta\psi = -4\pi q_m$ .

### § 89. Die magnetische Energie eines Feldes mit ruhenden Magneten.

**Zugkraft.** In § 6 ist die magnetische Energie der Volumeinheit zu  $\frac{\mu}{8\pi} \mathfrak{H}^2$  berechnet worden. Man kann daher, wenn der Wert von  $\mathfrak{H}$  an jeder Stelle bekannt ist, durch Integration über den Raum die magnetische Energie des Feldes berechnen. Mit Hilfe des Greenschen Satzes lassen sich aber Formeln angeben, welche diese Berechnungen auf einfachere zurückführen.

Wir haben dazu über die magnetischen Körper besondere Annahmen zu machen. Entweder sollen in dem Raume Dauermagnete von der Art vorkommen, daß ihr Magnetismus durch die Kräfte des Feldes nicht mehr verändert wird, d. h. also von sehr hartem und hoch magnetisiertem Stahl. In diesem Falle ist der Magnetismus im Felde in einer gewissen Weise verteilt, die wir durch seine räumliche Dichte  $\varrho_m$  angegeben denken. Oder wir betrachten in einem zweiten Falle einen begrenzten Raum, in dem nur unmagnetische Körper vorhanden sind, etwa den Luftraum zwischen den Polen eines Elektromagnets.

In beiden Fällen haben wir  $\mu = 1$  zu setzen.

Nach dem Greenschen Satze, Gl. (67), ist

$$\int_{(v)} U \mathcal{A} W dv = \int_{(f)} U \text{grad } W d\ddot{f} - \int_{(v)} \text{grad } U \text{grad } W dv.$$

Hierin ist  $f$  eine Oberfläche, die den Raum  $v$  ganz umschließt. Setzt man  $U = W = \psi$ , wo  $\psi$  das magnetische Potential des Raumes ist, so ergibt sich, da  $\mathfrak{H} = -\text{grad } \psi$  und  $\mathcal{A} \psi = -4\pi \varrho_m$ ,

$$4\pi \int_{(v)} \psi \varrho_m dv = \int_{(f)} \psi \mathfrak{H} d\ddot{f} + \int_{(v)} \mathfrak{H}^2 dv \dots \dots \dots (120)$$

In dem ersten Falle, wo Dauermagnete sich in dem Raume befinden, nehmen wir den Raum  $v$  beliebig groß an. Die Oberfläche  $f$  liegt dann sehr weit von den Magneten entfernt, und dort ist  $\psi$  beliebig klein von der ersten Ordnung,  $\mathfrak{H}$  beliebig klein von der zweiten Ordnung (vgl. § 36). Das Oberflächenintegral verschwindet alsdann, und man erhält

$$\int_{(v)} \mathfrak{H}^2 dv = 4\pi \int_{(v)} \psi \varrho_m dv.$$

Die magnetische Energie eines unbegrenzten Feldes, in dem magnetische Mengen in einer bestimmten Verteilung vorkommen, jedoch stets gleich viel positive und negative, ist also

$$T_1 = \frac{1}{2} \int_{(v)} \psi \varrho_m dv \quad (\text{beliebig großer Raum}) \dots \dots (121)$$

An diese Formel wird in § 107 erinnert werden.

Im anderen Falle ist überall  $\varrho_m = 0$  und daher wird die linke Seite von Gl. (120) gleich Null. Dagegen liegt die Oberfläche wenigstens zum Teil in endlicher Entfernung, so daß das Flächenintegral einen von Null verschiedenen Wert hat. Dann ist also

$$T_2 = -\frac{1}{8\pi} \int_{(f)} \psi \mathfrak{H} d\ddot{f} \quad (\text{Feld zwischen zwei Magnetpolen}) \dots (122)$$

Bei der Berechnung der Zugkraft von Magneten genügt es in der Regel, die Betrachtung auf die Felder zwischen zwei parallelen ebenen Eisenflächen zu beschränken, deren Durchmesser groß gegen ihren Abstand voneinander ist. Das magnetische Feld ist in diesem Falle homogen, d. h.  $\mathfrak{H}$  hat überall, abgesehen von den Rändern, denselben Wert. Daher ist  $-d\psi = \mathfrak{H} dx$ , wo  $x$  den Abstand des Aufpunkts von einer der Flächen bezeichnet; es folgt  $\psi = \psi_0 - \mathfrak{H}x$ , wenn angenommen wird, daß  $\psi$  den Wert  $\psi_0$ , für  $x = 0$  habe.

Wenn wir annehmen, daß außer an den beiden parallelen Eisenflächen, deren jede den Flächeninhalt  $F$  haben möge und deren Abstand  $a$  sei, nirgendwo eine erhebliche Zahl von  $\mathfrak{H}$ -Linien in das Eisen übertritt, so ist der Wert der magnetischen Energie dieses homogenen Feldes nach Gl. (122)

$$-\frac{1}{8\pi} \{ -\psi_0 \mathfrak{H} F + (\psi_0 - \mathfrak{H} a) \mathfrak{H} F \}.$$

wobei der erste Posten den auf die Fläche  $x = 0$  entfallenden Teil des Oberflächenintegrals bedeutet, der zweite den auf die Fläche  $x = a$  entfallenden Teil, und für  $\mathfrak{H}$  die Komponente im Sinne der nach außen gehenden Normale gesetzt ist, also  $-\mathfrak{H}$  bei  $x = 0$  und  $+\mathfrak{H}$  bei  $x = a$ .

Man erhält daher

$$\mathbf{T} = \frac{1}{8\pi} \mathfrak{H}^2 a F \dots \dots \dots (123)$$

Ändert man  $a$  um einen sehr kleinen Betrag, wobei angenommen wird, daß  $\mathfrak{H}$  sich nicht ändere, so ist

$$d\mathbf{T} = \frac{1}{8\pi} \mathfrak{H}^2 F da.$$

Dies bedeutet aber, da  $d\mathbf{T}$  eine Arbeit,  $da$  ein Weg ist, daß sich in Luft zwei derartige Flächen mit der Kraft

$$P = \frac{1}{8\pi} \mathfrak{H}^2 F \dots \dots \dots (124)$$

anziehen.

Führt man an Stelle von  $\mathfrak{H}$  den Fluß  $\Phi$  ein durch die Beziehung  $\Phi = F\mathfrak{H}$ , so wird

$$P = \frac{1}{8\pi} \frac{\Phi^2}{F} \dots \dots \dots (125)$$

**§ 90. Berechnung von Elektromagneten.** Die vorstehend aufgestellten Sätze über das magnetische Feld gelten unabhängig davon, welche Ursache das Feld zustande gebracht hat und aufrecht erhält. Bei Dauermagneten hat man hinsichtlich der Kräfte, die sie ausüben, mit den gegebenen Verhältnissen zu rechnen, dagegen ist man bei den Elektromagneten in der Lage, das magnetische Feld innerhalb gewisser Grenzen so zu verändern, daß eine beabsichtigte Wirkung hervorgebracht wird.

Nur wenige Formen von Elektromagneten lassen eine ähnliche Berechnung des magnetischen Feldes zu, wie etwa bestimmte Leiterformen die Berechnung des elektrostatischen Feldes. Man hat offenbar zu einer strengen Lösung ein Integral der Gleichung  $\Delta\psi = 0$  zu suchen, das den Grenzbedingungen des gerade vorliegenden Falles genügt. Ein Beispiel dieser Art, bei dem aber auch Näherungsannahmen gemacht werden müssen, bietet § 93; für gewöhnlich haben indessen die Elektromagnete Formen, für die man das Potential nicht streng durch eine Lösung der Gleichung  $\Delta\psi = 0$  angeben kann. Für die Zwecke der Technik genügt eine Annäherung, die darauf beruht, daß die Permeabilität des Eisens so groß ist, daß man im wesentlichen durch das Eisen den magnetischen Linien einen bestimmten Weg vorschreiben kann.

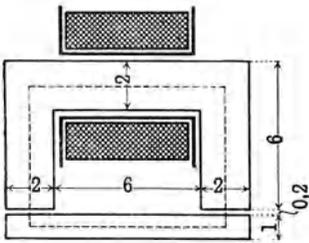
Zur Berechnung eines Elektromagnets ist erforderlich, einen Zusammenhang zwischen der magnetischen Feldstärke  $\mathfrak{H}$  und dem Flusse  $\Phi$  an jeder Stelle des Weges der magnetischen Linien festzustellen. Für die magnetische Feldstärke  $\mathfrak{H}$  gilt die erste Hauptgleichung

$$\int_{(s)} \mathfrak{H} d\mathfrak{s} = 4\pi \int_{(f)} i d\mathfrak{f},$$

wo  $s$  eine der geschlossenen Linien des Vektors  $\mathfrak{H}$ , und  $f$  eine beliebige von dieser Linie berandete Fläche ist.

Hat man einen Elektromagnet, wie in Fig. 69, in Form eines Hufeisens mit vorgelegtem Anker, das auf dem Joche eine Spule mit  $\xi$  Windungen trägt, in denen der Strom  $J$  aufrechterhalten wird, so kann man mit großer Wahrscheinlichkeit den Weg einer Induktionslinie, wie die gestrichelte Linie, zeichnen; diese ist also die Linie  $\mathfrak{s}$ . Jede Fläche, die man durch sie legen kann, wird von  $\xi$  Windungen des Stromes  $J$  durchsetzt, daher ist  $\int_{(f)} i d\mathfrak{f} = \xi J$ .

Fig. 69.



Man erhält

$$\int_{(s)} \mathfrak{H} d\mathfrak{s} = 4\pi \xi J.$$

Das Linienintegral der magnetischen Kraft ist also leicht zu berechnen, allein man braucht, wie gesagt, den Wert des  $\mathfrak{H}$  an jeder einzelnen Stelle. Dazu kommt man angenähert durch die Theorie des allgemeinen magnetischen Kreises, die eine Verallgemeinerung der Theorie eines homogenen magnetischen Kreises ist.

**§ 91. Der magnetische Kreis mit vollständigem Eisenschluß.** Wir gehen aus von einem Toroid, einem ringförmigen Körper, der durch Rotation einer Kreisfläche um eine außer ihr gelegene Achse entsteht.

Wir denken uns ein solches Toroid aus homogenem Eisen gleichmäßig mit einem isolierten Leitungsdraht bewickelt, so daß eine Spirale entsteht, die außer an den Zuführungen geschlossen ist.

Von den Zuführungsstellen denken wir uns die zur Stromquelle führenden Drähte dicht nebeneinander geführt, so daß sie außerhalb des Eisens kein magnetisches Feld bilden. Im Innern der Spule verlaufen die magnetischen Linien wegen der vollkommenen Symmetrie in konzentrischen Kreisen, während für jede angenommene Linie außerhalb der Spule  $\int \mathfrak{H} d\mathfrak{s} = 0$  ist, da sie mit keinem Stromleiter verkettet ist. Das magnetische Feld besteht also nur in der Spule. Ist  $\xi$  deren Windungszahl,  $J$  der Strom, so ist also für jede Feldlinie  $\int \mathfrak{H} d\mathfrak{s} = 4\pi \xi J$ .

Wegen der Symmetrie hat  $\mathfrak{H}$  an allen Stellen derselben Feldlinie denselben Wert und wenn diese den Radius  $\varrho$  hat, so ist also  $4\pi \xi J = 2\pi \varrho \mathfrak{H}$ .

Daraus geht hervor, daß sowohl die Feldstärke als auch die magnetische Induktion an den inneren Stellen des Ringes etwas größer ist als an den äußeren; wir wollen aber diesen Unterschied vernachlässigen, indem wir an-

nehmen, daß die Dicke des Ringes nur klein gegen seinen Durchmesser sei. Wir nehmen statt der  $\mathfrak{H}$ -Linien von verschiedenem Durchmesser die durch den Mittelpunkt des Querschnitts gehende. Die Länge der Mittellinie des Toroids sei  $l$ , dann ist die mittlere Feldstärke

$$\mathfrak{H} = \frac{4\pi\zeta J}{l} \dots \dots \dots (126)$$

Wird  $J$  in Ampere gemessen, so erhält man  $\mathfrak{H}$  in absolutem elektromagnetischem Maße als

$$\mathfrak{H} = \frac{4\pi}{10} \frac{\zeta J_A}{l} \dots \dots \dots (127)$$

Für den homogenen magnetischen Kreis kann man also sehr leicht die Feldstärke berechnen, demnach mit Hilfe der Magnetisierungskurve das zugehörige  $\mathfrak{B}$  und daraus den Fluß  $\Phi$ .

Der Bequemlichkeit halber gibt man statt der Beziehung zwischen  $\mathfrak{H}$  und  $\mathfrak{B}$  die zwischen  $\chi = \frac{\zeta J_A}{l}$  und  $\mathfrak{B}$  an und nennt  $\frac{\zeta J_A}{l}$  die Amperewindungen auf 1 cm Länge des magnetischen Kreises. In diesem Maße sind die Abszissen der Fig. 68 gewählt. Einem  $\chi = 10$  entspricht  $\mathfrak{H} = 4\pi$ . — Man nennt die Einheit der magnetischen Feldstärke 1 Gauß. In einem Felde, das  $\chi$  Amperewindungen auf 1 cm hat, herrscht also die Feldstärke  $\frac{10}{4\pi} \chi$  oder etwa  $0,8 \chi$  Gauß.

Für einen vorgeschriebenen Wert  $\Phi$  des Flusses findet man die mittlere Induktion  $\mathfrak{B}$  als den Quotienten  $\mathfrak{B} = \Phi/F$ , wo  $F$  der Querschnitt des Toroids ist. Für  $\mathfrak{B}$  findet man aus der Magnetisierungskurve eines gegebenen Materials die Größe  $\chi$  und durch Multiplikation mit der mittleren Länge des Kreises die Größe  $X = \chi l$ ;  $X$  nennt man die gesamten Amperewindungen.

Für jedes gegebene Toroid kann man aus der Magnetisierungskurve eine Tabelle aufstellen, die zusammengehörige Werte von  $\Phi$  und  $X$  enthält, und aus der sich die Magnetisierungskurve dieses Toroids zeichnen läßt.

An dem Toroid ist offenbar der kreisförmige Querschnitt des Eisenkörpers am wenigsten wesentlich, da man ja doch mit einer mittleren Linie rechnet.

Es wird ferner auf die kreisringförmige Gestalt nicht sehr ankommen, wenn die Magnetisierung des Eisens noch gering genug ist, daß seine Permeabilität groß gegen die des umgebenden Mittels ist. An jeder Stelle, an der sich die Krümmung der Oberfläche ändert, werden zum Unterschied von dem genau konzentrischen Verlaufe bei dem Kreisring Feldlinien das Bestreben haben, aus dem Eisen auszutreten und Schluß durch den Luftraum zu suchen; ihre Zahl wird aber bei mäßigen Abweichungen von der Kreisform gegen die im Eisenkörper vernachlässigt werden können.

Elektromagnete mit vollständig geschlossenem Eisenkreis können zur Hervorbringung von Bewegungen nicht benutzt werden; diese Form wird aber vorzugsweise für Transformatoren und Drosselspulen verwendet, bei denen man mit einer gegebenen Stromstärke einen möglichst großen magnetischen Fluß erzeugen will; insbesondere die Pupinspulen werden nach dieser Art gebaut.

**§ 92. Geteilte magnetische Kreise.** Elektromagnete zur Erzeugung von Bewegungen, wie die in der Telegraphie gebräuchlichen, sowie solche, deren

Teile zur Erzielung einer bestimmten Wirkung beweglich sein müssen, wie z. B. die der Dynamomaschinen, unterscheiden sich von den bisher besprochenen dadurch, daß die  $\mathfrak{B}$ -Linien an bestimmten Stellen aus dem Eisen in Luft übertreten müssen; nach § 86 ändert sich an diesen Stellen die magnetische Feldstärke sprunghaft. Obwohl auch für solche Elektromagnete die Gleichung  $\int \mathfrak{H} dl = 4\pi \xi J$  gültig bleibt, kann  $\mathfrak{H}$  nicht wie bei dem homogenen Kreise durch Division mit der Länge berechnet werden, da es eben nicht an allen Stellen jeder Linie denselben Wert hat.

Ein solcher magnetischer Kreis besteht also aus einer Reihe von Teilen, durch welche die Induktionslinien der Reihe nach hindurchtreten, und die einzeln aus homogenem Material sind. In jedem dieser Teile hat die Induktion einen von dem Querschnitte und dem gesamten Flusse abhängigen Wert. Würde man einen einzelnen Teil herausgreifen, z. B. das Hufeisen des Elektromagnets in Fig. 69, und es durch ein Stück aus gleichem Material zu einem geschlossenen Kreise ergänzen, so würde darauf bei derselben Induktion von der insgesamt erforderlichen Zahl von Amperewindungen der Betrag  $\chi l$  entfallen, wobei  $\chi$  nach der Magnetisierungskurve des geschlossenen Kreises aus dem gegebenen  $\mathfrak{B}$  festzustellen wäre. Dieser Wert  $\chi l$  bei gegebenem  $\mathfrak{B}$  würde von dem Werte des für den gesamten Kreis erforderlichen  $X$  unabhängig sein, so daß, wenn man Schließungsbögen verschiedener Länge wählte, zwar das  $X$  für jeden Fall anders wäre, nicht aber  $\chi l$  für das Hufeisen. Man wird daraus schließen, daß dann auch auf das Jochstück oder einen anderen Teil des ungleichartigen magnetischen Kreises diejenige Zahl von Amperewindungen entfällt, welche sich für dieses Stück ergeben würde, wenn man es auf ganz beliebige Weise zu einem homogenen magnetischen Kreise schlosse.

Man gelangt so zu einer Aufteilung des gesamten Betrages des Linienintegrals der magnetischen Feldstärke in einzelne Teile, deren Summe  $4\pi \xi J$  ist.

Ein Kreis bestehe aus  $n$  Teilen, von denen der  $h$ te die Permeabilität  $\mu_h$ , den Querschnitt  $F_h$ , die mittlere Länge  $l_h$  hat, und es sei zunächst angenommen, daß alle Teile denselben magnetischen Fluß  $\Phi$  führen.

Der  $h$ te Teil hat die Induktion  $\mathfrak{B}_h = \frac{\Phi}{F_h}$ , und indem man in die dem Teile zugehörige Magnetisierungskurve eingeht, findet man den zu  $\mathfrak{B}_h$  gehörenden Betrag  $\chi_h$ ; für diesen Teil ist also im ganzen erforderlich die Zahl  $X_h = \chi_h l_h$  Amperewindungen.

Daher ist

$$\xi J_A = \sum_1^n \chi_h l_h.$$

Führt man die  $\mu_h$  ein, so ist

$$\mathfrak{H}_h = \frac{\mathfrak{B}_h}{\mu_h}$$

und

$$\mathfrak{H}_h l_h = \Phi \frac{l_h}{\mu_h F_h},$$

also

$$\frac{4\pi}{10} \xi J_A = \Phi \sum_1^n \frac{l_h}{\mu_h F_h} \dots \dots \dots (128)$$

Man nennt den Ausdruck der linken Seite, der die Ursache des magnetischen Feldes darstellt, auch die magnetomotorische Kraft. Der Summenausdruck auf der rechten Seite ist gebildet wie der Widerstand eines zusammengesetzten Leiters, dessen einzelne Teile die Länge  $l_h$ , die Leitfähigkeit  $\mu_h$  und den Querschnitt  $F_h$  haben.

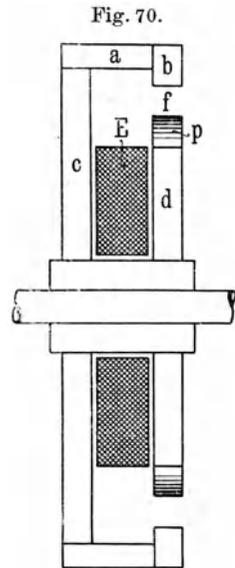
Man könnte die Gl. (128) in der Form lesen, daß die magnetomotorische Kraft gleich dem Produkt aus dem magnetischen Fluß in den magnetischen Widerstand sei. In dieser Form bildet sie eine Analogie zum Ohmschen Gesetz. Es ist aber zu beachten, daß die besprochenen magnetischen Vorgänge statisch sind, und daß sie eine größere Ähnlichkeit mit den Zuständen in einem aus lauter Isolatoren bestehenden elektrischen Felde, als mit einer Strömung haben.

Man dehnt die Analogie auch auf die einzelnen Teile des magnetischen Kreises aus und nennt  $\mathfrak{H}_h l_h$  die magnetische Potentialdifferenz an einem bestimmten Stücke,  $\frac{l_h}{\mu_h F_h}$  seinen magnetischen Widerstand. Dies ist aber nur zulässig, wenn man auf diese Art die gesamte magnetomotorische Kraft für einen geschlossenen Kreis berechnet, während eine magnetomotorische Kraft  $\mathfrak{H}_h l_h$ , an das einzelne Stück des Kreises angelegt, eine vollkommen andere Magnetisierung als die vorausgesetzte bewirken würde.

Streuung. In noch höherem Maße als bei Änderungen der Krümmung eines Toroids treten seitlich Feldlinien aus, wenn der magnetische Kreis aus Eisen in Luft übergeht. Man bezeichnet dies als Streuung der Feldlinien. Um sie zu berücksichtigen, werden Näherungsformeln<sup>10)</sup> benutzt, auf die hier nicht näher eingegangen werden kann. Der Satz [Gl. (128)] vom magnetischen Kreise erfährt durch diesen Vorgang eine Abänderung in dem Sinne, daß der magnetische Fluß in einzelnen Teilen des magnetischen Kreises kleiner ist als in anderen. Wie dies berücksichtigt wird, ist am besten aus dem zweiten der hier folgenden Beispiele zu ersehen.

### § 93. Beispiel einer Lösung der Gleichung

$\Delta \psi = 0$ . Es soll die Form der Pole eines vielpoligen Magnets berechnet werden, wie er zur Erzeugung von Wechselströmen bis zu  $\nu = 1500$  Perioden, Sek gebraucht wird. Wechselstrommaschinen dieser Art dienen zur Messung der Vorgänge in Telephonleitungen und Apparaten. Der Magnet, Fig. 70, besteht aus einem äußeren Zylinder  $a$ , der von einer eisernen Scheibe  $c$  getragen wird, mit vorgelegtem glatten Ring  $b$ . Zum Schluß der magnetischen Linien dient weiter ein innerer Zylinder und eine Scheibe  $d$ , welche mit dem Ringe  $b$  das nutzbare magnetische Feld  $f$  einschließt. Die Erregerspule  $E$  umschlingt den inneren Zylinder. Die Scheibe  $d$  trägt gegen  $b$  hin eine solche Anzahl von Polen  $p$ , daß bei der zulässigen Umdrehungsgeschwindigkeit in einer feststehenden, in das Feld eingeschobenen Spule ein Wechselstrom der gewünschten Frequenz erzeugt wird.



Es soll eine solche Form der Pole ermittelt werden, daß die radiale Komponente der Feldstärke, welche allein die Kurve der induzierten EMK bestimmt, über den Umfang sinusförmig veränderlich verteilt ist.

Da  $a, b, c, d$  aus gutem Schmiedeeisen bestehend gedacht werden, ist zur Hervorbringung der Induktionslinien innerhalb des Eisens nur eine sehr geringe magnetomotorische Kraft erforderlich im Vergleich zu der für die Magnetisierung des Luftfeldes nötigen. Man kann daher annähernd annehmen, daß die Flächen von  $a$  und  $d$ , von denen die Linien des Feldes  $f$  ausgehen, Niveauflächen des magnetischen Potentials seien. Zur Vereinfachung der Rechnungen ist eine zweite Annahme erforderlich, daß nämlich das Feld von den Polen zum Ringe  $b$  senkrecht übergehe, also daß es keine Komponente in der Richtung der Achse habe, die wir zur  $z$ -Achse wählen.

Durch diese Annahme wird die Gültigkeit der Lösung auf einen Teil des Feldes beschränkt; der Verlauf außerhalb dieses Teiles wird sich aber mehr der geforderten Form nähern, als wenn auch das innere Feld infolge der Form der Polschuhe anders als sinusförmig wäre.

Unter diesen Annahmen haben wir folgende Aufgabe: Es soll die Leitlinie eines Zylinders berechnet werden, der gegen einen äußeren Kreiszyylinder eine unveränderliche magnetische Potentialdifferenz hat, wobei die radiale Komponente vor den Polen des Feldes sinusförmig veränderlich sein soll und zwar  $p$ mal für den ganzen Umfang.

Wir benutzen dazu die Gleichung  $\text{div } \mathfrak{H} = \Delta \psi = 0$  in der Form für Zylinderkoordinaten:

$$\frac{\partial \mathfrak{H}_z}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial (r \mathfrak{H}_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \mathfrak{H}_\vartheta}{\partial \vartheta} = 0.$$

Nun ist  $\frac{\partial \mathfrak{H}_z}{\partial z} = 0$ , nach Voraussetzung, ferner

$$\mathfrak{H}_r = -\frac{c \psi}{\partial r}, \quad \mathfrak{H}_\vartheta = -\frac{\partial \psi}{r \partial \vartheta},$$

also folgt

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \vartheta^2} = 0.$$

Beim Aufsuchen einer Lösung ist zu bedenken, daß das magnetische Potential nicht nur die sinusartige Komponente, sondern auch noch einen von  $\vartheta$  unabhängigen Teil enthalten muß, weil alle Pole gleichnamig sind. Wenn der innere Zylinder ebenfalls glatt wäre, so wäre nach Analogie von Gl. (60)  $\psi = \log r$  die Lösung. Diese erfüllt auch die obige Gleichung. Außer dieser Lösung haben wir noch eine andere zu suchen, welche  $\sin p \vartheta$  oder  $\cos p \vartheta$  enthält. Da, wie Gl. (69) gezeigt wurde, das Potential bei zylindrischen Verteilungen eine Funktion von  $x + iy = r e^{i\vartheta}$  ist, so bietet der reelle Teil der Ausdrücke

$$(r e^{i\vartheta})^p \quad \text{und} \quad (r e^{i\vartheta})^{-p}$$

geeignete Lösungen.

Wenn es möglich ist, den Grenzbedingungen zu genügen, so hat der Ansatz

$$\psi = A + C \log r + D r^p \cos p \vartheta + E r^{-p} \cos p \vartheta$$

die von dem magnetischen Potential der vorliegenden Verteilung verlangten Eigenschaften.

Zunächst soll dieses Potential an der Innenfläche des äußeren Zylinders, deren Radius  $R$  sei, konstant sein, d. h. von  $\vartheta$  unabhängig. Daher ist

$$D R^p + E R^{-p} = 0$$

zu setzen, und es wird

$$\psi = A + C \log r + D R^p \left[ \left( \frac{r}{R} \right)^p - \left( \frac{R}{r} \right)^p \right] \cos p \vartheta.$$

Für  $r = r_1$ , auf dem Zylinder, der die Polvorsprünge gerade umschließt, soll die radiale Komponente der Feldstärke die Form  $B_0 + B \cos p \vartheta$  haben. Dies ergibt

$$-\frac{C}{r_1} - D R^p \cdot \frac{p}{r_1} \left[ \left( \frac{r_1}{R} \right)^p + \left( \frac{R}{r_1} \right)^p \right] \cos p \vartheta = B_0 + B \cos p \vartheta,$$

also

$$C = -B_0 r_1, \quad R^p p D = -B r_1 \frac{1}{\left( \frac{r_1}{R} \right)^p + \left( \frac{R}{r_1} \right)^p}.$$

Der konstante Wert auf dem äußeren Zylinder kann gleich Null gesetzt werden, wobei  $\psi$  in die magnetische Potentialdifferenz  $\Psi$  zwischen dem Aufpunkte und dem äußeren Zylinder übergeht. Dazu muß gesetzt werden

$$0 = A + C \log R.$$

Man erhält dann

$$\Psi = B_0 r_1 \log \frac{R}{r} - \frac{B r_1 \cdot p}{\left( \frac{r_1}{R} \right)^p + \left( \frac{R}{r_1} \right)^p} \left[ \left( \frac{r}{R} \right)^p - \left( \frac{R}{r} \right)^p \right] \cos p \vartheta.$$

Die Form der Polfläche, welche das verlangte magnetische Feld liefert, ergibt sich, wenn wir den Wert von  $\Psi$  für ein beliebiges Wertepaar  $r, \vartheta$  gleich dem Werte setzen, der an der äußersten Stelle jedes Polzahnes besteht, also für Wertepaare

$$r = r_1, \quad \vartheta = 0; \quad r = r_1, \quad \vartheta = 2\pi \text{ usw.}$$

Dies liefert die Gleichung

$$B_0 \log \frac{r_1}{r} + \frac{B}{p} \left( \frac{\left( \frac{r_1}{R} \right)^p - \left( \frac{R}{r_1} \right)^p}{\left( \frac{r_1}{R} \right)^p + \left( \frac{R}{r_1} \right)^p} - \frac{\left( \frac{r}{R} \right)^p - \left( \frac{R}{r} \right)^p}{\left( \frac{r_1}{R} \right)^p + \left( \frac{R}{r_1} \right)^p} \cos p \vartheta \right) = 0.$$

In der Regel ist  $\left( \frac{R}{r_1} \right)^p$  sehr groß gegen  $\left( \frac{r_1}{R} \right)^p$  und in erhöhtem Maße gilt dies für  $\left( \frac{R}{r} \right)^p$  und  $\left( \frac{r}{R} \right)^p$ . Diese Gleichung vereinfacht sich also zu der Form

$$B_0 \log \frac{r_1}{r} = \frac{B}{p} \left[ 1 - \left( \frac{r_1}{r} \right)^p \cos p \vartheta \right] \dots \dots \dots (129)$$

Unter derselben Vereinfachung erhält man für die magnetische Potentialdifferenz zwischen den Polen und dem äußeren Zylinder den Wert

$$\Psi = B_0 r_1 \log \frac{R}{r_1} + \frac{B r_1}{p} \cos p \vartheta \dots \dots \dots (130)$$

Diese ist gleich dem Produkte  $4 \pi \xi J$  zu setzen, wenn man den auf das Eisen entfallenden Teil des Linienintegrals der magnetischen Kraft gegen  $\Psi$  vernachlässigen kann. Gl. (129) stellt die Leitlinie der Kurve in Polarkoordinaten dar. Man kann dafür schreiben

$$\frac{B_0}{B} \log \left( \frac{r_1}{r} \right)^p = 1 - \left( \frac{r_1}{r} \right)^p \cos p \vartheta.$$

Nun liege die tiefste Einsattlung der Kurve, also die Stelle, die  $\cos p \vartheta = -1$  entspricht, auf dem Radius  $r_2$ , dann ist

$$\frac{B_0}{B} \log \left( \frac{r_1}{r_2} \right)^p = 1 + \left( \frac{r_1}{r_2} \right)^p.$$

Setzt man zur Abkürzung

$$\left( \frac{r_1}{r} \right)^p = u, \quad \left( \frac{r_1}{r_2} \right)^p = u_0,$$

wo also

$$1 \dots u < u_0,$$

so ergibt die Vereinigung beider Gleichungen unter Ausschaltung von  $\frac{B_0}{B}$

$$\cos p \vartheta = \frac{1 - \frac{1 + u_0}{\log u_0} \log u}{u}.$$

Diese Gleichung ergibt so lange Werte von  $\cos p \vartheta$  über dem oder bis zum Betrage  $-1$ , als der Zähler  $\geq -u$  ist. Nur wenn die rechte Seite einen kleineren absoluten Betrag als Eins hat, ergeben sich reelle Punkte der Kurve, also brauchbare Lösungen. Zwar wird für jeden Wert von  $u_0$ , wenn man  $u = u_0$  werden läßt,  $\cos p \vartheta = -1$ , allein es zeigt sich, daß  $u$  unter Umständen für die benachbarten Werte von  $\vartheta$  komplex wird. Daher hat der Wert  $u_0 = \left( \frac{r_1}{r_2} \right)^p$  eine bestimmte Grenze, die wir auf folgendem Wege finden.

Es sei  $u = u_0 - \delta$  gewählt, wo  $\delta$  so klein ist, daß man setzen kann:

$$\log(u_0 - \delta) = \log u_0 - \frac{\delta}{u_0}.$$

Dann erhält man die Bedingung für reelles  $\vartheta$  in der Form

$$1 - \frac{1 + u_0}{\log u_0} \left( \log u_0 - \frac{\delta}{u_0} \right) \geq -u_0 + \delta,$$

oder

$$\frac{1 + u_0}{u_0 \log u_0} \geq 1,$$

$u_0$  darf also nur so groß sein, daß

$$\log u_0 \leq \frac{1 + u_0}{u_0}.$$

Diese Grenze liegt bei  $u_0 = 3,6$ .

Um eine Kurve zu erhalten, deren Punkte alle reell bestimmt sind, muß also  $\left(\frac{r_1}{r_2}\right)^p \leq 3,6$  gewählt werden. Wählt man es größer, so fallen zuerst in der Nähe von  $180^\circ$ , dann weiter nach  $90^\circ$  zu die Kosinus unter  $-1$ , d.h. es ist keine Kurve angebar.

Die angegebene Grenze des  $u_0$  hat noch eine andere merkwürdige Bedeutung. Das Verhältnis

$$\frac{B_0}{B} = \frac{1 + u_0}{\log u_0}$$

ist sehr groß sowohl für große  $u_0$ , als auch für solche, die nahe an Eins liegen. Es hat also ein Minimum, und zwar liegt dies vor, wenn

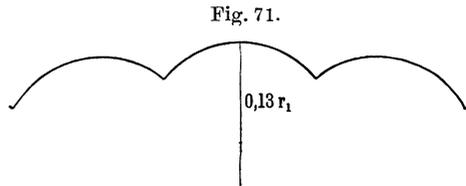
$$\log u_0 = \frac{1 + u_0}{u_0}.$$

Die Grenze der durchaus bestimmten Polfläche liefert also zugleich das günstigste Verhältnis der nutzbaren magnetischen Feldstärke  $B$  zu der mittleren Feldstärke  $B_0$ . Dieser Wert ist

$$\frac{B}{B_0} = 0,278.$$

Anker mit flacheren Polzähnen, als diesem Verhältnis entspricht, nutzen also das Feld schlechter aus.

Fig. 71 stellt drei Zähne eines Ankers mit 30 Polen bei  $r_1 = 10$  cm dar. Die Leitlinie dieser Zähne fällt zum größten Teil mit einem Kreisbogen vom Radius  $0,13 r_1$  zusammen.



**§ 94. Anwendung der Sätze vom magnetischen Kreise.** Es soll die Magnetisierungslinie und die Tragkraft eines Elektromagnets berechnet werden, der nach Fig. 69 gebaut ist. Der Hufeisenmagnet hat einen Querschnitt von  $2 \times 2$  cm<sup>2</sup>, der Anker von  $2 \times 1$  cm<sup>2</sup>. Beide sind aus Schmiedeeisen. Die Magnetisierung soll so bemessen werden, daß der Anker bei einem Polabstand von 0,2 cm eine Kraft von 5 kg ausüben kann.

Um die Kraft von 5 kg, also  $2,5 \cdot 981000$  Dynen an jedem Pole hervorzubringen, ist ein bestimmter magnetischer Fluß zwischen Anker und Feldmagnet erforderlich; nach Gl. (125) hat er den Wert

$$\Phi = \sqrt{8 \pi P F},$$

wo  $P$  die Kraft an jedem Pole,  $F$  der Querschnitt des Luftraumes ist. Dies ergibt hier

$$\Phi = 15\,650 \text{ c g s.}$$

Bei einem Abstände von 2 mm wird die Zahl der Feldlinien, die an den Polen gestreut werden, schon ziemlich beträchtlich sein, wir veranschlagen sie auf  $\frac{1}{4}$  der vom Hufeisen erzeugten. Dieses hat also  $\frac{1}{3}$  mehr Feldlinien zu führen, als nutzbar gerechnet werden.

Für einen bestimmten nutzbaren Fluß  $\Phi$  beträgt die Induktion im Anker  $\Phi/2$ , im Luftraum  $\Phi/4$  und im Hufeisen  $\Phi/3$ . Die Längen der mitt-

leren Feldlinie betragen in den drei Teilen der Reihe nach 9 cm, 0,4 cm und 18 cm.

Bedeutet  $\chi$  eine der Zahlen für Schmiedeeisen, so erhält man  $18\chi$  für den auf das Hufeisen,  $9\chi$  für den auf den Anker entfallenden Teil der Amperewindungen; auf den  $\frac{1}{4}$  Luftraum entfallen

$$\frac{10}{4\pi} \frac{\Phi}{F} l = \frac{\Phi}{4\pi}$$

oder  $0,08\Phi$  Amperewindungen. Man erhält z. B. für  $\Phi = 5000$

	$\mathfrak{B}$	$\chi$	$\chi l$
Hufeisen . . . . .	1660	0,41	7,4
Anker . . . . .	2500	0,63	5,7
Luftraum . . . . .	1250	—	400,0
			$X = 413,1$

Auf demselben Wege ergeben sich die Zahlen:

$\Phi$	8000	11 000	14 000	17 000
$X$	662	910	1160	1410

Die Zahlen für  $\Phi$  und  $X$  sind einander fast genau proportional, weil die auf die Eisenteile entfallenden Amperewindungen gegen die für den Luftraum unbedeutend sind und das Eisen nur sehr wenig gesättigt ist. Es ist daher ungefähr

$$X = 0,83\Phi.$$

Um eine Zugkraft von 5 kg zu erhalten, hat man also rund 1300 Amperewindungen aufzuwenden.

Diese Zahlen lassen auch erkennen, daß in Elektromagneten, die Luftspalte von der Größenordnung von Millimetern haben, die im Eisen liegenden Teile der geschlossenen magnetischen Linien fast keine magnetomotorische Kraft verbrauchen, also wie ein magnetischer Kurzschluß wirken.

Wir wollen noch eine interessante Rechnung über den Sitz der magnetischen Energie anschließen. Das  $\int \frac{\mu}{8\pi} \mathfrak{H}^2 dv$  zerfällt in drei Teile, von denen der erste sich auf den Feldmagnet bezieht, der zweite auf den Anker, der dritte auf die beiden Lufträume. Innerhalb jedes Teiles kann man  $\mathfrak{H}$  als konstant ansehen; jeder Teil trägt dann zur Energie den Betrag  $\mu \mathfrak{H}^2 v / 8\pi$  bei. Aus den für  $\Phi = 5000$  berechneten Zahlen für  $\mathfrak{B}$  und  $\chi$  erhält man die Werte der nachstehenden Tabelle für  $\mu$  und  $\mathfrak{H}$ ; aus ihnen und dem Rauminhalt ist die Energie jedes Teiles berechnet:

	$\mathfrak{H}$	$\mu$	$v$	$T$
Hufeisen . . . . .	0,51	3260	72	2 440 Erg
Anker . . . . .	0,79	3160	20	1 560 "
Luftraum . . . . .	1250	1	1,6	100 000 "

Die Energie befindet sich also trotz des kleinen Volumens des Luftspaltes zum weitaus größten Teile nicht im Eisen, sondern im Luftspalte.

Man kann daher bei Apparaten mit erheblichen Luftzwischenräumen, wie den Telegraphenapparaten, die magnetische Energie genügend genau aus der Induktion im Luftraum zwischen den Polen und dessen Volumen berechnen.

**§ 95. Elektromagnete von Telegraphenapparaten.** Bei den Elektromagneten von Telegraphenapparaten wird nur in einigen Fällen die Energie des ankommenden Stromes unmittelbar zur Hervorbringung der Zeichen benutzt, z. B. bei Farbschreibern und Klopfern. Bei den Farbschreibern (Morseapparat, Wheatstone) wird die erforderliche Arbeit dadurch vermindert, daß die Elektromagnete nur ein leichtes Rad seitlich zu verschieben haben, welches den Antrieb zur Überwindung der Reibung am Papier und zur Erzeugung der Zeichen durch ein besonderes Laufwerk erhält. Bei den Klopfern wird die Energie des Stromes in die Form geeigneter Schalle gebracht, in der sie auch bei geringem Gesamtaufwand leicht wahrgenommen wird. Bei allen anderen Apparaten hat der in die Leitung eingeschaltete Elektromagnet nur die Aufgabe, eine beim Empfänger in reichlichem Maße zur Verfügung stehende Energie auszulösen; entweder auf mechanischem Wege, wie der Hughes-Elektromagnet durch geringe Verschiebung einer Sperrklinke die Druckvorrichtung mit dem Antrieb des Laufwerkes verbindet, oder auf elektrischem Wege, indem durch Schließen eines Ortskreises dessen Elektromagnete in Gang gesetzt werden, die ihre Energie aus einer hinreichend starken Stromquelle entnehmen.

Die Eigentümlichkeit der telegraphischen Elektromagnete ist also, daß sie weniger für große Kraftwirkung, als für schnelles und sicheres Ausführen bestimmter Bewegungen bestimmt sind.

**§ 96. Apparate mit neutralen Elektromagneten.** Neutrale Elektromagnete sind solche ohne Dauermagnetismus. Wir finden sie bei den meisten Klopfern und Farbschreibern, sowie bei den gewöhnlichen, nicht polarisierten Relais. Die Wirkung dieser Elektromagnete beruht allein auf dem durch den Strom hervorgebrachten magnetischen Felde. Der Elektromagnet ist fast immer hufeisenförmig, und der vor den Polen liegende Anker bewegt sich gegen die Pole und von ihnen weg um eine Achse, die außerhalb des Ankers liegt und seiner Längsrichtung meist parallel ist. In seltenen Fällen, so bei den gewöhnlichen Weckern, steht die Drehungsachse senkrecht zur Längsrichtung. In der Regel wird also der Abstand beider Pole vom Anker bei dessen Bewegung gleichmäßig geändert. Der Anker bewegt sich zwischen zwei Anschlägen; gegen den einen wird er in der Ruhe durch eine Feder gezogen, deren Kraft derjenigen der Elektromagnete entgegenwirkt, der andere Anschlag begrenzt die Bewegung unter dem Antrieb des Elektromagnets.

Der Luftspalt zwischen Anker und Elektromagnet bietet einen magnetischen Widerstand, der im Vergleich zu dem der Eisenteile sehr groß ist. Weil das Eisen nur wenig gesättigt ist, kann man den erzeugten Fluß bei einer bestimmten Ankerlage der Stromstärke proportional, die Zugkraft ihrem Quadrat proportional setzen.

Den magnetischen Widerstand kann man, ohne auf die Einzelheiten näher einzugehen, folgendermaßen einführen. In der Ruhelage des Ankers betrage er  $wa$ , wo  $a$  die in Zentimetern gemessene Länge des magnetischen

Weges sei, unter Umrechnung der Teile im Eisen auf Luft.  $a$  wird also im wesentlichen die Länge des Luftspaltes sein. Bewegt sich der Anker auf den Magnet zu, um  $x$  cm, so wird der magnetische Widerstand  $w(a - x)$ . Der Fluß ist also dem Betrage  $\frac{J}{a - x}$  und die Zugkraft dem Betrage  $J^2/(a - x)^2$  proportional, also etwa  $A_1 J^2/(a - x)^2$ .

Liegt der Anker am Ruhekontakt, so wird er dort durch eine gewisse Federkraft gehalten, die infolge Anspannung der Feder vergrößert wird, wenn der Anker sich unter dem Zuge des Elektromagnets bewegt. Die Vergrößerung der Federkraft ist dem  $x$  proportional. Wir können die Zugkraft an jeder Stelle mit  $A_2(x_0 + x)$  bezeichnen;  $A_2 x_0$  ist dann die Kraft in der Ruhelage und  $x_0$  wäre die Strecke, um die der Ruhekontakt zurückgenommen werden müßte, um die Feder ganz zu entspannen.

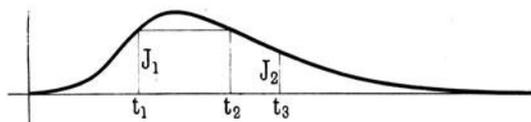
Wir wollen nun für den Betrieb des Elektromagnets die beiden Fälle unterscheiden, daß der Strom sehr schnell oder ziemlich langsam ansteige.

Im ersteren Falle erhält die Zugkraft des Ankers schnell große Werte, und es wirken daher große beschleunigende Kräfte auf den Anker, wenn er sich auf die Pole zu bewegt. Damit die Rückwärtsbewegung, die allein unter der Wirkung der Feder erfolgt, ebenfalls schnell ausgeführt werde, ist es nützlich, die Feder stark anzuspinnen, also dem  $x_0$  einen großen Wert zu geben. Um dies auszugleichen, hat man den Luftraum, also  $a$ , möglichst zu verkleinern, damit die Zugkraft groß werde.

Im betrachteten Falle, der vornehmlich auf nicht zu lange oberirdische Leitungen und auf Ortskreise zutrifft, hat man also den Anker möglichst den Polen zu nähern und die Feder stark anzuspinnen.

Der andere Fall mit langsam ansteigender und demgemäß auch langsam abfallender Stromkurve betrifft lange oberirdische und Kabelleitungen. Das

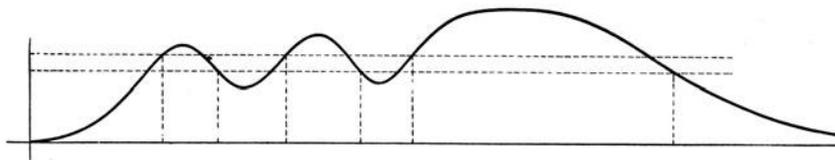
Fig. 72.



zeitliche Bild eines Zeichens ist das einer langsam anwachsenden und langsam wieder abnehmenden Stromwelle (Fig. 72). Wenn die Ordinate  $J_1$  den Wert des Stromes anzeigt, bei dem

die magnetische Kraft gerade gleich der Federkraft geworden ist, so bedeutet die zugehörige Zeit  $t_1$  den Anfang der Bewegung des Ankers. Indem dieser sich nach dem Arbeitsanschlag bewegt, vermindert er den magnetischen

Fig. 73.



Widerstand, und die Zugkraft des Elektromagnets wächst schneller als die Gegenkraft der Feder, da sie dem Quadrat von  $(a - x)$  umgekehrt proportional ist. Wenn daher der Strom auf der anderen Seite seines Höchst-

wertes den Wert  $J_1$  wieder erreicht, zur Zeit  $t_2$ , so reicht die Federkraft noch nicht hin, den Anker wieder abzureißen, sondern er bleibt noch bis zu einer Zeit  $t_3$  am Arbeitsanschlag, bis der Strom den Wert  $J_2$  erreicht hat.

Wenn, wie bei telegraphischen Zeichen des Morsealphabets, mehrere Punkte und Striche aufeinanderfolgen, so überlagern sich die den einzelnen entsprechenden Zeichen am Ende (Fig. 73). Damit ein Relais einen Strom derartigen Verlaufs in der richtigen Weise in Zeichen zerlegen könne, ist es erforderlich, daß die Höhe jeder Teilwelle über  $J_1$  hinausgehe, und die Einsattlung zwischen je zwei Teilwellen unter  $J_2$  falle.

Man wird daher das Relais so einzustellen haben, daß  $J_1$  und  $J_2$  so nahe wie möglich beieinander liegen. Wir wollen nun feststellen, unter welchen Bedingungen dies zutrifft.

Der Ankerhub sei  $h$ . Die Stromstärke  $J_1$  ist gegeben durch die Gleichung

$$A_1 \frac{J_1^2}{a^2} = A_2 x_0,$$

nämlich die Gleichsetzung der magnetischen und der Federkraft für  $x = 0$ . Dagegen ergibt sich  $J_2$  aus

$$A_1 \frac{J_2^2}{(a-h)^2} = A_2 (x_0 + h).$$

Es folgt also

$$\frac{J_1^2}{J_2^2} = \frac{a^2 x_0}{(a-h)^2 (x_0 + h)}.$$

Dieses Verhältnis  $\frac{J_1^2}{J_2^2}$ , das wir  $p$  nennen wollen, soll nach dem besprochenen für Kabelbetrieb möglichst gleich Eins, überhaupt möglichst klein gemacht werden. Nun ist.

$$\begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial a} &= - \frac{2 a h}{(a-h)^3} \frac{x_0}{x_0 + h}, \\ \frac{\partial p}{\partial x_0} &= \frac{a^2}{(a-h)^2} \frac{h}{(x_0 + h)^2}, \\ \frac{\partial p}{\partial h} &= \frac{a^2 x_0 [2(x_0 + h) - (a-h)]}{(a-h)^3 (x_0 + h)^2}. \end{aligned}$$

Das Verhältnis  $p$  nimmt also ab, wenn  $a$  wächst, während es mit  $x_0$  und  $h$  zunimmt. Man erhält daraus für die Einstellung eines Elektromagnets bei langsam veränderlichen Strömen folgende Regel.

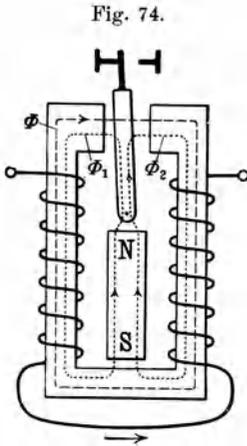
Bei Wellen, die nur Stärkeunterschiede des Stromes, und zwar veränderlicher Größe aufweisen, stellt man den Anker des Relais möglichst weit von den Polen ab. Man macht den Hub möglichst klein und spannt die Feder nur so weit, daß sie den Anker sicher aus der Arbeitslage zurückholt.

Man erkennt, daß bei dieser Art Einstellung sowohl die magnetische Wirkung als auch die Federwirkung geschwächt werden; die Einstellung auf Trennung der Zeichen erfolgt auf Kosten der Arbeitsgeschwindigkeit.

Im ganzen genommen ist deshalb das neutrale Relais für den Kabelbetrieb wenig geeignet.

§ 97. **Polarisierte Relais. Magnetischer Aufbau.** Vom neutralen Relais unterscheiden sich die polarisierten Relais durch Hinzufügung eines Dauermagnets. Nach dem magnetischen Kreise kann man erstens solche unterscheiden, bei denen die Weicheisenkerne mit den Spulen nur als Polschuhe des Dauermagnets wirken (Hughes-Elektromagnet, Telephon), und in denen daher die Wirkung des Stromes in einer Verstärkung oder Schwächung des gesamten Kraftflusses besteht, und zweitens solche Relais, bei denen zwei getrennte Kraftflüsse des Dauermagnets bestehen, die von demjenigen des Stromes entgegengesetzt geändert werden. Nach diesem Prinzip sind die meisten der eigentlichen Telegraphenrelais gebaut.

Die magnetische Anordnung des Relais mit doppeltem magnetischen Fluß ist in Fig. 74 im Prinzip dargestellt. Gegenüber dem einen Pol des Dauermagnets *NS* befindet sich der Anker des Relais, während der andere Pol dem Joche des Elektromagnets naheliegt. Der vom Nordpol ausgehende Fluß teilt sich in zwei Teile  $\Phi_1$  und  $\Phi_2$ , welche in entgegengesetzten Richtungen durch die Schenkel des Hufeisens zum Südpol zurücklaufen.



Der Elektromagnet ist so bewickelt, daß der durch den Strom erzeugte Fluß  $\Phi$  das Hufeisen in einerlei Umlaufssinn durchsetzt; im Vergleich zu  $\Phi_1$  und  $\Phi_2$ , die beide als positiv angesehen werden mögen, gilt der vom Strome erzeugte Fluß  $\Phi$  auf der einen Seite positiv, auf der anderen negativ. Die auf den Anker wirkende Kraft ist daher für das Beispiel der Fig. 74 der Differenz

$$(\Phi_2 + \Phi)^2 - (\Phi_1 - \Phi)^2 = (\Phi_2^2 - \Phi_1^2) + 2\Phi(\Phi_1 + \Phi_2)$$

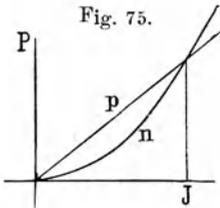
proportional. Solange kein Strom fließt wirkt eine Kraft, die  $(\Phi_2^2 - \Phi_1^2)$  proportional ist und die Ankerzunge gegen den Kontakt auf der Seite des größeren der beiden Flüsse anlegt; damit eine Bewegung zustande kommt, muß der Strom einen solchen Wert erlangt haben, daß

$$\Phi > \frac{\Phi_2^2 - \Phi_1^2}{2(\Phi_1 + \Phi_2)} = \frac{\Phi_2 - \Phi_1}{2}$$

ist.

Die Differenz der beiden Flüsse  $\Phi_2 - \Phi_1$  ist daher für die Empfindlichkeit des Relais maßgebend. In der Ruhelage steht der Anker einem der Pole näher als dem anderen, so daß die Flüsse verschieden groß sind, und bei gegebener Hubhöhe ist die Differenz um so größer, je größer der Gesamtfluß ist. Für die Empfindlichkeit ist daher ein nicht zu starker dauermagnetischer Fluß günstig. Dagegen wächst mit dem Fluß der Kontaktdruck, also die Sicherheit, mit der das Relais arbeitet.

Man sieht ferner, daß die magnetische Wirkung des Stromes dem Produkt des vom Strome erzeugten Flusses und des gesamten dauernden Flusses proportional ist. Wenn der letztere groß ist, so bringen also auch kleine Werte des Stromes schon merkliche Kräfte hervor. Bei neutralen Relais



sind die Kräfte dem Quadrat des Stromes proportional. Wenn also die Kräfte  $P$  für einen bestimmten Strom  $J$  übereinstimmen, so sind sie für kleinere Stromstärken größer beim polarisierten als beim neutralen Relais. In Fig. 75 stellt  $n$  die Kurve des neutralen,  $p$  die des polarisierten Relais dar. Das polarisierte Relais eignet sich daher am meisten dort, wo es sich um den Nachweis schwacher, ebenso auch langsam anwachsender Ströme handelt, während ihm in Ortskreisen, deren Ströme man schnell anwachsen lassen kann, das neutrale Relais überlegen ist.

**§ 98. Grundsätze für die Einstellung.** Um die Grundsätze für die Einstellung des polarisierten Relais zu finden, nehmen wir zunächst an, der ankommende Strom sei von der Form der Fig. 72, also Einfachstrom, der durch Zeichen von einerlei Stromrichtung gebildet wird. Auf den Anker wirkt eine Kraft, die sich aus der des dauermagnetischen Feldes und der des vom Strome erzeugten Feldes zusammensetzt. Wir denken uns die Lage des Ankers durch den Winkel  $\vartheta$  bestimmt, um den er aus derjenigen Ebene herausgedreht ist, in welcher im stromlosen Zustande des Relais die Kraft beider Pole auf den Anker sich das Gleichgewicht hält. Dies Gleichgewicht ist labil, der Anker folgt jedem Antrieb nach einer der beiden Seiten, bis die Bewegung an den Anschlägen begrenzt wird. Das Drehmoment, das bei einer Ablenkung  $\vartheta$  aus der Nullage auf den Anker wirkt, ist bei den kleinen vorkommenden Ablenkungen dem  $\vartheta$  proportional, es sei gleich  $P \vartheta$  gesetzt.

Die Kraft, welche das vom Strom erzeugte, durch das Hufeisen und die Spitze des Ankers allein verlaufende Feld hervorbringt, ist von  $\vartheta$  unabhängig, weil dieses Feld durch die Bewegungen des Ankers nicht geändert wird; einer Vergrößerung des Luftspaltes auf der einen Seite steht eine Verminderung auf der anderen gegenüber.

Wir bezeichnen das von dieser Kraft erzeugte Drehmoment als  $A_1 J$ .

Bei einem auf Einfachstrom eingestellten Relais nimmt der Anker in der Ruhe die Lage  $-\vartheta_0$  ein (Fig. 76), bei der Bewegung gelangt er bis zu der Lage  $-\vartheta_0 + \varepsilon$ , die mit  $-\vartheta_0$  noch dasselbe Vorzeichen haben muß, weil der Anker durch die Feldkräfte zurückgeführt werden soll. Ist  $J_1$  derjenige Strom, bei welchem der Anker sich von der Ruhelage aus in Bewegung zu setzen beginnt,  $J_2$  derjenige, bei dem er beginnt, zurückzukehren, so ist

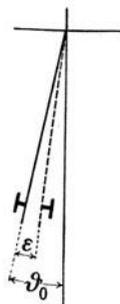
$$\begin{aligned} A_1 J_1 &= P \vartheta_0, \\ A_1 J_2 &= P (\vartheta_0 - \varepsilon), \end{aligned}$$

also

$$\frac{J_1}{J_2} = \frac{\vartheta_0}{\vartheta_0 - \varepsilon}.$$

Es liegt wieder im Interesse des guten Arbeitens, dieses Verhältnis so nahe wie möglich gleich Eins zu machen. Daraus folgt zunächst, daß man  $\varepsilon$  gegen  $\vartheta_0$  klein machen muß. Hier, wie beim neutralen Relais ist also ein kleiner Hub Voraussetzung einer guten Einstellung. Man verbessert ferner

Fig. 76.



das Verhältnis, wenn man  $\vartheta_0$  möglichst groß macht. Wenn die Stärke des dauermagnetischen Feldes gegeben ist, so ist eine Vergrößerung von  $\vartheta_0$  mit einer Verminderung der Empfindlichkeit verbunden. Wenn man das dauermagnetische Feld durch Verstellen der Polschuhe des Hufeisens schwächt, so wächst zwar die Empfindlichkeit, aber auf Kosten der Arbeitsgeschwindigkeit.

Bei Doppelstrombetrieb, wo Ströme der einen Richtung während der Zeichensendung, Ströme der entgegengesetzten Richtung in den Zwischenzeiten der Zeichen gegeben werden, wird das Relais so eingestellt, daß es entweder auf der einen oder der anderen Seite der Nullage liegen bleibt, bis eine Änderung der Stromrichtung den Anker hinüberlegt. Hier sind also die Stromstärken bei Beginn der Hin- und bei Beginn der Zurückbewegung gleich, wenn die Anschläge für den Anker richtig eingestellt sind; hier kann also ohne weiteres überhaupt nichts über die Bedeutung des dauermagnetischen Feldes für das Arbeiten des Relais gesagt werden.

Bei dieser Sachlage ist es erforderlich, die Tätigkeit des polarisierten Relais durch Aufstellung seiner Bewegungsgleichung näher zu untersuchen.

**§ 99. Bewegungsgleichung des polarisierten Relais.** Es ist bereits festgestellt worden, daß der Anker in einer von der Nullage um den Winkel  $\vartheta$  abweichenden Lage von dem dauermagnetischen Felde aus ein Drehmoment  $P \vartheta$  erfährt, während das vom Strom erzeugte Feld auf ihn mit einem von der Lage  $\vartheta$  unabhängigen Moment wirkt. Wir wollen dieses allgemein durch eine Zeitfunktion  $U$  angeben, deren Form von den Eigenschaften des gesamten Stromkreises abhängt. Weil es sich hier darum handelt, das Verhalten des Relais beim Empfang einer Welle zu untersuchen, und da, wie sich ergeben wird, die Zeit der Bewegung des Ankers unter betriebsmäßigen Verhältnissen nur einen kleinen Teil der Zeit des Zeichens beansprucht, so wollen wir für  $U$  die für die Rechnung bequeme Form wählen:

$$U = A + B \cos(\omega t + \varphi).$$

Diese Form stellt einen periodischen Vorgang dar, der nach Verlauf der Zeiten  $t + \frac{2\pi}{\omega}$ ,  $t + 2 \cdot \frac{2\pi}{\omega}$ , ...  $t + n \frac{2\pi}{\omega}$  immer wieder denselben Wert hat wie zur Zeit  $t$ . Die Zeit  $T = \frac{2\pi}{\omega}$  ist also die Periode dieses Verganges.

Je nachdem man die Werte von  $A$  und  $B$  wählt, ergibt sich eine Welle, die durch Entsendung von lauter gleichgerichteten oder von abwechselnden Zeichen gebildet wird; die angegebene Form paßt sich also dem vorliegenden Zwecke gut an.

Auf die Bewegung des Ankers wirkt noch eine dritte Kraft, nämlich die verzögernde Kraft der Reibung, die sich einer Änderung seiner Lage widersetzt. Wir können ihr Drehmoment als  $-R \frac{d\vartheta}{dt}$  einführen. In dieser Form ist es negativ, wenn  $\vartheta$  wächst, und positiv, wenn  $\vartheta$  abnimmt. Die Summe der drei Momente  $U + P \vartheta - R \frac{d\vartheta}{dt}$  stellt in jedem Augenblicke der Bewegung das beschleunigende Moment dar. Da dieses andererseits für einen Körper vom

Trägheitsmoment  $K$  gleich  $K \frac{d^2 \vartheta}{dt^2}$  ist, so erhält man die Gleichung der Bewegung in der Form

$$K \frac{d^2 \vartheta}{dt^2} + R \frac{d\vartheta}{dt} - P \vartheta = U.$$

Diese Gleichung gilt unter der Voraussetzung, daß die Rückwirkung der Bewegung des Ankers auf die Kurve des erregenden Stromes vernachlässigt werden könne. Die Berücksichtigung dieser Rückwirkung würde die Lösung der Aufgabe sehr erschweren.

Wenn wir für  $U$  die oben angenommene Form einsetzen, so erhalten wir das allgemeine Integral

$$\vartheta = -\frac{A}{P} - \frac{B}{\sqrt{(P + K\omega^2)^2 + R^2\omega^2}} \cos(\omega t + \varphi + \chi) + C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t}.$$

In dieser Gleichung ist

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \chi &= \frac{R\omega}{P + K\omega^2}, \\ \lambda_1 &= -\frac{R}{2K} + \sqrt{\frac{R^2 + 4PK}{(2K)^2}}, \\ \lambda_2 &= -\frac{R}{2K} - \sqrt{\frac{R^2 + 4PK}{(2K)^2}}. \end{aligned}$$

$C_1$  und  $C_2$  sind Integrationskonstanten, die von den Anfangsbedingungen abhängen.

Wir werden zunächst von der Reibung absehen, also  $R = 0$  setzen. Dadurch wird

$$\chi = 0, \quad \lambda_1 = +\sqrt{\frac{P}{K}}, \quad \lambda_2 = -\sqrt{\frac{P}{K}}.$$

Wir setzen abkürzend

$$\sqrt{\frac{P}{K}} = \lambda$$

Dann ist also

$$\vartheta = -\frac{A}{P} - \frac{B}{P + K\omega^2} \cos(\omega t + \varphi) + C_1 e^{\lambda t} + C_2 e^{-\lambda t} \dots (131)$$

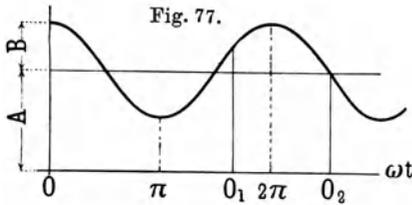
**§ 100. Verhalten bei Einfachstrom.** Die Größe  $\varphi$  in der Funktion  $U$  dient dazu, der Welle einen passenden Anfangspunkt zu geben. Indem wir zunächst die Bewegung des Relais vom Ruhekontakt ( $\vartheta = -\vartheta_0$ ) zum Arbeitskontakt ( $\vartheta = -\vartheta_0 + \varepsilon$ ) untersuchen, wollen wir die Zeit  $t$  von dem Augenblick an rechnen, wo das dauermagnetische Moment  $P\vartheta$  und das Moment  $U$  einander gerade das Gleichgewicht halten; solange  $U$  kleiner als  $P\vartheta$  ist, kann der Anker nicht vom Ruhekontakt loskommen. Wir setzen also

$$P\vartheta_0 = A + B \cos \varphi_1;$$

dadurch wird

$$\cos \varphi_1 = -\frac{A - P\vartheta_0}{B}.$$

Nach Lage der Dinge muß sich die Funktion  $U$  zur Zeit  $t = 0$  auf einem aufsteigenden Teile der Welle befinden. Stellt die Wellenlinie in Fig. 77 die



Funktion  $A + B \cos \omega t$  dar, wenn man die Zeiten von  $O$  aus zählt, so liegt der Nullpunkt der Zeit für die Funktion  $A + B \cos(\omega t + \varphi)$  für den Fall der betrachteten Bewegung an der Stelle  $O_1$ , irgendwo zwischen  $\varphi = \pi$  und  $\varphi = 2\pi$ . Das Vorzeichen von  $\cos \varphi_1$  richtet sich also

nach der Größe von  $A - P \vartheta_0$ , dagegen ist  $\sin \varphi_1$  für diesen Fall immer negativ. Es ist also

$$\sin \varphi_1 = -\sqrt{1 - \left(\frac{A - P \vartheta_0}{B}\right)^2}.$$

Der Augenblick  $t = 0$  ist ferner dadurch bestimmt, daß  $\vartheta = -\vartheta_0$  und daß der Anker sich in Ruhe befindet, daß also  $\frac{d\vartheta}{dt} = 0$  für  $t = 0$ . Dadurch ergeben sich die Gleichungen

$$C_1 + C_2 = \frac{A - P \vartheta_0}{P} + \frac{B}{P + K \omega^2} \cos \varphi_1,$$

$$C_1 - C_2 = -\frac{\omega}{\lambda} \frac{B}{P + K \omega^2} \sin \varphi_1.$$

Man erhält daraus

$$C_1 + C_2 = -B \frac{\omega^2 \lambda^2}{P + K \omega^2} \cos \varphi_1,$$

$$C_1 - C_2 = -B \frac{\omega / \lambda}{P + K \omega^2} \sin \varphi_1.$$

Zur Zeit  $t$  sei  $\vartheta = -\vartheta_0 + \alpha$ , also  $\alpha$  der von Beginn der Bewegung an durchlaufene Winkel; dann ist

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{B}{P} \cos \varphi_1 - \frac{B}{P + K \omega^2} \cos(\omega t + \varphi_1) \\ &\quad - \frac{1}{2} \frac{B}{P + K \omega^2} \left( \frac{\omega^2}{\lambda^2} \cos \varphi_1 + \frac{\omega}{\lambda} \sin \varphi_1 \right) e^{\lambda t} \\ &\quad - \frac{1}{2} \frac{B}{P + K \omega^2} \left( \frac{\omega^2}{\lambda^2} \cos \varphi_1 - \frac{\omega}{\lambda} \sin \varphi_1 \right) e^{-\lambda t}. \end{aligned}$$

Zur Vereinfachung kann man annehmen, es sei  $\cos \varphi_1 = 0$ , indem zur Zeit  $t = 0$  die Zugkraft des veränderlichen Feldes die des dauernden Feldes gerade erreicht hätte. Dann wäre  $\sin \varphi_1 = -1$  und man erhielte

$$\alpha = \frac{B}{P + K \omega^2} \left( \frac{\omega}{2\lambda} (e^{\lambda t} - e^{-\lambda t}) - \sin \omega t \right).$$

Damit  $\alpha$  mit der Zeit möglichst schnell wachse, muß das erste Glied, das einzige positive, bald große Werte annehmen, und dies erfordert, daß  $\lambda$  groß sei. Bei gegebenem  $K$  muß also  $P$  groß gemacht werden und dies bedeutet, daß man mit starkem Felde arbeiten soll. Wenn die Bedingung, daß

$A = P \vartheta_0$ , nicht ganz erfüllt ist, so enthält die letzte Gleichung noch einige Glieder, deren Bedeutung man nur durch numerische Rechnung genau aufklären kann. Es ist aber ausgeschlossen, daß die Bedingung, daß das Feld stark sei, nur für die Mitte der Wellenkurve Geltung haben sollte.

Wenn ein starkes Feld schon bei der Bewegung des Ankers nach dem Arbeitskontakt günstig ist, wo es der antreibenden Kraft widersteht, so ist es erst recht für die umgekehrte Richtung günstig, in der es die Bewegung des Ankers unterstützt.

Es ergibt sich also für die Einstellung des polarisierten Relais für Einfachstrombetrieb in Kabeln, daß man das magnetische Feld möglichst kräftig und den Hub möglichst klein machen und den Anker so weit aus der Mittel-lage herausdrehen soll, als es nach der verfügbaren Stromstärke möglich ist.

**§ 101. Verhalten bei Doppelstrom.** Die Art der Untersuchung ist fast genau dieselbe wie bei dem Einfachstrom, nur daß die Hin- und Herbewegung sich, abgesehen von der Richtung, nicht unterscheiden. Eine Vereinfachung ist zunächst, daß  $A = 0$ .

Die Zeit wird gezählt von dem Augenblick, wo  $U$  den Wert  $P \frac{\varepsilon}{2}$  erhält, wo also

$$P \frac{\varepsilon}{2} = B \cos \varphi_2.$$

Da die Hinbewegung bei positivem Strom stattfinden soll, so liegt  $\varphi_2$  zwischen  $\frac{3\pi}{2}$  und  $2\pi$ , also ist

$$\sin \varphi_2 = - \sqrt{1 - \left(\frac{P \varepsilon}{2 B}\right)^2}.$$

Zur Zeit  $t = 0$  ist  $\vartheta = -\frac{\varepsilon}{2}$ ,  $\frac{d\vartheta}{dt} = 0$ . Dies ergibt

$$C_1 + C_2 = -\frac{\varepsilon}{2} \frac{K \omega^2}{P + K \omega^2},$$

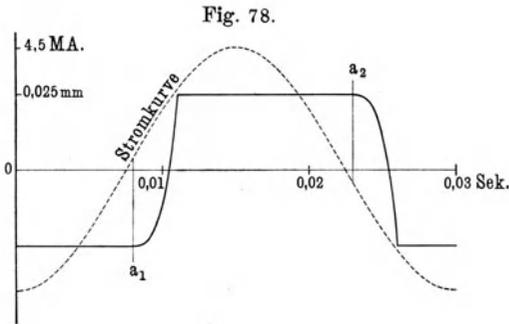
$$C_1 - C_2 = + \frac{\omega}{\lambda} \sqrt{B^2 - \left(\frac{P \varepsilon}{2}\right)^2}.$$

Demnach wird

$$\vartheta = \frac{B}{P + K \omega^2} \left\{ -\cos(\omega t + \varphi_2) + \frac{1}{2} \left[ \frac{\omega}{\lambda} \sqrt{1 - \left(\frac{P \varepsilon}{2 B}\right)^2} - \frac{\varepsilon K \omega^2}{2 B} \right] e^{\lambda t} - \frac{1}{2} \left[ \frac{\omega}{\lambda} \sqrt{1 - \left(\frac{P \varepsilon}{2 B}\right)^2} - \frac{\varepsilon K \omega^2}{2 B} \right] \right\} e^{-\lambda t}.$$

Das einzige positive Glied hierin, das also allein die Vergrößerung des  $\vartheta$ , das Umlegen des Ankers bedeutend, veranlaßt, ist das mit  $e^{\lambda t}$ . Auch hier ergibt sich also wieder die Notwendigkeit eines starken dauermagnetischen Feldes.

Berücksichtigung der Reibung. Die Reibung bewirkt nach § 97, daß statt einer Größe  $\lambda$  deren zwei auftreten, eine positive  $\lambda_1$  und eine negative  $\lambda_2$ . Da es nach vorstehendem hauptsächlich darauf ankommt, daß die



positive Größe  $\lambda_1$  möglichst hohe Werte habe, da ferner die Reibung diese zu verkleinern strebt, so ist der Vorteil eines starken Magnetfeldes bei vorhandener Reibung erst recht ersichtlich. Es bedarf kaum der Erwähnung, daß die Reibung so klein wie möglich sein soll.

Zeitlicher Verlauf der Ankeranziehung. Bei einem Standardrelais wurden in Einheiten des cgs-Systems durch Messung festgestellt:

$$\begin{aligned} P &= 975\,000, \\ K &= 5,2 \\ \varepsilon &= 0,0025, \\ B &= 15\,000 \text{ bei } 4,5 \text{ Milliampere.} \end{aligned}$$

Für eine Frequenz  $\omega = 210$ , oder 2000 Zeichen jeder Richtung in einer Minute wurde die Bewegungskurve berechnet, die in Fig. 78 wiedergegeben ist.

#### Vierter Abschnitt.

### Stromleiter im magnetischen Felde.

§ 102. **Magnetischer Fluß in Verkettung mit einem Stromleiter.** Eine andere Deutung des magnetischen Potentials beruht darauf, daß in dem Ausdruck

$$\psi = -J \int \frac{\partial(1/r)}{\partial n} df$$

durch  $-\frac{\partial(1/r)}{\partial n}$  die zu  $df$  senkrechte Komponente derjenigen magnetischen Feldstärke dargestellt wird, welche von einem im Punkte  $P$  (Fig. 79) angenommenen Magnetpole der Feldstärke Eins an der Stelle des  $df$  hervorgebracht würde.

Daher ist  $-\frac{\partial(1/r)}{\partial n} df$  oder auch  $-\text{grad} \frac{1}{r} \cdot d\mathfrak{f}$  die Zahl der durch das Flächenelement hindurchtretenden Linien dieser Feldstärke, welche mit  $\mathfrak{S}'$  bezeichnet werde, und demnach  $\psi$  das Produkt aus der Stromstärke in die Gesamtzahl der die Fläche des Stromleiters durchsetzenden Linien des Vektors  $\mathfrak{S}'$ . Wir bezeichnen diesen Fluß mit  $-\Phi'$ , weil er nach Fig. 79, wenn der Umlaufsinn des Stromes mit der Normalen ein Rechtssystem bildet, den Leiter in einer Richtung durchsetzt, die derjenigen eines mit dem Strome

ein Rechtssystem bildenden Flusses entgegengesetzt ist. Daher ist also  $\psi = -J\Phi'$ .

Wenn der Magnetpol gegen den Strom bewegt wird und dabei den Weg  $dr$  beschreibt, so wird die Arbeit  $-\frac{\partial \psi}{\partial r} dr$  geleistet; in der Richtung des  $dr$  wirkt also auf den Magnet eine Kraftkomponente  $-\frac{\partial \psi}{\partial r}$ .

Durch den magnetischen Fluß ausgedrückt, hat diese mechanische Kraft den Wert

$$P_r = J \frac{\partial \Phi'}{\partial r}.$$

Allgemein ist also

$$P' = J \text{ grad } \Phi' \dots \dots \dots (132)$$

Wenn der magnetische Fluß, der den Leiter durchsetzt, von einem Felde beliebiger Gestalt, statt von einem einzelnen Magnetpol herrührt, so ist das magnetische Potential gleich dem negativen Produkt aus der Stromstärke in dem gesamten Fluß  $\Phi$ , letzterer positiv gerechnet, wenn er mit dem Strom ein Rechtssystem bildet.

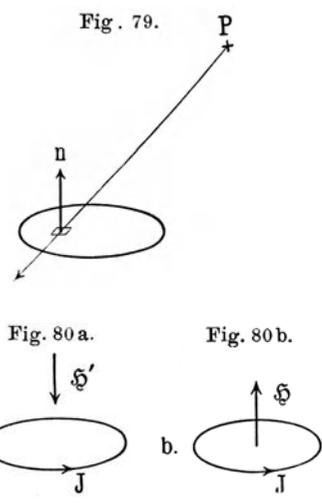
Für die geleistete Arbeit ist es gleichgültig, ob der Leiter ruht und das magnetische Feld sich bewegt oder umgekehrt.

Es ergibt sich folgender Satz:

Die Arbeit, welche die Kräfte eines magnetischen Feldes bei der Bewegung eines Leiters mit unveränderter Stromstärke leisten, ist gleich der Zunahme des mit dem Leiter verketteten magnetischen Flusses, multipliziert mit der Stromstärke.

Man ersieht hieraus leicht, welche Stellung ein frei beweglicher Leiter im magnetischen Felde einnehmen wird; er wird sich bewegen, solange noch eine Änderung seiner Lage die Größe des Flusses ändert. Für die Ruhelage gilt also, daß der Fluß ein Maximum oder ein Minimum sein muß. Ist er ein Minimum, d. h. hat er große negative Werte, so wird bei jeder Bewegung aus der Ruhelage vom Felde Arbeit geleistet, der Leiter ist also im labilen Gleichgewicht; um ihn aus der Lage im Maximum herauszubewegen, muß von außen her Arbeit geleistet werden, der Leiter ist also im stabilen Gleichgewicht.

Unsere Herleitung nimmt einen negativen Fluß an, wenn  $J$  und die Feldstärke  $\mathfrak{H}'$  des äußeren Flusses zueinander in der Lage der Fig. 80 a sind; ein Maximum positiver Linien jenes Flusses liegt also vor, wenn  $J$  und  $\mathfrak{H}$  in der Lage der Fig. 80 b sind. Dies stimmt mit der Ampèreschen Regel überein, wonach der vom Strom  $J$  durchflossene Leiter auf der oberen Seite einen Nordpol, auf der unteren einen Südpol aufweist. Ein so gerichteter Magnet ist in dem durch Fig. 82 b bezeichneten Felde im stabilen Gleichgewicht.



§ 103. **Leiter, die in einem magnetischen Felde drehbar sind.** Im Bereiche der für die Telegraphentechnik wichtigen Anwendungen finden wir diese Anordnung beispielsweise bei den Heberschreibern, den Drehspulengalvanometern und den Oszillographen. Wir nehmen an, daß der Leiter um eine Achse drehbar sei, er kann im übrigen eine beliebige Form haben. Aus praktischen Gründen wird diese zur Achse symmetrisch sein. Ein Leiter der im oberen Teil der Fig. 81 gezeichneten Form ist in bezug auf

Fig. 81.

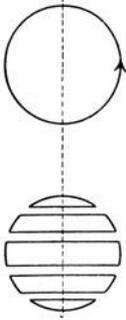
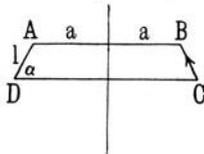


Fig. 82.



die magnetische Wirkung äquivalent mit dem mehrfachen Leiter im unteren Teil der Fig. 81, vorausgesetzt, daß die horizontalen Teile je zweier aneinanderstoßender Stromkreise eng genug nebeneinander liegen. Es tut also der Allgemeinheit der Betrachtung keinen

Eintrag, wenn man sich den Leiter aufgebaut denkt aus zwei Teilen senkrecht zur Achse  $AB, CD$ , welche durch zwei unter gleichen Winkeln gegen die Achse geneigten geraden Stücken  $AD$  und  $BC$  verbunden sind (Fig. 82). In dem Leiter kreise der Strom  $J$ , der durch eine in einem der Leiter  $AB$  oder  $CD$  eingeschaltete Stromquelle unterhalten wird.

Der Leiter ist im stabilen Gleichgewicht, wenn er das positive Maximum des Flusses umfaßt, im labilen, wenn ihn das negative Maximum des Flusses durchsetzt. In beiden Fällen ist der Kraftantrieb auf den Leiter gleich Null. Indessen wird der Leiter, wenn er nur ein geringes aus dem labilen Gleichgewicht bewegt wird, unter dauernder Arbeitsleistung in das stabile überführt. Da der Kraftantrieb zu Anfang und zu Ende Null und stets positiv ist, so hat er demnach ein Maximum, und dieses wird da liegen, wo der Leiter gerade gar keinen Fluß aufnimmt. Diese Stelle wollen wir besonders betrachten.

Offenbar verläuft hier die magnetische Kraft parallel zur Leiterebene und also senkrecht zur momentanen Bewegungsrichtung des Leiters. Ist die Feldstärke dort konstant, wie für einen kleinen Bereich vorausgesetzt werden kann, so ist der durch die Leiterebene gehende Fluß, nachdem sich der Leiter um den Winkel  $d\vartheta$  gedreht hat, der Leiterfläche und dem Winkel  $d\vartheta$  proportional, also ist

$$d\Phi = + 2l \sin \alpha (a + \frac{1}{2} l \cos \alpha) \mathfrak{H} d\vartheta.$$

Die geleistete Arbeit ist  $J d\Phi$ , oder gleich

$$J \mathfrak{H} 2l \sin \alpha . (a + \frac{1}{2} l \cos \alpha) d\vartheta.$$

Stellt man diese Arbeit als ein Produkt aus einer Kraft in einen Weg dar, so kann man  $a + \frac{1}{2} l \cos \alpha$  als den mittleren Bewegungsradius des Leiterstückes  $l$  betrachten,  $(a + \frac{1}{2} l \cos \alpha) d\vartheta$  ist dann der Weg, den die Mitte des Leiterstückes beschrieben hat. Demnach wäre  $J \mathfrak{H} l \sin \alpha$  die Kraft, die auf jedes der beiden Stücke  $l$  wirkte. Man kommt so zu dem Ergebnis, daß in einem magnetischen Felde von der Stärke  $\mathfrak{H}$  auf ein von einem Strom  $J$  durchflossenes Leiterstück von der Länge  $l$  eine Kraft  $J \mathfrak{H} l \sin \alpha$  ausgeübt wird, wenn das Leiterstück mit der Feldrichtung den Winkel  $\alpha$  bildet, und zwar steht diese Kraft senkrecht auf der durch die Richtung der Feldstärke

und das Leiterstück gelegten Ebene, derart, daß Strom  $\mathfrak{J}$ , Feld  $\mathfrak{H}$  und Kraft  $\mathfrak{F}$  in der angegebenen Reihenfolge ein Rechtssystem bilden. Man kann dies ausdrücken in der Form

$$\mathfrak{F} = [\mathfrak{J}l, \mathfrak{H}] \dots \dots \dots (133)$$

Die Teile der Leiter, die nicht der Achse parallel sind, tragen also zu der Kraft nichts bei und sind deshalb als untätig zu bezeichnen. Sie sind indessen zur Umschlingung des magnetischen Flusses ebenso unentbehrlich wie die der Achse parallelen tätigen Teile. Man wird aber ihre Länge so gering machen, wie es mit Rücksicht auf die Erreichung des Zwecks möglich ist.

**§ 104. Magnetische Wirkungen zwischen Stromleitern.** Um die magnetischen Kräfte zwischen zwei Stromleitern zu berechnen, haben wir nach der Analogie der Kräfte zwischen einem Stromleiter und einem Magnet den magnetischen Fluß zu suchen, der von einem Leiter durch die von dem zweiten berandete Fläche gesandt wird, und diesen mit der Stromstärke des zweiten Leiters zu multiplizieren. Die Zunahme dieses Produkts bei einer gedachten Verschiebung eines der Leiter ergibt die geleistete Arbeit, und daraus findet man die mechanische Kraft zwischen den Leitern.

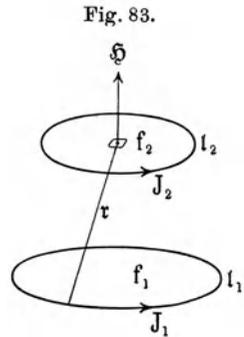


Fig. 83.

Durch den Leiter  $l_2$  (Fig. 83) legen wir eine beliebige Fläche, deren Element  $d f_2$  sei. Ist  $\mathfrak{H}$  die an der Stelle dieses Elementes von dem Strom des Leiters  $l_1$  erzeugte Feldstärke, so ist der gesamte, die Fläche des Leiters  $l_2$  durchsetzende Fluß

$$\Phi_2 = \int_{(f_2)} \mathfrak{H} d f_2,$$

und zwar ist dieser Fluß positiv im Sinne eines Rechtssystems, wenn gleiche Richtung von  $J_1$  und  $J_2$ , wie gezeichnet, angenommen wird. Nun ist, wie Gl. (107) angibt,  $\mathfrak{H} = \text{rot } \mathfrak{U}$ , wo

$$\mathfrak{U} = \int_{(v)} \frac{i_1}{|\mathfrak{r}|} d v = J_1 \int_{(l_1)} \frac{d l_1}{|\mathfrak{r}|}.$$

Nach dem Stokeschen Satze ist

$$\int_{(f_2)} \text{rot } \mathfrak{U} d f_2 = \int_{(l_2)} \mathfrak{U} d l_2,$$

wenn  $f_2$  und  $l_2$  eine Fläche und ihre Randlinie bezeichnen. Daher ist

$$\Phi_2 = J_1 \int_{(l_2)} d l_2 \int_{(l_1)} \frac{d l_1}{|\mathfrak{r}|}.$$

Hierin ist also  $|\mathfrak{r}|$  der Abstand zweier Leiterelemente  $d l_1$  und  $d l_2$  voneinander.

Sowohl begrifflich als auch formell (als inneres Produkt zweier Vektoren) ist ein Induktionsfluß durch eine Fläche ein Skalar. Wir können daher

das Resultat auch in der Form der gewöhnlichen Rechnung schreiben und erhalten

$$\Phi_2 = J_1 \int_{(l_1)} \int_{(l_2)} \frac{dl_1 dl_2 \cos(dl_1, dl_2)}{r} \dots \dots \dots (134)$$

**§ 105. Das Neumannsche Potential zweier Stromkreise.** Man versteht darunter das Produkt aus  $-\Phi_2$  und  $J_2$ :

$$\psi = -J_1 J_2 \int_{(l_1)} \int_{(l_2)} \frac{(dl_1 dl_2)}{r} \cos(dl_1 dl_2) \dots \dots \dots (135)$$

Nach Analogie des in § 102 Ausgeführten bezeichnet die negative Änderung dieser Größe bei einer Bewegung der Stromkreise gegeneinander die dem Leitersystem zugeführte Arbeit.

Für den Sinn der Bewegungen gelten die in § 102 für Bewegungen eines Stromleiters im magnetischen Felde eines Systems von Magneten angegebenen Regeln. Danach ziehen also gleichgerichtete Ströme einander an, entgegengesetzt gerichtete stoßen einander ab.

**§ 106. Energie des magnetischen Feldes einer Strömung.** Wir nehmen an, daß in einem Raume eine oder mehrere Strömungen vorhanden seien, jedoch weder magnetisierbare Körper noch Dauermagnete. Dann ist also  $\mathfrak{H} = \text{rot } \mathfrak{U}$  und die magnetische Energie ist nach Gl. (6) und (28)

$$T = \frac{1}{8\pi} \int \mathfrak{H}^2 dv = \frac{1}{8\pi} \int \mathfrak{H} \text{rot } \mathfrak{U} dv = \frac{1}{8\pi} \int \text{div} [\mathfrak{U} \mathfrak{H}] dv + \frac{1}{8\pi} \int \mathfrak{U} \text{rot } \mathfrak{H} dv.$$

Die Integration muß den Raum umfassen, in dem überhaupt eine magnetische Kraft besteht, der Raum kann aber auch beliebig erweitert werden. Nun ist

$$\int_{(v)} \text{div} [\mathfrak{U} \mathfrak{H}] dv = \int_{(f)} [\mathfrak{U} \mathfrak{H}] d\mathfrak{f},$$

wo  $f$  eine den Raum  $v$  umschließende Fläche ist. Das Vektorprodukt  $[\mathfrak{U} \mathfrak{H}]$  ist kleiner als  $|\mathfrak{U}| |\mathfrak{H}|$ . Ferner ist

$$\mathfrak{U} = \int \frac{\mathfrak{i}}{|\mathfrak{r}|} dv < \int \frac{|\mathfrak{i}|}{|\mathfrak{r}|} dv.$$

Setzt man statt aller vorkommenden  $|\mathfrak{r}|$  für den Abstand von Teilen der Strömung von der Oberfläche den kleinsten Wert  $R$ , so ist

$$\int \frac{|\mathfrak{i}|}{|\mathfrak{r}|} dv < \frac{\int |\mathfrak{i}| dv}{R}.$$

$|\mathfrak{U}|$  ist also bei sehr großem  $R$  mindestens von der ersten Ordnung unendlich klein. Wir haben weiter

$$\mathfrak{H} = \int \frac{[\mathfrak{i} \mathfrak{r}]}{|\mathfrak{r}|^3} dv < \int \frac{|\mathfrak{i}|}{|\mathfrak{r}|^2} dv,$$

daher ist nach ähnlichen Überlegungen

$$|\mathfrak{H}| < \frac{\int |\mathfrak{i}| dv}{R^2}.$$

$|\mathfrak{H}|$  ist also mindestens von der zweiten Ordnung unendlich klein. Daher ist

$$\int_{(f)} [\mathfrak{U}, \mathfrak{H}] d\mathfrak{f} < \int_{(f)} \left( \frac{(|i|dv)^2}{R^3} \right) |d\mathfrak{f}| = \frac{(\int_{(f)} |i|dv)^2}{R^3} \int_{(f)} |d\mathfrak{f}|.$$

Wählen wir als Raum eine Kugel mit dem Radius  $R$ , so ist  $\int |d\mathfrak{f}| = 4R^2\pi$ . also ist

$$\int [\mathfrak{U}, \mathfrak{H}] d\mathfrak{f} < \frac{1}{R} \left( \int |i|dv \right)^2.$$

Dies Integral ist also für die Oberfläche eines sehr großen Raumes beliebig klein. Es bleibt demnach

$$\mathbf{T} = \frac{1}{8\pi} \int_{(v)} \mathfrak{U} \operatorname{rot} \mathfrak{H} dv = \frac{1}{2} \int_{(v)} \mathfrak{U} i dv \dots \dots \dots (136)$$

**§ 107. Magnetische Energie eines Systems von Strömen und Magneten.**

Es seien wieder, wie in § 89, magnetisierbare Körper ausgeschlossen, dagegen seien von den Strömen unabhängige Dauermagnete in dem Felde vorhanden; die Dichte des positiven Magnetismus an einer beliebigen Stelle des Raumes sei  $\varrho_m$ .

Dann ist  $\mathfrak{H} = \operatorname{rot} \mathfrak{U} - \operatorname{grad} \psi'$ ; der erste Teil rührt von den Strömen, der zweite von den Magneten her. Die magnetische Energie des Systems kann geschrieben werden

$$\mathbf{T} = \frac{1}{8\pi} \int_{(v)} \mathfrak{H} (\operatorname{rot} \mathfrak{U} - \operatorname{grad} \psi') dv,$$

oder nach Gl. (136):

$$= \frac{1}{2} \int_{(v)} \mathfrak{U} i dv - \frac{1}{8\pi} \int_{(v)} \mathfrak{H} \operatorname{grad} \psi' dv.$$

Ferner ist

$$\int \mathfrak{H} \operatorname{grad} \psi' dv = \int \operatorname{rot} \mathfrak{U} \operatorname{grad} \psi' dv - \int (\operatorname{grad} \psi')^2 dv.$$

Nach Gl. (121) ist für einen beliebig großen Raum

$$\frac{1}{8\pi} \int_{(v)} (\operatorname{grad} \psi')^2 dv = \frac{1}{2} \int_{(v)} \psi' \varrho_m dv.$$

Nach der Rechnungsregel (29) ist

$$\operatorname{rot} \mathfrak{U} \operatorname{grad} \psi' = \operatorname{div} (\psi' \operatorname{rot} \mathfrak{U}),$$

also ist nach dem Gaußschen Satze:

$$\int_{(v)} \operatorname{rot} \mathfrak{U} \operatorname{grad} \psi' dv = \int_{(f)} \psi' \operatorname{rot} \mathfrak{U} d\mathfrak{f}.$$

Wird die Integration über einen beliebig großen Raum erstreckt, so verschwindet das Oberflächenintegral, weil an der Oberfläche  $\psi'$  von der ersten,  $\operatorname{rot} \mathfrak{U}$  von der zweiten Ordnung unendlich klein ist.

Es ergibt sich also

$$\mathbf{T} = \frac{1}{2} \int_{(v)} \mathfrak{U} i dv + \frac{1}{2} \int_{(v)} \psi' \varrho_m dv \dots \dots \dots (137)$$

An dieser Form ist bemerkenswert, daß  $T$  sich aus den beiden Größen zusammensetzt, die in den Gleichungen (121) und (136) einzeln für die Energie des magnetischen Feldes der Strömung und für die Energie des Feldes der magnetischen Mengen festgestellt werden. Daraus geht hervor, daß die magnetische Energie des Systems von Strömen und Magneten sich nicht ändert, wenn die Ströme als Ganzes gegen die Magnete als Ganzes bewegt werden, obwohl dabei nach § 105 den Leitern Energie zugeführt wird. Wohl aber bringt eine Bewegung der Stromleiter unter sich oder eine Bewegung der Magnete unter sich eine Änderung der Energie des Systems hervor.

Wenn einer oder mehrere der Magnete sich gegen die anderen bewegen unter der Wirkung der Feldkräfte, so wird dadurch der von den Magneten herrührende Betrag der Feldenergie vermindert; die dem bewegten Teile mitgegebene Energie wird aus der Feldenergie bestritten, die demnach kleiner wird. Anders ist es bei dem Teile der Energie des Feldes, der von den Strömen herrührt.

Um das Integral  $\frac{1}{2} \int i l d v$ , das die Energie des magnetischen Feldes der Ströme bezeichnet, zu berechnen, wollen wir die Integration über den ganzen Raum zerlegen in eine Summe von Integrationen über die Räume, in welchen die einzelnen für sich bestehenden Strömungen stattfinden. Da alle Strömungen in geschlossenen Bahnen vor sich gehen, so läßt sich diese Unterteilung des Raumes stets ausführen. Die Raumelemente, welche keine Strömung haben, dürfen nach Belieben mitgerechnet werden oder nicht, da sie keinen von Null verschiedenen Beitrag liefern.

Bezeichnet  $i_k$  die Stromdichte in dem Raume  $k$ ,  $|r_{k h}|$  den Abstand eines Raumelementes im Raume  $k$  von einem im Raume  $h$ , wobei also  $|r_{k h}| = |r_{h k}|$  ist, so ist das Vektorpotential der Strömung des Raumes  $k$  an einer Stelle des Raumes  $h$

$$u_{k h} = \int_{(v_k)} \frac{i_k d v_k}{|r_{k h}|},$$

und man erhält für das Integral folgende Summe:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int i l d v &= \frac{1}{2} \int_{(v_1)} i_1 d v_1 \left( \int_{(v_1)} \frac{i_1 d v_1}{|r_{11}|} + \int_{(v_2)} \frac{i_2 d v_2}{|r_{21}|} + \dots + \int_{(v_n)} \frac{i_n d v_n}{|r_{n1}|} \right) \\ &+ \frac{1}{2} \int_{(v_2)} i_2 d v_2 \left( \int_{(v_1)} \frac{i_1 d v_1}{|r_{12}|} + \int_{(v_2)} \frac{i_2 d v_2}{|r_{22}|} + \dots + \int_{(v_n)} \frac{i_n d v_n}{|r_{n2}|} \right) + \dots \\ &+ \frac{1}{2} \int_{(v_n)} i_n d v_n \left( \int_{(v_1)} \frac{i_1 d v_1}{|r_{1n}|} + \int_{(v_2)} \frac{i_2 d v_2}{|r_{2n}|} + \dots + \int_{(v_n)} \frac{i_n d v_n}{|r_{nn}|} \right). \end{aligned}$$

Man sieht, daß sich in dieser Summe zunächst  $n$  Posten befinden, in denen nur Strömungen desselben Raumes vorkommen, z. B.:

$$\frac{1}{2} \int_{(v_1)} i_1 d v_1 \int_{(v_1)} \frac{i_1 d v_1}{|r_{11}|},$$

in denen die Integration zweimal über denselben Raum zu erstrecken ist. Daß darin  $r$  an einzelnen Stellen Null ist, ist nach § 70 ohne Belang für die Endlichkeit des Integrals.

Ferner kommt jede Kombination von Strömungen zweier Räume zweimal vor, z. B.:

$$\frac{1}{2} \int_{(v_1)} i_1 dv_1 \int_{(v_2)} \frac{i_2 dv_2}{|r_{12}|} + \frac{1}{2} \int_{(v_2)} i_2 dv_2 \int_{(v_1)} \frac{i_1 dv_1}{r_{21}}.$$

Diese beiden Integrale sind gleich. Mann kann daher schreiben:

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{2} \int i_1 i_2 dv = & \frac{1}{2} \int_{(v_1)} i_1 dv_1 \int_{(v_1)} \frac{i_1 dv_1}{r} + \int_{(v_1)} i_1 dv_1 \int_{(v_2)} \frac{i_2 dv_2}{r} + \int_{(v_1)} i_1 dv_1 \int_{(v_3)} \frac{i_3 dv_3}{r} + \dots \\ & + \frac{1}{2} \int_{(v_2)} i_2 dv_2 \int_{(v_2)} \frac{i_2 dv_2}{r} + \int_{(v_2)} i_2 dv_2 \int_{(v_3)} \frac{i_3 dv_3}{r} + \dots \\ & + \frac{1}{2} \int_{(v_3)} i_3 dv_3 \int_{(v_3)} \frac{i_3 dv_3}{r} + \dots \end{aligned} \right\} \quad (138)$$

Bei einer Verschiebung der Stromleiter gegeneinander bleiben die Posten, die durch den Faktor  $\frac{1}{2}$  hervorgehoben sind und die eigene Energie jeder einzelnen Strömung angeben, unverändert; die Änderung der Energie bezieht sich nur auf die anderen Posten, welche die zwei bestimmten Strömungen gemeinsame Energie darstellen, und von denen wir einen herausgreifen wollen:

$$\int_{(v_1)} i_1 dv_1 \int_{(v_2)} \frac{i_2 dv_2}{|r|}.$$

Nun seien die beiden Leiter 1 und 2 linear und von solchen Abmessungen des Querschnittes, daß diese gegen die Abstände  $|r|$  unbedeutend sind. Dann geht das Integral über in

$$J_1 J_2 \int_{(l_1)} dl_1 \int_{(l_2)} \frac{dl_2}{|r|},$$

wo  $dl_1$  und  $dl_2$  Elemente des einen und des anderen Leiters sind. Man erkennt, daß diese Größe bis auf das Vorzeichen mit der Größe  $\psi$  in Gl. (135) übereinstimmt.

Gleichwohl wird nicht die an den Leitern geleistete Arbeit durch eine Verminderung der aus den Strömungen herrührenden Feldenergie bestritten, vielmehr liegt folgende Beziehung vor:

Die an zwei Leitern bei einer Verschiebung geleistete Arbeit, also die ihnen in Form lebendiger Kraft zugeführte Energie ist nach Gl. (135)

$$-d\psi = d \left( J_1 J_2 \int_{(l_1)} dl_1 \int_{(l_2)} \frac{dl_2}{|r|} \right).$$

Dabei ändert sich die magnetische Energie um

$$dT = d \left( J_1 J_2 \int_{(l_1)} dl_1 \int_{(l_2)} \frac{dl_2}{|r|} \right).$$

Wird also den Leitern eine gewisse Energie zugeführt, so wächst die Energie des elektrischen Feldes um denselben Betrag. Dieser Energieaufwand muß irgendwoher bestritten werden, und zwar, da keine andere Quelle vor-

handen ist, so kann sie nur aus den Stromquellen genommen werden, die die eingepprägten EMK liefern.

Diese hier allgemein gezeigte Beziehung ist auch durchaus anschaulich. Die gemeinsame Energie des magnetischen Feldes zweier Leiter ist ersichtlich um so größer, je näher sie beieinander liegen, da sie sicher verschwindet, wenn die Leiter weit auseinander liegen. Wenn man in zwei Spulen Ströme kreisen läßt und dann die Spulen frei gibt, so ziehen sie sich an; sie können dabei Arbeit leisten zur Hebung von Gewichten, außerdem tritt ein vermehrter Energiebetrag in das magnetische Feld.

Fünfter Abschnitt.

**Induktivität von Stromkreisen.**

**§ 108. Magnetische Energie von linearen Strömen in eisenfreiem Felde.**

Die Feststellung dieser Größe ist besonders wichtig für die Theorie der elektrischen Leitungen. Wir wollen aber unter linearen Leitern nicht solche von verschwindenden Querschnittsabmessungen verstehen, sondern diese Abmessungen zwar gegen die Länge der Stromwege als klein, aber nicht als unbedeutend gegen die Entfernungen der Stromwege voneinander ansehen.

Der bequemen Rechnung halber gehen wir aus von dem Integral

$$\int_{(v_1)} i_1 dv_1 \int_{(v_2)} i_2 dv_2 \frac{1}{r},$$

welches die den Leitern 1 und 2 gemeinsame Energie darstellt. Zunächst greifen wir aus der Strömung zwei Stromfäden heraus, deren Querschnitte also gegen jedes  $r$  verschwindende Abmessungen haben und die Stromstärken  $dJ_1$  und  $dJ_2$  führen. Dann geht das Integral über in

$$dJ_1 dJ_2 \int_{(l_1)} dl_1 \int_{(l_2)} dl_2 \frac{1}{r}.$$

Wir nennen

$$M_{12} = \int_{(l_1)} dl_1 \int_{(l_2)} dl_2 \frac{1}{r} \dots \dots \dots (139)$$

die Gegeninduktivität der beiden betrachteten Stromfäden. Man kann, statt die Integration zuerst über  $l_2$  und dann über  $l_1$  auszuführen, auch mit  $l_1$  anfangen, da  $r$  der Abstand der beiden Elemente voneinander ist, ohne eine Bevorzugung eines davon. Für jedes Paar Stromfäden können wir das zugehörige  $M_{12}$  berechnen. Wir bilden dann weiter

$$T_{12} = \int_{(J_1)} \int_{(J_2)} dJ_1 dJ_2 M_{12} \dots \dots \dots (140)$$

Da wir bei diesem Integral alle Stromfäden der Leiter, die wir vorher geteilt hatten, wieder zusammenfassen, so ist  $T_{12}$  identisch mit dem den beiden Leitern gemeinsamen Teile der Feldenergie, der bisher durch das Integral

$$T_{12} = \int_{(v_1)} i_1 dv_1 \int_{(v_2)} i_2 dv_2 \frac{1}{r}$$

dargestellt wurde. Wir definieren dann eine Größe

$$M_{12} = \frac{T_{12}}{J_1 J_2} = \frac{1}{J_1 J_2} \int_{(J_1)} \int_{(J_2)} dJ_1 dJ_2 M'_{12} \dots \dots \dots (140 a)$$

und nennen  $M_{12}$  die Gegeninduktivität der beiden Stromleiter.

Die beiden Stromfäden können auch aus demselben Leiter gewählt werden. Wir haben dann, um die dem Leiter eigne magnetische Energie zu berechnen, die Integration zweimal über den Strom des Leiters auszuführen, und nach Gl. (138) den Faktor  $\frac{1}{2}$  beizufügen. Dann ist also

$$T = \frac{1}{2} \int_{(J)} dJ \int_{(J)} dJ M'_{12} \dots \dots \dots (141)$$

und man definiert eine andere Größe durch die Gleichung

$$L = \frac{2T}{J^2} = \frac{1}{J^2} \int_{(J)} dJ \int_{(J)} dJ M'_{12} \dots \dots \dots (141 a)$$

$L$  heißt die Selbstinduktivität des Leiters. Wenn keine Verwechslung mit anderen Induktivitäten zu fürchten ist, nennt man  $L_1$  auch schlechthin die Induktivität des Leiters.

Wir führen hier einige Berechnungen für die praktisch wichtigsten Fälle aus.

**§ 109. Induktivitäten von Systemen gerader paralleler Leiter.** Die Grundlage der Berechnung ist nach obigem die Berechnung der Gegeninduktivität zweier Stromfäden.

Ihre Bezeichnungen und ihre Abstände folgen aus Fig. 84 und 85.

Fig. 84.

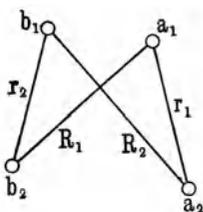
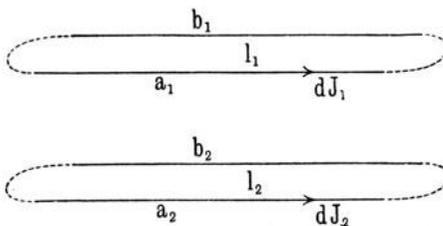


Fig. 85.



Das Integral für die den beiden Schleifen gemeinsame magnetische Energi

$$dT_{12} = dJ_1 dJ_2 \int_{(l_1)} \int_{(l_2)} \frac{1}{r} dl_1 dl_2$$

kann in eine Summe von Integralen über die einzelnen Teile der Schleifen zerlegt werden; so setzt sich die Integration über den Leiter  $l_1$  (Fig. 85) zusammen aus der Integration über  $a_1$ , das Verbindungsstück rechts, über  $b_1$  und das

Verbindungsstück links. Wenn die Länge  $l$  der geradlinigen Teile sehr groß ist gegen die der Verbindungsstücke, und in der Tat ist ein Verhältnis von  $10^5$  oder mehr zu 1 die Regel, so liefern die Verbindungsstücke keinen merklichen Beitrag zu dem Integral. Man kann daher setzen:

$$d\mathbf{T}_{12} = dJ_1 dJ_2 \int_{a_1 = -l/2}^{a_1 = +l/2} \int_{a_2 = -l/2}^{a_2 = +l/2} \frac{da_2}{r} + dJ_1 dJ_2 \int_{b_1 = +l/2}^{b_1 = -l/2} \int_{a_2 = -l/2}^{a_2 = +l/2} \frac{da_2}{r} \\ + dJ_1 dJ_2 \int_{a_1 = -l/2}^{a_1 = +l/2} \int_{b_2 = +l/2}^{b_2 = -l/2} \frac{db_2}{r} + dJ_1 dJ_2 \int_{b_1 = +l/2}^{b_1 = -l/2} \int_{b_2 = +l/2}^{b_2 = -l/2} \frac{db_2}{r}.$$

Die Winkelfunktion fällt fort, weil alle Elemente untereinander parallel sind.

Die Integrationsgrenzen sind hier so angegeben, wie sie sich bei einem geschlossenen Umlauf ergeben und  $d\mathbf{T}_{12}$  ist daher in der Tat durch ein Linienintegral um einen geschlossenen Weg dargestellt. Man kann dafür schreiben:

$$d\mathbf{T}_{12} = dJ_1 dJ_2 \left. \begin{aligned} & \int_{-l/2}^{+l/2} da_1 \int_{-l/2}^{+l/2} \frac{da_2}{r} - dJ_1 dJ_2 \int_{-l/2}^{+l/2} db_1 \int_{-l/2}^{+l/2} \frac{da_2}{r} \\ & - dJ_1 dJ_2 \int_{-l/2}^{+l/2} da_1 \int_{-l/2}^{+l/2} \frac{db_2}{r} + dJ_1 dJ_2 \int_{-l/2}^{+l/2} db_1 \int_{-l/2}^{+l/2} \frac{db_2}{r} \end{aligned} \right\} \dots \quad (142)$$

Danach stellt sich  $d\mathbf{T}_{12}$  als eine Summe von vier gleichartigen Integralen dar, zu welcher Leiterteile mit gleichgerichteten Strömen positive, solche mit entgegengesetzten Strömen negative

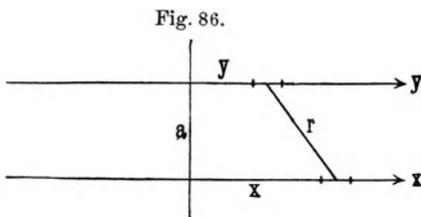


Fig. 86.

Teile liefern. Jedes Integral hat die Form von  $d\mathbf{T}_{12}$ , und man könnte die Lage so auffassen, als wenn auch die Energie sich aus den vier Einzelbeiträgen zusammensetzte. Das dies falsch ist, erkennt man schon daraus, daß eine Energie wesentlich positiv

ist. Daher stellt nur die Summe, nicht der einzelne Posten eine Energie dar; man kann die Energie nicht an den einzelnen Leitern lokalisieren.

Dagegen kann man sich der einfachen Rechnung halber der Zusammensetzung des Integrals für  $d\mathbf{T}_{12}$  aus vier Posten bedienen. Mißt man (Fig. 86) die Lage von zwei Elementen zweier Leiter durch die Abstände  $x$  und  $y$  von der Mitte, so ist das Integral

$$\int_{-l/2}^{+l/2} dy \int_{-l/2}^{+l/2} \frac{dx}{\sqrt{a^2 + (x-y)^2}}$$

zu berechnen, wo  $a$  den senkrechten Abstand der Leiter bezeichnet. Bei der Ausführung der Integration nach  $x$  gilt  $y$  als unveränderlich, daher ist zunächst

$$\begin{aligned} \int_{-l/2}^{+l/2} \frac{dx}{\sqrt{a^2 + (x-y)^2}} &= \log [\sqrt{a^2 + (x-y)^2} + (x-y)]_{-l/2}^{+l/2} \\ &= \log [\sqrt{a^2 + (y-l/2)^2} - (y-l/2)] \\ &\quad - \log [\sqrt{a^2 + (y+l/2)^2} - (y+l/2)]. \end{aligned}$$

Beide Ausdrücke sind noch nach  $y$  von  $-l/2$  bis  $+l/2$  zu integrieren. Die Integrale haben die gemeinsame Form

$$\int \log (\sqrt{a^2 + v^2} - v) dv.$$

Für das Integral über den ersten Posten ergeben sich die Grenzen für  $v$  zwischen  $-l$  und  $0$ ; für den zweiten Posten liegen sie zwischen  $0$  und  $+l$ . Das gesuchte Integral ist also

$$\int_{-l/2}^{+l/2} dy \int_{-l/2}^{+l/2} \frac{dx}{\sqrt{a^2 + (x-y)^2}} = \int_{-l}^0 \log (\sqrt{a^2 + v^2} - v) dv - \int_0^{+l} \log (\sqrt{a^2 + v^2} - v) dv.$$

$$\begin{aligned} \text{Nun ist } \int \log (\sqrt{a^2 + v^2} - v) dv \\ &= v \log (\sqrt{a^2 + v^2}) + \int \frac{v dv}{\sqrt{a^2 + v^2}} \\ &= v \log (\sqrt{a^2 + v^2} - v) + \sqrt{a^2 + v^2}. \end{aligned}$$

Daher ergibt sich für die Summe der beiden Integrale der Wert

$$l \log \frac{\sqrt{a^2 + l^2} + l}{\sqrt{a^2 + l^2} - l} - 2(\sqrt{a^2 + l^2} - a).$$

Da  $l$  in jedem praktischen Falle außerordentlich groß gegen  $a$  ist, so erhält man schließlich für das gesuchte Integral

$$\int_{-l/2}^{+l/2} dy \int_{-l/2}^{+l/2} \frac{dx}{\sqrt{a^2 + (x-y)^2}} = 2l \left( \log \frac{2l}{a} - 1 \right) \cdot \dots \cdot \quad (143)$$

Es sei erwähnt, daß man dieses Integral wohl als den Koeffizienten der gegenseitigen Induktion zweier gerader Leiter aufeinander bezeichnet hat; wie oben festgestellt, ist die Beziehung dieses Integrals auf die Energie oder die Gegeninduktivität der Schleifen, deren Teile die Leiter sind, willkürlich.

Nach Gl. (142) ist nunmehr, unter Berücksichtigung der durch Fig. 84 dargestellten Abstände der Schleifenzweige voneinander

$$\begin{aligned} dT_{12} &= dJ_1 dJ_2 \cdot 2l \left\{ \log \frac{2l}{r_1} - \log \frac{2l}{R_2} - \log \frac{2l}{R_1} + \log \frac{2l}{r_2} \right\} \\ &= dJ_1 dJ_2 \cdot 2l \log \frac{R_1 R_2}{r_1 r_2}. \end{aligned}$$

Dieser Ausdruck ist die gemeinsame magnetische Energie der beiden geschlossenen Schleifen mit den Strömen  $dJ_1$  und  $dJ_2$  und die Größe

$$M = 2 \log \frac{R_1 R_2}{r_1 r_2} \dots \dots \dots (144)$$

heißt die Gegeninduktivität der beiden Schleifen.

**§ 110. Theorie störungsfreier Schleifen.** Wir knüpfen an die Formel des letzten Paragraphen an

$$M = 2 \log \frac{R_1 R_2}{r_1 r_2}$$

für die Gegeninduktivität zweier Schleifen. Wenn dieser Ausdruck gleich Null gemacht werden kann, so besitzen die Schleifen kein gemeinsames magnetisches Feld, so daß Änderungen in der einen nicht in die andere übertreten.

Diese Feststellung rührt von Christiani her<sup>11)</sup>.

Um geeignete Lagen der Schleifen festzustellen, wollen wir zunächst die Abstände anders benennen. Wenn die Leiter  $a_1, b_1, a_2, b_2$  der Reihe nach beziffert werden, so ist z. B.  $r_{13} = r_{13}$  usw. und für  $M = 0$  gilt die Bedingung

$$\frac{r_{13}}{r_{23}} = \frac{r_{14}}{r_{24}}$$

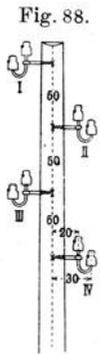
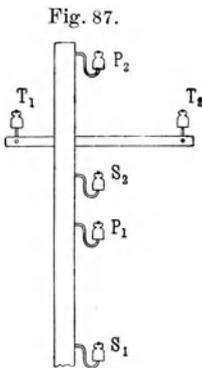
Halten wir die beiden Leiter 1 und 2 fest, so müssen also die anderen so gelegt werden, daß die Abstände jedes Leiters von 1 und 2 in konstantem Verhältnis stehen.

Nach § 47 liegen die Punkte, deren Abstände von zwei festen Punkten ein konstantes Verhältnis haben, auf Kreisen, deren Lage durch die Gl. (70) und (71) gegeben ist. Es gibt also zahlreiche Lagen für zwei gegeneinander, mit Bezug auf magnetische Induktion störungsfreie Schleifen.

Der hier auftretende Zusammenhang mit der elektrostatischen Aufgabe führte Grawinkel<sup>12)</sup> dazu, die Frage zu stellen, ob zwei Schleifen, die kein gemeinsames magnetisches Feld haben, auch keine elektrostatische Wirkung aufeinander ausüben. Dazu ist erforderlich, daß beide Leiter auf derselben Niveaufläche des elektrischen Feldes liegen. Dies ist in der Tat der Fall, wenn ihre Spuren in der vorbezeichneten Weise auf Kreisen liegen.

Wählt man z. B. zu den beiden Leitern  $a_1$  und  $b_1$  die Leiter  $a_2$  und  $b_2$  wie angegeben, so sind die beiden Schleifen störungsfrei gegeneinander. Zu diesen beiden Schleifen läßt sich noch eine dritte  $a_3 b_3$  legen, die nämlich sowohl auf einem der Kreise liegt, die durch  $a_2$  und  $b_2$  bestimmt sind als auch auf dem Kreise, dem  $a_2$  und  $b_2$  selbst angehören. In dieser Lage zueinander sind nach Grawinkel die drei Schleifen  $S_1 S_2, P_1 P_2, T_1 T_2$  der Fig. 87.

Mehr als drei solche Schleifen lassen sich nicht angeben. Andere Anordnungen sind nicht vollkommen störungsfrei. Es ist aber zu beachten, daß



auch die nach der Theorie vollkommen störungsfreien Leitungen praktisch nicht genau gebaut werden können, so daß man selbst bei Befolgung einer für die Bautechnik kaum brauchbaren Anordnung, wie nach Fig. 87, dennoch nur eine Annäherung an die vollständige Unabhängigkeit der Leitungen voneinander, nicht aber diese selbst erhält.

Man wird daher für die Praxis, wie Christiani näher ausführt, solche Anordnungen wählen, die die Gegeninduktivität sehr gering machen, wenn sie sie auch nicht vollständig aufheben.

Eine Anordnung, die eine hohe Annäherung an die Störungsfreiheit bietet und doch auch den Anforderungen des Baues genügt, ist die von Christiani angegebene Konstruktion mit wechselständigen J-Stützen, Fig. 88. Die Ebene jeder einzelnen Leitung wird unter  $45^\circ$  gegen die Vertikale geneigt, und zwei wechselständige Leitungen werden in einen solchen Höhenunterschied gebracht, daß die Ebene der zweiten zur senkrechten Mittelebene der ersten wird. Setzt man dies bei den ferneren Leitungen fort, so ergibt sich, daß bei Erhaltung gleicher Horizontalabstände von der Achse des Mastes die dritte Schleife gegen die erste nicht mehr genau induktionsfrei ist, außer wenn der Abstand zweier Drähte derselben Schleife verschwindend klein wäre. Dagegen läßt sich die dritte Leitung im Prinzip durch eine geringfügige Senkung unter gleichzeitiger Verschiebung nach außen gegen die beiden anderen induktionsfrei machen; die natürliche Verstärkung der Stange kommt dieser Korrektur auf halbem Wege entgegen.

Diese Konstruktion läßt nur eine geringe Ausnutzung der Stangen zu, und die fortschreitende Vermehrung der Fernleitungen führte dazu, daß das Prinzip der störungsfreien Anordnung der Leitungen zugunsten einer geschlossenen Bauweise fallen mußte.

Bei dem nunmehr gebräuchlichen Bau auf Querträgern liegen die verschiedenen Schleifen des Linienzuges in parallelen wagerechten Ebenen. Indem man den Drähten einer Schleife einen Abstand von 20 cm gibt, aber den Mindestabstand von senkrecht übereinander liegenden Schleifen auf 50 cm bemißt, erreicht man bei mäßig langen Leitungen genügende Störungsfreiheit. Bei langen Leitungen setzt man die Gegeninduktivität herab, indem man die Zweige der Schleifen kreuzt. Dadurch wird erreicht, daß der von einer Schleife ausgehende magnetische Fluß eine andere Schleife auf einer Strecke in positiver, auf einer anderen in negativer Richtung durchsetzt, so daß nur die Differenz zur Wirkung kommt. Es liegt außerhalb des Zweckes dieses Werkes, auf diese Fragen näher einzugehen <sup>13)</sup>.

### § 111. Selbstinduktivität und Gegeninduktivität bei körperlichen Leitern. Die Formel

$$d\mathbf{T}_{12} = dJ_1 dJ_2 2l \log \frac{R_1 R_2}{r_1 r_2}$$

ist nur für Leiter abgeleitet worden, deren Durchmesser sehr gering ist. Wenn auch die Bedingung, daß  $l$  groß gegen den Durchmesser oder den Abstand der Leiter ist, bestehen bleibt, so soll doch jetzt der Betrag der Energie für Schleifen aus Drähten abgeleitet werden, deren Dicke gegen ihren Abstand nicht verschwindend klein ist.

Wenn wir neben der Schleife  $a_1 b_1$  mit dem Strome  $dJ_1$  uns noch eine zweite  $a'_1 b'_1$  mit dem Strome  $dJ'_1$  gelagert denken (Fig. 89), so sendet diese durch die Schleife  $a_2 b_2$  mit dem Strome  $dJ_2$  einen magnetischen Fluß mit der Energie

$$d\mathbf{T}'_{12} = 2l dJ_1 dJ_2 \cdot \log \frac{R'_1 R_2}{r'_1 r_2}.$$

Die Schleife  $a_2 b_2$  enthält nunmehr mit dem System der Schleifen  $a_1 b_1$  und  $a'_1 b'_1$  gemeinsam die Energie:

$$2l dJ_2 \left( dJ_1 \cdot \log \frac{R_1 R_2}{r_1 r_2} + dJ'_1 \log \frac{R'_1 R_2}{r'_1 r_2} \right).$$

Ähnliches gilt, wenn eine dritte oder noch mehr Schleifen zu dem System der beiden hinzukommen. Ein körperlicher Doppelleiter  $a_1, b_1$  (Fig. 90), der den

Fig. 89.

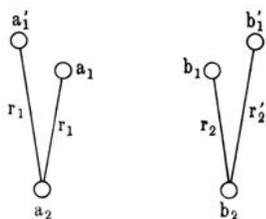
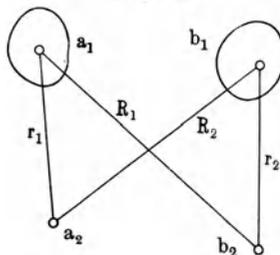


Fig. 90.



Gesamtstrom  $J_1$  führt, kann in ein Bündel von unendlich dünnen Stromleitern zerlegt werden. Sind die Querschnitte der beiden Leiter  $f_1$  und  $f'_1$ , so ist der ein Flächenelement durchfließende Strom  $\frac{J_1}{f_1} df_1$  oder  $\frac{J_1}{f'_1} df'_1$ . Wir wollen uns die Zerlegung in  $df_1$  und  $df'_1$  so ausgeführt denken, daß die Zahl der Stromfäden beiderseits dieselbe ist, so daß je zwei einen geschlossenen Leiter bilden; dann ist

$$J_1 df_1 / f_1 = J_1 df'_1 / f'_1 \dots \dots \dots (145)$$

Die von dem gesamten Leiter durch die Schleife  $a_2 b_2$  mit dem Strome  $dJ_2$  gesandte Energie ist

$$d\mathbf{T} = 2l dJ_2 \int_{(f_1)} df_1 \cdot \frac{J_1}{f_1} \log \frac{R_1 R_2}{r_1 r_2}.$$

Indessen kann man dies Integral auch ganz oder zum Teil über  $f'_1$  bilden, unter Berücksichtigung von Gl. (145). Wir zerlegen es in

$$d\mathbf{T} = 2l dJ_2 \left\{ \int_{(f_1)} df_1 \frac{J_1}{f_1} \log R_1 + \int_{(f'_1)} df'_1 \frac{J_1}{f'_1} \log R_2 - \int_{(f_1)} df_1 \frac{J_1}{f_1} \log r_1 - \int_{(f'_1)} df'_1 \frac{J_1}{f'_1} \log r_2 \right\}.$$

Zu der Schleife  $a_2 b_2$  können nun noch andere treten, welche zusammen einen zweiten Leiter bilden. Man erhält die Gesamtenergie des Schleifenpaares als das Integral

$$T_{12} = \int_{(f_2)} \frac{J_2}{f_2} df_2 \cdot dT.$$

Richtet man wieder die Teilung der beiden Zweige des zweiten Leiters so ein, daß sie gleich viel Stromfäden enthalten, von denen je zwei ein Paar bilden, so kann man wieder setzen

$$\frac{J_2}{f_2} df_2 = \frac{J_2'}{f_2'} df_2'$$

und die Integration nach Wahl über  $f_2$  oder  $f_2'$  ausdehnen. Man erhält so Doppelintegrale, deren Flächenelemente so gewählt sind, daß je eines an jedem der beiden Enden des Abstandes liegt, dessen  $\log$  unter dem Integralzeichen vorkommt. Es ist

$$T_{12} = 2l \frac{J_1 J_2}{f_1 f_2} \left\{ \int_{(f_1')} df_1' \int_{(f_2')} df_2' \log R_1 + \int_{(f_1')} df_1' \int_{(f_2)} df_2 \log R_2 \right. \\ \left. - \int_{(f_1)} df_1 \int_{(f_2)} df_2 \log r_1 - \int_{(f_1')} df_1' \int_{(f_2')} df_2' \log r_2 \right\} \quad (146)$$

§ 112. Der mittlere geometrische Abstand. Die Aufgabe, für zwei Flächen  $f_1$  und  $f_2$  das

$$\int df_1 \int df_2 \log z$$

zu berechnen, kann für verschiedene Formen von Flächen unabhängig von der vorliegenden Aufgabe gelöst werden.

Sehr dienlich ist dafür die von Maxwell<sup>14)</sup> eingeführte Definition des mittleren geometrischen Abstandes. Ein Punkt  $p$  (Fig. 91) hat von den ver-

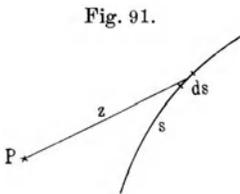


Fig. 91.

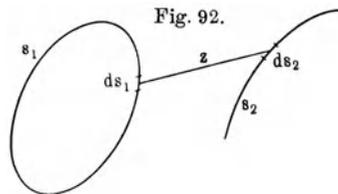


Fig. 92.

schiedenen Punkten einer Linie  $s$  den veränderlichen Abstand  $z$ . Man bilde  $\int_{(s)} \log z ds$  und definiere eine Größe  $d$  durch die Gleichung

$$s \cdot \log d = \int_{(s)} \log z ds.$$

Darin ist  $s$  die Länge der Linie und die Integration ist über die ganze Linie auszudehnen. Die Größe  $d$  kann nach der Form der Gleichung als

eine Länge angesehen werden und heißt der mittlere geometrische Abstand des Punktes  $P$  von der Linie  $s$ .

Hat man zwei Linien  $s_1$  und  $s_2$  (Fig. 92), so setzt man

$$s_1 s_2 \log d = \int_{(s_1)} d s_1 \int_{(s_2)} d s_2 \log z;$$

bei zwei Flächen (Fig. 93) endlich wird

$$f_1 f_2 \log d = \int_{(f_1)} d f_1 \int_{(f_2)} d f_2 \log z$$

gesetzt. In allen diesen Fällen heißt  $d$  der mittlere geometrische Abstand der Gebilde voneinander.

Fig. 93.

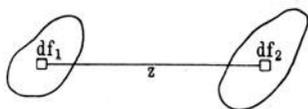
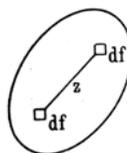


Fig. 94.



Ferner kann  $z$  den Abstand zweier Punkte derselben Linie bedeuten, und man kann das Doppelintegral bilden

$$\int_{(s)} d s \int_{(s)} d s \log z = s^2 \log d,$$

wobei  $d$  sinngemäß der mittlere geometrische Abstand aller Punkte der Linie voneinander oder der Linie von sich selbst genannt wird. Auf ähnliche Weise ist (Fig. 94) der mittlere geometrische Abstand  $d$  einer Fläche von sich selbst definiert durch

$$f^2 \log d = \int_{(f)} d f \int_{(f)} d f \log z.$$

Wir beschränken uns hier auf die Berechnung der mittleren geometrischen Abstände bei Kreislinien und Kreisflächen.

Zunächst berechnen wir den mittleren geometrischen Abstand  $d$  einer Kreislinie von einem Punkte. Es ist nach Fig. 95

$$2 \pi R \log d = \int_0^{2\pi} R d \varphi \log \varrho = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} R d \varphi \log (R^2 + a^2 - 2 a R \cos \varphi).$$

Daraus erhält man

$$\begin{aligned} 2 \pi R \frac{\partial \log d}{\partial a} &= \frac{R}{2 a} \int_0^{2\pi} \frac{2 a^2 - 2 a R \cos \varphi}{R^2 + a^2 - 2 a R \cos \varphi} d \varphi \\ &= \frac{R}{2 a} \int_0^{2\pi} \frac{R^2 + a^2 - 2 a R \cos \varphi + a^2 - R^2}{R^2 + a^2 - 2 a R \cos \varphi} d \varphi \\ &= \frac{R \pi}{a} + \frac{R}{2 a} (a^2 - R^2) \int_0^{2\pi} \frac{d \varphi}{R^2 + a^2 - 2 a R \cos \varphi} \end{aligned}$$

Zunächst kann das von 0 bis  $2\pi$  erstreckte bestimmte Integral durch das doppelte des von 0 bis  $\pi$  erstreckten ersetzt werden. Führen wir dann ein

$$\operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} = u, \text{ so daß also } 0 \leq u \leq \infty,$$

so erhält man:

$$2\pi R \frac{\partial \log d}{\partial a} = \frac{R\pi}{a} + \frac{R}{a} (a^2 - R^2) \int_0^{\infty} \frac{2 du}{(R+a)^2 + (R-a)^2 u^2}.$$

Offenkundig sind die Elemente dieses Integrals stets positiv. Wir haben darauf bei Umformungen zu achten und danach die Fälle  $a > R$  und  $a < R$  zu trennen.

Für den Fall  $a > R$  wird

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} \frac{2 du}{(R+a)^2 + (R-a)^2 u^2} &= \frac{2}{a^2 - R^2} \int_0^{\infty} \frac{d \frac{a-R}{a+R}}{1 + \left(\frac{a-R}{a+R}\right)^2 u^2} \\ &= \frac{2}{a^2 - R^2} \left[ \operatorname{arctg} \frac{a-R}{a+R} u \right]_{u=0}^{u=\infty} = \frac{\pi}{a^2 - R^2}. \end{aligned}$$

Dagegen erhält man für  $a < R$

$$\int_0^{\infty} \frac{2 du}{(R+a)^2 + (R-a)^2 u^2} = \frac{2}{R^2 - a^2} \int_0^{\infty} \frac{d \frac{R-a}{R+a}}{1 + \left(\frac{R-a}{R+a}\right)^2 u^2} = \frac{\pi}{R^2 - a^2}.$$

Daher wird

1. für  $a > R$ , wo  $d = d_a$  sei,

$$\frac{\partial \log d_a}{\partial a} = \frac{1}{a}, \quad \log d_a = \log a + \text{const.}$$

Da für beliebig große Abstände  $a$  der mittlere geometrische Abstand gleich  $a$  wird, so folgt, daß im Falle  $a > R$  allgemein

$$d_a = a.$$

2. für  $a < R$ , wo  $d = d_i$  sei, ist

$$\frac{\partial \log d_i}{\partial a} = 0, \quad \text{also} \quad d_i = \text{const.}$$

Punkte innerhalb der Kreislinie haben also einen von ihrer Lage unabhängigen mittleren geometrischen Abstand von der Kreislinie. Da derjenige des Mittelpunkts  $R$  ist, so gilt allgemein

$$d_i = R.$$

Die Werte der mittleren geometrischen Abstände von Kreisflächen ergeben sich, indem man sich die Kreisfläche in sehr dünne konzentrische Ringe unterteilt denkt, deren jeder mit einer Kreislinie verglichen werden kann.

3. Ein Punkt außerhalb einer Kreisfläche liegt außerhalb jeder Kreislinie. Der mittlere geometrische Abstand jedes Punktes außerhalb einer Kreisfläche von dieser ist daher gleich seinem Abstand vom Mittelpunkt des Kreises.

4. Liegt eine andere Fläche außerhalb der Kreisfläche, so ist der mittlere geometrische Abstand jedes ihrer Punkte von der Kreisfläche gleich ihrem Abstand vom Mittelpunkt der Kreisfläche. Der mittlere geometrische Abstand der ganzen Fläche von der Kreisfläche ist also derselbe, wie vom Mittelpunkt des Kreises.

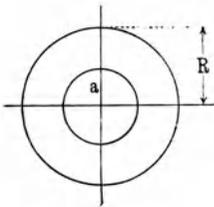
5. Daher ist der mittlere geometrische Abstand zweier auseinanderliegender Kreise gleich ihrem Mittelpunktabstand.

Dieses einfache Ergebnis ist nützlich für die Berechnung der Gegeninduktivitäten.

6. Ein Punkt innerhalb einer Kreisfläche im Abstand  $a$  vom Mittelpunkt liegt für einen Teil der Ringe innerhalb, für einen anderen außerhalb.

Gehen wir aus von der Grundformel

Fig. 96.



$$\pi R^2 \log d = \int_{(f)} d f \log \varrho,$$

so zerfällt das Integral in zwei Teile; den über den inneren Kreis bis zum Abstand  $a$  (Fig. 96), und für die Ringe dieses Kreises ist der betrachtete Punkt ein äußerer, ferner die Summierung über den äußeren Ring, und für dessen Teile ist der Aufpunkt ein innerer Punkt. Man hat daher

$$\pi R^2 \log d = \pi a^2 \log a + \int_a^R 2\pi r dr \log r = \pi a^2 \log a + \pi \left[ r^2 \log r - \frac{r^2}{2} \right]_a^R.$$

Es ergibt sich daraus

$$\log d = \log R - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \left( \frac{a}{R} \right)^2.$$

Dieser Ausdruck stellt also den mittleren geometrischen Abstand eines Punktes einer Kreisfläche von dieser Fläche dar.

7. Bildet man für die Kreisfläche

$$\int_{(f)} d f \left[ \log R - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \left( \frac{a}{R} \right)^2 \right],$$

so ist dies nach der Definition gleich dem Inhalt der Kreisfläche multipliziert mit dem  $\log$  des mittleren geometrischen Abstandes der Kreisfläche von sich selbst. Man erhält

$$\pi R^2 \log d = \int_0^R 2\pi a da \left( \log R - \frac{1}{2} \right) + \int_0^R \frac{\pi}{R^2} a^3 da = \pi R^2 \left( \log R - \frac{1}{4} \right).$$

Der mittlere geometrische Abstand einer Kreisfläche von sich selbst ergibt sich daher aus

$$\log d = \log R - \log e^{1/4}$$

zu

$$d = R e^{-1/4} = 0,779 R.$$

**§ 113. Gegeninduktivität von Schleifen mit parallelen Leitern kreisförmigen Querschnittes.** Wendet man die Formeln für den mittleren geo-

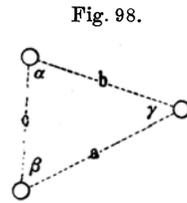
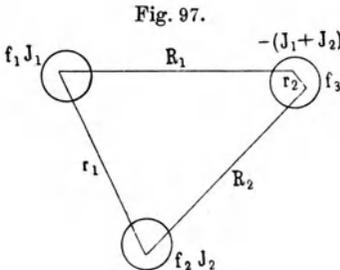
metrischen Abstand zunächst auf zwei Schleifen an, wobei also alle Kreise auseinanderliegen und ihre Mittelpunktabstände für die mittleren geometrischen Abstände zu setzen sind, so ergibt sich aus Gl. (146):

$$T_{12} = 2 l J_1 J_2 \log \frac{R_1 R_2}{r_1 r_2} \dots \dots \dots (147)$$

wo  $R_1, R_2, r_1, r_2$  der Lage nach die Bedeutung der gleichnamigen Größen in Fig. 85 haben, aber die Mittelpunktabstände der Leiter bedeuten. Daher ist

$$M = 2 l \log \frac{R_1 R_2}{r_1 r_2}$$

die Gegeninduktivität getrennter Schleifen von der Länge  $l$ .



Haben die Schleifen einen Leiter gemeinsam (Fig. 97), der die Stromstärke  $J_3 = -(J_1 + J_2)$  führt, so wird

$$T_{12} = 2 l \left[ \frac{J_1 J_2}{f_1 f_3} \int df_1 \int df_3 \log R_1 + \frac{J_1 J_2}{f_2 f_3} \int df_2 \int df_3 \log R_2 - \frac{J_1 J_2}{f_1 f_2} \int df_1 \int df_2 \log r_1 - \frac{J_1 J_2}{f_3^2} \int df_3 \int df_3 \log r_2 \right]$$

Daraus ergibt sich für die Gegeninduktivität der Schleifen  $a$  und  $b$  (Fig. 98), welche den Winkel  $\gamma$  einschließen, nach (5) und (7) in § 112

$$\left. \begin{aligned} M_\gamma &= 2 l \left( \log \frac{ab}{c Q_3} + \frac{1}{4} \right) \\ \text{ähnlich ist} \quad M_\alpha &= 2 l \left( \log \frac{bc}{a Q_1} + \frac{1}{4} \right) \\ M &= 2 l \left( \log \frac{ca}{b Q_2} + \frac{1}{4} \right) \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (148)$$

wo  $a, b, c$  die Mittelpunktabstände,  $Q_1, Q_2, Q_3$  bezüglich die Halbmesser der Drähte an den Scheiteln der Winkel  $\alpha, \beta, \gamma$  bedeuten.

**§ 114. Selbstinduktivität einer Schleife aus zwei parallelen Drähten.**

Wir führen diesen Fall zurück auf zwei Schleifen, deren Leiter aber zu je zweien in Querschnitt je eines der Leitungsdrähte liegen (Fig. 99). Nach Gl. (141) und (144) ist die magnetische Energie dieses Leitersystems, wenn  $J$  die Stromstärke,  $f_1$  und  $f_2$  die Querschnitte der Leiter sind,

$$T = l J^2 \left\{ \frac{1}{f_1 f_2} \int df_1 \int df_2 \log R_1 R_2 - \frac{1}{f_1^2} \int df_1 \int df_1 \log r_1 - \frac{1}{f_2^2} \int df_2 \int df_2 \log r_2 \right\}.$$

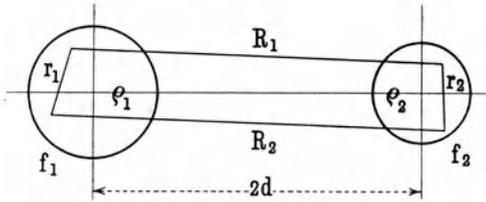
Bei kreisförmigen Querschnitten der Leiter erhält man nach (5) und (7) in § 112

$$T = 2 J^2 l \left( \log \frac{2d}{\sqrt{Q_1 Q_2}} + \frac{1}{4} \right).$$

Nach der Formel  $T = \frac{1}{2} L J^2$  ist also die Selbstinduktivität der Schleife

$$L = 4l \left( \log \frac{2d}{\sqrt{Q_1 Q_2}} + \frac{1}{4} \right) \dots \dots \dots (149)$$

Fig. 99.



Man erhält daher für die Induktivität einer Doppelleitung aus 4 mm starken Drähten, die 20 cm Abstand haben ( $d=20, Q_1=Q_2=0,2$ ), für  $l$  cm Schleifenlänge

$$L = 4l (\log 100 + \frac{1}{4}) = 19,44 l$$

in elektromagnetischen Einheiten. Man gibt meist den Wert in Henry für 1 km an, hat also noch mit  $10^4$  zu dividieren, daher

$$L = 0,00194 \text{ (Henry/km).}$$

**§ 115. Selbstinduktivität einer Schleife aus konzentrischer Hin- und Rückleitung.** Wir berechnen für diesen Fall die magnetische Energie zweckmäßig nach dem in § 6 abgeleiteten Ausdrucke

$$T = \int_{(v)} \frac{\mu}{8\pi} \mathfrak{H}^2 dv.$$

Bei einem genügend langen Leiter hängt der Wert der magnetischen Feldstärke  $\mathfrak{H}$  nur von dem Abstände  $r$  von der Achse ab und die Richtung des  $\mathfrak{H}$  ist senkrecht zum Radius. Ein geschlossener Kreisumlauf um die Achse, bei dem der Strom  $J'$  umschlungen wird, gibt das Linienintegral  $2\pi r \mathfrak{H}$ , welches gleich  $4\pi J'$  ist. Daher ist

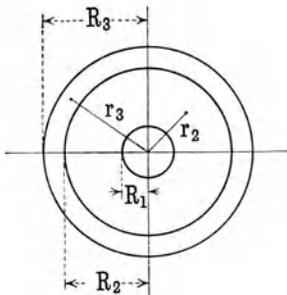
$$\mathfrak{H} = \frac{2J'}{r}.$$

Ist  $J$  der Strom jedes der beiden Leiter, so ist also in dem Raume zwischen beiden Leitern (Fig. 100), wenn  $r_2$  in diesem Raume den Abstand eines Punktes von der Achse, und  $\mathfrak{H}_2$  die Feldstärke bezeichnet,

$$\mathfrak{H}_2 = \frac{2J}{r_2}.$$

Ein geschlossener Weg, der ganz außerhalb des äußeren Leiters verläuft, umschließt insgesamt den Strom Null, da er Hin- und Rückleitung enthält. Außerhalb des äußeren Leiters ist also kein Feld vorhanden.

Fig. 100.



Wir haben noch das Feld innerhalb der Leiter darzustellen. Im Abstände  $r_1$  von der Achse innerhalb des inneren Leiters umschließt ein Kreis, der das Linienintegral  $2\pi r_1 \mathfrak{H}_1$  ergibt, den Strom  $J \frac{r_1^2}{R_1^2}$ , also ist innerhalb des Innenleiters

$$\mathfrak{H}_1 = \frac{2J}{R_1^2} r_1.$$

Ein Kreis mit dem Radius  $r_3$  innerhalb des Außenleiters umschließt den Strom

$$J - J \frac{r_3^2 - R_2^2}{R_3^2 - R_2^2},$$

also ist dort

$$\mathfrak{H}_3 = \frac{2J}{R_3^2 - R_2^2} \frac{R_3^2 - r_3^2}{r_3}.$$

In den Trennflächen gehen, wie leicht festzustellen ist, die Werte der Feldstärken für die angrenzenden Felder stetig ineinander über.

Wir berechnen die magnetische Energie der gesamten Anordnung als die Summe der in den Teilräumen vorhandenen Energien. Es ergibt sich für ein, in der Achse gemessen,  $l$  cm langes Stück des Kabels:

1. Für den Raum des Innenleiters . . . . .  $l J^2 \frac{\mu_1}{4}$ .
2. Für den Raum zwischen den Leitern . . . . .  $l J^2 \mu_2 \log \frac{R_2}{R_1}$ .
3. Für den Raum des Außenleiters . . . . .  $l J^2 \mu_3 \frac{R_3 - R_2}{3 R_2}$ .

Der letztere Ausdruck ist aber nur eine Näherungsformel für den folgenden

$$l \frac{J^2}{(R_3 - R_2)^2} \left[ R_3^4 \log \frac{R_3}{R_2} - (R_3^2 - R_2^2) \left( \frac{3}{4} R_3^2 - \frac{1}{4} R_2^2 \right) \right]$$

und gilt, solange  $R_3 < 1,25 R_2$  ist. Die Selbstinduktivität ist also

$$L = 2l \left( \frac{\mu_1}{4} + \mu_2 \log \frac{R_2}{R_1} + \mu_3 \frac{R_3 - R_2}{3 R_2} \right) \dots \dots \dots (150)$$

In § 109 ist ausgeführt worden, daß man ohne einen Fehler im Resultat, wenn allerdings auch ohne einen Beweis der tatsächlichen Richtigkeit, die magnetische Energie auf die einzelnen Teile eines geschlossenen Stromkreises sich verteilt denken und als von den darin fließenden Strömen herrührend betrachten kann. Man kann sich in gleicher Weise den Fluß (vgl. § 78) oder die Selbstinduktivität aus Teilen bestehend denken, die von den einzelnen Zweigen der Schleife herrühren. Der äußere Leiter bringt nach dieser Betrachtungsweise bei der vorliegenden Anordnung kein Feld in dem von ihm umschlossenen Raum hervor; wir würden also dem Strom im inneren Leiter innerhalb eines Zylinders mit dem Radius  $R_2$  den magnetischen Fluß

$$2lJ \left( \frac{\mu_1}{4} + \mu_2 \log \frac{R_2}{R_1} \right)$$

zuschreiben.

Wendet man dieselbe Überlegung auf eine aus Kupferdrähten bestehende Schleife im Luftraum an ( $\mu_1 = \mu_2 = 1$ ), so würde der erste Leiter in sich selbst und der von der Schleife umschlossenen Fläche einen Fluß

$$2lJ\left(\frac{1}{4} + \log \frac{2d}{\varrho_1}\right)$$

hervorbringen, während der zweite für sich einen gleich starken und gleichgerichteten Fluß erzeugte. Der gesamte, mit der Schleife verkettete Fluß wäre dann

$$4lJ\left(\frac{1}{4} + \log \frac{2d}{\sqrt{\varrho_1 \varrho_2}}\right),$$

also ergäbe sich nach dieser Betrachtungsweise derselbe Wert der Selbstinduktivität wie nach der in § 114, die aber theoretisch besser begründet ist.

Diese Art zu rechnen führt zu richtigen Ergebnissen, wenn man sie auf Leitersysteme anwendet, deren Ströme die Summe Null haben, weil dadurch, wie in § 109, im Ergebnis ein Linienintegral um einen geschlossenen Weg zustande kommt, wenn auch nicht jeder Teil der Summe für sich dieser Forderung entspricht. Wir benutzen die vorstehende Betrachtungsweise, um noch näherungsweise die Selbstinduktivität für einen technisch wichtigen Fall zu berechnen.

**§ 116. Induktivität einer Schleife aus Drähten, die Eisen in konzentrischen Schichten enthalten.** Zunächst wären hier Schleifen aus eisernen Drähten zu nennen. Wir nehmen näherungsweise an, daß die Induktion in jedem Drahte durch den Strom in dem anderen nicht merklich mitbestimmt werde, und daß man sich das gesamte Feld der Schleife durch Übereinanderlagerung der von beiden Leitern erzeugten Felder entstanden denken könne.

Jeder Leiter sendet bis zur Mitte des anderen den Fluß

$$2lJ\left(\frac{\mu}{4} + \log \frac{2d}{\varrho}\right),$$

wo für  $\varrho$  je nachdem  $\varrho_1$  oder  $\varrho_2$  zu setzen ist; der Gesamtfluß des Feldes ist daher die Summe davon, und man erhält die Induktivität

$$L = 4l\left(\log \frac{2d}{\sqrt{\varrho_1 \varrho_2}} + \frac{\mu}{4}\right) \dots \dots \dots (151)$$

Als zweites Beispiel kommt in Betracht eine Doppelleitung, deren Drähte jeder eine konzentrische Schicht aus Eisen tragen, etwa in Form einer Bewicklung mit dünnem Draht in enger Spirale.

Hat diese die Dicke  $\delta_1$ , so erzeugt der Strom  $J$  im ersten Leiter in der Schicht vom Radius  $r$  die Induktion  $\mu \frac{2J}{r}$ , und in der ganzen Eisenschicht befindet sich der Fluß

$$2l\mu J \log \frac{\varrho_1 + \delta_1}{\varrho_1}.$$

Durch das Eisen wird also der Fluß in der Schicht um

$$2l(\mu - 1)J \log \frac{\varrho_1 + \delta_1}{\varrho_1}$$

vermehrt. Ähnliches gilt für den zweiten Leiter. Die Flüsse im Innern der Leiter und im Raum außerhalb bleiben unverändert. Addiert man sämtliche Flüsse, so ergibt sich für die Induktivität

$$L = 4l \left( \log \frac{2d}{\sqrt{\varrho_1 \varrho_2}} + \frac{\mu - 1}{2} \log \frac{(\varrho_1 + \delta_1)(\varrho_2 + \delta_2)}{\varrho_1 \varrho_2} + \frac{1}{4} \right) \dots (152)$$

Wegen der meist geringen Größe von  $\delta_1$  und  $\delta_2$  gegen  $\varrho_1$  und  $\varrho_2$  kann man hierfür angenähert setzen:

$$L = 4l \left[ \log \frac{2d}{\sqrt{\varrho_1 \varrho_2}} + \frac{(\mu - 1)}{2} \left( \frac{\delta_1}{\varrho_1} + \frac{\delta_2}{\varrho_2} \right) + \frac{1}{4} \right].$$

Sechster Abschnitt.

Induktivitäten geerdeter Einzelleitungen.

§ 117. Schwierigkeit ihrer Feststellung. Für die Telegraphentechnik hat die Feststellung dieser Größen ein besonderes Interesse, weil sie mehr als die übrige Technik von Stromkreisen mit Rückleitung durch die Erde Gebrauch macht. In § 62 und 63 ist entwickelt worden, wie ungefähr die Rückleitung der Ströme in der Erde vor sich geht; danach zersplittern sich die Rückströme außerordentlich, so daß sich ein derartiger Stromkreis sehr von solchen unterscheidet, in welchen die Strömung überall in verhältnismäßig engen Bahnen vor sich geht. Auch bei Kabelleitungen innerhalb einer leitenden Hülle wird der Strom der Rückleitung nur zum kleinsten Teile durch die Hülle gehen, weil deren Widerstand gegen den des umgebenden Erdreichs oder des Seewassers sehr groß ist<sup>15)</sup>.

Um die Induktivitäten solcher Stromkreise zu berechnen, wird man nach dem Beispiel der §§ 113 bis 116 von der Gegeninduktivität zweier Stromkreise ausgehen, welche zum Teil aus parallelen, geradlinigen Leitern bestehen, wie die Teile 1 2 und 3 4 von Fig. 101, zum Teil aus Kreisbögen, die je einen der Stromfäden darstellen, in denen die Rückleitung in der Erde erfolgt. Die Gegeninduktivität dieser beiden Stromkreise ist das Integral

$$\int_{(a)} d\ell_a \int_{(b)} \frac{d\ell_b}{r},$$

welches über die ganzen Leiter auszudehnen ist.

Die Schwierigkeiten, die sich der Berechnung dieses Integrals entgegenstellen, sind nicht nur rechnerischer Art. Nach der Form der zu integrierenden Funktion hängt der Wert der Summe hauptsächlich von den Werten der Funktion an denjenigen Stellen ab, an welchen  $r$  kleine Werte hat, wo also die Schleifen einander nahe kommen. Soweit die Integration auf die Stücke 1 2 und 3 4 auszudehnen ist, steht das Resultat nach Gl. (144) bereits fest. Wo es sich aber um die Berechnung des Teilintegrals über eine gerade Strecke der einen und einen Bogen der anderen Schleife handelt, kommt in

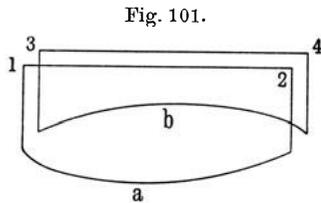
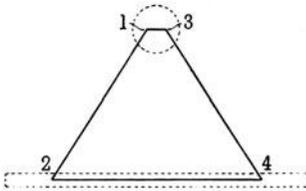


Fig. 101.

Frage, daß die Art des Verlaufs der Ströme gerade an den Erdungsstellen nicht genau bestimmt ist. Man hat deshalb den Ausdruck für  $M$  so zu vereinfachen, daß man die Rückleitung in der Erde entweder wie in einer sehr dünnen Platte oder wie in einem allseitig unbegrenzten Raum verlaufend annimmt. Der zweite Fall wird in § 120 erörtert werden; statt des ersten wählen wir einen etwas einfacheren, aus dem sich auch noch andere brauchbare Folgerungen ergeben.

**§ 118. Stromkreise mit teilweise flächenförmigen Leitern.** Eine Schleife sei aus einem zylindrischen Draht vom Radius  $\rho$  als Hinleitung und einem dem Draht parallelen Bande von der Breite  $p$  als Rückleitung zusammengesetzt.

Fig. 102.



Die Induktivität dieses Leiters für die Längeneinheit ergibt sich durch Integration des Ausdrucks

$$2 \log \frac{r_{14} r_{23}}{r_{13} r_{24}},$$

worin die  $r$  die Abstände der Leiter zweier Schleifen (Fig. 102) bezeichnen, deren jede in einem Zweige einen Stromfaden aus dem Drahte, im anderen einen Stromfaden aus dem Bande enthält. Wenn man nennt:

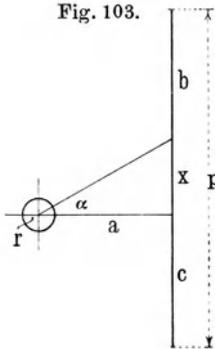
- $R_1$  den mittl. geometr. Abstand des Drahtquerschnitts von sich selbst,
- $R_2$  " " " " " Drahtes von dem Radius,
- $R_3$  " " " " " Bandes von sich selbst,

so ist die Induktivität der Schleife

$$L = 4 \log R_2 - 2 \log R_1 - 2 \log R_3.$$

Der Wert von  $R_1$  ist unter (7) in § 112 bereits bestimmt zu  $\rho e^{-1/4}$ .

Fig. 103.



Für die Berechnung von  $R_2$  nehmen wir an, daß die Dicke des Bandes gegen den Abstand des Drahtes vom Bande sehr gering sei. Der gesuchte mittlere geometrische Abstand ergibt sich (Fig. 103), da der mittlere geometrische Abstand vom Drahte nach (3) in § 112 gleich dem von seinem Mittelpunkt ist, zu

$$p \log R_2 = \int_{x=-b}^{x+c} \log \sqrt{a^2 + x^2} dx.$$

Führt man den Winkel  $\alpha$  ein, so geht das Integral über in

$$\int \log \sqrt{a^2 + x^2} dx = a \int \log \frac{a}{\cos \alpha} \frac{d\alpha}{\cos^2 \alpha} = a \operatorname{tg} \alpha \left( \log \frac{a}{\cos \alpha} - 1 \right) + a \alpha.$$

Dies ergibt z. B. an der oberen Grenze, wo  $a \operatorname{tg} \alpha = c$ ,  $\frac{a}{\cos \alpha} = \sqrt{a^2 + c^2}$  und  $\alpha = \operatorname{arctg} c/a$  ist,

$$c (\log \sqrt{a^2 + c^2} - 1) + a \operatorname{arctg} c/a.$$

Insgesamt wird

$$p \log R_2 = b \log \sqrt{a^2 + b^2} + c \log \sqrt{a^2 + c^2} - p + a (\operatorname{arctg} b/a + \operatorname{arctg} c/a).$$

Wir nehmen an, daß der Draht senkrecht über der Mitte des Bandes liege, also daß  $b = c = p/2$  sei. Dann wird

$$\log R_2 = \log \sqrt{a^2 + \frac{p^2}{4}} - 1 + \frac{2a}{p} \operatorname{arctg} \frac{p}{2a}.$$

Den Wert  $R_3$  berechnen wir aus der vorletzten Formel, indem wir  $a = 0$  setzen. Wir erhalten dann den mittleren geometrischen Abstand  $R'$  der Linie  $p$  von einem Punkt, der sie in  $b$  und  $c$  teilt, zu

$$\log R' = \frac{b}{p} \log b + \frac{c}{p} \log c - 1.$$

Setzt man  $b = x$ ,  $c = p - x$ , so wird

$$\log R' = \frac{x}{p} \log x + \frac{(p-x)}{p} \log (p-x) - 1.$$

Das Integral

$$\frac{1}{p} \int_0^p \log R' dx$$

ist der gesuchte mittlere geometrische Abstand der Linie von sich selbst. Man findet dafür

$$\frac{1}{p^2} \left[ x^2 \left( \log x - \frac{1}{2} \right) - \frac{(p-x)^2}{2} \left( \log (p-x) - \frac{1}{2} \right) - p x \right]_{x=0}^{x=p}.$$

Daher ist

$$\log R_3 = \log p - 3/2 = \log 0,222 p.$$

Man erhält also für die Induktivität des aus Draht und Band bestehenden Leiters

$$L = 2 \log \frac{a^2 + p^2/4}{\rho p} - \frac{1}{2} + \frac{8a}{p} \operatorname{arctg} \frac{p}{2a} \dots \dots \dots (153)$$

Hätte man statt des Bandes im Abstand  $a$  einen Draht von gleicher Stärke wie in der Hinleitung, so wäre die Induktivität

$$L' = 2 \left( \log \frac{a^2}{\rho^2} + \frac{1}{2} \right).$$

Wenn  $p$  noch klein gegen  $a$  ist, so unterscheiden sich  $L$  und  $L'$  nur wenig, und zwar in den Gliedern, die von den Feldern im Innern der Leiter abhängen. Wenn  $p$  größer wird, nimmt der Wert von  $L$  zunächst ab, solange nämlich  $p^2/4$  gegen  $a^2$  noch unbedeutend ist; für Werte von  $p$ , die groß gegen  $a$  sind, nimmt  $L$  wieder zu.

Man erkennt hieraus, daß die Ersetzung eines Teils eines Stromkreises durch einen bandförmigen Leiter die Induktivität vermindert, solange der Abstand der Hin- und Rückleitung groß gegen die Breite des Bandes ist.

Dieses Ergebnis spielt indessen nur eine nebensächliche Rolle; für die Frage der Induktivität geordeter Leitungen ist wichtiger die Folgerung aus

der Annahme, daß  $p$  groß gegen  $a$  ist, so daß die Rückströme über eine große Fläche verteilt sind, wie es bei den Strömen geerdeter Telegraphenleitungen der Fall ist. Die Induktivität ist alsdann größer, als wenn die Rückströme in enger geschlossener Bahn verliefen.

Bei der Herleitung der Größe  $L$  ist angenommen, daß die Rückströme über den ganzen Querschnitt des Bandes gleichmäßig verteilt seien. Der Fall der geerdeten Leitung unterscheidet sich davon dadurch, daß die Stromdichte der Rückströme nach außen stark abnimmt. Läßt man in  $L$  den Wert von  $p$  gegen  $a$  sehr groß werden, so nimmt es immer größere Werte an, die allerdings nur logarithmisch zunehmen. Bei dem Falle der geerdeten Leitung ist es dagegen wahrscheinlich, daß die weitab liegenden Ströme zum Felde nicht mehr merklich beitragen, so daß also der Wert der Induktivität sich einer Grenze nähert. Welcher Wert dies wahrscheinlich ist, wird aus dem anderen jetzt zu besprechenden Falle hervorgehen.

**§ 119. Leiter mit allseitiger Rückleitung.** Wir nehmen an, daß ein Stromfaden mit der Stromstärke  $dJ$  sich mit einem geradlinigen Teile in der  $z$ -Achse eines zylindrischen Koordinatensystems von  $-l/2$  bis  $+l/2$  erstrecke und daß die Ströme sich zwischen diesen beiden Punkten in einem unbegrenzten leitenden Mittel schließen. Bildet man dann für einen beliebigen Punkt außerhalb dieser Geraden einen Vektor  $\mathfrak{B}$ , der nur eine  $z$ -Komponente hat,

$$\mathfrak{B}_z = \int_{-l/2}^{+l/2} \frac{dJ d\xi}{\sqrt{\varrho^2 + (\xi - z)^2}} = dJ \log \frac{\sqrt{\varrho^2 + (z + l/2)^2} + (z + l/2)}{\sqrt{\varrho^2 + (z - l/2)^2} + (z - l/2)} \quad (154)$$

so ist dieser zwar dem Vektorpotential nach Gl. (110) ähnlich gebildet, aber er kann nicht als Vektorpotential bezeichnet werden, weil die Integration nicht über einen geschlossenen Weg erstreckt worden ist. Gleichwohl ergibt  $\text{rot } \mathfrak{B}$  einen Vektor  $\mathfrak{H}$ , welcher mit der magnetischen Feldstärke der Anordnung in allen zu erwartenden Eigenschaften übereinstimmt, ferner ist  $\text{rot } \mathfrak{H} = \text{rot rot } \mathfrak{B} = 4\pi i$  und  $i = -\text{grad } \varphi$ , wo  $\varphi$  das elektrische Potential und  $i$  die Stromdichte im Felde bezeichnen. Wir wollen hierfür zunächst die Belege bringen.

$\text{rot } \mathfrak{B}$  hat nur eine Komponente, die sich nach Gl. (21) als  $\mathfrak{H}_\varphi = -\frac{\partial \mathfrak{B}_z}{\partial \varrho}$  ergibt. Wendet man nach Ausführung der Differentiation die identische Gleichung an

$$(\sqrt{\varrho^2 + v^2} + v)(\sqrt{\varrho^2 + v^2} - v) = \varrho^2,$$

so erhält man

$$\mathfrak{H}_\varphi = \frac{dJ}{\varrho} \left( \frac{z + l/2}{\sqrt{\varrho^2 + (z + l/2)^2}} - \frac{z - l/2}{\sqrt{\varrho^2 + (z - l/2)^2}} \right).$$

Die Quadratwurzeln sind stets mit dem positiven Vorzeichen zu nehmen. Soll  $\mathfrak{H} = \{0, \mathfrak{H}_\varphi, 0\}$  die magnetische Feldstärke im Felde der betrachteten Strömung sein, und die geometrischen Voraussetzungen dafür sind offenbar erfüllt, so muß das Linienintegral  $2\pi \varrho \mathfrak{H}_\varphi$  für einen die  $z$ -Achse umschlingenden Kreis gleich dem  $4\pi$ fachen des umschlungenen Stromes sein.

Wählt man  $0 < z < +l/2$  und läßt  $(l/2 - z)^2$  noch groß gegen  $\varrho^2$  sein, so wird das bezeichnete Linienintegral

$$\int_0 \mathfrak{H} ds = 4\pi dJ \cdot \frac{1 + \frac{\varrho^2}{4} \left( \frac{1}{(l/2 + z)^2} + \frac{1}{(l/2 - z)^2} \right)}{\left( 1 + \frac{1}{2} \frac{\varrho^2}{(l/2 + z)^2} \right) \left( 1 + \frac{1}{2} \frac{\varrho^2}{(l/2 - z)^2} \right)}.$$

Es kommt dem Werte  $4\pi dJ$ , welcher die Verkettung des gesamten Stromes mit dem Wege des Linienintegrals bedeutet, um so näher, je kleiner  $\varrho$  ist.

Wählt man  $z > l/2$  und läßt auch weiter  $(l/2 - z)^2$  groß gegen  $\varrho^2$  sein, so ergibt sich

$$\int_0 \mathfrak{H} ds = \pi dJ \cdot \frac{\varrho^2 \left( \frac{1}{(l/2 - z)^2} \right) - \frac{1}{(l/2 + z)^2}}{\left( 1 + \frac{1}{2} \frac{\varrho^2}{(l/2 + z)^2} \right) \left( 1 + \frac{1}{2} \frac{\varrho^2}{(l/2 - z)^2} \right)}.$$

Dieser Wert verschwindet mit  $\varrho$ . Beide Ergebnisse entsprechen der Anschauung, daß eine Kreislinie, welche den von  $-l/2$  bis  $+l/2$  gehenden Stromfaden selbst umschlingt, um so mehr mit der gesamten Strömung verkettet ist, je kürzer sie ist, während eine Kreislinie, deren Fläche der von  $-l/2$  bis  $+l/2$  gehende Stromfaden nicht selbst durchsetzt, um so weniger von der Strömung umschlingt, je kleiner ihr Durchmesser ist.

Für den Vektor  $\mathbf{i} = \frac{1}{4\pi} \text{rot } \mathfrak{H}$  ergeben sich nach Gl. (26) die Komponenten

$$i_\varrho = -\frac{1}{4\pi} \frac{\partial \mathfrak{H}_\vartheta}{\partial z}, \quad i_\vartheta = 0, \quad i_z = +\frac{1}{4\pi} \frac{\partial(\varrho \mathfrak{H}_\vartheta)}{\partial \varrho}.$$

Man erhält dafür

$$i_\varrho = \frac{dJ}{4\pi} \left( \frac{\varrho}{r_1^3} - \frac{\varrho}{r_2^3} \right) = -\frac{\partial}{\partial \varrho} \left( \frac{dJ}{4\pi r_1} - \frac{dJ}{4\pi r_2} \right)$$

$$i_z = \frac{dJ}{4\pi} \left( \frac{z - l/2}{r_1^3} - \frac{z + l/2}{r_2^3} \right) = -\frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{dJ}{4\pi r_1} - \frac{dJ}{4\pi r_2} \right).$$

Hierbei ist  $r_1^2 = \varrho^2 + (z - l/2)^2$  und  $r_2^2 = \varrho^2 + (z + l/2)^2$ . Das Feld hat also in Übereinstimmung mit der in § 61 besprochenen Strömung ein Potential

$$\varphi = \frac{dJ}{4\pi\sigma} \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) \dots \dots \dots (155)$$

Der Vektor  $\mathfrak{B}$  ist daher als eine geeignete Rechnungsgröße zu betrachten, aus der man für Punkte außerhalb der Geraden von  $-l/2$  bis  $+l/2$  durch Differentiationen die magnetische und die elektrische Feldstärke ableiten kann. Von dem Vektorpotential kann er nur durch eine Funktion unterschieden sein, die als Gradient eines Skalars dargestellt werden kann,

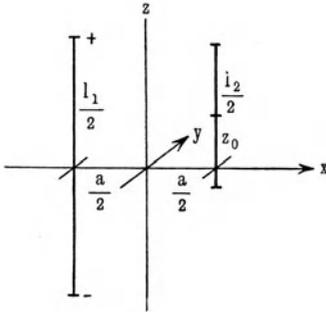
$$\mathbf{u} = \mathfrak{B} + \text{grad } \psi,$$

weil nur unter dieser Annahme  $\text{rot } \mathbf{u}$  und  $\text{rot } \mathfrak{B}$  dieselbe magnetische Feldstärke ergeben.

In dem hiernach zulässigen Maße wollen wir den Vektor  $\mathfrak{B}$  zur Berechnung der beiden Kreisen gemeinsamen magnetischen Energie des Feldes und der Gegeninduktivität verwenden.

**§ 120. Berechnung der gemeinsamen magnetischen Energie.** In einem rechtwinkligen Koordinatensystem  $x, y, z$  (Fig. 104) gehe die eine Linie,

Fig. 104.



mit dem Strome  $dJ_1$  und von der Länge  $l_1$  durch den Punkt  $\left(-\frac{a}{2}, 0, 0\right)$  und ihr Mittelpunkt falle in die  $x$ -Achse; die andere, mit dem Strome  $dJ_2$  und von der Länge  $l_2$ , gehe durch den Punkt  $\left(+\frac{a}{2}, 0, 0\right)$  und ihr Mittelpunkt liege in der Höhe  $z_0$  über der  $xy$ -Ebene. Die Ströme  $dJ_1$  und  $dJ_2$  schließen sich in dem umgebenden Mittel. Jeder für sich bringt dort magnetische und elektrische Feldstärken hervor, die einzeln für sich aus einem Hilfsvektor  $\mathfrak{B}$

wie in § 119 berechnet werden können. Die beiden Hilfsvektoren haben hier auch nur Komponenten in der  $z$ -Richtung, sie seien  $\mathfrak{B}_1$  und  $\mathfrak{B}_2$  benannt. Es gilt

$$\mathfrak{B}_1 = dJ_1 \log \frac{\sqrt{\left(x + \frac{a}{2}\right)^2 + y^2 + \left(z + \frac{l_1}{2}\right)^2} + \left(z + \frac{l_1}{2}\right)}{\sqrt{\left(x + \frac{a}{2}\right)^2 + y^2 + \left(z - \frac{l_1}{2}\right)^2} + \left(z - \frac{l_1}{2}\right)}$$

$$\mathfrak{B}_2 = dJ_2 \log \frac{\sqrt{\left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + y^2 + \left(z - z_0 + \frac{l_2}{2}\right)^2} + \left(z - z_0 + \frac{l_2}{2}\right)}{\sqrt{\left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + y^2 + \left(z - z_0 - \frac{l_2}{2}\right)^2} + \left(z - z_0 - \frac{l_2}{2}\right)}$$

Die magnetische Energie des gesamten Feldes findet man aus dem Integral

$$\mathbf{T} = \frac{1}{8\pi} \int_{(v)} (\mathfrak{H}_1 + \mathfrak{H}_2)^2 dv,$$

wo für jede Stelle  $\mathfrak{H}_1$  die durch die erste Strömung,  $\mathfrak{H}_2$  die durch die zweite Strömung erzeugte magnetische Feldstärke bedeutet. Man kann  $\mathbf{T}$  in drei Teile zerlegen, deren erster nur  $\mathfrak{H}_1^2$ , deren zweiter nur  $\mathfrak{H}_2^2$  enthalten. Diese stellen wie in § 107 die jedem System eigene Energie dar. Der Rest

$$\mathbf{T}_{12} = \frac{1}{4\pi} \int_{(v)} \mathfrak{H}_1 \mathfrak{H}_2 dv$$

ist die gemeinsame Energie und hängt mit der gesuchten Induktivität durch die Gleichung zusammen

$$\mathbf{T}_{12} = M_{1,2} dJ_1 dJ_2.$$

Umformung. Auf Grund der Rechenregel (28) könnte man aus dem Vektorpotential  $\mathfrak{U}$  jeder Strömung ähnlich der ersten Gleichung in § 106 bilden

$$\mathfrak{H}_1 \mathfrak{H}_2 = \operatorname{div} [\mathfrak{U}_1, \mathfrak{H}_2] + 4\pi \mathfrak{U}_1 i_2.$$

Mit Hilfe des Vektors  $\mathfrak{B}_1$  wird diese Gleichung

$$\mathfrak{H}_1 \mathfrak{H}_2 = \operatorname{div} [\mathfrak{B}_1 + \operatorname{grad} \psi_1, \mathfrak{H}_2] + 4\pi i_2 (\mathfrak{B}_1 + \operatorname{grad} \psi_1).$$

Die Rechenregel (28) ergibt aber, wenn man  $\mathfrak{A} = \operatorname{grad} \psi_1$ ,  $\mathfrak{B} = \mathfrak{H}_2$  setzt, mit Rücksicht auf Gl. (27)

$$\operatorname{div} [\operatorname{grad} \psi_1, \mathfrak{H}_2] = -4\pi i_2 \operatorname{grad} \psi_1.$$

Aus der Zusammenfassung dieser beiden Gleichungen folgt, daß der Vektor  $\mathfrak{B}_1$  sich gerade so, wie das Vektorpotential auch für die Energieberechnung verwenden läßt. Wir legen also dieser Berechnung die Gleichung zugrunde

$$\mathfrak{H}_1 \mathfrak{H}_2 = \operatorname{div} [\mathfrak{B}_1, \mathfrak{H}_2] + 4\pi i_2 \mathfrak{B}_1.$$

Zerlegung des Integrationsraumes. Die Integration ist auf den ganzen unendlichen Raum auszudehnen. Wir zerlegen diesen in drei Teile. Um jede der beiden einen geschlossenen Strom führenden Geraden legen wir eine beliebig eng anschließende Hülle, deren Gestalt noch näher bestimmt werden soll. Dadurch werden die Räume  $v_1$  und  $v_2$  für sich abgetrennt. In dem verbleibenden Raume  $v_3$  sind alle Größen  $\mathfrak{B}_1, \mathfrak{H}_1, i_1$  und  $\mathfrak{B}_2, \mathfrak{H}_2, i_2$  wohldefiniert und keine von ihnen wird dort unendlich oder unstetig.

Berechnung für den äußeren Raumteil. Es soll zuerst gezeigt werden, daß

$$\int_{(v_3)} i_2 \mathfrak{B}_1 dv = 0.$$

Da  $\mathfrak{B}_1$  nur eine Komponente nach  $z$  hat, lautet dieses Integral genauer

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx \int_{-\infty}^{+\infty} dy \int_{-\infty}^{+\infty} dz \mathfrak{B}_1 i_2 z.$$

Wir betrachten näher die Integration nach  $z$ . Da  $i_2 z = -\sigma \frac{\partial \varphi_2}{\partial z}$  ist, wo  $\varphi_2$  nach Gl. 155 gebildet ist, so ergibt die Integration in Teilen:

$$-\sigma \int_{-\infty}^{+\infty} \mathfrak{B}_1 \frac{\partial \varphi_2}{\partial z} dz = -\sigma \left[ \mathfrak{B}_1 \varphi_2 \right]_{z=-\infty}^{z=+\infty} + \sigma \int_{-\infty}^{+\infty} dz \varphi_2 \frac{\partial \mathfrak{B}_1}{\partial z}.$$

Der erste Posten verschwindet, weil  $\mathfrak{B}_1$  und  $\varphi_2$  für  $z = \pm \infty$  beide Null werden. Der zweite Posten lautet ausführlich, abgesehen von konstanten Faktoren,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dz \left( \frac{1}{\sqrt{Q_1^2 + \left(z - \frac{l_1}{2}\right)^2}} - \frac{1}{\sqrt{Q_1^2 + \left(z + \frac{l_1}{2}\right)^2}} \right) \left( \frac{1}{\sqrt{Q_2^2 + \left(z - z_0 - \frac{l_2}{2}\right)^2}} - \frac{1}{\sqrt{Q_2^2 + \left(z - z_0 + \frac{l_2}{2}\right)^2}} \right).$$

Die Feststellung, daß auch dieses Integral Null ist, wird erleichtert durch die Anwendung des im Anhang unter III näher erörterten Hilfssatzes aus der Theorie der Funktionen einer komplexen Variablen. Nach diesem erweitert man das vorstehende Integral, indem man  $z$  zwischen  $+\infty$  und  $-\infty$  eine geeignete, an sich beliebige Folge von komplexen Werten durchlaufen läßt. Dieses Integral über eine geschlossene Linie in der komplexen Zahlenebene ist gleich Null, wenn diese Linie keine Punkte einschließt, in denen die zu integrierende Funktion unendlich oder unstetig wird, im anderen Falle gleich der Summe der Integrale über geeignete, diese Punkte umschließende geschlossene Zahlenfolgen.

Das oben genannte Integral lassen wir über folgende Werte von  $z$  laufen. Von dem reellen Werte  $-R$  ausgehend, durch wachsende reelle Werte bis zum Werte  $+R$ , dann über alle Werte  $Re^{i\vartheta}$  bei konstantem  $R$  und für  $\vartheta$  von  $0$  bis  $\pi$ . Lassen wir  $R$  dann über jedes Maß wachsen, so haben wir das gesuchte Integral neben dem über den unendlichen Halbkreis.

Für große Werte von  $R$  hat die erste Klammer die Dimension  $l_1/R^2$ , die zweite die Dimension  $l_2/R^2$ . Da  $dz = iRe^{i\vartheta}d\vartheta$ , so ist das Integral über den Halbkreis um so näher gleich Null, je größer  $R$  gewählt wird.

Das gesuchte Integral ist also gleich der Summe der Integrale um die singulären Punkte. Als derartige kommen die folgenden in Betracht:

$$\begin{aligned} z_1 &= \pm \left( i\varrho_1 + \frac{l_1}{2} \right), & z_2 &= \pm \left( i\varrho_1 - \frac{l_1}{2} \right), \\ z_3 &= \pm \left( i\varrho_2 + z_0 + \frac{l_2}{2} \right), & z_4 &= \pm \left( i\varrho_2 + z_0 - \frac{l_2}{2} \right). \end{aligned}$$

$\varrho_1$  und  $\varrho_2$  sind die senkrechten Abstände des Aufpunktes von den beiden geraden Stromfäden. Die dem positiven Vorzeichen entsprechenden komplexen Punkte liegen in der Zahlenebene innerhalb der umschlungenen Fläche.

Fassen wir  $z_1 = i\varrho_1 + \frac{l_1}{2}$  ins Auge, so sehen wir, daß für diesen Wert nur der erste Posten des ersten Faktors unendlich wird. Ähnlich ist es für die anderen Werte. Es genügt, eines der Integrale, z. B.

$$\int \frac{dz}{\sqrt{\varrho_1^2 + \left(z - \frac{l_1}{2}\right)^2} \sqrt{\varrho_2^2 + \left(z - z_0 + \frac{l_1}{2}\right)^2}}$$

für eine derartige Stelle, z. B.  $z_1 = i\varrho_1 + \frac{l_1}{2}$  zu untersuchen.

Setzt man  $z = i\varrho_1 + \frac{l_1}{2} + re^{i\gamma}$ , wo  $r$  konstant und beliebig klein gegen  $\varrho_1$  und  $\frac{l_1}{2}$  ist, und  $\gamma$  von  $0$  bis  $2\pi$  läuft, so beschreibt dadurch  $z$  einen Kreis um den Punkt  $z_1$ . Für diesen ist das gesuchte Integral bis auf kleine Größen niederer Ordnung

$$\int_0^{2\pi} \frac{ire^{i\gamma}d\gamma}{\sqrt{2i\varrho_1re^{i\gamma}} \sqrt{\varrho_2^2 + \left(z - z_0 + \frac{l_1}{2}\right)^2}}.$$

Dieses Integral verschwindet aber mit  $r$ . Da dies für alle singulären Punkte gilt, ist demnach das Integral  $\int_{(v_3)} i_2 \mathfrak{B}_1 dv = 0$ .

Es ist ferner das Integral  $\int_{(v_3)} div [\mathfrak{B}_1, \mathfrak{H}_2] dv$  zu betrachten. Es ist nach Gl. (21) identisch mit dem Oberflächenintegral

$$\int_{(f_3)} [\mathfrak{B}_1, \mathfrak{H}_2] d\mathfrak{f},$$

wo  $f_3$  die Oberfläche des Raumes  $v_3$  bedeutet. Diese setzt sich aus drei Teilen zusammen. Als ersten nennen wir die unendlich ferne Fläche, gedacht als eine große Kugel. Der darauf entfallende Teil des Oberflächenintegrals ist aus denselben Gründen gleich Null, wie sie in § 106 für ein gleichartiges Integral angegeben worden sind.

Der zweite und dritte Teil der Oberfläche von  $v_3$  ist die Begrenzung gegen die für sich abgetrennten Räume  $v_1$  und  $v_2$ .

Wir haben diese Flächen näher zu bestimmen und wählen sie als Zylinder, welche die Linien mit gleicher Achse und gleicher Länge umschließen und an beiden Enden durch Halbkugeln gleichen Durchmessers abgedeckt sind.

Wir legen durch Zylinder und Kappen Schnitte senkrecht zur Achse. Diese sollen durch den Winkel  $\mu$  gegen die  $z$ -Achse bestimmt sein. Auf der Kappe ist  $z = l/2 = r \cos \mu$ ,  $\varrho = r \sin \mu$  und daher

$$\mathfrak{B}'_1 = dJ_1 \log \frac{\sqrt{(l_1 + r \cos \mu)^2 + r^2 \sin^2 \mu} + l_1 + r \cos \mu}{r(1 + \cos \mu)}.$$

Auf dem Zylinder ist  $l/2 - z = r \operatorname{tg} \left( \mu - \frac{\pi}{2} \right) = -\frac{r}{\operatorname{tg} \mu}$ ,  $\varrho = r$ , also

$$\mathfrak{B}''_1 = dJ_1 \log \frac{\sqrt{(l_1 \sin \mu + r \cos \mu)^2 + r^2 \sin^2 \mu} + l_1 \sin \mu + r \cos \mu}{r(1 + \cos \mu)}.$$

Für  $\mu = \pi/2$  gehen beide Größen ineinander über. Für verschwindendes  $r$  werden beide logarithmisch unendlich.

Wir haben zunächst zu bilden  $[\mathfrak{U}_1, \mathfrak{H}_2] d\mathfrak{f}_1 = [d\mathfrak{f}_1, \mathfrak{U}_1] \mathfrak{H}_2$  an der Oberfläche von  $v_1$ . Da  $\mathfrak{U}_1$  die Richtung der  $z$ -Achse,  $d\mathfrak{f}$  die des nach innen gehenden Radius der Kugel oder des Zylinders hat, so liegt  $[d\mathfrak{f}, \mathfrak{U}_1]$  an allen Stellen in den zur Achse senkrechten Schnitten und tangential und bildet mit der  $z$ -Achse ein Rechtssystem. Der Vektor  $\mathfrak{H}_2$ , der von dem im Abstände  $a$  liegenden zweiten Leiter herrührt, liegt ebenfalls in der zur  $z$ -Achse senkrechten Ebene und bildet mit der Achse dieses Leiters ein Rechtssystem. An zwei an entgegengesetzten Enden eines Durchmessers liegenden Stellen der Oberfläche von  $v_1$  bildet also  $\mathfrak{H}_2$  mit dem Vektor  $[d\mathfrak{f}_1, \mathfrak{B}_1]$  Winkel, die sich zu  $180^\circ$  ergänzen und die Produkte  $[d\mathfrak{f}_1, \mathfrak{B}_1] \mathfrak{H}_2$  gleichen sich für je zwei solche Stellen um so mehr aus, je kleiner  $r$  gewählt wird. Die nähere Untersuchung zeigt, daß der Unterschied der Werte von  $\mathfrak{H}_2$  an zwei solchen Stellen mit  $r$  von erster Ordnung unendlich klein wird. Da  $\mathfrak{B}_1$  mit  $r$  logarithmisch unendlich groß wird, aber  $\lim_{r=0} (r \log r) = 0$  ist, so ist das in Rede stehende

Integral  $\int_{(f_1)} [\mathfrak{B}_1, \mathfrak{H}_2] d\mathfrak{f}_1$  über die Oberfläche von  $v_1$  gleich Null.

Um die Leitung  $l_2$  denken wir uns eine Fläche derselben Art gelegt. Wir schreiben diesmal  $[\mathfrak{B}_1, \mathfrak{H}_2] d\mathfrak{f}_2 = \mathfrak{B}_1[\mathfrak{H}_2, d\mathfrak{f}_2]$ . Sowohl der Vektor  $\mathfrak{B}_1$  als der Vektor  $[\mathfrak{H}_2, d\mathfrak{f}_2]$  haben an allen Stellen die Richtung  $+z$  oder wenigstens eine Komponente nach dieser Richtung. Fassen wir unter den  $d\mathfrak{f}_2$  auf dem Zylinder einen Ring von der Höhe  $dz$  oder auf der Halbkugel eine Zone, deren Breite einem Zuwachs  $d\mu$  von  $\mu$  entspricht, zusammen, so ist für den Zylinder

$$[\mathfrak{H}_2, d\mathfrak{f}_2] = \frac{dJ_2}{r} \left[ \frac{\frac{l_2}{2} + z}{\sqrt{r^2 + \left(\frac{l_2}{2} + z\right)^2}} + \frac{\frac{l_2}{2} - z}{\sqrt{r^2 + \left(\frac{l_2}{2} - z\right)^2}} \right] 2\pi r dz.$$

Bei unendlich kleinem  $r$  wird dies gleich  $4\pi dJ_2 dz$ .

Bei der Halbkugel fällt in die Richtung  $+z$  nur eine Komponente von  $[\mathfrak{H}_2, d\mathfrak{f}_2]$ , welche  $\sin \mu$  proportional ist. Da der Flächeninhalt der Zone gleich  $2\pi r^2 \sin \mu d\mu$  ist, so ergibt sich für den Beitrag dieses Flächenelements zur  $z$ -Komponente

$$[\mathfrak{H}_2, d\mathfrak{f}_2]_z = \frac{dJ_2}{r} \left[ \frac{z + \frac{l_2}{2}}{\sqrt{r^2 + \left(z + \frac{l_2}{2}\right)^2}} - \frac{z - \frac{l_2}{2}}{\sqrt{r^2 + \left(z - \frac{l_2}{2}\right)^2}} \right] 2\pi r^2 \sin^2 \mu d\mu.$$

Der Faktor von  $d\mu$  verschwindet mit  $r$ . Es bleibt also von dem Integral über den Raum  $v_3$  nur das Integral über die Zylinderfläche, die  $l_2$  umgibt, übrig, es ist

$$\frac{1}{4\pi} \int_{(v_3)} \mathfrak{H}_1 \mathfrak{H}_2 dv = dJ_1 dJ_2 \int_{z=z_0 - \frac{l_2}{2}}^{z=z_0 + \frac{l_2}{2}} dz \log \frac{\sqrt{a^2 + \left(z + \frac{l_1}{2}\right)^2} + \left(z + \frac{l_1}{2}\right)}{\sqrt{a^2 + \left(z - \frac{l_1}{2}\right)^2} + \left(z - \frac{l_1}{2}\right)}.$$

Ehe wir es auswerten, wollen wir noch feststellen, daß die Integrale über die Räume  $v_1$  und  $v_2$  verschwinden. Wir bilden hierbei das Raumintegral selbst. In der Kugelkappe wählen wir auf dem unter dem Winkel  $\mu$  liegenden Radius ein Raumelement im Abstände  $\lambda$  vom Mittelpunkt. In die Gleichung

$$\mathfrak{H}_1 = \frac{dJ_1}{\varrho} \left[ \frac{z + \frac{l_1}{2}}{\sqrt{\varrho^2 + \left(z + \frac{l_1}{2}\right)^2}} - \frac{z - \frac{l_1}{2}}{\sqrt{\varrho^2 + \left(z - \frac{l_1}{2}\right)^2}} \right]$$

haben wir also einzusetzen  $\varrho = \lambda \sin \mu$ ,  $z - \frac{l_1}{2} = \lambda \cos \mu$ . Auch in diesem Falle bildet die Feldstärke  $\mathfrak{H}_1$ , da sie tangential gerichtet ist, mit der Feldstärke  $\mathfrak{H}_2$ , die für alle Punkte fast dieselbe Richtung hat, an den beiden

Enden eines Durchmessers Winkel, die sich zu  $180^\circ$  ergänzen. Davon abgesehen ergibt sich aber für das Element des Integrals, da  $\varrho$  gegen  $z + \frac{l_1}{2}$  verschwindet, der Wert

$$\mathfrak{S}_2 = \frac{dJ_1}{\lambda \sin \mu} (1 - \cos \mu) \lambda^2 \sin \mu d\lambda d\mu d\omega.$$

Das Raumintegral über die Kugelkappen ist also Null.

Für den zylindrischen Teil denken wir uns den Stromfaden vom Radius  $r$  in konzentrische Schichten zerlegt, deren eine den Radius  $\varrho$  hat. In dieser ist, wie in § 78 erörtert, auf dem größten Teil der Länge  $\mathfrak{S}_2 = \frac{2dJ_1}{r^2} \varrho$ , und nach den Enden zu geht es bis auf den halben Betrag zurück. Auch hier kommt nur die Differenzwirkung für Punkte in symmetrischer Lage zur Achse in Betracht, aber wir brauchen dies gar nicht in Rechnung zu setzen. Schon das Integral

$$\int_{z=-\frac{l_1}{2}}^{+\frac{l_1}{2}} dz \int_{\varrho=0}^r \mathfrak{S}_2 \frac{2dJ_1}{r^2} \varrho 2\pi \varrho d\varrho$$

erhält den Faktor  $\frac{\varrho^3}{r^2}$ , der an der oberen Grenze mit  $r$  verschwindet.

Die Integrale über die Räume  $v_1$  und  $v_2$  ergeben also keinen Beitrag.

### § 121. Gegeninduktivität zweier Leiter mit allseitiger Rückleitung.

Aus dem allein übrigbleibendem Integral folgt nach Division mit  $dJ_1 dJ_2$  für die Gegeninduktivität der Wert

$$M_{1,2} = \int_{z=z_0-\frac{l_2}{2}}^{z=z_0+\frac{l_2}{2}} dz \log \frac{\sqrt{a^2 + \left(z + \frac{l_1}{2}\right)^2} + \left(z + \frac{l_1}{2}\right)}{\sqrt{a^2 + \left(z - \frac{l_1}{2}\right)^2} + \left(z - \frac{l_1}{2}\right)}.$$

Zur Auswertung dient die Formel

$$\int \log(\sqrt{a^2 + v^2} + v) dv = v \log(\sqrt{a^2 + v^2} + v) - \sqrt{a^2 + v^2}.$$

Für die Integration des  $\log$  des Zählers ist  $v = z + \frac{l_1}{2}$ , mit den Grenzen

$$z_0 + \frac{l_1}{2} - l_2 \leq v \leq z_0 + \frac{l_1 + l_2}{2}.$$

Für die Integration des  $\log$  des Nenners ist  $v = z - \frac{l_1}{2}$ , mit den Grenzen

$$z_0 - \frac{l_1 + l_2}{2} \leq v \leq z_0 - \frac{l_1}{2}.$$

Es ergibt sich für den in Fig. 104 dargestellten Fall

$$\begin{aligned}
 M_{1,2} = & \left( z_0 + \frac{l_1 + l_2}{2} \right) \log \left[ \sqrt{a^2 + \left( z_0 + \frac{l_1 + l_2}{2} \right)^2} + z_0 + \frac{l_1 + l_2}{2} \right] \\
 & + \left( z_0 - \frac{l_1 + l_2}{2} \right) \log \left[ \sqrt{a^2 + \left( z_0 - \frac{l_1 + l_2}{2} \right)^2} + z_0 - \frac{l_1 + l_2}{2} \right] \\
 & - \left( z_0 + \frac{l_1 - l_2}{2} \right) \log \left[ \sqrt{a^2 + \left( z_0 + \frac{l_1 - l_2}{2} \right)^2} + z_0 + \frac{l_1 - l_2}{2} \right] \\
 & - \left( z_0 - \frac{l_1 - l_2}{2} \right) \log \left[ \sqrt{a^2 + \left( z_0 - \frac{l_1 - l_2}{2} \right)^2} + z_0 - \frac{l_1 - l_2}{2} \right] \\
 & - \left[ \sqrt{a^2 + \left( z_0 + \frac{l_1 + l_2}{2} \right)^2} - \sqrt{a^2 + \left( z_0 - \frac{l_1 + l_2}{2} \right)^2} \right] \\
 & - \left[ \sqrt{a^2 + \left( z_0 + \frac{l_1 - l_2}{2} \right)^2} - \sqrt{a^2 + \left( z_0 - \frac{l_1 - l_2}{2} \right)^2} \right].
 \end{aligned}$$

Haben die Leitungen die gleiche Länge  $l$  und sind sie nicht gegeneinander versetzt ( $z_0 = 0$ ), so erhält man, wie in § 109

$$M_{1,2} = l \log \frac{\sqrt{a^2 + l^2} + l}{\sqrt{a^2 + l^2} - l} - 2(\sqrt{a^2 + l^2} - a),$$

und wenn  $a$  klein gegen  $l$  ist, ergibt sich die dort als Gl. (143) angegebene Formel

$$M_{1,2} = 2l \left( \log \frac{2l}{a} - 1 \right).$$

Die Bedeutung der vorstehenden Rechnung ist aber, daß für dies Ergebnis eine feste physikalische Bedeutung gewonnen worden ist. Die Formel stellt die Gegeninduktivität zweier Stromsysteme dar, die aus zwei in ein unendlich ausgedehntes Mittel eingetauchten parallelen Leitern von der Länge  $l$  und dem Abstände  $a$  und ihren Rückströmen in dem Mittel bestehen.

In den Fällen wirklicher Einzelleitungen mit Rückleitung durch ein weit ausgedehntes Mittel, z. B. Land-Telegraphenleitungen oder Seekabel, sind die Voraussetzungen dieser Rechnung nicht streng erfüllt, indem das Mittel entweder nur als weit ausgehnter Halbraum oder als eine im Vergleich zur Länge  $l$  nicht beliebig tiefe flache Schicht zu betrachten ist. Physikalisch ähneln aber diese Fälle dem berechneten darin, daß die Rückströme im Vergleich zu dem geschlossen laufenden Strom in der Leitung sehr stark aufgelöst sind. In einer in der ersten Auflage dieses Buches mitgeteilten Rechnung, bei der der Rückstrom auch geschlossen, aber in großem Abstände von den benachbarten parallelen Teilen der Kreise verlief, ergab sich nahezu dasselbe Ergebnis, nur daß an Stelle des Postens  $-1$  in der Schlußgleichung die Größe  $-1,5$  trat. Man wird daher annehmen können, daß das vorliegende Ergebnis für Leitungen mit verteilten Rückströmen auch unter praktischen Bedingungen sehr nahe den Wert der Gegeninduktivität darstellt.

§ 122. **Formeln für die Induktivitäten geerdeter Einzelleiter.** Nehmen wir nach dem Vorstehenden die Gegeninduktivität zweier paralleler Leiter gleicher Länge an zu

$$M = 2l \left( \log \operatorname{nat} \frac{2l}{d} - 1 \right),$$

so erhalten wir die Selbstinduktivität eines geerdeten Leiters durch folgende Überlegung.

Der Strom, also auch das magnetische Feld einer Doppelleitung, wird nicht geändert, wenn man sie an beiden Enden in den neutralen Punkten erdet. Eine solche Leitung kann also auch als System zweier geerdeter Leitungen beobachtet werden. Ist  $L_s$  die Selbstinduktivität jedes derselben, so ist die magnetische Energie gleich

$$\mathbf{T} = \frac{1}{2} L_s J_1^2 + M J_1 J_2 + \frac{1}{2} L_s J_2^2,$$

oder, wenn  $J_1 = -J_2 = J$

$$\mathbf{T} = (L_s - M) J^2.$$

Da diese Größe andererseits gleich

$$2l J^2 \left( \log \frac{d}{\rho} + \frac{\mu}{4} \right)$$

ist, nach Gl. (151), wenn  $d$  den Achsenabstand der Leiter vom Radius  $\rho$  bezeichnet, so erhält man, indem man für  $M$  den angenommenen Wert einsetzt,

$$L_s = 2l \left( \log \frac{2l}{\rho} - 1 + \frac{\mu}{4} \right).$$

Dies ist eine häufig als Induktivität eines geraden Leiters von der Länge  $l$  bezeichnete Größe. Als solche hat sie, solange man nicht die Art der Rückleitung angibt, keinen physikalischen Sinn. Wir erklären sie als den Wert der Induktivität einer geerdeten Leitung von der Länge  $l$ , unter dem Vorbehalt, daß eine genauere Rechnung an Stelle der Zahl 1 eine um ein Geringes davon verschiedene ergeben kann, etwa bis zu 1,5. Unterschiede in der Lage der Rückleitungsströme, die durch die obwaltenden Bodenverhältnisse eintreten, haben gleichfalls auf diese Zahl einen gewissen Einfluß. Für praktische Zwecke sind die angegebenen Werte jedenfalls sicher genug.

Messungen der Gegeninduktivität und Selbstinduktivität von oberirdischen Einzelleitungen sind wegen der Erdströme schwierig; Massin hat solche ausgeführt, ist aber nicht zu sicheren Ergebnissen gekommen. An unterseeischen Telegraphenkabeln hat Kunert<sup>16)</sup> Messungen der Selbstinduktivität mittels Wechselströmen ausgeführt, welche, auf Gleichstrom extrapoliert, mit dem nach vorstehender Formel berechneten Wert zusammenpassen.

## Vierter Teil. •

# Quasistationäre Felder.

---

### Erster Abschnitt.

#### Allgemeine Beziehungen.

**§ 123. Begriff des quasistationären Feldes.** In den bisherigen Untersuchungen sind in den Maxwell'schen Gleichungen die Größen  $\mathcal{E}$  und  $\mathcal{H}$  als zeitlich unveränderlich angesehen worden, und dies zog eine gewisse Vereinfachung der Gleichungen nach sich. Für veränderliche Zustände sind die Gleichungen ihrem vollen Inhalte nach anzuwenden. Indessen lassen sich auch hier nach den tatsächlichen Verhältnissen zwei Klassen von Erscheinungen unterscheiden, die sehr rasch verlaufenden und die langsamer verlaufenden.

Nehmen wir als Beispiel das magnetische Feld zwischen zwei stromführenden geschlossenen Leitern. Wenn sich der Strom in einem Leiter ändert, so wird auch das Feld eine Änderung erfahren, und zwar wird diese im allgemeinen in Form einer Welle durch das Feld hindurchgehen, so daß die entfernter liegenden Teile später von der Änderung betroffen werden als die näheren. Nun breitet sich die Änderung mit Lichtgeschwindigkeit aus, während der Verlauf der Änderung an jedem einzelnen Punkte eine durch die besonderen Bedingungen des Vorganges bestimmte Zeit erfordert. Wenn der mit Lichtgeschwindigkeit fortschreitende Vorgang zur Durchmessung des Raumes, in dem die Wirkungen in Frage kommen, eine unmeßbar kleine Zeit erfordert gegen die Zeit, in der die betrachtete Änderung abläuft, so kann man ohne merklichen Fehler es so ansehen, als wenn die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der elektrischen Welle unendlich groß wäre.

In diesem Falle kann man also das magnetische Feld, das von dem Strome des ersten Leiters ausgeht und ihn mit dem zweiten Leiter verkettet, so berechnen, als wenn der Strom in jedem Augenblick stationär wäre, wenn er auch in Zeiten, die gegen die zur Durchmessung des Abstandes beider Leiter erforderliche Zeit sehr groß sind, seinen Wert ändert.

Pflanzt sich in einem anderen Beispiel eine elektrische Welle längs einer Doppelleitung fort, und zwar, wie es bei Fernsprechrömen der Fall ist, indem sie während einer Sekunde einige hundert oder einige tausend Mal ihren Wert ändert, so kann man wieder bei einem Stück mäßiger Länge die Fortpflanzungsgeschwindigkeit ohne erheblichen Fehler als so groß rechnen, daß man die Bewegung in jedem Augenblick als stationär betrachten darf.

Dagegen darf man bei einer Antenne für drahtlose Telegraphie, die 100 m lang ist, und auf der sich eine Welle von 300 000 Perioden/sec ausbreitet, die Phasen der Welle nicht mehr als überall gleich betrachten, weil die Welle in einer Periode 1000 m zurücklegt, also auf 100 m  $36^\circ$  Phasenunterschied der Welle entfallen.

In den zuerst genannten Fällen darf man das magnetische Feld des wechselnden Stromes so betrachten, als wenn es von einem stationären Strom herrührte, der gerade dieselbe Stärke hat, wie der Wechselstrom in dem betrachteten Augenblicke. Man nennt deshalb solche Vorgänge quasistationär.

**§ 124. Form der Feldgleichungen.** Da eine quasistationäre Strömung dann besteht, wenn man ohne Fehler die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der elektrischen Wellen als unendlich ansehen kann; so fallen aus den Feldgleichungen diejenigen Glieder fort, die  $c$  ausdrücklich enthalten. In der Differentialform werden daher die Gleichungen

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \mathfrak{H} &= 4\pi i, \\ \operatorname{rot} (\mathfrak{E} - \mathfrak{E}_e) &= -\frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial t}. \end{aligned}$$

Bildet man in bekannter Weise die Flächenintegrale und schreibt statt ihrer auf der linken Seite die gleichwertigen Linienintegrale (Fig. 105), so ergibt sich

$$\begin{aligned} \int_{(\mathfrak{s}_1)} \mathfrak{H} d\mathfrak{s}_1 &= 4\pi \int_{(f_1)} i d\mathfrak{f}_1 = 4\pi J, \\ \int_{(\mathfrak{s}_2)} (\mathfrak{E} - \mathfrak{E}_e) d\mathfrak{s}_2 &= -\int_{(f_2)} \frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial t} d\mathfrak{f}_2. \end{aligned}$$

$f_1$  und  $f_2$  bedeuten Flächen, die bezüglich von  $\mathfrak{s}_1$  und  $\mathfrak{s}_2$  berandet sind.

Die erste Gleichung  $\int_{(\mathfrak{s}_1)} \mathfrak{H} d\mathfrak{s}_1 = 4\pi J$  stimmt mit derjenigen für stationäre Ströme überein. Es folgt daraus, daß das magnetische Feld quasistationärer Ströme in jedem Augenblick den Wert hat, den es bei einem stationären Strom hätte, der dieselbe Stärke besitzt, wie der veränderliche Strom in dem betrachteten Augenblick.

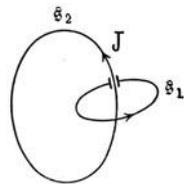
Insbesondere gilt auch das in § 102 von der magnetischen Energie Ausgeführte. Die Zunahme der magnetischen Energie ist also  $d\mathbf{T} = J d\Phi$ , wenn  $\Phi$  der mit dem Leiter verkettete Fluß ist, und zwar gilt diese Gleichung nicht nur, wenn die Zunahme des Flusses durch Bewegung der Leiter, sondern auch, wenn sie durch Änderung der Ströme erfolgt.

Die zweite Feldgleichung in der Form

$$\operatorname{rot} (\mathfrak{E} - \mathfrak{E}_e) = -\frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial t}$$

ergibt, daß die elektrischen Kräfte nicht mehr wie vorher bei stationären Strömen allgemein ein Potential haben, da das Linienintegral über solche geschlossene Wege, die ein magnetischer Fluß durchsetzt, nicht mehr Null ist.

Fig. 105.



In der Form für den linearen Leiter

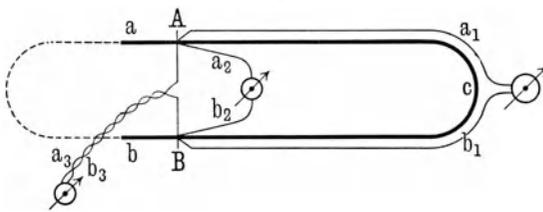
$$JR - E = - \frac{d\Phi}{\partial t} \dots \dots \dots (156)$$

stellt die zweite Hauptgleichung das bekannte Induktionsgesetz dar, wonach eine Zunahme des einen Leiter durchsetzenden magnetischen Flusses in ihm eine EM-Gegenkraft erzeugt, die der Änderungsgeschwindigkeit des Kraftflusses gleich ist. In der Aussage, daß die erzeugte EMK der Änderungsgeschwindigkeit gleich, nicht nur proportional sei, liegt zugleich die Festlegung des absoluten elektromagnetischen Maßsystems für die elektrischen Vektoren; nachträglich erklären sich daher die in § 2 getroffenen Festsetzungen.

**§ 125. Abhängigkeit des Linienintegrals vom Wege.** Die Aussage, daß das Linienintegral im Falle veränderlicher Ströme vom Wege abhängt, hat eine einfache und dabei praktisch wichtige Bedeutung. Um sie zu erkennen, wollen wir die Spannungsmessung an einem Leiter mit veränderlichem magnetischen Felde näher betrachten.

In Fig. 106 sei *abc* ein Teil eines solchen Leiters, z. B. der Bügel eines Hochfrequenz-Schwingungskreises oder ein Teil einer Wechselstrombahnleitung.

Fig. 106.



Die Spannung von *A* gegen *B* ist nach § 26 die Arbeit, die geleistet wird, wenn eine Einheit der Elektrizitätsmenge von *A* nach *B* befördert wird. Messen wir die Spannung mit einem Hitzdrahtinstrument, so wird tatsächlich eine Elektrizitätsmenge bewegt, und zwar ersichtlich auf einem durch die Zuleitungen vorgeschriebenen Wege. Die Erwärmung des Hitzdrahtes ist der im Instrument verzehrten Leistung, also dem Quadrat der Spannung proportional.

Wenn wir das Instrument so einschalten, daß die Zuleitungen *a<sub>1</sub>b<sub>1</sub>* von *A* nach *B* in der unmittelbaren Nähe des Leiters geführt werden, so befindet sich der Leiter *a<sub>1</sub>b<sub>1</sub>* in derselben Lage zum Felde, wie der Leiter *ab*. Die Ströme *J* in dem Leiter *a<sub>1</sub>b<sub>1</sub>* und *J<sub>1</sub>* im Leiter *a<sub>1</sub>b<sub>1</sub>* verhalten sich dann umgekehrt, wie die Widerstände *R* und *W* der Leiter, also ist *J<sub>1</sub> = JR/W*. Die in diesem Falle angezeigte Spannung ist also lediglich der Spannungsabfall im Widerstande des Leiters *ab*.

Wenn wir aber das Meßinstrument in die durch *a<sub>2</sub>b<sub>2</sub>* bezeichneten Zuleitungen einschalten, so daß der geschlossene Kreis *AcBb<sub>2</sub>a<sub>2</sub>* das von dem veränderlichen Strome erzeugte magnetische Feld zu einem mehr oder weniger großen Teile umschließt, so wirkt auf den Strom im Meßinstrument außer dem Spannungsabfall im Widerstande des Leiters *ab* noch die durch das magnetische Feld induzierte EMK. Je nach der Lage der Zuleitungen ist diese veränderlich, also ist auch die vom Meßinstrument angezeigte Spannung von der Führung der Zuleitungen, mithin im eigentlichen Sinne vom Wege des Linienintegrals abhängig.

Die Spannung von  $A$  gegen  $B$  für einen gegebenen Weg hat einen bestimmten Wert, auch wenn keine Elektrizitätsmengen befördert werden. Die gleichen Überlegungen gelten also auch für statische Spannungsmesser; deren einfachster ist die Meßfunkenstrecke. Nun ist bekannt, daß man bei Hochfrequenzkreisen an zwei Stellen wie  $A$  und  $B$  des Bügels, die in der Nähe des Kondensators liegen, starke Funken ziehen kann. Sie haben also eine Spannung von vielen Tausenden von Volt, unmittelbar von  $A$  nach  $B$  gemessen. Wenn auf den Weg über den Leiter dieselbe Spannung fiel, so würde der Leiter wegschmelzen.

Die Abhängigkeit der Spannung oder des Linienintegrals vom Wege ist also eine durch die Erfahrung belegte Tatsache. Wie in § 26 erwähnt, gibt es nur in solchen Feldern, in denen das Linienintegral vom Wege unabhängig ist, ein Potential; veränderliche Felder haben also kein Potential. Dies gilt erst recht für Felder, die nicht quasistationär sind.

In einem veränderlichen Felde hat man auf die Führung der Zuleitungen zu Meßeinrichtungen sorgfältig zu achten. Soweit man sie nicht fest verlegen kann, soll der bewegliche Teil aus verseilten (Zwillings-) Drähten bestehen, damit nicht bei Bewegungen der Meßvorrichtungen Fehler entstehen. In Fig. 108 ist dies durch die Zuleitungen  $a_3 b_3$  angedeutet. Eine solche Führung ist bei Kreisen für höhere und Hochfrequenz, insbesondere bei Messungen an Fernsprechkreisen, unentbehrlich.

**§ 126. Energiegleichung.** Es seien mehrere Leiter gegeben mit den eingepprägten EMK  $E_1, E_2, \dots$ , den Strömen  $J_1, J_2, \dots$ , den Selbstinduktivitäten  $L_1, L_2, \dots$ , den Widerständen  $R_1, R_2, \dots$ , welche untereinander die Gegeninduktivitäten  $M_{ab}$  haben sollen.

Dann lautet die zweite Hauptgleichung, auf jeden Leiter angewandt, unter Berücksichtigung von Gl. (156)

$$J_1 R_1 - E_1 = - \frac{d}{dt} (L_1 J_1 + M_{21} J_2 + M_{31} J_3 + \dots),$$

$$J_2 R_2 - E_2 = - \frac{d}{dt} (M_{12} J_1 + L_2 J_2 + M_{32} J_3 + \dots),$$

$$J_3 R_3 - E_3 = - \frac{d}{dt} (M_{13} J_1 + M_{23} J_2 + L_3 J_3 + \dots).$$

Wenn man diese Gleichungen bezüglich mit  $J_1, J_2, J_3, \dots$  multipliziert und alle Gleichungen addiert, so ergibt sich

$$\left. \begin{aligned} J_1^2 R_1 + J_2^2 R_2 + \dots - (E_1 J_1 + E_2 J_2 + \dots) &= - \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} L_1 J_1^2 + \frac{1}{2} L_2 J_2^2 \right) \\ &+ \frac{1}{2} L_3 J_3^2 + \dots + M_{12} J_1 J_2 + M_{13} J_1 J_3 + M_{23} J_2 J_3 + \dots. \end{aligned} \right\} (157)$$

Die Beträge, aus denen sich die Summe in der Klammer auf der rechten Seite zusammensetzt, sind im einzelnen die der magnetischen Energie im eigenen oder gemeinsamen Felde der einzelnen Leiter, und

$$T = \frac{1}{2} L_1 J_1^2 + \frac{1}{2} L_2 J_2^2 + \dots + M_{12} J_1 J_2 + \dots$$

ist die gesamte magnetische Energie. Die rechte Seite der Gl. (157) bedeutet also die Abnahme der magnetischen Energie in der Zeiteinheit, auf der linken stehen die Posten, aus denen sich diese Abnahme zusammensetzt.

Der Posten  $J_1^2 R_1 + J_2^2 R_2 + \dots$  ist wesentlich positiv. Er bedeutet also auf alle Fälle einen Energieverbrauch in der Zeiteinheit und stellt die in den Widerständen in einer Sekunde verzehrte Energie dar. Der andere Posten ist je nach Umständen positiv oder negativ. Er ist positiv, wenn die Ströme in den Leitern in der Richtung fließen, in der die eingepprägten EMK wirken, bedeutet also dann die von den eingepprägten Kräften hergegebene Leistung. Man kann in diesem Sinne die Energiegleichung so lesen: Der Überschuß der in den Widerständen verzehrten Energie über die von den eingepprägten EMK zugeführte wird aus der Energie des magnetischen Feldes bestritten.

Schreibt man die Energiegleichung in der Form

$$\Sigma E J = \frac{d\mathbf{T}}{dt} + \Sigma J^2 R \dots \dots \dots (157 a)$$

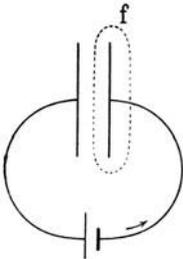
so lautet sie: Der in den Widerständen nicht verzehrte Betrag der Energie, die von den eingepprägten EMK den Stromkreisen zugeführt wird, dient zur Verstärkung der Energie des magnetischen Feldes; sie bezieht sich dann auf Vorgänge, bei denen die Stromstärken ansteigen und mit ihnen das magnetische Feld.

Das magnetische Feld eines Leitersystems wirkt daher wie ein Energiesammler, der einerseits den Überschuß der zugeführten über die verbrauchte Energie aufzunehmen und andererseits einen Mehrverbrauch zu decken imstande ist.

**§ 127. Kondensatoren in quasistationären Stromkreisen.** Wenn in eine Leitung ein Kondensator eingeschaltet ist, so ergibt die Bedingung, daß überall im Raume  $\text{div } i = 0$  sei, folgenden Zusammenhang.

Legt man (Fig. 107) um eine der Kondensatorplatten eine geschlossene Fläche  $f$ , so muß durch diese ebensoviele Elektrizität in der Zeiteinheit eintreten wie austreten. Die austretende Menge ergibt sich aus der dielektrischen Verschiebung  $\mathfrak{D}$  als der Betrag

Fig. 107.



$$\int_{(f)} \frac{\partial \mathfrak{D}}{\partial t} d\mathfrak{f},$$

die durch den Leitungsstrom eintretende als

$$\int_{(f)} i d\mathfrak{f} = J.$$

Letzteres Integral kann über die ganze Fläche  $f$  erstreckt werden, weil überall, außer im Stromleiter, die Stromdichte Null ist, die Flächen im Dielektrikum also keine Beiträge zur Summe liefern. Die Kontinuitätsbedingung ergibt also

$$\int_{(f)} \frac{\partial \mathfrak{D}}{\partial t} d\mathfrak{f} = \int_{(f)} i d\mathfrak{f} \dots \dots \dots (158)$$

Handelt es sich um langsam veränderliche Felder, so ändern sich die  $\mathfrak{D}$  an allen Stellen gleichzeitig, man kann also die Differentiation nach  $t$  auf das Integral  $\int \mathfrak{D} d\mathfrak{f}$  ausdehnen. Letzteres stellt aber die der Kondensatorfläche

zugehörige Ladung dar, welche  $q$  genannt werde. Sie ergibt sich aus der Spannung  $V$  am Kondensator als  $q = KV$ .

Für langsam veränderliche Felder folgt also

$$J = \frac{dq}{dt} = K \frac{dV}{dt} \dots \dots \dots (159)$$

**§ 128. Elektrische Energie in Kondensatoren.** Wenn  $V$  der Momentanwert der Kondensatorspannung ist, und während einer kurzen Zeit  $dt$  ein Strom  $J$  in den Kondensator fließt, so erhöht er die Spannung um  $dV$ ; die Stromstärke selbst ist wie vorher durch  $K \frac{dV}{dt}$  gegeben. Dieser Vorgang bedeutet eine Vermehrung der Energie des Kondensators um den Betrag

$$dU = VK \frac{dV}{dt} dt.$$

Daraus folgt

$$U = \frac{1}{2} KV^2 \dots \dots \dots (160)$$

wenn man annimmt, daß der Kondensator ohne Spannung auch keine Energie enthalte.

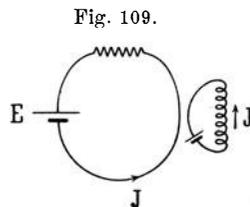
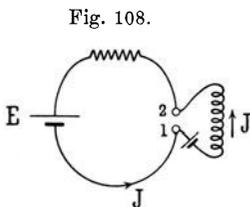
**§ 129. Stromkreise mit Induktivität und Kapazität.** Enthält ein einfaches oder verzweigtes System von Leitern an mehreren Stellen Kondensatoren, so hat jeder für sich die Kontinuitätsbedingung zu erfüllen, aus welcher folgt, daß jeder Kondensator in dem Zweige, in den er eingeschaltet ist, eine Gegenspannung

$$V = \frac{q}{K}$$

hervorbringt, wobei  $q$  und  $J$  durch die Gleichung  $J = \frac{dq}{dt}$  verbunden sind.

Stromkreise mit Kondensatoren können also nach den Kirchhoffschen Gesetzen behandelt werden, indes sind die EMK bestimmter Maschen zeitlich veränderlich.

Stromkreise, in denen mit dem Strome ein magnetisches Feld entsteht, bestehen in der Regel zum Teil aus Leitern, die für sich unter einem bestimmten Strome ein kräftiges magnetisches Feld bilden, wie Elektromagnete



und Spulen, zum Teil aus solchen, wie gestreckten Drähten, die für sich unter demselben Strome nur ein schwaches Feld bilden. Einen derartigen Kreis stelle Fig. 108 dar.

Wenn die Klemmen 1 und 2 des Elektromagnets genügend nahe zusammenliegen, so kann man sich ohne merkliche Änderung der magnetischen

Wirkung den Stromkreis in zwei zerlegt denken (Fig. 109); in jedem soll der Strom  $J$  wie früher fließen. Die elektromagnetische Energie der beiden jetzt gebildeten Schleifen ist

$$\frac{1}{2} L_1 J^2 + M J^2 + \frac{1}{2} L_2 J^2.$$

Falls nun  $M = 0$  ist, d. h. also falls die beiden Leiter, in die man sich den Stromkreis zerlegt denken kann, kein gemeinsames magnetisches Feld besitzen, ist die Energie  $\frac{1}{2} L_1 J^2 + \frac{1}{2} L_2 J^2$ . Man kann sie alsdann, ohne einen Fehler zu begehen, auf die beiden Teile des Stromkreises verteilen.  $M$  ist beispielsweise gleich Null, wenn der Kreis 2 überhaupt induktionsfrei ist, also aus nahe nebeneinander verlegten oder aus miteinander verseilten Drähten besteht.

$M$  ist ferner gleich Null, wenn der Kreis mehrere elektromagnetische Apparate enthält, die entweder so gebaut oder so aufgestellt sind, daß sie kein gemeinsames magnetisches Feld haben.

Unter der Bedingung, daß zwischen den verschiedenen Teilen eines Stromkreises kein gemeinschaftliches Feld besteht, kann man also die magnetische Energie in einzelnen Apparaten lokalisiert annehmen. Die gesamte magnetische Energie ist dann

$$\frac{1}{2} \Sigma L J^2 = \frac{1}{2} J^2 \Sigma L,$$

wo die  $\Sigma L = L_1 + L_2 + \dots$  die Summe derjenigen Beträge von Selbstinduktivität ist, welche den einzelnen Apparaten zukommt, wenn sie für sich allein einen Strom führen.

Unter der genannten Bedingung kann man also von Stromkreisen sprechen, in denen Apparate mit Selbstinduktivität verteilt sind. Für jeden einzelnen gilt nach Gl. (156)

$$R J - E = -L \frac{dJ}{dt}$$

oder

$$E = R J + L \frac{dJ}{dt}.$$

Dies bedeutet aber, daß man an allen Stellen, wo Apparate mit Selbstinduktivität eingeschaltet sind, für einen solchen eine veränderliche EM-Gegenkraft

$$V = R J + L \frac{dJ}{dt}$$

in Rechnung zu setzen hat. Im übrigen gelten auch hier wieder die Kirchhoffschen Regeln.

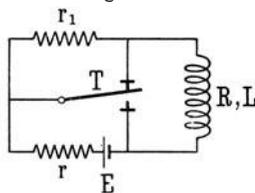
## Zweiter Abschnitt.

### Veränderliche Ströme unter der Wirkung konstanter EMK.

§ 130. **Stromkreise mit Widerstand und Induktivität.** In der Anordnung nach Fig. 110 bedeutet  $E$  eine konstante elektromotorische Kraft,  $R$ ,  $L$  einen Apparat mit Induktivität und Widerstand,  $T$  eine Taste, welche

in der oberen Stellung den Apparat mit einem induktionsfreien Widerstand  $r$  und der Stromquelle zum Kreise schließt, während sie in der unteren Stellung die Stromquelle durch kurzen Schluß aus dem Kreise aus- und dafür einen Widerstand  $r_1$  einschaltet. Der innere Widerstand der Stromquelle sowie die Widerstände der induktionsfreien Zuleitungen seien zu vernachlässigen.

Fig. 110.



Ansteigender Strom. Für die obere Stellung der Taste gilt die Gleichung:

$$E = rJ + V = J(R + r) + L \frac{dJ}{dt}.$$

Setzt man

$$J - \frac{E}{R + r} = u, \text{ also } \frac{dJ}{dt} = \frac{du}{dt},$$

so ergibt sich

$$\frac{du}{u} = - \frac{R + r}{L} dt,$$

woraus das Integral folgt:

$$u = J - \frac{E}{R + r} = A e^{-\frac{R+r}{L} t}.$$

Hierin ist  $A$  die aus den Anfangsbedingungen zu ermittelnde Integrationskonstante. Man denke sich den Versuch so, daß die Taste zuerst am unteren Kontakt anlag; dann fließt mangels einer Stromquelle auch kein Strom. In dem Augenblick der Schließung des Stromkreises am oberen Kontakt ist also der Strom noch Null; wenn wir die Zeit von diesem Augenblick ab zählen, so folgt, daß für  $t = 0$  auch  $J = 0$  ist.

Setzt man in der letzten Gleichung  $J = 0$  für  $t = 0$ , so ergibt sich

$$- E/R + r = A,$$

daher

$$J = \frac{E}{R + r} \left( 1 - e^{-\frac{R+r}{L} t} \right) \dots \dots \dots (161)$$

Wir erhalten nach dieser Gleichung für den Anstieg des Stromes folgendes Bild. Mit dem Anlegen der Stromquelle beginnt der Strom zu wachsen. Da

$$\frac{dJ}{dt} = \frac{E}{L} e^{-\frac{R+r}{L} t},$$

so erkennt man, daß der Zuwachs in der Zeiteinheit anfangs am größten ist und später immer mehr nachläßt. Wenn  $\frac{R+r}{L} t$  hinreichend groß geworden ist, ist der Zuwachs sehr klein. Der Wert des Stromes nähert sich mit wachsender Zeit dem Werte  $J_0 = E/(R + r)$ , also demjenigen, welcher nach dem Ohmschen Gesetz als stationärer Strom den Kreis durchfließt.

Zeitkonstante. Das Verhältnis  $J/J_0$  eines Zeitwertes des Stromes zu seinem Endwert hängt also wesentlich von dem Werte von  $\frac{R+r}{L} t$  ab. Außer der wählbaren Größe  $t$  kommt darin das Verhältnis  $\frac{L}{R+r} = T$  vor; da  $T$

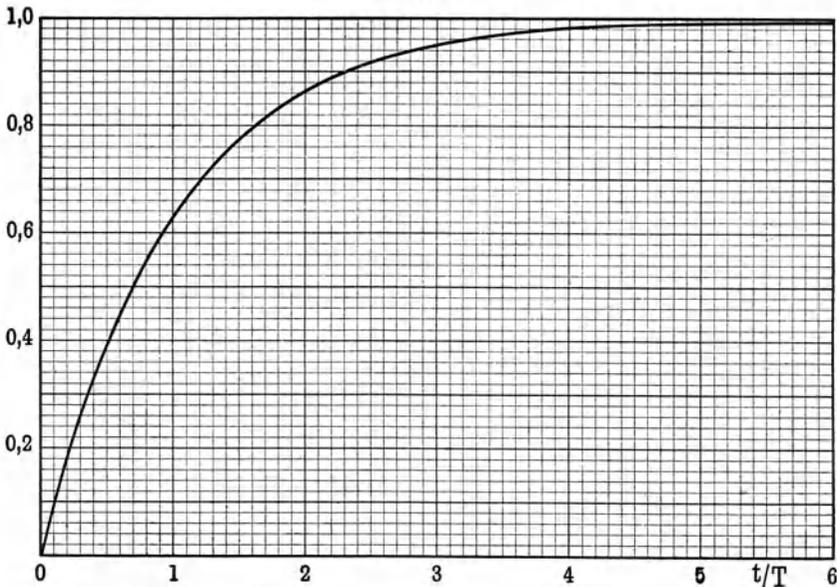
eine unbenannte Zahl ist, so ist  $T$  als eine Zeit anzusehen. Es heißt die Zeitkonstante des Stromkreises mit der Induktivität  $L$  und dem Widerstande  $R + r$ .

Normalkurven. Gl. (161) läßt sich jetzt auf die Form bringen

$$\frac{J}{J_0} = 1 - e^{-\frac{t}{T}},$$

in der die Eigenschaften des Stromkreises  $L, R, r$  und die Betriebsbedingung  $E$  wenigstens nicht ausdrücklich vorkommen, sondern nur das Verhältnis der Zeit zur Zeitkonstante und das gleichzeitige Verhältnis des Stromes zum Endstrom. Setzt man für  $t/T$  einen bestimmten Wert, z. B. 0,4, so folgt daraus ein bestimmter Wert für  $J/J_0$ , nämlich 0,330. Die Kurve der Fig. 111

Fig. 111.



gibt für jeden Wert von  $t/T$  den zugehörigen Wert von  $e^{-t/T}$  und  $1 - e^{-t/T}$ . Man kann sie benutzen, um für einen Stromkreis mit gegebenen Eigenschaften den Wert des Stromes zu einer beliebigen Zeit nach dem Stromschluß zu bestimmen. Wenn z. B.  $E = 15$ ,  $L = 20$ ,  $R + r = 1000$ , so ist  $T = 0,020$  Sek.,  $J_0 = 0,015$  A. Der Zeitwert des Stromes  $\frac{1}{100}$  Sek. nach Stromschluß ergibt sich aus  $t/T = 0,5$  zu  $0,393 J_0 = 0,0059$  A.

Man erkennt aus dem Verlaufe der Funktion  $1 - e^{-t/T}$ , daß der Strom seinen Endwert zu einer Zeit  $t = 7T$  mit einer Annäherung von mehr als  $\frac{1}{1000}$ , also praktisch vollständig erreicht hat.

Schwebelage. Nachdem der Strom einen gewissen Wert  $J_1$  erreicht hat, werde die Taste nach dem anderen Kontakt hinüber gelegt. Eine gewisse Zeit  $\tau$  lang wird die Taste keinen der beiden Kontakte berühren, und

es ist demnach jetzt die Stromquelle mit beiden Widerständen  $r$  und  $r_1$  und dem Elektromagnet im Kreise. Die Stromgleichung ist also

$$E = (R + r + r_1)J + L \frac{dJ}{dt},$$

und in deren Integral

$$J = \frac{E}{R + r + r_1} + ae^{-\frac{R+r+r_1}{L}t}$$

ist zur Bestimmung von  $a$  für  $t = 0$  für  $J$  der Wert  $J_1$  zu setzen. Dann ergibt sich

$$J = J_1 e^{-\frac{R+r+r_1}{L}t} + \frac{E}{R+r+r_1} \left(1 - e^{-\frac{R+r+r_1}{L}t}\right).$$

Die Stromstärke nähert sich mit wachsender Zeit dem neuen Grenzwert  $\frac{E}{R+r+r_1}$ . Wenn der Wert  $J_1$  der Endwert  $\frac{E}{R+r}$  des Stromes in der Arbeitslage der Taste war, und  $\tau$  genügend klein ist, so kann man mittels der Näherungsformel  $e^{-\delta} = 1 - \delta$  den Ausdruck für die Stromstärke umformen in

$$J = \frac{E}{R+r} \left(1 - \frac{R+r+r_1}{L} \tau\right) + \frac{E}{L} \tau = \frac{E}{R+r} \left(1 - \frac{r_1}{L} \tau\right).$$

Während der Scheweizeit sinkt also die Stromstärke um einen Betrag, der um so geringer ist, je kleiner der bei der Unterbrechung hinzutretende Widerstand ist. Wenn dagegen eine Unterbrechung eintritt, also  $r_1$  sehr groß ist, so fällt der Strom in sehr kurzer Zeit auf den Wert Null.

Abfallender Strom. Nachdem die Taste den unteren Kontakt erreicht hat, ist die EMK für den Stromkreis unwirksam geworden. Dann lautet die Stromgleichung:

$$0 = (R + r_1)J + L \frac{dJ}{dt}.$$

In das Integral

$$J = ae^{-\frac{R+r_1}{L}t}$$

ist als Anfangsbedingung  $J = J_2$  für  $t = 0$  einzusetzen.

Daher ergibt sich

$$J = J_2 e^{-\frac{R+r_1}{L}t}.$$

Nach der Kurzschließung der Stromquelle fällt also der Strom bis auf beliebig kleine Werte ab.

Das Verhältnis  $J/J_2$  für einen bestimmten Augenblick kann ebenfalls der Kurve (Fig. 111) entnommen werden.

**§ 131. Stromkreis mit Widerstand und Kapazität.** Wenn ein induktionsfreier Widerstand  $R$  mit einem Kondensator  $K$  in Reihe liegt (Fig. 112), so ist die Stromgleichung

$$E = \frac{q}{K} + RJ, \quad \text{oder, da } J = \frac{dq}{dt},$$

$$E = \frac{q}{K} + R \frac{dq}{dt}.$$

Das allgemeine Integral ist

$$q = KE + ae^{-\frac{t}{KR}}$$

Ladung. Der Kondensator sei zunächst ungeladen; wir haben dann  $q = 0$  für  $t = 0$  zu setzen und erhalten

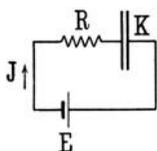
$$q = KE(1 - e^{-\frac{t}{KR}}) \dots \dots \dots (162)$$

Daraus folgt

$$J = \frac{E}{R} e^{-\frac{t}{KR}}$$

Der Kondensator nebst Widerstand hat also auch eine Zeitkonstante  $T = KR$ , die um so größer ist, je größer das Produkt von  $K$  und  $R$  ist.

Fig. 112.



Der Verlauf der Ladung  $q$  entspricht demjenigen des ansteigenden Stromes in einem Apparat mit Selbstinduktion.

Der Ladestrom nimmt einen solchen Verlauf, daß er im Moment  $t = 0$  mit dem höchsten Werte  $\frac{E}{R}$  einsetzt.

Der Kondensator wirkt also für den ersten Augenblick wie eine widerstandslose Verbindung seiner Zuleitungen, und der erste Wert der Stromstärke ist durch den im Stromkreise liegenden Leitungswiderstand bestimmt. Wenn man schreibt

$$J = \frac{E}{R} e^{-\frac{t}{T}}$$

so kann man  $R e^{\frac{t}{T}}$  als den augenblicklichen Widerstand des gesamten Kreises ansehen; dieser wächst also mit der Zeit von dem Werte  $R$  bis zu beliebig großen Werten, während der Strom bis auf beliebig kleine Werte abnimmt.

Nach hinreichend großer Zeit ist also die Ladung vollendet. Sie hat dann den Wert  $Q = KE$ , welcher der Definition der Kapazität entspricht. Unter praktischen Verhältnissen ist indessen diese Zeit nur kurz.

Ein deutsches Telegraphenkabel von 500 km Länge hat einen Widerstand von 3600 Ohm und eine über die ganze Länge verteilte Kapazität von 100  $\mu F$ .

Wir werden später die zur Ladung erforderliche Zeit genauer bestimmen; um ihre obere Grenze festzustellen, sei angenommen, daß die Kapazität von 100 Mf. im ganzen am fernen Ende des Widerstandes läge. Während in Wirklichkeit die am nahen Ende liegenden Teile sich über den vor ihnen liegenden kleinen Teil des Widerstandes laden, nehmen wir also an, daß alle Teile sich über den Höchstwiderstand laden; die berechnete Zeit der Ladung wird also größer als die wirkliche sein.

Damit die Ladung als beendet angesehen werden kann, soll  $t = 7 T = 7 KR$  sein. Dies ergibt hier 2,5 Sek. Wenn bei Kabelmessungen eine bestimmte längere Dauer der Ladung vorgeschrieben wird, so geschieht dies nicht mit Rücksicht auf die Vollendung der Ladung, sondern weil die elektrischen Eigenschaften  $K$  und  $R$  des Isoliermaterials von der Dauer der Elektrisierung abhängen.

Entladung. Wird ein Kondensator, der die Ladung  $q$  enthält, auf einen Widerstand vom Betrage  $R$  geschaltet, so geht die Entladung nach der Gleichung  $-\frac{dq}{dt} = R \frac{q}{K}$  vor sich.

Wir erhalten mit der Grenzbedingung, daß  $q = Q$  für  $t = 0$

$$q = Q e^{-\frac{t}{KR}}.$$

War  $Q = KE$ , so daß die Ladung des Kondensators vollendet war, so ergibt sich für den Entladungsstrom  $J = dq/dt$

$$J = -\frac{E}{R} e^{-\frac{t}{KR}}.$$

Der Entladungsstrom hat also in diesem Falle denselben zeitlichen Verlauf, abgesehen vom Vorzeichen, wie der Ladungsstrom; das negative Vorzeichen bedeutet entgegengesetzte Richtung.

**§ 132. Scheinbare Unstetigkeiten der Vorgänge.** Nach den für einen Stromkreis mit Kapazität entwickelten Formeln finden im Augenblick  $t = 0$  Unstetigkeiten statt. Solange die Taste geöffnet ist, also bis zum Augenblick  $t = 0$ , fließt kein Strom; sofort darauf erhält er aber nach der Formel den Wert  $E/R$ , scheinbar ohne Zwischenwerte zu durchlaufen. Bei einem Kondensatorkreise mit beliebig kleinem Widerstand müßte die Stromstärke nach der Formel im ersten Augenblick beliebig groß werden. In Wirklichkeit sind solche Unstetigkeiten freilich ausgeschlossen. Daß sie in den Formeln vorkommen, beruht darauf, daß diese für die ersten Augenblicke nicht genau gelten. Wir haben vorausgesetzt, daß der Stromkreis nur induktionsfreien Widerstand enthalte; dies trifft aber nicht vollkommen zu, weil jeder Leiter eine bestimmte, wenn auch geringe Induktivität  $L$  hat. Wenn die Änderungen des Stromes, wie zu Beginn des Ladungsvorgangs in einer Zeit von der Größenordnung  $L/R$  verlaufen, so bestimmt die Induktivität die Form des Vorgangs. Der Ladestrom des Kondensators wird daher zwar sehr schnell ansteigen, aber doch stetig bleiben. Auch wenn der vorgeschaltete Widerstand beliebig klein wäre, bliebe der Strom endlich, weil die Zuleitung außer der Induktivität auch Kapazität besitzt; dies wird bei Besprechung der Vorgänge in Leitungen näher gezeigt werden.

**§ 133. Widerstand parallel einer Induktivität.** Nach den beigesetzten Bezeichnungen (Fig. 113) lauten die Kirchhoffschen Gleichungen:

$$J = J_1 + J_2, \quad E = rJ + R_2 J_2, \quad R_2 J_2 = R_1 J_1 + L \frac{dJ_1}{dt}.$$

Daraus ergibt sich für  $J_1$  die Gleichung:

$$(R_2 + r)L \frac{dJ_1}{dt} + J_1 (rR_1 + rR_2 + R_1 R_2) - R_2 E = 0.$$

Der Form nach stimmt sie mit den Gleichungen für die schon besprochenen einfacheren Fälle überein. Da ferner auch hier für  $t = 0$  der Strom  $J_1$  mit dem Werte Null beginnt, so ergibt sich das Integral

$$J_1 = \frac{ER_2}{rR_1 + rR_2 + R_1 R_2} \left( 1 - e^{-\frac{rR_1 + rR_2 + R_1 R_2}{L(R_2 + r)} t} \right).$$

Nach der dritten Gleichung erhält man hieraus den Wert von  $J_2$ ,

$$J_2 = \frac{ER_1}{rR_1 + rR_2 + R_1R_2} \left( 1 + \frac{rR_2}{R_1(r + R_2)} e^{-\frac{rR_1 + rR_2 + R_1R_2}{L(R_2 + r)}t} \right).$$

Diese Anordnung besitzt also ebenfalls eine Zeitkonstante

$$T = L(R_2 + r)/(rR_1 + rR_2 + R_1R_2).$$

Vergleichen wir beide Ströme in demselben Augenblick, so ist ersichtlich, daß der Strom in dem Elektromagnet stets geringer, der in dem induktionsfreien Widerstande stets größer ist als ihre bezüglichen stationären Werte. Macht man  $R_1 = R_2 = R$ , so ist

$$J_1 = \frac{E}{R + 2r} \left( 1 - e^{-\frac{t}{T}} \right) \quad J_2 = \frac{E}{R + 2r} \left( 1 + \frac{r}{R + r} e^{-\frac{t}{T}} \right).$$

Bei gleichen Widerständen in einem Wege mit Selbstinduktivität und einem parallelen induktionsfreien bevorzugt also der Strom in dem Zeitraume

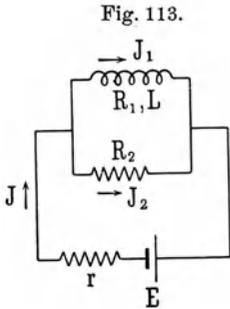


Fig. 113.

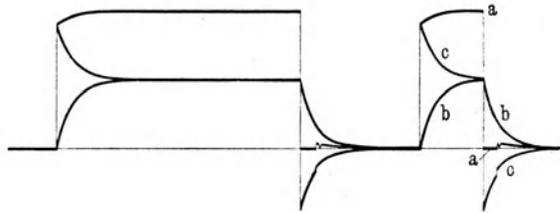


Fig. 114.

der veränderlichen Strömung den induktionsfreien Weg. In dem letzteren übertrifft der Anfangswert den stationären Endwert.

Für den Gesamtstrom  $J$  erhält man:

$$J = \frac{2E}{R + 2r} \left( 1 - \frac{R}{R + r} e^{-\frac{t}{T}} \right).$$

Fig. 114 zeigt den nach einem Oszillogramm gezeichneten Stromverlauf für  $r = 4000$ ,  $R_1 = R_2 = 1000$  und einen nicht näher bestimmten Wert der Induktivität. Die mit  $a$  bezeichnete Kurve bezeichnet den Strom  $J$ , während  $b$  den Strom  $J_1$ ,  $c$  den Strom  $J_2$  darstellt. Das längere Zeichen dauerte 0,115 Sek.

Ohne weiteren Beweis folgt aus dieser Entwicklung, daß bei einer Verzweigung in zwei Wegen verschiedener Induktivität der veränderliche Strom den Weg über die kleinere bevorzugt.

**§ 134. Widerstand parallel einer Kapazität.** Die Kirchhoffschen Gleichungen (Fig. 115) lauten:

$$J = J_1 + J_2, \quad E = rJ + R_2J_2, \quad R_1J_1 + \frac{q}{K} = R_2J_2.$$

Fügt man noch hinzu, daß  $J_1 = \frac{dq}{dt}$ , und löst nach  $q$  auf, so ergibt sich:

$$E = q \frac{r + R_2}{KR_2} + \frac{dq}{dt} \left( r + \frac{R_2 + rR_1}{R_2} \right).$$

Mit der Anfangsbedingung  $q = 0$  ergibt sich das Integral:

$$q = \frac{KER_2}{R_2 + r} \left( 1 - e^{-\frac{t}{T}} \right), \quad \text{wo} \quad T = K \frac{rR_1 + rR_2 + R_1R_2}{R_2 + r}.$$

Man erhält ferner für die Ströme

$$J_1 = \frac{ER_2}{rR_1 + rR_2 + R_1R_2} e^{-\frac{t}{T}},$$

$$J_2 = \frac{E}{R_2 + r} \left( 1 - \frac{rR_2}{rR_1 + rR_2 + R_1R_2} e^{-\frac{t}{T}} \right).$$

Der Endwert von  $J_1$  ist Null, der von  $J_2$  ist  $E/(R_2 + r)$ . Es ergibt sich, daß ein Widerstand, dem ein Kondensator parallel geschaltet ist, während

Fig. 115.

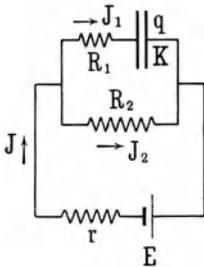
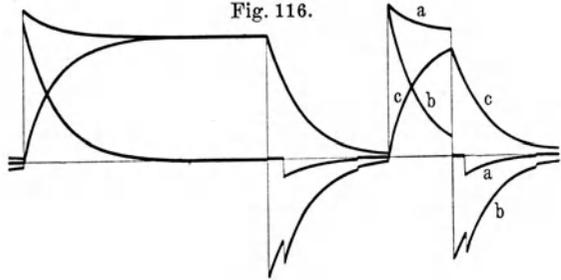


Fig. 116.



des veränderlichen Zustandes einen geringeren Strom aufnimmt als während des stationären; im vorliegenden Falle bevorzugt also der Strom den Weg durch den Kondensator.

Für den Gesamtstrom  $J$  ergibt sich hier:

$$J = \frac{E}{R_2 + r} \left( 1 + \frac{R_2^2}{rR_1 + rR_2 + R_1R_2} e^{-\frac{t}{T}} \right).$$

Der Verlauf dieser Ströme wird für  $r = 4000$ ,  $R_1 = 0$ ,  $R_2 = 1000$  und  $K = 17 \text{ Mf}$  in Fig. 116 dargestellt; die Kurven  $a$ ,  $b$ ,  $c$  gelten der Reihe nach für die Ströme  $J$ ,  $J_1$  und  $J_2$ . Die Dauer des längeren Zeichens betrug zwischen den senkrechten Strichen 0,110 Sek. Man erkennt an den Kurven der Zwischenräume zwischen aufeinanderfolgenden Zeichen die Schwebelagen und Ruhkontakte des im unverzweigten Kreise liegenden Unterbrechers.

**§ 135. Anwendung auf Telegraphenkabel.** Die vorstehende Entwicklung gestattet eine wenn auch nur näherungsweise richtige Anwendung auf den Stromverlauf in Telegraphenkabeln. Dieser wird später genauer dargestellt werden. Telegraphenkabel sind große Kondensatoren, aber die Ladungen können die einzelnen Längen der Kabel nur erreichen, indem sie den Widerstand der vorliegenden Leitungsstücke durchlaufen. Die am Anfange liegenden Teile des Kabels laden sich also beinahe ohne vorgeschalteten

Widerstand, während für die am Ende liegenden Teile nahezu der ganze Leitungswiderstand als Vorschaltewiderstand wirksam ist. In erster Annäherung denke man sich die gesamte Kapazität des Kabels als einen Kondensator in die Mitte des Leitungswiderstandes gelegt. Auf der einen Seite liegt die Stromquelle  $E$  (Fig. 117), auf der anderen der Empfangsapparat  $A$ ,

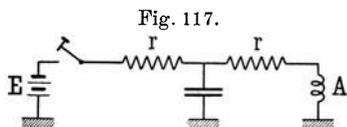


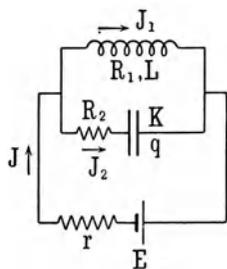
Fig. 117.

dessen Induktivität wir hier außer acht lassen wollen. Macht man  $R_1 = 0$ , ferner den halben Leitungswiderstand gleich  $r$  und  $r + A = R_2$ , so entspricht die Anordnung Fig. 117 derjenigen in Fig. 115.

Von Interesse sind die Kurven des abgehenden und des ankommenden Stromes, also  $a$  und  $c$  der Fig. 116. Da tatsächlich die Kapazität näher, als hier angenommen, am Kabelanfang liegt, so ist die Höhe der Ladungsspitze von dem Ladungswiderstande fast unabhängig, sie richtet sich nur nach dem der Stromquelle vorgeschalteten Widerstande.

**§ 136. Induktivität parallel mit Kapazität.** Hier lauten die Kirchhoffschen Gleichungen (Fig. 118):

Fig. 118.



$$J = J_1 + J_2, \quad J_2 = \frac{dq}{dt}, \quad E = rJ + R_2 J_2 + \frac{q}{K},$$

$$R_1 J_1 + L \frac{dJ_1}{dt} = R_2 J_2 + \frac{q}{K}.$$

Man kann daraus  $J$  und  $J_2$  ohne weiteres eliminieren und erhält:

$$E = rJ_1 + (r + R_2) \frac{dq}{dt} + \frac{q}{K},$$

$$R_1 J_1 + L \frac{dJ_1}{dt} = R_2 \frac{dq}{dt} + \frac{q}{K}.$$

Um aber auf eine Differentialgleichung mit einer Variablen, z. B.  $q$ , zu kommen, hat man die erste Gleichung nochmals zu differenzieren. Man erhält dann drei Gleichungen, in denen außer  $q$  und seinen beiden Ableitungen die beiden Veränderlichen  $J_1$  und  $\frac{dJ_1}{dt}$  vorkommen. Diese können also eliminiert werden. Man erhält dann die Determinante:

$$\begin{vmatrix} -E + (r + R_2) \frac{dq}{dt} + \frac{q}{K} & , & r, & 0 \\ (r + R_2) \frac{d^2 q}{dt^2} + \frac{1}{K} \frac{dq}{dt} & , & 0, & r \\ R_2 \frac{dq}{dt} + \frac{q}{K} & , & -R_1, & -L \end{vmatrix} = 0.$$

Daraus ergibt sich die Gleichung

$$L(R_2 + r) \frac{d^2 q}{dt^2} + \left( rR_1 + rR_2 + R_1 R_2 + \frac{L}{K} \right) \frac{dq}{dt} + \frac{R_1 + r}{K} q = ER_1.$$

Durch die Substitution

$$q = \frac{KER_1}{R_1 + r} = u$$

wird diese Gleichung in die homogene lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung hinübergeführt:

$$L(R_2 + r) \frac{d^2 u}{dt^2} + \left( rR_1 + rR_2 + R_1R_2 + \frac{L}{K} \right) \frac{du}{dt} + \frac{R_1 + r}{K} u = 0.$$

Macht man den Ansatz  $u = e^{\gamma t}$ , so ergibt dieser

$$e^{\gamma t} \left[ \gamma^2 L(R_2 + r) + \gamma \left( rR_1 + rR_2 + R_1R_2 + \frac{L}{K} \right) + \frac{R_1 + r}{K} \right] = 0.$$

Da  $e^{\gamma t}$  als Ansatz für  $u$  nicht dauernd Null sein kann, so muß der Klammerausdruck den Wert Null haben. Dies gibt eine Gleichung mit den Wurzeln:

$$\begin{aligned} \gamma = & -\frac{1}{2} \left( \frac{R_1}{L} + \frac{R_2 r}{L(R_2 + r)} + \frac{1}{K(R_2 + r)} \right) \\ & + \frac{1}{2} \sqrt{\left( \frac{R_1}{L} + \frac{R_2 r}{L(R_2 + r)} + \frac{1}{K(R_2 + r)} \right)^2 - \frac{4}{KL} \frac{R_1 + r}{R_2 + r}}. \end{aligned}$$

Der Charakter des Vorganges hängt wesentlich davon ab, ob die Quadratwurzel reell oder imaginär ist; im ersteren Falle ergeben sich den bisherigen Fällen ähnliche, sogenannte aperiodische Vorgänge, im letzteren periodische. Periodische Vorgänge werden in den folgenden Abschnitten näher betrachtet werden, hier wollen wir auf den an der Grenze zwischen den periodischen und den aperiodischen Vorgängen liegenden Fall eingehen, daß die Quadratwurzel den Wert Null habe.

Bringt man alle Posten auf den gemeinsamen Nenner  $[KL(R_2 + r)]^2$ , so wird der Radikand:

$$\begin{aligned} & \{L + K[R_1(R_2 + r) + R_2 r]\}^2 - 4KL(R_1 + r)(R_2 + r) \\ = & L^2 - 2LK[(R_1 + r)(R_2 + r) + r^2] + K^2[(R_1 + r)(R_2 + r) - r^2]^2. \end{aligned}$$

Setzt man dieses gleich Null, so ergeben sich die Wurzeln:

$$\begin{aligned} L = & K((R_1 + r)(R_2 + r) + r^2 + 2r\sqrt{(R_1 + r)(R_2 + r)}) \\ = & K(\sqrt{(R_1 + r)(R_2 + r)} + r)^2. \end{aligned}$$

Wir betrachten weiterhin den Fall, daß  $R_1 = R_2 = R$  seien; dann ist eine von  $r$  unabhängige Wurzel:

$$L = KR^2.$$

Mit diesem Werte führt die Gleichung für  $\gamma$  zu der Wurzel

$$\gamma = -\frac{1}{KR}.$$

Für die veränderliche Ladung ergibt sich also das Integral

$$q = \frac{KER}{R + r} + ae^{-\frac{t}{KR}}.$$

Mit der Anfangsbedingung  $q = 0$  für  $t = 0$  wird das Integral

$$q = KE \frac{R}{R+r} \left(1 - e^{-\frac{t}{KR}}\right).$$

Man erhält daraus zunächst den Kondensatorstrom

$$J_2 = \frac{dq}{dt} = \frac{E}{R+r} e^{-\frac{t}{KR}}.$$

Für den Strom in der Spule ergibt sich

$$RJ_1 + L \frac{dJ_1}{dt} = \frac{q}{K} + RJ_2 = \frac{ER}{R+r}.$$

Unter Benutzung der Entwicklung in § 130 erhält man also

$$J_1 = \frac{E}{R+r} - be^{-\frac{R}{L}t}.$$

Da  $J_1$  für  $t = 0$  den Wert Null hat, und da ferner  $R/L = 1/KR$  ist, so folgt

$$J_1 = \frac{E}{R+r} \left(1 - e^{-\frac{t}{KR}}\right).$$

Der Gesamtstrom ist daher

$$J = \frac{E}{R+r}.$$

Wenn also  $L = KR^2$  gemacht wird, so wirken die beiden parallel geschalteten Stromleiter wie ein Leiter ohne Induktivität oder Kapazität. Die Wirkung der Induktivität läßt sich also durch diejenige der Kapazität ausgleichen.

Der Stromverlauf in einer derartigen Anordnung ist in Fig. 119 für  $r = R_1 = R_2 = 1000$  Ohm,  $K = 14$  Mf und eine passend abgegliche Induktivität wiedergegeben. Die Dauer der Stromgebung des längeren Zeichens betrug 0,116 Sek. Die Ströme  $J$ ,  $J_1$ ,  $J_2$  werden der Reihe nach durch die Kurven  $a$ ,  $b$ ,  $c$  dargestellt. Man erkennt an der Kurve  $a$ , daß die Ausgleichung von Induktivität und Kapazität fast vollkommen gewesen ist.

Fig. 119.

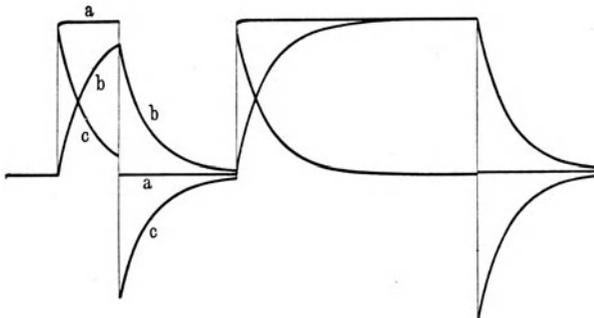
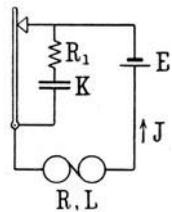


Fig. 120.



§ 137. **Kondensatoren zur Überbrückung von Relaiskontakten.** Zur Vermeidung von Funken beim Öffnen des Ortskreises schaltet man der Öffnungsstelle einen Kondensator  $K$  (Fig. 120) mit einem Vorschaltwider-

stand  $R_1$  parallel. Indem dieser beim Öffnen des Ortskreises sich ladet, hält er die Spannung an den Kontaktstellen, welche sonst durch die Selbstinduktion des Elektromagnets gesteigert werden würde, so niedrig, daß der Ortskreis funkenlos geöffnet wird.

Sobald der Kontakt geöffnet wird, befolgen der veränderliche Strom  $J$  und die veränderliche Ladung  $q$  die Gleichung

$$(R + R_1)J + L \frac{dJ}{dt} + \frac{q}{K} = E.$$

Für  $q$  ergibt sich das Integral

$$q = KE + e^{-\beta t} (q_1 \cos \alpha t + q_2 \sin \alpha t),$$

und daraus folgt für  $J = \frac{dq}{dt}$

$$J = e^{-\beta t} [\alpha q_2 - \beta q_1] \cos \alpha t - (\beta q_2 + \alpha q_1) \sin \alpha t].$$

Hierin ist

$$\alpha = \sqrt{\frac{1}{KL} - \left(\frac{R + R_1}{2L}\right)^2}, \quad \beta = \frac{R + R_1}{2L}.$$

Vor der Öffnung des Ortskreises floß in ihm ein Strom, dessen Stärke im Augenblick der Öffnung mit  $J_0$  bezeichnet werde. Der Kondensator war kurzgeschlossen, hatte also keine Ladung. Nach erfolgter Öffnung nimmt der Strom andere Werte an, die Stetigkeit verlangt aber, daß für  $t = 0$  auch  $J = J_0$  gesetzt werde. Man hat also die Gleichungen

$$\begin{aligned} 0 &= KE + q_1 \\ J_0 &= \alpha q_2 - \beta q_1. \end{aligned}$$

Man erhält mit den hiernach festgestellten Werten von  $q_1$  und  $q_2$  die schließliche Form der Gleichungen für  $q$  und  $J$ :

$$\begin{aligned} q &= KE + e^{-\beta t} \left[ -KE \cos \alpha t + \left( \frac{J_0}{\alpha} - \frac{\beta}{\alpha} KE \right) \sin \alpha t \right] \\ J &= e^{-\beta t} \left[ J_0 \cos \alpha t - \left( \frac{\beta}{\alpha} J_0 - \frac{E}{\alpha L} \right) \sin \alpha t \right]. \end{aligned}$$

Die Spannung an den Relaiskontakten ist  $V = \frac{q}{K} + R_1 J$  oder

$$\begin{aligned} V &= E + e^{-\beta t} \left\{ \cos \alpha t [R_1 J_0 - E] + \sin \alpha t \left[ \frac{J_0}{\alpha} \left( \frac{1}{K} - \frac{R(R + R_1)}{2L} \right) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{R_1 - R}{2\alpha L} E \right] \right\}. \end{aligned}$$

Für eine zweckmäßige Wahl der Größen  $R_1$  und  $K$  werden folgende Gesichtspunkte in Betracht kommen:

Was zunächst  $J_0$  betrifft, so liegt es im Interesse der guten Wirkung des Empfangsapparates, wenn man den Ortskreis so einrichtet, daß der Strom in der verfügbaren Zeit den stationären Wert erreicht. Daher ist  $J_0 = E/R$  zu setzen. Die Spannung  $V$  soll für den Anfang so klein wie möglich gehalten werden; dies spricht gegen große Werte von  $R_1$ , da, falls  $R_1 J_0 > E$  ist, also  $R_1 > R$ , im ersten Augenblick die Spannung erhöht werden würde.

Gegen eine Verminderung von  $R_1$  unter den Wert von  $R$  spricht, daß der vom Kondensator beim nächsten Kontaktschluß über die Kontakte fließende Strom den Anfangswert  $\frac{E}{R_1}$  hat, und daß es nicht nützlich ist, diesen Wert über den des Dauerstromes steigen zu lassen. Danach ist  $R_1 = R$  zu wählen. Nunmehr wird

$$V = E + e^{-\frac{R}{L}t} \sin \alpha t \frac{J_0}{\alpha} \left( \frac{1}{K} - \frac{R^2}{L} \right).$$

Hiernach ergibt sich eine zeitweilige Spannungserhöhung, wenn  $L > KR^2$ . Man wird also zweckmäßig  $K$  so wählen, daß  $L = KR^2$ . Würde man  $K$  noch größer machen, so träte zwar vorübergehend eine Spannungsverminderung ein, die aber wegen des Faktors  $\sin \alpha t$  zu spät einsetzen würde, um noch nützlich zu sein.

Unter den Bedingungen  $R_1 = R$  und  $L = KR^2$  wird  $\alpha = 0$ . Da hierdurch die Richtigkeit der Rechnung zweifelhaft wird, gehen wir auf die Grundgleichung zurück, indem wir darin von Anfang an dem  $L$  den Wert  $KR^2$  geben.

Wir erhalten die Grundgleichung in der Form

$$E = KR^2 \frac{d^2 q}{dt^2} + 2R \frac{dq}{dt} + \frac{q}{K}.$$

Die Lösung

$$q = KE \left( 1 - e^{-\frac{t}{KR}} \right)$$

$$J = \frac{E}{R} e^{-\frac{t}{KR}}$$

genügt der Differentialgleichung und den Anfangsbedingungen; sie ergibt für die Spannung an den Kontakten die Beziehung  $V = E$ .

Wenn man also den Ortskreis mit dem Kondensator so abgleicht, daß  $R = R_1$  und  $L = KR^2$  wird, so ist diese Abgleichung für die Sicherung der Kontakte sowohl gegen zu hohe Spannungen als zu hohe Stromstärken die günstigste<sup>17)</sup>.

### Dritter Abschnitt.

## Stromintegrale.

**§ 138. Gesetze der Verzweigung von Elektrizitätsmengen.** Die Verfolgung einer Aufgabe, in der mehrfache Verzweigungen von Strömen in Kondensatoren oder mehrere Apparate mit Induktivitäten und Kondensatoren vorkommen, führt zu komplizierten Rechnungen. Für viele Fälle genügt es, statt den Verlauf eines Stromes in jedem einzelnen Augenblicke festzustellen, das Zeitintegral zu berechnen, und in dieser Fassung bietet die Aufgabe solche Vereinfachungen, daß auch komplizierte Fälle der allgemeinen Betrachtung zugänglich werden.

In der Telegraphie handelt es sich um Stromsendungen, bei denen die in der Ruhelage geerdete Leitung an der Geberstelle eine Zeitlang mit der Stromquelle verbunden und alsdann wieder an Erde gelegt wird. Über die Leitung geht also ein Stromstoß, dessen Stärke zu Beginn und am Ende den Wert Null hat. In der Leitung seien an einer Stelle parallel zueinander ein Widerstand  $R_1$  ohne Induktivität und ein solcher  $R_2$  mit Induktivität  $L$  geschaltet. Nennt man die Ströme bezüglich  $J_1$  und  $J_2$ , den Gesamtstrom  $J$ , die beförderten Elektrizitätsmengen  $q_1$ ,  $q_2$  und  $q$ , so gelten die Gleichungen

$$J_1 R_1 = J_2 R_2 + L \frac{dJ_2}{dt},$$

$$J = J_1 + J_2.$$

Bildet man die Zeitintegrale, z. B.  $\int_0^{\infty} J dt$ , so ergibt sich, weil  $J_2$  an beiden Grenzen den Wert Null hat,

$$R_1 q_1 = R_2 q_2$$

$$q = q_1 + q_2.$$

Daraus folgt, daß  $q_1 = q \frac{R_2}{R_1 + R_2}$ ,  $q_2 = q \frac{R_1}{R_1 + R_2}$ .

Die Elektrizitätsmenge eines Stromstoßes verteilt sich also auf beide Zweige nach ihren Widerständen in derselben Art, wie ein stationärer Strom. Die Induktivität spielt im Zeitintegral keine Rolle für die Verteilung.

Wenn ferner etwa ein Kondensator  $K$  einer Spule  $R$ ,  $L$  parallel geschaltet ist und der Momentanwert der Ladung des Kondensators  $q_2$  genannt wird, so ist

$$R J_1 + L \frac{dJ_1}{dt} = \frac{q_2}{K}.$$

Die bis zur Zeit  $t$  durch die Spule und im unverzweigten Kreise beförderten Mengen seien  $q_1$  und  $q$ , dann ist

$$q = q_1 + q_2.$$

Die Gleichung

$$R J_1 + L \frac{dJ_1}{dt} = \frac{q - q_1}{K}$$

geht aber für  $t = \infty$ , wo sowohl  $J_1$  als  $\frac{dJ_1}{dt}$  Null sind, über in

$$(q - q_1)_{t=\infty} = 0.$$

Im Zeitintegral geht also durch einen Widerstand, dem ein Kondensator parallel geschaltet ist, eine solche Elektrizitätsmenge hindurch, als wenn der Kondensator gar nicht vorhanden wäre.

Diese allgemeinen Sätze wollen wir auf besondere Fälle anwenden.

**§ 139. Integral der EMK einer Spule mit Induktivität.** In einer Leitung, welche den Widerstand  $R$  hat, werde durch eine EMK ein stationärer Strom  $J_0$

unterhalten; in der Leitung befindet sich noch eine Spule  $R_1, L_1$ . Wird die EMK abgeschaltet, so ist die Differentialgleichung des Stromes

$$L_1 \frac{dJ}{dt} + (R_1 + R)J = 0.$$

Der Strom sinkt vom Werte  $J_0$  auf den Wert Null; während dieses Vorganges wird im ganzen eine Elektrizitätsmenge  $q$  befördert. Durch Integration ergibt sich

$$L_1 J_0 = (R_1 + R)q,$$

also

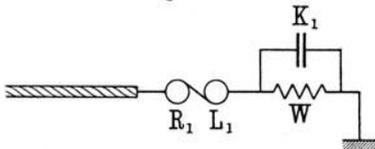
$$q = \frac{L_1 J_0}{R_1 + R}.$$

Eine Spule mit Induktivität wirkt also bei der Stromunterbrechung wie eine EMK mit einem Zeitintegral gleich dem Produkt aus Induktivität und Stromstärke. Sie liefert in der Richtung des Stromes eine Elektrizitätsmenge gleich dem Quotienten aus diesem Produkt und dem Widerstande des Stromkreises. Wenn der Stromkreis noch Kondensatoren in irgendwelcher Schaltung enthält, so nehmen diese im Zeitintegral keinen von Null verschiedenen Betrag von Elektrizität auf, sie können also weder die Menge beeinflussen, noch ihre Verteilung ändern.

Nach § 130 verläuft der Strom in einer Spule bei Beginn eines Zeichens zeitlich ebenso, wie nach dessen Schluß, nur in entgegengesetzter Richtung. Daher ergibt sich, daß für einen anwachsenden Strom eine Spule im Zeitintegral wirkt wie eine EMK mit dem Zeitintegral  $-LJ_0$ .

**§ 140. Die Maxwell-Erde.** Man bezeichnet mit diesem Namen eine Schaltung für Schnellbetrieb<sup>18)</sup>, bei der in der Erdleitung ein Widerstand  $W$

Fig. 121.



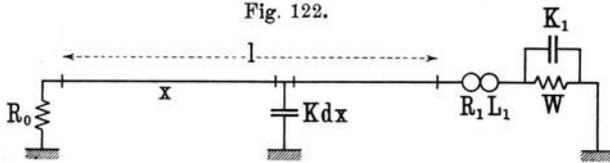
(Fig. 121) eingeschaltet ist, dem ein Kondensator  $K$  parallel liegt. Die Schaltung dient dazu, der Kurve des am Ende ankommenden Stromes sowohl beim Beginn als beim Ende einen steileren Anstieg zu geben. Wenn zu Beginn des Zeichens der Kondensator

ladungsfrei ist, so nimmt er zunächst die Hauptmenge der ankommenden Elektrizität auf und schließt dadurch gewissermaßen den Widerstand kurz. Erst wenn der Kondensator eine gewisse Ladung aufgenommen hat, kann der Spannungsabfall im Widerstande merkliche Werte annehmen. Die Maxwell-Erde bewirkt also, daß der Strom ansteigt, als wenn er den hohen Wert erreichen wollte, den er bei Kurzschluß des Widerstandes annehmen könnte, daß aber der Endwert des Stromes auf einen geringeren Betrag beschränkt wird. Dem steileren Anstieg bei Beginn entspricht auch ein schnellerer Abfall beim Ende des Zeichens.

Nach dieser Erklärung muß also der Widerstand  $R$  ziemlich hohe Werte erhalten. Die Bemessung des Kondensators  $K$  richtet sich nach der Kapazität des Kabels und der Induktivität des Endapparates. Sie soll hier unter dem Gesichtspunkt der Verteilung von Stromintegralen dargelegt werden, während wir bei der Theorie der Telegraphenkabel auf die Frage der Versteigerung

näher eingehen werden. Wir untersuchen nach Fig. 122 den Vorgang am Ende des Zeichens.

Der Stromkreis enthalte eine Leitung von  $l$  km Länge mit einem Widerstande von  $R$  Ohm und einer Kapazität von  $K$  Farad für 1 km, ferner am Ende der Leitung den Endapparat mit Induktivität und die Maxwell-Erde.



In der vorhergehenden Zeit sei in der ganzen Leitung der Strom  $J$  erzeugt worden; dann hat ein Punkt der Leitung im Abstände  $x$  von ihrem Anfange die Spannung  $J[W + R_1 + R(l - x)]$ . In der Kapazität  $K dx$  eines kurzen Stückes Leitung an der Stelle  $x$  befindet sich daher die Menge

$$dq = K J dx [W + R_1 + R(l - x)].$$

Bei der Entladung geht ein Teil nach dem Anfange der Leitung, ein Teil nach dem Ende. Letzterer ist im Zeitintegral

$$dq_1 = dq \frac{Rx + R_0}{W + R_1 + Rl + R_0}.$$

Wir haben hier den Satz angewendet, daß die Verteilung der Mengen im Zeitintegral nur von den Widerständen, nicht von den Induktivitäten oder Kapazitäten des Stromkreises abhängt. Im ganzen sendet die Kapazität der Leitung nach dem Ende die Menge

$$\begin{aligned} q_1 &= \int_0^l dx K J \frac{[W + R_1 + R(l - x)](Rx + R_0)}{W + R_1 + Rl + R_0} \\ &= \frac{1}{2} \frac{Kl R l J}{W + R_1 + Rl + R_0} \left[ \left( W + R_1 + \frac{1}{3} Rl + R_0 \right) + \frac{2R_0}{Rl} (W + R_1) \right]. \end{aligned}$$

Die Selbstinduktivität des Kabels und des Elektromagnets ergibt eine ebenfalls nach dem Ende zu fließende Menge

$$q_s = \frac{J(Ll + L_1)}{W + R_1 + Rl + R_0}.$$

Der Kondensator  $K_1$  besaß die Ladung

$$K_1 \cdot W J.$$

Davon gleicht sich ein Teil durch den Widerstand  $W$  aus, ein anderer Teil geht, und zwar nach dem Anfange der Leitung zu, in die Leitung hinein. Er vermindert also um diesen Betrag die nach dem Ende fließende Menge. Sein Wert ist

$$q_k = K_1 W J \frac{W}{W + R_1 + Rl + R_0}.$$

Die gesamte den Apparat durchfließende Menge ist im Zeitintegral gleich  $q_1 + q_s - q_k$ .

Durch geeignete Wahl von  $K_1$  und  $W$  kann man offenbar diesen Wert gleich Null machen, also erreichen, daß nach dem Aufhören des Zeichens im ganzen keine Elektrizitätsmenge den Apparat durchfließt. Dies bezieht sich aber nur auf das Zeitintegral; in Wirklichkeit fließen nacheinander positive und negative Ströme durch den Elektromagnet, deren Mengen sich ausgleichen.

Wir betrachten die Grenzfälle, daß  $q_l$  sehr gering gegen  $q_s$  sei, und daß umgekehrt  $q_s$  gegen  $q_l$  verschwinde.

Im ersten Falle lautet die Bedingungsgleichung

$$(Ll + L_1) = K_1 W^2.$$

Sie gilt also für Apparate mit hoher Selbstinduktivität am Ende von Leitungen mit geringer Kapazität.

Im zweiten Falle lautet die Gleichung

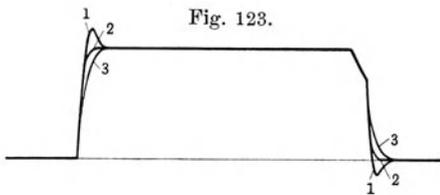
$$\frac{KlRl}{2} \left( (W + R_1 + \frac{1}{3} Rl + R_0) + \frac{2R_0}{Rl} (W + R_1) \right) = K_1 W^2 \dots (163)$$

Es ist vorhin bemerkt worden, daß  $W$  verhältnismäßig groß sein müsse, um die beabsichtigte Wirkung hervorzubringen.  $R_1$  als Widerstand eines Apparates mit geringer Selbstinduktivität,  $R_0$  als Erdleitungswiderstand werden unerheblich gegen  $W$  sein. Wenn dies auch von  $\frac{1}{3} Rl$  gälte, so hätte man

$$K_1 W = \frac{1}{2} KlRl \dots \dots \dots (163a)$$

Bei einem Kabel mit starkem Leiter, also kleinem Einheitswiderstande und großer Kapazität hat man also in erster Annäherung das Produkt  $K_1 W$  gleich der Hälfte des Produktes aus dem Gesamtwiderstand in die Gesamtkapazität des Kabels zu machen.

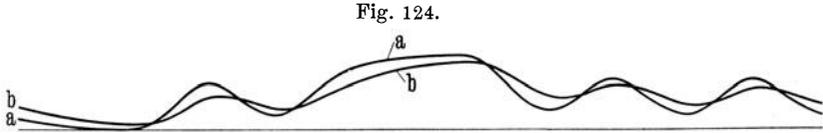
Im Betriebe kommt diese Annäherung den tatsächlichen Verhältnissen trotz der Vernachlässigung der anderen Widerstände deshalb nahe, weil der Strom auf dem Kabel fast nie den Endwert erreicht. Daher nehmen auch, wie später näher gezeigt werden wird, die einzelnen Stellen des Kabels nicht



so hohe Spannung an und so viel Ladung auf, wie hier vorausgesetzt wurde; es ist daher  $q_l$  im Betriebe geringer als nach der Formel. Die Vernachlässigung der Widerstände in den Klammern, außer dem  $W_1$ , gleicht diesen Unterschied in etwa aus.

Fig. 123 stellt eine Aufnahme an einer künstlichen Leitung dar, welche aus einem Widerstand von 3600 Ohm bestand, von dem an fünf gleich weit auseinander liegenden Punkten je  $2 \mu F$  zur Erde abgezweigt waren. Als Empfangsapparat war ein Standardrelais eingeschaltet. Die Maxwell-Erde bestand aus einem Widerstand von 5800 Ohm, dem verschieden große Kondensatoren parallel geschaltet wurden. Bei  $0,25 \mu F$ , Kurve 2, war die Ausgleichung am besten; bei  $0,45 \mu F$ , Kurve 1, ist die Maxwell-Schaltung zu stark; bei  $0,05 \mu F$ , Kurve 3, ist sie zu schwach. Die Zeichen der Fig. 123 sind ein Ausschnitt aus einem  $l$ -Zeichen, von denen 180 in der Minute gegeben wurden, das dargestellte dauerte 0,08 Sekunden.

Die Wirkung der Maxwell-Erde an einem langen Kabel wird in Fig. 124 an zwei Kurven dargestellt, die nacheinander bei verschiedener Geschwindigkeit auf demselben Blatte aufgenommen sind, und die ankommenden Ströme am Ende eines künstlichen Kabels von  $3600 \text{ Ohm}$  und  $100 \mu F$  darstellen.

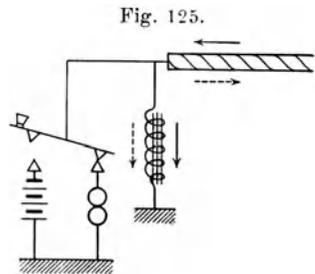


Bei der Aufnahme der Kurve *a* war hinter das als Empfänger dienende Standardrelais eine Maxwell-Erde mit  $7400 \text{ Ohm}$  und  $25 \mu F$  gelegt; das ganze Zeichen, wie es die Figur darstellt, wurde in der Minute 167 mal gegeben. Die Batterie war so gewählt, daß ein Dauerstrom von 8 Milliampere zustande kam, wenn der Stromschließer ruhte. Die Kurve *b* dagegen stellt die Form des ankommenden Stromes gleichen Endwertes beim Fehlen der Maxwell-Erde dar; das Standardrelais konnte das Zeichen gerade noch richtig wiedergeben, aber nur bis zu einer Geschwindigkeit von 1187 in der Minute; bei dieser Geschwindigkeit ist die Aufnahme geschehen. Tatsächlich ist also die Stromkurve ohne Maxwell-Erde noch viel flacher, als es nach Fig. 124 scheint, weil infolge der Aufnahme auf demselben Blatt die Abszissen der Kurve *b* im Vergleich zu denen von *a* auf etwa  $\frac{7}{10}$  verkürzt sind, während gleiche Ordinaten gleiche Ströme wie bei Kurve *a* anzeigen.

Die Bedingung (163) ist hier fast genau erfüllt. Berechnet man beide Seiten von Gl. (163), so ergeben sich  $1024 \cdot 10^6$  und  $1369 \cdot 10^6$ . Für den Unterschied kann man zum Teil die vernachlässigte Induktivität des Relais anführen.

Herrn Postrat Dreisbach verdanke ich die Mitteilung, daß die in Gl. (163 a) angegebene Regel im Betriebe bei Kabeln mit einem Werte des  $KLRL$  von  $200\,000$  bis  $700\,000 \mu F \text{ Ohm}$  bestätigt wird.

§ 141. Die Gegenstromrollen nach Godfroy<sup>19)</sup>. Eine andere Vorrichtung zur Beschleunigung der Entladung sind die Gegenstromrollen, welche an verschiedenen Stellen des Kabels, insbesondere am Anfang und am Ende angebracht werden, bei Landkabeln auch an Orten unterwegs. Zum Verständnis ihrer Wirkung wollen wir den Entladungsvorgang am Anfang des Kabels (Fig. 125) betrachten. Während der vorhergehenden Stromsendung hatten die von der Batterie ausgehenden Ströme die Richtungen der gestrichelten Pfeile, die ausgezogenen Pfeile stellen die Richtung der Entladung aus dem Kabel dar, sowie den Strom, welchen die Spule nach dem Auflösen des stationären Stromes fortzusetzen bestrebt ist. Die Entladung aus dem Kabel fließt dem Ladungsstrom entgegengesetzt. Die Spule bietet den Entladungsströmen nicht nur einen Weg, sondern die in ihr beim Verschwinden des Stromes entstehende EMK saugt bei geeigneter Bemessung

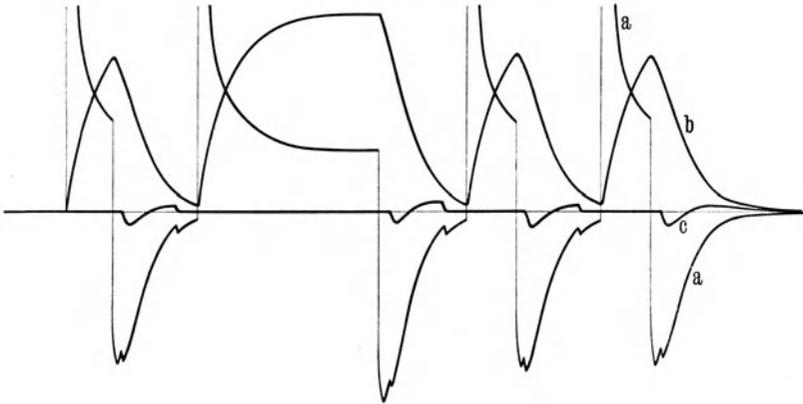


die Ladung aus dem Kabel unter Umgehung des Apparates ab. In Wirklichkeit ist auch hier nur zu erreichen, daß das Zeitintegral des Stromes den Wert Null hat; das Resultat ist gleichwohl, wie bei der Maxwell-Erde, eine schnellere Entladung und daher eine schärfere Trennung aufeinander folgender Zeichen.

Näher auf die Berechnung der Induktivität der zu verwendenden Spulen einzugehen, hat zurzeit nicht mehr so viel Interesse, wie vor stark einem Jahrzehnt. Die Landkabel im Deutschen Reiche werden heute mit Doppelstrom in Gegensprechsaltung betrieben, und die Entfernungen, über welche ohne Übertragung gearbeitet wird, sind stark verkürzt worden. Es müßte von der wirklichen und der künstlichen Leitung je eine Gegenstromrolle zur Erde abgezweigt werden. Die Anordnung würde sehr viel Strom verbrauchen; sie ist daher aufgegeben worden.

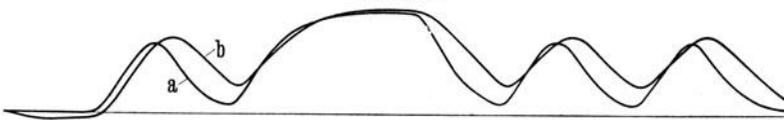
Die Fig. 126 und 127 stellen die Vorgänge an dem in § 140 erwähnten künstlichen Kabel mit Gegenstromrollen dar, und zwar Fig. 126 die am

Fig. 126.



Anfange, Fig. 127 die am Ende. In Fig. 126 bedeutet *a* die Kurve des Stromes, der hinter der Gegenstromrolle in das Kabel (2800 Ohm,  $80 \mu F$ ) eintritt; *b* zeigt den durch die Gegenstromrolle zur Erde fließenden Strom

Fig. 127.



an, *c* den über den Empfänger der gebenden Stelle fließenden Rückstrom. Die Gegenstromrolle erfüllt, wie ersichtlich, die Aufgabe, die Entladung aus dem Kabel unter Umgehung des Empfangsapparates zur Erde zu führen, man sieht aber, daß sie den überwiegenden Teil der von der Stromquelle gelieferten Strommenge beansprucht.

Die Spulen waren so abgeglichen worden, daß ein in die Erdleitung des Empfängers eingeschalteter Strommesser so wenig wie möglich zuckte. Die Kurven *c* zeigen die erfolgte Abgleichung, bei der positive und negative Restströme sich fast aufheben.

Die Zeichengeschwindigkeit war hierbei 85 l in 1 Minute. Von den Kurven der Fig. 127 bezieht sich Kurve *a* auf die Schaltung mit Gegenstromrollen. Kurve *b* stellt die Empfängerkurve desselben Kabels bei derselben Geschwindigkeit dar, indessen ohne Gegenstromrollen und solcher Batteriespannung, daß der stationäre Endwert etwa derselbe war, wie vorher. Als Empfänger diente ein Morsefarbschreiber, der im ersten Falle vollkommen gute Zeichen gab, während er bei Kurve *b* den Strich und die beiden letzten Punkte nicht trennte.

**§ 142. Scheinbare Selbstinduktivität von Leitungen.** Man entnimmt den Rechnungen über Stromintegrale noch den Begriff der scheinbaren Selbstinduktivität einer Telegraphenleitung, zu dem folgende Überlegung führt.

Wenn die Leitung am Anfang und am Ende bei der Entladung direkt geerdet wird, so folgen für die durch ihre Selbstinduktivität und Kapazität in Bewegung gesetzten Elektrizitätsmengen die Beträge

$$q'_L = \frac{JL}{R}, \quad q'_K = -J \frac{KlRl}{3}.$$

Ihre algebraische Summe läßt sich schreiben

$$q = \frac{J}{Rl} \left( Ll - Kl \frac{(Rl)^2}{3} \right).$$

Hätte die Leitung nur Selbstinduktivität, keine Kapazität, so wäre

$$q = J \frac{Ll}{Rl},$$

es kann also

$$L' = \left( Ll - Kl \frac{(Rl)^2}{3} \right)$$

als die scheinbare Selbstinduktivität der Leitung bezeichnet werden. Je nachdem  $L'$  positiv oder negativ ist, geht bei der Erdung ein Stromstoß in der Richtung des vorhergehenden Stromes oder ihm entgegengesetzt; es ist leicht zu sehen, daß ersteres bei oberirdischen Leitungen nicht zu großer Länge eintritt, während das andere in der Regel bei Kabelleitungen der Fall ist. Mit einiger Annäherung gelten diese Angaben auch noch, wenn die Leitung mit Apparaten verbunden ist; es ist aber in jedem Falle leicht, durch die ausführliche Rechnung den tatsächlichen Betrag der in der einen oder anderen Richtung in Bewegung gesetzten Menge zu bestimmen.

---

#### Vierter Abschnitt.

### Neuere Rechnungsweisen für die Berechnung von veränderlichen Vorgängen.

**§ 143. Ausgleichsvorgänge.** In den Beispielen des vorhergehenden Abschnitts haben wir die für den einzelnen Fall geltende Differentialgleichung zuerst allgemein integriert und dann die unbestimmten Konstanten durch Zurückgehen auf die für bestimmte Werte der Integrationsvariablen, hier  $t$ ,

geltenden Werte der abhängigen Variablen ihrem Werte nach bestimmt. Das Verfahren ist an sich ganz richtig, aber im wesentlichen formal algebraisch. Man kann ihm nach K. W. Wagner<sup>20)</sup> eine physikalische Deutung geben; welche alle Vorgänge aus einem einheitlichen Gesichtspunkt betrachtet und daher zumal bei den verwickelten Vorgängen an Leitungen die Übersicht erleichtert. Es handelt sich darum, daß die Erscheinungen, welche zu beobachten sind, wenn ein Stromkreis aus einem gewissen Anfangszustand in einen bestimmten Endzustand versetzt wird, als durch vorübergehende oder flüchtige oder Ausgleichsvorgänge erzeugt betrachtet werden.

Wenn im Beispiel des § 130 an einen vorher stromlosen Kreis aus einem Widerstand und einer Spule mit Induktivität eine EMK gelegt wird, so wird der Kreis aus dem Anfangszustand der Stromlosigkeit in einen zweiten Zustand eines gleichmäßig dauernden Stromes versetzt. Von dem natürlichen Vorgang wird Stetigkeit verlangt, daß also der Strom nicht sprungweise, sondern allmählich ansteigt. Die bisherige Betrachtung erfüllt diese Forderung, indem sie nachweist, daß der Strom in einem Zeitelement  $dt$  nur um ein Element  $dJ$  wächst, so daß  $dJ/dt$  eine endliche Größe ist.

Man kann aber auch die Stetigkeit dadurch herstellen, daß man in dem Stromkreis einen mit dem Augenblick der Einschaltung der EMK, einem plötzlichen Vorgang, plötzlich einsetzenden Ausgleichstrom voraussetzt. Seine Ursache ist der einmalige Wechsel der EMK, und dementsprechend ist der Ausgleichstrom vorübergehender Art. Man kann diese Auffassung folgendermaßen in eine Formel kleiden:

$$(J)_{s_1} = (J)_{s_2} + J_f \quad \text{für } t = 0.$$

Der Zustand  $s_1$  geht in Augenblick  $t = 0$  unter Mitwirkung der flüchtigen Vorgänge in den Zustand  $s_2$  über.

Wendet man diese Auffassung auf die Ergebnisse in § 130 an, so ergibt sich für den Übergang von dem stromlosen in den stromführenden Zustand

$$(J)_{s_1} = 0, \quad (J)_{s_2} = \frac{E}{R},$$

also nach Gl. (161):

$$J_{f_1} = -\frac{E}{R} e^{-\frac{R}{L}t}.$$

Bei der Rückkehr aus dem stationär gewordenen Zustand in den stromlosen ist dagegen

$$(J)_{s_1} = \frac{E}{R}, \quad (J)_{s_2} = 0,$$

also ist

$$J_{f_2} = +\frac{E}{R} e^{-\frac{R}{L}t}.$$

Dieses Beispiel erinnert insofern an bekannte Vorstellungen, als es dem Strom in der Spule bei Stromschluß einen dem Dauerstrom entgegengerichteten, bei Stromöffnung ihm gleichgerichteten vorübergehenden Strom, wie man sagt Extrastrom, beifügt. Dieser hat also die gleiche Richtung, wie der in einer von der ersten Wicklung induzierten Nachbarwicklung entstehende Induktionsstrom.

Weil die Ursache des Ausgleichstromes der einmalige Wechsel der EMK ist — vorausgesetzt, daß nicht mehrere schnell folgende Wechsel zu sich überdeckenden Ausgleichströmen führen —, so ist der zeitliche Verlauf des Ausgleichstromes für beliebige Form und Stärke der Veränderung der EMK, abgesehen von der erreichten Stromstärke, immer derselbe.

Die besprochene Betrachtungsweise ist für die Einsicht in die physikalischen Vorgänge sehr fruchtbar. Wir begnügen uns gleichwohl im wesentlichen mit diesem Hinweis auf ihr Prinzip, weil sie für die meisten Berechnungen durch ein bis dahin wenig beachtetes Rechenverfahren von Heaviside<sup>21)</sup> ersetzt werden kann, dessen Begründung und Präzisierung K. W. Wagner zu danken ist.

**§ 144. Allgemeines Integrationsverfahren nach Heaviside.** Ohne nähere Begründung, man möchte sagen, aus reiner Anschauung, hat Heaviside eine Formel aufgestellt, nach welcher man Vorgänge, bei denen ein System aus dem Zustand der Ruhe in einen anderen Zustand übergeht, mittels einer nur grundsätzlichen, aber praktisch gar nicht erforderlichen Integration formelmäßig darstellen kann, ohne daß man sich um die Bestimmung der Konstanten nach einem der bisher besprochenen Verfahren auch nur zu kümmern braucht. Damit ist ein Werkzeug geschaffen, dessen Wichtigkeit seine eingehende Darstellung rechtfertigt.

Die Darstellung zerfällt in den Nachweis eines analytischen Ausdrucks für eine EMK, welche bis zu einer gewissen Zeit den Wert Null und von dieser Zeit ab einen konstanten Wert hat, und in die Aufstellung einer Gleichung, nach welcher sich aus dieser EMK die abhängigen Größen als Zeitfunktionen ergeben. Für beide Teile machen wir wieder Gebrauch von dem schon in § 119 benutzten Hilfssatz über Funktionen einer komplexen Veränderlichen (Anhang III).

**§ 145. Zeitfunktion eines sprungweise ansteigenden Vorgangs.** Aus der Theorie der bestimmten Integrale sind Funktionen bekannt, welche bis zu einem bestimmten Wert eines Parameters, z. B. der Zeit, einen bestimmten festen Wert haben und von diesem Wert des Parameters ab dauernd einen anderen Wert annehmen. Eine solche Funktion ist das Integral

$$\int_{p=0}^{\infty} \frac{\sin p t}{p} d p,$$

welches für negative  $t$  den Wert  $-\frac{\pi}{2}$ , für positive  $t$  den Wert  $+\frac{\pi}{2}$  und für  $t = 0$  den Wert Null hat. Aus ihm wird der diskontinuierliche Faktor von Dirichlet hergeleitet, der für alle Werte von  $t$  mit Ausnahme eines begrenzten Intervalls den Wert Null, in diesem Intervall aber einen konstanten Wert hat.

Heaviside geht von dem Integral einer der Funktion des obigen ähnlichen aus, nämlich von der Funktion  $\frac{e^{p t}}{p}$  der komplexen Veränderlichen  $p$ .

Diese Funktion ist für endliche  $t$  stets endlich und stetig, außer für  $p = 0$ .

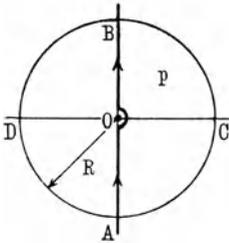
Wir rechnen die Zeit positiv von dem Augenblick ab, in dem der Anstieg einsetzen soll, vorher liegende Zeiten gelten als negativ. Fig. 128 stelle die Ebene der komplexen Zahlen  $p$  dar. Für alle Werte von  $p$ , deren reeller Anteil positiv ist, nimmt  $e^{p t}$  für negative Zeiten beliebig weit ab, also für alle Punkte, die rechts von der Achse  $AB$  liegen. Dagegen nimmt  $e^{p t}$  für alle Punkte links der Achse  $AB$  mit positiven Zeiten beliebig weit ab.

Es soll nun gezeigt werden, daß die Funktion

$$U = \frac{E}{2\pi i} \int_{p=-i\infty}^{p=+i\infty} \frac{e^{p t}}{p} dp \dots \dots \dots (164)$$

die Eigenschaft hat, daß sie für alle negativen Zeiten den Wert Null, für  $t = 0$  und alle positiven Zeiten dagegen den Wert  $E$  hat. Als Funktion der Zeit hat sie dann den durch Fig. 129 dargestellten Verlauf, welcher der einen im Augenblick  $t = 0$  in einen Stromkreis eingeschalteten konstanten EMK entspricht.

Fig. 128.

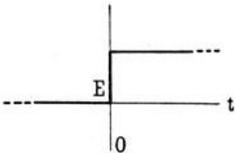


Nach dem Hilfssatz hat das Integral

$$\int_{\bigcirc} \frac{e^{p t}}{p} dp$$

über die geschlossene Linie  $A O B C A$ , welche den Punkt  $p = 0$  umgeht, den Wert Null, wie nahe auch der kleine Bogen an den Nullpunkt herankommt. Wenn wir die Linie so ausdehnen, daß  $AB$  von  $-i\infty$  bis  $+i\infty$  geht,  $BCA$  also einen Halbkreis mit sehr großem Radius bedeutet, so ist,

Fig. 129.



um den Beweis zu führen, daß das  $\int_{-i\infty}^{+i\infty} \frac{e^{p t}}{p} dp$  für alle

negativen  $t$  den Wert Null hat, zu zeigen, daß der auf den Halbkreis entfallende Anteil selbst dem Wert Null beliebig nahe kommt.

Ist  $R$  der Radius des Halbkreises, so ist

$$p = x + i y = R (\cos \varphi + i \sin \varphi).$$

Man erhält die auf dem Halbkreis liegenden Wertepaare  $x$  und  $y$ , indem man  $\varphi$  bei festem  $R$  stetig ändert. Es ist also:

$$dp = i R (\cos \varphi + i \sin \varphi) d\varphi.$$

Es handelt sich daher um den Wert des Integrals

$$\int_{\varphi = -\frac{\pi}{2}}^{\varphi = \frac{\pi}{2}} \frac{e^{R t (\cos \varphi + i \sin \varphi)}}{R (\cos \varphi + i \sin \varphi)} i R (\cos \varphi + i \sin \varphi) d\varphi$$

für  $R = \infty$ . Da  $\cos \varphi > 0$ , so verschwindet das Integral für alle  $t < 0$  um so mehr, je größer  $R$  ist.

Daher hat die in Gl. (164) definierte Funktion für alle Zeiten vor  $t = 0$  den Wert Null.

Der Integrationsweg  $A O B D A$  für die  $p$  mit negativem  $x$ , welche für die positiven Zeiten in Betracht kommen, enthält auch einen Halbkreis, welcher, weil diesmal  $\cos \varphi < 0$  ist, für alle positiven  $t$  einen mit  $R$  verschwindenden Beitrag ergibt; die Integration über den geschlossenen Weg ergibt also ebenfalls dasselbe, wie die über die imaginäre Achse von  $-i \infty$  bis  $+i \infty$ .

Der Weg  $A O B D A$  umschließt aber den Nullpunkt, der ein Unstetigkeitspunkt ist. Der Wert des Integrals über den ganzen Weg, der übereinstimmt mit dem Wert der Funktion  $U$  von  $t = 0$  bis  $t = \infty$ , ist also gleich dem Wert des Integrals über eine den Nullpunkt umschließende Linie.

Setzt man  $p = r e^{i \varphi}$ , wo  $r$  eine kleine Größe bezeichnet, so handelt es sich um das Integral

$$U = \frac{E}{2 \pi i} \int_{\varphi = 0}^{2 \pi} i d \varphi e^{r (\cos \varphi + i \sin \varphi) t}.$$

Je kleiner man  $r$  annimmt, um so mehr wird die Exponentialfunktion gleich Eins, das Integral also gleich  $2 \pi i$  oder  $U = E$ .

Hiermit ist also von der Funktion  $U$  in Gl. (164) bewiesen, daß sie von  $t = -\infty$  bis beliebig nahe vor  $t = 0$  den Wert Null, von  $t = 0$  bis  $t = +\infty$  den Wert  $E$  hat.

**§ 146. Die Darstellung der abhängigen Veränderlichen.** Die plötzlich mit konstantem Werte einsetzende treibende EMK ist durch Gl. (164) als Zeitfunktion dargestellt. Man kann die Funktion  $U$  auffassen als die Summe von Beträgen  $\frac{E d p}{2 \pi i p} e^{p t}$ , deren jeder durch einen bestimmten Wert der Größe  $p$  gekennzeichnet ist. Jeder Anteil für sich wird zum Wert der abhängigen Variablen einen Beitrag in der Höhe

$$d S = \frac{E d p}{2 \pi i p W} e^{p t}$$

herbeiführen, und daher ergibt sich im ganzen

$$S = \frac{E}{2 \pi i} \int_{-i \infty}^{+i \infty} \frac{e^{p t}}{p W} d p \dots \dots \dots (165)$$

Bis zur Zeit  $t = 0$  ist nach der Herleitung  $S = 0$ ; bei der Auswertung des Integrals von der Zeit  $t = 0$  ab ist der Integrationsweg über  $A O B D A$  zu wählen.

$W$  ist hierin als ein Faktor von bestimmter Dimension, je nach der Art von  $S$  aufzufassen, der eben das Verhältnis des Teileffekts  $d S$  zu dem Teil der EMK von der Größe  $\frac{E e^{p t}}{2 \pi i} d p$  bezeichnet.

Es ist angebracht, darauf hinzuweisen, daß eine Gleichung wie (165) nicht das Ergebnis eines normalen Beweises ist, sondern wie eine Erfindung zu betrachten ist. Wie eine solche hat sie etwas Überraschendes, Sprung-

haftes. Sie kann daher kaum anders als durch den Nachweis ihrer Brauchbarkeit begründet werden.

Man findet  $W$ , das im allgemeinen eine Funktion von  $p$  ist und von K. W. Wagner als die Stammfunktion für die besondere Aufgabe bezeichnet wird, aus ihren Differentialgleichungen, indem man feststellt, in welchem Verhältnis eine abhängige Variable von der zeitlichen Form  $Se^{pt}$  zu einer EMK von der Zeitform  $Ee^{pt}$  steht.

Bei der Ausführung der in Gl. (165) vorgeschriebenen Integration sind die Unstetigkeitspunkte zu beachten. Ein solcher ist zunächst  $p = 0$ , andere liegen in allen Werten von  $p$ , für welche  $W = 0$  wird, also den Wurzeln  $p_\nu$  dieser Gleichung.

Nach den Regeln für Integrale komplexer Funktionen über geschlossene Wertefolgen ergibt sich ohne weiteres eine Umformung der Gl. (165); die dort angegebene Integration ist zu ersetzen durch Integrationen (Fig. 130) um die einzelnen Unstetigkeitspunkte, so daß Gl. (165) übergeht in die Gleichung

$$S = \frac{E}{2\pi i} \left\{ \int_{\underset{p=0}{\circ}} \frac{e^{pt}}{p} W dp + \sum_{\nu} \int_{\underset{p_\nu}{\circ}} \frac{e^{pt}}{p} W dp \right\} \dots \dots \dots (166)$$

Diese Integralumformung ist aber nach K. W. Wagner nur zulässig, wenn die Funktion  $W$  drei Forderungen erfüllt: 1. daß  $\frac{1}{W}$  für alle Punkte eines Kreises mit beliebig großem Radius  $R$  unter einem festen endlichen Wert liegt, 2. daß keine Wurzel von  $W$  einen positiven reellen Anteil habe, 3. daß  $W$  eine eindeutige Funktion von  $p$  sei.

Die erste Forderung wird erhoben, damit das Integral auch an der Grenze  $BDA$  des Integrationswegs verschwinde, so daß man die Integration von  $-i\infty$  bis  $+i\infty$  durch die über einen geschlossenen Weg ersetzen kann. Wäre die zweite nicht erfüllt, so lägen Unstetigkeitspunkte in dem Integrationsgebiet für die Zeit vor  $t = 0$ , und wäre die dritte nicht erfüllt, so wären auch die abhängigen Veränderlichen nicht eindeutig.

Funktionen, welche die zweite Forderung erfüllen, ergeben dadurch für alle Zeiten vor  $t = 0$  für die Funktion  $S$  den Wert Null.

Es bleibt noch übrig, für die Integrale über die kleinen Kreise geeignete Formeln zu finden.

In der Nähe des Nullpunkts setzen wir  $p = re^{i\varphi}$  und erhalten den Anteil

$$S_0 = \frac{E}{2\pi i} \int_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi} \frac{e^{rt} e^{i\varphi t}}{(W)_{p=0}} \cdot i d\varphi.$$

Mit abnehmendem  $r$  wird dies

$$S_0 = \frac{E}{(W)_{p=0}}.$$

Bei einem anderen Unstetigkeitspunkt  $p_\nu$  setzen wir

$$p = p_\nu + \xi, \quad \text{wo} \quad \xi = re^{i\varphi}.$$

Dann ist

$$e^{p t} = e^{p_\nu t} e^{\xi t},$$

oder für kleine  $\xi$

$$e^{p t} = e^{p_\nu t} (1 + \xi t).$$

Ferner ist

$$W = (W)_{p = p_\nu} + \xi \left( \frac{\partial W}{\partial p} \right)_{p = p_\nu} + \dots,$$

und darin ist  $(W)_{p = p_\nu} = 0$ , weil  $p_\nu$  eine der Wurzeln von  $W = 0$  ist. Man erhält daher

$$\left( \frac{e^{p t}}{p W} \right)_{p_\nu} = \frac{e^{p_\nu t}}{\xi p_\nu \left( \frac{\partial W}{\partial p} \right)_{p_\nu}} \cdot \left( 1 + \xi t - \frac{\xi}{p_\nu} \right).$$

Mit  $d p = d \xi = i d \varphi r e^{i \varphi}$  folgt unter Fortlassung kleinerer Größen höherer Ordnung

$$S_\nu = \frac{E}{2 \pi i} \int_{\varphi=0}^{\varphi=2 \pi} \frac{e^{p_\nu t}}{p_\nu \left( \frac{\partial W}{\partial p} \right)_{p_\nu}} i d \varphi.$$

Der Faktor von  $i d \varphi$  ist von  $\varphi$  unabhängig, also ist

$$S_\nu = \frac{E e^{p_\nu t}}{p_\nu \left( \frac{\partial W}{\partial p} \right)_{p_\nu}}.$$

Man erhält so schließlich die Formel für die abhängige Veränderliche

$$S = \frac{E}{W_{(p: 0)}} + \sum_\nu \frac{E e^{p_\nu t}}{p_\nu \left( \frac{\partial W}{\partial p} \right)_{p_\nu}} \dots \dots \dots (167)$$

welche wir fortan die Heavisidesche Formel nennen.

Wie man sieht, erfordert diese Gleichung, welche tatsächlich das Integral einer Differentialgleichung darstellt, keine Ausrechnung von irgendwelchen Integralen. Ihrer praktischen Verwertung stellen sich Schwierigkeiten nur in der Auffindung der Wurzeln  $p_\nu$  für jede beliebige Gleichung  $W = 0$  entgegen.

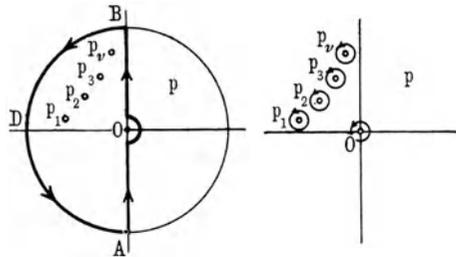
Beispiel. Wir werden im folgenden sehr viel Gebrauch von dieser Formel oder daraus abgeleiteten machen, es dürfte aber zweckmäßig sein, an einem Beispiel, das wohlbekannt ist, die Formel von Grund auf anzuwenden. Die Differentialgleichung des Stromanstiegs in einer Spule mit Induktivität, § 130

$$E = J(R + r) + L \frac{d J}{d t}$$

ergibt unter der Annahme, daß eine EMK  $E_p e^{p t}$  einen Strom  $J_p e^{p t}$  herbeiführt, die Gleichung

$$E_p = J_p (R + r + p L).$$

Fig. 130.



Daher ist

$$W = R + r + pL, \quad p_1 = -\frac{R+r}{L}, \quad \frac{\partial W}{\partial p} = L, \quad W(0) = R+r.$$

Es gibt hier nur eine Wurzel, und  $p$  kommt in  $\frac{\partial W}{\partial p}$  nicht vor. Die Formel (167) ergibt

$$J = \frac{E}{R+r} + \frac{E e^{-\frac{R+r}{L}t}}{-\frac{R+r}{L}} \cdot \frac{1}{L}.$$

Wenn man sie ordnet, stimmt sie mit Gl. (161) vollkommen überein.

**§ 147. Fall einer Stammfunktion mit gleichen Wurzeln.** Es kommt unter besonderen Bedingungen vor, daß zwei oder mehr Wurzeln der Gleichung  $W = 0$  zusammenfallen. Die bisherige Ableitung beruht darauf, daß die Entwicklung von  $W$  in eine nach Potenzen von  $\xi$  steigende Reihe bereits mit dem Gliede mit  $\xi$  beginnt, weil  $\left(\frac{\partial W}{\partial p}\right)_{p=p_\nu}$  nicht mehr Null wird, wenn  $p_\nu$  eine einfache Wurzel ist. Ist aber z. B.  $p_1$  eine mehrfache Wurzel, so daß man bei insgesamt  $n$  Wurzeln schreiben kann

$$W = (p - p_1)^k (p - p_2) (p - p_3) \dots (p - p_{n-k}),$$

so werden einer oder mehrere Differentialquotienten nach  $p$  für  $p = p_1$  zu Null; die nach Potenzen von  $\xi$  steigende Entwicklung beginnt erst mit  $\xi^k = r^k e^{i k \varphi}$ , und da im Zähler nur  $d\xi = i r e^{i \varphi} d\varphi$  steht, so erscheint  $\int \frac{e^{p t} d\xi}{p W}$  für  $p = p_1$  unendlich groß.

Man erhält die Lösung für diesen Fall, indem man davon ausgeht, daß gleiche Wurzeln davon herrühren, daß von den im allgemeinen untereinander verschiedenen Wurzeln durch bestimmte Abänderung der Parameter einige sich einander genähert haben und schließlich zusammengefallen sind. Wir führen die Überlegungen für eine dreifache Wurzel durch, weil sich daraus zur Genüge ersehen läßt, wie das Ergebnis bei einer beliebig vielfachen zu ermitteln ist.

Es sei

$$W = (p - p_1) (p - p_2) (p - p_3) W',$$

worin  $p_1, p_2, p_3$  drei Wurzeln sind, die vorläufig als verschieden betrachtet werden, aber später untereinander gleich werden sollen.  $W'$  ist das Produkt  $(p - p_4) \dots (p - p_n)$ , wenn  $W$  im ganzen  $n$  Wurzeln hat. Man hat dann zu bilden:

$$\int_{\bigcirc} \frac{e^{(p_1 + \xi_1)t} d\xi_1}{(p W)_{p_1 + \xi_1}} + \int_{\bigcirc} \frac{e^{(p_2 + \xi_2)t} d\xi_2}{(p W)_{p_2 + \xi_2}} + \int_{\bigcirc} \frac{e^{(p_3 + \xi_3)t} d\xi_3}{(p W)_{p_3 + \xi_3}} + \Sigma,$$

worin  $\xi_1, \xi_2, \xi_3$  wie vorher die komplexen Zahlen auf dem Umfange kleiner Kreise bezeichnen, welche die Unstetigkeitspunkte  $p_1, p_2, p_3$  umgeben.  $\Sigma$  ist die Summe der Integrale um die Unstetigkeitspunkte, die einfachen Wurzeln entsprechen.

Man hat wie vorher zu bilden:

$$(W)_{p_1 + \xi_1} = W(p_1) + \xi_1 \left( \frac{\partial W}{\partial p} \right)_{p_1} = \xi_1 (p_1 - p_2) (p_1 - p_3) (W')_{p_1}.$$

Wie man leicht sieht, werden die übrigen Posten von  $\frac{\partial W}{\partial p}$  für  $p = p_1$  gleich Null. Ferner ist

$$\begin{aligned} (W)_{p_2 + \xi_2} &= \xi_2 (p_2 - p_1) (p_2 - p_3) (W')_{p_2}, \\ (W)_{p_3 + \xi_3} &= \xi_3 (p_3 - p_1) (p_3 - p_2) (W')_{p_3}. \end{aligned}$$

Da z. B.  $d\xi_1 = i d\varphi \xi_1$ , so fallen  $\xi_1, \xi_2, \xi_3$  in Zähler und Nenner heraus, und die obige Summe geht über in

$$2\pi i \left( \frac{e^{p_1 t}}{p_1 (p_1 - p_2) (p_1 - p_3) (W')_{p_1}} + \frac{e^{p_2 t}}{p_2 (p_2 - p_1) (p_2 - p_3) (W')_{p_2}} + \frac{e^{p_3 t}}{p_3 (p_3 - p_1) (p_3 - p_2) (W')_{p_3}} \right) + \Sigma.$$

Wir wollen zuerst nur  $p_1$  und  $p_2$  allmählich zusammenfallen lassen und setzen  $p_2 = p_1 - \xi_2$ , wobei  $\xi_2$  eine allmählich verschwindende Größe ist; man erhält dann für die beiden ersten Posten der Klammer, deren dritter vorläufig gerade so wie  $\Sigma$  zu behandeln ist,

$$\frac{e^{p_1 t}}{p_1 \xi_2 (p_1 - p_3) (W')_{p_1}} - \frac{e^{p_1 t - \xi_2 t}}{(p_1 - \xi_2) \xi_2 (p_1 - \xi_2 - p_3) (W')_{p_1 - \xi_2}}.$$

Wo  $\xi_2$  additiv steht, kann es gestrichen werden; auch ist  $(W')_{p_1 - \xi_2}$  merklich gleich  $(W')_{p_1}$ , weil  $p_1$  keine Wurzel von  $W'$  ist. Daher hat man zu setzen:

$$\frac{e^{p_1 t}}{p_1 (p_1 - p_3) (W')_{p_1}} \left( \frac{1}{\xi_2} - \frac{e^{-\xi_2 t}}{\xi_2} \right)_{\xi_2=0} = \frac{e^{p_1 t t}}{p_1 (p_1 - p_3) (W')_{p_1}}.$$

Kommen drei gleiche Wurzeln in Betracht, so werde  $p_2 = p_1 - \xi_2$ ,  $p_3 = p_1 - \xi_3$  gesetzt. Die Entwicklung für drei Posten ergibt nach derselben Art:

$$\frac{e^{p_1 t}}{p_1 (W')_{p_1}} \left( \frac{1}{\xi_2 \xi_3} + \frac{e^{-\xi_2 t}}{\xi_2 (\xi_2 - \xi_3)} - \frac{e^{-\xi_3 t}}{\xi_3 (\xi_2 - \xi_3)} \right)_{\xi_2=0, \xi_3=0} = \frac{e^{p_1 t} t^2}{2! p_1 (W')_{p_1}}.$$

Ähnliche Herleitungen ergeben, auch wenn noch mehr gleiche Wurzeln vorhanden sind, endliche Integrale, wie es nach der physikalischen Bedeutung des Operators  $W$  nicht anders zu erwarten war.

**§ 148. Anpassung der Heavisideschen Formel für veränderliche elektromotorische Kräfte.** Mit der bisher erörterten Formel kann man den Anstieg einer abhängigen Veränderlichen, Stromstärke, Spannung, mit der Zeit feststellen, wenn zur Zeit  $t = 0$  an ein in völliger Ruhe befindliches System eine EMK angelegt wird, welche unbeschränkt lange auf einem konstanten Wert gehalten wird. Für die Aufgaben der Fernmeldetechnik kommen aber gerade solche Vorgänge in Betracht, bei denen die EMK sich in kurzen Zeiträumen ändert, sei es, daß sie, wie bei der Telegraphie mit Gleichstromquellen, nur kurze Zeit angelegt und dann wieder abgenommen wird, sei es, daß sie, wie in der Telephonie, sich dauernd ändert. Man kann Vorgänge der ersten

Art aus der Kurve des Anstiegs für ein Dauerzeichen ableiten. Hat die EMK  $E$  während einer Zeit  $\tau$  gewirkt, und man ersetzt sie dann durch einen Leiter gleichen Widerstandes, aber ohne EMK, so ist es für den Stromverlauf gerade so, als wenn zur Zeit  $\tau$  zu der bestehenden EMK  $E$  eine andere  $-E$  hinzugefügt worden wäre, da beide zusammen von  $t = \tau$  ab die EMK Null ergeben. Wenn man also von den Ordinaten der Kurve des Anstiegs eines Dauerzeichens von der Zeit  $\tau$  ab die für die Zeit  $t - \tau$  geltenden Ordinaten abzieht, so erhält man die Kurve für ein Zeichen, für das eine EMK nur während der Zeit  $\tau$  gewirkt hat. Nach dieser Art ist es seit langem gebräuchlich, die Kurven für Telegraphierzeichen zu ermitteln und nach Belieben zusammensetzen. Für manche Aufgaben ist es indessen vorteilhaft, die Heavisidesche Formel so zu erweitern, daß man den Verlauf auch für den Fall rechnerisch feststellen kann, daß vor der Zeit  $t = 0$  schon andere Zeichen vorausgegangen sind, oder daß von  $t = 0$  ab absatzweise oder stetig die EMK wechseln.

Die Erweiterungen beruhen auf folgender Überlegung. In der Heavisideschen Formel ist  $E \frac{e^{pt}}{p} dp$  der Teil der EMK, welcher auf den Anteil  $dp$  aller möglichen Werte von  $p$  entfällt, aber er gilt unter der Annahme, daß diese EMK wenigstens eine endliche Zeit  $t$  gewirkt hat. In Anbetracht dessen, daß  $\frac{e^{pt}}{p}$  das zeitliche Integral von  $e^{pt}$  ist, kann man als den Anteil von  $E \frac{e^{pt}}{p}$  während einer Zeit  $dz$  den Betrag  $E e^{p(t-z)} dz$  betrachten. Man hat sich also die wirksame EMK  $f(z)$  in einzelne Teile zerlegt zu denken, die zeitlich nacheinander auftreten. Der Wert, welcher zur Zeit  $z$ , von  $t = 0$  gerechnet, wirksam ist, hat zur Zeit  $t$ , zu der wir das Gesamtergebnis feststellen, nur während des Zeitraumes  $t - z$  gewirkt; dieses erscheint also statt  $t$  im Exponenten. In den nachfolgenden Beispielen werden wir Fälle finden, in denen einige Impulse von EMK vor der Zeit  $t = 0$  begonnen und wieder aufgehört haben, andere EMK dagegen zur Zeit  $t$  noch andauern. Wir haben dabei folgendes zu beachten.

Es ist

$$E \frac{e^{pt}}{p} = E \int_0^t e^{p(t-z)} dz + \frac{E}{p}.$$

Man hat dies in Gl. (165) einzusetzen und nach  $p$  auf dem angegebenen Wege zu integrieren; nach Gl. (166) und (167) zerfällt die Integration in die um den Punkt  $p = 0$  und um die Punkte  $p_\nu$ . Der erste Posten vorstehender Summe ist gleich  $E \left( \frac{e^{pt}}{p} - \frac{1}{p} \right)$ , nähert sich für  $p = 0$  dem Werte  $Et$ ; der von ihm herrührende Anteil in Gl. (167) bleibt also für  $p = 0$  stetig und das Integral ist Null. Nur der Posten  $\frac{E}{p}$  liefert einen Beitrag, und zwar den ersten Posten  $\frac{E}{W_{(p=0)}}$  in Gl. (167). Wenn außer der bei  $t = 0$  beginnenden und vorläufig beliebig lange dauernden Stromsendung noch andere berücksichtigt werden

sollen, die spätestens mit dem Augenblick  $t = 0$  aufhören, so können diese nach  $t = 0$  keinen Dauerwert hervorbringen. Man hat demnach bei ihnen auch nur den ersten Posten der vorstehenden Summe zu berücksichtigen. Dauert die Stromsendung von  $-t_2$  bis  $-t_1$ , so liefert sie zu der EMK nach  $t = 0$  den Beitrag

$$\int_{-t_2}^{-t_1} E e^{p(t-z)} dz = \frac{E e^{p t}}{p} (e^{p t_2} - e^{p t_1}).$$

Die nach Gl. (166) vorgeschriebene Integration der gesamten EMK um  $p = 0$  braucht nur an dem einen Posten  $\frac{E}{p}$  ausgeführt zu werden, da alle anderen den Beitrag Null ergeben; dagegen sind die Integrationen um die Punkte  $p_\nu$  auf die Summe aller Posten auszudehnen.

**§ 149. Die Heavisidesche Formel für einen Anstieg nach regelmäßigen Wechslen.** Von der Zeit  $t = 0$  ab soll ein positives Zeichen willkürlicher Dauer entsandt werden; vorher aber sollen je  $n$  positive und negative von der Dauer  $\tau$  abwechselnd ausgehen, so daß zur Zeit  $t = 0$  das letzte negative zu Ende ist. Dem ersten positiven dieser Zeichen soll ein negatives von der Dauer  $z_0$  vorausgehen.

Einen anhaltenden Strom führt nur das zuerst genannte Zeichen herbei, da die anderen schon vor  $t = 0$  wieder aufgehört haben. Wir haben also mit folgenden EMK zu rechnen:

$$\begin{aligned} \frac{E}{p} + \int_0^t E e^{p(t-z)} dz &= \frac{E}{p} (e^{p t} - 1) + \frac{E}{p} \\ &- \int_{-\tau}^0 E e^{p(t-z)} dz = \frac{E}{p} (e^{p t} - e^{p(t+\tau)}) \\ &+ \int_{-2\tau}^{-\tau} E e^{p(t-z)} dz = \frac{E}{p} (e^{p(t+2\tau)} - e^{p(t+\tau)}) \\ &\dots \dots \dots \\ &- \int_{-(2n-1)\tau}^{- (2n-2)\tau} E e^{p(t-z)} dz = \frac{E}{p} (e^{p(t+2n\tau)} - e^{p(t+[2n-1]\tau)}) \\ &- \int_{-2n\tau}^{-2n\tau} E e^{p(t-z)} dz = \frac{E}{p} (e^{p(t+2n\tau)} - e^{p(t+z_0)}). \end{aligned}$$

Bei der Integration um  $p = 0$  ergeben sämtliche Klammern den Betrag Null, auch die letzte, da  $p$  so klein gewählt werden kann, daß auch  $p(t + z_0)$  noch beliebig klein ist. Die Integration um  $p = 0$  braucht demnach nur an  $\frac{E}{p}$  ausgeführt zu werden. Für die bei Feststellung der abhängigen Variablen  $p$

$S$  außerdem erforderliche Integration um  $p_\nu$  kommen alle Posten in Betracht. Da alle  $p_\nu$  ein negatives reelles Glied besitzen, so ist bei hinreichendem  $z_0$  der Posten  $E e^{p(t+z_0)}/p$  zu vernachlässigen. Die verbleibenden Glieder lassen sich, da sie eine geometrische Reihe bilden, leicht summieren, und wir erhalten die Gleichung für die abhängige Variable in den beiden Formen

$$S = \frac{E}{2\pi i} \int_{\bigcirc_{p=0}} \frac{dp}{pW} + \frac{2E}{2\pi i} \sum_{\nu} \int_{\bigcirc_{p_\nu}} \frac{dp e^{pt}}{pW} \frac{1 + e^{(2n+1)p\tau}}{1 + e^{p\tau}} \dots \quad (168a)$$

$$S = \frac{E}{(W)_{p=0}} + 2E \sum_{\nu} \frac{e^{p_\nu t}}{\left(\frac{\partial W}{\partial p}\right)_{p_\nu}} \frac{1 + e^{(2n+1)p_\nu\tau}}{1 + e^{p_\nu\tau}} \dots \quad (168b)$$

Allerdings setzen diese Gleichungen voraus, daß mit den angegebenen Unstetigkeitspunkten alle, die einen Beitrag liefern, berücksichtigt worden sind. Wie man sieht, gibt es noch Unstetigkeiten in den Punkten  $p_\mu\tau = (2\mu + 1)\pi i$ , da für diese Werte  $1 + e^{p\tau} = 0$  wird.

Setzt man aber  $p_\mu\tau = (2\mu + 1)\pi i + \xi$ , so wird  $e^{p_\mu\tau} = -e^\xi$ ,  $dp_\mu = \frac{d\xi}{\tau} = \frac{ir e^{i\theta} d\theta}{\tau}$ ; Für beliebig kleine  $\xi$  und  $r$  wird eines dieser Integrale

$$\frac{E}{2\pi i} \left(\frac{\partial W}{\partial p}\right)_{p_\mu} \int_{\bigcirc} \left(\frac{id\theta r e^{i\theta}}{(2\mu + 1)\pi i (2n + 1)}\right)_{r=0}.$$

Man kann  $r$  stets so klein wählen, daß auch  $r(2n + 1)$  für jedes  $n$  beliebig klein ist. Diese Punkte liefern also keinen Beitrag und wurden deshalb aus den Hauptformeln sogleich fortgelassen.

Nach einer großen Zahl solcher Wechsel wird der Ausdruck  $e^{(2n+1)p_\nu\tau}$  gegen 1 verschwindend klein, und man erhält dann

$$S_{(n=\infty)} = \frac{E}{(W)_{p=0}} + 2E \sum_{\nu} \frac{e^{p_\nu t}}{\left(\frac{\partial W}{\partial p}\right)_{p_\nu} (1 + e^{p_\nu\tau})}$$

Zur Erläuterung diene der Vorgang in einem Kreis mit Induktivität und Widerstand. Dort ist

$$W = R + pL, \quad p_1 = -\frac{R}{L}, \quad \frac{\partial W}{\partial p} = L,$$

man erhält also

$$J = \frac{E}{R} \left( 1 - 2 \frac{e^{-\frac{R}{L}\tau}}{1 + e^{-\frac{R}{L}\tau}} \right).$$

Ist  $\tau$  sehr groß, so geht die Gleichung über in

$$J_{\tau \rightarrow \infty} = \frac{E}{R} \left( 1 - 2e^{-\frac{R}{L}t} \right).$$

Diese Gleichung zeigt den Vorgang für Doppelstrom an, wenn jeder einzelne der vorhergehenden Anstöße so lange dauert, daß darin das Zeichen merklich abläuft. Der Strom beginnt mit dem Werte  $-\frac{E}{R}$  für  $t = 0$  und strebt dem Werte  $+\frac{E}{R}$  zu.

Bei endlichen  $\tau$  beginnt  $J$  mit dem Werte

$$J_{t=0} = -\frac{E}{R} \frac{1 - e^{-\frac{R}{L}\tau}}{1 + e^{-\frac{R}{L}\tau}},$$

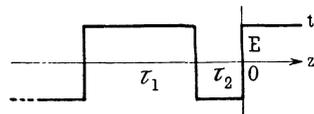
der also unter dem stationären Wert liegt. Hat der Anstoß die Dauer  $\tau$ , so erreicht  $J$  den Wert

$$J_{t=\tau} = +\frac{E}{R} \frac{1 - e^{-\frac{R}{L}\tau}}{1 + e^{-\frac{R}{L}\tau}}.$$

Nach einer Folge regelmäßiger  $\pm$ -Wechsel liegen innerhalb eines jeden die Anfangs- und Endwerte symmetrisch zur Nulllinie des Stromes, und sie bleiben um so mehr hinter dem stationären Wert zurück, je kleiner  $\tau$  ist.

**§ 150. Die Formel nach Heaviside für den Anstieg nach einzelnen vorausgehenden Zeichen.** Für die Telegraphie ist es wichtig, festzustellen, welchen Verlauf ein Zeichen nimmt, das auf ein anderes oder mehrere andere von langer oder kurzer Dauer folgt. Wir lösen zuerst die Aufgabe für den in Fig. 131 dargestellten Fall. Nach § 148 haben wir folgende EMK zu summieren.

Fig. 131.



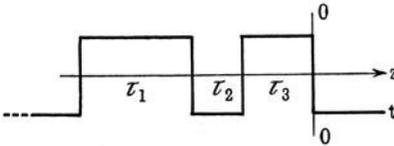
$$\begin{aligned} + \int_0^t E e^{p(t-z)} dz + \frac{E}{p} &= \frac{E}{p} (e^{pt} - 1) + \frac{E}{p} \\ - \int_{-\tau_2} E e^{p(t-z)} dz &= \frac{E}{p} (e^{pt} - e^{p(t+\tau_2)}) \\ + \int_{-(\tau_1+\tau_2)}^{-\tau_2} E e^{p(t-z)} dz &= \frac{E}{p} (e^{p(t+\tau_1+\tau_2)} - e^{p(t+\tau_2)}) \\ - \int_{-(z_0+\tau_1+\tau_2)}^{-(\tau_1+\tau_2)} E e^{p(t-z)} dz &= \frac{E}{p} (e^{p(t+\tau_1+\tau_2)} - e^{p(t+z_0+\tau_1+\tau_2)}). \end{aligned}$$

Unter Anwendung der in § 146 angegebenen Regel (167) finden wir für großes  $z_0$

$$S_{(+)} = \frac{E}{(W)_{p=0}} + 2E \sum_{\nu} \frac{e^{p_{\nu} t}}{\left(p \frac{\partial W}{\partial p}\right)_{p_{\nu}}} (1 - e^{p_{\nu} \tau_2} + e^{p_{\nu}(\tau_1 + \tau_2)}) \dots \quad (169a)$$

Ist  $\tau_2$  hinreichend groß, so kommt die Gleichung auf dasselbe hinaus, wie die Gl. (168) für großes  $\tau$ , weil die vorausliegenden Stromsendungen ohne Einfluß sind.

Fig. 132.



Das nach der abgeleiteten Formel festgestellte Zeichen habe die Dauer  $\tau_3$ , und danach werde die EMK wieder umgekehrt. Wir haben für die Feststellung des abfallenden Zeichens nach Fig. 132 zu summieren. Es ergibt sich auf demselben Wege wie vorher

$$S_{(-)} = -\frac{E}{(W)_{p=0}} - 2E \sum_{\nu} \frac{e^{p_{\nu} t}}{\left(p \frac{\partial W}{\partial p}\right)_{p_{\nu}}} (1 - e^{p_{\nu} \tau_3} + e^{p_{\nu}(\tau_3 + \tau_2)} - e^{p_{\nu}(\tau_3 + \tau_2 + \tau_1)}) \dots \quad (169b)$$

Es soll beispielsweise der Verlauf des Zeichens  $n$  in dem Kreise mit Widerstand und Induktivität verfolgt werden, wobei also  $\tau_1 = 3\tau$ ,  $\tau_2 = \tau_3 = \tau$  zu setzen ist.

Man findet das Ansteigen für den Strich, indem man in Gl. (169a)  $\tau_2 = \infty$  setzt. Es ergibt sich mit den bekannten Werten für  $p$  und  $\frac{\partial W}{\partial p}$

$$J_1 = \frac{E}{R} \left(1 - 2e^{-\frac{R}{L}t}\right).$$

Den Abfall während des Trennstromes findet man aus Gl. (169b), indem man  $\tau_2 = \infty$  setzt, als

$$J_2 = -\frac{E}{R} \left(1 - 2e^{-\frac{R}{L}t}\right) \left(1 - e^{-3\frac{R}{L}\tau}\right).$$

Die Zeit zählt bei jedem Intervall von seinem Beginn an von neuem. Man sieht, daß  $J_2$  für  $t = 0$  denselben Wert hat, wie  $J_1$  für  $t = 3\tau$ .

Das Ansteigen beim Punkt ergibt sich aus Gl. (169a) unmittelbar als

$$J_3 = \frac{E}{R} \left(1 - 2e^{-\frac{R}{L}t}\right) \left(1 - e^{-\frac{R}{L}\tau} + e^{-4\frac{R}{L}\tau}\right).$$

Auch dies beginnt mit dem Wert, mit dem  $J_2$  für  $t = \tau$  abschließt.

Der Abfall am Ende des Zeichens folgt aus Gl. (169b) ebenfalls unmittelbar als

$$J_4 = -\frac{E}{R} \left(1 - 2e^{-\frac{R}{L}t}\right) \left(1 - e^{-\frac{R}{L}\tau} + e^{-2\frac{R}{L}\tau} - e^{-5\frac{R}{L}\tau}\right).$$

Nimmt man  $\tau = \frac{L}{R}$  an, so sind die Stromwerte am Anfang und Ende jedes Intervalls

$$\begin{array}{l} \text{für den Strich . . . . .} - \frac{E}{R} \text{ und } +0,904 \frac{E}{R}, \\ \text{„ „ Zwischenraum } +0,904 \frac{E}{R} \text{ und } -0,302 \frac{E}{R}, \\ \text{„ „ Punkt . . . . .} -0,302 \frac{E}{R} \text{ und } +0,520 \frac{E}{R}, \\ \text{„ „ Abfall . . . . .} +0,520 \frac{E}{R} \text{ und } - \frac{E}{R}. \end{array}$$

**§ 151. Der Vorgang des Einschwingens unter sinusartig veränderlichen elektromotorischen Kräften.** Wir gehen aus von dem Integral

$$S = \frac{E}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{+i\infty} dp \int_0^t \frac{e^{p(t-z)} \sin(\omega z + \xi)}{W} dz,$$

in welchem  $t$  und  $z$  dieselbe Bedeutung haben wie in den vorhergehenden Paragraphen. Da das unbestimmte Integral

$$\int e^{p(t-z)} \sin(\omega z + \xi) dz = -e^{p(t-z)} \frac{\omega \cos(\omega z + \xi) + p \sin(\omega z + \xi)}{\omega^2 + p^2}$$

ist, so erhält man

$$\begin{aligned} S &= \frac{E}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{+i\infty} dp \frac{e^{pt}}{(\omega^2 + p^2)W} (\omega \cos \xi + p \sin \xi) \\ &- \frac{E}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{+i\infty} dp \frac{\omega \cos(\omega t + \xi) + p \sin(\omega t + \xi)}{(\omega^2 + p^2)W}. \end{aligned}$$

Unstetigkeitspunkte gibt es außer für die Werte  $p_\nu$  der Wurzeln von  $W=0$  für  $p' = +i\omega$  und  $p'' = -i\omega$ . Man kann feststellen, daß für  $p = +i\omega$  die beiden Teile von  $S$  sich gegeneinander aufheben. Es bleiben also nur die Integrale um die Punkte  $p_\nu$  übrig, und so wird

$$\left. \begin{aligned} S &= E \sum_{\nu} e^{p_\nu t} \frac{\omega \cos \xi + p_\nu \sin \xi}{(\omega^2 + p_\nu^2) \left(\frac{\partial W}{\partial p}\right)_{p_\nu}} \\ &- E \sum_{\nu} \frac{\omega \cos(\omega t + \xi) + p_\nu \sin(\omega t + \xi)}{(\omega^2 + p_\nu^2) \left(\frac{\partial W}{\partial p}\right)_{p_\nu}} \end{aligned} \right\} \dots (170)$$

Der erste Posten wird mit wachsender Zeit immer kleiner, und daher geht der Vorgang immer mehr in eine periodische Schwingung von gleichbleibender Stärke und von der Periode  $\omega$  der erregenden EMK über. Auf diese Einzelheiten gehen wir in einem späteren Teile ein.

Als Beispiel betrachten wir die Aufladung eines Kondensators über einen Widerstand. Die Grundgleichung  $E \sin(\omega t + \xi) = \frac{q}{K} + R \frac{dq}{dt}$  liefert die Werte

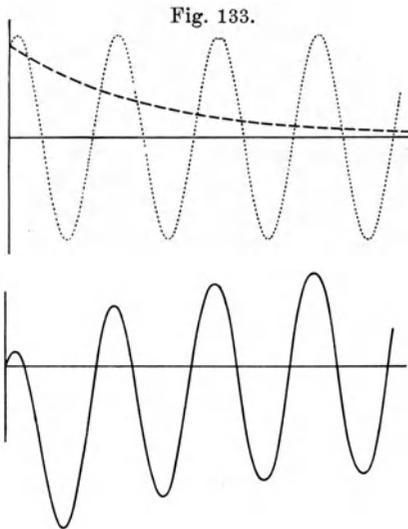
$$W = \frac{1}{K} + pR, \quad p = -\frac{1}{KR}, \quad \frac{\partial W}{\partial p} = R.$$

Nehmen wir  $\xi = 0$ , lassen also die EMK mit dem Höchstwert einsetzen, so wird

$$q = \frac{KE}{\sqrt{1 + \omega^2 K^2 R^2}} (\cos(\omega t - \chi) - \cos \chi e^{-\frac{t}{KR}}).$$

Der Winkel  $\chi$  ist definiert durch die Gleichung  $\tan \chi = \omega KR$ .

In Fig. 133 stellt die punktierte Kurve des oberen Teiles die Kosinusfunktion dar, die gestrichelte die Exponentialfunktion; die Differenzen beider



sind die Zeitwerte des Klammerausdruckes. Die Kurve für  $q$  ist im unteren Teile von Fig. 133 für sich dargestellt. Es dauert nach dieser Kurve einige Zeit, ehe die Kurve von  $q$  eine regelmäßige Sinuskurve geworden ist; zu Anfang hat sie die Form einer Sinuskurve, deren Achse in die Form der Exponentialkurve gebogen ist.

Für andere Annahmen über  $\xi$ , also über den Wert, mit dem die EMK bei Beginn des Vorganges einsetzt, würden wir etwas veränderte Formen der Ladungskurve erhalten, die aber alle das gemeinsam haben, daß die Ladung die Form einer sinusförmig veränderlichen Größe annimmt nach einem Übergangszustand, dessen Dauer dieselbe ist, wie die des veränderlichen Zustandes, der bei konstanter EMK dem stationären Werte vorausgeht. Der Stromkreis bedarf also einer gewissen Zeit, um sich einzuschwingen.

Die regelmäßigen periodischen Änderungen, welche die elektrischen Größen nach Ablauf der kurzen Zeit des Überganges ausführen, fallen unter die als elektrische Schwingungen bezeichneten Vorgänge. Die hier erwähnten Schwingungen richten sich in der Periode nach derjenigen der treibenden EMK und heißen erzwungene Schwingungen. Neben diesen gibt es Schwingungen, die bei beliebiger Periode der treibenden EMK stets mit derselben Periode vor sich gehen, allerdings nur bei besonderen elektrischen Eigenschaften der Stromkreise. Diese Schwingungen heißen freie. Sowohl die freien als die erzwungenen Schwingungen haben in der Telegraphentechnik eine große Bedeutung. Wegen der mannigfaltigen Beziehungen und Begriffe, die sich an die Erörterungen über diese Schwingungen knüpfen, ist es zweckmäßig, sie selbständig zu behandeln, obwohl die Vorgänge, an denen sie beobachtet werden, zum überwiegenden Teile in das Gebiet der quasistationären Ströme gehören.

## Fünfter Teil.

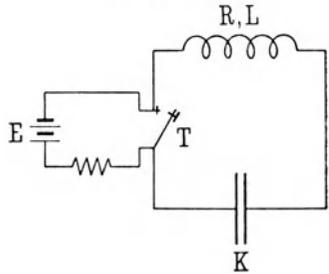
# Elektrische Schwingungen in Kondensatorkreisen.

### Erster Abschnitt.

#### Erzeugung und Eigenschaften freier Schwingungen.

§ 152. **Der einfache Schwingungskreis.** Dieser besteht aus einer Spule und einem Kondensator in Reihenschaltung, sowie Vorrichtungen, um den Kondensator zu laden und darauf die Schwingungen auszulösen. In Fig. 134 ist die Ladung aus einer Stromquelle  $E$  angedeutet, die nachher durch eine Taste  $T$  aus dem Schwingungskreise ausgeschaltet wird. Bei den Anwendungen in der drahtlosen Telegraphie dient zur Ladung eine Hochspannungsquelle, und statt der Taste dient eine Funkenstrecke, die selbsttätig den Kurzschluß wie die Taste ausführt, wenn die Spannung des Kondensators einen bestimmten Wert erreicht hat. Der Funke stellt, genau genommen, nicht wie die Taste einen kurzen Schluß von gleichbleibendem kleinen Widerstand dar, sondern sein Widerstand ist veränderlich und nimmt mit der Zeit zu. Für die meisten Zwecke genügt es aber, den Funken wie einen mäßigen unveränderlichen Widerstand zu betrachten.

Fig. 134.



Es interessiert hier nur der Vorgang bei der Entladung des Kondensators. Wir nehmen an, daß zu Beginn des Vorganges die Ladung des Kondensators den Betrag  $Q$  habe, und daß dann der Stromkreis sich selbst überlassen werde.  $R$  und  $L$  sollen den gesamten Widerstand und die gesamte Induktivität,  $K$  die Kapazität des Kondensators bezeichnen.

Es sei  $q$  die Ladung des Kondensators zur Zeit  $t$ ,  $J = \frac{dq}{dt}$  der bei einer Erhöhung der Ladung in den Kondensator tretende Strom; dann ist also  $-dq/dt$  der Entladestrom. Dann lautet die Gleichung für die Entladung

$$\frac{q}{K} + RJ + L \frac{dJ}{dt} = 0.$$

Als Gleichung mit nur einer abhängigen Variablen erhält sie die Form

$$L \frac{d^2 q}{dt^2} + R \frac{dq}{dt} + \frac{q}{K} = 0.$$

Der Ansatz  $q = e^{\gamma t}$  führt auf die Bedingungsgleichung

$$\gamma^2 + \frac{R}{L} \gamma + \frac{1}{KL} = 0.$$

Deren Wurzeln

$$\gamma = -\frac{R}{2L} \pm \sqrt{\frac{R^2}{4L^2} - \frac{1}{KL}}$$

können reell und verschieden groß, reell und gleich oder komplex und verschieden sein. Der zweite Fall ist in § 136 erörtert worden; wir beschäftigen uns hier hauptsächlich mit dem dritten. Die Wurzeln sind komplex, wenn

$$R^2 < \frac{4L}{K},$$

dagegen sind sie reell, wenn  $R^2$  größer als  $4L/K$  ist. Der erste und dritte Fall trennen sich also nach dem Kennzeichen, daß der erste bei verhältnismäßig großem Widerstande, der dritte bei verhältnismäßig kleinem Widerstande auftritt.

Wir setzen für den dritten Fall

$$+ \sqrt{\frac{1}{KL} - \frac{R^2}{4L^2}} = \alpha \dots \dots \dots (171 a)$$

wo also  $\alpha$  eine reelle positive Größe darstelle; ferner sei

$$\frac{R}{2L} = \beta \dots \dots \dots (171 b)$$

Die beiden Wurzeln der Bedingungsgleichung sind dann  $\gamma_1 = -\beta + i\alpha$ ,  $\gamma_2 = -\beta - i\alpha$ . Das allgemeine Integral wird nunmehr

$$q = a_1 e^{(-\beta + i\alpha)t} + a_2 e^{(-\beta - i\alpha)t}.$$

Wir formen dies um in

$$q = e^{-\beta t} [(a_1 + a_2) \cos \alpha t + i(a_1 - a_2) \sin \alpha t].$$

Tatsächlich können in  $q$  nur reelle Größen vorkommen, und wir machen dies augenscheinlich, indem wir schreiben

$$q = e^{-\beta t} (C_1 \cos \alpha t + C_2 \sin \alpha t).$$

Zur Bestimmung von  $C_1$  und  $C_2$  dienen uns die bekannten Bedingungen für den Augenblick  $t = 0$ . Wir fassen als solchen den Zeitpunkt auf, in dem  $q$  den Wert  $Q$  hatte, während noch keine Entladung, also kein Strom bestand. Es war also ferner  $J = \frac{dq}{dt} = 0$  zur Zeit  $t = 0$ . Zunächst ist

$$J = e^{-\beta t} [\cos \alpha t (\alpha C_2 - \beta C_1) - \sin \alpha t (\beta C_2 + \alpha C_1)].$$

Die Bedingungen für  $t = 0$  ergeben daher

$$Q = C_1, \quad 0 = \alpha C_2 - \beta C_1.$$

Man erhält daraus

$$q = Q e^{-\beta t} \left( \cos \alpha t + \frac{\beta}{\alpha} \sin \alpha t \right),$$

$$J = -\frac{\alpha^2 + \beta^2}{\alpha} Q e^{-\beta t} \sin \alpha t.$$

Da  $\alpha^2 + \beta^2 = \frac{1}{KL}$  ist, kann man einen Winkel  $\vartheta$  angeben durch

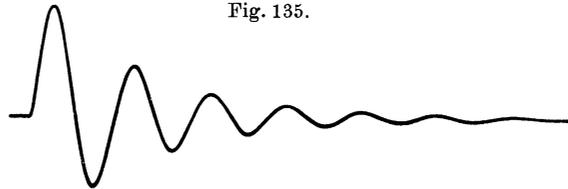
$$\sin \vartheta = \beta \sqrt{KL}, \quad \cos \vartheta = \alpha \sqrt{KL}$$

und erhält für die Veränderlichen die Form

$$\left. \begin{aligned} q &= \frac{Q e^{-\beta t}}{\alpha \sqrt{KL}} \cos(\alpha t - \vartheta) \\ J &= -\frac{Q e^{-\beta t}}{\alpha KL} \sin \alpha t \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (172)$$

Unter der Bedingung, daß  $R^2 < 4L/K$ , welche verhältnismäßig kleinen Widerstand voraussetzt, wird die Abhängigkeit der Veränderlichen von der Zeit durch eine Funktion ausgedrückt, die sowohl eine Exponentialfunktion enthält, also mit der Zeit beliebig klein wird, als auch eine trigonometrische Funktion der Zeit, und daher sich mit der Zeit periodisch ändert. Fig. 135

stellt die oszillographische Aufnahme des Entladungstromes dar. Wir nennen einen solchen Vorgang eine gedämpfte elektrische Schwingung.



Wäre  $R^2 > 4L/K$ , so würden beide Wurzeln

der Bestimmungsgleichung für  $\gamma$  reell ausfallen. Dann können in den Integralen auch keine trigonometrischen Funktionen auftreten, die das Kennzeichen periodischer Vorgänge sind. Bei hohem Werte des Widerstandes im Vergleich zu  $\sqrt{L/K}$  ist also ein Kondensatorkreis nicht fähig, freie elektrische Schwingungen auszuführen. Wir nennen ihn dann aperiodisch.

**§ 153. Bestimmungsgrößen einer Schwingung.** Wir nannten eine durch die Form

$$u = u_0 e^{-\beta t} \sin(\alpha t + \vartheta)$$

dargestellte veränderliche Größe eine gedämpfte Schwingung. Abgesehen von dem Faktor  $u_0$ , der die Stärke der Schwingung bestimmt, enthält  $u$  zwei mit der Zeit veränderliche Faktoren. Der erste,  $e^{-\beta t}$ , beginnt bei  $t = 0$  mit dem Werte Eins, und indem er dauernd abnimmt, erreicht er schließlich den Wert Null. Der zweite Faktor dagegen gibt eine periodisch zwischen  $+1$  und  $-1$  veränderliche Größe an. Der erste Faktor bewirkt also das allmähliche Abklingen der durch den zweiten Faktor dargestellten periodischen Bewegung. Wir wollen zuerst eine Schwingung betrachten, bei der  $\beta$  so klein ist, daß  $e^{-\beta t}$  für eine merkliche Zeit vom Anfang an nahezu gleich

Eins gesetzt werden kann. Die wenig gedämpfte Schwingung nähert sich für einen nicht zu großen Zeitbereich der ungedämpften, die die Form hat

$$u' = u_0 \sin(\alpha t + \vartheta).$$

Ungedämpfte Schwingungen. Mit Bezug auf den zeitlichen Verlauf sind diese Schwingungen durch zwei Größen bestimmt, die Periode und die Phase.

Wählen wir zwei Zeiten  $t_1$  und  $t_2$  so, daß  $t_2 = t_1 + 2\pi/\alpha$ , so ergibt sich, daß  $u'$  zur Zeit  $t_2$  denselben Wert hat wie zur Zeit  $t_1$ . Dies trifft auch zu, wenn  $t_2 = t_1 + 2n\pi/\alpha$ , wo  $n$  eine beliebige ganze Zahl ist. Wir nennen die Zeit

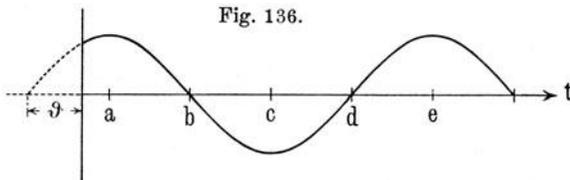
$$T = \frac{2\pi}{\alpha} \dots \dots \dots (173)$$

die Zeit oder Dauer einer Periode. Auf eine Sekunde kommen daher

$$\nu = \frac{1}{T} = \frac{\alpha}{2\pi} \dots \dots \dots (173 a)$$

Perioden;  $\nu$  heißt die Periodenzahl oder der Puls der Schwingung. Diese beiden Größen sind durch  $\alpha$  bestimmt, das den Formeln das einfachste Aussehen gibt.  $\alpha$  ist gleich der Zahl der Perioden in  $2\pi$  Sekunden; wir gebrauchen für  $\alpha$  den Namen Kreisfrequenz der Schwingung.

Wenn die Periodenzahl gegeben ist, ist ein beliebiger Zeitwert der Schwingung durch den Wert von  $\alpha t + \vartheta$  bestimmt. Diese Größe wird die Phase der Schwingung genannt. Aus der Phase erkennen wir, in welchem Zustande ihrer Bewegung sich die Schwingung befindet. Wenn sie in Fig. 136



im Punkt  $a$  der Zeit den Höchstwert erreicht, so befindet sie sich in der Phase  $\pi/2$ , im Punkt  $b$  in der Phase  $\pi$ , in  $c$  in der Phase  $3\pi/2$  usw. Im Anfangspunkt der Zeitachse liegt die Phase der Schwingung zwischen  $0$  und  $\pi/2$ , sie ist gleich  $\vartheta$ , worauf sich  $\alpha t + \vartheta$  für  $t = 0$  beschränkt.

Man sieht hiernach leicht, daß zwei Schwingungen gleicher Periode in gleicher Phase sind, wenn sie zu gleichen Zeiten durch Null und durch die Höchstwerte gehen, einerlei, ob die Höchstwerte gleich oder verschieden sind.

Schwingungen, die nicht gleicher Phase sind, haben einen Phasenunterschied. So ist der Phasenunterschied der Schwingung  $A \sin(\alpha t + \vartheta)$  gegen die Schwingung  $B \sin \alpha t$  gleich  $\vartheta$ , da z. B. die erste Schwingung die Phase  $\pi/2$ , also den Höchstwert, zur Zeit  $\frac{(\pi 2 - \vartheta)}{\alpha}$  erreicht, die zweite

dagegen dieselbe Phase erst zur Zeit  $\frac{\pi/2}{\alpha}$ . Ein Phasenunterschied kann positiv oder negativ sein. Von einer Schwingung, die gegen eine andere gleicher Frequenz einen positiven Phasenunterschied hat, sagt man, sie eile

jener voraus, oder sie liege vor; eine Schwingung mit negativem Phasenunterschied gegen eine andere wird als zurückbleibend oder zurückliegend bezeichnet.

Mit dem Namen Amplitude oder Weite wird bei ungedämpften Schwingungen der Faktor  $u_0$  bezeichnet.

Gedämpfte Schwingungen. Die Phase einer gedämpften Schwingung wird ebenso wie die einer ungedämpften durch den Wert von  $\alpha t + \vartheta$  gegeben. Die Periode der gedämpften Schwingung wird nicht durch die Wiederkehr gleicher Zeitwerte, sondern gleicher Phasen bestimmt; die Periode der gedämpften Schwingung  $u_0 e^{-\beta t} \sin(\alpha t + \vartheta)$  ist also wie die der ungedämpften  $2\pi/\alpha$ . Die Bezeichnungen der Periodenzahl und der Kreisfrequenz bleiben ebenfalls unverändert.

Dämpfung. Wie schon bemerkt, hängt die Dämpfung von dem Verlauf der Funktion  $e^{-\beta t}$  ab; die Schwingung erlischt in um so kürzerer Zeit, je größer  $\beta$  ist. Man nennt  $\beta$  die Dämpfungskonstante. Vergleichen wir die Zeitwerte der Schwingung in zwei Zeitpunkten, die um eine ganze Periode auseinanderliegen, so ist unabhängig von der gewählten Phase das Verhältnis der Zeitwerte

$$\frac{u_1}{u_2} = e^{2\pi \frac{\beta}{\alpha}}.$$

In diesem Verhältnis stehen auch je zwei aufeinanderfolgende Höchstwerte gleichen Vorzeichens. Man nennt den Betrag  $e^{2\pi \frac{\beta}{\alpha}}$  das Dekrement der Schwingung und ferner die Größe

$$\delta = 2\pi \frac{\beta}{\alpha} \dots \dots \dots (174)$$

das logarithmische Dekrement. Es ist nach dem in Gl. (171 a) und (171 b) festgesetzten auch

$$\delta = \beta T \dots \dots \dots (174 a)$$

Das logarithmische Dekrement einer Schwingung, die in der Zeit von 20 Perioden auf  $\frac{1}{100}$  ihres ersten Höchstwertes sinkt, ergibt sich aus

$$e^{20\delta} = 100 \quad \text{zu} \quad \delta = 0,23.$$

Die nachfolgende Tabelle gibt mehrere Werte des Produktes  $n\delta$  an, wobei  $n$  die Zahl der Perioden bedeutet, die ablaufen, bis die Amplitude der Schwingung auf  $1/a$  ihres ersten Höchstwertes zurückgegangen ist:

$a \dots \dots$	2	4	10	20	50
$n\delta \dots \dots$	0,7	1,4	2,3	3,0	3,9

§ 154. Anwendung auf den einfachen Schwingungskreis. Die Periodenzahl oder  $2\pi/\alpha$  erhält hier den Wert

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{1}{KL} - \frac{R^2}{4L^2}}} \dots \dots \dots (175)$$

Bei den in der Anwendung wichtigsten Schwingungskreisen für hohe Periodenzahl überwiegt der Posten  $1/KL$  erheblich den Posten  $R^2/4L^2$ , und man kann daher annähernd setzen

$$T = 2\pi\sqrt{KL} \dots \dots \dots (175a)$$

Die Größe  $T$ , die nur von den Eigenschaften des Schwingungskreises abhängt, wird deshalb die Dauer seiner Eigenschwingung genannt.

Die Dauer einer Periode ist also um so größer, je größer die Kapazität und die Induktivität des Kreises sind.

Wellenlänge. Bei der Anwendung in der drahtlosen Telegraphie werden die Schwingungen aus dem Kondensatorkreise auf den freien Raum übertragen, und sie schreiten dort mit Lichtgeschwindigkeit fort. Die Phase der Schwingungen ändert sich um  $2\pi$  in der Zeit  $2\pi/\alpha$ ; in dieser Zeit ist die Welle im Raume über die Strecke  $2\pi c/\alpha$  fortgeschritten. Daher ist die Schwingung an zwei Orten, die in der Richtung der Fortpflanzung der Welle voneinander den Abstand  $\lambda = 2\pi c/\alpha$  haben, in gleicher Phase. Bei einer im Raume fortschreitenden Welle nennt man den Abstand zweier Punkte gleicher Phase die Wellenlänge, und diese ist daher

$$\lambda = 2\pi c\sqrt{KL} \dots \dots \dots (176)$$

Man spricht in der Technik hoher Frequenzen auch bei Schwingungen in Kondensatorkreisen von ihrer Wellenlänge, so daß man darunter diejenige versteht, welche bei der Übertragung der Schwingungen auf den freien Raum oder auf oberirdische Kupferdrahtleitungen auftritt.

Die Dämpfungskonstante des Kondensatorkreises ergibt sich zu

$$\beta = \frac{R}{2L} \dots \dots \dots (177)$$

Sie ist also von der Kapazität unabhängig, wächst aber mit dem Widerstande. Zwei Kreise, für die das Produkt  $KL$  denselben Wert hat, haben gleiche Frequenz und Wellenlänge; je kleiner man die Kapazität wählt, um so geringer wird bei gleichem Widerstande die Dämpfungskonstante.

Wir können nach Feststellung von  $\beta$  abschätzen, welchen Fehler wir bei der Vernachlässigung von  $R^2/4L^2$  gegen  $1/KL$  gemacht haben. Genau ist

$$T = \frac{2\pi\sqrt{KL}}{\sqrt{1 - \frac{R^2}{4L^2}KL}}$$

Da der von 1 abzuziehende Posten unter der Wurzel ein Korrektionsglied ist, können wir darin ohne merklichen Fehler für das Gesamtergebnis für  $KL$  den Wert  $\left(\frac{T}{2\pi}\right)^2$  setzen. Da aber  $\frac{R}{2L}T = \beta T = \delta$  ist, so erhalten wir

$$T = \frac{2\pi\sqrt{KL}}{\sqrt{1 - \left(\frac{\delta}{2\pi}\right)^2}}$$

Der Fehler bei Vernachlässigung des abzuziehenden Gliedes beträgt also nach den Regeln über Rechnungen mit kleinen Größen  $\frac{1}{2}\left(\frac{\delta}{2\pi}\right)^2$ . Sollte er

1 Proz. betragen, so müßte  $\delta = 0,89$  sein. Eine solche Schwingung wäre schon nach etwa fünf Perioden bis auf  $1/100$  erloschen. Für die praktisch angewandten Kondensatorkreise ist also die Korrektion von  $T$  ganz unbedeutend.

**§ 155. Die Energie im Schwingungskreise.** Sie ist in jedem Augenblick die Summe der magnetischen und der elektrischen Energie. Gehen wir aus von der Gleichung

$$L \frac{dJ}{dt} + RJ + \frac{q}{K} = 0,$$

so erhalten wir durch die Multiplikation mit  $J = dq/dt$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} LJ^2 \right) + RJ^2 + \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} \frac{q^2}{K} \right) = 0.$$

Schreibt man dies

$$- \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} LJ^2 + \frac{1}{2} \frac{q^2}{K} \right) = - \frac{\partial \mathbf{W}}{\partial t} = RJ^2,$$

so heißt diese Gleichung, daß die Abnahme der elektromagnetischen Energie  $\mathbf{W}$  in der Zeiteinheit gleich der im Widerstande verzehrten Leistung ist.

Um den zeitlichen Verlauf der Energieabgabe kennen zu lernen, setzen wir die Werte von  $J$  und  $q$  nach Gl. (172) ein. Wir erhalten

$$\mathbf{W} = \frac{1}{2} \frac{Q^2 e^{-2\beta t}}{\alpha^2 K^2 L} [1 - \sin \vartheta \sin(2\alpha t + \vartheta)].$$

Wegen der Kleinheit von  $\vartheta$  kann man bei mäßig gedämpften Schwingungen von dem mit  $\sin \vartheta$  multiplizierten Posten absehen. Die Energie vermindert sich also nach einer Exponentialfunktion, also in gleichen Zeiten um denselben Verhältnisswert, aber absolut am Anfang der Schwingung stärker als gegen das Ende.

Mit  $q$  und  $J$  verschwindet auch periodisch die elektrische und die magnetische Energie. Wenn  $J = 0$  ist, wie z. B. zur Zeit  $\alpha t = 0, \pi, \dots, n\pi$ , so hat alle Energie die Form elektrischer, zu den Zeiten  $\omega t = \pi/2 + \vartheta, 3\pi/2 + \vartheta, \dots$  hat alle Energie die Form magnetischer Energie.

**§ 156. Potentielle und kinetische Energie.** Elektrische Energie kann auch in statischen Zuständen vorhanden sein, z. B. in einem Kondensator mit unveränderlichen Ladungen; magnetische Energie dagegen ist, wenn wie hier keine Dauermagnete vorhanden sind, nur während des Bestehens eines Stromes, also bewegter Elektrizität vorhanden. Man kann daher die elektrische Energie als eine potentielle, die magnetische als eine kinetische Energie bezeichnen.

Analogie mit dem Pendel. Im elektrischen Schwingungskreise geht die Energie fortgesetzt aus der potentiellen Form in die kinetische über und umgekehrt. Bei einem schwingenden Pendel haben wir dieselbe periodische Umformung der Energie. Die Ähnlichkeit erstreckt sich aber auch auf die Differentialgleichung der Bewegung.

Ist  $M$  das Trägheitsmoment des Pendels,  $D$  die Direktionskraft und  $\vartheta$  die Ablenkung aus der Ruhelage, so ist die Differentialgleichung des Pendels

$$M \frac{d^2 \vartheta}{dt^2} + D \sin \vartheta + R \frac{d \vartheta}{dt} = 0,$$

wenn mit  $R$  der Reibungskoeffizient bezeichnet wird.  $R \frac{d \vartheta}{dt}$  bedeutet eine Kraft, welche z. B. negativ ist, wenn  $\vartheta$  von einem positiven Werte auf einen etwas kleineren sinkt; da das Pendel sich auf diesem Wege beschleunigt, so ergibt sich, daß  $R \frac{d \vartheta}{dt}$  der Beschleunigung entgegenwirkt.

Für die üblichen kleinen Amplituden des Pendels ist  $\sin \vartheta$  merklich gleich  $\vartheta$ . Man sieht, daß die beiden Differentialgleichungen dann übereinstimmen, wenn man folgende Größen gleichsetzt:

Elektrischer Schwingungskreis . .	$L$	$1/K$	$q$	$J$
Pendel . . . . .	$M$	$D$	$\vartheta$	$d\vartheta/dt$

Die kinetische Energie ist dargestellt durch

$$\frac{1}{2} L J^2 \quad \text{und} \quad \frac{1}{2} M \left( \frac{d \vartheta}{dt} \right)^2,$$

da  $d\vartheta/dt$  die Winkelgeschwindigkeit des Pendels ist.

Die Direktionskraft ist das Verhältnis derjenigen Kraft, welche am Hebelarm  $l$  in tangentialer Richtung wirkt, zu dem (kleinen) Winkel, um welchen durch sie der Pendelkörper aus der Ruhelage gedreht ist. Ist dieser Winkel gleich  $\vartheta$  und wird er um  $d\vartheta$  vermehrt, so wird die Arbeit  $D \vartheta d\vartheta$  geleistet, also von  $\vartheta = 0$  bis zu einem Endwert  $\vartheta$  die Arbeit  $\frac{1}{2} D \vartheta^2$ . Dieser entspricht in der Tat die elektrische Energie  $\frac{1}{2} \frac{q^2}{K}$ .

Beide Vorgänge folgen also ganz ähnlichen Gesetzen. Dies hat für die Erkenntnis der Vorgänge elektrischer Schwingungen den Vorteil, daß man sie durch einfache und übersichtliche Versuche mit mechanischen Schwingungssystemen erläutern kann<sup>23)</sup>.

— — —

### Zweiter Abschnitt.

## Der einfache Schwingungskreis als Empfänger.

§ 157. **Erregung durch eine gedämpfte Schwingung.** Als Empfänger wird der Schwingungskreis durch eine äußere wechselnde EMK erregt, z. B. durch einen die Spule durchsetzenden veränderlichen magnetischen Fluß.

Für diesen Vorgang lautet die Differentialgleichung

$$E e^{-\delta t} \sin \omega t = R J + L \frac{dJ}{dt} + \frac{q}{K}.$$

Nach dem, was allgemein an Kreisen mit Erregung durch eine wechselnde EMK, und besonders für den Kondensatorkreis, festgestellt worden ist, Gl.(170),

kann man den Ansatz machen, daß die Veränderlichen die Form gedämpfter Schwingungen erhalten, in denen sowohl die treibende Schwingung nach Periode und Dämpfung erscheint als auch die Eigenschwingung des Kreises. Demnach wäre zu setzen

$$q = A e^{-\delta t} \sin(\omega t + \varphi) + B e^{-\beta t} \sin(\alpha t + \vartheta).$$

Indem man diesen Ansatz in die Gleichung einführt, erhält man folgende Bestimmungsgleichung:

$$\begin{aligned} & E e^{-\delta t} \sin \omega t \\ &= A e^{-\delta t} \sin \omega t \left\{ \frac{\cos \varphi}{K} - R(\delta \cos \varphi + \omega \sin \varphi) + L[(\delta^2 - \omega^2) \cos \varphi + 2 \delta \omega \sin \varphi] \right\} \\ &+ A e^{-\delta t} \cos \omega t \left\{ \frac{\sin \varphi}{K} - R(\delta \sin \varphi - \omega \cos \varphi) + L[(\delta^2 - \omega^2) \sin \varphi - 2 \delta \omega \cos \varphi] \right\} \\ &+ B e^{-\beta t} \sin \alpha t \left\{ \frac{\cos \vartheta}{K} - R(\beta \cos \vartheta + \alpha \sin \vartheta) + L[(\beta^2 - \alpha^2) \cos \vartheta + 2 \beta \alpha \sin \vartheta] \right\} \\ &+ B e^{-\beta t} \cos \alpha t \left\{ \frac{\sin \vartheta}{K} - R(\beta \sin \vartheta - \alpha \cos \vartheta) + L[(\beta^2 - \alpha^2) \sin \vartheta - 2 \beta \alpha \cos \vartheta] \right\}. \end{aligned}$$

Damit diese Gleichung erfüllt werde, müssen die Faktoren der Zeitfunktionen auf beiden Seiten übereinstimmen, also

$$E = A \left\{ \frac{\cos \varphi}{K} - R(\delta \cos \varphi + \omega \sin \varphi) + L[(\delta^2 - \omega^2) \cos \varphi + 2 \delta \omega \sin \varphi] \right\},$$

während alle übrigen Faktoren Null sind. Aus der ersten dieser drei Gleichungen ergibt sich

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{2 L \delta \omega - R \omega}{1/K - R \delta + L(\delta^2 - \omega^2)}.$$

Demnach ist

$$A = \frac{E}{\sqrt{[1/K - R \delta + L(\delta^2 - \omega^2)]^2 + (2 L \delta \omega - R \omega)^2}}.$$

Indem man ferner von den anderen beiden Gleichungen die erste mit  $\cos \vartheta$ , die zweite mit  $\sin \vartheta$  multipliziert und beide addiert, erhält man

$$\frac{1}{K} - R \beta + L(\beta^2 - \alpha^2) = 0.$$

Multipliziert man dagegen bezüglich mit  $\sin \vartheta$  und  $\cos \vartheta$ , so ergibt sich

$$2 L \beta \alpha - R \alpha = 0.$$

Daraus folgt, daß

$$\beta = \frac{R}{2L}, \quad \alpha^2 = \frac{1}{KL} - \frac{R^2}{4L^2}.$$

Hiernach sind von den im Ansätze enthaltenen unbekanntenen Konstanten  $A$ ,  $\varphi$ ,  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $B$ ,  $\vartheta$  die vier ersten bestimmt;  $B$  und  $\vartheta$  aber hängen von den Anfangsbedingungen ab. Was  $\alpha$  und  $\beta$  betrifft, so zeigt ein Vergleich mit Gl. (171a und b), daß sie dieselben Werte haben wie für eine freie Schwingung des Kondensatorkreises.

Die Vermutung, daß die Bewegung sich aus einer erzwungenen und einer freien Schwingung zusammensetzt, ist demnach richtig. Man kann noch setzen

$$tg \varphi = \frac{2 \omega (\delta - \beta)}{\alpha^2 - \omega^2 + (\delta - \beta)^2};$$

$$A = \frac{E}{L} \frac{1}{\sqrt{[(\alpha^2 - \omega^2) + (\delta - \beta)^2]^2 + 4 \omega^2 (\delta - \beta)^2}}.$$

Für die Konstantenbestimmung braucht man  $J = \frac{dq}{dt}$ , oder

$$J = A e^{-\delta t} [\cos \omega t (\omega \cos \varphi - \delta \sin \varphi) - \sin \omega t (\delta \cos \varphi + \omega \sin \varphi)] \\ + B e^{-\beta t} [\cos \alpha t (\alpha \cos \vartheta - \beta \sin \vartheta) - \sin \alpha t (\beta \cos \vartheta + \alpha \sin \vartheta)].$$

Für  $t = 0$  ist sowohl  $q = 0$  als auch  $J = 0$ , und daher folgen die Gleichungen

$$0 = A \sin \varphi + B \sin \vartheta \text{ und } 0 = A (\omega \cos \varphi - \delta \sin \varphi) + B (\alpha \cos \vartheta - \beta \sin \vartheta).$$

Man erhält daraus

$$B \sin \vartheta = -A \sin \varphi, \\ \alpha B \cos \vartheta = A [(\delta - \beta) \sin \varphi - \omega \cos \varphi].$$

Hiernach ergibt sich für den Strom die Form

$$J = A e^{-\delta t} [-\sin \omega t (\delta \cos \varphi + \omega \sin \varphi) + \cos \omega t (\omega \cos \varphi - \delta \sin \varphi)] \\ + A e^{-\beta t} \left\{ \sin \alpha t \left[ \frac{\omega \beta}{\alpha} \cos \varphi + \left( \alpha - \frac{\beta (\delta - \beta)}{\alpha} \right) \sin \varphi \right] \right. \\ \left. - \cos \alpha t (\omega \cos \varphi - \delta \sin \varphi) \right\} \quad (178)$$

Die Darstellung dieser Formel durch Kurven stellen wir zunächst zurück und besprechen vorher den Vorgang mit der Vereinfachung, daß das Dekrement der erregenden Welle im Vergleich zu dem des Kondensatorkreises sehr klein sei.

**§ 158. Erregung durch eine ungedämpfte Schwingung.** Setzen wir  $\delta = 0$ , so erhalten wir für  $q$  und  $J$  je einen Posten, der keinen Exponentialfaktor, sondern nur periodische Funktionen enthält und je einen zweiten Posten mit dem Faktor  $e^{-\beta t}$ . Nach Ablauf einer gewissen Zeit ist der zweite Posten gegen den anderen verschwindend klein geworden, und sowohl  $q$  als  $J$  werden ungedämpfte Sinusschwingungen von der Form

$$q = \frac{E \sin(\omega t + \varphi)}{\omega \sqrt{R^2 + (\omega L - 1/\omega K)^2}} \\ J = \frac{E \cos(\omega t + \varphi)}{\sqrt{R^2 + (\omega L - 1/\omega K)^2}} \quad \left. \vphantom{q} \right\} \dots \dots \dots (179)$$

wo

$$tg \varphi = -R \cdot (\omega L - 1/\omega K)$$

Im Gegensatz zu den vorher besprochenen freien Schwingungen sind dies erzwungene Schwingungen.

Zum Nachweis der Schwingungen diene ein in den Kreis in Reihe eingeschaltetes Hitzdrahtinstrument. Die Angaben eines solchen Instrumentes betreffen den mittleren Wert des Quadrats der Stromstärke, oder wie in § 169 näher dargestellt werden wird, bei sinusförmigen Strömen das halbe Quadrat der Amplitude des Stromes. Sie ändern sich daher mit jeder der Größen  $\omega$ ,  $R$ ,  $L$ ,  $K$ . Halten wir die Frequenz der erregenden Schwingung konstant und sehen von einer Änderung der Größe  $R$  ab, so können wir die Anzeige des Hitzdrahtinstrumentes sowohl durch Änderung der Kapazität als der Induktivität beeinflussen.

Man erkennt, daß die Anzeige den größten Wert erhält, wenn

$$\omega L - 1/\omega K = 0,$$

oder wenn

$$\omega^2 KL = 1 \dots \dots \dots (180)$$

Wählt man  $KL$  größer oder kleiner, als dieser Gleichung entspricht, so wird die Angabe kleiner. Die Eigenfrequenz  $\alpha$  des Kreises ist unter Voraussetzung mäßiger Dämpfung durch die Gleichung  $\alpha^2 KL = 1$  bestimmt; also ist die Erregung des Kondensatorkreises durch die äußere Schwingung bei gegebenem Widerstand am größten, wenn die von außen her erzwungene Schwingung die Frequenz der Eigenschwingungen hat.

Man bezeichnet diese Erscheinung als Resonanz.

Mit der erregenden Schwingung in Resonanz befinden sich alle Kondensatorkreise, für die das Produkt  $KL$  den Wert  $1/\omega^2$  hat.

Kennt man für einen Kondensatorkreis mit veränderlichen Eigenschaften die Werte von  $K$  und  $L$  einzeln für jede Einstellung, oder wenigstens den jeweiligen Wert ihres Produktes, so kann man den Kreis benutzen, um die Frequenz  $\omega$  einer den Kondensatorkreis erregenden Schwingung zu messen. Man nennt einen derart eingerichteten Kondensatorkreis einen Wellenmesser.

Die grundsätzlich einfachsten, zugleich die in der deutschen Technik fast ausschließlich gebauten Wellenmesser haben einen stetig veränderlichen Kondensator. Zur Bestimmung einer Frequenz ändert man den Kondensator so lange, bis das Hitzdrahtinstrument die größte Ablenkung zeigt.

**§ 159. Resonanzkurve.** Wenn man bei der Feststellung der größten Ablenkung nicht nur auf diese achtet, sondern auch auf die daneben liegenden kleineren Werte und diese Beobachtungen als Kurve aufträgt, so erhält man die Resonanzkurve. Stellt man etwa durch deren Ordinaten  $y$  das Verhältnis einer beliebigen Ablenkung zur größten dar, während man zur Abszisse  $x$  die zu einer bestimmten Einstellung des Wellenmessers gehörige Frequenz wählt, so lautet die Gleichung dieser Kurve:

$$y = \frac{R^2}{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega K}\right)^2} = \frac{4\beta^2}{4\beta^2 + \omega^2 \left(1 - \frac{x^2 + \beta^2}{\omega^2}\right)^2}.$$

Kennt man  $\omega$  und beobachtet zusammengehörige Werte von  $x$  und  $y$ , so kann man daraus  $\beta/\omega$ , also auch das Dekrement des Kondensatorkreises bestimmen.

Größere technische Bedeutung hat die Bestimmung des Dekrements der erregenden Schwingung aus der Resonanzkurve. Es ergibt sich durch eine einfache Überlegung, daß ein Kondensatorkreis durch eine fremde Schwingung gleicher Frequenz um so stärker in Schwingungen gebracht wird, je weniger diese gedämpft ist, je mehr Schwingungen nämlich in jedem Zuge zur Erzeugung der Resonanzwirkung beitragen. Je weniger gedämpft also die Schwingung ist, um so mehr prägt sich die Resonanz aus, um so spitzer wird für ein gegebenes Bereich der Frequenzen die aufgenommene Kurve.

**§ 160. Bestimmung des Dekrements durch Aufnahme einer Resonanzkurve.** Wird zum Anzeigen der Schwingungen ein Hitzdrahtinstrument verwendet, so richten sich dessen Ablenkungen nach der während jedes Zuges von Schwingungen entwickelten Stromwärme, sie sind also dem Ausdrucke

$$I = \int_0^{\infty} J^2 dt$$

proportional. Dieses Integral wird als der Integraleffekt des Stromes bezeichnet.

Berechnung des Integraleffektes [Bjerknes<sup>23</sup>]. Wir gehen aus von der Gl. (178) in abgekürzter Form

$$J = e^{-\delta t} C_1 \sin \omega t + e^{-\delta t} C_2 \cos \omega t + e^{-\beta t} C_3 \sin \alpha t + e^{-\beta t} C_4 \cos \alpha t.$$

Das Quadrat dieses Ausdruckes erhält durch einfache goniometrische Umformungen die Gestalt:

$$\begin{aligned} J^2 = & \frac{1}{2} e^{-2\delta t} \{ C_1^2 + C_2^2 - (C_1^2 - C_2^2) \cos 2\omega t + 2 C_1 C_2 \sin 2\omega t \} \\ & + \frac{1}{2} e^{-2\beta t} \{ C_3^2 + C_4^2 - (C_3^2 - C_4^2) \cos 2\alpha t + 2 C_3 C_4 \sin 2\alpha t \} \\ & + e^{-(\delta+\beta)t} \{ (C_1 C_4 + C_2 C_3) \sin (\omega + \alpha)t + (C_1 C_4 - C_2 C_3) \sin (\omega - \alpha)t \\ & - (C_1 C_3 - C_2 C_4) \cos (\omega + \alpha)t + (C_1 C_3 + C_2 C_4) \cos (\omega - \alpha)t \}. \end{aligned}$$

Unter Anwendung der Formeln

$$\int_0^{\infty} e^{-at} dt = \frac{1}{a}, \quad \int_0^{\infty} e^{-at} \cos bt dt = \frac{a}{a^2 + b^2}, \quad \int_0^{\infty} e^{-at} \sin bt dt = \frac{b}{a^2 + b^2}$$

erhalten wir für  $\int_0^{\infty} J^2 dt$  den Wert

$$\begin{aligned} & \frac{C_1^2 + C_2^2}{4\delta} - \frac{(C_1^2 - C_2^2)}{4} \frac{\delta}{\omega^2 + \delta^2} + \frac{C_1 C_2}{2} \frac{\omega}{\omega^2 + \delta^2} \\ & + \frac{C_3^2 + C_4^2}{4\beta} - \frac{(C_3^2 - C_4^2)}{4} \frac{\beta}{\alpha^2 + \beta^2} + \frac{C_3 C_4}{2} \frac{\alpha}{\alpha^2 + \beta^2} \\ & + (C_1 C_4 + C_2 C_3) \frac{\omega + \alpha}{(\omega + \alpha)^2 + (\delta + \beta)^2} + (C_1 C_4 - C_2 C_3) \frac{\omega - \alpha}{(\omega - \alpha)^2 + (\delta + \beta)^2} \\ & - (C_1 C_3 - C_2 C_4) \frac{\delta + \beta}{(\omega + \alpha)^2 + (\delta + \beta)^2} + (C_1 C_3 + C_2 C_4) \frac{\delta + \beta}{(\omega - \alpha)^2 + (\delta + \beta)^2}. \end{aligned}$$

Wir führen nun ein

$$\frac{\omega + \alpha}{2} = m, \quad \frac{\omega - \alpha}{2} = r, \quad \frac{\delta + \beta}{2} = \mu, \quad \frac{\delta - \beta}{2} = \rho$$

und machen in Übereinstimmung mit der tatsächlichen Lage die Annahme, daß  $r$ ,  $\mu$ ,  $\varrho$  gegen  $m$  klein seien, derart, daß ihre Quadrate gegen  $m^2$  ganz unbedeutend sind. Diese Annahmen kommen hinsichtlich der Frequenz darauf hinaus, daß die Resonanzkurve nur für einen Bereich in der Nähe der Resonanzfrequenz untersucht wird, während hinsichtlich der Dämpfung Kreise mit extrem großer Dämpfung ausgeschlossen werden. Unter diesen Annahmen wird sich zeigen, daß die aufgeführten zehn Posten von verschiedener Ordnung sind; wir werden uns dann auf die Glieder beschränken, welche die anderen überwiegen, so daß wir die Korrektionsglieder vernachlässigen.

Wir haben zunächst die Konstanten  $C$  in den neuen Werten auszudrücken. Dazu gebrauchen wir

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{2 \omega (\delta - \beta)}{(\alpha^2 - \omega^2) + (\delta - \beta)^2} = - \frac{\varrho (m + r)}{mr - \varrho^2}.$$

Setzen wir zur Abkürzung

$$\sqrt{(mr - \varrho^2)^2 + \varrho^2(m + r)^2} = \sqrt{(m^2 + \varrho^2)(r^2 + \varrho^2)} = p,$$

es wird die mit  $A$  bezeichnete Größe  $A = E/2pL$ . Man erhält ferner mittels

$$\cos \varphi = \frac{mr - \varrho^2}{p}, \quad \sin \varphi = - \frac{\varrho (m + r)}{p}$$

für die Konstanten die Werte

$$C_1 = -A(\delta \cos \varphi + \omega \sin \varphi) = \frac{E}{2p^2L} [m^2\varrho - mr(\mu - \varrho) + \varrho(r^2 + \mu\varrho + \varrho^2)],$$

$$C_2 = A(\omega \cos \varphi - \delta \sin \varphi) = \frac{E}{2p^2L} [m^2r + m(\mu\varrho + r^2) + \mu r \varrho],$$

$$C_3 = \frac{A}{\alpha} \{ \omega \beta \cos \varphi + [\alpha^2 - \beta(\delta - \beta)] \sin \varphi \}$$

$$= - \frac{E}{2p^2L} \left[ (m^2 - r^2)\varrho + \frac{m + r}{m - r} (\mu - \varrho)(mr + \varrho^2) \right],$$

$$C_4 = -C_2.$$

Diese letztere Beziehung folgt daraus, daß  $J = 0$  für  $t = 0$ . Nähert man sich mit  $\alpha$  dem  $\omega$  so weit, daß  $r$  gegen  $m$  klein wird, so werden unter der fernereren Voraussetzung mäßiger Dämpfung die Koeffizienten unter Vernachlässigung der mit  $\left(\frac{r}{m}\right)^2$ ,  $\left(\frac{\mu}{m}\right)^2$ ,  $\left(\frac{\varrho}{m}\right)^2$  multiplizierten Glieder

$$C_1 = \frac{Em^2\varrho}{2p^2L} \left( 1 - \frac{r(\mu - \varrho)}{m\varrho} \right),$$

$$C_2 = \frac{Em^2r}{2p^2L} \left( 1 + \frac{\mu\varrho + r^2}{mr} \right),$$

$$C_3 = - \frac{Em^2\varrho}{2p^2L} \left( 1 + \frac{r(\mu - \varrho)}{m\varrho} \right).$$

Die Größen  $C$  sind also alle von derselben Größenordnung. Untersucht man ferner die Faktoren der Größen  $C_1^2 + C_2^2$  usw. auf S. 228, so findet man, daß

$$\frac{1}{4\delta^2}, \quad \frac{1}{4\beta^2}, \quad \frac{\omega - \alpha}{(\omega - \alpha)^2 + (\delta + \beta)^2} \quad \text{und} \quad \frac{\delta + \beta}{(\omega - \alpha)^2 + (\delta + \beta)^2}$$

gleicher Ordnung und unter diesen Faktoren am größten sind. Von der ersten Ordnung sind dagegen klein

$$\frac{\omega}{\omega^2 + \delta^2}, \quad \frac{\alpha}{\alpha^2 + \beta^2} \quad \text{und} \quad \frac{\omega + \alpha}{(\omega + \alpha)^2 + (\delta + \beta)^2}.$$

Von der zweiten Ordnung sind klein gegen die größten Faktoren

$$\frac{\delta}{\omega^2 + \delta^2}, \quad \frac{\beta}{\alpha^2 + \beta^2}, \quad \frac{\delta + \beta}{(\omega + \alpha)^2 + (\delta + \beta)^2}.$$

Es kommen, wenn wir die mit Bezug auf  $r$ ,  $\mu$  und  $q$  zulässigen Streichungen vornehmen, nur vier der zehn Posten in Betracht. Davon fällt noch einer fort, da  $C_1 C_4 - C_2 C_3$  das Glied der höchsten Ordnung nicht enthält. Es bleibt

$$\int_0^{\infty} J^2 dt = \frac{C_1^2 + C_2^2}{4\delta} + \frac{C_3^2 + C_4^2}{4\beta} + \frac{C_1 C_3 + C_2 C_4}{(\omega - \alpha)^2 + (\delta + \beta)^2} (\delta + \beta).$$

Bei denselben Streichungen haben wir ferner

$$p = m \sqrt{r^2 + q^2},$$

$$\frac{Em^2}{2p^2 L} = \frac{F}{2L(r^2 + q^2)}.$$

Man erhält daher unter Beschränkung auf das Hauptglied

$$\int_0^{\infty} J^2 dt = \left(\frac{E}{4L}\right)^2 \frac{1}{(r^2 + q^2)} \left(\frac{1}{\mu + q} + \frac{1}{\mu - q} - \frac{2\mu}{r^2 + \mu^2}\right)$$

$$= \frac{1}{8} \left(\frac{E}{L}\right)^2 \frac{\mu}{(\mu^2 - q^2)(\mu^2 + r^2)}.$$

Führen wir wieder die Größen  $\omega$ ,  $\delta$ ,  $\alpha$ ,  $\beta$  ein, so erhalten wir

$$\int_0^{\infty} J^2 dt = \frac{1}{4} \left(\frac{E}{L}\right)^2 \frac{\delta + \beta}{\delta \beta [(\omega - \alpha)^2 + (\delta + \beta)^2]} \dots \dots (181)$$

Auswertung der Resonanzkurve. Nach den mit dem Wellenmesser ausgeführten Beobachtungen zeichnen wir eine Kurve in folgender Art. Wir ermitteln die Kondensatoreinstellung, bei welcher der Ausschlag des Hitzdraht-instruments den größten Wert hat, und aus der Eichungskurve die Resonanzwellenlänge, die dieser Einstellung entspricht.

Wir tragen dann eine neue Kurve auf, deren Abszisse das Verhältnis jeder der beobachteten Wellenlängen zur Resonanzwellenlänge, und deren Ordinate das Verhältnis jedes beobachteten Ausschlags zum größten ist. Diese Kurve ist der zuerst besprochenen Resonanzkurve ähnlich, sie hat aber das Maximum Eins bei der Abszisse Eins.

Das Maximum entspricht bei der hier vorausgesetzten geringen Dämpfung der Kreise derjenigen Einstellung des Wellenmessers, bei welcher er gleiche Frequenz mit dem erregenden Kreise hat. Der Integraleffekt ist

$$I = \frac{1}{4} \left(\frac{E}{L}\right)^2 \frac{\delta + \beta}{\delta \beta [(\omega - \alpha)^2 + (\delta + \beta)^2]}.$$

Bei den gebräuchlichen Wellenmessern mit unveränderlicher Induktivität ist sowohl  $L$  als auch  $E$  von der Einstellung des Kondensators unabhängig.  $E$  ist der Faktor, der die Intensität der in dem Wellenmesser induzierten EMK bestimmt; er wird durch den die Spule des Wellenmessers durchsetzenden magnetischen Fluß bestimmt, der sich bei einer Verstellung des Kondensators nicht ändert.

Die Größen  $\omega$  und  $\delta$  hängen mit dem Wellenmesser nicht zusammen, die Größe  $\beta = \frac{L}{2R}$  ist bei Wellenmessern mit fester Spule ebenfalls von der Änderung des Kondensators unabhängig. Mit dem Kondensator ändert sich in dem Ausdruck für  $I$  nur die Größe  $\alpha$ , so daß bei Resonanz

$$I_r = \frac{1}{4} \left( \frac{E}{L} \right)^2 \frac{1}{\delta \beta (\delta + \beta)}.$$

Das Verhältnis  $I/I_r$ , das wir zur Ordinate wählen, ist also

$$y = \frac{(\delta + \beta)^2}{(\omega - \alpha)^2 + (\delta + \beta)^2}.$$

Als Abszisse soll das Verhältnis  $\lambda/\lambda_0$  gewählt werden, wo nach (176)

$$\lambda_0 = \frac{2\pi c}{\omega}, \quad \lambda = \frac{2\pi c}{\alpha},$$

also setzen wir  $x = \omega/\alpha$ . Wir können dann schreiben

$$y = \frac{1}{1 + \left( \frac{\omega}{\delta + \beta} \right)^2 \left( 1 - \frac{1}{x} \right)^2}.$$

Daraus erhält man

$$\left( \frac{\delta + \beta}{\omega} \right)^2 = \frac{y}{1-y} \left( 1 - \frac{1}{x} \right)^2.$$

Zu einer bestimmten Ordinate  $d$  der Kurve gehören zwei Abszissen, deren eine etwas unter Eins liegt, setzen wir  $x_1 = 1 - a$ , während die andere etwas über Eins liegt,  $x_2 = 1 + b$ . Dann sind also  $a$  und  $b$  die Stücke (Fig. 138), die die Kurve auf einer in der Höhe  $d$  gezogenen Parallelen zur  $x$ -Achse links und rechts von der Geraden  $x = 1$  abschneidet. Man erhält mit Rücksicht darauf, daß  $\frac{\delta + \beta}{\omega}$  wesentlich positiv ist, die beiden Gleichungen

$$\frac{\delta + \beta}{\omega} = \sqrt{\frac{d}{1-d}} \left( \frac{1}{1-a} - 1 \right),$$

$$\frac{\delta + \beta}{\omega} = \sqrt{\frac{d}{1-d}} \left( 1 - \frac{1}{1+b} \right).$$

Es ist daher auch

$$\frac{\delta + \beta}{\omega} = \sqrt{\frac{d}{1-d} \frac{ab}{(1-a)(1+b)}} \dots \dots \dots (182)$$

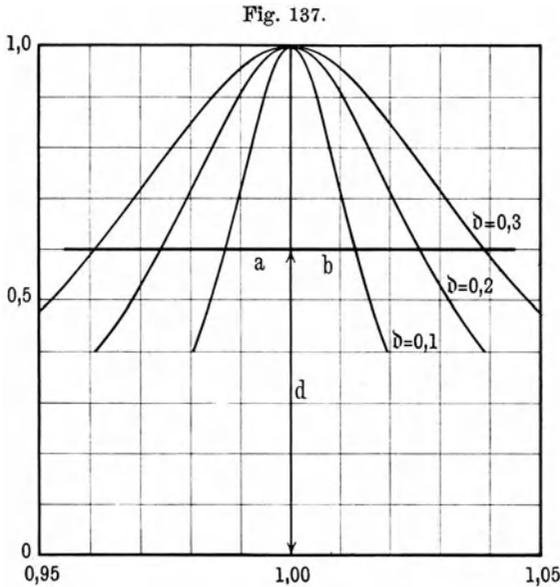
Unter der Voraussetzung mäßiger Dämpfung sind  $a$  und  $b$  für die Teile der Resonanzkurve, die man praktisch benutzt, schon klein gegen Eins ( $1/20$

bis  $1/10$ ) und einander so nahe gleich, daß  $(1 - a)(1 + b)$  nicht merklich von Eins abweicht.

Aus der Resonanzkurve ergibt sich also die Summe der logarithmischen Dekremente der erregenden Schwingung und des Wellenmessers bei der Frequenz  $\omega$  der erregenden Schwingung, nach Gl. (174) die Größe  $2\pi \frac{\delta + \beta}{\omega}$  zu dem Werte

$$\delta_1 + \delta_2 = 2\pi \sqrt{\frac{abd}{1-d}},$$

wo nach Fig. 137 die Größen  $a, b, d, 1 - d$  die vier Strecken sind, die auf den sich kreuzenden Geraden  $x = 1, y = d$  durch die Resonanzkurve abgeschnitten werden.



Den Bedingungen der Ableitung, daß nämlich die verschiedenen Frequenzen  $\alpha$  nur wenig von der Resonanzfrequenz  $\omega$  abweichen sollen, entsprechen am besten die Teile der Kurve, die in der Nähe des Gipfels liegen.

Die drei in Fig. 137 gezeichneten Kurven entsprechen den Dekrementen 0,1, 0,2 und 0,3.

Näherungsverfahren. Nennt man die Wellenlänge bei Resonanz  $\lambda_0$ , die bei  $x_1$  und  $x_2$  bezüglich  $\lambda_1$  und  $\lambda_2$ , so ist  $x_1 = \lambda_1 / \lambda_0$  und  $x_2 = \lambda_2 / \lambda_0$ , also erhalten wir

$$a = 1 - x_1 = \frac{\lambda_0 - \lambda_1}{\lambda_0},$$

$$b = x_2 - 1 = \frac{\lambda_2 - \lambda_0}{\lambda_0}.$$

Für ein Näherungsverfahren ist genügend genau  $\lambda_0 = 1/2(\lambda_1 + \lambda_2)$  und man erhält

$$\delta_1 + \delta_2 = 2\pi \frac{\lambda_2 - \lambda_1}{\lambda_2 + \lambda_1} \sqrt{\frac{d}{1-d}} \dots \dots \dots (183)$$

Offenbar braucht man für dieses Verfahren nicht mehr die Umzeichnung der Resonanzkurve, wie sie zur Ableitung gebraucht wurde, man kann vielmehr die Beobachtungen selbst als Ordinaten gegen die Kondensatoreinstellungen als Abszissen auftragen; man legt dann eine Horizontale in beliebiger Höhe und stellt als  $\lambda_1$  und  $\lambda_2$  die Wellenlängen fest, die den Schnittpunkten der Resonanzkurve mit der Horizontalen entsprechen.

Ausscheidung des Dekrements des Wellenmessers. Wie ersichtlich, liefert das angegebene Verfahren die Summe der Dekremente der erregenden Schwingung und des Wellenmessers selbst. Um letzteres auszuscheiden, nimmt man eine zweite Resonanzkurve auf, nachdem man den Widerstand in Meßkreise um eine bekannte Größe geändert hat. Allerdings wird vorausgesetzt, daß die Größe der Induktivität des Kreises bekannt ist, damit daraus die neue Dämpfungskonstante des Kondensatorkreises und danach dessen verändertes Dekrement bestimmt werden kann.

**§ 161. Stromverlauf in einem Kondensatorkreise als Empfänger.** Wir kehren nunmehr zu der in § 157 unterbrochenen Darstellung einer Kurve für den Strom des Kondensatorkreises zurück. Der wichtigste Fall ist derjenige der Resonanz zwischen der erregenden Schwingung und dem Kondensatorkreise. Wir setzen für diesen Fall  $\alpha = \omega$  und erhalten dadurch zunächst

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{2\omega}{\delta - \beta}, \quad A = \frac{E}{L(\delta - \beta)\sqrt{4\omega^2 + (\delta - \beta)^2}}.$$

Der Strom erhält dann die Form

$$J = -\frac{E}{4L(\delta - \beta)} \left\{ 2 \sin \omega t (e^{-\delta t} - e^{-\beta t}) + \sin \omega t \left[ \left( \frac{\delta}{\omega} \right)^2 e^{-\delta t} - \left( \frac{\beta}{\omega} \right)^2 e^{-\beta t} \right] + \frac{\delta - \beta}{\omega} \cos \omega t (e^{-\delta t} - e^{-\beta t}) \right\}.$$

Eine Rechnung, auf die wir nicht näher eingehen wollen, zeigt, daß dieser Ausdruck auch endlich bleibt, wenn sich  $\delta$  und  $\beta$  beliebig nahe kommen. Dieser Fall hat keine besondere Wichtigkeit und kann fernerhin übergangen werden. Von den drei Posten der Klammer haben der zweite und dritte die Bedeutung von Korrektionsgliedern, da sie  $\delta/\omega$  und  $\beta/\omega$  in der ersten und zweiten Potenz enthalten. Der Verlauf ist also im wesentlichen durch das erste Glied bestimmt.

Für die Gleichung

$$J = -\frac{E}{2L(\delta - \beta)} (e^{-\delta t} - e^{-\beta t}) \sin \omega t$$

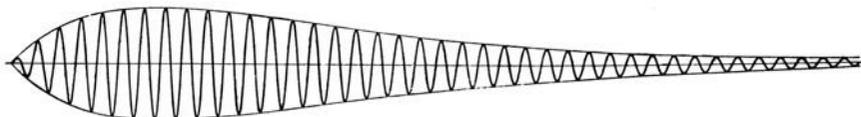
ergibt sich als Darstellung eine den Sinuskurven ähnliche Linie, deren Höchstwerte aber innerhalb der Ordinaten  $+(e^{-\delta t} - e^{-\beta t})$  eingeschlossen sind. Man erhält so die Fig. 138, die für zwei Schwingungen mit den Dekrementen 0,20 und 0,10 gezeichnet ist.

Die äußersten Fälle dieser Art sind, daß das Dekrement der erregenden Schwingung gegen das des Kondensatorkreises sehr groß oder sehr klein ist. Im ersteren Falle reduziert sich der Ausdruck auf die einfach gedämpfte Schwingung, wie in Gl. (172). Sehr stark gedämpfte Schwingungen erregen

also einen Kondensatorkreis wie ein einmaliger Anschlag, und er schwingt in seiner Eigenfrequenz; sie können demnach, wie dies auch anschaulich ist, keine merklichen Resonanzwirkungen hervorrufen.

Ist andererseits  $\delta$  sehr klein, so geht der Faktor  $e^{-\delta t} - e^{-\beta t}$  in die aus § 130 bekannte Form  $1 - e^{-\beta t}$  über; der Kondensatorkreis schwingt sich dann in einer Reihe von Schwingungen auf die volle Amplitude ein.

Fig. 138.



Andere Kurven ergeben sich, wenn wir die erregenden Schwingungen etwas schneller oder etwas langsamer erfolgen lassen, als der Eigenfrequenz des Empfängers entspricht. Dann entstehen wie bei ähnlichen akustischen Vorgängen Schwebungen. Die Amplitude der Schwingungen erreicht dann nicht wie in Fig. 138 ein Maximum, sondern mehrere mit einer Frequenz gleich der Differenz der beiden zusammenwirkenden. Wegen dieser hier weniger wichtigen Einzelheiten wird auf die ausführliche Darstellung von Bjercknes verwiesen.

### Dritter Abschnitt.

## Schwingungen gekoppelter Systeme.

§ 162. **Begriff gekoppelter Systeme.** Aus dem in § 155 über den Verbrauch der Energie im Schwingungssystem Gesagten geht hervor, daß in einem einfachen Schwingungskreise die Energie nur innerhalb der Leitungsbahn in Wärme umgesetzt wird. Es wird später gezeigt werden, daß der Schwingungskreis noch in anderer Form Energie abgibt, nämlich durch Strahlung, indessen ist deren Betrag im geschlossenen Kreise verschwindend klein gegen die im Widerstand verzehrte.

Es wird dann auch gezeigt werden, daß offene Schwingungskreise, nämlich solche, deren Dimensionen von der Größenordnung der Wellenlänge der Schwingung sind, Energie durch Strahlung abgeben. Sie dienen als Sender in der drahtlosen Telegraphie. Um sie zum Schwingen anzuregen, ist es gebräuchlich, sie mit einem geschlossenen Schwingungskreis durch elektrische oder magnetische Felder zu verbinden, zu „koppeln“, so daß die Schwingungen des geschlossenen Kreises auf den anderen übertragen werden. Eine strenge Darstellung dieser Vorgänge nach den Maxwell'schen Feldgleichungen ist bei der komplizierten geometrischen Form gekoppelter Systeme nicht zugänglich. Zur Annäherung denkt man sich den zweiten Schwingungskreis durch einen ebenfalls geschlossenen ersetzt<sup>24)</sup>, in den Widerstand eingeschaltet ist, welcher so viel Energie verzehrt, wie der offene Schwingungskreis durch Strahlung abgibt.

Es seien demnach zwei Schwingungskreise gegeben, durch ihre Selbstinduktivitäten  $L_1$  und  $L_2$ , die Gegeninduktivität  $M$ , die Widerstände  $R_1$

und  $R_2$  und die Kapazitäten  $K_1$  und  $K_2$ . Bei einem Sender erhält der Kondensator des ersten Kreises eine Anfangsladung  $Q$ , und darauf wird der Kreis durch einen Funken kurzgeschlossen, dessen Widerstand in  $R_1$  enthalten sei und näherungsweise als zeitlich unveränderlich angesehen werde; bei einem Empfänger wird einer der beiden Kreise von außen her durch eine periodische EMK erregt; dabei sind anfangs für beide Kreise Ströme und Spannungen gleich Null.

**§ 163. Der gekoppelte Sender.** Um uns für die Darstellung des Vorgangs beim Sender der Formel von Heaviside bedienen zu können<sup>26)</sup>, setzen wir an Stelle des Vorgangs der Entladung des Primärkreises den der Ladung aus einer Stromquelle konstanter EMK, deren Widerstand in  $R_1$  enthalten sei. Mit Bezug auf die veränderlichen Vorgänge bedeutet dies gegenüber der Ladung nur die Umkehrung aller Richtungen. Es gelten die Gleichungen

$$\left. \begin{aligned} E &= R_1 J_1 + L_1 \frac{dJ_1}{dt} + M \frac{dJ_2}{dt} + \frac{q_1}{C_1} \\ 0 &= R_2 J_2 + L_2 \frac{dJ_2}{dt} + M \frac{dJ_1}{dt} + \frac{q_2}{C_2} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (184)$$

worin  $J_1 = \frac{dq_1}{dt}$  und  $J_2 = \frac{dq_2}{dt}$ . In der Heavisideschen Form erhalten wir

$$\begin{aligned} E_p &= q_{1p} \left( \frac{1}{C_1} + pR_1 + p^2L_1 \right) + q_{2p} p^2 M \\ 0 &= q_{1p} p^2 M + q_{2p} \left( \frac{1}{C_2} + pR_2 + p^2L_2 \right). \end{aligned}$$

Für  $q_{1p}$  und  $q_{2p}$  ergeben sich Ausdrücke mit dem gleichen Nenner, welcher lautet

$$\begin{aligned} (L_1L_2 - M^2)p^4 + (R_1L_2 + R_2L_1)p^3 + \left( \frac{L_2}{C_1} + \frac{L_1}{C_2} + R_1R_2 \right)p^2 \\ + \left( \frac{R_1}{C_2} + \frac{R_2}{C_1} \right)p + \frac{1}{C_1C_2}. \end{aligned}$$

Wir schreiben ihn

$$(L_1L_2 - M^2)f(p) = (L_1L_2 - M^2)(p - p_1)(p - p_2)(p - p_3)(p - p_4).$$

Die Größen  $p_1$  bis  $p_4$  sind also die Wurzeln der Gleichung  $f(p) = 0$ . Es gilt zunächst

$$\begin{aligned} q_{1p} &= \frac{E_p}{L_1L_2 - M^2} \frac{\frac{1}{C_2} + pR_2 + p^2L_2}{f(p)} \\ q_{2p} &= - \frac{E_p}{L_1L_2 - M^2} \frac{p^2 M}{f(p)}. \end{aligned}$$

Man erhält daraus in der Grundform der Heavisideschen Formel

$$q_1 = \frac{E}{2\pi i (L_1L_2 - M^2)} \int_{-i\infty}^{+i\infty} \frac{e^{pt} dp}{p f(p)} \left( \frac{1}{C_2} + pR_2 + p^2L_2 \right).$$

Die Integration reduziert sich in bekannter Weise auf Integrale um kleine Kreise, welche die Unstetigkeitspunkte umgeben. Zerlegt man die Summe in einzelne Posten, so wird die Funktion  $\frac{e^{pt}}{pf(p)} \frac{1}{C_2}$  außer für die Wurzeln von  $f(p)$  auch für  $p = 0$  unendlich. Das Integral um diesen Punkt liefert von  $q_1$  den Anteil

$$\frac{E}{C_2(L_1L_2 - M^2)(f(p))_{p=0}} = C_1E.$$

In der Tat nimmt der an die konstante Spannung  $E$  angeschlossene Kreis mit der Kapazität  $C_1$  im Dauerzustand die Ladung  $C_1E$  auf.

Nach Gl. (167) können wir auch schreiben

$$q_1 = C_1E + \frac{E}{L_1L_2 - M^2} \sum_{\nu} \frac{e^{p_{\nu}t}}{\left(\frac{\partial f}{\partial p}\right)_{p_{\nu}}} \left( \frac{1}{C_2} + p_{\nu}R_2 + p_{\nu}^2L_2 \right)$$

$$q_2 = - \frac{E}{L_1L_2 - M^2} \sum_{\nu} \frac{e^{p_{\nu}t}}{\left(\frac{\partial f}{\partial p}\right)_{p_{\nu}}} p_{\nu}M.$$

Aus den Ladungen  $q_1$  und  $q_2$  folgen die Stromstärken, da  $J_p = pq_p$  ist. Wir wollen uns auf deren genaueres Studium beschränken. Man hat also die Gleichungen für  $q_{1p}$  und  $q_{2p}$  mit  $p$  zu multiplizieren. Dadurch fällt die Integration um den Nullpunkt fort, entsprechend dem Umstande, daß der Differentialquotient des konstanten Endgliedes Null ist.

Der Ausdruck für  $\frac{\partial f}{\partial p}$  besteht aus vier Posten zu drei Faktoren. Im ersten Posten fehlt der Faktor  $p - p_1$ , im zweiten  $p - p_2$ . Bildet man also  $\left(\frac{\partial f}{\partial p}\right)_{p_{\nu}}$  für irgend eine der Wurzeln  $p_{\nu}$ , so werden die Posten, die noch  $p - p_{\nu}$  enthalten, zu Null und nur einer bleibt übrig.

Wir erhalten daher folgende Gleichungen:

$$J_1 = \frac{E}{L_1L_2 - M^2} \left[ \begin{aligned} & e^{p_1t} \frac{1}{C_2} + p_1R_2 + p_1^2L_2 \quad \frac{1}{(p_1 - p_2)(p_1 - p_3)(p_1 - p_4)} + e^{p_2t} \frac{1}{C_2} + p_2R_2 + p_2^2L_2 \quad \frac{1}{(p_2 - p_1)(p_2 - p_3)(p_2 - p_4)} \\ & + e^{p_3t} \frac{1}{C_2} + p_3R_2 + p_3^2L_2 \quad \frac{1}{(p_3 - p_1)(p_3 - p_2)(p_3 - p_4)} + e^{p_4t} \frac{1}{C_2} + p_4R_2 + p_4^2L_2 \quad \frac{1}{(p_4 - p_1)(p_4 - p_2)(p_4 - p_3)} \end{aligned} \right] \quad (185)$$

$$J_2 = - \frac{E}{L_1L_2 - M^2} \left[ \begin{aligned} & e^{p_1t} \frac{Mp_1^2}{(p_1 - p_2)(p_1 - p_3)(p_1 - p_4)} + e^{p_2t} \frac{Mp_2^2}{(p_2 - p_1)(p_2 - p_3)(p_2 - p_4)} \\ & + e^{p_3t} \frac{Mp_3^2}{(p_3 - p_1)(p_3 - p_2)(p_3 - p_4)} + e^{p_4t} \frac{Mp_4^2}{(p_4 - p_1)(p_4 - p_2)(p_4 - p_3)} \end{aligned} \right] \quad (186)$$

Diese Gleichungen gelten ganz allgemein für zwei gekoppelte Kreise. Sie setzen also nichts über deren besondere Eigenschaften, z. B. eine Abstimmung auf gleiche Eigenfrequenz voraus. Durch Bestimmungen darüber werden nur die Werte  $p_1, p_2, p_3, p_4$  für den einzelnen Fall betroffen.

Zur Bestimmung der Wurzeln  $p_v$  gehen wir aus von der Gleichung

$$p^4(L_1 L_2 - M^2) + p^3(R_1 L_2 + R_2 L_1) + p^2\left(\frac{L_2}{C_1} + \frac{L_1}{C_2} + R_1 R_2\right) + p\left(\frac{R_1}{C_2} + \frac{R_2}{C_1}\right) + \frac{1}{C_1 C_2} = 0 \quad (187)$$

Gleichgestimmte Kreise. Wir setzen voraus, daß beide Kreise vor der Kopplung gleichgestimmt seien, so daß unter der Voraussetzung mäßiger Dämpfung  $\omega_0^2 C_1 L_1 = 1$  und  $\omega_0^2 C_2 L_2 = 1$ , wo  $\omega_0$  die gemeinsame Eigenfrequenz ist. Wir führen ferner die Bezeichnung ein

$$\frac{M^2}{L_1 L_2} = \kappa^2 \dots \dots \dots (188)$$

und nennen  $\kappa$  den Kopplungsfaktor. Ist  $M = 0$ , haben also die Kreise kein gemeinsames magnetisches Feld, so ist auch  $\kappa = 0$ , die Kreise sind ungekoppelt. Der höchste Wert, den  $\kappa$  annehmen kann, ist 1; er tritt z. B. bei zwei gleichen Kreisen auf, wenn  $M = L_1 = L_2$  ist, wenn also das eigene Feld jedes Kreises gleich dem gemeinsamen ist. Kreise, bei denen  $\kappa$  etwa bis zum Werte 0,2 geht, nennt man „lose“, solche mit größerem  $\kappa$  dagegen „fest“ gekoppelt.

Wir bezeichnen ferner mit  $\beta_1 = \frac{R_1}{2L_1}$  und  $\beta_2 = \frac{R_2}{2L_2}$  die Dämpfungsexponenten gemäß Gl. (171 b) der ungekoppelten Kreise. Dann nimmt die Bestimmungsgleichung (187) die Form an

$$p^4 + p^3 \frac{2(\beta_1 + \beta_2)}{1 - \kappa^2} + p^2 \frac{2(\omega_0^2 + 2\beta_1\beta_2)}{1 - \kappa^2} + p \frac{2\omega_0^2(\beta_1 + \beta_2)}{1 - \kappa^2} + \frac{\omega_0^4}{1 - \kappa^2} = 0.$$

Damit sich Schwingungen ergeben, müssen nach den früheren Beispielen komplexe Wurzeln vorhanden sein, und zwar gehört dann zu jeder einzelnen auch die konjugierte.

Wir können daher setzen

$$\left. \begin{aligned} p_1 &= -\beta' + i\omega_1, & p_3 &= -\beta'' + i\omega_2 \\ p_2 &= -\beta' - i\omega_1, & p_4 &= -\beta'' - i\omega_2 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (189)$$

Dann lautet die Bestimmungsgleichung  $f(p) = 0$

$$(p + \beta' - i\omega_1)(p + \beta' + i\omega_1)(p + \beta'' - i\omega_2)(p + \beta'' + i\omega_2) = 0 \text{ oder}$$

$$p^4 + p^3 2(\beta' + \beta'') + p^2(\omega_1^2 + \omega_2^2 + \beta'^2 + \beta''^2 + 4\beta'\beta'') + p(2(\omega_1^2\beta'' + \omega_2^2\beta') + \beta'\beta''^2 + \beta''\beta'^2) + \omega_1^2\omega_2^2 + \omega_1^2\beta''^2 + \omega_2^2\beta'^2 + \beta'^2\beta_2'^2 = 0.$$

Man genügt beiden Gleichungen in Anbetracht dessen, daß normalerweise  $\beta'^2$  gegen  $\omega_1^2$  und  $\beta''^2$  gegen  $\omega_2^2$  sehr klein ist, und für lose Kopplungen durch die Festsetzungen

$$\left. \begin{aligned} \omega_1 &= \sqrt{1 - \kappa} \omega_0, & \omega_2 &= \sqrt{1 + \kappa} \omega_0 \\ \beta' &= \frac{1}{2} \frac{\beta_1 + \beta_2}{1 - \kappa}, & \beta'' &= \frac{1}{2} \frac{\beta_1 + \beta_2}{1 + \kappa} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (189 a)$$

Wenn die Wurzeln paarweise komplex und konjugiert sind, so trifft dies auch auf je zwei der Posten zu, aus denen die Ausdrücke für  $J_1$  und  $J_2$  aufgebaut sind. So ist

$$\begin{aligned}(p_1 - p_2)(p_1 - p_3)(p_1 - p_4) &= 2i\omega_1(\beta' - \beta'' - i(\omega_1 - \omega_2))(\beta' - \beta'' - i(\omega_1 + \omega_2)) \\ (p_2 - p_1)(p_2 - p_3)(p_2 - p_4) &= -2i\omega_1(\beta' - \beta'' + i(\omega_1 - \omega_2))(\beta' - \beta'' + i(\omega_1 + \omega_2)).\end{aligned}$$

Ferner ist

$$\begin{aligned}(p_3 - p_1)(p_3 - p_2)(p_3 - p_4) &= 2i\omega_2(\beta' - \beta'' - i(\omega_1 - \omega_2))(\beta' - \beta'' + i(\omega_1 + \omega_2)) \\ (p_4 - p_1)(p_4 - p_2)(p_4 - p_3) &= -2i\omega_2(\beta' - \beta'' + i(\omega_1 - \omega_2))(\beta' - \beta'' - i(\omega_1 + \omega_2)).\end{aligned}$$

Näherungsweise ist für kleine Werte von  $\kappa$

$$\beta' - \beta'' = (\beta_1 + \beta_2) \frac{\kappa}{1 - \kappa^2}, \quad \omega_1 - \omega_2 = \omega_0 \frac{\kappa}{\sqrt{1 - \kappa^2}}, \quad \omega_1 + \omega_2 = \frac{2\omega_0}{\sqrt{1 - \kappa^2}}.$$

Unter der Voraussetzung mäßiger Dämpfungen kann man setzen

$$\begin{aligned}\beta' - \beta'' - i(\omega_1 - \omega_2) &= -i\omega_0 \frac{\kappa}{\sqrt{1 - \kappa^2}} e^{i \frac{\beta_1 + \beta_2}{\sqrt{1 - \kappa^2}}} = -i\omega_0 \frac{\kappa}{\sqrt{1 - \kappa^2}} e^{i\varepsilon_1} \\ \beta' - \beta'' - i(\omega_1 + \omega_2) &= -2i\omega_0 \frac{e^{i \frac{\kappa(\beta_1 + \beta_2)}{2\omega_0 \sqrt{1 - \kappa^2}}}}{\sqrt{1 - \kappa^2}} = -2i\omega_0 \frac{e^{i\varepsilon_2}}{\sqrt{1 - \kappa^2}}.\end{aligned}$$

Dies gilt, solange  $\sin \varepsilon_1 \approx \varepsilon_1$ ,  $\sin \varepsilon_2 \approx \varepsilon_2$  gesetzt werden können.

Dadurch werden die Nenner der ersten und dritten Posten in den Gleichungen

$$2i\omega_1(\beta' - \beta'' - i(\omega_1 - \omega_2))(\beta' - \beta'' - i(\omega_1 + \omega_2)) = -4i\omega_1\omega_0^2 \frac{\kappa}{(1 - \kappa^2)} e^{i(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)}$$

$$2i\omega_2(\beta' - \beta'' - i(\omega_1 - \omega_2))(\beta' - \beta'' + i(\omega_1 + \omega_2)) = +4i\omega_2\omega_0^2 \frac{\kappa}{(1 - \kappa^2)} e^{i(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)}.$$

Für die Zähler der ersten und dritten Posten für  $J_1$  erhält man mit den gleichen Vernachlässigungen

$$\begin{aligned}\frac{1}{C_2} + R_2(-\beta' + i\omega_1) + L_2(-\beta' + i\omega_1)^2 \\ = -L_2 \frac{\kappa\omega_0^2}{1 - \kappa} \left(1 + i\omega_1 \frac{\beta_1 - \beta_2}{\kappa\omega^2}\right) \approx -L_2 \frac{\kappa\omega_0^2}{1 - \kappa} e^{i\varepsilon_1} \\ \frac{1}{C_2} + R_2(-\beta'' + i\omega_2) + L_2(-\beta'' + i\omega_2)^2 \\ = +L_2 \frac{\kappa\omega_0^2}{1 + \kappa} \left(1 - i\omega_2 \frac{\beta_1 - \beta_2}{\kappa\omega^2}\right) \approx +L_2 \frac{\kappa\omega_0^2}{1 + \kappa} e^{-i\varepsilon_2}.\end{aligned}$$

Die entsprechenden Zähler in der Gleichung für  $J_2$  sind

$$p_1^2 M = (-\beta' + i\omega_1)^2 M \approx -\omega_1^2 M e^{2 \frac{\beta'}{\omega_1}} = -\omega_1^2 M e^{i\eta_1}$$

$$p_3^2 M = (-\beta'' + i\omega_2)^2 M \approx -\omega_2^2 M e^{2 \frac{\beta''}{\omega_2}} = -\omega_2^2 M e^{i\eta_2}.$$

Da die Posten mit  $p_1$  und  $p_2$  zueinander konjugiert sind, ebenso die Posten mit  $p_3$  und  $p_4$ , so ergibt sich für die Summe je zweier das Doppelte des reellen Anteils. Man erhält so

$$\left. \begin{aligned} J_1 &= \frac{E}{2L_1} \\ &\left\{ \begin{aligned} & \frac{e^{-\beta' t}}{(1-\kappa)\omega_1} \left( \sin \omega_1 t \cos(\zeta_1 - \varepsilon_1 - \varepsilon_2) + \cos \omega_1 t \sin(\zeta_1 - \varepsilon_1 - \varepsilon_2) \right) \\ & + \frac{e^{-\beta'' t}}{(1+\kappa)\omega_2} \left( \sin \omega_2 t \cos(\zeta_2 - \varepsilon_1 + \varepsilon_2) + \cos \omega_2 t \sin(\zeta_2 - \varepsilon_1 + \varepsilon_2) \right) \end{aligned} \right\} \quad (190) \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} J_2 &= -\frac{E}{2L_1} \sqrt{\frac{L_1}{L_2}} \\ &\left\{ \begin{aligned} & \frac{e^{-\beta' t}}{(1-\kappa)\omega_1} \left( \sin \omega_1 t \cos(\eta_1 - \varepsilon_1 - \varepsilon_2) + \cos \omega_1 t \sin(\eta_1 - \varepsilon_1 - \varepsilon_2) \right) \\ & - \frac{e^{-\beta'' t}}{(1+\kappa)\omega_2} \left( \sin \omega_2 t \cos(\eta_2 - \varepsilon_1 + \varepsilon_2) + \cos \omega_2 t \sin(\eta_2 - \varepsilon_1 + \varepsilon_2) \right) \end{aligned} \right\} \quad (191) \end{aligned} \right\}$$

**§ 164. Darstellung durch schwebende Schwingungen.** In beiden Kreisen treten nebeneinander Schwingungen auf, deren Perioden, unter der Annahme loser Kopplung, nur wenig voneinander verschieden sind. Dies führt zu Schwebungen. Sie lassen sich in einfacher Weise und übersichtlicher darstellen, wenn wir aus den Winkelfunktionen die Teile ausscheiden, welche nur von den Dämpfungursachen herrühren, also mit dem Wesen des Schwingungsvorgangs nichts zu tun haben, wenn wir also die Winkel  $\varepsilon$ ,  $\zeta$ ,  $\eta$  gleich Null setzen. Wir wollen ferner die trigonometrischen Funktionen dadurch anders entwickeln, daß wir setzen

$$\omega_1 = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} + \frac{\omega_1 - \omega_2}{2}, \quad \omega_2 = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} - \frac{\omega_1 - \omega_2}{2}.$$

Man erhält dann

$$J_1 = \frac{E}{2L_1} \left\{ \begin{aligned} & \left( \frac{e^{-\beta' t}}{(1-\kappa)\omega_1} + \frac{e^{-\beta'' t}}{(1+\kappa)\omega_2} \right) \cos \frac{\omega_1 - \omega_2}{2} t \sin \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t \\ & + \left( \frac{e^{-\beta' t}}{(1-\kappa)\omega_1} - \frac{e^{-\beta'' t}}{(1+\kappa)\omega_2} \right) \sin \frac{\omega_1 - \omega_2}{2} t \cos \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t \end{aligned} \right\} \quad (192)$$

$$J_2 = \frac{E}{2L_1} \sqrt{\frac{L_1}{L_2}} \left\{ \begin{aligned} & \left( \frac{e^{-\beta' t}}{(1-\kappa)\omega_1} + \frac{e^{-\beta'' t}}{(1+\kappa)\omega_2} \right) \sin \frac{\omega_1 - \omega_2}{2} t \cos \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t \\ & + \left( \frac{e^{-\beta' t}}{(1-\kappa)\omega_1} - \frac{e^{-\beta'' t}}{(1+\kappa)\omega_2} \right) \cos \frac{\omega_1 - \omega_2}{2} t \sin \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t \end{aligned} \right\} \quad (193)$$

Auch in diesen Gleichungen übertreffen die ersten Posten an Schwingungsweiten die zweiten, wenn die beiden Kopplungsfrequenzen nicht zu sehr verschieden sind. Wir können uns daher für Anordnungen mit loser Kopplung auf die jeweils ersten Posten beschränken. Jeder hat einen konstanten, das Maß bestimmenden Faktor und drei zeitlich Veränderliche. Der erste, mit den Exponentialfunktionen, sinkt von einem Anfangswert für  $t = 0$  mit wachsender Zeit auf beliebig kleine Werte hinab.

In Verbindung mit den folgenden Faktoren bringt er also Schwingungen abnehmender Amplitude hervor. Der jeweils dritte Faktor hat die Kreisfrequenz  $\frac{\omega_1 - \omega_2}{2}$ , während die der vierten Faktoren  $\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}$  ist. Letztere Größe ist angenähert gleich der Eigenfrequenz jedes Kreises für sich,  $\frac{\omega_1 - \omega_2}{2}$  ist aber ihr gegenüber klein. Die drei ersten Faktoren ergeben also eine Kurve, die derjenigen einer gedämpften Schwingung mit großer Periode ähnelt. Deren Ordinaten sind schließlich mit der Funktion  $\sin \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t$  zu multiplizieren, d. h. in die eben genannte Kurve ist eine Schwingung großer Frequenz einzuzeichnen in ähnlicher Weise, wie dies in Fig. 139 für einen einfacheren Fall geschehen ist. Das Ergebnis aller Faktoren sind Schwingungen, die man als Schwebungen bezeichnet. Die Amplitude der Schwingung nimmt mit einer im Vergleich zur Periode der Schwingungen beträchtlichen Periode zu und wieder ab. Die Schwebungen der Größen  $V_1$  und  $J_1$  werden durch die Funktion  $\cos \frac{\omega_1 - \omega_2}{2} t$  bestimmt, während für die Größen  $V_2$  und  $J_2$  die Funktion  $\sin \frac{\omega_1 - \omega_2}{2} t$  maßgebend ist. Daraus ergibt sich, daß die Zeiten größter Amplituden des einen Kreises mit denen geringster Amplituden des anderen Kreises zusammenfallen. Dagegen führt  $V_1$  seine größten Schwingungen gleichzeitig mit  $J_1$  aus und ebenso  $V_2$  mit  $J_2$ .

Fig. 139 stellt die oszillographischen Aufnahmen des Primärstromes  $P$  und des Sekundärstromes  $S$  zweier gekoppelter Schwingungskreise dar; die Kurven entsprechen durchaus dem durch die Gl. (192) und (193) bestimmten Verlauf.

Aus der Zahl  $n$  der Perioden der Frequenz  $\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}$ , die auf eine Periode der Frequenz  $\frac{\omega_1 - \omega_2}{2}$  fallen, kann man die Kopplung bestimmen, weil  $n(\omega_1 - \omega_2) = \omega_1 + \omega_2$ ; daher ist

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \sqrt{\frac{1 + \kappa}{1 - \kappa}} = \frac{n + 1}{n - 1}, \text{ oder } \kappa = \frac{2n}{n^2 + 1}.$$

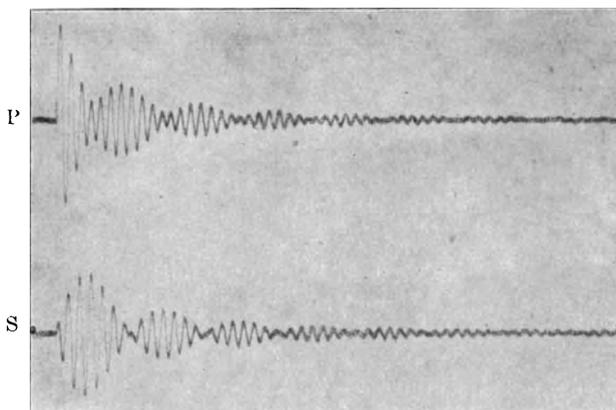
Die durch Fig. 139 dargestellte schwebende Schwingung fand also bei einer Kopplung  $\kappa = \frac{1}{7}$  statt.

Diese Schwingungen wurden erzeugt in zwei Schwingungskreisen, bestehend aus je einem Kondensator von 0,10 und 0,12  $\mu\text{F}$  und je einem Elektromagnet mit geradem Kern. Dabei wurde die Schaltung der Fig. 136 verwendet, wobei ein umlaufender Stromschließer die Rolle eines Funkens spielte. Im Kreise der Stromquelle (60 Volt) lag ein so großer Widerstand, daß der Ladungsvorgang im Oszillographen unmerklich blieb. Die Eigenfrequenz der beiden Kreise betrug 450 Per/Sek.

An dem das Maß der Amplitude enthaltenden Faktor der Gl. (193) fällt auf, daß der Kopplungsfaktor nur in der Verbindung  $1 - \kappa$  und  $1 + \kappa$  auftritt. Da diese Größen bei kleinen Werten von  $\kappa$  nahezu gleich sind, könnte es scheinen, als ob die höchste Amplitude von der Stärke der Kopplung im wesentlichen

unabhängig wäre. Dies wäre auch der Fall bei ungedämpften Schwingungen, weil dabei ausreichend Zeit zum Einschwingen auf den vollen Wert zur Verfügung steht. Um den Einfluß der Kopplung festzustellen, beachte man, daß

Fig. 139.

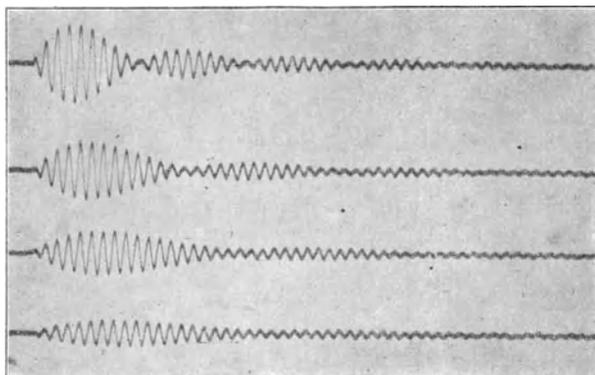


die erste Schwebung des Sekundärkreises ihre höchste Amplitude erreicht, wenn  $\frac{\omega_1 - \omega_2}{2} \tau = \frac{\pi}{2}$  ist. Von dem geringen Unterschied der Größen  $\beta' \tau$  und  $\beta'' \tau$  zur Zeit  $\tau$  kann man absehen und für diesen Zeitpunkt  $e^{-\beta' \tau} + e^{-\beta'' \tau} = 2 e^{-\frac{\beta_1 + \beta_2}{2} \tau}$  setzen. Da  $\omega_1 - \omega_2$  ungefähr gleich  $\kappa \omega$  ist, so ergibt sich der Höchstwert der Amplituden in der ersten Schwebung zu

$$\sqrt{\frac{I_1}{I_2}} \frac{E}{L_1} e^{-\frac{\beta_1 + \beta_2}{2} \frac{\pi}{\kappa}}$$

Die höchste Amplitude von  $J_2$  ist daher um so kleiner, je geringer die Kopplung ist. Dies wird durch die vier Kurven der Fig. 140 dargestellt, die

Fig. 140.



den Strom des sekundären Kreises bei immer schwächer werdender Kopplung zeigen. Man beobachtet daran sowohl die Abnahme der Amplituden, als

auch das immer seltenere Auftreten der Schwebungen. Die vierte Kurve ähnelt schon sehr der in Fig. 138 für äußerst lose Kopplung konstruierten.

Bei einem gewissen Werte der Kopplung ist der Wert der größten Amplitude der zweiten Schwebung praktisch zu vernachlässigen gegen den größten Wert der ersten Schwebung. Beide Werte stehen im Verhältnis  $e^{-\frac{\beta_1 + \beta_2}{\omega} \pi}$ . Für den Nachweis der Schwingungen mittels des Wellenmessers oder eines Empfangssystems kommt es in der Regel auf den Integraleffekt des Stromes an; die Amplituden gehen also mit ihrem Quadrat ein. Wenn daher  $2\pi \frac{\beta_1 + \beta_2}{\omega} \geq \kappa$  ist, so wirkt die Schwingung bis auf einen kleinen Betrag so, als wenn sie nur eine Welle enthielte.

Erregt man durch eine von einem gekoppelten System erzeugte Schwingung einen Wellenmesser, so wird dieser bei Veränderung seines Kondensators, wenn die beiden Wellen weit genug auseinander liegen, für sie getrennte Maxima anzeigen, also eine Kurve mit zwei Buckeln<sup>26)</sup>. Vermindert man die Kopplung, so treffen nach und nach beide Maxima zusammen, bis sie in eins übergehen.

**§ 165. Anstoß gekoppelter Kreise durch Sinusschwingungen.** In Gl. (170) in § 151 ist die abhängige Veränderliche als Funktion der Zeit dargestellt, wenn das System durch eine andauernde Sinusschwingung erregt wird. Dies entspricht dem heute in der Telegraphie ohne Draht bei Großstationen üblichen Aussenden sogenannter ungedämpfter Wellen. Die Empfangssysteme besitzen in der Regel mehrere gekoppelte Schwingungskreise, aber diese haben, abweichend von den Sendesystemen, nicht dieselbe Eigenfrequenz, sondern ihre Eigenfrequenzen, festgestellt bei Ausschaltung der anderen Kreise, sind stark verschieden. Daher kann auch der Strom im Detektorkreis nicht mehr durch Resonanz zwischen ihm und dem die Wellen auffangenden Antennenkreis gesteigert werden. Dagegen sind die Kreise fest gekoppelt und das ganze System ist mit seiner „kurzen Welle“, also der höheren Kopplungsfrequenz, auf die zu empfangende Frequenz abgestimmt. Die Wellenlänge niedriger Frequenz übertrifft die der anderen um das Vielfache.

Die Eleganz der Heavisideschen Formel erlaubt es, ohne Eingehen auf die Einzelheiten das wesentliche der auftretenden Erscheinungen anzugeben. Wir bleiben im allgemeinen bei den Bezeichnungen des § 163. Nach der Bestimmungsgleichung (187) für die Größen  $p_\nu$  hat man auch in dem vorliegenden Falle unter den Wurzeln der Gleichung  $f(p) = 0$  zwei Paare von komplexen und konjugierten Größen zu erwarten; der Form nach bleiben die Gl. (189) in Geltung, ohne daß wir aber eine so einfache Bestimmung für ihre Größen hätten, wie in dem Sonderfalle der Gl. (189 a). Ferner bleibt bestehen, daß die Ausdrücke  $\left(\frac{\partial f}{\partial p}\right)_{p_1}$  und  $\left(\frac{\partial f}{\partial p}\right)_{p_2}$  konjugiert sind, ebenso wie die Ausdrücke  $\left(\frac{\partial f}{\partial p}\right)_{p_3}$  und  $\left(\frac{\partial f}{\partial p}\right)_{p_4}$ . Nennen wir diese  $a_1 \pm ib_1$  und  $a_2 \pm ib_2$ , so ergibt sich nach Gl. (170), wenn wir  $\zeta = 0$  setzen, also an-

nehmen, daß die erregende Schwingung in der Phase Null einsetzt, z. B. für  $J_2$

$$J_2 = \frac{E}{L_1 L_2 (1 - \kappa^2)} \left\{ \frac{M(-\beta' + i\omega_1)^2}{(\omega^2 + (-\beta' + i\omega_1)^2)(a_1 + ib_1)} (\omega e^{(-\beta' + i\omega_1)t} - (\omega \cos \omega t + (-\beta' + i\omega_1) \sin \omega t)) \right. \\ + \frac{M(-\beta' - i\omega_1)^2}{(\omega^2 + (-\beta' - i\omega_1)^2)(a_1 - ib_1)} (\omega e^{(-\beta' - i\omega_1)t} - (\omega \cos \omega t + (-\beta' - i\omega_1) \sin \omega t)) \\ + \frac{M(-\beta'' + i\omega_2)^2}{(\omega^2 + (-\beta'' + i\omega_2)^2)(a_2 + ib_2)} (\omega e^{(-\beta'' + i\omega_2)t} - (\omega \cos \omega t + (-\beta'' + i\omega_2) \sin \omega t)) \\ \left. + \frac{M(-\beta'' - i\omega_2)^2}{(\omega^2 + (-\beta'' - i\omega_2)^2)(a_2 - ib_2)} (\omega e^{(-\beta'' - i\omega_2)t} - (\omega \cos \omega t + (-\beta'' - i\omega_2) \sin \omega t)) \right\}.$$

Solange  $\omega$ , die Frequenz der aufgedrückten Schwingung, sich von den Kopplungsfrequenzen  $\omega_1$  und  $\omega_2$  merklich unterscheidet, haben die Ausdrücke  $(\omega^2 + (-\beta' \pm i\omega_1)^2)$  und  $(\omega^2 + (-\beta'' \pm i\omega_2)^2)$  die Größenordnung von  $\omega^2$ . Dann entsteht also durch die aufgedrückte Schwingung, solange  $e^{-\beta't}$  und  $e^{-\beta''t}$  sich von Null noch merklich unterscheiden, eine Schwingung von jeder der beiden Frequenzen, die durch Interferenz Schwebungen erzeugen.

Wenn dagegen  $\omega$  dem Werte  $\omega_1$  oder  $\omega_2$  gleich wird, also die aufgedrückte Schwingung in Resonanz mit einer der Kopplungsschwingungen kommt, so wird z. B. für  $\omega = \omega_1$  der Ausdruck  $(\omega^2 + (-\beta' \pm i\omega_1)^2)_{\omega=\omega_1} = \beta'^2 \mp 2i\beta'\omega_1$ . Er fällt also, da  $\beta'$  unter praktischen Verhältnissen klein gegen  $\omega_1$  ist, aus der Ordnung der Größen  $\omega^2$  heraus, während  $(\omega_1^2 + (-\beta'' + i\omega_2)^2)$  in dieser Größenordnung bleibt. Die Schwingung von der Frequenz  $\omega_1$  nimmt daher sowohl in dem andauernden als dem abklingenden Teile stark zu, während die abklingende Schwingung von der Frequenz  $\omega_2$  schwach bleibt. Es können daher deutliche Schwebungserscheinungen nicht auftreten<sup>27)</sup>. Diese zeigen stets eine Teilung der Energie auf zwei Schwingungen, also eine Schwächung jeder einzelnen an. Die Empfangsanordnungen mit weit auseinanderliegenden Kopplungsfrequenzen, in der sogenannten Schwungradschaltung, sind durch diesen Umstand vor Anordnungen mit loser Kopplung im Vorteil. Auch wenn man bei diesen eine bestimmte Kopplungswelle mit der zu empfangenden Frequenz gleich machte, läge die andere doch nicht genügend weit ab, so daß auch noch Schwingungen dieser Frequenz in einiger Stärke aufträten.

Schwach gekoppelte Systeme, die in ihren Teilen gleichgestimmt waren, wurden deshalb so abgestimmt, daß die gemeinsame Grundfrequenz mit der zu empfangenden übereinstimmte. Es gab dann eine günstigste Kopplung. Koppelte man loser, so nahm der Antennenkreis zwar besser auf, konnte aber den Detektorkreis nur schwächer erregen; koppelte man stärker, so ließ die Stromstärke im Antennenkreis mehr nach, als die Wirkung auf den Detektorkreis verstärkt wurde. Diese Überlegungen galten für beide Kopplungsschwingungen in gleichem Grade.

§ 166. **Energiewanderung in gekoppelten Schwingungskreisen. Stoß-  
erregung.** Wir haben gesehen, daß gekoppelte Systeme schwebende Schwin-  
gungen ausführen, indem bald im Primärkreise, bald im Sekundärkreise die  
Amplitude von Strom und Spannung zu gleicher Zeit sehr klein sind, während  
sie in dem anderen System die größte Stärke erreichen. In den Zeiten

$\frac{\pi}{\omega_1 - \omega_2}, \frac{3\pi}{\omega_1 - \omega_2} \dots$  enthält also der primäre Kreis keine Energie, sie

befindet sich ganz im Sekundärsystem, während sie zu den Zeiten  $0, \frac{2\pi}{\omega_1 - \omega_2},$

$\frac{4\pi}{\omega_1 - \omega_2} \dots$  ausschließlich im Primärkreise enthalten ist. Von einem Zeit-

punkt zum anderen wandert sie also allmählich aus dem einen Kreise in den  
anderen. Daneben formt jeder Kreis bei der Ausführung seiner Schwingungen

mit der Frequenz  $\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}$  fortgesetzt die Energie aus elektrischer in

magnetische und wieder zurück um, ähnlich wie ein einfacher Schwingungs-  
kreis, nur daß bei jeder Schwingung ein Teil der Energie dem Nachbarkreise  
zuströmt oder aus ihm zurückfließt.

Man kann diese Erscheinungen durch mechanische Schwingungssysteme  
nachbilden, die auch, während sie Schwingungen nahezu von ihrer Eigen-  
periode ausführen, die Energie aus potentieller in kinetische und wieder  
zurück umformen, und außerdem ihre Energie abwechselnd aufeinander über-  
tragen, so daß bald das eine, bald das andere System zur Ruhe kommt.

Da die Energie zu Anfang allein im primären System sich befand, ist sie  
nach dem Verlauf der ersten Viertelperiode der Schwebung (Zeit  $\tau$ ), abgesehen  
von den Verlusten, ganz auf das Sekundärsystem übergegangen. Von hier  
aus bewirkt sie durch Übertragung der Energie auf den umgebenden Raum  
die Ausstrahlung der Energie in Form elektrischer Wellen. Die zur Zeit  $\tau$   
beginnende und zur Zeit  $2\tau$  vollendete Rückwanderung der Energie auf das  
Primärsystem ist vom Standpunkte der Energieausnutzung nicht wünschens-  
wert, da besonders im Funken des Primärkreises Energie verzehrt wird. Bei  
den Löschfunkensendern<sup>28)</sup> wird die Rückwanderung der Energie auf den  
Primärkreis verhindert. Durch besondere Form der Elektroden wird die  
Funkenstrecke so stark gekühlt, daß der Funke im Minimum der ersten halben  
Schwebung im Primärkreise ( $P$  in Fig. 139) oder sogar schon nach der ersten  
Halbschwingung erlischt. Die im Sekundärsystem sich fortsetzende Schwin-  
gung ruft zwar an der Funkenstrecke eine Spannung hervor, aber diese ist,  
weil kleiner als die Einsatzspannung der Funkenstrecke, nicht fähig, einen  
neuen Funken zu zünden. Die Energie bleibt also nunmehr im Sekundär-  
kreise und schwingt dort aus, als wenn dieser Kreis allein vorhanden wäre.

Zur Nachbildung dieses Vorganges wurde ein Stromschließer angewandt,  
bei dem der Kurzschluß des Primärkreises nur so lange dauerte, bis die  
Energie in den Sekundärkreis hinübergegangen war. Dies zeigt die obere  
Kurve  $P$  der Fig. 141 an; die untere Kurve  $S$  gibt ein Bild des Sekundär-  
stromes, der sich zunächst unter dem Primärstrom einschwingt, um sich dann  
als einfache gedämpfte Schwingung fortzusetzen. Die Kurven der Fig. 142  
zeigen den Verlauf im Sekundärkreise an, wenn der Primärkreis alle 36 und  
alle 18 Perioden von neuem angestoßen wurde.

Wenn die Kopplung der beiden Kreise, wie in der Praxis bei Löschfunken, fest ist, so tritt die Löschwirkung im Primärkreise schon nach wenigen Schwingungen ein; in diesem Falle kann also auch die Resonanz der Kreise

Fig. 141.

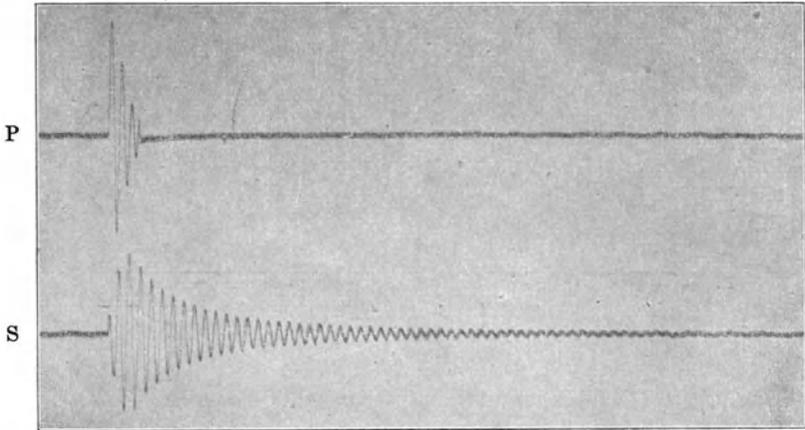
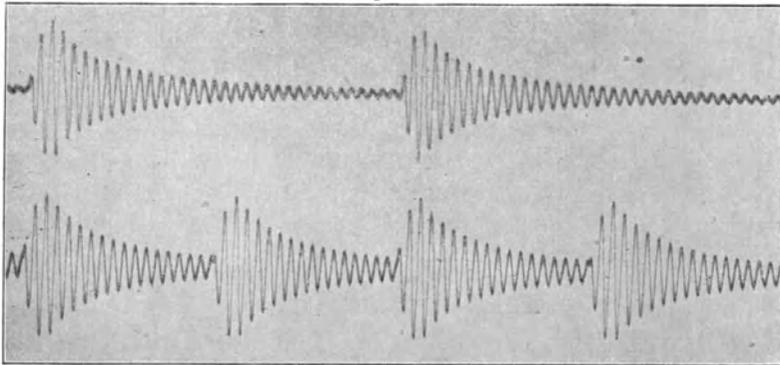


Fig. 142.



nicht sehr zur Geltung kommen. Der sekundäre Kreis wird dann wie durch einen kurzen Stoß in Schwingungen versetzt und schwingt in seiner Eigenfrequenz weiter. Aus dieser Sachlage erklärt sich die Bezeichnung Stoßerregung; von idealer Stoßerregung spricht man, wenn die primäre Entladung schon nach der ersten Halbschwingung unterbrochen wird.

## Sechster Teil.

# Andauernde elektrische Schwingungen.

### Erster Abschnitt.

#### Begriffe und Eigenschaften.

§ 167. **Begriff andauernder Schwingungen.** Wir kommen nun zu denjenigen Schwingungen, welche durch eine periodische und stets von neuem in gleicher Stärke erzeugte EMK hervorgerufen werden. In § 151 ist bemerkt worden, daß, wenn ein Kreis beliebiger Eigenschaften durch eine solche EMK erregt wird, in ihm außer einer nach kurzer Zeit abklingenden freien Schwingung noch solche erzeugt werden, welche mit der EMK gleiche Periodenzahl haben, und deren Amplituden andauernd dieselben Werte behalten. Man nennt solche Schwingungen häufig ungedämpfte Schwingungen. Bei ihnen sind die dämpfenden Ursachen gleichwohl vorhanden, und nur dadurch, daß der Stromkreis beständig durch die immer wieder erzeugte EMK erregt wird, wird dem Kreise so viel Energie zugeführt, daß er für die durch die dämpfenden Ursachen verzehrte Energie Ersatz bekommt, und daß die Schwingungen immer dieselbe Amplitude halten können. Es wird zur Kennzeichnung dieses Sachverhaltes statt der Bezeichnung ungedämpfte Schwingungen die Bezeichnung andauernde Schwingungen gebraucht.

Wenn bei sinusförmiger EMK nach Ablauf einer gewissen Zeit alle abhängigen Variablen in einem beliebigen Kreise ebenfalls sinusförmig von derselben Periode werden, so können wir in den Differentialgleichungen die Differentialquotienten nach der Zeit in endlicher Form ausrechnen; diese erscheinen also nicht mehr als solche, und wir ersparen auch die Integration nach der Zeit. Es ist dabei zu beachten, daß diese Rechnungsweise auf den einzelnen Fall nur so lange anwendbar ist, als tatsächlich der Zustand andauernder Schwingungen erreicht wird. Die große Vereinfachung, die durch die genannte Annahme ermöglicht wird, legt den Wunsch nahe, sie auch auf Zustände anwenden zu dürfen, die nicht andauernde Schwingungen im strengen Sinne sind, bei denen aber wenigstens eine Zeitlang die Schwingungen der Form andauernder sich nähern. Dies trifft namentlich für die Anwendungen der Theorie andauernder Schwingungen auf die Aufgaben der Telephonie zu. Nur in seltenen Fällen kommt es in der Telephonie vor, daß anhaltende Töne, also auch andauernde Schwingungen zu übertragen sind, es handelt sich vielmehr meist um kurze Klänge. Devaux-Charbonnel hat die Frage

untersucht<sup>29)</sup>, mit wie vielen Perioden man bei den zur Übertragung der Sprache dienenden Klängen rechnen kann, und er kommt zu dem Ergebnis, daß sie so viele aufeinanderfolgende Wellen enthalten, daß man sie mit Recht während des größeren Teiles ihres Verlaufes als andauernde Wechselströme betrachten darf.

Man hat jedenfalls im Auge zu behalten, daß die Theorie der Vorgänge bei andauernden Wechselströmen keinen Aufschluß über die diesen jedesmal vorausgehenden Übergangs- oder Ausgleichszustände gibt; diese bedürfen einer besonderen Betrachtung.

**§ 168. Mittlere Leistung bei andauernden Wechselströmen.** Zwischen zwei Punkten *A* und *B* eines mit Wechselstrom gespeisten Kreises (Fig. 106), wo der Schlußbogen über *c* eine beliebige Gestalt haben kann, sei die auf einem vorgeschriebenen Wege, z. B. *a*<sub>3</sub> *b*<sub>3</sub>, gemessene Spannung  $V \sin \omega t$ , die bei *A* eintretende Stromstärke sei  $J \sin(\omega t + \varphi)$ .

Wir wollen in dem Felde, welches die durch den Stromleiter und den Weg der Spannungsmessung berandete Fläche durchsetzt, die verbrauchte mittlere Leistung feststellen. In jedem Augenblick ist die Leistung gleich dem Produkt der Zeitwerte der Spannung und der Stromstärke, daher ist die von der Zeit *t*<sub>1</sub> bis zur Zeit *t*<sub>2</sub> verbrauchte Energie

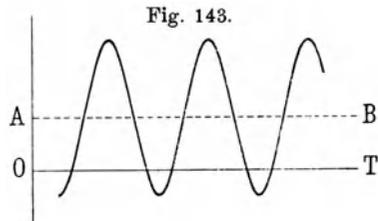
$$A = \int_{t_1}^{t_2} V J \sin \omega t \sin(\omega t + \varphi) dt.$$

Die zu integrierende Funktion, die augenblickliche Leistung **L**, geht durch eine einfache Umformung über in

$$L = \frac{VJ}{2} (\cos \varphi - \cos(2\omega t + \varphi)).$$

Es erleichtert die Feststellung der mittleren Leistung, wenn die Abhängigkeit zwischen **L** und *t* durch eine Zeichnung dargestellt wird.

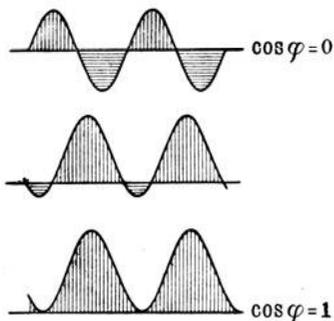
Wir sehen für die Zeichnung von dem Faktor  $VJ/2$  ab, der die Form des zeitlichen Verlaufes nicht ändert, und beginnen mit der Darstellung von  $\cos(2\omega t + \varphi)$ . Es ist daran zu erinnern, daß die periodische Funktion nicht die Werte vom Anfang des Vorganges an, sondern nur die nach dem Ablauf der Übergangszeit darstellt; wir beginnen also (Fig. 143) in einem beliebigen Punkte der Zeitenachse. Die Funktion  $\cos(2\omega t + \varphi)$  liegt symmetrisch zu einer Linie *AB*.



Zu ihren Werten ist der Betrag  $\cos \varphi$  zu addieren. Bei einem Energie verbrauchenden Apparate liegt er, wie sich noch näher zeigen wird, zwischen 0 und + 1. Die Addition von  $\cos \varphi$  vergrößert also alle Ordinaten, so daß sie z. B. für  $\cos \varphi = AO$  von der Linie *OT* aus rechnen. Man erkennt alsdann, daß die Werte von **L** mit der Periode  $2\omega$  veränderlich, aber nicht mehr symmetrisch positiv und negativ sind. Dies ist für mehrere Werte von  $\cos \varphi$  in Fig. 144 dargestellt, die mittlere Figur gilt für ein  $\cos \varphi$  zwischen Null und Eins. Während einer gewissen Zeit der Periode, und zwar der

größeren, ist die aufgenommene Leistung positiv (senkrecht schraffierte Flächen), zwischen je zwei derartigen Zeiten liegt eine kürzere, in der die aufgenommene Leistung negativ ist (wagrecht schraffierte Flächen), in der also der Apparat Energie abgibt. Der Unterschied beider Leistungen, der aufgenommenen und der zurückgegebenen, ist um so geringer, je kleiner  $\cos \varphi$  ist.

Fig. 144.



Wäre  $\cos \varphi = 0$ , wie die obere Figur darstellt, so wären beide Leistungen gleich, es würde also ebensoviel wiedergegeben, wie aufgenommen worden war. Dagegen fallen, wenn  $\cos \varphi = 1$  ist, die Flächen, welche die wiedergegebene Energie darstellen, weg, wie die untere Figur zeigt; es wird also alle aufgenommene Energie auch verbraucht. Man sieht im übrigen an allen Beispielen, daß sich die Vorgänge in jeder Periode wiederholen. Man erhält daher die mittlere Leistung,

wenn man das Integral von  $L$  über eine volle Periode bildet und durch deren Dauer  $2\pi/\omega$  dividiert. Es ist daher

$$\bar{L} = \frac{1}{2} VJ \cos \varphi - \frac{1}{2} VJ \cdot \frac{\omega}{2\pi} \int_{\omega t = 0}^{\omega t = 2\pi} \cos(2\omega t + \varphi) dt.$$

Das Integral über eine Kosinusfunktion für eine volle Periode ist aber Null, daher ist

$$L = \frac{1}{2} VJ \cos \varphi \dots \dots \dots (194)$$

**§ 169. Effektive Werte von Wechselstromgrößen.** Wenn Strom und Spannung in gleicher Phase sind, bleibt für die mittlere Leistung der Betrag  $L = \frac{1}{2} VJ$  bestehen, während dieser Betrag bei Gleichstrom gleich  $VJ$  ist. Der Unterschied ist aber nur scheinbar und erklärt sich durch die Verschiedenheit der Wirkung von Gleichströmen und Wechselströmen in einem zur Messung beider geeigneten Meßinstrument. Solche Instrumente sind Hitzdrahtinstrumente und Elektrodynamometer. Die Angaben beider richten sich nach dem mittleren Quadrat des durchfließenden Stromes. Während der Gleichstrom dauernd dieselbe Stärke hat und daher das Quadrat der Stromstärke zeitlich unveränderlich ist, ändert es sich bei Wechselstrom wie die Ordinaten der Fig. 146 bei  $\cos \varphi = 1$ . Gleichstrom  $J_g$  und Wechselstrom  $J$  haben also dieselbe Wirkung im Meßinstrument, wenn die Fläche  $\int J^2 dt$  während einer Periode ebenso groß ist wie die Fläche  $T J_g^2$ . Man erhält

$$\int_{t = n 2\pi / \omega}^{t = (n+1) 2\pi / \omega} J^2 \sin^2 \omega t dt = \frac{1}{2} J^2 \cdot 2\pi / \omega.$$

Daher ist

$$J_g^2 = \frac{1}{2} J^2.$$

Man bezeichnet die unveränderliche Stromstärke, deren Quadrat dem mittleren Quadrat eines sinusförmigen Wechselstromes gleich ist, als die

effektive Stromstärke des Wechselstromes. Hat dieser die Amplitude  $J$ , so ist also

$$J_{eff} = \frac{J}{\sqrt{2}} \dots \dots \dots (195)$$

Dasselbe gilt von dem Effektivwerte der Spannung, es ist

$$V_{eff} = \frac{V}{\sqrt{2}} \dots \dots \dots (195 a)$$

Benutzt man die Effektivwerte, die auch von den Meßinstrumenten angezeigt werden, wenn sie mit Gleichstrom geeicht sind, zur Berechnung der mittleren Leistung, so ist diese

$$L = V_{eff} J_{eff} \cos \varphi \dots \dots \dots (196)$$

Hier besteht also bei  $\cos \varphi = 1$  auch der Form nach kein Unterschied gegen die für Gleichstrom geltende Formel.

Zweiter Abschnitt.

**Besondere Rechnungsweisen.**

**§ 170. Geometrische und algebraische Darstellung andauernder Schwingungen.** Als allgemeine Form ergibt sich für den Zeitwert  $A_t$  der Veränderlichen mit der Amplitude  $A$  der Ansatz

$$A_t = A \sin(\omega t + \varphi),$$

wo  $\varphi$  die Phasendifferenz gegen die Schwingung  $\sin \omega t$  bedeutet.

Von großer Bedeutung ist für die Lösung der Aufgaben über Wechselströme die geometrische Darstellung solcher Wechselstromgrößen geworden, die auf folgenden Überlegungen sich aufbaut.

Die Vektorzeichnung. Ein Stab sei um eine feste Achse, die in der Nähe eines seiner Enden senkrecht zu ihm durchgesteckt ist, wie ein Zeiger drehbar, und er werde im Sinne eines Rechtssystems mit gleichförmiger Geschwindigkeit gedreht, so daß  $\nu$  volle Umdrehungen in der Sekunde zustande kommen. Er beschreibt dabei in einer Sekunde den Winkel  $2\pi\nu = \omega$ , also ist  $\omega$  seine Winkelgeschwindigkeit und  $\omega t$  der in der Zeit  $t$  durchlaufene Winkel. Das freie Ende des Stabes beschreibt bei der Drehung einen Kreis, dessen Radius gleich der freien Länge  $A$  des Stabes ist. Wir können die Zeit etwa von dem Augenblicke zählen, wo der Stab gerade die horizontale Lage nach rechts einnimmt, von der aus wir die Winkel rechnen; dann weicht der Stab zur Zeit  $t$  um einen Winkel  $\omega t$  von der angegebenen Lage ab. Wir verfahren etwas allgemeiner, wenn wir den Beginn der Zeitzählung beliebig wählen, aber feststellen, welche Lage der Stab im Augenblicke  $t = 0$  hatte; sie sei durch einen Winkel  $\varphi$  bestimmt. Dann ist  $\omega t + \varphi$  der Winkel, welcher die Lage des Stabes zu einer beliebigen Zeit  $t$  bezeichnet.

Wir wollen nun den Stab durch wagerechte Gerade auf die senkrechte Mittellinie projizieren. In Fig. 145 ist dies für drei Lagen geschehen, welche durch die Winkel  $\omega t_1 + \varphi$ ,  $\omega t_2 + \varphi$  usw. gegeben seien. Nun ist

$$\begin{aligned} OB_1 &= A \sin(\omega t_1 + \varphi), \\ OB_2 &= A \sin(\omega t_2 + \varphi) \text{ usw.} \end{aligned}$$

Zählen wir, wie üblich, nach oben gehende Längen als positiv, entgegengesetzt gehende als negativ, so stellt ein beliebiges  $OB$  den Wert der Größe  $A \sin(\omega t + \varphi)$  zur Zeit  $t$  dar. Die Zeitwerte von  $OB$  beginnen mit  $A \sin \varphi$ , wachsen bis  $A$ , fallen bis  $-A$ , steigen wieder bis  $+A$ , d. h. die Projektionen  $OB$  sind sinusartig veränderliche Größen mit konstanter Amplitude und der Frequenz  $\omega$ . Aus der Lage des Stabes  $A$  läßt sich der Zeitwert von  $OB$  auf die angegebene Art feststellen.

Fig. 145.

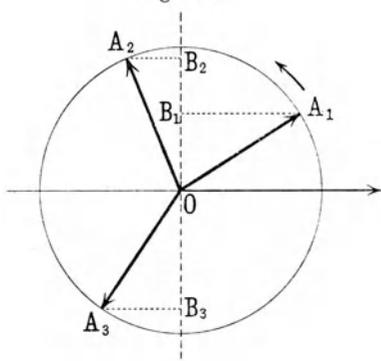
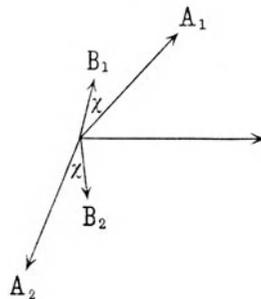


Fig. 146.



Wir können den Winkel, um den der Stab zur Zeit  $t$  von der Nullage abweicht, seine Phase nennen, indem wir in der Regel nur die Phasen zwischen Null und  $2\pi$  laufen lassen. Der sinusartigen Veränderlichen  $A \sin(\omega t + \varphi)$  schreiben wir in jedem Augenblick dieselbe Phase zu, wie dem Stabe, durch welchen sie dargestellt wird.

Verbindet man (Fig. 146) mit dem Stabe  $A$  fest einen zweiten  $B$ , so daß ihre Spitzen mit dem Drehpunkt den unveränderlichen Winkel  $\chi$  einschließen und läßt das Ganze sich mit der Winkelgeschwindigkeit  $\omega$  drehen, so ergibt die Projektion von  $A$  die Veränderliche mit dem Zeitwerte  $A_t = A \sin(\omega t + \varphi)$ , während die Projektion von  $B$  für denselben Zeitpunkt die Veränderliche mit dem Zeitwert  $B_t = B \sin(\omega t + \varphi + \chi)$  liefert. Man erkennt leicht, daß  $B_t$  jede Phase um den Winkel  $\chi$  früher erreicht als  $A_t$ .  $B_t$  ist also dem  $A_t$  um die Phase  $\chi$  voraus, es hat, wie dies in § 153 ausgedrückt wurde, gegen  $A_t$  die Phasendifferenz  $\chi$ .

Statt dieser Stäbe, die sich um eine gemeinsame Achse drehen, kann man auch Strahlen auf einer Scheibe von deren Drehpunkt aus ziehen und die Strahlen auf eine feste Linie projizieren. Die Zahl der Strahlen ist nicht begrenzt. Bei der Projektion gewinnt man eine über den Inhalt der Zeichnung hinausgehende Kenntnis nur in betreff der Zeitwerte, während der Höchstwert jeder Größe und ihre Phasendifferenz gegen jede andere schon in der Zeichnung feststehen. Soweit es also nicht auf die Kenntnis eines Zeitwertes ankommt, kann man auf die Projektion, sogar auf die Drehung

der Scheibe verzichten. Da die Kenntnis des Zeitwertes meist nebensächlich ist, so erkennen wir also, daß wir genügenden Aufschluß über die Eigenschaften der vorkommenden elektrischen Größen schon durch die Betrachtung der in die Zeichnung eingetragenen Linien unter Berücksichtigung ihrer Länge und ihrer Richtung erhalten können.

Wir führen damit eine Art Vektorenrechnung in die Untersuchung der Wechselstromgrößen ein.

Wir haben in § 4 als Vektor eine Größe bezeichnet, die außer durch ihren Betrag durch eine bestimmte Richtung im Raume gegen angenommene feste Richtungen gekennzeichnet ist. Bei der Darstellung der Wechselstromgröße durch eine gerichtete Linie handelt es sich aber nicht um eine Richtung im Raume, sondern um einen Winkelunterschied gegen eine Linie in der im übrigen vollkommen willkürlich liegenden Ebene der Zeichnung. Es wird vorkommen, daß wir diese Auffassung auf Größen anwenden, die, wie z. B. eine magnetische Feldstärke, sowohl nach ihrer räumlichen Lage als nach den zeitlichen Änderungen ihrer Bestimmungsstücke betrachtet werden kann. In der ersteren Beziehung ist sie ein Vektor im geometrischen Sinne; eines oder mehrere ihrer Bestimmungsstücke können wir wie die Größen  $A_1$  und  $B_1$  in Fig. 146 unabhängig von ihren sonstigen räumlichen Richtungsunterschieden in dem symbolischen Vektorbilde zusammenstellen.

Die Darstellung von periodischen Größen durch das Vektorbild findet darin eine Beschränkung, daß nur Vorgänge mit einer, und zwar derselben Periode aufgenommen werden können, sogenannte einwellige Veränderliche. Bei solchen, die mehrere Perioden enthalten, z. B. der Funktion

$$A_1 \sin(\omega t + \varphi_1) + A_2 \sin(2\omega t + \varphi_2) + \dots,$$

die man auch mehrwellige Veränderliche nennt, kann jeder Posten nur mit solchen gleicher Periode in derselben Zeichnung zusammengestellt werden. Es beruht dies darauf, daß die Fähigkeit, eine periodische Veränderlichkeit mit der Frequenz  $\omega$  darzustellen, den sämtlichen gerichteten Linien eines Blattes erst durch dessen Drehung mit der Winkelgeschwindigkeit  $\omega$  und durch die Projektion auf eine feste Linie zuerteilt wird.

In einer Rechnung mit Größen der Form  $A \sin(\omega t + \varphi)$  darf es demnach nur einen Wert von  $\omega$  geben. Mehrwellige Vorgänge erfordern für jede Einzelwelle die Durchführung einer gesonderten Rechnung und die spätere Zusammensetzung der Zeitwerte für denselben Augenblick.

Auch bei einwelligen Vorgängen gibt es abgeleitete Größen, die nicht in die Zeichnung aufgenommen werden können. So ist die Leistung eines einwelligen Wechselstromes eine einwellige Veränderliche, aber von doppelt so großer Periodenzahl wie die Spannung und die Stromstärke, sie findet also neben Strom und Spannung keinen Platz in der Zeichnung.

Nach der Art, wie die Darstellung einer Veränderlichen durch die Vektorzeichnung abgeleitet worden ist, kann sie unmittelbar zur Darstellung durch die Form  $A \sin(\omega t + \varphi)$  in Verbindung gesetzt werden. Aus dem unter dem Winkel  $\varphi$  gegen eine bestimmte Nulllinie gezeichneten Strahl  $A$  erhalten wir den Zeitwert der Veränderlichen, indem wir die ganze Zeichnung von der Nulllinie aus um den Winkel  $\omega t$  drehen und den Strahl auf eine feste senkrechte Linie projizieren.

### § 171. Darstellung von Wechselstromgrößen in komplexer Form.

Für eine bestimmte algebraische Darstellung haben wir nach dem am Ende des letzten Paragraphen Gesagten nur nachzuweisen, daß sie der Darstellung der Wechselstromgrößen durch gerichtete Linien gleichwertig ist, da wir den Zusammenhang der Zeichnung mit der gewöhnlichen algebraischen Form  $A \sin(\omega t + \varphi)$  schon nachgewiesen haben.

Wenden wir auf die gerichtete Linie  $OA_1$ , die unter dem Winkel  $\varphi$  gegen die als Nulllinie dienende  $x$ -Achse gezogen ist (Fig. 147), die Über-

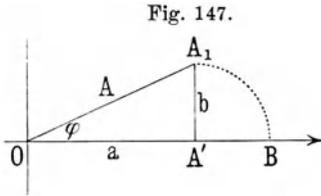


Fig. 147.

legungen der Vektorenrechnung an, so ist sie gleich der Summe der zueinander senkrechten Strecken  $OA'$  und  $A'A_1$ . Sind deren Längen  $a$  und  $b$ , so kann man gleichwohl nicht  $a + b$  für die gerichtete Linie setzen, da  $a + b$  die Länge  $OB$  auf der  $x$ -Achse ist.

Man hat vielmehr ein Hilfszeichen zu verwenden, das anzeigt, daß die Addition von  $a$  und  $b$  geometrisch, und zwar rechtwinklig zueinander erfolgen solle. Indem wir festsetzen, daß eine Größe  $a$  ohne Beisatz eine auf der  $x$ -Achse abzutragende Größe bezeichne, wollen wir Strecken, die parallel zur  $y$ -Achse aufgetragen werden sollen, durch Beisetzen des Zeichens  $j$  hervorheben. Dann wäre also  $a + jb$  die algebraische Angabe, nach der wir  $OA_1$  jederzeit zeichnen können. Auf diese Weise erhalten wir zur Bestimmung jeder Größe zwei Arten von Posten; der eine gibt eine Maßzahl ohne besonderes Kennzeichen, der andere hat eine Maßzahl mit dem Kennzeichen  $j$ . In besonderen Fällen können die darzustellenden Größen nur Posten der einen Art, in anderen nur solche der anderen Art enthalten.

So werden durch  $a + j \cdot 0$  und durch  $0 + ja$  zwei gerichtete Linien dargestellt, deren Länge gleich groß ist, die aber aufeinander senkrecht stehen. Man kann dies so auffassen, daß eine durch  $a$  bezeichnete Linie bei Drehung um einen rechten Winkel in  $ja$  übergeht.  $j$  erscheint dadurch wie ein Faktor. Drehen wir die senkrecht nach oben gehende Linie nochmals um einen rechten Winkel, so fällt sie auf die negative  $x$ -Achse, wird also  $-a$ ; bei nochmaliger Drehung um  $90^\circ$  fällt sie auf die negative  $y$ -Achse und wird daher  $-ja$ . Ist eine Linie  $a$  um  $360^\circ$  durch alle Winkel gedreht, so nimmt sie wieder den Wert  $a$  an. Wenn  $j$  als Faktor betrachtet werden soll, muß es folgende Bedingungen erfüllen:

$$\begin{aligned} j^2 a &= -a, \\ j^3 a &= -ja, \\ j^4 a &= +a. \end{aligned}$$

Diese Bedingungen erfüllt der Wert  $j = i$ , wo  $i = \sqrt{-1}$ , und zwar nicht nur für eine, sondern für beliebig viele Drehungen.

Wenn wir also jetzt die gerichtete Größe  $OA$  durch  $a + ib$  bezeichnen, so rechtfertigt sich die Einführung der imaginären Einheit im Grunde durch den Zufall, daß diese gerade die Eigenschaften hat, die wir von der als Kennzeichen der senkrechten Auftragung benutzten Größe  $j$  verlangen, wenn wir sie wie einen Faktor ansehen, der eine Drehung um einen rechten Winkel bezeichnet. Wenn dieser Zusammenhang festgehalten wird, bestehen Be-

denken gegen die Anwendung komplexer Rechnungen auf wirkliche Wechselstromvorgänge ebensowenig, wie gegen die Anwendung der Vektorzeichnung; zwischen beiden Arten der Darstellung ist kein sachlicher Unterschied. Von vielen Autoren wird das Zeichen  $j$  für Wechselstromvorgänge beibehalten. Obwohl Fälle vorkommen können, in denen zwischen  $j$  und  $i$  in einer Rechnung unterschieden werden muß, behalten wir das im Schreiben und Sprechen bequemere  $i$  für die Wechselstromvorgänge bei, indem wir uns für den Notfall die vorübergehende Anwendung von  $j$  vorbehalten.

Statt durch die rechtwinkligen Komponenten kann man die Linie auch durch ihre Länge  $A = OA_1$  und den Winkel  $\varphi$  bezeichnen, da

$$a + ib = A \cos \varphi + i A \sin \varphi = A e^{i\varphi}.$$

Nach der Bezeichnung  $A e^{i\varphi}$  erhält man aus der in der Richtung der  $x$ -Achse aufzutragenden Größe  $A$ , wenn man diese um den Winkel  $\varphi$  dreht, die Größe  $A e^{i\varphi}$ ; die Beisetzung des Faktors  $e^{i\varphi}$  bedeutet also eine Drehung um  $\varphi$  Grad. Da  $e^{i\pi/2} = i$ ,  $e^{i\pi} = -1$ ,  $e^{i3\pi/2} = -i$  ist, so sieht man, daß die Aussage über  $e^{i\varphi}$  sich für solche  $\varphi$ , die Vielfache von rechten Winkeln sind, mit den Aussagen über die Bezeichnung der parallel der  $y$ -Achse aufzutragenden Größen deckt.

Es sei darauf hingewiesen, daß in der Feststellung des Winkels zwischen der bei der Vektorenrechnung vorgeschriebenen Art und der für die Darstellung der Wechselstromgrößen geltenden ein Unterschied besteht. Beim Vektorprodukt  $[\mathfrak{A}, \mathfrak{B}]$  ist Winkel  $(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$  derjenige, welcher bei der Überführung des Vektors  $\mathfrak{A}$  in die Richtung des Vektors  $\mathfrak{B}$  beschrieben wird. Er ist also positiv, wenn man von  $\mathfrak{A}$  nach  $\mathfrak{B}$  eine Drehung dem Uhrzeiger entgegengesetzt ausführt. Der Phasenunterschied einer Wechselstromgröße  $A e^{i\varphi}$  gegen  $B e^{i\psi}$  ist dagegen  $\varphi - \psi$ , also positiv, wenn  $A e^{i\varphi}$  im Sinne einer Drehung entgegengesetzt dem Uhrzeiger vor  $B e^{i\psi}$  voraus liegt.

**§ 172. Allgemeine Form der Wechselstromgrößen.** Die algebraische Darstellung durch komplexe Größen geht über die Zeichnung, mit der sie sich bisher vollkommen deckte, dadurch noch einen Schritt hinaus, daß man auch die Drehung der Zeichnung durch ein algebraisches Zeichen wiedergeben kann. Alle Linien der Zeichnung drehen sich mit der Winkelgeschwindigkeit  $\omega$ , beschreiben also in der Zeit  $t$  den Winkel  $\omega t$ . Setzen wir allen algebraischen Symbolen der Wechselstromgrößen den Faktor  $e^{i\omega t}$  bei, so wird dadurch die Drehung der Zeichnung berücksichtigt. Die allgemeine Form ist daher

$$A e^{i\varphi} e^{i\omega t} = A e^{i(\omega t + \varphi)}.$$

Die Übereinstimmung mit der bisherigen Darstellung kann dadurch geprüft werden, daß der Definition entsprechend die Projektion auf eine feste senkrechte Achse den Zeitwert der Veränderlichen angeben soll. Diese Projektion ist aber der Faktor von  $i$  oder  $A \sin(\omega t + \varphi)$ .

In der allgemeinen Rechnung ist es bequem, statt Länge und Phase einer Wechselstromgröße ausdrücklich anzugeben, an Stelle der Angabe  $A e^{i\varphi}$  ein Symbol  $\mathfrak{A}$  wie in der Rechnung mit räumlichen Vektoren zu verwenden. Dieses Symbol bedeutet also, daß es sich um eine Linie bestimmter, aber zunächst beliebiger Länge und Richtung in der Zeichnungsebene handelt.

Wir erhalten so in der allgemeinsten Form das Symbol

$$\Re e^{i\omega t}$$

für den Zeitwert einer einwelligen Veränderlichen der Frequenz  $\omega$ .

**§ 173. Rechnen mit komplexen Wechselstromgrößen.** Wir haben festgestellt, daß die symbolische Form  $\Re e^{i\omega t}$  der Wechselstromgrößen nur eine bestimmte Lage in der mit gleichmäßiger Winkelgeschwindigkeit in ihrer Ebene gedrehten Zeichnung, nicht aber eine bestimmte räumliche Richtung bezeichnet.

Wegen dieses Unterschiedes gelten auch gewisse Unterschiede in der Rechnungsweise gegen die Rechnung mit räumlichen Vektoren. Die Wechselstromsymbole befolgen, kurz gesagt, in allem und lediglich die Rechenregeln für komplexe Zahlen. Man kann daher mit ihnen auch Divisionen ausführen. Es wird sich indessen empfehlen, dies durch parallele Rechnungen in der reellen und der komplexen Form zu bestätigen.

**Addition und Subtraktion.** Die Summe zweier derartiger Größen ergibt sich als

$$\begin{aligned} A_1 \sin(\omega t + \vartheta_1) + A_2 \sin(\omega t + \vartheta_2) &= A_1 e^{i(\omega t + \vartheta_1)} + A_2 e^{i(\omega t + \vartheta_2)} \\ &= \sin \omega t (A_1 \cos \vartheta_1 + A_2 \cos \vartheta_2) + i \cos \omega t (A_1 \sin \vartheta_1 + A_2 \sin \vartheta_2) \\ &= e^{i\omega t} [(A_1 \cos \vartheta_1 + A_2 \cos \vartheta_2) + i(A_1 \sin \vartheta_1 + A_2 \sin \vartheta_2)]. \end{aligned}$$

Definiert man zwei Größen  $A$  und  $\vartheta$  durch die Gleichungen

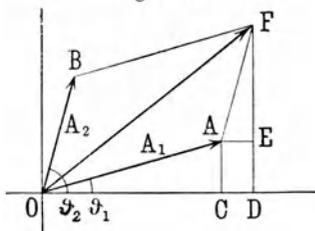
$$\begin{aligned} A &= \sqrt{(A_1 \cos \vartheta_1 + A_2 \cos \vartheta_2)^2 + (A_1 \sin \vartheta_1 + A_2 \sin \vartheta_2)^2}, \\ \operatorname{tg} \vartheta &= \frac{A_1 \sin \vartheta_1 + A_2 \sin \vartheta_2}{A_1 \cos \vartheta_1 + A_2 \cos \vartheta_2}, \end{aligned}$$

so ergibt sich die Summe in den Formen

$$A \sin(\omega t + \vartheta) \quad ; \quad A e^{i(\omega t + \vartheta)}.$$

Diese beiden Ausdrücke stellen nach der Übereinkunft dieselbe Größe dar. Konstruiert man das Parallelogramm (Fig. 148) aus den beiden Strahlen  $OA$  und  $OB$ , so ist

Fig. 148.



$$OD = A_1 \cos \vartheta_1 + A_2 \cos \vartheta_2,$$

$$DF = A_1 \sin \vartheta_1 + A_2 \sin \vartheta_2.$$

Daher ist

$$OF = A \quad \text{und} \quad \sphericalangle DOF = \vartheta.$$

Man erhält also die Summe durch geometrische Addition der Vektoren. Will man eine Differenz bilden, so hat man einen Strahl in entgegengesetzter Richtung anzutragen.

**Multiplikation und Division.** Bei diesen Rechnungsweisen ist besonders zu bedenken, daß die Vektorzeichnung nur Wechselstromgrößen derselben Periode enthalten darf; es lassen sich daher nur solche Produkte hineinzeichnen, welche nur einen periodischen Faktor enthalten.

Zunächst handle es sich bei der Multiplikation und Division um einen positiven reellen Faktor; es soll z. B. eine Spannung verdoppelt, verdreifacht werden. Diese Multiplikation geht aus fortgesetzter Addition gleichgerichteter Strahlen hervor; es ergibt sich, daß man eine durch einen Strahl dargestellte Wechselstromgröße mit einem positiven reellen Faktor multipliziert oder dividiert, indem man die Länge nach dem Maße des Faktors vermehrt oder vermindert.

Eine andere Art von Multiplikation ergibt sich aus folgender Überlegung. Manche Wechselstromgrößen stehen zueinander in der Beziehung, daß die eine die Ableitung der anderen nach der Zeit ist. So ist z. B. der Ladungsstrom eines Kondensators die Ableitung der Ladung nach der Zeit. Wir stellen dies wieder in beiden Formen dar:

$$\begin{array}{l|l} \text{Ladung} = Q \sin(\omega t + \vartheta), & \text{Ladung} = Q e^{i(\omega t + \vartheta)} = \Im e^{i\omega t}, \\ \text{Strom } \frac{dq}{dt} = \omega Q \cos(\omega t + \vartheta) & \text{Strom } i\omega \Im e^{i\omega t} = \omega \Im e^{i(\omega t + \pi/2)}, \\ = \omega Q \sin(\omega t + \vartheta + \pi/2), & = \omega Q e^{i(\omega t + \vartheta + \pi/2)}. \end{array}$$

Auch diese Werte stellen dieselbe Wechselstromgröße dar.

Man erhält also aus einer Wechselstromgröße ihre Ableitung nach der Zeit durch einen zweiten Strahl, dessen Länge sich durch Multiplikation des ersten Strahles mit  $\omega$  ergibt; der zweite Strahl ist aber vor dem ersten in der Phase von  $\pi/2$  voraus. Die komplexe Darstellung hat dafür die beiden Formen

$$i\omega \Im e^{i\omega t} \quad \text{und} \quad \omega \Im e^{i(\omega t + \pi/2)}.$$

Danach bedeutet eine Multiplikation mit  $i\omega$  soviel wie die Verlängerung des Strahles mit dem Faktor  $\omega$  und die Drehung um den Winkel  $\pi/2$ . Dies stimmt auch mit dem in § 170 erläuterten Grundbegriff überein. Demnach bedeutet eine Multiplikation mit  $k e^{i\psi}$ , daß man die Länge des Strahles  $k$ mal so groß nehmen und ihn gegen die erste Lage um den Winkel  $\psi$  drehen soll.

Eine Division mit  $k e^{i\psi}$  bedeutet eine Verkürzung der Länge im Maße  $1:k$  und eine Rückwärtsdrehung des Strahles um den Winkel  $\psi$ .

Das Rechnen mit den komplexen Wechselstromgrößen gleicher Frequenz erfolgt demnach, wie bereits bemerkt, vollkommen nach den Regeln der Algebra für komplexe Zahlen.

**§ 174. Gerichtete Widerstände und Leitwerte.** Nehmen wir als Beispiel eine Schaltung mit Widerstand und Kapazität in Reihe. Wenn wir in die in § 131 abgeleitete Formel

$$E - \frac{q}{K} = R J$$

die Annahme einführen, daß nach Ablauf der Übergangszeit durch die EMK  $\mathfrak{E} e^{i\omega t}$  ein Strom  $\mathfrak{J} e^{i\omega t}$  und eine Ladung  $\Im e^{i\omega t}$  hervorgebracht werden, so ergibt sich

$$\mathfrak{E} = \frac{\Im}{K} + R \mathfrak{J};$$

$e^{i\omega t}$  stand auf beiden Seiten als Faktor und fällt deshalb aus der Gleichung heraus. Wir haben also eine Beziehung nur zwischen den Strahlen, wie in § 170 angedeutet wurde, in der die Zeit nicht mehr ausdrücklich vorkommt.

Zwischen  $\mathfrak{Z}$  und  $\mathfrak{Q}$  besteht nach § 173 die Beziehung:

$$\mathfrak{Z} = i \omega \mathfrak{Q}.$$

Daher ist

$$\mathfrak{E} = \mathfrak{Z} \left( \frac{1}{i \omega K} + R \right).$$

Man erhält also den Vektor der EMK aus dem Vektor der Stromstärke, indem man diesen mit dem Faktor  $\left( \frac{1}{i \omega K} + R \right)$  multipliziert.

Diese Form ähnelt dem Ohmschen Gesetz. Der Faktor  $R + \frac{1}{i \omega K}$  muß homogen sein, also ist auch  $\frac{1}{i \omega K}$  eine Art Widerstand; die zu seiner Überwindung erforderliche EMK ist aber  $\frac{\mathfrak{Z}}{i \omega K}$ , also gegen den Strom um einen rechten Winkel rückwärts versetzt.

Man kann auch den ganzen Faktor  $\left( R + \frac{1}{i \omega K} \right)$  als Widerstand auffassen. Er läßt sich als komplexe Größe durch einen Strahl, also eine Länge und eine Richtung darstellen (Fig. 149), und zwar ist die Länge

$$\mathfrak{R} = \sqrt{R^2 + \frac{1}{\omega^2 K^2}},$$

und der zugehörige Winkel ist bezeichnet durch

$$\operatorname{tg} \varphi = - \frac{1}{\omega K R}.$$

Man kann daher auch diesen Strahl oder den Widerstand als

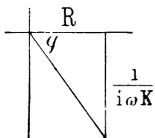
$$\mathfrak{R} = |\mathfrak{R}| e^{i\varphi}$$

bezeichnen und erhält die Gleichung des Kondensatorkreises in der Form

$$\mathfrak{E} = \mathfrak{R} \mathfrak{Z} \dots \dots \dots (197)$$

Eine Gleichung dieser Art sagt zunächst aus, daß man aus dem als bekannt angenommenen Vektor des Stromes den der tätigen EMK erhält, wenn man ersteren mit  $\mathfrak{R}$  multipliziert, d. h. einen neuen Vektor zeichnet, der  $|\mathfrak{R}|$  mal so lang und um den Winkel von  $\mathfrak{R}$  gegen den ersten Strahl gedreht ist.

Fig. 149.



Wegen der Ähnlichkeit der Gleichung  $\mathfrak{E} = \mathfrak{R} \mathfrak{Z}$  mit dem Ohmschen Gesetz ist es ferner der Form nach zulässig,  $\mathfrak{R}$  als den Wechselstromwiderstand des Kreises anzusehen.

Wir nennen einen solchen Widerstand auch wohl einen gerichteten Widerstand oder Scheinwiderstand. Die reelle Komponente nennt man den Wirkwiderstand, die komplexe den Blindwiderstand.

Da jede Gleichung über den Verlauf von Wechselströmen in die Form gebracht werden kann, daß sie das Verhältnis der EMK zur Stromstärke darstellt, so läßt sich für jede Schaltung ein Wechselstromwiderstand angeben,

wie die Beispiele der folgenden Paragraphen lehren werden. Die Definition eines Wechselstromwiderstandes bietet keine Schwierigkeit, wenn wir einen gerichteten Widerstand als die Spannung ansehen, die durch den in Rede stehenden Apparat die Stromstärke Eins treibt. Wenn wir, wie auch bei den Beispielen über die durch konstante EMK hervorgerufenen Ströme, voraussetzen, daß zwischen den Kondensatoren oder Wicklungen verschiedener Teile einer Schaltung keine gemeinsamen elektrischen oder magnetischen Felder bestehen, die nicht ausdrücklich bezeichnet sind, so kann man von dem gerichteten Widerstand jedes einzelnen Teiles der Schaltung mit derselben Berechtigung sprechen, wie von der Induktivität eines Apparates; der Wechselstromwiderstand mehrerer in Reihe geschalteter ist dann die Summe derjenigen der Teile.

Auch bei Parallelschaltung kann man gerichtete Widerstände wie gewöhnliche behandeln. Sind in einem Stromkreise zwei Apparate, die einzeln die gerichteten Widerstände  $\mathfrak{R}_1$  und  $\mathfrak{R}_2$  haben, parallel geschaltet, so führe der erste die Stromstärke  $\mathfrak{I}_1$ , der zweite die Stromstärke  $\mathfrak{I}_2$ . Da die Spannung am Verzweigungspunkt eindeutig ist, so ist  $\mathfrak{R}_1 \mathfrak{I}_1 = \mathfrak{R}_2 \mathfrak{I}_2$ . Hieraus geht aber wie bei gewöhnlichen Widerständen hervor, daß die Zweigströme im umgekehrten Verhältnis der gerichteten Widerstände stehen.

Der Vergleich mit den Beispielen für die Anwendung der Heavisideschen Formel in § 146, 151 und 163 weist auf eine große Ähnlichkeit hin; an die Stelle des rein imaginären Faktors  $i\omega$  tritt in den Heavisideschen Formeln der Faktor  $p$ , der in einigen Beispielen reell, in anderen komplex ist. Die Ähnlichkeit ergibt sich daraus, daß in beiden Fällen zwischen der treibenden EMK und der Stromstärke eine lineare Beziehung aufgestellt wird. Die Beispiele, welche wir später für das Verhalten von Leitungen und Apparaten unter eingeschwungenen sinusförmigen Wechselströmen untersuchen werden, geben uns daher auch schon den formalen Teil des Ansatzes für die Berechnung der Einschwingungsvorgänge.

In einer für diese Aufgabe wichtigen Darstellung<sup>30)</sup> ist das Verhältnis von Strom und Spannung etwas anders gefaßt worden. Statt durch den Scheinwiderstand anzugeben, welche Spannung zum Strom Eins in den Leiter gehört, kann man besonders für Aufgaben, die wie die Einschaltvorgänge mit einer bestimmten angelegten Spannung rechnen, vorteilhafter bezeichnen, welcher Strom sich aus der Spannung Eins ergibt, also statt des Scheinwiderstandes das Reziproke, den Leitwert. Diesen Leitwert für einen bestimmten Kreis oder für eine bestimmte Stelle eines Leitersystems nennt Carson „indicial admittance“, also kennzeichnenden Leitwert, und man dürfte dafür wohl das Wort „Kennleitwert“ vorschlagen.

**§ 175. Die Ermittlung der Leistung bei komplexer Form von Spannung und Strom.** Nach Gl. (194) ist die Leistung, wenn  $V$  und  $J$  die Amplituden der sinusförmigen Spannung und Stromstärke sind, und  $\varphi$  ihr Phasenwinkel ist,

$$L = \frac{1}{2} V J \cos \varphi.$$

Um dieses Produkt bei einer in komplexer Form durchgeführten Rechnung zu ermitteln, hat man, wie Janet zuerst angab<sup>31)</sup>, eine der Größen mit

dem konjugierten Werte der anderen zusammen zu setzen. Denn wenn  $\mathfrak{B} = \mathfrak{B} | e^{i\vartheta}$ ,  $\mathfrak{Z} = \mathfrak{Z} | e^{i\xi}$ , so ergibt sich  $\mathbf{L}$  auf zweierlei Weise, nämlich

$$\mathbf{L} = \frac{1}{2} \mathfrak{B} | e^{i\vartheta} \mathfrak{Z} | e^{-i\xi} = \frac{1}{2} | \mathfrak{B} | e^{-i\vartheta} \mathfrak{Z} | e^{i\xi}.$$

Der Vorteil der Anwendung der komplexen Rechnung besteht in diesem Falle darin, daß man nicht erst die Werte von  $|\mathfrak{B}| |\mathfrak{Z}|$  und  $\cos(\vartheta - \xi)$  in reeller Form einzeln festzustellen braucht.

### Dritter Abschnitt.

## Meßeinrichtungen für schwache andauernde Wechselströme.

§ 176. **Übersicht der Meßverfahren.** Die lebhaft entwickelte Technik sowohl im Bau von Leitungen besonderer Art, als in der Verbesserung der elektrischen Eigenschaften der Apparate hat auf die Meßtechnik sehr befruchtend gewirkt. Es stehen für die Messungen eine Reihe theoretisch wohl durchgearbeiteter und praktisch gut brauchbarer Verfahren und Apparate zur Verfügung<sup>32)</sup>. Als Anzeigergerät dient fast allgemein das Telephon, und damit ist die Verwendung von Nullmethoden gegeben.

Sie haben vor den früher daneben noch gebrauchten Methoden zur Beobachtung effektiver Werte neben der allgemeinen Verwendbarkeit den Vorteil, daß sie die Eigenschaften der zu messenden Größe für eine bestimmte Frequenz darstellen, unter selbsttätiger Ausscheidung des Einflusses von begleitenden Frequenzen, wie sie nicht nur durch die von der reinen Sinusform abweichende Form der verwendeten EMK, sondern auch durch Vorgänge in etwa vorhandenen Eisenteilen der Apparate entstehen.

Wir wollen, um dies zu zeigen, zunächst feststellen, welchen Wert die mittlere Leistung eines mehrwelligen Wechselstromes hat.

Eine mehrwellige Spannung

$$V = V_1 \sin(\omega_1 t + \varphi_1) + V_2 \sin(\omega_2 t + \varphi_2) + \dots$$

treibe einen Strom

$$J = J_1 \sin(\omega_1 t + \psi_1) + J_2 \sin(\omega_2 t + \psi_2) + \dots$$

Dann ist die augenblickliche Leistung

$$\begin{aligned} \mathbf{L} &= V_1 \sin(\omega_1 t + \varphi_1) [J_1 \sin(\omega_1 t + \psi_1) + J_2 \sin(\omega_2 t + \psi_2) + \dots] \\ &+ V_2 \sin(\omega_2 t + \varphi_2) [J_1 \sin(\omega_1 t + \psi_1) + J_2 \sin(\omega_2 t + \psi_2) + \dots] \\ &+ \dots \end{aligned}$$

Die Summe enthält Posten, die das Produkt zweier Sinusfunktionen gleicher Frequenz enthalten, und solche, bei denen die Frequenzen der beiden Sinusfunktionen ungleiche Werte haben. Die zuerst genannten sind nach der Rechnung in § 168 zu behandeln. Einer der anderen, z. B.

$$V_1 J_2 \sin(\omega_1 t + \varphi_1) \sin(\omega_2 t + \psi_2),$$

läßt sich darstellen als

$$\frac{1}{2} V_1 J_2 \{ \cos[(\omega_1 - \omega_2)t + \varphi_1 - \psi_2] - \cos[(\omega_1 + \omega_2)t + \varphi_1 + \psi_2] \}.$$

Da aber der zeitliche Mittelwert jeder Kosinusfunktion gleich Null ist, tragen alle Posten mit ungleichen Frequenzen nichts zur mittleren Leistung bei. Diese ist also

$$L = \frac{1}{2} V_1 J_1 \cos(\varphi_1 - \psi_1) + \frac{1}{2} V_2 J_2 \cos(\varphi_2 - \psi_2) + \dots \dots (198)$$

Alle Methoden, die Hitzdrahtinstrumente oder Dynamometer anwenden, messen die mittlere Leistung, die nicht nur von der Grundperiode, sondern auch von allen Obertönen abhängt. Da man deren Stärke im einzelnen Falle nicht sicher kennt, haben diese Methoden also einen systematischen Fehler.

Bei den Nullmethoden, die mit dem Telephon als Anzeiger arbeiten, wird auf das Verschwinden des Grundtones eingestellt. Die Obertöne kann man bei derselben Einstellung nicht fortschaffen, sie können aber die Feststellung des Minimums für den Grundton nur so beeinflussen, daß sie den leisen Grundton mehr oder weniger übertönen; sie beeinträchtigen also nur die Empfindlichkeit, nicht die Lage des Minimums der Messung.

Mißt man also mit einer der bezeichneten Nullmethoden einen Scheinwiderstand nach Betrag und Phasenwinkel oder die Werte von Spannung und Stromstärke einzeln nach Amplitude und Phase, so beziehen sich diese Werte allein auf die Periodenzahl der Grundfrequenz.

Bei den Nullmethoden hat man Brücken- und Kompensationsverfahren zu unterscheiden.

**§ 177. Die Wechselstrommeßbrücke.** Wenn man nach Art einer Wheatstoneschen Meßbrücke vier gerichtete Widerstände  $\mathfrak{R}_1 \mathfrak{R}_2 \mathfrak{R}_3 \mathfrak{R}_4$  zusammenschaltet und zwei einander gegenüberliegende Eckpunkte des Vierecks über eine Wechselstromquelle, die beiden anderen durch ein Telephon verbindet (Fig. 150), so ergibt sich für den Fall, daß das Telephon keinen Strom der untersuchten Frequenz anzeigen soll, daß der Spannungsabfall von 1 bis 3 gleich dem von 1 bis 4 ist, d. h., daß

$$\mathfrak{R}_1 \mathfrak{I}_1 e^{i\omega t} = \mathfrak{R}_3 \mathfrak{I}_3 e^{i\omega t}.$$

Da ferner die Spannung von 1 gegen 2 dieselbe ist, ob man über 3 oder über 4 geht, so ist

$$(\mathfrak{R}_1 + \mathfrak{R}_3) \mathfrak{I}_1 e^{i\omega t} = (\mathfrak{R}_2 + \mathfrak{R}_4) \mathfrak{I}_2 e^{i\omega t}.$$

Aus beiden Gleichungen folgt, daß

$$\mathfrak{R}_1 : \mathfrak{R}_2 = \mathfrak{R}_3 : \mathfrak{R}_4.$$

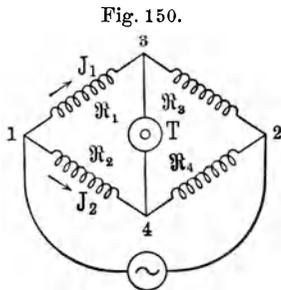
Die vorausgesetzte Unabhängigkeit der Spannung vom Wege besteht allerdings nur, wenn die in die Brückenarme eingeschalteten Apparate keine gemeinsamen magnetischen und elektrischen Felder haben, wie dies in § 129 näher dargelegt ist.

Schreibt man die letzte Gleichung ausführlicher, so lautet sie

$$|\mathfrak{R}_1| e^{i\varphi_1} : |\mathfrak{R}_2| e^{i\varphi_2} = |\mathfrak{R}_3| e^{i\varphi_3} : |\mathfrak{R}_4| e^{i\varphi_4},$$

und diese komplexe Gleichung ist nur erfüllt, wenn

$$\left. \begin{aligned} \frac{|\mathfrak{R}_1|}{|\mathfrak{R}_2|} &= \frac{|\mathfrak{R}_3|}{|\mathfrak{R}_4|} \\ \varphi_1 - \varphi_2 &= \varphi_3 - \varphi_4 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (199)$$



Für die Abgleichung der Brücke sind also grundsätzlich zwei Einstellungen erforderlich; im übrigen kann man von Fall zu Fall dieselben Mittel anwenden wie bei Gleichstrommessungen. Man wird als Regel zwei Widerstände, z. B.  $\mathcal{R}_1$  und  $\mathcal{R}_2$  aus kapazitäts- und induktivitätsfreien Rheostaten herstellen und hat dann die beiden anderen, von denen einer der zu bestimmende Scheinwiderstand ist, so abzugleichen, daß die Vektorendreiecke ähnlich sind, also in den Winkeln übereinstimmen. Eine viel gebrauchte Anordnung verwendet als dritten Widerstand eine Reihenschaltung aus einem Rheostaten, einem Variometer mit fester oder einstellbarer Induktivität und einem Stufenkondensator, dem zur letzten Abgleichung noch ein Drehkondensator parallel geschaltet ist. Der Scheinwiderstand  $R_3 + i\omega L + \frac{1}{i\omega C}$  kann durch passende Bemessung von zwei der veränderlichen Größen, manchmal bequemer von allen dreien auf jeden beliebigen Wert nach Betrag und Winkel gebracht werden.

Die Stromverteilung in einer solchen Brücke wird auch durch die Kapazitäten der Apparate in ihren Teilen gegeneinander oder gegen die Umgebung beeinflusst, und es ist zur Erzielung eindeutiger Meßwerte erforderlich, die Brücke unter Vertauschung sowohl der Anschlüsse der Stromquelle als des Telefons zu kontrollieren, ob die erreichte Einstellung für alle Fälle dieselbe ist. Um dies zu erleichtern, macht man Gebrauch von Hilfsbrücken verschiedener Art, die grundsätzlich auf einer von K. W. Wagner angegebenen Schaltung beruhen<sup>33)</sup>. Nach Fig. 151 legt man parallel zu der Diagonale der Stromquelle einen Leiter, der ähnlich dem Gesamtwiderstande der Brücke, in der Richtung der Speisediagonale aufgebaut ist. So würde man in dem dargestellten Falle in dem Hilfsleiter auf der einen Seite einen induktionsfreien Widerstand, auf der anderen einen Widerstand mit Kondensator anwenden. Zwischen beiden Teilen wird dieser Leiter geerdet. Zum Abgleichen der Hilfsbrücke dient ein besonderes Telefon  $T_2$ , das mit einem Eckpunkt der Hörerdiagonale der Hauptbrücke über einen Schalter verbunden ist. Man gleicht zunächst mit dem Telefon  $T_1$  bei offenem Schalter die Hauptbrücke ungefähr ab, und dann mit dem Telefon  $T_2$  die Hilfsbrücke. Dies wird erforderlichen-

Fig. 151.

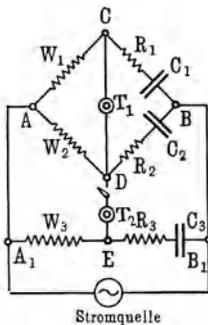
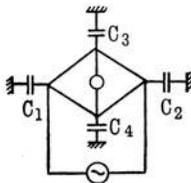


Fig. 152.



falls einige Male wiederholt, bis alles in Ordnung ist. Durch diese Abgleichung kommt also die Hörerdiagonale auf das Potential Null.

Die Fehlerkapazitäten kann man sich annähernd durch die vier Kondensatoren  $c_1, c_2, c_3, c_4$  (Fig. 152) dargestellt denken. Die Kondensatoren  $c_3$  und  $c_4$  nehmen allenfalls einen Teil des Stromes in der noch nicht fertig abgeglichenen Brücke auf, während die Ströme in  $c_1$  und  $c_2$  bei der Abgleichung der Hilfsbrücke ins Gleichgewicht gebracht worden sind.

Man mißt die Hilfsbrücke so, daß sie einen im Vergleich zur Hauptbrücke starken Strom führt; dadurch wird die Wirkung geringer Änderungen

der Nebenkapazitäten, wie sie durch Bewegungen der die Messung ausführenden Personen oder durch die Handhabung des Fernhörers entstehen können, unmerklich gemacht. Es ist in jedem Falle vorteilhaft, den Kapazitäten der gesamten Einrichtung durch das in § 25 erwähnte Mittel geerdeter Schutzhüllen feste Werte zu geben.

**§ 178. Kompensationsmethoden für Wechselströme.** Es gibt zurzeit zahlreiche Vorschläge, nach denen es möglich ist, eine Wechselspannung zwischen zwei Punkten eines Kreises durch eine nach Amplitude und Phase gleiche Wechselspannung derselben Periodenzahl zu kompensieren. Der Vorteil solcher Anordnungen gegen die Meßbrücke besteht darin, daß nicht nur der Scheinwiderstand einzelner Leiter bestimmt werden kann, sondern daß betriebsmäßige Schaltungen durch Spannungsmessungen an den in Betracht kommenden Stellen untersucht werden können. Zur Kompensierung wird ein Hilfskreis verwendet, der ein Telephon oder anderes geeignetes Anzeigeelement enthält, und welcher an den zu messenden Punkten parallel zum Hauptkreis angelegt wird. Da er nach der Abgleichung keinen Strom führt, so läßt er die Stromverhältnisse des Hauptkreises unberührt, an welchen Punkten er auch angelegt wird. Es ist für eine Messung, die gute Ergebnisse liefern soll, wichtig, daß man sich auch hier vergewissert, daß keine versteckten elektrischen und magnetischen Felder bestehen.

Das Prinzip der Messung ist allen Anordnungen gemeinsam. Um einen unbekanntem Scheinwiderstand  $U$  beliebiger Art zu messen, legt man ihn mit einem bekannten Scheinwiderstand  $\mathfrak{R}$  in Reihe in den Hauptkreis und bestimmt nach Amplitude und Phase die Spannung  $v_1$  an dem unbekanntem und  $v_2$  an dem bekannten Widerstand. Dann ist

$$U = \mathfrak{R} \frac{v_1}{v_2}.$$

An einer betriebsmäßigen Schaltung kann man nacheinander die Spannungen an den in Betracht kommenden Teilen nach Amplitude und Phase messen. Trennt man sie dann auf und schaltet dort einen bekannten Widerstand ein, so wird man mit einer entsprechend vermehrten EMK im Hauptkreis die Spannungen an den gemessenen Punkten auf die frühere Höhe bringen können; dann ergibt sich mittels der Spannung am bekannten Widerstand die Stromstärke nach Amplitude und Phase.

Die bekannt gewordenen Einrichtungen lassen sich in zwei Gruppen teilen. Die der ersten Gruppe haben ein Drehfeld, in welchem man dem die EMK des Hilfskreises liefernden Anker durch eine meßbare Verstellung eine bestimmte Phase geben kann, während die Einrichtungen der zweiten Gruppe nur einphasigen Wechselstrom erfordern, aus dem neben dem Speisestrom die kompensierende EMK des Hilfskreises nach Amplitude und Phase auf Grund der besonderen Verhältnisse der Scheinwiderstände der Anordnung erzeugt wird.

**§ 179. Die Frankesche Maschine.** Diese Einrichtung, welche schon im Jahre 1891 ausgeführt und beschrieben worden war<sup>34)</sup>, ist erst im dritten Jahrzehnt ihrer Existenz durch eine Neukonstruktion von Siemens & Halske

zu einer erheblichen Verbreitung gekommen. Sie löst die gestellte Aufgabe durch die Anordnung von zwei feststehenden Ankern in einem umlaufenden Felde. Der Feldmagnet ist ein beiderseits offener schmiedeeiserner Doppelzylinder, der mit gleichmäßiger Geschwindigkeit gedreht wird. An beiden Enden sind auf die Zylinderflächen Ringe aufgesetzt, die radial nach dem von den Zylindern umschlossenen Raume stehende Pole tragen, deren Zähne und Lücken wie eine Wellenlinie ausgebildet sind. Die Erregerwicklung liegt zwischen beiden Zylindern. Es besteht also nur ein Magnetfeld, welches, da auf jeder Seite gleich viele und gleich gestaltete Pole sitzen, auf beiden Seiten durch den Luftstrom gleich verläuft. Die Ankerwicklungen werden von zwei aus isolierendem und unmagnetischem Material hergestellten Ringen getragen, die von außen in den Luftspalt eintauchen, die Wicklungen bilden eine Zickzacklinie mit je einem Hin und einem Her für jeden Pol des Feldes. Das magnetische Feld der Maschine bleibt beim Drehen des Feldmagnets unverändert, weil keine relativ dazu bewegten Eisenmassen vorhanden sind, und im Träger der Wicklungen treten keine Wirbelströme auf. Dagegen ändert sich der magnetische Fluß in jeder Schleife der Wicklung bei laufendem Feldmagnet sinusförmig mit der Zeit. Die eine der Wicklungen ist für den Hauptkreis, die andere für den Hilfskreis bestimmt. Die beiden EMK entstehen also in voneinander unabhängigen Leitern. Zur Einstellung der Hilfsspannung auf eine bestimmte Amplitude und Phase dienen folgende Einrichtungen.

Beide Anker lassen sich, unabhängig von der Bewegung des Feldmagnets, in geringem Maße meßbar verstellen. Und zwar der Anker des Hauptkreises mittels einer Drehung um die Achse des Feldes in der Art, daß die magnetische Feldstärke der Amplitude nach unverändert bleibt, aber daß eine bestimmte Phase je nach der Einstellung des Ankers etwas früher oder etwas später eintritt.

Wird also bei laufender Maschine der Anker des Hauptkreises ein wenig in der Bewegungsrichtung gedreht, so treten alle Phasen etwas später auf als vorher, aber die Amplituden werden nicht geändert.

Im Gegensatz hierzu kann der Anker des Hilfskreises nicht um die Achse gedreht werden, seine EMK hat also eine unveränderliche Phase mit Bezug auf einen bestimmten Axialschnitt der Maschine. Durch die Drehung des Ankers für den Hauptkreis erhält die EMK des Hilfskreises einen Phasenunterschied gegen die EMK des anderen Kreises. Dagegen kann der Anker des Hilfskreises im Felde durch eine geteilte Schraube in Richtung der Achse längs einer Führungsschiene so verstellt werden, daß die Amplitude der EMK meßbar geändert wird.

Die „Phasenschraube“, welche den Anker des Hauptkreises verstellt, ist nach Graden geeicht, so daß also Phasenunterschiede sofort in Graden und nach Voreilen oder Zurückbleiben abgelesen werden können.

Die „Amplitudenschraube“ wird empirisch geeicht, indem man bei verschiedenen Stellungen des Hilfsankers bekannte Teile der EMK des Hauptankers mit der EMK des Hilfsankers vergleicht. Dazu benutzt man entweder den Aufbau jedes Ankers aus gleichen, in verschiedener Zahl einschaltbaren Teilen, oder man schließt den Hauptanker durch einen induktionsfreien Widerstand und stellt den Hilfsanker auf Teilspannungen daran ein.

Eine erhebliche Verbesserung des Messens mit der Frankeschen Maschine, welche die Eichung des Hilfsankers unnötig macht, ist durch einen von Herrn F. Lüschen angegebenen Widerstandssatz besonderer Art erreicht worden, der in den grundsätzlichen Teilen in Fig. 153 in Verbindung mit der Frankeschen Maschine dargestellt ist.

$R$  und  $R_1$  sind Paare von gleichen Widerständen; jeder ist in einzelnen Sätzen aufgebaut, welche Hunderter, Zehner usw. Ohm darstellen. Durch

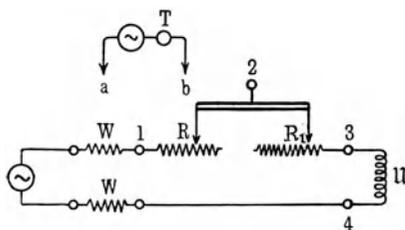
Handkurbeln werden solche Teile der Widerstände abgegriffen, daß die Summe der in den Hauptkreis eingeschalteten Widerstände immer dieselbe ist.  $W W$  sind Ballastwiderstände von solcher Größe, daß die Stromstärke im Hauptkreis der Größenordnung nach dieselbe bleibt, was auch bei  $\mathcal{L}$  als zu messender Apparat angeschaltet ist. Die Pole

$a$ ,  $b$  des Hilfskreises, in dem  $T$  das Telephon bedeutet, können durch Umschalter mit bestimmten Punkten des Hauptkreises verbunden werden. Man legt zuerst  $a$  an Punkt 3,  $b$  an Punkt 4 und stellt Phase und Amplitude ein. Dann ist also die Amplitude der EMK des Hilfsankers gleich derjenigen der Spannung an dem zu messenden Scheinwiderstand. Man legt dann  $a$  an Punkt 1,  $b$  an Punkt 2 und stellt, ohne die Einstellung der Amplitudenschraube zu ändern, durch Änderungen am Widerstand zwischen 1 und 2 und an der Einstellung der Phasenschraube den Hilfskreis wieder auf Kompensation ein. Nunmehr herrscht an dem Widerstand zwischen 1 und 2 unter dem Strom des Hauptkreises dieselbe Spannungsamplitude wie an dem zu messenden Scheinwiderstand, d. h. der Betrag des Scheinwiderstandes ist gleich dem des eingestellten Widerstandes. Der Phasenwinkel des Scheinwiderstandes ergibt sich aus dem Unterschied der Einstellungen der Phasenschraube im ersten und zweiten Fall. Hierbei wird also die Messung eines gerichteten Widerstandes auf einen geeichten induktionsfreien Widerstand und eine dem Phasenwinkel gleiche Drehung des Trägers der Wicklung zurückgeführt.

Die Frankesche Maschine bietet die Ergebnisse sogleich in Form des Betrages und des Phasenwinkels dar, also ohne jede Umrechnung. Dies ist für größere Meßreihen ein außerordentlicher Vorzug, auch wenn es nur auf die Bestimmung von Scheinwiderständen ankommt. Sie liefert aber weniger genaue Ergebnisse, als z. B. eine gute Brücke, wenn es sich um die Bestimmung von Winkeln nahe bei  $0^\circ$  oder  $90^\circ$  handelt, also bei der Messung von kleinen Induktivitäten oder von dielektrischen Verlustwinkeln. Bei Leitungen hoher Induktivität bereitet die wenn auch an sich geringe Veränderlichkeit der Umdrehungszahl Schwierigkeiten. Es besteht daher allgemein der vorläufig unerfüllte Wunsch, das umlaufende magnetische Feld durch eine feststehende, mit Senderöhren gespeiste Kunstschaltung hervorzubringen.

Das Potentiometer von Drysdale<sup>35)</sup>. Die kompensierende Spannung wird hier gewonnen als die Spannung zwischen zwei verstellbaren Laufkontakten auf einem Widerstand, welcher von einer in einem Drehfeld befindlichen Spule mit konstantem Strom gespeist wird. Dies Drehfeld wird aus

Fig. 153.

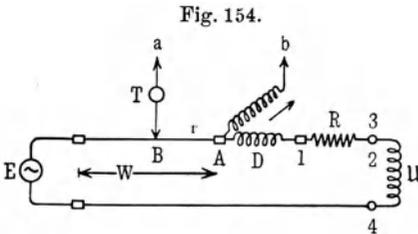


derselben Quelle erregt, die auch den Hauptkreis speist. Durch Verstellen der Spule im Drehfelde wird der kompensierenden Spannung die erforderliche Phasenverschiebung gegeben.

Wir wenden uns nun zu einigen Vertretern der zweiten Gruppe.

**§ 180. Der komplexe Kompensator von Larsen.** Die grundsätzliche Anordnung <sup>36)</sup> ist in Fig. 154 dargestellt.

Der Apparat, dessen Scheinwiderstand  $U$  bestimmt werden soll, wird mit einem bekannten einstellbaren Widerstand  $R$  in den Kreis einer Wechsel-



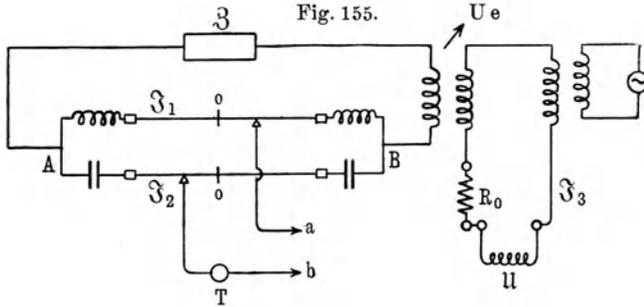
stromquelle  $E$  gelegt, der außerdem noch die eigentliche Meßeinrichtung  $DW$  enthält.  $D$  ist ein Variometer mit zwei Spulen, bei dem sich die Gegeninduktivität  $M$  der beiden Spulen verändern läßt, z. B. indem die eine gegen die andere gedreht wird.  $W$  ist ein induktionsfreier Widerstand, z. B. ein gespannter

Draht mit Schleifkontakt, von dem zwischen den Punkten  $A$  und  $B$  ein genau definierter Teil  $r$  abgegriffen werden kann. An den Punkt  $B$  einerseits, an das freie Ende der Spule andererseits, an ersterem über ein Telephon  $T$ , sind die Zuleitungen zu den Fühlern  $a$  und  $b$  gelegt, welche man zuerst an die Klemmen 1, 2 des bekannten Widerstandes und dann an die Klemmen 3, 4 des unbekannten Scheinwiderstandes legt. Da der über das Telephon führende Hilfskreis auf Verschwinden des Stromes eingestellt wird, stört er die Stromverteilung im Hauptkreis nicht, wenn er an den einen oder anderen Teil des Hauptkreises oder auch eines damit gekoppelten Kreises angelegt wird. Der Widerstand  $W$  und die primäre Spule werden also von dem für alle Messungen gleichen Strome  $J$  des Hauptkreises durchflossen. Daher liegt zwischen  $a$  und  $b$  eine Spannung, welche gleich  $(r + i\omega M)J$  ist; der reelle Teil ist der Spannungsabfall im induktionsfreien Widerstand, der imaginäre die in der zweiten Spule induzierte EMK. Da die Spannung an dem Vergleichswiderstand gleich  $RJ$ , die an den Klemmen 3 und 4  $UJ$  ist, so fällt die Stromstärke aus dem Meßergebnis heraus. Es besagt dies nicht, daß das Verhältnis  $U/R$  von der Stromstärke unabhängig sei, sondern, daß bei gegebener Stromstärke  $J$  das Verhältnis  $U/R$  nicht von den übrigen Scheinwiderständen des Kreises abhängt.

Da mit Röhrensendern die Frequenz der EMK leicht konstant gehalten werden kann, stellt diese Kompensationseinrichtung eine der Frankeschen Maschine grundsätzlich überlegene Meßanordnung dar. Sie versagt weder bei Spannungen, die mit dem Strom nahezu in Phase gehen, noch solchen, die nahezu um einen rechten Winkel voraus- oder zurückliegen. Ihr praktischer Mangel, der die allgemeinere Anwendung bisher gehindert hat, liegt in der Anforderung eines eisenfreien verstellbaren Variometers, das große und kleine Spannungsbeträge bei genügend eindeutigen Einstellungen liefert und gegen Einwirkungen auf benachbarte Leiter und Rückwirkungen aus solchen genügend geschützt ist. Mit der Brücke hat der komplexe Kompensator den

Mangel gemeinsam, daß er die Ergebnisse in der algebraischen Form liefert, also in der Regel eine Umrechnung nötig macht.

§ 181. **Das Potentiometer von Pedersen.** Diese Einrichtung<sup>37)</sup> macht meßbar verstellbare Variometer überflüssig. Bei einer Ausführungsform, die in Fig. 155 dargestellt ist, kommt es hauptsächlich auf die Anordnung zwischen



$A$  und  $B$  an, deren Zweige rechts und links von  $00$  symmetrisch sind. Der obere enthält gleiche Spulen mit der Induktivität  $L$ , und sein gesamter Widerstand ist auf den Betrag  $2R$  gebracht; der untere Zweig hat statt der Induktivitäten gleiche Kapazitäten  $K$  und außer diesen ebenfalls den Widerstand  $2R$ . Zwischen diesen Größen werden folgende Beziehungen hergestellt. Zunächst wird  $\omega^2 KL = 1$  und  $R = \omega L$  gemacht. Dies hat zur Folge, daß der Strom  $\mathfrak{Z}_2$  dem Strom  $\mathfrak{Z}_1$  um  $90^\circ$  vorausgeht. Man stellt ferner den Laufkontakt im unteren Zweige auf den Punkt  $0$  und verändert den Scheinwiderstand von  $\mathfrak{Z}$  so lange, bis sich die Spannung an dem induktionsfreien Widerstand  $R_0$  durch Einstellung des Laufkontaktes auf dem oberen Widerstand abgleichen läßt, also  $\mathfrak{Z}_1$  und  $\mathfrak{Z}_3$  in Phase sind. Wird endlich noch die Kopplung des verstellbaren Übertragers  $Ue$  so eingestellt, daß zwischen dem eingestellten Meßwiderstand und  $R_0$  ein einfaches Verhältnis, z. B.  $1:1$  besteht, so ist die Anordnung zum Gebrauch fertig. Wird bei der Messung des Scheinwiderstandes  $\mathfrak{U}$  im oberen Zweig ein Widerstand  $x$ , im unteren ein Widerstand  $y$  eingestellt, die positiv oder negativ sein können, so ist  $\mathfrak{U} = x + iy$ .

Das gute Arbeiten der Einrichtung setzt volle Konstanz der Speisefrequenz voraus, was aber bei Anwendung von Röhrensendern keine Schwierigkeit bietet. Für Scheinwiderstände, deren reelle und imaginäre Anteile von  $-1000$  bis  $+1000$  Ohm laufen, sind bei  $\omega = 5000$  die Werte  $L = 0,2$  Henry,  $C = 0,2 \mu F$  erforderlich.

§ 182. **Anwendung von Ausschlagsmethoden.** Die Nullmethoden versagen, wenn es sich um Messungen an zwei voneinander erheblich entfernten Orten handelt, so z. B., wenn man das Verhältnis des abgehenden und ankommenden Stromes einer Leitung zwischen zwei Orten unmittelbar messen will. Dann bleiben nur die Messungen mit Hitzdrahtinstrumenten oder Dynamometern übrig; bei hinreichender Energie auch solche mit dem Oszillographen, die grundsätzlich die Ausscheidung der neben der Grundfrequenz

bestehenden höheren Frequenzen ermöglichen; praktisch ist diese allerdings schwierig und wenig genau. Bei den anderen Messungen ist einerseits ein Sender mit guter Sinuswelle erforderlich; andererseits müssen die Instrumente trotz hoher Empfindlichkeit kleinen Widerstand haben. Diese Eigenschaften besitzt in hohem Maße das Thermogalvanometer von Duddell.

#### Vierter Abschnitt.

### Verlauf andauernder Wechselströme in quasistationären Kreisen.

§ 183. **Kreise ohne Eigenschwingung.** In Kreisen mit Induktivität oder Kapazität ergibt sich für andauernde Schwingungen, die durch eine Spannung  $\mathcal{E} e^{i\omega t}$  erregt werden, eine Stromstärke  $\mathfrak{I} e^{i\omega t}$ , eine Ladung  $\mathfrak{Q} e^{i\omega t}$ . Daher ist für einen Kreis mit Induktivität

$$\mathcal{E} = R\mathfrak{I} + i\omega L\mathfrak{I}.$$

Die Spannung  $\mathcal{E}$  wird also zur Überwindung des Spannungsabfalls  $R\mathfrak{I}$  und der dazu mit  $90^\circ$  Voreilung zu addierenden Spannung  $\omega L\mathfrak{I}$  gebraucht.  $\omega L\mathfrak{I}$  heißt die Blindspannung.

In der Form  $\mathcal{E} = (R + i\omega L)\mathfrak{I}$  besagt die Gleichung, daß eine Spule mit Induktivität einen gerichteten Widerstand  $\mathfrak{R} = R + i\omega L$  hat, mit einer positiven Drehung des Strahles der Spannung gegenüber dem Strahl des Stromes. Der Betrag des Scheinwiderstandes ist  $\sqrt{\omega^2 L^2 + R^2}$ . Bei einer Induktivität läuft demnach die Spannung dem Strome um einen Winkel voraus, dessen Tangente  $\omega L/R$  ist; dieser Winkel geht bei Spulen hoher Zeitkonstante und bei großer Frequenz bis nahe an  $90^\circ$ .

Bei einer Kapazität mit einem vorgeschalteten Widerstande ergibt sich:

$$\mathcal{E} = R\mathfrak{I} + \frac{\mathfrak{Q}}{K} = R\mathfrak{I} + \frac{\mathfrak{I}}{i\omega K}.$$

Auch hier dient die Gesamtspannung zur Überwindung des Spannungsabfalles und der Blindspannung. Letztere ist gleich  $-i\mathfrak{I}/\omega K$ , sie liegt also um  $90^\circ$  gegen  $R\mathfrak{I}$  zurück. Der Richtungswiderstand ist  $R - \frac{i}{\omega K}$ , er hat den Betrag  $\sqrt{1 + \omega^2 K^2 R^2}/\omega K$  und einen zwischen Null und  $-90^\circ$  liegenden Winkel, dessen Tangente  $-1/\omega KR$  ist. Bei einem Kondensator ohne vorgeschalteten Widerstand ist daher die Spannung gegen den Strom um  $1/4$  Periode zurück.

§ 184. **Der Verlustwinkel.** Im letzten Paragraphen sind als Phasenwinkel der Scheinwiderstände diejenigen gegen die reelle Komponente angegeben worden. Es erscheint dadurch als reiner Widerstand derjenige, der die gesamte an den Klemmen zugeführte Leistung in Wärmezunahme verwandelt. Soweit aber ein Leiter als Glied in einer Reihe dazu dient, Leistungen von einer Stelle nach einer anderen übertragen zu helfen, hat man ihn um so besser zu nennen, je weniger er von der an ihn abgegebenen Leistung ver-

zehrt im Vergleich zu der von ihm weitergegebenen. Der ideale Leiter verzehrt nichts, es bestände also zwischen Strom und Spannung ein Phasenunterschied von  $\pm 90^\circ$ . Annäherungen an den idealen Leiter sind Kondensatoren oder Elektromagnetspulen, wie sie in guten Transformatoren oder Pupinspulen verwendet werden. Bei solchen Leitern weicht der Phasenunterschied nur um einen geringen Winkel, den man nach Möglichkeit zu verkleinern sucht, von  $90^\circ$  ab. Man nennt diesen Winkel den Verlustwinkel <sup>38)</sup>.

In dem Verlustwinkel, wie er sich aus Messungen mit Wechselstrom ergibt, kommen Verluste zum Ausdruck, die mit der Frequenz des Wechselstroms steigen, die zum Teil bei Gleichstrom nicht in die Erscheinung treten. So zeigen fast alle isolierenden Mittel beim Messen mit Wechselstrom Verluste an, die erheblich über das Maß dessen hinausgehen, was nach dem bei Gleichstrom gemessenen Übergangswiderstand zu erwarten wäre.

Die physikalische Theorie dieser Vorgänge kann hier übergangen werden <sup>39)</sup>. Für praktische Rechnungen ist die Feststellung wichtig, daß bei den meistgebrauchten isolierenden Mitteln über ein erhebliches Bereich von Frequenzen der Verlustwinkel  $\delta$  eine annähernd feste Größe ist. Der Scheinwiderstand eines Kondensators mit einem festen Isoliermaterial ist also:

$$\frac{1}{i \omega K e^{-i\delta}} = \frac{\sin \delta}{\omega K} - i \frac{\cos \delta}{\omega K} \approx \frac{\delta}{\omega K} - i \frac{1}{\omega K}$$

Die wirksame Ableitung des Kondensators  $\frac{\omega K}{\delta}$  ist bei festem  $\delta$  der Frequenz proportional. Dies gilt für Kabel mit Isolierung durch plastische Materialien, wie Guttapercha, Gummi, Balata und auch für papierisolierte Kabel. Die nachstehende Tabelle zeigt die bei  $\omega = 5000$  gemessenen Werte der Verlustwinkel für einige Materialien; es sei noch bemerkt, daß sie unabhängig von der Gestalt des Kondensators gelten.

$\delta$ im Bogenmaß	Bei $5^\circ \text{C}$	Bei $20^\circ \text{C}$
Guttapercha . . . . .	0,020	0,022
Balata . . . . .	0,008	0,004
Glimmer . . . . .	—	0,0002
Getrocknetes Papier . . . . .	—	0,003
Hartgummi . . . . .	—	0,002—0,018
Paragummi, vulk. . . . .	—	0,012
Isolation der Z-Drähte . . . . .	—	0,07—0,16

Bei Leitern mit Induktivität hängt der Verlustwinkel außer vom Leitungswiderstand von den Verlusten ab, welche durch die Hysterese und durch Wirbelströme entstehen. Der Verlust durch Hysterese ist der Zahl der magnetischen Kreisläufe in der Sekunde, also der Frequenz proportional, während die Verluste durch Wirbelströme mit dem Quadrat der Frequenz wachsen. Die Wirbelstromverluste können durch Unterteilung des Eisens oder anderer im Felde liegender Leiter verringert werden, die Hystereseverluste durch Auswahl geeigneten Eisens. Man hat also bei Apparaten mit Induktivität mit einem schneller als die Frequenz wachsenden Verlustwinkel zu rechnen; er läßt sich daher nur für eine bestimmte Frequenz angeben. Man hat für den Scheinwiderstand eines solchen Apparates zu schreiben:

$$\mathcal{Z} = R + i \omega L e^{-i\epsilon} \approx R + \omega \epsilon L + i \omega L$$

Darin bedeutet  $R$  den Leitungswiderstand bei Gleichstrom,  $\omega \varepsilon L$  den Verlustwiderstand. Der Faktor  $e^{-i\varepsilon}$  gehört sozusagen zu dem Faktor  $i$ , welcher in idealen Leitern den Phasenunterschied von  $90^\circ$  zwischen Spannung und Strom angibt. Man hat also bei Apparaten mit solchen Verlusten auch der gegenseitigen Induktivität in Verbindungen, wie  $\mathfrak{M} = i\omega M e^{-i\varepsilon}$ , einen Verlustwinkel zu geben.

Bei diesen Apparaten ist der Verlustwinkel keine reine Materialeigenschaft wie bei Isoliermaterialien, sondern hängt außer vom Bau des Eisenkörpers auch von den Eigenschaften der Spule ab. Er kennzeichnet also einen bestimmten Apparat.

**§ 185. Kreise mit Eigenschwingung.** Für einen unverzweigten Kreis mit Spule und Kondensator, der durch eine andauernde Schwingung erregt wird, lautet die Gleichung:

$$\mathfrak{E} = R \mathfrak{I} + i \omega L \mathfrak{I} + \frac{\mathfrak{Q}}{K}$$

oder

$$\mathfrak{E} = \mathfrak{I} \left( R + i \omega L + \frac{1}{i \omega K} \right) \dots \dots \dots (200)$$

In Beträgen geschrieben lautet diese Gleichung:

$$\mathfrak{I} = \frac{\mathfrak{E}}{\sqrt{R^2 + \left( \omega L - \frac{1}{\omega K} \right)^2}}$$

Wird der Strom durch ein Wechselstrominstrument, etwa ein Hitzdrahtinstrument gemessen, so ergeben dessen Anzeigen das mittlere Quadrat oder  $\frac{1}{2} \mathfrak{I}^2$ . Dessen Höchstwert wird erreicht, wenn  $\omega^2 K L = 1$  ist. Das Verhältnis eines beliebigen anderen Wertes zum Höchstwert ist

$$y = \frac{R^2}{R^2 + \left( \omega L - \frac{1}{\omega K} \right)^2}$$

Diese Gleichung ähnelt durchaus der für die Resonanzkurve einer gedämpften Schwingung aufgestellten. Würde man mit ungedämpften Schwingungen eine Resonanzkurve aufnehmen, so ergäbe ihre Auswertung nach Art des § 159 das Dekrement des Schwingungskreises, in dem das Meßinstrument liegt.

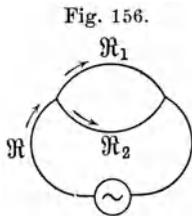


Fig. 156.

**Spannungsresonanz.** Im vorliegenden Falle gleicht  $\mathfrak{E}$ , abgesehen von dem Spannungsverlust, die beiden Spannungen  $i \omega L \mathfrak{I}$  und  $\mathfrak{I} / i \omega K$  aus. Bei Resonanz sind beide gleich groß, aber um  $180^\circ$  in der Phase verschoben. Sie sind bei Kreisen mit hoher Zeitkonstante der Spule beträchtlich größer als  $\mathfrak{E}$ . Ein solcher Leiter läßt also bei der Resonanzfrequenz einen erheblich stärkeren Strom durch als bei benachbarten Frequenzen.

**Stromresonanz.** Man spricht hiervon bei verzweigten Kreisen, in deren Zweigen sich Leiter mit entgegengesetzten Phasenverschiebungen be-

finden. Verzweigt man einen Kreis (Fig. 156) über zwei Richtungswiderstände  $\mathfrak{R}_1$  und  $\mathfrak{R}_2$ , so gelten die Gleichungen

$$\mathfrak{E} = \mathfrak{R} \mathfrak{Z} + \mathfrak{R}_1 \mathfrak{Z}_1, \quad \mathfrak{R}_1 \mathfrak{Z}_1 = \mathfrak{R}_2 \mathfrak{Z}_2, \quad \mathfrak{Z} = \mathfrak{Z}_1 + \mathfrak{Z}_2,$$

wobei vorausgesetzt ist, daß die Zweige  $\mathfrak{R}$ ,  $\mathfrak{R}_1$  und  $\mathfrak{R}_2$  keine gemeinsamen Felder besitzen. Aus diesen Gleichungen ergibt sich

$$\mathfrak{Z} = \mathfrak{E} \frac{\mathfrak{R}_1 + \mathfrak{R}_2}{\mathfrak{R} \mathfrak{R}_1 + \mathfrak{R} \mathfrak{R}_2 + \mathfrak{R}_1 \mathfrak{R}_2},$$

$$\mathfrak{Z}_1 = \mathfrak{Z} \frac{\mathfrak{R}_2}{\mathfrak{R}_1 + \mathfrak{R}_2}, \quad \mathfrak{Z}_2 = \mathfrak{Z} \frac{\mathfrak{R}_1}{\mathfrak{R}_1 + \mathfrak{R}_2}.$$

Ist nun z. B.  $\mathfrak{R}_1 = \mathfrak{R}_1 + i\omega L$ ,  $\mathfrak{R}_2 = \mathfrak{R}_2 + 1/i\omega K$ , so ist im Resonanzfalle  $\omega^2 KL = 1$  der Betrag von  $\mathfrak{R}_1 + \mathfrak{R}_2$  kleiner als der von  $\mathfrak{R}_1$  oder von  $\mathfrak{R}_2$ . Man zerlegt also hierbei einen bestimmten Strom  $\mathfrak{Z}$  in zwei größere Zweigströme. Für einen Wechselstrom von der Resonanzfrequenz hat daher eine solche Anordnung einen um so höheren Widerstand, je kleiner die Verlustwinkel sind, während sie Ströme anderer Frequenz leichter durchläßt.

**§ 186. Der Transformator.** Das Studium des Verlaufs der Ströme in einem Transformator ist nicht nur deswegen für die Telegraphentechnik von Interesse, weil vielfach Transformatoren im eigentlichen Sinne im Gebrauch sind, sondern auch, weil viele andere Apparate ein dem Transformator ähnliches Verhalten aus dem Grunde zeigen, daß sie außer der Stromwärme noch Energie in mit ihnen verbundenen elektrischen oder mechanischen Systemen verbrauchen.

Der Transformator im eigentlichen Sinne besteht aus zwei oder mehr Stromkreisen, die ganz oder zum Teil gemeinsame magnetische Felder haben. Für solche Kreise gelten die Gleichungen aus § 126

$$J_1 R'_1 - E_1 = - \frac{d}{dt} (L'_1 J_1 + M'_{12} J_2 + M'_{13} J_3 + \dots)$$

$$J_2 R'_2 - E_2 = - \frac{d}{dt} (M'_{12} J_1 + L'_2 J_2 + M'_{23} J_3 + \dots)$$

. . . . .

Hierin sollen  $R'_h$  und  $L'_h$  den Widerstand und die Induktivität des  $h$ ten Stromkreises,  $M'_{hm}$  die Gegeninduktivität des  $h$ ten und des  $m$ ten Stromkreises bezeichnen. Es ist zweckmäßig, statt dieser Größen die für die einzelnen Teile jedes Stromkreises, geschieden in solche innerhalb und außerhalb der Klemmen der Wicklungen, einzuführen: dies wird dadurch vereinfacht, daß in der Regel nur die Wicklungen des Transformators in dem in § 129 besprochenen Sinne gemeinsame Felder haben, während zwischen ihnen und den Leitern außerhalb des Transformators keine magnetische Kopplung besteht.

Es sollen also bedeuten:

$R_h$  und  $L_h$  den Widerstand und die Induktivität der  $h$ ten Wicklung des Transformators, wenn alle anderen Wicklungen offen sind;

$M_{hm}$  die Gegeninduktivität der aus der  $h$ ten und  $m$ ten Wicklung gebildeten Schleifen.

Für die Eigenschaften der außerhalb des Transformators gelegenen Teile der Kreise brauchen hier keine genaueren Angaben gemacht zu werden, es genügen symbolische Zeichen.

Wir nehmen an, daß in den verschiedenen Stromkreisen Wechselströme derselben Frequenz tätig sind, welche an den Klemmen der einzelnen Wicklungen die Spannungen  $\mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2, \dots$  erzeugen. Dann gehen die obigen Gleichungen in die folgenden über:

$$\left. \begin{aligned} -\mathfrak{B}_1 + \mathfrak{I}_1(R_1 + i \omega L_1) + \mathfrak{I}_2 i \omega M_{12} + \dots + \mathfrak{I}_1 \mathfrak{B}_1 &= 0 \\ -\mathfrak{B}_2 + \mathfrak{I}_2(R_2 + i \omega L_2) + \mathfrak{I}_1 i \omega M_{21} + \dots + \mathfrak{I}_2 \mathfrak{B}_2 &= 0 \\ \dots &\dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \end{aligned} \right\} \dots (201)$$

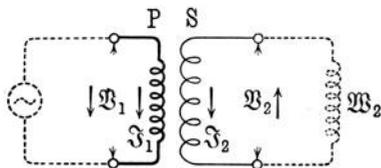
worin  $\mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2 \dots$  die für die Frequenz  $\omega$  gültigen Werte der Scheinwiderstände der außerhalb des Transformators gelegenen Teile des ersten, zweiten  $\dots$  Stromkreises bezeichnen, wobei vorausgesetzt wird, daß diese weder untereinander, noch mit dem Transformator durch magnetische Felder verknüpft sind. Wäre dies der Fall, so hätte man noch Glieder zuzufügen, z. B. der ersten Gleichung solche von der Form

$$+ \mathfrak{B}_{12} \mathfrak{I}_2 + \mathfrak{B}_{13} \mathfrak{I}_3 + \dots$$

Wir sehen aber von diesem Falle ab.

Transformator mit zwei Wicklungen. Wir wenden diese allgemeinen Gleichungen auf einen Transformator mit zwei Wicklungen unter folgenden Vereinfachungen an.

Fig. 157.



Nur ein Stromkreis, den wir den primären nennen, enthalte eine aufgedrückte EMK. Sie bringt an den Klemmen der Primärwicklung eine Spannung  $\mathfrak{B}_1$  hervor (Fig. 157).

Im Sekundärkreise wird ein Strom  $\mathfrak{I}_2$  erzeugt; wir rechnen ihn positiv, wenn er die gezeichnete Richtung hat.  $\mathfrak{B}_2 = \mathfrak{I}_2 \mathfrak{W}_2$  ist die Spannung an den Sekundärklemmen, aber ihre Richtung ist diejenige des Stromes  $\mathfrak{I}_2$  in  $\mathfrak{B}_2$ . Die Gleichungen nehmen die Form an

$$\left. \begin{aligned} \mathfrak{B}_1 &= \mathfrak{I}_1(R_1 + i \omega L_1) + \mathfrak{I}_2 i \omega M \\ 0 &= \mathfrak{B}_2 + \mathfrak{I}_2(R_2 + i \omega L_2) + \mathfrak{I}_1 i \omega M \end{aligned} \right\} \dots (202)$$

**§ 187. Transformator der Starkstromtechnik.** Ohne uns auf die Konstruktion und die Berechnung einzulassen, besprechen wir kurz das Verhalten eines solchen Transformators unter bestimmten Betriebsverhältnissen.

Die primäre Wicklung habe  $\xi_1$ , die sekundäre  $\xi_2$  Windungen. Dann gilt für eine magnetische Linie des Eisenkreises die Gleichung:

$$\int_{(s)} \mathfrak{H} d s = 4 \pi \int_{(f)} i d f \\ = 4 \pi (\xi_1 \mathfrak{I}_1 + \xi_2 \mathfrak{I}_2).$$

Die magnetisierende Kraft ist also der Summe  $\xi_1 \mathfrak{I}_1 + \xi_2 \mathfrak{I}_2$ , den resultierenden Amperewindungen, proportional. Um dies in den Trans-

formatorgleichungen zum Ausdruck zu bringen, formen wir diese um, wie folgt:

$$\begin{aligned} \mathfrak{B}_1 &= R_1 \mathfrak{I}_1 + i \omega \frac{M}{\xi_2} (\xi_1 \mathfrak{I}_1 + \xi_1 \mathfrak{I}_2) + i \omega \left( L_1 - M \frac{\xi_1}{\xi_2} \right) \mathfrak{I}_1 \\ 0 &= (\mathfrak{B}_2 + R_2) \mathfrak{I}_2 + i \omega \frac{M}{\xi_1} (\xi_1 \mathfrak{I}_1 + \xi_2 \mathfrak{I}_2) + i \omega \left( L_1 - M \frac{\xi_1}{\xi_1} \right) \mathfrak{I}_2. \end{aligned}$$

Wir denken uns durch Unterteilung und Parallelschaltung die Wicklungen auf gleiche Windungszahl gebracht. Hat etwa die primäre 10mal so viele Windungen wie die andere, so zerlegen wir sie in 10 Teile, die wir parallel schalten. Diese Zahl, das Übersetzungsverhältnis, sei  $n$ , so daß

$$\xi_1 = n \xi_2.$$

Die magnetisierende Kraft wird dann

$$4 \pi \xi_2 (n \mathfrak{I}_1 + \mathfrak{I}_2).$$

Wir können das Gleichungspaar (203) in die Form bringen

$$\left. \begin{aligned} \frac{\mathfrak{B}_1}{n} &= \frac{R_1}{n^2} (n \mathfrak{I}_1) + i \omega \frac{M}{n} (n \mathfrak{I}_1 + \mathfrak{I}_2) + i \omega \left( \frac{L_1}{n^2} - \frac{M}{n} \right) n \mathfrak{I}_1 \\ 0 &= (R_2 + \mathfrak{B}_2) \mathfrak{I}_2 + i \omega \frac{M}{n} (n \mathfrak{I}_1 + \mathfrak{I}_2) + i \omega \left( L_2 - \frac{M}{n} \right) \mathfrak{I}_2 \end{aligned} \right\} \dots (203)$$

und es sei  $n \mathfrak{I}_1 = \mathfrak{I}'_1$  gesetzt. Durch die Unterteilung der primären Wicklung in  $n$  Teile und deren Parallelschaltung steigt der Strom bei Erhaltung der Stromstärke in jedem Teile auf das  $n$ fache, während die Spannung auf den  $n$ ten Teil fällt. Gl. (203) stellt also die Verhältnisse an einem Transformator mit gleichen Windungszahlen in beiden Wicklungen dar.

Wir wollen zunächst annehmen, daß die beiden Ausdrücke  $\frac{L_1}{n^2} - \frac{M}{n}$  und  $L_2 - \frac{M}{n}$  den Wert Null hätten. Dann bietet die primäre Wicklung außer dem Spannungsverlust der treibenden EMK eine Gegenspannung  $i \omega \frac{M}{n} (\mathfrak{I}'_1 + \mathfrak{I}_2)$ , welche der erregenden magnetisierenden Kraft proportional ist. Dieselbe Größe gleicht im sekundären Kreise die äußere Spannung aus; sie ist also die Gegen-EMK des Primärkreises und dem Betrage nach die treibende des Sekundärkreises.

Aus Gründen der Wirtschaftlichkeit wird man so wenig wie möglich Spannungsverluste in den Widerständen der Wicklungen zulassen. Daraus folgt, daß, wenn die aufgedrückte Spannung auf konstantem Effektivwert gehalten wird, die EM-Gegenkraft unabhängig von der Belastung ebenfalls einen nahezu konstanten Effektivwert hat, der dem aufgedrückten möglichst gleich ist. Man kann daher in erster Annäherung annehmen, daß  $\mathfrak{I}'_1 + \mathfrak{I}_2$  einen von der Belastung unabhängigen Wert habe.

Die Gleichung für den Sekundärkreis können wir schreiben:

$$- i \omega \frac{M}{n} (\mathfrak{I}'_1 + \mathfrak{I}_2) = \mathfrak{I}_2 (R_2 + \mathfrak{B}_2).$$

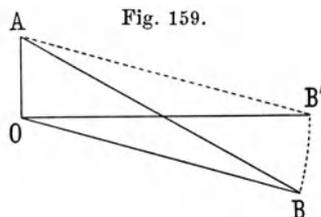
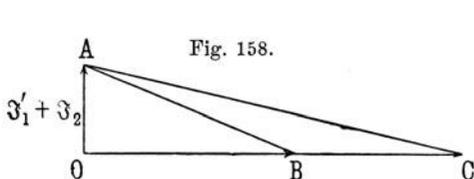
Der äußere Widerstand sei induktionsfrei. Dann ergibt sich  $\mathfrak{I}_2$  aus dem konstanten  $(\mathfrak{I}'_1 + \mathfrak{I}_2)$  durch Multiplikation mit dem Faktor

$$-i\omega \frac{M}{n} \frac{1}{R_2 + \mathfrak{B}_2},$$

der also hinter  $\mathfrak{I}'_1 + \mathfrak{I}_2$  um  $90^\circ$  zurückliegt.

Bedeutet also in Fig. 158  $OA$  den Vektor  $\mathfrak{I}'_1 + \mathfrak{I}_2$ , so liegen alle bei induktionsfreier Belastung vorkommenden Werte von  $\mathfrak{I}_2$  auf der wagerechten Geraden, z. B.  $OB$ ,  $OC$ . Demnach ist  $BA$  der zu  $OB$  gehörende Wert von  $\mathfrak{I}'_1$ ,  $CA$  der zu  $OC$  gehörende.

Wenn  $\mathfrak{I}_2$  beliebig klein wird, so bleibt  $\mathfrak{I}'_1 + \mathfrak{I}_2$  auf dem Werte  $OA$ . Dieser ist also der Leerlaufstrom. Aus dem Werte des Leerlaufstromes, für



gleiche Zahl von Windungen in beiden Wicklungen berechnet, kann man also die Arbeitsweise des Transformators bei induktionsfreier Belastung auf sehr einfache Weise feststellen. Man trägt den Wert des Leerlaufstromes im Nullpunkt senkrecht auf; macht man dann die Wagerechte gleich dem Sekundärstrom  $OB$ , so gibt die das Dreieck schließende Linie  $BA$  den Primärstrom nach Größe und Phase. Man erkennt, daß bei normaler Belastung, wenn  $OB$  etwa 20 mal so groß wie  $OA$  ist, die beiden Ströme beinahe  $180^\circ$  Phasenunterschied haben, während sie bei geringer Belastung etwas mehr als  $90^\circ$  in der Phase verschieden sind.

Man erkennt aus Fig. 158, daß ein Transformator mit gutem magnetischen Bau sich selbst reguliert, da der Primärstrom, abgesehen von ganz kleinen Belastungen, mit dem Sekundärstrom gleichen Schritt hält.

Wird an die Sekundärwicklung ein Leiter mit Induktivität gelegt, so bleibt  $\mathfrak{I}_2$  hinter der sekundären Spannung um den Richtungswinkel dieses Leiters zurück. Man erhält dann das Bild der Fig. 159, in der  $OA$  den Leerlaufstrom,  $OB$  den Sekundärstrom, also  $BA$  den Primärstrom darstellt. Macht man  $OB' = OB$ , so würde  $B'A$  den Primärstrom für gleiche induktionsfreie Belastung darstellen, und man sieht, daß  $BA > B'A$  ist. Dem größeren Primärstrom entspricht auch ein größerer Spannungsabfall im Widerstand des Primärkreises.

Wir erhalten ganz ähnliche Verhältnisse, wenn wir zwar die Belastung des Transformators induktionsfrei wählen, aber für  $L_2 - \frac{M}{n}$  einen von Null verschiedenen Wert zulassen. Solange  $\frac{L_1}{n^2} - \frac{M}{n} = 0$  und  $L_2 - \frac{M}{n} = 0$  sind, ist auch  $L_1 L_2 = M^2$ . Dann ist also die magnetische Kopplung der beiden Wicklungen vollkommen. Wird sie loser, so wird  $L_1 L_2 > M^2$ , also  $L_1 > nM$ ,  $L_2 > M/n$ . Die Differenzen erhalten positive Werte. Trans-

formatoren mit loser Kopplung haben Streuung, und diese wirkt also wie eine in den Primärkreis und den Sekundärkreis eingeschaltete Induktivität.

Wir haben bisher die EM-Gegenkraft als unveränderlich, also die Verluste in den Widerständen als unbeträchtlich angesehen. Über das Verhalten des Transformators unter Berücksichtigung der Spannungsverluste erhalten wir auf folgendem Wege Aufschluß.

Wir eliminieren aus den Grundgleichungen den Primärstrom und erhalten

$$\mathfrak{B}_1 = -\mathfrak{I}_2 \frac{R_1 + i\omega L_1}{i\omega M} - \frac{\mathfrak{I}_2}{i\omega M} [(R_1 + i\omega L_1)(R_2 + i\omega L_2) - (i\omega M)^2].$$

Öffnet man den Transformator sekundär, so habe er eine Klemmenspannung  $\mathfrak{E}_2$ , und diese ergibt sich aus

$$\mathfrak{B}_1 = -\mathfrak{E}_2 \frac{R_1 + i\omega L_1}{i\omega M}.$$

$\mathfrak{E}_2$  ist konstant, solange  $\mathfrak{B}_1$  konstant gehalten wird. An der Verbrauchsstelle erhält man nur Kenntnis von der sekundären Spannung. Diese geht hervor aus der Gleichung, die wir durch Elimination von  $\mathfrak{B}_1$  bilden.

$$\mathfrak{E}_2 = \mathfrak{B}_2 + \mathfrak{I}_2 \left( R_2 + i\omega L_2 - \frac{(i\omega M)^2}{R_1 + i\omega L_1} \right).$$

Der Ausdruck in der Klammer stellt einen gerichteten Widerstand dar von dem Werte

$$\mathfrak{R}_2 = R_2 + \frac{R_1 \omega^2 M^2}{R_1^2 + \omega^2 L_1^2} + i\omega \left( L_2 - L_1 \frac{\omega^2 M^2}{R_1^2 + \omega^2 L_1^2} \right).$$

Wenn man, wie dies bei guten Transformatoren stets zulässig ist,  $R_1^2$  gegen  $\omega^2 L_1^2$  vernachlässigt und die Größe  $\kappa^2 = M^2/L_1 L_2$  einführt, so erhält man

$$\mathfrak{R}_2 = \left( R_2 + \kappa^2 \frac{L_2}{L_1} R_1 \right) + i\omega L_2 (1 - \kappa^2).$$

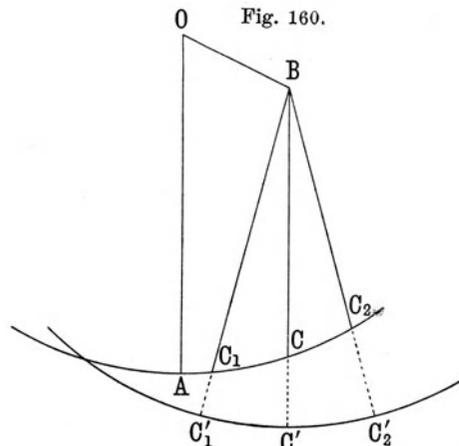
Die Gleichung

$$\mathfrak{E}_2 = \mathfrak{B}_2 + \mathfrak{R}_2 \mathfrak{I}_2$$

stimmt der Form nach überein mit derjenigen einer Stromquelle von der EMK  $\mathfrak{E}_2$ , deren innerer Widerstand  $\mathfrak{R}_2$  ist, wenn  $\mathfrak{B}_2$  die Klemmenspannung,  $\mathfrak{I}_2$  den Strom bezeichnet.

Legen wir für das Vektorbild  $\mathfrak{I}_2$  in die Richtung  $OA$  (Fig. 160) und tragen den Winkel von  $\mathfrak{R}_2$  in  $O$  an  $OA$  an, so sei  $OB$  der Betrag von  $\mathfrak{R}_2 \mathfrak{I}_2$  für einen bestimmten Wert von  $\mathfrak{I}_2$ . Die Linie für  $\mathfrak{B}_2$  hängt von den

Eigenschaften des den Kreis schließenden Leiters ab;  $\mathfrak{B}_2$  ist  $OA$  parallel für einen induktionsfreien Leiter, es geht vor  $\mathfrak{I}_2$  voraus für einen Leiter mit Induktivität und bleibt zurück für einen Leiter mit Kapazität. Da aber der



Betrag der Summe  $\mathfrak{B}_2 + \mathfrak{K}_2 \mathfrak{Z}_2$  gleich dem konstanten Betrage von  $\mathfrak{E}_2$  ist, so ergibt sich, daß man die Länge des Vektors  $\mathfrak{B}_2$  bei gegebener Richtung erhält als den von  $B$  in der bestimmten Richtung ausgehenden und durch einen Kreis mit dem Radius  $OA = |\mathfrak{E}_2|$  begrenzten Strahl.  $BC$  stellt also die Spannung bei induktionsfreiem äußeren Leiter dar,  $BC_1$  ihren Wert, wenn der Leiter überwiegend Kapazität,  $BC_2$  ihren Wert, wenn der Leiter überwiegend Induktivität enthält.

Schlägt man noch mit  $|\mathfrak{E}_2|$  einen Kreis um  $B$  als Mittelpunkt, so bezeichnen die zwischen beiden Kreisen liegenden Stücke, z. B.  $C_1 C_1'$ , der genannten Strahlen die Spannungsabfälle.

Diese Darstellung des Spannungsabfalles in Transformatoren rührt von Kapp<sup>40)</sup> her.

**§ 188. Fernsprechübertrager.** Im Fernsprechbetrieb werden Transformatoren angewendet zur Verbindung des Mikrophonkreises mit dem Kreise des Fernhörers, sogenannte Induktionsspulen, und als Schaltungslieder für die Leitungen. So dienen sie dazu, die Fernleitungen gegen die Amtsleitungen oder Fernleitungen verschiedener Art gegeneinander abzuschließen, ferner als Verzweigungsapparate für Viererschaltungen oder im Telegraphenbetrieb auf Fernsprechleitungen.

Bei den Induktionsspulen ist man durch Rücksicht auf den Raum im Gehäuse gezwungen, Apparate kleiner Form zu verwenden. Ihr Wirkungsgrad ist in den letzten Jahren besonders durch Anpassung an die Widerstandsverhältnisse erheblich verbessert worden.

Mit der fortschreitenden Technik hochwertiger Leitungen hat man die zur Verbindung von Leitungen dienenden eigentlichen Fernsprechübertrager sehr verbessert, indem man sie nach Art der elektrisch sehr vollkommenen Pupinspulen baute. Das Eisen wird in Form von feinem Draht oder Blech verwandt, die bei der Herstellung der Kerne unter Isolierung durch einen Lack elektrisch voneinander getrennt werden. Während man früher meist Übertrager mit offenem magnetischen Kreise benutzte, unter denen der Übertrager nach Münch<sup>41)</sup> sich durch einen verhältnismäßig hohen Wirkungsgrad auszeichnete, ist man dazu übergegangen, solche mit ringförmigem, also geschlossenem Eisenkern, sogenannte „Ringübertrager“ zu verwenden. Sie sind bei sachgemäßer Ausführung der Bewicklung ohne Streuung und haben bei der günstigen magnetischen Anordnung hohe Wirkungsgrade.

Die in § 186 dargelegte Betrachtungsweise läßt sich auf Fernsprechübertrager nicht anwenden, da die ganz anderen Energieverhältnisse der Kreise die Annahme einer konstanten Primärspannung ausschließen. Für die Eignung des Übertragers sind zwei Eigenschaften von Bedeutung, der Wirkungsgrad und die Anpassung der Induktivitäten an die Eigenschaften der zu verbindenden Leitungen. Wir werden auf das letztere erst später näher eingehen.

Um den Wirkungsgrad zu bestimmen, kann man zweckmäßig die Primärwicklung mit einem festen Vergleichswiderstand  $R$  (Fig. 161) und dem ersten Anker der Frankeschen Maschine zu einem Kreise verbinden, während die zweite Wicklung durch beliebige Scheinwiderstände  $R'$  geschlossen wird. Mißt man mit dem zweiten Anker der Reihe nach die Spannungen von 1

gegen 2, 2 gegen 3 und 4 gegen 5, so reichen die Ergebnisse zur Feststellung der Eigenschaften des Transformators aus, wenn der Scheinwiderstand von  $R'$  nach Größe und Phase bekannt ist. Da der zweite Anker im Zustande der Abgleichung keinen Strom führt, ändert er die Verteilung der an sich kleinen Leistungen nicht.

Eine Messung an einem Ringübertrager für Doppelsprechschaltung bei  $\omega = 5000$  ergab, wenn an den Klemmen der zweiten Wicklung ein induktionsfreier Widerstand von 600 Ohm lag, folgende Werte:

$$\begin{aligned} \mathfrak{S}_1 &= 0,776 e^{+i 60' 10''} \text{ V} \\ \mathfrak{S}_1 &= 1,150 e^{-i 10' 20''} \text{ mA} \\ \mathfrak{S}_2 &= 0,675 e^{+i 179' 30''} \text{ V.} \end{aligned}$$

Daraus ergibt sich die der ersten Wicklung zugeführte Leistung zu  $L_1 = 0,885 \text{ mW}$ . Die Wicklungen hatten je 40 Ohm Leitungswiderstand. Berechnet man die Leistung  $L_2$  an den Klemmen der zweiten Wicklung und die Verluste in den Widerständen, so erhält man

$$\begin{aligned} L_2 &= 0,759 \text{ mW} \\ R_1 \mathfrak{S}_1^2 &= 0,053 \text{ mW} \\ R_2 \mathfrak{S}_2^2 &= 0,051 \text{ mW} \\ \hline &0,863 \text{ mW} \end{aligned}$$

Es bleiben also noch 0,022 mW Verluste, die auf das Eisen zurückzuführen sind, gleich etwa 0,21 der im Kupfer auftretenden Verluste. Man kann also mit je 42 Ohm wirksamen Widerstandes in den Wicklungen rechnen.

Der Wirkungsgrad des Übertragers bei den angegebenen und einigen anderen Widerständen ergab sich mit folgenden Werten:

Widerstand . . . . .	300	600	1000	2000
Wirkungsgrad . . . . .	0,78	0,86	0,90	0,94

**§ 189. Das Mikrophon als Wechselstromerzeuger.** Die Ausführungen dieses Paragraphen sind rein empirischer Art und sollen nur als Grundlage für die Aufstellung der Stromgleichungen für Fernsprechkreise dienen. Auf Grund von Messungen <sup>42)</sup> an dem Mikrophon eines Fernspreckgehäuses für Zentralbatterie, welches in allen Fällen denselben Speisestrom erhielt, jedoch als Wechselstromerzeuger auf verschiedene Scheinwiderstände arbeitete, hat sich ergeben, daß ein Mikrophon wie ein Wechselstromerzeuger von bestimmter EMK und bestimmtem inneren Widerstand betrachtet werden kann. Zur Erzeugung des Wechselstromes wurde das Mikrophon durch die Schallwellen eines mit gleichbleibender Amplitude gespeisten Telefons erregt. Sein innerer Widerstand wurde unmittelbar vor und nach den Versuchen bei erregtem Mikrophon mit Wechselstrom gemessen. Er betrug 288 Ohm.

Fig. 162 stellt die Ergebnisse von vier Messungen zusammen, bei denen die Vektoren  $b_1$  bis  $b_4$  die Klemmenspannungen an vier Scheinwiderständen abnehmender Größe im äußeren Kreise waren, während die vier Vektoren  $a_1$

Fig. 161.

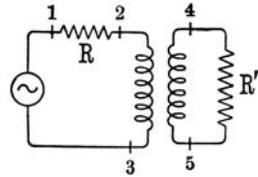
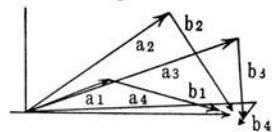


Fig. 162.



bis  $a_4$  die Spannungsverluste in dem auch das Mikrophon enthaltenden inneren Kreis des Sprechgehäuses darstellen. Der Vektor  $\mathcal{E}$  ist das Mittel aller Vektoren  $a_\nu + b_\nu$ . Die einzelnen Werte dieser Summen liegen nahe genug bei  $\mathcal{E}$ , um für das Mikrophon als Sender die Gleichung zu rechtfertigen

$$\mathfrak{B} = \mathcal{E} - \mathfrak{Z} W,$$

wobei  $\mathfrak{B}$  die Klemmenspannung,  $\mathcal{E}$  die EMK,  $W$  der innere Widerstand des Mikrophons ist.  $\mathcal{E}$  ist bei dieser Messung etwa 0,1 V gewesen; bei einem besprochenen Mikrophon wird man mit der Größenordnung von 0,5 V rechnen können.

**§ 190. Apparate mit Energiestreuung.** Manche Fernsprechapparate, unter ihnen als wichtigstes das Telephon, ähneln dem Transformator darin, daß sie noch Energie zu anderen Zwecken verbrauchen, als im Widerstand der Wicklung. Der Transformator verzehrt einen Teil der ihm zugeführten Leistung in der primären Wicklung, einen anderen überträgt er an die sekundäre; diese gibt die Leistung mit einem gewissen Verlust an den äußeren Leiter ab. Dem Telephon wird durch seine Bewicklung eine gewisse Energie in der Sekunde zugeführt, von der ein Teil im Widerstand der Wicklung verloren geht; ein anderer geht durch das magnetische Feld auf die Membrane über, die einen gewissen Teil davon in Schall umsetzt, während ein anderer Teil in Reibung oder anderen Verlustquellen verzehrt wird. Andere Apparate, wie die Elektromagnete der Relais oder Klappen, verzehren Energie in den Wirbelströmen, die in den nicht völlig unterteilten Eisengerüsten entstehen, wenn deren Magnetismus wechselt.

Da die Energie, die außer im Widerstand der Wicklung bei diesen Apparaten verloren geht, der Wicklung an den Klemmen zugeführt wird, so ist zu erwarten, daß die genannten Apparate sich wie Transformatoren verhalten werden, die eine bestimmte geschlossene Wicklung tragen.

Dies Verhalten wird sich besonders zeigen, wenn man feststellt, wie sie sich gegen Wechselströme verschiedener Frequenzen stellen.

Eine einfache Spule mit Induktivität hat einen Scheinwiderstand

$$\sqrt{\omega^2 L^2 + R^2};$$

die Spannung geht dem Strome um einen Winkel  $\varphi$  voraus, so daß  $\tan \varphi = \omega L/R$ . Der Scheinwiderstand fällt also für  $\omega = 0$  mit dem Leitungswiderstand zusammen, für große  $\omega$  ist er, falls  $R^2/\omega^2 L$  klein gegen Eins ist, dem  $\omega$  fast proportional. Die Phasenverschiebung von Strom und Spannung liegt zwischen  $0^\circ$  für  $\omega = 0$  und  $90^\circ$  für  $\omega = \infty$ .

Wir bekommen einen Anhalt für die gesuchte Veränderlichkeit des Richtungswiderstandes und des Phasenwinkels, wenn wir aus den Gleichungen eines Transformators die sekundäre Stromstärke ausscheiden. Dann ergibt sich

$$\mathfrak{B}_1 = \mathfrak{Z}_1 \left( R_1 + i\omega L_1 - \frac{(i\omega M)^2}{R_2 + i\omega L_2} \right).$$

Hierin bedeuten jetzt  $R_2$  und  $L_2$  die Werte für den gesamten Sekundärkreis. Wir erhalten daraus die reelle und imaginäre Komponente des Scheinwiderstandes als

$$\Re_1 = R_1 + \frac{\omega^2 M^2 R_2}{\omega^2 L_2^2 + R_2^2} + i\omega \left( L_1 - \frac{\omega^2 M^2 L_2}{\omega^2 L_2^2 + R_2^2} \right).$$

Von dem Scheinwiderstand einer einfachen Spule unterscheidet sich der vorliegende dadurch, daß bei einer einfachen Spule die reelle Komponente von  $\omega$  unabhängig ist, während sie bei einer Spule mit Verlusten mit  $\omega$  wächst. Die imaginäre Komponente ist bei einer einfachen Spule dem  $\omega$  proportional, während sie in dem anderen Falle langsamer als  $\omega$  wächst.

Dieses Verhalten ist in der Tat bei solchen Apparaten beobachtet worden. Franke hat es bei einem Telephon gefunden<sup>43)</sup>, aber wegen der komplizierten Vorgänge keine Erklärung davon gegeben. In der Starkstromtechnik ist es üblich, die Verluste im Eisen und durch Wirbelströme in der Art in Rechnung zu setzen, daß man eine dritte Wicklung annimmt, die dieselbe Energie verbraucht.

Wenn man die Werte des Scheinwiderstandes bei mehreren Periodenzahlen als  $\Re = R_1 + a_n + ib_n \omega_n$  beobachtet, so kann man durch Ausgleichrechnung die unbekanntenen Werte des angenommenen Sekundärkreises bis zu einem gewissen Grade ermitteln. Man erhält aus den Beobachtungen und dem bekannten  $R_1$  die Werte

$$a_n = \frac{\omega_n^2 M^2 R_2}{\omega_n^2 L_2^2 + R_2^2}$$

$$b_n = L_1 - \frac{\omega_n^2 M^2 L_2}{\omega_n^2 L_2^2 + R_2^2},$$

worin die Beisätze  $n$  sich auf die einzelnen Beobachtungen beziehen. Demnach gilt für jede Beobachtung eine Gleichung

$$I_1 = b_n + \frac{I_2}{R_2} a_n.$$

Aus wenigstens zwei Beobachtungen kann man also  $I_1$  und  $\frac{R_2}{I_2}$  bestimmen, bei mehr als zwei Beobachtungen hat man den wahrscheinlichsten Wert auszurechnen<sup>44)</sup>. Es sei so  $I_2/R_2 = \tau$  gefunden. Man erhält dann weiter die Gleichungen

$$a_n + \omega_n^2 \tau (I_1 - b_n) = \frac{\omega_n^2 M^2}{R_2},$$

die auf der linken Seite lauter bekannte Größen enthalten: aus ihnen folgt der Mittelwert von  $M^2/R_2 = \rho$ . Mit Hilfe der drei berechneten Größen  $L_1$ ,  $\tau$  und  $\rho$ , sowie des Gleichstromwiderstandes  $R$  läßt sich dann für jede Frequenz der Scheinwiderstand angeben als

$$\Re_1 = R + \frac{\omega^2 \rho}{1 + \omega^2 \tau^2} + i \omega \left( I_1 - \frac{\omega^2 \tau \rho}{1 + \omega^2 \tau^2} \right).$$

In dieser Weise wurde der Scheinwiderstand eines Fernsprechgehäuses mit Induktionsspule bei verschiedenen Frequenzen gemessen und daraus bestimmt:

$$I_1 = 0,988, \quad \tau = 0,41 \cdot 10^{-3}, \quad \rho = 0,34 \cdot 10^{-3}.$$

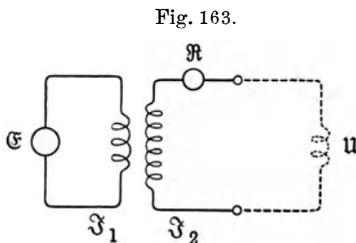
Die nachfolgende Tabelle gibt ein Bild von dem Grade der Übereinstimmung; der Gleichstromwiderstand war 384 Ohm.

$\omega$	Gemessen	Berechnet
1050	$1140 e + 51,50 i$	$1140 e + 52,20 i$
1780	$1665 e + 48,00 i$	$1652 e + 48,80 i$
2370	$1965 e + 44,00 i$	$1950 e + 45,40 i$
3580	$2290 e + 40,30 i$	$2320 e + 40,90 i$
4800	$2530 e + 38,90 i$	$2540 e + 38,40 i$
5530	$2690 e + 38,70 i$	$2630 e + 37,20 i$

Das geschilderte Verfahren kann allerdings nur dazu dienen, den Scheinwiderstand eines Apparates als empirische Funktion der Frequenz aus gegebenen Größen festzustellen, nicht aber dazu, die einzelnen Verlustquellen aufzudecken

**§ 191. Fernsprechapparate als Sender und als Empfänger.** Für die Anwendung bei Berechnung von Leitungen ist es wichtig, festzustellen, ob ein gerichteter Widerstand, den man mit einer äußeren EMK an den Fernsprechapparaten bestimmt hat, also wenn diese als Empfänger dienen, auch den Scheinwiderstand dieser Apparate bezeichnet, wenn sie als Sender wirken.

Wir werden uns von der Übereinstimmung für einige gebräuchliche Schaltungen überzeugen.



1. Schaltung für Ortsbatterie. Wirkt der Apparat als Sender, so ist die Quelle der Wechselströme in dem in der Primären der Induktionsspule liegenden Mikrophon anzunehmen.

Ist die Sekundäre an eine Leitung  $U$  gelegt (Fig. 163), so bestehen folgende Gleichungen:

$$\mathcal{E} = \varrho_1 \mathfrak{Z}_1 + \mathfrak{M} \mathfrak{Z}_2, \quad 0 = (U + \mathfrak{R} + \varrho_2) \mathfrak{Z}_2 + \mathfrak{M} \mathfrak{Z}_1,$$

wo  $\varrho_1$  den Scheinwiderstand des Primärkreises bei offenem zweiten Kreis,  $\varrho_2$  den Scheinwiderstand der Sekundärspule bei offenem Primärkreis bezeichnet und  $\mathfrak{M} = i\omega M$  ist. Daraus geht hervor

$$-\frac{\mathfrak{M}}{\varrho_1} \mathcal{E} = \left( U + \mathfrak{R} + \varrho_2 - \frac{\mathfrak{M}^2}{\varrho_1} \right) \mathfrak{Z}_2.$$

Wenn  $U$  so groß ist, daß es die anderen Größen bei weitem überragt, im Grenzfall also bei offenem Stromkreise, so ist  $U \mathfrak{Z}_2$  die sekundäre EMK  $\mathcal{E}_2$ .

Diese ist dann  $-\frac{\mathfrak{M}}{\varrho_1} \mathcal{E}$ . In jedem anderen Falle kann man  $U \mathfrak{Z}_2$  als die sekundäre Klemmenspannung  $\mathfrak{B}_2$  bezeichnen. Dann ist

$$\mathfrak{B} = \mathfrak{R} + \varrho_2 - \frac{\mathfrak{M}^2}{\varrho_1}$$

der Scheinwiderstand des Fernsprechapparates als Sender, da

$$\mathcal{E}_2 = \mathcal{B}_2 + \mathfrak{M} \mathcal{I}_2.$$

Dient der Apparat als Empfänger, so ist

$$\mathcal{B}_2 = (\mathfrak{R} + \mathcal{L}_2) \mathcal{I}_2 + \mathfrak{M} \mathcal{I}_1$$

$$0 = \mathcal{L}_1 \mathcal{I}_1 + \mathfrak{M} \mathcal{I}_2.$$

Daraus folgt

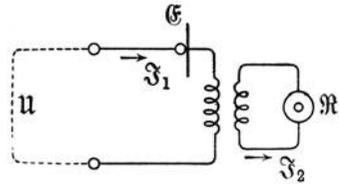
$$\mathcal{B}_2 = \left( \mathfrak{R} + \mathcal{L}_2 - \frac{\mathfrak{M}^2}{\mathcal{L}_1} \right) \mathcal{I}_2 = \mathfrak{B} \mathcal{I}_2.$$

Der Scheinwiderstand der Schaltung ist also in beiden Fällen derselbe.

2. Schaltungen für Zentralbatterie. Bei den einfachsten Schaltungen dieser Art, wenn Mikrophon und Telephon in Reihe liegen, ist es ohne weiteres klar, daß der Scheinwiderstand der Schaltung für Senden und Empfang gleich der Summe der Scheinwiderstände des Mikrophons und des Telephons ist.

Von Schaltungen mit Mikrophonspule sei eine auch in Deutschland gebräuchliche Schaltung nach Ericsson besprochen (Fig. 164).

Fig. 164.



Für den Sender gilt

$$\mathcal{E} = (U + \mathcal{L}_1) \mathcal{I}_1 + \mathfrak{M} \mathcal{I}_2$$

$$0 = (\mathfrak{R} + \mathcal{L}_2) \mathcal{I}_2 + \mathfrak{M} \mathcal{I}_1.$$

Daraus erhalten wir, indem wir  $U \mathcal{I}_1 = \mathcal{B}_1$  setzen,

$$\mathcal{E} = \mathcal{B}_1 + \left( \mathcal{L}_1 - \frac{\mathfrak{M}^2}{\mathfrak{R} + \mathcal{L}_2} \right) \mathcal{I}_1 = \mathcal{B}_1 + \mathfrak{B}_1 \mathcal{I}_1.$$

Für einen Empfänger gilt bei der Klemmenspannung  $\mathcal{B}$

$$\mathcal{B} = \mathcal{L}_1 \mathcal{I}_1 + \mathfrak{M} \mathcal{I}_2; \quad 0 = (\mathfrak{R}_2 + \mathcal{L}_2) \mathcal{I}_2 + \mathfrak{M} \mathcal{I}_1,$$

und daraus folgt, daß

$$\mathcal{B} = \left( \mathcal{L}_1 - \frac{\mathfrak{M}^2}{\mathcal{L}_2 + \mathfrak{R}} \right) \mathcal{I}_1 = \mathfrak{B}_1 \mathcal{I}_1.$$

Auch in dieser Schaltung hat also der Fernsprechapparat gleichen Scheinwiderstand, ob er als Sender oder als Empfänger wirkt.

Die hier nachgewiesene Übereinstimmung bringt den Vorteil mit sich, daß man bei Rechnungen an Fernsprechleitungen mit Apparaten zwischen dem Sende- und dem Empfangsapparat keinen anderen Unterschied zu machen hat, unter Voraussetzung gleicher Apparate und Schaltungen, als daß man dem einen eine EMK zuschreibt, dem anderen dagegen nicht.

## Fünfter Abschnitt.

**Theorie des Telephons als Empfänger.**

§ 192. **Grundgleichungen.** Die Theorie des Telephons<sup>45)</sup> ist in den einfachsten Grundlinien von Forbes angegeben worden, wobei im wesentlichen die Bedeutung des Dauermagnets festgestellt wurde. Das Zusammenwirken der elektromagnetischen und der mechanischen Kräfte wurde ziemlich umfassend von Wietlisbach festgestellt. Eine noch allgemeinere Darstellung findet sich in einer theoretischen Arbeit von Poincaré, in der sowohl die Vorgänge an einem idealisierten Telephon, ohne Hysteresis und Wirbelströme besprochen, als auch ergänzend diese komplizierteren Erscheinungen beschrieben werden. Die Untersuchung Poincarés ist neuerdings durch Kennelly in einer besonders anschaulichen Form fortgeführt worden.

Poincaré geht aus von den Lagrangeschen Differentialgleichungen der Bewegung und von ihnen ähnlichen Gleichungen für die elektrischen Vorgänge. Da diese Gleichungen weder als geläufig bekannt vorausgesetzt noch hier abgeleitet werden können, wollen wir statt ihrer einen anderen Ausgangspunkt wählen.

Für die mechanischen Kräfte gilt der Satz, daß das Produkt aus Masse und Beschleunigung gleich der Summe der wirksamen Kräfte ist.

Wir denken uns die Masse der Telephonmembran durch eine in ihrem Mittelpunkt liegende Masse  $m$  ersetzt und lassen auf diese dieselben Kräfte wirken, wie auf die Membran selbst. Da die Teile der Membran außerhalb ihrer Mitte an der Bewegung sich nur in vermindertem Maße beteiligen, so ist  $m$  kleiner als die Gesamtmasse anzunehmen, nach Poincaré zu etwa  $\frac{1}{5}$  davon. Auf diese Masse wirken äußere Kräfte, die wir mit  $K$  bezeichnen wollen; die Bewegung wird gedämpft teils durch Reibungswiderstände, teils durch Energieabgabe in Schallform. Wir fassen dies wie in § 97 in eine entgegenwirkende Kraft  $-r \frac{dx}{dt}$  zusammen.

Es wirken ferner elastische und magnetische Kräfte. Die Membran sei, wenn keine Kräfte auf sie wirken, eben. Legt man sie auf die Dose des Fernhörers, so wird sie durch die Kraft des Magnets etwas durchgebogen, und zwar werde ihr Mittelpunkt den Polen um  $a$  cm genähert. Solange der Magnet keinen Strom führt, bleibt die Platte in dieser Lage im Gleichgewicht. Leitet man einen Strom ein, so soll dieser positiv genannt werden, wenn er die Membran den Polen nähert, und die Verschiebung aus der Gleichgewichtslage ohne Strom in die mit Strom heiße  $x$ , sie ist also positiv, wenn die Platte sich den Polen nähert.

Die auf die Membran wirkenden Kräfte nennen wir positiv, wenn sie  $x$  zu vergrößern streben. Wir haben da zunächst die elastischen Kräfte, die wir als  $-k_1(a+x)$  ansetzen können; sie suchen die Membran zurückzutreiben, also  $x$  zu vermindern, und verschwinden, wenn  $x = -a$  ist, d. h. wenn die Platte in die ebene Gestalt zurückgekehrt ist.

Zur Feststellung der magnetischen Kräfte wollen wir annehmen, der Dauermagnetismus werde durch einen Strom  $J_0$  hervorgebracht, der in derselben Wicklung wie der veränderliche Strom  $J$  fließe. Alle Größen werden in elektromagnetischem Maße gemessen. Der magnetische Fluß durch den Luftraum und die Eisenteile des Telephons hat dann den Wert

$$\Phi = \frac{4 \pi \xi (J_0 + J)}{2 (b - x)} f,$$

worin  $\xi$  die Windungszahl der Spulen,  $f$  den Feldquerschnitt im Luftraum und  $2b/f$  den magnetischen Widerstand des gesamten Kreises in der Gleichgewichtslage ohne Strom darstellt.

$2b$  ist die Länge eines Luftraumes vom Querschnitt  $f$ , der denselben magnetischen Widerstand bietet wie das Telephon in der angegebenen Lage. Da allein die beiden Luftspalte zwischen Membran und Polschuhen etwa 1 mm Länge haben, die Amplituden  $x$  der Membran bei Bewegung aber in der Größenordnung von Tausendstel Millimetern bleiben, so ist  $x$  klein gegen  $b$ . Die auf die Platte von beiden Polen ausgeübte Zugkraft ist nach Gl. (125) angenähert gleich  $\frac{2}{8\pi} \Phi^2/f$ , wofür wir erhalten

$$\pi \xi^2 f \left( \frac{J_0 + J}{b - x} \right)^2 = C \left( \frac{J_0 + J}{b - x} \right)^2.$$

Wenn wir Sättigung des Eisens ausschließen, so betrifft die Abweichung vom wahren Werte der Zugkraft nur den Wert des Koeffizienten  $C$ .

Ebenso, wie  $x$  gegen  $b$ , ist auch die durch den Strom  $J$  erzeugte Magnetisierung klein gegen die dauernde, also  $J$  gegen  $J_0$ . Wir können den Ausdruck als Funktion von  $x$  und  $J$  entwickeln in der Form

$$f(x, J)_{x=0, J=0} + x \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right)_{x=0, J=0} + J \left( \frac{\partial f}{\partial J} \right)_{x=0, J=0}$$

und erhalten

$$C \left( \frac{J_0 + J}{b - x} \right)^2 = C \frac{J_0^2}{b^2} + 2x \frac{C J_0^2}{b^3} + 2J \frac{C J_0}{b^2}.$$

Glieder mit höheren Potenzen von  $x$  und  $J$  bleiben wegen ihrer Kleinheit außer Betracht. Diese Kraft zieht die Membran nach den Polen hin, ist also mit  $x$  und  $J$  positiv. Die Summe der elastischen und magnetischen Kräfte ist

$$p = -k_1(a + x) + \frac{C J_0^2}{b^2} + 2x \frac{C J_0^2}{b^3} + 2J \frac{C J_0}{b^2}.$$

Für  $x = 0$  und  $J = 0$  ist die Membran im Gleichgewicht, woraus folgt, daß

$$\frac{C J_0}{b^2} = \frac{k_1 a}{J_0}.$$

Wir können also die Kraft, die in der Lage  $x$  die Membran nach den Polen hin treibt, angeben als

$$p = -k_1 x \left( 1 - \frac{2x}{b} \right) + \frac{2 \pi \xi^2 f}{b^2} J_0 J \dots \dots \dots (204)$$

Wir setzen abkürzend

$$p = -kx + M'J.$$

Für  $a$  ergibt sich

$$a = \frac{\pi \xi^2 f}{k_1 b^2} J_0^2 \dots \dots \dots (205)$$

Die Gleichung für die mechanischen Kräfte lautet nunmehr

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + r \frac{dx}{dt} + kx - M'J = K.$$

Die Gleichung für die elektrischen Vorgänge in der Wicklung würde lauten

$$RJ = E - L \frac{dJ}{dt},$$

wenn nicht die Vorgänge bei der Bewegung der Platte hinzukämen. Die neue Gleichung leiten wir aus der magnetischen Energie des Systems ab. Ist diese gleich  $\mathbf{T}$ , so erhalten wir für einen Vorgang der reinen Induktivität  $\mathbf{T} = \frac{1}{2} LJ^2$ , also

$$L \frac{dJ}{dt} = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathbf{T}}{\partial J} \right).$$

Haben wir es mit der Energie eines Systems von zwei Stromkreisen zu tun, die den Wert hat

$$\mathbf{T} = \frac{1}{2} L_1 J_1^2 + M J_1 J_2 + \frac{1}{2} L_2 J_2^2,$$

so erhalten wir, indem wir für den ersten Kreis die Gleichung bilden

$$J_1 R_1 = E_1 - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathbf{T}}{\partial J_1} \right),$$

die aus § 186 bekannte Form

$$L_1 \frac{dJ_1}{dt} + R_1 J_1 + M \frac{dJ_2}{dt} = E_1.$$

Für den zweiten Kreis hätten wir zu bilden

$$J_2 R_2 = E_2 - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathbf{T}}{\partial J_2} \right)$$

und würden dieselbe Gleichung wie in § 186 erhalten.

Man wird daher, wenn eine vom Strom abhängige magnetische Energie in einem System aus anderen Ursachen, als aus Selbst- und Gegeninduktivität herrührt, nach der Analogie dieser Beispiele verfahren, um die Stromgleichung zu finden.

Die magnetische Energie des Telephons, dessen Dauermagnetismus wir uns durch einen in der Wicklung fließenden Strom  $J_0$  hervorgebracht denken, ist nach Gl. (6) gleich  $\int \mathfrak{H}^2 dv / 8\pi$ . Darin ist

$$\mathfrak{H} = 2\pi \xi (J_0 + J) (b - x)$$

zu setzen. Das Volumen des die magnetische Energie nahezu vollständig enthaltenden Luftraumes (vgl. § 194) ist  $2f(b - x)$ , und darin ist  $\mathfrak{H}$  als konstant anzusehen; daher ist die magnetische Energie

$$\mathbf{T} = \pi \xi^2 f \frac{(J_0 + J)^2}{b - x} = C \frac{(J_0 + J)^2}{b - x}.$$

Der Kreis der Wicklung enthält eine EMK vom Betrage  $E_0 + E$ , deren erster Bestandteil zeitlich unveränderlich sei und zur Erzeugung des Stromes  $J_0$  dient. Da  $(J_0 + J)$  der wirkliche Strom ist, so lautet die Gleichung für den Verlauf dieses Stromes

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathbf{T}}{\partial (J_0 + J)} \right) = E_0 + E - R(J_0 + J).$$

Nun ist  $E_0 - RJ_0 = 0$ . Man erhält ferner

$$\frac{\partial \mathbf{T}}{\partial (J_0 + J)} = 2 C \frac{J_0 + J}{b - x}.$$

Bilden wir die Ableitung nach der Zeit, indem wir dabei  $J$  und  $x$  vernachlässigen, wo sie als Posten gegen  $J_0$  oder  $b$  stehen, so ergibt sich die Gleichung

$$E - RJ = \frac{2C}{b} \frac{dJ}{dt} + \frac{2CJ_0}{b^2} \frac{dx}{dt}.$$

Ist  $x = 0$  und  $J = 0$ , so ist  $\mathbf{T} = CJ_0^2/b$ , also ist  $Cb = L$  die Induktivität des Telephons in der Ruhelage. Die Größe  $2CJ_0/b^2$  stimmt mit der früher als  $M'$  bezeichneten überein.

Man erhält also schließlich für das Telephon die beiden Gleichungen:

$$\left. \begin{aligned} m \frac{d^2x}{dt^2} + r \frac{dx}{dt} + kx - M'J &= K \\ L \frac{dJ}{dt} + RJ + M' \frac{dx}{dt} &= E \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (206)$$

Diese Gleichungen stimmen mit den von Poincaré mit Hilfe der Gleichungen von Lagrange entwickelten überein.

**§ 193. Die Gleichungen von Lagrange.** Der Einfachheit halber sind vorstehend die Bewegungsgleichungen des Telephons für einen idealisierten Fall auf einem Wege abgeleitet worden, bei dem es wenigstens für die Stromgleichung nicht ohne Benutzung einer Analogie, also ohne strengen Beweis herging. Wird die Aufgabe schwieriger gestellt, als in dem Falle eines Telephons, z. B. für zwei Apparate mit Induktionsspulen und Telephonen, so versagt der benutzte Weg. Wir wollen daher die genannten Differentialgleichungen hier als Tatsachen einführen, indem wir uns von ihrer Richtigkeit durch Anwendung auf bekannte Fälle überzeugen.

Wenn die potentielle Energie  $\mathbf{U}$  eines Systems durch eine Reihe von Veränderlichen  $x, y, z \dots$  gegeben ist, die kinetische  $\mathbf{T}$  daher durch deren Differentialquotienten nach der Zeit, also  $x', y', z' \dots$ , wenn ferner  $X, Y, Z \dots$  die in der Richtung der  $x', y', z' \dots$  wirksamen äußeren Kräfte sind, so gelten die Gleichungen

$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathbf{T}}{\partial x'} \right) - \frac{\partial (\mathbf{T} - \mathbf{U})}{\partial x} &= X \\ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathbf{T}}{\partial y'} \right) - \frac{\partial (\mathbf{T} - \mathbf{U})}{\partial y} &= Y \text{ usw.} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (207)$$

Diese Gleichungen lassen sich auch auf Energien in elektrischer Form anwenden, wenn man, entsprechend der Bestimmung von  $\mathbf{T}$  und  $\mathbf{U}$  für die

Variablen  $x, y \dots$  die Elektrizitätsmengen, also für ihre Ableitungen  $x' \dots$  die Ströme setzt. Dann sind für die Größen  $X \dots$  Spannungen zu setzen; ebenso wie das Produkt aus einer Länge in eine mechanische Kraft, ergibt auch das aus einer Elektrizitätsmenge in eine Spannung eine Arbeit.

Man kann sich leicht überzeugen, daß, wenn man für das Telephon setzt

$$\mathbf{T} - \mathbf{U} = \frac{1}{2} m \left( \frac{dx}{dt} \right)^2 + C \frac{(J_0 + J)^2}{b - x} - \frac{1}{2} kx^2,$$

worin die drei Posten der Reihe nach die mechanische und magnetische kinetische Energie und den negativen Wert der mechanischen potentiellen Energie bedeuten, man durch Ausführung der Differentiationen nach  $x$  und  $x'$  und nach  $q$  und  $J$  die abgeleiteten Gleichungen erhält. Im vorliegenden Falle kommt elektrische potentielle Energie nicht in Betracht, also ist die partielle Ableitung nach  $q$  gleich Null.

Setzen wir für den Fall zweier gekoppelter Schwingungskreise

$$\mathbf{T} = \frac{1}{2} L_1 J_1^2 + M J_1 J_2 + \frac{1}{2} L_2 J_2^2$$

$$\mathbf{U} = \frac{1}{2} \frac{q_1^2}{K_1} + \frac{1}{2} \frac{q_2^2}{K_2},$$

so erhalten wir durch Ausführung der Differentiationen nach  $q_1$  und nach  $J_1 = q_1'$ , sowie  $q_2$  und  $J_2 = q_2'$  das in § 126 abgeleitete Gleichungssystem.

Für den Fall, daß ein Mikrophon über eine Induktionsspule auf ein Telephon wirkt, setzt Poincaré unter Fortlassung derjenigen Beträge der Energie, die sich nach der Zeit nicht ändern, da sie ohnedies beim Differenzieren herausfallen,

$$\mathbf{T} = \frac{1}{2} m \left( \frac{dx}{dt} \right)^2 + \frac{1}{2} L_1 J_1^2 + M J_1 J_2 + \frac{1}{2} L_2 J_2^2 + M' J_2 x$$

$$\mathbf{U} = \frac{1}{2} kx^2,$$

wo  $J_1$  der Strom im Mikrophon,  $J_2$  der im Telephon,  $L_1$  und  $L_2$  die Induktivitäten der beiden Kreise,  $M$  ihre Gegeninduktivität sind;  $m$ ,  $k$  und  $M'$  haben die früheren Bedeutungen. Man erhält dann die Gleichungen unter der Annahme, daß auf die Telephonmembran keine äußeren Kräfte wirken, also  $K = 0$  ist:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + r \frac{dx}{dt} + kx - M J_2 = 0$$

$$L_2 \frac{dJ_2}{dt} + R_2 J_2 + M' \frac{dx}{dt} + M \frac{dJ_1}{dt} = 0$$

$$M \frac{dJ_2}{dt} + L_1 \frac{dJ_1}{dt} = E - R J_1.$$

$E$  sowohl wie  $J_1$  zerfallen in einen der Zeit nach konstanten und einen veränderlichen Teil. Wegen der Durchführung der Rechnungen wird auf die angegebene Arbeit verwiesen.

Wir beschäftigen uns weiterhin mit den Eigenschaften des Fernsprechers als Empfänger.

§ 194. Freie Schwingungen der Telephonmembran. Setzen wir in den Gleichungen

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + r \frac{dx}{dt} + kx - M'J = K$$

$$L \frac{dJ}{dt} + RJ + M' \frac{dx}{dt} = E$$

die äußeren Kräfte  $K$  und  $E$  gleich Null, so stellen die Gleichungen die Bewegung der sich selbst überlassenen Telephonmembran dar. Ihnen genügen die Integrale

$$x = x_0 e^{\gamma t}, \quad J = J_1 e^{\gamma t},$$

wenn  $\gamma$  die Gleichung erfüllt

$$m\gamma^2 + r\gamma + k + \frac{\gamma M'^2}{\gamma L + R} = 0 \dots \dots \dots (208)$$

Diese Gleichung hat drei Wurzeln  $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ , die entweder alle drei reell sind, oder von denen eine reell ist, während die anderen konjugierte komplexe Größen sind. Die reellen Anteile der  $\gamma$  müssen negativ sein, da im anderen Falle  $x$  oder  $J$  ohne äußere Ursache mit wachsender Zeit beliebig groß würden, während sie tatsächlich mit wachsender Zeit verschwinden.

Die Auffindung der Wurzeln wird dadurch erleichtert, daß erfahrungsmäßig die Kopplung der Membran mit der Spule nur schwach ist, so daß die Eigenfrequenz der bei geschlossener Wicklung schwingenden Membran nicht weit von derjenigen bei offener Wicklung liegt. Diese ergibt sich, wenn man  $R = \infty$  setzt; wir nennen sie  $\gamma_0$  und es ist

$$m\gamma_0^2 + r\gamma_0 + k = 0.$$

Wir erhalten

$$\gamma_0 = -\frac{r}{2m} \pm i \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{r^2}{4m^2}}.$$

Wir machen bei Anwendung dieser Form die Annahme, daß die Membran tatsächlich fähig ist zu schwingen; die Richtigkeit dieser Annahme geht daraus hervor, daß sich eine oder mehrere Resonanzstellen für jede Membran feststellen lassen. Daraus kann man schließen, daß das Dekrement einen mäßigen Betrag nicht übersteigt. Es hat nach Gl. (174) den Wert

$$\frac{\pi r}{m \sqrt{\frac{k}{m} - \left(\frac{r}{2m}\right)^2}}.$$

Nehmen wir an, es sei gleich Eins, was schon eine sehr starke Dämpfung bedeuten würde, so wäre  $r/2m$  nur gleich  $0,025 k/m$ . Wir können also näherungsweise diese kleine Größe gegen  $k/m$  vernachlässigen.

Unter der Annahme, daß die Eigenfrequenz der Membran bei geschlossenem Kreise nicht erheblich von der bei offenem abweicht, können wir setzen  $\gamma = \gamma_0 + \delta$ , und ferner die durch Gl. (208) bezeichnete Funktion von  $\gamma$  in der Form entwickeln

$$0 = f(\gamma) = f(\gamma_0) + \delta \left( \frac{df}{d\gamma} \right)_{\gamma=\gamma_0}.$$

Wir erhalten dann

$$0 = \frac{\gamma_0 M'^2}{L\gamma_0 + R} + \delta \left( 2m\gamma_0 + r + \frac{R M'^2}{(L\gamma_0 + R)^2} \right).$$

Berechnen wir hieraus  $\delta$  und bilden die Summe  $\gamma_0 + \delta$ , so erhalten wir

$$\gamma = \gamma_0 \frac{(2m\gamma_0 + r)(L\gamma_0 + R)^2 - L\gamma_0 M'^2}{(2m\gamma_0 + r)(L\gamma_0 + R)^2 + R M'^2}.$$

Dieser Ausdruck läßt sich sehr vereinfachen, wenn die im Zähler und Nenner an zweiter Stelle stehenden Posten als sehr klein gegen

$$(2m\gamma_0 + r)(L\gamma_0 + R)^2$$

angesehen werden können, er geht dann in die Form über

$$\gamma = \gamma_0 \left( 1 - \frac{M'^2}{(2m\gamma_0 + r)(L\gamma_0 + R)} \right).$$

Um zu übersehen, wie weit die Annahme zutrifft, wollen wir eine grobe Schätzung vornehmen. Die Grundschwingung der Membran liege bei rund 600 Perioden, so daß  $\sqrt{k/m} = 4000$  sei. Poincaré schätzt  $m$  auf 1 g, so daß also  $k = 16 \cdot 10^6$  wird. Dies würde heißen, daß eine Kraft von  $16 \cdot 10^4$  Dynen oder etwa 160 g dazu gehörte, um die Durchbiegung der Membran um 0,1 mm zu vergrößern. Diese Zahl trifft der Größenordnung nach sicher zu. Um  $M'$  abzuschätzen, wollen wir an die Beziehungen erinnern, daß die Zugkraft der Pole auf die Membran in der Ruhelage den Wert  $P = C \frac{J_0^2}{b^2}$  hat, während

$M' = \frac{2CJ_0}{b^2}$  ist. Darin ist  $C = \pi \zeta^2 f$ . Für ein Telephon von 1200 Windungen und 0,6 cm<sup>2</sup> Polfläche ist also  $C = 270 \cdot 10^4$ . Man wird  $P$  etwa auf 200 g oder  $2 \cdot 10^5$  Dynen schätzen können, so daß  $J_0/b$  den Wert 0,27 erhält. Wenn man  $b$  zu 0,2 cm veranschlagt, so erhält man  $M' = 7,3 \cdot 10^6$ .

Was die anderen Größen betrifft, so ist  $L\gamma$  von derselben Größenordnung wie  $R$ , das etwa 200 Ohm oder  $200 \cdot 10^9$  cgs-Einheiten beträgt, der andere Faktor wird durch  $2m\gamma_0$  bestimmt, das etwa den Betrag 8000 hat. Vergleicht man also  $M'^2$  mit dem Betrage von  $(2m\gamma_0 + r)(L\gamma_0 + R)$ , so erhält man ungefähr ein Verhältnis von 50 zu 1600.

Die vereinfachte Rechnung ist also gestattet; unter den tatsächlichen Verhältnissen wird  $\gamma$  sogar innerhalb sehr geringer Unterschiede mit  $\gamma_0$  übereinstimmen. Wir hätten so zwei Wurzeln der Bestimmungsgleichung für  $\gamma$  gefunden, nämlich

$$\gamma_1 = -\frac{r}{2m} + i \sqrt{\frac{k}{m} - \left(\frac{r}{2m}\right)^2}$$

$$\gamma_2 = -\frac{r}{2m} - i \sqrt{\frac{k}{m} - \left(\frac{r}{2m}\right)^2}.$$

Die dritte Wurzel finden wir mit Hilfe der Feststellung, daß die Gleichung für  $\gamma$

$$(\gamma L + R)(m\gamma^2 + r\gamma + k) + \gamma M'^2 = 0$$

sich in die Form bringen läßt

$$mL(\gamma - \gamma_1)(\gamma - \gamma_2)(\gamma - \gamma_3) = 0,$$

da der Ausdruck der linken Seite durch jede der drei Wurzeln gleich Null gemacht wird.  $\gamma^3$  hat in beiden Gleichungen denselben Faktor, also müssen auch die Faktoren der anderen Potenzen übereinstimmen. Dies ergibt bei  $\gamma^2$

$$mR + rL = -mL(\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3).$$

Man erhält daraus

$$\gamma_3 = -\frac{R}{L}.$$

Zur Kontrolle stellen wir  $\gamma_3$  aus dem freien Gliede fest; danach ist

$$kR = -mL\gamma_1\gamma_2\gamma_3.$$

Hieraus ergibt sich derselbe Wert von  $\gamma_3$ .

Diese drei Wurzeln stimmen überein mit denjenigen, welche man unter der Annahme  $M' = 0$  erhielt. Unter den obwaltenden Verhältnissen haben also die durch die Bewegung der Membran in der Wicklung erzeugten Ströme keinen merklichen Einfluß auf die Schwingungen.

Unter der angenommenen Vereinfachung, daß die Membran durch eine Masse in ihrem Mittelpunkt ersetzt gedacht wird, ergeben sich für ihre Bewegung drei bestimmende Größen: die Frequenz der Eigenschwingung, die nahezu den Wert  $\sqrt{k/m}$  hat und die Dämpfungsexponenten, von denen der eine im Betrage  $r/2m$  von den mechanischen Reibungen, der andere,  $R/L$ , von dem elektrischen Widerstande herrührt. Zu den drei Teilintegralen gehören drei Konstanten, die durch die Anfangswerte von  $x$  und  $J$  zu bestimmen sind. Ein solches System von Anfangswerten ist z. B., daß für  $t = 0$  die Membran die Durchbiegung  $x_0$  habe, und daß ihre Geschwindigkeit  $dx/dt$ , sowie der Strom in der Telephonwicklung für  $t = 0$  beide den Wert Null haben sollen.

**§ 195. Erzwungene Schwingungen der Membran.** Wenn wir in der Wicklung unter einer EMK  $\mathfrak{E}e^{i\omega t}$  einen ungedämpften Sinusstrom  $\mathfrak{I}e^{i\omega t}$  fließen lassen, so schwingt die Membran, ihr Abstand von der Ruhelage sei  $\mathfrak{s}e^{i\omega t}$ . Äußere Kräfte, die die Membran bewegen könnten, seien nicht vorhanden. Die Grundgleichungen nehmen die Form an:

$$\begin{aligned} \mathfrak{s}(k - \omega^2 m + i\omega r) - M' \mathfrak{I} &= 0 \\ \mathfrak{I}(R + i\omega L) + i\omega M' \mathfrak{s} &= \mathfrak{E}. \end{aligned}$$

Daraus ergibt sich zunächst

$$\mathfrak{E} = \mathfrak{I} \left( R + i\omega L + \frac{i\omega M'^2}{k - \omega^2 m + i\omega r} \right) \dots \dots \dots (209)$$

Das Telephon zeigt also einen gerichteten Widerstand

$$\mathfrak{R} = R + \frac{\omega^2 M'^2 r}{(k - \omega^2 m)^2 + \omega^2 r^2} + i\omega \left( L + \frac{M'^2 (k - m\omega^2)}{(k - m\omega^2)^2 + \omega^2 r^2} \right).$$

Der Zuwachs der reellen Komponente zeigt ein Maximum für die Resonanzfrequenz, die den Wert  $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$  hat, dagegen ist der Zuwachs für andere Frequenzen gering, weil im Nenner  $m^2(\omega_0^2 - \omega^2)^2$  vorkommt, das schnell erhebliche Werte gegen  $\omega^2 r^2$  annimmt.

Der Zusammenhang zwischen der Stromstärke und der Amplitude der Membranschwingungen ergibt sich aus der Gleichung

$$\xi = \frac{M' \mathfrak{S}}{k - m \omega^2 + i \omega r} \dots \dots \dots (210)$$

Die Eigenfrequenz der Membran ist mit genügender Annäherung  $\omega_0^2 = k/m$ .

Wir machen die Annahme, daß die Eigenfrequenz außerhalb der Periodenzahlen liege, die für die Sprache wichtig sind.

Dann kann man genügend genau setzen:

$$s = \frac{M' J}{m \sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2}}$$

wo  $s$  und  $J$  die Beträge von  $\xi$  und  $\mathfrak{S}$  sind. Man hat die Quadratwurzel stets positiv zu nehmen. Nach den in § 192 getroffenen Festsetzungen kann man dies in die Form bringen:

$$s = \frac{\omega_0^2}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2}} \cdot \frac{\xi J \Phi_0}{b} \cdot \frac{1}{k_1} \cdot \frac{b}{b - 2a} = \frac{1}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2}} \cdot \frac{\xi J \Phi_0}{b m}$$

worin  $\Phi_0$  den dauernden magnetischen Fluß bezeichnet, wenn das Telephon keinen Wechselstrom führt.

Eine unterhalb der Gebrauchsfrequenzen liegende Eigenfrequenz kommt bei großer Masse der Membran und geringer Spannung zustande. Die Amplitude würde dabei klein sein und um so geringer unter sonst gleichen Verhältnissen, je höher die wiederzugebende Frequenz ist. Dies bietet also keine günstige Lösung. Soll die Eigenfrequenz der Membran oberhalb der Gebrauchsfrequenzen liegen, so erfordert dies starke Spannung der Membran. Der Wert von  $k_1$  ist also bei einem solchen Telephon hoch. Man erhält in einem solchen Falle für gleich starke Ströme verschiedener Frequenzen zwar annähernd gleiche Amplituden, aber sie sind verhältnismäßig klein. Poincaré hielt es für zweckmäßig, die Eigenfrequenz an die obere Grenze der Gebrauchsfrequenzen zu legen, etwa  $\omega_0 = 10\,000$ , weil dann die obersten vorkommenden Töne von Bedeutung durch die beginnenden Resonanzerscheinungen etwas verstärkt werden.

**§ 196. Schwingungen der Membran in der Nähe der Eigenfrequenz.**

Wir setzen hier zunächst noch die Darstellung Poincarés fort. Führt man in Gl. (210) die Wurzeln  $\gamma_1$  und  $\gamma_2$  ein, so ist

$$\xi = \frac{M' \mathfrak{S}}{m (i \omega - \gamma_1) (i \omega - \gamma_2)}$$

In Fig. 165 stellt Punkt  $B$  die komplexe Größe  $\gamma_1$ , Punkt  $C$  die komplexe Größe  $\gamma_2$  dar. Ein beliebiges  $i \omega$  wird durch die Strecke  $OA$  bezeichnet. Es ist daher

$$\xi = \frac{M'}{m} \frac{\mathfrak{S}}{AB \cdot AC}$$

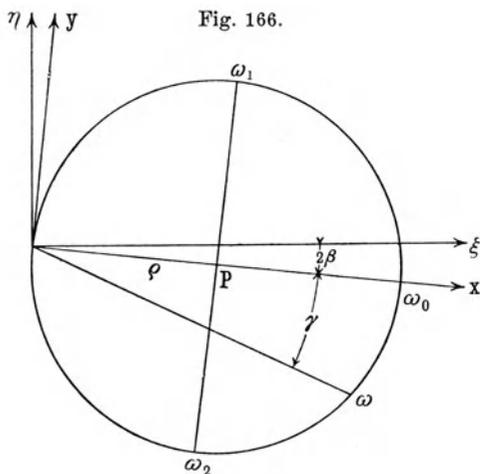
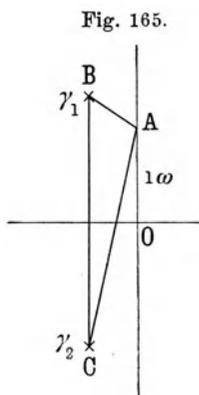
Dieser Ausdruck geht durch ein Maximum, wenn Punkt  $A$  die Höhe des Punktes  $B$  erreicht.

Die Weiterentwicklung der Theorie des Telephons, die Kennelly begonnen hat, geht von den Gleichungen Poincarés aus und besonders von der Gl. (209). Wir wollen dieser eine neue Deutung geben, nämlich daß  $R$  und  $L$  die Eigenschaften des Telephons unter Wechselstrom, aber bei festgehaltener Membran seien. Sie schließen also die Verluste für Magnetisierung und Wirbelströme in dem ruhenden System ein. Der Posten

$$\mathfrak{Z}' = \frac{i \omega M'^2}{k - \omega^2 m + i \omega r} \dots \dots \dots (211)$$

enthält die Größen, welche durch die Bewegung der Membran ins Spiel treten, und kann als die Bewegungskomponente des Scheinwiderstandes  $\mathfrak{R}$  des Telephons bezeichnet werden. Das Produkt  $\mathfrak{E}' = \mathfrak{Z}' \mathfrak{I}$  ist daher die durch die Bewegung erzeugte EM-Gegenkraft der Membran, welche der EM-Gegenkraft des Ankers eines Elektromotors gleichkommt. Bildet man das Produkt  $\frac{1}{2} |\mathfrak{E}'| |\mathfrak{I}| \cos(\mathfrak{E}', \mathfrak{I})$ , so stellt es die auf die Membran übertragene mechanische Leistung dar.

Die Feststellung des Verlaufs von  $\mathfrak{Z}'$  in dem Gebiet von Frequenzen, das auch die Eigenfrequenz der Membran einschließt, ist Gegenstand von Messungen



gewesen, die zu verschiedenen Ergebnissen geführt haben. Wir beschränken uns auf die vereinfachten Fälle, welche Kennelly hauptsächlich behandelt, bei denen  $M'$  als eine konstante Größe betrachtet werden kann. Es findet sich dabei allerdings, daß man dieser Größe noch einen Verlustwinkel beizufügen hat, so daß statt  $M'$  zu setzen ist  $M' e^{-i\beta}$ . Dies bedeutet, daß zwischen der vom Strom erzeugten magnetischen Kraft und der Beschleunigungskomponente  $M' J$  infolge von Wirbelströmen ein Phasenunterschied besteht, der für jede Form des Telephons einen anderen Wert hat, so daß  $\beta$  etwa zwischen Null und 45 Graden liegt. Setzt man

$$\mathfrak{Z}' = \frac{i \omega M'^2 e^{-2i\beta}}{k - \omega^2 m + i \omega r} = \xi + i \eta,$$

woraus folgt:

$$\begin{aligned} \omega r \xi + (k - \omega^2 m) \eta &= \omega M'^2 \cos 2 \beta \\ (k - \omega^2 m) \xi - \omega r \eta &= \omega M'^2 \sin 2 \beta, \end{aligned}$$

so ergibt die Ausscheidung von  $\omega$  die Gleichung

$$\left(\xi - \frac{M'^2 \cos 2\beta}{2r}\right)^2 + \left(\eta + \frac{M'^2 \sin 2\beta}{2r}\right) = \left(\frac{M'^2}{2r}\right)^2 \dots (212)$$

Alle Werte von  $\xi + i\eta$  liegen also auf einem Kreise (Fig. 166), dessen Mittelpunkt auf einer gegen die Achse  $\xi$  um den Winkel  $-2\beta$  gedrehten Geraden liegt. Der Kreis geht außerdem durch den Punkt  $\xi = 0, \eta = 0$  und hat den Durchmesser  $2\varrho = \frac{M'^2}{r}$ . Wir gehen auf ein anderes Koordinatensystem  $x, y$  über, dessen  $x$ -Achse durch den Mittelpunkt  $P$  dieses Kreises geht, mit Hilfe der Gleichungen

$$\xi = x \cos 2\beta + y \sin 2\beta, \quad \eta = -x \sin 2\beta + y \cos 2\beta.$$

Bestimmen wir einen Punkt auf dem Kreise durch einen Winkel  $\gamma$ , den ein vom Nullpunkt ausgehender Strahl mit der positiven  $x$ -Achse macht, und zwar soll  $\gamma$  im Sinne des Uhrzeigers wachsen, so wird

$$x = 2\varrho \cos^2 \gamma = \varrho + \varrho \cos 2\gamma, \quad y = -2\varrho \cos \gamma \sin \gamma = -\varrho \sin 2\gamma.$$

Führt man diese Beziehungen in eine der Gleichungen ein, in welche die Gleichung  $\mathfrak{Z}' = \xi + i\eta$  zerfällt, so ergibt sich zwischen  $\omega$  und  $\gamma$  die Beziehung

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{\omega^2 m - k}{\omega r} = \frac{\omega}{r} \frac{\omega_0}{\omega} \dots (213)$$

Dem Winkel  $\gamma = 0$  entspricht  $\omega^2 = \frac{k}{m} = \omega_0^2$ , also die Resonanzfrequenz.

Für  $\operatorname{tg} \gamma = +1$ , also am unteren Ende des zur  $x$ -Achse senkrechten Kreisdurchmessers, findet man

$$\omega_2 = \frac{r}{2m} + \sqrt{\frac{k}{m} + \frac{r^2}{4m^2}}$$

und für  $\operatorname{tg} \alpha = -1$

$$\omega_1 = -\frac{r}{2m} + \sqrt{\frac{k}{m} + \frac{r^2}{4m^2}}.$$

Es folgt daraus, daß  $\omega_1 \omega_2 = \omega_0^2$  ist.

Durch die drei Größen  $\varrho, \omega_1, \omega_2$  werden alle mechanischen Eigenschaften des Telephons in ihrem Verhältnis zu einer beliebigen bestimmt. So ist

$$k = m \omega_0^2, \quad r = m(\omega_2 - \omega_1), \quad M'^2 = 2\varrho m(\omega_2 - \omega_1) \dots (214)$$

Aus dem Kreise, der durch Messung des elektrischen Scheinwiderstandes gewonnen wurde, läßt sich ferner die Resonanzkurve für die mechanischen Schwingungen herleiten. Kennelly stellt sie auf für die Amplitude der Membrangeschwindigkeit bei gegebenem Strom in der Erregerwicklung. Nach § 195 ergibt sich dafür

$$\frac{\delta'}{\mathfrak{Z}} = \frac{M'}{r + i\left(m\omega - \frac{k}{\omega}\right)}$$

Da nach Gl. (213)

$$\omega r = \sqrt{\omega^2 r^2 + (\omega^2 m - k)^2} \cos \gamma, \quad \omega^2 m - k = \sqrt{\omega^2 r^2 + (\omega^2 m - k)^2} \sin \gamma,$$

so ist  $\left| \frac{s'}{\mathfrak{S}} \right| = \frac{M' \cos \gamma}{r}$ .

Man kann noch umformen:

$$tg \gamma = \frac{\sqrt{mk}}{r} \left( \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right) = \frac{\omega_0}{\omega_2 - \omega_1} \left( \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right) = \frac{1}{2 b_0} \left( \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right).$$

Macht man das Frequenzverhältnis  $\frac{\omega}{\omega_0} = u$  zur Abszisse, den Wert  $r \frac{s'}{M' \mathfrak{S}} = v$  zur Ordinate eines rechtwinkligen Koordinatensystems für die Resonanzkurve, so lautet deren Gleichung

$$v^2 = \frac{1}{1 + \left( \frac{u - \frac{1}{u}}{2 b_0} \right)^2}.$$

In dieser Form hat die Resonanzkurve nur den einen Parameter

$$b_0 = \frac{\omega_2 - \omega_1}{2 \omega_0} = \frac{r}{2 \sqrt{km}} \dots \dots \dots (215)$$

Für  $\omega = \omega_0$  hat  $v$  den Wert Eins.

Die zu  $\omega_1$  und  $\omega_2$  gehörenden Werte  $v_1$  und  $v_2$  ergeben sich beide zum Werte  $\frac{\sqrt{2}}{2}$ .

Durch die Bestimmung der drei Frequenzen  $\omega_0$ ,  $\omega_1$  und  $\omega_2$  sind drei Punkte der Resonanzkurve festgestellt: für  $u = 1$  der Punkt  $v = 1$  und für  $u = \frac{\omega_1}{\omega_0}$  sowie  $u = \frac{\omega_2}{\omega_0}$  übereinstimmend  $v = \frac{\sqrt{2}}{2}$ . Je größer Parameter  $b_0$  ist, um so breiter wird der Gipfel der Resonanzkurve. Nach den Analogien, die in § 156 über elektrische und mechanische Schwingungssysteme aufgestellt worden sind und nach Gl. (174), ist  $b_0 = \frac{\delta}{2\pi}$ , wenn  $\delta$  das logarithmische Dämpfungsdekrement ist.

Die Ersatzkreismethode. Auf einem anderen Wege haben Hahne-  
mann und Hecht<sup>46)</sup> die Theorie des Telephons behandelt, nämlich unter An-  
nahme eines zweiten Kreises, wie in § 189, welcher die Rückwirkungen der  
Membranbewegungen und der Wirbelströme auf den Scheinwiderstand der  
Erregerwicklung darstellt.

**§ 197. Der Wirkungsgrad des Fernhörers.** Auf Grund der angesetzt-  
ten Gleichungen können wir zu einer Zahl für den Wirkungsgrad des Fernhörers  
nur in dem Sinne kommen, daß wir darunter das Verhältnis der an die  
Membran abgegebenen Leistung zu der im ganzen aufgewendeten verstehen.  
Solange man aber die Messungen nur mit der gleichen Belastung der Mem-  
bran mit Schallenergie, d. h. unter gleichen Verhältnissen in den von der

Membran mit Schallwellen gespeisten Räumen ausführt, wird es nicht möglich sein, die Reibungsverluste von der nutzbaren Energieabgabe zu trennen.

Setzen wir in den Gl. (206)  $K = 0$  und multiplizieren die erste mit  $\frac{dx}{dt}$ , die zweite mit  $J$ , so stellt das in beiden Gleichungen auftretende Glied

$M' J \frac{dx}{dt}$  die auf die Membran übergehende Leistung dar. In Gl. (209) und (210) sind uns die Größen  $J$  und  $\xi$  in komplexer Form gegeben. Nach der in § 175 angegebenen Regel haben wir statt einer der zu multiplizierenden Größen die konjugierte einzusetzen und erhalten die Leistung als die Hälfte des reellen Teiles.

Auf Grund der Feststellungen über die Bewegungskomponente schreiben wir

$$\mathfrak{E} = \Im \left( R + i \omega L + \frac{M'^2}{r} \cos \gamma e^{-i(2\beta + \gamma)} \right) \dots \dots \dots (216)$$

Die gesamte zugeführte Leistung ist gleich dem Betrage von  $\mathfrak{E}^2$  mal der Hälfte des reellen Teiles der Klammer, also

$$L_1 = \frac{1}{2} \left( R + \frac{M'^2}{r} \cos \gamma \cos(2\beta + \gamma) \right) \mathfrak{E}^2.$$

Für die Berechnung der abgegebenen Leistung bilden wir das Produkt aus  $\frac{1}{2} M' e^{-i\beta} \mathfrak{E}$  in die Konjugierte zu

$$\frac{d\xi}{dt} = \frac{M' e^{-i\beta} \mathfrak{E}}{r + i \left( \omega m - \frac{k}{\omega} \right)} = \frac{M' e^{-i\beta} \mathfrak{E} \cos \gamma e^{-i\gamma}}{r}$$

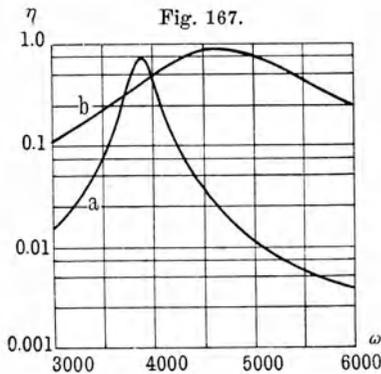
Es ergibt sich

$$L_2 = \frac{1}{2} \frac{M'^2 \mathfrak{E}^2 \cos^2 \gamma}{r}$$

Der Wirkungsgrad wird dann nach Gl. (214)

$$\eta = \frac{2 \rho \cos^2 \gamma}{2 \rho \cos \gamma \cos(2\beta + \gamma) + R} \dots \dots \dots (217)$$

Aus einer über den Frequenzbereich von etwa 3000 bis 6000 sich erstreckenden Aufnahme des Scheinwiderstandes eines Fernhörers ergibt sich



ein Kreis mit dem Durchmesser  $2 \rho = 678$  Ohm und  $2 \beta = 34,8^\circ$ . Ferner ist  $\omega_0 = 3840$ ,  $\omega_1 = 3760$ ,  $\omega_2 = 3940$ ,  $R = 218 + 0,0441 \omega$ . Der zu einem bestimmten  $\omega$  gehörende Wert von  $\gamma$  folgt aus Gl. (213).

Die Berechnung des Wirkungsgrades nach vorstehender Formel ergab die Schaulinie *a* (Fig. 167). Der Wirkungsgrad ist demnach für den größten Teil des Sprachbereichs sehr gering; es ist auffallend, daß er sich in dem sehr engen Resonanzbereich, das sehr

geringe Verluste in der Platte selbst vermuten läßt, bis zur Höhe 0,745 hebt.

Soweit man die Eigenschaften des Fernhörers, auf den sich Kennellys Mitteilungen beziehen, aus der von ihm angegebenen Kurve entnehmen kann, kommen folgende Werte in Frage:

$$R = 20 + 0,00133 \omega, \quad 2 \varrho = 242, \quad 2 \beta = 5,3''$$

$$\omega_0 = 4580, \quad \omega_1 = 4300, \quad \omega_2 = 4770.$$

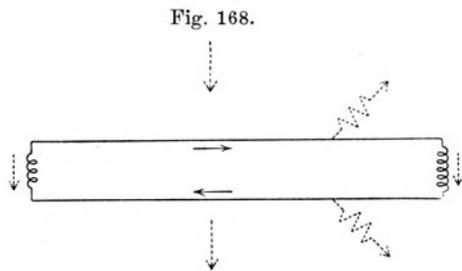
Die Werte des Wirkungsgrades für verschiedene Frequenzen werden durch die Kurve *b* in Fig. 167 angegeben. Der Wirkungsgrad erhebt sich bei  $\omega = 4700$  bis zu 0,920 und ist auch durchschnittlich sehr viel höher als bei dem zuerst erwähnten Telephon. Als günstige Momente erscheinen die geringere Zunahme des wirksamen Widerstandes und die Vergrößerung des Verhältnisses  $\varrho/R$ .

Bei vielen Untersuchungen haben sich, wie erwähnt, von der Kreisform erheblich abweichende Örter für die Veränderung der Bewegungskomponente des Scheinwiderstandes ergeben. Kennelly zeigt, daß man den Kreis z. B. durch Kopplung der Membran mit anderen Schwingungsgebilden künstlich verzerren kann. Eine von der Kreisform abweichende Gestalt kann also als Anzeichen einer für den Zweck des Telephons nutzlosen Energieabgabe angesehen werden, und man wird ein bestimmtes Muster unter sonst gleichen Umständen für um so besser halten, je mehr die vollendete Kreisform erreicht wird.

#### Sechster Abschnitt.

### Elektrische Störungen von Schwachstromleitungen durch Starkstromleitungen.

§ 198. Arten der Störungen. Wenn eine Wechselstromleitung für Kraftübertragung mit hoher Spannung einer Telegraphen- oder Fernsprechleitung eine längere Strecke parallel läuft, so wirkt sie sowohl durch die Änderungen des magnetischen als auch des elektrischen Feldes auf die Schwachstromleitung ein. Die Änderungen des magnetischen Feldes, das die Leitungen durchsetzt, rufen Ströme hervor, die die Leitung in geschlossenen Bahnen durchlaufen, also z. B. eine Doppelleitung als Hin- und Rückleitung dieser Ströme, eine Einzelleitung unter Rückschluß durch die Erde. Bei den Änderungen des elektrischen Feldes werden in den Leitungen auch Ströme erzeugt, aber diese dienen nur dem Ausgleich der verschiedenen Spannungen, die die einzelnen Leiter in elektrischen Felde annehmen. Sie finden ihren Schluß zum Teil durch die Feldlinien in dem die Leitungen umgebenden Raume, zum Teil über die Isolationsfehler der Leitungen. In Fig. 168 sind die durch die Änderungen des magnetischen Feldes erzeugten Ströme durch volle Pfeile, die anderen durch gestrichelte Pfeile angedeutet. Jene lassen sich mit Hilfe der Induktivitäten berechnen, diese aus den Kapazitäten.



Von praktischer Bedeutung sind nicht nur die Ströme, die in den an die Leitungen angeschlossenen Apparaten erzeugt werden, sondern auch die Spannungen, die die Leitungen annehmen, da sie in ungünstigen Fällen eine gefährliche Höhe erreichen können. Bei den Störungen aus magnetischen Ursachen ist diese Gefahr unter gewöhnlichen Verhältnissen ausgeschlossen.

**§ 199. Magnetische Induktion von Starkstromleitungen auf Schwachstromleitungen.** Die störenden Leitungen sind entweder einphasige Bahnleitungen mit Rückleitung durch die Schienen, also zum Teil durch die Erde, oder Mehrfachleitungen. Die gestörten Leitungen treten entweder als geerdete Einzellleitungen oder als isolierte Schleifen auf.

Solange störende und gestörte Leitungen rein metallisch sind, ohne daß Teile der Ströme durch die Erde gehen, läßt sich die Frage der magnetischen Induktion leicht durch die Berechnung des gesamten Flusses beantworten, den die störenden Leitungen durch die Schwachstromleitungen senden. Schwieriger und unsicher wird die Lösung, wenn es sich um Kraftanlagen mit Rückleitung durch die Erde handelt. Man kann dann nur Grenzfälle behandeln.

Störung durch geerdete Leitungen. Der ungünstigste Fall läge vor, wenn die Starkstromleitung an beiden Enden an Endplatten endigte, und der Strom nur in der Erde zurücklaufen könnte. Dann verzweigt er sich nach § 62 und 63 so weit, daß, wie in § 120 dargestellt ist, für die Berechnung des Kraftflusses nur der von der metallischen Leitung herrührende Anteil des Integrals um den geschlossenen Stromkreis in Betracht kommt. Dann ist die Gegeninduktivität zwischen der Kraftleitung und der Schwachstromleitung durch die Formel gegeben

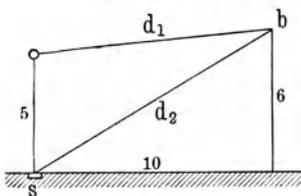
$$M_1 = 2l \left( \log \frac{2l}{d_1} - q \right) \cdot 10^{-4} H \dots \dots \dots (218)$$

wo  $l$  die Länge der nebeneinander verlaufenden Leitungsstücke,  $d_1$  ihr Abstand ist. Die Größe  $q$  hängt nach Versuchen von Brauns<sup>47)</sup> von der Länge  $l$  ab und ergibt sich aus folgender Tabelle:

$l$	1	2	5	10	15	20
$q$	0,80	0,56	0,35	0,26	0,20	0,17

Die Schwachstromleitung nimmt den magnetischen Fluß  $\Phi = M_1 J$  auf, wo  $J$  die Stromstärke der Kraftleitung ist, und die induzierte EMK wird  $-M_1 dJ/dt$ .

Fig. 169.



Bei  $l = 10$  km und einem Wechselstrom  $J$  Amp. von 50 Perioden wäre die induzierte EMK, wenn Leitung  $a$ , Fig. 169 (Abstände in  $m$ ), mit einer Erdrückleitung auf  $b$  induziert,  $4,60 J$  Volt.

Der angenommene Fall, daß die Rückleitung nur durch die Erde erfolgt, wird kaum vorkommen; in Wirklichkeit werden die Rückströme hauptsächlich durch die Schienen oder in deren Nähe liegende Rückleitungskabel verlaufen.

Die störende Anlage ist daher mehr wie eine Doppelleitung, statt wie eine Einzellleitung zu betrachten. Im günstigsten Falle, wenn alle Ströme

durch die Schienen  $s$  zurückfließen, erhalten wir für die Gegeninduktivität den Wert

$$M_2 = 2l \log \frac{d_2}{d_1},$$

worin  $d_2$  den Abstand der gestörten Leitung von der metallischen Rückleitung bedeutet. Ist die Höhe der Kraftleitung über der Erde 5 m, so erhalten wir unter den vorigen Bedingungen für 10 km Störungslänge eine EMK von 0,093  $J$  Volt, also nur  $\frac{1}{50}$  der vorher berechneten Wirkung.

Diese Annahme liegt ebenfalls von der Wirklichkeit beträchtlich ab. Tatsächlich wird der Strom weder allein durch die Erde, noch allein durch die Schienen gehen, sondern er wird sich auf beide Leiter verteilen. Nehmen wir an, daß in der Leitung der Strom  $J$ , in den Schienen der Strom  $pJ$  fließe so ist die Gegeninduktivität

$$M = 2l \left( p \log \frac{d_2}{d_1} + (1-p) (\log \frac{2l}{d_1} - q) \right) \dots \dots \dots (219)$$

Dies ergibt für die Anordnung nach Fig. 169 bei  $l = 10$  km die beiden Posten

$$M = (5,94p + 146,6(1-p)) 10^{-4} H.$$

Für  $p$  gibt Brauns bei einer doppelgleisigen, verhältnismäßig trocken gelegenen und mit Schienenverbindern ausgerüsteten Strecke den Wert 0,64 an; bei einer eingleisigen Bahn ohne Schienenverbinder auf dem feuchten Boden eines engen Flußtales den Wert 0,35. Für beide als Grenzwerte anzusehenden Werte von  $p$  überwiegt der zweite Posten als der Anteil desjenigen Stromteiles der Leitung, welcher seinen Rückschluß im Boden findet, den Anteil des in metallischer Bahn verlaufenden Stromteiles erheblich. Im ungünstigsten Falle würde man für Fig. 169 eine Induktivität von  $97,4 \cdot 10^{-4} H$ , und bei einem Wechselstrom von  $16\frac{2}{3}$  Per/s und 10 km Parallelverlauf eine induzierte Spannung von 1,0  $J$  Volt erhalten. Bei den vorkommenden Strömen in der Bahnleitung würden durch eine solche Spannung die Elektromagnete einer eindrähtigen Telegraphenleitung zum Vibrieren gebracht werden. In Fernspreitleitungen würde zwar die Grundperiode sich wenig bemerkbar machen, wohl aber die begleitenden, in den Transformatoren und Motoren entstehenden höheren Frequenzen.

Baut man die Leitung als Doppelleitung aus, so ergibt sich die Gegeninduktivität als die Differenz der Werte von  $M$  für die Wertepaare  $d_1$  und  $d'_1$ , sowie  $d_2$  und  $d'_2$  der Abstände der beiden Zweige von Stromleitung und Schiene. Nach der Ausscheidung sich aufhebender Posten findet man

$$M = 2l \left( \log \frac{d'_1}{d_1} - p \log \frac{d'_2}{d_2} \right) \dots \dots \dots (220)$$

Liegt z. B. die zweite Leitung in gleicher Höhe wie die erste, aber um 20 cm weiter ab, so ist

$$\begin{aligned} M &= l \left( \log \frac{105,04}{101} - p \log \frac{140,04}{136} \right) 10^{-4} H \\ &= (0,040 - p 0,0297) 10^{-4} H. \end{aligned}$$

Dieser Betrag würde im Falle vollkommener Rückleitung auf  $0,0103 \cdot 10^{-4} H$  zurückgehen. Die induzierte Spannung kann durch Kreuzen der Doppelleitung noch beliebig weit vermindert werden.

Es ist aber darauf hinzuweisen, daß dieser Ausgleich durch eine Verdopplung der Leitungen nur so lange in vollem Sinne wirksam ist, als die Leitungen an allen Stellen hoch isoliert sind. Wenn eine solche Doppelleitung irgendwo einen Erdschluß erhält, so nehmen die freien Strecken nach beiden Seiten induzierte Spannungen wie geerdete Einzelleitungen an. Tritt ein zweiter Erdschluß auf, etwa dadurch, daß jemand eine andere Stelle der Leitung berührt, so wird die volle, dem dazwischen liegenden Leitungsstück entsprechende Spannung wirksam. Dies trifft auch auf die Doppelleitungen zu, welche in der Erde liegen oder einen geerdeten leitenden Mantel haben, wogegen solche Leitungen der elektrischen Influenz nicht ausgesetzt sind.

### § 200. Störungen durch elektrische Influenz in Mehrfachleitersystemen.

Sie sind von erheblicherer Bedeutung als die magnetischen Störungen, weil die mit der größten Leistung störenden Anlagen in der Regel Hochspannungsanlagen sind, so daß die Wirkungen des elektrischen Feldes infolge der hohen Spannung stärker sind als die des magnetischen Feldes, die beide mit der Entfernung nur nach dem logarithmischen Gesetz abnehmen.

Über die Theorie der Influenzspannungen gibt es leicht zugängliche und ausführliche Darlegungen<sup>48)</sup>, welche sich auch über die Anwendung auf praktische Fälle näher auslassen, deren Einzelheiten, wie Bedeutung veränderlicher Abstände, influenzfreier Verlängerungen, Schirmwirkung von Bäumen, hier zu weit führen würden.

Wir beschränken uns darauf, die Grundzüge der Theorie für den allgemeinen Fall zu entwickeln und zur Erläuterung auf einige einfache Fälle anzuwenden.

Das zu betrachtende Mehrfachleitersystem bestehe aus  $n$  parallelen Leitungen von der Länge  $l$ , von denen wir zwei beliebige als die  $f$ te und die  $h$ te bezeichnen. Die Leitungen werden im allgemeinen in zwei getrennten Bündeln, den Starkstrom- und den Schwachstromleitungen verlaufen; wir wollen aber zunächst in dieser Hinsicht keinen Unterschied zwischen den Leitungen machen.

Wir setzen ferner voraus, daß die Leitungen, soweit ihre gegenseitige Beeinflussung in Frage kommt, nicht so lang seien, daß der Strom einer einzelnen Leitung an verschiedenen Stellen erhebliche Unterschiede in der Phase zeigt. Dazu ist erforderlich, daß die betrachteten Längen klein gegen die Wellenlängen seien, wie später näher erörtert werden wird. Da die Periodenzahl der Kraftströme nicht über 50 in der Sekunde liegt, ist ihre Wellenlänge größer als 6000 km, und dieser Zahl gegenüber ist die Länge der in Betracht kommenden Leitungen sehr klein. Unter dieser Annahme, daß die Ströme an allen Stellen der betrachteten Stücke gleiche Phase haben, kann man die Vorgänge wie solche zwischen Kondensatorflächen betrachten. Eine strenge Behandlung hätte noch zu berücksichtigen, daß die Spannung wegen des Spannungsabfalls in den Leitern nicht an allen Stellen dieselbe ist; indessen liegen die Unterschiede für die in Frage kommenden Stücke innerhalb weniger Prozente und können daher vernachlässigt werden.

Der  $h$ ten Leitung fließe von einer äußeren Quelle, dem Elektrizitätswerk, über die metallische Leitung der Strom  $\mathfrak{I}_h$  zu, sie erhalte eine Spannung  $\mathfrak{S}_h$

und auf die ganze in Betracht kommende Länge eine Ladung  $\varrho_h$ . Nach Gl. (79) können wir diese durch die Spannungen und die Maxwell'schen Kapazitätskoeffizienten in der Form darstellen:

$$\varrho_h = (c_{h1}\mathfrak{B}_1 + c_{h2}\mathfrak{B}_2 + \dots + c_{hn}\mathfrak{B}_n)l \cdot \dots \cdot \quad (221)$$

Die Frequenz des Wechselstromes sei  $\omega$ . Zwischen der  $h$ ten Leitung und Erde befinde sich ein Widerstand beliebiger Zusammensetzung (Isolationswiderstand, induktive Brücke), den wir durch das Reziproke seines Wertes, den Leitwert  $\mathfrak{G}_h$  angeben; ferner liege zwischen der  $h$ ten und der  $f$ ten Leitung ein Widerstand vom Leitwert  $\mathfrak{G}_{hf} = \mathfrak{G}_{fh}$ .

Jedem Leiter muß zur Erhaltung des Gleichgewichts so viel Strom vom Elektrizitätswerk her zugeführt werden, daß daraus der Zuwachs der Ladung in der Zeiteinheit vom Werte  $i\omega\varrho_h$  und die nach den anderen Leitungen und der Erde abfließenden Ströme bestritten werden können. Daher ist

$$\left. \begin{aligned} \mathfrak{I}'_h = i\omega l (c_{h1}\mathfrak{B}_1 + c_{h2}\mathfrak{B}_2 + \dots + c_{hn}\mathfrak{B}_n) + \mathfrak{G}_h\mathfrak{B}_h + \mathfrak{G}_{h1}(\mathfrak{B}_h - \mathfrak{B}_1) \\ + \dots + \mathfrak{G}_{h,h-1}(\mathfrak{B}_h - \mathfrak{B}_{h-1}) + \mathfrak{G}_{h,h+1}(\mathfrak{B}_h - \mathfrak{B}_{h+1}) + \dots \\ + \mathfrak{G}_{h,n}(\mathfrak{B}_h - \mathfrak{B}_n) \end{aligned} \right\} \quad (222)$$

Wenn die  $h$ te Leitung eine der Hochspannungsleitungen ist, gibt  $\mathfrak{I}'_h$  den ganzen ihr zufließenden Strom an; ist aber die  $h$ te Leitung eine der Schwachstromleitungen, so ist  $\mathfrak{I}'_h = 0$  zu setzen, weil einer solchen kein Strom auf metallischem Wege aus dem Werke zufließt.

Wir erhalten so  $n$  Gleichungen, in denen außer den Festwerten  $\mathfrak{G}$  und  $c_{fh}$  die  $n$  Spannungen der Leitungen und bei  $p$  Schwachstromleitungen die Stromstärken von  $n-p$  Starkstromleitungen vorkommen. Die  $p$  Gleichungen, welche sich auf die Schwachstromleitungen beziehen, genügen, wenn man die Spannungen der Starkstromleitungen als bekannt voraussetzt, um die  $p$  Spannungen der Schwachstromleitungen zu berechnen. Auch die zur Ladung der Schwachstromleitungen dienenden Ströme der Starkstromleitungen können dann berechnet werden, indessen liegt dafür kein besonderes Interesse vor.

Nachdem wir so die Bestimmtheit der Aufgabe für den allgemeinen Fall erwiesen haben, gehen wir zu einem Sonderfall über, indem wir von den  $n$  Leitungen nur eine, die  $n$ te als gestörte Leitung ansehen; die Leitungen 1 bis  $n-1$  gehören also zum Hochspannungssystem. In diesem Falle sind leitende Verbindungen zwischen der  $n$ ten Leitung und irgend einer anderen nicht vorhanden, dagegen kann die  $n$ te Leitung zur Erde eine Verbindung vom Leitwert  $\mathfrak{G}_n$  haben. Die Forderung, daß  $\mathfrak{I}'_n = 0$  sei, führt zu der Gleichung

$$0 = i\omega l(c_{n1}\mathfrak{B}_1 + c_{n2}\mathfrak{B}_2 + \dots + c_{n,n-1}\mathfrak{B}_{n-1}) + \mathfrak{B}_n(\mathfrak{G}_n + i\omega l c_{nn}) \cdot \dots \quad (223)$$

Der erste Posten ist von der Art der Belastung der  $n$ ten Leitung ganz unabhängig und hängt selbst von ihren Dimensionen, wie wir sehen werden, nur in mäßigem Grade ab. Im zweiten Posten bedeutet  $\mathfrak{B}_n\mathfrak{G}_n$  den von der  $n$ ten Leitung zur Erde fließenden Strom  $\mathfrak{I}_n$ . Wenn wir  $\mathfrak{G}_n$  im Vergleich zu  $\omega c_{nn}$  mehr und mehr wachsen lassen, so wird im Grenzfall, für  $|\mathfrak{G}_n| = \infty$ , der zweite Posten zum Kurzschlußstrom  $\mathfrak{I}_n^0$ . Wir erhalten also

$$\mathfrak{I}_n^0 = -i\omega l(c_{n1}\mathfrak{B}_1 + c_{n2}\mathfrak{B}_2 + \dots + c_{n,n-1}\mathfrak{B}_{n-1}) \cdot \dots \quad (224)$$

Diese Größe, welche man bei einem gegebenen Leitungssystem durch Messung bestimmen oder bei gegebenen Maßen und Betriebsverhältnissen berechnen kann, bildet also die Grundlage aller übrigen Feststellungen über die Vorgänge in der Schwachstromleitung, denn es ergibt sich

$$\mathfrak{B}_n = \frac{\mathfrak{Z}_n^0}{\mathfrak{G}_n + i\omega l c_{nn}}, \quad \mathfrak{Z}_n = \frac{\mathfrak{G}_n \mathfrak{Z}_n^0}{\mathfrak{G}_n + i\omega l c_{nn}} \dots \dots \dots (225)$$

Läßt man  $\mathfrak{G}_n$  immer kleiner werden, so daß es schließlich gegen  $\omega c_{nn}$  verschwindet, so erhalten wir die Leerlaufspannung

$$\mathfrak{B}_n^0 = \frac{\mathfrak{Z}_n^0}{i\omega l c_{nn}} = \frac{c_{n1}\mathfrak{B}_1 + c_{n2}\mathfrak{B}_2 + \dots + c_{n,n-1}\mathfrak{B}_{n-1}}{c_n} \dots (226)$$

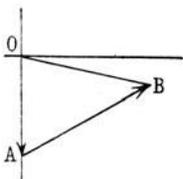
$\mathfrak{B}_n^0$  läßt sich mittels eines Elektrometers messen, dessen Kapazität nur hinreichend klein gegenüber  $c_{nn}$  zu sein braucht, das in der Größenordnung von 6000 cm (elektrostatisch) liegt. Die Größen  $c_{hk}$  gelten für die Einheit der Leitungslänge. Daraus folgt, daß der Kurzschlußstrom der Leitungslänge und der Frequenz proportional, dagegen die Leerlaufspannung von beiden Größen unabhängig ist.

Aus diesen Gleichungen ergibt sich noch die folgende

$$\frac{\mathfrak{B}_n}{\mathfrak{B}_n^0} + \frac{\mathfrak{Z}_n}{\mathfrak{Z}_n^0} = 1 \quad \text{oder} \quad \mathfrak{B}_n = \mathfrak{B}_n^0 - \mathfrak{Z}_n \frac{\mathfrak{B}_n^0}{\mathfrak{Z}_n^0} \dots \dots \dots (227)$$

Dies ist die Gleichung eines Leiters mit der eingepprägten EMK  $\mathfrak{B}_n^0$  und dem inneren Widerstand  $\frac{\mathfrak{B}_n^0}{\mathfrak{Z}_n^0} = \frac{1}{i\omega c_{nn}} = -iR_k$ . Wenn in Fig. 170

Fig. 170.



$OA = -iR_k$ ,  $OB = \frac{1}{\mathfrak{G}_n} = \mathfrak{B}_n$  ist, so stehen  $\mathfrak{B}_n$  und  $\mathfrak{B}_n^0$  im Verhältnis der Vektoren  $AB$  und  $OB$ .

Für induktionsfreie Werte  $R_n$  von  $\mathfrak{B}_n$  geht die Gl. (227) über in

$$\left(\frac{\mathfrak{B}_n}{\mathfrak{B}_n^0}\right)^2 + \left(\frac{\mathfrak{Z}_n}{\mathfrak{Z}_n^0}\right)^2 = 1.$$

**§ 201. Berechnung der Grundwerte für ein gegebenes Leitersystem.**

Es kommen dafür zuerst die Konstruktionseigenschaften, dann die Betriebs-eigenschaften in Frage. Wegen jener haben wir zunächst die Kapazitäts-größen  $c_{fh}$  der bisherigen Gleichungen durch die Maße der Anordnung auszudrücken. Wir gehen aus von den Gl. (75) in der Form

$$\begin{aligned} \frac{l}{2c^2} V_1 &= q_1 \log \frac{D_{11}}{a_1} + q_2 \log \frac{D_{12}}{a_{12}} + \dots + q_n \log \frac{D_{1n}}{a_{1n}} \\ \frac{l}{2c^2} V_2 &= q_1 \log \frac{D_{21}}{a_{21}} + q_2 \log \frac{D_{22}}{a_{22}} + \dots + q_n \log \frac{D_{2n}}{a_{2n}} \\ &\dots \dots \dots \\ \frac{l}{2c^2} V_n &= q_1 \log \frac{D_{n1}}{a_{n1}} + q_2 \log \frac{D_{n2}}{a_{n2}} + \dots + q_n \log \frac{D_{nn}}{a_{nn}} \end{aligned}$$

Man erhält aus diesem System von Gleichungen ein anderes, von dem eine Gleichung lautet:

$$y_h = \frac{l}{2c^2} \frac{V_1 \mathcal{A}_{1h} + V_2 \mathcal{A}_{2h} + \dots + V_n \mathcal{A}_{nh}}{\mathcal{A}} \dots \dots \dots (228)$$

Darin ist  $\mathcal{A}$  die Determinante

$$\mathcal{A} = \begin{vmatrix} \log D_{11}/\varrho_1, & \log D_{12}/a_{12}, & \dots & \log D_{1n}/a_{1n} \\ \log D_{21}/a_{21}, & \log D_{22}/a_{22}, & \dots & \log D_{2n}/a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \log D_{n1}/a_{n1}, & \log D_{n2}/a_{n2}, & \dots & \log D_{nn}/a_{nn} \end{vmatrix}$$

und  $\mathcal{A}_{fh}$  die Unterdeterminante, welche zu dem in der  $f$ ten wagerechten und  $h$ ten senkrechten Reihe stehenden Gliede von  $\mathcal{A}$  gehört. Durch den Vergleich der Gl. (221) und (228) ergibt sich

$$c_{fh} = \frac{l}{2c^2} \frac{\mathcal{A}_{fh}}{\mathcal{A}} \dots \dots \dots (229)$$

Zur Abschätzung etwa zu vernachlässigender Größen in den folgenden Entwicklungen ist darauf hinzuweisen, daß die Größen  $\log D_{fh}/a_{fh}$  in drei verschiedenen Größenordnungen auftreten. Die größten sind die mit zwei gleichen Indizes, und ihre Werte liegen nach der Drahtstärke zwischen 8 und 10. Dann kommen solche mit verschiedenen Indizes, aber solchen derselben Gruppe von Leitungen, also entweder der Indizes von zwei Leitungen des Starkstromsystems oder des Schwachstromsystems. Sie liegen für die Starkstromleitungen etwa zwischen 2,5 und 2,8, für Schwachstromleitungen zwischen 2,4 und 4,5. Die kleinsten sind diejenigen, bei welchen ein Index sich auf eine Schwachstromleitung, der andere auf eine Starkstromleitung bezieht. Wenn der Abstand der beiden Systeme 10 m und mehr beträgt, liegen diese Werte bei 0,6 und tiefer.

Mit der Feststellung der Kapazitätskoeffizienten sind für die Berechnung der Kurzschlußstromstärken und Leerlaufspannungen gemäß Gl. (224) und (226) diejenigen Angaben geliefert, welche sich aus der Konstruktion des Leitungssystems ergeben. Es bedarf ferner in den einzelnen Fällen noch der Angaben, die sich auf seinen Betrieb beziehen, nämlich der Spannungen der Starkstromleitung und der Belastung der Schwachstromleiter.

**§ 202. Eine störende und eine gestörte Leitung.** Maßgeblich ist die Determinante

$$\mathcal{A} = \begin{vmatrix} \log D_{11} \varrho_1, & \log D_{12} a_{12} \\ \log D_{12} a_{12}, & \log D_{22} \varrho_2 \end{vmatrix} = (\log D_{11} \varrho_1 \cdot \log D_{22} \varrho_2 - |\log D_{12} a_{12}|^2).$$

Daraus ergeben sich  $\mathcal{A}_{12} = -\log D_{12}/a_{12}$ ,  $\mathcal{A}_{22} = \log D_{22} \varrho_2$ .

Dadurch wird unter Berücksichtigung der nach § 201 zulässigen Vernachlässigungen

$$c_{12} = -\frac{l}{2c^2} \frac{\log D_{12}/a_{12}}{\log D_{11} \varrho_1 \cdot \log D_{22} \varrho_2}, \quad c_{22} = \frac{l}{2c^2} \frac{1}{\log D_{22} \varrho_2}.$$

Hat die störende Leitung die Spannung  $E e^{i\omega t}$ , so erhält man

$$\mathfrak{B}_2^0 = -\frac{i\omega l E}{2c^2} \frac{\log D_{12}/a_{12}}{\log D_{11} \varrho_1 \cdot \log D_{22} \varrho_2}, \quad \mathfrak{B}_2^0 = \frac{\log D_{12}/a_{12}}{\log D_{11} \varrho_1} E \dots \dots (230)$$

Es ist bemerkenswert, daß  $\mathfrak{B}_2^0$  vom Durchmesser des gestörten Leiters unabhängig ist.

Als Beispiel wählen wir eine für die verschiedenen Fälle möglichst gleiche Anordnung, bei welcher der wagerechte Abstand der beiden Leitungssysteme 10 m beträgt, die mittlere Höhe der Starkstromleitungen 8 m und die der Schwachstromleitungen 7 m (vgl. Fig. 171). Die nachstehende Tabelle enthält noch die Zahlen für eine zweite auf gleicher Höhe mit der ersten (2), aber 20 cm von ihr entfernten Schwachstromleitung (3). Die Starkstromleitung habe 8 mm, die Schwachstromleitung 2 mm Durchmesser. Es sind je zwei Zahlen angegeben; die erste ist  $D_{fh}/a_{fh}$ , die zweite der natürliche Logarithmus davon.

1	2	3	
$\frac{1600}{0,4}$ ; 8,30	$\frac{1803}{1005}$ ; 0,583	$\frac{1814}{1025}$ ; 0,571	1
	$\frac{1400}{0,1}$ ; 9,55	$\frac{1400}{2,0}$ ; 4,25	2
		$\frac{1400}{0,1}$ ; 9,55	3

Man erhält daraus für eine störende und eine gestörte Leitung

$$\mathfrak{I}_2^0 = -i\omega l E \cdot 0,000408 \cdot 10^{-6} \text{ A}; \quad \mathfrak{U}_2^0 = 0,0703 E \text{ Volt.}$$

Das Verhältnis  $\mathfrak{U}_2^0/\mathfrak{I}_2^0 = R_k$  erhält den Wert  $\frac{171,5}{\omega l} \cdot 10^6 \text{ Ohm}$ ; man würde bei  $\omega = 100$ , der Frequenz der Wechselströme bei Einphasenbahnen und  $l = 25 \text{ km}$  erhalten  $R_k = 68600 \text{ Ohm}$ . Ist die Leitung 2 durch einen induktionsfreien Widerstand  $R_2$  geerdet, so ist, solange der Widerstand dieses Weges unter 20000 Volt bleibt, der abfließende Strom nicht merklich von dem Kurzschlußstrom verschieden. Denn es ist

$$\mathfrak{I}_2 = \frac{\mathfrak{U}_2^0}{R_2 - iR_k}.$$

Berührt jemand die Leitung, so erhält er also ziemlich unabhängig davon, ob er schlecht oder mit einigen tausend Ohm isoliert ist, fast den vollen Strom.

**§ 203. Einwirkung einer Drehstromleitung auf eine Einzelleitung.** Es kommt bei diesem Beispiel hauptsächlich auf die Bedeutung verschiedener Betriebszustände der störenden Leitung auf den Leerlaufstrom an. Die Drehstromleitung mit den Zweigen 1, 2, 3 habe eine Sternspannung  $E$ . Der Kurzschlußstrom ist

$$\mathfrak{I}_4^0 = -i\omega l (c_{14}\mathfrak{U}_1 + c_{24}\mathfrak{U}_2 + c_{34}\mathfrak{U}_3).$$

Im normalen Zustande sind die Beträge von  $\mathfrak{U}_1, \mathfrak{U}_2, \mathfrak{U}_3$  gleich groß und wir setzen

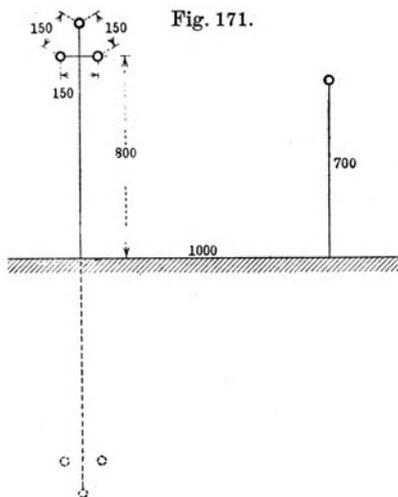
$$\mathfrak{U}_1 = E, \quad \mathfrak{U}_2 = E e^{i\frac{2\pi}{3}} = E \left( -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \right), \quad \mathfrak{U}_3 = E e^{+i\frac{4\pi}{3}} = E \left( -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} \right).$$

Wird der Zweig 1 an einer Stelle geerdet, so stellen sich die Spannungen ein auf die Werte

$$\mathfrak{B}_1 = 0, \quad \mathfrak{B}_2 = -E + Ee^{i\frac{2\pi}{3}}, \quad \mathfrak{B}_3 = -E + Ee^{i\frac{4\pi}{3}}.$$

Für diese beiden Fälle wird das nachstehend berechnete Beispiel durchgeführt.

Eine Drehstromleitung aus 8 mm starken Drähten, deren Zweige in den Ecken eines gleichseitigen Dreiecks von 150 cm Seitenlänge liegen (Fig. 171), derart, daß die unteren sich in der gleichen mittleren Höhe von 800 cm über dem Erdboden befinden, verläuft in einem Abstand von 10 m von einer Einzelleitung aus 2 mm starkem Draht, die im Mittel in einer Höhe von 700 cm über der Erde liegt.



Die zur Berechnung der Determinanten erforderlichen Zahlen sind wie in dem vorigen Beispiel nachstehend zusammengestellt.

1	2	3	4
$\frac{1600}{0,4}; 8,30$	$\frac{1607}{150}; 2,37$	$\frac{1732}{150}; 2,44$	$\frac{1845}{1075}; 0,541$
	$\frac{1600}{0,4}; 8,30$	$\frac{1732}{150}; 2,44$	$\frac{1762}{925}; 0,644$
		$\frac{1860}{0,4}; 8,45$	$\frac{1913}{1008}; 0,640$
			$\frac{1400}{0,1}; 9,55$

Daraus ergeben sich

$$\mathcal{A}_{14} = -16,35, \quad \mathcal{A}_{24} = -24,52, \quad \mathcal{A}_{34} = -22,30, \quad \mathcal{A}_{44} = 466, \quad \mathcal{A} = 4400,$$

also  $\frac{c_{14}}{\gamma} = -\frac{1}{2c^2} \frac{16,35}{4400}$  (cgs) =  $-0,000206 \mu F \cdot km$  und auf gleiche Weise

$$\frac{c_{24}}{\gamma} = -0,000310, \quad \frac{c_{34}}{\gamma} = -0,000295, \quad \frac{c_{44}}{\gamma} = 0,00589, \quad \text{alles } \mu F/km.$$

Bei Drehstrom von 50 Per/s oder  $\omega = 314$  erhält man also die Grundgleichung

$$\mathfrak{B}_4 (\mathfrak{G}_4 + i 1,85 \cdot 10^{-6} l) = i l (0,0648 \mathfrak{B}_1 + 0,0974 \mathfrak{B}_2 + 0,0925 \mathfrak{B}_3) 10^{-6},$$

wobei  $l$  in km zu nehmen ist.

Der Ausdruck auf der rechten Seite erhält bei normalem Betrieb den Wert  $-lE (0,0041 + i 0,0304) 10^{-6}$ , mit dem Betrage  $0,0307 lE 10^{-6}$ ; im Falle einseitiger Erdung ergeben sich die Werte  $lE (0,047 + i 0,286) 10^{-6}$  und  $0,286 lE 10^{-6}$ .

Die Leerlaufspannungen sind in diesen Fällen  $0,0164 E$  und  $0,1545 E$ . Eine Einzelleitung im Schwerpunkt des Dreiecks der Drehstromleitungen würde bei der Spannung  $E$  eine Leerlaufspannung von  $0,0667 E$  erzeugen. Die von der Drehstromleitung erzeugte Spannung wäre Null, wenn die drei Phasen durch Platzwechsel im Durchschnitt den gleichen Abstand von der gestörten Leitung hätten. Der noch ziemlich große Rest von  $0,0164 E$  oder etwa 25 Proz. zeigt die unausgeglichenen Kapazitäten zwischen der Drehstromanlage und der Schwachstromleitung an.

**§ 204. Influenz einer Doppelleitung durch eine einzelne Hochspannungsleitung.** Der Fall führt auf folgende Grundgleichungen, in denen der Index 1 sich auf die störende Leitung bezieht:

$$\begin{aligned} i\omega l(c_{12}\mathfrak{B}_1 + c_{22}\mathfrak{B}_2 + c_{23}\mathfrak{B}_3) + \mathfrak{G}_2\mathfrak{B}_2 + \mathfrak{G}_{23}(\mathfrak{B}_2 - \mathfrak{B}_3) &= 0, \\ i\omega l(c_{13}\mathfrak{B}_1 + c_{23}\mathfrak{B}_2 + c_{33}\mathfrak{B}_3) + \mathfrak{G}_3\mathfrak{B}_3 + \mathfrak{G}_{23}(\mathfrak{B}_3 - \mathfrak{B}_2) &= 0. \end{aligned}$$

Hier kommen also aus den Maßverhältnissen fünf Kapazitätswerte in Betracht, und drei Leitwerte sind für die Betriebsverhältnisse bestimmend.

Aus der Zahl der möglichen Betriebsfälle greifen wir folgende heraus.

1. Beide Leitungen sind gegeneinander und gegen Erde isoliert. Dann sind  $\mathfrak{G}_2 = 0$ ,  $\mathfrak{G}_3 = 0$ ,  $\mathfrak{G}_{23} = 0$  zu setzen. Man erhält eine Gleichung, in der nur die Kapazitäten neben den Spannungen vorkommen. Allgemein gesprochen sind daher die Influenzspannungen beider Leiter auch von der Kapazität  $c_{23}$  abhängig. Für das in § 202 angegebene Beispiel erhält man hier

$$\begin{aligned} (0,000\ 289\ \mathfrak{B}_1 + 0,007\ 30\ \mathfrak{B}_2 - 0,003\ 20\ \mathfrak{B}_3) 10^{-6} &= 0, \\ (0,000\ 273\ \mathfrak{B}_1 - 0,003\ 20\ \mathfrak{B}_2 + 0,007\ 25\ \mathfrak{B}_3) 10^{-6} &= 0. \end{aligned}$$

Daraus ergeben sich die Werte

$$\mathfrak{B}_2 = 0,0692\ \mathfrak{B}_1, \quad \mathfrak{B}_3 = 0,0678\ \mathfrak{B}_1.$$

Der Unterschied gegen die in § 202 berechnete Leerlaufspannung nur eines Drahtes, die den Wert  $0,0703 E$  hatte, ist nicht von praktischer Bedeutung, wenn man bedenkt, daß die tatsächlichen Spannungen wegen anderer vermindernder Ursachen immer etwas unter den berechneten liegen. Man rechnet daher in der Praxis statt mit den Kapazitätswerten  $c_{fh}$  mit den Größen  $\log D_{fh} a_{fh}$ , als wenn die Verteilung auf den gestörten Leitungen durch ihre gegenseitige Einwirkung nicht beeinflußt würde. Nach den in § 202 angegebenen Werten erhält man für den Quotienten  $\log D_{12} a_{12} : \log D_{11} a_{11}$  den Betrag  $0,0703$ , und für die andere Leitung  $0,0687$ . Die Differenz  $0,0016\ \mathfrak{B}_1$  stimmt mit derjenigen der durch die ausführliche Rechnung gewonnenen Differenz  $0,0014\ \mathfrak{B}_1$  für die praktischen Erfordernisse überein.

2. Leitung 3 wird geerdet, Leitung 2 gegen Erde isoliert, mit 3 durch  $\mathfrak{G}_{23} = \mathfrak{G}$  verbunden. Die erste der Gleichungen nimmt für diesen Fall die Form an:

$$i\omega l c_{12}\mathfrak{B}_1 + (i\omega l c_{22} + \mathfrak{G})\mathfrak{B}_2 = 0.$$

Es ist die Gleichung einer gestörten Leitung, indessen sind die Koeffizienten durch das Vorhandensein der zweiten Leitung geändert. Kurzschlußstrom und Leerlaufspannung werden

$$\mathfrak{I}_{23}^0 = -i\omega l c_{12}\mathfrak{B}_1 = -i\omega l 0,000\ 289\ \mathfrak{B}_1 \quad | \quad \mathfrak{B}_2^0 = \frac{c_{12}}{c_{22}}\mathfrak{B}_2 = 0,0394\ \mathfrak{B}_1.$$

$\mathfrak{Z}_{23}^0$  ist auf 0,71,  $\mathfrak{Z}_2^0$  auf 0,56 des Betrages gefallen, der in § 202 bei nur einer gestörten Leitung berechnet worden war.

Wir haben also in diesem Falle eine sehr merkliche Rückwirkung der zweiten gestörten Leitung auf die erste vor uns.

3. Beide Leitungen von Erde isoliert und durch  $\mathfrak{G}_{23} = \mathfrak{G}$  verbunden. Aus den Gleichungen

$$\begin{aligned} -i\omega l c_{12} \mathfrak{Y}_1 &= (i\omega l c_{22} + \mathfrak{G}) \mathfrak{Y}_2 + (i\omega l c_{23} - \mathfrak{G}) \mathfrak{Y}_3 \\ -i\omega l c_{13} \mathfrak{Y}_1 &= (i\omega l c_{23} - \mathfrak{G}) \mathfrak{Y}_2 + (i\omega l c_{33} + \mathfrak{G}) \mathfrak{Y}_3 \end{aligned}$$

erhält man, wenn  $\mathcal{A}_1$  die Determinante

$$\mathcal{A}_1 = -\omega^2 l^2 (c_{22} c_{33} - c_{23}^2) + i\omega l \mathfrak{G} (c_{22} + c_{33} + 2c_{23})$$

bezeichnet,

$$\mathcal{A}_1 \mathfrak{Y}_1^2 = -i\omega l c_{12} (i\omega l c_{33} + \mathfrak{G}) + i\omega l c_{13} (i\omega l c_{23} - \mathfrak{G}),$$

$$\mathcal{A}_1 \mathfrak{Y}_1^3 = -i\omega l c_{13} (i\omega l c_{22} + \mathfrak{G}) + i\omega l c_{12} (i\omega l c_{23} - \mathfrak{G}).$$

Daraus ergibt sich für  $\mathfrak{Y} = \mathfrak{Y}_2 - \mathfrak{Y}_3$  die Gleichung

$$\mathfrak{Y} = \frac{+\omega^2 l^2 (c_{12} (c_{33} + c_{23}) - c_{13} (c_{22} + c_{23}))}{-\omega^2 l^2 (c_{22} c_{33} - c_{23}^2) + i\omega l \mathfrak{G} (c_{22} + c_{33} + 2c_{23})}.$$

Für  $\mathfrak{G} = 0$  erhält man die Leerlaufspannung der Schleife 2, 3

$$\mathfrak{Y}_1^0 = -\frac{c_{12} (c_{33} + c_{23}) - c_{13} (c_{22} + c_{23})}{(c_{22} c_{33} - c_{23}^2)}.$$

$\mathfrak{G} \mathfrak{Y}$  ergibt den von 2 nach 3 fließenden Influenzstrom, er erhält für  $\mathfrak{G} = \infty$  den Wert

$$\mathfrak{Y}_1^0 = -i\omega l \frac{c_{12} (c_{33} + c_{23}) - c_{13} (c_{22} + c_{23})}{c_{22} + c_{33} + 2c_{23}}.$$

Man erhält hier wie bei einer gestörten Einzelleitung die Gleichung  $\mathfrak{Y} = \mathfrak{Y}^0 - \mathfrak{Y} \mathfrak{Y}^0 / \mathfrak{Z}_{23}^0$ . Für das vorliegende Beispiel erhält man  $\mathfrak{Y}^0 = 0,000702 \mathfrak{A}_1$ ,  $\mathfrak{Y}^0 / \mathfrak{Z}_{23}^0 = 191 \cdot 10^6 / i\omega l$  Ohm.

**§ 205. Ersatzleiter für Leitungsbündel.** Wenn ein Bündel mit mehreren Schwachstromleitungen Influenzwirkungen ausgesetzt ist, so kann man statt umständlicher Berechnungen für jede einzelne Leitung, bei denen es ohnehin nur auf eine mäßige Genauigkeit ankommt, eine Berechnung für einen Ersatzleiter anstellen. Es ist dies derjenige Leiter, welcher annähernd denselben Kurzschlußstrom aufnimmt, wie sämtliche Leiter des Bündels zusammenkommen. Die Leerlaufspannung des so berechneten Ersatzleiters ist mit genügender Genauigkeit gleich der mittleren Leerlaufspannung der einzelnen Leiter, nachdem es sich in § 204 gezeigt hat, daß Leitungen, die gleichzeitig leerlaufen, ihre Spannungen gegenseitig nicht wesentlich beeinflussen; übrigens hat schon § 202 ergeben, daß es auf den Durchmesser der influenzierten Leiter für die Leerlaufspannung nicht ankommt.

Nehmen wir in dem Bündel die Leitungen von 1 bis  $h$  an und geben der störenden die Ziffer  $n$ , so haben wir nach Gl. (75), wenn  $q$  eine Ladung

auf die Länge  $l$  bezeichnet und wir uns der Abkürzungen bedienen, daß  $d_{fn} = \log D_{fn}/a_{fn}$ ,

$$\begin{aligned} \frac{l}{2c^2} V_1 &= q_1 d_{11} + q_2 d_{12} + \dots + q_n d_{1h} + q_n d_{1n} \\ \frac{l}{2c^2} V_2 &= q_1 d_{21} + q_2 d_{22} + \dots + q_n d_{2h} + q_n d_{2n} \\ &\dots \dots \dots \\ \frac{l}{2c^2} V_h &= q_1 d_{h1} + q_2 d_{h2} + \dots + q_n d_{hh} + q_n d_{hn} \\ \frac{l}{2c^2} V_n &= q_1 d_{n1} + q_2 d_{n2} + \dots + q_n d_{nh} + q_n d_{nn}. \end{aligned}$$

Es sollen nun alle Leitungen des Bündels an Erde gelegt werden, also  $V_1 = 0, V_2 = 0 \dots V_h = 0$ . Es wird angenommen, daß alle Leitungen dann ungefähr gleiche Ladungen  $q$  haben und, bei zeitlichen Änderungen, gleiche Kurzschlußströme führen. Durch Zusammenfassen aller Gleichungen für das Bündel erhält man die Gleichung

$$0 = q(d_{11} + d_{22} + \dots + d_{hh} + 2(d_{12} + d_{13} + \dots + d_{h-1,h}) + q_n(d_{1n} + d_{2n} + \dots + d_{hn}) = 0.$$

Die letzte der Gleichungen wird

$$\frac{l}{2c^2} V_n = q(d_{n1} + d_{n2} + \dots + d_{nh}) + q_n d_{nn}.$$

Nach der Art des Vorgangs ist die Gesamtladung des Bündels  $qh$  klein gegen  $q_n$  und andererseits das Mittel der Größen  $d_{fn}$  klein gegen  $d_{nn}$ ; aus der letzten Gleichung folgt also, daß im wesentlichen

$$q_n = \frac{l}{2c^2} \frac{V_n}{d_{nn}}.$$

Gehen wir zu den Strömen über, so erhalten wir für den auf die einzelne Leitung des Bündels entfallenden Kurzschlußstrom  $\mathfrak{I}^0$  den Wert

$$\mathfrak{I}^0 = - \frac{i\omega l V_n}{2c^2 d_{nn}} \frac{d_{1n} + d_{2n} + \dots + d_{hn}}{d_{11} + d_{22} + d_{hh} + 2(d_{12} + d_{13} + \dots + d_{h-1,h})}$$

Man erhält eine Näherungsformel für den Kurzschlußstrom jedes der  $h$  Leiter eines Bündels, wenn man für die Abstände von der störenden Leitung und ihrem Spiegelbild mittlere Werte  $a_n$  und  $D_n$  einführt, ferner mit  $H$  den mittleren Abstand der Leiter des Bündels von der Erde, mit  $2Q$  die als durchweg gleich angenommene Drahtstärke der Schwachstromleitungen, mit  $2Q_n$  die der Starkstromleitung und mit  $a_{fg}$  den Abstand der Leiter  $f$  und  $g$  des Bündels voneinander bezeichnet, durch den Ansatz

$$\mathfrak{I}^0 = - \frac{i\omega l V_n}{2c^2 \log D_{nn}/Q_n} \frac{\log \left(\frac{D_n}{a_n}\right)^h}{\log \left\{ \left(\frac{2H}{Q}\right)^h \frac{(2H)^{h(h-1)}}{(II a_{fg})} \right\}}$$

$II a_{fg}$  ist das Produkt aller Abstände, in denen  $f$  und  $g$  alle Werte von 1 bis  $h$  annehmen, mit Ausnahme derjenigen, bei welchen  $f = g$  ist.

Es besteht also, da  $h - 1$  Werte von  $g$  auf jedes  $f$  entfallen, aus  $h$  Gruppen von je  $h - 1$  Faktoren. Kann man einen Leiter  $\nu$  als den mittleren bezeichnen, so ist angenähert  $\Pi a_{fg} = (a_{\nu 1} a_{\nu 2} \dots a_{\nu, \nu-1} a_{\nu, \nu+1} \dots a_{\nu h})^h$ , weil die Gruppen, welche  $\Pi$  zusammensetzen, dann untereinander gleich werden. Wenn man dann definiert

$$r = \sqrt[h]{\rho a_{\nu 1} a_{\nu 2} \dots a_{\nu, \nu-1} a_{\nu, \nu+1} \dots a_{\nu h} \dots} \quad (231)$$

so wird

$$\mathfrak{S}^0 = - \frac{i \omega l V_n}{2 c^2 \log D_{nn} / \rho_n} \frac{\log D_n / a_n}{\log 2 H r}.$$

Dann ist also  $r$  der Halbmesser des durch  $H, D_n, a_n$  bestimmten Ersatzleiters.

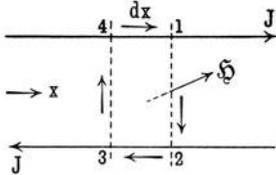
# Fortpflanzung elektrischer Wellen auf Leitungen.

## Erster Abschnitt.

### Allgemeine Grundlagen.

**§ 206. Die Telegraphengleichung.** Wir setzen zunächst eine homogene symmetrische Doppelleitung voraus. Sie habe für die Längeneinheit (1 km) den Leitungswiderstand  $R$ , die Selbstinduktivität  $L$ , die Ableitung  $G$  und die Kapazität  $K$ . Der Ort auf der Leitung sei durch den Abstand  $x$  des Aufpunktes von einem bestimmten Anfangspunkte bestimmt.

Fig. 172.



Auf ein zwischen den Längen  $x$  und  $x + dx$  enthaltenes Stück wird, wie in § 67, der Satz angewendet, daß das Linienintegral der elektrischen Kraft gleich der Abnahme des magnetischen Flusses in der Zeiteinheit ist.

Dies ergibt, wenn  $V$  die Spannung der Leitungen an der Stelle  $x$ , also von Punkt 4 gegen Punkt 3,  $V_1 = V + \frac{\partial V}{\partial x} dx$  ihre Spannung an der Stelle  $x + dx$  ist, also von Punkt 1 gegen Punkt 2, für einen Rechtsumlauf um den Vektor  $\oint$  des magnetischen Feldes

$$V + \frac{\partial V}{\partial x} dx + \frac{R}{2} dx J - V + \frac{R}{2} dx J = -L dx \frac{\partial J}{\partial t}$$

oder, anders geordnet,

$$-\frac{\partial V}{\partial x} = RJ + L \frac{\partial J}{\partial t} \dots \dots \dots (232)$$

Eine zweite Gleichung betrifft die Kontinuität des Stromes. Der Strom erfährt von  $x$  bis  $x + dx$  eine Änderung  $-\frac{\partial J}{\partial x} dx$ , welche herrührt von der der Spannung proportionalen Überleitung  $G dx V$  und der Änderung der Ladung  $\frac{\partial}{\partial t}(K dx V)$ , so daß also

$$-\frac{\partial J}{\partial x} = G V + K \frac{\partial V}{\partial t} \dots \dots \dots (233)$$

die Form der zweiten Gleichung ist.

In vielen Fällen, die für die Telegraphentechnik von Bedeutung sind, hat man keine Doppelleitung, sondern nur eine Leitung mit Erdrückleitung. Auf diesen Fall ist die gleiche Überlegung anzuwenden. Das formale Ergebnis ist dasselbe. Es kommt auch bei einer Doppelleitung, wie die Herleitung der Gl. (232) zeigt, nicht darauf an, ob der Widerstand in der Hin- und Rückleitung für dieselbe Länge gleich groß ist, wenn nur  $R$  den Gesamtwiderstand für 1 km bezeichnet. Für die Leitung mit Erdrückleitung bedeutet  $R$  nur den Widerstand der Einheitslänge der metallischen Leitung,  $L$  die Induktivität, für die Längeneinheit berechnet, des aus Leiter- und Rückleitungsströmen gebildeten Systems nach § 122,  $K$  die Kapazität des metallischen Leiters gegen Erde.

Man kann aus den beiden Gl. (232) und (233) eine Veränderliche ausscheiden und erhält eine für beide Größen, abgesehen von  $J$  oder  $V$  gleichlautende Differentialgleichung. Dieselbe Gleichung gilt für eine Hilfsgröße  $W$ , aus der man  $J$  und  $V$  gemeinsam durch die Beziehungen herleiten kann:

$$J = G W + K \frac{\partial W}{\partial t}, \quad V = - \frac{\partial W}{\partial x} \dots \dots \dots (234)$$

Die Gl. (233) wird beim Einsetzen dieser Werte ohne weiteres erfüllt; ihre Einführung in Gl. (232) führt zu der Gleichung

$$\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} = G R W + (K R + G L) \frac{\partial W}{\partial t} + K L \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} \dots \dots (235)$$

Man nennt diese Gleichung die Telegraphengleichung.

**§ 207. Bedeutung der Wellenausbreitung für die Zweige der Fernmeldetechnik.** Wie wir im einzelnen noch sehen werden, breitet sich eine Störung des elektrischen Zustandes, die an einer bestimmten Stelle einer Leitung eintritt, nach den benachbarten und den entfernteren Stellen in der Form einer mit endlicher Geschwindigkeit sich fortpflanzenden Welle aus. Die Widerstände der zu durchlaufenden Leiter verändern die Welle nach und nach sowohl hinsichtlich der von ihr getragenen Energie, die mehr und mehr verkleinert wird, als auch hinsichtlich ihres zeitlichen Verlaufs, indem, was anfangs an der Welle steil war, nach und nach abgeflacht wird.

Für die verschiedenen Zweige der Fernmeldetechnik ist das Interesse an diesen beiden Arten von Vorgängen verschieden. Soweit es sich um die Fernsprechtechnik im engeren Sinne oder die Aufnahme telegraphischer Zeichen mittels des Fernhörers handelt, hat die Veränderung des zeitlichen Verlaufs der Wellen, von extremen Fällen abgesehen, keine große Bedeutung, wenn sie nur mit einer genügenden Stärke ankommen. Man wird dies einer Fähigkeit des Gehörsinnes zuschreiben können, der auch aus Wortklängen, die der Zeitform nach erheblich verzerrt sind, in der Regel noch die richtige Vorstellung von der Bedeutung des Gesprochenen entnimmt. Dagegen hat die Technik der Telegraphie, die sich zur Aufnahme des Zeichens mechanischer Apparate bedienen muß, hauptsächlich Interesse für die Vorgänge der Formänderung der Zeichen.

Dementsprechend wird auch die Theorie der Vorgänge unter verschiedenen Gesichtspunkten darzustellen sein. Für die Bedeutung der Leitungen in der

Fernsprechtechnik ist es maßgebend, wie sie sich auf die Dauer gegen einen Zug von in regelmäßiger Folge wiederholten Anstößen verhalten, wenn also die Leitung sich auf diese Anstöße schon „eingeschwungen“ hat. Dagegen verfolgt die Technik der Telegraphie die Vorgänge, welche eine einzelne kurz dauernde Störung oder der Übergang aus einem konstanten Dauerzustande in einen anderen auch konstanten Dauerzustand hervorrufen, gerade während dieses kurzen Übergangszustandes. Neuerdings hat man bei sehr langen Fernsprechleitungen allerdings schon Erscheinungen beobachtet, welche auf die Bedeutung dieser Übergangszustände auch für das Fernsprechen hinweisen. Die Theorie jedes Zweiges der Technik gebraucht daher im allgemeinen besondere Rechnungsweisen.

Zunächst wollen wir mit geeigneten anderen Rechnungsweisen eine Reihe von Eigenschaften der elektrischen Wellen besprechen, die für beide Gebiete wichtig sind.

**§ 208. Die Energiebilanz einer Leitung.** Wenn man von den Gl. (232) und (233) die erste mit  $J dx$ , die zweite mit  $V dx$  multipliziert, und beide Gleichungen addiert, so ergibt sich:

$$\left. \begin{aligned} -\frac{\partial}{\partial x}(JV) dx &= R dx J^2 + G dx V^2 \\ + \frac{d}{dt}(\frac{1}{2} L J^2) dx &+ \frac{d}{dt}(\frac{1}{2} K V^2) dx \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (236)$$

Der Ausdruck auf der linken Seite bezeichnet die Abnahme der durch die Spannung  $V$  und den Strom  $J$  an der Stelle  $x$  gegebenen Leistung  $JV$  in dem Leitungsstück. Auf der rechten Seite sind die einzelnen Posten aufgeführt, in welche die verlorene Leistung übergegangen ist. Die beiden ersten Posten, die stets positiv sind, stellen die im Leiter und den Ableitern verbrauchte, also in Wärme umgesetzte und für die Übertragung verlorene Leistung dar. Das Vorzeichen jedes der beiden anderen Posten ist unbestimmt. Wir erkennen in  $\frac{1}{2} L dx J^2$  die magnetische, in  $\frac{1}{2} K dx V^2$  die elektrische Energie im Leitungsstück  $dx$ . Der Operator  $d/dt$  zeigt an, daß es sich um ihre Änderungen auf die Zeiteinheit berechnet, also um Leistungen handelt. Es kann die eine zugenommen haben, was eine Abnahme der anderen bis zur Herstellung des Gleichgewichts voraussetzt. Es ist danach anzunehmen, und wird später näher gezeigt werden, daß die Ausbreitung einer Welle auf einer Leitung von einer ständigen Umwandlung der jeweils vorhandenen Energie aus der magnetischen in die elektrische Form und umgekehrt begleitet ist, wobei in jedem Leitungsstück ein Teil der Energie verloren geht.

Eine Leitung, bei der beim Lauf der Welle bis zum Ende der noch unwandelbare Teil sich in der Hauptsache verflüchtigt hätte, wäre für eine technische Verwendung sehr minderwertig. Man wird dagegen eine solche Form der Leitung erstreben, bei der die verlorenen Energien möglichst gering sind, und der allerdings nicht erreichbare Grenzwert, daß keine Energie verloren geht, wird als die ideale Leitung bezeichnet. Dem nicht zu verwirklichenden Ziele, daß  $R$  und  $G$  Null sind, kommt der Fall nahe, daß  $R$  gegen die gleichdimensionierte Größe  $\sqrt{\frac{L}{K}}$  und  $G$  gegen  $\sqrt{\frac{K}{L}}$  klein sind.  $\sqrt{\frac{L}{K}}$  ent-

hält nur die Leitungseigenschaften, welche in den noch umwandelbaren Energiebeträgen vorkommen. Wir werden uns der idealen Leitung, die rechnerisch erheblich einfacher zu behandeln ist, später bedienen, um die Haupteigenschaften der Fortpflanzung der Wellen kennenzulernen, zunächst aber ableiten, mit welcher Geschwindigkeit sich die Wellen auf jeder beliebigen Leitung fortpflanzen.

**§ 209. Allgemeine Form der Telegraphengleichung.** Statt der Gl. (235), deren Koeffizienten die Grundeigenschaften der Leitung in bereits ziemlich umständlicher Zusammensetzung enthalten, lassen sich andere Formen herleiten, in welchen nur allgemeine Eigenschaften vorkommen. Wir führen zunächst eine neue Veränderliche ein, indem wir setzen:

$$W = w e^{-\frac{G}{K} t} \dots \dots \dots (237)$$

Dann erhalten wir die Form

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = (KR - GL) \frac{\partial w}{\partial t} + KL \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \dots \dots \dots (238)$$

Diese Gleichung entspricht im Aufbau einer etwas eingeschränkten Form der allgemeinen Telegraphengleichung, nämlich derjenigen für eine Leitung ohne Ableitung. Es wird für die Gl. (237) vorausgesetzt, daß  $KR - GL > 0$  ist, was fast immer zutrifft, anderenfalls ist eine andere Annahme notwendig <sup>49)</sup>.

Wir führen die Bezeichnungen ein:

$$\frac{1}{\sqrt{KL}} = v \dots \dots \dots (239)$$

$$\frac{1}{2} \left( R \sqrt{\frac{K}{L}} - G \sqrt{\frac{L}{K}} \right) = A \dots \dots \dots (240)$$

Dann lautet die Differentialgleichung:

$$v^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 2Av \frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \dots \dots \dots (241)$$

Man kann noch einen Schritt weiter gehen und andere Veränderliche einführen <sup>50)</sup> durch die Festsetzungen

$$\sigma = Ax, \quad T = Avt, \quad \Phi = A^2 w \dots \dots \dots (242)$$

Die Gleichung nimmt dann die Form an:

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \sigma^2} = 2 \frac{\partial \Phi}{\partial T} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial T^2} \dots \dots \dots (243)$$

Diese ist völlig von den Eigenschaften der Leitung losgelöst. Der darin liegende formale Vorteil wird beeinträchtigt durch den Umstand, daß zwar  $\sigma$  der Weglänge und  $T$  der Zeit proportional sind, aber unter solchen Dimensionsänderungen, daß sowohl  $\sigma$  als  $T$  reine Zahlen sind. Es ist aber wohl gerade für die Herleitung der Vorgänge der Fortpflanzung, die nach Weglänge und Zeit betrachtet werden müssen, vorteilhaft, diese beiden Elemente unverändert in den Gleichungen zu behalten; wir benutzen deshalb vorzugsweise die Form (241).

**§ 210. Fortpflanzungsgeschwindigkeit elektrischer Wellen auf Leitungen.** Wir folgen hier einem Beweis von H. Poincaré<sup>51)</sup>. Zu dem gleichen Ergebnis führte ein durch Vaschy mitgeteilter Beweis von Hugoniot<sup>52)</sup>, der aber weniger zwingend erscheint. Einer Leitung von unbegrenzter Länge werde an einer Stelle, die wir  $x = 0$  nennen, ein Anstoß gegeben. Er pflanzt sich nach beiden Seiten im Leiter fort. Wir beschäftigen uns hauptsächlich mit dem nach der Richtung  $+x$  gehenden Anteil.

Nach dem Lehrsatz von Fourier kann man eine Größe, die zu einer Zeit  $t = 0$  von einem Werte zu einem anderen springt, als eine Summe von Sinusschwingungen betrachten. Eine davon habe die Frequenz  $\omega$ . Der Gl. (241) genügt eine Funktion

$$w = A e^{i(\omega t + p x)},$$

wenn  $p$  die Gleichung erfüllt:

$$p^2 = \frac{\omega^2}{v^2} - 2 i \omega \frac{A}{v} \dots \dots \dots (244)$$

$p$  ist also komplex und wir wählen für die nach  $+x$  laufende Welle den Wert von  $p$ , dessen reeller Anteil negativ ist. Anderenfalls nähme  $w$  mit  $x$  unbegrenzt zu, während es in Wirklichkeit abnimmt. Die Konstante  $A$  ist auf einen Wert an der Stelle  $x = 0$  zur Zeit  $t = 0$  zurückzuführen. Die Amplitude der Spannung, welche nach den Gl. (234) und (237) den Wert hat

$$V = -e^{-\frac{G}{K}t} \frac{\partial w}{\partial x},$$

soll dort den Wert Eins gehabt haben. Wegen der Teilung der durch den Anstoß erzeugten Welle in zwei Teile ist dann

$$A = \frac{i}{2p}.$$

Alle möglichen Schwingungen bringen zusammen das Ergebnis

$$\int_{-\infty}^{+\infty} d\omega f(\omega) \frac{i e^{i(\omega t + p x)}}{2 p \sqrt{\frac{\omega^2}{v^2} - 2 i \omega \frac{A}{v}}},$$

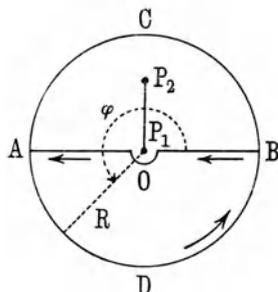
worin  $f(\omega)$  davon abhängt, welche zeitliche Form dem Anstoß an der Stelle  $x = 0$  gegeben wird. Unter den möglichen Formen wählen wir die einfachste, bei der  $i f(\omega)$  eine Konstante ist. Sie gilt, worauf wir hier nicht näher eingehen, für einen sehr kurzen Stoß.

Auf Grund des Satzes aus der Lehre über komplexe Funktionen, von dem schon mehrfach Gebrauch gemacht wurde, dehnen wir das Integral, das über alle reellen  $\omega$  von  $-\infty$  bis  $+\infty$  zu führen ist, über eine geschlossene komplexe Zahlenfolge aus. In der Zahlenebene sind zwei Unstetigkeitspunkte, nämlich  $\omega = 0$  und  $\omega = i 2 A v$ , welche in Fig. 173 durch  $P_1$  und  $P_2$  dargestellt werden. Nach dem allgemeinen Satze kann man jede Integrationsfolge, bildlich jeden Weg, beliebig abändern, solange er den Spalt zwischen  $P_1$  und  $P_2$  nicht eine ungerade Zahl von Malen überschreitet. Solche Wege sind  $A D B O A$  und  $A C B O A$ ; der erste umschließt

ein Gebiet, in dem keine Unstetigkeitspunkte vorkommen, der andere umschließt die Unstetigkeitspunkte. Lassen wir  $AB$  unendlich groß werden, so treten die Integrale über die genannten Wege an die Stelle der Integration von  $-\infty$  bis  $+\infty$ .

Das Integral über den Weg  $ADBOA$  ist für alle Fälle gleich Null, weil die zu integrierende Funktion für die innerhalb des von ihm umschlossenen Gebietes liegenden Werte von  $\omega$  endlich und stetig ist. Zeigt man, daß unter bestimmten Bedingungen auch der auf den Halbkreis entfallende Anteil Null ist, so folgt daraus, daß auch das Integral für alle reellen  $\omega$  von  $-\infty$  bis  $+\infty$  verschwindet.

Fig. 173.



Wenn wir in Gl. (244) für  $\omega$  sehr große Werte einsetzen, so wird beliebig nahe  $p = -\frac{\omega}{v}$ . Der Halbkreis habe den Halbmesser  $R$  und der zu einem bestimmten Punkte führende Strahl bilde mit  $OB$ , dem Ausgangsstrahl für die Winkelzählung, den Winkel  $\varphi$ . Dann ist  $\omega = R(\cos \varphi + i \sin \varphi)$ . Der Exponent im Zähler der zu integrierenden Funktion ist

$$i \omega \left( t - \frac{x}{v} \right) = -R \left( t - \frac{x}{v} \right) \sin \varphi + i R \left( t - \frac{x}{v} \right) \cos \varphi.$$

Bei der Integration über den Halbkreis läuft  $\varphi$  von  $\pi$  bis  $2\pi$ , also ist stets  $\sin \varphi < 0$ . Solange nun  $t - \frac{x}{v} < 0$ , ist auch der reelle Teil des Exponenten negativ, und für  $R = \infty$  wird die zu integrierende Funktion unendlich klein und das Integral Null.

Solange also  $t < \frac{x_1}{v}$  ist, bringt ein Anstoß an der Stelle  $x = 0$  keinerlei Wirkung an der Stelle  $x_1$  hervor. Hiermit ist etwas Negatives bewiesen, nämlich, daß bis zur Zeit  $t_1 = \frac{x_1}{v}$  an der Stelle  $x = x_1$  alles in Ruhe bleibt.

Der Beweis, daß mit  $t = \frac{x_1}{v}$  die Welle einsetzt, beruht auf der Betrachtung des Integrals über den Halbkreis  $BCA$ . Dort ist  $\sin \varphi > 0$ , also verschwindet der Anteil des Bogens für alle  $t > \frac{x}{v}$ . Da im übrigen der Integrationsweg  $AOB CA$  Unstetigkeitspunkte umschließt, ist das Integral nicht mehr Null, von  $t_1 = \frac{x_1}{v}$  ab findet also in  $x_1$  etwas statt. Wir gehen darauf zunächst nicht näher ein.

Der Beweis hat gezeigt, daß die an der Stelle  $x = 0$  zur Zeit  $t = 0$  ausgelöste Welle eine gleichförmige Bewegung von der Geschwindigkeit

$$v = \frac{1}{\sqrt{KL}} \dots \dots \dots (245)$$

hat. Auf Grund der Formeln (77) und (149) für die Kapazität und Induktivität von Leitungen ergibt sich, daß auf oberirdischen Leitungen eine solche elektrische Welle mit der Geschwindigkeit  $c$ , also der Lichtgeschwindigkeit fortschreitet. Auf gewöhnlichen Kabeln, die höhere Kapazität als geometrisch ähnliche Systeme in Luft haben, ist die Geschwindigkeit etwas kleiner, in Kabeln mit erhöhter Induktivität ist die durchschnittliche Geschwindigkeit erheblich kleiner als auf Freileitungen.

Der Beweis gilt für homogene Leitungen jeder Art. Von anderen Größen als  $K$  und  $L$ , insbesondere von den Widerständen ist die Geschwindigkeit unabhängig; sie ist auch unabhängig von der zeitlichen Form des Anstoßes. Denn wenn wir auch der Rechnung eine bestimmte Form des Anstoßes zugrunde gelegt haben, so beruht doch der Beweis auf der von der Form  $f(\omega)$  des Anstoßes ganz unabhängigen Tatsache, daß das Integral, welches die Wirkung des Anstoßes an einer entfernten Stelle darstellt, für alle Werte von  $t$  verschwindet, die kleiner als  $\frac{x}{v}$  sind.

§ 211. **Mechanische Modelle elektrischer Leitungen.** Es ist schon in § 156 bei Besprechung der Vorgänge in Schwingungskreisen erörtert worden, daß zwischen dem Ablauf elektromagnetischer und mechanischer zeitlich veränderlicher Vorgänge Ähnlichkeiten bestehen, welche die Schaffung mechanischer Modelle für Schwingungskreise ermöglichen. In elektrischen Leitungen treten, wie erörtert, bei der Fortpflanzung der Wellen ebenfalls andauernde Umsetzungen aus elektrischer in magnetische Energie und zurück auf, und daher lassen sich auch für elektrische Leitungen Modelle angeben. Es ist bekannt, daß Pupin zur Erläuterung seiner Erfindung der Belastung einer Leitung mit Induktivität in Form von Spulen ein Modell aus einem gespannten Draht benutzt hat, auf den eine Anzahl von kugelförmigen, belastenden Massen aufgereiht war. In der Folge sind einige Modelle<sup>53)</sup> konstruiert worden, welche die Leitung mechanisch in derselben Weise nachbilden, wie künstliche Leitungen sie elektrisch nachbilden, indem nämlich die elektrischen Eigenschaften für eine Strecke der Leitung zusammengefaßt werden. So die Kapazität eines Stückes von der Länge  $s$  in einem Kondensator von der Kapazität  $Ks$ , die Induktivität desselben Stückes in einer Spule von der Induktivität  $Ls$ . Diesen entsprechen beim Modell eine Feder von bestimmter Nachgiebigkeit und ein Körper von bestimmtem Trägheitsmoment.

Fig. 174<sup>1)</sup>.



Man kann diese Größen so wählen, daß bei der sich ergebenden Fortpflanzungsgeschwindigkeit der räumliche und zeitliche Ablauf der Wellen mit dem Auge bequem verfolgt werden kann. Nur unvollkommen lassen

<sup>1)</sup> Mit Erlaubnis des Verlages Julius Springer, Berlin, der „Elektrotechnischen Zeitschrift“ entnommen.

sich die Verluste nachbilden. Sie sind bei Anwendung einfacher Konstruktions-elemente an sich schon ziemlich groß, so daß die Wellen mehr als wünschenswert gedämpft werden, dabei sind sie von Zufälligkeiten der Lagerung u. dgl. abhängig. Eines der bekannt gewordenen Modelle verwendet Kugellagerung für die drehbaren Massen und Wirbelstrombremsen zur Erzeugung einstellbarer Verluste. Es ist dementsprechend erheblich teurer und wohl auch empfindlicher als die einfacheren Ausführungen. Man kann mit solchen Modellen die Vorgänge der Ausbreitung der Wellen, der Reflexionen, auch die Gesetze der belasteten (Pupin-) Leitungen sehr anschaulich darstellen. Fig. 174 gibt ein Bild eines solchen Modells wieder und stellt gleichzeitig dar, wie ein das Modell von rechts nach links durchlaufendes Zeichen (— · — · —) in einem bestimmten Augenblick aussah.

## Zweiter Abschnitt.

### Wellenverlauf auf einer idealen Leitung.

§ 212. Die ideale Leitung. Nachdem gezeigt worden ist, daß die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Wellen nur von  $L$  und  $K$ , nicht von den Widerständen abhängt, kann man die Ausbreitung der Wellen in erster Annäherung, also unter Verzicht auf die Betrachtung der Formänderungen an der schon erwähnten idealen Leitung studieren, für welche  $R = 0$  und  $G = 0$  gesetzt werden. Die Grundgleichungen werden in der Form

$$-\frac{\partial V}{\partial x} = L \frac{\partial J}{\partial t} \quad \text{und} \quad -\frac{\partial J}{\partial x} = K \frac{\partial V}{\partial t}, \quad \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 V}{\partial t^2}$$

erfüllt, wenn man  $V = ZJ$  setzt, wo  $Z$  eine von dem Orte und der Zeit unabhängige Konstante bezeichnet, deren Wert sich aus beiden Grundgleichungen ergibt zu

$$Z = \sqrt{\frac{L}{K}} \dots \dots \dots (246)$$

Als das Verhältnis einer Spannung zu einer Stromstärke hat  $Z$  die Dimensionen eines Widerstandes und ist daher in Ohm angebar. Da wir Energieverluste in der Leitung ausdrücklich ausgeschlossen haben, kann  $ZJ^2$  keine verlorene Leistung bedeuten, es ist vielmehr die an der Stelle, wo  $V$  und  $J$  bestimmt werden, nach der Seite der Fortpflanzung abgegebene, also nützliche Leistung.

Die für eine Leitung kennzeichnende Größe  $Z = \sqrt{\frac{L}{K}}$  wurde deshalb zuerst Charakteristik der Leitung genannt, man nennt sie heute zutreffend den Wellenwiderstand.

Bringt man eine Leitung, in der bis dahin Strom und Spannung ruhten, an der Stelle  $x = 0$  plötzlich dauernd auf die Spannung  $E$ , so entsteht also ein dauernder Strom  $J_a = \frac{E}{Z}$ , der nach beiden Seiten abfließt; dies setzt natürlich eine am Punkte  $x = 0$  der Leitung parallel geschaltete leistungs-

fähige Stromquelle voraus, welche die Spannung auf dem Werte  $E$  hält. In eine unbegrenzt lange ideale Leitung würde dauernd der Strom  $J_a$  eintreten.

Wir können schon jetzt, unter Vorbehalt des Beweises bei der Theorie der wirklichen Leitung, aussagen, daß auch in eine wirkliche Leitung unter der Spannung  $E$  zunächst ein Strom  $E/Z$  eintritt, weil sich die Verluste erst mit der Zeit und mit dem Lauf der Welle geltend machen.

Den örtlichen und zeitlichen Verlauf der Welle erkennen wir aus den Gleichungen

$$\begin{aligned} -\frac{\partial V}{\partial x} &= \sqrt{KL} \frac{\partial V}{\partial t} = \frac{1}{v} \frac{\partial V}{\partial t} \\ -\frac{\partial J}{\partial x} &= \sqrt{KL} \frac{\partial J}{\partial t} = \frac{1}{v} \frac{\partial J}{\partial t}. \end{aligned}$$

Die Größe  $v = \frac{1}{\sqrt{KL}}$  ist die Fortpflanzungsgeschwindigkeit, die, wie gezeigt, auf der wirklichen und der idealen Leitung gleich ist.

Diese Gleichungen werden erfüllt durch jede beliebige Funktion der Größe  $u = \left(t + \frac{x}{v}\right)$ . Setzt man

$$J = f\left(t - \frac{x}{v}\right). \dots \dots \dots (247 a)$$

so ist

$$-\frac{\partial J}{\partial x} = -\frac{dJ}{du} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{v} \frac{dJ}{du} \quad \text{und} \quad \frac{1}{v} \frac{\partial J}{\partial t} = \frac{1}{v} \frac{dJ}{du} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{v} \frac{dJ}{du}.$$

Die Gleichung

$$-\frac{\partial J}{\partial x} = \frac{1}{v} \frac{\partial J}{\partial t}$$

wird also durch diesen Ansatz erfüllt. Dasselbe gilt für

$$J = f\left(t + \frac{x}{v}\right). \dots \dots \dots (247 b)$$

Eine Funktion  $f\left(t - \frac{x}{v}\right)$  stellt eine in der Richtung der wachsenden  $x$  fortschreitende Stromwelle dar. Fassen wir zwei Punkte  $x_1$  und  $x_2$  ins Auge, so hat für beide die Welle denselben Augenblickswert, wenn

$$t_2 - \frac{x_2}{v} = t_1 - \frac{x_1}{v}, \quad \text{also} \quad t_2 - t_1 = \frac{x_2 - x_1}{v}.$$

An der Stelle  $x_2$  tritt also jeder Zustand der Welle um die Laufzeit  $(x_2 - x_1)/v$  später ein als in  $x_1$ . Entsprechend ist  $f\left(t + \frac{x}{v}\right)$  eine in der entgegengesetzten Richtung laufende Welle. Eine solche läuft von  $t = 0$  an in den links von  $x = 0$  gelegenen Teilen der Leitung, die wir aber nicht näher betrachten wollen; in den rechts gelegenen kann sie nur durch zurückgeworfene Wellen in einem späteren Verlauf des Vorgangs vorkommen. In den Teilen mit positivem  $x$  bleibt gemäß § 209, nachdem die Welle an der Stelle  $x = 0$  im Augenblick  $t = 0$  ausgelöst worden ist, an der Stelle  $x = x_1$  zunächst alles ruhig; nach der

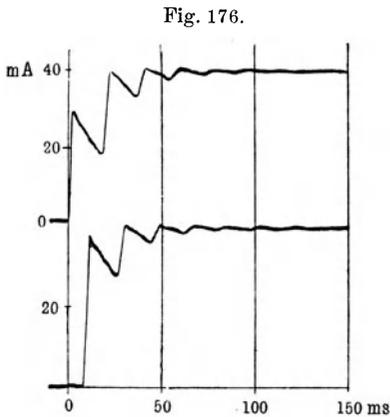
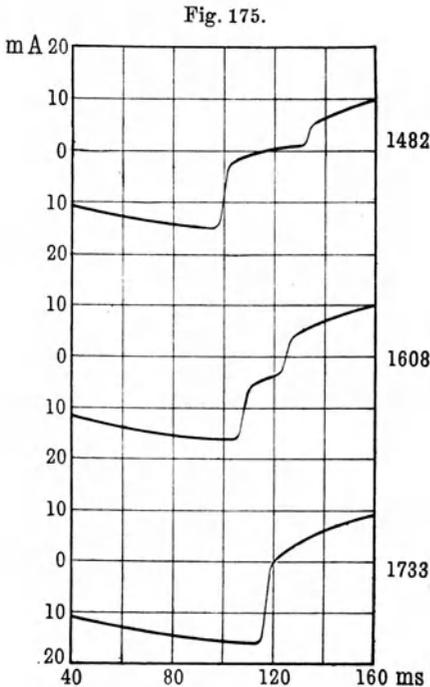
Laufzeit  $t_1 = x_1/v$  setzt die Welle ein, und zwar auf der idealen Leitung so, wie sie von  $x = 0$  ausgegangen ist. Auf der idealen Leitung tritt die Welle zur Zeit  $t = \frac{x}{v}$  der Form nach unverändert auf, also mit einem Sprung von dem Werte Null auf den Wert  $E/Z$ , den sie dann dauernd beibehält. Man kann sich das so vorstellen, als wenn von  $x = 0$  ab ein Stromband mit der Geschwindigkeit  $v$  vorangeschoben würde, das bei  $x = 0$  aus der Stromquelle dauernd nachgeliefert wird. Wenn an der Stelle  $l$  der Leitung der Wellenwiderstand sich ändert, muß sich dies Band stauen, die Welle wird zu einem bestimmten Teile zurückgeworfen.

**§ 213. Gesetze der Reflexionen.** Die Gesetze der Reflexionen leiten sich aus den beiden Beziehungen ab, daß diesseits und jenseits einer Stoßstelle die Spannung und die Stromstärken je dieselben Werte haben müssen. Die nachfolgenden Feststellungen gelten, soweit sie sich auf den Vorgang im Augenblick der Reflexion beziehen, auch für Leitungen mit Energieverlusten. Haben wir auf einer begrenzten Leitung zwei Wellen, die erste mit der Spannung  $f$  und dem Strome  $\frac{f}{Z}$ , die andere mit der Spannung  $g$  und dem Strome  $-\frac{g}{Z}$ , weil er dem ersten Strom entgegengesetzt läuft, so ist die Gesamtspannung der Leitung  $V = f + g$ , der Gesamtstrom  $J = \frac{f - g}{Z}$ .

Reflexion bei einem Kurzschluß. Verfolgen wir eine zur Zeit  $t = 0$  von der Stelle  $x = 0$  ausgehende Welle auf einer idealen Leitung, die bei  $x = l$  kurzgeschlossen oder geerdet sei. Die Spannung läuft als eine Welle von der Höhe  $E$  in die Leitung, es ist also  $f = E$ . Am Ende muß  $V$  den Wert Null annehmen, was erfordert, daß in dem Augenblick, wo die einlaufende Welle die Stelle  $x = l$  erreicht, eine zurückgeworfene Welle  $g = -E$  entsteht, die sofort mit der Geschwindigkeit  $v$  nach dem Anfang zu laufen beginnt. Die Stromstärke war in dem ersten Teil des Vorgangs, wenn die Welle eine Stelle  $x$  erreicht hatte, gleich  $E/Z$ , im zweiten Teile wird sie an der Stelle  $x$ , wenn nach dem Augenblick der Reflexion die Zeit  $(l - x)/v$  abgelaufen ist, gleich  $(f - g)/Z$  oder  $2E/Z$ . Die Stromstärke verdoppelt sich also durch die Zurückwerfung am Kurzschluß.

Dem zeitlichen Verlauf nach werden diese Vorgänge durch die Fig. 175 dargestellt, deren Schaulinien nach Oszillogrammen gezeichnet sind, welche an einer 1733 km langen, am Ende geerdeten pupinisierten Leitung aus 3 mm starken Adern des Rheinlandkabels Berlin—Hannover aufgenommen wurden. Sie zeigen die Stromwelle bei 1482, 1608 und 1733 km. Man sieht auf den beiden oberen Linien einen zweimaligen Ansprung, auf der unteren nur einen. Der erste Ansprung zeigt das Eintreffen der vom Anfang kommenden Welle an der Zwischenstelle an, während der zweite durch die vom Ende zurücklaufende Welle hervorgerufen wird. Demgemäß liegen die beiden Sprünge bei 1482 km weiter auseinander, als bei 1608 km. Am Ende setzt der zweite Sprung sozusagen unmittelbar an den ersten an. Man sieht dies auch an der Höhe der Sprünge. Da die Leitung nicht verlustfrei ist, nimmt die Höhe des Ansprungs ab. Demgemäß ist der erste Ansprung bei 1608 km kleiner

als bei 1482 km, umgekehrt die Höhe des zweiten Ansprungs bei 1608 km größer als bei 1482 km; der Ansprung bei 1733 km übertrifft an Höhe den bei 1608 km, was die Vergrößerung, in diesem Falle Verdopplung der Sprunghöhe bei der Reflexion am kurzgeschlossenen Ende erweist. Wir werden in § 215 auf die Höhen der Sprünge in der Abhängigkeit von der Dämpfung noch zurückkommen. Die Zeitpunkte des Vorübergehens der Welle an den bestimmten Stellen ergeben mit guter Übereinstimmung eine Laufgeschwindigkeit der Wellen von 15 100 km/s.



Wie wir später genauer sehen werden, wird auf wirklichen Leitungen durch die energieverzehrenden, „dämpfen“ Eigenschaften der Leitung die auf der idealen Leitung für einen bestimmten Ort mit der Zeit gleichbleibende Welle in eine mit der Zeit schwindende übergeführt, die man für kurze Längen in erster Annäherung durch eine Exponentialfunktion darstellen kann. Am Leitungsanfang hat man daher bei der Einschaltung „Ladespitzen“, die schnell absinken. Die obere Linie bezeichnet den Verlauf eines Einschaltvorgangs mit mehreren Reflexionen am Anfang der Leitung; die einzelnen Spitzen liegen zur Zeit  $t = 0$ ,  $t = 2\tau$ ,  $t = 4\tau$ , wenn  $\tau$  die Laufzeit für die ganze Länge ist; die untere Linie dagegen stellt den Strom am Ende dieser Leitung dar; die einzelnen Spitzen liegen in  $t = \tau$ ,  $t = 3\tau$ ,  $t = 5\tau$  usw. Für die Verdopplung des Stromes am Ende infolge der Reflexion spricht hier der Umstand, daß bei gleicher Empfindlichkeit der Oszillographenschleifen der erste Ansprung am Ende

der Leitung größer als der erste Ansprung des in die Leitung am Anfang eintretenden Stromes ist.

Reflexion an einer Unterbrechung. Wenn die Leitung am fernen Ende isoliert ist, so muß dort  $J = 0$  sein. Der Strom läuft auch hier mit dem Werte  $E/Z$  ein, so daß  $f = E$  ist. Nach der Reflexion muß  $f - g = 0$  sein, also auch  $g = E$ . Denkt man sich das Fortschreiten der einlaufenden Welle dadurch gezeichnet, daß man an jeder Stelle, sobald die Welle sie erreicht, einen senkrechten Strich macht, der mit denen an den schon durchlaufenen Stellen ein Band neben der Linie bildet (Fig. 177), so hat man nach der Reflexion einen Strich nach dem anderen auszulöschen. Wenn die reflektierte Welle den Anfang der Leitung erreicht, ist die Leitung einen Augenblick lang ohne Strom. Dort sei die Leitung über die Stromquelle, die praktisch widerstandslos ist, geschlossen. Der reflektierte Strom wird dort mit doppelter Stärke als  $-2E/Z$  zurückgeworfen, und da die Stromquelle gleichzeitig wieder  $+E/Z$  sendet, so läuft jetzt ein Strom  $-E/Z$  nach dem Ende hin und erfährt dieselben Änderungen, wie im ersten und zweiten Abschnitt der Strom  $+E/Z$ . Die einmalige Einschaltung eines Stromes auf eine ideale Leitung mit vollkommener Isolierung an dem einen Ende und widerstandsloser Stromquelle am anderen würde also zu einem unbegrenzt dauernden periodischen Vorgang führen, bei dem bald positive, bald negative Ströme hin und her gingen. Bei wirklichen Leitungen bleibt nur die Aufeinanderfolge der einzelnen Teile des Vorgangs gewahrt, jeder reflektierte Strom ist aber schwächer als sein Vorgänger. Infolgedessen treten zwar auch abwechselnd positive und negative Ströme auf, aber ihre Höhe nimmt dauernd ab.

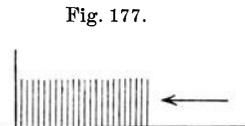


Fig. 177.

Reflexion an einem Widerstand. Wenn die Welle das Ende der Leitung erreicht hat, wo diese an einen Widerstand  $R_e$  angeschlossen ist, so tritt die Welle in diesen über, und die Spannungs- und Stromverhältnisse bestimmen sich daraus, daß diesseits wie jenseits des Endes der Leitung beide Größen bezüglich gleiche Werte haben. Ist  $f$  die einfallende Spannungswelle,  $g$  die zurückgeworfene, so ist also im Augenblick nach dem Eintreffen

$V = f + g, J = \frac{f - g}{Z}$ . Da aber der Widerstand  $R_e$  unter der Spannung  $f + g$  sofort die Stromstärke  $(f + g)/R_e$  aufnimmt, so muß

$$\frac{f + g}{R_e} = \frac{f - g}{Z}$$

sein. Daraus folgt für  $g/f = p$

$$p = \frac{R_e - Z}{R_e + Z} \dots \dots \dots (248)$$

Mit dem so bestimmten Wert von  $g$  wird der Strom im Augenblick, wo er das Ende der Leitung erreicht hat,

$$J = \frac{2f}{R_e + Z}$$

und die zugehörige Spannung

$$V = \frac{2fR_e}{R_e + Z}$$

Die Größe  $p$  nennt man den Reflexionsfaktor.

Wenn  $R_e = Z$  gemacht wird, so wird  $p = 0$  und  $g = 0$ , es gibt also keine reflektierte Welle, sondern der Widerstand  $R_e$  nimmt die Welle vollständig auf. Dies zeigt die Fig. 178 nach Oszillogrammen, die an derselben Leitung, das eine Mal bei kurzem Schluß, das andere Mal mit einem dem Wellenwiderstand gleichen Endwiderstand aufgenommen wurden.

Fig. 178.



Wenn man bei Gegensprechschaltungen am gebenden Ende außer in die wirkliche Leitung auch Strom in eine künstliche Nachbildung sendet, so daß die Ströme im Differentialrelais unwirksam bleiben sollen, und wenn die künstliche Leitung nur eine angenäherte Nachbildung der wirklichen Leitung ist, so können Reflexionen in dieser nicht in jener nachgebildet werden, sie werden also das Differentialrelais stören. Diese Wirkung kann man durch geeignete Bemessung des Widerstandes auf der Empfangsseite aufheben.

Reflexion an den Stoßstellen zweier Leitungen. Tritt aus einer Leitung, deren Wellenwiderstand  $Z_1$  ist, eine Welle in eine andere Leitung mit dem Wellenwiderstand  $Z_2$  über, so nimmt die zweite Leitung bei der Spannung  $V = f + g$  einen Strom  $(f + g)/Z_2$  auf. Daher muß sein

$$\frac{f - g}{Z_1} = \frac{f + g}{Z_2}$$

Daraus folgt für den Reflexionsfaktor  $g/f = p$  der Wert

$$p = \frac{Z_2 - Z_1}{Z_2 + Z_1} \dots \dots \dots (249)$$

Die Leistung der einlaufenden Welle ist  $\frac{f^2}{Z_1}$ , die der zurückgeworfenen  $\frac{g^2}{Z_1}$  und die der weitergehenden  $\frac{(f + g)^2}{Z_2}$ . Als den Wirkungsgrad  $\eta$  der Leitungsverbindung kann man bezeichnen das Verhältnis

$$\eta = \left(\frac{f + g}{f}\right)^2 \frac{Z_1}{Z_2},$$

und dieses hat den Wert

$$\eta = \frac{4 Z_1 Z_2}{(Z_1 + Z_2)^2} \dots \dots \dots (250)$$

Ist  $Z_1 = a Z_2$  oder  $Z_2 = a Z_1$ , so wird

$$\eta = \frac{4 a}{(1 + a)^2}$$

Wie Fig. 179 zeigt, ist  $\eta$  auch bei starker Abweichung von  $a$  gegen 1, in Hundertsteln gerechnet, ziemlich hoch. Man wird bei der üblichen Anwendung eines Transformators darauf Rücksicht zu nehmen haben, daß sein Wirkungsgrad unter den gegebenen Belastungen wenigstens nicht kleiner ist, als der Wirkungsgrad der einfachen Zusammenschaltung.

Bei der Reflexion an einer Spule mit dem Widerstand  $R_e$  und der Induktivität  $L$  wird wie bei den bisherigen Beispielen die Stromstärke gleich  $\frac{f-g}{Z}$  und die Spannung an der Spule  $f+g$ . Daher gilt im Augenblick der Reflexion die Gleichung

$$f+g = \frac{R_e}{Z}(f-g) + \frac{L_e}{Z} \frac{d}{dt}(f-g).$$

Auf der idealen Leitung ist  $f = E$  und daher gilt

$$-E(Z - R_e) = gR_e + L_e \frac{dg}{dt}.$$

Es folgt daraus

$$g = -E \frac{Z - R_e}{R_e} \left( 1 - e^{-\frac{R_e}{L_e} t} \right)$$

$$J = \frac{f-g}{Z} = \frac{E}{R_e} \left( 1 - e^{-\frac{R_e}{L_e} t} \right).$$

An der Stelle  $l$  trifft der Strom zur Zeit  $\frac{l}{v}$  mit der Stärke  $E/Z$  ein, fällt aber sofort auf Null und steigt langsam bis auf den Wert  $\frac{E}{R_e}$  an. An einer vor  $l$  liegenden Stelle  $x$  findet folgendes statt. Von  $t = 0$  bis  $t = \frac{x}{v}$  ist der Strom Null, er springt dann auf  $E/Z$  (Fig. 180) und hält diesen Wert während einer Zeit  $\frac{2(l-x)}{v}$ . Dann kommt die Wirkung der Reflexion an der Stelle  $x$  an, der Strom fällt auf Null und steigt dann bis auf den Wert  $\frac{E}{R_e}$ , solange dieser Vorgang nicht durch andere Reflexionen verändert wird.

Am Anfang einer wirklichen Leitung wird das Rechteck, das zeitlich an den Anfang rückt, zu einer Ladespitze mit abfallender Linie wie in Fig. 176,

Fig. 179.

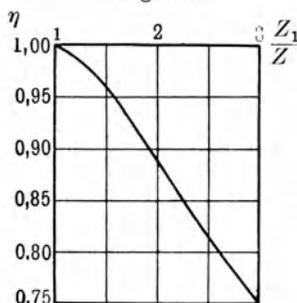
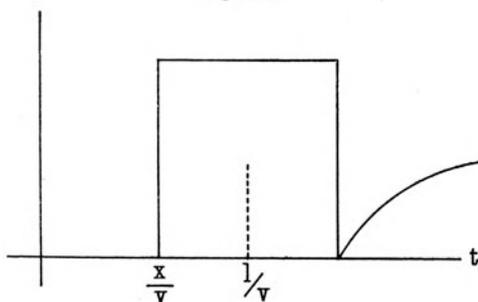


Fig. 180.



und da die reflektierte Welle beim Lauf über die Leitung selbst wieder gedämpft wird, vermag sie die Stromstärke nicht auf den Wert Null zu bringen.

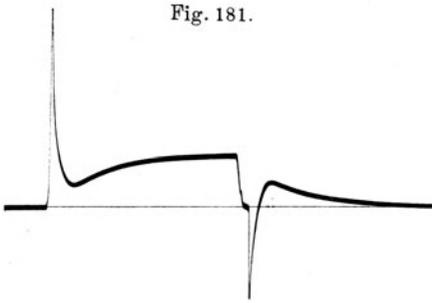


Fig. 181.

Fig. 181 zeigt im ersten Teile den unter diesen Verhältnissen der plötzlichen Änderungen beraubten Verlauf des Stromes auf einem Kabel mit angeschlossenem Morseapparat, grundsätzlich stimmt sie mit Fig. 180 überein.

Reflexion an einem Kondensator. Wird an das Ende der Leitung ein Kondensator  $K_e$  geschaltet, so ergibt sich

$$\frac{f-g}{Z} = K_e \frac{d}{dt} (f+g).$$

Für eine ideale Leitung folgt daraus

$$g - E = a e^{-\frac{t}{K_e Z}}.$$

Für  $t = 0$  ist die Spannung  $f + g$  am Kondensator noch gleich Null, also  $a = -2E$ . Für den Strom folgt dann

$$J = \frac{2E}{Z} e^{-\frac{t}{K_e Z}}.$$

Im ersten Augenblick wird also der Strom am Ende durch die Reflexion verdoppelt. Man kann daher sagen, daß ein Kondensator im ersten Augenblick wie ein Kurzschluß, eine Spule wie eine Unterbrechung wirkt, was auch mit den Feststellungen in den §§ 130 und 131 übereinstimmt.

### Dritter Abschnitt.

## Die Verzerrung der Wellenform.

§ 214. **Integration der Telegraphengleichung für eine Welle auf unbegrenzter Leitung.** Wir nehmen die in § 210 abgebrochene Untersuchung

wieder auf, über das, was nach der Zeit  $t = \frac{x}{v}$  an der Stelle  $x$  eintritt. Wie schon erwähnt, wird dann der auf den Halbkreis  $BCA$  des Integrals über die obere Hälfte des Feldes der komplexen Zahlen entfallende Betrag gleich Null und das gesuchte Integral von  $-\infty$  bis  $+\infty$  ist gleich der Summe der Integrale um die Unstetigkeitspunkte. Das Ergebnis der Rechnung ist eine Besselsche Funktion, zu welcher wir auch auf einem anderen anschaulicheren Wege gelangen können.

Zunächst geben wir der Telegraphengleichung (235) noch eine andere Gestalt, indem wir setzen  $W = Ue^{-\alpha t}$ , wobei wir  $\alpha$  so bestimmen, daß der Faktor von  $\frac{\partial U}{\partial t}$  gleich Null wird. Die Rechnung ergibt

$$\alpha = \frac{KR + GL}{2KL} \dots \dots \dots (251)$$

und für  $U$  findet man die Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + A^2 U = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} \dots \dots \dots (252)$$

Darin haben  $v$  und  $A$  dieselbe Bedeutung, wie in Gl. (239) und (240).

Diese Gleichung wird durch eine bestimmte Funktion einer Veränderlichen  $y$  erfüllt, die sich aus  $t, x$  und  $v$  in der Form

$$y = \sqrt{t^2 - \frac{x^2}{v^2}} \dots \dots \dots (253)$$

zusammensetzt. Es gelten die Beziehungen

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial x} &= \frac{dU}{dy} \frac{\partial y}{\partial x} = - \frac{dU}{dy} \frac{x}{v^2 y}, & \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} &= \frac{d^2 U}{dy^2} \frac{x^2}{v^4 y^2} - \frac{dU}{dy} \frac{y^2 - \frac{x^2}{v^2}}{v^2 y^3} \\ \frac{\partial U}{\partial t} &= \frac{dU}{dy} \frac{\partial y}{\partial t} = + \frac{dU}{dy} \frac{t}{y}, & \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} &= \frac{d^2 U}{dy^2} \frac{t^2}{y^3} - \frac{dU}{dy} \frac{y^2 - t^2}{y^3}. \end{aligned}$$

Trägt man diese in Gl. (252) ein, so findet man die Bedingungsgleichung

$$\frac{d^2 U}{dy^2} + \frac{1}{y} \frac{dU}{dy} - A^2 v^2 U = 0 \dots \dots \dots (254)$$

Diese Differentialgleichung führt auf Besselsche Funktionen. Ein für die vorliegende Aufgabe geeignetes Integral findet man durch den Ansatz  $y = \sum a_n y^n$ , wo die  $n$  die ganzen Zahlen,  $a_n$  Konstante sind. Mit der Abkürzung  $A^2 v^2 = \kappa^2$  führt dieser Ansatz zu der Gleichung

$$\sum (n^2 a_n y^{n-2} - \kappa^2 a_n y^n) = 0.$$

Wir schreiben aus dieser Summe die Glieder auf

$$\begin{aligned} \dots + (n-1)^2 a_{n-1} y^{n-3} + n^2 a_n y^{n-2} + (n+1)^2 a_{n+1} y^{n-1} + \dots \\ \dots - \kappa^2 a_{n-3} y^{n-3} - \kappa^2 a_{n-2} y^{n-2} - \kappa^2 a_{n-1} y^{n-1} - \dots \end{aligned}$$

Die Faktoren gleicher Potenzen von  $y$  müssen einzeln gleich Null sein. Dies gibt die allgemeine Gleichung

$$n^2 a_n = \kappa^2 a_{n-2}.$$

Beginnen wir mit  $n = 0$ , so zeigt sich, daß  $a_{-2}, a_{-4}, \dots$ , kurz alle Faktoren negativer Potenzen von  $y$  den Wert Null haben. Ferner ist

$$\begin{aligned} 2^2 a_2 = \kappa^2 a_0 \quad \text{also} \quad a_2 &= a_0 \frac{\kappa^2}{2^2} \\ 4^2 a_4 = \kappa^2 a_2 \quad a_4 &= a_0 \frac{(\kappa^2)^2}{2^4 (1.2)^2} \\ 6^2 a_6 = \kappa^2 a_4 \quad a_6 &= a_0 \frac{(\kappa^2)^3}{2^6 (1.2.3)^2} \end{aligned}$$

Daher ist allgemein

$$a_{2n} = a_0 \frac{\binom{\alpha}{2}^{2n}}{(n!)^2}$$

Glieder mit ungeraden  $n$  führen zu einer auch in negative Potenzen hinabsteigenden, also für  $y = 0$  divergenten Reihe, sie kommen also für die vorliegende Aufgabe nicht in Betracht. Wir erhalten daher

$$\begin{aligned}
 U &= a_0 \left( 1 + \frac{\left(\frac{Avy}{2}\right)^2}{1} + \frac{\left(\frac{Avy}{2}\right)^4}{(2!)^2} + \frac{\left(\frac{Avy}{2}\right)^6}{(3!)^2} + \dots \right) \\
 &= a_0 \left( 1 + \sum_1^\infty \frac{\left(\frac{Avy}{2}\right)^{2n}}{(n!)^2} \right).
 \end{aligned}$$

Man bezeichnet diese Funktion auch als die Besselsche Funktion  $\mathfrak{J}_0(iAvy)$ . Die der Telegraphengleichung (235) gehorchende Veränderliche  $W$  ergibt sich als  $Ue^{-at}$ . Wir haben nun schon in § 206 darauf hingewiesen, daß die Telegraphengleichung für die Veränderlichen  $J$ ,  $V$  und  $W$  in der gleichen Form gilt, weil nämlich alle drei Größen in gleicher Weise sich räumlich und zeitlich ändern. Die gefundene Funktion hat die Eigenschaften, die man unter den vorliegenden Umständen von der durch eine dauernd wirkende EMK in Gang gesetzten Stromstärke zu erwarten hat. Für  $t = 0$  und  $x = 0$  wird  $y = 0$  und daher  $U = a_0$ ; für eine ideale Leitung, auf der mit  $R$  und  $G$  auch  $\alpha$  und  $A$  gleich Null werden, bleibt die Funktion, für deren Herleitung stets  $t > \frac{x}{v}$  vorausgesetzt wurde, auf einem konstanten Wert. Wir haben also die Konstante  $a_0 = E\sqrt{K/L}$  zu setzen und schreiben jetzt

$$J = E\sqrt{\frac{K}{L}} e^{-at} \left( 1 + \sum_1^\infty \frac{\left(\frac{Av\sqrt{t^2 - \frac{x^2}{v^2}}}{2}\right)^{2n}}{(n!)^2} \right) \dots (255)$$

Man führt zweckmäßig statt  $\alpha$  noch eine andere, später häufig gebrauchte Konstante ein

$$\beta = \frac{R}{2}\sqrt{\frac{K}{L}} + \frac{G}{2}\sqrt{\frac{L}{K}} \dots \dots \dots (256)$$

Sie stimmt mit der durch Gl. (240) definierten Größe

$$A = \frac{R}{2}\sqrt{\frac{K}{L}} - \frac{G}{2}\sqrt{\frac{L}{K}}$$

praktisch fast ganz überein, da der zweite, die Ableitung enthaltende Posten gegen den ersten in der Regel sehr gering ist. Aus Gl. (251) und (239) folgt noch, daß

$$\alpha = \beta v.$$

Schreibt man für den Fall verschwindender Ableitung und mit  $J_0 = E\sqrt{K/L}$

$$\frac{J}{J_0} = e^{-\lambda vt} \left( 1 + \sum_1^{\infty} \frac{\left( \frac{1}{2} \sqrt{(\lambda vt)^2 - (\lambda x)^2} \right)^{2n}}{(n!)^2} \dots \right) \quad (257)$$

so erscheint das Verhältnis des Stromes zu dem festen Wert  $E\sqrt{K/L}$  in Abhängigkeit von den in § 209 erwähnten Veränderlichen  $T = \lambda vt$  und  $\sigma = \lambda x$ .

**§ 215. Längenmaß und zeitlicher Verlauf des Stromes.** Man kann die Schlußgleichungen wie (255) oder (257) in verschiedener Weise auswerten. Eine wäre z. B., für eine bestimmte Zeit und verschiedene Werte von  $x$  die Werte von  $J$  festzustellen; man würde dann

eine mit  $x$  als Abszisse aufzutragende Schaulinie erhalten, die einen bestimmten Augenblickswert in der Bewegung des Wellenmodells, wie z. B. Fig. 174, darstellte. Wir wollen uns näher mit der anderen Aufgabe befassen, für gegebene Stellen  $x$  den zeitlichen Verlauf der Stromstärke zu ermitteln. Dieser hängt von dem Werte der als Längenmaß der Leitung bezeichneten Größe  $\sigma = \lambda x$  im Verhältnis zu den zu betrachtenden Zeiten ab. Fig. 182 stellt diese Kurven für den Verlauf des Stromes für Werte von  $\sigma = 0$  bis zu  $\sigma = 3$  dar, Fig. 183 und 184 für die Werte 5 und 10. Wir haben danach bis zu  $\sigma = 2$  die gemeinsame Form, daß der Strom nach Ablauf der Zeit  $t = x/v$  mit einem plötzlichen Ansprung einsetzt, dessen Höhe mit wachsendem  $x$  sich immer mehr vermindert, und daß nach diesem Ansprung die Stromstärke sich nach und nach senkt. Bei  $\sigma = 2$  bleibt die erreichte Höhe einige Zeit erhalten. Wird  $\sigma > 2$ , so steigt der Strom nach dem ersten Ansprung vorläufig langsam an. Wir haben hier endliches  $E$ , aber unendlich lange Leitung vorausgesetzt. Auch wenn wir sie nur endlich, aber sehr lang annehmen, würde der stationäre Wert des Stromes gegenüber  $E/Z$  sehr klein werden. Alle Stromlinien laufen also nach genügender Zeit im vorliegenden Falle auf den Wert Null des Stromes hinaus. Bei  $\sigma = 5$  hat der Ansprung nur noch die Höhe  $e^{-5} E/Z = 0,00675 E/Z$ , während sich der nachfolgende „Schwanz“ auf mehr als das Siebenfache davon erhöht. Bei  $\sigma = 10$  ist der erste Ansprung gegenüber der nachfolgenden allmählichen Entladung so klein geworden, daß man ihn in dem gewählten Maßstab der Zeichnung nicht darstellen kann.

Zur Berechnung solcher Kurven kann man sich der Zahlentabelle IV im Anhang bedienen, welche für gegebene Werte von  $u$  die gewöhnlichen Logarithmen der zugehörigen Werte von  $\mathfrak{J}_0(iu)$  enthält.

Fig. 182.

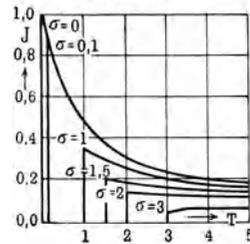


Fig. 183.

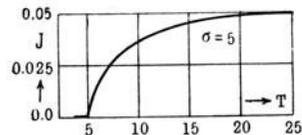
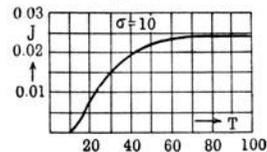


Fig. 184.



Aus einer bestimmten Aufgabe ergibt sich ein Zahlenwert  $\sigma$ . Bilden wir dann für einen oder mehrere Werte von  $y$  die Größe

$$T = \sqrt{y^2 + \sigma^2}$$

und unter der Voraussetzung, daß  $\mathcal{A} = \beta$  sei, daß man also die Ableitung vernachlässigen könne,

$$\log^{10} \frac{J}{J_0} = \log^{10} \mathfrak{Z}_0(iy) - \sqrt{y^2 + \sigma^2} \log^{10} e \dots \dots (258)$$

so stellt  $\frac{J}{J_0}$  das Verhältnis des Zeitwertes des Stromes  $J$  zur Zeit  $t = \frac{T}{Av}$  an der Stelle  $x = \sigma, \mathcal{A}$  zu dem Werte  $J_0$  dar, mit welchem der Strom an der Stelle  $x = 0$  zur Zeit  $t = 0$  ansprang, also zu  $J_0 = E\sqrt{K/L}$ . Man erkennt hieraus auch, wie sich die verschiedenen Formen der Figuren 182 bis 184 für kleine und große Werte von  $\sigma$  ergeben. Die Größe  $\log^{10} \mathfrak{Z}_0(iy)$  wächst anfangs mit dem Quadrat von  $y$ , bei großen Werten etwas stärker als mit  $y$ . Solange  $\sigma$  klein ist, steigt  $T$  nahezu in gleichem Schritt mit  $y$  an; es macht sich also die Dämpfung durch die Exponentialfunktion  $e^{-T}$  sofort geltend und die Kurve von  $J/J_0$  fällt nach dem ersten Ansprung sofort ab. Ist aber  $\sigma$  groß, so ergibt sich für alle unter  $\sigma/2$  liegenden Werte von  $y$  nahezu derselbe Wert von  $T$ , der Faktor  $\mathfrak{Z}_0(iy)$  steigt also an, während der Faktor  $e^{-T}$  nahezu gleich bleibt; dann ergibt sich die Form der nach dem ersten Ansprung langsam ansteigenden Kurve.

Wir wenden diese Sätze auf die in den Schaulinien der Fig. 175 dargestellten Vorgänge an. Weil es sich um eine belastete Leitung handelt, ist der Anstieg der Welle nicht so plötzlich und nicht so scharf abgegrenzt, wie bei einer homogenen Leitung. Weil die reinen Leitungen eine größere Fortpflanzungsgeschwindigkeit erlauben, als die mit Spulen zusammengesetzte Leitung, so findet beim allmählichen Aufbau der Welle in jeder Spule schon ein Teil der Welle seinen Weg nach dem fernen Ende, ehe die Hauptmasse dort ankommt. Gleichwohl läßt sich im Maße der Genauigkeit, welche das Ausmessen von Oszillogrammen ermöglicht, ein Zeitpunkt für das Eintreffen der Hauptwelle angeben. Aus den Entfernungen und Laufzeiten

km . . . .	1482	1608	1733	1858	1984
ms . . . .	98	106	115	123	132

ergibt sich die Geschwindigkeit der Welle zu 15100 km/s. 1858 und 1984 km gelten für die am kurzgeschlossenem Ende reflektierten Wellen.

Das Dämpfungsgesetz wollen wir nur aus den direkten Wellen ableiten. Wir haben dabei zu beachten, daß, ehe der erste Ansprung seine volle Höhe erreicht hat, eine gewisse Zeit vergangen ist, in der natürlich ein Teil der Energie der Welle verloren gegangen ist. Legen wir also die gemessenen Höhen der Anstiege zugrunde, so haben wir für die Berechnung der Dämpfung die Entfernungen zu vergrößern. Die Aufnahmen zeigen, daß die Anstiegszeit für die verschiedenen Höhen im Mittel dieselbe ist, und zwar etwa 0,0035 s, weshalb wir die Entfernungen um 53 km höher rechnen.

Rechnet man, gemäß dem Reflexionsgesetz, von dem Ansprung am Ende nur die halbe Höhe für die einlaufende Welle, so ergibt sich für die Höhe des Ansprungs folgende Formel mit der geringsten mittleren Abweichung:

$$\log^{10} J = 2,415 - 0,000860 s.$$

Die Stromstärke rechnet in mA. Die beobachteten und die berechneten mittleren Werte sind hier zusammengestellt:

<i>s</i>	1533	1661	1786
Beobachtet . . .	11,8	10,0	7,8
Berechnet . . . .	12,4	9,7	7,6

Die Abweichungen erklären sich daraus, daß bei der schon starken Abschleifung der Zeichen die Stromstärken nicht genauer gemessen werden können. Es geht aber aus den Zahlen unzweifelhaft die Bestätigung der Tatsache hervor, daß die Stromstärke am Ende durch Reflexion auf den doppelten Wert springt.

Für  $s = 0$  ergibt sich eine Stromstärke von 260 mA. Die Zeichen sind durch doppelseitige Umkehrung einer Batterie erzeugt worden, die so bemessen war, daß ein Dauerstrom von 20 mA erreicht wurde. Da die Leitung einschließlich der Spulen für 1 km einen Widerstand von 5,5 Ohm hatte, so war eine EMK von 191 V tätig, und aus dem Anfangsstrom von  $\pm 130$  mA ergibt sich ein Wellenwiderstand von 1470 Ohm, der jedenfalls der Größenordnung nach richtig ist.

Aus der Formel für die räumliche Abnahme des Ansprungs folgt  $\beta = 2,3 \cdot 0,000860$  und für die oberste Linie der Fig. 175 für den Augenblick, in dem der Ansprung seine volle Höhe erreicht hat,  $\sigma = 3,04$ ;  $\sigma$  ist der Wert von  $T_1 = \lambda vt$ , von dem aus nach 1482 km die Strombewegung und die Zählung von  $y$  beginnt. Dem Augenblick, in welchem die reflektierte Welle eintrifft, entspricht ein Wert  $T_2 = \frac{132}{101} 3,04 = 3,97$ . Dazu gehört  $y_2 = \sqrt{T_2^2 - \sigma^2} = 2,58$ . Den Zeiten  $T_1$  und  $T_2$  entsprechen die Stromstärken  $J_1$  und  $J_2$  und wir haben nach (258) folgende Gleichungen:

$$\log^{10} \frac{J_1}{J_0} = - 3,04 \log e$$

$$\log^{10} \frac{J_2}{J_0} = - 3,97 \log e + \log \mathfrak{J}_0(i 2,58).$$

Daraus erhält man mit Hilfe der Tabelle  $\log^{10} J_2/J_1 = 0,131$ . Da  $J_1 = 11,8$  mA, so soll also  $J_2 = 16$  mA werden, was nach Fig. 175 vollkommen zutrifft.

Abgesehen von einigen Unterschieden, welche aus dem Aufbau als Leitung mit Spulenbelastung herrühren, bestätigen die angeführten Aufnahmen die Gesetze der Reflexion, Verzerrung und Dämpfung in hohem Grade.

**§ 216. Stromverlauf in Leitungen endlicher Länge.** Der hier dargestellte Verlauf setzt eine in der Länge unbegrenzte Leitung voraus, in der die Welle, ohne auf eine Unstetigkeit zu treffen, beliebig weit laufen kann. Auch auf einer begrenzten Leitung läuft die Welle, solange sie noch nicht

das Ende erreicht hat, so, als wenn die Leitung unbegrenzt lang wäre. Die Welle weiß sozusagen noch nicht, was ihr weiterhin entgegentritt. Die erste Welle hat also unterwegs auf Leitungen, die am Ende geerdet oder isoliert sind, dieselbe Form. Erst durch die reflektierten Wellen baut sich nach und nach eine andere Form auf. Indessen bleibt auch in den reflektierten Wellen an sich noch der wesentliche Vorgang zu erkennen, als wenn sie in der ursprünglichen Richtung weiter gelaufen wären, wie man aus den Ankunftszeiten und der Dämpfung der reflektierten Wellen in Fig. 175 erkennen kann.

Man kann die Gl. (255) für Leitungen endlicher Länge anwenden, indem man diese durch angesetzte Leitungen gleicher Art ergänzt, in denen EMK so vorgesehen sind, daß sie, zur Zeit  $t = 0$  eingeschaltet, in das betrachtete Stück gerade solche Wellen von beiden Seiten hineinsenden, wie durch die aufeinander folgenden Reflexionen aufträten. Man kann so das Dauerzeichen für begrenzte Leitungen und bestimmte Anordnungen an den Enden aufbauen<sup>54)</sup>. Es gibt aber für diese Aufgaben andere Lösungen, auf die wir an ihrer Stelle näher zurückkommen.

An der festgestellten Form der Stromkurve ist für die Telegraphie am wertvollsten der erste Ansprung, weil er eine in den Empfangsapparat mit plötzlichem Druck eintretende Welle veranlaßt. Das, was sich bei großem Längenmaß als langgestreckte Entladung anschließt, der „Schwanz“ der Welle, steigt sehr viel langsamer an und ist daher nur relativ brauchbar, wenn man nämlich, wie bisher in der Seekabeltelegraphie, wegen der großen Dämpfung kein Mittel hat, einen erheblichen Ansprung bis zum Ende durchzubringen. Die Seekabeltelegraphie muß bisher mit dem langsam ansteigenden Teile vorliebnehmen; es ist anzunehmen, daß es mit Hilfe der Röhrenverstärker und geeigneter Endschaltungen gelingen wird, den ersten Ansprung besser auszunutzen und dadurch die Telegraphiergeschwindigkeit zu erhöhen.

**§ 217. Die verzerrungsfreie Leitung.** Die Formänderung, welche eine Welle beim Durchlaufen der Leitung erfährt, hängt rechnermäßig von dem Werte der Größe  $\sigma = As$  ab. Wäre  $A = 0$ , so würde nach Gl. (255) sich ergeben  $J = E\sqrt{K/L} e^{-\alpha t}$ , unabhängig von der Stelle auf der Leitung. Die Welle wird dann allerdings gedämpft, aber sie behält die Form auf dem ganzen Wege bei. Eine Leitung, für welche  $A = 0$  ist, bei der also  $R/L = G/K$  ist, nennt man verzerrungsfrei. Gehen wir auf die Differentialgleichung (252) zurück, so finden wir, daß diese in der Form

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 U}{\partial t^2}$$

übereinstimmt mit der Gleichung, welche sich nach § 212 für die Spannung und Stromstärke auf der idealen Leitung ergeben hat. Es besteht aber zwischen der verzerrungsfreien und der idealen Leitung der Unterschied, daß auf dieser die Wellen nicht nur unter Erhaltung der Form, sondern auch der Größe fortpflanzen, daß aber bei jener zwar die Form bestehen bleibt, aber durch die Dämpfung die Stärke der Wellen noch in höherem Maße geschwächt wird, als bei einer Leitung, welche gleiche Eigenschaften  $R, L, K$ , aber möglichst kleine Ableitung  $G$  hat. Denn der Dämpfungsfaktor, der

nach Gl. (251) den Wert hat  $\alpha = \frac{R}{2L} + \frac{G}{2K}$ , steigt bei Erhöhung der Ableitung bis zu dem Maße, daß die Gleichung  $\mathcal{A} = 0$  erfüllt wird, auf den Wert  $R/L$ , also rund das Doppelte des gewöhnlichen Wertes.

Es geht daraus hervor, daß es praktisch keinen Wert hat, durch besondere Maßnahmen eine Leitung auf den Zustand der Verzerrungsfreiheit zu bringen oder ihm anzunähern. Bei geringem Längenmaße,  $\sigma < 3$ , hat die Stromkurve der verzerrungsfreien Leitung keinen praktischen Vorzug vor derjenigen einer Leitung mit normaler Ableitung, weil diese Kurve an sich schon günstig für die Übermittlung der Zeichen ist. Bei großem Längenmaße kann man aber die an sich günstigere Form der Kurve des verzerrungsfreien Zustandes praktisch nicht ausnutzen, weil die Amplituden gegen die einer gewöhnlichen Leitung sehr stark verkleinert sind.

## Achter Teil.

# Fortpflanzung andauernder Sinusströme auf Leitungen.

§ 218. **Beschränkung auf den eingeschwungenen Zustand.** Wie wir in § 167 dargelegt haben, kann man sich für die Anwendung auf die Vorgänge in Fernsprechkreisen zumeist darauf beschränken, festzustellen, wie sie während des eingeschwungenen Zustandes der periodischen Ströme verlaufen, allerdings unter der Voraussetzung, daß der diesem Zustande vorausgehende Übergangszustand nur kurze Zeit dauert im Vergleich zu dem darauf folgenden stationären Zustand. Wir werden sehen, daß dies für einige Probleme, welche durch die neueste Entwicklung des Fernsprechens auf sehr große Entfernungen wichtig geworden sind, nicht mehr vollständig zutrifft, so daß für solche Fälle bei telephonischen Aufgaben ebenso wie bei solchen aus der Telegraphie der Übergangszustand besonders untersucht werden muß. Für die gewöhnlichen Fälle ist aber die Untersuchung des eingeschwungenen Zustandes, der nur sehr viel einfachere Rechnungsmittel erfordert, ausreichend.

### Erster Abschnitt.

## Eigenschaften gleichmäßiger Leitungen.

§ 219. **Integration der Grundgleichungen.** Wir setzen eine gleichmäßige Leitung voraus, welche also überall für gleiche Längen gleiche Werte der elektrischen Eigenschaften  $R, L, G, K$  aufweist. Wenn unter den gemachten Voraussetzungen die Ströme und Spannungen an jeder Stelle der Leitung sinusförmige Gestalt angenommen haben, so können wir weiterhin die komplexe Form der Rechnung anwenden und setzen

für  $V$  den Ausdruck  $\mathfrak{B} e^{i\omega t}$ ,  
für  $J$  den Ausdruck  $\mathfrak{Z} e^{i\omega t}$ .

Dann werden die Grundgleichungen

$$\left. \begin{aligned} -\frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial x} &= (R + i\omega L) \mathfrak{Z} \\ -\frac{\partial \mathfrak{Z}}{\partial x} &= (G + i\omega K) \mathfrak{B} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (259)$$

Man beachte die Übereinstimmung mit den Gl. (97) und (98), welche sich von diesen Gleichungen im Aufbau nur durch die komplexe Form der elektrischen Größen unterscheiden.

Wir setzen fernerhin

$$\sqrt{(R + i \omega L)(G + i \omega K)} = \gamma = \alpha i + \beta \dots \dots \dots (260)$$

Da beide Faktoren unter der Quadratwurzel einen Winkel zwischen 0 und 90° enthalten, liegt auch der Winkel von  $\gamma$  zwischen diesen Grenzen, und daher sind  $\alpha$  und  $\beta$  positive reelle Größen. Quadriert man und setzt die reellen Teile einander gleich, sowie die Faktoren von  $i$ , so erhält man

$$\begin{aligned} \omega^2 KL - GR &= \alpha^2 - \beta^2, \\ \omega(KR + GL) &= 2\alpha\beta. \end{aligned}$$

Daraus findet man

$$\left. \begin{aligned} 2\alpha^2 &= +(\omega^2 KL - GR) + \sqrt{(\omega^2 L^2 + R^2)(\omega^2 K^2 + G^2)} \\ 2\beta^2 &= -(\omega^2 KL - GR) + \sqrt{(\omega^2 L^2 + R^2)(\omega^2 K^2 + G^2)} \end{aligned} \right\} \dots (261)$$

Die Dimension von  $\alpha$  und  $\beta$  ist  $[1/l]$ .

Ferner setzen wir

$$\sqrt{\frac{R + i \omega L}{G + i \omega K}} = \mathfrak{Z} \dots \dots \dots (262)$$

$\mathfrak{Z}$  ist der Dimension nach ein gerichteter Widerstand, dessen Winkel zwischen  $+\pi/4$  und  $-\pi/4$  liegt. Wir nennen  $\mathfrak{Z}$  den Wellenwiderstand der Leitung für Wechselstrom.

Indem man aus den Grundgleichungen eine der Veränderlichen, etwa  $\mathfrak{Z}$  eliminiert, erhält man die Gleichung

$$\frac{\partial^2 \mathfrak{B}}{\partial x^2} = \gamma^2 \mathfrak{B}.$$

Ihr Integral hat die Form

$$\mathfrak{B} = a_1 e^{\gamma x} + a_2 e^{-\gamma x}.$$

Da  $R + i \omega L = \gamma \mathfrak{Z}$  ist, ergibt sich

$$-\mathfrak{Z} \mathfrak{B} = a_1 e^{\gamma x} - a_2 e^{-\gamma x}.$$

An Stelle der willkürlichen Konstanten  $a_1$  und  $a_2$  sollen als solche, die zwar ihrem Werte nach ebenfalls unbestimmt, aber von klarerer Bedeutung sind, die Spannung  $\mathfrak{B}_a$  und die Stromstärke  $\mathfrak{I}_a$  am Anfang der Leitung, also für  $x = 0$  gewählt werden. Es ist dann

$$\begin{aligned} \mathfrak{B}_a &= a_1 + a_2, \\ -\mathfrak{Z} \mathfrak{I}_a &= a_1 - a_2. \end{aligned}$$

Daraus ergibt sich die Form

$$\left. \begin{aligned} \mathfrak{B} &= \mathfrak{B}_a \frac{e^{\gamma x} + e^{-\gamma x}}{2} - \mathfrak{Z} \mathfrak{I}_a \frac{e^{\gamma x} - e^{-\gamma x}}{2} \\ \mathfrak{I} &= \mathfrak{I}_a \frac{e^{\gamma x} + e^{-\gamma x}}{2} - \frac{\mathfrak{B}_a}{\mathfrak{Z}} \frac{e^{\gamma x} - e^{-\gamma x}}{2} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (263)$$

Durch eine einfache Rechnung findet man

$$\left. \begin{aligned} \mathfrak{B}_a &= \mathfrak{B} \frac{e^{\gamma x} + e^{-\gamma x}}{2} + \mathfrak{B} \mathfrak{I}_1 \frac{e^{\gamma x} - e^{-\gamma x}}{2} \\ \mathfrak{I}_a &= \mathfrak{I} \frac{e^{\gamma x} + e^{-\gamma x}}{2} + \frac{\mathfrak{B}}{\mathfrak{I}} \frac{e^{\gamma x} - e^{-\gamma x}}{2} \end{aligned} \right\} \dots \dots (263 \text{ a})$$

Die Leitung habe die Länge  $l$ . Am Ende habe  $\mathfrak{B}$  den Wert  $\mathfrak{B}_e$ ,  $\mathfrak{I}$  den Wert  $\mathfrak{I}_e$ ; dann ist

$$\left. \begin{aligned} \mathfrak{B}_a &= \mathfrak{B}_e \frac{e^{\gamma l} + e^{-\gamma l}}{2} + \mathfrak{I} \mathfrak{I}_e \frac{e^{\gamma l} - e^{-\gamma l}}{2} \\ \mathfrak{I}_a &= \mathfrak{I}_e \frac{e^{\gamma l} + e^{-\gamma l}}{2} + \frac{\mathfrak{B}_e}{\mathfrak{I}} \frac{e^{\gamma l} - e^{-\gamma l}}{2} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (264)$$

Setzt man diese Werte von  $\mathfrak{B}_a$  und  $\mathfrak{I}_a$  in die Gl. (263) ein, so ergibt sich für den Zusammenhang der Werte an beliebiger Stelle mit denen am Ende das Gleichungssystem

$$\left. \begin{aligned} \mathfrak{B} &= \mathfrak{B}_e \frac{e^{\gamma(l-x)} + e^{-\gamma(l-x)}}{2} + \mathfrak{I} \mathfrak{I}_e \frac{e^{\gamma(l-x)} - e^{-\gamma(l-x)}}{2} \\ \mathfrak{I} &= \mathfrak{I}_e \frac{e^{\gamma(l-x)} + e^{-\gamma(l-x)}}{2} + \frac{\mathfrak{B}_e}{\mathfrak{I}} \frac{e^{\gamma(l-x)} - e^{-\gamma(l-x)}}{2} \end{aligned} \right\} \dots (265)$$

Es war früher üblich, an dieser Stelle statt der Exponentialfunktionen trigonometrische Funktionen komplexer Argumente durch die Gleichungen einzuführen:

$$\left. \begin{aligned} \frac{e^{\gamma x} + e^{-\gamma x}}{2} &= \cos i \gamma x \\ \frac{e^{\gamma x} - e^{-\gamma x}}{2} &= -i \sin i \gamma x \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (266)$$

Mit diesen stellt sich der Verlauf der Ströme auf der Leitung durch folgende Gleichungen dar:

$$\left. \begin{aligned} \mathfrak{B}_a &= \mathfrak{B} \cos i \gamma x - i \mathfrak{I} \mathfrak{I} \sin i \gamma x \\ \mathfrak{I}_a &= \mathfrak{I} \cos i \gamma x - i \frac{\mathfrak{B}}{\mathfrak{I}} \sin i \gamma x \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (267)$$

Es ist in den letzten Jahren nach dem Vorgang amerikanischer Autoren auch in Deutschland üblich geworden, statt der trigonometrischen Funktionen  $\sin$  und  $\cos$  komplexer Argumente hyperbolische Funktionen zu benutzen. Es gelten die Gleichungen

$$\frac{e^{\gamma x} + e^{-\gamma x}}{2} = \mathfrak{C}o\mathfrak{h} \gamma x, \quad \frac{e^{\gamma x} - e^{-\gamma x}}{2} = \mathfrak{S}i\mathfrak{h} \gamma x \dots (267 \text{ a})$$

Dadurch erhält die Gl. (267) eine scheinbar reelle Form. Gegen die Benutzung dieser Zeichen, welche sich von den in englisch sprechenden Ländern verwandten wiederum unterscheiden, da diese  $\cosh \gamma x$ ,  $\sinh \gamma x$  schreiben, besteht das Bedenken, daß vielbenutzte Rechnungsregeln der trigonometrischen und der hyperbolischen Funktionen verschiedene Form zeigen. Während die ersteren gleich den Regeln für reelle Argumente durch den langjährigen Gebrauch als wohlbekannt angenommen werden können, kommen in den Formeln für hyperbolische Funktionen hier und da abweichende Vorzeichen vor, die leicht zu Irrtümern führen. So ist für jedes beliebige Argument

$$\cos^2 u + \sin^2 u = 1, \quad \text{Cof}^2 u - \text{Sin}^2 u = 1.$$

$$\begin{aligned} \cos(u + v) &= \cos u \cos v - \sin u \sin v; \text{Cof}(u + v) = \text{Cof} u \text{Cof} v + \text{Sin} u \text{Sin} v; \\ \sin(u + v) &= \sin u \cos v + \cos u \sin v; \text{Sin}(u + v) = \text{Sin} u \text{Cof} v + \text{Cof} u \text{Sin} v. \end{aligned}$$

Trotz dieser Bedenken haben wir im folgenden die Darstellung mit hyperbolischen Funktionen gewählt, weil sie im Unterricht allgemein gebraucht werden; ihre praktische Anwendung wird durch Tabellenwerke<sup>55)</sup> sehr erleichtert. Mit hyperbolischen Funktionen erhalten die Gl. (263 a) und (267) die Form

$$\left. \begin{aligned} \mathfrak{B}_a &= \mathfrak{B} \text{Cof} \gamma x + \mathfrak{Z} \mathfrak{Z} \text{Sin} \gamma x \\ \mathfrak{Z}_a &= \mathfrak{Z} \text{Cof} \gamma x + \mathfrak{B} \text{Sin} \gamma x \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (268)$$

**§ 220. Stehende elektrische Wellen.** Die Gl. (263 bis 268) stellen die elektrischen Zustände der Leitung dar, wenn periodische Anstöße in solcher Zahl auf den gesamten Stromkreis eingewirkt haben, daß er sich für die aufgedrückte Frequenz eingeschwungen hat. Man nennt einen solchen Zustand, in dem nicht eine einzelne fortschreitende Welle maßgebend ist, sondern das Gesamtergebnis einer langen Reihe einfallender und reflektierter Wellen, den Zustand stehender Wellen. Die Verteilung der Ströme und Spannungen hängt dabei sowohl von den Eigenschaften der Leitungen, als denen der an sie angeschlossenen Apparate ab, weil diese die Art der Reflexionen bestimmen. Ohne auf den Einfluß der Apparate zunächst näher einzugehen, können wir das Wellenbild aus den Gl. (263) in folgender Weise herleiten.

Der eingeschwungene Zustand kennzeichnet sich dadurch, daß an jeder Stelle sich zwar Strom und Spannung mit der Zeit sinusförmig ändern, daß aber ihre Amplituden und Phasen, im Gegensatz zum Übergangszustand, an jeder Stelle zeitlich unveränderlich sind. Wir können sie also auf die Werte an einer bestimmten Stelle beziehen und wählen dazu die Stelle  $x = 0$ , für welche wir die Werte  $\mathfrak{B}_a$  und  $\mathfrak{Z}_a$  als gegeben ansehen. An einer beliebigen Stelle  $x$  ändern sich die entsprechenden Größen der Zeit nach ebenfalls sinusförmig mit derselben Periode, wie an der Stelle  $x = 0$ ; sie haben also denselben Faktor  $e^{i \omega t}$ ; ihre Amplituden und Phasen hängen aber von  $x$  ab. Die Abhängigkeit der Größen ist in der komplexen Form durch  $\mathfrak{B} e^{i \omega t}$  und  $\mathfrak{Z} e^{i \omega t}$  gegeben, in der reellen Form durch den Faktor von  $i$  in diesen Ausdrücken.

Nun sei gesetzt

$$\begin{aligned} \Re_a + \Im \Im_a &= B_1 + iD_1, \\ \Re_a - \Im \Im_a &= B_2 + iD_2. \end{aligned}$$

$B_1, B_2, D_1, D_2$  sind reelle, von  $x$  und  $t$  unabhängige Größen. Wir erhalten dann nach Gl. (263) für die Spannung an der Stelle  $x$  den Ausdruck

$$\begin{aligned} V &= e^{-\beta x} [B_1 \sin(\omega t - \alpha x) + D_1 \cos(\omega t - \alpha x)] \\ &+ e^{+\beta x} [B_2 \sin(\omega t + \alpha x) + D_2 \cos(\omega t + \alpha x)]. \end{aligned}$$

Indem man noch setzt

$$\sqrt{B_1^2 + D_1^2} = E_1, \quad D_1/B_1 = \operatorname{tg} \chi_1, \quad \sqrt{B_2^2 + D_2^2} = E_2, \quad D_2/B_2 = \operatorname{tg} \chi_2,$$

erhält man

$$V = E_1 e^{-\beta x} \sin(\omega t - \alpha x + \chi_1) + E_2 e^{+\beta x} \sin(\omega t + \alpha x + \chi_2) \cdot \cdot \cdot \quad (269)$$

Weil die Argumente der Sinusfunktionen sowohl die Zeit als den Ort enthalten, kann man die beiden Summanden als Wellen auffassen, welche an den verschiedenen Stellen zu einer bestimmten Zeit in verschiedenen Bewegungszuständen sind.

Der erste Posten enthält den Faktor  $e^{-\beta x}$ , welcher anzeigt, daß die Schwingungsweite um so geringer ist, je größer  $x$  gewählt wird; dies trifft auf eine in der Richtung der wachsenden  $x$  sich bewegendes Welle zu, also, wenn wir am Anfange eine Stromquelle annehmen, auf eine einfallende Welle. Auch der Phasenwinkel  $\omega t - \alpha x + \chi_1$  bestätigt dieses, da eine bestimmte Phase um so später eintritt, je größer  $x$  ist, je weiter also die Welle sich vom Ausgange entfernt hat.

Dagegen stellt der zweite Posten eine gegen die Richtung der wachsenden  $x$ , also auf den Anfang der Leitung zu fortschreitende Welle dar. Ihre Schwingungsweite nimmt ab, wenn  $x$  sich verkleinert, und die dem Ende nähergelegenen Punkte sind den vom Ende weiter abliegenden in der Phase voraus. Es handelt sich hierbei also um eine reflektierte Welle.

Es ist indessen zu beachten, daß die Angabe „eine“ einfallende oder reflektierte Welle nicht die Einzahl dieser Wellen angeben soll. Nach der gemachten Voraussetzung, daß die sinusförmige EMK so lange Zeit gewirkt hat, daß auf der Leitung ein eingeschwungener Zustand besteht, bei dem die Schwingungsweite an jeder Stelle sich mit der Zeit nicht mehr ändert, stellen die beiden Summanden der letzten Gleichung für jede Stelle  $x$  die Resultierenden aller einfallenden und aller reflektierten Wellen, also stehende Wellen dar. In der graphischen Darstellung oder bei Modellen hat man die Vorstellung fortschreitender Wellen, weil infolge der erheblichen Dämpfung die Schwingungsweiten an beiden Enden sich so erheblich unterscheiden, daß man nicht wie sonst bei stehenden Wellen die Vorstellung eines in gleichen Teilen schwingenden Systems, sondern eines nach dem Ende eine Leistung übertragenden Systems hat.

Stehende Wellen zeigen auch einen Unterschied in betreff der Wellengeschwindigkeit. Wir nennen bei fortschreitenden Wellen den Abstand zweier Punkte, die zu jeder Zeit einen Phasenunterschied von  $2\pi$  haben, die Wellenlänge  $\lambda$ . Nach derselben Definition bestimmt sich die Wellenlänge z. B. für die Resultierenden der in Richtung der  $x$  laufenden Wellen aus der Gleichung

$$\omega t - \alpha x + \chi_2 = \omega t - \alpha(x + \lambda) + \chi_2 + 2\pi$$

zum Werte

$$\lambda = \frac{2\pi}{\alpha}$$

und zum gleichen Werte für die andere Resultierende. Man kann  $\lambda$  als die Wellenlänge der stehenden Wellen bezeichnen.

Bei fortschreitenden Wellen besteht zwischen der Wellenlänge  $\lambda$ , der Periode  $T$  und der Geschwindigkeit  $v$  die Beziehung  $\lambda = vT$ . Wendet man diese auch auf stehende Wellen an, deren Periode gleich  $2\pi/\omega$  ist, so erhält man die als Phasengeschwindigkeit bezeichnete Größe

$$v' = \frac{\omega}{\alpha}.$$

Aus Gl. (261) folgt, daß  $\alpha$  von dem Werte  $\omega\sqrt{KL}$  abweicht, und daß es im allgemeinen, nämlich bei geringer Ableitung, größer als  $\omega\sqrt{KL}$  ist; ferner daß  $\omega/\alpha$  mit wachsendem  $\omega$  sich dem Wert  $\omega\sqrt{KL}$  als Grenze nähert. Daher ist also  $v' < 1/\sqrt{KL}$ , und dies scheint zu bedeuten, daß die stehenden Wellen eine geringere Geschwindigkeit als fortschreitende Wellen haben, und daß der Unterschied um so größer wird, je geringer die aufgedrückte Schwingungsperiode ist.

Auf die physikalische und technische Bedeutung dieses Umstandes gehen wir bei der Besprechung der Verzerrung näher ein.

Zunächst soll ein Verfahren zur zeichnerischen Darstellung der Verteilung der stehenden Wellen besprochen werden.

**§ 221. Das Spiraldiagramm einer am Ende offenen Leitung.** Vor der Besprechung des allgemeinen Falles wollen wir den einfacheren betrachten, daß die Leitung am Ende an beiden Zweigen isoliert sei, so daß also  $\Im_e = 0$  ist. Dann ist nach Gl. (265)

$$\Re = \Re_e \frac{e^{\gamma y} + e^{-\gamma y}}{2}, \quad \Im = \frac{\Re_e}{\Im} \frac{e^{\gamma y} - e^{-\gamma y}}{2}.$$

Dabei ist  $l - x = y$  gesetzt, und  $y$  ist demnach der Abstand des Aufpunktes vom Ende der Leitung.

Ohne Beeinträchtigung der Allgemeinheit kann man alle Amplituden auf die von  $\Re_e$  beziehen und die Phasen als Differenzen gegen die von  $\Re_e$  angeben.

Dann wird also

$$\frac{\Re}{\Re_e} = \frac{e^{\gamma y} + e^{-\gamma y}}{2}.$$

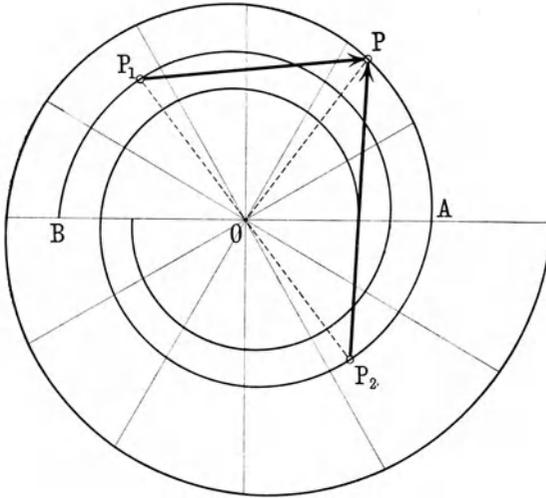
Nach bekannten Regeln stellt  $e^{\gamma y} = e^{\beta y} e^{i\alpha y}$  einen Strahl dar, der gegen die reelle Achse um den Winkel  $\vartheta = \alpha y$  gedreht ist und die Länge  $r = e^{\beta y}$  hat. Die Endpunkte der für verschiedene Werte von  $y$  sich ergebenden Strahlen bilden eine Linie, deren Gleichung in Polarkoordinaten sich nach Elimination von  $y$  ergibt als

$$r = e^{\alpha \vartheta}.$$

Sie ist also eine logarithmische Spirale. Sie beginnt für  $\vartheta = 0$  oder  $y = 0$  mit dem Werte Eins und umzieht den Anfangspunkt in stets weiter werdenden Windungen.

Die Funktion  $e^{-\gamma y}$  ist ebenfalls eine Spirale, aber zu jedem  $y$  gehört ein negativer Winkel. Die Spirale windet sich also mit wachsendem  $y$  in negativem Sinn. Ihr Ausgangspunkt ist ebenfalls der Wert Eins, aber ihre Radienvektoren nehmen ständig ab. Fig. 185 enthält von  $A$  ausgehend diese beiden Spiralen für den Fall einer Leitung, für die  $\alpha = 20,6 \cdot 10^{-3}$ ,  $\beta = 1,64 \cdot 10^{-3}$

Fig. 185.



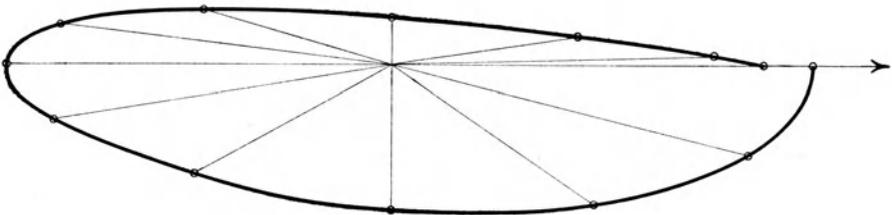
ist. Ferner ist von  $B$  ausgehend die Spirale  $-e^{-\gamma y}$  eingezeichnet.

Für einen Punkt im Abstände von  $y = 60$  km vom Ende der Leitung ist  $\alpha y = 52,6^\circ$ . Trägt man diesen Winkel in jede der Spiralen ein, wodurch sich die Schnittpunkte  $P, P_1, P_2$  in Fig. 185 ergeben, so ist  $OP = e^{+\gamma y}$ ,  $OP_1 = -e^{-\gamma y}$ , daher ist  $P_1P = e^{\gamma y} + e^{-\gamma y}$  oder gleich  $2\mathfrak{B}/\mathfrak{B}_e$ . Für  $y = 0$  fällt  $P$  mit  $A$ ,  $P_1$  mit  $B$  zusammen; macht man also  $BA = \mathfrak{B}_e$ , so

stellt  $P_1P$  die Spannung im Abstände  $y$  vom Ende nach Betrag und Phase dar.

Wenn man die Spannung für eine Reihe solcher Punkte bestimmt und dann die einzelnen Strahlen durch Parallelverschiebung von einem gemeinsamen Anfangspunkt ausgehen läßt, erhält man wie in Fig. 186 eine Dar-

Fig. 186.



stellung, aus der sich der Verlauf der Spannung längs der Leitung ersehen läßt. Stellen im Winkelabstände von je  $30^\circ$  sind durch kleine Kreise gekennzeichnet, und man sieht, daß die Phase nach dem Ende zu ständig abnimmt, aber an einigen Stellen langsam, an anderen schnell. Die Amplitude dagegen wechselt zwischen Minimum- und Maximumwerten, und zwar liegen

jene an Stellen schnellster Phasenänderung, diese dort, wo die Phase sich am langsamsten ändert.

In Fig. 185 ist ferner  $OP_2 = e^{-\gamma y}$ , also  $P_2P = (e^{\gamma y} - e^{-\gamma y})$ . Es stellt demnach den Wert von  $2\mathfrak{Z}\mathfrak{Z}/\mathfrak{Z}_e$  für diese Stelle dar oder, wenn  $BA = \mathfrak{Z}_e$  ist, den Wert von  $\mathfrak{Z}\mathfrak{Z}_e$ . Durch Parallelübertragung mehrerer solcher Strahlen ist Fig. 187 entstanden, die also den Verlauf des Stromes längs der Leitung darstellt. Am Ende ist der Strom Null, er steigt aber durch die Ladungsströme der Kapazität der Leitung, zunächst unter  $90^\circ$  Phasendifferenz gegen die Spannung, bald an und verläuft dann ähnlich wie die Spannung. Vergleicht

Fig. 187.

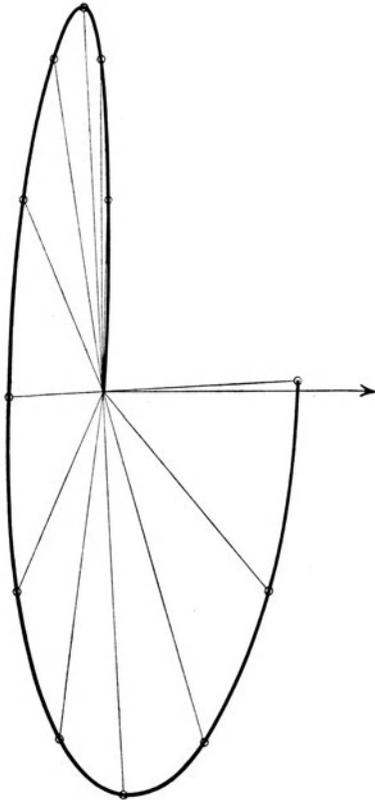
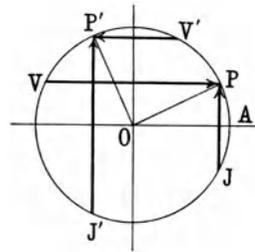


Fig. 188.



man die Phasen von Spannung und Strom an denselben Orten, so ist ihre Differenz bei den Höchststellen der Spannung am größten, sie geht bei den Mindeststellen der Spannung durch Null und erreicht beim nächsten Spannungsmaximum einen dem Sinne nach dem vorigen entgegengesetzten Höchstwert. Die Höchstwerte der Stromamplituden treffen mit den Mindestwerten der Spannungsamplituden zusammen und umgekehrt.

Wäre die Leitung ohne Widerstand und ohne Ableitung, so wäre nach Gl. (261)  $\beta = 0$ ,  $\alpha = \omega \sqrt{KL}$ . In diesem Falle gehen die logarithmischen Spiralen in Kreise über, und wenn man die Konstruktion von  $\mathfrak{Z}$  und  $\mathfrak{I}$  sinngemäß ausführt, so erhält man (Fig. 188) zwei Sehnen  $VP$  und  $JP$ , von denen die eine der reellen, die andere der komplexen Achse parallel gezogen ist, und die die Werte der Spannung und des Stromes für die durch  $P$  oder den Winkel  $AOP$  bezeichnete Länge der Leitung darstellen. Als Funktion des Ortes auf der Leitung betrachtet ändern sich dann Spannung und Stromstärke sinusförmig; die Sinuslinien sind um  $90^\circ$  gegeneinander versetzt, indem am Ende der offenen Leitung  $\mathfrak{Z}$  mit dem Höchstwert,  $\mathfrak{I}$  mit Null beginnt. Bei abnehmendem  $\mathfrak{Z}$  nimmt  $\mathfrak{I}$  dann zunächst zu. Dies ergibt das ideale Bild stehender Wellen auf einer Leitung ohne Dämpfung.

§ 222. **Das Spiraldiagramm einer am Ende auf einen Apparat geschalteten Leitung.** Für diesen Fall gilt die allgemeine Gleichung

$$\mathfrak{B} = \mathfrak{B}_e \frac{e^{\gamma y} + e^{-\gamma y}}{2} + \mathfrak{Z} \mathfrak{Z}_e \frac{e^{\gamma y} - e^{-\gamma y}}{2},$$

$$\mathfrak{Z} = \mathfrak{Z}_e \frac{e^{\gamma y} + e^{-\gamma y}}{2} + \frac{\mathfrak{B}_e}{\mathfrak{Z}} \frac{e^{\gamma y} - e^{-\gamma y}}{2}.$$

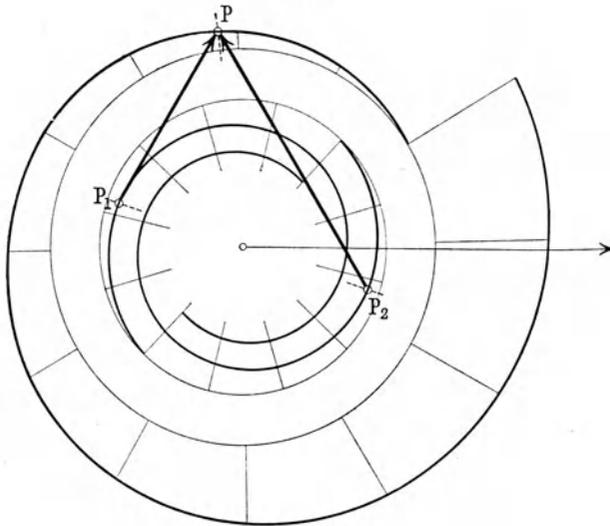
Nennen wir den Scheinwiderstand des Apparates  $\mathfrak{R}_e$ , so wird  $\mathfrak{B}_e = \mathfrak{R}_e \mathfrak{Z}_e$ . Alle Posten der rechten Seiten enthalten dann  $\mathfrak{Z}_e$ , und wir wollen die Werte von  $\mathfrak{B}$  und  $\mathfrak{Z}$  auf den als Einheitsmaß angenommenen Wert von  $\mathfrak{Z}_e$  beziehen. Es wird

$$2 \frac{\mathfrak{B}}{\mathfrak{Z}_e} = (\mathfrak{R}_e + \mathfrak{Z}) e^{\gamma y} + (\mathfrak{R}_e - \mathfrak{Z}) e^{-\gamma y},$$

$$2 \mathfrak{Z} \frac{\mathfrak{Z}}{\mathfrak{Z}_e} = (\mathfrak{R}_e + \mathfrak{Z}) e^{\gamma y} - (\mathfrak{R}_e - \mathfrak{Z}) e^{-\gamma y}.$$

Hiernach ist die Konstruktion des Spiraldiagramms leicht ersichtlich. Es werden dieselben einfachen Spiralen  $e^{\gamma y}$  und  $e^{-\gamma y}$  wie in dem vereinfachten

Fig. 189.



Falle gebraucht; aber sie sind mit den Faktoren  $(\mathfrak{R}_e + \mathfrak{Z})$  und  $(\mathfrak{R}_e - \mathfrak{Z})$  zu multiplizieren.

Für eine Leitung mit angeschaltetem Fernsprechgehäuse erhält man aus die Werte

$$\mathfrak{Z} = 553 e^{-3,09i}, \quad \mathfrak{R}_e = 2800 e^{-380i}$$

$$\mathfrak{R}_e + \mathfrak{Z} = 3240 e^{+31,70i}, \quad \mathfrak{R}_e - \mathfrak{Z} = 2410 e^{+43,20i}.$$

Mit diesen Faktoren sind die Strahlen der Spiralen zu multiplizieren, d. h. ihre Längen mit dem Betrage zu vervielfachen, ihre Winkel um den Winkel des Faktors zu vergrößern. Man erhält dann beispielshalber die Linien der Fig. 189, aus denen man wieder die Werte von  $\mathfrak{B}$  und  $\mathfrak{Z}$  für einen bestimmten Punkt ableitet, indem man den seinem Abstände entsprechenden

Winkel einträgt und die dadurch bestimmten Punkte verbindet. So sind  $P_1P$  und  $P_2P$  zwei zusammengehörige Werte von Spannung und Stromstärke.

**§ 223. Die Bestimmungsgrößen der elektrischen Wellen.** Für den Verlauf der Ströme und Spannungen sind die Größen  $\gamma = \alpha i + \beta$  und  $\mathfrak{Z}$  bestimmend. Wir wollen daher im Anschluß an die Gl. (261) zunächst feststellen, welche Werte sie in Abhängigkeit von den elektrischen Eigenschaften der Leitung und der Frequenz unter den technisch wichtigen Bedingungen erhalten, mit dem Ziele zu sehen, wie man durch die Wahl der Größen  $R, L, G, K$  die Größen  $\gamma$  und  $\mathfrak{Z}$  günstig beeinflussen kann.

Der den Faktor  $e^{-\beta x}$  enthaltende Posten in Gl. (269) stellt, wie dargelegt, die Resultierende der nach dem Ende zu laufenden Wellen dar. Wenn die Welle um die Längeneinheit auf der Leitung fortgeschritten ist, so haben Spannung und Stromstärke im Verhältnis von 1 auf  $e^{-\beta}$  abgenommen. Die Leistung hat dabei eine Abnahme im Verhältnis von 1 auf  $e^{-2\beta}$  erfahren. Für die in der Praxis gebrauchten Leitungen liegen die Werte von  $\beta$  für 1 km in den Grenzen von 0,001 bis 0,070, es ist also genügend genau  $e^{-\beta} = 1 - \beta$  zu setzen. Damit erhält die Größe  $\beta$  die Bedeutung, daß sie den Verlust des Stromes oder der Spannung oder die Hälfte dieses Verlustes für die Leistung mit Bezug auf den Wert an der Eintrittsstelle beim Durchlaufen der Längeneinheit der Leitung anzeigt.

Das Produkt  $\beta l$  nennt man das Dämpfungsmaß eines Leitungsstückes von der Länge  $l$ ,  $\beta$  selbst die räumliche Dämpfung oder Dämpfungskonstante, oder auch die spezifische Dämpfung. Wir werden später Leitungen oder ihnen ähnliche Anordnungen kennen lernen, bei denen das Dämpfungsmaß nicht einer bestimmten Länge proportional ist. Wir führen deshalb als Formelzeichen für das Dämpfungsmaß das Zeichen  $b$  ein; für gleichmäßige Leitungen ist also  $b = \beta l$ .

Die Größe  $\alpha$  heißt wegen der dargelegten Beziehung zur Wellenlänge die Wellenlängenkonstante. Für eine homogene Leitung stellt  $\alpha l$  den Phasenunterschied der Welle auf dem Stück von der Länge  $l$  dar und heißt deshalb das Winkelmaß dieses Stückes. Aus denselben Gründen wie beim Dämpfungsmaß wird für das Winkelmaß das Formelzeichen  $a$  eingeführt, für gleichmäßige Leitungen ist also  $a = \alpha l$ .

Die Größe  $\gamma$ , welche  $\alpha$  und  $\beta$  zusammenfaßt, heißt Fortpflanzungskonstante und  $\gamma l = g$  das Fortpflanzungsmaß.

$a$  und  $b$  sind reine Zahlen, die von jedem Maßsystem, sowohl hinsichtlich der Längen- als hinsichtlich der elektrischen Einheiten unabhängig sind. Sie sind daher sehr geeignet zur Kennzeichnung der Eigenschaften einer Leitung.

Auf die Bedeutung bestimmter Zahlenwerte des Dämpfungsmaßes für das Fernsprechen werden wir später näher eingehen, wenn wir das Zusammenwirken von Leitungen und Apparaten besprochen haben werden.

**§ 224. Wirksame Werte der Größen  $R, L, G, K$ .** Wir haben bisher diese Größen selbst als von der Frequenz unabhängig betrachtet und für sie die bei stationären Vorgängen geltenden Definitionen angewandt. Bei Wechselströmen treten Erscheinungen auf, die eine Änderung einiger der genannten Größen mit der Frequenz herbeiführen. Wie später näher besprochen werden

wird, tritt bei hoher Frequenz an Stelle der bei stationären Zuständen bestehenden gleichmäßigen Verteilung der Stromfäden über den ganzen Querschnitt des Leiters eine Abdrängung der Stromfäden von der Achse nach der Oberfläche hin auf. Dies bewirkt ein Anwachsen des Widerstandes und eine Verminderung der Induktivität. Andere Ursachen zur Veränderung dieser Größen liegen darin, daß die Leiter stets in der Nähe anderer verlaufen, in denen sie Induktionsströme erzeugen; die an diese verausgabte Energie wirkt in ähnlicher Weise auf den scheinbaren Widerstand und die scheinbare Induktivität der betrachteten Schleife zurück, wie dies in § 190 von den Verlusten in einer Selbstinduktionsspule beschrieben worden ist. Auch die Kapazität und die Ableitung werden sich in einzelnen Fällen mit der Frequenz ändern; die Kapazität dann, wenn ein Teil davon in einer Kapazität gegen einen Leiter besteht, der als auf dem Potential Null befindlich angenommen wird. Wenn infolge der Induktionswirkungen oder bei hoher Frequenz infolge des zu langsamen Abfließens der durch Influenz sich ansammelnden Elektrizitätsmengen die Spannung solcher Leiter von Null abweicht, so verändert sich auch die scheinbare Kapazität der betrachteten Leiter. Die Ableitung endlich ändert sich mit der Periodenzahl wie schon in § 184 erwähnt, wenn bei der wechselnden Elektrisierung des Isoliermittels Energie verbraucht wird.

Zu der erweiterten Definition der elektrischen Größen gelangen wir durch die bereits an anderer Stelle (§ 208) besprochene Gleichung

$$-\frac{\partial}{\partial x}(JV) = RJ^2 + GV^2 + \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{2} LJ^2 \right) + \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{2} KV^2 \right).$$

Die linke Seite dieser Gleichung bedeutet den in der Zeiteinheit auf die Längeneinheit der Leitung entfallenden Verlust von Energie. Wir haben gesehen, daß die beiden letzten Posten rechts, die Änderungen der im magnetischen und im elektrischen Felde aufgespeicherten Energien keinen tatsächlichen Verlust bedeuten, sondern daß dieser in den beiden ersten Posten steckt, die stets positiv sind. Der erste Posten stellt den mit dem Strom verbundenen Verlust dar. Nach dem schon Ausgeführten ist es nicht nur der Wärmeverbrauch im Widerstand des Leiters selbst, sondern auch der durch die in den anderen Leitern induzierten Ströme; ferner kommt augenscheinlich nicht der Widerstand gegen stationären Strom in Betracht, sondern der Widerstand des tatsächlich vom Strom durchflossenen Leiterteiles, unter Berücksichtigung der Stromverdrängung. Unter besonderen Verhältnissen kommt noch hinzu die Arbeit, die zur Ummagnetisierung von Eisen im magnetischen Felde der Leitung verbraucht wird, kurz jede Arbeitsleistung, die mit Änderungen des Stromes zusammenhängt.

Diese Arbeit wird der magnetischen Energie des Leiters entzogen. Wir haben für diese die Form  $\frac{1}{2} LJ^2$ ; im allgemeinen Falle stimmt aber  $L$  nicht mehr mit dem für stationäre Ströme geltenden Werte überein, sondern wir definieren es jetzt als das Verhältnis der mittleren magnetischen Energie zur Hälfte des mittleren Quadrats der Stromstärke. Diese Definition sagt für den stationären Zustand nichts Neues aus, sie ermöglicht aber, der Veränderlichkeit von  $L$  mit  $\omega$  Rechnung zu tragen.

Die Abnahme der mittleren magnetischen Energie in der Zeiteinheit ist  $RJ^2$ . Die Größe  $R$  wird also für den allgemeinen Fall definiert als das Verhältnis der Abnahme der mittleren magnetischen Energie in der Zeiteinheit zum mittleren Quadrat der Stromstärke.

Ähnliche Definitionen ergaben sich für  $K$  und  $G$ . Die Größe  $K$  wird dadurch definiert, daß die mittlere Energie des elektrischen Feldes gleich  $\frac{1}{2} K$  mal dem mittleren Quadrat der Spannung gesetzt wird, während die Abnahme der mittleren elektrischen Energie in der Zeiteinheit gleich  $G$  mal dem mittleren Quadrat der Spannung ist.

Nach diesen Definitionen wird für eine Leitung bei einer bestimmten Periodenzahl ein solches System von Werten  $L$ ,  $R$ ,  $K$ ,  $G$  angenommen, wie es für eine Leitung mit unveränderlichen Eigenschaften gälte, die bei derselben Periodenzahl dieselbe Verteilung von Spannung und Stromstärke, auch dieselbe mittlere magnetische und elektrische Energie besäße, somit dieselben Verluste dieser Energien. Man nennt ein solches System das der wirksamen Werte.

Die wirksamen Werte der elektrischen Eigenschaften einer Leitung sind demnach im allgemeinen von der Periodenzahl abhängig, und daher auch die dazu gehörenden Größen  $\gamma$  und  $\beta$ .

**§ 225. Leitungen mit erheblicher Induktivität.** Die räumliche Dämpfung der elektrischen Wellen tritt durch die Energieverluste in den Widerständen der Leitung und in den Übergangswiderständen zwischen den Leitungen ein. Wäre es möglich, diese Verluste beliebig klein zu machen, so wären die Wellen auch räumlich ungedämpft, d. h. sie würden jede Stelle der Leitung mit gleicher Stärke erreichen. Man findet in der Tat, daß, wenn man  $R = 0$  und  $G = 0$  setzt, auch  $\beta = 0$  wird. Indessen ist dieser Fall ein nicht zu verwirklichender Idealfall. Ihm kommen aber solche Fälle wirklicher Leitungen nahe, bei denen die Verluste vergleichsweise gering sind. Fließt in einem Stück der Leitung von der Längeneinheit der Strom  $J$ , so besitzt es die magnetische Energie  $\frac{1}{2} LJ^2$  und wenn  $J$  sich sinusförmig ändert, so tritt diese Energie in der einen Hälfte der Periode in das Feld hinein, in der anderen Hälfte wieder heraus. Im Widerstand geht während einer halben Periode die Energie  $\frac{1}{2} RJ^2 \frac{\pi}{\omega}$  verloren, wenn  $J$  die Amplitude des Stromes bedeutet. Ob eine Leitung sich mit Bezug auf die magnetische Energie dem Falle der verlustfreien annähert, kann man aus dem Verhältnis der in jeder halben Periode durch den Strom verlorenen Energie zu der mit dem Strom erzeugten magnetischen Energie, also aus der Größe  $\pi R/\omega L$  beurteilen. Je kleiner diese Größe ist, um so mehr ähnelt die Leitung in bezug auf die Umsetzung der magnetischen Energie einer verlustfreien. Ähnlich liegt es mit der elektrischen Energie. In einer halben Periode tritt die Energie  $\frac{1}{2} KV^2$  in das elektrische Feld der Leitung; der Ableitungsstrom mit der Amplitude  $G V$  verursacht in der halben Periode einen Energieverlust  $\frac{1}{2} G V^2 \frac{\pi}{\omega}$ ; je

kleiner also  $\pi G/\omega K$  ist, um so mehr ähnelt die wirkliche Leitung einer Leitung ohne Verluste im elektrischen Felde.

Entwickelt man die Quadratwurzel in der Gleichung für  $\beta^2$  unter der Annahme, daß  $G^2/\omega^2 K^2$  sowie  $G^2/\omega^2 L^2$  klein gegen Eins seien, so erhält man nach einigen Umformungen für  $\beta^2$  den Wert

$$\beta^2 = \left( \frac{R}{2} \sqrt{\frac{K}{L}} + \frac{G}{2} \sqrt{\frac{L}{K}} \right)^2 (1 - \delta) \dots \dots \dots (270)$$

wo

$$\delta = \left( \frac{R}{L} - \frac{G}{K} \right) \left[ \frac{1}{4} \left( \frac{R^2}{\omega^2 L^2} - \frac{G^2}{\omega^2 K^2} \right) - \frac{1}{8} \left( \frac{R^4}{\omega^4 L^4} - \frac{G^4}{\omega^4 K^4} \right) + \dots \right].$$

Wenn  $R/\omega L$  und  $G/\omega K$  genügend klein sind, kann man  $\delta$  gegen Eins vernachlässigen und erhält dann

$$\beta = \frac{R}{2} \sqrt{\frac{K}{L}} + \frac{G}{2} \sqrt{\frac{L}{K}} \dots \dots \dots (271)$$

für eine Leitung, bei der die Verlustenergien in der halben Periode klein gegen die hin und her gehenden Energiebeträge sind. Die Wellen auf einer solchen Leitung sind zwar gedämpft, aber die Dämpfung ist von der Periodenzahl nahezu unabhängig. Daß dieser Zustand aber durch Nebenumstände doch wieder etwas verändert wird, wurde in § 224 schon ausgeführt.

Für  $\alpha^2$  ergibt sich durch dieselbe Entwicklung

$$\alpha^2 = \omega^2 KL \left[ 1 + \frac{1}{4} \left( R \sqrt{\frac{K}{L}} - G \sqrt{\frac{L}{K}} \right)^2 (1 + \varepsilon) \right],$$

wo  $\varepsilon$  Quadrate und höhere Potenzen von  $\frac{R}{\omega L}$  und  $\frac{G}{\omega K}$  enthält.

Bei Leitungen, deren Verlustenergien vergleichsweise klein sind, ist also  $\alpha$  der Frequenz fast genau proportional, der Gl. (271) entspricht die Gleichung

$$\alpha = \omega \sqrt{KL} \dots \dots \dots (271a)$$

Pflanzt sich über eine derartige Leitung eine aus Anteilen mit verschiedenen Frequenzen zusammengesetzte Strömung fort, so unterliegen alle Anteile nahezu den gleichen Änderungen, um so mehr, je näher die Leitung den verlustlosen kommt. Das Wellenbild bleibt also der Form nach nahezu unverändert. Wenn aber die Größen  $\alpha$  und  $\beta$  mit der Frequenz veränderlich sind, so wird das Wellenbild der Form nach geändert. Nach Heaviside, der diese Vorgänge zuerst behandelt hat, nennt man diese Erscheinung Distortion, wir übersetzen Verzerrung.

**§ 226. Leitungen ohne Verzerrung der Wellen.** Die bisher besprochenen Leitungen, bei denen  $R$  gegen  $\omega L$  und  $A$  gegen  $\omega K$  hinreichend klein ist, sind nur angenähert frei von Verzerrung. Es gibt einen Fall, in dem bei konstanten Eigenschaften im strengen Sinne keine Verzerrung einträte, wenn nämlich, wie auch nach § 217 bei fortschreitenden Wellen

$$\frac{L}{R} = \frac{K}{G}$$

ist. Führt man diese Beziehung in die Gleichungen (261) ein, so erhält man ohne Vernachlässigung

$$\beta_0 = \sqrt{GR} = R \sqrt{\frac{K}{L}}, \quad \alpha_0 = \omega \sqrt{KL}.$$

Dies besagt, daß in einem solchen Leiter die Wellen wohl ihrer Stärke nach abnehmen, daß sie aber der Form nach erhalten bleiben. Da aber nach den Ausführungen in § 224 die Größen  $R, L, G, K$  selbst mit der Frequenz, und zwar in verschiedener Weise veränderlich sind, so gibt es keine wirkliche verzerrungsfreie Leitung.

Wir wollen zunächst prüfen, in welcher Abhängigkeit die Dämpfung von der Ableitung steht.

Bei größter Sorgfalt in der Isolation würde man  $G$  so gering halten können, daß in dem Werte von  $\beta$  die Glieder mit  $G$  gegen die anderen vernachlässigt werden können. Der Ausdruck

$$\beta^2 = \frac{\omega K}{2} (\sqrt{\omega^2 L^2 + R^2} - \omega L)$$

läßt sich, wenn  $R^2, \omega^2 L^2$  klein gegen Eins ist, entwickeln in

$$\beta^2 = \left(\frac{R}{2} \sqrt{\frac{K}{L}}\right)^2 \left[1 - \frac{1}{4} \left(\frac{R}{\omega L}\right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{R}{\omega L}\right)^4 + \dots\right].$$

Auch dieser Ausdruck ist von  $\omega$  nur in geringem Grade abhängig, und zwar stellt  $\frac{R}{2} \sqrt{\frac{K}{L}}$  den Wert von  $\beta$  bei den höchsten Frequenzen dar.

Demgegenüber ergibt der für den verzerrungsfreien Zustand berechnete Wert von  $\beta_0$ , daß er für alle Periodenzahlen mindestens doppelt so groß ist wie im Zustande vollkommener Isolation.

Vergleicht man mit dem Zustande bei einer bestimmten endlichen Isolation, so ergibt sich aus der Gleichung

$$\frac{d(\beta^2)}{dG} = \frac{1}{2} \left( R + G \sqrt{\frac{R^2 + \omega^2 L^2}{G^2 + \omega^2 K^2}} \right),$$

daß  $\beta$  mit  $G$  stets zunimmt.

Es bleibt nun zu untersuchen, welche Bedeutung die Verzerrung der Wellen für die Übertragung der Ströme in der Telephonie hat.

**§ 227. Bedeutung der Verzerrung für das Fernsprechen.** Für die Fernsprechströme ist die Wellenverzerrung, wenn sie nicht gerade außerordentliche Verhältnisse annimmt, kaum störend. Auf die Erhaltung des Wellenbildes kommt es gar nicht besonders an, da das Ohr auf die verschiedenen Wellen, die zusammen einen Klang bilden, einzeln, also auflösend anspricht. Die psychische Tätigkeit setzt die einzelnen Empfindungen wieder zusammen, und die Erfahrung des täglichen Lebens lehrt, daß man imstande ist, bewußt oder unbewußt, große Komplexe von Wellen, die das Ohr treffen, von der geistigen Erfassung zugunsten eines kleinen Kreises anderer auszuschneiden; dies ist nicht nur möglich, wenn die beiden Gruppen von Wellen sehr verschiedenartig sind, wie es möglich ist, während eines Konzertes eine mehr oder weniger leise Unterhaltung zu führen, sondern auch, wenn sie gleicher Art sind, wie

sich unter einer größeren Zahl von Sprechenden kleinere Gruppen für sich unterhalten können. Es ergibt sich daraus, daß es für die Telephonie am wichtigsten ist, daß die für die Erfassung der gesprochenen Worte notwendigen Wellen mit ausreichender Stärke am Ende der Leitung ankommen, während die an sich vorteilhafte Übertragung der Sprache ohne Verzerrung nichts nützt, wenn die Wellen nicht kräftig genug sind.

Damit ist für telephonische Leitungen die Frage, ob man die Leitung durch absichtliche Verminderung des Isolationswiderstandes verzerrungsfrei machen solle, im verneinenden Sinne entschieden. Es kommt auf diese Eigenschaften fast gar nicht an, wogegen es von der größten Bedeutung ist, daß das Dämpfungsmaß bei den für die Sprache wichtigen Frequenzen einen bestimmten Wert nicht überschreitet. Die Ableitung muß also in Fernsprechkabeln möglichst gering gemacht werden <sup>56)</sup>.

Darüber, welche Frequenzen für die Übertragung der Sprache am wichtigsten sind, hat Devaux-Charbonnel Versuche angestellt <sup>57)</sup>. Er schaltete zwischen zwei Fernsprechapparate als Leitung das eine Mal Apparate mit hoher Induktivität, die also die hohen Töne am meisten schwächen, das andere Mal einen Kondensator, der die niederen Töne am wenigsten durchläßt, und stellte die Grenzen fest, innerhalb deren eine verständliche Übertragung möglich war; es fand sich, daß die Wellen mit 800 bis 1200 Perioden in der Sekunde nicht unterdrückt werden dürfen, ohne daß die Verständigung unmöglich wird. Zu ähnlichen Angaben über die Grenzen kommen Cohen und Shepherd mit Hilfe einer Anordnung, die von einer bestimmten Grenze ab die Wellen aller darüber liegenden Frequenzen abfängt.

Später sind diese Feststellungen mit künstlichen Leitungen, bei denen man eine starke Abhängigkeit der Dämpfung von der Frequenz hervorbringen kann, von verschiedenen Beobachtern wiederholt worden. Es hat sich daraus ergeben, daß es ungeachtet der fühlbaren Verbesserungen bei der Anwesenheit von Schwingungen von der Kreisfrequenz von mehr als 8000 bis gegen 16000 hauptsächlich darauf ankommt, daß die Frequenzen um  $\omega = 5000$  herum mit genügender Stärke übertragen wurden.

Eine Zeitlang hielt man folgende Größe für ein geeignetes Maß der Verzerrung: Sind  $\omega_1, \omega_2, \omega_3$  drei Frequenzen, von denen  $\omega_2$  die mittlere Fernsprechfrequenz, also 5000 bedeutet,  $\omega_1$  und  $\omega_3$  dazu symmetrisch nach unten und oben liegende Frequenzen, sind ferner  $\beta_1, \beta_2, \beta_3$  die zugehörigen Dämpfungen, so stellt der Bruch

$$A = \frac{1000}{\omega_3 - \omega_1} \frac{\beta_3 - \beta_1}{\beta_2}$$

das Verhältnis der Unterschiede der Dämpfungen bei einem Frequenzunterschied von 1000 zum mittleren Wert dar. Nach der Einführung der Fernsprechverstärker hat es sich gezeigt, daß diese Zahl, welche eine Eigenschaft der Leitung ohne Rücksicht auf ihre Länge ist, als technisches Maß für die Verzerrung nicht brauchbar ist; vielmehr wird die Sprache unverständlich, wenn das Dämpfungsmaß der höchsten noch in Frage kommenden Frequenzen, für welche man etwa  $\omega = 10\,000$  ansetzen kann, den Wert 5 erreicht hat, weil diese Frequenzen dadurch praktisch unhörbar geworden sind.

**§ 228. Leitungen mit starker Verzerrung.** Nach den Erörterungen in § 227 soll die Isolation der Leitungen so hoch wie möglich gehalten werden; dies ist durch sorgfältige Herstellung und Überwachung möglich, ohne daß deshalb erhebliche größere Kosten entständen, als wenn man eine geringere Isolation zuließe. Anders steht es in bestimmten Fällen mit dem Verhältnis  $R/\omega L$ . Bei Fernsprechkabeln bringt es die Rücksicht auf Durchmesser und Gewicht mit sich, daß die Querschnitte der Drähte in der Regel viel geringer sind als in oberirdischen Leitungen, und daß die Abstände zweier Leiter einer Schleife nur etwa von der Größenordnung ihrer Durchmesser sind, statt wie bei oberirdischen Leitungen gegen 50 mal so groß. Diese Maßverhältnisse haben großen Widerstand, große Kapazität und geringe Induktivität zur Folge. Man hat daher bei Kabeln mit schwachen Leitern zwar wie bisher  $G/\omega K$  als eine gegen Eins kleine Größe zu behandeln, dagegen ist  $\omega L$  gering gegen  $R$ .

Unter diesen Verhältnissen erhält man für  $\beta$  bis auf kleine Größen zweiter Ordnung den Wert

$$\beta = \sqrt{\frac{\omega KR}{2}} \left[ 1 - \frac{1}{2} \frac{\omega L}{R} + \frac{1}{2} \frac{G}{\omega K} + \frac{1}{8} \left( \frac{\omega L}{R} + \frac{G}{\omega K} \right)^2 \right].$$

Unter den tatsächlichen Verhältnissen kommt von der Klammer nur der Anteil  $\left( 1 - \frac{1}{2} \frac{\omega L}{R} \right)$  in Frage.

Für  $\alpha$  findet man den Wert

$$\alpha = \sqrt{\frac{\omega KR}{2}} \left[ 1 + \frac{1}{2} \frac{\omega L}{R} - \frac{1}{2} \frac{G}{\omega K} + \frac{1}{8} \left( \frac{\omega L}{R} + \frac{G}{\omega K} \right)^2 \right].$$

Für den Grenzfall, daß die Induktivität und die Ableitung verschwindend klein sind, ergibt sich:

$$\alpha = \beta = \sqrt{\frac{\omega KR}{2}} \dots \dots \dots (272)$$

Eine Leitung mit sehr geringer Induktivität wird daher die Erscheinungen der Verzerrung in besonderem Maße zeigen. Indessen zeigt sich gerade an ihnen, daß die Bedeutung der Verzerrung für die praktische Telephonie nicht sehr groß ist. Für ein gewöhnliches Fernsprechkabel mit 0,8 mm starken Drähten ergibt sich aus den Gewährleistungszahlen  $R = 73 \text{ Ohm/km}$ ,  $C = 0,037 \mu\text{F/km}$  und  $L = 0,67 \text{ mH/km}$ .

$\omega$	$\alpha$	$\beta$	$\omega/\alpha$
3500	0,0696	0,0679	50 300
5000	0,0838	0,0805	59 700
7500	0,1040	0,0975	72 000
10000	0,1212	0,1114	82 500

Die Zahlen der letzten Spalte ergeben nach § 220 die aus stehenden Wellen berechnete Geschwindigkeit.

Ein solches Kabel könnte noch auf 60 km Entfernung eine ausreichende Verständigung liefern. Bei einer solchen Länge haben die Anteile von der Frequenz 10 000 schon ein Dämpfungsmaß von 6,8. Allerdings zeigt der Vergleich der Übertragung über ein solches Kabel mit derjenigen über eine Leitung mit geringer Verzerrung und gleichem Dämpfungsmaß bei  $\omega = 5000$ ,

daß die Sprache auf dem Kabel wegen der Bevorzugung der niedrigeren Frequenzen etwas hallt, als wenn man in einem leeren Zimmer spräche.

**§ 229. Verzerrung gemäß dem Winkelmaß.** Die Frage, welche Bedeutung für die Verzerrung es hat, daß die Größe  $\alpha$  und dadurch die als Geschwindigkeit der Ausbreitung stehender Wellen bezeichnete Größe  $\omega/\alpha$  von der Frequenz mehr oder weniger stark abhängen, ist zurzeit noch Gegenstand von theoretischen Überlegungen und von Versuchen. Nach § 210 ist es sicher, daß unabhängig von der Form eines Anstoßes die ersten Regungen an einer um die Länge  $s$  entfernten Stelle zur Zeit  $s\sqrt{KL}$  ankommen. Wenn bis zum vollen Einschwingen eine bestimmte Anzahl von Schwingungen ablaufen, so steht dafür eine größere Zeit zur Verfügung, als für dieselbe Zahl von Schwingungen nach dem Einschwingen erforderlich ist. Und zwar ist der Überschuß über die normale Schwingungsdauer anfangs größer, als gegen das Ende des Einschwingens. Man hätte also beim Eintreffen eines Wellenzuges, der mit konstanter Periode abgesandt wurde, den Eindruck wie bei einer sich vom Ohre entfernenden Schallquelle. Eine solche Erscheinung kann aber nur dann der Beobachtung unterliegen, wenn das Einschwingen eine merkliche Zeit beansprucht, also bei sehr langen Leitungen.

Die durch die Einführung der Verstärker ermöglichte Vergrößerung der Entfernungen, auf welche gesprochen wird, schränkt bei sehr großen Entfernungen die Voraussetzung, daß die Wechselströme als hauptsächlich im eingeschwungenen Zustand befindlich zu betrachten seien, erheblich ein. Bei großen Entfernungen wird der Übergang von der Ruhe zum stationären Wechselstrom und die Rückkehr zur Ruhelage einen großen Teil der Zeit des Wellenzuges in Anspruch nehmen, und dadurch wird eine neue Art der Verzerrung, die vielleicht mit der durch die Größe  $\alpha$  bewirkten zusammenhängt, auftreten.

Einen Versuch, bei dem derartige Wirkungen zutage treten, beschreibt A. B. Clark<sup>58)</sup>. Einer Leitung von 1685 km Länge, aus deren Eigenschaften sich eine Fortpflanzungsgeschwindigkeit von 17200 km/s ergab, wurde aus einer Wechselstromquelle ein 0,065 s dauernder Zug von Wechselströmen von 1800 Per/s zugeführt; die Ströme am Anfang und am Ende der Leitung wurden oszillographisch aufgenommen. Während der Wellenzug am Anfang der Leitung während der ganzen Dauer gleiche Höhe hat, steigt er am Ende der Leitung langsam an und fällt langsam ab. Die ersten Anzeichen der Ströme am Ende treffen zu der durch die Länge 1685 km und die Geschwindigkeit 17200 km/s bestimmten Zeit ein; bis die Ströme aber die stationäre Höhe erreicht haben, vergeht eine Zeit von 0,055 s, also gut  $\frac{5}{6}$  der Zeit des Wellenzuges. Da das Ende des Zuges sich wieder pünktlich anzeigt, so hat also der stationäre Zustand am Ende nur  $\frac{1}{6}$  der Zeit des Wellenzuges gedauert. Der abklingende Vorgang zeigt Schwebungen; es sei noch bemerkt, daß der Anstieg mit langsamen Wechsellern begann. Ein Sprechversuch auf dieser Leitung ergab eine stark verzerrte, durch eigenartige, „metallisch klingende“ Nebentöne beeinträchtigte Übertragung.

Werden dagegen die elektrischen Verhältnisse der Leitung (durch Verminderung ihrer Induktivität) so gewählt, daß die Fortpflanzungsgeschwindigkeit

doppelt so groß war, so machten sich Anlauf und Auslauf der Schwingungen am Ende nur während kurzer Zeiträume bemerkbar. Es trat daher auch keine wesentliche Verzerrung auf.

**§ 230. Scheinwiderstände einer Wechselstromleitung.** Wenn am Ende der Leitung ein bestimmter Apparat mit dem Scheinwiderstand  $\mathfrak{R}_e$  eingeschaltet ist, so wird dadurch das Verhältnis  $\mathfrak{B}_e/\mathfrak{I}_e = \mathfrak{R}_e$  festgelegt; da  $\mathfrak{B}_a$  und  $\mathfrak{I}_a$  sich aus  $\mathfrak{B}_e$  und  $\mathfrak{I}_e$  eindeutig ergeben, so ist also auch deren Verhältnis  $\mathfrak{U} = \mathfrak{B}_a/\mathfrak{I}_a$  bestimmt, wenn  $\mathfrak{R}_e$  gegeben ist.

Unter den möglichen Werten von  $\mathfrak{R}_e$  sind zwei ausgezeichnet, nämlich  $\mathfrak{R}_e = \infty$  und  $\mathfrak{R}_e = 0$ . Der erstere Wert gilt, wenn die Leitung am Ende offen ist, also dort keinen Strom hergibt; den zugehörigen Scheinwiderstand am Anfang nennen wir den Leerlaufwiderstand  $\mathfrak{U}_1$ . Ist  $\mathfrak{R}_e = 0$ , so ist die Spannung am Ende der Leitung bei endlicher Stromstärke gleich Null, und dies trifft bei einem Kurzschluß am Ende zu. Wir nennen daher den zugehörigen Scheinwiderstand am Anfang den Kurzschlußwiderstand  $\mathfrak{U}_2$ . Diese beiden Größen hängen lediglich von den Eigenschaften der Leitung ab. Wir finden sie aus den Gl. (264), indem wir das Verhältnis  $\mathfrak{B}_a/\mathfrak{I}_a$  bilden und zunächst für  $\mathfrak{I}_e$  den Wert Null bei endlichem  $\mathfrak{B}_e$  setzen. Dann erhalten wir

$$\mathfrak{U}_1 = \mathfrak{Z} \frac{e^{\gamma l} + e^{-\gamma l}}{e^{\gamma l} - e^{-\gamma l}} \dots \dots \dots (273)$$

Setzen wir ferner  $\mathfrak{B}_e = 0$  bei endlichem  $\mathfrak{I}_e$ , so ergibt sich

$$\mathfrak{U}_2 = \mathfrak{Z} \frac{e^{\gamma l} - e^{-\gamma l}}{e^{\gamma l} + e^{-\gamma l}} \dots \dots \dots (274)$$

Nach dem Spiralendiagramm schwanken  $e^{\gamma l} + e^{-\gamma l}$  sowie  $e^{+\gamma l} - e^{-\gamma l}$  mit  $l$  innerhalb gewisser Grenzen, und zwar treffen die Maxima der einen Größe mit den Minima der anderen zusammen. Die Werte von  $\mathfrak{U}_1$  und  $\mathfrak{U}_2$  machen daher ähnliche Veränderungen durch, wenn man gleichartige Leitungen verschiedener Länge betrachtet. Indessen gilt unabhängig von der Länge die Beziehung

$$\sqrt{\mathfrak{U}_1 \mathfrak{U}_2} = \mathfrak{Z} \dots \dots \dots (275)$$

Für Leitungen, bei denen  $\beta l$  einen beträchtlichen Wert hat, praktisch genommen 2 und mehr, überwiegt der Betrag von  $e^{\gamma l}$  bei weitem den von  $e^{-\gamma l}$ . Für solche Leitungen haben also beide Scheinwiderstände nahezu den Wert  $\mathfrak{Z}$ .

Die beiden Größen  $\mathfrak{U}_1$  und  $\mathfrak{U}_2$  eignen sich besonders zur Bestimmung der elektrischen Eigenschaften einer Leitung durch Messung, wie in § 261 näher ausgeführt werden wird.

Ferner kann man aus ihnen mit Hilfe des als bekannt angenommenen Endwiderstandes  $\mathfrak{R}_e$  einen beliebigen Scheinwiderstand  $\mathfrak{U}$  des Anfangs durch Rechnung oder Konstruktion finden.

Um dies zu zeigen, wollen wir den Gl. (264) zunächst eine vereinfachte Form geben, indem wir setzen

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{2}(e^{\gamma l} + e^{-\gamma l}) &= \mathfrak{C} \cos \gamma l = \mathfrak{A} \\ \mathfrak{B} \frac{e^{\gamma l} - e^{-\gamma l}}{2} &= \mathfrak{B} \sin \gamma l = \mathfrak{B} \\ \frac{1}{\mathfrak{B}} \frac{e^{\gamma l} - e^{-\gamma l}}{2} &= \frac{\sin \gamma l}{\mathfrak{B}} = \mathfrak{C} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (276)$$

wobei

$$\mathfrak{A}^2 - \mathfrak{B} \mathfrak{C} = 1 \dots \dots \dots (277)$$

ist. Unter den drei Größen  $\mathfrak{A}$ ,  $\mathfrak{B}$ ,  $\mathfrak{C}$  sind also nur zwei unabhängige.

Dann ist also

$$\mathfrak{B}_a = \mathfrak{A} \mathfrak{B}_e + \mathfrak{B} \mathfrak{Z}_e; \quad \mathfrak{Z}_a = \mathfrak{A} \mathfrak{Z}_e + \mathfrak{C} \mathfrak{B}_e \dots \dots \dots (278)$$

Ferner ergeben sich

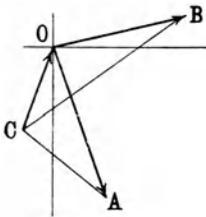
$$u_1 = \mathfrak{A}/\mathfrak{C}, \quad u_2 = \mathfrak{B}/\mathfrak{A} \dots \dots \dots (279)$$

Setzt man  $\mathfrak{B}_e = \mathfrak{R}_e \mathfrak{Z}_e$  und bildet  $u = \mathfrak{R}_e/\mathfrak{Z}_a$ , so erhält man

$$u = u_1 \frac{\mathfrak{R}_e + u_2}{\mathfrak{R}_e + u_1} \dots \dots \dots (280)$$

Wenn man in Fig. 190, wo  $OA = u_1$ ,  $OB = u_2$  sind, die Strecke  $\mathfrak{R}_e = CO$  in der angegebenen Weise einträgt, so ist  $CB = \mathfrak{R}_e + u_2$ ,

Fig. 190.



$CA = \mathfrak{R}_e + u_1$ .  $u$  liegt also für das angenommene  $\mathfrak{R}_e$  dem  $u_1$  um den Winkel  $ACB$  voraus, und es verhalten sich die Beträge

$$\frac{|u|}{u_1} = \frac{CB}{CA}.$$

Für eine gesetzmäßige Änderung des  $\mathfrak{R}_e$  kann man einfache Beziehungen für die daraus folgenden Änderungen des  $u$  aufstellen, auf die wir aber nicht näher eingehen.

Einen anderen wichtigen Scheinwiderstand erhält man, wenn man den vollständigen Stromkreis der Leitung mit den angeschlossenen Apparaten betrachtet.

Der Anfang der Leitung sei mit einer Wechselstromquelle verbunden, die bei Leerlauf die EMK  $\mathfrak{C}$  gibt und einen inneren Wechselstromwiderstand  $\mathfrak{R}_a$  hat. Dann ist

$$\mathfrak{C} = \mathfrak{B}_a + \mathfrak{R}_a \mathfrak{Z}_a.$$

Am Ende ist für einen Apparat  $\mathfrak{R}_e$

$$\mathfrak{B}_e = \mathfrak{R}_e \mathfrak{Z}_e.$$

Führt man dies in die Gl. (278) ein, so erhält man

$$\mathfrak{C} = \mathfrak{B} \{ \mathfrak{A} (\mathfrak{R}_a + \mathfrak{R}_e) + \mathfrak{B} + \mathfrak{C} \mathfrak{R}_a \mathfrak{R}_e \}.$$

Diese Gleichung kann man mit Hilfe der Größen  $u_1$  und  $u_2$  auf die Form bringen

$$\mathfrak{C} = \mathfrak{A} \mathfrak{B} \left( \mathfrak{R}_a + \mathfrak{R}_e + \frac{\mathfrak{R}_a \mathfrak{R}_e + u_1 u_2}{u_1} \right) \dots \dots \dots (281)$$

Sie bestimmt den Endstrom aus der wirksamen EMK, und man kann den Faktor von  $\mathfrak{Z}$  als den wirksamen Scheinwiderstand des ganzen Stromkreises betrachten.

Schaltet man an das Ende der Leitung einen Apparat mit einem Scheinwiderstand gleich dem Wellenwiderstand, so ergibt sich aus der Gl. (265), wenn man darin  $\mathfrak{B}_e = \mathfrak{Z} \mathfrak{I}_e$  setzt,

$$\mathfrak{B} = \mathfrak{B}_e e^{\nu(l-x)}, \quad \mathfrak{I} = \mathfrak{I}_e e^{\nu(l-x)} \dots \dots \dots (282)$$

An jeder Stelle der Leitung haben also Spannung und Stromstärke zueinander das unveränderliche Verhältnis  $\mathfrak{Z}$ .

Das Ausfallen der Posten mit  $e^{-\nu(l-x)}$  zeigt an, daß in diesem Falle keine reflektierten Wellen vorkommen, wie es bei der engen Beziehung von  $\mathfrak{Z}$  zum Wellenwiderstand zu erwarten ist. Eine Leitung, welche man am Ende durch einen dem Wellenwiderstand gleichen Scheinwiderstand abgeschlossen hat, verhält sich also mit Bezug auf gegen den Anfang zurücklaufende reflektierte Wellen wie eine beliebige lange Leitung. Dieser Umstand ist für Leitungen mit Verstärkern, bei denen Reflexionen nach dem Anfang zu vermieden werden müssen, von Wichtigkeit.

**§ 231. Der Wellenwiderstand bei Wechselstrom.** Die Größe

$$\mathfrak{Z} = \sqrt{\frac{i \omega L + R}{i \omega K + G}}$$

hat im Aufbau eine gewisse Ähnlichkeit mit der Größe  $Z = \sqrt{\frac{L}{K}}$ , die wir in § 212 als den Wellenwiderstand bei fortschreitenden Wellen bezeichnet haben. Sie hat für die stationären Wechselstromvorgänge dieselbe Bedeutung beim Übergang von einer Leitung auf eine andere abweichenden Wellenwiderstandes oder auf Apparate bestimmten Scheinwiderstandes. Dies wird im einzelnen später noch näher untersucht werden.

Bei Leitungen mit vergleichsweise hoher Induktivität ist der Wellenwiderstand bei Wechselstrom von der Frequenz nahezu unabhängig, weil  $R^2$  gegen  $\omega^2 L^2$  und  $G^2$  gegen  $\omega^2 K^2$  nicht in Betracht kommen. In solchen Fällen ist sehr nahe  $\mathfrak{Z} = Z$ .

Nach den Gl. (77) und (149) gilt also für starkdrähtige oberirdische Doppelleitungen, deren Drähte einen Durchmesser  $2\varrho$  und einen Achsenabstand  $d$  haben,

$$Z = 4c \sqrt{\log \frac{d}{\varrho} \left( \log \frac{d}{\varrho} + \frac{1}{4} \right)} \text{ (cgs)}$$

oder sehr angenähert

$$Z = 120 \log \frac{d}{\varrho} \text{ Ohm.}$$

Die Abhängigkeit dieses Wertes von dem Verhältnis  $\frac{d}{\varrho}$  ist für die praktischen Fälle gering; man erhält z. B. für  $d = 20$  cm und verschiedene Drahtstärken folgende Werte für  $Z$ :

Drahtstärke in mm . . .	3	4	5
Wellenwiderstand . . .	600	552	524

Der nach Gl. (250) bestimmte Wirkungsgrad einer Verbindungsstelle zwischen 3 und 5 mm starken Leitungen liegt noch über 0,99.

Die unmittelbare Verbindung solcher Leitungen ist daher in jedem Falle der über einen Übertrager vorzuziehen. Immerhin bedeutet eine solche Übergangsstelle soviel wie die Zuschaltung von etwa 1 km Leitung von 3 mm Stärke.

### § 232. Scheinwiderstände einer Leitung bei verschiedenen Frequenzen.

Irgend einer der in § 230 erwähnten Scheinwiderstände wird für eine bestimmte Frequenz durch einen komplexen Ausdruck  $\xi + i\eta$  dargestellt. Ändert man die Frequenz, so ändern sich auch  $\xi$  und  $\eta$ , und zwar bei stetiger Änderung der Frequenz ebenfalls stetig. Es liegt nahe, die Größen  $\xi$  und  $\eta$ , die man so, etwa bei einer Meßreihe erhält, graphisch aufzutragen; man kann  $\xi$  und  $\eta$  einzeln oder auch den Betrag und den Phasenwinkel (vgl. Fig. 198) gegen die Frequenz aufzeichnen oder die komplexe Größe  $\xi + i\eta$  in der gewöhnlichen Darstellungsform. Wir beschäftigen uns hier mit einigen Eigenschaften<sup>59)</sup> der sich ergebenden Linien für stetig erzeugte Werte  $\xi + i\eta$ . Es ist dabei zu beachten, daß es sich um keine Vektorzeichnung handelt, die ja nur Größen gleicher Frequenz enthalten kann, sondern nur um die gebräuchliche Darstellung komplexer Größen.

Wenn wir in dem Ausdruck (273) für den Leerlaufwiderstand setzen

$$\mathfrak{Z} = Ze^{-i\delta}, \quad \gamma = \alpha i + \beta, \quad \mathfrak{U}_1 = \xi + i\eta,$$

so ergibt die Trennung des Reellen und Imaginären die Gleichungen

$$\cos \alpha l (\xi d - sZ \cos \delta) = \sin \alpha l (\eta s + dZ \sin \delta)$$

$$\sin \alpha l (\xi S - dZ \cos \delta) = -\cos \alpha l (\eta d - sZ \sin \delta).$$

Darin sind  $s$  und  $d$  Abkürzungen für  $s = e^{\beta l} + e^{-\beta l}$ ,  $d = e^{\beta l} - e^{-\beta l}$ . Man erhält daraus die Gleichung

$$\left( \xi - Z \cos \delta \frac{s^2 + d^2}{2sd} \right)^2 + \left( \eta + Z \sin \delta \frac{s^2 + d^2}{2sd} \right)^2 = \left( \frac{Z(s^2 - d^2)}{2sd} \right)^2.$$

Wir setzen

$$\xi_0 = Z \cos \delta \frac{s^2 + d^2}{2sd} = Z \cos \delta \frac{e^{2\beta l} + e^{-2\beta l}}{e^{2\beta l} - e^{-2\beta l}}$$

$$\eta_0 = -Z \sin \delta \frac{s^2 + d^2}{2sd} = -Z \sin \delta \frac{e^{2\beta l} + e^{-2\beta l}}{e^{2\beta l} - e^{-2\beta l}}$$

$$\varrho = \frac{Z(s^2 - d^2)}{2sd} = \frac{2Z}{e^{2\beta l} - e^{-2\beta l}}.$$

Die Gleichung

$$(\xi - \xi_0)^2 + (\eta - \eta_0)^2 = \varrho^2$$

würde einen Kreis darstellen, wenn die Größen  $Z$ ,  $\delta$ ,  $\beta$ , aus denen  $\xi_0$ ,  $\eta_0$  und  $\varrho$  sich aufbauen, von der Frequenz, der hier unabhängig veränderlichen Größe, unabhängig wären. Dies ist in keinem Falle streng der Fall, wohl aber in vielen Fällen angenähert. Man hat in dieser Tatsache für den Fall einer Meßreihe mit verschiedenen Frequenzen ein Mittel, um zu prüfen, ob die Ergebnisse frei von groben Irrtümern sind. Dies trifft um so mehr zu, als die

für dieselben Frequenzen geltenden Werte von  $u_2$ , dem Kurzschlußwiderstand, wie man sich leicht überzeugen kann, auf demselben Kreise liegen, aber, wie noch gezeigt werden wird, nahezu diametral denen von  $u_1$  gegenüber.

Die obigen Gleichungen zeigen, daß aus den Elementen des Kreises, welcher sich den beobachteten Werten von  $u_1$  und  $u_2$  (Fig. 191) am besten anpaßt, durch Rechnung oder Konstruktion die mittleren Werte von  $\xi$  und  $\beta l$  abgeleitet werden können. Wir gehen auf diese leicht zu übersehenden Beziehungen nicht näher ein.

Der Mittelpunkt des Kreises ist in komplexer Form durch

$$\xi_0 + i\eta_0 = Z \frac{e^{2\beta l} + e^{-2\beta l}}{e^{2\beta l} - e^{-2\beta l}} e^{-i\delta} = aZe^{-i\delta}$$

bezeichnet, er liegt also mit dem Wellenwiderstand  $\xi$  auf derselben Linie. Man sieht, daß  $aZ$ , die Länge dieser Linie bis zum Mittelpunkt, größer als  $\rho$  ist, der Kreis liegt also so, daß alle seine Punkte positive reelle Koordinaten haben.

Fig. 191 stellt die Ergebnisse einer Meßreihe an einer pupinisierten Freileitung dar. Die mit Kreisen umgebenen Punkte gelten für  $u_1$  in Abständen von 20 zu 20 Perioden, die gekreuzten für  $u_2$ .

Wir setzen

$$\xi = \xi_0 - \rho \cos(u_1 + \delta)$$

$$\eta = \eta_0 - \rho \sin(u_1 + \delta).$$

Diese Angaben entsprechen einem Winkel  $u_1$ , der im Sinne der Uhrzeigerdrehung wächst und mit Null oder einem Vielfachen von  $2\pi$  beginnt, wenn  $u_1$  den kleinsten Wert durchläuft. Aus der Gleichung  $\xi + i\eta = u_1$ , ausführlicher

$$aZe^{-i\delta} - \rho e^{-i(u_1 + \delta)} = Ze^{-i\delta} \frac{s \cos \alpha l + id \sin \alpha l}{d \cos \alpha l + iss \sin \alpha l},$$

folgt nach einfachen Umformungen die Gleichung

$$e^{iu} = - \frac{d \cos \alpha l + iss \sin \alpha l}{d \cos \alpha l + iss \sin \alpha l},$$

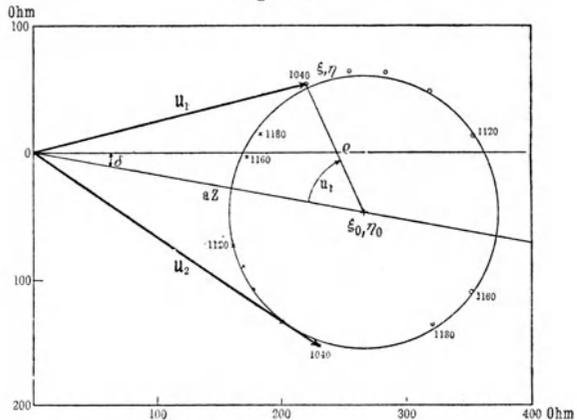
aus der wiederum die folgende sich ergibt

$$tg \alpha l tg \frac{u_1}{2} = - \frac{d}{s} \dots \dots \dots (283a)$$

Auf demselben Wege findet man für den Winkel  $u_2$ , welcher den zu  $u_1$  gehörenden Wert von  $u_2$  auf dem Kreise bestimmt, die Gleichung

$$\frac{d}{s} tg \alpha l = tg \frac{u_2}{2} \dots \dots \dots (283b)$$

Fig. 191.



Nach diesen Gleichungen können wir den Zusammenhang zwischen  $\alpha l$  und den für  $u_1$  und  $u_2$  bestimmten Punkten auf dem Kreise feststellen. Wir gehen aus von der Überlegung, daß  $u_1$  einen Mindestwert hat, wenn  $\alpha l = \frac{\pi}{2}$  ist; am Ende hat der Strom den Wert Null, die Spannung einen bestimmten endlichen Wert, und daher zeigt der Anfang, wenn die Leitung eine Viertelwelle lang ist, bei kleinster Spannung eine größte Stromstärke.

Für  $\alpha l = \frac{\pi}{2}$  wird nach Gl. (283 a)  $tg \frac{u_1}{2} = 0$ , also  $u_1 = 0$ . Nimmt bei steigender Frequenz  $\alpha l$  zwischen  $\frac{\pi}{2}$  und  $\pi$  einen Wert an, für den  $tg \alpha l = -\frac{d}{s}$  wird, so wird  $tg \frac{u_1}{2} = +1$ , mithin  $u_1 = 90^\circ$ ; für  $\alpha l = \pi$  ist  $tg \frac{u_1}{2} = \infty$ , also  $u_1 = \pi$ . Für jedes Fortschreiten von  $\alpha l$  um  $\frac{\pi}{2}$  schreitet  $u_1$  im Sinne des Uhrzeigers um  $\pi$  voran. Stellt man also auf dem Kreis einen vollen Umlauf von  $u$  fest, so unterscheiden sich die Winkelmaße der zugehörigen Frequenzen um den Wert  $\pi$ .

Bei  $\alpha l = \frac{\pi}{2}$  nimmt die kurzgeschlossene Leitung, die am Ende einen Strom endlicher Größe unter der Spannung Null abgibt, unter einem Höchstwert der Spannung einen Mindestwert des Stromes auf. Dem Werte  $\alpha l = \frac{\pi}{2}$  entspricht nach Gl. (283 b) der Wert  $u_2 = \pi$ .  $u_2$  beginnt also diametral gegenüber dem für dieselbe Frequenz geltenden Wert von  $u_1$ . Wenn es den Wert  $\frac{3\pi}{2}$  erreicht, so ist  $tg \alpha l = -\frac{s}{d}$ , und dies bedeutet einen kleineren Wert von  $\alpha l$ , als den, bei welchem  $u_1$  den Wert  $\frac{\pi}{2}$  erreicht. Für  $\alpha l = \pi$  wird  $u_2 = 2\pi$ .

Der äußere Halbkreis wird sowohl von  $u_1$  als  $u_2$  in einem kürzeren Frequenzbereich durchlaufen, als der innere. Dies macht sich bei Messungen dadurch geltend, daß Werte von  $u_1$  und  $u_2$ , die auf den äußeren Halbkreis fallen, mehr von der Konstanz der Frequenz abhängig sind, als solche auf dem inneren Halbkreis.

Bei allen Änderungen von  $u_1$  und  $u_2$  mit der Frequenz bleibt bei gleichmäßig zusammengesetzten Leitungen die Beziehung erhalten  $u_1 u_2 = \mathfrak{Z}^2$ . Die Größe  $\mathfrak{Z}$  ist nicht in strengem Sinne von der Frequenz unabhängig, wohl aber praktisch bei Leitungen mit erheblicher Induktivität. Bei Messungen an solchen Leitungen wurde eine gute Annäherung der Meßwerte an den Kreis als geometrischer Ort gefunden, aber die Werte von  $u_1$  und  $u_2$  entsprachen nicht der Gesetzmäßigkeit gleichmäßiger Leitungen.

Als merkwürdige Einzelbeobachtung wäre noch zu erwähnen, daß die Scheinwiderstände der einzelnen Adern des Fernkabels Hannover—Magdeburg bei der Messung mit derselben Frequenz auch auf einem Kreise lagen, und zwar die geradzahligen Aderpaare in einer Gruppe für sich und ebenso die ungeradzahligen. Mit den besprochenen Kreisgesetzen hängt dies so zusammen,

daß es sich um Adern etwa gleicher Dämpfung und gleichen Wellenwiderstandes handelt, deren Winkelmaße aber durch die Unterschiede der Kapazitäten und Induktivitäten ungleich waren, so daß sich dieselbe Wirkung ergab, wie bei Frequenzunterschieden bei einer Ader. Die Teilung der Ergebnisse in zwei Gruppen ist wohl auf die verschiedenen Dralle der Aderpaare zurückzuführen.

## Zweiter Abschnitt.

### Eigenschaften zusammengesetzter Leitungen.

**§ 233. Verschiedene Formen zusammengesetzter Leitungen.** Sie bilden den Gegensatz zu in sich gleichmäßigen Leitungen. Während man eine bestimmte Stelle auf diesen durch den Abstand von einem der Enden bezeichnen kann, ist bei den zusammengesetzten Leitungen allenfalls eine Angabe der Ordnungsnummern des betreffenden Stückes möglich. Wir werden mit zusammengesetzten Leitungen zu tun haben, die aus wirklichen, getrennte Orte verbindenden Leitungen aufgebaut sind, aber auch mit „künstlichen“ Leitungen, örtlichen Schaltungen, die zwischen ihren Anfangs- und Endklemmen ähnliche Vorgänge zeigen, wie sie auf langen wirklichen Leitungen ablaufen. Unter ihnen gibt es wieder solche, die aus möglichst gleichen Teilen aufgebaut sind, und so von Stelle zu Stelle ähnliche Änderungen der elektrischen Größen hervorbringen, wie wirkliche Leitungen, und andere, die sich nur mit Bezug auf bestimmte Stellen einer wirklichen Leitung ähnlich verhalten, z. B. an den Eingangsklemmen.

Das Anwendungsgebiet der zu erörternden Sätze ist sehr mannigfaltig. Abgesehen von den Vorgängen in miteinander verbundenen wirklichen Leitungen verschiedener Art betreffen sie die künstlichen Leitungen, die man als Eichleitungen, als Kettenleiter und als Ausgleichsleitungen in Verstärkeranlagen gebraucht. Sie sind auch für die Theorie der Pupinleitungen wichtig. In § 174 ist darauf hingewiesen, daß die Entwicklungen für sinusförmige Wechselströme zugleich die Grundlage für die Darstellung von Ausgleichsvorgängen nach der Formel von Heaviside liefern.

**§ 234. Das lineare Gleichungspaar.** Ist eine Leitung aus verschieden gearteten Stücken zusammengesetzt, so kann man sie stets in der Weise in Teile zerlegen, daß jeder Teil für sich gleichmäßig ist. Dann gelten also für jeden Teil Gleichungen von der Form der Gl. (268) und (278); die Werte von Strom und Spannung an seinem Ende gehen mittels linearer Gleichungen aus deren Werten am Anfang dieses Teiles hervor. Von einem Teil zum anderen wechseln die Werte der Koeffizienten  $\mathfrak{A}$ ,  $\mathfrak{B}$ ,  $\mathfrak{C}$ , aber es bleibt die lineare Form der Gleichungen bei allen Teilen. Es folgt daher, daß auch die Werte von Strom und Spannung am Anfang und am Ende einer ganz beliebig zusammengesetzten Leitung durch lineare Gleichungen verbunden sind; in dessen enthalten diese wahrscheinlich nicht zwei unabhängige Koeffizienten,

wie die Gl. (268), sondern man wird ihnen zunächst vier unabhängige Koeffizienten geben und erhält so etwa die Form

$$\begin{aligned}\mathfrak{V}_a &= \mathfrak{A}_1 \mathfrak{V}_e + \mathfrak{B} \mathfrak{Z}_e \\ \mathfrak{Z}_a &= \mathfrak{A}_2 \mathfrak{Z}_e + \mathfrak{C} \mathfrak{V}_e.\end{aligned}$$

Wir werden indessen finden, daß auch in den allgemeinsten Fällen noch Beziehungen zwischen diesen Koeffizienten bestehen.

**§ 235. Zur Mitte symmetrische Leitung.** Zunächst machen wir die Einschränkung, daß die Leitung derart zusammengesetzt sei, daß sie durch eine Teilung in der Streckenmitte in zwei elektrisch symmetrische Teile zerlegt werde. Dies ist z. B. der Fall, wenn sich in der Mitte einer oberirdischen Leitung eine Kabelstrecke befindet.

Wenn man bei einer solchen Leitung Sender und Empfänger vertauscht, so wird der Sender am fernen Ende unter der Spannung  $\mathfrak{V}_a$  den Strom  $\mathfrak{Z}_a$  in die Leitung senden, der Empfänger am Anfang der Leitung unter der Spannung  $\mathfrak{V}_e$  den Strom  $\mathfrak{Z}_e$  abnehmen. Daher tritt in den Gleichungen  $\mathfrak{V}_e$  an Stelle von  $\mathfrak{V}_a$ ,  $\mathfrak{Z}_a$  an Stelle von  $\mathfrak{Z}_e$ ; die Ströme erhalten ferner umgekehrte Richtung, also tritt  $-\mathfrak{Z}_e$  an Stelle von  $\mathfrak{Z}_a$  und  $-\mathfrak{Z}_a$  an Stelle von  $\mathfrak{Z}_e$ . Es ergibt sich jetzt

$$\begin{aligned}\mathfrak{V}_e &= \mathfrak{A}_1 \mathfrak{V}_a - \mathfrak{B} \mathfrak{Z}_a \\ -\mathfrak{Z}_e &= -\mathfrak{A}_2 \mathfrak{Z}_a + \mathfrak{C} \mathfrak{V}_a.\end{aligned}$$

Führt man dies in die vorigen Gleichungen ein und setzt die Koeffizienten von  $\mathfrak{V}_a$  und  $\mathfrak{Z}_a$  bezüglich auf beiden Seiten gleich, so findet man, daß  $\mathfrak{A}_1 = \mathfrak{A}_2$ , wofür wir  $\mathfrak{A}$  setzen; ferner daß  $\mathfrak{A}^2 - \mathfrak{B}\mathfrak{C} = 1$  ist.

Im Falle einer zu ihrer Mitte symmetrischen, sonst aber ganz beliebig zusammengesetzten Leitung ist daher die Zahl der Koeffizienten stets auf zwei beschränkt, also ebenso viele, wie eine gleichmäßige Leitung besitzen würde.

Es geht hieraus das für die Anwendungen wichtige Ergebnis hervor, daß man für eine zu ihrer Mitte symmetrische Leitung, die im übrigen ganz beliebig zusammengesetzt ist, für eine bestimmte Frequenz eine gleichmäßige Leitung angeben kann, die dieselben Konstanten  $\mathfrak{A}$ ,  $\mathfrak{B}$ ,  $\mathfrak{C}$  wie die zusammengesetzte Leitung hat. Wir nennen diese die gleichmäßige Ersatzleitung.

In § 248 wird eine zusammengesetzte Leitung besprochen werden, die aus untereinander gleichen, in sich symmetrischen Teilen besteht, die aber selbst wieder aus verschiedenartigen Stücken zusammengesetzt sind. Nach dem soeben Bewiesenen läßt sich für jede in sich symmetrische Strecke eine gleichmäßige Ersatzleitung angeben, die durch die Koeffizienten  $\vartheta$  (an Stelle des  $\gamma$ ) und  $\mathfrak{P}$  (an Stelle des  $\mathfrak{Z}$ ) definiert sei. Hat das Stück die Länge  $s$ , so bestehen zwischen den Werten von Spannung und Stromstärke  $\mathfrak{V}_1$  und  $\mathfrak{Z}_1$  am Anfange, sowie deren Werten  $\mathfrak{V}_2$  und  $\mathfrak{Z}_2$  am Ende des Stückes die Beziehungen nach den Gl. (268):

$$\begin{aligned}\mathfrak{V}_1 &= \mathfrak{V}_2 \mathfrak{C} \operatorname{of} \vartheta s + \mathfrak{P} \mathfrak{Z}_2 \mathfrak{S} \operatorname{in} \vartheta s \\ \mathfrak{Z}_1 &= \mathfrak{Z}_2 \mathfrak{C} \operatorname{of} \vartheta s + \frac{\mathfrak{V}_2}{\mathfrak{P}} \mathfrak{S} \operatorname{in} \vartheta s.\end{aligned}$$

Schaltet man an das Ende ein gleiches Stück, so mögen an dessen Ende die Werte  $\mathfrak{B}_3$  und  $\mathfrak{Z}_3$  gelten. Die Beziehungen zwischen  $\mathfrak{B}_2$  und  $\mathfrak{Z}_2$  einerseits und  $\mathfrak{B}_3$  und  $\mathfrak{Z}_3$  andererseits ergeben sich durch

$$\mathfrak{B}_2 = \mathfrak{B}_3 \mathfrak{Cof} \vartheta s + \mathfrak{P} \mathfrak{Z}_3 \mathfrak{Sin} \vartheta s$$

$$\mathfrak{Z}_2 = \mathfrak{Z}_3 \mathfrak{Cof} \vartheta s + \frac{\mathfrak{B}_3}{\mathfrak{P}} \mathfrak{Sin} \vartheta s.$$

Eliminiert man  $\mathfrak{B}_2$  und  $\mathfrak{Z}_2$ , so ergibt sich nach Durchführung der Rechnung, indem man z. B.  $\mathfrak{Cof}^2 \vartheta s + \mathfrak{Sin}^2 \vartheta s = \mathfrak{Cof} 2 \vartheta s$  setzt

$$\mathfrak{B}_1 = \mathfrak{B}_3 \mathfrak{Cof} 2 \vartheta s + \mathfrak{P} \mathfrak{Z}_3 \mathfrak{Sin} 2 \vartheta s$$

$$\mathfrak{Z}_1 = \mathfrak{Z}_3 \mathfrak{Cof} 2 \vartheta s + \frac{\mathfrak{B}_3}{\mathfrak{P}} \mathfrak{Sin} 2 \vartheta s.$$

Das Gleichungssystem hat also denselben Aufbau, nur ist entsprechend der doppelten Länge auch  $2s$  in das Argument eingetreten statt  $s$ . Würde man noch ein drittes, viertes Stück ansetzen, so erhielte man das Argument  $3\vartheta s$ ,  $4\vartheta s$ . Der allgemeine Beweis ist so zu führen, daß man annimmt, daß für eine aus  $n$  gleichen Stücken zusammengesetzte Leitung ein Gleichungssystem mit  $\mathfrak{P}$  und dem Argument  $n\vartheta s$  gelte und an diese Leitung noch ein Stück ansetzt. Es muß dann das Argument  $(n+1)\vartheta s$  eintreten. Der Beweis ist nach den Definitionsgleichungen (266 a) leicht zu führen.

Eine Leitung, die aus  $n$  gleichen, für sich symmetrisch zusammengesetzten Stücken besteht, läßt sich also ebenfalls durch zwei unabhängige Konstanten für jede Periodenzahl kennzeichnen, und zwar ist ihr Wellenwiderstand gleich dem jedes einzelnen Stückes, während in das Argument der trigonometrischen, hyperbolischen oder Exponentialfunktionen das  $n$  fache des für ein Stück geltenden Arguments eintritt.

### § 236. Die Konstanten einer beliebig zusammengesetzten Leitung.

Um die Zahl der unabhängigen Konstanten bei einer ganz beliebig zusammengesetzten Leitung zu finden, wollen wir zuerst eine unsymmetrische Leitung aus zwei Stücken mit den Konstanten  $\mathfrak{A}'$ ,  $\mathfrak{B}'$ ,  $\mathfrak{C}'$  und  $\mathfrak{A}''$ ,  $\mathfrak{B}''$ ,  $\mathfrak{C}''$ , also gleichmäßigen Stücken zusammengesetzt denken. Ist  $\mathfrak{B}_1$  die Spannung am Anfang des ersten,  $\mathfrak{B}_2$  die an der Verbindungsstelle,  $\mathfrak{B}_3$  die am Ende des zweiten Stückes, so ist

$$\begin{array}{l} \mathfrak{B}_2 = \mathfrak{A}'' \mathfrak{B}_3 + \mathfrak{B}'' \mathfrak{Z}_3 \quad \vdots \quad \mathfrak{B}_1 = \mathfrak{A}' \mathfrak{B}_2 + \mathfrak{B}' \mathfrak{Z}_2 \\ \mathfrak{Z}_2 = \mathfrak{A}'' \mathfrak{Z}_3 + \mathfrak{C}'' \mathfrak{B}_3 \quad \vdots \quad \mathfrak{Z}_1 = \mathfrak{A}' \mathfrak{Z}_2 + \mathfrak{C}' \mathfrak{B}_2, \end{array}$$

daher

$$\begin{array}{l} \mathfrak{B}_1 = \mathfrak{B}_3 (\mathfrak{A}' \mathfrak{A}'' + \mathfrak{B}' \mathfrak{C}'') + \mathfrak{Z}_3 (\mathfrak{A}' \mathfrak{B}'' + \mathfrak{A}'' \mathfrak{B}') \\ \mathfrak{Z}_1 = \mathfrak{Z}_3 (\mathfrak{A}' \mathfrak{A}'' + \mathfrak{B}' \mathfrak{C}') + \mathfrak{B}_3 (\mathfrak{A}' \mathfrak{C}'' + \mathfrak{A}'' \mathfrak{C}'). \end{array}$$

Schreibt man dies

$$\begin{array}{l} \mathfrak{B}_1 = \mathfrak{A}_1 \mathfrak{B}_3 + \mathfrak{B} \mathfrak{Z}_3 \\ \mathfrak{Z}_1 = \mathfrak{A}_2 \mathfrak{Z}_3 + \mathfrak{C} \mathfrak{B}_3, \end{array}$$

so erfüllen die Koeffizienten die Gleichung

$$\mathfrak{A}_1 \mathfrak{A}_2 - \mathfrak{B} \mathfrak{C} = 1.$$

Wenn man an die beiden Stücke wieder eine gleichmäßige Leitung ansetzt, so würde man für die aus drei Stücken zusammengesetzte Leitung



Wenn also eine Fernsprechleitung derart zusammengesetzt ist, daß sie auf der einen Seite in einem Kabel, auf der anderen in einer oberirdischen Leitung endigt, so wird durch diese Anordnung, was die Stärke des ankommenden Stromes anbetrifft, keine Seite vor der anderen bevorzugt oder benachteiligt. Wenn aus der Erfahrung etwas anderes angenommen wird, daß nämlich die Verständigung auf der Kabelseite weniger gut sei, so erklärt sich dies, die Richtigkeit vorausgesetzt, durch einen Nebenumstand. Der abgehende Strom ist auf der Kabelseite stärker als auf der Seite der Luftleitung; da er auch das eigene Telephon durchfließt, und das Ohr nicht sowohl die absolute Stärke der Töne, als Unterschiede auffaßt, so wird dem Ohre des auf der Kabelseite Sprechenden, das noch durch den lauten Ton der eigenen Sprache beeinflusst ist, der ankommende Strom verhältnismäßig schwach erscheinen, während der Teilnehmer auf der anderen Seite den Unterschied weniger stark empfindet.

Bei Nebensprechprüfungen kommt ein anderer Fall vor, indem nicht, wie bei dem praktischen Fernsprechen, bald der eine, bald der andere Apparat eine EMK erhält, sondern indem an einer unsymmetrischen Leitung der Sprechapparat  $\mathfrak{R}_a$  mit der EMK  $\mathfrak{E}$  und der Hörapparat  $\mathfrak{R}_e$  ihre Plätze tauschen. Für die Gl. (285) gilt dann  $\mathfrak{E} = \mathfrak{B}_a + \mathfrak{R}_a \mathfrak{Z}_a$ ,  $\mathfrak{B}_e = \mathfrak{R}_e \mathfrak{Z}_e$ , dagegen gilt für die Gl. (285 a), daß  $\mathfrak{E} = \mathfrak{B}_e - \mathfrak{R}_a \mathfrak{Z}_e$ ,  $\mathfrak{B}_a = -\mathfrak{R}_e \mathfrak{Z}_a$  ist. Man erhält dann für die beiden Fälle

$$\begin{aligned}\mathfrak{E} &= \mathfrak{Z}_e (\mathfrak{A}_1 \mathfrak{R}_e + \mathfrak{A}_2 \mathfrak{R}_a + \mathfrak{B} + \mathfrak{E} \mathfrak{R}_a \mathfrak{R}_e) \\ \mathfrak{E} &= -\mathfrak{Z}_a (\mathfrak{A}_1 \mathfrak{R}_a + \mathfrak{A}_2 \mathfrak{R}_e + \mathfrak{B} + \mathfrak{E} \mathfrak{R}_a \mathfrak{R}_e).\end{aligned}$$

Die im Hörer aufgenommenen Ströme können also verschieden sein, wenn man z. B. das Mitsprechen von einer Stammleitung auf den Vierer mit dem Mitsprechen von dem Vierer auf den Stamm vergleicht.

### § 238. Scheinwiderstände von Leitungen beliebiger Zusammensetzung.

Da eine Leitung beliebiger Zusammensetzung für eine bestimmte Frequenz durch drei Koeffizienten bestimmt ist, so muß zwischen den vier an einer derartigen Leitung meßbaren Scheinwiderständen eine sie verbindende Gleichung erfüllt sein.

Die Werte, die man bei Messungen vom Anfang aus erhält, sollen als  $u'_1$  und  $u'_2$  bezeichnet sein, während die vom Ende der Leitung aus unter Isolierung und Kurzschluß am Anfang gemessenen Werte  $u''_1$  und  $u''_2$  seien. Dann bestehen die Gleichungen:

$$u'_1 = \frac{\mathfrak{A}_1}{\mathfrak{E}}, \quad u'_2 = \frac{\mathfrak{B}}{\mathfrak{A}_2}, \quad u''_1 = \frac{\mathfrak{A}_2}{\mathfrak{E}}, \quad u''_2 = \frac{\mathfrak{B}}{\mathfrak{A}_1}.$$

Daher erfüllen die vier Scheinwiderstände die Gleichung

$$\frac{u'_1}{u'_2} = \frac{u''_1}{u''_2}.$$

§ 239. Dämpfungsfaktor einer Leitung. In § 237 ist für das Verhältnis zwischen EMK und Endstrom die Beziehung aufgestellt worden

$$\mathfrak{E} = \mathfrak{Z}_e \{ \mathfrak{A}_1 \mathfrak{R}_e + \mathfrak{B} + \mathfrak{R}_a (\mathfrak{A}_2 + \mathfrak{E} \mathfrak{R}_e) \}.$$

Handelt es sich um eine homogene Leitung,  $\mathfrak{A}_1 = \mathfrak{A}_2 = \mathfrak{A}$ , so kann man schreiben

$$\mathfrak{G} = \mathfrak{A} \mathfrak{S}_e \left\{ \mathfrak{R}_e + \mathfrak{u}_2 + \mathfrak{R}_a \left( 1 + \frac{\mathfrak{R}_e}{\mathfrak{u}_1} \right) \right\}$$

oder

$$\mathfrak{G} = \mathfrak{A} \mathfrak{S}_e \frac{\mathfrak{Z}^2 + \mathfrak{u}_1 (\mathfrak{R}_a + \mathfrak{R}_e) + \mathfrak{R}_a \mathfrak{R}_e}{\mathfrak{u}_1}.$$

Bei telephonischen Übertragungen sind meist beide Apparate gleichartig,  $\mathfrak{R}_a = \mathfrak{R}_e = \mathfrak{R}$ , also ist

$$\mathfrak{G} = \mathfrak{A} \mathfrak{S}_e \frac{\mathfrak{Z}^2 + 2 \mathfrak{u}_1 \mathfrak{R} + \mathfrak{R}^2}{\mathfrak{u}_1}.$$

Wenn die Leitung eine erhebliche Länge hat, so daß  $\beta l > 2$  ist, so ist nahezu  $\mathfrak{u}_1 = \mathfrak{Z}$  und man hat dann

$$\mathfrak{G} = \mathfrak{A} \mathfrak{S}_e \frac{(\mathfrak{Z} + \mathfrak{R})^2}{\mathfrak{Z}} \dots \dots \dots (286)$$

Dieser Ausdruck enthält die Länge der Leitung nur noch in dem Faktor  $\mathfrak{A}$ ; der Wert des Faktors  $(\mathfrak{Z} + \mathfrak{R})^2/\mathfrak{Z}$  ist bei  $\beta l > 2$  nicht nur von der Länge der Leitung nahezu unabhängig, sondern ändert sich auch kaum, wenn man von einer Art Leitung zu einer etwas verschiedenen Art übergeht, z. B. von 3 mm starken oberirdischen Leitungen zu 4 oder 4,5 mm starken.

Innerhalb einer bestimmten Gattung von Leitungen und für ein bestimmtes Apparatsystem bildet also der zweite Faktor eine fast unveränderliche Größe von der Dimension eines Widerstandes. Außer ihm kommt noch der Zahlenfaktor  $\mathfrak{A}$  in Betracht, der den Wert hat

$$\mathfrak{A} = \frac{e^{\gamma l} + e^{-\gamma l}}{2}.$$

Er hängt außer von der Länge der Leitung von ihren besonderen Eigenschaften ab, in erster Linie von dem Werte von  $\beta$ . Wir nennen ihn den Dämpfungsfaktor der Leitung. Unter der Voraussetzung, daß  $\beta l > 2$  ist, ist er nahezu gleich  $\frac{1}{2} e^{\gamma l}$ , und da es auf die Phase in der Regel nicht ankommt, so ist der Betrag  $\frac{1}{2} e^{\beta l}$  ins Auge zu fassen.

**§ 240. Dämpfungsfaktor nicht symmetrischer Leitungen.** Da nach § 236 die Vorgänge an einer nicht symmetrischen Leitung durch drei Konstanten bestimmt werden, statt durch zwei bei einer symmetrischen, und da insbesondere statt der Größe  $\mathfrak{A}$  bei einer symmetrischen, die zugleich der Dämpfungsfaktor ist, zwei verschiedene Größen  $\mathfrak{A}_1$  und  $\mathfrak{A}_2$  auftreten, so ist der Dämpfungsfaktor solcher unsymmetrischen Leitungen zunächst nicht genügend bestimmt. Da andererseits nach dem in § 237 Gesagten die Stärke des ankommenden Stromes bei gleicher EMK an jedem Ende dieselbe ist, so muß ein bestimmter Wert des Dämpfungsfaktors angegeben werden können.

Aus den Gl. (285) läßt sich ohne Willkür weder  $\mathfrak{A}_1$  noch  $\mathfrak{A}_2$  als Dämpfungsfaktor absondern.

Es soll deshalb der Dämpfungsfaktor der nicht symmetrischen Leitung durch denjenigen der aus zwei solchen Leitungen in symmetrischer Lage zusammengesetzten definiert werden.

Wir nehmen also eine Leitung (Fig. 192) an, für welche das Gleichungssystem gilt



$$V_a = \mathcal{U}_1 V_e + \mathcal{B} \mathcal{Z}_e, \quad \mathcal{Z}_a = \mathcal{U}_2 \mathcal{Z}_e + \mathcal{C} \mathcal{V}_e.$$

Eine zu dieser Leitung symmetrische hat die Gleichungen

$$V_a = \mathcal{U}_2 V_e + \mathcal{B} \mathcal{Z}_e, \quad \mathcal{Z}_a = \mathcal{U}_1 \mathcal{Z}_e + \mathcal{C} \mathcal{V}_e.$$

Hierbei ist vorausgesetzt, daß die positive Stromrichtung beide Male dieselbe ist, daß also, wenn die erste Leitung beispielsweise eine Freileitung am Anfang, eine Kabelleitung am Ende hat, in der symmetrischen Leitung ein positiver Strom vom Kabel zur Freileitung führt.

Setzt man die beiden Leitungen in der Art zusammen, die schematisch durch Fig. 193 angegeben ist,



so ergibt sich also

$$\begin{aligned} \mathcal{V}_1 &= \mathcal{U}_2 \mathcal{V}_e + \mathcal{B} \mathcal{Z}_e, & \mathcal{Z}_1 &= \mathcal{U}_1 \mathcal{Z}_e + \mathcal{C} \mathcal{V}_e \\ \mathcal{V}_a &= \mathcal{U}_1 \mathcal{V}_1 + \mathcal{B} \mathcal{Z}_1, & \mathcal{Z}_a &= \mathcal{U}_2 \mathcal{Z}_1 + \mathcal{C} \mathcal{V}_1. \end{aligned}$$

Nach Elimination von  $\mathcal{V}_1$  und  $\mathcal{Z}_1$  erhält man

$$\begin{aligned} \mathcal{V}_a &= \mathcal{V}_e (\mathcal{U}_1 \mathcal{U}_2 + \mathcal{B} \mathcal{C}) + \mathcal{Z}_e 2 \mathcal{U}_1 \mathcal{B} \\ \mathcal{Z}_a &= \mathcal{Z}_e (\mathcal{U}_1 \mathcal{U}_2 + \mathcal{B} \mathcal{C}) + \mathcal{V}_e 2 \mathcal{U}_2 \mathcal{C}. \end{aligned}$$

Setzt man dagegen die Leitungen zusammen, wie es schematisch durch Fig. 194 dargestellt ist,



so ist

$$\begin{aligned} \mathcal{V}_1 &= \mathcal{U}_1 \mathcal{V}_e + \mathcal{B} \mathcal{Z}_e, & \mathcal{Z}_1 &= \mathcal{U}_2 \mathcal{Z}_e + \mathcal{C} \mathcal{V}_e \\ \mathcal{V}_a &= \mathcal{U}_2 \mathcal{V}_1 + \mathcal{B} \mathcal{Z}_1, & \mathcal{Z}_a &= \mathcal{U}_1 \mathcal{Z}_1 + \mathcal{C} \mathcal{V}_1, \end{aligned}$$

und daraus ergibt sich

$$\begin{aligned} \mathcal{V}_a &= \mathcal{V}_e (\mathcal{U}_1 \mathcal{U}_2 + \mathcal{B} \mathcal{C}) + \mathcal{Z}_e 2 \mathcal{U}_2 \mathcal{B} \\ \mathcal{Z}_a &= \mathcal{Z}_e (\mathcal{U}_1 \mathcal{U}_2 + \mathcal{B} \mathcal{C}) + \mathcal{V}_e 2 \mathcal{U}_1 \mathcal{C}. \end{aligned}$$

Auf beide Arten erhält man Leitungen desselben Dämpfungsfaktors, nämlich  $\mathcal{U}_1 \mathcal{U}_2 + \mathcal{B} \mathcal{C}$ , wenn auch verschiedenen Wellenwiderstandes.

Aus dem so berechneten Dämpfungsfaktor für die aus zwei Leitungen zusammengesetzte symmetrische Leitung erhalten wir den für die Ersatzleitung der unsymmetrischen Leitung durch folgende Überlegung:

Man kann nach Gl. (276) den Dämpfungsfaktor einer Leitung als  $\mathcal{C}\vartheta^\Theta$  darstellen; bei gleichmäßigen Leitungen ist  $\Theta$  der Länge proportional; für eine doppelt so lange Leitung gilt dann

$$\mathcal{C}\vartheta^{2\Theta} = 2 \mathcal{C}\vartheta^{2\Theta} - 1.$$

Berücksichtigt man aber, indem man  $\mathcal{C}\vartheta^{2\Theta} = \mathcal{U}_1 \mathcal{U}_2 + \mathcal{B} \mathcal{C}$  einsetzt, daß  $\mathcal{U}_1 \mathcal{U}_2 - \mathcal{B} \mathcal{C} = 1$  ist, so ergibt sich

$$\mathcal{C}\vartheta^\Theta = \sqrt{\mathcal{U}_1 \mathcal{U}_2} \dots \dots \dots (287)$$

Der Dämpfungsfaktor einer nicht symmetrischen Leitung ist also durch die Größe  $\mathfrak{A} = \sqrt{\mathfrak{A}_1 \mathfrak{A}_2}$  bestimmt.

Ein einheitliches Dämpfungsmaß nicht symmetrischer Leitungen wird auch durch folgende mögliche Form ihrer Gleichungen ersichtlich gemacht:

$$\left. \begin{aligned} \mathfrak{A}_a &= \frac{1 + \kappa}{1 - \kappa} \mathfrak{B}_e \cos \Theta + \mathfrak{Z} \mathfrak{Z}_e \sin \Theta \\ \mathfrak{A}_a^2 &= \frac{1 - \kappa}{1 + \kappa} \mathfrak{Z}_e \cos \Theta + \frac{\mathfrak{B}_e}{\mathfrak{Z}} \sin \Theta \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (288)$$

Für  $\kappa = 0$  gehen diese in die Gleichungen symmetrischer Leitungen über,  $\kappa$  ist also ein Maß der Unsymmetrie. Die Größen  $\mathfrak{Z}$  und  $\Theta$  haben dieselbe Bedeutung, wie  $\mathfrak{Z}$  und  $\gamma l$  bei einer gleichmäßigen Leitung.

### § 241. Die Bedeutung des Dämpfungsmaßes für das Fernsprechen.

Damit die über eine Leitung übertragene Sprache für den Hörenden zu verstehen sei, muß dem Fernhörer eine bestimmte elektrische Leistung, die in Schalleistung umgesetzt wird, zugeführt werden. Es geht daraus hervor, daß alle Eigenschaften des gesamten Stromkreises für die Güte der Übertragung von Bedeutung sind, so die Größe der EMK im Sender, die Verluste in den Widerständen des Senders und des Empfängers, außerdem die Verluste auf der Leitung. Da für das Fernsprechen im Ortsnetz und auf große Entfernungen dieselben Apparate verwendet werden, so wird die Lautstärke im Ortsnetz wesentlich durch die Eigenschaften der Apparate bedingt sein, gegen welche die verbindende Leitung keine große Rolle spielt. Bei Fernverbindungen kommt es hauptsächlich auf das Dämpfungsmaß der Leitung an. Die Schwächung der Ströme auf der Leitung ist der Größe  $e^b$  proportional, während sie z. B. mit der treibenden EMK in einfachem Verhältnis abnehmen. Betrachtet man also die Lautstärke als eine Funktion der Größe  $b$ , so handelt es sich um den Vergleich der natürlichen Logarithmen der Stromstärke. Alle Größen, welche die Stromstärke nur linear ändern, wie die EMK im positiven, die Widerstände im negativen Sinne, treten daher, wenn man die Logarithmen vergleicht, in ihrer Bedeutung gegen die Dämpfung auf der Leitung zurück. Hieraus erklärt es sich, daß man durch Versuche mit Apparaten der verschiedensten Herkunft hinsichtlich der Abhängigkeit der Verständigung vom Dämpfungsmaß auf im wesentlichen gleiche Zahlen gekommen ist, so daß es möglich war, auf der Internationalen Konferenz der Telegraphentechniker<sup>61)</sup> in Paris im Jahre 1910 über einige Zahlen übereinzukommen, welche die Güte der Verständigung für den praktischen Gebrauch des Fernsprechers in der Abhängigkeit von der Höhe des Dämpfungsexponenten darstellen. Die auf diese Frage bezüglichen Sätze 2 und 3 der Konferenz lauteten:

2. Es ist für den internationalen Verkehr wünschenswert, ein Vergleichsmaß zur Feststellung der Übertragungsgüte der Fernsprechleitungen aufzustellen. Am besten eignet sich als Vergleichsmaß der Dämpfungsexponent.

3. Nach allgemeiner Ansicht besteht, wenn Apparate der gebräuchlichen Form über eine Freileitung aus Kupferdrähten unmittelbar miteinander verbunden sind, zwischen der Art der Verständigung und dem Dämpfungsexponenten die Beziehung, daß sie sehr gut ist für den Exponenten 2,5 und

gut für den Exponenten 3,5. Die Grenze der Verständigung im Verkehr wird bei einem Dämpfungsexponenten von 4,8 erreicht.

Das Dämpfungsmaß einer Fernleitung, welche zwei Ortsnetze verbindet, soll nicht über 2,5 betragen.

Durch die inzwischen in die Fernsprechtechnik eingeführten Verstärker ist es möglich geworden, die Schwächung der Ströme auf der Leitung durch eine Verstärkung an einzelnen Punkten ganz oder zum Teil auszugleichen. Dadurch hat man auch die Möglichkeit erhalten, größere Ansprüche als früher an die Stärke der Übertragung zu befriedigen. Man richtet sich jetzt allgemein auf mit Verstärkern betriebenen Kabeln so ein, daß die Teilnehmer dieselbe Art der Verständigung erhalten, als wenn ihre Ortsnetze durch eine Leitung mit dem Dämpfungsmaß 1,5 bis 1,6 verbunden wären.

Andere Übertragungsmaße. In Amerika, England und den in der Fernsprechtechnik diesen folgenden Ländern wird das Dämpfungsmaß statt durch den Dämpfungsexponenten durch den Vergleich mit einer bestimmten Länge eines zum Grundmaß erhobenen sogenannten Standardkabels ausgedrückt. Näheres hierüber wird bei Besprechung der Eichleitungen § 253 besprochen werden.

Wegen gewisser Mängel dieses Maßes, die in seiner Frequenzabhängigkeit begründet sind, findet man in neueren amerikanischen Arbeiten außerdem noch eine Angabe über das Verhältnis der vom Sender ausgehenden und der im Empfänger nutzbar werdenden Leistungen.

Da dies Verhältnis, soweit die Leitung in Betracht kommt, den Faktor  $e^{2b}$  enthält, so unterscheidet sich dieses Dämpfungsmaß grundsätzlich nicht vom Dämpfungsexponenten.

**§ 242. Reflexionen in zusammengesetzten Leitungen.** Wir stellen zunächst das Gleichungssystem für eine Leitung auf, welche aus drei Teilen besteht, die jeder für sich gleichmäßig oder wenigstens symmetrisch sind, aber sich in ihren Eigenschaften, ausgedrückt durch die Größen  $\mathfrak{A}$ ,  $\mathfrak{B}$ ,  $\mathfrak{C}$ , beliebig unterscheiden. Die Leitungen und die zugehörigen Konstanten seien durch die Beisätze 1, 2, 3 unterschieden; die Spannungen (und die Strom-

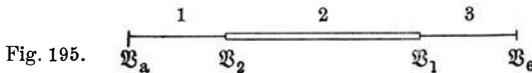


Fig. 195.

stärken) an den Enden jeder einzelnen seien nach Fig. 195 bezeichnet. Dann gelten die Gleichungen

$$\begin{aligned} \mathfrak{V}_1 &= \mathfrak{A}_3 \mathfrak{V}_e + \mathfrak{B}_3 \mathfrak{I}_e, & \mathfrak{I}_1 &= \mathfrak{A}_3 \mathfrak{I}_e + \mathfrak{C}_3 \mathfrak{V}_e, \\ \mathfrak{V}_2 &= \mathfrak{A}_2 \mathfrak{V}_1 + \mathfrak{B}_2 \mathfrak{I}_1, & \mathfrak{I}_2 &= \mathfrak{A}_2 \mathfrak{I}_1 + \mathfrak{C}_2 \mathfrak{V}_1, \\ \mathfrak{V}_a &= \mathfrak{A}_1 \mathfrak{V}_2 + \mathfrak{B}_1 \mathfrak{I}_2, & \mathfrak{I}_a &= \mathfrak{A}_1 \mathfrak{I}_2 + \mathfrak{C}_1 \mathfrak{V}_2. \end{aligned}$$

Man erhält daraus für die gesamte Leitung ein Gleichungspaar von der Form

$$\begin{aligned} \mathfrak{V}_a &= \mathbf{A}_1 \mathfrak{V}_e + \mathbf{B} \mathfrak{I}_e, \\ \mathfrak{I}_a &= \mathbf{A}_2 \mathfrak{I}_e + \mathbf{C} \mathfrak{V}_e, \end{aligned}$$

worin die Koeffizienten durch folgende Gleichungen bestimmt sind:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_1 &= \mathfrak{A}_2(\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_3 + \mathfrak{B}_1\mathfrak{C}_3) + \mathfrak{B}_2\mathfrak{A}_1\mathfrak{C}_3 + \mathfrak{C}_2\mathfrak{A}_3\mathfrak{B}_1, \\ \mathbf{A}_2 &= \mathfrak{A}_2(\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_3 + \mathfrak{B}_3\mathfrak{C}_1) + \mathfrak{B}_2\mathfrak{A}_3\mathfrak{C}_1 + \mathfrak{C}_2\mathfrak{A}_1\mathfrak{B}_3, \\ \mathbf{B} &= \mathfrak{A}_2(\mathfrak{A}_1\mathfrak{B}_3 + \mathfrak{A}_3\mathfrak{B}_1) + \mathfrak{B}_2\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_3 + \mathfrak{C}_2\mathfrak{B}_1\mathfrak{B}_3, \\ \mathbf{C} &= \mathfrak{A}_2(\mathfrak{A}_1\mathfrak{C}_3 + \mathfrak{A}_3\mathfrak{C}_1) + \mathfrak{B}_2\mathfrak{C}_1\mathfrak{C}_3 + \mathfrak{C}_2\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_3. \end{aligned}$$

Zur Betrachtung der Reflexionsvorgänge wollen wir die Lage etwas vereinfachen durch die Annahme, daß die Leitungen 1 und 3 gleiche Eigenschaften haben; dann wird die zusammengesetzte Leitung symmetrisch, wie man daran erkennt, daß  $\mathbf{A}_1 = \mathbf{A}_2 = \mathbf{A}$  wird.

Wir führen ferner statt der symbolischen Koeffizienten  $\mathfrak{A}$ ,  $\mathfrak{B}$ ,  $\mathfrak{C}$  die Größen  $\gamma l$  und  $\mathfrak{Z}$  ein; den Stücken 1 und 3 geben wir den gemeinsamen Beisatz 1. Wir setzen also z. B.

$$\begin{aligned} \mathfrak{A}_1 &= \mathfrak{Cof} \gamma_1 l_1, \\ \mathfrak{B}_1 &= \mathfrak{Z}_1 \mathfrak{Sin} \gamma_1 l_1, \\ \mathfrak{C}_1 &= \frac{1}{\mathfrak{Z}_1} \mathfrak{Sin} \gamma_1 l_1 \end{aligned}$$

und erhalten

$$\mathbf{A} = \mathfrak{Cof} 2\gamma_1 l_1 \mathfrak{Cof} \gamma_2 l_2 + \frac{1}{2} \left( \frac{\mathfrak{Z}_1}{\mathfrak{Z}_2} + \frac{\mathfrak{Z}_2}{\mathfrak{Z}_1} \right) \mathfrak{Sin} 2\gamma_1 l_1 \mathfrak{Sin} \gamma_2 l_2 \quad (289 a)$$

$$\mathbf{B} = \mathfrak{Z}_1 \left\{ \mathfrak{Sin} 2\gamma_1 l_1 \mathfrak{Cof} \gamma_2 l_2 + \frac{1}{2} \left( \frac{\mathfrak{Z}_1}{\mathfrak{Z}_2} + \frac{\mathfrak{Z}_2}{\mathfrak{Z}_1} \right) \mathfrak{Cof} 2\gamma_1 l_1 \mathfrak{Sin} \gamma_2 l_2 \right. \\ \left. - \frac{1}{2} \left( \frac{\mathfrak{Z}_1}{\mathfrak{Z}_2} - \frac{\mathfrak{Z}_2}{\mathfrak{Z}_1} \right) \mathfrak{Sin} \gamma_2 l_2 \right\} \quad (289 b)$$

$$\mathbf{C} = \frac{1}{\mathfrak{Z}_1} \left\{ \mathfrak{Sin} 2\gamma_1 l_1 \mathfrak{Cof} \gamma_2 l_2 + \frac{1}{2} \left( \frac{\mathfrak{Z}_1}{\mathfrak{Z}_2} + \frac{\mathfrak{Z}_2}{\mathfrak{Z}_1} \right) \mathfrak{Cof} 2\gamma_1 l_1 \mathfrak{Sin} \gamma_2 l_2 \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \left( \frac{\mathfrak{Z}_1}{\mathfrak{Z}_2} - \frac{\mathfrak{Z}_2}{\mathfrak{Z}_1} \right) \mathfrak{Sin} \gamma_2 l_2 \right\} \quad (289 c)$$

Wenn man hierin  $\mathfrak{Z}_1 = \mathfrak{Z}_2 = \mathfrak{Z}$  setzt, so gehen diese Gleichungen über in

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \mathfrak{Cof}(2\gamma_1 l_1 + \gamma_2 l_2), \\ \mathbf{B} &= \mathfrak{Z} \mathfrak{Sin}(2\gamma_1 l_1 + \gamma_2 l_2), \\ \mathbf{C} &= \frac{1}{\mathfrak{Z}} \mathfrak{Sin}(2\gamma_1 l_1 + \gamma_2 l_2). \end{aligned}$$

In diesem Falle verhält sich die zusammengesetzte Leitung wie eine gleichmäßige, deren Dämpfungsmaß und Winkelmaß gleich der Summe derjenigen der Teile ist. Es ist dazu erforderlich, daß

$$\frac{R_1 + i\omega L_1}{G_1 + i\omega K_1} = \frac{R_2 + i\omega L_2}{G_2 + i\omega K_2}.$$

Es ist demnach nicht notwendig, daß die Leitungen in den Eigenschaften der Längeneinheit übereinstimmen, sondern es genügt, daß zwischen Widerstand und Induktivität einerseits und Ableitung und Kapazität andererseits dasselbe Verhältnis für beide Leitungsarten bestehe.

Die bei ungleichen Wellenwiderständen entstehende Änderung des Dämpfungsfaktors wollen wir zunächst für den Fall betrachten, daß die Leitung 2 als lang zu bezeichnen ist, nämlich daß  $e^{\beta_2 l_2}$  groß gegen  $e^{-\beta_2 l_2}$  ist. Dies bedeutet, daß die vom anderen Ende der Leitung 2 zurückkommenden Wellen so klein gegen die abgehenden sind, daß man sie vernachlässigen kann. Dies trifft praktisch zu, wenn  $\beta_2 l_2 > 2$  ist. Dann ist also  $\frac{1}{2} e^{\gamma_2 l_2}$  statt  $\mathfrak{C} \text{of } \gamma_2 l_2$  und  $\mathfrak{S} \text{in } \gamma_2 l_2$  zu setzen. Wenn wir den Übergangsfaktor

$$\frac{1}{2} \left( \frac{\mathfrak{Z}_1}{\mathfrak{Z}_2} + \frac{\mathfrak{Z}_2}{\mathfrak{Z}_1} \right) = q \dots \dots \dots (290)$$

setzen, so wird

$$\mathbf{A} = \frac{e^{\gamma_2 l_2}}{2} \frac{(q+1)e^{2\gamma_1 l_1} - (q-1)e^{-2\gamma_1 l_1}}{2} \dots \dots \dots (291)$$

Ist auch  $2\beta_1 l_1 > 2$ , so wird

$$\mathbf{A} = \frac{e^{2\gamma_1 l_1 + \gamma_2 l_2}}{2} \frac{(\mathfrak{Z}_1 + \mathfrak{Z}_2)^2}{4 \mathfrak{Z}_1 \mathfrak{Z}_2} \dots \dots \dots (292)$$

Der erste Faktor enthält die Summe der Dämpfungsexponenten der drei Leitungen. Durch jeden Übergang zwischen elektrisch langen Leitungen wird der Dämpfungsexponent um den natürlichen Logarithmus der Größe  $\frac{\mathfrak{Z}_1 + \mathfrak{Z}_2}{2\sqrt{\mathfrak{Z}_1 \mathfrak{Z}_2}}$  vermehrt; nach der Herleitung enthält  $\mathbf{A}$  den Zuwachs für beide Stoßstellen der Leitung 2 gegen 1 und gegen 3 hin.

Ist also z. B.  $\mathfrak{Z}_2 = 2\mathfrak{Z}_1$ , so wird der Dämpfungsfaktor im Verhältnis 9:8 vergrößert, und dies entspricht einer Erhöhung des Dämpfungsexponenten um 0,118 für die gesamte Leitung, also 0,059 für jede Reflexionsstelle. Da dies sowohl für die Stromstärke als die Spannung gilt, so ist  $\frac{4 \cdot \mathfrak{Z}_1 \mathfrak{Z}_2}{(\mathfrak{Z}_1 + \mathfrak{Z}_2)^2}$  auch annähernd der Wirkungsgrad der Stoßstelle hinsichtlich der Leistung, annähernd, weil neben dem Dämpfungsexponenten  $\mathbf{A}$  auch der Wellenwiderstand  $\sqrt{\mathbf{B}/\mathbf{C}}$  die Leistungen beeinflusst.

Wir haben in Gl. (250) für den Wirkungsgrad einer Stoßstelle unter frei laufenden einfallenden und reflektierten Wellen den Wert

$$\eta = \frac{4 Z_1 Z_2}{(Z_1 + Z_2)^2}$$

gefunden. Dieser stimmt mit dem angegebenen Werte für stehende Wellen um so mehr überein, je geringer die Phasenwinkel der Wellenwiderstände  $\mathfrak{Z}_1$  und  $\mathfrak{Z}_2$  sind.

Es gilt also auch für stehende Wellen der in § 213 für fortschreitende Wellen ausgesprochene Satz, daß die Einschaltung eines Übertragers zum Zweck, die Verluste an den Stoßstellen zu vermindern, nur lohnt, wenn er einen dem Verhältnis der Wellenwiderstände angemessenen Wirkungsgrad hat. Bei einem Verhältnis der Wellenwiderstände von 1:2 bedeutet es vom Standpunkt der Verminderung der Verluste einen Fehler, einen Übertrager zu verwenden, der nicht wenigstens einen Wirkungsgrad von  $\frac{8}{9} = 0,889$

hat. Da der Wirkungsgrad der Übertrager kaum über 0,95 zu steigern sein wird, können die Verluste an Stoßstellen mit einem Verhältnis der Wellenwiderstände unter 1,6 nicht durch Übertrager verringert werden. Schaltet man sie aus Gründen der Sicherheit gegen Fremdspannungen oder zwischen Leitungen verschiedenen Wellenwiderstandes oder als Viererspulen für Teilstrecken ein, so wird man also in der Regel noch einen Verlust in den Kauf nehmen müssen.

Bisher ist angenommen worden, daß die Reflexionen zwischen Leitungen erheblichen Dämpfungsmaßes vor sich gingen; wir wollen noch den Fall betrachten, daß die Leitungen 1 und 3 lang seien und durch ein nur kurzes Stück 2 anderer Eigenschaften verbunden seien. Der Dämpfungsfaktor aus Gl. (289 a) geht dann über in

$$\mathbf{A} = \frac{e^{2\gamma_1 l_1}}{2} \frac{(q+1)e^{\gamma_2 l_2} - (q-1)e^{-\gamma_2 l_2}}{2} \dots \dots (293)$$

Für kleine Werte von  $\gamma_2 l_2$ , nämlich solche, für welche mit genügender Genauigkeit  $e^{\pm\gamma_2 l_2} = 1 \pm \gamma_2 l_2$  gesetzt werden kann, wird dieser Ausdruck gleich

$$\mathbf{A} = \frac{e^{\gamma_1 l_1}}{2} (1 + q\gamma_2 l_2).$$

Der Zuwachs des Dämpfungsexponenten ist also für kurze Längen bei abweichenden Wellenwiderständen um so geringer, je kürzer das Zwischenstück ist. Dies erklärt sich nach den allgemeinen Reflexionsgesetzen auf folgendem Wege. Die Leitung 2 habe einen kleineren Wellenwiderstand als die Leitungen 1 und 3. Kommt eine Welle aus 1 an der Stoßstelle an, so wird ein Strom gleichen Vorzeichens wie der ankommende nach 1 zurückgeworfen, ein Strom desselben Vorzeichens tritt in die Leitung 2 ein. An der Stoßstelle gegen 3 tritt eine reflektierte Stromwelle entgegengesetzten Vorzeichens auf, von der auch ein Teil an der Stoßstelle gegen 1 in diese Leitung tritt. Abgesehen von etwa noch folgenden mehrfach reflektierten Wellen laufen also in Leitung 1 zwei Wellen entgegengesetzten Vorzeichens zurück, die um so mehr nach der Größe einander gleich und nach der Phase um  $180^\circ$  verschieden sind, je geringer Dämpfungsmaß und Winkelmaß der Leitung 2 sind.

Wenn aber die Leitung 2 ein erhebliches Winkelmaß hat, so ergeben sich andere Verhältnisse. Ist etwa das Winkelmaß  $\pi:2$  oder ein ungerades Vielfaches davon, so läuft die aus der Leitung 2 reflektierte Welle nicht mit  $180^\circ$ , sondern mit  $360^\circ$  Gangunterschied gegen die an der Stoßstelle von 1 und 2 reflektierte; beide addieren sich, und der Verlust wird größer. Bei einem Winkelmaß, das  $\pi$  oder ein Vielfaches davon beträgt, laufen die beiden Wellen wieder mit angenähert entgegengesetzten Phasen.

Wie die Ähnlichkeit der Gl. (291) und (293) lehrt, gelten diese Überlegungen auch, wenn kurze Leitungen abweichenden Wellenwiderstandes vor eine längere Leitung geschaltet sind, z. B. als pupinisierte Einführungskabel vor eine gewöhnliche Freileitung.

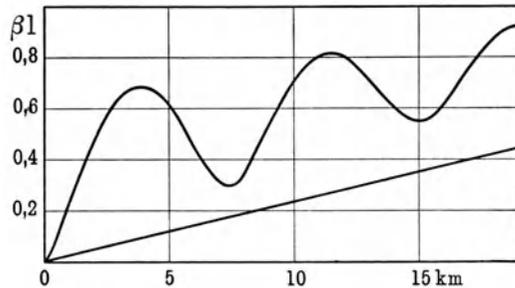
Fig. 196 stellt die Veränderlichkeit der Reflexionen mit der Länge vorgeschalteter kurzer Leitungen für den zur Zeit der Entwicklung Pupinscher Leitungen einem Projekt zugrunde gelegten Fall <sup>62)</sup> dar, daß eine lange Fern-

leitung aus 4 mm starken Kupferdrähten und  $Z = 568$  an jedem Ende durch ein nach der damaligen Praxis mit  $Z = 2000$ ,  $\beta = 0,023$ ,  $\alpha = 0,418$  angesetztes Pupinkabel in das Fernamt eingeführt werden sollte.

Die gerade Linie stellt das reine Dämpfungsmaß der Einführungskabel an beiden Enden für verschiedene Längen dar; die gewellte den Betrag, um welchen sie das Dämpfungsmaß wirklich vermehrt hätten.

Auf Grund dieser Berechnungen wurden im Jahre 1908 Versuche mit Pupinkabeln für Einführungen gemacht, die schwächer als die bis dahin gebräuchlichen Kabel selbständiger Bedeutung belastet waren. Durch diese Änderung erhöht sich zwar die Dämpfung, aber unter Minderung der Kosten, während andererseits die Verluste durch Reflexion stark abnehmen. Die Versuche bestätigten, daß als Einführungskabel solche mit einem Wellenwiderstand 1000 mindestens ebenso brauchbar waren, wie die höher belasteten.

Fig. 196.



**§ 243. Der Wellenwiderstand einer ungleichmäßig zusammengesetzten Leitung.** Bei Messungen an dem mit Spulen ausgerüsteten Rheinlandkabel stellte es sich heraus, daß der Wellenwiderstand von dem berechneten Werte für die Normalfrequenz  $\omega = 5000$  bei den verschiedenen Adern in verschiedener Weise stark abwich, und daß dies auch für andere Frequenzen galt. Bei danach angestellten Messungen einer bestimmten Ader in kleinen Frequenzabständen fand Lüschen, daß die Abweichungen der Werte von den berechneten sich auf die Nähe derjenigen Frequenzen beschränken, für welche das Winkelmaß des gesamten gemessenen Leitungsstücks ein ganzes Vielfaches von  $\pi/2$  ist. Man führte diese Schwankungen auf Ungleichmäßigkeiten der belasteten Leitung zurück, ohne dem Grund der merkwürdigen Lage der kritischen Frequenzen weiter nachzugehen. In neuerer Zeit hat die Frage der Abhängigkeit des Wellenwiderstandes von der Frequenz wegen seiner Nachbildung für den ganzen Bereich der Sprachfrequenzen eine erhöhte Bedeutung gewonnen. Von Wagner und Küpfmüller<sup>63)</sup> ist sie dann rechnerisch untersucht worden. Die Ergebnisse ermöglichen wichtige Schlüsse auf die Anforderungen, welche an die Gleichmäßigkeit solcher Leitungen zu stellen sind und auf die Möglichkeit, den Ort einer größeren Ungleichmäßigkeit durch Messung zu bestimmen.

Die Erscheinungen wurden nicht nur an Leitungen Pupinscher Art, sondern auch an solchen Krarupscher Art beobachtet. Wir wollen sie deshalb für den allgemeinen Fall aus der Theorie ableiten, daß drei im einzelnen wenigstens zu ihrer Mitte symmetrische Leitungen verschiedener Längen in Reihe geschaltet sind. Es tut der Allgemeinheit keinen Eintrag, wenn wir die Bezeichnungen besonders zweckmäßig für die Betrachtung einer Leitung Pupinscher Art wählen.

Wir leiten die zur Darstellung der Vorgänge dienenden Gleichungen aus den im Eingang des § 242 entwickelten Gleichungen ab, indem wir folgende besonderen Annahmen machen. Die Leitung bestehe insgesamt aus  $n$  Abschnitten, also im Falle einer pupinisierten Leitung aus  $n$  Spulenabschnitten. Davon sollen  $p$  zu dem Teile 1, einer zum Teil 2, der Rest  $(n - p - 1)$  zum Teil 3 gehören. Die Glieder der Abschnitte von 1 und 3 sollen untereinander gleich angenommen werden, mit den Eigenschaften  $\gamma_1$  und  $\beta_1$ , während für den Teil 2 die Eigenschaften  $\gamma_2$  und  $\beta_2$  gelten. Dann ist also

$$\begin{aligned} \mathfrak{A}_1 &= \mathfrak{Cof} p \gamma_1 & \mathfrak{A}_3 &= \mathfrak{Cof} (n - p - 1) \gamma_1 \\ \mathfrak{B}_1 &= \beta_1 \mathfrak{Sin} p \gamma_1 & \mathfrak{B}_3 &= \beta_1 \mathfrak{Sin} (n - p - 1) \gamma_1 \\ \mathfrak{C}_1 &= \frac{1}{\beta_1} \mathfrak{Sin} p \gamma_1 & \mathfrak{C}_3 &= \frac{1}{\beta_1} \mathfrak{Sin} (n - p - 1) \gamma_1 \\ & & \mathfrak{A}_2 &= \mathfrak{Cof} \gamma_2 \\ & & \mathfrak{B}_2 &= \beta_2 \mathfrak{Sin} \gamma_2 \\ & & \mathfrak{C}_2 &= \frac{1}{\beta_2} \mathfrak{Sin} \gamma_2. \end{aligned}$$

Nach dem Einsetzen dieser Ausdrücke ist eine Reihe goniometrischer Umformungen erforderlich, die für alle vier Koeffizienten  $\mathbf{A}_1$ ,  $\mathbf{A}_2$ ,  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{C}$  der Ersatzleitung dieselben Wege gehen. Es genügt, sie unter Auslassung einfacher Zusammenfassungen für  $\mathbf{A}_1$  anzugeben:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_1 &= \mathfrak{Cof} \gamma_2 \mathfrak{Cof} (n - 1) \gamma_1 + \mathfrak{Sin} \gamma_2 \frac{\beta_2}{\beta_1} \mathfrak{Cof} p \gamma_1 \mathfrak{Sin} (n - p - 1) \gamma_1 \\ &\quad + \mathfrak{Sin} \gamma_2 \frac{\beta_1}{\beta_2} \mathfrak{Sin} p \gamma_1 \mathfrak{Cof} (n - p - 1) \gamma_1 \\ &= \mathfrak{Cof} n \gamma_1 \left\{ \mathfrak{Cof} \gamma_1 \mathfrak{Cof} \gamma_2 \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{2} \mathfrak{Sin} \gamma_2 \left[ \left( \frac{\beta_2}{\beta_1} + \frac{\beta_1}{\beta_2} \right) \mathfrak{Sin} \gamma_1 + \left( \frac{\beta_2}{\beta_1} - \frac{\beta_1}{\beta_2} \right) \mathfrak{Sin} (2p + 1) \gamma_1 \right] \right\} \\ &\quad - \mathfrak{Sin} n \gamma_1 \left\{ \mathfrak{Sin} \gamma_1 \mathfrak{Sin} \gamma_2 \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{2} \mathfrak{Sin} \gamma_2 \left[ \left( \frac{\beta_2}{\beta_1} + \frac{\beta_1}{\beta_2} \right) \mathfrak{Cof} \gamma_1 + \left( \frac{\beta_2}{\beta_1} - \frac{\beta_1}{\beta_2} \right) \mathfrak{Cof} (2p + 1) \gamma_1 \right] \right\}. \end{aligned}$$

Wir führen zwei Paar Größen  $\mathfrak{G}_1, \vartheta_1$  und  $\mathfrak{G}_2, \vartheta_2$  ein, indem wir den Faktor von  $\mathfrak{Cof} n \gamma_1$  in vorstehender Gleichung als  $\mathfrak{G}_1 \mathfrak{Cof} \vartheta_1$ , den Faktor von  $-\mathfrak{Sin} n \gamma_1$  als  $\mathfrak{G}_1 \mathfrak{Sin} \vartheta_1$  bezeichnen.  $\mathfrak{G}_2$  und  $\vartheta_2$  ergeben sich aus der Entwicklung der anderen Koeffizienten, und zwar unterscheiden sich  $\mathfrak{G}_2 \mathfrak{Cof} \vartheta_2$  von  $\mathfrak{G}_1 \mathfrak{Cof} \vartheta_1$  und  $\mathfrak{G}_2 \mathfrak{Sin} \vartheta_2$  von  $\mathfrak{G}_1 \mathfrak{Sin} \vartheta_1$  nur dadurch, daß die Pluszeichen zwischen den Posten der inneren Klammer durch Minuszeichen ersetzt sind.

Man erhält dann folgende Ausdrücke:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_1 &= \mathfrak{G}_1 \mathfrak{Cof} (n \gamma_1 + \vartheta_1), & \mathbf{B} &= \beta_1 \mathfrak{G}_1 \mathfrak{Sin} (n \gamma_1 + \vartheta_1) \\ \mathbf{A}_2 &= \mathfrak{G}_2 \mathfrak{Cof} (n \gamma_1 + \vartheta_2), & \mathbf{C} &= \frac{\mathfrak{G}_2}{\beta_1} \mathfrak{Sin} (n \gamma_1 + \vartheta_2). \end{aligned}$$

Es läßt sich leicht nachweisen, daß die vier Größen die Bedingungs-  
gleichung (284) erfüllen.

Die Bestimmungsgleichungen für die vier Größen  $\mathfrak{G}$  und  $\mathfrak{D}$  gelten ohne  
jede Vernachlässigung. Die Annahme, daß die zweite Leitung nur einen  
Abschnitt lang sei, ist dabei keine notwendige Voraussetzung, da die Wahl  
von  $\gamma_2$  frei steht. Es ist auch gleichgültig, durch welche Umstände die Ab-  
weichung zwischen  $\gamma_1$  und  $\gamma_2$  hervorgebracht worden ist, also durch ein  
Zuviel oder Zuwenig an Kapazität, Induktivität oder Widerstand.  $\mathfrak{D}_1$  und  $\mathfrak{D}_2$   
werden gleich, wenn  $\mathfrak{Z}_1 = \mathfrak{Z}_2$ , weil eben in Reihe geschaltete Leitungen  
gleichen Wellenwiderstandes sich wie eine gleichmäßige verhalten; sie ver-  
schwinden, wenn auch  $\gamma_1 = \gamma_2$  ist.

Außer durch  $\gamma_1, \gamma_2$  und  $\mathfrak{Z}_1, \mathfrak{Z}_2$  werden die Größen  $\mathfrak{G}$  und  $\mathfrak{D}$  noch durch  
die Stelle  $p$  bestimmt, hinter welcher, vom Anfang aus gesehen, die Ungleich-  
mäßigkeit beginnt.

Man erhält ferner

$$\mathfrak{G}_1 \mathfrak{G}_2 \mathfrak{C} \sin(\mathfrak{D}_1 - \mathfrak{D}_2) = \frac{1}{2} \left( \frac{\mathfrak{Z}_2}{\mathfrak{Z}_1} - \frac{\mathfrak{Z}_1}{\mathfrak{Z}_2} \right) \mathfrak{C} \sin \gamma_2 \left( \mathfrak{C} \cos \gamma_2 \mathfrak{C} \cos 2p \gamma_1 \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \left( \frac{\mathfrak{Z}_2}{\mathfrak{Z}_1} + \frac{\mathfrak{Z}_1}{\mathfrak{Z}_2} \right) \mathfrak{C} \sin \gamma_1 \mathfrak{C} \sin 2p \gamma_1 \right).$$

Eine Änderung des normalen Verhältnisses der elektrischen Eigenschaften  
beeinflusst hauptsächlich den Posten in der ersten Klammer. Ist die Kapazität  
größer als die normale, so wird  $\text{mod} \frac{\mathfrak{Z}_2}{\mathfrak{Z}_1} < 1$ , bei zu großer Induktivität  
übersteigt diese Größe die Einheit. Für eine bestimmte Stelle  $p$  kehrt sich also  
das Vorzeichen der Differenz  $\mathfrak{D}_1 - \mathfrak{D}_2$  um, je nachdem es sich um ein Über-  
wiegen der einen oder der anderen Größe handelt.

Der gesuchte Wellenwiderstand  $\mathfrak{Z}'$  ist das geometrische Mittel aus dem  
Leerlaufwiderstand und dem Kurzschlußwiderstand, von der  $a$ -Seite aus  
gemessen, oder

$$\mathfrak{Z}'^2 = \left( \mathfrak{Z}_1 \frac{\mathfrak{G}_1}{\mathfrak{G}_2} \right)^2 \frac{\mathfrak{C} \sin 2(n\gamma_1 + \mathfrak{D}_1)}{\mathfrak{C} \sin 2(n\gamma_1 + \mathfrak{D}_2)}.$$

Der Faktor  $\left( \frac{\mathfrak{G}_1}{\mathfrak{G}_2} \right)^2$  ist mit der Frequenz nur in geringem Maße ver-  
änderlich. In dem anderen sind sowohl  $n\gamma_1$  als auch  $\mathfrak{D}_1$  und  $\mathfrak{D}_2$  komplexe  
Größen. Es sei

$$\begin{aligned} \gamma_1 &= \alpha i + \beta \\ \mathfrak{D}_1 &= \alpha'_1 i + \beta'_1 \\ \mathfrak{D}_2 &= \alpha'_2 i + \beta'_2. \end{aligned}$$

Besonders in dem Falle, daß die Ungleichmäßigkeit in einem Zuviel oder  
Zuwenig an Induktivität oder Kapazität besteht, wird der Unterschied von  
 $n\beta + \beta'_1$  und  $n\beta + \beta'_2$  gegen  $n\beta$  nur gering sein. Die imaginären Anteile  
 $(n\alpha + \alpha'_1)i$  und  $(n\alpha + \alpha'_2)i$  sind gleichfalls nicht sehr verschieden, aber es  
kommen ihre trigonometrischen Funktionen in Betracht, die an kritischen  
Stellen auch bei kleinen Unterschieden der Winkel stark voneinander abweichen.

Dem Grundsatz nach kann man daher annähernd schreiben

$$\frac{\zeta \sin 2(n\gamma + \vartheta_1)}{\zeta \sin 2(n\gamma + \vartheta_2)} = \frac{R e^{i(\varphi+a)} - r e^{-i(\varphi+a)}}{R e^{i\varphi} - r e^{-i\varphi}} = \xi + i\eta,$$

wo

$$R = e^{(2n\beta + \beta'_1 + \beta'_2)}$$

$$r = \frac{1}{R}$$

$$\varphi = n\alpha + \alpha'_1$$

$$a = \alpha'_1 - \alpha'_2$$

ist. Sowohl  $\varphi$  als  $a$  ändern sich mit der Betriebsfrequenz, aber  $\varphi$  nimmt, weil es sich auf die ganze Länge bezieht, so viel schneller zu als  $a$ , daß man dieses für die Betrachtung einer kritischen Frequenzstelle als unveränderlich ansehen kann.

Aus den aus vorstehender Gleichung folgenden Gleichungen

$$\cos \varphi (R - r)(\cos a - \xi) = \sin \varphi (R + r) \left( \frac{R - r}{R + r} \sin a - \eta \right)$$

$$\sin \varphi (R + r)(\cos a - \xi) = \cos \varphi (R - r) \left( -\frac{R + r}{R - r} \sin a + \eta \right)$$

ergibt sich die Kreisgleichung

$$(\xi - \cos a)^2 + \left( \eta - \frac{R^2 + r^2}{R^2 - r^2} \sin a \right)^2 = \left( \frac{2Rr}{R^2 - r^2} \sin a \right)^2.$$

Die Werte von  $\xi + i\eta$  durchlaufen also bei verschiedenen Werten von  $\varphi$  einen Kreis mit dem Radius  $\varrho = \frac{2Rr}{R^2 - r^2} \sin a$ , dessen Mittelpunkt durch  $\xi_0 = \cos a$  und  $\eta_0 = \frac{R^2 + r^2}{R^2 - r^2} \sin a$  bestimmt ist. Je geringer die Unregelmäßigkeiten, um so kleiner ist  $a$ , also auch  $\varrho$ , um so näher bleibt  $\xi + i\eta$  bei dem Werte Eins.

Mit welchen Geschwindigkeiten der Kreis bei wachsender Frequenz durchlaufen wird, ergibt sich, wenn man setzt

$$\xi = \xi_0 + \varrho \sin u, \quad \eta = \eta_0 + \varrho \cos u.$$

Hierin bedeutet  $u$  den Winkel zwischen der Achse  $+\eta$  und dem augenblicklichen Radius vom Punkt  $\xi_0, \eta_0$  nach dem Aufpunkt; er wächst bei einer Drehung im Sinne des Uhrzeigers.

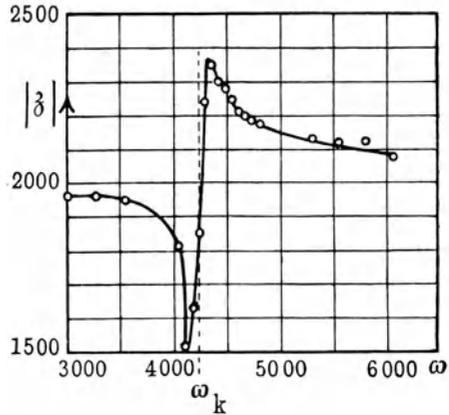
Die Einführung der Werte von  $\xi$  und  $\eta$  in eine der Gleichungen für  $\varphi$  ergibt

$$\operatorname{tg} \frac{u}{2} = \frac{R + r}{R - r} \operatorname{tg} \varphi.$$

Die Werte des Wellenwiderstandes einer Leitung, in der an einer Stelle eine Unregelmäßigkeit ist, durchlaufen also bei wachsender Betriebsfrequenz eine Linie im Sinne der Uhrzeigerdrehung, die sich für ein angemessenes Frequenzbereich mit einem Kreise deckt. Es hängt von der Höhe des gesamten Dämpfungsmaßes ab, ob die Werte den Kreis mit einer der Frequenzänderung annähernd proportionalen Geschwindigkeit durchlaufen, oder bei einzelnen Frequenzen sich besonders schnell ändern.

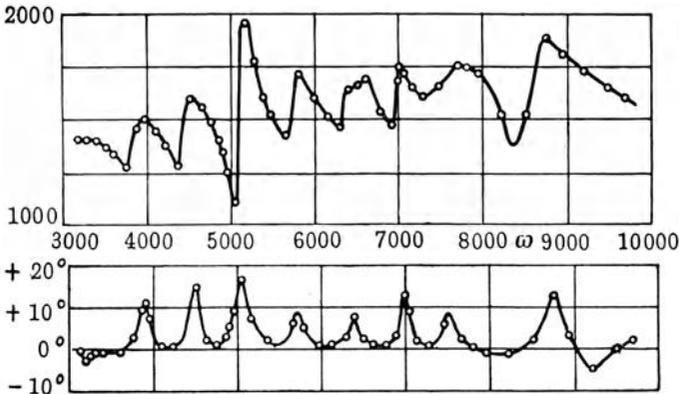
Wenn  $\varphi$  die Werte von  $(n - 1)\pi/2$  bis  $(n + 1)\pi/2$  durchläuft, so legt  $u$  einen vollen Kreislauf zurück. Der Durchgang von  $u$  von einem Werte, bei dem  $\xi + i\eta$  den größten Betrag hat, bis zu dem Werte, bei dem es den kleinsten Betrag hat, vollzieht sich um so schneller, je größer  $R + r$   $R - r$ , also je kleiner das Dämpfungsmaß der Leitung ist. Daher kommt es, daß auf kurzen Leitungsstrecken in der Frequenzkurve des Wellenwiderstandes in engen Frequenzbereichen plötzliche Änderungen auftreten, wie bei  $\omega_k$  in Fig. 197, welche sich auf ein Leitungsstück von nur drei Spulenlängen mit einem Dämpfungsmaß von etwa 0,045 bezieht, während bei Strecken von der Länge eines Verstärkerfeldes die Änderungen in größeren Bereichen vor sich gehen, wie etwa Fig. 198 zeigt. Diese Figuren stellen den Vorgang nicht durch den Kreis selbst dar, sondern durch Auftragen des Betrages des Wellenwiderstandes und in Fig. 198 auch seines Winkels.

Fig. 197.



Der schnelle Übergang von Abweichungen nach unten zu solchen nach oben oder umgekehrt tritt in Übereinstimmung mit der am Eingang erwähnten Beobachtung an den Stellen ein, wo  $\sin \varphi$  oder  $\sin 2n\alpha$  das Zeichen wechselt, also wenn das Winkelmaß ein Vielfaches von  $\pi/2$  ist.

Fig. 198.



Diese Kreise sind nicht dieselben, wie die in § 232 beschriebenen Örter für die Frequenzabhängigkeit der Scheinwiderstände  $U_1$  und  $U_2$ . Denn diese beziehen sich auf den Verlauf des Wellenwiderstandes in Abhängigkeit von der Frequenz. Für eine gleichmäßige Leitung wird dieser, wie die Auscheidung von  $\omega$  aus der Gleichung

$$\sqrt{\frac{R + i\omega L}{i\omega K}} = \xi + i\eta$$

ergibt, durch die Gleichung

$$\xi^2 - \eta^2 = \frac{L}{K}$$

dargestellt. Die Frequenzkurve des Wellenwiderstandes einer gleichmäßigen Leitung ist daher der im unteren rechten Quadranten liegende Ast einer gleichseitigen Hyperbel, und zwar nähert sie sich dem Pole  $\xi = \sqrt{L/K}$  mit zunehmender Frequenz.

Der Scheinwiderstand einer belasteten Leitung (vgl. § 275) verhält sich unterhalb der Grenzfrequenz ähnlich. Es handelt sich also beidemal um normalerweise glatte, einfache Linienzüge. Diese werden, wenn der Aufbau der Leitung unregelmäßig ist, in der besprochenen Weise verändert; bei starken Unregelmäßigkeiten bilden sich in sich geschlossene Schleifen. Wenn man nicht den Wellenwiderstand, sondern, zumal für eine kurze Leitung, einen der Scheinwiderstände algebraisch aufträgt, so wird auch der nach § 232 für einen bestimmten Bereich geltende Kreis an der kritischen Stelle verzerrt; es bildet sich dann gegebenenfalls an einer Stelle des Umfanges eine Schleife aus.

### Dritter Abschnitt.

## Anpassung von Apparaten an Wechselstromleitungen.

### § 244. Verbindung verschiedenartiger Leitungen durch Übertrager.

Für die Verstärkertechnik handelt es sich häufig darum, durch eine künstliche Leitung eine andere nachzubilden, welche aus Leitungen verschiedenen Wellenwiderstandes zusammengesetzt ist. Ein solcher Fall könnte z. B. bei einem Seekabel vorliegen, das man nicht unmittelbar oder durch ein Landkabel gleichen Wellenwiderstandes in das Verstärkeramt einführen kann, sondern vor dem eine oberirdische Leitung liegt. Die Reflexionen, welche an der Stoßstelle eintreten, bringen dann in der Frequenzkurve des nachzubildenden Scheinwiderstandes die in § 243 beschriebenen Abweichungen hervor, welche eine günstige Verstärkung unmöglich machen. Diese Mängel lassen sich durch angepaßte Übertrager zwischen den Leitungen verschiedenen Wellenwiderstandes beseitigen. Der früher hauptsächlich betrachtete Fall, daß durch einen angepaßten Übertrager das Dämpfungsmaß einer langen Leitung, welche unterwegs ein Stück mit stark abweichendem Widerstand enthielt, auf den günstigsten Wert gebracht werden konnte, hat im Vergleich zu dem vorher erwähnten Fall heute nur mehr theoretisches Interesse.

Wir werden die Frage, wie man einen solchen Übertrager zu bemessen hat, zunächst allgemein behandeln.

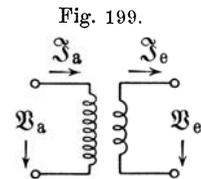
Um zwei Leitungen verschiedener Art auf die vorteilhafteste Weise miteinander zu verbinden, muß zunächst der Übertrager, für sich betrachtet, möglichst vollkommen sein. Dazu gehört, daß er keine Streuung besitze, da zur Erzeugung der gestreuten magnetischen Linien ein bestimmter Teil des Erregerstromes aufgewendet werden muß, dessen Joulesche Wärme ohne Gegenwert verloren geht. Wenn diese Bedingung erfüllt ist, so ist der Wirkungsgrad bei einer bestimmten Periodenzahl noch von der Zeitkonstante  $\tau$

der Wicklungen abhängig; je größer diese ist, um so kleiner ist das Verhältnis der in Wärme umgesetzten Energie zu der gesamten ins Spiel tretenden magnetischen Energie.

Wenn auch der Wirkungsgrad sich mit der Zeitkonstante steigert, so ist man doch durch mancherlei Rücksichten auf Raum, Kosten, Gewicht u. dgl. auf bestimmte Werte der Zeitkonstanten angewiesen; bei einem Transformator gegebener Größe kann man ihren wirksamen Wert durch eine vorteilhafte magnetische Anordnung, eine sorgfältige Ausnutzung des Wicklungsraumes und durch möglichste Verminderung der Verluste in Wirbelströmen und Hysterese auf eine günstige Höhe bringen. Hiermit beschäftigen wir uns nicht weiter, sondern wir wollen nunmehr fragen, wie wir den Übertrager zu bewickeln haben, damit er sich den zu verbindenden Leitungen aufs beste anpasse.

In diesem Falle muß der Wechselstromwiderstand, der sich am Übertrager dem von der Leitung kommenden Strome bietet, in einem bestimmten Verhältnis zum Wellenwiderstand der Leitungen stehen. Ist der Wechselstromwiderstand des Übertragers zu hoch oder zu niedrig, so treten starke Reflexionen auf, und die Energie der reflektierten Wellen, die sich in der Regel auf der Leitung tot laufen, ist für die Übertragung verloren.

Wir werden daher zuerst versuchen, die Frage aus dem Gesichtspunkte zu beantworten, daß Reflexionen möglichst vermieden werden sollen. Hätten wir statt des Übertragers eine Leitung, so würden wir ihren Wellenwiderstand nach § 213 demjenigen der anschließenden Leitung gleich machen.



Man kann nun die Gleichungen von Strom und Spannung am Transformator in die Form der für eine Leitung bekannten bringen.

Nach den Bezeichnungen von Strom und Spannung in Fig. 199 und mit Angabe der Werte für den Übertrager nach der Art von § 191 haben wir zunächst

$$U_a = \mathcal{L}_1 I_a - M I_e, \quad \mathcal{L}_2 I_e + U_e - M I_a = 0.$$

Daraus folgt

$$\left. \begin{aligned} U_a &= \frac{\mathcal{L}_1}{M} U_e + \frac{\mathcal{L}_1 \mathcal{L}_2 - M^2}{M} I_e \\ I_a &= \frac{\mathcal{L}_2}{M} I_e + \frac{1}{M} U_e \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (294)$$

Ein Übertrager mit verschiedenen Wicklungen kann demnach mit einer unsymmetrischen Leitung verglichen werden; in der Tat hat die Differenz  $\frac{\mathcal{L}_1}{M} \frac{\mathcal{L}_2}{M} - \frac{\mathcal{L}_1 \mathcal{L}_2 - M^2}{M} \frac{1}{M}$  den Wert Eins, entsprechend der Gl. (284).

Es sei hier an die Gl. (288) für eine unsymmetrische Leitung erinnert, in der  $x$  als eine Art Übersetzungsverhältnis aufgefaßt werden kann.

Die Primärseite hat bei offener Sekundärseite den Scheinwiderstand  $\mathcal{L}_1$ , bei kurzgeschlossener Sekundären den Scheinwiderstand  $\frac{\mathcal{L}_1 \mathcal{L}_2 - M^2}{\mathcal{L}_2}$ ; als Leitung betrachtet hätte die Primärseite also den Wellenwiderstand

$$\sqrt{\frac{\mathcal{L}_1}{\mathcal{L}_2} (\mathcal{L}_1 \mathcal{L}_2 - M^2)}.$$

Für die Sekundärseite ergibt sich der Wellenwiderstand

$$\sqrt{\frac{\mathfrak{L}_2}{\mathfrak{L}_1} (\mathfrak{L}_1 \mathfrak{L}_2 - \mathfrak{M}^2)}.$$

Nach den Ergebnissen in § 213 für zwei aneinander anschließende Leitungen wird man die beiden Werte einzeln mit demjenigen der zugehörigen Leitungen übereinstimmen lassen. Man wird dies allerdings nur für die Beträge zuwege bringen, aber damit doch die größte mögliche Anpassung erreichen. Wir haben also, wenn  $\mathfrak{Z}_1$  und  $\mathfrak{Z}_2$  die Wellenwiderstände der Leitungen sind,

$$\begin{aligned} |\mathfrak{Z}_1|^2 &= \frac{\mathfrak{L}_1}{\mathfrak{L}_2} (\mathfrak{L}_1 \mathfrak{L}_2 - \mathfrak{M}^2), \\ |\mathfrak{Z}_2|^2 &= \frac{\mathfrak{L}_2}{\mathfrak{L}_1} (\mathfrak{L}_1 \mathfrak{L}_2 - \mathfrak{M}^2). \end{aligned}$$

Daher

$$\begin{aligned} \left| \frac{\mathfrak{L}_1}{\mathfrak{L}_2} \right| &= \left| \frac{\mathfrak{Z}_1}{\mathfrak{Z}_2} \right| \\ |\mathfrak{L}_1 \mathfrak{L}_2 - \mathfrak{M}^2| &= |\mathfrak{Z}_1 \mathfrak{Z}_2|. \end{aligned}$$

Die erste dieser Gleichungen bestimmt das Übersetzungsverhältnis. Zunächst ist

$$\left| \frac{\mathfrak{L}_1}{\mathfrak{L}_2} \right| = \sqrt{\frac{R_1^2 + \omega^2 L_1^2}{R_2^2 + \omega^2 L_2^2}}.$$

Bei genügender Zeitkonstante sind  $R_1^2$  und  $R_2^2$  gegen  $\omega^2 L_1^2$  und  $\omega^2 L_2^2$  zu vernachlässigen. Bei dem in § 188 besprochenen Übertrager ist für beide Wicklungen der wirksame Widerstand etwa gleich 42 Ohm, die Induktivität 2,7 H, so daß also in dem vorstehenden Ausdruck die von den Widerständen herrührenden Anteile belanglos sind. Bei einem Übertrager ohne Streuung ist ferner  $L_1 = n M$  und  $L_2 = \frac{M}{n}$ , wo  $n$  das Übersetzungsverhältnis ist, daher folgt

$$n = \sqrt{\left| \frac{\mathfrak{Z}_1}{\mathfrak{Z}_2} \right|} \dots \dots \dots (295)$$

Aus der zweiten Gleichung erhalten wir die noch fehlenden Werte für die Induktivitäten  $L_1$ ,  $L_2$  und  $M$ . Es ergibt sich zunächst

$$|R_1 R_2 + i \omega (R_1 L_2 + R_2 L_1)| = |\mathfrak{Z}_1 \mathfrak{Z}_2|.$$

Die Größe  $R_1 R_2$  kommt gegen die andere, zumal bei der Zusammensetzung unter einem rechten Winkel, nicht in Betracht. Die beiden Bewicklungen haben möglicherweise verschiedene Zeitkonstanten, derart, daß

$$L_1 = \tau_1 R_1, \quad L_2 = \tau_2 R_2.$$

Man erhält dann

$$\omega L_1 L_2 \left( \frac{1}{\tau_1} + \frac{1}{\tau_2} \right) = |\mathfrak{Z}_1 \mathfrak{Z}_2|.$$

Daher findet man

$$M = \frac{\sqrt{\mathfrak{Z}_1 \mathfrak{Z}_2}}{\sqrt{\omega \left( \frac{1}{\tau_1} + \frac{1}{\tau_2} \right)}}.$$

Damit sind alle übrigen Größen bestimmt.

Sollte daher der in § 188 beschriebene Übertrager so umgewickelt werden, daß er zwischen einer Pupinleitung mit der Charakteristik 1600 und einer oberirdischen Leitung mit der Charakteristik 550 möglichst günstig vermittelt, so erhielte man

$$M = \frac{168}{\sqrt{\omega}}, \quad n = 1,71,$$

also z. B. für  $\omega = 5000$

$$M = 2,38, \quad L_1 = 4,05, \quad L_2 = 1,39.$$

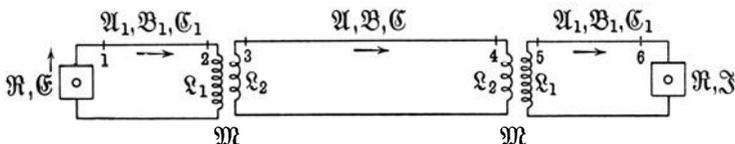
Setzt man gleiche Zeitkonstanten in beiden Wicklungen voraus, so erhält man folgende Bestimmungen für den Übertrager:

$$\left. \begin{aligned} M &= \sqrt{\frac{\tau}{2\omega}} \sqrt{Z_1 Z_2} \\ L_1 &= \sqrt{\frac{\tau}{2\omega}} Z_1, \quad R_1 = \frac{Z_1}{\sqrt{2\tau\omega}} \\ L_2 &= \sqrt{\frac{\tau}{2\omega}} Z_2, \quad R_2 = \frac{Z_2}{\sqrt{2\tau\omega}} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (296)$$

Es ist hiernach zunächst anzunehmen, daß man den Übertrager in dieser Weise nur für eine bestimmte Frequenz anpassen könnte, und es entsteht die Frage, ob die Stelle der günstigsten Wirkung scharf abgegrenzt ist, oder ob sie in einem breiten Gebiete liegt, innerhalb dessen Änderungen der Frequenz nicht viel ausmachen. Dies wird die nachstehende Rechnung zeigen, welche außerdem die Ergebnisse unter Berücksichtigung der Phasenwinkel etwas ändert.

Der Sprechkreis (Fig. 200) bestehe aus der Fernleitung mit den Konstanten  $\mathfrak{A}$ ,  $\mathfrak{B}$ ,  $\mathfrak{C}$ , den Anschlußleitungen mit den Konstanten  $\mathfrak{A}_1$ ,  $\mathfrak{B}_1$ ,  $\mathfrak{C}_1$ , den

Fig. 200.



beiden Übertragern und den Sprechapparaten  $\mathfrak{R}$ . Die EMK in dem auf der linken Seite angenommenen Sender sei  $\mathfrak{E}$ , der Strom im Empfänger  $\mathfrak{I}$ , im übrigen sollen Ströme und Spannungen durch Beisetzen der Stellenziffer gekennzeichnet werden. Wir rechnen alle Ströme im Sinne der eingezeichneten Pfeile.

Wir haben zunächst die Gleichungen

$$\mathfrak{E} = \mathfrak{B}_1 + \mathfrak{R} \mathfrak{I}_1, \quad \mathfrak{B}_1 = \mathfrak{A}_1 \mathfrak{B}_2 + \mathfrak{B}_1 \mathfrak{I}_2, \quad \mathfrak{I}_1 = \mathfrak{A}_1 \mathfrak{I}_2 + \mathfrak{C}_1 \mathfrak{I}_2.$$

Sie ergeben

$$\mathfrak{E} = \mathfrak{B}_2 (\mathfrak{A}_1 + \mathfrak{C}_1 \mathfrak{R}) + \mathfrak{I}_2 (\mathfrak{B}_1 + \mathfrak{A}_1 \mathfrak{R}).$$

Unterbricht man den Kreis bei 2, so daß  $\mathfrak{I}_2 = 0$  wird, so nimmt  $\mathfrak{B}_2$  einen Wert  $\mathfrak{E}'$  an, wo  $\mathfrak{E} = (\mathfrak{A}_1 + \mathfrak{C}_1 \mathfrak{R}) \mathfrak{E}'$ . Man kann daher schreiben

$$\mathfrak{E}' = \mathfrak{B}_2 + \frac{\mathfrak{B}_1 + \mathfrak{A}_1 \mathfrak{R}}{\mathfrak{A}_1 + \mathfrak{C}_1 \mathfrak{R}} \mathfrak{I}_2.$$

Die Größe  $\mathfrak{W} = (\mathfrak{B}_1 + \mathfrak{A}_1 \mathfrak{M}) / (\mathfrak{A}_1 + \mathfrak{C}_1 \mathfrak{M})$  ist der Scheinwiderstand des Teiles der Schaltung von Stelle 2 aus nach links und des damit übereinstimmenden Scheinwiderstandes des rechts von Stelle 5 liegenden Teiles. Wir vereinfachen durch die Einführung der reduzierten EMK  $\mathfrak{E}'$  und des Scheinwiderstandes  $\mathfrak{B}$  der Anschlußteile die Aufgabe dem Umfange nach erheblich. Das Verhältnis  $\mathfrak{E}'/\mathfrak{E}$  und der Wert von  $\mathfrak{W}$  hängt nicht von der Anpassung der Übertrager ab. Wir haben weiter die Gleichungen

$$\begin{aligned} \mathfrak{B}_2 &= \mathfrak{L}_1 \mathfrak{I}_2 - \mathfrak{M} \mathfrak{I}_3, & \mathfrak{L}_2 \mathfrak{I}_3 - \mathfrak{M} \mathfrak{I}_2 + \mathfrak{B}_3 &= 0 \\ \mathfrak{B}_3 &= \mathfrak{A} \mathfrak{I}_4 + \mathfrak{B} \mathfrak{I}_4, & \mathfrak{I}_3 &= \mathfrak{A} \mathfrak{I}_4 + \mathfrak{C} \mathfrak{I}_4 \\ \mathfrak{B}_4 &= \mathfrak{L}_2 \mathfrak{I}_4 - \mathfrak{M} \mathfrak{I}_5, & \mathfrak{L}_1 \mathfrak{I}_5 - \mathfrak{M} \mathfrak{I}_4 + \mathfrak{B}_5 &= 0. \end{aligned}$$

Dazu treten

$$\mathfrak{E}' = \mathfrak{B}_2 + \mathfrak{W} \mathfrak{I}_2, \quad \mathfrak{B}_5 = \mathfrak{W} \mathfrak{I}_5.$$

Wenn wir alle Größen außer  $\mathfrak{E}'$  und  $\mathfrak{I}_5$  ausscheiden, so ergibt sich

$$\begin{aligned} \mathfrak{M}^2 \mathfrak{E}' &= \mathfrak{I}_5 \left\{ (\mathfrak{L}_2 (\mathfrak{W} + \mathfrak{L}_1) - \mathfrak{M}^2) (\mathfrak{L}_2 \mathfrak{C} + \mathfrak{A}) (\mathfrak{W} + \mathfrak{L}_1) - \mathfrak{C} \mathfrak{M}^2 \right. \\ &\quad \left. + (\mathfrak{W} + \mathfrak{L}_1) ((\mathfrak{L}_2 \mathfrak{A} + \mathfrak{B}) (\mathfrak{W} + \mathfrak{L}_1) - \mathfrak{A} \mathfrak{M}^2) \right\}. \end{aligned}$$

Führt man die Scheinwiderstände der Fernleitung bei Leerlauf und Kurzschluß ein, Gl. (279), und nimmt ferner an, daß  $\mathfrak{L}_1$  und  $\mathfrak{L}_2$  genügend genau gleich dem Wellenwiderstand  $\mathfrak{Z}$  der Fernleitung gesetzt werden können, so vereinfacht sich die letzte Gleichung zu

$$\mathfrak{E}' = \mathfrak{I}_5 \frac{\mathfrak{A} ((\mathfrak{W} + \mathfrak{L}_1) (\mathfrak{Z} + \mathfrak{L}_2) - \mathfrak{M}^2)}{\mathfrak{Z} \mathfrak{M}^2}.$$

Unter Vernachlässigung der Widerstandskomponenten von  $\mathfrak{L}_1$  und  $\mathfrak{L}_2$ , die bei der ohnehin nur annähernden Anpassung und bei guten Übertragern keine Rolle spielen, setzen wir

$$\mathfrak{L}_1 = n \mathfrak{M}, \quad \mathfrak{L}_2 = \frac{\mathfrak{M}}{n}.$$

Es handelt sich dann darum, den Mindestwert des Betrages des folgenden Ausdrucks aufzusuchen

$$\mathfrak{E}^2 = \left( n \mathfrak{Z} + \frac{\mathfrak{W}}{n} + \frac{\mathfrak{W} \mathfrak{Z}}{\mathfrak{M}} \right)^2.$$

Sei  $\mathfrak{Z} = Z e^{-i\zeta}$ ,  $\mathfrak{W} = W e^{-i\varphi}$ ,  $\mathfrak{M} = i \omega M$ , so ergibt sich

$$\mathfrak{E}^2 = n^2 Z^2 + \frac{W^2}{n^2} + WZ \cos(\zeta - \varphi) - 2x \left( nZ \sin \varphi + \frac{W}{n} \sin \zeta \right) + x^2.$$

Dabei ist  $x = WZ/\omega M$ . Setzt man die partiellen Ableitungen nach  $n$  und  $x$  gleich Null, so ergeben sich die Gleichungen

$$\begin{aligned} n^2 Z^2 - \frac{W^2}{n^2} - x \left( nZ \sin \varphi - \frac{W}{n} \sin \zeta \right) &= 0 \\ x - \left( nZ \sin \varphi + \frac{W}{n} \sin \zeta \right) &= 0. \end{aligned}$$

Daraus ergeben sich die Werte

$$n = \sqrt{\frac{W \cos \zeta}{Z \cos \varphi}}$$

$$\omega M = \sqrt{WZ} \frac{\sqrt{\cos \zeta \cos \varphi}}{\sin(\zeta + \varphi)}.$$

Wenn man hiernach  $M$  für eine bestimmte Frequenz  $\omega_a$  bemißt, so wird für eine andere

$$\omega M = \frac{\omega}{\omega_a} \sqrt{WZ} \frac{\sqrt{\cos \zeta \cos \varphi}}{\sin(\zeta + \varphi)}.$$

Man sieht hieraus, daß die Phasenwinkel eine nicht zu vernachlässigende Bedeutung haben, daß insbesondere bei kleinen Werten beider Winkel der zweckmäßigste Wert von  $M$  stark von den in der Rechnung angesetzten Phasenwinkeln abhängt.

Gleichwohl hängt der sich ergebende Wert von  $\mathfrak{E}'/\mathfrak{J}_5$ , nämlich die Größe  $\mathfrak{A}\mathfrak{E}^2/\mathfrak{J}$ , von der Richtigkeit der angesetzten Winkel und der Frequenz nur wenig ab. Setzen wir die Werte von  $n$  und  $\omega M$  ein, so erhalten wir

$$\frac{\mathfrak{A}\mathfrak{E}^2}{\mathfrak{J}} = 4 \mathfrak{A} W \cos \zeta \cos \varphi \left[ 1 + \left( \frac{\omega_a - \omega}{2 \omega_a} \frac{\sin(\zeta + \varphi)}{\cos \zeta \cos \varphi} \right)^2 \right].$$

Falls  $W$ ,  $\zeta$ ,  $\varphi$  einigermaßen unabhängig von der Frequenz sind, trifft dies auch für den gesamten Ausdruck in praktischer Hinsicht genügend zu. Man wird zweckmäßig als  $\omega_a$  den Mittelwert des in Betracht kommenden Frequenzgebietes wählen.

Bei diesem Beispiel sind das Wicklungsverhältnis und die Induktivitäten der beiden Wicklungen den Größen  $\mathfrak{Z}$  und  $\mathfrak{B}$  angepaßt worden. Man kann die Frage der Anpassung auch anders stellen und erhält dann andere Lösungen. Soll z. B. die Wicklung auf der Anschlußseite fest gewählt und dazu die andere möglichst günstig angepaßt werden, so handelt es sich, unter den zulässigen Vernachlässigungen, darum, den Betrag der Größe

$$n \mathfrak{Z} \frac{\mathfrak{B} + \mathfrak{L}_1}{\mathfrak{L}_1} + \frac{\mathfrak{B}}{n}$$

möglichst klein zu machen. Daraus ergibt sich dann

$$n = \sqrt{\frac{\mathfrak{B}}{\mathfrak{Z}} \frac{\mathfrak{L}_1}{\mathfrak{B} + \mathfrak{L}_1}}.$$

Aus dieser Lage erklärt sich die Mannigfaltigkeit möglicher Lösungen<sup>64)</sup>.

Obleich die zweite Lösung der Aufgabe nicht von den Wellenwiderständen beider Leitungen, sondern nur von dem Wellenwiderstand der einen langen Leitung und dem obwaltenden Scheinwiderstand der zweiten, unter Berücksichtigung ihres Zustandes am anderen Ende spricht, so löst sie doch die Aufgabe in allgemeinsten Weise. Denn gleichviel ob  $\mathfrak{Z}$  und  $\mathfrak{B}$  durch die hinreichende Länge als nicht mehr von der Länge abhängige kennzeichnende Widerstände einer Leitung, oder durch bestimmte Endverhältnisse als Festwerte erscheinen, hängt die Wahl des vermittelnden Übertragers nur von der Höhe dieser Scheinwiderstände, nicht von ihrer zufälligen Bedeutung ab.

§ 245. **Günstigster Scheinwiderstand bei Fernsprechapparaten.** Wir nehmen eine lange Leitung an, die an beiden Seiten mit gleichen Apparaten ausgerüstet ist. Nach Gl. (286) haben wir zwischen der EMK  $\mathfrak{E}$  und dem Endstrom  $\mathfrak{I}$  die Beziehung:

$$\mathfrak{E} = \mathfrak{A} \mathfrak{I} \frac{(\mathfrak{Z} + \mathfrak{R})^2}{\mathfrak{Z}}$$

Wir beschränken uns auf den Fall, daß die EMK durch die Änderung der Bewicklung nicht oder nicht merklich geändert werde; dies gilt bei  $ZB$ -Systemen genügend genau, während bei  $OB$ -Systemen allerdings die in der Sekundärspule auftretende EMK von der Wicklung der Induktionsspule abhängt.

Es ist nun festzustellen, was als günstigste Anordnung aufzufassen ist. Wenn es sich um eine Übertragung von Energie in der Form handelte, die ihrer Menge nach gewertet wird, so hätte man darauf zu achten, daß der Wirkungsgrad groß ist; bei telephonischen Übertragungen kommt es auf den Wirkungsgrad nicht in erster Linie an, sondern darauf, mit der gegebenen EMK am Anfange eine möglichst große Leistung nach dem Ende zu schaffen.

Wir haben also den Endapparat so zu bestimmen, daß der Wert der von ihm aufgenommenen Leistung möglichst groß wird. Daneben kommt es darauf an, daß der Apparat im einzelnen so gebaut ist, daß er die ihm zugeführte Energie möglichst günstig für die Abgabe der Schallwellen ausnutzt; dieses aber ist eine konstruktive Frage, die nichts mit dem günstigsten Wert des Scheinwiderstandes zu tun hat. Das Ergebnis unserer Feststellung wird vielmehr das sein, daß für einen gegebenen Apparat eine gewisse Bewicklung, mit einem bestimmten Widerstande bei vorgeschriebenem Wicklungsraume, vorteilhafter ist als eine, die einen größeren oder einen kleineren Widerstand hat.

Nach § 175 ergibt sich die Leistung als der reelle Teil des halben Produktes aus der Spannung  $\mathfrak{R}\mathfrak{I}$  in die Konjugierte von  $\mathfrak{I}$ . Nun sei gesetzt

$$\mathfrak{R} = R e^{i\vartheta}, \quad \mathfrak{I} = Z e^{i\xi},$$

und die Konjugierte von  $\mathfrak{I}$  mit  $\mathfrak{I}'$  bezeichnet. Die Leistung ist der reelle Teil von

$$\frac{1}{2} \mathfrak{I} R e^{i\vartheta} \cdot \mathfrak{I}' = \frac{1}{2} \frac{|\mathfrak{E}|^2}{|\mathfrak{A}|} \frac{Z^2 R e^{i\vartheta}}{(R e^{i\vartheta} + Z e^{i\xi})^2} \frac{1}{(R e^{-i\vartheta} + Z e^{-i\xi})^2}.$$

Sie hat den Wert

$$L = \frac{1}{2} \frac{|\mathfrak{E}|^2}{|\mathfrak{A}|} \frac{Z^2 R \cos \vartheta}{[R^2 + 2 R Z \cos(\vartheta - \xi) + Z^2]^2}.$$

Mit der Bewicklung des Endapparates veränderlich sind  $R$  und  $\vartheta$ . Man erhält für den günstigsten Fall die beiden Gleichungen:

$$\begin{aligned} Z^2 - 2 R Z \cos(\vartheta - \xi) + R^2 &= 4 R^2, \\ R \sin \vartheta &= -Z \sin \xi. \end{aligned}$$

Nach Fig. 201 hat die erste Gleichung folgende Bedeutung:

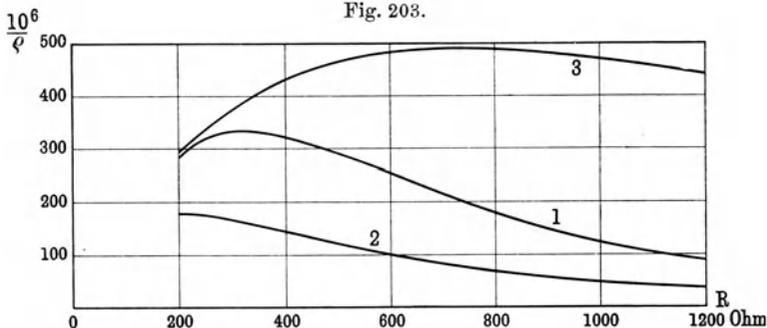
Wenn  $OA = Z$ ,  $OB = R$ , so ist  $AB^2 = Z^2 - 2 R Z \cos(\vartheta - \xi) + R^2$ , also soll  $AB = 2 OB$  sein.

Der Ort aller Punkte, für die der Abstand von  $O$  halb so groß wie der von  $A$  ist, ist nach § 47 ein Kreis, dessen Lage mit Hilfe der Gl. (70) und

(71) bestimmt werden kann. Setzt man in diesen  $2a = Z$ ,  $\alpha = 2$ , so wird  $d = a$ , oder der Abstand  $OM = \frac{1}{3}Z$ ,  $q = \frac{2}{3}Z$ . Nach der zweiten Gleichung soll  $DA = DC$  sein, und der günstigste Widerstand des Endapparates ist daher durch  $Z$  und  $\xi$  bestimmt.

In der Praxis kann es sich nur um eine Annäherung handeln, insbesondere kann man dem Scheinwiderstand des Apparates keinen vorgeschriebenen Winkel geben, sondern dieser hat einen Wert zwischen  $30^\circ$  und  $40^\circ$  bei den verschiedenen Frequenzen. Es kommt also auch hier in Frage, ob die günstigste Anordnung auf einen engen Bereich beschränkt ist, oder ob die Leistung noch annähernd dieselbe bleibt, wenn  $R$  vom günstigsten Wert stark abweicht.

Trägt man in Fig. 202 auf der Linie  $OB$  von  $O$  aus nach beiden Richtungen gleiche Werte  $R$  ab, während  $OA = Z$  gemacht wird, so ist die Leistung dem Betrage  $\frac{1}{q} = \frac{Z^2 \cdot OC}{(AD)^4}$  proportional, der die Dimension eines reziproken Widerstandes hat. Dessen Werte als Ordinaten gegen den Betrag von  $R$  als Abszisse ergeben eine Kurve mit breitem Maximum. Fig. 203 stellt dies in Kurve 1 für  $\beta = 620 e^{-45^\circ i}$  dar, also für ein gewöhnliches Fernsprechkabel, in Kurve 2 für  $\beta = 560 e^{-50^\circ i}$ , also für eine oberirdische Leitung, in Kurve 3 für  $\beta = 2000$ , also für eine stark belastete Pupunleitung.



Man erkennt hieraus, daß die Übertragung auf einer bestimmten Leitung innerhalb eines ziemlich großen Bereiches für  $R$  annähernd gleich gut ist. Die gebräuchlichen Apparate haben meist einen viel zu großen Scheinwider-

stand, verglichen mit dem günstigsten Werte; die  $ZB$ -Apparate nähern sich ihm mehr als die  $OB$ -Apparate. Bemerkenswert ist, eine wieviel größere Leistung man bei gegebenem  $\mathfrak{E}$  und  $\mathfrak{U}$  durch Anpassung der Apparate über eine Leitung höheren Wellenwiderstandes nach dem Ende bringen kann, als über eine Leitung niedrigen Wellenwiderstandes.

#### Vierter Abschnitt.

### Kettenleiter.

§ 246. **Allgemeines.** Nach K. W. Wagner<sup>65)</sup> nennt man mit diesem Namen Anordnungen, in denen untereinander gleiche und, soweit tunlich, in sich symmetrische Leiter, die Glieder, wie bei einer Kette aneinandergereiht sind. Im engeren Sinne bezieht sich die Bezeichnung auf die als Drossel- und Siebketten bekannten Einrichtungen, welche insbesondere in der Technik des Fernmeldens mit modulierten Trägerströmen bedeutungsvoll sind; begrifflich gehören dazu aber auch die Pupinleitungen und die als Eichleitungen bekannten Ersatzleitungen.

Da die Theorie dieser Gebilde schon durchgebildet war, als die eigentlichen Kettenleiter eingeführt wurden, so ist es erklärlich, daß die allgemeine Theorie der neuen Anordnungen sich mit derjenigen der bekannten deckt. Es war bekannt, in welcher Weise man die Eigenschaften des gesamten Leiters aus denen eines Gliedes ableiten kann. Für die nach Pupin mit Spulen belasteten Leitungen war die besonders geartete Abhängigkeit des Dämpfungsmaßes von der Frequenz und die Bedeutung der Grenzfrequenz festgestellt; schon bald nach den ersten Veröffentlichungen Pupins hat Roeber gezeigt, daß die Pupinsche Anordnung nur ein Einzelfall einer ganz allgemeinen Leiteranordnung ist.

Die Theorie der Kettenleiter teilt sich dadurch in einen allgemeinen Teil, der alle denkbaren Formen umfaßt, und in einen besonderen Teil, der die Eigenart einer einzelnen Anordnung betrifft. Im Rechenschema weicht die Darstellung Wagners etwas von der Pupins ab. Wir schließen uns der letzteren an.

§ 247. **Glied und Kette.** Der Zusammenhang zwischen den Eigenschaften des einzelnen Gliedes und der Kette im ganzen ist im Grunde durch die Erörterungen in § 235 schon gegeben. Danach ist jede zu ihrer Mitte symmetrische Anordnung für eine bestimmte Frequenz stets durch zwei Größen bestimmbar, so daß man eine gleichmäßige Ersatzleitung angeben kann, welche für diese Frequenz dieselben Konstanten  $\mathfrak{A}$ ,  $\mathfrak{B}$ ,  $\mathfrak{C}$  hat, wie die vorliegende Anordnung. Für die gleichmäßige Leitung läßt sich Dämpfungsmaß  $b$  und Winkelmaß  $a$  sowie der Wellenwiderstand  $\mathfrak{Z}$  angeben. Es ergibt sich dann, wenn  $ai + b = g$  gesetzt wird, für die Werte der Spannungen und Stromstärken am Anfang und am Ende einer Kette mit  $n$  Gliedern:

$$\left. \begin{aligned} \mathfrak{B}_a &= \mathfrak{B}_e \operatorname{Cof} ng + \mathfrak{Z} \mathfrak{B}_e \operatorname{Sin} ng \\ \mathfrak{I}_a &= \mathfrak{I}_e \operatorname{Cof} ng + \frac{\mathfrak{B}_e}{\mathfrak{Z}} \operatorname{Sin} ng \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (297)$$

**§ 248. Ersatzleitung für das Glied.** Die Glieder werden von Kennelly in solche der  $\Pi$ -Form und solche der T-Form unterschieden. Diese Formen gelten für eine einzelne Leitung, welche in jedem Gliede von einem Ende des wagerechten Balkens zum anderen läuft, während die senkrecht gezeichneten Leiter zur Erde oder zum neutralen Punkt eines Systems gehen. Erweitert man die Anordnung zur Doppelleitung, so entsteht die Viereckschaltung (Fig. 204) und die H-Schaltung (Fig. 205). Es ist nach § 206 gleichgültig,

Fig. 204.

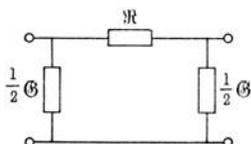
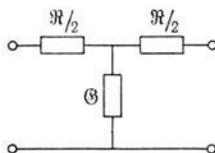


Fig. 205.



ob man in den längs laufenden Leitern die Widerstände in einen Zweig legt, oder auf beide Zweige verteilt. Das Glied wird einen Scheinwiderstand  $\mathfrak{R}$  in den Leitungszweigen und eine Ableitung  $\mathfrak{G}$  von einem Zweig zum anderen zu erhalten haben, die nahe den Werten der Leitung liegen, welche es darstellen soll. Sollen diese Werte so verteilt werden, daß das Glied symmetrisch ist, so ergeben sich die in den Figuren angegebenen Werte. Aus diesen erhält man für die Anordnung nach Fig. 204, auch Leiter erster Art genannt,

$$\mathfrak{R}_v = \mathfrak{R}_{v+1} + \mathfrak{R} \left( \mathfrak{Z}_v + \frac{\mathfrak{G}}{2} \mathfrak{B}_{v+1} \right)$$

$$\mathfrak{Z}_v = \mathfrak{Z}_{v+1} + \frac{\mathfrak{G}}{2} \mathfrak{R}_{v+1} + \frac{\mathfrak{G}}{2} \mathfrak{B}_v.$$

Man erhält daraus

$$\mathfrak{R}_v = \mathfrak{R}_{v+1} \left( 1 + \frac{\mathfrak{R} \mathfrak{G}}{2} \right) + \mathfrak{Z}_{v+1} \mathfrak{R}$$

$$\mathfrak{Z}_v = \mathfrak{Z}_{v+1} \left( 1 + \frac{\mathfrak{R} \mathfrak{G}}{2} \right) + \mathfrak{B}_{v+1} \left( 1 + \frac{\mathfrak{R} \mathfrak{G}}{4} \right).$$

Die gleichmäßige Ersatzleitung für dieses Glied ist daher bestimmt durch die Beziehungen

$$\cos g = 1 + \frac{\mathfrak{R} \mathfrak{G}}{2}, \quad \mathfrak{Z}_1 = \frac{\sqrt{\mathfrak{R} / \mathfrak{G}}}{\sqrt{1 + \frac{\mathfrak{R} \mathfrak{G}}{4}}} \dots \dots \dots (298)$$

Für die Anordnung nach Fig. 205, auch Leiter zweiter Art genannt, erhält man auf ähnliche Weise

$$\mathfrak{R}_v = \mathfrak{R}_{v+1} \left( 1 + \frac{\mathfrak{R} \mathfrak{G}}{2} \right) + \mathfrak{Z}_{v+1} \mathfrak{R} \left( 1 + \frac{\mathfrak{R} \mathfrak{G}}{4} \right)$$

$$\mathfrak{Z}_v = \mathfrak{Z}_{v+1} \left( 1 + \frac{\mathfrak{R} \mathfrak{G}}{2} \right) + \mathfrak{B}_{v+1} \mathfrak{G}.$$

Für die zugehörige gleichmäßige Ersatzleitung ist also

$$\cos g = 1 + \frac{\mathfrak{R} \mathfrak{G}}{2}, \quad \mathfrak{Z}_2 = \sqrt{\frac{\mathfrak{R}}{\mathfrak{G}}} \sqrt{1 + \frac{\mathfrak{R} \mathfrak{G}}{4}} \dots \dots (299)$$

Wir wenden dieselben Überlegungen auf ein Stück einer gestreckten Leitung von der Länge  $s$  an; die Strecke  $s$  soll für eine Pupinleitung gleich

dem Spulenabstand sein. Die Leitung sei durch die Eigenschaften  $\gamma s$  und  $\mathfrak{Z}$  oder die Konstanten  $\mathfrak{A}$ ,  $\mathfrak{B}$ ,  $\mathfrak{C}$ , die Spule durch ihren Scheinwiderstand  $\mathfrak{W}$  gegeben. Symmetrische Anordnungen dieser Teile ergeben nach Ähnlichkeit mit Fig. 205 ein Stück Leitung von der Länge  $s$ , dem an beiden Seiten eine halbe Spule mit dem Scheinwiderstand  $\mathfrak{W}$  vorgeschaltet ist, und nach Fig. 204 eine Spule, an welcher beiderseits eine Leitung von der Länge  $s/2$  angeschlossen ist. Bezeichnet man im ersten Falle die Enden der Leitung mit 1 und 2, so gelten die Gleichungen

$$\mathfrak{V}_v = \mathfrak{V}_1 + \frac{\mathfrak{W}}{2} \mathfrak{I}_v, \quad \mathfrak{V}_{v+1} = \mathfrak{V}_2 - \frac{\mathfrak{W}}{2} \mathfrak{I}_{v+1}$$

$$\mathfrak{V}_1 = \mathfrak{A} \mathfrak{V}_2 + \mathfrak{B} \mathfrak{I}_{v+1}, \quad \mathfrak{I}_v = \mathfrak{A} \mathfrak{I}_{v+1} + \mathfrak{C} \mathfrak{V}_2.$$

Dabei ist angenommen, daß  $\mathfrak{I}_v = \mathfrak{I}_1$  und  $\mathfrak{I}_2 = \mathfrak{I}_{v+1}$  seien, daß also die Spulen keine in Betracht kommende Kapazität haben. Anderenfalls würden die Gleichungen etwas verwickelter werden.

Man erhält daraus

$$\mathfrak{V}_v = \mathfrak{V}_{v+1} \left( \mathfrak{A} + \mathfrak{C} \frac{\mathfrak{W}}{2} \right) + \mathfrak{I}_{v+1} \left( \mathfrak{B} + \mathfrak{A} \mathfrak{W} + \mathfrak{C} \frac{\mathfrak{W}^2}{4} \right)$$

$$\mathfrak{I}_v = \mathfrak{I}_{v+1} \left( \mathfrak{A} + \mathfrak{C} \frac{\mathfrak{W}}{2} \right) + \mathfrak{V}_{v+1} \mathfrak{C}.$$

Die gleichmäßige Ersatzleitung hat also die Eigenschaften

$$\left. \begin{aligned} \mathfrak{Cof} \vartheta s &= \mathfrak{Cof} \gamma s + \frac{\mathfrak{W}}{2 \mathfrak{Z}} \mathfrak{Cin} \gamma s \\ \mathfrak{P} &= \sqrt{\mathfrak{Z}^2 + \mathfrak{W} \mathfrak{Z} \frac{\mathfrak{Cof} \gamma s + \frac{\mathfrak{W}^2}{4}}{\mathfrak{Cin} \gamma s}} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (300)$$

wenn  $\vartheta$  und  $\mathfrak{P}$  die Fortpflanzungskonstante und den Wellenwiderstand der Ersatzleitung bezeichnen.

Für den zweiten Fall erhält man denselben Wert von  $\mathfrak{Cof} \vartheta s$ , aber einen anderen Wellenwiderstand.

**§ 249. Fortpflanzungskonstante und Frequenz.** Aus der Gleichung

$$\mathfrak{Cof} g = 1 + \frac{\mathfrak{K} \mathfrak{G}}{2}$$

geht die folgende hervor

$$2 \mathfrak{Cin} \frac{g}{2} = \sqrt{\mathfrak{K} \mathfrak{G}} = i a_1 + b_1 \dots \dots \dots (301)$$

Wie feingliedrige Ketten mehr und mehr glatten Linien gleichen, so kommt auch ein Kettenleiter, der fein unterteilt ist, mehr und mehr auf einen gleichmäßigen Leiter hinaus, was sich darin zeigt, daß  $\mathfrak{Cin} \frac{g}{2}$  und  $\frac{g}{2}$  einander immer näher kommen. Wir denken uns nun  $2 \mathfrak{Cin} \frac{g}{2}$ , das der Größe  $2 \mathfrak{Cin} \frac{\gamma s}{2}$  bei einer gleichmäßigen Leitung entspricht, in  $i a_1 + b_1$  zerlegt, ähnlich wie jenes in  $i \alpha s + \beta s$  zerfällt.  $a_1$  und  $b_1$  sind durch  $\mathfrak{K}$  und  $\mathfrak{G}$  bestimmt; wieweit sie mit den Teilen  $i a + b$  von  $g$  übereinstimmen, hängt hauptsächlich von der Frequenz ab, wie wir noch sehen werden.

Durch Zerlegen der Gl. (301) erhält man

$$\left. \begin{aligned} (e^{b/2} - e^{-b/2}) \cos \frac{a}{2} &= b_1 \\ (e^{b/2} + e^{-b/2}) \sin \frac{a}{2} &= a_1 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (301 a)$$

Wenn man diese Gleichungen quadriert und einmal ihre Summe, ein anderes Mal ihre Differenz bildet, so ergibt sich

$$\begin{aligned} (e^b + e^{-b}) - 2 \cos a &= b_1^2 + a_1^2 \\ (e^b + e^{-b}) \cos a - 2 &= b_1^2 - a_1^2. \end{aligned}$$

Wir setzen zur Abkürzung

$$b_1^2 + a_1^2 = 4 w^2 \dots \dots \dots (302)$$

dann ergibt sich

$$\left. \begin{aligned} \frac{e^b + e^{-b}}{2} &= \sqrt{(1 - w^2)^2 + b_1^2} + w^2 \\ \cos a &= \sqrt{(1 - w^2)^2 + b_1^2} - w^2 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (303)$$

Von den Größen  $b_1$  und  $w$  hat die erstere ganz allgemein eine anschauliche Bedeutung; bei hinreichend kleinen Werten von  $\sqrt{\Re \mathcal{G}}$ , wenn nämlich  $\frac{g}{2}$  und  $\Im \frac{g}{2}$  so gut wie gleich groß sind, ist  $b_1$  der Dämpfungsexponent des Gliedes.

Die Größe  $w$  wird, wie die folgenden Beispiele zeigen werden, hauptsächlich durch  $a_1$  bestimmt, welches entsprechend der Größe  $\alpha s$  bei einer gleichmäßigen Leitung eine starke Abhängigkeit von der Frequenz hat. Die besondere Art, in der  $w$  von der Frequenz abhängt, kennzeichnet die verschiedenen Formen der Kettenleiter.

Die Gleichungen lassen sich noch schreiben

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{2} (e^{b/2} - e^{-b/2})^2 &= \sqrt{(1 - w^2)^2 + b_1^2} - (1 - w^2) \\ 2 \cos^2 \frac{a}{2} &= \sqrt{(1 - w^2)^2 + b_1^2} + (1 - w^2) \end{aligned} \right\} \dots \dots (304)$$

Die Quadratwurzel ist stets mit dem positiven Vorzeichen zu nehmen. Es kommt dann darauf an, ob  $w$  unter oder über Eins liegt.

Wir wählen zunächst solche Werte von  $w$  unter Eins, die an die Eins nur so weit herankommen, daß  $1 - w^2$  noch wenigstens fünfmal so groß wie  $b_1$  ist. Da  $b_1$  praktisch eine Größe in der Ordnung von 0,01 und weniger ist, so erstreckt sich der betrachtete Bereich von  $w$  von den kleinsten Werten bis zu etwa 0,95. Für diesen Bereich ergibt sich

$$(e^{b/2} - e^{-b/2})^2 = \frac{b_1^2}{1 - w^2}.$$

Da die rechte Seite eine kleine Größe bedeutet, kann man für die linke Seite einfach  $b^2$  setzen, und es folgt für  $0 < w < 1$ , daß

$$b = \frac{b_1}{\sqrt{1 - w^2}} \dots \dots \dots (305)$$

Für die Werte von  $w$  um Eins herum und über Eins setzen wir  $1 - w^2 = b_1 \operatorname{tg} \vartheta$  und lassen  $\operatorname{tg} \vartheta$  von Werten von etwa  $+5$  durch  $+\infty$  nach  $-5$ , also  $\vartheta$  von etwa  $79^\circ$  bis  $101^\circ$  laufen.

Dann wird

$$\frac{1}{2}(e^{b_1 \operatorname{tg} \vartheta} - e^{-b_1 \operatorname{tg} \vartheta})^2 = b_1 \operatorname{tg} \vartheta \cdot 2.$$

Auch hier steht rechts noch eine kleine Größe, also ist

$$b = \sqrt{2 b_1 \operatorname{tg} \vartheta} \cdot 2.$$

Der Wert von  $b$  wächst in diesem Gebiete schnell an; für  $\vartheta = 90^\circ$ , also  $w = 1$  wird er gleich  $\sqrt{2} \cdot b_1$ , was bei  $b_1 = 0,01$  schon das Vierzehnfache des Wertes bei geringen Frequenzen ausmacht.

Für Werte von  $w$ , die erheblich über Eins liegen, ergibt sich, da die Quadratwurzel stets positiv zu nehmen ist,

$$\frac{e^b + e^{-b}}{2} = 2w^2 - 1 = \frac{1}{2} \frac{b_1^2}{w^2 - 1}.$$

Auch wenn  $b_1$  vollkommen verschwände, hätte also  $b$  endliche Werte. Verglichen mit dem Bereiche  $w < 1$  ist daher die Dämpfung im Bereiche  $w > 1$  außerordentlich groß.

Für das Winkelmaß folgt aus der Gleichung

$$2 \cos^2 \frac{a}{2} = \sqrt{(1 - w^2)^2 + b_1^2} + (1 - w^2),$$

daß für den ersten Bereich, in dem  $w$  von kleinen Werten bis nahe an Eins läuft, bei geringer Widerstandsdämpfung  $\cos^2 \frac{a}{2} = 1 - w^2$ , also  $\sin \frac{a}{2} = w$  ist;  $a$  wächst also mit  $w$ . Bei den Werten von  $w$  in der Nähe von Eins erhält man  $2 \cos^2 \frac{a}{2} = \frac{b_1}{\operatorname{tg} \vartheta} \cdot 2$ , also einen mit  $w$  allmählich wachsenden Winkel. Ist  $w$  so viel über Eins, daß  $(w^2 - 1)^2$  groß gegen  $b_1^2$  ist, so erhält man aus Gl. (303)

$$\cos a = (w^2 - 1) \left( 1 + \frac{1}{2} \frac{b_1^2}{(w^2 - 1)^2} \right) - w^2 = -1 + \frac{1}{2} \frac{b_1^2}{w^2 - 1}.$$

Dann nähert sich also das Winkelmaß mit wachsenden Werten von  $w$  der Grenze  $180^\circ$ .

Wir werden diese Sätze auf einige Arten von Kettenleitern anwenden.

**§ 250. Die Spulenleitung.** Man nennt so einen Kettenleiter, bei welchem in den Längszweigen jedes Gliedes ein Scheinwiderstand  $\mathfrak{R} = R + i\omega L$ , in den Querverbindungen ein Kondensator mit dem Leitwert  $\mathfrak{G} = i\omega K$  liegt. Es ist also

$$\sqrt{\mathfrak{R} \mathfrak{G}} = \sqrt{i\omega K(R + i\omega L)}.$$

Unter praktischen Verhältnissen ist  $R$  gering gegen  $\omega L$ , daher ist nach Gl. (271) und (271 a)

$$\sqrt{\mathfrak{R} \mathfrak{G}} = i\omega \sqrt{KL} + \frac{R}{2} \sqrt{\frac{K}{L}}.$$

$a_1$  und  $b_1$  haben also die gleichen Werte wie das Winkelmaß und das Dämpfungsmaß einer gleichmäßigen Leitung, welche in stetiger Verteilung

ebensoviel Widerstand, Induktivität und Kapazität besitzt, wie das Glied der Kette sie in für sich abgeschlossenen Mengen trägt. Man nennt diese die gleichwertige homogene Leitung. Für den Fall der Spulenleitung ist also

$$a_1 = \omega \sqrt{KL} = a_0 \quad \text{und} \quad b_1 = \frac{R}{2} \sqrt{\frac{K}{L}} = b_0.$$

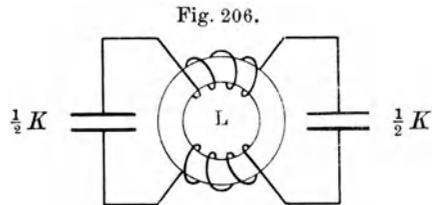
Unter den gleichen Vernachlässigungen erhält man

$$w^2 = \frac{a_1^2 + b_1^2}{4} = \frac{\omega^2 KL}{4}.$$

Man kann ein einzelnes Glied der Kette nach Fig. 206 als einen Schwingungskreis betrachten, welcher außer der Spule  $L$  in Reihe zwei Kondensatoren von der Kapazität  $K/2$  enthält. Die Frequenz  $\omega_0$  seiner Eigenschwingungen ergibt sich aus der Gleichung  $\omega_0^2 \frac{K}{4} L = 1$ , und daher ist

$$w = \frac{\omega}{\omega_0} \quad \text{und} \quad b = \frac{b_0}{\sqrt{1 - w^2}}.$$

$\omega_0$  ist also der für die Spulenleitung kennzeichnende Wert von  $w$ . Nach dem im vorigen Paragraphen Gesagten läßt demnach eine Spulenleitung alle Frequenzen, welche unterhalb der Eigenfrequenz liegen, mit der geringeren, dem Widerstande entsprechenden Dämpfung durch. Bei der Annäherung an den Wert  $w = 1$  beginnt das Dämpfungsmaß schneller zu wachsen und oberhalb  $w = 1$  nimmt es sehr große Werte an.



Man nennt deshalb  $\omega_0$  die Grenzfrequenz der Spulenleitung. Eine solche Leitung setzt allen Schwingungen, die über der Grenzfrequenz liegen, eine hohe Dämpfung entgegen. Da dies selbst für eine Leitung mit widerstandslosen Spulen gilt, so ergibt sich, daß die hohe Dämpfung nicht in einer Vernichtung der Energie der Schwingungen besteht, sondern in der fast vollkommenen Reflexion.

Bei den Pupinleitungen, auf deren Frequenzabhängigkeit wir später eingehen, bedeutet die Tatsache der Grenzfrequenz, daß von solchen Leitungen Komponenten der Sprache, welche eine höhere Frequenz haben, nicht durchgelassen werden, also für den Empfänger verloren gehen; die Grenzfrequenz ist also bei solchen Leitungen ein Nachteil. Kettenleiter kann man dagegen mit Vorteil benutzen, um aus einer zusammengesetzten Schwingung die Overtöne alle oder zum Teil auszuschneiden, also aus jeder Quelle periodischer Ströme reine Sinusströme verfügbar zu machen.

Der Wellenwiderstand der Spulenleitung. Man erhält für die Spulenleitung nach Fig. 204

$$Z^2 = \frac{R + i\omega L}{i\omega K \left( 1 - \frac{\omega^2 KL}{4} + i\omega \frac{KR}{4} \right)},$$

und indem man einführt  $b_0 = \frac{R}{2} \sqrt{\frac{K}{L}}$ ,  $\omega_0^2 KL = 4$ ,  $w = \frac{\omega}{\omega_0}$ ,

$$\beta^2 = \frac{L}{C} \frac{1 - w^2 - b_0^2 - i \frac{b_0}{w}}{(1 - w^2)^2 + (b_0 w)^2}.$$

Wenn man von Werten von  $w$  in der Nähe von Null und sehr nahe bei Eins absieht, erhält man

$$\beta = \sqrt{\frac{L}{C}} \frac{1}{\sqrt{1 - w^2}} \dots \dots \dots (306)$$

Der Wellenwiderstand steigt also ähnlich wie das Dämpfungsmaß an.

§ 251. Die Kondensatorleitung. Sie entsteht, wenn  $\mathfrak{R}$  der Scheinwiderstand eines Kondensators,  $\mathfrak{G}$  der Leitwert einer Spule ist, also

$$\sqrt{\mathfrak{R} \mathfrak{G}} = \frac{1}{\sqrt{i \omega K (R + i \omega L)}} = a_1 + i b_1.$$

Für  $a_1^2 + b_1^2 = 4 w^2$  folgt unter den zulässigen Vernachlässigungen der Wert  $\omega^2 KL$ . Für die Berechnung der Eigenfrequenz eines Gliedes hat man bei Anwendung der Schaltung nach Fig. 204 ihm die Kapazität  $K$  in Reihe mit  $2.2 L$  zu geben, also ist  $\omega_0^2 4 L K = 1$ . Daher ist für die Kondensatorleitung  $w = \frac{\omega_0}{\omega}$ . Hält man für  $\sqrt{i \omega K (R + i \omega L)}$  die bei der Spulenleitung gebrauchte Abkürzung  $a_0 i + b_0$  bei, so wird

$$b_1 = \frac{i b_0}{a_0^2 + b_0^2} = 4 b_0 \left( \frac{\omega_0}{\omega} \right)^2.$$

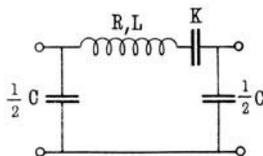
Bei der Kondensatorleitung ist also  $w = \frac{\omega_0}{\omega}$  statt  $w = \frac{\omega}{\omega_0}$  bei der Spulenleitung zu setzen und statt  $b_0$  der oben angegebene Wert von  $b_1$ . Sobald die von den Widerständen herrührende Dämpfung gering ist, zeigt die Kondensatorleitung ein der Spulenleitung ähnliches Verhalten, aber mit dem Unterschied, daß die Vorgänge unterhalb und oberhalb der Grenzfrequenz bei beiden Arten gegeneinander vertauscht sind. Drosselt die Spulenleitung die Schwingungen ab, deren Frequenz oberhalb der Grenzfrequenz liegen, so läßt die Kondensatorleitung unterhalb der Grenzfrequenz keine Schwingungen durch. Für die jeweils verbleibenden Frequenzen sind beide Arten von Leitungen durchlässig.

Dies noch näher darzulegen, besonders auch hinsichtlich des Winkelmaßes, würde den verfügbaren Raum überschreiten.

Wenn man eine Kondensatorleitung und eine Spulenleitung hintereinanderlegte, deren Grenzfrequenzen so gewählt sind, daß zwischen beiden ein Bereich bliebe, der oberhalb der Grenzfrequenz d. r Kondensatorleitung, aber unterhalb derjenigen der Spulenleitung liegt, so würde die Anordnung aus allen möglichen Frequenzen diejenigen dieses Bereichs allein aussieben. Diese Wirkung wird einfacher durch die „Siebketten“ erzielt, welche die Eigenart haben, daß die  $\mathfrak{R}$ - oder  $\mathfrak{G}$ -Zweige einzeln oder beide sowohl Kapazität wie Induktivität besitzen.

**§ 252. Die Siebketten.** Als Beispiel besprechen wir die Anordnung nach Fig. 207, indem wir ferner davon absehen, den Widerstand der Spule in Rechnung zu setzen. Wir haben gesehen, daß die Drosselwirkung der Spulenleitungen für Frequenzen oberhalb der Grenzfrequenz auch bei verschwindendem Widerstand bestehen bleibt; der Widerstand vergrößert bei der Annäherung an die Grenzfrequenz die Dämpfung allmählich, während sie sonst bis zur Grenzfrequenz ständig Null wäre und oberhalb sehr schnell anwüchse. Um das Verhalten der Siebketten in den Hauptmerkmalen zu zeigen, kann man auch bei ihnen vom Widerstand absehen. Er wäre zu berücksichtigen, wenn es sich darum handelt, welche Dämpfung Frequenzen, die beiderseits der Grenzen des Zulassungsgebiets liegen, in Wirklichkeit erfahren. Die Frage wird um so wichtiger, je schmäler das Gebiet ist.

Fig. 207.



Wenn  $\Re = R + i\omega L + \frac{1}{i\omega K}$ ,  $\Im = i\omega C$ , so ist

$$\sqrt{\Re \Im} = a_1 i + b_1 = \sqrt{i\omega CR - \omega^2 CL + \frac{C}{K}}.$$

Wir setzen  $R = 0$  und führen der Anschaulichkeit halber zwei feste Frequenzwerte ein

$$\omega_1^2 L \frac{C}{4} = 1 \quad \text{und} \quad \omega_2^2 LK = 1.$$

Dadurch wird  $\sqrt{\Re \Im}$  oder

$$a_1 i + b_1 = 2 \sqrt{\frac{\omega_2^2 - \omega^2}{\omega_1^2}}.$$

Denken wir uns die Anordnung aus der Spulenleitung entstanden, so wird man bei sehr großen Werten von  $K$  die größte Annäherung der Wechselstromvorgänge an die der Spulenleitung haben. Wir können also zunächst  $\omega_2 < \omega_1$  annehmen. Wir haben dann drei Bereiche für  $\omega$ . Im ersten liegt  $\omega$  unterhalb  $\omega_2$ , dort ist die Quadratwurzel reell und daher  $a_1 = 0$ .

Gehen wir auf die Gl. (301a) zurück, so folgt aus  $a_1 = 0$ , daß  $\sin \frac{a}{2} = 0$ ,

also  $\cos \frac{a}{2} = 1$ . Daher ist in diesem Bereiche

$$e^{b/2} - e^{-b/2} = 2 \sqrt{\frac{\omega_2^2 - \omega^2}{\omega_1^2}}.$$

Dies ergibt auch bei fehlender Widerstandsdämpfung eine starke Dämpfung, und zwar nimmt sie mit der Annäherung von  $\omega$  an  $\omega_2$  ab; für  $\omega = \omega_2$  wird sie Null.

In den beiden anderen Bereichen ist  $\omega^2 > \omega_2^2$ , daher  $b_1 = 0$  und  $a_1 = 2 \sqrt{(\omega^2 - \omega_2^2)/\omega_1^2}$ . Die Größe  $w^2$  erhält nach Gl. (302) den Wert  $w^2 = \frac{\omega^2 - \omega_2^2}{\omega_1^2}$ , und es kommt darauf an, ob  $w^2$  kleiner oder größer als Eins ist. Der erste Fall geht bis zu  $\omega^2 = \omega_1^2 + \omega_2^2$  und ergibt wie bei der Spulenleitung unterhalb ihrer Grenzfrequenz, daß das Glied keine Dämpfung

(außer der geringen Widerstandsämpfung) zeigt; der zweite Fall umfaßt die Werte von  $\omega^2$ , die oberhalb  $\omega_1^2 + \omega_2^2$  liegen, und ergibt wie bei der Spulenleitung oberhalb der Grenzfrequenz eine mit  $\omega$  wachsende Dämpfung. Unter den angenommenen Verhältnissen haben wir also für alle Frequenzen unter  $\omega_2$  und über  $\sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2}$  eine starke Dämpfung, während in dem Zwischenbereich die Schwingungen ohne erhebliche Dämpfung durchgehen.

Mit ähnlichen Überlegungen findet man, daß dieselben Verhältnisse gelten, wenn  $\omega_2 > \omega_1$  ist.

Man kann also in der Tat alle Frequenzen oberhalb und unterhalb eines Bereiches, den man durch die Wahl von  $L$ ,  $C$  und  $K$  bemessen kann, durch eine solche Siebkette unterdrücken, und zwar um so vollständiger, je geringer der vom Widerstand abhängige Posten der Größe  $\sqrt{R} \mathcal{G}$  ist.

**§ 253. Eichleitungen.** Einen Sonderfall, der schon vor den zur Drosselung oder zum Aussieben von Schwingungen dienenden Kettenleitern bekannt war, stellen die Eichleitungen dar, mit denen man gegebene wirkliche Leitungen nach Dämpfung, Wellenwiderstand und Verzerrung so nachbilden will, daß man die Dämpfung durch einen Sprechversuch bestimmen kann; bei diesem werden die Apparate abwechselnd über die wirkliche Leitung und die Eichleitung verbunden, und die letztere wird so lange verändert, bis man den Eindruck gleicher Lautstärke hat. Die zuerst bekannt gewordenen Eichleitungen<sup>66)</sup> bestanden aus Sätzen von Widerständen und Kondensatoren, welche in den Längszweigen so viel Widerstand und quer dazu so viel Kapazität enthielten, wie eine bestimmte Länge einer als Grundmaß angenommenen Leitung, des sogenannten Standardkabels, welches Leiter von 20 englischen Pfund Kupfer auf die englische Meile enthielt. Über die Unterteilung dieser Eichleitung fehlen Veröffentlichungen, indessen lassen die Gebrauchsregeln darauf schließen, daß die kleinste Einheit einer solchen Eichleistung höchstens einer Meile des Standardkabels entsprach, mit einem Widerstand von 88 Ohm und einer Kapazität von  $0,054 \mu\text{F}$ . Durch eine Schalteinrichtung wurden so viele dieser Teile hintereinander geschaltet, bis die gleiche Dämpfung wie bei der zu prüfenden Leitung erreicht war. Das Ergebnis der Messungen wurde durch die Zahl der Meilen Standardkabel angegeben. Man fand, daß insbesondere beim Vergleich kürzerer Längen von Leitungen mit angeschalteten Apparaten die gefundene Meilenzahl nicht der Länge proportional war und drückte dies durch die graphisch bewirkte Feststellung des „Endschaltungsverlustes“ in einer gegebenen Zahl von Meilen für den bestimmten Apparat aus. Das Messen mit dem einen oder anderen Standardkabel ist noch jetzt im Bereich der amerikanischen und englischen Fernsprechtechnik vorherrschend.

**§ 254. Eichleitungen absoluten Maßes.** Nach § 235 kann man jede symmetrische Leitung für eine bestimmte Frequenz durch eine Ersatzleitung gleicher Dämpfung und gleichen Wellenwiderstandes nachbilden. Dies ist schon möglich, wenn in der Nachbildung nur reine Widerstände verwendet werden. Fügt man Kondensatoren oder Spulen hinzu, so kann man bei passenden Werten auch die Verzerrung für noch eine oder mehrere andere Frequenzen nachbilden, und es ist so möglich, eine Nachbildung zu schaffen, deren Frequenzkurve mit derjenigen der wirklichen Leitung in dem wesent-

lichen Bereich zwei oder mehr Punkte gemeinsam hat. Auch lassen sich auf diesem Wege künstliche Leitungen schaffen<sup>67)</sup>, die eine willkürliche Frequenzabhängigkeit zeigen, mit denen man untersuchen kann, welche Bedeutung die Bevorzugung oder Unterdrückung bestimmter Frequenzen des Bereichs der Sprache für die Übertragung hat.

Für diese Anordnungen eignet sich die  $H$ -Schaltung, wenn in die Längszweige reine Widerstände, in die Brücke bestimmte Scheinwiderstände gelegt werden.

Für viele Zwecke, namentlich für Messungen durch Sprechversuche an Freileitungen und alle Messungen, die mit Wechselstrom bestimmter Frequenz ausgeführt werden, genügt eine Eichleitung, bei der alle Widerstände induktionsfrei sind. Die Dämpfungsfaktoren der Eichleitung sind dann von der Frequenz unabhängig. Nach Gl. (299) ist, wenn  $\mathfrak{R} = R$  und  $\mathfrak{G} = \frac{1}{W}$  ist, für ein Glied in der  $H$ -Form (Fig. 205)

$$\mathfrak{Cof} g = 1 + \frac{R}{2W}, \quad Z^2 = RW \left( 1 + \frac{R}{4W} \right)$$

oder, wenn  $g$  sich bei  $a = 0$  auf  $b$  beschränkt, nach Gl. (301 a)

$$\int \frac{R}{W} = e^{b/2} - e^{-b/2} = B.$$

Daraus ergibt sich

$$R = \frac{BZ}{1 + \frac{B^2}{4}}, \quad W = \frac{Z}{B \sqrt{1 + \frac{B^2}{4}}}.$$

Bei einer in der Reichstelegraphenverwaltung üblichen Ausführungsform, die für Einer und Zehntel in Einheiten des Dämpfungsexponenten besondere Einstellkurbeln enthält, werden die einzelnen  $H$ -Schaltungen für 0,1, 0,2, ..., 1, 2, ... besonders gebildet und die Kurbeln dazu verwandt, um die Anschlußfedern des gerade erforderlichen Stückes mit den Hauptklemmen zu verbinden. Dieses vermeidet Übergangsfehler innerhalb jeder Dekade.

Eine Schaltung, mit der man Verzerrungen, solange sie geringer sind als die eines induktionslosen Kabels, so nachbilden kann, daß die Eichleitung für zwei Frequenzen dieselbe Dämpfung hat, wie die nachzubildende, ergibt sich, wenn man in die Brücke des  $H$  einen Kondensator  $K$  parallel zu einem Widerstande  $W$  legt und in die übrigen Zweige induktionsfreie Widerstände einschaltet, deren Gesamtbetrag  $2R$  sei.

Dann ist also in die Gl. (299) einzusetzen

$$\mathfrak{R} = 2R, \quad \mathfrak{G} = i\omega K + \frac{1}{W},$$

und man erhält

$$\mathfrak{X} = \mathfrak{Cof} g = 1 + \frac{R}{W} + i\omega KR = c_1 + i\omega c_2,$$

$$\mathfrak{Z}^2 = R^2 + \frac{2RW}{1 + i\omega KW}.$$

Setzt man wieder  $g := ai + b$  und führt den Wert von  $\mathfrak{X} = \cos ig$  in die Beziehung  $e^g = \mathfrak{X} + \sqrt{\mathfrak{X}^2 - 1}$  ein, so ergibt sich nach Trennung des Reellen und Imaginären

$$\begin{aligned} e^{2b} \cos 2a - 2c_1 e^b \cos a + 2\omega c_2 e^b \sin a + 1 &= 0 \\ e^{2b} \sin 2a - 2c_1 e^b \sin a - 2\omega c_2 e^b \cos a &= 0. \end{aligned}$$

Man findet hieraus

$$\begin{aligned} \cos a &= 2c_1 \frac{e^b}{e^{2b} + 1} \\ \sin a &= 2\omega c_2 \frac{e^b}{e^{2b} - 1}. \end{aligned}$$

Wenn das Dämpfungsmaß für  $\omega = \omega_1$  den Wert  $b_1$ , für  $\omega = \omega_2$  den Wert  $b_2$  haben soll, so erhält man nach Ausscheidung der zugehörigen  $a_1$  und  $a_2$  die Gleichungen

$$\begin{aligned} 4c_1^2 \frac{e^{2b_1}}{(e^{2b_1} + 1)^2} + 4\omega_1^2 c_2^2 \frac{e^{2b_1}}{(e^{2b_1} - 1)^2} &= 1, \\ 4c_1^2 \frac{e^{2b_2}}{(e^{2b_2} + 1)^2} + 4\omega_2^2 c_2^2 \frac{e^{2b_2}}{(e^{2b_2} - 1)^2} &= 1, \end{aligned}$$

aus denen man  $c_1$  und  $c_2$  ermitteln kann. Mit Hilfe dieser Größen lassen sich  $W$  und  $K$  auf  $R$  zurückführen:

$$W = \frac{R}{c_1 - 1}, \quad K = \frac{c_2}{R},$$

und  $R$  ist so zu wählen, daß die Gleichung für  $\mathfrak{Z}^2$  erfüllt wird. Die Leitung erhält dem Betrage nach den richtigen Wellenwiderstand, wenn

$$\frac{\mathfrak{Z}^4}{R^2} = \frac{(c_1^2 + \omega^2 c_2^2 - 1)^2 + (2\omega c_2)^2}{(c_1 - 1)^2 + \omega^2 c_2^2}.$$

Eine Übereinstimmung der Phasenwinkel der Wellenwiderstände läßt sich ebensowenig erzielen, wie die Nachbildung des Winkelmaßes  $a$ . Solange die Ersatzleitung allein als Eichleitung, also immer nur abwechselnd mit der wirklichen Leitung benutzt wird, machen diese Unterschiede nichts für die richtige Bestimmung des Dämpfungsmaßes aus.

Man wird für  $\omega_1$  und  $\omega_2$  ungefähr die Werte 4000 und 7000 wählen und in der Gleichung für  $\mathfrak{Z}/R$  mit  $\omega = 5000$  rechnen.

**§ 255. Eigenfrequenzen einer Leitung.** Eine wirkliche oder künstliche Leitung, die zugleich Kapazität und Induktivität enthält, wird ähnlich wie ein einfacher Schwingungskreis, der ihr Element darstellt, wenn man Wechselströme verschiedener Frequenz auf sie einwirken läßt, dadurch je nach der Frequenz in mehr oder weniger lebhaftes Schwingungen kommen. Es zeigt sich, daß die Leitung nicht nur eine ausgezeichnete Frequenz hat, wie ein einfacher Schwingungskreis, sondern eine mit der Zahl ihrer selbständigen Glieder wachsende Zahl solcher Frequenzen; man nennt diese die Eigenfrequenzen, wenn es sich um Leitungen ohne daran angeschlossene Apparate handelt.

Wenn in dem die erregende Stromquelle  $\mathfrak{E}$  enthaltenden Teil des Kreises ein Scheinwiderstand  $\mathfrak{R}_a$  liegt, so ergeben die Gl. (278) für den Fall der am Ende isolierten Leitung

$$\mathfrak{E} = (\mathfrak{A} + \mathfrak{C} \mathfrak{R}_a) \mathfrak{B}_e, \quad \mathfrak{B}_a = \mathfrak{A} \mathfrak{B}_e, \quad \mathfrak{I}_a = \mathfrak{C} \mathfrak{B}_e$$

oder

$$\mathfrak{B}_a = \mathfrak{E} \frac{\mathfrak{U}_1}{\mathfrak{R}_a + \mathfrak{U}_1}, \quad \mathfrak{I}_a = \frac{\mathfrak{E}}{\mathfrak{R}_a + \mathfrak{U}_1}.$$

Man wird daher die größte Stromaufnahme haben, wenn  $\mathfrak{U}_1$  die Mindestwerte durchläuft. Wir sehen dabei von etwaigen Rückwirkungen ab, welche Induktivität oder Kapazität in  $\mathfrak{R}_a$  auf die Stromaufnahme haben können. An der aus Gl. (273) entwickelten Gleichung

$$\mathfrak{U}_1 = \mathfrak{Z} \frac{(e^{\alpha l} + e^{-\beta l}) \cos \alpha l + i(e^{\beta l} - e^{-\beta l}) \sin \alpha l}{(e^{\beta l} - e^{-\beta l}) \cos \alpha l + i(e^{\beta l} + e^{-\beta l}) \sin \alpha l}$$

sieht man, daß die Mindestwerte von  $\mathfrak{U}_1$  bei  $\sin \alpha l = +1$  auftreten, also wenn  $\alpha l$  ein ungerades Vielfaches von  $\pi/2$  ist; die dazu gehörenden Frequenzen sind also die Eigenfrequenzen der offenen Leitung.

Bei einer am Ende kurz geschlossenen Leitung tritt  $\mathfrak{U}_2$  an die Stelle von  $\mathfrak{U}_1$ , und daher fallen die Eigenfrequenzen mit den Stellen zusammen, für die  $\alpha l$  ein ganzes Vielfaches von  $\pi$  ist.

Für eine nicht gleichmäßige Leitung, etwa einen Kettenleiter, fällt der Mindestwert von  $\mathfrak{U}_1$  oder  $\mathfrak{U}_2$  gleichfalls auf die Frequenz, bei welcher das Winkelmaß gleich einem ungeraden oder geraden Vielfachen von  $\pi/2$  ist, und daher heißt die Bedingung für eine Eigenfrequenz bei einer Leitung ganz allgemeiner Art, daß das Winkelmaß ein ganz Vielfaches von  $\pi/2$  ist, bei offenen Leitungen ein ungerades, bei geschlossenen ein gerades.

Zwischen gleichmäßigen Leitern und Kettenleitern besteht aber trotzdem ein Unterschied hinsichtlich der Zahl und der Aufeinanderfolge der Eigenfrequenzen. Wir wollen zwei am Ende geschlossene Leitungen hoher Induktivität vergleichen, von denen die eine gleichmäßig ist, während die andere bei denselben Gesamtwerten der elektrischen Eigenschaften aus  $n$  unter sich gleichen Gliedern als Spulenleitung zusammengesetzt ist. Läßt man in beiden Fällen für die Berechnung des Winkelmaßes den Widerstand außer Betracht, so ist für die erste Leitung nach Gl. (271 a)

$$\alpha = \omega \sqrt{KL},$$

für die andere ist innerhalb des Gebietes kleiner Dämpfung nach § 248

$$\sin \frac{\alpha}{2} = w,$$

also für eine Spulenleitung

$$2 \sin \frac{\alpha}{2} = 2 \frac{\omega}{\omega_0} = \omega \sqrt{KL}.$$

Als Längeneinheit der gleichmäßigen Leitung ist dabei ein solches Stück gewählt, welches mit einem Glied der anderen in den Eigenschaften übereinstimmt. Wird für die Eigenfrequenzen das Winkelmaß für die gesamte

Leitung gleich  $k\pi$ , für das Glied oder die Längeneinheit gleich  $k\pi n$  gesetzt, so ist für die gleichmäßige Leitung

$$\omega_k = \frac{2}{\sqrt{KL}} \frac{k\pi}{2n},$$

für die Spulenleitung

$$\omega'_k = \frac{2}{\sqrt{KL}} \sin \frac{k\pi}{2n}.$$

Setzt man bei der Spulenleitung  $2n - k$  statt  $k$ , so ergibt sich, daß

$$\omega_{2n-k} = \omega_k$$

ist, und dasselbe gilt für  $4n - k, 6n - k \dots$  Während also die Zahl der Eigenfrequenzen der gleichmäßigen Leitung unbegrenzt ist, gibt es für die geschlossene Spulenleitung nur  $n$  Eigenfrequenzen, da nur die Werte  $k = 1, 2, 3, \dots, n$  zu verschiedenen Werten von  $\omega_k$  führen. Für alle

$k < \frac{n}{3}$  ist der Unterschied zwischen den Eigenfrequenzen der gleichmäßigen und der Spulenleitung gering, weil in diesen Fällen Winkel und Sinus ziemlich übereinstimmen. Dagegen ist die oberste, die  $n$ te Eigenfrequenz der Spulen-

leitung, die den Wert  $\omega'_n = \frac{2}{\sqrt{KL}}$  hat, kleiner als die  $n$ te der gleichmäßigen

Leitung, für die  $\omega_n = \frac{\pi}{\sqrt{KL}}$  ist.

Auch die offene Spulenleitung hat nur  $n$  Eigenfrequenzen, die aber durch die Gleichungen  $\omega'_k = \frac{2}{\sqrt{KL}} \sin \frac{2k-1}{2} \frac{\pi}{2n}$  bestimmt sind, wo  $k$  von 1 bis  $n$  läuft.

**§ 256. Leitungen mit Verstärkern.** Auch diese Leitungen sind zu den zusammengesetzten zu rechnen, sie haben sogar eine bisher nicht in Betracht gezogene Eigenschaft, daß sie nicht allein aus passiven Leitern bestehen welche lediglich unter dem Einfluß der ihnen aufgedrückten Spannung stehen, sondern aktive Teile enthalten, die in gesetzmäßigem Zusammenhang mit der auf einer Seite wirksamen aufgedrückten Spannung, auf der anderen Seite eine verstärkte EMK erzeugen. Ihre Teile unterscheiden sich ferner von den bisher erwähnten dadurch, daß sie nur nach einer Seite wirksam sind, so daß es unmöglich ist, ohne besondere Kunstschaltungen in beiden Richtungen Ströme durchzubringen.

Die schnell entwickelte Technik der Verstärkerröhren hat ihre eigene Literatur. Abgesehen von der Theorie der Elektronenröhren, die nur zum Teil sich auf den Feldgleichungen aufbaut, überwiegend aber von empirisch festgestellten Kennlinien und ihrer Bedeutung für das Verhalten der Röhren handelt, besteht für die Zwecke der Verstärker eine besondere Theorie der Schaltung und Anpassung, die in der Grundlage mit den für andere Fälle erörterten Sätzen übereinstimmt, und auf die wir daher nicht weiter einzugehen brauchen.

Wir wollen uns darauf beschränken, aus den Feldgleichungen die besondere Art des elektrischen Feldes in einer Elektronenröhre herzuleiten, zugleich als das in § 27 vorbehaltene Anwendungsbeispiel der Poissonschen Differentialgleichung und dann nach einen kurzen Überblick über die empirische Theorie der Arbeitsweise der Röhre die Bedeutung der Verstärkeranordnung als Glied einer zusammengesetzten Leitung darstellen.

**§ 257. Das elektrische Feld in einer Elektronenröhre.** Als Beispiel einer solchen nehmen wir die viel gebrauchte Form, bei der die Glühkathode ein gerader Draht ist, um den herum das Gitter und die Anode zylindrisch angeordnet sind. Abgesehen von den Enden des Glühfadens erstreckt sich das Feld nur in radialer Richtung; wir machen ferner die vereinfachende Annahme, daß auf einer den Glühdraht vom Radius  $r_0$  mit dem Radius  $r_1$  umgebenden Zylinderfläche ein gleichmäßiges vorgeschriebenes Potential gelte; dann sind auch alle radialen Richtungen in jeder zur Achse senkrechten Ebene gleichwertig; endlich sehen wir von dem Spannungsabfall im Glühdraht ab. Unter diesen Annahmen kommen bei Zylinderkoordinaten nur Änderungen der Feldgrößen mit dem Abstand  $r$  von der Achse in Betracht. Diese Annahmen gelten also zunächst für eine Elektronenröhre ohne Gitter. Wir werden später sehen, wie wir die Ergebnisse auf Röhren mit Gittern anzuwenden haben.

Das Potential des elektrischen Feldes zwischen der inneren zylindrischen Kathode und der äußeren zylindrischen Grenzfläche des Feldes setzt sich aus zwei Teilen zusammen. Durch äußere Kräfte wird beiden Flächen in jedem Augenblick ein bestimmter Spannungsunterschied gegeben, der für sich eine Feldverteilung nach Art der in § 40 beschriebenen ergibt. Wir setzen für diesen Anteil  $C_1 + C_2 \log r$ .

Die von der Kathode ausgehenden Elektronen erfüllen den ganzen Raum. Jeder Änderung der Kräfte, die auf sie wirken, folgen sie in einer jedenfalls im Vergleich zur Geschwindigkeit, mit welcher diese Änderungen eintreten, unmeßbar kleinen Zeit. Wir können also die Strömung in jedem Augenblick als stationär ansehen, und uns in einem bestimmten Zustand die Elektronen als Ladungen festgelegt denken. Die Dichte der Elektrizität, die wir mit  $q$  bezeichnen, ändert sich mit dem Abstände von der Achse, weil die Elektronen sich nicht nur auf stets größer werdenden Zylinderflächen ausbreiten, sondern auch beschleunigen. Der die Elektronenröhre durchfließende Strom ist ein Konvektionsstrom, bei dem die Elektrizität in einzelnen unter sich gleichen kleinen Mengen, eben den Elektronen, gefördert wird.

Nach § 71 gilt zwischen der räumlichen Dichte  $|i|$  im Raumelement  $dv$  einer Strömung und der Stromstärke  $dJ$  in einem Stromfaden vom Querschnitt  $d\mathfrak{F}$  und der Länge  $d\mathfrak{l}$  die Beziehung

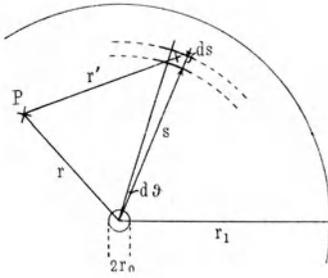
$$|i| d\mathfrak{F} d\mathfrak{l} = |i| dv = dJ d\mathfrak{l}.$$

Man kann  $|i|$  auch als die Elektrizitätsmenge ansehen, welche sich innerhalb eines Raumes befindet, der senkrecht zur Strömung den Querschnitt Eins, in der Richtung der Strömung eine Länge gleich der Geschwindigkeit  $u$  der Strömung hat, denn diese Menge ist in der Sekunde durch den Querschnitt hindurchgetreten. Daraus folgt, daß, wenn  $u$  die Geschwindigkeit der Elek-

tronen ist, die räumliche Dichte des Konvektionsstromes  $|\dot{i}| = \rho u$  ist. Der Gesamtstrom für 1 cm Achsenlänge ist  $\frac{J}{l} = 2\pi r \rho u$ , und dabei ist  $J$  die

Stärke des von der Kathode zur äußeren Elektrode gehenden Stromes von gleichem Zeichen wie  $\rho$ , und  $r$  der Abstand des Aufpunktes  $P$  von der Achse (Fig. 208).

Fig. 208.



Um das von der Raumladung im Punkt  $P$  hervorgebrachte Potential zu berechnen, teilen wir den Raum erst durch untereinander und mit der Kathode gleichachsige Zylinderflächen; zwei aufeinanderfolgende sollen die Radien  $s$  und  $s + ds$  haben; dann durch ebene Schnitte, welche durch die Achse gehen und miteinander je den Winkel  $d\vartheta$  bilden. Der so abgegrenzte prismatische Raum kann als eine Linie betrachtet werden, welche auf der Längeneinheit

die Ladung  $\rho s ds d\vartheta$  trägt. Eine solche Linie bringt nach § 46, Fig. 36 im Aufpunkt  $P$  ein Potential  $C_3 \rho s ds d\vartheta \log r'$  hervor, wo  $C_3$  eine dritte Konstante ist. Die Integration für sämtliche auf einer Zylinderfläche mit gleicher Dichte  $\rho$  liegenden Linien ist nach den Regeln des § 112 für den mittleren geometrischen Abstand auszuführen. Nach den Ziffern 1 und 2 ergibt sich

$$\begin{aligned} \text{für alle } s \leq r \text{ der Beitrag } & 2\pi C_3 \rho s ds \log r, \\ \text{für alle } s \geq r \text{ der Beitrag } & 2\pi C_3 \rho s ds \log s, \end{aligned}$$

welchen die Elektronen in der Schicht  $ds$  auf einem bestimmten Zylinder mit dem Radius  $s$  zum Potential der Raumladung bringen.

Man erhält daher für das gesamte Potential den Ansatz

$$\varphi = C_1 + C_2 \log r + 2\pi C_3 \left\{ \log r \int_{s=r_0}^r \rho s ds + \int_r^{r_1} \log s \cdot \rho s ds \right\}.$$

Dieses Potential hat die Poissonsche Differentialgleichung (44) zu erfüllen, die im vorliegenden Falle, welcher dem in § 40 besprochenen geometrisch gleich ist, die Form hat

$$\frac{d^2 \varphi}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\varphi}{dr} = -4\pi \rho c^2.$$

Da hier

$$\begin{aligned} \frac{d\varphi}{dr} &= \frac{C_2}{r} + \frac{2\pi C_3}{r} \int_{r_0}^r \rho s ds \\ \frac{d^2 \varphi}{dr^2} &= -\frac{C_2}{r^2} - \frac{2\pi C_3}{r^2} \int_{r_0}^r \rho s ds + 2\pi C_3 \rho, \end{aligned}$$

so ergibt sich  $C_3 = -2c^2$ .

Wir wollen ferner, was physikalisch keine Beschränkung bedeutet, dem Potential für  $r = r_0$  den Wert Null geben. Für  $r = r_0$  fällt in der Klammer der Gleichung für  $\varphi$  das erste Integral fort, das zweite erstreckt sich dann

von  $r_0$  bis  $r_1$  und kann in die beiden Teile von  $r_0$  bis  $r$  und von  $r$  bis  $r_1$  zerlegt werden. Durch Verbindung der beiden Gleichungen entsteht folgende

$$\varphi = C_2 \log \frac{r}{r_0} - 4 \pi c^2 \left\{ \log r \int_{r_0}^r \rho s ds - \int_{r_0}^r \log s \cdot \rho s ds \right\} \dots (307)$$

Die Konstante  $C_2$  bestimmen wir auf folgendem Wege. Die Elektronen werden unter dem Antrieb der elektrischen Feldstärke beschleunigt. Die ihnen dabei zuwachsende kinetische Energie ist gleich der vom elektrischen Felde auf dem zurückgelegten Wege geleisteten Arbeit. Ist  $m$  die Masse,  $Q$  der Betrag, ohne Rücksicht auf das Vorzeichen, der Ladung des Elektrons, so ist also  $\frac{1}{2} m(u^2 - u_0^2) = Q \varphi$ , wenn  $u = u_0$  für  $r = r_0$  ist.

Für eine kurze Wegeinheit lautet diese Gleichung

$$m u \frac{d u}{d r} = Q \frac{d \varphi}{d r}.$$

Wir machen einen Versuch mit  $\rho = a r^{-(1+\alpha)}$ . Dann ist

$$u = \frac{J r^\alpha}{2 \pi l a}.$$

Ferner ist

$$\frac{d \varphi}{d r} = \frac{C_2}{r} - \frac{4 \pi c^2}{r} \frac{a}{1 - \alpha} (r^{(1-\alpha)} - r_0^{(1-\alpha)}).$$

Man erhält daher

$$m \alpha \left( \frac{J}{2 \pi a l} \right)^2 r^{2\alpha} = Q C_2 - 4 \pi c^2 \frac{a Q}{1 - \alpha} (r^{(1-\alpha)} - r_0^{(1-\alpha)}).$$

Damit dies für jedes beliebige  $r$  gelte, müssen folgende Gleichungen erfüllt sein:

$$\alpha = \frac{1}{3}, \quad m \frac{1}{3} \left( \frac{J}{2 \pi a l} \right)^2 = -4 \pi c^2 \frac{3}{2} a Q, \quad C_2 = -4 \pi c \frac{3}{2} a r_0^{2/3}.$$

Dadurch wird bestimmt  $a = -\frac{1}{2 \pi} \sqrt[3]{\frac{m}{Q} \left( \frac{J}{3 c l} \right)^2}$ .

Setzt man  $\rho = a r^{-4/3}$  in Gl. (307) ein, so erhält man für das Potential

$$\varphi = C_2 \log \frac{r}{r_0} + 4 \pi c^2 \frac{3}{2} a \left( r_0^{2/3} \log \frac{r}{r_0} - \frac{3}{2} (r^{2/3} - r_0^{2/3}) \right).$$

Wegen der festgestellten Beziehung zwischen  $C_2$  und  $a$  beschränkt sich der Ausdruck schließlich auf

$$\varphi = -9 \pi c^2 a (r^{2/3} - r_0^{2/3}) \dots (308)$$

An der äußeren Grenze des Feldes  $r = r_1$  hat  $\varphi$  den Wert  $\Phi$  der aufgedrückten Spannung. Durch  $\Phi$ ,  $r_1$  und  $r_0$  ist  $a$  bestimmt, und daher ergibt sich

$$J = \frac{2}{9 c^2} \sqrt[3]{\frac{2 Q}{m} \frac{l}{r_1}} \frac{\Phi^{3/2}}{\left( 1 - \left( \frac{r_0}{r_1} \right)^{2/3} \right)^{3/2}}.$$

Die Beziehung, daß die Stromstärke der Potenz  $\frac{3}{2}$  der aufgedrückten Spannung proportional ist, gilt nach Möller<sup>68)</sup> für jede Form der Elektronenröhre.

Für das Verhältnis  $Q/m$  ist im elektromagnetischen Maß die Zahl  $1,765 \cdot 10^7$  anzusetzen, so daß sich ergibt

$$\frac{2}{9 c^2} \sqrt{\frac{2 Q}{m}} = 1,466 \cdot 10^{-18}.$$

Werden Stromstärken in Ampere, Spannungen in Volt gemessen, so wird

$$J = 1,466 \cdot 10^{-5} \frac{l}{r_1} \left( 1 - \left( \frac{r_0}{n} \right)^{\frac{2}{3}} \right)^{\frac{3}{2}} \dots \dots \dots (309)$$

Es ist bemerkenswert, daß in der Gl. (308) der Posten  $C_2 \log r_0$  nicht mehr vorkommt, welcher den von den statischen Ladungen auf der Anode und der Kathode herrührenden Anteil des Potentials bezeichnet; er ist durch gleiche, aber entgegengesetzte Posten in dem von der Raumladung stammenden Anteil ersetzt worden. Dieser Umstand bedeutet, daß unter den vorausgesetzten Bedingungen die Anode mit der Kathode selbst nicht durch Linien der elektrischen Feldstärke verbunden ist, sondern daß diese von der Anode zu den einzelnen Elektronen verlaufen, so daß, wenn ein Elektron auf der Anode angekommen ist, die dadurch frei gewordene Feldlinie ein neues Elektron vor der Kathode erfaßt und beschleunigt. Eine Steigerung der Spannung zwischen Anode und Kathode ergibt zwar eine größere Stromstärke, aber nach wie vor nehmen die Elektronen die vermehrte Zahl der Feldlinien auf, solange der glühende Draht die erforderliche Zahl von Elektronen in der Sekunde liefern kann. Ist dies nicht mehr der Fall, also z. B. wenn der Draht zu schwach glüht, so gilt die Konstantenbestimmung aus dem Energiesatz physikalisch nicht mehr für alle Feldlinien, deren Dichte ja  $-d\varphi/dr$  ist. Dann tritt neben das Raumladungsfeld ein der Laplaceschen Differentialgleichung entsprechendes. Die Kurve, welche den Verlauf des Anodenstromes mit der Spannung darstellt, geht also für eine bestimmte Heizstromstärke von einer gewissen Spannung ab in die Wagrechte über, weil der Laplacesche Anteil des Potentials keinen Strom ergibt.

**§ 258. Arbeitsweise der Elektronenröhre als Verstärker.** Im vorangehenden Paragraphen ist mit Hilfe der Feldgleichungen aus dem Aufbau und den Maßen einer Elektronenröhre eine Beziehung zwischen dem von der Kathode ausgehenden Elektronenstrom und der zwischen der Anode und der Kathode wirksamen Spannung aufgestellt worden. Als Verstärker wird die Elektronenröhre benutzt, indem man zwischen die Anode und die Kathode eine durchbrochene Elektrode legt, das Gitter, welches durch eine besondere Batterie gegen die Anode negativ gemacht wird, und dessen Spannung man durch die zu verstärkenden Ströme innerhalb gewisser Grenzen ändert, zweckmäßig, ohne daß dabei das Gitter gegen die Kathode positiv wird. Bei Röhren mit zylindrischer Anordnung besteht das Gitter entweder gleichfalls aus einem Zylinder, aus dessen Mantel der größte Teil durch Lochen entfernt ist, während die stehengebliebenen Teile in radiale Lage verdreht worden sind. oder aus

einer weit gewickelten Spirale aus dünnem Draht. In beiden Fällen können zwischen der Anode und der Kathode elektrische Feldlinien übergehen, welche bei glühender Kathode in der erwähnten Weise an Elektronen ansetzen und sie nach der Anode hin beschleunigen. Ein Teil ihnen gleichgerichteter Feldlinien gehen von der Anode zum Gitter und sind aus dem Mechanismus des Vorganges ausgeschaltet. Die Elektronen werden bei ihrer Bewegung von der Kathode zur Anode von dem negativen Gitter abgestoßen, sie fliegen also durch die Öffnungen des Gitters hindurch. Durch die vereinigte Wirkung des Gitters und der Anode entsteht in einer durch das Gitter gelegt gedachten zylindrischen Fläche gegen die Kathode ein Potential  $p$ , das mit dem Abstand vom Gitter etwas veränderlich ist. Man kann mit genügender Annäherung einen Mittelwert von  $p$ , gegen die Kathode gerechnet, annehmen, den man das Effektivpotential des Gitters nennt, und dieser Wert tritt für den Verlauf des Vorganges an die Stelle des im vorigen Paragraphen mit  $\Phi$  bezeichneten Potentials. Ist  $b$  das Potential der Anode,  $v$  das Potential des Gitters, beide gegen die Kathode gerechnet, so nennt man die Zahl

$$D = \frac{p - v}{b - p}$$

den Durchgriff der Röhre.

Die Feldverteilung und danach der Stromverlauf lassen sich auf Grund der Feldgleichungen, wenn auch mit mehr Aufwand an Rechenarbeit, ebenso aus den Maßen der Röhre und den Potentialwerten der drei Elektroden berechnen, wie bei einer Röhre mit zwei Elektroden; indessen führt es praktisch leichter zum Ziel, der Theorie die empirischen Kennlinien <sup>69)</sup> zugrunde zu legen, welche man erhält, wenn man den Anodenstrom mißt, einmal bei verschiedenen, aber jeweils konstanten Anodenpotentialen und veränderlichen Gitterpotentialen, das andere Mal bei konstanten Gitterpotentialen und veränderlichen Anodenpotentialen. Auf solchen Kurven beruhen die nachfolgenden Betrachtungen.

**§ 259. Die Gleichungen des Verstärkers als Leitungselement.** Der Anodenstrom  $\beta$  sei als eine empirische Funktion des Anodenpotentials  $b$  und des Gitterpotentials  $v$  bekannt,  $\beta = f(v, b)$ . Ändern sich beide um Beträge  $\Delta v$  und  $\Delta b$  innerhalb gewisser, durch die Kennlinien gegebenen Grenzen, so erhält man

$$\Delta \beta = \frac{\partial \beta}{\partial v} \Delta v + \frac{\partial \beta}{\partial b} \Delta b.$$

$\beta_v = \frac{\partial \beta}{\partial v}$  bei konstantem  $b$  und  $\beta_b = \frac{\partial \beta}{\partial b}$  bei konstantem  $v$  sind aus den vorerwähnten Kennlinien bekannt. Diese Größen heißen Gitter- und Anodenempfindlichkeit des Anodenstromes.

Schreibt man die Gleichung in der Form

$$-\Delta b = \frac{\beta_v}{\beta_b} \Delta v - \frac{1}{\beta_b} \Delta \beta \quad \dots \dots \dots (310)$$

so stimmt sie der Form nach überein mit der Gleichung eines Stromkreises (Fig. 209) mit einer EMK  $\mathcal{E} = \frac{\beta_v}{\beta_b} \Delta v$ , einer Stromstärke  $\mathcal{I} = \Delta \beta$  und

einem inneren Widerstand  $R = \frac{1}{\beta_b}$ , der im äußeren Teile unter der Spannung  $- \mathcal{A}v$  den Strom  $\mathfrak{I}$  führt.

Gehen wir nun zur typischen Schaltung für einseitige Verstärkung über (Fig. 210), so haben wir für den Vorübertrager die Gleichungen

$$\mathfrak{V}_1 = \mathcal{L}_1 \mathfrak{I}_1, \quad 0 = \mathfrak{V}_2 + \mathcal{M}_2 \mathfrak{I}_1.$$

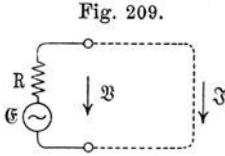


Fig. 209.

Der Sekundärstrom dieses Übertragers ist der Gitterstrom, und daher Null.  $\mathfrak{V}_2$ , die Wechselspannung am Gitter, stimmt mit der bisher  $\mathcal{A}v$  genannten Größe überein.

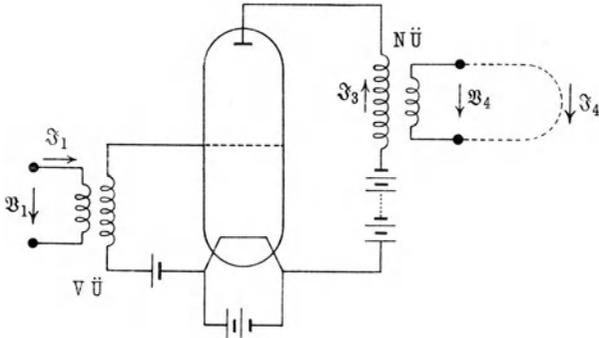
Für den Nachübertrager ist nach dem Obigen die Elektronenröhre als eine Stromquelle mit einer

EMK  $\frac{\beta_v}{\beta_b} \mathcal{A}v = p_0 \mathfrak{V}_2$  und einem inneren Widerstand  $R$  anzusehen, und daher lauten die Gleichungen

$$p_0 \mathfrak{V}_2 = (R + \mathcal{L}_3) \mathfrak{I}_3 + \mathcal{M}_{34} \mathfrak{I}_4$$

$$0 = \mathfrak{V}_4 + \mathcal{L}_4 \mathfrak{I}_4 + \mathcal{M}_{34} \mathfrak{I}_3.$$

Fig. 210.



Man erhält daraus folgende Gleichungen

$$\left. \begin{aligned} \mathfrak{V}_1 &= \frac{R + \mathcal{L}_3}{\mathcal{M}_{34}} \frac{\mathcal{L}_1}{p_0 \mathcal{M}_{12}} \mathfrak{V}_4 + \frac{(R + \mathcal{L}_3) \mathcal{L}_4 - \mathcal{M}_{34}^2}{\mathcal{M}_{34}} \frac{\mathcal{L}_1}{p_0 \mathcal{M}_{12}} \mathfrak{I}_4 \\ \mathfrak{I}_1 &= \frac{\mathfrak{V}_1}{\mathcal{L}_1} \end{aligned} \right\} \quad (311)$$

Wir schreiben die erste dieser Gleichungen abgekürzt

$$\mathfrak{V}_1 = \mathcal{A}_1 \mathfrak{V}_4 + \mathfrak{B}_1 \mathfrak{I}_4.$$

Diese Gleichungen verknüpfen miteinander die Stromstärken und Spannungen am Eingang des Vorübertragers mit denen am Ausgang des Nachübertragers in ähnlicher Weise, wie dies mit denselben Größen am Eingang und Ausgang einer wirklichen oder künstlichen Leitung durch die Gl. (278) oder ähnliche geschieht. Die Koeffizienten sind aus den als bekannt anzusehenden Eigenschaften der Übertrager und den Eigenschaften  $p_0 = \frac{\beta_v}{\beta_b}$  sowie  $R = \frac{1}{\beta_b}$  der Röhre gebildet.

Bei einseitiger Verstärkung, wie z. B. in jeder Schleife einer Vierdrahtleitung, liegen die Übertragersätze mit den Leitungsteilen in Reihe. Es entsteht dadurch eine Art Kettenleiter.

Dieser hat mit anderen Kettenleitern, welche keine Quellen neuer EMK unterwegs enthalten, gewisse Ähnlichkeiten, aber gegen sie auch einen erheblichen Unterschied.

Es steht nichts im Wege, ein Element eines solchen Kettenleiters, bestehend aus einem Verstärkersatz nach Fig. 210, an den beiderseits je eine Leitung von der Länge des halben Verstärkerabstandes angeschlossen ist, ebenso zu behandeln, wie die zusammengesetzten Leitungen in dem § 236. Der Verstärkersatz ist als unsymmetrische Leitung einzuführen nach Gl. (311), wobei  $\lambda = \frac{1}{\mathfrak{A}_1}$  ist; am Anfang des Elements gelten die Werte  $\mathfrak{B}_\nu$  und  $\mathfrak{I}_\nu$ , am Ende  $\mathfrak{B}_{\nu+1}$  und  $\mathfrak{I}_{\nu+1}$ . Dann ist:

$$\begin{aligned} \mathfrak{B}_4 &= \mathfrak{A}\mathfrak{B}_{\nu+1} + \mathfrak{B}\mathfrak{I}_{\nu+1}, & \mathfrak{I}_4 &= \mathfrak{A}\mathfrak{I}_{\nu+1} + \mathfrak{C}\mathfrak{B}_{\nu+1} \\ \mathfrak{B}_1 &= \mathfrak{A}_1\mathfrak{B}_4 + \mathfrak{B}_1\mathfrak{I}_4, & \mathfrak{I}_1 &= \lambda\mathfrak{B}_1\mathfrak{I}_4 + \lambda\mathfrak{A}_1\mathfrak{B}_4 \\ \mathfrak{B}_\nu &= \mathfrak{A}\mathfrak{B}_1 + \mathfrak{B}\mathfrak{I}_1, & \mathfrak{I}_\nu &= \mathfrak{A}\mathfrak{I}_1 + \mathfrak{C}\mathfrak{B}_1. \end{aligned}$$

Wenn man die Werte der Spannungen und Stromstärken am Verstärkersatz ausscheidet, so kommt man zu einem Gleichungspaar der Form

$$\begin{aligned} \mathfrak{B}_\nu &= \mathbf{A}_1 \mathfrak{B}_{\nu+1} + \mathbf{B} \mathfrak{I}_{\nu+1} \\ \mathfrak{I}_\nu &= \mathbf{A}_2 \mathfrak{I}_{\nu+1} + \mathbf{C} \mathfrak{B}_{\nu+1}. \end{aligned}$$

Wenn  $\gamma s$  und  $\mathfrak{B}$  die Grundeigenschaften der Leitung für den ganzen Verstärkerabstand bezeichnen, so erhält man

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{A}_1 &= \frac{1}{2} \left[ \begin{aligned} \cos \gamma s (\mathfrak{A}_1 + \lambda \mathfrak{B}_1) - i \sin \gamma s \left( \frac{\mathfrak{B}_1}{\mathfrak{B}} + \lambda \mathfrak{A}_1 \mathfrak{B} \right) \\ + (\mathfrak{A}_1 - \lambda \mathfrak{B}_1) \end{aligned} \right] \\ \mathbf{A}_2 &= \frac{1}{2} \left[ \begin{aligned} \cos \gamma s (\mathfrak{A}_1 + \lambda \mathfrak{B}_1) - i \sin \gamma s \left( \frac{\mathfrak{B}_1}{\mathfrak{B}} + \lambda \mathfrak{A}_1 \mathfrak{B} \right) \\ - (\mathfrak{A}_1 - \lambda \mathfrak{B}_1) \end{aligned} \right] \\ \mathbf{B} &= \frac{\mathfrak{B}}{2} \left[ \begin{aligned} -i \sin \gamma s (\mathfrak{A}_1 + \lambda \mathfrak{B}_1) + \cos \gamma s \left( \frac{\mathfrak{B}_1}{\mathfrak{B}} - \lambda \mathfrak{A}_1 \mathfrak{B} \right) \\ + \left( \frac{\mathfrak{B}_1}{\mathfrak{B}} - \lambda \mathfrak{A}_1 \mathfrak{B} \right) \end{aligned} \right] \\ \mathbf{C} &= \frac{1}{2\mathfrak{B}} \left[ \begin{aligned} -i \sin \gamma s (\mathfrak{A}_1 + \lambda \mathfrak{B}_1) + \cos \gamma s \left( \frac{\mathfrak{B}_1}{\mathfrak{B}} + \lambda \mathfrak{A}_1 \mathfrak{B} \right) \\ - \left( \frac{\mathfrak{B}_1}{\mathfrak{B}} - \lambda \mathfrak{A}_1 \mathfrak{B} \right) \end{aligned} \right] \end{aligned} \right\} \cdot (312)$$

Im Aufbau sind diese Koeffizienten denen einer gewöhnlichen unsymmetrischen Strecke durchaus ähnlich. Es ergibt sich aber als identisch erfüllt die Beziehung

$$\mathbf{A}_1 \mathbf{A}_2 - \mathbf{B} \mathbf{C} = 0 \dots \dots \dots (313)$$

welche auch von den entsprechenden Größen in der Gleichung des Verstärkersatzes gilt. Mit Hilfe dieser Beziehung findet man eine einfache Formel für

die Endwerte einer aus  $n$  Gliedern bestehenden Kette. Statt sie schrittweise herzuleiten, wollen wir sie für das zwischen dem ersten und dem  $n$ ten Gliede liegende  $k$ te Glied gelten lassen, daß nämlich sei

$$\begin{aligned}\mathfrak{B}_k &= (\mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_2)^{n-k-1} (\mathbf{A}_1 \mathfrak{B}_n + \mathbf{B} \mathfrak{Z}_n) \\ \mathfrak{Z}_k &= (\mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_2)^{n-k-1} (\mathbf{A}_2 \mathfrak{Z}_n + \mathbf{C} \mathfrak{B}_n).\end{aligned}$$

$\mathfrak{B}_n$  und  $\mathfrak{Z}_n$  geben die Werte am Ende des  $n$ ten Gliedes, also  $\mathfrak{B}_k$  und  $\mathfrak{Z}_k$  die am Ende des  $k$ ten, mithin am Anfang des  $(k+1)$ ten Gliedes. Führt man diese Werte in die für das  $k$ te Glied geltenden ein

$$\begin{aligned}\mathfrak{B}_{k-1} &= \mathbf{A}_1 \mathfrak{B}_k + \mathbf{B} \mathfrak{Z}_k \\ \mathfrak{Z}_{k-1} &= \mathbf{A}_2 \mathfrak{Z}_k + \mathbf{C} \mathfrak{B}_k,\end{aligned}$$

so erhält man

$$\begin{aligned}\mathfrak{B}_{k-1} &= (\mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_2)^{n-1} (\mathbf{A}_1 \mathfrak{B}_n + \mathbf{B} \mathfrak{Z}_n) \\ \mathfrak{Z}_{k-1} &= (\mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_2)^{n-1} (\mathbf{A}_2 \mathfrak{Z}_n + \mathbf{C} \mathfrak{B}_n).\end{aligned}$$

Man erhält also für die Werte am Anfang der ersten Strecke

$$\begin{aligned}\mathfrak{B}_0 &= (\mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_2)^{n-1} (\mathbf{A}_1 \mathfrak{B}_n + \mathbf{B} \mathfrak{Z}_n) | \dots \dots \dots (314) \\ \mathfrak{Z}_0 &= (\mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_2)^{n-1} (\mathbf{A}_2 \mathfrak{Z}_n + \mathbf{C} \mathfrak{B}_n) | \dots \dots \dots\end{aligned}$$

Dieses Gleichungssystem bietet die Möglichkeit, die Fortpflanzung eines Wechselstromes durch eine Kette mit Verstärkern in vereinfachter Weise rechnerisch zu verfolgen, wenn die Eigenschaften eines Gliedes der Kette bekannt sind.

Diese kann man entweder aus den Eigenschaften der Verstärkerschaltung und der Leitungsteile im einzelnen berechnen, oder für jeden dieser Teile oder das Kettenglied im ganzen durch Messung finden. So ist  $\mathbf{A}_1$  das Verhältnis der Spannung  $\mathfrak{E}_{\nu+1}$  am offenen Ende zu der am Anfang; legt man die Leitung am Ende auf einen beliebigen Leiter mit dem Scheinwiderstand  $\mathfrak{R}_e$  und mißt daran die Spannung  $\mathfrak{B}_{\nu+1}$ , so ist

$$\frac{\mathbf{B}}{\mathbf{A}_1} = \mathfrak{R}_e \frac{\mathfrak{E}_{\nu+1} - \mathfrak{B}_{\nu+1}}{\mathfrak{B}_{\nu+1}}.$$

Endlich ist  $\mathbf{A}_1 \mathbf{C}$  gleich dem von den Schaltmaßnahmen am Ende unabhängigen Scheinwiderstand für den Anfang des Kettengliedes.

Für das praktische Telephonieren wird bekanntlich durch Kunstschaltungen dafür gesorgt, daß die beiden Zweige der Vierdrahtleitung oder eines Doppelrohr-Zwischenverstärkers an jeder Seite in eine Doppelleitung einmünden. Damit wird den am fernen Ende ankommenden Strömen wieder grundsätzlich die Möglichkeit geboten, nach Reflexion zum Ausgang zurückzulaufen. Dadurch entsteht aber wieder im ganzen eine Leitung, für deren Koeffizienten die Regel (284) gilt. Es ist auch durch einen Versuch (§ 262) festgestellt worden, daß sich die Dämpfung einer Leitung von der Länge eines Verstärkungsabschnitts mit eingeschaltetem Zweirohr-Zwischenverstärker ebenso wie die einer gewöhnlichen Leitung aus den Scheinwiderständen bei Leerlauf und Kurzschluß bestimmen läßt.

## Fünfter Abschnitt.

**Messungen an Wechselstromleitungen.**

§ 260. **Messung der wirksamen Größen einer Leitung.** Solange die elektrischen Verhältnisse einer Leitung so einfach liegen, daß man die Werte der  $L$ ,  $R$ ,  $K$  und  $G$  für stationäre Zustände auch für veränderliche Zustände als richtig ansehen kann, lassen sich die Größen  $\gamma$  und  $\mathfrak{B}$ , die den Stromverlauf bestimmen, mittels Rechnung aus den angegebenen Größen ermitteln; man kann demnach bei vielen Leitungen schon aus ihren Dimensionen wichtige Größen, wie z. B.  $\beta$  berechnen. Bei solchen Leitungen dagegen, deren Anordnung die Möglichkeit der Energieabgabe außer im Leitungswiderstande und dem Isolationswiderstande zuläßt, oder bei denen eine merkliche Stromverdrängung anzunehmen ist, wird man die gesuchten Werte sicherer durch Messung, statt durch Berechnung finden; in jedem Falle wird die Messung eine gute Prüfung der Voraussetzungen der Berechnungen bilden.

Wir wollen deshalb Verfahren zur Messung der Größen  $\gamma$  und  $\mathfrak{B}$  und damit der wirksamen Werte näher kennenlernen. Bei gleichmäßigen Leitungen, auf die wir zunächst eingehen, läßt sich nach § 235 für jede Frequenz eine bestimmte homogene Ersatzleitung angeben; dazu gehören vier wirksame Werte und zu deren Messung demnach auch vier Bestimmungsstücke. Es ist ersichtlich, daß Methoden, die eine geringere Zahl von Bestimmungsstücken als vier liefern, zur vollständigen Messung einer Leitung nicht ausreichen.

Eine der vollständigen Messung dienende Methode wurde im Telegraphen-Versuchsamt von A. Franke<sup>70)</sup> begründet; sie ist in der Folge fast allgemein angewandt und bei Messungen von Leitungen der verschiedensten Art mit Vorteil verwendet worden.

§ 261. **Messung von Leerlauf- und Kurzschlußwiderstand.** Wie die Messung des Leitungs- und Isolationswiderstandes einer Leitung mit Gleichstrom nach § 68 durch Messung der Werte der scheinbaren Widerstände bei Isolation und bei Kurzschluß der fernen Enden ausgeführt wurde, so lassen sich die Eigenschaften einer Leitung bei Wechselstrom ebenfalls bestimmen, wenn man ihre Scheinwiderstände mißt, einmal, wenn die Enden isoliert, das andere Mal, wenn sie kurz verbunden sind. Nach den Gl. (273) und (274) haben sie die Werte

$$u_1 = \mathfrak{B} \frac{e^{\gamma l} + e^{-\gamma l}}{e^{\gamma l} - e^{-\gamma l}},$$

$$u_2 = \mathfrak{B} \frac{e^{\gamma l} - e^{-\gamma l}}{e^{\gamma l} + e^{-\gamma l}}.$$

Zur Feststellung dieser Werte kann jedes Verfahren dienen, mittels dessen man einen Scheinwiderstand nach Größe und Winkel bestimmen kann.

Solche Verfahren sind in den § 176 bis 182 beschrieben worden. Man findet aus den gemessenen Größen

$$\left. \begin{aligned} \beta &= \sqrt{u_1 u_2}, \quad \eta = \sqrt{\frac{u_2}{u_1}} \\ \gamma l &= \frac{1}{2} \log \frac{1 + \eta}{1 - \eta} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (315)$$

Diese Größen geben ersichtlich die wirksamen Werte von  $\gamma l$  und  $\beta$  derjenigen homogenen Leitung an, die bei der angewandten Frequenz dieselben Scheinwiderstände  $u_1$  und  $u_2$ , wie die wirkliche Leitung hat. Man erhält also auch die wirksamen Werte der Grundeigenschaften, indem man bildet

$$R + i \omega L = \gamma \beta,$$

$$A + i \omega K = \frac{\gamma}{\beta}.$$

Gleichmäßige Leitungen. Als Beispiel seien die Messungen an einer Fernsprehdoppelleitung aus 5 mm starken Drähten mit einem Abstand von 20 cm und bei 186 km Länge angegeben. Es wurde dazu die Methode der Wheatstoneschen Brücke benutzt. Aus den Werten

$$u_1 = 537 e^{-56,00i}; \quad u_2 = 515 e^{+44,00i}$$

erhält man zunächst den Wert von  $\beta$ , der mit einem mittleren Fehler von etwa 1 Proz. im Betrage und von  $0,3^0$  im Winkel für  $\omega = 6000$  den Mittelwert  $525 e^{-6,00i}$  hat; ferner

$$\eta = \sqrt{\frac{u_2}{u_1}} = 0,980 e^{+50,0^{\circ}i} = 0,630 + i 0,749.$$

Daher ist

$$e^{2\gamma l} = \frac{1,630 + i 0,749}{0,370 - i 0,749} = 2,15 e^{+88,4^{\circ}i}.$$

Der Winkel von  $e^{2\gamma l}$  ist  $2\alpha l$  oder bei einer Leitung dieser Art ungefähr  $2l\omega\sqrt{KL}$ . Nimmt man für eine oberirdische Leitung überschläglich an

$$K = 0,006 \cdot 10^{-6}, \quad L = 0,002,$$

so erhält man bei  $\omega = 6000$  für  $2\alpha l$  den Wert 7,7; dies entspricht einem Winkel von  $442^{\circ}$ . Wir haben zu dem angegebenen Winkel von  $e^{2\gamma l}$  so viel Vielfache von  $2\pi$  zuzufügen, bis wir auf einen in der Nähe von  $442$  liegenden Winkel kommen, daher ist  $\alpha l$  gleich  $448,4^{\circ}$ . Man erhält so

$$2\gamma l = 0,765 + i 7,82 = 7,86 e^{+i 84,4^{\circ}}.$$

Demnach wird

$$\gamma = 0,0211 e^{+84,4^{\circ}i},$$

und ferner

$$R + i \omega L = 11,10 e^{+78,4^{\circ}i} = 2,24 + i 10,87,$$

$$A + i \omega K = 40,2 \cdot 10^{-6} e^{+90,4^{\circ}i}.$$

Die Zahl 0,765 ist der Wert von  $2\beta l$ , so daß also das wirksame Dämpfungsmaß  $\beta l$  mit Berücksichtigung aller Verluste sich als ein unmittelbares Ergebnis der Messungen darstellt. Für die Beurteilung der Leitungen sind die Größen  $\alpha$ ,  $\beta$  und  $\beta$  am wichtigsten, während die Ausrechnung der wirk-

samen Werte  $R$ ,  $L$ ,  $G$  und  $K$  mehr die Bedeutung einer Kontrolle mit dem aus der Berechnung oder aus Gleichstrommessungen annähernd bekannten Werte hat. Der mit Gleichstrom gemessene Widerstand war nur 1,915 Ohm/km, so daß also infolge der Stromverdrängung, vielleicht auch durch Induktion auf die Nachbarleitungen bei  $\omega = 6000$  eine Erhöhung des wirksamen Widerstandes auf das 1,17fache eintritt. Die Induktivität ist 0,00181 H·km, während sich nach Gl. (149) der Wert 0,001855 ergibt. Infolge der Stromverdrängung wird der aus dem Felde in den Leitern herrührende Anteil vermindert. Der Winkel von  $G + i\omega K$  schlägt um einen innerhalb der Beobachtungsfehler liegenden Betrag über  $90^\circ$  hinaus; der Wert von  $G$  läßt sich also hier nicht bestimmen; die Kapazität ergibt sich zu 0,00670 Mf km; nach Gl. (77) wäre ihr Wert gleich 0,00635; der Unterschied erklärt sich wohl durch die Kapazität der Isolatoren.

Der Winkel von  $\gamma l$  kann, wenn Messungen für mehrere Periodenzahlen vorliegen, aus der Überlegung bestimmt werden, daß die Winkel von  $\gamma l$  bei Leitungen mit genügender Induktivität der Periodenzahl nahezu proportional sind.

Nicht gleichmäßige Leitungen. Ähnlich wie es in § 68 bei Gleichstrommessungen angegeben ist, empfiehlt es sich, wenn nur eine Seite der Leitung zugänglich ist, außer  $U_1$  und  $U_2$  noch den Scheinwiderstand  $U$  bei Anschaltung eines bekannten Scheinwiderstandes  $\mathfrak{R}$  am fernen Ende zu messen. Wenn die Leitung unsymmetrisch, also nicht gleichmäßig ist, und Gleichungen der Form

$$\mathfrak{A}_a = \mathfrak{A}_1 \mathfrak{B}_e + \mathfrak{B} \mathfrak{Z}_e,$$

$$\mathfrak{Z}_a = \mathfrak{A}_2 \mathfrak{Z}_e + \mathfrak{C} \mathfrak{B}_e$$

gelten, so folgt aus den drei Messungen:

$$U_1 = \frac{\mathfrak{A}_1}{\mathfrak{C}}, \quad U_2 = \frac{\mathfrak{B}}{\mathfrak{A}_2}, \quad U = \frac{\mathfrak{A}_1 \mathfrak{R} + \mathfrak{B}}{\mathfrak{A}_2 + \mathfrak{C} \mathfrak{R}}.$$

Nennt man bei einer Messung, die von beiden Kabelenden aus gemacht werden kann, die Scheinwiderstände bei Leerlauf  $U_{1a}$  und  $U_{1e}$ , die bei Kurzschluß  $U_{2a}$  und  $U_{2e}$ , so erhält man für die bestimmenden Größen nach Gl. (288)

$$Tg \Theta = \sqrt[4]{\frac{U_{2a} U_{2e}}{U_{1a} U_{1e}}},$$

$$\mathfrak{B} = \sqrt[4]{U_{1a} U_{2a} U_{1e} U_{2e}}.$$

$$\frac{1 + \alpha}{1 - \alpha} = \sqrt[4]{\frac{U_{1a} U_{2a}}{U_{1e} U_{2e}}}.$$

An einer 97,64 km langen Teilstrecke des zweiten Seekabels nach Ostpreußen wurden während der Fahrt zur Auslegung an einem Vierer ausführliche Wechselstrommessungen im Bereich von  $\omega = 3200$  bis  $\omega = 14000$ , und zwar in Stufen von je 200 gemacht. Die Messung bei  $\omega = 5000$  ergab folgende Werte:

$$U_{1a} = 586,0 e^{+i2,68^\circ}, \quad U_{2a} = 551 e^{-i19,36^\circ},$$

$$U_{1e} = 530,5 e^{+i4,01^\circ}, \quad U_{2e} = 500 e^{-i17,91^\circ}.$$

Das Verhältnis  $U_2/U_1$  hat von beiden Seiten aus die Werte  $0,940 e^{-i22,04^\circ}$  und  $0,943 e^{-i21,92^\circ}$ ; die geforderte Beziehung zwischen den vier Messungen ist also hinreichend erfüllt. Man erhält ferner

$$\Theta = 1,160 + i 11,861$$

oder

$$\alpha i + \beta = 0,1215 i + 0,0119,$$

$$\mathfrak{Z} = 542 e^{-i7,65^\circ},$$

$$\kappa = 0,0246 - i 0,0083.$$

Die Gesamtheit der Messungen ergibt für  $\beta$  ein fast gleichmäßiges Ansteigen mit der Frequenz mit den Hauptwerten

$\omega$	3200	4000	5000	6000	7000	9000	11000	14000
1000 $\beta$	11,1	11,5	11,9	12,3	13,0	14,0	15,5	18,0

$\alpha$  steigt der Frequenz proportional an. Der Wellenwiderstand nimmt mit wachsender Frequenz ab; in dem genannten Bereich von 563 auf 493 Ohm dem Betrage nach; im einzelnen durchläuft der algebraische Vektor für  $\mathfrak{Z}$  eine an Schleifen und Doppelpunkten reiche Kurve, wie sie bei den bei einem derartigen Kabel anzunehmenden Unregelmäßigkeiten zu erwarten ist. Ähnliches gilt auch für  $\kappa$ , das in dem Bereich von 4000 bis 8000 im Betrage Änderungen zwischen 0,025 und 0,035, dem Winkel nach zwischen  $+45^\circ$  und  $-84^\circ$  erfährt. In die Koeffizienten der Gleichungen geht allerdings nur der Faktor  $\frac{1+\kappa}{1-\kappa}$  ein, der in dem genannten Bereich dem Betrage nach Werte zwischen 1,005 und 1,062, dem Winkel nach zwischen  $+3,1^\circ$  und  $-3,7^\circ$  zeigt.

**§ 262. Messungen an zusammengesetzten Leitern.** Die in § 261 beschriebenen Messungen sind nicht auf gleichmäßige oder ungleichmäßige Leitungen im engeren Sinne beschränkt, sondern man kann jedes Leitergebilde, das bestimmte Anfangs- und Endklemmen hat, durch eine gleichwertige Leitung ersetzen, also auch als Teil einer zusammengesetzten Leitung betrachten. Dies gilt für alle Schaltteile, aus denen sich eine Fernsprechverbindung von einem Teilnehmer zum anderen zusammensetzt.

Als Beispiel diene eine Messungsreihe an dem System von Apparaten und Leitungen, wie es bei einer Verbindung über ein Fernamt zwischen den letzten Klemmen der Außenleitung und den Klemmen des Teilnehmerapparats besteht, und zwar für zwei Längen des Teilnehmer-Anschlußkabels mit 0,8 mm starken Drähten. Die Schaltung wurde von beiden Seiten gemessen; die Kontrollbedingung war in hinreichendem Maße erfüllt. Mit den nachstehend aufgeführten Werten der Größen  $\mathfrak{Z}$ ,  $\Theta$  und  $\kappa$  für die Kreisfrequenzen 3500, 5000, 6000, 7000, wobei angenommen ist, daß die Fernleitung auf der Anfangsseite des Systems eintritt, kann man die Übertragung von einer Teilnehmerstelle zur anderen über die Fernämter und eine dazwischen geschaltete Fernleitung mit Hilfe der Gl. (288) in § 240 berechnen. Außerdem sind noch die Werte des Scheinwiderstandes des Systems, von der Fernleitung aus gesehen, für dieselben Frequenzen angegeben, wenn das Ende auf einen normalen Teilnehmerapparat geschaltet war.

Man erhält aus den Messungen folgende Tabellen:

Anschlußlänge 3,2 km.

$\omega$	$\beta$	$\theta = b + ia$	$\kappa$
3500	$1980 e^{-i46,0^0}$	$0,297 + i 3,230$	$1,0607 e^{+i 6,1^0}$
5000	$1325 e^{-i48,5^0}$	$0,350 + i 3,355$	$1,0452 e^{+i 6,7^0}$
6000	$1066 e^{-i46,5^0}$	$0,405 + i 3,444$	$1,0367 e^{+i 7,1^0}$
7000	$915 e^{-i44,1^0}$	$0,433 + i 3,485$	$1,0253 e^{+i 7,5^0}$

Anschlußlänge 4,8 km.

$\omega$	$\beta$	$\theta = b + ia$	$\kappa$
3500	$1560 e^{-i48,1^0}$	$0,415 + i 3,323$	$1,0903 e^{+i 8,7^0}$
5000	$1073 e^{-i47,7^0}$	$0,491 + i 3,476$	$1,0790 e^{+i 9,2^0}$
6000	$908 e^{-i45,2^0}$	$0,546 + i 3,579$	$1,0726 e^{+i 10,0^0}$
7000	$804 e^{-i42,8^0}$	$0,593 + i 3,664$	$1,0627 e^{+i 10,6^0}$

Wurde ein Teilnehmerapparat für Zentralbatterie an die Anschlußleitung gelegt, so ergaben sich, vom Ende der Fernleitung aus gesehen, die Scheinwiderstände

$\omega$	3,2 km	4,8 km
3500	$823 e^{+i 1,6^0}$	$971 e^{+i 2,5^0}$
5000	$908 e^{+i 11,7^0}$	$1082 e^{+i 6,7^0}$
6000	$964 e^{+i 12,6^0}$	$1153 e^{+i 4,3^0}$
7000	$1072 e^{+i 14,8^0}$	$1259 e^{+i 2,1^0}$

Diese Zahlen sind also in Gleichungen wie z. B. (286) für  $\mathfrak{R}$  einzusetzen, wenn man die Übertragung von Teilnehmer zu Teilnehmer über die Fernleitung und zwei vollständige Anschlußsysteme berechnen will.

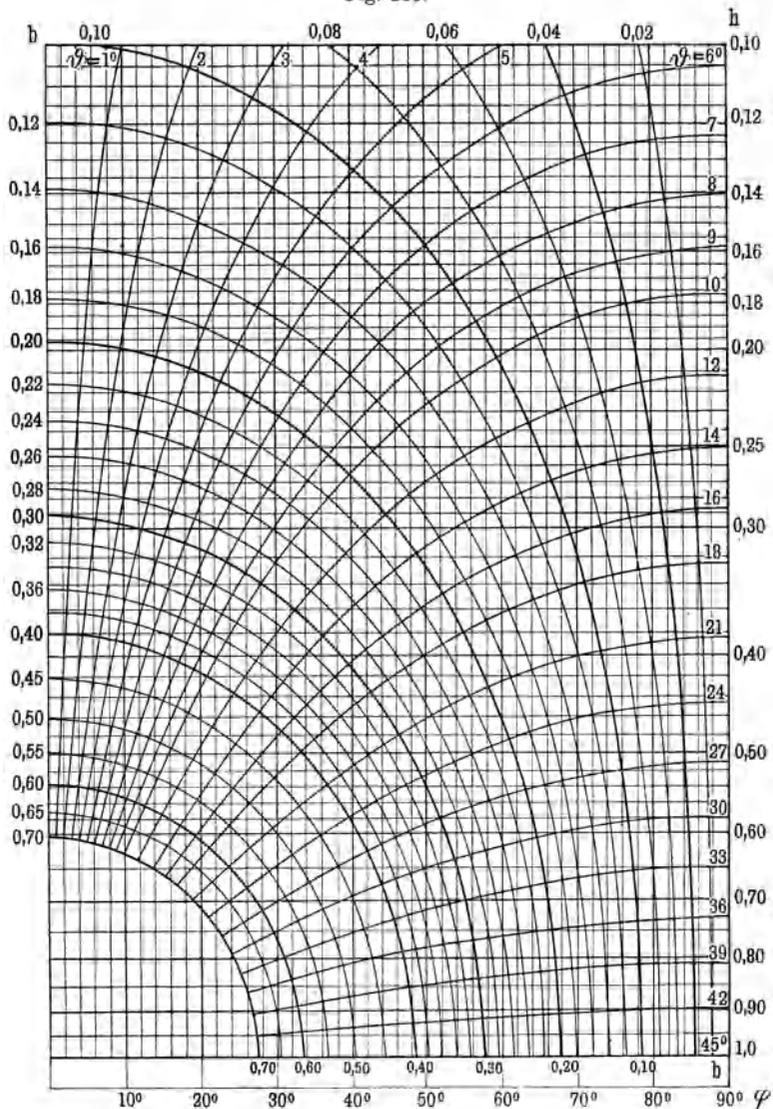
Eine andere Messungsreihe dieser Art bezieht sich auf eine 208 km lange Leitung, die durch Hin- und Herschalten von 0,9 mm starken Adern im Fernkabel zwischen Berlin und Potsdam gebildet worden war. In der Mitte war eine nach beiden Seiten mit einem Güteverhältnis von 900:540 und 900:590 ausgeglichene Zweirohr-Zwischenverstärkung eingeschaltet. Bei einer Reihe von Frequenzen wurden von einer Seite aus die Scheinwiderstände  $U_1$  und  $U_2$  gemessen, wenn das entgegengesetzte Ende offen oder kurz geschlossen war. Der Vergleich der Ergebnisse der Messungen mit denen eines Sprechversuches

$\omega$	$U_1$	$U_2$	Dämpfungsmaß	
			nach Messung	nach Sprechversuch
5 000	1605; $-14,7^0$	1577; $+1,5^0$	1,3	1,2
6 000	1597; $-1,2^0$	2190; $+6,7^0$	1,2	1,2
7 000	2560; $-8,4^0$	1880; $-4,3^0$	1,2	1,1
8 000	1990; $-9,3^0$	1677; $+5,5^0$	1,3	1,2
9 000	1388; $-7,5^0$	1435; $-27,7^0$	1,3	1,2
10 000	2109; $+8,5^0$	1860; $+4,0^0$	1,6	1,3
11 000	2137; $-5,5^0$	2020; $-6,8^0$	$> 2,0$	1,9

zeigt, daß auch eine derart zusammengesetzte Leitung den Gesetzen des allgemeinen Vierpols gehorcht.

§ 263. **Rechnungshelpe.** Bei der Abnahme der in der Ausführung begriffenen Fernkabel ist die Berechnung des Dämpfungsmaßes sehr häufig zu wiederholen. Um diese Arbeit zu vereinfachen, war seinerzeit im Telegraphen-Versuchsam ein Tabellenwerk berechnet worden, welches für alle Werte des Moduls von  $l_2, l_1$  von 0,01 bis 1 in Stufen von 0,01 und für alle Winkel von Grad zu Grad die Werte des Dämpfungs- und Winkelmaßes sofort auf vier Dezimalen abzulesen gestattete. Die Verhältnisse verbieten die Drucklegung der Tabelle. Als Ersatz ist für eine Genauigkeit, welche ungefähr die des Rechenschiebers erreicht, eine Linientafel <sup>71)</sup> konstruiert worden, die in Fig. 211 wiedergegeben ist; Fig. 213 stellt den für größere Dämpfungsmaße geltenden Teil in größerem Maßstabe dar.

Fig. 211.



Die Tafeln enthalten zwei einander überdeckende Liniensysteme, in denen die Funktionen  $\eta = h e^{i\varphi} = \sqrt{u_2/u_1}$  und  $e^g = e^{i\vartheta+b}$  in Beziehung gesetzt sind. Die erste ist durch die rechtwinkligen geradlinigen Koordinaten  $\log h$  als Ordinaten und  $\varphi$  als Abszissen dargestellt, ein bestimmter Punkt der Ebene entspricht also einem Werte  $\log h + i\varphi = \log \eta$ ; da  $e^g$  eine Funktion von  $\eta$  ist, so schneiden sich nach § 46 auch die Linien  $\vartheta = const$  und  $b = const$  rechtwinklig, was für die Interpolation bei Zwischenwerten besonders vorteilhaft ist. Das Winkelmaß  $a$  unterscheidet sich von  $\vartheta$  um einen noch festzustellenden konstanten Betrag.

Für den Gebrauch der Tafeln gelten folgende Regeln. Setzt man

$$\sqrt{\frac{u_2}{u_1}} = \frac{e^g - e^{-g}}{e^g + e^{-g}} = \eta = h e^{i\varphi},$$

so folgt

$$e^{2g} = \frac{1 + h \cos \varphi + i h \sin \varphi}{1 - h \cos \varphi - i h \sin \varphi}.$$

Das Quadrat des Betrages ist

$$e^{4b} = \frac{1 + h^2 + 2 h \cos \varphi}{1 + h^2 - 2 h \cos \varphi}.$$

Dieser Wert bleibt ungeändert, wenn man  $\frac{1}{h}$  an Stelle von  $h$  setzt. Die

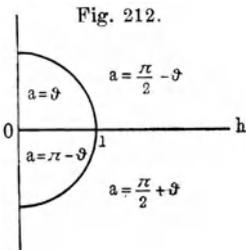
Tafeln können also auch für die Fälle gebraucht werden, daß  $\text{mod} \sqrt{\frac{u_2}{u_1}} > 1$  ist; man hat auf der Ordinate stets den echten Bruch einzusetzen, der sich entweder als  $\text{mod} \sqrt{u_2/u_1}$  oder als  $\text{mod} \sqrt{u_1/u_2}$  ergibt. Auch der Übergang von  $+\varphi$  in  $-\varphi$  bleibt auf  $e^{4b}$  ohne Wirkung; man hat also für die Abszisse nur den Betrag des Winkels  $\varphi$  zu beachten.

Anders steht es bei der Feststellung des Winkelmaßes. Aus dem Ausdruck für  $e^{2g}$  folgt

$$\text{tg } 2\vartheta = \frac{2 h \sin \varphi}{1 - h^2}.$$

Dieser Ausdruck geht in den gleichen und entgegengesetzten Wert über, wenn  $\frac{1}{h}$  statt  $h$  oder wenn  $-\varphi$  statt  $\varphi$  gesetzt wird.

Wenn man, wie bei der Feststellung des Dämpfungsmaßes, mit dem echten Bruche als Verhältnis der Moduln und mit dem Betrage der Winkeldifferenz in die Tafel eingeht, so stimmt das Winkelmaß  $a$  mit dem aus der Tafel ermittelten Winkel  $\vartheta$  nur in einzelnen Fällen überein. Im allgemeinen Falle findet man seinen Wert mittels



der Fig. 212. Die Zahlenebene, in der sich  $\sqrt{\frac{u_2}{u_1}}$  bewegen kann, ist geteilt durch einen Halbkreis mit dem Radius 1. Je nachdem  $\text{mod} \sqrt{\frac{u_2}{u_1}}$  in eines der vier Felder fällt, ist der kleinste positive

Winkel für  $a$  nach den eingesetzten Werten zu nehmen. Außerdem bleibt die in § 261 erwähnte Vieldeutigkeit wegen der Bildung stehender Wellen zu berücksichtigen, wegen deren ein passendes Vielfaches von  $\pi$  zuzufügen ist.

Die Tafeln werden bei großen Werten des Dämpfungsmaßes ungenau. Wie man sieht, gehen die Linien  $b = const$  mehr und mehr in Kreisform über. Aus der Gleichung

$$h e^{i\varphi} = \frac{1 - e^{-2\gamma l}}{1 + e^{-2\gamma l}}$$

folgt für hinreichend kleine Werte von  $e^{-2\gamma l}$  die Gleichung

$$\log h + i\varphi = -2 e^{-2\gamma l}.$$

Für Werte von  $\sqrt{\frac{U_2}{U_1}}$ , die innerhalb des vom Kreise mit dem zu  $h = 0,8$  gehörenden Radius eingeschlossenen Raumes liegen, ist daher zu setzen

$$e^{-4b} = \frac{\varphi^2 + (\log \operatorname{nat} h)^2}{4}$$

$$\operatorname{tg} 2a = \frac{\varphi}{\log \operatorname{nat} h}.$$

Hierbei ist natürlich  $\varphi$  im Bogenmaß zu rechnen.

Die Kurventafeln können noch dazu gebraucht werden, aus den Werten von  $\mathfrak{Z}$  und  $\gamma s$  einer gegebenen Leitung die Werte von  $U_1$  und  $U_2$  zu ermitteln. Aus den Eigenschaften der Leitung sind bekannt:

$$\begin{aligned} \mathfrak{Z} &= Z e^{-i\zeta} = \sqrt{U_1 U_2} \\ \gamma s &= ia + b. \end{aligned}$$

Man vermindere  $a$  um so viele Vielfache von  $\pi$ , daß man einen Rest zwischen 0 und  $\pi$  erhält. Nach seinem Wert kommt man in eines der vier Gebiete der Fig. 212 und bestimmt daraus den Winkel  $\vartheta$ . Zum Schnittpunkt der zugehörigen Linie in Fig. 211 oder 213 mit der Linie  $b$  gehört ein

bestimmtes Wertepaar  $h$  und  $\varphi$ . Ob nun  $\operatorname{mod} \sqrt{\frac{U_2}{U_1}} = h$  oder gleich  $\frac{1}{h}$  ist

und  $\operatorname{arg} \sqrt{\frac{U_2}{U_1}} = \varphi$  oder gleich  $-\varphi$  ist, bestimmt man nach folgender

Tabelle:

Restwinkel	0° bis 45°	45° bis 90°	90° bis 135°	135° bis 180°
$\operatorname{mod} \sqrt{\frac{U_2}{U_1}} \dots \dots \dots$	$h$	$\frac{1}{h}$	$\frac{1}{h}$	$h$
$\operatorname{arg} \sqrt{\frac{U_2}{U_1}} \dots \dots \dots$	$+\varphi$	$+\varphi$	$-\varphi$	$-\varphi$

Wenn also für eine 300 km lange Leitung aus 3 mm starkem Kupferdraht für  $\omega = 5000$  die Werte gelten:

$$\mathfrak{Z} = 614 e^{-13,80i}, \quad \gamma s = i 5,10 + 1,38,$$

so ergibt das Winkelmaß nach Abzug von  $\pi$  den Wert  $1,96 = 112,5^\circ$ . In die Tafel hat man mit  $112,5^\circ - \frac{\pi}{2}$ , also  $\vartheta = 22,5^\circ$  und  $b = 1,38$  einzugehen und findet dort  $h = 0,918$ ,  $\varphi = 5^\circ$ .

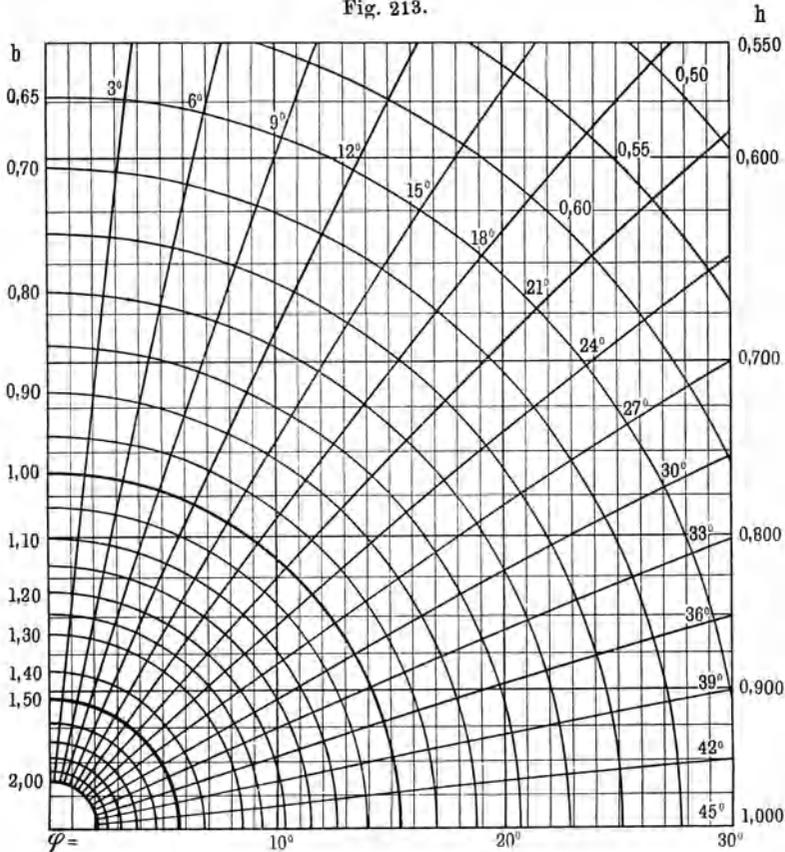
Nach der Tabelle ist dann also

$$\sqrt{\frac{u_2}{u_1}} = 1,09 e^{-i 5^\circ}$$

und daher

$$u_1 = 564 e^{-i 8,8^\circ}, \quad u_2 = 670 e^{-i 18,8^\circ}.$$

Fig. 213.



Will man  $a$  und  $b$  statt nach diesen Tafeln nach Tabellen berechnen, so eignen sich die aus der Gleichung

$$e^{2g} = \frac{1 + h \cos \varphi + i h \sin \varphi}{1 - h \cos \varphi - i h \sin \varphi}$$

nach Einführung von  $h = tg \chi$  leicht abzuleitenden Beziehungen

$$\Im 2b = \cos \varphi \sin^2 \chi, \quad \operatorname{tg} 2a = \sin \varphi \operatorname{tg}^2 \chi.$$

Aus dem Werte für  $\Im 2b$  kann man  $2b$  mittels der folgenden Tabelle finden. Wenn man darin für Zwischenwerte nach Proportionalteilen rechnet,

so werden die Zahlen für  $\mathfrak{I}g u$  bis zu  $u = 1$  um 3 bis 1 aufs Tausend zu klein, bei größeren Werten von  $u$  fällt der Fehler bis auf  $\frac{1}{10000}$ .

$\mathfrak{I}g u$ .

$u$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	0000	0997	1974	2914	3800	4621	5370	6044	6640	7163
1	7616	8005	8337	8617	8854	9052	9217	9354	9469	9563
2	9640	9704	9757	9801	9837	9866	9890	9910	9926	9940

## Sechster Abschnitt.

### Das Nebensprechen in mehrfachen Fernsprechkabeln.

§ 264. Allgemeines. Seitdem es möglich geworden ist, mittels Leitungen in Kabeln große Entfernungen zu überbrücken, und man zur besseren Ausnutzung der vorhandenen Leiter aus je zwei Doppelleitungen noch eine Viererleitung, also im ganzen drei Stromkreise bildet, ist die Frage, wie man störende Übertragungen aus einem dieser Stromkreise auf die anderen vermeiden oder beseitigen kann, für die Technik wichtig geworden. Diese Störungen können aus Kopplungen durch magnetische oder durch elektrische Felder entstehen. Die Vierer sind entweder so aufgebaut, daß die Adern jeder Doppelleitung in jedem Querschnitt in den gegenüberliegenden Ecken eines Quadrates liegen (Sternverseilung), oder daß jede Doppelader mit einem bestimmten Drall für sich verseilt wird, und danach beide zusammen zum Vierer verseilt werden. Wenn diese Anordnungen mit vollkommener Regelmäßigkeit ausgeführt werden könnten, so wären die beiden Doppelleitungen (Stammleitungen) gegeneinander und gegen den Vierer vollkommen im Gleichgewicht. Die zurzeit noch bei der Fabrikation solcher Kabel vorkommenden Unregelmäßigkeiten, z. B. bei der Besspinnung der Drähte, beim Verseilen zu Doppeladern, bringen Kopplungen zwischen den Stromkreisen hervor, und es entsteht die Aufgabe, diese zu beseitigen.

Es ist durch die praktische Erfahrung erwiesen worden, daß man die Störungen, soweit sie aus den Leitungen der Kabel selbst herrühren, durch Ausgleichen der Kapazitäten in hinreichendem Maße beseitigen kann. Man braucht demnach auf die Frage, ob und wie die elektromagnetische Kopplung gegen den jetzigen Zustand vermindert werden kann, nicht näher einzugehen. Der Ausgleich der Kapazitäten setzt eine Messung der Unterschiede und eine Theorie ihrer Bedeutung voraus. Über diese Fragen und ein praktisches Mittel für den Ausgleich, das zurzeit noch von der Western El. Co.<sup>72)</sup> angewendet wird, hat zuerst Pollock auf Grund der Erfahrungen in England berichtet. Die auszugleichende Kabellänge (ein Spulenabstand) besteht aus einer Anzahl von Teilen (Fabrikationslängen); nachdem man für jeden Teil die vorhandenen Kapazitätsunterschiede durch Messung festgestellt hat, fügt man die Adern, soweit dies erforderlich ist, abweichend von der durch den Aufbau gegebenen Folge so zusammen, daß die Unterschiede sich innerhalb der Länge ausgleichen. Bei neueren Ausführungen ist dies schon bei

Unterteilung jeder auszugleichenden Länge in drei Teile gelungen. Von der Akt.-Ges. Siemens und Halske<sup>73)</sup> wird das Ausgleichen der festgestellten Unterschiede durch Zufügung kleiner Kondensatoren bevorzugt, welche innerhalb der auszugleichenden Strecke an einem Punkte zwischen zwei bestimmte Adern geschaltet werden, wie es im einzelnen die Messungen ergeben.

Für die Zwecke dieses Buches hat diese vorwiegend praktische Frage insofern Interesse, als sie auf eine neue Art zusammengesetzter Leitung führt, bei welcher die beiden Anfangsklemmen, an welche die Sprechapparate angeschlossen werden, und die beiden Endklemmen, an denen die Hörapparate liegen, durch die elektrischen und magnetischen Felder der vier den Vierer bildenden Leitungen miteinander in Beziehung stehen. Statt der sehr umständlichen vollständigen Lösung<sup>74)</sup>, welche auch voraussetzt, daß die zur Kopplung Anlaß gebenden Unterschiede über die ganze Länge gleichmäßig verteilt seien, führen wir die Berechnung der gleichwertigen Ersatzleitung in Anlehnung an eine neuere Veröffentlichung für eine kurze Länge durch, für die man die Kapazität der Leitungen wie in Kondensatoren vereinigt betrachten darf.

**§ 265. Die Kopplungskapazitäten eines Vierers.** Die Kapazitäten zwischen den Adern eines Vierers und einer geerdeten äußeren Hülle lassen sich durch zehn Teilkapazitäten nach Fig. 214 darstellen, von denen die gleichwertigen, wie z. B. die verschiedenen  $x, y, w$  sich untereinander in gewissen Grenzen in beliebiger Weise unterscheiden können. Es ist die Bedingung aufzustellen, welche Beziehungen zwischen den Teilkapazitäten bestehen müssen, damit das Nebensprechen fortfällt.

Fig. 214.

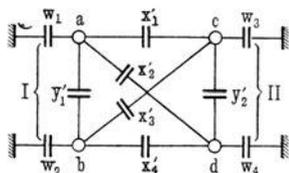
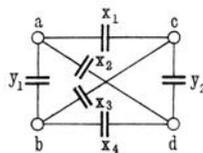


Fig. 215.



Eine wesentliche Vereinfachung dieser Aufgabe bei genauer Rechnung ergibt sich durch eine von Küpfmüller angezeigte Umwandlung der Fig. 214 in die Fig. 215, wobei also die Erdkapazitäten  $w$  in Zuschläge zu den gegenseitigen Teilkapazitäten verwandelt werden. Danach sind die Kapazitäten der Kondensatoren  $x, y$  in Fig. 215 gleich denen von  $x', y'$  in Fig. 214, vermehrt um einen Wert  $u$ , welcher gleich ist dem Produkt der an den betrachteten Kondensator anstoßenden Erdkapazitäten, geteilt durch ihre Summe, also z. B.

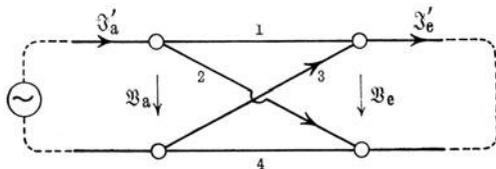
$$x_1 = x'_1 + \frac{w_1 w_3}{w_1 + w_2 + w_3 + w_4} \dots$$

Man findet die angegebene Größe für  $u$ , indem man für den vierstrahligen Stern, den die Erdkondensatoren von den Leitern  $a, b, c, d$  gegen die Hülle mit dem Potential Null bilden, ein solches Viereck nach Fig. 215 ansetzt, daß beide Anordnungen unter allen Potentialen die gleichen Ströme aufnehmen.

Man hat beim Nebensprechen zu unterscheiden das Übersprechen, von einer Stammleitung zur anderen, und das Mitsprechen, von dem Vierer auf die eine oder die andere Stammleitung und umgekehrt.

Kapazitätsdifferenzen beim Übersprechen. Beim Übersprechen liegt an den Punkten  $ab$  (Fig. 214 und 215) die Stromquelle, an den Punkten  $cd$  der

Fig. 216.



Hörapparat. Man findet die gleichwertige Ersatzleitung am einfachsten in zwei Stufen. Der einfacheren Schreibweise halber wollen wir dem Zweige mit den Kondensatoren  $x_1$  bis  $x_4$  die Scheinwiderstände  $\mathfrak{N}_1$  bis  $\mathfrak{N}_4$ , den beiden anderen  $y_1$

und  $y_2$  die Scheinwiderstände  $\mathfrak{N}_5$  und  $\mathfrak{N}_6$  zuschreiben. Lassen wir  $\mathfrak{N}_5$  und  $\mathfrak{N}_6$  zunächst fort, so ergeben sich für den Rest gemäß Fig. 216 die Gleichungen

$$\begin{array}{rcl}
 \mathfrak{U}_a - \mathfrak{U}_e & = & \mathfrak{N}_1 \mathfrak{Z}_1 - \mathfrak{N}_4 \mathfrak{Z}_4 & \mathfrak{Z}'_a = \mathfrak{Z}_1 + \mathfrak{Z}_2 \\
 \mathfrak{U}_a & = & \mathfrak{N}_1 \mathfrak{Z}_1 - \mathfrak{N}_3 \mathfrak{Z}_3 & \mathfrak{Z}_1 + \mathfrak{Z}_2 + \mathfrak{Z}_3 + \mathfrak{Z}_4 = 0 \\
 \mathfrak{U}_e + \mathfrak{N}_1 \mathfrak{Z}_1 - \mathfrak{N}_2 \mathfrak{Z}_2 & = & 0 & \mathfrak{Z}'_e = \mathfrak{Z}_1 + \mathfrak{Z}_3
 \end{array}$$

Wenn man die Ströme  $\mathfrak{Z}_1$  bis  $\mathfrak{Z}_4$  ausscheidet, erhält man das Gleichungspaar

$$\begin{aligned}
 & \mathfrak{U}_a (\mathfrak{N}_2 \mathfrak{N}_3 - \mathfrak{N}_1 \mathfrak{N}_4) \\
 & = \mathfrak{U}_e (\mathfrak{N}_1 + \mathfrak{N}_3) (\mathfrak{N}_2 + \mathfrak{N}_4) + \mathfrak{Z}'_e (\mathfrak{N}_1 \mathfrak{N}_3 (\mathfrak{N}_2 + \mathfrak{N}_4) + \mathfrak{N}_2 \mathfrak{N}_4 (\mathfrak{N}_1 + \mathfrak{N}_3)) \\
 \mathfrak{Z}_a (\mathfrak{N}_2 \mathfrak{N}_3 - \mathfrak{N}_1 \mathfrak{N}_4) & = \mathfrak{Z}'_e (\mathfrak{N}_1 + \mathfrak{N}_2) (\mathfrak{N}_3 + \mathfrak{N}_4) + \mathfrak{U}_e (\mathfrak{N}_1 + \mathfrak{N}_2 + \mathfrak{N}_3 + \mathfrak{N}_4).
 \end{aligned}$$

Fügt man  $\mathfrak{N}_5$  und  $\mathfrak{N}_6$  zu, so treten bei denselben Spannungen andere Ströme auf:

$$\mathfrak{Z}_a = \mathfrak{Z}'_a + \frac{\mathfrak{U}_a}{\mathfrak{N}_5}, \quad \mathfrak{Z}_e = \mathfrak{Z}'_e - \frac{\mathfrak{U}_e}{\mathfrak{N}_6}$$

und für die Anordnung nach Fig. 215 gelten Gleichungen folgender Art:

$$\begin{array}{rcl}
 \mathfrak{U}_a & = & \mathfrak{A}_1 \mathfrak{U}_e + \mathfrak{B} \mathfrak{Z}_e & \mathfrak{U}_e & = & \mathfrak{A}_2 \mathfrak{U}_a - \mathfrak{B} \mathfrak{Z}_a \\
 \mathfrak{Z}_a & = & \mathfrak{A}_2 \mathfrak{Z}_e + \mathfrak{C} \mathfrak{U}_e & \mathfrak{Z}_e & = & \mathfrak{A}_1 \mathfrak{Z}_a - \mathfrak{C} \mathfrak{U}_a
 \end{array}$$

für welche  $\mathfrak{A}_1 \mathfrak{A}_2 - \mathfrak{B} \mathfrak{C} = 1$  ist, und zwar ist

$$\mathfrak{A}_1 (\mathfrak{N}_2 \mathfrak{N}_3 - \mathfrak{N}_1 \mathfrak{N}_4) = (\mathfrak{N}_1 + \mathfrak{N}_3) (\mathfrak{N}_2 + \mathfrak{N}_4) + \frac{\mathfrak{N}_1 \mathfrak{N}_3 (\mathfrak{N}_2 + \mathfrak{N}_4) + \mathfrak{N}_2 \mathfrak{N}_4 (\mathfrak{N}_1 + \mathfrak{N}_3)}{\mathfrak{N}_6}$$

$$\mathfrak{A}_2 (\mathfrak{N}_2 \mathfrak{N}_3 - \mathfrak{N}_1 \mathfrak{N}_4) = (\mathfrak{N}_1 + \mathfrak{N}_2) (\mathfrak{N}_3 + \mathfrak{N}_4) + \frac{\mathfrak{N}_1 \mathfrak{N}_3 (\mathfrak{N}_2 + \mathfrak{N}_4) + \mathfrak{N}_2 \mathfrak{N}_4 (\mathfrak{N}_1 + \mathfrak{N}_3)}{\mathfrak{N}_5}$$

$$\mathfrak{B} (\mathfrak{N}_2 \mathfrak{N}_3 - \mathfrak{N}_1 \mathfrak{N}_4) = \mathfrak{N}_1 \mathfrak{N}_3 (\mathfrak{N}_2 + \mathfrak{N}_4) + \mathfrak{N}_2 \mathfrak{N}_4 (\mathfrak{N}_1 + \mathfrak{N}_3)$$

$$\mathfrak{C} (\mathfrak{N}_2 \mathfrak{N}_3 - \mathfrak{N}_1 \mathfrak{N}_4) = \left( \mathfrak{N}_1 + \mathfrak{N}_2 + \mathfrak{N}_3 + \mathfrak{N}_4 + \frac{(\mathfrak{N}_1 + \mathfrak{N}_3) (\mathfrak{N}_2 + \mathfrak{N}_4)}{\mathfrak{N}_5} + \frac{(\mathfrak{N}_1 + \mathfrak{N}_2) (\mathfrak{N}_3 + \mathfrak{N}_4)}{\mathfrak{N}_6} \right).$$

Dividiert man diese Gleichungen durch  $\mathfrak{N}_1 \mathfrak{N}_2 \mathfrak{N}_3 \mathfrak{N}_4$  und führt ein

$$\frac{1}{\mathfrak{N}_1} = i \omega x_1, \dots, \frac{1}{\mathfrak{N}_5} = i \omega y_1 \dots,$$

so erhält man

$$\left. \begin{aligned} \mathfrak{B}_a(x_1 x_4 - x_2 x_3) &= \mathfrak{B}_e \left( (x_1 + x_3)(x_2 + x_4) + y_2(x_1 + x_2 + x_3 + x_4) \right) \\ &\quad + \frac{\mathfrak{Z}_e}{i\omega} (x_1 + x_2 + x_3 + x_4) \\ \mathfrak{Z}_a(x_1 x_4 - x_2 x_3) &= \mathfrak{Z}_e \left( (x_1 + x_2)(x_3 + x_4) + y_1(x_1 + x_2 + x_3 + x_4) \right) \\ &\quad + i\omega \mathfrak{B}_e \left( x_2 x_3 x_4 + x_1 x_3 x_4 + x_1 x_2 x_4 + x_1 x_2 x_3 + y_2(x_1 + x_2)(x_3 + x_4) \right) \\ &\quad + y_1(x_1 + x_3)(x_2 + x_4) \end{aligned} \right\} \quad (316)$$

Die Spannungen  $\mathfrak{B}_a$  und  $\mathfrak{B}_e$  stehen bei offenem Ende in den Verhältnissen,

$$\begin{aligned} \text{wenn } a b \text{ auf } c/d \text{ wirkt,} \quad \mathfrak{B}_e &= \frac{x_1 x_4 - x_2 x_3}{(x_1 + x_2 + x_3 + x_4)} C_2 \\ \text{wenn } c/d \text{ auf } a/b \text{ wirkt,} \quad \mathfrak{B}_a &= \frac{x_1 x_4 - x_2 x_3}{(x_1 + x_2 + x_3 + x_4)} C_1 \end{aligned}$$

Darin sind  $C_1 = y_1 + \frac{(x_1 + x_2)(x_3 + x_4)}{x_1 + x_2 + x_3 + x_4}$  und  $C_2 = y_2 + \frac{(x_1 + x_3)(x_2 + x_4)}{x_1 + x_2 + x_3 + x_4}$

die Schleifenkapazitäten der Stammleitungen  $a/b$  und  $c/d$ .

Die Stammleitungen sind also gegeneinander ausgeglichen, wenn

$$x_1 x_4 = x_2 x_3$$

ist. Man setzt

$$k_1 = 4 \frac{x_1 x_4 - x_2 x_3}{x_1 + x_2 + x_3 + x_4} \dots \dots \dots (317)$$

und definiert durch  $k_1$  eine Kapazitätsdifferenz, welche das Maß der Kopplung zwischen den beiden Stammleitungen bezeichnet. Sie wird ebenso wie die Betriebskapazitäten mit dem für 1 km geltenden Werte angegeben.

Wird der induzierten Leitung durch einen Apparat mit dem Scheinwiderstand  $\mathfrak{R}_e$  ein Strom  $\mathfrak{Z}_e$  entnommen, so ist dieser, wenn  $C$  je nachdem für  $C_1$  oder  $C_2$  steht,

$$\mathfrak{Z}_e = \mathfrak{B}_a \frac{i\omega k_1}{4(1 + i\omega C \mathfrak{R}_e)}$$

Kapazitätsdifferenzen beim Mitsprechen. Die Beeinflussung zwischen dem Vierer und der Stammleitung  $a/b$  ergibt sich aus der Schaltung

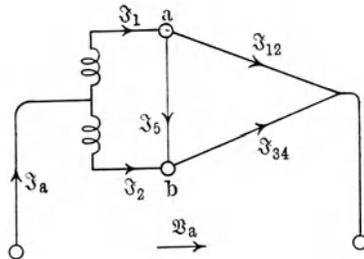
nach Fig. 217, in der die Stammleitung  $c/d$ , die keine Bedeutung für diesen Vorgang hat, kurzgeschlossen ist. Dadurch werden die Kondensatoren  $x_1$  und  $x_2$  parallel geschaltet und ebenso  $x_3$  und  $x_4$ ; die Scheinwiderstände dieser Zweige seien mit

$$\mathfrak{R}_{12} = \frac{1}{i\omega(x_1 + x_2)}$$

und

$$\mathfrak{R}_{34} = \frac{1}{i\omega(x_3 + x_4)}$$

Fig. 217.



bezeichnet. An die Stammleitung  $a/b$  ist die Sekundäre eines Übertragers gelegt, von dessen Mitte die Zuleitung für den Strom des Viererkreises abzweigt.

Wenn für jede Hälfte der Wicklung die Eigenschaften  $\mathfrak{L}$  und  $\mathfrak{M}$  gelten, mithin  $2 (\mathfrak{L} + \mathfrak{M})$  den Scheinwiderstand der gesamten Wicklung bei stromloser Primärwicklung bezeichnet, so bestehen die Gleichungen

$$\begin{aligned} \mathfrak{B}_a &= \mathfrak{L} \mathfrak{I}_1 - \mathfrak{M} \mathfrak{I}_2 + \mathfrak{K}_{12} \mathfrak{I}_{12} & \mathfrak{B}_e &= \mathfrak{K}_{12} \mathfrak{I}_{12} - \mathfrak{K}_{34} \mathfrak{I}_{34} \\ \mathfrak{B}_a &= \mathfrak{L} \mathfrak{I}_2 - \mathfrak{M} \mathfrak{I}_1 + \mathfrak{K}_{34} \mathfrak{I}_{34} & \mathfrak{B}_e &= \mathfrak{K}_5 \mathfrak{I}_5 \\ \mathfrak{I}_a &= \mathfrak{I}_1 + \mathfrak{I}_2 & \mathfrak{I}_e &= \mathfrak{I}_5 + \mathfrak{I}_{12} - \mathfrak{I}_1 \\ & & \mathfrak{I}_e &= \mathfrak{I}_2 + \mathfrak{I}_5 - \mathfrak{I}_{34} \end{aligned}$$

Es werde ferner die fiktive Spannung am Vierer mit

$$\mathfrak{B} = \frac{1}{2} (\mathfrak{K}_{12} \mathfrak{I}_{12} + \mathfrak{K}_{34} \mathfrak{I}_{34})$$

festgesetzt.

Für die gleichwertige Ersatzleitung gelte das System

$$\begin{aligned} \mathfrak{B}_a &= \mathfrak{A}_1 \mathfrak{B}_e + \mathfrak{B} \mathfrak{I}_e \\ \mathfrak{I}_a &= \mathfrak{A}_2 \mathfrak{I}_e + \mathfrak{C} \mathfrak{B}_e \end{aligned}$$

Dann ergeben sich die Bestimmungen

$$\left. \begin{aligned} (\mathfrak{K}_{12} - \mathfrak{K}_{34}) (\mathfrak{L} + \mathfrak{M}) \mathfrak{K}_5 \mathfrak{A}_1 &= \mathfrak{K}_{12} \mathfrak{K}_{34} (\mathfrak{K}_5 + 2 (\mathfrak{L} + \mathfrak{M})) \\ &\quad + \mathfrak{L} \mathfrak{K}_5 (\mathfrak{K}_{12} + \mathfrak{K}_{34}) + (\mathfrak{L}^2 - \mathfrak{M}^2) (\mathfrak{K}_5 + \mathfrak{K}_{12} + \mathfrak{K}_{34}) \\ (\mathfrak{K}_{12} - \mathfrak{K}_{34}) (\mathfrak{L} + \mathfrak{M}) \mathfrak{K}_5 \mathfrak{A}_2 &= 2 (\mathfrak{L} + \mathfrak{M}) \mathfrak{K}_5 (\mathfrak{K}_{12} + \mathfrak{K}_{34}) \\ (\mathfrak{K}_{12} - \mathfrak{K}_{34}) (\mathfrak{L} + \mathfrak{M}) \mathfrak{K}_5 \mathfrak{B} &= (\mathfrak{L} + \mathfrak{M}) \mathfrak{K}_5 \\ &\quad (2 \mathfrak{K}_{12} \mathfrak{K}_{34} + (\mathfrak{L} - \mathfrak{M}) (\mathfrak{K}_{12} + \mathfrak{K}_{34})) \\ (\mathfrak{K}_{12} - \mathfrak{K}_{34}) (\mathfrak{L} + \mathfrak{M}) \mathfrak{K}_5 \mathfrak{C} &= (\mathfrak{K}_{12} + \mathfrak{K}_{34}) (\mathfrak{K}_5 + 2 (\mathfrak{L} + \mathfrak{M})) \\ &\quad + 2 (\mathfrak{L} + \mathfrak{M}) \mathfrak{K}_5 \end{aligned} \right\} (318)$$

Außerdem ergibt sich für die Spannung am Vierer

$$\begin{aligned} 2 (\mathfrak{K}_{12} - \mathfrak{K}_{34}) (\mathfrak{L} + \mathfrak{M}) \mathfrak{K}_5 \mathfrak{B} &= \mathfrak{B}_e [4 (\mathfrak{L} + \mathfrak{M}) \mathfrak{K}_{12} \mathfrak{K}_{34} + 2 \mathfrak{K}_5 \mathfrak{K}_{12} \mathfrak{K}_{34} \\ &\quad + (\mathfrak{L} + \mathfrak{M}) \mathfrak{K}_5 (\mathfrak{K}_{12} + \mathfrak{K}_{34})] + 4 \mathfrak{I}_e (\mathfrak{L} + \mathfrak{M}) \mathfrak{K}_5 \mathfrak{K}_{12} \mathfrak{K}_{34} \end{aligned}$$

Nimmt man die letzte Gleichung voran, so ergibt sich bei überragenden Werten von  $\mathfrak{L} + \mathfrak{M}$  und für  $\mathfrak{I}_e = 0$

$$\frac{\mathfrak{B}_e}{\mathfrak{B}} = \frac{\mathfrak{K}_5 (\mathfrak{K}_{12} - \mathfrak{K}_{34})}{2 \mathfrak{K}_{12} \mathfrak{K}_{34} + \frac{1}{2} \mathfrak{K}_5 (\mathfrak{K}_{12} + \mathfrak{K}_{34})}$$

Derselbe Wert ergibt sich für  $\frac{1}{\mathfrak{A}_1} = \frac{\mathfrak{B}_e}{\mathfrak{I}_a}$  bei offenem Stromkreise, wenn  $\mathfrak{L} = \mathfrak{M}$  gesetzt wird, also für einen idealen Transformator.

Aus einer näherungsweise geführten Rechnung ist eine Gleichung abgeleitet worden, die in den hier benutzten Bezeichnungen lautet

$$\frac{\mathfrak{B}_e}{\mathfrak{B}} = \frac{\mathfrak{K}_{12} - \mathfrak{K}_{34}}{2 \mathfrak{K}_{12} \mathfrak{K}_{34}} \frac{\mathfrak{K}_5 (\mathfrak{K}_{12} + \mathfrak{K}_{34})}{\mathfrak{K}_5 + \mathfrak{K}_{12} + \mathfrak{K}_{34}}$$

Sie stimmt mit der strengen fast überein, wenn der Scheinwiderstand  $\mathfrak{K}_5$  klein gegen  $\mathfrak{K}_{12} + \mathfrak{K}_{34}$  ist. Der zweite Posten ist der vereinigte Scheinwiderstand der an den Klemmen  $a$  und  $b$  liegenden Zweige, also gleich  $1/i \omega C_1$ , wenn  $C_1$  die Betriebskapazität der Stammleitung  $a/b$  ist. Führt man auch

die anderen Scheinwiderstände auf die Kapazitätswerte zurück, so erhält man, da die Betriebskapazität des Vierers  $C_v = x_1 + x_2 + x_3 + x_4$  ist,

$$\frac{1}{\mathfrak{A}_1} = - \frac{x_1 + x_2 - (x_3 + x_4)}{2 C_1}, \quad \frac{1}{\mathfrak{A}_2} = - \frac{x_1 + x_2 - (x_3 + x_4)}{2 C_v}.$$

Der erste Ausdruck stellt das Verhältnis der Stammleitungsspannung zur Viererspannung dar, wenn die Viererleitung die Stromquelle enthält, die zweite das Verhältnis der Viererspannung zu derjenigen der Stammleitung, wenn von dieser die Störung ausgeht, in beiden Fällen bei offenem Kreise.

Für die Übertragung zwischen dem Vierer und der zweiten Stammleitung ist die Differenz  $x_1 + x_3 - (x_2 + x_4)$  maßgebend, auch tritt  $C_2$  an Stelle von  $C_1$ .

Es werden noch zwei Kapazitätsdifferenzen

$$k_2 = x_1 + x_2 - (x_3 + x_4) \dots \dots \dots (319)$$

$$k_3 = x_1 + x_3 - (x_2 + x_4) \dots \dots \dots (320)$$

definiert, ebenfalls für 1 km Kabellänge, und sie haben demnach die Bedeutung, daß  $k_1 = 0$  die Freiheit vom Übersprechen,  $k_2 = 0$  und  $k_3 = 0$  die Freiheit vom Mitsprechen ergeben.

Für den Dämpfungsfaktor der gleichwertigen Ersatzleitung ergibt sich nach den abgeleiteten Gleichungen, daß er für zwei gleiche Schleifen mit der Kapazität  $C$  den Wert  $Ck$  hat, für zwei verschiedene Schleifen mit den Kapazitäten  $C_a$  und  $C_b$  den Wert  $\sqrt{C_a C_b} k$ . Aus den Kopplungskapazitäten, wegen deren Messung auf die Literatur verwiesen wird, kann man also das Dämpfungsmaß des Nebensprechens zwischen den betrachteten Schleifen berechnen. Nach den in die spezielle Meßtechnik eingeführten Bestimmungen (317, 319, 320), die wir übernehmen, ist beim Übersprechen  $\frac{1}{4} k_1$ , beim Mitsprechen  $\frac{1}{2} k_2$  oder  $\frac{1}{2} k_3$  für  $k$  zu setzen.

In den älteren Arbeiten, die an Pollock anschließen, wird gesetzt

$$x_1 - x_3 = p; \quad x_2 - x_4 = q$$

$$x_1 - x_2 = r, \quad x_3 - x_4 = s$$

Aus der Gleichung  $\frac{x_1}{x_2} = \frac{x_3}{x_4}$ , welche für  $k_1 = 0$  folgt, leitete man ab

$$\frac{x_1 - x_2}{x_2} = \frac{x_3 - x_4}{x_4}$$

und da  $x_2$  und  $x_4$  nur wenig verschieden sind, als Bedingung für das Freisein vom Übersprechen  $x_1 - x_2 = x_3 - x_4$ . In den Zeichen  $p, q, r, s$  lauten die Bedingungen:

$$k_1 = 0, \quad \text{wenn } p - q = 0, \quad \text{also auch } r - s = 0$$

$$k_2 = 0, \quad \text{wenn } p + q = 0$$

$$k_3 = 0, \quad \text{wenn } r + s = 0.$$

Beim Ausgleich der Kapazitäten durch Adervertauschung brachte man die Adern so zusammen, daß für das ganze auszugleichende Leitungsstück

$$\Sigma(p - q) = 0, \quad \Sigma(p + q) = 0, \quad \Sigma(r + s) = 0.$$

Beim Kondensatorausgleich hat man, wenn die Differenzen positiv sind, eine der Kapazitäten mit negativem Vorzeichen (in 317, 319, 320) durch

Parallelschalten eines Zusatzkondensators zu vergrößern, bei negativen Differenzen dagegen eine der Kapazitäten mit positivem Vorzeichen. Um aber alle Bedingungen gleichzeitig zu erfüllen, verteilt man die zuzufügenden Kondensatoren je zur Hälfte auf die beiden Kapazitäten gleichen Vorzeichens, weil dadurch der Ausgleich für jeden einzelnen Fall die Bedingungen der anderen Fälle ungeändert läßt.

Es mag darauf hingewiesen werden, daß die Voraussetzung, daß man durch Ausgleichen von drei Kapazitäten (einerlei ob in Leitungsstücken oder in besonderen Kondensatoren) den Vierer vollkommen störungsfrei machen könne, höchstens für die Beziehungen zwischen Stämmen und Vierer richtig ist, nicht aber für Störungen aus außerhalb gelegenen Quellen. Die der Kürze halber nur angedeutete, nicht bewiesene Umwandlung des Sternes der Erdkapazitäten in Ader-Teilkapazitäten ist nur dann streng richtig, wenn der Sternpunkt des Vierers das Potential Null behält. Dies erfordert zwei Beziehungen zwischen den Erdkapazitäten. Soll also ein Vierer auch gegen Störungen von außen ausgeglichen werden, was voraussetzt, daß Stämme und Vierer auch gegen Erde symmetrisch werden, so sind wenigstens noch zwei Kondensatoren anzubringen oder zwei Erdkapazitäten auszugleichen.

**§ 266. Die Messung des Nebensprechens.** Die zu prüfende Anordnung stellt zwischen den Klemmen der Stromquelle und denen des anzeigenden Telephons einen Vierpol dar, und kann daher in jeder Beziehung wie eine Leitung oder andere Schaltung nach § 262 und 263 gemessen werden. Da in praktischen Fällen zahlreiche Messungen nacheinander zu erledigen sind, bedient man sich zur Feststellung des Nebensprechens ebenfalls geeichter Vergleichsmaße, die wie die Eichleitungen eingerichtet sind und verwendet werden. Es wird also abwechselnd die Übertragung durch das Nebensprechen und über die Meßeinrichtung verglichen, und die Einstellung der letzteren so lange verändert, bis gleiche Lautstärke festgestellt wird.

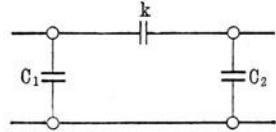
Als Schaltung für die Meßeinrichtung eignet sich im Grundsatz jede Anordnung, welche das Verhältnis zwischen zwei Spannungen oder Strömen aus den Werten der eingeschalteten Scheinwiderstände zu entnehmen gestattet. Damit man ohne Korrekturen das Ergebnis ablesen kann, soll die Schaltung außerdem noch so eingerichtet sein <sup>75)</sup>, daß die Scheinwiderstände, die sie von beiden Seiten aus zeigt, mit den entsprechenden an dem zu prüfenden Leitungssystem übereinstimmen. Wird, wie gewöhnlich, mit sinusförmigem Strom gemessen, so genügt es, die Beträge übereinstimmen zu lassen. Die Fehler, welche aus dem Mangel an Übereinstimmung zwischen einander entsprechenden Scheinwiderständen entstehen, fallen um so weniger ins Gewicht, je größer der Scheinwiderstand des benutzten Telephons gegenüber jenen Scheinwiderständen ist.

**§ 267. Das Nebensprechen zusammengesetzter Leitungen.** Eine strenge Rechnung durchzuführen, ist praktisch ohne Wert, weil das Nebensprechen wirklicher Leitungen beim gegenwärtigen Stand der Technik von vielen Zufällen abhängt, daher von Stück zu Stück sich regellos ändert. Annähernde Lösungen <sup>76)</sup> für gedachte Fälle sind gegeben worden. Wir wollen uns hier an einem Beispiel einfachster Art Rechenschaft geben, was geschieht, wenn man

mehrere Leitungsteile zusammenschaltet, die verschieden starkes Nebensprechen zeigen, insbesondere, wenn zu hochwertigen Stücken minderwertige hinzutreten.

An den Bestimmungen für den Dämpfungsfaktor des Nebensprechens fällt es auf, daß er durch das Verhältnis zweier Kapazitäten bestimmt ist, die auf dieselbe Längeneinheit bezogen sind. Daher würde also, wenn man mehrere Längen eines Kabels, die alle dasselbe Dämpfungsmaß des Nebensprechens haben, aneinanderreihete, sich wieder dasselbe Maß für das Nebensprechen ergeben. Wir setzen dabei voraus, daß die gesamte Länge noch so gering ist, daß die Kapazität auch des langen Stückes wie in einem Punkte vereinigt angesehen werden kann.

Fig. 218.



Zur Nachbildung der Übertragung durch das Nebensprechen hat man die Anordnung Fig. 218 benutzt, in der  $C_1$  und  $C_2$  gleich den Kapazitäten der zu prüfenden Leitungsteile gemacht werden, die Kapazität  $k$  aber dem Dämpfungsmaß entsprechend bemessen wird. Als Vierpol hat eine derartige Anordnung die Gleichungen

$$\mathfrak{B}_a = \frac{k + C_2}{k} \mathfrak{B}_e + \frac{1}{i \omega k} \mathfrak{I}_e$$

$$\mathfrak{I}_a = \frac{k + C_1}{k} \mathfrak{I}_e + i \omega \left( C_1 + C_2 + \frac{C_1 C_2}{k} \right) \mathfrak{B}_e.$$

Man sieht hieraus, daß, wenn  $C_1$  und  $C_2$  die Leitungskapazitäten für eine bestimmte Länge sind,  $k$  für das Übersprechen gleich einem Viertel, für das Mitsprechen gleich der Hälfte der Kopplungskapazität für die gleiche Länge ist.

Der im Empfänger mit dem Scheinwiderstand  $\mathfrak{R}_e$  erzeugte Strom wird durch die Gleichung bestimmt

$$\mathfrak{I}_e = \frac{\mathfrak{B}_a}{\frac{k + C_2}{C_2} \mathfrak{R}_e + \frac{1}{i \omega k}}.$$

Wenn man die geprüfte Kabellänge und damit  $C_2$  und  $k$  auf das  $n$ -fache vergrößert, so wird

$$\mathfrak{I}'_e = \frac{\mathfrak{B}_a}{\frac{k + C_2}{C_2} \mathfrak{R}_e + \frac{1}{i n \omega k}}.$$

Der Strom im Empfänger hängt also von der Länge des geprüften Stückes ab. Wenn man bei der zur Prüfung verwendeten Eichleitung nach Art der Fig. 215 oder 218 die Querkapazitäten zwischen den Anfangs- und Endklemmen gleich denen der zu prüfenden Leitungen macht, so wird auch die Kapazität  $k$  gleich dem in Betracht kommenden Teile der Kopplungskapazität, also ergibt der Vergleich das richtige Dämpfungsmaß. Andererseits wird die Abhängigkeit des Stromes  $\mathfrak{I}_e$  von der Länge der Leitung geringer, wenn der Betrag von  $\omega k \mathfrak{R}_e$  klein gegen Eins gemacht wird.

Schaltet man Stücke verschiedenen starken Nebensprechens aneinander, so ist dies etwa gleichwertig einer Parallelschaltung mehrerer Anordnungen nach Fig. 218, derart, daß die Anfangs- und Endklemmen der einzelnen Systeme bezüglich miteinander parallel verbunden werden.

Man erhält so bei zwei Teilen einen Vierpol mit den Gleichungen

$$\mathfrak{B}_a = \frac{k + C_2 + k' + C_2'}{k + k'} \mathfrak{B}_e + \frac{1}{i\omega(k + k')} \mathfrak{B}_e$$

$$\mathfrak{B}_e = \frac{k + C_1 + k' + C_1'}{k + k'} \mathfrak{B}_e + i\omega \left( C_1 + C_1' + C_2 + C_2' + \frac{(C_1 + C_1')(C_2 + C_2')}{k + k'} \right) \mathfrak{B}_e.$$

Es handle sich beispielsweise um zwei Kabeladern von je  $0,09 \mu\text{F}$ , die ein Übersprechen vom Dämpfungsmaß 9 zeigen. Sie sollen über eine Schalteinrichtung geführt werden, die eine Kapazität von  $0,02 \mu\text{F}$  in der Schleife zeigt, und bei der das Maß des Übersprechens nur 6 oder 4,5 ist. Da in runden Zahlen

$$\frac{1}{2} e^9 = 4000, \quad \frac{1}{2} e^6 = 200, \quad \frac{1}{2} e^{4,5} = 45,$$

so ergibt sich für die Kabelleitungen  $k = 22,5 \cdot 10^{-12} \text{F}$ , es kommt also gegen die Kapazität der Schleifen nicht in Betracht. Für die Schalteinrichtung erhält man  $k' = 100 \cdot 10^{-12} \text{F}$  für  $b = 6$  und  $455 \cdot 10^{-12} \text{F}$  für  $b = 4,5$ .

Die miteinander vereinigten Systeme ergeben in den beiden Fällen die Dämpfungsfaktoren

$$\frac{0,09 + 0,02}{22,5 + 100} 10^6 \quad \text{und} \quad \frac{0,09 + 0,02}{22,5 + 455} 10^6$$

und daher die Dämpfungsmaße

$$7,37 \quad \text{und} \quad 6,15.$$

Da vorausgesetzt wird, daß  $\frac{C}{k} > \frac{C}{k'}$  ist, so ist das Dämpfungsmaß des vereinigten Systems stets größer als dasjenige des geringwertigsten Teiles.

Wäre  $C'$  nur  $0,002 \cdot 10^{-6} \text{F}$  und demnach  $k' = 45,5$  für  $b = 4,5$ , so ergäbe sich das Dämpfungsmaß 8,1. Kurze Längen mit schlechten Nebensprechwerten sind daher ohne große Wirkung.

Es soll mit dieser Feststellung nicht der Sorglosigkeit in betreff einzelner Teile einer Anlage das Wort geredet werden. Es dürfte vielmehr wichtig sein, festzustellen, daß es sich lohnt, die Hauptteile einer Anlage, z. B. die Kabel, bei denen die Mittel dazu gegeben sind, auf das für einen guten Betrieb erforderliche Maß zu bringen, auch wenn es zunächst an einzelnen Stellen, z. B. in Ämtern, nicht möglich ist, ebenso hohe Dämpfungszahlen zu erreichen.

Die große Bedeutung eines hohen Nebensprechmaßes für Leitungen mit mehreren Verstärkern geht aus einer kürzlich bekannt gewordenen überschläglichen Berechnung<sup>77)</sup> hervor. In den einzelnen Abschnitten zwischen den Verstärkern wird die Dämpfung der Leitungsteile durch die Verstärkung aufgehoben. Wenn für das Nebensprechen jeder Verstärkerlänge die Ziffer  $S$  gilt, so bieten sich den Nebensprechströmen von einem Sender zu einem daneben liegenden Empfänger so viele Wege vom Dämpfungsmaße  $S$ , wie es Leitungsabschnitte gibt, also  $n + 1$  Wege bei  $n$  Verstärkern. Bei der Verlängerung kurzer Leitungsstücke auf das mehrfache ändert sich, wie vorhin festgestellt wurde, das Dämpfungsmaß des Nebensprechens nicht, weil dabei zugleich der Wellenwiderstand des gleichwertigen Vierpols herabgesetzt wird. Der Wellenwiderstand einer Leitung mit mehreren Verstärkern ist dagegen unabhängig

von der Zahl der Abschnitte gleich dem Wellenwiderstand der am Sender und am Empfänger liegenden Leitungsabschnitte. Daher ergibt sich für Leitungen mit  $n$  Verstärkern für das Nebensprechen ein verminderter Dämpfungsfaktor, der im ungünstigsten Falle, wenn nämlich die über die einzelnen Abschnitte verlaufenden Ströme im Empfänger in gleicher Phase einlaufen, den Wert  $\frac{1}{2} \frac{e^S}{n+1}$  erhält. Das wirksame Nebensprechmaß wird dann  $S - \log \text{nat} (n+1)$ . Eine Leitung mit 6 Verstärkern wird also nur dann eine Nebensprechziffer 7 zeigen, wenn für die einzelnen Abschnitte die Ziffer 9 gilt.

Siebenter Abschnitt.

**Verfahren zur Verminderung der Dämpfung durch Erhöhung der Induktivität.**

§ 268. Es geht aus den Erörterungen über die Energieumsetzungen in der Leitung hervor, daß eine Leitung sich um so mehr der idealen, verlustlosen Leitung nähert, je größer das Verhältnis  $\omega L/R$  ist, wobei allerdings die in der Regel schwächere entgegengesetzte Wirkung infolge der Ableitung angemessen zu beachten ist. Für das Dämpfungsmaß wird diese Lage durch die Gl. (271) klar ausgedrückt. Heaviside hat auf den Nutzen, der durch Erhöhung der Induktivität zu erreichen ist, schon früh aufmerksam gemacht, als die allgemeine Auffassung die Induktivität in Fernsprechkreisen irr tümlicher Weise noch als schädlich betrachtete.

Unter den möglichen Anordnungen haben zwei Verfahren eine praktische Bedeutung erlangt, welche die Erhöhung der Induktivität auf zwei ganz verschiedenen Wegen erstreben; bei dem einen wird die Induktivität jeder Längeneinheit vergrößert, während bei dem anderen in eine Leitung gewöhnlicher Bauart Spulen mit einem vergleichsweise hohen Betrag von Induktivität eingeschaltet werden. Wir werden zunächst das erste Verfahren als das theoretisch einfachere besprechen.

§ 269. **Vergrößerung der Induktivität durch stetig verteiltes Eisen.** Seit etwa 20 Jahren hat man nach diesem Verfahren mit steigendem Erfolge Fernspreckseekabel gebaut, bei denen die Vergrößerung der Induktivität durch eine fortlaufende Bewicklung der Kupferleiter mit Eisen erzielt worden ist. Vorschläge in dieser Richtung sind schon früher gemacht worden; zu einer praktisch bedeutsamen Ausgestaltung ist diese Form der Kabel durch die Anregungen von Krarup<sup>78)</sup> gekommen.

In der Hauptsache ist die Theorie dieser Kabel sehr einfach; in § 116 ist für die Induktivität eines solchen Kabels eine Formel abgeleitet worden, die für die Längeneinheit der in der Praxis gebräuchlichen Schleife aus gleich starken Drähten die Form annimmt:

$$L = 4 \left( \log \frac{2d}{\varrho} + \frac{1}{4} + \mu \frac{\delta}{\varrho} \right) 10^{-4} \text{ H/km,}$$

wo  $2d$  den Achsenabstand der Drähte,  $\varrho$  ihren Halbmesser,  $\delta$  die Stärke der Eisenschicht bezeichnet.

Durch die Eisenschicht, gleichviel, ob sie von dem Kupferleiter isoliert ist oder nicht, wird der Weg der elektrischen Verschiebungslinien um die Dicke der Schicht vermindert; die Kapazität wächst demgemäß, und zwar hat man in den Kapazitätsformeln, so z. B. Gl. (83),  $\varrho + \delta$  an Stelle von  $\varrho$  zu setzen. Nach den praktischen Erfahrungen übertrifft die Zunahme der Induktivität bei weitem die Zunahme der Kapazität, und daher wäre die Theorie solcher Kabel mit diesen Feststellungen erledigt, wenn nicht Nebenerscheinungen in ihnen aufträten, die einen Teil der nützlichen Wirkung der vergrößerten Induktivität wieder aufheben.

Auf diese Vorgänge ist man zuerst durch die Messungen an den fertigen Kabeln aufmerksam geworden, deren Dämpfung in höherem Maße von der Frequenz abhängig war, als bei konstanten Werten der elektrischen Eigenschaften zu erwarten gewesen wäre. Es hat sich dabei ergeben, daß der wirksame Widerstand der Leiter sich mit der Periodenzahl stark veränderte. Die Ursachen sind zum Teil in den Wirbelströmen im Eisen, zum Teil in Hystereseverlusten, zum Teil in Wirbelströmen in benachbarten Leitern, z. B. dem Bleimantel zu suchen.

**§ 270. Kabel mit Bewicklungen aus dünnen Eisendrähten.** Krarup hat darauf hingewiesen, daß für Fernsprechkabel die Bewicklung mit dünnen Eisendrähten die günstigste ist. Man verwendet Drähte von 0,2 und 0,3 mm Durchmesser; die Verbesserungen, welche man nach und nach erreicht hat, betreffen neben der Technik des Bewickelns hauptsächlich die Verwendung besonderer Legierungen, die eine hohe Permeabilität und geringe Hysterese und elektrische Leitfähigkeit haben, um Verluste möglichst klein zu machen. Die in der erste Auflage dieses Buches wiedergegebene Theorie nach Larsen über den in den Drähten erzeugten magnetischen Fluß und über die Wirbelströme hat sich in der Praxis nicht völlig bewährt. Hinsichtlich des magnetischen Flusses nahm Larsen an, daß die magnetischen Linien außer dem magnetischen Widerstand im Eisen der in engen Spiralen gewundenen Drähte auch noch einen Widerstand im Luftzwischenraum zu überwinden hätten, indem jede an einer Stelle eines geschlossenen Weges einmal aus einer Spiralschleife in die benachbarte übertreten müßte. Nach der von Larsen angegebenen Formel hätte man mit einem Zuwachs des magnetischen Widerstandes um drei bis fünf Zehntel des reinen Widerstandes im Eisen zu rechnen.

Man hat aber, wie mir aus der Akt.-Ges. Felten und Guilleaume mitgeteilt wird, festgestellt, daß man die Induktivität einer Ader nach Krarup so zu berechnen hat, als wenn die magnetischen Linien auf dem ganzen Wege im Eisen verliefen; für  $\mu$  hat man den Wert einzusetzen, der sich für das Material in Form geschlossener Kreise wie bei Drahtkernen für Ringspulen ergibt, bei welcher Form der Luftwiderstand wegen des langen Eisenweges keine Rolle spielt.

Wenn wie in Gl. (149)  $\varrho$  den Halbmesser der Kupferleiter,  $2d$  ihren Abstand,  $\delta$  die Stärke des Bewicklungsdrahtes, alle in Zentimeter,  $\zeta$  die Zahl der Wicklungen auf 1 cm Länge in einem Leitungszweige,  $\mu$  die Permeabilität bezeichnen, so ist die Induktivität für 1 km Aderschleife

$$L = 4 \left( \log \frac{2d}{\varrho} + \frac{1}{4} + \mu \frac{4\pi\zeta\delta^2}{(2\varrho + \delta)} \right) 10^{-4} \text{ H. km} \dots \dots (321)$$

Die von Larsen aus dem Felde der Wechselströme berechnete Zunahme  $R_v$  des Leitungswiderstandes ist nur ein Teil der wirklich entstehenden. Ein anderer Teil rührt von der Hysterese her. Der soeben erwähnten Quelle verdanke ich folgende Angaben für die Berechnung des Widerstandszuwachses. Für eine festgesetzte effektive Stromstärke  $J$  in Ampere berechne man zunächst den Scheitelwert der magnetischen Induktion im Eisen. Er ist nach § 116 in absoluten Einheiten

$$|\mathfrak{B}| = \mu \frac{\sqrt{2}}{10} \frac{2J}{\varrho + \delta} 2$$

Für das zurzeit für solche Kabel verwendete Eisen ist mit  $\mu = 160$  zu rechnen. Man ist eifrig bemüht, Legierungen ausfindig zu machen, die eine höhere Anfangspermeabilität (§ 85) haben als Eisen.

Bei der so festgestellten Höhe der magnetischen Induktion ergeben sich bei einem Wechselstrom von  $\nu$  Perioden in der Sekunde durch Hysterese und Wirbelströme in jedem Kubikzentimeter Eisen Verluste im Betrage von

$$\mathbf{L}_v = \nu \xi \mathfrak{B}^\varepsilon + \nu^2 \eta \mathfrak{B}^2 \text{ Erg/sek,}$$

wenn  $\varepsilon = 2,7$ ,  $\xi = 0,25 \cdot 10^{-5}$  und für 0,2 mm starke Eisendrähte  $\eta = 0,8 \cdot 10^{-8}$ , für 0,3 mm starke Drähte  $\eta = 1,7 \cdot 10^{-8}$  gesetzt wird.

Der Verlustwiderstand für eine gegebene Länge ist gleich dem Verhältnis der darin verlorenen Leistung zum Quadrat der Stromstärke. Wenn also  $V$  das Volumen der Eisenbewicklung für 1 cm Hin- und Rückleitung bezeichnet (bei  $\delta = 0,3$  mm kommen etwa 29 Umwindungen auf 1 cm jedes Zweiges), so ist der Verlustwiderstand in absoluten Einheiten auf 1 cm Schleifenlänge  $V \mathbf{L}_v (J/10)^2$ ; daher erhält man

$$R_v = \frac{V \mathbf{L}_v}{J^2} 10^{-2} \text{ Ohm/km.}$$

Für das zweite Ostpreußenkabel, bei dem  $\varrho = 0,1$ ,  $\delta = 0,03$ ,  $V = 0,0296$  ist, erhält man für  $J = 0,5$  mA

$$\mathfrak{B} = 0,197, \quad \mathbf{L}_v = (2,1 + 42,1) 10^{-5}, \quad R_v = 0,524 \text{ Ohm/km.}$$

Dieser Verlustwiderstand gilt für die unarmierte Doppelader. Das fertige Kabel zeigte nach dem Ergebnis der Abnahmemessungen einen um etwa 1 Ohm/km höheren Verlustwiderstand; der neue Zuwachs ist auf Verluste im Bleimantel und der Armierung zurückzuführen. Da ein Weg zur Vorausberechnung dieser Verluste noch nicht gefunden ist, macht man dafür bei Kabeln verschiedener Bauart Zuschläge auf Grund von Erfahrungssätzen.

**§ 271. Leitungen mit stellenweise eingeschalteten Induktionsspulen (Pupinleitungen).** Heaviside, der, wie schon erwähnt, die Vermehrung der Induktivität als Mittel zur Verbesserung der Leitungen empfohlen hatte, hat als Mittel dazu die Einschaltung von Spulen in bestimmten Abständen angegeben. Von Vorschlägen, wie dies gemacht werden könnte, sind eine Zeitlang die von Silv. Thompson sehr beachtet gewesen, der die Spulen zur Ausgleichung der Kapazitätswirkungen parallel zwischen die Adern oder zwischen eine Ader und Erde legen wollte; indessen ist eine solche Konstruktion, soviel bekannt, niemals ausgeführt worden.

Mit der Lösung der Aufgabe trat im Jahre 1900 Pupin an die Öffentlichkeit<sup>79)</sup>; Campbell hat später Versuche veröffentlicht, nach denen er zur selben Zeit dasselbe Verfahren mit Erfolg angewandt hatte. Die Lösung, die Pupin gegeben hat, ist nicht nur theoretisch fast vollständig, sondern sie ist für die Anwendung von Anfang an auf eine sehr einfache und praktische Formel gebracht worden. In Deutschland bezeichnet man solche Leitungen als Pupinleitungen, und dies erscheint gerechtfertigt, obwohl nicht der allgemeine Gedanke der Einschaltung der Spulen, sondern wesentlich die Angabe, wie groß sie zu wählen und wo sie unterzubringen sind, von Pupin herrührt, der dadurch ihre Verwendung als erster ermöglicht hat. In den Ländern der amerikanischen Technik dagegen ist die Bezeichnung solcher Leitungen als belastete Leitungen gebräuchlich.

Es leuchtet ein, daß es nicht gleichgültig ist, wenn ein bestimmter Betrag an Induktivität auf der Leitung untergebracht werden soll, ob dies in wenigen großen Teilen, etwa gar nur einem einzigen, oder in vielen kleinen geschieht. Eine Leitung dieser Art wird mit einer gleichmäßigen Leitung, für welche allein die bisherigen Schlüsse über den Vorteil hoher Induktivität streng gelten, um so weniger übereinstimmen, je weiter die Spulen auseinanderliegen; andererseits ist es technisch und wirtschaftlich günstiger, wenige große, als viele kleine Spulen einzuschalten. Man bedarf daher sowohl von dem Gesichtspunkte aus, daß man die erzielbare Dämpfung richtig berechnen will, als von dem anderen aus, daß man die Zahl der Spulen nicht über das notwendige Maß vermehren will, einer theoretischen Untersuchung, durch die die Ergebnisse der Theorie gleichmäßiger Leitungen auf zusammengesetzte Leitungen dieser Art übertragen werden. Diese Theorie in den wesentlichen Zügen gegeben zu haben, ist das Verdienst Pupins.

### § 272. Die Wellenausbreitung auf mit Spulen belasteten Leitungen.

Daß Pupin, obwohl der nützliche Einfluß der Induktivität auf die Minderung der Dämpfung schon anerkannt war, mit seiner Erfindung noch einen großen Schritt vorwärts tun konnte, erklärt sich daraus, daß er die Aufgabe aus einer rein algebraischen Betrachtungsweise in physikalische Überlegungen umstellte, daß er nämlich die Vorgänge vom Standpunkt der Wellenausbreitung betrachtete. Die Unstetigkeiten, welche die Spulen in einer Leitung hervorbrachten, deren in dieser Hinsicht wesentliche Eigenschaft ihre Kapazität ist, verglich er in dem bekannten Beispiele mit den Unstetigkeiten, welche eine Belastung mit Kugeln an einer gespannten Saite erzeugte, und indem er die Bedingungen für eine Wellenübertragung auf der belasteten Saite auf die Wellenvorgänge in einem belasteten Leiter übertrug, kam er zu der bekannten, hier zu erörternden Regel. Man wird sehen, daß diese Regel sich nicht in erster Linie auf die Frage der Herabsetzung des Dämpfungsmaßes bezieht, sondern auf eine passende Bemessung des Winkelmaßes. In der Tat gilt die von Pupin nebenbei gefolgerte Bemessung des Dämpfungsmaßes nur angenähert; sie wurde von ihm nach einiger Zeit ergänzt und später richtiggestellt. Darauf werden wir noch zurückkommen.

Die einfache algebraische Formulierung gelang Pupin durch den Vergleich der mit Spulen belasteten Leitung und der gleichwertigen Leitung mit gleichmäßiger Verteilung. Man versteht darunter diejenige, welche in einer

Länge gleich dem Spulenabstand ebensoviel Widerstand, Induktivität, Ableitung und Kapazität enthält, wie ein Element der belasteten Leitung einschließlich der Spulen.

Die Pupinsche Untersuchung betrifft die Feststellung, unter welcher Bedingung die Fortpflanzungskonstanten der miteinander verglichenen Leitungen in einem vorgeschriebenen Grade übereinstimmen.

Die Fortpflanzungskonstante für die mit Spulen belastete Leitung ist nach der ersten Gleichung unter (300) durch die Eigenschaften der Teile bestimmt, in der Form

$$\cos \vartheta s = \cos \gamma s + \frac{\mathfrak{B}}{2 \mathfrak{Z}} \sin \gamma s.$$

$\gamma$  und  $\mathfrak{Z}$  beziehen sich auf die Längeneinheit der unbelasteten Leitung,  $\mathfrak{B}$  ist der Scheinwiderstand einer Spule.

Aus dieser Gleichung folgt

$$4 \sin^2 \frac{\vartheta s}{2} = 4 \sin^2 \frac{\gamma s}{2} + \frac{\mathfrak{B}}{\mathfrak{Z}} \sin \gamma s \dots \dots \dots (322)$$

Man vereinfacht diese Beziehungen sehr, wenn man, mit Bezug auf die Eigenschaften der Leitung, den Spulenabstand so klein wählt, daß man  $\gamma s$  an Stelle von  $\sin \gamma s$  setzen darf; dann wird

$$4 \sin^2 \frac{\vartheta s}{2} = (\gamma s^2) + \gamma s \frac{\mathfrak{B}}{\mathfrak{Z}} = (sG + i\omega sK)(sR + i\omega sL + \mathfrak{B}).$$

Der Ausdruck auf der rechten Seite ist gebildet, wie das Quadrat der Fortpflanzungskonstante einer Leitung mit gleichmäßig verteilten Eigenschaften  $G_1, K_1, R_1, L_1$ , und zwar sind diese für die Längeneinheit, wenn  $\mathfrak{B} = R_s + i\omega L_s$  gesetzt wird,

$$G_1 = G, \quad K_1 = K, \quad R_1 = R + \frac{R_s}{s}, \quad L_1 = L + \frac{L_s}{s} \dots \dots (323)$$

Dies sind die Eigenschaften der vorhin bezeichneten gleichmäßigen Leitung, welche der mit Spulen belasteten gleichwertig ist. Eine solche Leitung besitzt die Fortpflanzungskonstante für 1 km Leitung,

$$\gamma_1 = \sqrt{(G_1 + i\omega K_1)(R_1 + i\omega L_1)} \dots \dots \dots (324)$$

Wir erhalten also zunächst die Beziehung

$$4 \sin^2 \frac{\vartheta s}{2} = (\gamma_1 s^2).$$

Nun werde mit Bezug auf die Eigenschaften dieser gedachten Leitung der Spulenabstand so klein gewählt, daß man innerhalb der gesetzten Grenzen

$\sin \frac{\gamma_1 s}{2}$  statt  $\frac{\gamma_1 s}{2}$  setzen darf. Dann ist in diesen Grenzen

$$\sin \frac{\vartheta s}{2} = \sin \frac{\gamma_1 s}{2}$$

und in demselben Maße stimmt  $\vartheta$  mit  $\gamma_1$  überein.

Dadurch ergibt sich die Pupinsche Regel in der ersten Form: Eine mit Spulen belastete Leitung stimmt mit der gleichwertigen Leitung mit gleichmäßig verteilten elektrischen Eigenschaften in dem Maße überein, wie

für die nach Gl. (323) und (324) definierte Größe  $\gamma_1$  die Werte  $\frac{\gamma_1 s}{2}$  und  $\sin \frac{\gamma_1 s}{2}$  übereinstimmen.

Die Vergleichung würde nach dieser Angabe etwas umständlich sein, und daher wird eine andere Form der Regel, wie folgt, abgeleitet:

Die Größe  $\gamma_1$  zerfällt nach (260) in

$$\gamma_1 = i\alpha_1 + \beta_1.$$

Bei der vorausgesetzten hohen Induktivität ist nach (261)  $\alpha_1$  sehr viel größer als  $\beta_1$ . Man kann also die Vergleichung der Größen  $\frac{\gamma_1 s}{2}$  und  $\sin \frac{\gamma_1 s}{2}$  ersetzen durch die von  $\frac{\alpha_1 s}{2}$  und  $\sin \frac{\alpha_1 s}{2}$ .

Die aus dieser Überlegung folgende Hauptregel: Eine mit Spulen belastete Leitung stimmt mit der gleichwertigen Leitung mit gleichmäßig verteilten Eigenschaften in demselben Maße überein, wie der Betrag des halben Winkelmaßes für eine dem Spulenabstand gleiche Länge der gleichmäßigen Leitung mit dem Sinus dieses Betrages, enthält vom Dämpfungsmaß nichts mehr; es wird nur vorausgesetzt, daß es gegen das Winkelmaß klein sei. Man setzt aber in der Regel stillschweigend voraus, daß es nach den Eigenschaften der gleichwertigen Leitung zutreffend berechnet werden könne.

Da nach Gl. (271 a) für eine Leitung mit hoher Induktivität

$$\alpha = \omega \sqrt{K_1 L_1}$$

ist, so ist die Probe leicht anzustellen, sobald die drei Größen  $\omega$ ,  $K_1$ ,  $L_1$  bekannt sind.

Der praktische Weg, diese Regel anzuwenden, geht aus von der Forderung, die Dämpfungskonstante einer Leitung mit gegebenen Eigenschaften durch Vergrößerung der Induktivität auf einen vorgeschriebenen Betrag zu bringen. Wenn für die dabei zu verwendenden Spulen das Verhältnis der Induktivität  $L_s$  zum wirksamen Widerstand, also die Zeitkonstante

$$\tau = \frac{L_s}{R_s}$$

bekannt ist, und wenn man nach der Formel (271) für eine gleichmäßige Leitung rechnet, so ergibt sich aus der Gleichung

$$2\beta = \left( R + \frac{L_s}{s\tau} \right) \sqrt{\frac{sK}{sL + L_s}} + G \sqrt{\frac{sL + L_s}{sK}}$$

die unbekannte Größe der Induktivität  $L_s$ . Damit sind aber die unter (323) bezeichneten Werte für die gleichwertige Leitung festgestellt. Es kommt jetzt darauf an, den Spulenabstand  $s$  so zu bemessen, daß

$$\frac{1}{2} \omega \sqrt{K_1 L_1} s = (1 + \delta) \sin \frac{\omega \sqrt{K_1 L_1} s}{2} \dots \dots \dots (325)$$

ist, wobei  $\delta$  eine vorgeschriebene Grenze des Unterschiedes bezeichnet. Der Unterschied zwischen einem Bogen und einem Sinus kann auch ohne Beziehung zur vorliegenden Aufgabe festgestellt werden; für ein bestimmtes  $\delta$

folgt also, daß  $\frac{1}{2} \omega \sqrt{K_1 L_1} s$  ein gewisses Bogenmaß nicht überschreiten darf. Setzt man z. B.  $\delta = 0,05$ , so muß  $\frac{1}{2} \omega \sqrt{K_1 L_1} s \leq 31^\circ 40'$  sein.

Da  $K_1$  und  $L_1$  als bekannt vorausgesetzt werden, so wäre der zulässige Spulenabstand  $s$  bestimmt, wenn  $\omega$  bekannt wäre. An dieser Stelle stockt die Anwendung der Regel auf die telephonische Übertragung, es muß durch praktische Versuche festgestellt werden, welcher Wert für  $\omega$  zu setzen ist.

In Wirklichkeit entscheiden die Versuche gleichzeitig über die Frage, welcher Unterschied  $\delta$  zulässig ist.

Ehe wir das Ergebnis der Versuche besprechen, wollen wir noch einige andere Formen erwähnen, in denen die Pupinsche Regel ausgesprochen wurde.

Zwei aufeinanderfolgende Spulen haben einen Winkelabstand  $\alpha_1 s$ . Daher kommen auf eine Wellenlänge  $n = \frac{2\pi}{\alpha_1 s}$  Spulen. Es stimmt also die Pupinleitung mit der gleichwertigen Leitung mit gleichmäßiger Verteilung in dem Maße überein, wie  $\frac{\pi}{n}$  mit  $\sin \frac{\pi}{n}$ .

Für die Wellenlänge auf der gleichwertigen Leitung ergibt sich der Wert

$$\lambda_1 = \frac{2\pi}{\alpha_1} = \frac{2\pi}{\omega \sqrt{K_1 L_1}}.$$

In der Zeit einer Periode vom Betrage  $2\pi/\omega$  legt die Welle den Weg  $\lambda_1$  zurück, also ist ihre Geschwindigkeit  $v = \frac{1}{\sqrt{K_1 L_1}}$ . Läuft eine Welle gleicher Geschwindigkeit über die belastete Leitung, so trifft sie in der Sekunde  $v/s$  Spulen. Es wird für eine gute Übertragung eine gewisse Mindestzahl  $z$  gefordert, und dies führt zu einer Formel  $z \sqrt{K_1 L_1} s \leq 1$ .

Endlich hat die Pupinleitung nach § 250 wie andere Spulenleitungen eine Grenzfrequenz  $\omega_0$ , so daß sie Schwingungen mit höherer Frequenz nicht durchläßt. Die Grenzfrequenz muß also alle für die Telephonie wichtigen Frequenzen einschließen, und dies ergibt eine Formel  $\omega_0 \sqrt{K_1 L_1} s \leq 2$ . Diese Beziehung auf die Grenzfrequenz ist die gebräuchlichste geworden.

Solange nicht die besonderen Erfahrungen des Verstärkerbetriebes hinzugekommen waren, wählte man für  $\omega_0$  Werte zwischen 14 000 und 16 000, wobei man sich im Gebiete der amerikanischen Praxis mehr an der unteren, in Deutschland an der oberen Grenze hielt. Diese Zahlen bedeuten u. a., daß die Stirn einer die belastete Leitung durchlaufenden Welle eine Geschwindigkeit von 7000 bis 8000 Spulenabständen in der Sekunde habe.

Sprechversuche auf sehr langen Leitungen mit Verstärkern haben die Western El. Co. dazu geführt, die Grenzfrequenz vorkommenfalls erheblich zu vergrößern, und zwar auf  $\omega_0 \geq 36 000$ . Die Wellenstirn durchläuft dann in der Sekunde 18 000 Spulen. Durch die erhöhte Geschwindigkeit werden die Einschaltvorgänge abgekürzt, welche, wie in § 229 erwähnt, die Verzerrung der Sprache sehr vergrößern. Ferner ist die hohe Geschwindigkeit günstig für die Unschädlichmachung der Echowirkungen, die aus nicht vollkommener Abgleichung der Verstärker am Ende langer Leitungen entstehen können. Treffen die reflektierten Ströme innerhalb einer bestimmten kleinen Zeit beim Sprechenden ein, so schaden sie ebensowenig, wie die während des Sprechens

das Telephon des Sprechenden durchfließenden Ströme. Die Frage, wieweit diese Maßregel, die in langen Leitungen wegen des vergrößerten Dämpfungsmaßes die Zahl der Verstärker erheblich vermehrt, notwendig ist, ist zurzeit noch nicht geklärt.

**§ 273. Das Dämpfungsmaß einer mit Spulen belasteten Leitung.** Bei einer nach der Pupinschen Regel gebauten Leitung stimmt der Betrag des halben Winkelmaßes für einen Spulenabstand mit dem Sinus dieses Betrages in einem bestimmten Maße überein. Man folgert daraus, daß das Dämpfungsmaß gegen das Winkelmaß klein ist, gewöhnlich, daß das Dämpfungsmaß der belasteten Leitung mit dem der gleichwertigen Leitung mit gleichmäßiger Verteilung in dem gleichen Maße übereinstimme. Man benutzt daher zur Berechnung der Dämpfung der belasteten Leitung in der Regel die für gleichmäßige Leitungen hoher Induktivität übliche Formel (271). Für stärker und stärker belastete Leitungen zeigte Pupin<sup>80)</sup> in der schon in § 246 erwähnten Abhandlung, daß es eine Grenze gibt, über die hinaus man die Leitung bei einer bestimmten Frequenz nicht belasten darf, ohne daß eine solche überlastete Leitung gegen Schwingungen dieser Frequenz undurchlässig wird. Die Ergebnisse wurden später auf das Verhalten einer in bestimmtem Grade belasteten Leitung bei verschiedenen Frequenzen übertragen und ergeben entsprechend der Grenzbelastung bei gegebener Frequenz eine Grenzfrequenz bei gegebener Belastung.

Gegenüber der so aufgestellten Formel, welche dem Dämpfungsmaß einer Pupinleitung dieselbe Frequenzabhängigkeit gibt, wie nach § 250 dem einer Spulenleitung, hat Pleijel<sup>81)</sup> geltend gemacht, daß ihre Ergebnisse nicht mit dem durch Messungen sich tatsächlich ergebenden Verlauf übereinstimmen; er hat den Unterschied darauf zurückgeführt, daß die Verteilung der Kapazität und Ableitung längs der Leitungsstücke unberücksichtigt geblieben sei. In der Tat gehen die Annahmen, welche über die Größe des Winkelmaßes der unbelasteten Leitung gemacht werden, und aus denen sich die durch Gl. (322) dargestellten Eigenschaften der gleichwertigen Leitung ergeben, darauf hinaus, daß die Kapazität des Leitungsstückes wie in einem Kondensator zusammengefaßt angesehen werden könne. In den Rechnungen bedeutet dies, daß man in der Reihenentwicklung für eine Sinusfunktion nur das erste Glied in Betracht zieht. Pleijel kommt bei Berücksichtigung mehrerer Glieder der Reihenentwicklung zu einer anderen Formel für das Dämpfungsmaß. Sie läßt sich aus unseren Formeln auf folgende einfache Weise ableiten.

Wir gehen aus von Gl. (322) und formen sie gemäß den Entwicklungen in § 249, aber für eine Leitung mit verteilter Kapazität um.

Aus

$$\begin{aligned} 4 \mathfrak{S} \sin^2 \frac{\vartheta s}{2} &= 4 \mathfrak{S} \sin^2 \frac{\gamma s}{2} + \frac{\mathfrak{B}}{\mathfrak{Z}} \mathfrak{S} \sin \gamma s \\ &= e^{\gamma s} + e^{-\gamma s} - 2 + \frac{\mathfrak{B}}{\mathfrak{Z}} \frac{e^{\gamma s} - e^{-\gamma s}}{2} \end{aligned}$$

erhält man folgende Reihenentwicklung:

$$4 \mathfrak{S} \sin^2 \frac{\vartheta s}{2} = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{2(\gamma s)^{2(\nu-1)}}{(2\nu)!} \left( \gamma^2 s^2 - \nu \frac{\mathfrak{B}}{\mathfrak{Z}} \gamma s \right).$$

Nach den Bezeichnungen des § 272 für die Eigenschaften der Leitungen und Spulen ist

$$\begin{aligned}\gamma^2 s^2 &= s(G + i\omega K)s(R + i\omega L) \\ \frac{\mathfrak{B}\gamma s}{3} &= s(G + i\omega K)(R_s + i\omega L_s).\end{aligned}$$

Daher wird

$$\left. \begin{aligned} &4 \mathfrak{S} \operatorname{in}^2 \frac{\partial s}{2} \\ &= \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{2(\gamma s)^{2(\nu-1)}}{(2\nu)!} s(G + i\omega K)(s(R + i\omega L) + \nu(R_s + i\omega L_s)) \\ &= s(G + i\omega K)(s(R + i\omega L) + (R_s + i\omega L_s)) \\ &+ \frac{2\gamma^2 s^2}{4!} s(G + i\omega K)(s(R + i\omega L) + 2(R_s + i\omega L_s)) \\ &+ \frac{2\gamma^6 s^6}{6!} s(G + i\omega K)(s(R + i\omega L) + 3(R_s + i\omega L_s)) + \dots \end{aligned} \right\} (326)$$

Man sieht, daß der erste Posten der Reihe das Quadrat des bisher allein in Rechnung gezogenen Fortpflanzungsmaßes  $\gamma_1 s$  der gleichwertigen Leitung ist. Wir nennen dieses einstweilen  $\gamma_1 s = i a_0 + b_0$ . Die folgenden Posten sind Korrektionsglieder, also genügt eine ungefähre Schätzung ihres Wertes.  $\gamma s$  bezieht sich auf eine Leitung ohne merkliche Induktivität, daher ist  $\gamma^2 s^2 = i\omega K R s^2$  zu setzen. Die anderen Faktoren in jedem Posten der Reihe haben auch die Gestalt von Fortpflanzungskonstanten, aber für eine Belastung mit dem doppelten, dreifachen Maß der Spule. Wir brechen die Reihe hinter dem zweiten Gliede ab; die Fortpflanzungskonstante für ein Element, das bei im wesentlichen gleichem Widerstande die doppelte Induktivität hat, ist als  $i a_0 \sqrt{2} + \frac{b_0}{\sqrt{2}}$  anzusetzen, nach Maßgabe der für eine Leitung hoher Induktivität geltenden Vereinfachungen nach Gl. (271). Es wäre leicht, auch die Ableitung zu berücksichtigen, ebenso die Verdopplung von  $R_s$ , indessen sind dies Korrekturen zweiter Ordnung. Wir erhalten so

$$4 \mathfrak{S} \operatorname{in}^2 \frac{\partial s}{2} = (i a_0 + b_0)^2 \left( 1 + \frac{i\omega K R s^2 (2 i a_0 + b_0)^2}{4! (i a_0 + b_0)^2} \right).$$

Wenn man berücksichtigt, daß  $b_0^2$  klein gegen  $a_0^2$  ist, so erhält man

$$2 \mathfrak{S} \operatorname{in} \frac{\partial s}{2} = i a_0 + b_0 - a_0 \frac{\omega K R}{12}.$$

Führt man die Werte ein

$$a_0 = \omega \sqrt{s K (s L + I_s)}, \quad b_0 = \frac{s R + R_s}{2} \sqrt{\frac{s K}{s L + I_s}}$$

und ferner die Grenzfrequenz

$$\omega_0 = \frac{2}{\sqrt{s K (s L + I_s)}},$$

so ergibt sich

$$2 \mathfrak{S} \operatorname{in} \frac{\partial s}{2} = i 2 \frac{\omega}{\omega_0} + b_0 \left[ 1 - \frac{2}{3} \left( \frac{\omega}{\omega_0} \right)^2 \frac{s R}{s R + R_s} \right].$$

Nach den Ausführungen in § 249 ergibt sich daraus für die Abhängigkeit des Dämpfungsmaßes einer Pupinleitung von der Frequenz die Gleichung

$$b = b_0 \frac{1 - \frac{2}{3} w^2 \frac{s R}{s R + R_s}}{\sqrt{1 - w^2}} \dots \dots \dots (327)$$

in der  $w = \frac{\omega}{\omega_0}$  das Frequenzverhältnis bezeichnet. Solange dies klein ist, stimmt  $b$  nahezu mit  $b_0$  überein; nähert es sich dem Werte Eins, so hält der im Zähler stehende Posten das Anwachsen von  $b$ ,  $b_0$ , verglichen mit der Lage bei einem Kettenleiter, etwas hin; bei großer Annäherung von  $w$  an Eins zeigt die Pupinleitung dasselbe Verhalten wie ein Kettenleiter.

Es ist noch darauf hinzuweisen, daß  $\frac{R_s}{L_s}$  sowohl mit der Frequenz als auch mit der Stromstärke wächst; dadurch ergibt sich eine praktisch bedeutsame Vergrößerung der Veränderlichkeit von  $\beta$ .

**§ 274. Die Bedeutung der Ableitung für belastete Leitungen.** Die Formel (271) für die Dämpfungskonstante einer gleichmäßigen Leitung mit hoher Induktivität läßt erkennen, daß die Induktivität den vom Widerstand herrührenden Posten drückt, dagegen den von der Ableitung herrührenden hebt. Besteht also die Möglichkeit, die Induktivität zu vergrößern, so gibt es wegen der Ableitung eine Grenze<sup>82)</sup>, jenseits welcher eine Erhöhung der Induktivität schädlich wird. Für die einer belasteten Leitung gleichwertige Leitung mit gleichmäßiger Verteilung ist

$$2 \beta s = (s R + R_s) \sqrt{\frac{s K}{s L + L_s}} + G \sqrt{\frac{s L + L_s}{s K}} \dots \dots (328)$$

$R_s$  ist  $L_s$  proportional; nennen wir die Zeitkonstante der Spulen

$$\frac{L}{R_s} = \tau,$$

so ergibt sich folgende Bestimmung für die Belastung, welche das geringste Dämpfungsmaß hervorbringt:

$$L_0 = s \begin{pmatrix} R - \frac{L}{\tau} & -L \\ \frac{1}{\tau} + K & G \end{pmatrix} \dots \dots \dots (329)$$

Da der Wellenwiderstand der gleichwertigen Leitung gleich  $\sqrt{(s L + L_s) s K}$  ist, so ergibt sich der günstigste Wellenwiderstand

$$Z_0 = \sqrt{\frac{R - \frac{L}{\tau}}{G + \frac{K}{\tau}}} \dots \dots \dots (330)$$

Daher ist auch

$$L_0 = s (K Z_0^2 - L) \dots \dots \dots (331)$$

Der günstige Wert der Dämpfungskonstante wird

$$\beta_0 = \sqrt{\left(R - \frac{L}{\tau}\right)\left(G + \frac{K}{\tau}\right)} \dots \dots \dots (332)$$

Aus der allgemeinen Formel für den Spulenabstand ergibt sich

$$2 = \omega_0 \sqrt{K_1 L_1} s = \omega_0 K_1 s \sqrt{\frac{L_1}{K_1}},$$

daher ist der Spulenabstand für die Belastung der kleinsten Dämpfung

$$s = \frac{2}{\omega_0 K Z_0} \dots \dots \dots (333)$$

Wir sehen bei der folgenden Überlegung zur Vereinfachung von der natürlichen Induktivität  $L$  der Leitung ab. Man kann Gl. (332) schreiben

$$s \beta_0 = \frac{1}{2} \frac{s R}{Z_0} + \frac{s}{2} \left(G + \frac{K}{\tau}\right) Z_0 = \frac{s R + \frac{s K Z_0^2}{\tau}}{2 Z_0} + \frac{1}{2} s G Z_0.$$

Diese Formel stimmt in Anbetracht der Gl. (330) und (331) mit der allgemeinen Gl. (328) überein.

Vermindert man die Belastung unter das Maß der günstigsten, so daß der Wellenwiderstand  $Z = a Z_0$  wird, so wird das Dämpfungsmaß den Wert erhalten

$$s \beta = \frac{s R + \frac{s K}{\tau} a^2 Z_0^2}{2 a Z_0} + \frac{1}{2} s G a Z_0.$$

Man erhält dann gemäß Gl. (331)

$$\beta_0 = \frac{R + a^2 Z_0^2 \left(G + \frac{K}{\tau}\right)}{a \left(R + Z_0^2 \left(G + \frac{K}{\tau}\right)\right)} = \frac{1 + a^2}{2 a} \dots \dots \dots (334)$$

Wählt man  $a$  zu  $\frac{4}{5}$  und zu 1, so ändert sich dies Verhältnis nur von  $\frac{41}{40}$  auf 1. Es läßt sich also trotz einer erheblichen Herabsetzung der Belastung, nämlich auf  $a^2:1$ , nahezu dieselbe Dämpfungskonstante erreichen, wie bei der zum Minimum führenden Belastung. Dies ist von wirtschaftlicher Bedeutung, da der Spulenabstand bei gegebener Kapazität dem erreichten Wert des Wellenwiderstandes umgekehrt proportional ist, man also mit weniger Spulen bei derselben Grenzfrequenz annähernd dasselbe Dämpfungsmaß erreicht. Bei Leitungen, deren Ableitung sich ändert oder nicht sicher vorauszusehen ist, wählt man die Belastung zweckmäßig noch unterhalb der für die größte erwartete Ableitung zulässigen. Andererseits wird man gerade bei belasteten Leitungen mit der Auswahl des Dielektrikums vorsichtig<sup>83)</sup> sein und ein solches wählen, das unter den obwaltenden Temperaturverhältnissen eine möglichst geringe Ableitung, genauer einen kleinen Wert des Verhältnisses  $G/K$  besitzt. Dies führte zur Wahl der Balata an Stelle der Guttapercha für Fernsprechkabel. Die Ableitung verliert an Bedeutung, wenn, wie in den neuen Überlandkabeln, Leiter geringen Querschnitts, dazu bei geringer Belastung, verwendet werden.

Die bisherigen Herleitungen setzen für das Dämpfungsmaß die Formel für gleichmäßige Leitungen voraus. Für mit Spulen belastete Leitungen unterscheidet sich der auf den Widerstand bezügliche Teil nach Gl. (326); indessen ändert dies an der Hauptfolgerung nichts, da die Abweichungen nur die Bedeutungen von Korrektionsgliedern haben.

Für die Belastung von Vierersystemen hat man die Überlegung über eine geeignete Größe einer Unterbelastung der Reihe nach erst auf die Stammleitungen, dann auf die Viererleitungen anzuwenden, wobei zu beachten ist, daß eine folgende Form der Belastung die Voraussetzungen der vorhergehenden etwas verändert, so daß man schrittweise zur geeigneten Form der Gesamtbelastung kommt.

**§ 275. Nachbildung des Scheinwiderstandes einer belasteten Leitung.**

Wenn eine durch Spulen belastete Leitung über Zweirohr-Zwischenverstärker geführt werden soll, so ist es erforderlich, um Rückkopplungen zwischen den Verstärkern für beide Richtungen zu vermeiden, den Scheinwiderstand der Leitung durch eine künstliche Leitung nachzubilden. Diese Aufgabe hat zuerst Hoyt<sup>84)</sup> gelöst; später sind zum Teil einfachere Mittel gefunden worden, über die noch gesprochen werden wird.

Hoyt geht aus von der an zweiter Stelle unter (300) gegebenen Formel für den Wellenwiderstand einer solchen Leitung, die mit einer halben Spule beginnt, nämlich

$$\mathfrak{B} = \sqrt{\mathfrak{Z}^2 + \mathfrak{W} \mathfrak{Z} \frac{\mathfrak{Cof} \gamma s}{\mathfrak{Sin} \gamma s} + \frac{\mathfrak{W}^2}{4}}$$

Die Formel läßt sich für den praktischen Zweck sehr vereinfachen, zunächst weil man gemäß den tatsächlichen Verhältnissen für einen Spulenabstand ohne merklichen Fehler  $\mathfrak{Cof} \gamma s = 1$  und  $\mathfrak{Sin} \gamma s = \gamma s$  setzen kann, ferner, indem man, wie es in den Erörterungen über Kettenleiter mehrfach geschehen ist, die reellen Widerstandskomponenten, wo sie als Summanden stehen, vernachlässigt. Sieht man von der natürlichen Induktivität der Leitung ab, so ist zu setzen

$$\mathfrak{Z} = \frac{R}{i \omega K}, \quad \mathfrak{W} = i \omega L_s, \quad \mathfrak{Z} \frac{\mathfrak{Cof} \gamma s}{\mathfrak{Sin} \gamma s} = \frac{\mathfrak{Z}}{\gamma s} = \frac{1}{i \omega K s}$$

Man erhält dann

$$\mathfrak{B}^2 = \frac{L_s}{s K} - \omega^2 \frac{L_s^2}{4}$$

Führt man wieder das Frequenzverhältnis  $w = \frac{\omega}{\omega_0}$  durch die Gleichung ein

$$\omega_0 \sqrt{s K L_s} = 2,$$

so ergibt sich

$$\mathfrak{B} = \sqrt{\frac{L_s}{s K}} \sqrt{1 - w^2} \dots \dots \dots (335)$$

In Wirklichkeit beginnt eine mit Spulen belastete Leitung mit einem Leitungsstück, das je nach den örtlichen Verhältnissen bis zu einem ganzen Spulenabstand lang sein kann, es schließt dann mit einer vollen Spule an die nächsten Stücke an. Wir setzen voraus, daß die gesamte nachzubildende

belastete Leitung so lang oder am fernen Ende so belastet ist, daß ihr Scheinwiderstand gleich dem Wellenwiderstand ist. Nennen wir Spannung und Strom in der Mitte der ersten halben Spule  $\mathfrak{B}_1$  und  $\mathfrak{I}_1$ , an ihrem Anfang  $\mathfrak{B}_2$  und  $\mathfrak{I}_2$  und am Anfang des ersten Stückes, dessen Länge  $x$  sei,  $\mathfrak{B}_a$  und  $\mathfrak{I}_a$ , so gelten die Gleichungen

$$\begin{aligned} \mathfrak{B}_1 &= \mathfrak{P} \mathfrak{I}_1, & \mathfrak{B}_2 &= \left( \mathfrak{P} + \frac{\mathfrak{W}}{2} \right) \mathfrak{I}_1, & \mathfrak{I}_2 &= \mathfrak{I}_1 \\ \mathfrak{B}_a &= \mathfrak{B}_2 \operatorname{Cof} \gamma x + \mathfrak{Z} \mathfrak{I}_2 \operatorname{Sin} \gamma x \\ \mathfrak{I}_a &= \mathfrak{I}_2 \operatorname{Cof} \gamma x + \frac{\mathfrak{B}_2}{\mathfrak{Z}} \operatorname{Sin} \gamma x. \end{aligned}$$

Dann ist der nachzubildende Scheinwiderstand

$$\mathfrak{U} = \frac{\operatorname{Cof} \gamma x \left( \mathfrak{P} + \frac{\mathfrak{W}}{2} \right) + \mathfrak{Z} \operatorname{Sin} \gamma x}{\operatorname{Cof} \gamma x + \left( \mathfrak{P} + \frac{\mathfrak{W}}{2} \right) \frac{\operatorname{Sin} \gamma x}{\mathfrak{Z}}}.$$

Die für die Länge  $s$  zulässigen Vereinfachungen gelten auch für die Länge  $x$ , daher ist

$$\mathfrak{U} = \frac{\sqrt{\frac{L_s}{sK}} \sqrt{1-w^2} + i \frac{\omega L_s}{2}}{1 + \left( \sqrt{\frac{L_s}{sK}} (1-w^2) + i \frac{\omega L_s}{2} \right) i \omega K x}$$

Indem man auch hier  $\omega$  durch das Frequenzverhältnis ausdrückt, erhält man

$$\mathfrak{U} = \sqrt{\frac{L_s}{sK}} \frac{\sqrt{1-w^2} + iw}{1 - 2w^2 \frac{x}{s} + i \sqrt{1-w^2} 2w \frac{x}{s}}.$$

Trennt man den reellen Bestandteil vom imaginären, so ergibt sich

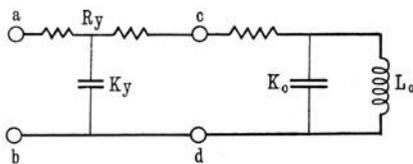
$$\mathfrak{U} = \sqrt{\frac{L_s}{sK}} \left( \frac{\sqrt{1-w^2}}{1 - 4w^2 \frac{x}{s} \left(1 - \frac{x}{s}\right)} + iw \frac{1 - 2 \frac{x}{s}}{1 - 4w^2 \frac{x}{s} \left(1 - \frac{x}{s}\right)} \right). \quad (336)$$

Dies führt in der Lösung von Hoyt zu folgender Nachbildung (Fig. 219).

Der reelle Posten in den Klammern

weicht für  $\frac{x}{s} = 0,2$  in den Grenzen von  $w = 0$  bis  $w = 0,85$ , wie man sich leicht überzeugen kann, nur wenig von Eins ab. Führt man für den komplexen Teil von  $\mathfrak{U}$  wieder  $\omega$  statt  $w$  ein, so erhält man den Wert

Fig. 219.



$$i \frac{\omega L_s}{2} \frac{1 - 2 \frac{x}{s}}{1 - \omega^2 s K L_s \frac{x}{s} \left(1 - \frac{x}{s}\right)}.$$

Diesen Scheinwiderstand hat ein Leiter, in dem eine Spule geringen Verlustwinkels mit der Induktivität

$$L_0 = \frac{L_s}{2} \left( 1 - 2 \frac{x}{s} \right)$$

und ein Kondensator mit der Kapazität

$$K_0 = K x \frac{1 - \frac{x}{s}}{1 - \frac{2x}{s}}$$

parallel geschaltet sind.

Wenn also die belastete Leitung gerade mit einer Länge von 0,2 des Spulenabstandes bis zur ersten Spule begänne, so könnte man ihren Scheinwiderstand für den größten Teil des Frequenzbereiches durch die Anordnung nach Fig. 219 von  $cd$  ab nachbilden, wobei

$$R_0 = \sqrt{\frac{L_s}{sK}}, \quad L_0 = 0,3 L_s, \quad K_0 = 0,267 K$$

zu machen wäre. Wenn ein anderes Längenverhältnis vorliegt, so kann man das 0,2 $s$  überschießende Stück von der Länge  $y$ , das ja eine gewöhnliche Kabelleitung ist, etwa durch eine H-Schaltung zwischen  $ab$  und  $cd$  (Fig. 219) nachbilden, die so viel Widerstand  $Ry$  in den Längszweigen und so viel Kapazität  $Ky$  in der Brücke hat, wie jenes Stück Leitung.

Zur Verfeinerung der Nachbildung, wobei auch der Widerstand und die Induktivität der Leitung in Betracht gezogen werden, bedarf es verwickelterer Schaltungen, wegen deren auf die Veröffentlichung selbst verwiesen wird.

**§ 276. Vereinfachte Nachbildung.** Der wirkliche Verlauf des Wellenwiderstandes einer belasteten Leitung als Funktion der Frequenz wird durch Unregelmäßigkeiten im Aufbau der Leitungsteile und Spulen von dem theoretischen häufig stark abweichen, so daß eine genaue Nachbildung auf dem angegebenen Wege nicht möglich ist. Es hat sich bei der Inbetriebsetzung der Deutschen Fernkabel gezeigt, daß man schon mit viel einfacheren Mitteln eine genügende Nachbildung schaffen kann, mit welcher die Verstärker keine Pfeiftöne mehr auslösen. Wenn man in Gl. (335)  $x = s/s$  an Stelle von  $x/s$  setzt, so bleibt die reelle Komponente des Scheinwiderstandes ungeändert, während die imaginäre den entgegengesetzt gleichen Wert annimmt. Während bei  $x = 0,2s$  die imaginäre Komponente positiv ist, also einer Induktivität entspricht, ist sie bei  $x = 0,8s$  negativ, und man kann durch eine Kapazität nachbilden. Daher wird auf den Deutschen Fernkabeln nach einem Vorschlage von Höpfner<sup>85)</sup> allgemein als Nachbildung eine Parallelschaltung von Widerstand  $R_0$  und Kapazität  $K_0$  verwendet. Das Ende der Leitung erhält eine künstliche Verlängerung auf 0,8 $s$ , indem ein Kondensator den Zweigen der Leitung parallel geschaltet wird. Dieser hat, abgesehen von der Anpassung an die Länge des Endstücks, bei welcher der reelle Teil des Scheinwiderstandes von der Frequenz fast unabhängig ist, die nützliche Wirkung, daß er die Sprünge im Scheinwiderstand um so mehr mildert, je höher die Frequenz ist.

Der Größe nach ist  $R_0 = \sqrt{\frac{L_s}{sK}}$ ,  $K_0$  ist etwa dem nach § 275 zuzuschaltenden

Kondensator gleich; in Wirklichkeit werden die passendsten Werte durch ein systematisches Annäherungsverfahren versuchsmäßig für jeden einzelnen Fall bestimmt. Zur Erleichterung des Nachbildens werden den Leitungen an den Verstärkerpunkten angepaßte H-Schaltungen als Verlängerungen mit einem Dämpfungsmaß bis zu 0,3 vorgeschaltet, welche auf die genannten Werte der Nachbildung keinen Einfluß haben.

Zur Ergänzung sei noch erwähnt, wie Leitungen anderer Art nachgebildet werden. Der Wellenwiderstand einer oberirdischen Leitung kann in folgender Form entwickelt werden:

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{i \omega \bar{L}}{i \omega \bar{K}} + R} &= \sqrt{\frac{\bar{L}}{\bar{K}} \left(1 - i \frac{R}{\omega \bar{L}}\right)^{1,2}} \\ &= \sqrt{\frac{L}{K} \left\{ \left(1 + \frac{1}{8} \frac{R^2}{\omega^2 L^2} \mp \dots\right) - i \frac{R}{2 \omega L} \left(1 - \frac{1}{8} \frac{R^2}{\omega^2 L^2} \mp \dots\right) \right\}}. \end{aligned}$$

Falls also  $R^2/8 \omega^2 L^2$  klein gegen Eins ist, kann man eine oberirdische Leitung nachbilden durch einen Widerstand  $R_0 = \sqrt{\bar{L}/\bar{K}}$  in Reihe mit einem Kondensator

$$K_0 = \frac{2 \sqrt{K \bar{L}}}{R}.$$

In Wirklichkeit sind bei der Nachbildung noch Betriebsapparate an den Enden der Leitung zu berücksichtigen, so die Rufstromübertrager und die den Rufstrom nach vorwärts absperrenden Kondensatoren. Diese ändern aber im wesentlichen nur den Wert von  $K_0$ , welcher durch Versuch bestimmt wird.

Oberirdische Leitungen, die durch Krarupkabel in die Ämter eingeführt sind, auch Krarupkabel selbst, werden wie reine oberirdische Leitungen, unter Feststellung der genauen Werte durch den Versuch, nachgebildet.

Ist eine Freileitung durch ein gewöhnliches, nicht belastetes Kabel eingeführt, so eignet sich zur Nachbildung ein Netzwerk mit zwei Maschen, das nach folgender Überlegung gebildet ist. Man schaltet in Reihe einen Widerstand gleich dem der Kabelleitung und dem Wellenwiderstand der Freileitung. Zwischen die Mitte des ersten Widerstandes und die Rückleitung legt man einen Kondensator von der Kapazität des Kabelstücks und verbindet das Ende des zweiten Widerstandes mit der Rückleitung durch einen nach dem Vorstehenden der Freileitung angepaßten Kondensator.

Achter Abschnitt.

**Die Berechnung von Fernsprechverbindungen.**

§ 277. **Stellung der Aufgabe.** Obwohl dieses Buch nicht in erster Linie den Zweck hat, für den Betrieb fertige Ergebnisse zu liefern, so würde es doch unvollständig sein, wenn nicht aus den in den einzelnen Abschnitten dieses Teiles besprochenen Sätzen das für die praktische Verwendung der Fernsprechleitungen wichtigste kurz zusammengefaßt würde, um dadurch zu zeigen, in welcher Weise man zu den erforderlichen Feststellungen über die Möglichkeit einer Fernsprechbeziehung kommt. Die Entwicklung der Ver-

stärker hat zwar die Reichweite der Leitungen gegebener Eigenschaften außerordentlich vergrößert, aber es verschieben sich dadurch nur die Zahlenwerte, nicht die Form der Berechnung. Sie geht grundsätzlich wie praktisch darauf hinaus, festzustellen, wieweit die vorgelegte Verbindung mit einem bestimmten Eichmaß, dargestellt durch einen Vierpol mit festem oder einstellbarem Dämpfungsmaß, in der Übertragung übereinstimmt.

**§ 278. Vollständige und annähernde Lösung.** Zur vollständigen Lösung hätte man gemäß § 236 durch Zusammensetzen so vieler Teile, wie in der Verbindung verschiedenartige Leitungen vorkommen, gegebenenfalls unter Berücksichtigung des § 259 für Leitungen mit Verstärkern, die vier Konstanten des allgemeinen Vierpoles festzustellen, durch welchen für eine bestimmte Frequenz die gesamte Verbindung, wie gezeigt wurde, in jedem Falle nachgebildet werden kann. Dies wäre für wenigstens einige Frequenzen durchzuführen, und zwar hinsichtlich der genügenden Stärke der Übermittlung für die Frequenz  $\omega = 5000$  oder rund 800 Per. sek, und hinsichtlich der Verzerrung für noch andere Frequenzen des Bereiches der Sprache. Früher hielt man  $\omega = 7000$  für genügend, während es scheint, daß man jetzt etwa doppelt so hoch gehen will. Eine derartige genaue Rechnung ist aber für praktische Zwecke entbehrlich; es genügt eine annähernde, bei der man sich hinsichtlich des Unterschiedes der Leitungsteile durch Zuschläge sichert, so daß man für das errechnete Dämpfungsmaß eher zu ungünstige, als zu günstige Werte erhält.

Wäre die Leitung aus lauter Teilen gleichen Wellenwiderstandes zusammengesetzt, so wäre das Dämpfungsmaß einfach die Summe der Dämpfungsmaße der Teile, während es in jedem anderen Falle höher ist. Da Leitungen einheitlichen Wellenwiderstandes auch noch den Vorzug leichterer Nachbildbarkeit haben, so bemüht man sich, soweit wie möglich, die einzelnen Teile der Leitung hinsichtlich des Wellenwiderstandes gleich zu machen, und dieser Gesichtspunkt ist hauptsächlich für die Konstruktion von Kabeln nach Pupin und Krarup bestimmend. Aus den in § 243 erwähnten Untersuchungen haben Wagner und Küpfmüller die Regel festgestellt, daß bei einem Dämpfungsmaß von etwa 0,02 für einen Spulenabstand die Induktivität der Spulen einer Verstärkerlänge auf  $\pm 2$  Proz., die Kapazitäten der Leitungsteile auf  $\pm 1,5$  Proz. der Sollwerte abzugleichen sind, nach denen der Wellenwiderstand berechnet wird.

Als Teile der Leitung haben auch die Ämter zu gelten, durch welche sie hindurchgehen oder in denen sie enden. Auch eine Amtseinrichtung zwischen den Eingangs- und den Ausgangsklemmen ist als Vierpol zu betrachten und kommt daher mit einem bestimmten Dämpfungsmaß und einem bestimmten Wellenwiderstand in Betracht. Die elektrischen Eigenschaften solcher Schaltungen können nicht der einzelnen Leitung angepaßt werden, sondern haben im allgemeinen für alle zu gelten, wenschon im Laufe der Zeit auch hier eine verbesserte Anpassung zu erstreben ist.

Es bleiben daher unvermeidliche Unterschiede im Wellenwiderstande der Leitungsteile und die Dämpfung und etwaige Reflexionen bei den Ämtern zu berücksichtigen. Man schätzt das Dämpfungsmaß nach § 242 genügend ein, wenn man den Betrag  ${}_{1,2} \log \text{nat} (Z_1 + Z_2) / 2 \sqrt{Z_1 Z_2}$  für jede Stoßstelle

hinzufügt. Man wird nur Stoßstellen zwischen unbelasteten und belasteten Leitungen zu berücksichtigen haben und für jede Stoßstelle den Betrag 0,3 bis 0,5 einsetzen. Für die Ämter wird ein Betrag von 0,15 genügen.

Hat man so auf Grund der Eigenschaften der zu verwendenden Leitungen, über welche die Tabelle im Anhang VII Aufschluß gibt, das gesamte Dämpfungsmaß von Endamt zu Endamt gefunden, so ist noch die Zuleitung zum Teilnehmer zu berücksichtigen. Im allgemeinen sollten die Ortsleitungen schon so eingerichtet sein, daß es nur der Feststellung des Dämpfungsmaßes der Fernleitung bedarf.

Gegenwärtig wird als Ziel verfolgt, das Dämpfungsmaß aller Fernleitungen ohne Rücksicht auf ihre Länge auf den Betrag von 1,5 oder sogar weniger festzusetzen. Vor der Einführung der Verstärker hielt man 2,5 für ausreichend.

Das neue Ziel bedeutet in der Durchführung eine ganz erhebliche Verbesserung der Verständigung im Fernsprechen, da man von einem mittleren Gesamtdämpfungsmaß von etwa 3,2 auf etwa 2,2, also von einer früher als gut bezeichneten auf eine sehr gute Verständigung kommen wird. Mit 3 mm starken Freileitungen, die späterhin die besten dieser Art sein werden, kommt man innerhalb des Dämpfungsmaßes 1,5 nur auf 325 km. Die Anforderung von  $b = 1,5$  wird daher vielfach die Benutzung von Verstärkern voraussetzen. Mit einem Zweirohr-Zwischenverstärker kann man die Dämpfung um 1,8 bis 2,0 vermindern.

Eine annähernde Beurteilung der Verzerrung auf einer zusammengesetzten Leitung wird man durch Zusammenrechnen der Dämpfungsmaße ihrer Teile für verschiedene Frequenzen erreichen können; indessen wird es gerade bei den Zuschlägen auf eine noch ausstehende genauere Feststellung ihrer Abhängigkeit von der Frequenz ankommen, und bei den Verstärkern des der Verzerrung entgegenwirkenden Verhaltens ihrer Kunstsaltungen bei verschiedenen Frequenzen.

Bei einer weitreichenden Verbindung über belastete Kabel ist endlich noch festzustellen, ob die gesamte Laufzeit eines Wellenstoßes innerhalb der zugelassenen Grenze liegt. Über diesen Gegenstand findet man näheres in dem von den Vorgängen beim Einschwingen handelnden § 288.

Die zurzeit fertiggestellten Fernkabel überbrücken noch in keinem Falle wirklich die Strecken, für welche sie nach ihren elektrischen Eigenschaften in Frage kommen können. In Deutschland hat man mit Erfolg Sprechversuche auf durch Hin- und Herschalten von Doppelleitungen hergestellten Kabelverbindungen von 1240 km Länge, einem natürlichen Dämpfungsmaß  $b = 23,6$  und einer Laufzeit von 0,074 sek gemacht, bei denen die Ströme zwischen Sender und Empfänger zehnmal verstärkt wurden. Solche Versuche lassen wohl die Bedeutung der Aufgaben erkennen, die noch zu lösen sind, während ihre, wenn auch schrittweise erreichten, Erfolge die Hoffnung begründen, daß die Mittel auch zur Überwindung noch größerer Entfernungen zu finden sein werden.

---

## Neunter Teil.

# Fortpflanzung von Stromstößen auf langen Leitungen.

### Erster Abschnitt.

#### Vorgänge auf reinen Leitungen.

§ 279. **Bezeichnung der Aufgabe und der Methode.** Telegraphische Zeichen setzen sich in einer durch den Text gegebenen willkürlichen Weise aus einzelnen Stromstößen zusammen; auch die Laute der Sprache bilden einzelne für sich abgeschlossene Vorgänge, zu denen bei der elektrischen Übertragung ein abgegrenzter Stromvorgang gehört. Bisher haben wir die Fernsprechströme unter der Voraussetzung betrachtet, daß der einzelne Vorgang, in dem sich eine bestimmte Frequenz während des größten Teiles der erforderlichen Zeit geltend macht, lange genug dauere, so daß man das Feld am Ende der Leitung als eine andauernde periodische Schwingung betrachten kann. Es kommen aber Fälle in Betracht, bei denen zwischen dem Einlaufen des ersten Anstoßes eines solchen Vorganges und der vollen Ausbildung der Schwingungen eine so lange Zeit vergeht, daß die regelmäßige Schwingung nur während eines kleinen Teiles der Dauer des Lautes bestanden hat. In diesem Falle werden die zum Laut gehörenden Ströme auch nicht mehr annähernd formgetreu übertragen, und die Sprache wird verzerrt. Bei den telegraphischen Zeichen ist, wie schon im § 207 ausgeführt wurde, eine wenigstens annähernd formgetreue Wiedergabe im Empfänger deshalb notwendig, weil sie mit mechanischen Empfängern wiedergegeben werden, die in der einen Richtung ansprechen, wenn die Stromstärke eine bestimmte Höhe erreicht hat, und in der anderen Richtung, wenn sie wieder um ein bestimmtes Maß von jener Höhe abgewichen ist.

Es handelt sich also hier darum, aus den Eigenschaften einer Leitung und der etwa angeschlossenen Apparate die zeitliche Form des ankommenden Zeichens während der Übergangszeit festzustellen, in welcher das Feld aus einem Zustande in einen anderen übergeht; etwa aus einem Dauerzustande in einen anderen oder aus dem Zustande der Ruhe in den einer periodischen Bewegung.

Dieses Problem ist eines der ältesten der theoretischen Telegraphie. In Bd. 51 des Phil. Mag. von 1856 ist ein Briefwechsel aus dem Jahre 1854

zwischen Prof. Thomson und Prof. Stokes wiedergegeben, der im Hinblick auf den Plan eines transatlantischen Kabels die Form der ankommenden Zeichen und die Telegraphiergeschwindigkeit zum Gegenstand hat. Das was man gewöhnlich als „Thomsonkurve“ bezeichnet, bildet nur einen Teil des Inhalts dieser Mitteilungen. Von den elektrischen Eigenschaften der Leitung sind Widerstand, Kapazität und Ableitung berücksichtigt. Die Lösungen treten unter Berufung auf Fourier abgeschlossen, ohne eine Ableitung auf. Die Form einer dieser Lösungen, mit Fourierschen Reihen, ist für Lehrbücher maßgebend geworden, und auch spätere Forschungen<sup>86)</sup>, so über die Bedeutung der Induktivität oder der angeschlossenen Apparate haben sich im Gedanken und in der Form daran angeschlossen.

In der Methode bedeutet die im folgenden benutzte Anwendung der Heavisideschen Formel, mit der Malcolm<sup>87)</sup> die praktisch bedeutsamen Fälle zuerst untersucht hat, einen großen Fortschritt, weil sie, wie auch in den anderen bisher betrachteten Fällen, selbst bei verwickelten Schaltungen eine Integration mit ihren mühevollen Konstantenbestimmungen umgeht. Nach dieser Methode lassen sich Aufgaben, zumal bei gleichmäßigen Leitungen, für welche man konstante elektrische Eigenschaften annehmen kann, mit elementaren Mitteln lösen. Für Sonderaufgaben, z. B. die Feststellung des Verlaufs, wenn die Induktivität eine Funktion der Stromstärke ist, bedarf es größerer analytischer Hilfsmittel. Wir verweisen wegen solcher Fälle auf die Literatur<sup>88)</sup> und beschränken uns auf die Voraussetzung konstanter Koeffizienten, unter der man mit der Formel von Heaviside auskommt.

**§ 280. Die Stammfunktion bei Leitungsproblemen.** Für die Anwendung der Heavisideschen Formel kommt es darauf an, zwischen einer EMK  $E_p e^{pt}$  und einer von ihr erzeugten abhängigen Zustandsgröße, z. B. einer Stromstärke, einen Ausdruck der Form aufzustellen

$$E_p e^{pt} = W J_p e^{pt}.$$

Für Aufgaben an Leitungen ist diese Arbeit der Form nach schon in dem vorangehenden Teile über andauernde Sinusströme getan, und zwar für den besonderen Wert  $p = i\omega$ .

Wir können daher die Ergebnisse dieser Rechnungen ohne weiteres für die Einschaltvorgänge benutzen, wenn wir zu dem allgemeinen Faktor  $p$  übergehen.

In § 237 ist für den Fall, daß eine sinusförmige EMK über einen Scheinwiderstand  $\mathfrak{R}_a$  auf die Leitung mit den Koeffizienten  $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}$  arbeitet, an deren Ende ein Scheinwiderstand  $\mathfrak{R}_e$  liegt, die Beziehung festgestellt worden:  $\mathfrak{C} = \mathfrak{Z}_e \{ \mathfrak{A}_1 \mathfrak{R}_e + \mathfrak{B} + \mathfrak{R}_a (\mathfrak{A}_2 + \mathfrak{C} \mathfrak{R}_e) \}$ .

Wir sehen von einem Unterschied von  $\mathfrak{A}_1$  und  $\mathfrak{A}_2$  ab, betrachten also eine wenigstens symmetrische Leitung. Nach Malcolms Vorgang kommen wir durch folgende Umformung zu der Stammfunktion für die Heavisidesche Formel.

Es ist für Sinusströme

$$\begin{aligned} \mathfrak{A} &= \mathfrak{C} \operatorname{Cof} \gamma l = \cos i \gamma l, \\ \mathfrak{B} &= \mathfrak{Z} \operatorname{Sin} \gamma l = -i \mathfrak{Z} \sin i \gamma l, \\ \mathfrak{C} &= \frac{\operatorname{Sin} \gamma l}{\mathfrak{Z}} = -\frac{i \sin i \gamma l}{\mathfrak{Z}}, \end{aligned}$$

und darin

$$\mathfrak{B} = \sqrt{\frac{R + i\omega L}{G + i\omega K}}, \quad \gamma = \sqrt{(R + i\omega L)(G + i\omega K)}.$$

Wir schreiben dieselben Beziehungen hin für  $p$  statt  $i\omega$ , und setzen  $i\gamma = \vartheta$ . Es wird dadurch

$$\mathfrak{B} = \frac{(R + pL)l}{-i\vartheta},$$

daher

$$\mathfrak{A} = \cos \vartheta l, \quad \mathfrak{B} = \frac{(R + pL)\gamma}{\vartheta} \sin \vartheta l, \quad \mathfrak{C} = -\frac{\vartheta}{(R + pL)} \sin \vartheta l \dots \quad (337)$$

An Stelle von  $\mathfrak{R}_a$  und  $\mathfrak{R}_e$  treten, sobald es sich nicht um reine Widerstände handelt, Funktionen von  $p$ , wie sie beispielsweise in § 151 für einen Kondensator mit Widerstand, in § 163 für einen Transformator aufgestellt wurden. Wir wollen aber vorläufig über den Aufbau der Schaltungen am Anfang und Ende nichts Bestimmtes voraussetzen und uns der allgemeinen Zeichen  $R_a$  und  $R_e$  bedienen. Dann erhalten wir für die Stammfunktion der gleichmäßigen Leitung die Gleichung

$$W = (R_a + R_e) \cos \vartheta l + \sin \vartheta l \left( \frac{R + pL}{\vartheta} - \frac{\vartheta R_a R_e}{R + pL} \right) \dots \quad (338)$$

Darin steht  $\vartheta$  mit  $p$  in der Beziehung

$$(R + pL)(G + pK) + \vartheta^2 = 0 \dots \dots \dots \quad (339)$$

Wir werden uns meist auf die Betrachtung der Vorgänge an den Enden der Leitung beschränken.

Es ist ersichtlich, daß die Wurzeln der transzendenten Gleichung  $W = 0$  für den Fall betriebsmäßiger Schaltungen nur bei gegebenen Zahlenwerten ermittelt werden können. Allgemeine Lösungen bestehen für die Sonderfälle, daß die Leitung am Ende kurz geschlossen oder offen ist, während am Anfange eine Stromquelle ohne Widerstand wirkt.

Für den am Ende der Leitung in  $R_e$  eintretenden Strom gilt dann mit dem angegebenen Wert von  $W$  und seinen Ableitungen die Heavisidesche Formel

$$J_e = \frac{E}{(W)_{p=0}} + \sum_{\nu} \frac{e^{p\nu t}}{\left( p \frac{\partial W}{\partial p} \right)_{p_{\nu}}}.$$

Es kann sich in einem gegebenen Falle um eine andere abhängige Veränderliche handeln, als die Stromstärke am Ende der durch  $\vartheta l$ ,  $Rl$  und  $pLl$  gegebenen Leitung, z. B. um die Stromstärke an einer Unterwegsstelle der Leitung oder in einem Zweige der Schaltung, für welche, von der Leitung aus gesehen, der Scheinwiderstand  $R_e$  gilt, der im allgemeinen eine Funktion von  $p$  ist. Die gesuchte Veränderliche  $y$  wird für bestimmte  $p$  mit  $J_e$  in einer Beziehung stehen:

$$y_p = f(p) J_{p_e}.$$

Dann wird ihr Zeitwert dargestellt durch die Gleichung

$$y = \left( \frac{E f(p)}{W} \right)_{p=0} + \sum_{\nu} \frac{e^{p\nu t} [f(p)]_{p_{\nu}}}{\left( p \frac{\partial W}{\partial p} \right)_{p_{\nu}}}.$$

§ 281. Die Stammfunktion für Kettenleiter. Wir wählen als Beispiel den Kettenleiter erster Art nach Fig. 204, dessen Glied nach § 248 durch die Größen  $\mathfrak{R}$  und  $\mathfrak{G}$  bestimmt ist. Zunächst ist die allgemeine Form der Stammfunktion dieselbe, wie die von Leitungen mit gleichmäßiger Verteilung, weil nach Gl.(297) die Kette durch Gleichungen gekennzeichnet ist, welche mit denen der gleichmäßigen Leitung dem Aufbau nach übereinstimmen. Ein Unterschied ergibt sich erst bei der Einführung des Winkels  $\vartheta$ . Nach Gl. (298) und (301) sind aus  $\mathfrak{R}$  und  $\mathfrak{G}$  die Fortpflanzungskonstante  $g$  und der Wellenwiderstand der Kette bestimmt durch die Gleichungen

$$2 \mathfrak{G} \sin \frac{g}{2} = -2 i \sin i \frac{g}{2} = \sqrt{\mathfrak{R} \mathfrak{G}},$$

$$\mathfrak{Z} = \sqrt{\frac{\mathfrak{R}}{\mathfrak{G}}} \sqrt{1 + \frac{\mathfrak{R} \mathfrak{G}}{4}}$$

Setzt man  $ig = \vartheta$ , so wird  $\sqrt{1 + \frac{\mathfrak{R} \mathfrak{G}}{4}} = \cos \frac{\vartheta}{2}$ , und daher erhalten die Koeffizienten der Spulenleitung die Form

$$\mathfrak{A} = \cos \vartheta, \quad \mathfrak{B} = \frac{\mathfrak{R} \sin n \vartheta}{\sin \vartheta}, \quad \mathfrak{C} = -\frac{\sin \vartheta}{\mathfrak{R}} \sin n \vartheta \dots (340)$$

Führt man ein

$$\mathfrak{R} = R + pL, \quad \mathfrak{G} = G + pK,$$

so wird die Stammfunktion

$$W = (R_a + R_e) \cos n \vartheta + \sin n \vartheta \left( \frac{R + pL}{\sin \vartheta} - \frac{R_a R_e \sin \vartheta}{R + pL} \right) \dots (341)$$

Die Beziehung zwischen  $p$  und  $\vartheta$  bei der Spulenleitung lautet

$$(R + pL)(G + pK) + 4 \sin^2 \frac{\vartheta}{2} = 0 \dots \dots \dots (342)$$

Diese Gleichungen entsprechen den Gleichungen (338) und (339) für die gleichmäßige Leitung. Man kann zu der letzteren übergehen, indem man da, wo der einfache Winkel  $\vartheta$  oder  $\vartheta/2$  vorkommt, statt des Sinus den Bogen und statt  $\cos \vartheta/2$  den Wert Eins setzt.

§ 282. Zurückführung auf die Fortpflanzungskonstanten. Wir können der Gl. (342) die Form geben

$$p^2 + 2p \left( \frac{R}{2L} + \frac{G}{2K} \right) + \frac{GR}{KL} + \frac{(2 \sin \vartheta/2)^2}{KL} = 0.$$

Daraus ergibt sich

$$p = - \left( \frac{R}{2L} + \frac{G}{2K} \right) + \varepsilon \sqrt{\left( \frac{R}{2L} - \frac{G}{2K} \right)^2 - \frac{(2 \sin \vartheta/2)^2}{KL}}$$

$\varepsilon$  ist ein Zeichen für  $\pm 1$ . Wir setzen  $\sqrt{KL}n = \tau$ .

Nach den Gl. (240) und (256) wird, wenn wir  $b$  für  $n\beta$  setzen

$$p = \frac{1}{\tau} \left( -b + \varepsilon \sqrt{(\mathcal{A}n)^2 - (2n \sin \vartheta / 2)^2} \right) \dots \dots \dots (343)$$

Man erhält ferner

$$p + \frac{b}{\tau} + \frac{n^2 \sin \vartheta}{\tau^2} \frac{d\vartheta}{dp} = 0$$

und daher

$$\frac{d\vartheta}{dp} = - \frac{\varepsilon \tau}{n^2 \sin \vartheta} \sqrt{(\mathcal{A}n)^2 - (2n \sin \vartheta / 2)^2} \dots \dots \dots (344)$$

Dies sind allgemeine, für alle vorkommenden Fälle anwendbare Beziehungen zwischen  $p$  und  $\vartheta$ , welche für die in der Heavisideschen Formel vorkommenden Größen  $p$  und  $\frac{\partial W}{\partial p}$  gebraucht werden.

**§ 283. Der ankommende Strom bei kurzem Schluß am Ende der Leitung.**

Für  $R_a = 0$  und  $R_e = 0$  wird die Stammfunktion

$$W = \frac{R + pL}{\sin \vartheta} \sin n \vartheta \dots \dots \dots (341 a)$$

Sie wird gleich Null für  $p_0 = -\frac{R}{L}$  und für alle  $p_\nu$ , die sich nach Gl. (343) aus  $n \vartheta = \nu \pi$  ergeben.  $\nu$  durchläuft also alle ganzen Zahlen von 1 bis  $\infty$ , wenn wir für  $\varepsilon$  nacheinander  $+1$  und  $-1$  setzen.

Es wird also

$$p_\nu = \frac{1}{\tau} \left( -b + \varepsilon \sqrt{(\mathcal{A}n)^2 - \left( 2n \sin \frac{\nu \pi}{2n} \right)^2} \right) \dots \dots (343 a)$$

$$\left( \frac{d\vartheta}{dp} \right)_{p_\nu} = - \frac{\varepsilon \tau}{n^2 \sin \frac{\nu \pi}{n}} \sqrt{(\mathcal{A}n)^2 - \left( 2n \sin \frac{\nu \pi}{2n} \right)^2} \dots \dots (344 a)$$

Die Form der Gleichungen und auch die Art des Vorganges scheiden sich danach, ob die Quadratwurzel eine imaginäre oder eine reelle Zahl ist. Sie ist imaginär, wenn  $\mathcal{A}n < \pi$  ist, sobald wenigstens die Zahl  $n$  der Leitungsabschnitte einigermaßen groß ist.

Übertrifft  $\mathcal{A}n$  die Zahl  $\pi$ , so werden je nach seiner Größe einige  $p_\nu$  für die ersten Werte von  $\nu$  reell. Nur reelle Wurzeln hat man in dem lediglich konstruierbaren Fall einer Leitung mit unendlich großem  $\mathcal{A}$ , wenn nämlich die Induktivität vollkommen Null ist. Wie wir aber noch sehen werden, fallen bei einem Wert von  $\mathcal{A}n > 7\pi$  die Glieder mit den nach  $\nu = 7$  noch kommenden Wurzeln nicht mehr ins Gewicht.

Für die Fortsetzung wollen wir uns zunächst auf Vorgänge auf gleichmäßigen Leitungen beschränken, für welche

$$W = \frac{R + pL}{\vartheta} \sin \vartheta l \dots \dots \dots (341 b)$$

$$p_\nu = \frac{1}{\tau} \left( -b + \varepsilon \sqrt{(\mathcal{A}l)^2 - \nu^2 \pi^2} \right) \dots \dots \dots (343 b)$$

$$\left( \frac{d\vartheta}{dp} \right)_{p_\nu} = - \varepsilon \frac{\tau}{\nu \pi l} \sqrt{(\mathcal{A}l)^2 - \nu^2 \pi^2} = - \frac{\tau^2}{\nu \pi l} \left( p_\nu + \frac{b}{\tau} \right) \dots (344 b)$$

ist. Wir behandeln zuerst den Fall geringen Längenmaßes.

§ 284. Der Endstrom einer Leitung geringen Längenmaßes. Ohne den Fall großen Längenmaßes auszuschließen, können wir unter Einführung der Bezeichnung

$$\eta_\nu = \sqrt{1 - \left(\frac{Al}{\nu\pi}\right)^2} \dots \dots \dots (345)$$

den Entwicklungen eine Form geben, die für kleine Längenmaße besonders brauchbar ist. Es soll also  $\eta_\nu$  eine positive reelle Größe sein, die sich in Grenzfällen, bei sehr kleinem  $Al$  und bei großen Werten von  $\nu$  der Einheit nähert; man erhält dann aus (343 b)

$$p_\nu = \frac{1}{\tau} (-b + i \varepsilon \nu \pi \eta_\nu) \dots \dots \dots (346)$$

$$\left(\frac{d\vartheta}{dp}\right)_\nu = -i \varepsilon \frac{\tau}{l} \eta_\nu \dots \dots \dots (346 b)$$

Wir haben  $\left(\frac{\partial W}{\partial p}\right)_{p_\nu}$  festzustellen. Zunächst ist

$$\frac{\partial W}{\partial p} = L \frac{\sin \vartheta l}{\vartheta} + (R + pL) \frac{\vartheta l \cos \vartheta l - \sin \vartheta l}{\vartheta^2} \frac{d\vartheta}{dp}$$

Daraus ergibt sich

$$\left(\frac{\partial W}{\partial p}\right)_{p_\nu} = Ll \eta_\nu \left(\eta_\nu - i \varepsilon \frac{Al}{\nu\pi}\right) \cos \nu \pi$$

und

$$p_\nu \left(\frac{\partial W}{\partial p}\right)_\nu = i \varepsilon \sqrt{\frac{L}{K}} \nu \pi \eta_\nu \left\{ 1 + \frac{Al(b - Al)}{\nu^2 \pi^2} + i \varepsilon \eta_\nu \frac{b - Al}{\nu \pi} \right\} \cos \nu \pi.$$

Eine besondere Feststellung ist für die Wurzel  $p_0 = -\frac{R}{L}$  erforderlich, da nach Gl. (339) in diesem Falle auch  $\vartheta = 0$  und

$$\frac{d\vartheta}{dp} = -\frac{KL}{\vartheta} \left(p + \frac{R}{2L} + \frac{G}{2K}\right)$$

ist. Setzt man  $p = -\frac{R}{L} + \delta$  und geht zu  $\delta = 0$  über, so ergibt sich, daß

$$\left(p \frac{\partial W}{\partial p}\right)_{p_0} = -Rl$$

wird.

Die Heavisidesche Formel enthält endlich noch den Posten  $(E/W)_{p=0}$ . Für  $p = 0$  ist nach Gl. (339)  $\vartheta = \pm i \sqrt{GR}$ , also ergibt sich, und zwar für beide Zeichen gleich

$$\left((R + pL) \frac{\sin \vartheta l}{\vartheta}\right)_{p=0} = \sqrt{\frac{R}{G}} \text{Ein} \sqrt{GR} l,$$

daher

$$(W)_{p=0} = \sqrt{\frac{R}{G}} \frac{e^{\sqrt{GR}l} - e^{-\sqrt{GR}l}}{2}.$$

Der Wert des Dauerstromes, der sich so ergibt, stimmt mit demjenigen überein, der aus der ersten Gleichung (100 a) für  $V = 0$  hervorgeht, wenn man  $z = l$  setzt.

Wir erhalten also für den ankommenden Strom

$$J_e = \left. \begin{aligned}
 & \frac{2 E}{\sqrt{\frac{R}{G}} (e^{\sqrt{GR}l} - e^{-\sqrt{GR}l})} - \frac{E e^{-\frac{R}{L}t}}{Rl} \\
 & + \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{E e^{-\frac{b}{\tau}t} \left( \cos \frac{\nu \pi \eta_{\nu} t}{\tau} + i \sin \frac{\nu \pi \eta_{\nu} t}{\tau} \right)}{i \sqrt{\frac{L}{K}} \nu \pi \eta_{\nu} \left( 1 + \frac{Al(b-Al)}{(\nu \pi)^2} + i \eta_{\nu} \frac{b-Al}{\nu \pi} \right)} \cos \nu \pi \\
 & + \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{E e^{-\frac{b}{\tau}t} \left( \cos \frac{\nu \pi \eta_{\nu} t}{\tau} - i \sin \frac{\nu \pi \eta_{\nu} t}{\tau} \right)}{-i \sqrt{\frac{L}{K}} \nu \pi \eta_{\nu} \left( 1 + \frac{Al(b-Al)}{(\nu \pi)^2} - i \eta_{\nu} \frac{b-Al}{\nu \pi} \right)} \cos \nu \pi
 \end{aligned} \right\} \cdot (347)$$

Die beiden Summenreihen entsprechen den Werten  $+1$  und  $-1$  für  $\varepsilon$ ; durch ihre Vereinigung wird die Gleichung reell, wie es nach ihrer physikalischen Bedeutung erforderlich ist. Allerdings kann  $\eta_{\nu}$  imaginär werden, wenn  $Al$  große Werte annimmt; statt gedämpfter trigonometrischer Funktionen der Zeit treten dann hyperbolische Funktionen auf, und der Verlauf geht von abklingenden periodischen Vorgängen zu aperiodisch schwindenden über.

Wir machen fernerhin die vereinfachende Annahme, daß die Ableitung außer Betracht bleiben könne; dann wird  $Al = b$ , das konstante Glied wird  $E/Rl$ , und man erhält

$$J_e = \frac{E}{Rl} \left( 1 - e^{-\frac{R}{L}t} \right) + 2 E \sqrt{\frac{K}{L}} e^{-\frac{b}{\tau}t} \sum \frac{\sin \frac{\nu \pi \eta_{\nu} t}{\tau}}{\nu \pi \eta_{\nu}} \cos \nu \pi \cdot (348)$$

**§ 285. Stromverlauf an beliebiger Stelle einer am Ende kurz geschlossenen Leitung.** Wir erörtern diesen Fall nur kurz, um die Anwendung der Methode zu zeigen, wenn es sich um eine andere Veränderliche handelt, als diejenige, deren Verhältnis zu  $E_p$  durch die Stammfunktion der Leitung dargestellt wird. Die Gl. (265) lauten in Anpassung an die vorliegenden Untersuchungen:

$$\left. \begin{aligned}
 V_{xp} &= J_{ep} \left( R_e \cos \vartheta (l-x) + \frac{R+pL}{\vartheta} \sin \vartheta (l-x) \right) \\
 J_{xp} &= J_{ep} \left( \cos \vartheta (l-x) - \frac{\vartheta R_e}{R+pL} \sin \vartheta (l-x) \right)
 \end{aligned} \right\} \cdot (349)$$

Für  $R_e = 0$  ergibt sich daher nach § 280:

$$J_x = E \left( \frac{\cos \vartheta (l-x)}{W} \right)_{p=0} + \left( \frac{E \cos \vartheta (l-x)}{p \frac{\partial W}{\partial p}} \right)_{p=p_0} e^{p_0 t} + \sum_{\nu=1}^{\infty} E \left( \frac{\cos \vartheta (l-x)}{p \frac{\partial W}{\partial p}} \right)_{p_{\nu}} e^{p_{\nu} t} .$$

Sehen wir von der Ableitung ab, so ist  $\vartheta = 0$  für  $p = 0$  und für  $p = p_0$ ; die beiden ersten Glieder werden also denen in Gl. (348) für den Endstrom gleich. Den Werten  $p = p_\nu$  entspricht  $\vartheta l = \nu \pi$  und daher folgt schließlich:

$$J_x = \frac{E}{Rl} \left( 1 - e^{-\frac{R}{L}t} \right) + 2E \sqrt{\frac{K}{L}} e^{-\frac{b}{\tau}t} \sum_1^\infty \frac{\sin \frac{\nu \pi \eta_\nu}{\tau} t}{\nu \pi \eta_\nu} \cos \frac{\nu \pi x}{l}. \quad (350)$$

Für  $x = l$  stimmt diese Gleichung mit Gl. (348) überein.

Die Spannung an den verschiedenen Stellen einer am fernen Ende geerdeten Leitung erhalten wir nach den Gleichungen

$$E_p = J_{ep} \frac{R + pL}{\vartheta} \sin \vartheta l$$

$$V_{xp} = J_{ep} \frac{R + pL}{\vartheta} \sin \vartheta (l - x),$$

von denen die zweite für  $R_e = 0$  aus Gl. (349) folgt. Daher ist

$$E_p = V_{xp} \frac{\sin \vartheta l}{\sin \vartheta (l - x)} = V_{xp} W.$$

Die Stammfunktion wird zu Null für  $\vartheta_\nu l = \varepsilon \nu \pi$ ; im vorliegenden Falle kommt dagegen die Wurzel  $p_0 = -R/L$  nicht in Betracht. Die Wurzeln  $p_\nu$  ergeben sich aus den Werten  $\vartheta_\nu$  gemäß Gl. (346). Man erhält ferner mit den in Gl. (345) und (346 b) angegebenen Beziehungen

$$\left( p \frac{\partial W}{\partial p} \right)_{p_\nu} = \frac{1}{\eta_\nu} \frac{(v \pi \eta_\nu + i \varepsilon b) \sin v \pi \frac{l-x}{l}}{(v \pi \eta_\nu)^2 + b^2} \cos v \pi.$$

Fügt man den Faktor  $e^{\nu t}$  hinzu und verwendet für  $\varepsilon$  sowohl  $+1$  wie  $-1$ , so fallen die imaginären Posten heraus, und die reellen erhalten den Faktor 2 für die Summierung über  $\nu$  von 1 bis  $\infty$ . Da endlich

$$(W)_{p=0} = (W)_{\vartheta=0} = \frac{l}{l-x}$$

ist, so ergibt sich für  $Al = b$ , oder  $G = 0$

$$\left. \begin{aligned} V_x &= E \left( 1 - \frac{x}{l} \right) \\ &- 2E \sum_1^\infty e^{-\frac{b}{\tau}t} \frac{\sin \frac{\nu \pi x}{l}}{\nu^2 \pi^2 \eta_\nu} \left( \nu \pi \eta_\nu \cos \frac{\nu \pi \eta_\nu}{\tau} t + b \sin \frac{\nu \pi \eta_\nu}{\tau} t \right) \end{aligned} \right\} \quad (351)$$

Die gefundenen Werte von  $V_x$  und  $J_x$  genügen der Grundgleichung (235) für  $G = 0$ .

### § 286. Stromanstieg auf einer Leitung mit sehr geringen Verlusten.

Mit der den § 284 abschließenden Gl. (348) ist eine neue Darstellung des Stromverlaufs auf einer Leitung gegeben, und zwar für den Fall des kurz-

geschlossenen Endes. Früher ist hiervon in § 213 bei Besprechung der Fig. 176 die Rede gewesen.

Wir machen, um den Vorgang zunächst in großen Zügen zu beschreiben, die Annahme, daß das Dämpfungsmaß der Leitung so gering sei, daß man  $\left(\frac{b}{\pi}\right)^2$  gegen Eins vernachlässigen könne, und daß wir bei einer Reihenentwicklung der Exponentialfunktionen nur die geringste Potenz der Veränderlichen zu beachten brauchen. Wir erhalten dann

$$J_e = E \sqrt{\frac{K}{L}} \left( \frac{t}{\tau} + 2 \sum_1^{\infty} \frac{\cos \nu \pi}{\nu \pi} \sin \nu \pi \frac{t}{\tau} \right) \cdot \dots \quad (348 a)$$

indem wir auch das Glied mit dem Faktor  $\beta l \frac{t}{\tau}$  vernachlässigen.

Wie man sieht, sind alle den Stromverlauf dämpfenden Größen aus der Gleichung verschwunden, sie entspricht also dem Vorgang auf einer idealen Leitung.

Diese Gleichung läßt sich auswerten, wenn wir auf einen Satz aus der Theorie der Fourierschen Reihen zurückgehen.

Eine Größe  $y$ , die in einem Intervall von  $u = -\frac{a}{2}$  bis  $u = +\frac{a}{2}$  als Funktion  $f(u)$  gegeben ist, läßt sich durch die Reihe darstellen:

$$y = A_0 + A_1 \sin \frac{2\pi}{a} u + A_2 \sin 2 \frac{2\pi}{a} u + \dots + A_n \sin n \frac{2\pi}{a} u + \dots \\ + B_1 \cos \frac{2\pi}{a} u + B_2 \cos 2 \frac{2\pi}{a} u + \dots + B_n \cos n \frac{2\pi}{a} u + \dots$$

Bildet man nämlich das Integral

$$\int_{-\frac{a}{2}}^{+\frac{a}{2}} f(u) \sin m \frac{2\pi}{a} u \, du,$$

so wird der Anteil

$$\int_{-\frac{a}{2}}^{+\frac{a}{2}} A_n \sin n \frac{2\pi}{a} u \sin m \frac{2\pi}{a} u \, du = \frac{A_n}{2} \int_{-\frac{a}{2}}^{+\frac{a}{2}} \left( \cos(n-m) \frac{2\pi}{a} u - \cos(n+m) \frac{2\pi}{a} u \right) \, du$$

gleich Null, wenn  $n$  und  $m$  verschieden sind, weil das Integral einer Kosinusfunktion über eine ganze Zahl von Perioden Null ist. Dagegen ist der Anteil

$$\int_{-\frac{a}{2}}^{+\frac{a}{2}} A_m \sin^2 m \frac{2\pi}{a} u \, du = \frac{A_m}{2} \int_{-\frac{a}{2}}^{+\frac{a}{2}} \left( 1 - \cos 2 m \frac{2\pi}{a} u \right) \, du = \frac{a A_m}{2}.$$

Ähnliches gilt für die Faktoren  $B_n$ . Daher ist

$$A_0 = \frac{1}{a} \int_{-\frac{a}{2}}^{+\frac{a}{2}} f(u) du$$

$$A_n = \frac{2}{a} \int_{-\frac{a}{2}}^{+\frac{a}{2}} f(u) \sin n \frac{2\pi}{a} u du$$

$$B_n = \frac{2}{a} \int_{-\frac{a}{2}}^{+\frac{a}{2}} f(u) \cos n \frac{2\pi}{a} u du.$$

Es sei  $f(u) = \frac{2}{a} u$ . Dann wird

$$A_0 = 0, \quad A_n = -\frac{2 \cos n \pi}{n \pi}; \quad B_n = 0.$$

Daher ist von  $-\frac{a}{2}$  bis  $+\frac{a}{2}$

$$\frac{2}{a} u = -2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n \pi}{n \pi} \sin n \frac{2\pi}{a} u.$$

Setzen wir

$$\frac{a}{2} = \tau, \quad u = t,$$

so ergibt sich

$$\frac{t}{\tau} + 2 \sum_1^{\infty} \frac{1}{\nu \pi} \cos \nu \pi \sin \nu \pi \frac{t}{\tau} = 0.$$

Nach der für  $J_e$  abgeleiteten vereinfachten Gleichung (348 a) ist daher der Strom am Ende zunächst in dem Zeitbereich von  $-\tau$  bis  $+\tau$ , entsprechend  $-\frac{a}{2}$

bis  $+\frac{a}{2}$ , gleich Null. Hier kommt nur die Zeit von  $t = 0$  bis  $t = \tau$  in

Betracht. Für eine Zeit, die zwischen  $\tau$  und  $3\tau$  liegt, können wir in Gl. (348 a)  $t = t_1 + 2\tau$  setzen und  $t_1$  von  $-\tau$  bis  $+\tau$  laufen lassen. Es besteht wie vorher die identische Gleichung

$$\frac{t_1}{\tau} + 2 \sum_1^{\infty} \frac{1}{\nu \pi} \cos \nu \pi \sin \frac{\nu \pi}{\tau} t_1 = 0.$$

Der Strom ist während dieses Zeitraumes

$$J_{1,3} = E \sqrt{\frac{\bar{K}}{L}} \left( \frac{t_1 + 2\tau}{\tau} + 2 \sum_1^{\infty} \frac{1}{\nu \pi} \cos \nu \pi \sin \frac{\nu \pi}{\tau} t_1 \right).$$

Daraus folgt, daß  $J_{1,3} = 2E \sqrt{\frac{\bar{K}}{L}}$ .

In gleicher Weise ergibt sich, daß in dem Zeitraum von  $t = 3\tau$  bis  $t = 5\tau$ , wo  $t = t_1 + 4\tau$  zu setzen ist, und  $t_1$  von  $-\tau$  bis  $+\tau$  läuft, der Strom den Wert  $J_{3,5} = 4E \sqrt{\frac{K}{L}}$  hat. Nach je  $2\tau$  Sekunden springt die Stromstärke um den Betrag  $2E \sqrt{\frac{K}{L}}$ . Wir erkennen hierin die in § 213 besprochenen Reflexionsvorgänge am kurz geschlossenen Ende, mit der Erweiterung, daß die neue Entwicklung die ganze Folge der Reflexionen aufzeigt, welche beim Hin- und Herlaufen der Welle über die Leitung entstehen. Wenn man noch die dämpfenden Faktoren der Gl. (348) berücksichtigt, so erklärt es sich, wenn in dem unteren Teile der Fig. 176 die Sprünge zwar in den Zeitpunkten  $\tau, 3\tau, 5\tau$  auftreten, aber an Höhe augenscheinlich geometrisch abnehmen.

Da durch die Reflexion die Stromstärke am kurz geschlossenen Ende verdoppelt wird, so war die einlaufende Stromstärke  $E \sqrt{\frac{K}{L}} = E/Z$ . Diese ist auf der idealen Leitung gleich der am Anfang ausgehenden. Es wird also das in § 212 Gesagte auch hier bestätigt.

**§ 287. Die Thomsonkurve bei kurz geschlossener Leitung.** Man versteht darunter die Kurve des ankommenden Stromes, wenn die Induktivität der Leitung verschwindend klein, im Grenzfall Null ist. Man kann sie aus der entsprechend vereinfachten Form der Telegraphengleichung ableiten und so werden wir bei den später zu erörternden Fällen einer Leitung mit angeschlossenen Apparaten auch vorgehen. Um den Zusammenhang mit dem allgemeinen Fall zu zeigen, gehen wir auf die Gleichungen des § 284 zurück.

Da bei kleiner Induktivität  $b$  und  $Al$  sehr groß werden, schreiben wir Gl. (343 b) in der Form

$$p_\nu = -\frac{b}{\tau} + \varepsilon \frac{Al}{\tau} \sqrt{1 - \left(\frac{\nu\pi}{Al}\right)^2}.$$

Näherungsweise lautet diese Gleichung

$$p_\nu = -\frac{b}{\tau} + \varepsilon \frac{Al}{\tau} - \frac{\varepsilon (\nu\pi)^2}{2 Al \tau}.$$

Setzt man für  $b, Al, \tau$  die Werte ein, so ergeben sich für  $\varepsilon = +1$  und  $\varepsilon = -1$  die beiden Formen

$$\left. \begin{aligned} (p_\nu)_{\varepsilon=+1} &= -\frac{G}{K} - \frac{(\nu\pi)^2}{(KR - GL)l^2} \\ (p_\nu)_{\varepsilon=-1} &= -\frac{R}{L} + \frac{(\nu\pi)^2}{(KR - GL)l^2} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (352)$$

Aus dem für  $\partial l = \nu\pi$  geltenden Werte von

$$\left(\frac{\partial W}{\partial p}\right)_{p_\nu} = -(R + p_\nu L)l \frac{\tau^2}{\nu^2 \pi^2} \left(p_\nu + \frac{R}{2L} + \frac{G}{2K}\right) \cos \nu\pi$$

erhält man, wenn man additive Posten mit dem Faktor  $L$  vernachlässigt, für die beiden Formen von  $p_\nu$  der Reihe nach die Ausdrücke

$$\begin{aligned} \left( p_\nu \left( \frac{\partial W}{\partial p} \right)_{p_\nu} \right)_{\varepsilon=+1} &= \frac{Rl}{2} \cos \nu \pi \left( 1 + \frac{GRl^2}{(\nu \pi)^2} \right) \\ \left( p_\nu \left( \frac{\partial W}{\partial p} \right)_{p_\nu} \right)_{\varepsilon=-1} &= -\frac{Rl}{2} \cos \nu \pi. \end{aligned}$$

Daher ergibt sich aus Gl. (347) bei kleinen Werten von  $L$  die Gleichung für den ankommenden Strom:

$$\begin{aligned} J &= \sqrt{\frac{R}{G}} \left( e^{\sqrt{GR}l} - e^{-\sqrt{GR}l} \right) - \frac{Ee^{-\frac{R}{L}t}}{Rl} \\ &+ 2 \frac{E}{Rl} \sum_1^\infty \frac{e^{-\left(\frac{G}{K} + \frac{\nu^2 \pi^2}{KRl^2}\right)t}}{1 + \frac{GRl^2}{\nu^2 \pi^2}} \cos \nu \pi \\ &- 2 \frac{E}{Rl} \sum_1^\infty \frac{e^{-\left(\frac{R}{L} - \frac{\nu^2 \pi^2}{KRl^2}\right)t}}{\nu^2 \pi^2} \cos \nu \pi. \end{aligned}$$

Im Grenzfall  $L = 0$  und für  $G = 0$  erhält man

$$J = \frac{E}{Rl} \left( 1 + 2 \sum_1^\infty e^{-\frac{\nu^2 \pi^2}{KRl^2} t} \cos \nu \pi \right) \dots \dots \dots (353)$$

Wendet man dieselben Überlegungen auch auf die Gleichungen für die Werte an einer beliebigen Stelle nach den Gl. (350) und (351) an, so erhält man für den Grenzfall  $L = 0$

$$J_x = \frac{E}{Rl} \left( 1 + 2 \sum_1^\infty e^{-\frac{\nu^2 \pi^2}{KRl^2} t} \cos \frac{\nu \pi x}{l} \right) \dots \dots \dots (354)$$

$$V_x = E \left( 1 - \frac{x}{l} - 2 \sum_1^\infty \frac{e^{-\frac{\nu^2 \pi^2}{KRl^2} t}}{\nu \pi} \sin \frac{\nu \pi x}{l} \right) \dots \dots (355)$$

Die Gl. (353) und (354) zeigen eine aus der Annahme  $L = 0$  hervorgehende Schwierigkeit insofern, als sie für  $t = 0$  für keinen Wert von  $x$  konvergente Reihen darstellen; für  $x = 0$  wird jeder Posten der Reihe  $+ 1$ , die Summe also unendlich, für  $x = l$  werden die Posten abwechselnd  $- 1$  und  $+ 1$ , die Summe oszilliert, und für die Zwischenwerte von  $x$  wechseln Gruppen positiver Glieder mit solchen negativer Glieder ab, ohne daß sie mit steigendem  $\nu$  abnehmen. Die Ausdrücke sind also nicht brauchbar, um für  $t = 0$  den Wert der Stromstärke zu bestimmen. Am Ende wird man nach Lage der Sache, unabhängig von der Reihe, für  $t = 0$  den Wert  $J_e = 0$  rechnen dürfen. Für alle anderen Werte von  $x$  und  $t$  konvergieren die Reihen, allerdings für kleine Werte von  $\frac{t}{KRl^2}$  sehr langsam.

Das Verhältnis eines Augenblickswertes von  $J_e$  zum stationären Wert  $J_0 = E/Rl$  ist als Funktion von  $t/KRl^2$  in der nachfolgenden Tabelle dargestellt.

$t/KRl^2$	$J_e/J_0$	$t/KRl^2$	$J_e/J_0$
bis 0,029	0	0,18	0,6632
0,04	0,0103	0,20	0,7229
0,05	0,0340	0,25	0,8305
0,06	0,0704	0,30	0,8965
0,08	0,1753	0,40	0,9614
0,10	0,2929	0,50	0,9856
0,12	0,4056	0,60	0,9946
0,14	0,5057	0,80	0,9993
0,16	0,5912	1,00	0,9999

Die Berechnung dieser Tabelle ergibt, daß der Strom bis zum Augenblick  $t = \frac{KRl^2}{\pi^2} \log \text{nat} \frac{4}{3}$  so gut wie unmerklich ist und erst von da an ansteigt. Soviel, also 0,029  $KRl^2$ , beträgt die Zeitdifferenz zwischen dem Augenblick der Stromsendung und der ersten merkbaren Regung des Stromes am Ende. Bis der Strom auf den Wert  $1 - \frac{1}{e}$  angestiegen ist, vergeht eine Zeit von etwa 0,17  $KRl^2$ , während dazu bei einem Kreise nach Fig. 115, der in der Kapazität  $K$  und dem Widerstand  $R_2$  mit dem Kabel übereinstimmt, und bei dem  $R_1 = 0$  wäre, die Zeit  $KRl^2$ , also eine etwa sechsmal so lange Zeit vergehen würde. Dies erklärt sich daraus, daß die Teile der Kapazität am Kabelanfang sich über einen geringen Widerstand laden, während der gesamte Leitungswiderstand nur den Teilen am Kabelende vorgeschaltet ist.

Es wird sich bei der Anwendung auf betriebsmäßige Schaltungen zeigen, daß in dem Exponentialfaktor, welcher den zeitlichen Ablauf des Übergangszustandes bestimmt, außer der Größe  $\vartheta l$ , welche hier den Wert  $\nu\pi$  hat, der Bruch  $t/KRl^2$  vorkommt, der eine unbenannte Zahl ist. So lange vor der Anwendung der Heavisideschen Formel andere Werte von  $\vartheta l$  als Vielfache von  $\pi$  oder  $\frac{\pi}{2}$  nicht in Betracht kamen, lohnte es sich, Tabellen aufzustellen,

in denen für bestimmte Werte von  $t/KRl^2$  die Werte von  $e^{-\nu^2\pi^2 \frac{t}{KRl^2}}$  berechnet waren. Die Tabellen nur wegen der abstrakten Sonderfälle aufzustellen, läßt sich nicht rechtfertigen. Als Rechenbehelf wird daher die vierstellige Tabelle der Werte von  $e^{-x}$  im Anhang VII gegeben. Aus einem gegebenen Werte für  $\vartheta l$ , z. B.  $\frac{5\pi}{2} - 90 = 10,839$ , und für  $t/KRl^2 = 0,012$  findet man mittels des Rechenschiebers  $(\vartheta l)^2 t/KRl^2 = 1,411$ , und daraus für die Exponentialfunktion den Wert 0,2439.

Die letzte Stelle ist um eine Einheit unsicher. Ein größerer Aufwand an Ziffern für die Berechnung von Vorgängen unter Benutzung der Thomsonschen Kurve ist aber aus einem besonderen Grunde nicht gerechtfertigt, weil nämlich die Thomsonsche Formel, so sehr sie die Rechnungen gegenüber den ausführlichen Formeln vereinfacht, wegen der Vernachlässigung der Induktivität nur annähernd richtige Ergebnisse liefert. Ihre Geltung ist

um so mehr beschränkt, je geringer der Einheitswiderstand der Kupferleiter ist, und dies trifft gerade auf die großen überseeischen Kabel zu. Wir haben vorhin beim Übergang auf Kabel mit sehr kleiner und verschwindender Induktivität von den beiden Wurzeln  $p$ , für  $\varepsilon \nu$  eine ausgeschieden, weil darin ein Posten  $-R/L$  vorkam, dessen Wirkung im Exponenten als so bedeutend angesehen wurde, daß alle ihn enthaltenden Größen als zu vernachlässigen angesehen wurden.

Prüfen wir die Zulässigkeit dieser Vernachlässigung z. B. an dem früheren deutschen Seekabel zwischen Borkum und den Azoren. Es hatte nach Malcolm bei einer Länge von 1916 Seemeilen, oder rund 3550 km, im Meere einen Widerstand  $Rl = 5218$  und eine Kapazität  $Kl = 774 \cdot 10^{-6}$ . Nimmt man für die Induktivität den Wert 0,003 H/km an, so wird  $\sqrt{\frac{L}{K}} = 117$  und  $b = 22,2$ . Die aperiodische Entwicklung, bei der es darauf ankommt, daß  $\sqrt{1 - \left(\frac{\nu \pi}{b}\right)^2}$  reell ist, gilt also nur bis zu  $\nu = 7$ . Die Werte von  $p$ , werden dabei nicht unwesentlich geändert. Bei  $KRl^2 = 4,04$  und  $R/L = 490$  hat die erste Wurzel folgende Werte:

$\nu$	1	2	3	4	5	6	7
Wahrer Wert . . .	2,45	9,95	23,0	42,6	71,3	114,5	206
Annäherung . . .	2,44	9,75	22,0	39,8	62,0	89,0	121

Dies hat allerdings nur dann eine besondere Bedeutung, wenn man den ersten Anstieg der Stromstärke untersuchen will, weil man dafür eine große Zahl von Gliedern der Reihe zu berücksichtigen hat. Bei der Berechnung der Stromstärke am Ende eines Stromschrittes wird man nach der Annäherung richtig rechnen.

Bei Kabeln hohen Einheitswiderstandes, z. B. den Guttaperchaerkabeln des alten deutschen Netzes ( $R = 7,2$ ,  $K = 0,20 \cdot 10^{-6}$ ,  $L = 0,003$ ) kann man die Thomsonsche Formel unbedenklich anwenden. Bei hohen Werten des Exponenten ( $\vartheta l$ )<sup>2</sup>  $t/KRl^2$  genügt dem Zweck der Rechnung schon eine mäßige Genauigkeit.

**§ 288. Der Vorgang des Einschwingens bei Sinusströmen.** Die Frage, welche Übergangsform der Strom am Ende einer langen Leitung annimmt, wenn an ihrem Anfang zur Zeit  $t = 0$  eine sinusförmige EMK einsetzt, ist, wie schon mehrfach erwähnt, für das Fernsprechen auf sehr langen Leitungen neuerdings wichtig geworden<sup>89</sup>). Wir geben hier eine Darstellung dieses Vorganges nach der Heavisideschen Formel, welche auch ohne die Durchführung von Zahlenrechnungen die Bedeutung der Leitungseigenschaften erkennen läßt. Wir benutzen dazu die in § 151 abgeleitete Grundformel (170) und wenden sie der größeren Allgemeinheit wegen auf eine Spulenleitung an, von der man leicht auf eine gleichmäßige Leitung zurückgehen kann.

Die Stammfunktion wird zu Null, abgesehen von dem Wert  $p_0 = -\frac{R}{L}$ , für den alles wie bei der gleichmäßigen Leitung gilt, für  $n\vartheta = \nu\pi$ , wo  $\nu$

die ganzen Zahlen von 1 bis  $\infty$  durchläuft. Bei der Spulenleitung wird aber  $p_\nu$  durch die Größe  $2n \sin \frac{\nu\pi}{2n}$  bestimmt, die unter  $2n$  Werten von höchstens  $n + 1$  verschiedene Werte besitzt, also gibt es nur ebenso viele Werte von  $p_\nu$ . Wir werden dies in den für Spulenleitung geltenden Formeln dadurch andeuten, daß nur  $\nu$  als Zeichen der Größe, nach der summiert wird, an das Zeichen  $\Sigma$  herangesetzt ist. Bei der Übertragung der Formeln auf gleichmäßige Leitungen geht die Summierung von 1 bis  $\infty$ .

Wir sehen von der Ableitung ab und setzen zur Vereinfachung der Formeln wie üblich  $\beta l = b$ . Für  $\vartheta = \frac{\nu\pi}{n}$  wird nach Gl. (343) und (343a):

$$p_\nu = \frac{1}{\tau} \left( -b + i \varepsilon 2n \sin \frac{\nu\pi}{2n} \sqrt{1 - \left( \frac{b}{2n \sin \frac{\nu\pi}{2n}} \right)^2} \right),$$

und wir schreiben zur weiteren Vereinfachung:

$$2n \sin \frac{\nu\pi}{2n} = a_\nu, \quad \sqrt{1 - \left( \frac{b}{a_\nu} \right)^2} = \eta_\nu,$$

so daß also

$$p_\nu = \frac{1}{\tau} (-b + i \varepsilon a_\nu \eta_\nu).$$

Für eine gleichmäßige Leitung wird  $a_\nu = \nu\pi$ ;  $\eta_\nu$  stimmt mit der in Gl. (344) ebenso bezeichneten Größe überein, wenn man zur gleichmäßigen Leitung ohne Ableitung übergeht. Ferner wird für die Spulenleitung

$$\left( \frac{d\vartheta}{dp} \right)_{p_\nu} = -i \varepsilon \frac{\tau \eta_\nu}{n \cos \frac{\nu\pi}{2n}}.$$

Aus der Stammfunktion  $W = (R + pL) \frac{\sin n\vartheta}{\sin \vartheta}$  ergibt sich

$$\frac{\partial W}{\partial p} = L \frac{\sin n\vartheta}{\sin \vartheta} + (R + pL) \frac{n \sin \vartheta \cos n\vartheta - \sin n\vartheta \cos \vartheta}{\sin^2 \vartheta} \frac{d\vartheta}{dp}$$

und daraus folgt

$$\left( \frac{\partial W}{\partial p} \right)_{p_\nu} = L \eta_\nu \cos \nu\pi \frac{a_\nu \eta_\nu - i \varepsilon b}{\sin \frac{\nu\pi}{n} \cos \frac{\nu\pi}{2n}}.$$

Wir erhalten so für die Faktoren der Gl. (170):

$$\frac{1}{\omega^2 + p_\nu^2} = \tau^2 \frac{\omega^2 \tau^2 + 2b^2 - a_\nu^2 + i \varepsilon 2a_\nu \eta_\nu b}{(\omega^2 \tau^2 - a_\nu^2)^2 + 4b^2 \omega^2 \tau^2}$$

$$\left( \frac{\partial W}{\partial p} \right)_{p_\nu} = \frac{\sin \frac{\nu\pi}{n} \cos \frac{\nu\pi}{2n}}{L \eta_\nu} \cos \nu\pi \frac{a_\nu \eta_\nu + i \varepsilon b}{a_\nu^2}.$$

Daraus ergibt sich

$$\frac{1}{(\omega^2 + p_\nu^2) \left( \frac{\partial W}{\partial p} \right)_{p_\nu}}$$

$$= \sqrt{\frac{K}{L}} \tau \frac{n \sin \frac{\nu \pi}{n} \cos \frac{\nu \pi}{2n}}{a_\nu^2 \eta_\nu \cos \nu \pi} \frac{a_\nu \eta_\nu (\omega^2 \tau^2 - a_\nu^2) + i \varepsilon b (\omega^2 \tau^2 + a_\nu^2)}{(\omega^2 \tau^2 - a_\nu^2)^2 + 4 b^2 \omega^2 \tau^2}.$$

Nach der zur besseren Übersicht nochmals angegebenen Gleichung

$$J = E \sum_\nu e^{p_\nu t} \frac{\omega \cos \xi + p_\nu \sin \xi}{(\omega^2 + p_\nu^2) \left( \frac{\partial W}{\partial p} \right)_{p_\nu}}$$

$$- E \sum_\nu \frac{\omega \cos (\omega t + \xi) + p_\nu \sin (\omega t + \xi)}{(\omega^2 + p_\nu^2) \left( \frac{\partial W}{\partial p} \right)_{p_\nu}}$$

ist der so festgestellte Faktor zunächst noch mit einem Faktor von der Form

$$\omega \cos u + p_\nu \sin u = \frac{1}{\tau} \left[ (\omega \tau \cos u - b \sin u) + i \varepsilon a_\nu \eta_\nu \sin u \right]$$

zu multiplizieren, wobei für die erste Summe  $u = \xi$ , für die zweite Summe  $u = \omega t + \xi$  ist. Es ergibt sich

$$\frac{\omega \cos u + p_\nu \sin u}{(\omega^2 + p_\nu^2) \left( \frac{\partial W}{\partial p} \right)_{p_\nu}}$$

$$= \sqrt{\frac{K}{L}} \frac{n \sin \frac{\nu \pi}{n} \cos \frac{\nu \pi}{2n}}{a_\nu^2 \eta_\nu \cos \nu \pi} \frac{a_\nu \eta_\nu \omega \tau \cos (u + \varphi_\nu) + i \varepsilon \sqrt{a_\nu^4 + b^2 \omega^2 \tau^2} \sin (u + \psi_\nu)}{\sqrt{(\omega^2 \tau^2 - a_\nu^2)^2 + 4 b^2 \omega^2 \tau^2}},$$

wobei  $\varphi_\nu$  und  $\psi_\nu$  bestimmt sind durch

$$\operatorname{tg} \varphi_\nu = \frac{2 b \omega \tau}{\omega^2 \tau^2 - a_\nu^2}, \quad \operatorname{tg} \psi_\nu = \frac{b \omega \tau (\omega^2 \tau^2 + a_\nu^2)}{a_\nu^2 (\omega^2 \tau^2 - a_\nu^2) - 2 b^2 \omega^2 \tau^2}.$$

Bei den Posten der ersten Summe ist endlich noch der Faktor hinzuzufügen:

$$e^{p_\nu t} = e^{-\frac{b}{\tau} t} \left( \cos \frac{a_\nu \eta_\nu}{\tau} t + i \varepsilon \sin \frac{a_\nu \eta_\nu}{\tau} t \right).$$

Indem man für  $\varepsilon$  die beiden Werte  $\pm 1$  setzt, erhält man das Ergebnis in reeller Form, und zwar mit dem doppelten der reellen Anteile. Man kann das Schlussergebnis noch etwas übersichtlicher machen durch Einführen eines dritten Winkels  $\chi_\nu$  mittels der Gleichungen

$$a_\nu \sqrt{\omega^2 \tau^2 + a_\nu^2} \cos \chi_\nu = a_\nu \eta_\nu \omega \tau$$

$$a_\nu \sqrt{\omega^2 \tau^2 + a_\nu^2} \sin \chi_\nu = \sqrt{a_\nu^4 + b^2 \omega^2 \tau^2}.$$

Die auf die Wurzel  $p_0 = -\frac{R}{L}$  entfallenden Posten sind so einfach, daß sie nicht besonders abgeleitet zu werden brauchen.

Es ergibt sich zum Schluß die Gleichung

$$\begin{aligned}
 J = & \frac{E}{(R^2 + \omega^2 L^2)n} \left\{ -\omega L \cos(\omega t + \xi) \right. \\
 & \left. + R \sin(\omega t + \xi) + e^{-\frac{R}{L}t} (\omega L \cos \xi - R \sin \xi) \right\} \\
 + 2E \sqrt{\frac{K}{L}} \sum_{\nu} & \frac{n \sin \frac{\nu \pi}{n} \cos \frac{\nu \pi}{2n}}{\sqrt{(\omega^2 \tau^2 - a_{\nu}^2)^2 + 4b^2 \omega^2 \tau^2}} \left\{ e^{-\frac{b}{\tau}t} \frac{\sqrt{\omega^2 \tau^2 + a_{\nu}^2}}{a_{\nu} \eta_{\nu}} \left( \cos \chi_{\nu} \cos(\xi + \varphi_{\nu}) \cos \frac{a_{\nu} \eta}{\tau} \right. \right. \\
 & \left. \left. - \sin \chi_{\nu} \sin(\xi + \psi_{\nu}) \sin \frac{a_{\nu} \eta_{\nu}}{\tau} t \right) - \frac{\omega \tau}{a_{\nu}} \cos(\omega t + \xi + \varphi_{\nu}) \right\} \cdot \cdot \quad (356)
 \end{aligned}$$

Ob die hier angewendete Formel (170) in der Tat zu richtigen Ergebnissen führt, läßt sich an dieser Stelle in einfacher Weise prüfen. Wenn wir  $\xi = \frac{\pi}{2}$  setzen, so tritt die erregende EMK im Augenblick  $t = 0$  mit der Spannung  $E$  an die Leitung heran; es muß also ein dieser Spannung entsprechender Stoß in die Leitung gehen. Wenn wir dann  $\omega$  einen sehr geringen, im Grenzfall verschwindenden Wert geben, so bleibt die sinusförmige Kraft während langer Zeit, im Grenzfall dauernd, auf dem Wert  $E$ .

Wenn wir daher die Gleichung in die einer gleichmäßigen Leitung umformen, wobei  $n \sin \frac{\nu \pi}{n}$  durch  $\nu \pi$  ersetzt wird,  $\cos \frac{\nu \pi}{2n}$  durch Eins, und  $a_{\nu}$  den Wert  $\nu \pi$  erhält, darauf  $\xi = \frac{\pi}{2}$  und dann  $\omega = 0$  setzen, so wird sich aus Gl. (356) die Gl. (348) ergeben müssen. Es sei bemerkt, daß unter diesen Bedingungen  $\varphi = \pi$ ,  $\psi = \pi$ ,  $\chi = \frac{\pi}{2}$  werden. Es ist zu beachten, daß wir durch dieses Vorgehen nach und nach den andauernden Wechselstrom zum Verschwinden bringen, daß aber der Ausgleichsstrom im Prinzip erhalten bleibt, wenn er auch seine Form den veränderten Annahmen anpaßt. Die Probe selbst ist so einfach, daß ihre Wiedergabe entbehrlich ist.

**§ 289. Das Zusammenwirken des beständigen und des flüchtigen Stromanteils.** Gehen wir wieder auf den Fall des Einschwingens unter periodischen Kräften zurück, so sehen wir, daß der Gesamtstrom sich aus einem andauernden Wechselstrom und einem abklingenden Teile zusammensetzt, welcher sich unter dem Einfluß aller Eigenfrequenzen der Leitung periodisch ändert.

Den andauernden Wechselstrom nach der hier sich ergebenden Formel weiter zu untersuchen, hat keinen Zweck, da sein Wert nach Lage der Sache mit dem nach den früheren Ausführungen sich ergebenden übereinstimmen muß. Die vorhin angegebene Probe schließt auch ein, daß am Ende einer gleichmäßigen Leitung bis zur Zeit  $\tau$  der Gesamtstrom den Wert Null hat. Der abklingende Strom muß daher bis zu dieser Zeit den Dauerstrom in jedem Augenblick aufheben. Dies ist trotz des verschiedenen Baues beider Zeitfunktionen nicht auffälliger als bei den beiden Teilen in Gl. (348).

Für eine nicht gleichmäßige Leitung treffen diese Überlegungen nicht zu. Bei einer mit Spulen belasteten Leitung gibt die Größe  $\tau = \sqrt{KLI}$ , worin die Koeffizienten Durchschnittswerte für Leitungen und Spulen bezeichnen, welche wir der gleichwertigen Leitung mit gleichmäßiger Verteilung zuschreiben, nicht die Zeit an, bis zu der am Ende der Leitung vollkommene Ruhe herrscht. Auf den Leitungsteilen pflanzt sich die elektrische Welle mit viel höherer Geschwindigkeit, bis zur Lichtgeschwindigkeit, fort. An jeder Spule erfährt durch Reflexion eines Teiles der Aufbau der Welle, auf die Wirkung am Ende gerechnet, eine Verzögerung, aber Teile der Welle pflanzen sich mit den den Leitungen zukommenden Geschwindigkeiten nach dem Ende fort. Daher beginnt dort die Änderung schon vor der Zeit  $\tau$ , aber es sind zunächst nur geringe Teile, die sich nach und nach durch solche verstärken, die nach der Reflexion an einer Spule zur vorausliegenden zurücklaufen, dort wieder durch Reflexion die frühere Richtung erhielten und nunmehr einen neuen Teil durch die Spule nach dem Ende drücken<sup>90</sup>). Während so, weil die belastete Leitung der gleichmäßigen nur ähnlich, nicht gleichartig ist, vor der Zeit  $\tau$  schon etwas ankommt, ist die Übereinstimmung doch wieder groß genug, daß ungefähr zur Zeit  $\tau$  die Hauptmasse der Welle ankommt und eine gegen die Vorläufer starke Bewegung hervorbringt, die den Anschein eines steilen Ansprungs hat, in Wirklichkeit aber allmählich verläuft. Diesen Vorgängen ist man theoretisch und durch Versuche nachgegangen, Fig. 175 bietet davon Beispiele; die genauere Erörterung würde hier zu weit führen.

Für den Einschwingungsvorgang bei Fernsprechrömen ist der andauernde Teil der Form nach bekannt. Es kommt darauf an, den flüchtigen Teil im wesentlichen von der Zeit  $t = \tau$  ab zu untersuchen. Dieser setzt sich mit dem andauernden zusammen und verändert seine Gestalt, bis er abgeklungen ist.

Es ist hierzu allerdings zu bemerken, daß diese Betrachtungsweise weniger physikalisch als formal algebraisch ist. Nach Gl. (356) wären auch schon von  $t = 0$  ab am Ende der Leitung der andauernde und der flüchtige Teil jeder für sich vorhanden, aber in solcher Form, daß sie sich bis zur Zeit  $\tau$  jeden Augenblick identisch aufheben. Es ist sicher, daß in Wirklichkeit nicht deswegen Ruhe am Leitungsende bis zur Zeit  $t = \tau$  herrscht, weil nur die Differenz zweier Größen wirksam wird, sondern weil keine von beiden überhaupt vorhanden ist.

Mit dem Einlaufen der Welle baut sich dann nach und nach der Vorgang auf, der zuletzt in den andauernden Zustand übergeht. Die gesonderte Betrachtung des einen oder anderen Teils kann also zu falschen Vorstellungen führen. Wir wollen den flüchtigen Vorgang unter der Annahme, daß  $\xi = 0$  sei, betrachten, weil dadurch die Berechnung des von Null verschiedenen ersten Ansprungs vermieden wird.

In diesem Falle findet man den Ausdruck

$$J_f = \frac{\omega L E}{n(K^2 + \omega^2 L^2)} e^{-\frac{2b}{\tau}t} + 2 \omega K n e^{-\frac{b}{\tau}t} \sum \frac{n \sin \frac{\nu \pi}{n} \cos \frac{\nu \pi}{2n} \cos \nu \pi}{a_\nu^2 \eta_\nu \sqrt{(\omega^2 \tau^2 - a_\nu^2)^2 + 4 b^2 \omega^2 \tau^2}} \cos \left( \frac{a_\nu \eta_\nu}{\tau} t + \sigma_\nu \right),$$

wo

$$\operatorname{tg} \sigma_\nu = \frac{b \omega^2 \tau^2 + a_\nu^2}{a_\nu \eta_\nu \omega^2 \tau^2 - a_\nu^2}.$$

Wir betrachten diesen Ausdruck unter der idealisierenden Annahme, daß die Verlustgrößen so geringe Bedeutung haben, daß wir sie, wo sie additiv stehen, vernachlässigen können. Es wird dann  $\sigma_\nu = 0$ ,  $\eta_\nu = 1$ ,  $a_\nu = \nu \pi$ . Für eine lange Leitung kommt  $a_\nu^2$  für die Glieder, die am meisten ins Gewicht fallen, weil  $\nu$  noch geringe Werte hat, gegen  $\omega^2 \tau^2$  nicht in Betracht. Man findet in diesem Falle die Näherungsformel

$$J_f = \frac{E}{\omega L n} \left( e^{-\frac{2b}{\tau} t} + e^{-\frac{b}{\tau} t} \sum_1^\infty \frac{\cos \nu \pi}{\nu \pi} \cos \frac{\nu \pi}{\tau} t \right).$$

Um den Wert der Reihe zu finden, gehe man von der Gleichung aus, daß  $\frac{d}{dt} \frac{e^{-\nu at}}{\nu a} = -e^{-\nu at}$  ist. Daher ist

$$\begin{aligned} \sum_1^\infty (-1)^\nu \frac{e^{-\nu at}}{\nu a} &= \int dt (e^{-at} - e^{-2at} + e^{-3at} \mp \dots) \\ &= \int dt \frac{e^{-at}}{1 + e^{-at}} = -\frac{1}{a} \log(1 + e^{-at}). \end{aligned}$$

Setzt man  $a = -i \omega$ , so wird

$$\frac{1}{i \omega} \log(1 + e^{i \omega t}) = \frac{t}{2} - \frac{i}{\omega} \log \sqrt{\left(2 \sin \frac{\omega t}{2}\right)^2}.$$

Dies ist andererseits gleich  $\sum_1^\infty \cos \nu \pi \frac{(\cos \nu \omega t + i \sin \nu \omega t)}{\nu \omega}$ . Indem man

zerlegt und  $\omega = \frac{\pi}{\tau}$  setzt, erhält man die Formeln

$$\begin{aligned} \frac{t}{\tau} + 2 \sum_1^\infty \frac{\cos \nu \pi}{\nu \pi} \sin \frac{\nu \pi}{\tau} t &= 0, \\ 2 \log \sqrt{\left(2 \sin \frac{\pi}{2\tau} t\right)^2} + 2 \sum_1^\infty \frac{\cos \nu \pi}{\nu \pi} \cos \frac{\nu \pi}{\tau} t &= 0, \end{aligned}$$

von denen die erste schon in § 286 auf anderem Wege abgeleitet wurde. Es wird also jetzt

$$J_f = \frac{E}{\omega L n} \left( e^{-\frac{2b}{\tau} t} - e^{-\frac{b}{\tau} t} \log \sqrt{\left(2 \sin \frac{\pi}{2\tau} t\right)^2} \right) \dots \dots (357)$$

Die Quadratwurzel aus einem Quadrate soll anzeigen, daß es sich stets um eine positive Größe, also einen reellen Logarithmus handelt. Dieser stellt einen Vorgang dar, dessen Werte sich mit der Periode  $\tau/4$  wiederholen, der aber zu den verschieden voneinander abstehenden Zeiten  $\frac{t}{\tau} = \frac{5}{6} \pi, \frac{7}{6} \pi, \frac{11}{6} \pi, \frac{13}{6} \pi$  usw. durch Null geht und auch der Amplitude nach unsymmetrisch ist. Daß für  $\frac{t}{\tau} = 2, 4, 6, \dots$  der Strom logarithmisch unendlich wird, hängt wohl mit den von der Wirklichkeit stark abweichenden Voraussetzungen zusammen,

die insbesondere die Phasenwinkel  $\sigma$ , ganz vernachlässigen. Man wird also bei einer Leitung geringer Dämpfung, gleichgültig, ob es sich um eine gleichmäßige oder eine Spulenleitung handelt, im Übergangszustand eine Überlagerung von Schwingungen über die Schwingungen der aufgedrückten Frequenz erwarten können, in denen die kleinste Eigenfrequenz der Leitung besonders hervortritt, die aber von Komponenten sämtlicher Eigenfrequenzen begleitet ist.

**§ 290. Ein Mittel zum Abkürzen der Einschwingungszeit.** In einer vor kurzem ausgelegten Patentanmeldung<sup>91)</sup> aus dem Bereich der Western El. Co. werden folgende Angaben über die Bemessung einer belasteten Leitung gemacht, um den Vorgang des Einschwingens in einem für das Fernsprechen ausreichenden Maße abzukürzen. Neben der Laufzeit  $\tau = \sqrt{KL}n$  kommt die Zeit  $T$  in Frage, innerhalb welcher ein Strom von der Frequenz  $\omega$  den Übergang von einem Stetigkeitszustand in einen anderen praktisch beendet haben muß, damit der Übergang nicht stört. Wenn  $\omega_0$  die Grenzfrequenz der Leitung ist, so soll  $\tau$  so klein gemacht werden, daß höchstens

$$\tau \left( \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}} - 1 \right) = T \dots \dots \dots (358)$$

Das daraus sich ergebende Verhältnis  $T/\tau$  hängt offenbar von dem nur durch Versuche bestimmbareren Frequenzverhältnis  $\omega/\omega_0$  ab. Für  $T$  haben die Versuche den Wert 0,005 sek ergeben, und für  $\tau$  wird ein Wert bis zu 0,05 sek, also  $\tau = 10 T$  als zulässige Grenze bezeichnet.

Entwickelt man diesen Ausdruck unter der Annahme, daß  $\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2$  klein gegen Eins ist, so ergibt sich die Bedingung

$$\frac{\omega^2 l}{\omega_0^3 s} = T.$$

Zu einem, abgesehen von einem Zahlenfaktor, gleichen Ergebnis führt eine Ableitung<sup>92)</sup> von K. W. Wagner, die sich auf den Unterschied der Phasengeschwindigkeit (§ 220) auf einer Leitung mit Verzerrung gegenüber der Fortpflanzungsgeschwindigkeit stützt.

Der letzteren entspricht bei einer Leitungslänge  $l$  eine Laufzeit  $\tau = l\sqrt{KL}$ , der Phasengeschwindigkeit eine größere Laufzeit  $\tau' = \frac{l}{\omega} \alpha$ . Für eine Spulenleitung besteht nach § 249 zwischen Winkelmaß  $\alpha = \alpha s$  und dem Frequenzverhältnis  $w = \frac{\omega}{\omega_0}$  die Beziehung  $\sin \frac{\alpha}{2} = w$ . Man erhält daher für den Unterschied der beiden Laufzeiten, der ein Maß der Verzerrung ist,

$$\Delta \tau = \frac{2l}{\omega_0 s} \left( \frac{\arcsin \frac{\omega}{\omega_0}}{\frac{\omega}{\omega_0}} - 1 \right).$$

Für Frequenzen, die hinreichend unter der Grenzfrequenz liegen, ergibt sich die vereinfachte Formel

$$\Delta \tau = \frac{1}{3} \frac{\omega^2 l}{\omega_0^3 s}$$

Die Verzerrung durch Einschwingungsvorgänge wird daher auf zwei Leitungen verschiedener Länge gleich sein, wenn, unter Voraussetzung gleichen Spulenabstandes, das Verhältnis ihrer Grenzfrequenzen gleich der dritten Wurzel aus dem Verhältnis ihrer Längen gemacht wird.

Die praktische und auch den Erfolg bringende Folgerung, daß man den Übergangsvorgang dadurch abkürzen könne, daß man durch eine leichtere Belastung die Laufzeit  $\tau$  vermindert, stimmt mit der Gl. (357) dann überein, wenn man annimmt, daß das für den Übergangszustand wirksame Dämpfungsmaß der Leitung trotz der Verstärker groß ist.

In der für den Aufbau des Zeichens höchstens zulässigen Zeit  $T = 0,005$  sek wird der flüchtige Anteil des Stromes gedämpft im Maße  $e^{bT}$ . Ist die Leitung in zwei zu vergleichenden Fällen so beschaffen, daß im ersten Falle  $\frac{T}{\tau} = \frac{1}{20}$ , im zweiten  $\frac{T}{\tau} = \frac{1}{10}$  ist, so nehmen die Amplituden des Ausgleichstromes zur Zeit  $\tau + T$  im Vergleich zu einer Einheit zur Zeit  $\tau$  bei verschiedenen Werten von  $b$  auf nachstehend angegebene Beträge ab, deren Verhältnis nur bei großen Werten von  $b$  merklich von Eins abweicht.

	$b = 1,3$	$b = 10$	$b = 20$
$T = 0,05 \tau$ . . . . .	0,937	0,607	0,368
$T = 0,10 \tau$ . . . . .	0,878	0,368	0,135
Verhältnis . . . . .	0,94	0,60	0,37

Da die Frage, mit welchem Werte von  $b$  man zu rechnen hat, noch durchaus ungeklärt ist, hat es keinen Zweck, die theoretischen Ausführungen fortzusetzen. Die Gl. (170) in der Anwendung auf einen Kettenleiter, als welchen man nach § 259 auch eine Leitung mit Verstärkern betrachten kann, gibt ein Mittel, mit wenn auch weitläufigen, so doch elementaren Rechnungen die Verhältnisse näher zu studieren, wenn erst die notwendigen Grunddaten genauer bekannt sein werden.

**§ 291. Regelmäßige Wechselzeichen auf einem Kabel.** Nach § 149, Gl. (168 b) ist für den Fall, daß einem zur Zeit  $t = 0$  einsetzenden positiven Zeichen abwechselnd je  $n$  negative und positive Zeichen gleicher Dauer  $T$ , im ganzen also  $2n$  Zeichen von der Gesamtdauer  $2nT$  vorausgegangen sind, der Stromanstieg gegeben durch die Gleichung

$$J_a^{(n)} = \left(\frac{E}{W}\right)_{p=0} + 2E \sum_{\nu} \left(\frac{\partial W}{\partial p}\right)_{p_{\nu}} \frac{1 + e^{(2n+1)p_{\nu}T}}{1 + e^{p_{\nu}T}} \dots \quad (359 a)$$

Wendet man die gleichen Überlagerungen auf den Fall an, daß die EMK, nachdem sie  $n$  mal von  $-E$  auf  $+E$  gestiegen und zurückgegangen ist, noch einmal während der Dauer  $T$  auf  $+E$  bleibt und im Augenblick  $t = 0$  auf

—  $E$  fällt, um dann diesen Wert bis auf weiteres beizubehalten, so ergibt sich für den Stromabfall die Form

$$J_c^{(n)} = - \frac{E}{(W)_{p=0}} - 2E \sum_{\nu} \frac{e^{p_{\nu} t}}{\left(p \frac{\partial W}{\partial p}\right)_{p_{\nu}}} \frac{1 - e^{(2n-2)p_{\nu} T}}{1 + e^{p_{\nu} T}} \dots \quad (359 b)$$

In den beiden Gleichungen rechnet die Zeit unabhängig, in der ersten vom Beginn des Aufstiegs, in der zweiten vom Beginn des Abfalls. Man kann diese Gleichungen benutzen, um durch eine verhältnismäßig einfache Rechnung festzustellen, mit welchen Stromwerten die aufeinanderfolgenden Anstiege und Abfälle abschließen. Auch ohne daß man die Zwischenwerte berechnet, wird man aus diesen Werten Schlüsse auf die zulässige Wechselgeschwindigkeit ziehen können.

Zur Zeit  $\tau = \sqrt{KLI}$  kommt die Welle des ersten positiven Impulses nach der hier angenommenen langen Pause negativer EMK an. Es ist ohne weiteres klar, daß bis dahin der Strom am Ende den negativen Dauerwert  $-(E/W)_{p=0}$  hatte. Der erste Anstieg dauert bis zur Zeit  $\tau + T$  und wir schreiben den zu dieser Zeit erreichten Wert in der Form

$$J_{a, \tau+T}^{(0)} = \frac{E}{(W)_{p=0}} + \sum_{\nu} \frac{2E e^{p_{\nu}(\tau+T)}}{\left(p \frac{\partial W}{\partial p}\right)_{p_{\nu}} (1 + e^{p_{\nu} T})} + \sum_{\nu} \frac{2E e^{p_{\nu}(\tau+2T)}}{\left(p \frac{\partial W}{\partial p}\right)_{p_{\nu}} (1 + e^{p_{\nu} T})}$$

Für den nun beginnenden Stromabfall gilt Gl. (359 b), indessen gilt die Zeit  $\tau$  für den Beginn und die Zeit  $\tau + T$  für das Ende des Abfalles. Der dann erreichte Wert ist

$$J_{c, \tau+T}^{(0)} = - \frac{E}{(W)_{p=0}} - \sum_{\nu} \frac{2E e^{p_{\nu}(\tau+T)}}{\left(p \frac{\partial W}{\partial p}\right)_{p_{\nu}} (1 + e^{p_{\nu} T})} + \sum_{\nu} \frac{2E e^{p_{\nu}(\tau+2T)}}{\left(p \frac{\partial W}{\partial p}\right)_{p_{\nu}} (1 + e^{p_{\nu} T})}$$

Für den neuen Anstieg ist die Gl. (359 a) mit  $n = 1$  anzuwenden, und die Zeit  $t$  darin rechnet wieder vom Beginn des Anstiegs; Ähnliches gilt für den zweiten Abfall nach Gl. (359 b). Wir erhalten die Endwerte

$$J_{a, \tau+T}^{(1)} = \frac{E}{(W)_{p=0}} + \sum_{\nu} \frac{2E e^{p_{\nu}(\tau+T)}}{\left(p \frac{\partial W}{\partial p}\right)_{p_{\nu}} (1 + e^{p_{\nu} T})} + \sum_{\nu} \frac{2E e^{p_{\nu}(\tau+2T)}}{\left(p \frac{\partial W}{\partial p}\right)_{p_{\nu}} (1 + e^{p_{\nu} T})},$$

$$J_{c, \tau+T}^{(1)} = - \frac{E}{(W)_{p=0}} - \sum_{\nu} \frac{2E e^{p_{\nu}(\tau+T)}}{\left(p \frac{\partial W}{\partial p}\right)_{p_{\nu}} (1 + e^{p_{\nu} T})} + \sum_{\nu} \frac{2E e^{p_{\nu}(\tau+2T)}}{\left(p \frac{\partial W}{\partial p}\right)_{p_{\nu}} (1 + e^{p_{\nu} T})}.$$

Setzt man dies fort, so kehren in jedem Werte zwei Posten wieder, die von der Zahl der vorausgegangenen Wechsel unabhängig sind, und deren Summe bei dem ansteigenden Strom (algebraisch) das positive, bei dem abfallenden das negative Vorzeichen hat.

Schreiben wir

$$\frac{E}{(W)_{p=0}} = J_0, \quad \frac{2E e^{p_{\nu}(\tau+T)}}{\left(p \frac{\partial W}{\partial p}\right)_{p_{\nu}} (1 + e^{p_{\nu} T})} = J_{\nu},$$

so erhält man folgende Gleichungen für den Schlußwert nach dem Aufstieg des Stromes nach  $n$  voraufgegangenen vollen Wechseln und nach dem darauf folgenden Stromabfall:

$$J_{a, \tau+T}^{(n)} = J_0 + \sum_{\nu} J_{\nu} + \sum_{\nu} J_{\nu} e^{(2n+1)p_{\nu} T}$$

$$J_{c, \tau+T}^{(n)} = -J_0 - \sum_{\nu} J_{\nu} + \sum_{\nu} J_{\nu} e^{(2n+2)p_{\nu} T}$$

Man kann vielleicht zur Vereinfachung der Rechnung, statt die Größe  $\sum_{\nu} J_{\nu} e^{(2n+1)p_{\nu} T}$  für alle  $n$  zu berechnen, die stetige Funktion  $\sum_{\nu} J_{\nu} e^{y p_{\nu} T}$  für so viele Werte von  $y$  berechnen, daß man den Kurvenzug auslegen kann, und dann die Ordinaten dieser Kurve für die Zeiten  $\tau + T$ ,  $\tau + 2T$  usw. graphisch feststellen. Für die Ordinaten mit ungeraden Vielfachen von  $T$  wird der Wert  $J_0 + \sum_{\nu} J_{\nu}$  (algebraisch) addiert, für die anderen abgezogen.

In dem nachstehenden Beispiel, das sich auf ein Kabel mit hohem Wert  $R/L$  bezieht, so daß die reine Thomsonformel angewandt werden kann (z. B. deutsche Guttaperchalandkabel mit  $R = 7,2$ ,  $L \approx 0,003$ , also  $R/L = 2400$ ) und für Kurzschluß am Ende, soll festgestellt werden, bei welcher Geschwindigkeit bei einem Dauerstrom von  $\pm 20$  mA der erste Zeichenstrom nach dem negativ angenommenen Trennstrom eine Stärke von 4 mA, also  $0,2 J_0$  auf der positiven Seite erreicht. Wir haben der einfachen Darstellung wegen die Aufgabe unter der Annahme der Anwendung von Doppelstrom betrachtet, bei dem die am Anfange angelegte EMK zwischen  $-E$  und  $+E$  schwankt. Die Vorgänge bei Einfachstrom würden sich ergeben, wenn wir zu allen Stromstärken den konstanten Wert  $J_0$  addieren und ein Schwanken der EMK zwischen 0 und  $2E$  annehmen. Vom Werte  $-J_0$  als Ausgang betrachtet, würde also die Aufgabe darauf hinauskommen, festzustellen, in welcher Zeit der erste Stromimpuls noch die Höhe 0,6 der Dauerstromstärke  $2 J_0$  erreicht.

Die Fälle betriebsmäßiger Schaltung unterscheiden sich von dem gerechneten Falle nur dadurch, daß  $W$  und  $p_{\nu}$  andere Werte haben; die Rechnung ist dem Schema nach dieselbe.

Für das Thomsonkabel ist, wie schon abgeleitet,

$$(W)_{p_0} = Rl, \quad p_{\nu} = -\frac{\nu^2 \pi^2}{KRl^2}, \quad \left( p \frac{\partial W}{\partial p} \right)_{p_{\nu}} = \frac{Rl}{2} \cos \nu \pi.$$

Es wird daher

$$J_0 = \frac{E}{R}, \quad J_{\nu} = \frac{4E}{R} \frac{e^{-\frac{\nu^2 \pi^2 T}{KRl^2}}}{1 + e^{-\frac{\nu^2 \pi^2 T}{KRl^2}}}$$

Man erhält für hier passende Werte von  $T/KRl^2$  und die bei vier Dezimalstellen in Frage kommenden  $\nu$  folgende Werte von  $e^{p_{\nu} T}$ .

$T/KRl^2$	0,160	0,170
$\nu = 1$ . . . . .	0,2062	0,1868
$\nu = 2$ . . . . .	0,0018	0,0012

Danach ergeben sich für  $\frac{J_\nu}{J_0}$  und  $\frac{J_\nu e^{(2n+1)p_\nu T}}{J_0}$  für  $T = 0,160 KRl^2$  die Werte

	$\frac{J_\nu}{J_0}$	$\frac{J_\nu e^{p_\nu T}}{J_0}$	$\frac{J_\nu e^{3p_\nu T}}{J_0}$	$\frac{J_\nu e^{5p_\nu T}}{J_0}$
$\nu = 1 \dots$	-0,6837	-0,1410	-0,0060	-0,0003
$\nu = 2 \dots$	+0,0072	—	—	—
	-0,6765			

Daher ist  $J_0 + \sum J_\nu = 0,3235 J_0$ . Wenn man dies zu den für die  $\sum \frac{J_\nu e^{(2n+1)p_\nu T}}{J_0}$  angegebenen Werte, für welche nur  $\nu = 1$  einen Beitrag liefert, addiert oder es davon abzieht, so ergeben sich die Grenzwerte des Stromes einschließlich des Anfangswertes in folgender Reihenfolge:

$$-1,000 J_0, +0,1825 J_0, -0,3295 J_0, +0,3232 J_0, \dots$$

Der Anstieg des ersten Zeichens erfüllt also noch nicht ganz die gestellte Anforderung. Durch eine Rechnung gleicher Art erhält man für  $T = 0,170 KRl^2$

$$-1,000 J_0, +0,2568 J_0, -0,3798 J_0, +0,3733 J_0, \dots$$

Entsprechend der geringeren Geschwindigkeit beträgt der bald zuzuzählende, bald abzuziehende Betrag hier  $0,3748 J_0$ .

Die verlangte Höhe des ersten Anstiegs wird also etwa bei  $T = 0,1625 KRl^2$  erreicht. Auf einem 300 km langen deutschen Guttapercha-Erdkabel ( $Rl = 2160$ ,  $Kl = 60 \cdot 10^{-6}$ ) würde die vorgeschriebene Höhe des ersten Impulses bei einer Schrittdauer von 0,021 sek, also bis zu einer Geschwindigkeit von 570 Zeichen des Fünferalphabets in der Minute erreicht werden.

## Zweiter Abschnitt.

### Anwendung auf betriebsmäßige Schaltungen.

§ 292. **Allgemeine Grundlagen.** Im ersten Abschnitt ist der Einfachheit halber die Formel von Heaviside auf Leitungen angewandt worden, die am Anfang unmittelbar mit der Stromquelle, am Ende unmittelbar mit der Erde oder der Rückleitung verbunden waren. Dies machte die Auffindung der Wurzeln  $\vartheta l$  für die Gleichung  $W = 0$  sehr einfach. Bei der Übertragung der Methode auf betriebsmäßige Schaltungen wird sich zeigen, daß die Gleichungen für den Endstrom der Form nach unverändert bleiben, daß aber die Größen  $p_\nu$  und  $\left(x \frac{\partial W}{\partial p}\right)_{p_\nu}$  sich von Fall zu Fall ändern. Aufgaben dieser Art sind in großer Zahl von Malcolm und nach ihm von anderen untersucht und auf bestimmte Fälle angewendet worden. Es kommt hier nur in Frage, die Methode an einfachen Beispielen zu zeigen. Malcolm beschränkt sich auf den Fall der von Induktivität vollkommen freien Leitung; wir wollen wenigstens für den Anfang die allgemeine Leitung zugrunde legen.

§ 293. Die Stammfunktion für betriebsmäßige Schaltungen. Sie ist schon in § 280 abgeleitet worden und hat den Wert, wenn wir  $\partial l = u$  setzen,

$$W = (R + pL)l \left[ \cos u \frac{R_a + R_e}{(R + pL)l} + \sin u \left( \frac{1}{u} - u \frac{R_a R_e}{(R + pL)^2} \right) \right],$$

$p$  und  $u$  sind durch die Gleichung verbunden:

$$p^2 + 2p \frac{b}{\tau} + \frac{u^2}{\tau^2} = 0,$$

aus welcher sich für gegebenes  $u$  zwei Werte von  $p$  ergeben, die wir durch das für  $+1$  stehende Zeichen  $\varepsilon$  andeuten,

$$p = -\frac{b}{\tau} \left( 1 - \varepsilon \sqrt{1 - \frac{u^2}{b^2}} \right) = -\frac{b}{\tau} (1 - \varepsilon \xi).$$

Man findet ferner

$$\frac{du}{dp} = -\varepsilon \frac{b \tau \xi}{u}.$$

Bei der Einführung des Wertes von  $p$  in  $W$  erhält man

$$W = \frac{Rl}{2} (1 + \varepsilon \xi) \left[ 2 \cos u \frac{R_a + R_e}{Rl(1 + \varepsilon \xi)} + \sin u \left( \frac{1}{u} - u \frac{4 R_a R_e}{(Rl)^2 (1 + \varepsilon \xi)} \right) \right].$$

Darin sind noch Funktionen von  $u$ ; zunächst  $\xi$ , ferner im allgemeinen Fall  $R_a$  und  $R_e$ , da diese, wenn die Apparate Kapazität oder Induktivität enthalten, von  $p$  und daher auch von  $u$  abhängen. Man kann daher  $\frac{\partial W}{\partial u}$  nicht allgemein in einer übersichtlichen Form darstellen. Die in den Gleichungen vorkommende Größe  $p \frac{\partial W}{\partial p}$  hat, auf  $u$  bezogen, den Wert

$$p \frac{\partial W}{\partial p} = \frac{b^2 \xi}{u} (\varepsilon - \xi) \frac{\partial W}{\partial u}.$$

Gehen wir zu einer Leitung mit geringer Induktivität über und sehen von der in Gl. (352) festgestellten Wurzel für  $\varepsilon = -1$ , welche den Posten  $-R/L$  enthält, ab, weil die dazugehörenden Anteile gegen die übrigen verschwinden, so wird für  $\varepsilon = +1$  mit Hilfe der schon früher gebrauchten Näherungsrechnungen der Wert

$$p \frac{\partial W}{\partial p} = \frac{u}{2} \frac{\partial W}{\partial u}$$

gefunden. Für  $\varepsilon = +1$  erhält  $p$  den Näherungswert

$$p = -\frac{u^2}{KRl^2}.$$

Da unter der gemachten Voraussetzung  $\zeta = 1$  wird, so ergibt sich für die Stromstärke, mit welcher der Strom die Leitung am Ende verläßt, die Gleichung

$$J = \frac{E}{(Rl + R_a + R_e)u - 0} + \frac{2E}{Rl} \sum_{\nu} u_{\nu} \left[ \frac{\partial}{\partial u} \left\{ \cos u \frac{R_a + R_e}{Rl} + \sin u \left( 1 - u \frac{R_a R_e}{(Rl)^2} \right) \right\} \right]_{u=u_{\nu}} e^{-\frac{u_{\nu}^2}{KRl^2 t}} \quad (360)$$

**§ 294. Das  $KR$ -Gesetz.** Vergleichen wir den Endstrom zweier Leitungen verschiedener Eigenschaften, deren Endschaltungen wir aber so einrichten, daß das Verhältnis der Werte  $R_a$  und  $R_e$  zum Leitungswiderstande  $Rl$  in beiden Fällen dasselbe ist. Erhöhen wir auch die EMK im Verhältnis der Widerstände  $Rl$ , so ergeben sich in beiden Fällen gleiche Werte, wenn wir die Zeiten  $t$  im Verhältnis der Beträge  $KRl^2$  für die beiden Leitungen wählen. Auf einem Kabel, bei dem das Produkt  $KRl^2$  doppelt so groß ist, wie bei einem anderen, erreicht der Endstrom einen bestimmten Wert unter den anderen noch gemachten Voraussetzungen gerade in der doppelt so großen Zeit, wie bei den anderen.

Indem man die Zeichen  $K$  und  $R$  für die Gesamtwerte von Widerstand und Kapazität anspricht, nennt man diesen Satz auch das  $KR$ -Gesetz. Unter der Voraussetzung, daß die Endschaltungen dem Widerstand des Kabels angepaßt werden, gilt also die für ein beliebiges Kabel berechnete Stromkurve für jedes Kabel, wenn man den Zeitmaßstab nach dem Werte des Produktes  $KRl^2$  ändert.

**§ 295. Telegraphiergeschwindigkeit auf Leitungen.** Von der Form der Stromkurve als Zeitfunktion hängt auch die Arbeitsgeschwindigkeit ab. Wenn die Zeichen mit Relais aufgenommen werden sollen, so muß ein bestimmter Unterschied zwischen den größten und kleinsten Stromstärken bei allen Zeichen bestehen, wie dies im Anschluß an Fig. 73 erläutert worden ist. Sind also die Kurven zweier Kabel bei entsprechend reduziertem Zeitmaßstab gleich, so ermöglichen sie die Wiedergabe mit dem gleichen Apparat, aber mit Geschwindigkeiten, die im umgekehrten Verhältnis der Produkte  $KRl^2$  stehen. Wenn die ankommenden Ströme durch eine je nach der Stromstärke mehr oder weniger weit aus der Ruhelage herausgehende Schreibvorrichtung auf einen laufenden Streifen aufgezeichnet werden, so ist je nach dem Alphabet ein bestimmtes Maß von Ausprägung jedes Zeichens (definition) erforderlich, damit der geübte Apparatbeamte die Schrift noch lesen kann. Es ergeben sich wieder gleichartige Zeichen, wenn die Geschwindigkeiten umgekehrt dem Produkt  $KRl^2$  gewählt werden.

Es leuchtet ein, daß das  $KR$ -Gesetz für verschiedene Formen des Empfangsapparates zu verschiedenen Konstanten für die Zahl der Zeichen führt, die in einer Minute aufgenommen werden können. Man drückt die Geschwindigkeit zweckmäßig durch die für einen Stromschritt des betreffenden Systems erforderliche Zeit in Sekunden aus. Einen Stromschritt lang ist das

kürzeste vorkommende Zeichen des Systems, also im Morsesystem ein Punkt; im Fünferalphabet umfaßt jedes übertragene Zeichen fünf Stromschritte.

Bei Systemen, die mit Relais als Empfänger arbeiten, erfordert ein Stromschritt auf Leitungen, für welche die Thomsonkurve gilt, eine Zeit <sup>93)</sup> von  $T = 0,144 KRl^2$  sek, vermehrt um einen Betrag von 0,002 sek für jedes zwischen Stromquelle und Empfänger liegende Sende- oder Übertragungsrelais. Die Zahl 0,144 gilt für Relais, deren Widerstand  $R_e$  nicht mehr als  $\frac{1}{20}$  des Leitungswiderstandes  $Rl$  ausmacht. Für andere Verhältnisse gelten Zahlen, die man nach den folgenden interpolieren kann:

$R_e/Rl =$	0,10	0,15	0,20	0,30	0,40
Faktor . . . . .	0,174	0,193	0,205	0,221	0,234

Durch Kunstschaltungen kann die Schrittzeit erheblich verkürzt werden, z. B. durch eine Maxwellerde um etwa  $\frac{1}{3}$ , so daß die Telegraphiergeschwindigkeit um etwa die Hälfte steigt.

Aus der so berechneten Zeit erhält man bei Systemen, die das Morsealphabet benutzen, die Zahl  $n$  der Buchstaben in der Minute als  $n = \frac{6,5}{T}$ .

Bei den Typendruckern, welche nach dem Fünferalphabet arbeiten, gilt  $n = \frac{12}{T}$ . Gegensprechsaltungen ergeben in jeder Richtung etwa  $\frac{3}{5}$  bis  $\frac{3}{4}$  der berechneten Telegraphiergeschwindigkeit. Die Zahlen  $n$  gelten natürlich nur in dem Bereich, in welchem die von dem Empfangselektromagnet mechanisch bewegten oder elektrisch gesteuerten Teile noch folgen können, so daß z. B. bei dem Wheatstoneschen Farbschreiber  $n < 2000$ , bei dem Siemensschen Typendrucker zurzeit  $n < 1000$  ist.

Auf ein Wort des Textes, einschließlich der Abstände zwischen Worten, kommen im deutschen Verkehr durchschnittlich 7 Zeichen, also 45 Stromschritte beim Morsealphabet, 35 beim Fünferalphabet.

Beim Heberschreiber, der auf langen Kabeln als Empfänger dient, brauchen die Zeichen nicht einzeln entwickelt zu sein. Er benutzt das Morsealphabet,

Fig. 220.

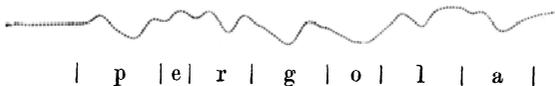
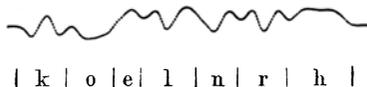


Fig. 221.

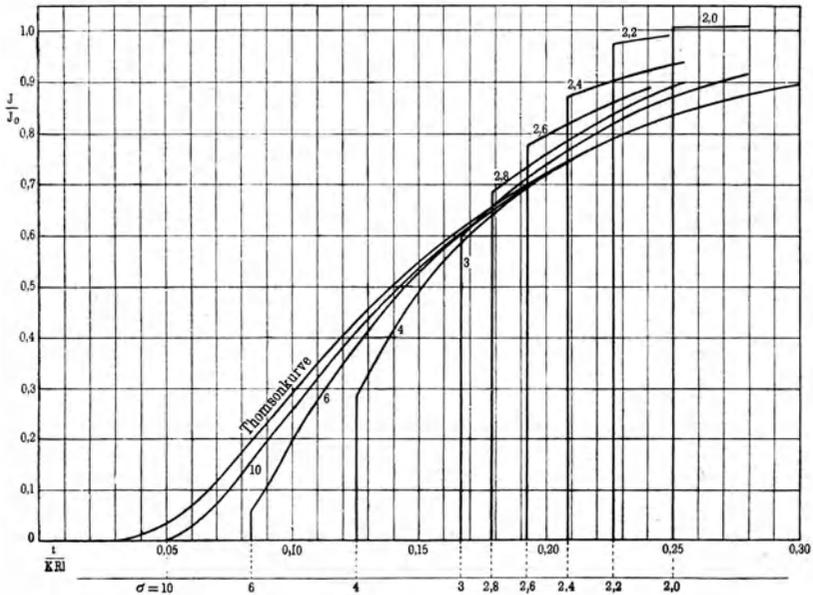


aber in der Art, daß ein Punkt durch eine Ablenkung der Schreiblinie nach oben, ein Strich durch eine gleiche Zeit dauernde Ablenkung nach unten angegeben wird. In den Schriftproben Fig. 220 und 221 sieht man, daß nur der Wechsel der Stromrichtung in der Kurve zum Ausdruck kommt, während Impulse gleicher Richtung zu einer gegen die Nulllinie konkaven Linie

zusammenlaufen. Jeder einzelne Punkt oder Strich besteht aus einer positiven oder negativen Stromsendung bestimmter Dauer und einer darauf folgenden Erdung gleicher Dauer. Nennen wir hier Zeit des Stromschritts die Dauer der Stromsendung und der Erdung zusammengenommen, so ist für den Heberschreiber  $T = 0,030 CRl^2$ . Auf ein Telegraphierzeichen (Buchstabe, Ziffer) rechnet man im Durchschnitt 3,75 Stromschritte, wobei die Verkürzung der Zeit eines Striches gegen das Morsealphabet, einschließlich des Zwischenraumes auf die Hälfte, günstig wirkt; im Überseeverkehr kommen wegen des Gebrauchs von Codewörtern auf ein Wort 30 Stromschritte.

Wegen der mechanischen Eigenschaften des Heberschreibers gilt die Formel für  $T$  zurzeit nur bis zu etwa 300 Wörtern in der Minute.

Fig. 222.



Für Leitungen, deren Endstrom nicht nach der Thomsonkurve ansteigt, sondern mit einem steilen Ansprung beginnt, kommt man auf folgendem Wege zu einer für praktische Zwecke ausreichenden Abschätzung der Telegraphiergeschwindigkeit. Für eine Leitung gegebenen Widerstandes und gegebener Kapazität gilt unter der Annahme  $L = 0$  für den Anstieg des Stromes die Thomsonkurve. Gibt man der Leitung außerdem noch gleichmäßig verteilte Induktivität, und zwar in verschiedenen schrittweise steigenden Beträgen, so ergibt sich nach den Ausführungen in § 215 als Form des Stromes ein steiler Ansprung zur Zeit  $\tau = \sqrt{KLl}$  und von der Höhe  $E\sqrt{\frac{K}{L}} e^{-bt}$ . Die verschieden stark belasteten Leitungen zeigen also wachsende Verspätung des ersten Ansprungs gegen die Zeit  $t = 0$ , zu der das Zeichen ausging, aber auch wachsende Höhe des Ansprungs. Fig. 222 zeigt dies an, und man sieht daraus, daß bei großen Werten des Dämpfungs- oder genauer Längenmaßes der Vorgang nach dem Ansprung sich im wesentlichen dem

gleichzeitigen bei der Thomsonkurve anschließt. Auf einer Leitung mit geringerer Induktivität langen demnach die ersten Regungen der Welle früher am Ende an als bei größerer Induktivität, aber die Welle baut sich dann so langsam auf, daß die etwas mehr verspätete Welle bei größerer Induktivität nach dem Ansprung sogleich in den Maßen der langsamer aufgebauten Welle fortfährt. Die Verspätung  $\tau$  der Ankunft eines Zeichens gegen  $t = 0$  ist für den Empfang der Zeichen gleichgültig, weil sie alle aufeinanderfolgenden Zeichen betrifft; es kommt, unter der Annahme, daß es Mittel gibt, noch in Betracht kommende Unterschiede der im Empfangsapparat eintretenden Verzögerung aufzuheben, darauf an, bis zu welcher Zeit, von seinem ersten Eintreffen gerechnet, das empfangene Zeichen eine bestimmte Höhe erreicht hat. Sie ist für eine Leitung mit der Thomsonkurve  $0,144 KRl^2$ ; auf einer Leitung mit Induktivität gewinnt das Zeichen die Laufzeit  $\tau$ , vermindert um den Betrag  $0,029 KRl^2$ , bis zu welcher Zeit bei der Thomsonkurve der Strom unmerklich ist. Daher ist die zulässige Zeit eines Schrittes

$$\begin{aligned} T &= 0,173 KRl^2 - \sqrt{K L l} + 0,002 n \\ &= KRl^2 \left( 0,173 - \frac{1}{2b} \right) + 0,002 n. \end{aligned}$$

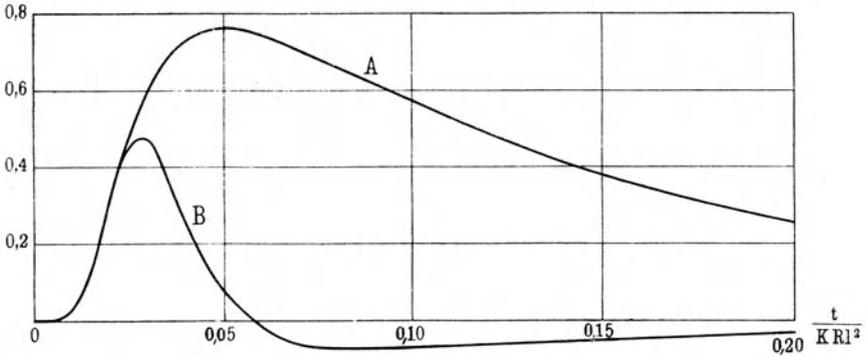
$b$  stellt das Dämpfungsmaß dar,  $n$  die Zahl der Senderelais. Diese Formel gilt bis zu  $b = 4$ ; für Leitungen mit geringerem Längenmaß wächst die Kurve schneller zum Endwert an und es treten neben den Eigenschaften der Leitung die elektrischen Eigenschaften der Apparate immer bestimmender auf. Von dem Längenmaß  $2$  ab bestimmen die Apparate allein die Grenze der Geschwindigkeit.

**§ 296. Das Dauerzeichen.** Das Ziel der Rechnungen an betriebsmäßigen Schaltungen ist in der Regel, das Dauerzeichen als Funktion der Zeit darzustellen, welches nämlich entsteht, wenn man am Anfang der Leitung von einem bis zur Zeit  $t = 0$  herrschenden konstanten Wert der Spannung von der Zeit  $t = 0$  ab zu einem anderen konstanten Wert übergeht. Die auf diese Weise gefundene Kurve gibt die Form des Ausgleichs für eine beliebig lange dauernde, in einem neuen Dauerzustand endigende Stromsendung. Die betriebsmäßige Dauer der Stromsendung läßt den vollen Ablauf des Ausgleichs höchstens auf ganz kurzen Leitungen zu; auf den langen und bei weitem wichtigeren dauert die Stromsendung meist nur einen Bruchteil der Zeit, welche für den Ausgleich erforderlich ist. Gleichwohl gibt das für eine lange Stromsendung berechnete Dauerzeichen auch für die verkürzte den erforderlichen Aufschluß. Eine Stromsendung, bei der die wirksame EMK nur von  $t = 0$  bis  $t = T$  gedauert hat, ist der Wirkung nach gleich einer bei  $t = 0$  beginnenden Stromsendung beliebiger Dauer, welcher man zur Zeit  $T$  eine zweite, ebenfalls beliebig lange dauernde mit entgegengesetzt gleicher EMK folgen läßt. Diese letztere würde für sich allein ein Dauerzeichen hervorbringen, welches dem ersten kongruent ist, aber in gleichem Zeitabstand von seinem Anfang Ordinaten entgegengesetzten Vorzeichens hat und um die Zeit  $T$  gegen das erste versetzt ist.

Der Verlauf des Stromes für ein Zeichen von der Dauer  $T$  ergibt sich also, wenn man von der Ordinate des Zeichens, dessen Anfang mit  $t = 0$

zusammenfällt, die Ordinate eines um  $T$  später erfolgenden Zeichens abzieht; oder einfacher, indem man von der Ordinate des Dauerzeichens zur Zeit  $t$  die Ordinate desselben Zeichens zur Zeit  $t - T$  subtrahiert. Fig. 223 stellt in Kurve  $A$  das Dauerzeichen bei Abschluß durch einen Kondensator, in Kurve  $B$  das daraus hergeleitete Zeichen für einen Stromstoß von der Dauer  $0,015 K R l^2$  dar. Höhe und Form dieses Zeichens hängen bei gegebener EMK stark von der Größe der Zeit  $T$  im Vergleich zu der Zeit  $ab$ , die das Dauerzeichen auf dem betreffenden Kabel zur praktisch vollständigen Entwicklung gebraucht.

Fig. 223.



Das besprochene Zeichen gilt für eine einzelne telegraphische Stromsendung und kann deshalb Einzelzeichen genannt werden. Wenn seine Form gefunden ist, so kann man die Form beliebiger telegraphischer Signale, für bestimmte Buchstaben oder Satzzeichen, dadurch finden, daß man die Einzelzeichen im richtigen Sinne und mit den zugehörigen Zeitzwischenräumen aufträgt und für jeden Zeitpunkt die algebraische Summe aller Ordinaten bildet. Es entstehen so Kurven, wie sie auch der Heberschreiber oder der Oszillograph wiedergibt, und durch den Vergleich solcher für verschiedene Bedingungen aufgenommenen Kurven kann man die Vorteile oder Nachteile bestimmter Anordnungen erkennen.

**§ 297. Leitung mit Endschaltung.** Abgesehen von sehr langen Seekabeln, die auch am Anfang Kunstsaltungen haben, werden die Leitungen am Anfang in der Regel unmittelbar an die Sendespannung gelegt, während sie am Ende auf den Empfangsapparat und gegebenenfalls auf besondere Kunstsaltungen gelegt werden. Es gelten für alle Fälle, unabhängig von der besonderen Art der Kunstsaltungen, einige allgemeine Sätze, bei denen wir lediglich annehmen, daß  $R_e$  eine Funktion von  $p$  sei, mit Einschluß des Falles, daß die Abhängigkeit unmerkbar gering ist.

Die Stammfunktion wird für diese Fälle

$$W = R_e \cos u + R l \frac{\sin u}{u}.$$

Sie wird Null für solche Werte  $u_v$ , welche die Gleichung erfüllen

$$\operatorname{tg} u_v = - u_v \left( \frac{R_e}{R l} \right)_{u_v}.$$

Zum Auffinden der Wurzeln dieser Art von Gleichungen bedient man sich eines graphischen Hilfsverfahrens. Es handle sich um die Wurzeln der Gleichung  $tg u = f(u)$ . Man trägt in einem rechtwinkligen geradlinigen Koordinatensystem, dessen Abszissen  $u$  im Bogenmaß enthalten, sowohl  $tg u$  als  $f(u)$  als Ordinaten auf. Die Schnittpunkte beider Kurven zeigen die Werte von  $u$  an, für welche  $tg u = f(u)$  wird, also die Wurzeln der Gleichung. Fig. 224 stellt dies für einige noch näher zu besprechende Fälle dar. Die mit 1 bezeichnete Gerade gilt für  $R_e = 0,1 Rl$ , also für den Fall, daß am Ende der Leitung ein von  $p$  unabhängiger, induktions- und kapazitätsfreier Widerstand liegt. Es ist also für diesen Fall  $f(u) = -0,1 u$ . Man sieht, daß die erste Wurzel ungefähr den Wert  $0,9 \pi$  oder  $2,8$  hat. Mit einer trigonometrischen Tafel stellt man den Wert genauer fest. Da  $tg 2,8 = tg(\pi - 19,6^\circ) = -0,356$  ist, dagegen  $0,1 u = 0,280$ , so wird man es zunächst etwa mit  $u = 2,9$  versuchen; dafür erhält man  $tg(\pi - 14,0^\circ) = -0,250$  gegen  $-0,290$  für  $-0,1 u$ . Der richtige Wert von  $u$  liegt also zwischen  $2,8$  und  $2,9$  und die genaue Bestimmung durch Fortsetzung dieses Eingrenzungsverfahrens erfordert nur etwas Geduld. Man erhält so für  $R_e = 0,1 Rl$  die nachstehende von Malcolm berechnete Tabelle:

$\nu$	$u_\nu$	$u_\nu$ in Graden	$\nu$	$u_\nu$	$u_\nu$ in Graden
1	2,863	$\pi - 15^\circ 58'$	4	11,703	$4\pi - 49^\circ 29'$
2	5,761	$2\pi - 29^\circ 57'$	5	14,733	$5\pi - 55^\circ 50'$
3	8,708	$3\pi - 41^\circ 3'$	6	17,793	$6\pi - 60^\circ 40'$

Die Abszissenachse gilt für  $R_e = 0$  und gibt, wie in § 283, daß  $u_\nu = \nu \pi$  ist, wo  $\nu = 1, 2, 3, \dots$

Ist so für die in Betracht kommenden Komponenten die Größe  $u_\nu$  gefunden, aus der sich  $p_\nu = -u_\nu^2 / K R l^2$  ergibt, so hat man zur Feststellung ihrer Amplitude nach Formel (167) den Wert von  $\left(p \frac{\partial W}{\partial p}\right)_{p_\nu}$  zu bestimmen, und dies ist nach § 293

$$\left(p \frac{\partial W}{\partial p}\right)_{p_\nu} = \frac{1}{2} \left(u \frac{\partial W}{\partial u}\right)_{u_\nu}.$$

Für den allgemeinen Fall, daß  $R_e$  eine Funktion von  $p$  oder  $u$  ist, also, daß die Endschaltung Induktivität oder Kapazität oder beides enthält, ergibt die Gleichung  $W = R_e \cos u + \frac{Rl}{u} \sin u$  die folgende

$$\frac{\partial W}{\partial u} = \cos u \frac{\partial R_e}{\partial u} + \frac{Rl}{u} \cos u \left(1 - u \frac{R_e}{Rl} tg u - \frac{tg u}{u}\right).$$

Wenn man für  $u = u_\nu$  die Beziehung

$$tg u_\nu = -u_\nu \left(\frac{R_e}{Rl}\right)_{u_\nu}$$

berücksichtigt, so erhält man

$$\frac{1}{2} \left(u \frac{\partial W}{\partial u}\right)_{u_\nu} = \frac{Rl}{2} \left\{ \cos u_\nu \left( \frac{\partial \left(u \frac{R_e}{Rl}\right)}{\partial u} \right)_{u_\nu} + \cos u_\nu \right\}.$$

Der zur Ziffer  $\nu$  gehörende Teil der nach Gl. (167) zu bildenden Summe, nämlich

$$\left( p \frac{\partial W}{\partial p} \right)_{p_\nu} = \frac{2}{Rl} \left[ \cos u_\nu \frac{\partial}{\partial u} \left( u \frac{Re}{Rl} \right) \right]_{u_\nu} e^{-\frac{u_\nu^2}{KR^2} t} + \frac{1}{\cos u_\nu} \dots \quad (361)$$

ist dadurch in allen Einzelheiten festgestellt. Ist die gesuchte Größe nicht der die Leitung verlassende Strom selbst, sondern eine ihm im Sinne der Heavisideschen Rechnungsweise proportionale Größe, z. B. die Stromstärke  $J_q = q J_e$  in einem Zweige der Schaltung, wobei  $q$  im allgemeinen wieder eine Funktion von  $u$  ist, oder die Spannung  $V_s = s J_e$  an den Klemmen eines bestimmten Leitungszweiges, wo auch  $s$  eine Funktion von  $u$  ist, so ist jeder der Posten (361) für sich mit dem Werte von  $q_\nu$  oder  $s_\nu$  zu multiplizieren, den  $q$  oder  $s$  für  $u = u_\nu$  haben.

Erweiterung. Es sei nur kurz darauf hingewiesen, daß dasselbe Verfahren für die Fälle gilt, daß am Anfang der Leitung noch eine Schaltung mit dem Scheinwiderstand  $R_a$  vorgeschaltet ist. Dann gilt die in § 293 angegebene Stammfunktion sowohl für die Feststellung der Wurzeln  $u_\nu$  als des Faktors  $\frac{1}{2} \left( u \frac{\partial W}{\partial u} \right)_{u_\nu}$ .

Auch auf Leitungen, bei denen die Induktivität berücksichtigt werden muß, ist das Verfahren in gleicher Weise anwendbar. Wenn dabei  $R_a = 0$  ist, gilt die Stammfunktion

$$W = R_e \cos u + \frac{(R + pL)l}{u} \sin u$$

und die Abhängigkeit zwischen  $p$  und  $u$  ist durch die zweite Gleichung in § 293 gegeben. Die Wurzeln  $u_\nu$  folgen aus der Gleichung

$$tgu = u \frac{R_e}{(R + pL)l}$$

und der Amplitudenfaktor wird

$$\frac{1}{2} \left( u \frac{\partial W}{\partial u} \right)_{u_\nu} = \frac{1}{2} \left\{ \cos u_\nu \left( \frac{\partial}{\partial u} u R_e \right)_{u_\nu} + \frac{R + p_\nu L}{\cos u_\nu} + L \sin u_\nu \left( \frac{\partial p}{\partial u} \right)_{u_\nu} \right\}.$$

Es handelt sich also stets nur um einen größeren Aufwand an Berechnungen.

Fall komplexer Wurzeln. Wenn die Leitung oder die Endschaltung einzeln oder beide so beschaffen sind, daß in dem System gedämpfte Eigenschwingungen möglich sind, so können diese durch das bisherige Verfahren, das nur reelle negative Wurzeln für  $p_\nu$  liefert, nicht festgestellt werden. Das Aufsuchen von Wurzeln einer komplexen Gleichung  $tgu = f(u)$  wird durch Benutzung der Tafel in Fig. 211 erleichtert, da diese ja die Gleichung zu lösen gestattet

$$-i tg i (\vartheta i + b) = h e^{i\varphi};$$

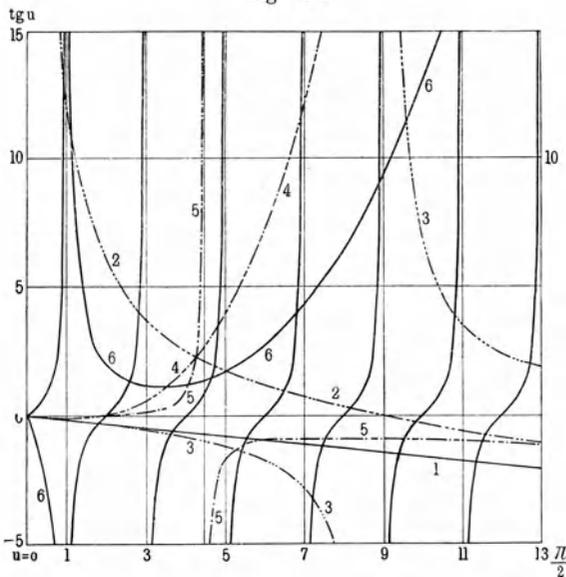
aber weil sie zu ihrem nächsten Zweck auf einen Quadranten beschränkt wurde, so bleiben doch sehr große Schwierigkeiten bestehen. Es wird bei der Besprechung der als Maxwellerde bezeichneten Schaltung ein anderes Näherungsverfahren erörtert werden, das auf andere Schaltungen ebensogut anwendbar ist.

§ 298. **Verschiedene Endschaltungen.** Es geht über den Zweck dieses Buches hinaus, das in § 297 besprochene Verfahren auf die in der Telegraphie gebräuchlichen Schaltungen ausführlich und unter Berechnung von Zahlenbeispielen anzuwenden. Wir verweisen dafür auf die besonderen Veröffentlichungen. Dagegen wollen wir an der Hand der Fig. 224, welche die kennzeichnenden Linien  $f(u)$  für einige Anordnungen enthält, die erfahrungsgemäß günstig oder ungünstig die Form des ankommenden Stromes beeinflussen, durch Vergleich feststellen, ob sich nicht schon aus der Lage der Wurzeln  $u$ , mit einiger Wahrscheinlichkeit etwas über die mehr oder weniger vorteilhaften Eigenschaften einer Anordnung aussagen läßt.

Erfahrungsgemäß wirkt günstig auf die Sprechgeschwindigkeit die Vorschaltung eines Sperr- oder Blockkondensators  $K_1$  vor den als induktionsfreien Widerstand betrachteten Heberschreiber  $R_1$ . Für diese Anordnung ist

$$R_e = R_1 + \frac{1}{p K_1} = R_1 - \frac{K R l^2}{u^2 K_1}$$

Fig. 224.



Die Wurzeln  $u$ , ergeben sich aus der Gleichung

$$tg u = \frac{1}{u} \frac{K l}{K_1} - u \frac{R_1}{R l}$$

Die Funktion auf der rechten Seite, in Fig. 224 für  $R_1/R l = 0,1$  und  $K_1/K l = 0,05$  durch die Linie 2 dargestellt, beginnt für  $u = 0$  mit dem Werte  $+\infty$ , sie bleibt positiv bis

$$u^2 = \frac{K l}{K_1} \frac{R l}{R_1}$$

und nimmt mit wachsendem  $u$  große negative Werte an. Die Funktion schneidet die Tangentenkurve bei positiven

Werten, die etwas vor  $\pi/2$ ,  $3\pi/2$ ,  $5\pi/2$  usw. liegen, und zwar um so zahlreicheren, je kleiner das Verhältnis  $K_1/K l$  ist. Das Elementarzeichen wird durch den Kondensator zeitlich zusammengedrängt, vor dem Auseinanderlaufen bewahrt, was in der Fachsprache als „curbing“ bezeichnet wird. Ein Widerstand am Ende breitet es zeitlich aus. Die Linie 1 in Fig. 224, die für den Widerstand gilt, zeigt nur Schnittpunkte auf der negativen Seite der Tangentenkurve. Wir werden danach vermuten, daß eine bestimmte Anordnung, bei der als erste Wurzeln solche mit negativem  $tg u$  auftreten, weniger günstig ist, daß dagegen zahlreiche Wurzeln mit positivem  $tg u$  eine gute Anordnung anzeigen.

Wenig günstig erscheint es, einen Kondensator als Nebenschluß zum Heberschreiber zu legen, weil er jede Änderung des Stromes zunächst im wesentlichen auf sich zieht. Man erhält für diesen Fall die Gleichung

$$tg u = - \frac{\frac{R_1}{Rl}}{1 - u \frac{K_1 R_1}{Kl Rl}}.$$

Die zugehörige Kurve, in Fig. 224 mit 3 bezeichnet, beginnt mit dem Werte Null für  $u = 0$ , für wachsende  $u$  nimmt sie wachsende negative Werte an und wird für  $u^2 = \frac{Kl Rl}{K_1 K}$  negativ unendlich. Ist  $K_1$  sehr klein, so geht die Kurve 3 in die Kurve 1 für den Widerstand über. Bei der großen Kapazität eines Kabels und seinem hohen Gesamtwiderstand sind die Verhältnisse  $Kl/K_1$  und  $Rl/R_1$  schon aus praktischen Gründen groß, etwa wie im Falle 2 des Sperrkondensators 10 bis 20. Im Falle 3 haben wir also zu Anfang zahlreiche Wurzeln mit negativem  $tg u$ , und dieser Fall bestätigt die angegebene Regel.

Nach den beiden für einen Kondensator und einen Widerstand möglichen Schaltungen gehen wir zu ähnlichen mit Spulen über.

Am Ende des Kabels liege eine Spule mit der Induktivität  $L_1$  und dem Widerstande  $R_1$ . Dann ist  $R_e = R_1 + p L_1$  und daher folgt

$$tg u = - u \left( \frac{R_1}{Rl} - u^2 \frac{L_1}{Kl(Rl)^2} \right).$$

Aus der Form der Funktion  $f(u)$  ergibt sich, daß sie zunächst negativ ist bis zu dem Werte von  $u$ , der die Klammer zu Null macht und von da ab schnell steigende positive Werte annimmt (Linie 4 in Fig. 224). Je kleiner  $L_1$  ist, um so länger dauert es, bis positive Wurzeln kommen, um so mehr ähnelt die Folge der Wurzeln denen bei einem einfachen Widerstand. Nach der Regel wäre also zu vermuten, daß eine Spule mit hoher Induktivität günstig wirkt.

Dieses Beispiel zeigt indessen, daß die genannte Regel nicht zur sicheren Beurteilung der Lage ausreicht, denn der Versuch lehrt, daß eine Spule mit hoher Induktivität in Reihe mit dem Empfangsapparat die Telegraphiergeschwindigkeit stark beeinträchtigt. Dies liegt daran, daß durch diese Anordnung die Amplituden der maßgeblichen Komponenten stark gedrückt werden. Vorteilhaft wirkt aber diese Anordnung auf den Verlauf der Spannungskurve am Ende der Leitung, so daß also der Regel ein Wert als Fingerzeig trotzdem zuzuerkennen ist. Wenn man der Spule parallel einen auf Spannung ansprechenden Apparat schaltet, so wird für diesen die Telegraphiergeschwindigkeit im Vergleich zu der Anordnung ohne Spule erhöht. Ein solcher Apparat kann ein elektrostatischer Empfänger sein, aber auch ein Heberschreiber mit hohem Widerstand ist als Spannungszeiger aufzufassen.

Diese Beziehung führt uns auf eine andere als vorteilhaft bekannte Anordnung, nämlich die Parallelschaltung einer Spule mit hoher Zeitkonstante zu dem als Widerstand angesehenen Empfangsapparat. Diese Anordnung

ist als magnetischer Nebenschluß hauptsächlich bei langen Seekabeln im Gebrauch.

Nennen wir Widerstand und Induktivität der Spule  $R_1$  und  $L_1$ , den Widerstand des Empfangsapparates  $R_2$ , so ist

$$R_e = \frac{R_2(R_1 + pL_1)}{R_1 + R_2 + pL_1}.$$

Die Wurzeln sind also aus der Gleichung zu bestimmen

$$\operatorname{tg} u = -u \frac{R_2}{Rl} \frac{\frac{R_1}{L_1} KRl^2 - u^2}{R_1 + \frac{R_2}{L_1} KRl^2 - u^2}.$$

Nimmt man  $R_2/Rl = 0,1$  an, so ist die Funktion  $f(u)$  bei kleinen Werten von  $u$  bis zu  $u^2 = KRl^2 R_1/L$  negativ; bis dahin sind also etwaige Wurzeln ungefähr dieselben, wie bei einem einfachen Widerstand als Empfänger. Besonders bei Kabeln mit großer Zeitkonstante  $KRl^2$  sollte also die Spule eine etwa ebenso große oder eine größere Zeitkonstante haben, damit Wurzeln auf der positiven Seite auftreten. Nach dem Durchgang durch Null nimmt dann  $f(u)$  rasch wachsende positive Werte an; die nächsten Wurzeln kommen um so näher denen bei einem stark drosselnden Sperrkondensator, je größer die Zeitkonstante der Spule ist. Bei  $u^2 = KRl^2 (R_1 + R_2) L_1$  geht die Funktion von  $+\infty$  nach  $-\infty$  über, kehrt in einem gegen die Nulllinie konvexen Bogen um und wird schließlich beliebig groß negativ. Wendet man die Regel an, daß möglichst viele der ersten Wurzeln auf der positiven Seite liegen sollen, so wird man  $L_1$  einen solchen Wert geben, daß der Sprung auf möglichst hohe Werte  $u_1$  von  $u$  fällt. Da  $R_1$  neben  $R_2$  nicht wesentlich in Betracht kommt, bestimmt sich der Wert von  $L_1$  nach der Gleichung

$$L_1 = 0,1 Kl \left( \frac{Rl}{u_1} \right)^2.$$

Diese Überlegungen, welche zu magnetischen Nebenschlüssen von möglichst hoher Zeitkonstante und verhältnismäßig kleiner Induktivität führen, stimmen mit den auf Grund von eingehenden Rechnungen gezogenen Folgerungen Kunerts überein, soweit es sich um die Verbesserung der Form der Stromkurve handelt. Bei dem damaligen Stande des Betriebes, der keine Verstärker von erheblicher Wirkung besaß, mußte man sich mit weniger günstigen Verhältnissen für die Verbesserung der Stromkurve begnügen, bei denen aber die Strommenge noch ausreichend war.

Die Linie 5 in Fig. 224 beruht auf der Annahme, daß  $R_2 = Rl/20$ , und daß der Zähler für  $u^2 = \pi^2$ , der Nenner für  $u^2 = 5\pi^2$  zu Null wird, daher  $R_2 = 4R_1$  ist. Dies liegt nach Kunert schon an der Grenze des praktisch möglichen. Man sieht, daß sich die Schnittstelle der Kurven 1 und 5 mit den Tangentenkurven nicht sehr unterscheiden. Bei dieser Sachlage ist anzunehmen, daß die Wirkung des magnetischen Nebenschlusses hauptsächlich auf den durch dieses Verfahren nicht zu ermittelnden komplexen Wurzeln beruht.

Wir erörtern endlich noch den Fall der in § 140 besprochenen sogenannten Maxwellerde. Bei dieser Schaltung ist nach Fig. 121

$$R_e = R_1 + p L_1 + \frac{R_2}{1 + p \frac{R_2}{K_2 R_2}},$$

wo  $R_2$  und  $K_2$  an Stelle von  $W$  und  $K_1$  in Fig. 121 gesetzt seien.

Daher wird

$$\operatorname{tg} u = -\frac{u}{Rl} \left( R_1 - \frac{u^2 L_1}{K R l^2} + \frac{R_2}{1 - u^2 \frac{K_2 R_2}{K l R l}} \right).$$

Die durch die Linie 6 in Fig. 224 dargestellte Funktion beginnt mit negativen Werten. Für  $u = \sqrt{\frac{K l R l}{K_2 R_2}}$  springt sie von  $-\infty$  nach  $+\infty$ . Sie nähert sich dann der Abszissenachse, um weiterhin dauernd anzusteigen. Bei dieser Anordnung liegen alle Wurzeln auf den positiven Ästen, wenn man die Sprungstelle auf  $u = \frac{\pi}{2}$  verlegt, also wenn  $\frac{K_2 R_2}{K R l^2} = 0,405$  ist.

Wenn die Induktivität des Apparates unbedeutend ist, fällt die Funktion nach dem Sprung allmählich auf kleine positive Werte. Die in der Linie 6 (Fig. 224) dargestellte Funktion bezieht sich auf die Verwendung eines Relais von 200 Ohm und 1 Henry als Empfänger bei einem Kabel mit  $K R l^2 = 0,13$ , wobei  $R_2 = 4370$ ,  $K_2 = 92,0 \cdot 10^{-6}$  waren; infolge der Induktivität erreicht die Funktion nach vorübergehendem Abfall hohe Werte.

Malcolm weist darauf hin, daß durch die Wahl des Quotienten  $K_2 R_2 / K R l^2 = (2/\pi)^2$  die am geringsten gedämpfte erste Komponente der Stromstärke, weil für sie  $R_e$  unendlich groß wird, völlig beseitigt wird, so daß der Ausgleichstrom nur aus stärker gedämpften, also schneller abklingenden Teilen besteht.

Wenn es sich um Schaltungen mit elektromagnetischen Empfängern von merklicher Induktivität handelt, scheint ein Teil der guten Wirkung der Schaltung davon herzurühren, daß in dem vom Kabel und der Endschtaltung gebildeten System aus Induktivität und Kapazität sich gedämpfte Schwingungen ansehnlicher Amplitude ausbilden. Diese treiben die Stromstärke anfangs über den Endwert hinaus, und dies bringt einen steileren Anstieg mit sich. Wir wollen wegen des praktischen wie theoretischen Interesses diesen Vorgang für sich näher besprechen.

**§ 299. Gedämpfte Schwingungen in der Endschtaltung.** Unter bestimmten Bedingungen treten neben den bisher allein erörterten aperiodischen Komponenten des ankommenden Stromes, welche sich aus den reellen Wurzeln der Gleichung  $W = 0$  ergeben, auch gedämpfte Schwingungen auf, entsprechend komplexen Wurzeln. Malcolm deutet einen Weg an, solche Wurzeln bei gegebenen Eigenschaften der Leitung und der Endschtaltung durch fortgesetztes Probieren zu finden. Kunert führt dies für ein Beispiel näher aus. Dieser Weg ist an sich sehr mühevoll, und es besteht der Nachteil, daß man nicht von vornherein übersehen kann, ob für bestimmte Verhältnisse eine komplexe Wurzel existiert, also die Mühe belohnt wird. Man

kann auch den umgekehrten Weg gehen, nämlich Frequenz und Dekrement der erwarteten Schwingung voraussetzen und dann zusehen, mit welcher Endschaltung man die sich ergebenden Bedingungen für die Eigenschaften ihrer Teile erfüllen kann.

Man wird so z. B. im Falle der Maxwellerde eine bestimmte Induktivität und bestimmte Werte von  $K_2$  und  $R_2$  errechnen, für welche sich eine Schwingung mit den angenommenen Werten ergibt. Ändert man dann die angenommene Frequenz oder den Dämpfungsexponenten stufenweise, so wird man alsbald sehen, welche Schwingungen man mit einer gegebenen Induktivität bei verschiedenen Werten von  $K_2$  und  $R_2$  erhält. Stehen für ein bestimmtes Beispiel die Eigenschaften der Endschaltung fest, so ergeben sich durch die Konstruktion der Kurve  $f(u) = -u R_e / Rl$  die reellen Wurzeln wie gewöhnlich.

Zu jeder Wurzel  $p = -\delta + i\omega$  gehört die konjugierte. Eine Schaltung kann bei verwickelter Zusammensetzung mehrere komplexe Wurzelpaare haben. Man findet einen Anhalt, indem man der Form nach ähnlich vorgeht, wie bei der Berechnung der Eigenfrequenzen einer Membran in § 194.

Es soll also die Existenz einer Wurzel

$$p_1 = -\delta + i\omega$$

angenommen werden, und zwar sollen  $\delta$  und  $\omega$  positive Werte sein. Da  $p$  mit  $u$  durch die Gleichung zusammenhängt

$$p = -\frac{u^2}{K R l^2} = -\frac{u^2}{\tau},$$

so hat man, wenn auch die Zeichen  $a$  und  $b$  positive Werte bezeichnen sollen, zu setzen  $u = a - ib$ . Dann ist  $(a^2 - b^2) = \delta\tau$ ,  $2ab = \omega\tau$ , es muß also auch  $a > b$  sein.

Versuchsweise wählen wir  $\delta$  und  $\omega$  beliebig, haben aber dann mit dem sich daraus ergebenden Werte von  $u$  die Gleichung zu erfüllen

$$\frac{R_e}{Rl} = -\frac{tg u}{u}.$$

Mit Hilfe der Formel

$$tg(a - ib) = \frac{tga - i(-itgib)}{1 + itga(-itgib)} = \frac{1}{1 + tg^2 a \mathfrak{I}g^2 b} \left( \frac{tga}{\mathfrak{C}\sigma^2 b} - i \frac{\mathfrak{I}g b}{\cos^2 a} \right)$$

erhält man

$$\frac{R_e}{Rl} = -\frac{1}{(a^2 + b^2)(1 + tg^2 a \mathfrak{I}g^2 b)} \left\{ \frac{a tga}{\mathfrak{C}\sigma^2 b} + \frac{b \mathfrak{I}g b}{\cos^2 a} - i \left( \frac{a \mathfrak{I}g b}{\cos^2 a} - \frac{b tga}{\mathfrak{C}\sigma^2 b} \right) \right\}.$$

Bei längeren Kabeln, die hauptsächlich in Frage kommen, wird die Dämpfung der Schwingungen erheblich sein, so daß  $\mathfrak{I}g b$  nicht viel von Eins verschieden ist und  $\mathfrak{C}\sigma^2 b$  erhebliche Werte hat. Beispiele zeigen, daß in diesem Falle angenähert wird

$$\frac{R_e}{Rl} = \frac{i \mathfrak{I}g b}{u}.$$

Wir wenden dies auf die als Maxwellerde bezeichnete Schaltung an. Damit Schwingungen entstehen können, muß eine Induktivität vorhanden sein; diese kann schon in dem in der Leitung befindlichen Relais liegen. Für diese Schaltung ist, wenn wir die Bezeichnungen des § 298 beibehalten,

$$R_e = R_1 + p L_1 + \frac{R_2}{1 + p K_2 R_2}.$$

Führen wir  $p = -\delta + i\omega$  ein, so folgen nach Trennung der reellen und imaginären Teile die Gleichungen

$$R_2 \frac{\delta K_2 R_2 - 1}{(\delta K_2 R_2 - 1)^2 + (\omega K_2 R_2)^2} = Rl \frac{b}{a^2 + b^2} + R_1 - \delta L_1$$

$$R_2 \frac{\omega K_2 R_2}{(\delta K_2 R_2 - 1)^2 + (\omega K_2 R_2)^2} = \omega L_1 - Rl \frac{a}{a^2 + b^2}.$$

Für  $p' = -\delta - i\omega$  ergeben sich dieselben Gleichungen.

Man erhält daraus

$$R_2 \frac{\omega (2\delta K_2 R_2 - 1)}{(\delta K_2 R_2 - 1)^2 + (\omega K_2 R_2)^2} = Rl \omega + \frac{Rl}{a^2 + b^2} (b\omega - a\delta).$$

Wendet man die in § 298 festgestellte Beziehung an, daß

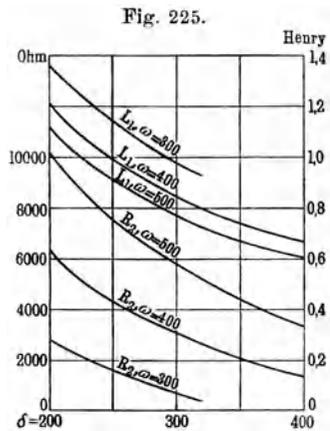
$$K_2 R_2 = \left(\frac{2}{\pi}\right)^2 K R l^2$$

gemacht wird, um dadurch die am langsamsten schwindende aperiodische Komponente auszuschneiden, so enthält die letzte Gleichung nur  $R_2$  als Unbekannte. Hat man sie bestimmt, so ergibt sich aus der vorletzten Gleichung der zugehörige Wert von  $L_1$ . Stimmt dieser zunächst nicht mit dem gegebenen überein, so rechnet man für andere Werte von  $\omega$  und  $\delta$ , bis man das richtige Wertepaar für diese beiden Größen gefunden hat.

Für ein Kabel mit  $Rl = 2160$  Ohm und  $Kl = 60 \mu F$  wurden unter Vernachlässigung der Induktivität Berechnungen dieser Art ausgeführt, indem für die drei Werte für  $\omega$  von 300, 400, 500 solche Zahlen für  $\delta$  aufgesucht wurden, daß die für die Maxwellerschaltung angenommenen Werte  $R_1 = 200$ ,  $L_1 = 1,0$ ,  $K_2 R_2 = \left(\frac{2}{\pi}\right)^2 K R l^2 = 0,0525$  in den Bereich der berechneten Werte fielen.

Fig. 225 stellt die nach der angegebenen Berechnungsweise ermittelten Werte von  $R_2$  und  $L_1$  dar. Danach wird man also eine gedämpfte Schwingung von der Frequenz  $\omega = 400$  erhalten, wenn  $L_1 = 1,0$ ,  $R_1 = 200$ ,  $R_2 = 4370$ ,  $K_2 = 12,0 \cdot 10^{-6}$  ist.

Bei denselben Eigenschaften  $R_1 = 200$  und  $L_1 = 1,0$  würde sich eine Schwingung von  $\omega = 500$  und  $\delta = 225$  ergeben, wenn man  $R_2 = 8650$ , daher  $K_2 = 6,07 \mu F$  machte.

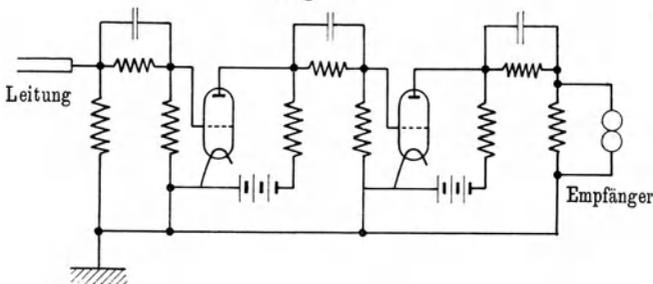


Man kann auf diese Weise mittels der angegebenen Rechnungsweise sowohl für gegebene Eigenschaften der Endschaltung die Konstanten der auftretenden Schwingung finden, als auch für eine zu erzeugende Schwingung bestimmter Frequenz und Dämpfung die der Schaltung zugebenden Eigenschaften.

Es mag noch folgendes als Fingerzeig für ähnliche Rechnungen erwähnt werden. Errechnet man für einen bestimmten Wert von  $\omega$  aus dem gefundenen Werte von  $L_1$  eine Kapazität  $C_0$  nach der Formel  $\omega^2 L_1 C_0 = 1$ , so ist im Falle der Maxwellsschaltung  $C_0$  angenähert die Kapazität, welche sich ergibt bei Reihenschaltung des Kondensators  $K_2$  und eines Teiles der Kapazität des Kabels, soweit die Schwingungen merklich in dieses eindringen. Man erhält in der Tat für  $\omega = 400$  und  $\omega = 500$  bei den geringeren Dämpfungswerten, auf welche diese Annäherungen am besten passen, für  $1/C_0 - 1/K_2$  übereinstimmend den Wert 0,077, so daß für die anteilige Kabelkapazität sich  $13 \mu F$  oder etwa  $\frac{2}{9}$  der gesamten ergeben.

Neue Schaltungen mit Verstärkern. Schon der in § 279 erwähnte Briefwechsel zwischen Thomson und Stokes enthält über die Kurve des ankommenden Stromes die Angabe, daß ihre zeitlichen Differentialquotienten mit jeder Differenzierung ihr erstes Maximum früher erreichen. Hierauf beruht im Grunde genommen der Vorteil der Anordnungen mit Abschlußkondensator oder magnetischem Nebenschluß. Wie schon erwähnt, schwächen aber diese Anordnungen den Empfangsstrom um so mehr, je besser die Bedingungen für eine günstige Stromkurve erfüllt sind, und dies gilt noch mehr für Anordnungen, bei denen Kondensatoren oder Spulen mehrmals nacheinander zur Versteilerung der Kurve verwendet werden. Mit Hilfe der Verstärkerröhren lassen sich die durch die Differenzierung eintretenden Verluste wieder ausgleichen. Wagner und Küpfmüller<sup>94)</sup> haben Schaltungen angegeben, bei welchen sie aus einer beliebigen Anzahl von Ableitungen der Thomsonschen Funktion (354) eine möglichst günstige Empfangskurve aufbauen können. Fig. 226 stellt eine Anordnung dar, die als eine Stufenschaltung von mehreren Maxwellerden betrachtet werden kann; zwischen

Fig. 226.



einzelnen oder zwischen allen Gliedern können Verstärker eingeschaltet sein. Versuche auf künstlichen Leitungen großen Längenmaßes haben die Möglichkeit erheblicher Steigerung der Telegraphiergeschwindigkeit erwiesen.

## Zehnter Teil.

# Ausbreitung der elektromagnetischen Energie.

### Erster Abschnitt.

### Der Energiestrom.

§ 300. **Untersuchung der Änderung der Energie eines Raumes.** Bei stationären und bei zeitlich veränderlichen elektrischen Vorgängen wird, solange ein Strom besteht, Energie von bestimmten Stellen eines Feldes nach anderen Stellen übergeführt. Hierauf beruht die elektrische Kraftübertragung im weitesten Sinne. Unter der Annahme, daß die elektromagnetischen Kräfte sich von Ort zu Ort durch Nahwirkung fortpflanzen, unter wesentlicher Teilnahme des zwischenliegenden Mittels, liegt es nahe, auch für die übertragene Energie einen Weg aufzusuchen. Die gewöhnliche Anschauung sieht die Leitung als Bahn der bewegten Energie an. Wir wollen aus den Feldgleichungen eine Theorie über die Bahn bewegter elektromagnetischer Energie entwickeln, die zwar die Bedeutung der Leitung für die Übertragung der Energie erkennen läßt, aber im einzelnen stark von der genannten Anschauung abweicht.

Wir grenzen zu diesem Zwecke aus dem Felde einen bestimmten Raum  $v$  durch eine geschlossene Fläche  $f$  ab. Die elektromagnetische Energie dieses Raumes wird sich im allgemeinen mit der Zeit ändern. Nach § 6 ist die elektromagnetische Energie des Raumes  $v$

$$\mathbf{W} = \frac{1}{8\pi} \int_{(v)} \left( \frac{\varepsilon}{c^2} \mathfrak{E}^2 + \mu \mathfrak{H}^2 \right) dv.$$

Die Abnahme der Größe  $\mathbf{W}$  in der Zeiteinheit oder die Größe  $-\frac{\partial \mathbf{W}}{\partial t}$  wollen wir näher untersuchen.

Sie hat den Wert

$$-\frac{\partial \mathbf{W}}{\partial t} = -\frac{1}{4\pi} \int_{(v)} \left( \frac{\varepsilon}{c^2} \mathfrak{E} \frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial t} + \mu \mathfrak{H} \frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial t} \right) dv.$$

Wir führen auf Grund der Feldgleichungen ein:

$$\frac{\varepsilon}{c^2} \frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial t} = \text{rot } \mathfrak{H} - 4\pi \sigma \mathfrak{E}, \quad -\mu \frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial t} = \text{rot } \mathfrak{E} - \text{rot } \mathfrak{E}_e$$

und erhalten so

$$-\frac{\partial \mathbf{W}}{\partial t} = \int_{(v)} \left\{ \frac{1}{4\pi} (\mathfrak{H} \operatorname{rot} \mathfrak{E} - \mathfrak{E} \operatorname{rot} \mathfrak{H}) - \frac{1}{4\pi} \mathfrak{H} \operatorname{rot} \mathfrak{E}_e + \sigma \mathfrak{E}^2 \right\} dv.$$

Gemäß der Rechenregel (34) ist

$$\mathfrak{H} \operatorname{rot} \mathfrak{E}_e = \operatorname{div} [\mathfrak{E}_e, \mathfrak{H}] + \mathfrak{E}_e \operatorname{rot} \mathfrak{H}$$

und, indem wir nach der ersten Feldgleichung  $\operatorname{rot} \mathfrak{H} = 4\pi c$  setzen, erhalten wir

$$\mathfrak{H} \operatorname{rot} \mathfrak{E}_e = \operatorname{div} [\mathfrak{E}_e, \mathfrak{H}] + 4\pi c \mathfrak{E}_e.$$

Ebenfalls nach Rechenregel (34) ist  $\mathfrak{H} \operatorname{rot} \mathfrak{E} - \mathfrak{E} \operatorname{rot} \mathfrak{H} = \operatorname{div} [\mathfrak{E}, \mathfrak{H}]$ .

Daher ergibt sich:

$$-\frac{\partial \mathbf{W}}{\partial t} = \frac{1}{4\pi} \int_{(v)} \operatorname{div} [\mathfrak{E}, \mathfrak{H}] dv - \frac{1}{4\pi} \int_{(v)} \operatorname{div} [\mathfrak{E}_e, \mathfrak{H}] dv + \int_{(v)} \sigma \mathfrak{E}^2 dv - \int_{(v)} c \mathfrak{E}_e dv.$$

Der dritte und vierte Posten dieser Summe sind leicht zu deuten.  $\sigma$  ist nach seiner Definition das Reziproke des Widerstandes einer Raumeinheit von 1 cm Länge in der Richtung der Strömung und 1 cm<sup>2</sup> Querschnitt senkrecht dazu.  $\mathfrak{E}$  ist die Spannung zweier in der Richtung der Feldstärke um 1 cm entfernter Stellen des Feldes, also die Spannung an den Endflächen der Raumeinheit. Daher ist  $\sigma \mathfrak{E}^2$  die in einer Sekunde in einer Jouleschen Wärme der Raumeinheit verzehrte Joulesche Wärme. Der dritte Posten stellt also die in dem Raume  $v$  in einer Sekunde in Wärme übergeführte Energie dar.

In dem vierten Posten hat man für jedes Raumelement das Produkt aus der eingepprägten elektrischen Feldstärke in die an dieser Stelle bestehende Dichte des wahren Stromes zu bilden. Da eingepprägte EMK nur in Leitern vorkommen, so ist der wahre Strom in diesem Falle der Leitungsstrom. Das Produkt  $c \mathfrak{E}_e$  gibt daher die Leistung der eingepprägten EMK für die Raumeinheit an, und der vierte Posten der rechten Seite ist die innerhalb des Raumes  $v$  von den eingepprägten Kräften hergegebene Leistung, die natürlich die Energieabnahme des Raumes vermindert.

Der erste und zweite Posten können nach dem Gaußschen Satze, Gl. (21), in die Form gebracht werden:

$$\frac{1}{4\pi} \int_{(f)} [\mathfrak{E}, \mathfrak{H}] d\mathfrak{f} - \frac{1}{4\pi} \int_{(f)} [\mathfrak{E}_e, \mathfrak{H}] d\mathfrak{f},$$

worin  $f$  die Oberfläche des Raumes  $v$  ist. Man kann diese stets so wählen, daß sie die vorhandenen Leiter nur an solchen Stellen trifft, in denen die Leiter keine eingepprägten EMK enthalten.

Dies kommt in der Anwendung darauf hinaus, daß man die zur Messung der austretenden Leistung dienenden Meßinstrumente nicht innerhalb der Stromquellen, sondern, wie selbstverständlich, außerhalb dieser in die Zuleitungen einschaltet, wo keine eingepprägten EMK vorhanden sind.

Ohne eine Einschränkung von praktischer Wichtigkeit kann man es also so einrichten, daß in dem zweiten Posten jedes  $\mathfrak{E}_e$  an der Stelle des Flächenelements  $d\mathfrak{f}$  gleich Null ist, so daß dieser Posten vollkommen wegfällt.

Der noch verbleibende Posten

$$\frac{1}{4\pi} \int_{(f)} [\mathfrak{E}, \mathfrak{H}] d\mathfrak{f}$$

stellt also die Energie dar, die in der Zeiteinheit aus dem Raume  $v$  austritt. Dieses Integral ist nach der Art des Oberflächenintegrals

$$\int_{(f)} \mathfrak{A} d\mathfrak{f}$$

eines Vektors  $\mathfrak{A}$  in § 12 gebildet. Definiert man einen Vektor

$$\mathfrak{S} = \frac{1}{4\pi} [\mathfrak{E}, \mathfrak{H}] \dots \dots \dots (362)$$

so kann man die von dem Raume  $v$  ausgehende Leistung auch als

$$\int_{(f)} \mathfrak{S} d\mathfrak{f}$$

bezeichnen. In dem Oberflächenintegral des Vektors  $\mathfrak{A}$  bedeutet  $\mathfrak{A}$  die Flächendichte der  $\mathfrak{A}$ -Linien auf einer an der betrachteten Stelle senkrecht zur Richtung des Vektors  $\mathfrak{A}$  gelegten Fläche. Man kann also auch  $\mathfrak{S}$  als die Flächendichte der elektromagnetischen Leistung oder des Energiestromes an einer Stelle der Oberfläche des Raumes  $v$  betrachten. Nimmt man an, daß durch jedes Flächenelement  $d\mathfrak{f}$  der Oberfläche in einer Sekunde die Energie  $\mathfrak{S} d\mathfrak{f}$  aus dem Raume austrete, so ergibt sich für die gesamte Oberfläche des Raumes die Leistung, welche als aus dem Raume hervorgehend festgestellt worden ist. Das Raumintegral über  $\frac{1}{4\pi} \text{div} [\mathfrak{E}, \mathfrak{H}]$  und das Oberflächenintegral über  $\mathfrak{S}$  ergeben also denselben Wert.

Man bezeichnet den in Gl. (362) definierten Vektor  $\mathfrak{S}$  als den Poynting-schen Strahlungsvektor.

**§ 301. Der Strahlungsvektor.** Die Zerlegung des Oberflächenintegrals in der Art, daß jeder Einheit der Fläche der Betrag  $\mathfrak{S}$  beigelegt wird, ist offenbar nicht zwingend, da man den gleichen Wert der Summe der Beträge durch davon abweichende willkürliche Verteilungen auf beliebig viele Arten hervorbringen kann; sie liegt aber von allen Verteilungen am nächsten. Sie liefert für jede geschlossene Fläche die richtige Summe, während ihre Anwendbarkeit auf Flächenteile zunächst nur wahrscheinlich richtig ist.

Durch die Festsetzung, daß

$$\mathfrak{S} = \frac{1}{4\pi} [\mathfrak{E}, \mathfrak{H}]$$

sei, wird außer der Größe des Vektors auch seine Richtung an jeder Stelle des Feldes festgelegt. Sie ist überall senkrecht auf der Ebene, die an jeder Stelle des Feldes durch die beiden Richtungen der elektrischen und der magnetischen Feldstärke bestimmt wird.

Legt man eine die Energiequelle umschließende Fläche so, daß überall  $\mathfrak{E}$  und  $\mathfrak{H}$  in diese Fläche fallen, so steht  $\mathfrak{S}$  an allen Stellen auf der Fläche

senkrecht; die Energie bewegt sich also an jeder Stelle des Feldes senkrecht zu dieser Oberfläche. Man kann diese Fläche durch eine zweite und andere umhüllen, welche wiederum die Eigenschaft haben, daß die elektrische und magnetische Feldstärke stets in die Tangentialebene fallen. Man erhält so eine Flächenschar und eine sie überall senkrecht schneidende Kurvenschar. Die Energie bewegt sich nur in der Richtung der Kurven, niemals in der Tangentialebene der Fläche.

Wir gelangen auf diese Weise zu einer Vorstellung, die der Überführung der elektromagnetischen Energie im Felde ganz bestimmte Bahnen vorschreibt. So einleuchtend diese Vorstellung ist, so erscheint es, wie H. Hertz <sup>95)</sup> hervorhebt, doch erforderlich, darauf hinzuweisen, daß wir für manche Vorgänge, die unserer täglichen Erfahrung viel näher liegen als die elektromagnetischen, uns keine Vorstellung von dem Wege machen können, auf dem die Energie übertragen wird. Wenn wir an einem Seile eine Last heben, so wird dieser eine Energie in potentieller Form mitgeteilt, während der Bewegung auch in kinetischer. Die Energie wird augenscheinlich durch das Seil übertragen, das aber bei der Übertragung in einer Richtung sich bewegt, welche derjenigen des Überganges der Energie auf die Last entgegengesetzt ist. Auch wenn eine Kraftmaschine durch einen Riemen eine Arbeitsmaschine antreibt, bewegt sich die gespannte, also die Energie übertragende Seite des Riemens von der Arbeitsmaschine auf die Kraftmaschine zu, während wir annehmen, daß die der Energie in der entgegengesetzten Richtung übergeht.

Die Einführung des Strahlungsvektors bedeutet also eine Arbeitshypothese, mit der aber die Vorgänge bei bekannten elektrischen Energieübertragungen übereinstimmen. Wir wollen einige Beispiele näher besprechen.

### § 302. Stationärer Energiestrom in einem eindrigen Telegraphenkabel.

Nach § 65 sind die Komponenten der elektrischen Feldstärke in dem Dielektrikum zwischen einem Leiter vom Radius  $r_1$  und einer Hülle vom Radius  $r_2$  gegeben als

$$\mathcal{E} = \frac{J}{r_1^2 \pi \sigma} \log r_2 - \log r, \quad \mathcal{E}_r = \frac{\varphi}{r \log r_2 / r_1},$$

wo  $\varphi$  das Potential in einem bestimmten Leiterquerschnitt ist. Im Leiter dagegen ist

$$\mathcal{E}_z = \frac{J}{r_1^2 \pi \sigma}, \quad \mathcal{E}_r = 0.$$

Die magnetische Feldstärke hat nur eine Komponente in der Ebene senkrecht zur Achse des Leiters, die ferner auf jeder durch die Achse gelegten Ebene senkrecht steht, also tangential gerichtet ist. Die erste Hauptgleichung ergibt für einen kreisförmigen Weg mit dem Radius  $r$ , der die Achse konzentrisch umschlingt, die Beziehung  $2\pi r \mathfrak{H} = 4\pi \int i d\mathfrak{f}$ , wo  $\int i d\mathfrak{f}$  der umschlungene Strom ist. Außerhalb des Leiters ist daher

$$\mathfrak{H}_a = \frac{2J}{r}.$$

Innerhalb des Leiters umschlingt der Kreis von dem Radius  $r$  nur den Strom  $Jr^2/r_1^2$ , also ist dort

$$\mathfrak{H}_i = \frac{2Jr}{r_1^2}.$$

Die magnetische Feldstärke bildet mit allen vorkommenden Komponenten der elektrischen Feldstärke rechte Winkel.

Der Vektor  $\mathfrak{E}$  hat in dem nichtleitenden Raume zwei Komponenten.  $\mathfrak{E}_r$ , das in Fig. 227 als von einem positiven Leiter ausgehend angenommen ist, bildet mit  $\mathfrak{H}_a$  eine Komponente  $\mathfrak{E}_z$  in der Richtung des positiven Stromes  $J$ , und ihre Größe ist

$$\mathfrak{E}_z = \frac{J \varphi}{2 \pi r^2 \log r_2 / r_1}.$$

Bildet man das Flächenintegral von  $\mathfrak{E}_z$  über den Querschnitt des Nichtleiters senkrecht zur  $z$ -Achse, so ist dies

$$\int_{r_1}^{r_2} \frac{1}{2 \pi} \frac{J \varphi}{r^2 \log r_2 / r_1} \cdot 2 \pi r dr = J \varphi.$$

Das Produkt aus Spannung und Stromstärke ist aber die Leistung, die der Querschnitt mit der Spannung  $\varphi$  an die dahinter liegenden Querschnitte weitergibt, also die nutzbare Leistung. Nach der Theorie des Strahlungsvektors nimmt diese also ihren Weg nicht im Leiter, sondern parallel dem Leiter im Dielektrikum.

Die Komponenten  $\mathfrak{E}_z$  im Nichtleiter und im Leiter bilden mit  $\mathfrak{H}$  eine zweite Komponente  $\mathfrak{E}_r$  von  $\mathfrak{E}$ , die radial nach innen gerichtet ist (Fig. 228). Ihr Wert ist

$$\begin{aligned} \text{außerhalb des Leiters} & \quad \frac{J^2}{2 \pi r} \frac{\log r_2 - \log r}{r_1^2 \pi \sigma \log r_2 / r_1}, \\ \text{innerhalb des Leiters} & \quad \frac{J^2}{2 \pi r} \frac{r^2}{r_1^2} \frac{1}{r_1^2 \pi \sigma}. \end{aligned}$$

Durch einen Zylinder vom Radius  $r$ , der parallel der  $z$ -Achse die Höhe 1 cm hat, tritt nach der Achse zu in der Sekunde die Energie

$$\begin{aligned} \text{außerhalb des Leiters} & \quad \frac{J^2}{r_1^2 \pi \sigma} \frac{\log r_2 - \log r}{\log r_2 / r_1}, \\ \text{innerhalb des Leiters} & \quad \frac{J}{r_1^2 \pi \sigma} \frac{r^2}{r_1^2}. \end{aligned}$$

Hierin ist gemäß der Feststellung in § 65  $1/r_1^2 \pi \sigma$  der Widerstand  $R$  des Leiters für die Längeneinheit. In der Oberfläche ( $r = r_1$ ) werden beide Beträge von  $\mathfrak{E}_r$  gleich  $J^2 R$ , also gleich der in der Längeneinheit des Leiters in einer Sekunde in Wärme umgesetzten Energie. Diese tritt durch die Oberfläche in den Leiter ein.

Neben dem nutzbaren Energietransport  $J \varphi$ , der parallel der Achse im Dielektrikum stattfindet, haben wir also einen zweiten, der radial auf die

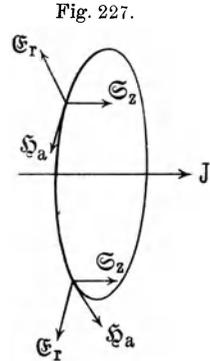


Fig. 227.

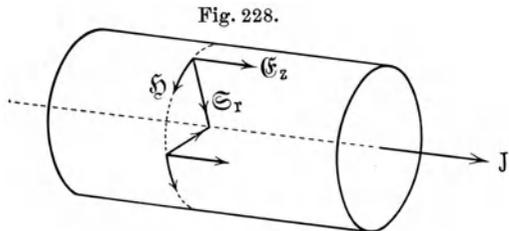


Fig. 228.

Achse zugeht. Er beginnt an der Hülle mit dem Werte Null; jede Schicht liefert etwas hinzu, bis an der Oberfläche der Betrag  $J^2 R$  vorhanden ist; dieser verteilt sich auf die einzelnen Schichten des Leiters und bringt dort die Erwärmung hervor.

In der Hülle nehmen wir in diesem Beispiel nach § 65 kein merkbares elektrisches Feld, also auch keine Energieströmung an. Zwischen ihr und dem inneren Leiter gleitet also gewissermaßen die Energie entlang, wie der Schall in einem Schallrohre, ein Teil aber dringt in den inneren Leiter ein und geht dort in Wärme über.

### § 303. Energiestrom im Felde einer symmetrischen Doppelleitung.

Wir wollen bei diesem Beispiele hauptsächlich die nutzbare Strömung im Nichtleiter verfolgen, da die in den Leiter als Wärme eintretende Strömung bei der in § 66 nachgewiesenen Ähnlichkeit des elektrischen Feldes in der Nähe der Leiteroberfläche mit dem einer konzentrischen Doppelleitung nichts Neues gegen das vorige Beispiel bietet. Nach § 77 liegt im Dielektrikum das Feld derart, daß die  $\mathfrak{H}$ -Linien in Kreisen verlaufen, die in Ebenen senkrecht zu den Achsen der Leiter liegen, während die  $\mathfrak{E}$ -Linien in diesen Ebenen von dem einen zum anderen Leiter übergehen.

Solche  $\mathfrak{H}$ - und  $\mathfrak{E}$ -Linien sind in Fig. 229 gezeichnet und für vier Stellen des Feldes die Richtung des Vektors  $\mathfrak{S}$ . Die Zeichen + und - geben an,

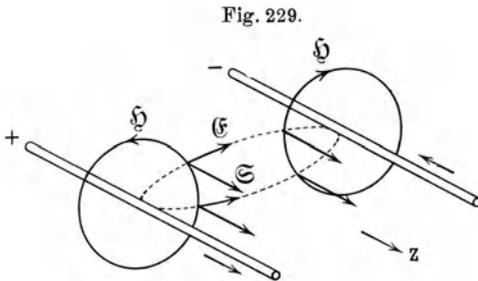


Fig. 229.

an welcher Seite die Stromquelle angenommen wird, und welcher Leiter die positive Spannung hat, die Pfeile neben den Leitern die Stromrichtungen. Man findet so, daß an allen Stellen des Feldes die  $z$ -Komponente des Energiestromes die durch  $z$  bezeichnete Richtung hat. Beläßt man die Stromquelle auf der an-

gegebenen Seite, tauscht aber die Pole, so ändert sich an der Richtung von  $\mathfrak{S}$  nichts, dagegen kehrt sich  $\mathfrak{S}$  um, wenn man die Stromquelle an die entgegengesetzte Seite der Doppelleitung legt. Als allgemeine Regel kann man angeben, daß die Energie im Felde einer Doppelleitung sich in derselben Richtung bewegt, wie die positive Elektrizität in dem positiven Leiter.

**§ 304. Stromverdrängung bei Wechselströmen.** Die Betrachtungen über die Energieströmung im Felde von Leitern führen zu der Anschauung, daß die Energie außerhalb der metallischen Leiter fortgeführt wird und nur zu einem Teile, der den Verlust darstellt, in die metallischen Leiter eintritt. Wird der Leiter zunächst als im stromlosen Zustande befindlich vorausgesetzt, so nimmt er nach der Einschaltung den Strom zuerst von außen her auf; der Strom erfüllt zunächst die an der Oberfläche gelegenen Teile und erst nach und nach, wenn auch tatsächlich sehr schnell, die tiefer liegenden. Wenn bei Wechselströmen die Richtung des Stromes sich sehr schnell ändert, so kann es daher vorkommen, daß, ehe der Strom bis zur vollen Tiefe im Leiter

vorgedrungen ist, die ihn treibende Feldstärke aufhört und nach der entgegengesetzten Seite zu wirken beginnt. Bei hinreichender Wechselgeschwindigkeit werden also die mehr nach innen gelegenen Teile der Leiter keinen Strom führen; dieser beschränkt sich vielmehr auf Teile in der Nähe der Oberfläche. Daß dies bei sehr schnellen Schwingungen augenfällig zutrifft, hat Hertz<sup>96)</sup> durch Versuche gezeigt; bei langsamen Frequenzen hat der Strom Zeit, tiefer einzudringen als bei sehr schnellen; ist also ein Leiter hinreichend stark, so wird sich der besprochene Vorgang dadurch geltend machen, daß der Leiter nur zum Teil als stromführend wirkt, während der andere Teil gleichsam außer Tätigkeit gesetzt ist. Ein solcher Leiter wird also einen größeren Widerstand aufweisen, als wenn der Strom ihn im ganzen Querschnitt durchflösse.

Da man gewohnt ist, es als den normalen Zustand anzusehen, daß der Strom den vollen Querschnitt einnimmt, so erscheint der besprochene Vorgang als eine Verdrängung des Stromes von dem Innern des Leiters.

Neben der Erhöhung des Widerstandes macht sich noch eine andere Wirkung der Stromverdrängung geltend, die Verminderung der Induktivität. Mit dem Strome wird auch die magnetische Feldstärke aus dem Innern des Leiters verdrängt, und daher wird der Anteil des Integrals  $\int \mu \mathfrak{H}^2 dv / 8\pi$ , soweit er von dem Felde im Innern des Leiters herrührt, mit wachsender Verdrängung immer kleiner.

Daher fällt die Induktivität einer Schleife aus eisernen Drähten, die nach Gl. (151) den Wert

$$L = 4l \left( \log \sqrt{\frac{2d}{\rho_1 \rho_2}} + \frac{\mu}{4} \right)$$

hat, im Grenzfall auf den Betrag

$$4l \log \frac{2d}{\sqrt{\rho_1 \rho_2}},$$

der von  $\mu$  unabhängig ist; bei genügender Frequenz haben also Eisenleitungen keine höhere Induktivität, als Leitungen aus unmagnetischen Metallen.

Auf diese Vorgänge, insbesondere die Erhöhung des Widerstandes bei veränderlichen Strömen gehen wir im dritten Abschnitt näher ein.

**§ 305. Reflexion und Absorption einer ebenen elektrischen Welle an einer ebenen Leiterfläche.** Die Welle falle senkrecht zur Leiterfläche ein, und wir wählen die Einfallrichtung, und zwar auf der Innenseite des Leiters positiv, zur  $x$ -Richtung. Die Welle sei polarisiert, indem die magnetische Feldstärke parallel der  $z$ -Achse liege. Als ebene Welle besitzt sie die Eigenschaft, daß die magnetische und die elektrische Feldstärke in einer Wellenfront, also einer auf der  $x$ -Achse senkrechten Ebene von  $y$  und  $z$  unabhängig sind.

Aus der Annahme, daß die magnetische Feldstärke  $\mathfrak{H}$  mit der Komponente  $\mathfrak{H}_z$  identisch ist, so daß  $\mathfrak{H}_x = 0$  und  $\mathfrak{H}_y = 0$ , folgt, daß die Feldgleichungen die Form annehmen:

$$\begin{aligned} 4\pi c_x &= + \frac{\partial \mathfrak{H}_z}{\partial y}, & 4\pi c_y &= - \frac{\partial \mathfrak{H}_z}{\partial x}, & 4\pi c_z &= 0, \\ -\mu \frac{\partial \mathfrak{H}_z}{\partial t} &= \frac{\partial \mathfrak{E}_y}{\partial x} - \frac{\partial \mathfrak{E}_x}{\partial y}. \end{aligned}$$

Da wir ferner annehmen, daß  $\mathfrak{E}$  und  $\mathfrak{H}$  von  $y$  nicht abhängen, so folgt, daß  $c_x = 0$ , also auch  $\mathfrak{E}_x = 0$ , und die Gleichungen lauten

$$4\pi c_y = -\frac{\partial \mathfrak{H}_z}{\partial x}; \quad -\mu \frac{\partial \mathfrak{H}_z}{\partial t} = \frac{\partial \mathfrak{E}_y}{\partial x}.$$

Da  $\mathfrak{E}_x = 0$  und  $\mathfrak{E}_z = 0$ , so liegt die elektrische Feldstärke parallel zur  $y$ -Achse und sie steht daher zu  $\mathfrak{H}_z$  senkrecht. Wir wollen überall  $\mathfrak{E}$  statt  $\mathfrak{E}_y$  und  $\mathfrak{H}$  statt  $\mathfrak{H}_z$  setzen; ebenso sei die Dichte des Leitungsstromes mit  $i$  statt  $i_y$  bezeichnet.

In der leitenden Platte, deren Dicke  $d$  sei, ist  $c_y = i = \sigma_2 \mathfrak{E}$ ; wir erhalten also

$$\frac{\partial^2 \mathfrak{H}}{\partial x^2} = 4\pi \sigma_2 \mu_2 \frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial t} \dots \dots \dots (363)$$

Im Nichtleiter außerhalb des Leiters ist

$$c_y = \frac{\epsilon_1}{4\pi c^2} \frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial t},$$

also ergibt sich

$$\frac{\partial^2 \mathfrak{H}}{\partial x^2} = \frac{\epsilon_1 \mu_1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathfrak{H}}{\partial t^2} \dots \dots \dots (364)$$

Die letztere Gleichung führt auf die Lösung

$$\mathfrak{H} = f\left(t + \frac{\sqrt{\epsilon_1 \mu_1}}{c} x\right) \dots \dots \dots (365)$$

und stellt eine in der Richtung von  $x$  oder der entgegengesetzten fortschreitende Welle dar. Auch im Leiter wird die Welle fortschreiten, aber gedämpft sein, wir versuchen daher dort den Ansatz

$$\mathfrak{H} = e^{-\gamma x} \varphi\left(t - \frac{x}{v}\right).$$

Zur Abkürzung sei  $t - \frac{x}{v} = u$  gesetzt.

Damit der Ansatz der Gleichung für den leitenden Raum genüge, muß folgende Bedingung erfüllt sein:

$$\gamma^2 \varphi(u) + \frac{1}{v^2} \varphi''(u) + 2 \frac{\gamma \varphi'(u)}{v} = 4\pi \sigma_2 \mu_2 \varphi'(u).$$

Wir genügen dieser Forderung, indem wir setzen

$$\begin{aligned} \gamma &= 2\pi \sigma_2 \mu_2 v, \\ \gamma^2 \varphi + \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u^2} &= 0. \end{aligned}$$

Die letztere Gleichung liefert das Integral

$$\varphi = a_1 \cos \gamma v (t - x/v) + b_1 \sin \gamma v (t - x/v).$$

Die Welle wird an der zweiten Grenzfläche der leitenden Platte zum Teil reflektiert werden, wir versuchen daher auch den Ansatz

$$\mathfrak{H} = e^{\gamma x} \varphi(t + x/v).$$

Dieser führt auf dieselben Bedingungen wie vorher.

Das allgemeine Integral ergibt sich, wenn wir zunächst die Teilintegrale für die Welle in der positiven  $x$ -Richtung und die in der entgegengesetzten Richtung zusammenfassen. Ferner ist aber zu bedenken, daß alle beliebigen Werte von  $v$  und  $\gamma$  brauchbar sind, wenn sie die Gleichung

$$\gamma = 2\pi\sigma_2\mu_2v = \kappa^2v$$

erfüllen. Das allgemeine Integral für  $\mathfrak{H}$  erhält also die Form:

$$\mathfrak{H} = \sum e^{-\kappa^2vx} \left\{ a_1 \cos \left[ \kappa^2v^2 \left( t - \frac{x}{v} \right) \right] + b_1 \sin \left[ \kappa^2v^2 \left( t - \frac{x}{v} \right) \right] \right\} + e^{+\kappa^2vx} \left\{ a_2 \cos \left[ \kappa^2v^2 \left( t + \frac{x}{v} \right) \right] + b_2 \sin \left[ \kappa^2v^2 \left( t + \frac{x}{v} \right) \right] \right\} \quad (366)$$

wo  $v$  alle beliebigen Werte haben kann. Welche Werte in einem bestimmten Falle zu wählen sind, hängt von seinen besonderen Bedingungen ab.

Wir wollen nunmehr die Aufgabe vereinfachen, indem wir für die einfallende Welle Sinusform annehmen; dann wird die Welle an jeder Stelle sinusförmig mit einerlei Frequenz  $\omega$ .

Die nichtleitenden Räume vor und hinter der Platte sollen durch die Indizes 1 und 3, der leitende Raum innerhalb der Platte durch den Index 2 bezeichnet werden.

Im vorderen Nichtleiter haben wir unter Anwendung der komplexen Form für die Differentialgleichung (364) die Lösung:

$$\mathfrak{H}_1 = \left( A_1 e^{-i\omega \frac{\sqrt{\varepsilon_1\mu_1}}{c}x} + A_2 e^{+i\omega \frac{\sqrt{\varepsilon_1\mu_1}}{c}x} \right) e^{i\omega t}.$$

Durch Anwendung der Gleichung

$$\varepsilon_1 \frac{\partial \mathfrak{E}_1}{\partial t} = - \frac{\partial \mathfrak{H}_1}{\partial x}$$

erhalten wir

$$\mathfrak{E}_1 = c \sqrt{\frac{\mu_1}{\varepsilon_1}} \left( A_1 e^{-i\omega \frac{\sqrt{\varepsilon_1\mu_1}}{c}x} - A_2 e^{+i\omega \frac{\sqrt{\varepsilon_1\mu_1}}{c}x} \right) e^{i\omega t}.$$

Im Leiter setzen wir

$$\mathfrak{H}_2 = (a_1 e^{-\gamma_2x} + a_2 e^{+\gamma_2x}) e^{i\omega t}.$$

Durch Einsetzen in Gl. (363) erhalten wir

$$\gamma_2^2 = 4\pi\sigma_2\mu_2\omega i.$$

Die elektrische Feldstärke im Leiter finden wir aus der Gleichung

$$\mathfrak{E}_2 = - \frac{1}{4\pi\sigma_2} \frac{\partial \mathfrak{H}_2}{\partial x},$$

nämlich:

$$\mathfrak{E}_2 = \frac{\gamma_2}{4\pi\sigma_2} (a_1 e^{-\gamma_2x} - a_2 e^{+\gamma_2x}) e^{i\omega t}.$$

Im nichtleitenden Raum hinter der Platte kommt nur die in der Richtung  $+x$  fortschreitende Welle vor; wird die Dicke der Platte mit  $d$  bezeichnet, so gilt für diesen Raum

$$\mathfrak{H}_3 = A_3 e^{-i\omega \frac{\sqrt{\varepsilon_3\mu_3}}{c}(x-d)} e^{i\omega t},$$

$$\mathfrak{E}_3 = c \sqrt{\frac{\mu_3}{\varepsilon_3}} A_3 e^{-i\omega \frac{\sqrt{\varepsilon_3\mu_3}}{c}(x-d)} e^{i\omega t}.$$

Die fünf Konstanten können durch folgende Festsetzungen bestimmt werden:

1. An der Vorderseite der Platte ( $x = 0$ ) hat die magnetische Welle eine gegebene Stärke  $H$ .

2. und 3. An der Vorderseite der Platte ist  $\mathfrak{H}_1 = \mathfrak{H}_2$  und  $\mathfrak{E}_1 = \mathfrak{E}_2$ .

4. und 5. An der hinteren Seite der Platte ( $x = d$ ) ist  $\mathfrak{H}_2 = \mathfrak{H}_3$  und  $\mathfrak{E}_2 = \mathfrak{E}_3$ .

Hieraus ergeben sich die Gleichungen:

$$\begin{aligned} A_1 + A_2 &= H, & A_1 + A_2 &= a_1 + a_2, \\ c \sqrt{\frac{\mu_1}{\varepsilon_1}} (A_1 - A_2) &= \frac{\gamma_2}{4\pi\sigma_2} (a_1 - a_2), \\ a_1 e^{-\gamma_2 d} + a_2 e^{\gamma_2 d} &= A_3, \\ \frac{\gamma_2}{4\pi\sigma_2} (a_1 e^{-\gamma_2 d} - a_2 e^{\gamma_2 d}) &= c \sqrt{\frac{\mu_3}{\varepsilon_3}} A_3. \end{aligned}$$

Zur Vereinfachung der Ergebnisse nehmen wir  $\varepsilon_1 = \varepsilon_3 = 1$ ,  $\mu_1 = \mu_3 = 1$  an, die Platte befindet sich also in Luft. Setzen wir

$$c \frac{4\pi\sigma_2}{\gamma_2} = c \sqrt{\frac{4\pi\sigma_2}{\omega i \mu_2}} = \alpha,$$

so erhalten wir

$$A_3 = \frac{H}{\alpha \overline{\text{Sin}} \gamma_2 d + \mathfrak{Cof} \gamma_2 d}.$$

Aus  $A_3$  ergeben sich die anderen Konstanten nach folgenden Beziehungen

$$A_1 + A_2 = H = A_3 (\alpha \overline{\text{Sin}} \gamma_2 d + \mathfrak{Cof} \gamma_2 d)$$

$$A_1 - A_2 = \frac{A_3}{\alpha} (\alpha \mathfrak{Cof} \gamma_2 d + \overline{\text{Sin}} \gamma_2 d)$$

$$a_1 = \frac{A_3}{2} (\alpha + 1) e^{\gamma_2 d}$$

$$a_2 = -\frac{A_3}{2} (\alpha - 1) e^{-\gamma_2 d}.$$

Wir wollen zunächst das Verhältnis  $A_1/A_2$  ermitteln, nämlich der an der Vorderseite der Platte einfallenden Welle zu der dort reflektierten. Dafür ergibt sich

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{(\alpha^2 + 1) \overline{\text{Sin}} \gamma_2 d + 2\alpha \mathfrak{Cof} \gamma_2 d}{(\alpha^2 - 1) \overline{\text{Sin}} \gamma_2 d}.$$

Wenn  $e^{\gamma_2 d}$  beträchtliche Werte hat, also z. B. bei einer dicken Platte, so wird dies Verhältnis, da  $\alpha$  meist groß gegen Eins ist, nahezu gleich Eins. Die Abschirmung des hinter der Platte liegenden Raumes beruht dann also nicht so sehr darauf, daß die Welle sich in der Platte totläuft, als darauf, daß sie zum größten Teil reflektiert wird.

Ist dagegen  $e^{\gamma_2 d}$  merklich durch  $1 + \gamma_2 d$  zu ersetzen, so erhält man:

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{2\alpha + \gamma_2 d (\alpha^2 + 1)}{\gamma_2 d (\alpha^2 - 1)},$$

und dieser Bruch nimmt für beliebig kleine Werte von  $\gamma_2 d$  beliebig große Werte an. An sehr dünnen Platten ist also die Reflexion gering, die Welle geht zum größten Teile durch.

Um festzustellen, welche Energie von der Platte aufgenommen und durchgelassen wird, hat man die Werte der Feldstärken für  $x = 0$  und für  $x = d$  anzuwenden.

Diese Werte sind  $H$  und  $c(A_1 - A_2)$  für  $x = 0$ , sowie  $A_3$  und  $cA_3$  für  $x = d$ . Bei der gegebenen komplexen Form wird die Leistung nach § 175 berechnet. Da die allgemeinen Formeln wenig durchsichtig sind, wollen wir den Unterschied des Verhaltens von Eisen und Kupfer durch ein Zahlenbeispiel zeigen. Man erhält für  $\omega = 5000$  und  $d = 0,1$  cm mit den im Anhang VI angegebenen Werten und für eine Permeabilität von  $\mu = 120$  (bei sehr kleinen Stromstärken):

	Kupfer	Eisen
$\gamma$	$6,00 e^{+i45,00}$	$23,9 e^{+i45,00}$
$\alpha$	$360 \cdot 10^5 e^{-i45,00}$	$11,95 \cdot 10^5 e^{-i45,00}$
$\text{Coj } \gamma_2 d$	$1,012 e^{+i10,20}$	$2,618 e^{+i96,90}$
$\text{Sin } \gamma_2 d$	$0,599 e^{+i48,50}$	$2,798 e^{+i96,10}$

Man findet daraus für die von der Platte bei  $x = 0$  aufgenommene Leistung für 1 cm<sup>2</sup> der Oberfläche in Erg für 1 Sekunde

$$56,2 H^2 \quad \text{und} \quad 655 H^2$$

und für die bei  $x = d$  aus der Platte austretende Leistung

$$2,58 \cdot 10^{-6} H^2 \quad \text{und} \quad 107 \cdot 10^{-6} H^2.$$

Eine Kupferplatte von 1 mm Stärke läßt also nur etwa  $1/12$  der Leistung eintreten und nur  $1/40$  der Leistung hindurch, die bei einer gleichstarken Eisenplatte bei der Frequenz und der Stärke von Fernsprechströmen in Frage kommt.

Wir besprechen noch kurz den Fall, daß hinter einer kupfernen Platte ein Leiter aus massivem Eisen folge, der so stark angenommen wird, daß in ihm nur mit der einfallenden Welle gerechnet zu werden braucht. Für die Größen  $\mathfrak{H}_1, \mathfrak{E}_1, \mathfrak{H}_2, \mathfrak{E}_2$  bleiben die früheren Bestimmungen, für den eisernen Leiter gelten die Gleichungen

$$\mathfrak{H}_3 = A_3 e^{-\gamma_3(x-d)} e^{i\omega t}$$

$$\mathfrak{E}_3 = \frac{\gamma_3}{4\pi\sigma_3} A_3 e^{-\gamma_3(x-d)} e^{i\omega t},$$

worin  $\gamma_3$  in ähnlicher Weise aufgebaut ist wie  $\gamma_2$ . Für die Berechnung der Konstanten gelten dieselben Annahmen wie in dem ersten Fall.

Wir wollen diesmal für Wechselströme von der Kreisfrequenz 157 und größere magnetisierende Kräfte, für welche im Eisen auch eine höhere Permeabilität,  $\mu_3 = 3000$ , anzunehmen ist, das Verhältnis der Feldstärken  $\mathfrak{H}_1$  für  $x = 0$  und  $\mathfrak{H}_3$  für  $x = d$  berechnen. Es hat den Wert

$$\text{Coj } \gamma_2 d + \frac{\alpha_2}{\alpha_3} \text{Sin } \gamma_2 d.$$

Man erhält  $\alpha_2 = 20,2 \cdot 10^7/\sqrt{i}$ ,  $\alpha_3 = 1,35 \cdot 10^6/\sqrt{i}$ ,  $\gamma_2 = 0,750 + i0,750$ ,  $\gamma_3 = 15,1 + i15,1$ . Hat die Kupferplatte eine Stärke von 1 mm, so wird das gesuchte Verhältnis 16,7; an dem Werte von  $\gamma_3$  sieht man, daß die magnetische Feldstärke bei der angenommenen Frequenz nicht tiefer als etwa 3 mm in das Eisen eindringt.

Wir haben hier in sehr vereinfachter räumlicher Anordnung die elektromagnetischen Verhältnisse eines Elektromagnets mit kupferner Dämpferhülse vor uns, wie solche in Relais, die in Reihe in einer Sprechleitung liegen, zur Verminderung der Induktivität gegenüber Fernsprechströmen verwendet werden<sup>97</sup>). Die Schwingungen von Fernsprechfrequenz dringen kaum in die Kupferhülse ein, während die magnetischen Kräfte der langsameren Rufströme, wenn auch stark geschwächt, bis in das Eisen gelangen.

## Zweiter Abschnitt.

### Elektrische Wellen im Raume.

**§ 306. Allgemeines.** Die Hertz'schen Versuche mit elektrischen Wellen haben der Maxwell'schen Theorie das Übergewicht über die anderen damals geltenden gegeben, und während man viele der bisher besprochenen Vorgänge ohne die allgemeine Form der Maxwell'schen Gleichungen hätte ableiten können, sind diese zur Darstellung der elektrischen Wellen unentbehrlich. Der Abschnitt von den elektrischen Wellen bildet in diesem Sinne den Abschluß des hier zugrunde gelegten Prinzips, alle Vorgänge einheitlich auf dieselben Grundgesetze zurückzuführen.

Wir werden uns aber auf die Besprechung der Fortpflanzung der Wellen im allgemeinen und auf die Vorgänge der Aussendung von Wellen durch Antennen unter vereinfachenden Voraussetzungen beschränken.

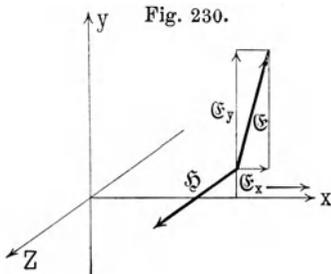
Ebene Wellen in homogenen Nichtleitern. Im § 304 ist für eine solche Welle die Gl. (364)

$$\frac{\partial^2 \mathfrak{H}}{\partial x^2} = \frac{\epsilon \mu}{c^2} \frac{\partial^2 \mathfrak{H}}{\partial t^2}$$

abgeleitet worden und auch ihre Lösung

$$\mathfrak{H} = f\left(t - \sqrt{\frac{\epsilon \mu}{c}} x\right).$$

Eine solche Welle breitet sich im leeren Raume geradlinig, ohne Dämpfung und mit Lichtgeschwindigkeit aus. In der drahtlosen Telegraphie können die Wellen aber nicht nur im leeren Raume gehen, sondern sie verlaufen in der Nähe des bald mehr, bald weniger gut leitenden Erdbodens, also ähnlich wie die Wellen in dem Dielektrikum eines Kabels an seinem Leiter entlang laufen. Wir wollen untersuchen, inwieweit durch die Erdoberfläche der Verlauf einer Welle beeinflusst wird.



### § 307. Fortpflanzung elektrischer Wellen längs der Oberfläche eines Leiters.

Eine Welle pflanze sich längs der ebenen wagerechten Oberfläche eines Halbleiters in der Richtung  $+x$  fort (Fig. 230), die magnetische Feldstärke  $\mathfrak{H}$  habe die Richtung  $+z$  in der wagerechten Ebene, während die elektrische Feldstärke Komponenten  $\mathfrak{E}_x$  und  $\mathfrak{E}_y$  hat.  $\mathfrak{H}$ ,  $\mathfrak{E}_x$ ,  $\mathfrak{E}_y$

seien mit  $x$  und  $y$ , nicht aber mit  $z$  veränderlich, so daß also die Welle in jedem zur Fortpflanzungsrichtung senkrechten Flächenstreifen zwischen zwei zur Oberfläche parallelen Geraden die Eigenschaften einer ebenen Welle hat. Die Feldgleichungen gehen in diesem Falle zurück auf die drei Gleichungen

$$4\pi c_x = \frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial y}, \quad 4\pi c_y = -\frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial x}, \quad -\mu \frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial t} = \frac{\partial \mathfrak{E}_y}{\partial x} - \frac{\partial \mathfrak{E}_x}{\partial y}. \quad (367)$$

Der Raum oberhalb des Halbleiters sei Luft, also  $\varepsilon_1 = 1$ ,  $\mu_1 = 1$ ,  $\sigma_1 = 0$ ; der Halbleiter sei unmagnetisch, also durch die Werte  $\varepsilon_2 = \varepsilon$ ,  $\sigma_2 = \sigma$ ,  $\mu_2 = 1$  gegeben. Dann ist im Luftraum

$$\frac{\partial \mathfrak{H}_1}{\partial y} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathfrak{E}_{1x}}{\partial t}, \quad -\frac{\partial \mathfrak{H}_1}{\partial x} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathfrak{E}_{1y}}{\partial t}.$$

Daraus folgt

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathfrak{H}_1}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 \mathfrak{H}_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \mathfrak{H}_1}{\partial y^2} \dots \dots \dots (368)$$

Im Halbleiter dagegen ist

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathfrak{H}_2}{\partial y} &= \frac{\varepsilon}{c^2} \frac{\partial \mathfrak{E}_{2x}}{\partial t} + 4\pi\sigma \mathfrak{E}_{2x} \\ -\frac{\partial \mathfrak{H}_2}{\partial x} &= \frac{\varepsilon}{c^2} \frac{\partial \mathfrak{E}_{2y}}{\partial t} + 4\pi\sigma \mathfrak{E}_{2y}, \end{aligned}$$

und daraus folgt die Gleichung

$$\frac{\partial^2 \mathfrak{H}_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \mathfrak{H}_2}{\partial y^2} = \frac{\varepsilon}{c^2} \frac{\partial^2 \mathfrak{H}_2}{\partial t^2} + 4\pi\sigma \frac{\partial \mathfrak{H}_2}{\partial t} \dots \dots \dots (369)$$

Es ist interessant, diese Gleichung mit der Telegraphengleichung in der in § 209 besprochenen Form Gl. (238) zu vergleichen. Auf der rechten Seite stimmen sowohl die Form als die Dimensionen der Koeffizienten überein; auf der linken erscheint hier außer der Abhängigkeit in der Fortpflanzungsrichtung noch diejenige senkrecht dazu, die mit dem Eindringen der Welle in den Leiter oder Halbleiter zu tun hat.

Wir beschäftigen uns mit dem vereinfachten Falle der regelmäßigen Sinusschwingungen. Die Welle wird sowohl nach der  $x$ -Richtung, als auch nach der  $y$ -Richtung, also senkrecht nach oben und unten als gedämpfte Welle verlaufen, und wir setzen

$$\left. \begin{aligned} \mathfrak{H}_1 &= A e^{-\gamma x - \gamma_1 y + i\omega t} \\ \mathfrak{H}_2 &= A e^{-\gamma x + \gamma_2 y + i\omega t} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (370)$$

Bei der Wahl dieser Ausdrücke ist zunächst der Grenzbedingung Rechnung getragen, daß für  $y = 0$  und jedes  $x$  und  $t$  die Werte von  $\mathfrak{H}_1$  und  $\mathfrak{H}_2$  stetig aneinander anschließen müssen;  $\gamma_1$  und  $\gamma_2$  sind so zu wählen, daß ihre reellen Teile positiv sind, so daß sowohl  $\mathfrak{H}_1$  als  $\mathfrak{H}_2$  in ihren Bereichen endlich bleiben.

Die Größen  $\mathfrak{H}_1$  und  $\mathfrak{H}_2$  nach (370) sollen ferner die Gleichungen (368) und (369) erfüllen. Daraus folgt, daß

$$\begin{aligned} \gamma^2 + \gamma_1^2 &= -\frac{\omega^2}{c^2} \\ \gamma^2 + \gamma_2^2 &= -\frac{\omega^2 \varepsilon}{c^2} + 4\pi\sigma \omega i. \end{aligned}$$

Eine andere Grenzbedingung ist, daß für  $y = 0$  die Werte des wahren Stromes  $c_y$  senkrecht zur Trennfläche übereinstimmen, und dies bedeutet nach (367), daß

$$\left(\frac{\partial \mathfrak{H}_1}{\partial x}\right)_{y=0} = \left(\frac{\partial \mathfrak{H}_2}{\partial x}\right)_{y=0}.$$

Diese Bedingung ist aber durch die angenommene Form schon erfüllt.

Die dritte Grenzbedingung ist, daß die Werte, welche  $\mathfrak{E}_x$  in beiden Räumen hat, in der Grenzfläche übereinstimmen.

Aus der Gleichung

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathfrak{E}_{1x}}{\partial t} = \frac{\partial \mathfrak{H}_1}{\partial y}$$

ergibt sich, daß

$$\mathfrak{E}_{1x} = - \frac{\gamma_1 c^2}{i \omega} A e^{-\gamma x - \gamma_1 y + i \omega t}.$$

Auf ähnliche Weise findet man

$$\mathfrak{E}_{2x} = - \frac{i \omega \gamma_2}{\omega^2 \varepsilon - c^2 + 4 \pi \sigma i \omega} A e^{-\gamma x + \gamma_2 y + i \omega t}.$$

Daher folgt, wenn  $(\mathfrak{E}_{1x})_{y=0} = (\mathfrak{E}_{2x})_{y=0}$  sein soll, daß

$$-\frac{\gamma_1}{\gamma_2} = \frac{1}{\varepsilon + \frac{4 \pi \sigma c^2}{i \omega}}.$$

Führen wir ein:

$$\frac{4 \pi \sigma c^2}{\omega \varepsilon} = \kappa,$$

so haben wir zur Bestimmung von  $\gamma, \gamma_1, \gamma_2$  folgende drei Gleichungen:

$$\left. \begin{aligned} \gamma^2 + \gamma_1^2 &= - \frac{\omega^2}{c^2} \\ \gamma^2 + \gamma_2^2 &= - \frac{\omega^2 \varepsilon}{c^2} (1 - i \kappa) \\ \gamma_2 &= - \varepsilon \gamma_1 (1 - i \kappa) \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (371)$$

Daraus ergibt sich

$$\begin{aligned} \gamma^2 &= - \frac{\omega^2}{c^2} \frac{\varepsilon (i \kappa - 1)}{\varepsilon (i \kappa - 1) - 1}; \\ \gamma_1^2 &= + \frac{\omega^2}{c^2} \frac{1}{\varepsilon (i \kappa - 1) - 1}; \\ \gamma_2^2 &= + \frac{\omega^2}{c^2} \frac{\varepsilon^2 (i \kappa - 1)^2}{\varepsilon (i \kappa - 1) - 1}. \end{aligned}$$

Aus diesen Größen lassen sich die Wellenlänge und die Dämpfung jeder Komponente der Wellen in den beiden Räumen ermitteln.

Setzen wir  $\gamma = \alpha i + \beta$  und trennen das Reelle vom Imaginären, so erhalten wir:

$$\alpha^2 - \beta^2 = \frac{\omega^2 \varepsilon}{c^2} \frac{\varepsilon \kappa^2 + \varepsilon + 1}{\varepsilon^2 \kappa^2 + (\varepsilon + 1)^2},$$

$$2\alpha\beta = \frac{\omega^2}{c^2} \frac{\varepsilon \kappa}{\varepsilon^2 \kappa^2 + (\varepsilon + 1)^2}.$$

Wenn  $\kappa$  bei großer Leitfähigkeit sehr groß ist, so wird  $\gamma^2 = -\frac{\omega^2}{c^2}$ , also enthält es merklich nur die Größe  $\alpha i$ , während  $\beta$  sehr klein ist. Der Wert  $\frac{\omega}{c}$  wird in anderen Fällen fast genau mit dem Wert von  $\alpha$  übereinstimmen, solange  $\kappa^2$  groß gegen Eins ist. Dies ist, wie die Beispiele zeigen werden, auch noch bei sehr geringer Leitfähigkeit der Fall, und man kann daher allgemein genügend genau  $\alpha = \omega/c$  setzen; besonders wird man den Wert von  $\beta$  damit genügend richtig feststellen. Wir erhalten dann

$$\beta = \frac{\omega}{2 c \kappa \varepsilon} \dots \dots \dots (372)$$

Unter derselben Bedingung, daß  $\kappa^2$  groß gegen Eins ist, folgt, daß

$$\gamma_1^2 = \frac{\omega^2}{c^2 \varepsilon \kappa i}, \quad \text{also } \gamma_1 = \frac{\omega}{c \sqrt{2 \kappa \varepsilon}} (1 - i),$$

$$\gamma_2^2 = \frac{\omega^2 \varepsilon \kappa i}{c^2}, \quad \text{also } \gamma_2 = \frac{\omega}{c} \sqrt{\frac{\varepsilon \kappa}{2}} (1 + i).$$

Die Dämpfungsexponenten der Komponenten nach der  $y$ -Achse sind also

$$\beta_1 = \frac{\omega}{c \sqrt{2 \kappa \varepsilon}} \quad \text{und} \quad \beta_2 = \frac{\omega}{c} \sqrt{\frac{\varepsilon \kappa}{2}} \dots \dots \dots (373)$$

Nimmt man für Seewasser die Werte  $\varepsilon = 80$ ,  $\sigma = 10^{-11}$  an, so ist für  $\omega = 10^6$ , oder etwa 2000 m Wellenlänge  $\kappa = 1413$ , daher

$$\beta = 1,475 \cdot 10^{-10},$$

$$\beta_1 = 702 \cdot 10^{-10},$$

$$\beta_2 = 79,2 \cdot 10^{-4}.$$

In der Richtung der  $x$ -Achse, also der Hauptrichtung der Fortpflanzung, hat die Welle eine räumliche Dämpfung von  $1,475 \cdot 10^{-5}$  für 1 km, sie ist daher bei weitem weniger gedämpft als eine Welle auf einer noch so guten Drahtleitung. In der senkrechten Richtung nach oben kommt die Dämpfung derjenigen auf einer dünnadrätigen Fernsprechleitung gleich, sie ist also in dem der Erfahrung zugänglichen Bereich wenig merklich; dagegen ist die in das Seewasser eintretende Welle stark gedämpft. Immerhin erreicht die Welle eine Tiefe von 290 cm noch mit einer Amplitude von einem Zehntel des Wertes, den sie an der Oberfläche hatte.

Für trockenen Boden kann man setzen  $\varepsilon = 4$  und  $\sigma = 10^{-15}$ ; dann wird  $\kappa = 2,83$ . Man erhält daher

$$\gamma = 32,9 \cdot 10^{-6} e^{+87,80 i} = (1,25 + i 32,9) 10^{-6},$$

$$\gamma_1 = 9,46 \cdot 10^{-6} e^{-56,90 i} = (5,2 - i 7,9) 10^{-6},$$

$$\gamma_2 = 114 \cdot 10^{-6} e^{+52,80 i} = (69 + i 91) 10^{-6}.$$

Die räumliche Dämpfung der längs der Oberfläche streichenden Komponente der Welle ist in diesem Falle von der Größenordnung derjenigen der Fernsprechröstre in einem gewöhnlichen Fernsprechkabel.

Von der Leitfähigkeit der Oberfläche hängt die Neigung der elektrischen Feldstärke gegen die senkrechte Richtung ab. Man erhält für deren Komponenten aus den Grundgleichungen

$$\begin{aligned} \mathfrak{E}_{1x} &= - \frac{c^2}{i \omega} \gamma_1 \mathfrak{H}, \\ \mathfrak{E}_{1y} &= + \frac{c^2}{i \omega} \gamma \mathfrak{H}. \end{aligned}$$

Bei erheblichem  $\kappa$  ist nach den vorhergehenden Berechnungen angenähert

$$\gamma_1 = \frac{\omega}{c \sqrt{\epsilon \kappa}} e^{-45^\circ i}, \quad \gamma = \frac{\omega}{c} e^{+90^\circ i}.$$

Die beiden Komponenten haben also  $45^\circ$  Phasendifferenz, um die  $\mathfrak{E}_{1y}$  vor  $\mathfrak{E}_{1x}$  voraus ist, und dadurch entsteht ein Drehfeld der elektrischen Feldstärke. Für den kleinen Wert von  $\kappa$  bei trockenem Boden ergibt sich eine Phasenverschiebung von  $37,3^\circ$ . Hat man allgemeiner zwei räumlich aufeinander senkrechte Komponenten, die eine zeitliche Phasenverschiebung haben, nämlich  $A \sin \omega t$  und  $B \sin(\omega t + \varphi)$ , so hat die Resultierende den Zeitwert

$$E = \sqrt{A^2 \sin^2 \omega t + B^2 \sin^2(\omega t + \varphi)}$$

oder

$$E = \sqrt{\frac{1}{2} [A^2 + B^2 - \cos 2 \omega t (A^2 + B^2 \cos 2 \varphi) + \sin 2 \omega t B^2 \sin 2 \varphi]}.$$

Diese Größe hat in jeder Periode ein Maximum und ein Minimum, wenn nämlich

$$tg 2 \omega t = - \frac{B^2 \sin 2 \varphi}{A^2 + B^2 \cos 2 \varphi}$$

ist. Augenscheinlich fällt das Maximum auf Winkel, die einen negativen Kosinus und positiven Sinus haben.

Wenn wir als senkrechte Komponente  $A \sin \omega t$  und als wagerechte die andere wählen, so überwiegt bei der Fortpflanzung über Seewasser die senkrechte Komponente erheblich; der Winkel  $2 \omega t$  für das Maximum fällt also zwischen  $90$  und  $180^\circ$  nahe an  $180^\circ$ ,  $\omega t$  daher etwas unter  $90^\circ$ . Im Augenblick des Maximums hat daher die senkrechte Komponente von  $E$  nahezu den Höchstwert  $A$ , die wagerechte ist in der Phase  $135^\circ$ , also nach  $+x$  gerichtet

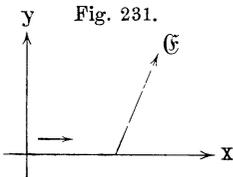


Fig. 231.

und nahezu vom Betrage  $\frac{B \sqrt{2}}{2}$ . Die Resultierende

ist demnach im Augenblick des Höchstwertes aus der Senkrechten etwas abgelenkt, und zwar im Sinne der Zeichnung in Fig. 231. Diese Abweichung tritt in dem Beispiel der Fortpflanzung über trockenen Boden viel mehr hervor. Dafür ist in Verhältniszahlen

$$A = 32,8, \quad B = 9,37, \quad \varphi = 37,7^\circ.$$

Daher ist

$$tg 2 \omega t = - 0,0775.$$

Das Maximum der Resultierenden fällt auf  $\omega t = 87,8^\circ$ , es hat den Wert 33,6 und die elektrische Feldstärke bildet mit der  $y$ -Achse den Winkel  $76,9^\circ$ .

Die elektrische Feldstärke ist also ebenso gerichtet mit Bezug auf die Fortpflanzungsrichtung, wie dies in § 65 von der Feldstärke im stationären Felde beschrieben und durch Fig. 53 erläutert ist. Je besser das Mittel leitet, um so mehr wird die senkrechte Stellung der elektrischen Feldstärke erreicht. Im Grenzfalle vollkommener Leitfähigkeit wird die elektrische Feldstärke an der Fläche ebenso gespiegelt, wie für ruhende Vorgänge. Man kann daher das Feld in einem Nichtleiter, der an einen Leiter mit ebener Oberfläche angrenzt, bei genügender Leitfähigkeit so betrachten, als wenn statt des Leiters auch ein Nichtleiter und in diesem das Spiegelbild der Vorgänge im Leiter vorhanden wäre.

Man hat die bei geringer Leitfähigkeit eintretende Schräglage des Vektors der elektrischen Feldstärke zur Erklärung der Richtungswirkung von Antennen herangezogen<sup>98)</sup>, die außer einem senkrechten Teil noch einen daran anschließenden wagerechten Teil haben. In Anbetracht dessen, daß die Richtung des größten Wertes der Resultierenden auch bei schlechter Leitfähigkeit erst wenig von der Senkrechten abweicht, erscheint diese Erklärung nicht allgemein ausreichend, wenn auch der Sinn der Richtungsabweichung nach Beobachtung und Theorie übereinstimmt.

**§ 308. Oberflächenladungen bei elektrischen Wellen.** Bei der Bestimmung der Fortpflanzungskonstanten  $\gamma$ ,  $\gamma_1$  und  $\gamma_2$  in § 307 ist u. a. festgestellt worden, daß das Gleichungssystem (370) auch die Bedingung erfüllt, daß die Komponenten des wahren Stromes senkrecht zur Trennfläche, der Ebene, welcher entlang die Wellen gleiten, im oberen Nichtleiter und im unteren Halbleiter denselben Wert haben. Im Nichtleiter ist der wahre Strom gleich dem Verschiebungsstrom. Nach der zweiten Gleichung unter (367) und nach Gl. (370) ist er

$$c_y = -\frac{1}{4\pi} \frac{\partial \mathfrak{D}_1}{\partial x} = \frac{\gamma}{4\pi} A e^{-\gamma x - \gamma_1 y + i\omega t}.$$

Nach § 5 ist der Verschiebungsstrom auch gleich  $\partial \mathfrak{D}, \partial t$  und die zu einer Leiteroberfläche senkrechte Komponente der dielektrischen Verschiebung ist nach Gl. (48) gleich der Flächendichte. An der Grenzfläche zwischen Nichtleiter und Leiter tritt also an der Seite des Nichtleiters eine zeitlich wechselnde Flächendichte  $\mathfrak{h} e^{i\omega t}$  auf und es ist für  $y = 0$

$$i\omega \mathfrak{h} e^{i\omega t} = \frac{\gamma}{4\pi} A e^{-\gamma x + i\omega t}.$$

Bei hinreichend gut leitendem Mittel im Nichtleiter wird nach den Feststellungen in § 307  $\gamma = i\omega/c$ , daher

$$\mathfrak{h} = \frac{A}{4\pi c} e^{-i\frac{\omega x}{c}}.$$

Auf der Oberfläche des Leiters entstehen also der  $y$ -Richtung parallele Streifen, in denen die Flächendichte in einem bestimmten Augenblick gleiches

Vorzeichen und gleiche Stärke hat; senkrecht zu dieser Richtung, also in der  $x$ -Richtung, ändert sich das Vorzeichen periodisch, und zwar ist von einem positiven Maximum zum nächsten ein Abstand, der durch die Gleichung  $\omega(x_2 - x_1) = 2\pi c$  gegeben ist; er ist mithin gleich der Wellenlänge der ausgesandten Wellen. Betrachten wir eine Stelle, an der die Flächendichte gerade den positiven Höchstwert hat, als einen Wellenberg, eine Stelle, an der sie gerade den niedrigsten Wert erreicht hat, als ein Wellental, so weist eine Fläche, über welche in dem darüber liegenden Raum elektrische Wellen hinziehen, die auch mehr oder weniger in den Leiter eindringen, in elektrischem Sinne dasselbe Bild auf, wie die Oberfläche des Ozeans bei langer Dünung, mit dem regelmäßigen Wechsel paralleler Wellenberge und Wellentäler. Störungen in der Gleichmäßigkeit der elektrischen Bedingungen der Trennfläche, also eine Insel aus schlecht leitendem Material im Meere oder eine Küste, oder auf dem Lande Flüsse, Wälder und Seen, werden das Bild der elektrischen Wellen auf der Erdoberfläche ebenso mit Unregelmäßigkeiten durchsetzen, wie wir es von Meereswellen in der Nähe der Küsten kennen.

An die wechselnden Ladungen auf der Oberfläche setzen die in dem nichtleitenden Raum aufsteigenden Feldlinien an, von denen wir ausgegangen sind. Beide Erscheinungen bedingen einander eindeutig, und man kann ebensogut von den wechselnden Ladungen der Oberfläche ausgehen. Diese Überlegung macht es ohne neue theoretische Erörterungen verständlich, wie es möglich ist, daß die elektrischen Wellen, wenn sie erst einmal an der Erdoberfläche angesetzt haben, ihr trotz der Erdkrümmung weiter folgen, während sie sich im freien Raum geradlinig fortpflanzen.

In praktischer Hinsicht haben die Vorstellungen über die Gleichwertigkeit von Raumfeld und Oberflächenfeld zur Anwendung der Erdantennen geführt<sup>99</sup>).

**§ 309. Aussendung elektrischer Wellen. Hertz'sche Lösung.** Nach dem in § 307 Erörterten kann man die Aussendung elektrischer Wellen von einem in der Nähe der Erdoberfläche gelegenen Störungsmittelpunkt aus so betrachten, als wenn die Störungsquelle sich in einem unbegrenzten homogenen Raume befände; indessen muß die Lösung so beschaffen sein, daß geometrische Symmetrie zu einer durch die Störungsquelle gelegten Ebene vorhanden ist. Im freien Raume, für den  $\varepsilon = 1$  und  $\mu = 1$ , werden die Maxwell'schen Gleichungen

$$\operatorname{rot} \mathfrak{H} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial t}, \quad \operatorname{rot} \mathfrak{E} = - \frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial t} \quad \dots \dots \dots (374)$$

Wir führen in diese Gleichung den Ansatz ein

$$\mathfrak{H} = \operatorname{rot} \frac{\partial \mathfrak{U}}{\partial t} \quad \dots \dots \dots (375)$$

wo  $\mathfrak{U}$  eine noch zu besprechende Funktion ist. Dieser Ansatz ähnelt dem, der in Gl. (107) für die magnetische Feldstärke im stationären Felde gemacht wurde; da an Stelle des  $i$  die Größe  $\frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial t}$  tritt, so wird auch statt der

Funktion  $u$  in Gl. (107) eine Funktion  $\frac{\partial u}{\partial t}$  eingeführt. Nach Einsetzung dieses Wertes von  $\mathfrak{H}$  ergeben die Feldgleichungen:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left( \text{rot rot } u - \frac{1}{c^2} \mathfrak{E} \right) &= 0, \\ \text{rot} \left( \mathfrak{E} + \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right) &= 0. \end{aligned}$$

Aus der ersten Gleichung ist zu schließen, daß

$$\mathfrak{E} = c^2 \text{rot rot } u,$$

weil weder  $u$  noch  $\mathfrak{E}$  zeitlich unveränderliche Glieder enthalten, und aus der zweiten nach Gl. (33), daß

$$\mathfrak{E} + \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = - \text{grad } W \dots \dots \dots (376)$$

wo  $W$  ein Skalar ist, dessen Wert aber nicht näher in Betracht kommt.

Vereinigt man beide Gleichungen, unter Berücksichtigung des Wertes von  $\text{rot rot } u$  nach Gl. (31), so ist

$$c^2 (-\Delta u + \text{grad div } u) + \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = - \text{grad } W.$$

Dieser Gleichung wird genügt, wenn man setzt:

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= \Delta u \\ \text{grad} (c^2 \text{div } u + W) &= 0 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (377)$$

Die erste dieser Gleichungen stellt eine räumliche Welle dar, sie ist der Form nach eine Erweiterung der Gleichung einer ebenen Welle. Wir nennen sie die Wellengleichung.

Eine Lösung dieser Gleichung, die Hertz<sup>100)</sup> angegeben hat,

$$u_x = 0, \quad u_y = 0, \quad u_z = \Pi = \frac{1}{r} f \left( t - \frac{r}{c} \right) \dots \dots (378)$$

kann durch folgende Überlegungen an Bekanntes angeschlossen werden.

Bei einem Sender für drahtlose Telegraphie ist eine Richtung besonders ausgezeichnet, nämlich die Senkrechte zur Erdoberfläche, in der die Antenne liegt. Machen wir diese zur  $z$ -Achse. Bei stationären Strömen diene zur Bestimmung der magnetischen Kraft das Vektorpotential  $\int \frac{i}{r} dv$ . Bei der drahtlosen Telegraphie ist die Antenne im Vergleich zu den Entfernungen, in denen man die Wellen empfängt, als sehr klein, also als ein Linienelement zu bezeichnen. Dieses liegt in der  $z$ -Achse, daher hätte im Falle stationärer Ströme, die ja tatsächlich in einem Linienelement nicht bestehen können, nur die  $z$ -Komponente des Vektorpotentials einen von Null verschiedenen Wert, und zwar  $\frac{i}{r}$ .

Im vorliegenden Falle werden also auch die beiden Komponenten  $u_x$  und  $u_y$  gleich Null gesetzt. An Stelle von  $i_z$  tritt aber die Funktion

$f\left(t - \frac{r}{c}\right)$ , die der endlichen Ausbreitung der Welle Rechnung trägt. Man sieht, daß für ein gegebenes  $t$  das Argument dieser Funktion um so kleiner ist, je größer der Abstand  $r$  vom Nullpunkt ist, in dem sich der Sender befindet. Die Funktion  $\Pi$  stellt also eine von der Antenne ausgehende Welle dar. Daß sie der Wellengleichung genügt, ergibt sich, wenn man bildet:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial x} = -\frac{x}{r^3} f\left(t - \frac{r}{c}\right) - \frac{x}{c r^2} f'\left(t - \frac{r}{c}\right),$$

$$\frac{\partial^2 \Pi}{\partial x^2} = \frac{3x^2 - r^2}{r^5} f\left(t - \frac{r}{c}\right) + \frac{3x^2 - r^2}{c r^4} f'\left(t - \frac{r}{c}\right) + \frac{x^2}{c^2 r^3} f''\left(t - \frac{r}{c}\right).$$

Die Posten  $\frac{\partial^2 \Pi}{c y^2}$  und  $\frac{\partial^2 \Pi}{\partial z^2}$  unterscheiden sich hiervon nur dadurch, daß  $y$  und  $z$  an Stelle von  $x$  treten. Addiert man, so ergibt die Summe der ersten und zweiten Posten jede für sich den Wert Null; die Summe der dritten liefert

$$\frac{x^2 + y^2 + z^2}{c^2 r^3} f''\left(t - \frac{r}{c}\right) = \frac{1}{c^2 r} f''\left(t - \frac{r}{c}\right).$$

Andererseits ergibt  $\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Pi}{\partial t^2}$  denselben Wert.

Die Funktion  $\Pi$ , die als Hertz'sche Funktion bezeichnet wird, ist also eine für den vorliegenden Fall geeignete Lösung der Wellengleichung.

Die elektrische Feldstärke erhält man nach Gl. (376) und (377) als

$$\mathfrak{E} = -\frac{\partial^2 \Pi}{\partial t^2} + c^2 \text{grad div } \Pi \dots \dots \dots (379)$$

Für den vorliegenden Fall vereinfacht sich  $\text{div } \Pi$  auf

$$\partial u_x \partial z = \partial \Pi \partial z.$$

Man hat also

$$\mathfrak{E} = -\frac{\partial^2 \Pi}{\partial t^2} + c^2 \text{grad } \frac{\partial \Pi}{\partial z} \dots \dots \dots (380)$$

Weil  $u_x$  und  $u_y$  gleich Null sind, so werden die Komponenten

$$\left. \begin{aligned} \mathfrak{E}_x &= c^2 \frac{\partial^2 \Pi}{\partial x \partial z}, \\ \mathfrak{E}_y &= c^2 \frac{\partial^2 \Pi}{\partial y \partial z}; \end{aligned} \right\} \dots (381)$$

ferner ist unter Berücksichtigung der Wellengleichung

$$\mathfrak{E}_z = -\frac{\partial^2 \Pi}{\partial t^2} + c^2 \frac{\partial^2 \Pi}{\partial z^2} = -c^2 \left( \frac{\partial^2 \Pi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Pi}{\partial y^2} \right)$$

Aus der Bedeutung der Operation  $\text{rot}$  ergibt sich ferner

$$\begin{aligned} \mathfrak{H}_x &= \frac{\partial^2 \Pi}{\partial y \partial t} \\ \mathfrak{H}_y &= -\frac{\partial^2 \Pi}{\partial x \partial t} \\ \mathfrak{H}_z &= 0. \end{aligned}$$

Unter der Annahme der Lösung

$$\Pi = \frac{1}{r} f\left(t - \frac{r}{c}\right)$$

ergeben sich für die Komponenten folgende Werte:

$$\left. \begin{aligned} \mathfrak{E}_x &= \frac{xz}{r^2} \left( \frac{3c^2 f}{r^3} + \frac{3cf'}{r^2} + \frac{f''}{r} \right) \\ \mathfrak{E}_y &= \frac{yz}{r^2} \left( \frac{3c^2 f}{r^3} + \frac{3cf'}{r^2} + \frac{f''}{r} \right) \\ \mathfrak{E}_z &= \frac{3z^2 - r^2}{r^5} c^2 f + \frac{3z^2 - r^2}{r^4} c f' + \frac{z^2 - r^2}{r^3} f'' \end{aligned} \right\} \dots (382)$$

$$\left. \begin{aligned} \mathfrak{H}_x &= -\frac{y}{r} \left( \frac{f'}{r^2} + \frac{f''}{cr} \right) \\ \mathfrak{H}_y &= +\frac{x}{r} \left( \frac{f'}{r^2} + \frac{f''}{cr} \right) \end{aligned} \right\} \dots (383)$$

Da die  $z$ -Komponente der magnetischen Feldstärke Null ist, liegt diese überall in Ebenen, die der  $xy$ -Ebene parallel sind.

In einer solchen Ebene wollen wir die Komponenten von  $\mathfrak{H}$  statt nach  $x$  und  $y$  nach der Richtung einer durch die  $z$ -Achse gelegten Geraden und senkrecht dazu feststellen. Die Lage des Aufpunktes wird in dieser Ebene bestimmt durch den Abstand  $\varrho = \sqrt{z^2 + y^2}$  von der  $z$ -Achse und den Winkel  $\alpha$ , den  $\varrho$  mit der  $x$ -Achse macht.  $\alpha$  wird aus  $x$  und  $y$  durch die Gleichungen bestimmt:

$$\cos \alpha = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad \sin \alpha = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

Sind  $\mathfrak{A}_x$  und  $\mathfrak{A}_y$  die Komponenten eines beliebigen Vektors, so ist

$$\mathfrak{A}_\varrho = \mathfrak{A}_x \cos \alpha + \mathfrak{A}_y \sin \alpha, \quad \mathfrak{A}_\alpha = \mathfrak{A}_y \cos \alpha - \mathfrak{A}_x \sin \alpha.$$

Für die magnetische Feldstärke ergibt sich daher

$$\mathfrak{H}_\varrho = 0, \quad \mathfrak{H}_\alpha = \frac{\varrho}{r} \left( \frac{f'}{r^2} + \frac{f''}{cr} \right) \dots (384)$$

Da auch  $\mathfrak{H}_z = 0$ , so sind die  $\mathfrak{H}$ -Linien Kreise parallel der  $xy$ -Ebene, mit dem Mittelpunkt in der  $z$ -Achse.

Setzt man ferner  $\mathfrak{E}_x$  und  $\mathfrak{E}_y$  in wagerechter Ebene zusammen, so ergibt sich, daß

$$\left. \begin{aligned} \mathfrak{E}_\varrho &= \frac{z\varrho}{r^2} \left( \frac{3c^2}{r^3} f + \frac{3c}{r^2} f' + \frac{f''}{r} \right) \\ \mathfrak{E}_\alpha &= 0 \end{aligned} \right\} \dots (385)$$

$\mathfrak{E}$  liegt daher in der durch den Aufpunkt und die  $z$ -Achse gelegten senkrechten Meridianebene; demnach steht in jedem Punkte des Feldes  $\mathfrak{E}$  auf  $\mathfrak{H}$  senkrecht.

**§ 310. Das elektromagnetische Feld im Nahbereich und im Fernbereich.** Wir unterscheiden bei der Diskussion dieser Gleichungen die Stellen des Feldes, die sehr nahe am Störungsmittelpunkt liegen, von denen, die

sehr weit ab liegen. Die Störung ist meist eine gedämpfte Schwingung, die wir als Zeitfunktion durch  $f(t) = A e^{-\delta t} \cos \omega t$  angeben können. Für die Welle gilt dann

$$f\left(t - \frac{r}{c}\right) = A e^{-\delta\left(t - \frac{r}{c}\right)} \cos\left(\omega t - \frac{\omega r}{c}\right) \dots \dots (386)$$

Die Bewegung pflanzt sich in der Zeit  $\frac{r}{c}$  vom Störungsmittelpunkt bis zu einem bestimmten Aufpunkt fort. Wenn diese Zeit gegen die Periode der Schwingung, also gegen  $\frac{2\pi}{\omega}$  klein ist, so kann man innerhalb des Bereiches bis  $r$  die verschiedene Fortpflanzungszeit vernachlässigen, als  $f(t)$  an Stelle von  $f\left(t - \frac{r}{c}\right)$  setzen.

Wenn  $\frac{r}{c}$  klein gegen  $\frac{2\pi}{\omega}$  sein soll, so bedeutet dies, da die Wellenlänge  $\lambda = 2\pi c/\omega$  ist, daß  $r$  klein gegen  $\lambda$  sein soll. Wir unterscheiden also den Nahbereich, dessen Radius klein gegen die Wellenlänge ist, und den Fernbereich, dessen Radius groß gegen die Wellenlänge ist, die Wellenzone.

Im Nahbereich kommt es am meisten auf die Potenzen in  $\mathfrak{E}$  und  $\mathfrak{H}$  an, die die höchsten Potenzen von  $r$  im Nenner enthalten, so daß wir also für  $\mathfrak{H}_\alpha$  angenähert setzen können:

$$\mathfrak{H}_\alpha = \frac{q f'}{r^3} = \frac{f'}{r^2} \sin \vartheta \dots \dots \dots (387)$$

$\vartheta$  ist der Winkel zwischen  $r$  und der  $z$ -Achse.

Wenn sich im Störungsmittelpunkt ein Stromelement  $Jl$  befände, so wäre nach dem Biot-Savartschen Gesetz die von ihm erzeugte magnetische Feldstärke gleich  $Jl \sin \vartheta / r^2$ . Die magnetische Feldstärke im Nahbereich hat also denselben Wert, als wenn sie von einem ungeschlossenen Stromelement  $Jl = f'$  im Störungsmittelpunkt herrührte. Die Stromlinien eines solchen Elementes sind durch die elektrischen Feldlinien des umgebenden Raumes geschlossen. Wenn aber trotzdem die magnetische Feldstärke einen solchen Wert hat, als wenn allein die Stromlinien im Element vorhanden wären, so zeigt sich darin eine Ähnlichkeit mit dem magnetischen Felde einer über zwei Erdplatten durch die Erde geschlossenen Leitung. Bei dieser haben wir nach § 122 angenommen, daß die in der Erde weitverzweigten Rückleitungsströme keinen merklichen Beitrag zum magnetischen Feld des Stromkreises brächten.

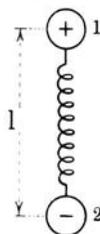
Durch das vorliegende Beispiel, in dem auch die magnetische Wirkung der Schließungsströme gegen die der im Stromelement eng vereinigten fortfällt, wird die Wahrscheinlichkeit der in § 122 gemachten Annahme über die Induktivität geerdeter Leiter erheblich unterstützt.

Wenn wir  $Jl = f'(t)$  setzen, so stellt  $q = \frac{1}{l} f(t)$  eine mit der Zeit veränderliche Ladung dar. Wir kommen so zu der Anschauung des Hertzschen Doppelpols (Fig. 232), der aus zwei Ladungen  $+q$  und  $-q$  im Abstände  $l$  voneinander besteht. Wir können ihn uns durch zwei Leiter 1 und 2 dar-

gestellt denken, die durch einen dritten, im Vergleich zu ihnen kapazitätsfreien Leiter verbunden sind, in dem daher bei Veränderung der Ladungen eine quasistationäre Strömung besteht.

Einen wirklichen Leiter endlicher Länge teilen wir in Elemente  $dl$  ein und geben jedem Element zwei gleiche und entgegengesetzte Ladungen, die so bemessen sind, daß die algebraische Summe der aneinanderstoßenden Ladungen benachbarter Elemente gleich der wirklichen Oberflächenladung des Elementes ist.

Fig. 232.



Wir gehen nun in den Teil des Feldes, der vom Störungsmittelpunkt einen im Vergleich zur Wellenlänge großen Abstand hat, also in solche Entfernungen, wie sie hauptsächlich für die Telegraphie ohne Draht eine Rolle spielen. Dort werden die verschiedenen Posten um so weniger zur Geltung kommen, je höher die Potenzen von  $r$  im Nenner sind.

Bei großem  $r$  wird merklich nur das Glied von Belang sein, das die niedrigste negative Potenz von  $r$  enthält, so daß wir für  $\mathfrak{H}_\alpha$  den Wert erhalten:

$$\mathfrak{H}_\alpha = - \frac{\sin \vartheta}{c r} f'' \left( t - \frac{r}{c} \right).$$

Nimmt man für  $f'(t)$  die Form an  $Jl \sin \omega t$ , so wird

$$\mathfrak{H}_\alpha = - \frac{Jl \omega \sin \vartheta}{c r} \cos \omega \left( t - \frac{r}{c} \right) \dots \dots \dots (388)$$

Die magnetische Feldstärke in einem fernen Punkte ist also der Stromstärke im Stromelement und dessen Länge proportional, dem Abstände und der Wellenlänge dagegen umgekehrt proportional. Sie ist unter sonst gleichen Verhältnissen am größten in der Ebene, auf der das Stromelement senkrecht steht, also an der Erdoberfläche, dagegen gleich Null in der Richtung des Stromelementes.

Die Komponenten der elektrischen Feldstärke beschränken sich in großer Entfernung auf die Glieder

$$\mathfrak{E}_z = \frac{z^2 - r^2}{r^3} f'', \quad \mathfrak{E}_\rho = \frac{z \rho}{r^3} f'',$$

wo  $z^2 + \rho^2 = r^2$ .

Daher ist die Komponente in der Richtung des  $r$

$$\mathfrak{E}_r = \mathfrak{E}_z \frac{z}{r} + \mathfrak{E}_\rho \frac{\rho}{r} = 0.$$

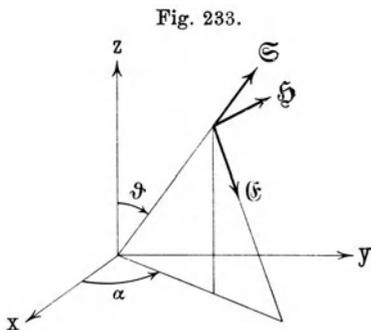
Es gibt also nur eine Komponente senkrecht zu dieser Richtung, die in der Richtung der wachsenden  $\vartheta$  den Wert hat:

$$\mathfrak{E}_\vartheta = \mathfrak{E}_\rho \frac{z}{r} - \mathfrak{E}_z \frac{\rho}{r} = \frac{\rho}{r^2} f'' = c \mathfrak{H}_\alpha \dots \dots \dots (389)$$

$\mathfrak{H}$  liegt in Ebenen parallel zur  $xy$ -Ebene,  $\mathfrak{E}$  in Meridianebenen, die durch die  $z$ -Achse gehen. Hat in einem bestimmten Augenblick  $\mathfrak{H}$  die Richtung der wachsenden  $\alpha$ , so hat  $\mathfrak{E}$  die der wachsenden  $\vartheta$ . Nach Fig. 233 bilden dann  $\mathfrak{E}$  und  $\mathfrak{H}$  in dieser Reihenfolge mit der Richtung des wachsenden  $r$

ein Rechtssystem, und daher ist diese Richtung die des Poyntingschen Strahlungsvektors  $\mathfrak{S}$ . Kehrt  $\mathfrak{H}$  sich um, dann auch  $\mathfrak{E}$ , so daß die Richtung von  $\mathfrak{S}$  unveränderlich dieselbe ist.

In § 306 ist die geradlinige Fortpflanzung ebener Wellen festgestellt worden; dies war aber tatsächlich nur eine Konsequenz aus der Annahme, daß ebene Wellen bestehen können. Die Feststellung, daß der Strahlungsvektor mit dem von dem Störungsmittelpunkt ausgehenden geraden Strahl  $r$  gleichgerichtet ist, beweist dagegen unabhängig von willkürlichen Voraussetzungen die geradlinige Fortpflanzung der Normalen zur Wellenfront in einem homogenen Dielektrikum.



Wenn aber in dem Fortpflanzungsmittel die elektrischen Eigenschaften sich ändern, so werden dadurch die Feldstärken und mit ihnen der Strahlungsvektor in ähnlicher Weise verändert, wie dies für sprunghafte Änderungen in ruhenden Feldern in den §§ 28, 29, 60, 86 erörtert wurde. Wenn man annimmt, daß in den oberen Schichten der Atmosphäre sich Ionen befinden, welche dort die Dielektrizitätskonstante ändern, so kommt man zur Folgerung, daß dort die elektrischen Wellen zur Erdoberfläche hin gekrümmt werden.

Setzen wir

und  $\mathfrak{E}_\vartheta = c \mathfrak{H}_\alpha$ , so geht durch die Flächeneinheit einer Kugel mit dem Radius  $r$  in der Sekunde die Energiemenge

$$\mathfrak{H}_\alpha = \frac{\sin \vartheta}{cr} r'' \left( t - \frac{r}{c} \right) = \frac{l \sin \vartheta}{cr} \frac{d^2 q}{dt^2}$$

$$|\mathfrak{S}| = \frac{1}{4\pi} \frac{l^2 \sin^2 \vartheta}{cr^2} \left( \frac{d^2 q}{dt^2} \right)^2.$$

Diese Größe hat auf allen Teilen der Fläche  $2\pi r^2 \sin \vartheta d\vartheta$  zwischen zwei Parallelkreisen  $\vartheta$  und  $\vartheta + d\vartheta$  denselben Wert; die gesamte, in der Zeiteinheit durch die Oberfläche der Kugel gehende Energie ist also

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{L} &= \int_{(r)} \mathfrak{S} d\mathfrak{f} = \frac{l^2}{2c} \left( \frac{d^2 q}{dt^2} \right)^2 \int_0^\pi \sin^3 \vartheta d\vartheta \\ &= \frac{2}{3} \frac{l^2}{c} \left( \frac{d^2 q}{dt^2} \right)^2 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (390)$$

Sowohl  $|\mathfrak{S}|$  als  $\mathbf{L}$  sind in jedem Augenblick positiv mit Einschluß des Wertes Null. In der Wellenzone geht also die Energie stets nach außen aus einer den Sender umschließenden Fläche hinaus.

Auch dem magnetischen Felde einer Spule kann man Energie durch einen zweiten Kreis entziehen, indem in ihm durch Induktion Ströme hervorgerufen werden. Deren Stärke und demnach auch die übertragene Energie hängen von dem Widerstand des induzierten Leiters ab und sind Null, wenn

der Leiter geöffnet wird. Auch dann sendet der Primärkreis Energie ins magnetische Feld, aber diese geht bei veränderlichem Strom hin und her, und die durchschnittlich ausgesandte ist Null, wenn kein mit dem Felde gekoppelter Leiter vorhanden ist. Man hat daher zwischen Energieübertragung durch Kopplung und Strahlung wohl zu unterscheiden; insbesondere lassen sich also auch wegen der Kopplung in der Nahzone keine Messungen der Strahlung einer Antenne ausführen.

**§ 311. Schwingungsformen des Luftleiters.** Man kann den Luftleiter annähernd als eine Leitung mit verteilter Kapazität und Induktivität ansehen. Soweit es sich um die hauptsächlich wichtige Feststellung seiner Eigenfrequenz handelt, können wir dann bei Anwendung der Gl. (264) das Dämpfungsmaß neben dem Winkelmaß vernachlässigen. Nennen wir letzteres vorläufig  $\vartheta$ , so ist  $i\vartheta$  das Fortpflanzungsmaß, und die Grundgleichungen lauten

$$\mathfrak{B}_a = \mathfrak{B}_e \cos \vartheta - i \mathfrak{Z} \mathfrak{Z}_e \sin \vartheta,$$

$$\mathfrak{Z}_a = \mathfrak{Z}_e \cos \vartheta - i \frac{\mathfrak{B}_e}{\mathfrak{Z}} \sin \vartheta.$$

$\mathfrak{B}_e$  und  $\mathfrak{Z}_e$  beziehen sich auf das obere Ende des Luftleiters,  $\mathfrak{B}_a$  und  $\mathfrak{Z}_a$  auf das an der Erregerstelle befindliche. Unter den obwaltenden Verhältnissen ist  $\mathfrak{Z} = \sqrt{L/K}$  und  $\vartheta = \omega \sqrt{KL}$ , wenn  $K$  und  $L$  die Gesamtwerte für den Luftleiter und  $\omega$  die Frequenz bezeichnen. Mit der Wellenlänge  $\lambda$  der vom Luftleiter ausgestrahlten Schwingungen steht  $\omega$  in der Beziehung  $\omega \lambda = 2\pi c$ .

Wenn der Luftleiter im wesentlichen stabförmig ist, also am oberen Ende keine größeren Kapazitätsflächen trägt, so ist  $\mathfrak{Z}_e = 0$  zu setzen. Er sei am unteren Ende über eine Vorrichtung mit dem Scheinwiderstand  $\mathfrak{R}_a$  an einen Erreger mit der EMK  $\mathfrak{E}$  angeschlossen. Dann ist

$$\mathfrak{E} = \mathfrak{B}_a + \mathfrak{R}_a \mathfrak{Z}_a = \mathfrak{B}_e \left( \cos \vartheta + i \frac{\mathfrak{R}_a}{\mathfrak{Z}} \sin \vartheta \right).$$

Der einfachste Fall ist, daß  $\mathfrak{R}_a = 0$  ist. Dann schwingt also der stabförmige Luftleiter für sich allein. Wir erhalten seine Eigenfrequenzen durch die Feststellung, unter welcher Frequenz er in Resonanz kommt, und da wir hier die Verluste vernachlässigen, so erkennen wir die Resonanzfrequenz daran, daß  $\mathfrak{B}_e$  beliebig groß im Verhältnis zu  $\mathfrak{E}$ , also  $\mathfrak{E}/\mathfrak{B}_e = 0$  wird.

Für den Luftleiter ohne Zusätze tritt dies ein, wenn  $\cos \vartheta = 0$  wird, also für  $\vartheta = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2} \dots$  Ein solcher Leiter kann also in einer unbegrenzten Zahl von Eigenfrequenzen erregt werden; bei der tiefsten schwingt er in einer Viertelwellenlänge, hat also am unteren Ende ein Minimum, einen Knoten, und am oberen Ende ein Maximum, einen Bauch, der Spannung; dagegen hat die Stromstärke am unteren Ende ein Maximum, während sie am oberen Null ist.

Bei der ersten Oberschwingung hat die Spannung außer dem Knoten am unteren Ende noch einen in  $\frac{2}{3}$  der Höhe, und außer dem Bauch am oberen Ende noch einen Bauch in  $\frac{1}{3}$  der Höhe.

Die Frequenz der Grundschiwingung des Leiters sei  $\omega_0$  und die zugehörige Wellenlänge  $\lambda_0$  genannt. Für sie ist also  $\omega_0 \sqrt{KL} = \frac{\pi}{2}$ . Man kann dann das Winkelmaß des Leiters für jede andere Frequenz durch

$$\vartheta = \frac{\omega}{\omega_0} \frac{\pi}{2}$$

bezeichnen.

Die Voraussetzung, daß der Luftleiter ohne alle Zusätze betrieben werde, trifft nur in seltenen Fällen zu. Wir wollen unter Beziehung auf die Grundschiwingung des Leiters die Schwingungsform für einige in der Praxis vorkommende Fälle untersuchen.

Befindet sich am unteren Ende des Luftleitergebildes ein Variometer mit der Induktivität  $L_a$ , so ist, wenn wir auch hier von den Verlusten absehen,  $\mathfrak{R}_a = i\omega L_a$ . Der Luftleiter sei am oberen Ende ohne Kapazitätsfläche, also  $\mathfrak{S}_e = 0$ . Dann ist

$$\mathfrak{E} = \mathfrak{S}_e \left( \cos \vartheta - \omega L_a \sqrt{\frac{K}{L}} \sin \vartheta \right).$$

Man erhält Resonanz für

$$\omega_1 \operatorname{tg} \vartheta_1 = \frac{1}{L_a} \sqrt{\frac{K}{L}}.$$

Man kann dies unter Benutzung der gemachten Feststellungen schreiben

$$\frac{\omega_1}{\omega_0} \frac{\pi}{2} \operatorname{tg} \frac{\omega_1}{\omega_0} \frac{\pi}{2} = \frac{L_a}{L}.$$

Durch diese Gleichung wird für ein bestimmtes Verhältnis der Induktivität der Antenne zu der des Variometers das Verhältnis der Grundschiwingung einer Antenne mit Variometer zur Grundschiwingung der Antenne allein festgestellt. Hat man den Wert  $\vartheta_1$ , welcher der Gleichung  $\vartheta_1 \operatorname{tg} \vartheta_1 = \frac{L_a}{L}$  entspricht, gefunden, so ist

$$\lambda_1 = \frac{\lambda_0}{\vartheta_1} \frac{\pi}{2}.$$

Da ersichtlich mit wachsenden Werten von  $L_a$  die Werte von  $\vartheta$  abnehmen, so folgt, daß durch die Zuschaltung eines Variometers zur Antenne die Eigenwellenlänge des Systems vergrößert wird. Auf die Antenne selbst fällt dann nur ein Teil des Winkelmaßes  $\frac{\pi}{2}$ , und dies bedeutet, daß das Verhältnis der Spannung am oberen Ende zu der am unteren Ende bei Wellenverlängerung geringer wird; damit sinkt auch, wie wir noch sehen werden, die Strahlungsfähigkeit.

Die Wellenlänge wird auch größer, wenn man am oberen Ende des Luftleiters Flächen oder Netze mit großer Kapazität anbringt, wie es bei den Antennen großer Stationen die Regel ist.

Für eine Kapazität  $K_e$  ist der Scheinwiderstand  $R_e = \frac{1}{i \omega K_e}$ , und wenn die Antenne am unteren Ende unmittelbar erregt wird, so lautet die maßgebliche Gleichung

$$\mathcal{E} = \mathfrak{B}_e (\cos \vartheta - \omega K_e \mathfrak{B} \sin \vartheta).$$

Für die Resonanzfrequenz  $\omega_2$  ergibt sich

$$\frac{\omega_2 \pi}{\omega_0 2} \operatorname{tg} \frac{\omega_2 \pi}{\omega_0 2} = \frac{K}{K_e}.$$

Es handelt sich also um dasselbe Verhältnis der Wellenlängenänderung, wenn  $\frac{L}{L_a}$  oder  $\frac{K}{K_e}$  in Betracht kommen. In Fig. 234 ist auf der Abszisse in logarithmischer Skala das Verhältnis  $\frac{L_a}{L}$  oder  $\frac{K_e}{K}$ , auf der Ordinate das Verhältnis  $\frac{\lambda}{\lambda_0}$  aufgetragen.

Wenn einem am freien Ende offenen Luftleiter ein Kondensator  $K_a$  vorgeschaltet wird, so ist  $\mathfrak{R}_a = \frac{1}{i \omega K_a}$ , also folgt

$$\mathcal{E} = \mathfrak{B}_e \left( \cos \vartheta + \frac{1}{\omega K_a} \sqrt{\frac{K}{L}} \sin \vartheta \right).$$

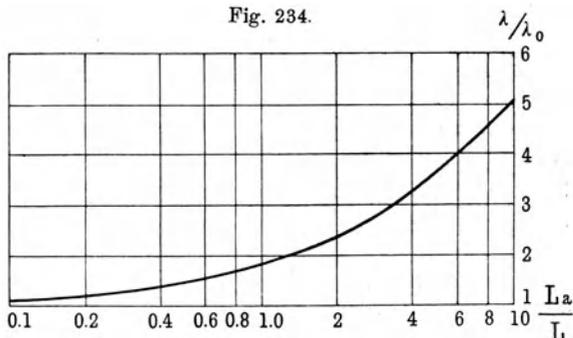
Für die Resonanzfrequenz  $\omega_3$  erhält man dann

$$\operatorname{tg} \left( \frac{\omega_3 \pi}{\omega_0 2} \right) = - \frac{\omega_3 \pi K_a}{\omega_0 2 K_e}.$$

Das Winkelmaß des Luftleiters geht in diesem Falle über  $90^\circ$  hinaus und die Wellenlänge wird um so kleiner, je kleiner  $K_a$  im Vergleich zu  $K$  gewählt wird. Man nennt daher einen solchen Kondensator auch Verkürzungskondensator.

Wir haben bisher bei den Leitern mit Veränderung der natürlichen Wellenlänge nur die Grundschwingung beachtet. Auch bei ihnen sind Oberschwingungen möglich, die aber nicht mehr in den Verhältnissen der Zahlen 1:3:5 ... zueinander stehen, sondern unharmonisch sind. Soweit die Leiter durch gekoppelte Schwingungskreise erregt werden, haben die Oberschwingungen keine praktische Bedeutung, da sie zu den Schwingungen des erregenden Kreises nicht in einem das Einschwingen begünstigenden Verhältnis stehen, also im Vergleich zur Grundschwingung sehr klein bleiben <sup>101)</sup>.

Fig. 234.



§ 312. **Symmetrische Ergänzung des Luftleiterkreises.** Nach § 307 können wir die Vorgänge bei einem Sender für drahtlose Telegraphie gegenüber der als vollkommen leitend betrachteten Erdoberfläche so ansehen, als ob sich alles an der Erdoberfläche spiegelte. Dabei müssen, wie dies Fig. 235 andeutet, die Linien der elektrischen Feldstärke, die auf die Fläche senkrecht auftreffen, hinter der Spiegelfläche in derselben Richtung und Dichte weiter gehen, und die  $\mathfrak{H}$ -Linien sich stetig durch die Fläche fortsetzen. Ein anderer Verlauf wäre mit den Stetigkeitsbedingungen nicht vereinbar. Man sieht hieraus, daß der Luftleiter durch ein Spiegelbild ergänzt werden muß, in dem

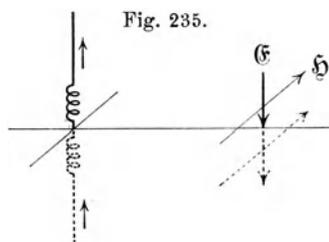


Fig. 235.

der Strom in jedem Augenblick in zwei symmetrisch liegenden Stellen die gleiche Stärke und den gleichen Sinn hat, während die Spannungen einander entsprechender Teile entgegengesetzt gleich sind. Bei einer Antenne ohne Verlängerung wird also der Strom auf der Seite des Spiegelbildes ebenso durch  $\mathfrak{I}_a \cos \alpha z$  dargestellt, wie auf der Seite des Luftleiters, weil der Kosinus für entgegengesetzt gleiche  $z$  denselben Wert hat, ferner die Spannung durch  $\mathfrak{E}_e \sin \alpha z$ , das für positive und negative  $z$  entgegengesetzte Werte annimmt. Der Luftleiter, der in einer viertel Welle schwingt, wird also zu einem in einer halben Welle schwingenden Leiter ergänzt, der an den Enden einen Stromknoten, in der Mitte einen Spannungsknoten hat.

Infolge dieser symmetrischen Ergänzung können wir also einen Sender wie einen freien Leiter im homogenen Raum betrachten, die Vorgänge an der Erdoberfläche stimmen mit denjenigen in der Äquatorebene überein. Allerdings wird dabei auf die Berücksichtigung der räumlichen Dämpfung (§ 307) verzichtet.

§ 313. **Offene und geschlossene Schwingungssysteme.** Die gebräuchlichen Sender bestehen nicht nur aus den Luftleitern, die meist eine gestreckte Form haben, sondern die Luftleiter sind in bestimmter Weise mit Kondensatorkreisen verbunden. Luftleiter bezeichnen wir als offene, Kondensatorkreise als fast geschlossene Schwingungskreise. Auch die Luftleiter können als Kondensatoren angesehen werden; das unterscheidende Merkmal liegt in dem Verhältnis der Dimensionen der Leiter zur Wellenlänge der Schwingung. Bei den zur Erregung der Luftleiter gebräuchlichen Kondensatorkreisen ist dies Verhältnis sehr klein. In einem solchen Kreise ist zu jedem Stromelement ein anderes oder eine Vereinigung mehrerer anderer aufzufinden, derart, daß ihre Ströme bei gleicher Stärke entgegengesetzte Richtung haben. In bezug auf einen im Vergleich zur Wellenlänge fernen Punkt ergeben beide Stromelemente der Stärke nach nahezu dieselbe Wirkung, weil der Unterschied der Abstände sehr gering ist. Da aber die Maße des Schwingungskreises sehr klein gegen die Wellenlänge sein sollen, so haben die von beiden Elementen ausgehenden Wellen in jeder Richtung einen Gangunterschied von fast genau einer halben Welle, so daß sie sich gegeneinander fast vollständig aufheben. Ein fast geschlossener Schwingungskreis hat daher in der Wellenzone keine merkliche Fernwirkung.

Vergrößert man die Maße des im Sinne des geometrischen Bildes geschlossenen Schwingungskreises so, daß sie der Wellenlänge vergleichbar werden, wie bei den Luftleitern von Bellini und Tosi<sup>102)</sup>, so hat man den Gangunterschied der Wellen zwischen einem fernen Punkte und den Teilen des Leiters zu berücksichtigen; solche Leiter erzeugen also in einem sehr fernen Punkte ein elektromagnetisches Feld, sie besitzen Strahlung.

Ob die Gangunterschiede sich auf Leitungsströme oder auf Verschiebungsströme beziehen, kann bei der vorausgesetzten Gleichheit der Wirkung beider keinen Unterschied machen. Bei einem Luftleiter, dessen Wellenlänge durch eine vorgeschaltete Spule oder durch eine Kapazität am oberen Ende vergrößert worden ist, ist die Länge der Feldlinien im Luftraum im Verhältnis zur Wellenlänge kleiner, als bei einem in einer viertel Wellenlänge schwingenden Leiter, daher strahlt er unter sonst gleichen Verhältnissen weniger.

Die Kopplungsspule, wie die zur Erregung dienenden Schwingungskreise strahlen im Vergleich zum Luftleiter gar nicht, da sie praktisch aus lauter geschlossenen Strombahnen von einer gegen die Wellenlänge sehr geringen Größe bestehen.

Auf einem Luftleiter mit verkürzter Welle entsteht nach § 311 eine Schwingung mit einem Spannungsknoten auf dem Leiter. Der Strom hat also in einem bestimmten Augenblick in zwei übereinanderliegenden Teilen des Luftleiters bei gleicher Amplitude entgegengesetzte Phase, so daß eine Differenzwirkung entsteht, die die Strahlung vermindert.

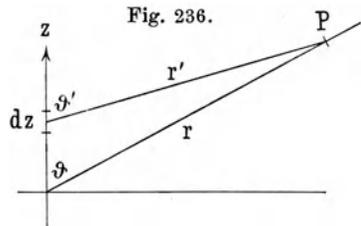
**§ 314. Strahlung eines geradlinigen Luftleiters** [M. Abraham<sup>103)</sup>].

Wir beschränken uns auf die Grundschwingung des Luftleitersystems, indem wir aber die Möglichkeit offenhalten, daß durch eine Kopplungsspule eine Verlängerung der Welle eingetreten sei. Ist  $l$  die Länge des Luftleiters,  $\lambda$  die Wellenlänge, so können wir die Stromverteilung auf dem Luftleiter darstellen als

$$J_z = J_0 \frac{\sin \frac{2\pi(l-z)}{\lambda}}{\sin \frac{2\pi l}{\lambda}} \dots \dots \dots (391)$$

worin  $J_0$  die Stromstärke an der Stelle  $z = 0$ , also dem Fußpunkte der Antenne darstellt; man kann diesen genügend genau in den Anfangspunkt des Koordinatensystems, also in die Erdoberfläche legen, da die Höhenmaße der Kopplungsspule gegen die der Antenne klein sind.

Wir fügen, um die Wirkung des Erdbodens zu berücksichtigen, auf der anderen Seite das Spiegelbild des Luftleiters hinzu; die zur Strahlung beitragenden Stromelemente liegen dann auf



der  $z$ -Achse zwischen  $z = -l$  und  $z = +l$ . Mit dieser Hinzufügung ist die Mitwirkung des unterhalb der  $xy$ -Ebene liegenden Leiters erledigt, und es ist jetzt so, als wenn die Antenne von  $-l$  bis  $+l$  frei im Raume schwebte.

Ein Element  $dz$  (Fig. 236) im Punkte  $z$  bringt nach Gl. (388) im Punkte  $P$  eine magnetische Feldstärke hervor, die, wenn wir  $P$  in die  $yz$ -Ebene legen, die Richtung der negativen  $x$ -Achse und den Wert

$$d\mathfrak{H} = \frac{J_z dz \omega \sin \vartheta'}{cr'} \cos\left(\omega t - \frac{\omega r'}{c}\right) \dots \dots \dots (392)$$

besitzt.

Die Anteile verschiedener Stromelemente haben alle dieselbe Richtung, so daß die gesamte magnetische Feldstärke

$$\mathfrak{H} = \int_{-l}^{+l} d\mathfrak{H}$$

wird. Bei der Berechnung dieses Integrals ist zu beachten, daß unter der Annahme, daß  $r'$  groß gegen die Wellenlänge sei, für die verschiedenen Stromelemente  $dz$  die Werte von  $r'$  und  $\vartheta'$ , da wo diese Größen als Faktoren stehen, nicht wesentlich von den Werten  $r$  und  $\vartheta$  verschieden sind, die die Lage des Aufpunktes zum Störungsmittelpunkt kennzeichnen. Unter dem Kosinus dagegen kann  $\frac{\omega r'}{c}$  für die verschiedenen Stromelemente von Bedeutung werden, da die doppelte Länge der Antenne mit der Wellenlänge vergleichbar ist.

In jeder in der  $xy$ -Ebene liegenden Richtung sind die Unterschiede der  $\frac{\omega r'}{c}$  fast zu vernachlässigen, wogegen die Abstände der in der Nähe der  $z$ -Achse gelegenen Aufpunkte von den verschiedenen Stromelementen gegeneinander Unterschiede bis zu einer halben Wellenlänge haben, wenn die Antenne in ihrer natürlichen Periode schwingt. Wir haben deshalb zu setzen

$$d\mathfrak{H} = \frac{J_0 dz \omega \sin \vartheta}{cr \sin \frac{2\pi l}{\lambda}} \sin \frac{2\pi(l-z)}{\lambda} \cos\left(\omega t - \frac{\omega r}{c} + \frac{\omega z \cos \vartheta}{c}\right).$$

Hierbei ist  $r - z \cos \vartheta$  als Abkürzung des Wertes  $\sqrt{r^2 + z^2 - 2rz \cos \vartheta}$  gesetzt, mit Rücksicht darauf, daß die Abstände  $z$  der Leiterelemente vom Anfangspunkt sehr klein gegen  $r$  sind.

Die von einem Leiterelement  $dz$  hervorgebrachte elektrische Feldstärke ist  $d\mathfrak{E} = cd\mathfrak{H}$  und die Richtung dieses Vektors ist senkrecht zu  $r'$ . Der Vektor  $\mathfrak{E}$  setzt sich daher aus Komponenten zusammen, deren Richtungen im Maximum bis zu dem Winkel voneinander abweichen, den die von den äußersten Enden des ergänzten Leiters nach  $P$  gezogenen Strahlen miteinander bilden. Dieser ist nach der Annahme, daß  $r$  groß gegen die Wellenlänge sei, so klein, daß wir ohne merklichen Fehler die Richtungsunterschiede der Komponenten vernachlässigen können, so daß

$$\mathfrak{E} = c\mathfrak{H}.$$

Der Vektor  $\mathfrak{E}$  steht also auf  $\mathfrak{H}$  senkrecht, wie in § 310 bei einem einzelnen Element.

Wir setzen nun  $\frac{2\pi}{\lambda} = a$ ,  $\frac{\omega \cos \vartheta}{c} = a \cos \vartheta = b$  und erhalten

$$d\mathfrak{H} = \frac{J_0 \sin \vartheta}{r \sin a l} \frac{2\pi}{\lambda} dz \left[ \cos\left(\omega t - \frac{\omega r}{c}\right) \sin a l \cdot \cos a z \cos b z \right. \\ \left. - \sin\left(\omega t - \frac{\omega r}{c}\right) \sin a l \cdot \cos a z \sin b z \right. \\ \left. - \cos\left(\omega t - \frac{\omega r}{c}\right) \cos a l \cdot \sin a z \cos b z \right. \\ \left. + \sin\left(\omega t - \frac{\omega r}{c}\right) \cos a l \cdot \sin a z \sin b z \right].$$

Bei der Integration von  $-l$  bis  $+l$  fallen die Beiträge der beiden mittleren Posten heraus, ferner ist

$$\int_{-l}^{+l} \cos a z \cos b z dz = \frac{2}{a^2 - b^2} (a \sin a l \cos b l - b \cos a l \sin b l), \\ \int_{-l}^{+l} \sin a z \sin b z dz = \frac{2}{a^2 - b^2} (b \sin a l \cos b l - a \cos a l \sin b l).$$

Man erhält so

$$\mathfrak{H} = \frac{J_0}{r \sin a l \sin \vartheta} \left[ \cos\left(\omega t - \frac{\omega r}{c}\right) \{ \cos b l (1 - \cos 2 a l) - \cos \vartheta \sin 2 a l \sin b l \} \right. \\ \left. - \sin\left(\omega t - \frac{\omega r}{c}\right) \{ \sin b l (1 + \cos 2 a l) - \cos \vartheta \sin 2 a l \cos b l \} \right] \quad (393)$$

Als Ort etwaiger Empfangsantennen ist der Bereich von  $\vartheta$  in der Nähe von  $\frac{\pi}{2}$  am wichtigsten. Dort wird  $\cos \vartheta = 0$  und  $b = 0$ , und wir erhalten

$$\mathfrak{H} = \frac{2 J_0 \sin \frac{2\pi l}{\lambda}}{r} \cos\left(\omega t - \frac{\omega r}{c}\right) \dots \dots \dots (394)$$

Diese Gleichung für die nutzbare Feldstärke zeigt, daß die Veränderung der Wellenlänge sowohl durch Verlängerung mittels einer Spule als durch Verkürzung mittels eines Kondensators die Strahlung der Antenne vermindert, weil  $\sin \frac{2\pi l}{\lambda}$  seinen größten Wert für  $l = \frac{\lambda}{4}$  erhält.

Die räumliche Verteilung der Energiestrahlung wollen wir für den unveränderten Leiter,  $l = \frac{\lambda}{4}$ , untersuchen. Dafür ist nach Gl. (393)

$$\mathfrak{H} = \frac{2 J_0}{r \sin \vartheta} \cos\left(\frac{\pi}{2} \cos \vartheta\right) \cos\left(\omega t - \frac{\omega r}{c}\right) \dots \dots \dots (395)$$

$\mathfrak{E}$  steht auf  $\mathfrak{H}$  senkrecht und hat den Wert  $c\mathfrak{H}$ . Die beiden Vektoren haben also zeitlich dieselbe Phase, und die Leistung, die als Strahlung durch

eine im Abstand  $r$  vom Anfangspunkt gelegene Flächeneinheit senkrecht zum Radius geht, ist nach Gl. (362)

$$|\mathfrak{S}| = \frac{c J_0^2}{\pi r^2} \cos^2 \left( \omega t - \frac{\omega r}{c} \right) \left( \frac{\cos \left( \frac{\pi}{2} \cos \vartheta \right)}{\sin \vartheta} \right)^2 \dots (396)$$

Die gesamte Strahlung ergibt sich durch Integration über die Oberfläche der Kugel mit dem Radius  $r$ . Auf einem Streifen zwischen zwei Parallelkreisen, der den Flächeninhalt  $2 \pi r^2 \sin \vartheta d\vartheta$  hat, hat  $|\mathfrak{S}|$  denselben Wert, also ergibt sich in jedem Augenblick die durch Strahlung abgegebene Leistung des symmetrischen Schwingungssystems als

$$\mathbf{S} = 2 c J_0^2 \cos^2 \left( \omega t - \frac{\omega r}{c} \right) \int_0^\pi \frac{d\vartheta}{\sin \vartheta} \cos^2 \left( \frac{\pi}{2} \cos \vartheta \right) \dots (397)$$

Das bestimmte Integral in  $\mathbf{S}$  geht durch die Einführung einer neuen Veränderlichen  $u = \cos \vartheta$  in die Form über:

$$\begin{aligned} 2 \int_0^\pi \frac{d\vartheta}{\sin \vartheta} \cos^2 \left( \frac{\pi}{2} \cos \vartheta \right) &= \int_{-1}^{+1} \frac{du}{1-u^2} (1 + \cos \pi u) \\ &= \frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} \frac{du}{1+u} (1 + \cos \pi u) + \frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} \frac{du}{1-u} (1 + \cos \pi u). \end{aligned}$$

Man kann sich, indem man  $u = -v$  setzt, überführen, daß das zweite bestimmte Integral dem ersten gleich ist. Setzt man noch  $\cos \pi u = -\cos \pi (1 + u)$ , und ferner  $\pi (1 + u) = \gamma$ , so ergibt sich

$$2 \int_0^\pi \frac{d\vartheta}{\sin \vartheta} \cos^2 \left( \frac{\pi}{2} \cos \vartheta \right) = \int_0^{2\pi} d\gamma \frac{1 - \cos \gamma}{\gamma} = C.$$

Man kann dies Integral durch Reihen oder graphisch auswerten, es ergibt sich der Wert  $C = 2,44$ .

Die Antenne gibt also eine Leistung ab mit dem Zeitwert

$$\mathbf{S} = 2,44 c J_0^2 \cos^2 \left( \omega t - \frac{\omega r}{c} \right).$$

Der zeitliche Mittelwert ist daher

$$\bar{\mathbf{S}} = 1,22 c J_0^2 \dots (398)$$

Dieser Wert ist nur scheinbar von der Länge und Frequenz des strahlenden Leiters unabhängig, da ja vorausgesetzt wird, daß der Leiter seine Grundschwingung ausführe.

Die Strahlung der Antenne ist die Hälfte des angegebenen Wertes und daher gleich  $0,61 c J_0^2$ , weil die Antenne nur die Hälfte des symmetrischen Schwingungssystems ausmacht, und ihre Strahlung nur in dem Halbraume über dem Erdboden zur Geltung kommt.

§ 315. **Gleichwertiger Strahlungswiderstand.** Wir wollen uns statt der Antenne einen gleichwertigen Schwingungskreis mit quasistationärem Stromverlauf denken, der also zunächst dieselbe Frequenz hat, ferner auch solche Abmessungen, Stromstärken und Spannungen, daß die elektromagnetische Energie sowie die Verluste dieselben Werte haben, wie bei dem strahlenden System. Da der gleichwertige geschlossene Schwingungskreis nicht strahlt, so hat man, um den Vorgang der ständigen Entziehung von Energie durch die Strahlung nachzubilden, den Widerstand des gleichwertigen geschlossenen Schwingungskreises um einen bestimmten Betrag zu erhöhen, der so viel Energie verbraucht, wie dem wirklichen durch Strahlung entzogen wird. Ist  $J_0$  der Wert der Stromamplitude im Strombauch der Antenne, so ist das mittlere Quadrat der Stromamplitude auf dem strahlenden Leiter gleich  $\frac{1}{2} J_0^2$ , also die Stromamplitude im gleichwertigen Leiter gleich  $J = J_0 \sqrt{2}$ . Ändert sich dieser Strom zeitlich nach dem Sinusgesetz, so ist der mittlere Wattverbrauch im Widerstande gleich  $\frac{1}{2} (R + R_s) J^2$ , wo  $R$  der gemeinsame Wert des Leitungswiderstandes beider Leiter,  $R_s$  der gleichwertige Strahlungswiderstand ist.  $R_s$  ergibt sich also aus der Gleichung

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{4} R_s J_0^2 &= 1,22 c J_0^2 \\ \text{zu} \quad R_s &= 4,88 c \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (399)$$

Die Antenne in ihrem natürlichen Schwingungszustande ist nur die Hälfte des strahlenden Leiters, also ist ihr Strahlungswiderstand gleich  $2,44 c$  oder rund 73 Ohm. Je mehr die Eigenschwingung durch Verlängern oder Verkürzen verändert worden ist, um so kleiner ist der Strahlungswiderstand der Antenne; bei Antennen von Großstationen beträgt er nur etwa 5 Ohm.

§ 316. **Logarithmisches Dekrement der Antenne. Strahlungsdekrement.**

Das logarithmische Dekrement eines quasistationären Schwingungskreises ist nach Gl. (174) zu  $2\pi \frac{\beta}{\omega}$  bestimmt worden. Man kann dies, da  $\beta = (R + R_s) 2 I$  ist, auch in der Form

$$\delta = \pi \frac{\frac{1}{2} (R + R_s) J^2}{\frac{1}{2} L J^2 \omega}$$

schreiben. Der Zähler stellt den mittleren Jouleschen Wärmeverbrauch in der Zeiteinheit dar, im Nenner steht neben  $\omega$  der Höchstwert der magnetischen Energie im Ersatzkreise. Wenn  $L$  die Induktivität des offenen Leiters bedeutet, berechnet nach der Formel in § 122, so ist mit Rücksicht auf die ungleiche Verteilung des Stromes auf dem offenen Leiter der Höchstwert der magnetischen Energie des offenen Leiters gleich  $\frac{1}{2} L J_0^2 / 2$ , das wieder gleich  $\frac{1}{2} L J^2$  ist. Daher ist für die Antenne

$$\delta = \pi \frac{R + 4,88 c}{L \omega} \dots \dots \dots (400)$$

Den Teil  $\delta_s = \pi \frac{4,88 c}{L \omega}$  nennt man das Strahlungsdekrement der Antenne. Setzen wir bei einer linearen Antenne nebst Spiegelbild unter Berücksichtigung des Umstandes, daß bei den schnellen Schwingungen das innere Feld verschwindet,

$$L = 4l \left( \log \frac{4l}{r} - 1 \right)$$

und ferner

$$\omega = \frac{2\pi c}{\lambda} = \frac{\pi c}{2l},$$

so wird

$$d_s = \frac{2,44}{\log \frac{4l}{r} - 1}.$$

Dieser Wert ist als Strahlungsdekrement einer in einer viertel Wellenlänge schwingenden Leitung abgeleitet worden und stellt daher den Höchstbetrag dieser Größe für eine Antenne gegebener Länge dar.

Nach dieser Gleichung haben dicke Antennen, also Käfige oder Reusen, ein höheres Strahlungsdekrement als Drähte.

**§ 317. Gerichtete drahtlose Telegraphie.** Es mögen sich in den Punkten  $x = +a$  und  $x = -a$  der  $x$ -Achse zwei gleich starke Hertz'sche Sender befinden. Wir suchen die von beiden gemeinsam hervorgebrachte Feldstärke in einem Aufpunkt in der Wellenzone, der in der  $xy$ -Ebene liegt, und von den beiden Sendern die Abstände  $r_1$  und  $r_2$  hat.

Die Sender mögen Schwingungen gleicher Periode, aber entgegengesetzter Phase ausführen. Dann können wir für die Funktion  $U$  in Gl. (375) die Form annehmen

$$U = \frac{ql}{r_1} \cos \omega \left( t - \frac{r_1}{c} \right) - \frac{ql}{r_2} \cos \omega \left( t - \frac{r_2}{c} \right) \dots \dots (401)$$

Bilden wir daraus  $\mathfrak{H}$  und  $\mathfrak{E}$ , so erhalten wir für jede Komponente Ausdrücke nach Art der Gl. (382) und (383), z. B.

$$\begin{aligned} \mathfrak{H}_x &= ql \frac{y}{r_1} \left[ \frac{\omega}{r_1^2} \sin \omega \left( t - \frac{r_1}{c} \right) + \frac{\omega^2}{c r_1} \cos \omega \left( t - \frac{r_1}{c} \right) \right] \\ &\quad - ql \frac{y}{r_2} \left[ \frac{\omega}{r_2^2} \sin \omega \left( t - \frac{r_2}{c} \right) + \frac{\omega^2}{c r_2} \cos \omega \left( t - \frac{r_2}{c} \right) \right]. \end{aligned}$$

Dort, wo  $r_1$  und  $r_2$  als Faktoren stehen, können wir sie in der Wellenzone durch die Größe  $r$  ersetzen, die den Abstand des Aufpunktes vom Anfangspunkt bezeichnet, während wir in den Winkeln ohne merklichen Fehler  $r_1 = r - a \cos \alpha$  und  $r_2 = r + a \cos \alpha$  setzen können, wo  $\alpha$  der Winkel zwischen  $r$  und  $x$  ist. Beschränken wir uns auf das in der Wellenzone allein in Betracht kommende zweite Glied jedes Postens, so wird

$$\mathfrak{H}_x = \frac{\omega^2 ql y}{c r^2} \left[ \cos \omega \left( t - \frac{r}{c} + \frac{a \cos \alpha}{c} \right) - \cos \omega \left( t - \frac{r}{c} - \frac{a \cos \alpha}{c} \right) \right].$$

Man kann dies in die Form bringen:

$$\mathfrak{H}_x = - \frac{2 \omega^2 ql y}{c r^2} \sin \omega \left( t - \frac{r}{c} \right) \sin \left( \frac{\omega a}{c} \cos \alpha \right).$$

Auf gleiche Weise erhält man

$$\mathfrak{H}_y = + \frac{2 \omega^2 ql x}{c r^2} \sin \omega \left( t - \frac{r}{c} \right) \sin \left( \frac{\omega a}{c} \cos \alpha \right).$$

Auch in diesem Falle hat  $\mathfrak{H}$  unter der Voraussetzung, daß der Aufpunkt in der Wellenzone liegt, nur eine Komponente in tangentialer Richtung:

$$\mathfrak{H}_\alpha = 2 \frac{\omega^2 q l}{c r} \sin\left(\frac{\omega a}{c} \cos \alpha\right) \sin \omega \left(t - \frac{r}{c}\right).$$

Es ergibt sich ferner  $\mathfrak{E}_z = c \mathfrak{H}_\alpha$  wie beim einfachen Sender.

Die Amplitude von  $\mathfrak{H}$ , also auch von  $\mathfrak{E}$ , steht zu der eines einfachen Senders im Verhältnis  $2 \sin\left(\frac{\omega a}{c} \cos \alpha\right)$  zu Eins. Dies ist am größten für  $\cos \alpha = 0$ , also in der durch die Ebenen beider Sender gehenden Richtung; auf die Wellenlänge bezogen hat es dann den Wert  $2 \sin 2\pi \frac{a}{\lambda}$ . Diese Größe erhält den überhaupt größten Wert für  $a = \frac{\lambda}{4}$ , wenn also die beiden Sender

gerade eine halbe Wellenlänge auseinanderstehen. Wenn die Luftleiter durch eine Kopplungsspule, also mit verlängerter Welle erregt werden, so ist ein so großer Abstand der beiden Leiter in der Praxis nicht zu erreichen.

Der gerichtete Sender ergibt dieselben Werte der Feldstärken, wie der einfache, wenn  $a = \lambda \cdot 12$ .

Bei Versuchen von Kiebitz<sup>104)</sup> waren bei einer Wellenlänge  $\lambda = 100$  m die Antennen am oberen Ende etwa 18 m voneinander entfernt; sie lagen etwas schräg, so daß in diesem Falle etwa  $a = \lambda/12$  gewesen sein wird. Die Reichweite in der günstigsten Richtung war nach diesen Versuchen jedenfalls nicht kleiner, als die in einer Station mit einer Antenne.

Ist der Empfänger auf eine bestimmte Empfindlichkeit eingestellt, so wird er in den verschiedenen Richtungen in verschiedenen Abständen ansprechen. Das Gebiet, in dem er überhaupt Wellen anzeigt, wird dann durch eine Linie von der Gleichung

$$r = r_0 \frac{\sin\left(\frac{\omega a}{c} \cos \alpha\right)}{\sin \frac{\omega a}{c}}$$

begrenzt, in der  $r_0$  die Reichweite in der Richtung der  $x$ -Achse,  $r$  die in der Richtung  $\alpha$  ist.

Wenn  $\frac{\omega a}{c} = 2\pi \frac{a}{\lambda}$  ein Winkel von etwa  $30^\circ$  ist, wie im Falle  $a = \frac{\lambda}{12}$ , so kann man ohne erheblichen Fehler für den größten Teil des Bereiches die Winkel statt der Sinus setzen und erhält die Näherungsformel

$$r = r_0 \cos \alpha,$$

die besagt, daß die Entfernungen mit gleicher Feldstärke auf zwei Kreisen vom Durchmesser  $r_0$  liegen, die sich in der Sendestelle berühren. Da die Ableitung sich auf die Wellenzone bezieht, gilt diese Aussage in großer Nähe der Station nur angenähert. Durch die Versuche von Kiebitz ist auch diese Verteilung der Feldstärken nachgewiesen worden.

Es ergibt sich daraus, daß die gerichtete Telegraphie weniger die Ausbreitung der Wellen hauptsächlich in einer Richtung begünstigt, als daß sie die Wellen aus der auf der Ebene der Antennen senkrechten Richtung so gut wie vollständig fernhält.

## Dritter Abschnitt.

**Elektrische Wellen im Felde gestreckter Leiter.**

§ 318. **Stellung der Aufgabe.** Es mag zunächst scheinen, als ob der oben bezeichnete Gegenstand in den vorhergehenden Teilen bereits nach allen Seiten erörtert worden sei. Wenn wir aber darauf hinweisen, daß die Theorie über den Verlauf elektrischer Wellen an Leitungen durchweg mit den Größen Widerstand, Induktivität, Kapazität gearbeitet hat, so wird ersichtlich, daß stillschweigend die Verhältnisse des stationären Zustandes im elektromagnetischen Felde um den Leiter herum vorausgesetzt worden sind. Dieser Zustand wird vollkommen nur bei andauerndem gleichgerichteten und unveränderlichen Strom erreicht, bei Wechselströmen um so weniger, je schneller sie wechseln. Es kommt also jetzt darauf an, den Verlauf des Stromes aus den Feldgleichungen selbst abzuleiten; als Grenzfälle bei langsamen Wechslen ergeben sich dann die Größen, mit denen wir bisher hauptsächlich und, wie man jetzt erkennt, näherungsweise gearbeitet haben. Man wird erwarten können, daß die genaueren Feststellungen, die auf diesem Wege möglich sind, auch größere Rechnungen erforderlich machen werden, und in der Tat lassen sie sich nur auf geometrisch einfache Formen und unter idealisierenden Voraussetzungen anwenden.

**§ 319. Das elektromagnetische Feld eines konzentrischen Leitersystems.**

Wir nehmen ein System von Leitern an, die, gegebenenfalls durch Nichtleiter getrennt, sich konzentrisch umschließen, und das im Vergleich zu den Querdimensionen sehr lang ist. Darauf wirke eine sinusförmige Spannung von der Frequenz  $\omega$ , und wir betrachten den eingeschwungenen Zustand. Die Achse des Systems nehmen wir als  $z$ -Achse. Unter dieser Annahme haben die Feldstärken die Form

$$\mathfrak{E} e^{i\omega t - \gamma z} \quad \text{und} \quad \mathfrak{H} e^{i\omega t - \gamma z},$$

worin  $\mathfrak{E}$  und  $\mathfrak{H}$  nicht mehr von  $t$  und  $z$  abhängen und  $\gamma$  eine zunächst unbekannte Größe von der Art der Fortpflanzungskonstante in § 223 ist.

Da eingeprägte EMK nicht vorhanden sind, erhalten die Feldgleichungen die Form

$$\text{rot } \mathfrak{H} = 4\pi \left( \sigma + \frac{i\omega\epsilon}{4\pi c^2} \right) \mathfrak{E}, \quad \text{rot } \mathfrak{E} = -i\omega\mu \mathfrak{H} \dots \dots (402)$$

Wir wollen zunächst zwischen den Leitern verschiedener Art keinen Unterschied machen, indem wir den Faktor  $\sigma + \frac{i\omega\epsilon}{4\pi c^2}$  für den  $\nu$ ten Leiter, von der Mitte aus gerechnet, durch  $\sigma_\nu$  bezeichnen und es der späteren Auswertung überlassen, mit welchem Wert er jeweils einzusetzen ist.

Bei der Form der Leiteranordnung eignet sich für die Rechnung am meisten das auf Zylinderkoordinaten bezogene System der Gleichungen (21) für die Komponenten von  $\text{rot } \mathfrak{H}$  und  $\text{rot } \mathfrak{E}$ . Aus den gegebenen Symmetrieverhältnissen ergibt sich, daß  $\mathfrak{E}_\varphi = 0$  ist, weil die Linien der elektrischen Feldstärke nur in durch die Zylinderachse gehenden Ebenen verlaufen. Da

ferner die magnetischen Feldlinien Kreise bilden, deren Mittelpunkt in der Zylinderachse liegt, so sind  $\mathfrak{H}_r$  und  $\mathfrak{H}_z = 0$ . Die Differentiationen nach  $z$  und  $t$  ergeben bezüglich die Faktoren  $-\gamma$  und  $i\omega$ , und daher gelten folgende Gleichungen:

$$\left. \begin{aligned} \gamma \mathfrak{H}_\theta &= 4\pi\sigma \mathfrak{E}_r, & \frac{1}{r} \frac{\partial(r \mathfrak{H}_\theta)}{\partial r} &= 4\pi\sigma \mathfrak{E}_z \\ \gamma \mathfrak{E}_r + \frac{\partial \mathfrak{E}_z}{\partial r} &= i\omega\mu \mathfrak{H}_\theta \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (403)$$

Ferner ist

$$\frac{\partial \mathfrak{E}_z}{\partial \theta} = 0 \quad \text{und} \quad \frac{\partial \mathfrak{E}_r}{\partial \theta} = 0.$$

Indem wir aus den Gleichungen  $\mathfrak{E}_r$  und  $\mathfrak{H}_\theta$  ausscheiden, erhalten wir für  $\mathfrak{E}_z$  die Differentialgleichung

$$\frac{d^2 \mathfrak{E}_z}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d \mathfrak{E}_z}{dr} - (4\pi\sigma\omega\mu i - \gamma^2) \mathfrak{E}_z = 0 \dots \dots \dots (404)$$

Der Faktor von  $\mathfrak{E}_z$  ist für jede Schicht anders. Wir setzen

$$4\pi\sigma_v\omega\mu_v i - \gamma_v^2 = \kappa_v^2 \dots \dots \dots (405)$$

Darin ist der Wert von  $\sigma_v$  nach dem vorhin Gesagten danach zu bemessen, ob es sich um einen Leiter, einen Halbleiter oder einen Nichtleiter handelt.  $\gamma_v$  ist zunächst unbekannt und vorsorglich für jede Schicht als verschieden anzunehmen.

Die Differentialgleichung (404), welche mit der in Gl. (254) ebenfalls für eine Fortpflanzungsaufgabe gefundenen im Aufbau übereinstimmt, hat als Teilintegrale die Besselschen Funktionen <sup>106)</sup> von der Ordnung Null und mit dem Argument  $i\kappa r$ . Für die damalige Aufgabe kam nur das eine Teilintegral, die Funktion  $J_0(i\kappa r)$  in Betracht, weil das andere, die als  $K_0(i\kappa r)$  bezeichnete Funktion, für den Wert  $r = 0$  unendlich wird. Im vorliegenden Falle kommt  $r = 0$  nur für den inneren Leiter in Betracht. Für den Leiter  $\nu$  ist dagegen das allgemeine Integral in der Form anzusetzen

$$\mathfrak{E}_{z\nu} = A_\nu J_0(i\kappa_\nu r) + B_\nu K_0(i\kappa_\nu r) \dots \dots \dots (406)$$

Für  $\mathfrak{H}_\theta$  folgt aus der ersten und dritten Komponentengleichung

$$\mathfrak{H}_\theta = \frac{4\pi\sigma}{4\pi\sigma i\omega\mu - \gamma^2} \frac{\partial \mathfrak{E}_z}{\partial r} = \frac{4\pi\sigma}{\kappa^2} \frac{\partial \mathfrak{E}_z}{\partial r}.$$

Endlich ist

$$\mathfrak{E}_r = \frac{\gamma}{4\pi\sigma} \mathfrak{H}_\theta = \frac{\gamma}{\kappa^2} \frac{\partial \mathfrak{E}_z}{\partial r} \dots \dots \dots (407)$$

Wenn wir  $\frac{dJ_0(i\kappa r)}{d(i\kappa r)} = J'_0(i\kappa r)$  setzen, so wird

$$\mathfrak{H}_{\theta\nu} = \frac{4\pi\sigma_\nu i}{\kappa_\nu} (A_\nu J'_0(i\kappa_\nu r) + B_\nu K'_0(i\kappa_\nu r)) \dots \dots \dots (408)$$

Unter den Konstanten ist  $B_1 = 0$  zu setzen, weil sonst  $\mathfrak{E}_{z1}$  in der Achse unendlich groß würde; die übrigen hängen dadurch zusammen, daß an jeder Grenze zwischen zwei zylindrischen Schichten in gleicher Weise, wie dies für das ruhende elektrische Feld in § 28 und 29 ausgeführt wurde, die

zur Fläche tangentialen Komponenten der Feldstärken und die zur Fläche senkrechten Komponenten der elektrischen und magnetischen Verschiebungen stetig ineinander übergehen müssen. Da nur  $\mathfrak{E}$  eine zu den zylindrischen Grenzflächen senkrechte Komponente hat, so erhalten wir hier für jede Fläche drei Gleichungen. Beim Übergang aus der  $\nu$ ten Schicht in die  $(\nu + 1)$ te muß sein

$$\begin{aligned} \mathfrak{E}_{z,\nu} &= \mathfrak{E}_{z,\nu+1}, & \mathfrak{H}_{\vartheta,\nu} &= \mathfrak{H}_{\vartheta,\nu+1} \\ \sigma_\nu \mathfrak{E}_{r,\nu} &= \sigma_{\nu+1} \mathfrak{E}_{r,\nu+1}. \end{aligned}$$

Die letzte Gleichung ergibt mit der Beziehung

$$\mathfrak{E}_r = \frac{\gamma}{4\pi\sigma} \mathfrak{H}_\vartheta$$

$$\gamma_\nu \mathfrak{H}_{\vartheta,\nu} = \gamma_{\nu+1} \mathfrak{H}_{\vartheta,\nu+1}$$

und aus der zweiten Stetigkeitsbedingung folgt dann, daß  $\gamma_\nu = \gamma_{\nu+1}$  ist. Wir werden sehen, daß für ein Leitersystem mit  $n$  verschiedenen Mitteln auch  $n$  Werte von  $\gamma$  gelten, aber diese bezeichnen ebenso viele mögliche Arten der Fortpflanzung, wie es bei gekoppeltem Schwingungssystem mehrere Eigenfrequenzen gibt; aber jeder Wert von  $\gamma$  gilt gleichmäßig in allen Mitteln. Wir haben also den nur der Vorsorge halber angenommenen Unterschied der Größen  $\gamma$  von Mittel zu Mittel aufzugeben und setzen einheitlich  $\gamma$  für einen der möglichen Werte.

Für die Aufstellung der aus den Stetigkeitsbedingungen folgenden Gleichungen wollen wir der Übersichtlichkeit halber die Bezeichnungen etwas vereinfachen. Es handelt sich stets um Funktionen von der Ordnung Null, dies braucht also nicht vermerkt zu werden. Das Argument  $i\kappa, r$  hängt für die Stetigkeitsbedingungen von dem für das  $\nu$ te Mittel geltenden Wert  $\kappa_\nu$  und davon ab, ob für  $r$  der kleinere oder der größere Radius des Mittels gewählt wird. Es reicht demnach zur Deutlichkeit der Stetigkeitsbedingungen aus, wenn wir die Werte der Funktion  $J_0(i\kappa, r)$  an einer beliebigen Stelle ihres Mittels mit  $J_{(\nu)}$  und an seinen Grenzflächen mit  $J_{(\nu,1)}$  und  $J_{(\nu,2)}$  bezeichnen.

Wir setzen ferner zur Abkürzung  $\frac{4\pi\sigma_\nu\mu_\nu i}{\kappa_\nu} = a_\nu$ .

Es gelten dann in den verschiedenen Schichten die Feldstärken:

$$\begin{array}{l|l} \mathfrak{E}_{z,1} = A_1 J_{(1)} & \mathfrak{H}_{\vartheta,1} = a_1 A_1 J'_{(1)} \\ \mathfrak{E}_{z,2} = A_2 J_{(2)} + B_2 K_{(2)} & \mathfrak{H}_{\vartheta,2} = a_2 (A_2 J'_{(2)} + B_2 K'_{(2)}) \\ \dots & \dots \\ \mathfrak{E}_{z,n} = A_n J_{(n)} + B_n K_{(n)} & \mathfrak{H}_{\vartheta,n} = a_n (A_n J'_{(n)} + B_n K'_{(n)}) \end{array}$$

und aus den Stetigkeitsbedingungen für  $\mathfrak{E}_z$  ergeben sich die Gleichungen:

$$\left. \begin{array}{l} A_1 J_{(1,2)} = A_2 J_{(2,1)} + B_2 K_{(2,1)} \\ A_2 J_{(2,2)} + B_2 K_{(2,2)} = A_3 J_{(3,1)} + B_3 K_{(3,1)} \\ \dots \\ A_{n-1} J_{(n-1,2)} + B_{n-1} K_{(n-1,2)} = A_n J_{(n,1)} + B_n K_{(n,1)} \end{array} \right\} \cdot \quad (409)$$

Aus den Stetigkeitsbedingungen für  $\mathfrak{H}_\vartheta$  folgen die Gleichungen:

$$\left. \begin{array}{l} a_1 A_1 J'_{(1,2)} = a_2 (A_2 J'_{(2,1)} + B_2 K'_{(2,1)}) \\ a_2 (A_2 J'_{(2,2)} + B_2 K'_{(2,2)}) = a_3 (A_3 J'_{(3,1)} + B_3 K'_{(3,1)}) \\ \dots \\ a_{n-1} (A_{n-1} J'_{(n-1,2)} + B_{n-1} K'_{(n-1,2)}) = a_n (A_n J'_{(n,1)} + B_n K'_{(n,1)}) \\ a_n (A_n J'_{(n,2)} + B_n K'_{(n,2)}) = 0 \end{array} \right\} \cdot \quad (410)$$

Die letzte Gleichung folgt daraus, daß das Linienintegral von  $\mathfrak{E}_\vartheta$  um den äußeren Umfang des äußersten Leiters den Wert Null haben muß, weil die algebraische Summe sämtlicher Ströme, der von dem Wege des Linienintegrals umschlungene Strom, gleich Null ist. Da aber  $\mathfrak{E}_\vartheta, n$  in dem Normalschnitt überall tangential gerichtet ist, so ist  $\mathfrak{E}_\vartheta, n = 0$  zu setzen für  $r = r_n$ .

Dies sind  $2n - 1$  Gleichungen für die  $2n - 1$  Konstanten  $A_1, A_2, B_2 \dots, A_n, B_n$ . Da sie kein von den Konstanten freies Glied enthalten, so kann man alle Gleichungen, durch eine der Konstanten dividieren, z. B. durch  $A_1$ .

Es liegt trotzdem keine Überbestimmung für die  $2n - 2$  Größen  $\frac{A_2}{A_1}, \frac{B_2}{A_1} \dots, \frac{A_n}{A_1}, \frac{B_n}{A_1}$  vor, denn die aus sämtlichen Gleichungen zu bildende Determinante von der Ordnung  $2n - 1$ , welche den Wert Null hat, enthält die Bestimmungsgleichung für die Größe  $\gamma$ , ausgedrückt durch alle  $\sigma_\nu, \kappa_\nu$ , die Frequenz  $\omega$  und die Radien der Schichten. Wir schreiben sie hier für ein Leitersystem mit drei Schichten; sie lautet:

$$\begin{vmatrix} J_{(1,2)}, & -J_{(2,1)}, & -K_{(2,1)}, & 0, & 0 \\ 0, & J_{(2,2)}, & K_{(2,2)}, & -J_{(3,1)}, & -K_{(3,1)} \\ a_1 J'_{(1,2)}, & -a_2 J'_{(2,1)}, & -a_2 K'_{(2,1)}, & 0, & 0 \\ 0, & a_2 J'_{(2,2)}, & a_2 K'_{(2,2)}, & -a_3 J'_{(3,1)}, & -a_3 K'_{(3,1)} \\ 0, & 0, & 0, & J'_{(3,2)}, & K'_{(3,2)} \end{vmatrix} = 0 \quad (411)$$

Die Aufgabe wird vollständig bestimmt, wenn wir noch einführen, daß an einer bestimmten Stelle, z. B. für  $z = 0$ , zwei Leiter eine vorgeschriebene Spannung  $\mathfrak{V}_0$  haben sollen.

Der Leiter mit drei Schichten bestehe aus einem inneren vollen Leiter mit dem Radius  $r_1$  und einem äußeren zylindrischen Mantel zwischen den Radien  $r_2$  und  $r_3$ ; die dazwischenliegende Schicht sei von einem Halbleiter ausgefüllt. Dann ist

$$\mathfrak{V}_0 = \left( \int_{r_1}^{r_2} \mathfrak{E}_{r,2} dr \right)_z = 0,$$

das Integral genommen längs eines Radius in einem Normalschnitt. Da

$$\mathfrak{E}_{r,2} = \frac{\gamma}{\kappa_2^2} \frac{\partial \mathfrak{E}_{z,2}}{\partial r}$$

ist, so ergibt sich

$$\mathfrak{V}_0 = \frac{\gamma}{\kappa_2^2} [A_2 (J_{22} - J_{21}) + B_2 (K_{22} - K_{21})]_{z=0} \dots \dots (412)$$

Da durch das Vorhergehende  $\frac{A_2}{A_1}$  und  $\frac{B_2}{A_1}$  als bekannt anzusehen sind, wird also auch die letzte unbekannte Größe  $A_1$  ihrem Werte nach grundsätzlich festgelegt.

Hiermit ist die gestellte Aufgabe, das elektromagnetische Feld eines konzentrischen Leitersystems ohne Zuhilfenahme der bei stationären Vorgängen benutzten Hilfsgrößen darzustellen, grundsätzlich gelöst. Durch den Ansatz  $\mathfrak{E} e^{i\omega t - \gamma z}$  für die elektrische Feldstärke haben wir uns auf den Fall beschränkt, daß die elektrischen Wellen nur in einer Richtung laufen, also reflektierte Wellen fehlen. Die Lösung trifft also auf die hinreichend weit

vor dem Ende gelegenen Teile einer sehr langen Leitung zu und müßte für Fälle, in denen noch Reflexionen in Betracht kommen, durch eine neue Rechnung mit dem Ansatz  $\mathfrak{E} e^{i\omega t + \gamma z}$  ergänzt werden.

Da sowohl die Darstellung der Vorgänge mit Hilfe der Größen des stationären Feldes als auch die unmittelbare beide von den Feldgleichungen ausgehen, wird die allgemeinere Form, wenn man sich den Bedingungen des stationären Feldes nähert, auch wieder zu den genannten Größen führen.

Geschlossene konzentrische Leitersysteme haben für die Telegraphentechnik kein besonderes Interesse, und für solche, deren äußerster Leiter ein weit ausgedehntes Gebiet umfaßt, wie es bei Leitern mit Rückleitung durch die Erde der Fall ist, wird nachher eine andere umfassendere Lösung gegeben werden.

**§ 320. Der Wechselstromwiderstand von Drähten.** Wir wollen der Einfachheit halber die vorstehenden Überlegungen nur auf den Fall eines einzelnen Leiters anwenden, dessen Rückleitung so weit abliegt, daß sie das Feld innerhalb des Leiters nicht merklich beeinflußt, in der Annahme, daß wir für diesen Fall nur die eine Konstante  $A_1$  für den inneren Leiter zu bestimmen brauchen. Es ist dann

$$\mathfrak{E}_z = A_1 J_0 \left( \frac{i \kappa r}{2} \right).$$

Für  $\mathfrak{H}_\vartheta$  findet man aus Gl. (407) die Beziehung

$$\mathfrak{H}_\vartheta = \frac{4 \pi \sigma}{\kappa^2} \frac{\partial \mathfrak{E}_z}{\partial r}.$$

Unter praktischen Verhältnissen ist in dem Werte von  $\kappa^2$  nach Gl. (405) der Anteil von  $\gamma^2$  gegen den ersten Posten fast unmerklich. Bei Freileitungen hat  $\gamma^2$  ungefähr den Wert  $-\omega^2 KL$ , also auf 1 cm Länge bezogen etwa  $-\omega^2 12 \cdot 10^{-22}$ . Dagegen ist für kupferne Leitungen  $4 \pi \sigma \mu$  etwa gleich  $1/150$ , für eiserne bei  $\mu = 120$  etwa  $1/90$ . Überdies sind die beiden Posten in  $\kappa^2$  geometrisch zueinander zu addieren. Daher ist zu setzen:

$$\left( \frac{\kappa r}{2} \right)^2 = i \pi \sigma \mu \omega r^2.$$

Setzt man  $\pi \sigma \mu \omega = a^2$ , so erhält man nach der Bestimmung der Funktion  $J_0$  in § 214:

$$\mathfrak{E}_z = A_1 \left[ \left( 1 - \frac{(a^2 r^2)^2}{(2!)^2} + \frac{(a^2 r^2)^4}{(4!)^2} \mp \dots \right) + i \left( \frac{a^2 r^2}{1} - \frac{(a^2 r^2)^3}{(3!)^2} + \dots \right) \right] \dots \dots (413)$$

$$\mathfrak{H}_\vartheta = 2 \pi \sigma r A_1 \left[ \left( 1 - \frac{(a^2 r^2)^2}{2! 3!} + \frac{(a^2 r^2)^4}{3! 4!} \mp \dots \right) + i \left( \frac{a^2 r^2}{1! 2!} - \frac{(a^2 r^2)^3}{3! 4!} \mp \dots \right) \right] \dots \dots (414)$$

Führt der Leiter einen Strom von der Amplitude  $\mathfrak{J}$ , so ergibt das Linienintegral der magnetischen Feldstärke über einen den Leiter vom Halbmesser  $r_1$  umschließenden Kreis

$$4 \pi \mathfrak{J} = (2 \pi r \mathfrak{H}_\vartheta)_{r=r_1}.$$

Der wirksame Widerstand  $R'$  und die wirksame innere Induktivität  $L'_i$  des Leiters ergeben sich, wenn wir das Verhältnis der mittleren in der Zeiteinheit in ihn eintretenden Energie zum mittleren Quadrat der Stromstärke bilden.  $\mathfrak{E}_z$  und  $\mathfrak{H}_y$  stehen räumlich aufeinander senkrecht; da sie eine zeitliche Phasendifferenz haben, so ist die Leistung nach der Regel in § 175 zu bilden.

Schreiben wir zur Abkürzung der Gl. (413) und (414)

$$\mathfrak{E}_z = A_1 (a_1 + i b_1), \quad \mathfrak{H}_y = 2 \pi \sigma r A_1 (a_2 + i b_2),$$

so ist die mittlere Dichte des Energiestromes an der Oberfläche:

$$\left( \frac{1}{4 \pi} \frac{A_1^2}{2} 2 \pi \sigma r ((a_1 a_2 + b_1 b_2) + i (b_1 a_2 - a_1 b_2)) \right)_{r=r_1}.$$

Das mittlere Quadrat der Stromstärke ist

$$\frac{1}{2} \mathfrak{I}^2 = \left( \frac{1}{2} (\pi \sigma r^2 A_1)^2 (a_2^2 + b_2^2) \right)_{r=r_1}.$$

Da die Oberfläche für 1 cm Leiterlänge gleich  $2 \pi r_1$  ist, so ergibt sich der wirksame Scheinwiderstand zu

$$R' + i \omega L'_i = \frac{1}{\pi \sigma r_1^2} \left( \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2} + i \frac{b_1 a_2 - a_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2} \right).$$

Wenn  $ar$  so klein ist, daß Posten von der Ordnung  $(ar)^2$  gegen Eins vernachlässigt werden können, so erhält man

$$R' + i \omega L'_i = \frac{1}{\pi \sigma r_1^2} \left( 1 + i \frac{\pi \sigma \mu \omega r_1^2}{2} \right) = \frac{1}{\pi \sigma r_1^2} + i \frac{\omega \mu}{2}.$$

Nun ist der Widerstand  $R$  des Leiters gegen stationären Strom, auf die Längeneinheit berechnet, gleich  $1/\pi \sigma r_1^2$ . Für geringe Frequenz oder bei dünnen Drähten ist also der wirksame Widerstand ziemlich gleich dem reinen Leitungswiderstand. Die innere Induktivität einer Anordnung, wie die vorliegende, ist nach den Ausführungen in § 115 bei stationärem Strom nach Gl. (150) gleich  $2l \frac{\mu}{4}$ , und so findet sich, daß auch bei langsamen Wechslen oder bei dünnen Drähten das innere Feld nicht merklich gegen den stationären Zustand verändert ist.

Für schnellere Wechsel oder bei starken Drähten sind mehrere Glieder der Reihen zu berücksichtigen. Den Funktionstabellen von Jahnke und Emde<sup>106</sup>) entnehmen wir die nachstehende Tabelle über das Verhältnis  $R'/R$  und  $\omega L'_i/R$  bei verschiedenen Werten von  $ar = r \sqrt{\pi \sigma \mu \omega}$ .

$ar$	$R'/R$	$\omega L'_i/R$	$ar$	$R'/R$	$\omega L'_i/R$
0,25	1,0000	0,0313	2,00	1,6778	1,373
0,50	1,0001	0,1247	2,50	2,0430	1,737
0,75	1,0258	0,2777	3,00	2,3937	2,093
1,00	1,0805	0,4806	4,00	3,0956	2,814
1,25	1,1745	0,7136	5,00	3,7940	3,487
1,50	1,3180	0,9508	10,00	7,3250	7,082
1,75	1,4920	1,172			

Man beobachtet an dieser Tabelle, daß oberhalb  $ar = 2$  die Unterschiede der Funktionen für gleichen Zuwachs von  $ar$  nahezu gleich sind; dies erlaubt eine leichte Interpolation.

Für einen 3 mm starken Eisendraht ( $\sigma = 7,58 \cdot 10^{-5}$ ,  $\mu = 120$ ) ist  $ar = 1,79$  bei  $\omega = 5000$ , für welchen Wert sich aus der Tabelle die Werte  $1,521 + i 1,206$  ergeben.

Der Widerstand gegen stationären Strom ist für 1 km  $10^{-4} / \pi \sigma r_1^2 = 18,63$ , also ist der wirksame Widerstand bei  $\omega = 5000$  gleich 28,4 Ohm/km. Die wirksame Induktivität, soweit sie vom Innenfelde herrührt, ergibt sich zu  $L'_i = \frac{18,63 \cdot 1,206}{5000} = 4,5 \text{ mH/km}$  gegen 6 mH km bei stationärem Strom.

Für Werte von  $ar < \sqrt{2}$  findet man an der angegebenen Stelle Näherungsformeln, die zu folgenden Werten führen:

$$\left. \begin{aligned} R' &= R \left( 1 + \frac{(a^2 r^2)^2}{12} \right) \\ L'_i &= \frac{\mu}{2} \left( 1 - \frac{(a^2 r^2)^2}{24} \right) \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (415)$$

Obwohl diese Ableitungen auf der Voraussetzung eines konzentrischen Leitersystems beruhen, läßt man die Werte für das innere Feld auch für andere Formen des Stromkreises gelten; für nahe beieinanderliegende Leiter werden die Ergebnisse mehr und mehr unsicher.

**§ 321. Vergrößerung des Widerstandes bei Hochfrequenz.** Wenn  $\kappa$  sehr groß ist, so hat die Gleichung

$$\frac{d^2 u}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{du}{dr} - \kappa^2 u = 0$$

die angenähert richtige Lösung

$$u = \frac{e^{\kappa r}}{\sqrt{2 \pi \kappa r}}$$

Die Abweichungen vom richtigen Wert sind kleiner als die von  $1 + \frac{1}{2 \kappa r}$  gegen Eins.

Man hat auch hier  $\kappa^2 = 4 \pi \sigma \mu \omega i$  zu setzen, und es wird

$$\mathfrak{E}_z = \frac{a_0 e^{\kappa r}}{\sqrt{2 \pi \kappa r}}, \quad \mathfrak{H}_\vartheta = \frac{4 \pi \sigma}{\kappa} \frac{a_0 e^{\kappa r}}{\sqrt{2 \pi \kappa r}}$$

$\mathfrak{H}_\vartheta$  ist aus  $\mathfrak{E}_z$  nach Gl. (407) gebildet, unter Vernachlässigung von Beträgen der Größenordnung  $\frac{1}{\kappa r}$  gegen Eins.

Daher ist

$$\mathfrak{H}_\vartheta = \frac{4 \pi \sigma}{|\kappa|} |\mathfrak{E}_z|$$

Da  $\mathfrak{H}_\vartheta$  gegen  $\mathfrak{E}_z$  wegen des Faktors  $\sqrt{i}$  in  $\kappa$  eine zeitliche Phasendifferenz von  $45^\circ$  hat, so erhält man für den wirksamen Widerstand den Betrag

$$R = \frac{1}{Q} \sqrt{\frac{\mu \omega}{2 \pi \sigma}}$$

in absoluten Einheiten für 1 cm. Entsprechend der Verteilung der Stromlinien an der Oberfläche ist also jetzt der Widerstand nicht mehr dem Quadrat des Halbmessers, sondern dessen erster Potenz umgekehrt proportional. Ein 2 mm starker Kupferdraht hat daher für  $\omega = 10^6$  einen wirksamen Widerstand von ungefähr 16,7 Ohm für 1 km, gegen 5,54 Ohm bei Gleichstrom.

**§ 322. Wellenleiter in allseitig ausgedehntem Mittel.** Neuerdings plant man eine verbesserte Konstruktion überseeischer Kabel, um sie mit größeren Geschwindigkeiten als bisher betreiben zu können. Von großer Bedeutung ist dabei die Frage geworden, welche Rolle die Rückleitung im Seewasser spielt. Sie wird in der Literatur im Anschluß an die Überlegungen behandelt, welche in § 319 mit Bezug auf ein System konzentrischer Leiter, in dem man das äußerste Mittel beliebig weit reichend annimmt, besprochen worden sind. Eine Arbeit von Carson und Gilbert<sup>107)</sup> kommt auf Grund einer mit dieser Annahme aufgestellten Theorie zu dem Schlusse, daß, entgegen der üblichen Vorstellung, der Scheinwiderstand der Seerückleitung durchaus nicht gering sei. Selbst bei geringen Frequenzen dränge sich der Rückstrom in der unmittelbaren Nähe des Kabels zusammen, so daß der Widerstand des Gesamtkreises sehr stark anwachse und seine Induktivität dementsprechend sinke.

In der genannten Arbeit ist als erwiesen angenommen worden, daß die radial im System der konzentrischen Leiter verlaufenden Ströme unbedeutend gegen die längs der Achse laufenden seien. Jene bilden beim Übertritt in das Seewasser von allen Stellen der Bewehrung aus die Rückleitungsströme, diese dagegen bringen in den durch gemeinsame magnetische Felder verbundenen Leitern durch Induktion Ströme hervor, die man in ausgedehnten Leitermassen als Wirbelströme zu bezeichnen pflegt. Demnach beschäftigt sich die genannte Arbeit, und ähnlich eine ältere von Oldenberg<sup>108)</sup>, nur mit dem Wirbelstromfeld; letzterer spricht zwar aus, daß im Seewasser an jeder Stelle Rückströmung und Induktionswirkung zusammentreten, hat aber auch die Rückströmung als Fortsetzung der Ladungsströme nicht behandelt.

Neben der theoretischen Bedeutung dieser, wie sich noch zeigen wird, recht verwickelten Frage ist ihre praktische Wichtigkeit hervorzuheben. Auf Grund von Rechnungen, die erst kürzlich im grundsätzlichen Teile abgeschlossen worden sind, stelle ich der bisherigen Theorie der Vorgänge um einen in einem unbegrenzten Mittel liegenden Leiter eine andere gegenüber, welche ausdrücklich auf einen Ausgang von Strömen aus dem Leiter und ihren Wiedereintritt, also auf den Rückleitungsvorgang Bezug nimmt, außerdem die Wirbelströme einschließt. Die spätere Anwendung auf die Theorie einer Doppelleitung in einem leitenden oder nichtleitenden Mittel ergibt ferner, daß die neue Funktion für nahezu stationäre Vorgänge mit dem Vektorpotential in Übereinstimmung gebracht werden kann.

Die Untersuchung führt auf ein Integral, auf dessen Zusammenhang mit Besselschen Funktionen mich Herr Dr. Salinger freundlichst aufmerksam gemacht hat. Es wird somit möglich sein, die im nachstehenden nur im Prinzip gezeigte Anwendung auf ein Kabel mit räumlicher Dämpfung auch zahlenmäßig durchzuführen.

Die praktische Bedeutung der neuen Lösung liegt darin, daß, wenn im Gegensatz zu der ausgesprochenen Ansicht der Leitungswiderstand der

Rückleitung im Seewasser nicht erheblich im Vergleich zu anderen Widerständen des Kreises ist, dann die beobachteten Widerstandserhöhungen im wesentlichen denselben Ursprung haben, wie der in § 190 besprochene Zuwachs des wirksamen Widerstandes bei einem Kreise, dessen elektromagnetisches Feld in andere Leiter hinübergreift. In diesem Falle käme es für die Verbesserung der Kabel nicht darauf an, den Rückleitungsströmen die ihnen sonst fehlende Bahn zu schaffen, sondern die Leiter (Bewehrung, Seewasser), welche Energie in Form von Wirbelströmen verzehren, gegen das Feld des Kabelleiters wirksam abzuschirmen.

**§ 323. Gleichungen eines zylindrischen Feldes mit zwei singulären Punkten.** Wir legen diese an die Stellen  $a$  und  $b$  der als Symmetrieachse gewählten  $z$ -Achse. Am Punkte  $b$  soll ein Strom  $dJ$  in den äußeren Leiter eintreten, der am Punkte  $a$  wieder aus ihm austritt. Das beliebig weit sich erstreckende Mittel habe die Leitfähigkeit  $\sigma$ , die Dielektrizitätskonstante  $\epsilon$  und die Permeabilität  $\mu$ . Infolge der Symmetrie werden einige Komponenten der Feldstärken, für die ein Zylinder-Koordinatensystem gewählt wird, gleich Null, was wir durch die Angaben

$$\mathfrak{H} = \{0, \mathfrak{H}_\vartheta, 0\}, \quad \mathfrak{E} = \{\mathfrak{E}_\varrho, 0, \mathfrak{E}_z\}$$

darstellen. Der wahre Strom im betrachteten Aufpunkte  $\varrho, \vartheta, z$  ist nach Gl. (2) und (3) gegeben durch

$$c = \sigma \mathfrak{E} + \frac{\epsilon}{4\pi c^2} \frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial t} \dots \dots \dots (416)$$

Die erste Maxwellsche Feldgleichung

$$rot \mathfrak{H} = 4\pi c$$

ergibt dann nach den Gl. (26)

$$-\frac{\partial \mathfrak{H}_\vartheta}{\partial z} = 4\pi c_\varrho, \quad \frac{1}{\varrho} \frac{\partial (\varrho \mathfrak{H}_\vartheta)}{\partial \varrho} = 4\pi c_z \dots \dots \dots (417)$$

Daraus folgt, daß

$$\frac{\partial}{\partial \varrho} (\varrho c_\varrho) + \frac{\partial}{\partial z} (\varrho c_z) = 0$$

sein muß. Dies wird erfüllt, wenn

$$\varrho c_\varrho = -\frac{\partial U}{\partial z}, \quad \varrho c_z = \frac{\partial U}{\partial \varrho} \dots \dots \dots (418)$$

gemacht werden, wo  $U$  ein noch zu bestimmendes Skalar ist.

Mit Hilfe eines Einheitsvektors  $\mathfrak{h} = [0, 1, 0]$ , der also der magnetischen Feldstärke parallel gerichtet ist, kann man auch schreiben

$$c = -\frac{1}{\varrho} [\mathfrak{h}, grad U] \dots \dots \dots (419)$$

Durch Vereinigung der Gl. (417) und (418) erhält man, da  $\mathfrak{H}_\vartheta$  keine von  $\varrho$  oder  $z$  unabhängigen Posten enthält,

$$\mathfrak{H}_\vartheta = \frac{4\pi U}{\varrho} \dots \dots \dots (420)$$

Die zweite Maxwell'sche Feldstärke lautet nach Gl. (37 a), da eingeprägte EMK nicht bestehen,

$$\text{rot } \mathfrak{E} = -\mu \frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial t}.$$

Bildet man  $\text{rot } c$  nach den Gl. (416) und (419), so ergibt sich

$$\text{rot} \left( \frac{1}{\rho} [\mathfrak{h}, \text{grad } U] \right) = \sigma \mu \frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial t} + \frac{\varepsilon \mu}{4 \pi c^2} \frac{\partial^2 \mathfrak{H}}{\partial t^2}.$$

Da  $\mathfrak{H}$  nur die Komponente  $\mathfrak{H}_z$  hat, so besteht nur eine Komponenten-gleichung, und da

$$[\mathfrak{h}, \text{grad}]_\rho = \frac{\partial U}{\partial z}, \quad [\mathfrak{h}, \text{grad } U]_z = -\frac{\partial U}{\partial \rho}$$

ist, so ergibt sich

$$4 \pi \sigma \mu \frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\varepsilon \mu}{c^2} \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial \rho^2} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial U}{\partial \rho} \dots \dots (421)$$

Wir werden nachher für den Fall eines Leiters ohne Hülle ein Integral dieser Gleichung anführen und es durch die Differenzierungsprobe bestätigen. Es dürfte aber von Interesse sein, den Weg, auf dem es gefunden wurde, unter Auslassung der Einzelheiten, anzugeben. Die in den § 309 und 314 angegebenen Funktionen von Hertz für eine sehr kurze Antenne und von Abraham für eine Antenne von mit der Wellenlänge vergleichbarer Länge, sowie die in § 119 dargelegten Verhältnisse für die stationäre Aufgabe legten den Gedanken nahe, das Feld auch im vorliegenden Falle aus der Summierung der Wirkungen von Stromelementen, die zwischen den Punkten  $a$  und  $b$  in einer geraden Linie gedacht werden, aufzubauen. Für ein einzelnes Strom-element, das zunächst im Anfangspunkt parallel der  $z$ -Achse angenommen wurde, hat der Ansatz

$$U = \frac{q^2}{r^3} \frac{dJ}{4 \pi} e^{i \omega t} f(r) \dots \dots \dots (422)$$

für andauernde Sinusströme Aussicht auf Geltung, wenn darin für  $f(r)$  eine mit abnehmendem  $\omega$  auf die Einheit zurückgehende Größe gefunden werden kann. Setzt man diesen Wert in die Differentialgleichung (421) ein, so ergibt sich die Bedingungsgleichung

$$\frac{d^2 f}{dr^2} - \frac{z}{r} \frac{df}{dr} - \kappa^2 f = 0 \dots \dots \dots (423)$$

worin  $\kappa$  eine durch  $\sigma$ ,  $\varepsilon$  und  $\omega$  bestimmte Größe ist, die in Gl. (425) noch näher besprochen werden wird. Unter den auf Besselsche Funktionen führenden von Jahnke und Emde zusammengestellten Differential-gleichungen<sup>109)</sup> findet sich die folgende

$$\frac{d^2 f}{dr^2} + \frac{1 - 2\alpha}{r} \frac{df}{dr} + \left( \beta^2 - \frac{\alpha^2 - p^2}{r^2} \right) f = 0,$$

und als ihr Integral ist angegeben

$$f = r^\alpha Z_p(\beta r),$$

wo  $Z_p$  ein aus Besselschen Funktionen erster und zweiter Art als Teil-integralen zusammengesetztes Integral bezeichnet.

Man bringt die beiden Differentialgleichungen zur Übereinstimmung, wenn man setzt

$$\alpha = \frac{3}{2}, \quad \rho = \pm \frac{3}{2}, \quad \beta^2 = -\kappa^2.$$

Da in dem Sonderfall, daß nur ein zentraler Leiter vorliegt, die gesuchte Funktion im Unendlichen verschwinden muß, kommen nur die Funktionen dritter Art in Frage, die für die Ordnung  $\pm \frac{3}{2}$  zu geschlossenen Ausdrücken führen. Nachdem so für ein Stromelement der weiter unten in Gl. (427) angegebene Ausdruck gefunden war, konnte die für einen Stromfaden endlicher Länge geltende Funktion nach der Analogie der Ausdrücke in § 119 versuchsweise aufgestellt und nach dem Ergebnis der Probe ergänzt werden.

Es ergab sich so folgende Funktion

$$U = A e^{i\omega t} \left\{ \begin{aligned} & \frac{z-a}{r_a} e^{-\kappa r_a} - \kappa \int_0^a e^{-\kappa r} da \\ & - \left( \frac{z-b}{r_b} e^{-\kappa r_b} - \kappa \int_0^b e^{-\kappa r} db \right) \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (424)$$

Darin ist  $A$  eine noch zu bestimmende Konstante, ferner ist  $r_a^2 = \varrho^2 + (z-a)^2$ ,  $r_b^2 = \varrho^2 + (z-b)^2$ . Man wird beim Einsetzen jedes der vier Posten in die Gl. (421) finden, daß die von  $r$  unabhängige Bedingung zu erfüllen ist

$$4 \pi \sigma \mu i \omega - \varepsilon \mu \frac{\omega^2}{c^2} = \kappa^2 \dots \dots \dots (425)$$

Man erhält ferner

$$\frac{\partial U}{\partial a} = -A e^{i\omega t} e^{-\kappa r_a} \frac{\varrho^2}{r_a^3} (1 + \kappa r_a)$$

und dasselbe, abgesehen von dem anderen Index und dem entgegengesetzten Vorzeichen, für  $\frac{\partial U}{\partial b}$ . Man kann daher auch schreiben

$$U = -A e^{i\omega t} \left( \int_0^a \frac{\partial U}{\partial a} da - \int_0^b \frac{\partial U}{\partial b} db \right) \dots \dots \dots (426)$$

$$= A e^{i\omega t} \int_a^b e^{-\kappa r} \frac{\varrho^2}{r^3} (1 + \kappa r) d\zeta$$

wo

$$r = \sqrt{\varrho^2 + (\zeta - z)^2}$$

ist. Diese Beziehung erlaubt eine einfache Deutung. Nach Gl. (420) ist die tangentielle Komponente der magnetischen Feldstärke gleich  $4 \pi U/\varrho$ . Denken wir uns die magnetische Feldstärke aus den Beiträgen aufgebaut, die von einzelnen in einer Geraden liegenden Stromelementen herrühren, so ist nach der letzten Gleichung einer dieser Beiträge

$$d\mathfrak{H}_\vartheta = 4 \pi A e^{i\omega t} \frac{d\zeta}{r^2} \frac{\varrho}{r} e^{-\kappa r} (1 + \kappa r) \dots \dots \dots (427)$$

Für beliebig kleine Werte von  $\omega$ , also im Grenzfall stationären Strom, wo  $\kappa$  verschwindet, ist dies der Anteil, den nach dem Gesetz von Biot und

Savart (§ 79) ein an der Stelle  $\xi$  der  $z$ -Achse gelegenes Stromelement mit der Stromstärke  $4\pi A = dJ$  im Aufpunkt  $Q, \vartheta, z$  hervorbringt.

Nimmt man  $\varepsilon = 80, \mu = 1$  und nach Carson und Gilbert  $\sigma = 5 \cdot 10^{-11}$  an, so wird  $\kappa^2 = 4\pi\sigma\omega i(1 + i\omega \cdot 1,415 \cdot 10^{-10})$ .

Bei Frequenzen im Bereich hörbarer Schwingungen kommt der zweite Posten der Klammer in keinem Falle in Betracht. Damit ferner das Integral in großem Abstand endlich bleibt, ist für  $\kappa$  der Wert zu wählen

$$\kappa = \sqrt{2\pi\sigma\mu\omega} (1 + i) \dots \dots \dots (428)$$

Man kann die Funktion  $U$  zur Erleichterung der Anwendung auf verschiedene Fälle auch in der Form eines bestimmten Integrals vor dem Einsetzen der Grenzen schreiben

$$U = \frac{dJ}{4\pi} \left[ \int_a^\xi \frac{e^{-\kappa r}}{r} e^{-\kappa z} + \kappa \int_a^\xi e^{-\kappa r} d\xi \right] e^{i\omega t} \dots \dots (429)$$

und darin bedeutet  $b$  die auf dem inneren Stromfaden gemessene Stelle, an der der Strom  $dJ$  in den äußeren Leiter übertritt,  $a$  die Stelle, wo der Strom aus dem Leiter wieder in den Stromfaden zurückkehrt.

**§ 324. Feld eines einzelnen Stromfadens.** Wir erhalten ein Feld, das in geometrischer Beziehung dem in § 119 besprochenen stationären gleichkommt, wenn wir  $a = -l/2, b = +l/2$  setzen. Es wird dann

$$U = \frac{dJ}{4\pi} \left\{ \frac{z + l/2}{r_2} e^{-\kappa r_2} - \frac{z - l/2}{r_1} e^{-\kappa r_1} + \kappa \int_{-l/2}^{+l/2} e^{-\kappa \sqrt{\varrho^2 + (\xi - z)^2}} d\xi \right\} e^{i\omega t} \quad (430)$$

wobei  $r_1^2 = \varrho^2 + (z - l/2)^2, r_2^2 = \varrho^2 + (z + l/2)^2$  ist.

Diese Lösung ist auch für den Fall des Kabels ohne Bewehrung noch unvollständig. Wir erhalten das Gesamtfeld durch Summierung über die von den einzelnen Stromfäden des Kabels herrührenden Beiträge. Da aber jeder einzelne Stromfaden gemäß der festgestellten Funktion verläuft, hat es schon einen Sinn, bei der Rückleitung für einen Stromfaden zu untersuchen, in welchem Maße sie bei Wechselstrom anders ist als bei stationären Vorgängen.

Hierzu ist die Funktion  $U$  ein besonders geeignetes Mittel. Bilden wir das Linienintegral der magnetischen Feldstärke über einen Kreis, dessen Mittelpunkt auf der  $z$ -Achse in der Höhe  $z < l/2$  liegt und der den Halbmesser  $\varrho$  hat, so ist dies gleich  $4\pi$  mal dem mit dem Kreis verketteten Strom. Nach dem Begriff der Verkettung (§ 73) sind von den durch den Stromfaden aufsteigenden und im äußeren Raum zurückkehrenden Stromlinien nur diejenigen mit der Kreislinie verkettet, die im äußeren Raum außerhalb der Kreislinie liegen; denn da die anderen sowohl mit den aufsteigenden als den zurückkehrenden Teilen sich innerhalb der Kreislinie befinden, könnte man sie herausziehen, ohne sie oder die Kreislinie aufzuschneiden.

Das Linienintegral  $2\pi\varrho\mathfrak{H}_\vartheta$ , durch  $4\pi$  dividiert, gibt daher den Teil  $dJ_\varrho e^{i\omega t}$  des Gesamtstromes, der außerhalb der Kreislinie mit dem Radius  $\varrho$  verläuft;  $dJ_\varrho e^{i\omega t}$  hat also nach Gl. (420) den Wert  $2\pi U$ . Führen wir den Wert von  $U$  nach Gl. (430) ein und bilden das Verhältnis  $\eta = dJ_\varrho/dJ$ , so ist

$$\eta = \frac{1}{2} \left\{ \frac{l/2 + z}{r_2} e^{-\kappa r_2} + \frac{l/2 - z}{r_1} e^{-\kappa r_1} + \kappa \int_{-l/2}^{+l/2} e^{-\kappa \sqrt{\varrho^2 + (\xi - z)^2}} d\xi \right\} \quad (431)$$

Mit Bezug auf  $\kappa = 0$  ist in § 119 festgestellt worden, daß der Wert  $4\pi dJ$  für das Linienintegral oder  $\eta = 1$  um so näher erreicht wird, abgesehen von den äußersten Enden, je kleiner  $\varrho$  ist. Dies trifft auch hier zu.

Setzt man  $\varrho = 0$  in Gl. (431) und berücksichtigt, daß  $r_1$ ,  $r_2$  und  $\sqrt{\varrho^2 + (\xi - z)^2}$  stets positiv sind, so erhält man ebenfalls  $\eta = 1$ . Ein die Linie unendlich eng umschließender Kreis ist also mit der gesamten Strömung verkettet; dieser Satz steht, weil die Stromfäden notwendig geschlossene Linien sind, außer Zweifel; er bestätigt aber die Richtigkeit der Gl. (430).

Wenn wir versuchen, den Verlauf des Rückstroms festzustellen, haben wir zunächst zu sehen, welche Werte für den reellen Teil von  $\alpha$ , die Größe  $\alpha = \sqrt{2\pi\sigma\omega}$  in Frage kommen. Bei  $\sigma = 5 \cdot 10^{-11}$  wird

$$\alpha = 1,77 \sqrt{\omega} 10^{-5} \text{ (cm}^{-1}\text{)}.$$

Für Fernsprechströme handelt es sich also um Werte von  $\alpha$  zwischen  $10 \cdot 10^{-4}$  und  $25 \cdot 10^{-4}$ ; beim Telegraphieren würde für Wechsel des Fünferalphabets bei einer Geschwindigkeit von 600 Zeichen in der Minute ungefähr  $\alpha = 2,25 \cdot 10^{-4}$  sein. Sobald also  $l$  einige Kilometer beträgt, werden die Exponenten der beiden ersten Posten in Gl. (431) so groß, daß diese zu  $\eta$  keinen nennenswerten Beitrag liefern. Es ist demnach auch das Feld des Rückstromes eines Stromfadens von einiger Länge in gewissem Abstände von den Enden von der Koordinate  $z$  praktisch unabhängig; indessen befolgt es ein anderes Gesetz als das in § 319 erörterte Feld.

Es hat demnach fast den Anschein, als wenn in dem Ausdruck für  $\eta$  die beiden ersten Posten für stationäre Ströme und allein für diese den Anteil des verketteten Rückstromes ergäben, während auch schon für sehr langsame Wechselströme diese Posten bedeutungslos würden, während das Integral ebenso schnell zur Geltung käme. Etwas anders stellt sich die Sachlage dar, wenn man  $\eta$  auf die Weise feststellt, daß man den in Gl. (427) angegebenen Beitrag eines Linienelements in eine unendliche Reihe entwickelt und deren Glieder zwischen  $\xi = -l/2$  und  $\xi = +l/2$  integriert. Der Übersichtlichkeit halber ist in dem folgenden Ergebnis das bestimmte Integral vor dem Einsetzen der Grenzen angegeben worden, es lautet:

$$\eta = \frac{1}{2} \left[ \frac{v}{r} - \kappa^2 \varrho^2 \left\{ \frac{1}{2} \log(r-v) - \kappa v \left( \frac{2}{3!} - \frac{3}{4!} \frac{\kappa r}{2} + \frac{4}{5!} \frac{(\kappa r)^2}{3} + \dots \right) \right\} \right]_{v=-(l/2+z)}^{v=+(l/2-z)}$$

Darin ist  $r^2 = \varrho^2 + v^2$  zu setzen. In der Reihe, die als Faktor von  $\kappa v$  auftritt, sind Posten, welche mit  $\varrho^2/r^2$  oder höheren Potenzen davon behaftet sind, gegen solche, die  $\varrho$  nicht enthalten, vernachlässigt.

Diese Form von  $\eta$  kommt für  $\kappa = 0$  ebenfalls auf das in § 119 Festgestellte hinaus, im übrigen ergibt sie, daß der Wert von  $\eta$  sich für kleine Werte von  $\varrho$  von dem für  $\varrho = 0$  geltenden Werte Eins nur langsam entfernt. Für die Feststellung des Wertes von  $\eta$  bei größeren Werten von  $\varrho$  ist aber auch diese Formel nicht geeignet, weil sie die Berechnung sehr vieler Glieder der Reihe erfordert. Dazu eignet sich mehr die Auswertung des Integrals. Man sieht, daß dieses für Werte von  $\varrho$ , die erheblich kleiner als  $l$  sind, also bis zu einigen hundert Metern, zwischen den Grenzen  $-\infty$  und

+  $\infty$  genommen werden kann, oder auch, weil die Funktion mit Bezug auf  $\zeta$  gerade ist, zweimal von 0 bis  $\infty$ . Es ist also angenähert

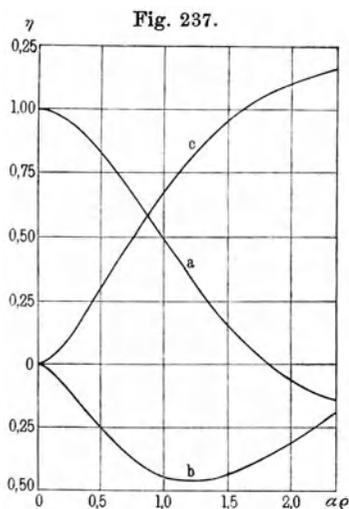
$$\eta = \alpha \int_0^{\infty} e^{-\alpha \sqrt{\varrho^2 + \zeta^2}} d\zeta$$

für alle  $z$ , die noch so weit von den Enden abliegen, daß  $\varrho^2$  sehr klein gegen  $(l/2 - z)^2$  ist. Setzt man  $\alpha \zeta = u$ ,  $\alpha \sqrt{\varrho^2 + \zeta^2} = w$ , so ist

$$\eta = \sqrt{2} \int_0^{\infty} e^{-w} [\cos(\pi/4 - w) + i \sin(\pi/4 - w)] du.$$

Das Integral wurde angenähert auf folgendem Wege ausgewertet. Für Werte von  $\alpha \varrho < \pi/4$  wurde der Betrag von  $u$  ermittelt, für welchen  $w = \pi/4$  wird; der Bereich von  $u$  alsdann in zehn gleiche Teile geteilt, für jeden das zugehörige  $w$  berechnet, nach der Formel die Ordinaten der Funktion für die einzelnen Werte von  $u$  bestimmt und der Inhalt des Polygons festgestellt. Dasselbe geschah für den Bereich von  $w = \pi/4$  bis  $w = 3\pi/4$ . Bei den Teilen des Integrals, die für über  $3\pi/4$  liegende  $u$ -Werte entfallen, ist schon  $du$  ziemlich genau gleich  $dw$ , so daß die Berechnung des Restes durch das Integral über  $w$  von  $3\pi/4$  bis  $\infty$  zulässig ist. Bei Werten von  $\alpha \varrho = \pi/4$  bis  $\alpha \varrho = 3\pi/4$  ist die erste Summierung bis  $5\pi/4$ , die folgende bis  $7\pi/4$  auszudehnen, der Rest kann durch das Integral über  $w$  berechnet werden. Jenseits  $\alpha \varrho = 3\pi/4$  hat  $\eta$  einen Phasenwinkel, der demjenigen bei kleineren Werten von  $\varrho$  entgegengesetzt ist; der Betrag ist nach Lage der Sache gering. Es folgt aber grundsätzlich auf ein Gebiet, das sich von  $\varrho = 0$  bis  $\varrho = 3\pi/4 \alpha$

parallel dem Leiter erstreckt, und in dem der Rückstrom im großen und ganzen dem geschlossenen Strom entgegengesetzt läuft, ein anderes Gebiet, bis  $\varrho = 5\pi/4 \alpha$ , in dem  $u$  mit dem geschlossenen Strom im wesentlichen gleichgerichtet ist. Wegen der Schwächung auf  $e^{-3\pi/4}$  und mehr gegen Eins in der Nähe des Leiters kommt aber der Leiter außerhalb des Abstandes  $\varrho = 3\pi/4 \alpha$  für die Rückleitung praktisch nicht mehr in Frage. In diesem Abstände finden daher auch Induktionswirkungen ihre Grenze. Einige Werte von  $\eta$  wurden auch nach der in Gl. (426) angegebenen Form des Integrals berechnet; es ergab sich kein deutlicher Unterschied. Fig. 237 stellt in den Linien  $a$  und  $b$  die reelle und die imaginäre Komponente von  $\eta$  für bestimmte Werte von  $\alpha \varrho$  im Winkelmaß dar, außerdem in der Linie  $c$  den Modul der Größe  $1 - \eta$ . Wenn  $\eta$  der verkettete Stromanteil ist, so ist  $1 - \eta$  der unverkettete, also der innerhalb eines Kreises mit dem Radius  $\varrho$  den Leiter umgebende Rückstrom, beide bezogen auf den Leiterstrom Eins.



Zwischen dem inneren Leiter und einem Kreis vom Radius  $\alpha \varrho = 0,22$  fließt also nur  $1/10$  des Rückstromes. Dies bedeutet für telegraphische

Wechselzeichen der vorhin angegebenen Geschwindigkeit einen Abstand von  $\varrho = 1240$  cm, wenn wir die von Carson und Gilbert angenommene hohe Leitfähigkeit  $\sigma = 5 \cdot 10^{-11}$  des Seewassers zugrunde legen.

Aus der Ordinaten  $y$  der Kurve  $c$  läßt sich der wirksame Widerstand der Rückleitung angenähert berechnen. Man erhält zunächst die Stromdichte in Richtung der Achse

$$i_z = \frac{1}{2\pi\varrho} \frac{dy}{d\varrho} dJ.$$

Innerhalb einer Stromröhre parallel zur Achse, vom Querschnitt  $df$  und der Länge 1 cm, wird in Wärme umgesetzt die Leistung

$$dL = \frac{(i_z df)^2}{\sigma df}.$$

Setzt man zur Annäherung die Differenz zweier um eine gewisse kleine Strecke auf der Abszissenachse voneinander entfernten Ordinaten  $y_2 - y_1$  statt  $dy$ , ähnlich  $\varrho_2 - \varrho_1$  statt  $d\varrho$ ,  $\varrho_1 + \varrho_2$  statt  $2\varrho$ , und beachtet, daß auf der Abszissenachse in Einheiten von  $\alpha\varrho$  gemessen wird, so findet man für die Leistung, welche in dem 1 cm längs der Achse zwischen den Radien  $\varrho_1$  und  $\varrho_2$  sich erstreckenden zylindrischen Raumteil verbraucht wird, den Wert

$$dL = \frac{1}{2} (dJ)^2 \frac{\alpha^2 (y_2 - y_1)^2}{\pi\sigma(\varrho_2^2 - \varrho_1^2)}.$$

Es wurde schon festgestellt, daß  $\alpha = \sqrt{2\pi\sigma\omega}$  ist. Wenn man über den ganzen Raum summiert und  $L = \frac{1}{2} R_w (dJ)^2$  setzt, so wird der Rückleitungswiderstand des Seewassers

$$R_w = 1,36 \omega 10^{-4} \text{ Ohm/km} \dots \dots \dots (432)$$

Er ist, wie Oldenberg dies auch bei der anderen Rechnung bemerkt hat, von  $\sigma$  unabhängig. Zu diesem Widerstand tragen die inneren Schichten, welche nur ein Zehntel des Stromes führen, 2,7 Zehntel bei.

Er beträgt also für die Wechselzeichen beim Telegraphieren mit der angegebenen Geschwindigkeit nur etwa 0,021 Ohm/km. Bei den wichtigsten Fernsprechfrequenzen von  $\omega = 3500$  bis  $\omega = 14\,000$  liegt er zwischen 0,48 und 1,9 Ohm/km.

**§ 325. Anwendung auf ein einadriges Seekabel.** Der im vorigen Paragraphen besprochene Fall eines Stromfadens mit Rückleitung durch das umgebende Mittel ist ein abstrakter Sonderfall. Nur ein unendlich dünner Leiter könnte unter Wechselstrom an allen Stellen dieselbe Stromstärke führen. Um eine auf ein Kabel anwendbare Lösung zu erhalten, haben wir eine Anzahl von Stromfäden verschiedener Länge nebeneinander zu legen, die an derselben Stelle anfangen, und an deren Enden bezüglich diejenigen Stromstärken austreten, welche nach den Eigenschaften des Kabels sich an der betreffenden Stelle als Ladungsströme von dem Längsstrom ablösen.

Wir lassen alle Ströme des Innenleiters an der Stelle  $-l/2$  eintreten. Es wird vorläufig erforderlich sein, auf der  $z$ -Achse drei verschiedene Zählungen einzuführen, welche in gleicher Richtung laufen, aber unabhängig sind. Die erste, durch  $z$  bezeichnet, gibt die Lage des Aufpunktes an, ist

also gegenüber allen Summierungen über die Teile der Leiter eine Konstante und wird nur zur Ermittlung der Feldstärke  $\mathcal{E}_s$  virtuell geändert. Die zweite Zählung, mit  $\xi$  bezeichnet, bezieht sich wie bisher auf die Lage der einzelnen Teile eines Stromfadens und die dritte, mit  $s$  bezeichnet, auf die Lage der Austrittstellen der einzelnen Stromfäden. Die Eintrittstellen aller Stromfäden liegen also bei  $s = -l/2$ , die Austrittstellen verteilen sich auf die Werte von  $s$  zwischen  $-l/2$  und  $+l/2$ , und die letzten Fäden treten bei  $+l/2$  aus. Ein bis zu einer beliebigen Stelle  $s$  reichender Stromfaden hat also die Länge  $s + l/2$ .

Die im vorigen Paragraphen angewendete Funktion  $U$  ist unter der besonderen Voraussetzung, daß das Mittel sich bis in beliebige Entfernung erstrecke, auf solche Exponenten beschränkt worden, deren reeller Teil negativ ist. Man kann aber leicht feststellen, daß auch Funktionen mit einem positiven reellen Anteil des Exponenten die Differentialgleichung erfüllen. Wir setzen

$$\left[ \frac{\xi - z}{r} e^{-\kappa r} + \kappa \int_{-l/2}^s e^{-\kappa r} d\xi \right] = \mathcal{Y}_1$$

$$\left[ \frac{\xi - z}{r} e^{+\kappa r} - \kappa \int_{-l/2}^s e^{+\kappa r} d\xi \right] = \mathcal{Y}_2$$

Für alle Raumteile des Kabels, deren Flächen im endlichen Abstand von der Achse liegen, kommen  $\mathcal{Y}_1$  und  $\mathcal{Y}_2$  mit passenden Konstanten in Frage; nur für den äußeren Raum gilt allein  $\mathcal{Y}_1$ .

Wir nennen ferner  $\mathcal{V}_s$  die Amplitude der Spannung des Innenleiters an der Stelle  $s$ , gemessen in einer zur  $z$ -Achse senkrechten Ebene gegen einen unendlich fernen Punkt dieser Ebene. An der Stelle  $s = -l/2$  habe sie den Wert  $\mathcal{V}_0$ , dann ist

$$\mathcal{V}_s = \mathcal{V}_0 \frac{\text{Sin } \gamma(l/2 - s)}{\text{Sin } \gamma l},$$

wo  $\gamma$  die Fortpflanzungskonstante bezeichnet. Der innere Leiter führt in Richtung der Achse einen Strom

$$\mathcal{I}_s = \mathcal{I}_0 \frac{\text{Cos } \gamma(l/2 - s)}{\text{Sin } \gamma l}.$$

Am Ende der Leitung kommt dieser mit dem Betrage  $\mathcal{I}_0 / \mathcal{B} \text{Sin } \gamma l$  an; ein diesem Strome entsprechender Anteil nach Gl. (430) ist zunächst für  $l$  einzusetzen. Zweigen unterwegs Stromteile als Ladungs- oder Ableitungsströme ab, so entstehen Stromfäden neben dem bis zu Ende führenden; an der Stelle  $s$  zweigt ein Stromfaden ab, der von  $-l/2$  bis  $s$  reicht und aus dem bei  $s$  der Strom  $-\frac{\partial \mathcal{V}_s}{\partial s} ds$  austritt.

Wir schreiben der Kürze halber nur den Anteil  $u_1$  von  $u$  hin, in dem die Exponentialfunktionen  $e^{-\kappa r}$  einen im reellen Teil negativen Exponenten haben

$$u_1 = \frac{1}{4\pi \mathcal{B}} \frac{\mathcal{V}_0}{\text{Sin } \gamma l} \left( \frac{l/2 - z}{r_1} e^{-\kappa r_1} + \frac{l/2 + z}{r_2} e^{-\kappa r_2} + \int_{-l/2}^{+l/2} e^{-\kappa r} d\xi \right) - \frac{1}{4\pi} \int_{-l/2}^{+l/2} \frac{\partial \mathcal{V}_s}{\partial s} ds \mathcal{Y}_1.$$

Wenn man die Integration in Teilen ausführt:

$$\int_{-l/2}^{+l/2} \frac{\partial \mathfrak{J}_s}{\partial s} ds \mathfrak{Y}_1 = \left[ \mathfrak{J}_s \mathfrak{Y}_1 \right]_{-l/2}^{+l/2} - \int_{-l/2}^{+l/2} \mathfrak{J}_s \frac{\partial \mathfrak{Y}_1}{\partial s} ds,$$

so ergibt sich dafür, weil

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \left( \xi - z \frac{e^{-\kappa r}}{r} + \kappa \int_{-l/2}^{+l/2} e^{-\kappa r} d\xi \right) = e^{-\kappa r} \frac{\varrho^2}{r^3} (1 + \kappa r)$$

ist,

$$\begin{aligned} \mathfrak{B}_0 \mathfrak{S} \sin \gamma l \left( \frac{l/2 - z}{r_1} e^{-\kappa r_1} + \frac{l/2 + z}{r_2} e^{-\kappa r_2} + \int_{-l/2}^{+l/2} e^{-\kappa r} d\xi \right) \\ - \int_{-l/2}^{+l/2} \mathfrak{J}_s \frac{\varrho^2}{r_s^3} e^{-\kappa r_s} (1 + \kappa r_s) ds. \end{aligned}$$

So wird also

$$\mathfrak{U}_1 = \frac{1}{4\pi} \int_{-l/2}^{+l/2} \frac{\mathfrak{B}_0 \mathfrak{C} \cos \gamma (l/2 - s)}{\mathfrak{S} \sin \gamma l} \frac{\varrho^2}{r^3} e^{-\kappa r} (1 + \kappa r) ds \dots (433)$$

wo jetzt

$$r^2 = \varrho^2 + (s - z)^2$$

ist. Man sieht, daß dieses Integral die Summierung der Wirkungen der Stromelemente des Kabelleiters nach dem für den vorliegenden Fall ergänzten Gesetz von Biot und Savart ist, und abgesehen von der mit  $s$  veränderlichen Stromstärke dieselbe Form hat, wie sie in Gl. (426) für einen einzelnen Stromfaden aufgestellt wurde.

Man kann der Gl. (433) wiederum durch Integration in Teilen die Form geben:

$$\begin{aligned} \mathfrak{U}_1 = \frac{1}{4\pi} \frac{\mathfrak{B}_0}{\mathfrak{S} \sin \gamma l} \left( \mathfrak{C} \cos \gamma l \frac{l/2 + z}{r_2} e^{-\kappa r_2} + \frac{l/2 - z}{r_1} e^{-\kappa r_1} + \kappa \int_{-l/2}^{+l/2} e^{-\kappa r} ds \right) \\ - \frac{1}{4\pi} \frac{\gamma \mathfrak{B}_0}{\mathfrak{S} \sin \gamma l} \int_{-l/2}^{+l/2} \mathfrak{S} \sin \gamma \left( \frac{l}{2} - s \right) \left( \frac{s - z}{r} e^{-\kappa r} + \kappa \int_{-l/2}^s e^{-\kappa r} ds \right) ds. \end{aligned}$$

Sie geht für  $\gamma = 0$ , wobei  $\mathfrak{S} \sin \gamma l = Rl$  wird, in die Form der Gl. (430) für einen einzelnen Stromfaden über.

Aus diesen Beziehungen kann man schließen, daß auch bei wirklichen einadrigen Kabeln die Rückleitung im Seewasser den wirksamen Widerstand des gesamten Stromkreises außer bei sehr hohen Frequenzen nicht sehr vergrößert.

Messungen an den einadrigen Fernsprechkabeln zwischen Florida und Kuba <sup>110)</sup> zeigen, daß der wirksame Widerstandszuwachs bei Wechselströmen von 500 bis 6000 Perioden in der Sekunde, berechnet auf Grund der angegebenen Werte von  $\beta$  und  $\mathfrak{S}$ , stets etwas höher liegt als der für die Rückleitung nach Gl. (432) berechnete Wert  $1,36 \omega$ . Der Unterschied tritt wegen der Wirbelströme in den Metallteilen der Kabel auf. Man braucht daher besonders bei den für Telegraphierströme in Frage kommenden Frequenzen nicht mit merklichen Verlusten in der Seerückleitung zu rechnen.

Das Ergebnis  $U_2$  der Integration über den Anteil von  $U$ , in dem der reelle Teil der Exponenten positiv ist, unterscheidet sich außer in den Vorzeichen von  $x$  nicht von dem festgestellten. Man erhält dann schließlich

$$U = a U_1 + b U_2.$$

Für die verschiedenen Raunteile, aus denen das Feld sich aufbaut, Kupferleiter, isolierende Hülle, Bewehrung, Seewasser, gelten verschiedene Werte von  $x$ , also auch verschiedene Funktionen  $U$ . Die Integrationskonstanten  $a$  und  $b$  sind für jedes Mittel verschieden zu wählen und so zu bestimmen, daß an den Grenzflächen die bekannten Stetigkeitsbedingungen erfüllt sind. Da aber bei dieser Aufgabe das Feld nach  $+z$  hin anders gebildet ist als nach  $-z$  hin, so wird eine Konstantenbestimmung für Zylinder mit gleichbleibendem Durchmesser allgemein nicht möglich sein. Es muß der späteren Untersuchung vorbehalten bleiben, wieweit sich für ein von den Enden noch beträchtlich entferntes Stück des Kabels eine Annäherung für Zylinder mit konstanten Maßen finden läßt.

Auch die Ausführungen im nächsten Paragraphen über die Anwendung der Funktion  $U$  auf eine Doppelleitung, geben nur eine grundsätzliche Lösung an; sie bieten aber deshalb Interesse, weil sie Beziehungen zwischen dieser Funktion und dem Vektorpotential anzeigen.

**§ 326. Das Feld einer Doppelleitung.** Die Ergebnisse des § 324 lassen sich auf eine Doppelleitung in einem beliebig ausgedehnten Mittel anwenden, das auch ein Nichtleiter, also Luft, sein kann. Wir legen den einen Zweig, in dem ein positiver Strom in der Richtung  $z$  fließen soll, durch den Punkt  $\{a, 0, 0\}$  eines dreiachsigen Koordinatensystems, den Gegenleiter durch den Punkt  $\{-a, 0, 0\}$ , beide wie bisher parallel der  $z$ -Achse. Die senkrechten Abstände des Aufpunktes von den Leitern seien  $Q_1$  und  $Q_2$ . In einer durch den Aufpunkt  $x, y, z$  gelegten, zur  $z$ -Achse senkrechten Ebene, bringt der erste Leiter eine magnetische Feldstärke  $\mathfrak{H}_1 \perp Q_1$  hervor, die durch eine Größe  $U_1$  bestimmt ist:

$$\mathfrak{H}_1 e^{i\omega t} = \frac{4\pi U_1}{Q_1}.$$

Ihre Komponenten sind:

$$\mathfrak{H}_{1x} = -\frac{y}{Q_1} \mathfrak{H}_1, \quad \mathfrak{H}_{1y} = \frac{x-a}{Q_1} \mathfrak{H}_1.$$

Der Gegenleiter erzeugt eine Feldstärke  $\mathfrak{H}_2 e^{i\omega t} = 4\pi \frac{U_2}{Q_2}$  mit den Komponenten

$$\mathfrak{H}_{2x} = -\frac{y}{Q_2} \mathfrak{H}_2, \quad \mathfrak{H}_{2y} = \frac{x+a}{Q_2} \mathfrak{H}_2.$$

Aus Gl. (426) ergibt sich unter Beachtung der Stromrichtungen in beiden Zweigen:

$$U_1 = \frac{e^{i\omega t}}{4\pi} \int_{-l/2}^{+l/2} ds \mathfrak{H}_s \frac{Q_1^2}{r_1^3} e^{-\kappa r_1} (1 + \kappa r_1),$$

$$U_2 = -\frac{e^{i\omega t}}{4\pi} \int_{-l/2}^{+l/2} ds \mathfrak{H}_s \frac{Q_2^2}{r_2^3} e^{-\kappa r_2} (1 + \kappa r_2).$$

Darin sind:

$$r_1^2 = (x - a)^2 + y^2 + (s - z)^2 = \varrho_1^2 + (s - z)^2,$$

$$r_2^2 = (x + a)^2 + y^2 + (s - z)^2 = \varrho_2^2 + (s - z)^2.$$

Man kann nach dem Einsetzen der Werte von  $\mathfrak{H}_1$  und  $\mathfrak{H}_2$ , deren Summe die resultierende magnetische Feldstärke mit den Komponenten  $\mathfrak{H}_x$  und  $\mathfrak{H}_y$  ergibt, durch Ausführen der Differentiationen leicht bestätigen, daß

$$\mathfrak{H}_x = \frac{\partial}{\partial y} \left( \int_{-l/2}^{+l/2} ds \mathfrak{A}_s \begin{pmatrix} e^{-\kappa r_1} & - e^{-\kappa r_2} \\ r_1 & r_2 \end{pmatrix} \right),$$

$$\mathfrak{H}_y = - \frac{\partial}{\partial x} \left( \int_{-l/2}^{+l/2} ds \mathfrak{A}_s \begin{pmatrix} e^{-\kappa r_1} & - e^{-\kappa r_2} \\ r_1 & r_2 \end{pmatrix} \right).$$

Das hier vorkommende Integral ist nach Art des Vektorpotentials Gl. (110) gebildet. Wenn man einen räumlichen Vektor  $\mathfrak{B}$  annimmt, der nur eine  $z$ -Komponente hat, also  $\mathfrak{B} = \{ 0, 0, \mathfrak{B}_z \}$ , wo

$$\mathfrak{B}_z = \int_{-l/2}^{+l/2} ds \mathfrak{A}_s \begin{pmatrix} e^{-\kappa r_1} & - e^{-\kappa r_2} \\ r_1 & r_2 \end{pmatrix} \dots \dots \dots (434)$$

so ist nach den Gl. (25)

$$\mathfrak{H} = \text{rot } \mathfrak{B}.$$

Wir erhalten demnach für den Fall des nichtstationären Verlaufs eine dem Vektorpotential ähnliche Funktion, die sich von der für stationäre Fälle geltenden nur durch den Faktor  $e^{-\kappa r}$  unterscheidet, der für  $\kappa = 0$  den Wert Eins annimmt und für von Null verschiedene Werte von  $\kappa$  einen quer zur  $z$ -Achse gehenden wellenartigen Verlauf des Vorgangs bezeichnet. Sie ist auch in vielem dem Vektor  $\mathfrak{B}$  in § 119 ähnlich, einschließlich der Eigenschaft, daß die Integration offenkundig nur über die Teile der Stromkreise ausgedehnt ist, in denen die Stromfäden geschlossen laufen.

Auch in diesem Falle gilt für Räume endlicher Ausdehnung noch ein zweites Integral, in dem  $-\kappa$  gegen  $+\kappa$  vertauscht ist; daher gelten für die Konstantenbestimmung dieselben Regeln wie im Falle konzentrischer Leiter.

## Anhang I.

### Elektromagnetisches (cgs) und praktisches Maßsystem. Gebrauchsmaße.

Nr.	Größe	Einheit im cgs-System	Einheit im prakt. System	Gebrauchsmaße	Divisor
1	Länge	1 cm	$10^9$ cm	Verschiedene Zehnerpotenzen, z. B. m, km 1 engl. Meile (mile) 1 Seemeile	— 160 931 185 511
2	Masse	1 g	$10^{-11}$ g	Verschiedene Zehnerpotenzen, z. B. kg, t 1 engl. Pfund (lb)	— 453,6
3	Zeit	1 Sek.	1 Sek.	—	—
4	Kraft	1 Dyn	—	1 kg	981 000
5	{Elektrische Feldstärke}	—	—	1 Volt/cm	$10^8$
6	Spannung	—	Volt (V)	1 Volt	$10^8$
7	Stromstärke	—	Ampere (A)	1 A	0,1
8	Stromdichte	—	—	1 A/cm <sup>2</sup> 1 A/mm <sup>2</sup>	0,1 10
9	{Elektrizitätsmenge}	—	Coulomb	1 Coulomb 1 Amperestunde (Ah) 1 elektrostat. Einheit	0,1 360 $\frac{1}{3} \cdot 10^{-10}$
10	Leistung	—	Watt	1 Watt 1 Kilowatt	$10^7$ $10^{10}$
11	Arbeit	1 Erg	Joule	1 Wattsekunde 1 Kilowattstunde 1 Grammkalorie	$10^7$ $36 \cdot 10^{12}$ $41,9 \cdot 10^6$
12	Widerstand	—	Ohm	1 Ohm 1 Megohm	$10^9$ $10^{15}$
13	Induktivität	—	Henry	1 Henry	$10^9$
14	Kapazität	—	Farad	1 Farad 1 Mikrofarad ( $\mu F$ ) 1 elektrostat. Einheit	$10^{-9}$ $10^{-15}$ $\frac{1}{9} \cdot 10^{-20}$

Die Gebrauchsmaße der magnetischen Größen stimmen mit den cgs-Einheiten überein.

Um den Wert einer der anderen Größen in einem ihrer Gebrauchsmaße zu finden, hat man das Ergebnis der im cgs-System ausgeführten Rechnung mit dem für dieses Gebrauchsmaß angegebenen Divisor zu dividieren.

## Anhang II.

### Rechnen mit Determinanten.

1. **Bildungsgesetz.** Eine Determinante ist eine abgekürzte Darstellung für eine in vorgeschriebener Weise gebildete Summe von Produkten, deren Faktoren die in der Determinante vorkommenden Glieder sind. Eine Determinante  $n$ ter Ordnung enthält  $n^2$  Glieder, die beliebig positiv oder negativ, reell oder komplex sein können, mit Einschluß des Wertes Null, aber ohne unendlich große Werte. Man schreibt die Glieder in wagerechten und senkrechten Reihen mit je  $n$  Posten hin, die einzeln durch Kommata getrennt sind. Wir bezeichnen für den allgemeinen Fall ein Glied nach seiner Stellung in der  $h$ ten wagerechten und der  $k$ ten senkrechten Reihe als  $a_{hk}$ . Die Produkte werden in der Art gebildet, daß man aus jeder wagerechten Reihe ein Glied als Faktor nimmt, aber so, daß alle Faktoren verschiedenen senkrechten Reihen angehören. Wir wollen dies so ausgeführt denken, daß wir die Glieder in der natürlichen Reihenfolge den wagerechten Reihen entnehmen. Dann haben also die ersten Indizes in jedem Produkte die natürliche Reihenfolge. Wenn wir dann für die zweiten Indizes alle möglichen Permutationen wählen, ergeben sich alle Posten der Determinante. Bei einer Determinante vierter Ordnung sind zwei derart gebildete Posten z. B.:

$$a_{14} \ a_{21} \ a_{33} \ a_{42} \quad \text{und} \quad a_{13} \ a_{21} \ a_{34} \ a_{42}.$$

Jeder Posten erhält das positive oder negative Vorzeichen, je nachdem, ob man die zweiten Indizes durch eine gerade oder eine ungerade Anzahl von Umstellungen ebenfalls in die natürliche Reihenfolge bringen kann. Man findet daher, daß der erste der obigen Posten positiv, der zweite negativ ist.

Man könnte auch alle Posten der Determinanten finden, wenn man die Faktoren nach ihren zweiten Indizes ordnete und die ersten permutierte. Daraus folgt, daß die Determinante ungeändert bleibt, wenn man ihre wagerechten und senkrechten Reihen gegeneinander vertauscht.

2. **Zerlegung in Unterdeterminanten.** Aus dem Bildungsgesetz folgt, daß alle diejenigen Posten, die ein bestimmtes Glied  $a_{hk}$  enthalten, nur Faktoren aus den Reihen haben, die nach Wegstreichen der  $h$ ten wagerechten und der  $k$ ten senkrechten Reihe übrig bleiben. Dieser Rest ist wieder eine Determinante; man gibt ihm das Vorzeichen  $(-1)^{h+k}$  und nennt ihn die Unterdeterminante  $\mathcal{A}_{hk}$  der Hauptdeterminante. Man erhält offenbar sämtliche Posten der Hauptdeterminante, wenn man die Produkte  $a_{hk} \mathcal{A}_{hk}$  für alle Werte von  $h$  von 1 bis  $n$  oder für alle Werte von  $k$  von 1 bis  $n$  bildet und alle addiert. Es ist also

$$\mathcal{A} = a_{h_1} \mathcal{A}_{h_1} + a_{h_2} \mathcal{A}_{h_2} + \dots + a_{h_n} \mathcal{A}_{h_n}.$$

3. **Zerlegung in eine Summe von Determinanten gleicher Ordnung.** Wenn man die Glieder einer wagerechten oder senkrechten Reihe in gleich viele Summanden zerlegt, so kann man die Determinante als Summe ebensovieler Summanden darstellen; so ist z. B.:

$$\begin{array}{c} a_{11}, a'_{12} + a''_{12}, a_{13} \\ a_{21}, a'_{22} + a''_{22}, a_{23} \\ a_{31}, a'_{32} + a''_{32}, a_{33} \end{array} \Big| = \begin{array}{c} a_{11}, a'_{12}, a_{13} \\ a_{21}, a'_{22}, a_{23} \\ a_{31}, a'_{32}, a_{33} \end{array} \Big| + \begin{array}{c} a_{11}, a''_{12}, a_{13} \\ a_{21}, a''_{22}, a_{23} \\ a_{31}, a''_{32}, a_{33} \end{array} \Big|$$

Hieraus ergibt sich auch, daß man Determinanten, bei denen alle wagerechten oder senkrechten Reihen mit Ausnahme einer übereinstimmen, addieren kann, indem man in der zugehörigen Reihe der Summendeterminante die Glieder der nicht übereinstimmenden Reihe addiert.

4. Vertauschen von parallelen Reihen. Durch eine solche Umstellung ändern offenbar zwei Indizes in jedem Produkt ihre Stellung, man hat eine Vertauschung mehr nötig als vorher, um die natürliche Reihenfolge wieder herzustellen, daher erhält jeder Posten und mit ihm die Determinante beim Vertauschen zweier parallelen Reihen das entgegengesetzte Vorzeichen.

5. Enthält eine Determinante zwei Reihen, deren Glieder bezüglich gleich sind, so ist sie gleich Null, weil sie nur so beim Vertauschen der beiden Reihen zugleich unverändert bleiben und das entgegengesetzte Vorzeichen annehmen kann.

6. Multiplikation oder Division mit einem Faktor. Fügt man den Gliedern irgend einer Reihe einen Faktor bei, so tritt dieser in jeden Posten der Determinante, also auch die ganze ein. Man kann daher auch einen allen Gliedern einer Reihe gemeinsamen Faktor vor die Determinante setzen. Daher hat auch eine Determinante den Wert Null, wenn sämtliche Glieder einer Reihe gleich Null sind.

7. Kann man aus den Gliedern einer senkrechten Reihe Posten ausscheiden, welche bezüglich den in derselben wagerechten Reihe stehenden Gliedern einer anderen senkrechten Reihe mit demselben Faktor proportional sind, so kann man die Posten der zuerst genannten Reihe gemäß den Sätzen in 3, 5, 6 streichen. Analoges gilt, wenn diese Beziehung zwischen den Gliedern zweier wagerechter Reihen besteht.

8. Die für uns wichtigste Anwendung dieser Sätze betrifft die Auflösung eines Systems von  $n$  linearen Gleichungen mit  $n$  Unbekannten  $x_1, x_2, \dots, x_n$ . Wenn dieses die Form hat:

$$\begin{aligned}
 y_1 &= a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \dots + a_{1n} x_n \\
 y_2 &= a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \dots + a_{2n} x_n \\
 &\dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\
 y_n &= a_{n1} x_1 + a_{n2} x_2 + \dots + a_{nn} x_n,
 \end{aligned}$$

so erhalten wir irgend eine der unbekanntes Größen, ausgedrückt durch die  $y_1, y_2 \dots y_n$ , indem wir eine Determinante bilden, in der die erste senkrechte Reihe aus den auf Null gebrachten Ausdrücken für die obigen Gleichungen besteht, z. B.:

$$y_n - a_{h1} x_1 - a_{h2} x_2 - \dots - a_{hn} x_n = 0.$$

Da alle diese Ausdrücke den Wert Null haben, so ist jede Determinante Null, die wir unter Verwendung der genannten Reihe hinschreiben.

Wir setzen in die noch freien  $n - 1$  senkrechten Reihen die Faktoren der auszuscheidenden Unbekanntes. Nach der Regel 7 kann man dann in der ersten Reihe die Posten, welche die auszuscheidenden Unbekanntes enthalten, streichen, und die erste Reihe enthält dann nur die Posten, welche die aufzusuchende Unbekannte enthalten und das freie Glied.

Hieraus ergibt sich für die Auflösung eines Systems nach einer Unbekanntes die Regel, daß man aus den auf Null gebrachten  $n$  Gleichungen

in die erste senkrechte Reihe einer Determinante  $n$  ter Ordnung alle die Teile aus jeder Gleichung setzt, welche die gesuchte Unbekannte und das freie Glied enthalten, in die folgenden senkrechten Reihen die Faktoren je einer der auszuscheidenden Unbekannten, mit den Vorzeichen, die sie in der Ausgangsgleichung haben.

Nach dieser Art ist die Determinante in § 136 gebildet.

Man kann die aufzusuchende Unbekannte mit dem freien Glied auch in die zu seiner Ordnungszahl gehörende senkrechte Reihe setzen und die Koeffizienten der anderen Unbekannten gleichfalls nach ihrer Ordnungszahl einreihen. Teilt man dann die Determinante nach den Faktoren der freien Glieder und dem Faktor der Unbekannten auf, so ist dieser die Hauptdeterminante des Systems, während jene die zu den freien Gliedern gehörenden Unterdeterminanten sind. Man erhält also Gleichungen von der Form

$$x_f = \frac{1}{\Delta} (y_1 \Delta_{1f} + y_2 \Delta_{2f} + \dots + y_n \Delta_{nf}).$$

Diese Rechnung, auf alle  $x_1$  bis  $x_n$  angewandt, ergibt ein System von  $n$  Gleichungen, in denen die  $x_h$  durch die  $y_h$  ausgedrückt sind, während in dem System, von dem wir ausgingen, umgekehrt die  $y_h$  durch die Größen  $x_h$  dargestellt waren. Diese Regel ist z. B. in § 51, 201 angewandt worden. Die Umwandlung aus der einen in die andere Form setzt voraus, daß  $\Delta$  von Null verschieden sei, was zutrifft, wenn die  $n$  Gleichungen voneinander unabhängig sind.

9. Ausrechnung einer Determinante. Wir gehen aus von der Determinante vierter Ordnung:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

Nach (2) zerfällt sie bei Bildung der Unterdeterminanten, z. B. nach den Gliedern der dritten senkrechten Reihe, in die Summe

$$\begin{aligned} \Delta = & a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{24} \\ a_{41} & a_{42} & a_{44} \end{vmatrix} - a_{23} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{14} \\ a_{31} & a_{32} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{44} \end{vmatrix} \\ & + a_{33} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{24} \\ a_{41} & a_{42} & a_{44} \end{vmatrix} - a_{43} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{34} \end{vmatrix} \end{aligned}$$

Hier sind also die Unterdeterminanten so hingeschrieben, wie sie nach Streichung der beiden Reihen bleiben, aus denen der vorangestellte Faktor entnommen ist, wobei sie das Vorzeichen nach der Regel unter (2) erhalten. Determinanten höherer Ordnung zerlegt man nach und nach in ähnlicher Weise, bis man auf solche dritter Ordnung gekommen ist. Eine Determinante dritter Ordnung zerfällt in sechs Produkte:

$$\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{vmatrix} = b_{11} b_{22} b_{33} + b_{12} b_{23} b_{31} + b_{13} b_{21} b_{32} - b_{11} b_{23} b_{32} - b_{12} b_{21} b_{33} - b_{13} b_{22} b_{31}$$

und man kann sich merken, daß ein Produkt positiv ist, wenn die Diagonale oder der Doppelzug, mit dem man die dem Produkt zugehörigen Faktoren durchstreicht, von links oben nach rechts unten geht, während es negativ ist, wenn dieser Zug von links unten nach rechts oben geht.

### Anhang III.

#### Linienintegrale von Funktionen einer komplexen Veränderlichen.

Integrationen bei physikalischen Aufgaben erstrecken sich über die Werte, welche eine reelle Veränderliche innerhalb des gegebenen Bereiches annimmt. Wir werden an Beispielen kennen lernen, daß es die Rechnungen sehr abkürzt, wenn man die reelle Veränderliche zur komplexen erweitert und die komplexe Veränderliche eine zweckmäßig gewählte Folge von Werten annehmen läßt, in welcher natürlich der reelle Anteil die durch die Aufgabe gegebene Folge reeller Werte nach wie vor durchlaufen muß.

Solche Integrale von Funktionen einer komplexen Veränderlichen über eine stetige Folge ihrer Werte haben allgemeine Eigenschaften, die nicht von der Form der Funktion abhängen. Die sonst erforderliche wirkliche Ausführung der Integration einer bestimmten Funktion wird dadurch zum Vorteil der Rechnung erspart.

Eine beliebige Funktion  $f(p)$  einer Veränderlichen  $p$  wird zur Funktion einer komplexen Veränderlichen, wenn man etwa  $p = x + iy$  setzt, wo  $x$  und  $y$  reelle Größen sind. Die Funktion  $f(x + iy)$  ist sowohl mit  $x$  als mit  $y$  veränderlich, sie unterscheidet sich aber von einer beliebigen Funktion der beiden Veränderlichen  $x$  und  $y$  dadurch, daß diese stets nur in der Verbindung  $x + iy$  vorkommen. So ist z. B.

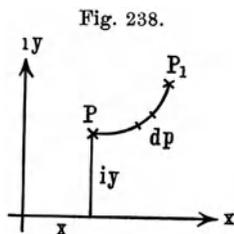
$$\log(x + iy) = \log \sqrt{x^2 + y^2} + i \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$$

als Funktion von  $x + iy$  zu bezeichnen, nicht aber etwa

$$\log(x + iy) + \log(x - iy) = \log(x^2 + y^2).$$

Man stellt die komplexe Zahl  $x + iy$  in bekannter Weise durch den Punkt  $P$  dar, welcher auf der Achse der reellen Werte die Koordinate  $x$ , auf der Achse der imaginären Werte die Koordinate  $y$  hat (Fig. 238). Jede komplexe Zahl ist durch einen solchen Punkt in der  $xy$ -Ebene darstellbar. Von dem Punkt  $P$  kann man zu einem anderen Punkt  $P_1$  übergehen, indem man  $x$  stetig bis  $x_1$  und  $y$  stetig bis  $y_1$  wachsen läßt, oder in geometrischer Darstellung durch einen Linienzug  $PP_1$  in der Ebene der komplexen Zahlen, der sich aus Linienelementen  $dp = dx + i dy$  zusammensetzt.

Eine Funktion  $f(p)$  hat für die verschiedenen Werte, die  $x$  und  $y$  an den einzelnen Stellen des Linienzuges besitzen, im allgemeinen verschiedene Werte. Macht man die Elemente  $dp$  hinreichend klein, so daß die Werte von  $f(p)$  für die einzelnen Werte, die  $x + iy$  innerhalb eines Elementes  $dp$  hat, als gleich angesehen werden können, und bildet dann für jedes Linienelement  $dp$  von  $P$  bis  $P_1$



das Produkt  $f(p)dp$ , so heißt die Summe aller dieser Produkte das Integral von  $f(p)$  über den Linienzug  $PP_1$ .

Von besonderer Bedeutung sind Integrale solcher Funktionen über geschlossene Linienzüge. Sie haben in der Form viel Ähnlichkeit mit dem in § 16 besprochenen Linienintegral eines Vektors. Sie unterscheiden sich darin, daß es sich bei dem Linienintegral eines Vektors um einen wirklichen räumlichen Weg, bei dem Linienintegral der komplexen Funktion dagegen nur um die als Linie gedachte stetige Aufeinanderfolge von Werten  $x$  und  $y$  handelt. Ferner ist bei dem Linienintegral des Vektors das Produkt aus der in die Richtung des Linienelements fallenden Komponente des Vektors und der Länge des Elements zu bilden, während im anderen Falle das Produkt aus dem Funktionswert und dem Zuwachs der komplexen Veränderlichen einzusetzen ist.

Diese Unterschiede beziehen sich aber nur auf den Aufbau des Integranden und auf die in einem Falle reale, im anderen Falle nur symbolische räumliche Darstellung. Sie betreffen dagegen nicht die Überlegungen, die an Fig. 20 anknüpfen, und die ergeben, daß das Linienintegral über eine bestimmte geschlossene Linie gleich der Summe aller Linienintegrale über die Umrandung

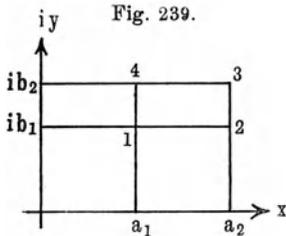


Fig. 239.

der Flächenteile ist, in welche man eine beliebige, durch die geschlossene Linie berandete Fläche teilen kann. Im vorliegenden Falle ist die einzige mögliche Fläche die Ebene der komplexen Größe  $x + iy$ . Die Untersuchung des Linienintegrals über einen beliebigen Weg fußt also auf der Feststellung, welches sein Wert beim Umlauf um ein kleines Rechteck in der  $xy$ -Ebene ist. Man hat dabei nach und nach alle die Wertepaare, welche die Größe  $x$  und  $y$  für die verschiedenen Begrenzungslinien dieses Rechtecks annehmen, in  $f(x + iy)$  einzusetzen und die Summe der Produkte  $f(x + iy)d(x + iy)$  zu bilden.

Für das Rechteck 1 2 3 4 1 (Fig. 239) ergibt dies folgende Summe:

$$S = \int_{x=a_1}^{x=a_2} f(x+ib_1)dx + \int_{y=b_1}^{y=b_2} f(a_2+iy)d(iy) - \int_{x=a_1}^{x=a_2} f(x+ib_2)dx - \int_{y=b_1}^{y=b_2} f(a_1+iy)d(iy)$$

$$= \int_{y=b_1}^{y=b_2} d(iy)(f(a_2+iy) - f(a_1+iy)) - \int_{x=a_1}^{x=a_2} dx(f(x+ib_2) - f(x+ib_1)) dx.$$

Machen wir das Rechteck sehr klein, so daß  $a_2 = a_1 + dx$ ,  $b_2 = b_1 + dy$  ist, so verkümmern die Integrale bis auf ihre Elemente. Die eingeklammerten Größen lassen sich nach dem Taylorschen Satze vereinfachen, in derselben Weise, wie dies in § 16 für den anderen Fall dargelegt worden ist. Man erhält so

$$S = \left( \frac{\partial f}{\partial x} + i \frac{\partial f}{\partial y} \right) dx idy.$$

Für eine Funktion der Veränderlichen  $x + iy = p$  ist aber

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{df}{dp} \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{df}{dp}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{df}{dp} \frac{\partial p}{\partial y} = i \frac{df}{dp}.$$

Tragen wir diese Beziehungen in die Gleichung für  $S$  ein, so ergibt sich  $S = 0$ .

Diese Ableitung ist offenbar daran gebunden, daß die Differentialquotienten der Funktion  $f$  für alle innerhalb der gedachten Fläche vorkommenden Wertepaare  $x$  und  $y$  angegeben werden können, daß die Funktion also dort keine Unstetigkeitspunkte hat.

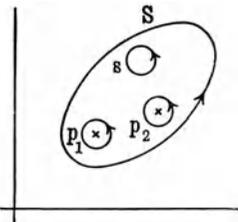
Es folgt hieraus, daß das Linienintegral einer beliebigen Funktion der komplexen Variablen  $p = x + iy$  über eine geschlossene Folge von Werten  $x$  und  $y$  den Wert Null hat, wenn die Linie dieser geschlossenen Folge in der Ebene der komplexen Zahlen keinen Punkt umschließt, in dem die Funktion oder ihre ersten Ableitungen unstetig oder unendlich werden.

Es folgt weiter, daß man ein geschlossenes Integrationsgebiet beliebig vergrößern oder verkleinern kann, ohne den Wert des Linienintegrals zu ändern, sofern in den hinzutretenden oder fortfallenden Teilen keine Unstetigkeitsstellen vorkommen.

Mit der Feststellung, daß eine Funktion einer komplexen Veränderlichen in einem bestimmten Gebiet nirgendwo unstetig wird, ist daher schon bewiesen, daß das Linienintegral dieser Funktion über eine geschlossene Folge von Werten der Veränderlichen Null ist, ohne daß es der Ausführung der Integration bedarf.

Sind in dem Gebiete Unstetigkeitspunkte der Funktion  $f(x + iy)$  vorhanden, so ist das Integral also in der Regel von Null verschieden. Auch in diesem Falle bietet die Anwendung des bisher abgeleiteten Satzes große Erleichterungen, indem er die Ausführung der Integration auf die Umgebung einzelner Punkte beschränkt. Angenommen, es solle das Linienintegral der Funktion  $f(x + iy)$  für die Linie  $S$  (Fig. 240) ermittelt werden, welche die Unstetigkeitspunkte  $p_1$  und  $p_2$  einschließt. Wir zerlegen die von  $S$  berandete Fläche in Teile. Alle Teile, welche wie die durch  $s$  begrenzte Fläche keine Unstetigkeitspunkte erhalten, liefern keinen Beitrag; es bleiben nur die Flächen übrig, in denen die singulären Punkte liegen.

Fig. 240.



Die Integration beschränkt sich daher auf geschlossene Linien beliebiger Form, welche die einzelnen singulären Punkte umgeben, und zwar unter Übergang zum Grenzfall, daß eine solche Linie enger und enger um den Punkt zusammengezogen wird.

Man kann den Wert des Linienintegrals um einen Unstetigkeitspunkt nur von Fall zu Fall darstellen, zur Erläuterung der grundsätzlichen Methode besprechen wir folgendes Beispiel:

Bekannt ist, daß

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{du}{1+u^2} = \left[ \operatorname{arctg} u \right]_{-\infty}^{+\infty} = \pi$$

ist. Um dies bestimmte Integral ohne eigentliche Integration der Funktion  $\frac{1}{1+u^2}$  zu ermitteln, setzen wir  $u = x + iy$ . Wir schreiben folgenden

geschlossenen Integrationsweg vor. Von  $-A$  bis  $+A$  durch alle reellen Werte von  $x$ , dann von  $+A$  bis  $-A$  auf einem Halbkreis, auf dem also  $x = A \cos \varphi$  und  $y = A \sin \varphi$  ist. Läuft  $\varphi$  von 0 bis  $\pi$ , so kommt man nach  $-A$  zurück, der „Weg“ der Veränderlichen  $u = x + iy$  ist also geschlossen.  $A$  wird im Grenzfall beliebig groß genommen. In dem umschlossenen Teil der Zahlenebene liegt ein Unstetigkeitspunkt, nämlich  $u = +i$ ; der andere Unstetigkeitspunkt  $u = -i$  liegt außerhalb der berandeten Fläche; in allen übrigen Punkten, auch wenn  $A$  beliebig groß ist, ist die Funktion  $f(u) = 1:1 + u^2$  endlich und stetig. Von dem zu berechnenden Integral unterscheidet sich das über den komplexen Weg durch das Integral über den Kreisbogen. Dort ist aber  $u = A e^{i\varphi}$ ,  $du = iA e^{i\varphi} d\varphi$ , also ist für beliebig große  $A$ :

$$\int \frac{du}{1 + u^2} = \frac{1}{A} \int_{\varphi=0}^{\pi} e^{-i\varphi} d\varphi.$$

Da dieser Anteil Null wird für  $A = \infty$ , so wird das Integral über die geschlossene Linie gleich dem über die reellen Werte  $x$  von  $-\infty$  bis  $+\infty$ .

Das gesuchte Integral ist daher gleich dem Linienintegral über eine den Punkt  $u = +i$  beliebig nahe umgebende Linie. Wir wählen als solche einen Kreis. Für einen Punkt auf diesem Kreise, welcher den Punkt  $u = i$  mit dem Radius  $r$  umgibt, ist

$$u = i + r e^{i\vartheta},$$

wobei  $\vartheta$  von 0 bis  $2\pi$  läuft. Da nur  $\vartheta$  veränderlich ist, also

$$du = i r e^{i\vartheta} d\vartheta,$$

so ist das Element des Integrals

$$\frac{du}{1 + u^2} = \frac{i r e^{i\vartheta} d\vartheta}{1 + (i + r e^{i\vartheta})^2} = \frac{i d\vartheta}{2i + r e^{i\vartheta}}.$$

Geht man zur Grenze  $r = 0$  über und führt die Integration aus, so ergibt sich

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\vartheta}{2} = \pi.$$

Man kann auch Integrationswege wählen, welche mehr als einen Unstetigkeitspunkt umschließen. Um in allen Fällen für solche Wege, die stets den Beitrag Null erbringen, und solche, die in der Regel einen von Null verschiedenen Beitrag geben, ein anschauliches Unterscheidungsmittel zu haben, legt man von einem Unstetigkeitspunkt zum anderen Schlitze, sozusagen Gräben, die als Weghindernisse gedacht werden. Dann ist jedes Linienintegral Null, dessen Weg man, ohne einen solchen Graben zu überschreiten, auf eine Linie um eine beliebig kleine Fläche verkürzen kann.

**Anhang IV.**Werte von  $\log^{10} J_0(iu)$ .

$u$	0	2	4	6	8
0	0,0000	0,0043	0,0172	0,0382	0,0669
1	0,1025	0,1442	0,1913	0,2430	0,2988
2	0,3579	0,4198	0,4842	0,5506	0,6188
3	0,6885	0,7595	0,8315	0,9046	0,9785
4	1,0531	1,1285	1,2044	1,2809	1,3578
5	1,4352	1,5130	1,5911	1,6697	1,7485

$u$	6	7	8	9	10
$\log^{10} J_0(iu)$	1,8276	2,2269	2,6310	3,0389	3,4496

$u$	12	14	16	18	20
$\log^{10} J_0(iu)$	4,2767	5,1114	5,9507	6,7937	7,6390

Die Funktion verläuft zwischen  $u = 8$  und  $u = 20$  fast linear.**Anhang V.**Dielektrizitätskonstante  $\epsilon$ .

Stoff	$\epsilon$	Stoff	$\epsilon$
Glas . . . . .	4 bis 7	Guttapercha für Seekabel	3,5
Glimmer . . . . .	4 bis 8	Petroleum . . . . .	2,2
Porzellan . . . . .	4,4	Rizinusöl . . . . .	4,7
Quarz . . . . .	4,5	Seewasser . . . . .	80
Hartgummi . . . . .	2 bis 3	Trockner Boden . . . . .	4
Schwefel . . . . .	2 bis 4		

**Anhang VI.**Spezifische Leitfähigkeit  $\sigma$  einiger Stoffe  
in elektromagnetischem Maße.

Stoff	$\sigma$	$1/\sigma$	
Kupferdraht für Kabel . . . . .	59 bis $56 \cdot 10^{-5}$	1700 bis 1800	Normalzahl in Verträgen 1750
Hartkupferdraht für Freileitungen .	$56 \cdot 10^{-5}$	1800	
Bronzedraht " " .	54 bis $52,7 \cdot 10^{-5}$	1850 bis 1900	} 3 bis 5 mm stark
Eisendraht " " .	$7,58 \cdot 10^{-5}$	13 500	
Aluminiumdraht " " .	—	—	
rein (Festigkeit 16 bis 18 kg/mm <sup>2</sup> )	$36 \cdot 10^{-5}$	2800	} nach M. Abraham
legiert " 30 " 33 " .	$29 \cdot 10^{-5}$	3500	
Seewasser . . . . .	$10^{-11}$	—	
Trockner Boden . . . . .	$10^{-15}$	—	} vgl. § 323
Seewasser . . . . .	$5 \cdot 10^{-11}$	—	

Der Widerstand eines Leiters von  $l$  cm Länge und  $F$  cm<sup>2</sup> Querschnitt ist gleich  $l/\sigma F$  (cgs) =  $l/10^9 \sigma F$  Ohm.

Der Widerstand eines Leiters von 1 mm<sup>2</sup> Querschnitt in Ohm/km ist gleich  $1/100$  des für  $1/\sigma$  angegebenen Wertes, also z. B. für Kupfer 17 bis 18 Ohm/km.

## Anhang VII.

### Exponentialfunktionen.

#### 1. Werte von $e^{-x}$ von $x = 0$ bis $x = 2,09$ .

Nach Strecker, Hilfsbuch für die Elektrotechnik, Berlin 1912.

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,	9900	9802	9704	9608	9512	9418	9324	9231	9139
0,1	9048	8958	8869	8781	8694	8607	8521	8437	8353	8270
0,2	8187	8106	8025	7945	7866	7788	7711	7634	7558	7483
0,3	7408	7334	7261	7189	7118	7047	6977	6907	6839	6771
0,4	6703	6637	6570	6505	6440	6376	6313	6250	6188	6126
0,5	6065	6005	5945	5886	5827	5769	5712	5655	5599	5543
0,6	5488	5434	5379	5326	5273	5220	5169	5117	5066	5016
0,7	4966	4916	4868	4819	4771	4724	4677	4630	4584	4538
0,8	4493	4449	4404	4360	4317	4274	4232	4190	4148	4107
0,9	4066	4025	3985	3946	3906	3867	3829	3791	3753	3716
1,0	3679	3642	3606	3570	3534	3499	3465	3430	3396	3362
1,1	3329	3296	3263	3230	3198	3166	3135	3104	3073	3042
1,2	3012	2982	2952	2923	2894	2865	2837	2808	2780	2753
1,3	2725	2698	2671	2645	2618	2592	2567	2541	2516	2491
1,4	2466	2441	2417	2393	2369	2346	2322	2299	2276	2254
1,5	2231	2209	2187	2165	2144	2122	2101	2080	2060	2039
1,6	2019	1999	1979	1959	1940	1920	1901	1882	1864	1845
1,7	1827	1809	1791	1773	1755	1738	1720	1703	1686	1670
1,8	1653	1637	1620	1604	1588	1572	1557	1541	1526	1511
1,9	1496	1481	1466	1451	1437	1423	1409	1395	1381	1367
2,0	1353	1340	1327	1313	1300	1287	1275	1262	1249	1237

Für höhere Werte von  $x$  dient nachstehende Tabelle von  $e^x$ , aus der man mittels des Rechenschiebers die Werte von  $e^{-x}$  mit größerer Genauigkeit finden kann, als wenn sie mit vier Ziffern, einschließlich der Nullen, tabelliert wären.

#### 2. Werte von $e^{+x}$ von $x = 2,0$ bis $x = 8,9$ .

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	7,389	8,166	9,023	9,977	11,02	12,18	13,46	14,85	16,44	18,17
3	20,09	22,20	24,53	27,11	29,96	33,12	36,60	40,44	44,70	49,40
4	54,60	60,34	66,69	73,70	81,45	90,01	99,48	110,1	121,5	134,3
5	148,4	164,0	183,4	200,3	223,9	244,7	270,4	298,8	330,3	365,1
6	403,4	445,8	492,7	544,5	602,1	665,1	735,0	812,3	897,8	992,0
7	1097	1212	1339	1480	1636	1808	1998	2208	2440	2698
8	2981	3294	3641	4024	4447	4915	5432	6002	6633	7331

**Anhang VIII.**

## Elektrische Eigenschaften von Leitungen.

Nr. 1 bis 5 nach Angaben des Telegraphentechnischen Reichsamts.

## 1. Bronze- und Hartkupferleitungen ohne Spulen.

Stärke in mm	$R$ Ohm/km	$K$ $\mu\text{F}/\text{km}$	$L$ m H/km	$\beta$		Bemerkungen
				Betrag	Winkel	
2,0	12,0	0,0054	2,20	775	$-23,1^{\circ}$	Bei $\omega = 5000$ und $G = 0,5 \mu\text{S}$
2,5	7,7	0,0057	2,10	674	$-17,5^{\circ}$	
3,0	5,44	0,0060	2,04	614	$-13,8^{\circ}$	
4,0	3,16	0,0064	1,85	560	$-8,6^{\circ}$	

Bei Vierern hat der Wellenwiderstand etwa den halben Betrag, die spezifische Dämpfung den gleichen Betrag wie bei der Stammleitung.

## 2. Vertragskabel mit Papierisolation ohne Spulen.

Drahtstärke mm	$R$ Ohm/km	$K$ $\mu\text{F}/\text{km}$	$\beta$ Betrag	$\beta$ für 1 km	Bemerkungen
0,6	130	0,037	840	0,110	Induktivität etwa 0,6 m H/km Werte für $\beta$ und $\beta$ bei $\omega = 5000$
0,8	74	0,037	630	0,075	
0,9	56	0,037	560	0,069	
1,0	46	0,038	494	0,063	

## 3. Vertragseigenschaften des Deutschen Normal-Fernkabels.

Nach dem Pflichtenheft.

Stärke	$R$ Ohm/km	$K$ $\mu\text{F}/\text{km}$	$G$ $\mu\text{S}$	$L$ m H/km	$\beta$ für 1 km	$\omega_0$	Bemerkungen
Stamm 0,9 mm	57,6	0,035	0,80	0,100	0,0210	16 850	$L$ ist die Induk- tivität d.Spulen, die 2 km Ab- stand haben
Vierer 0,9 mm	28,8	0,060	1,4	0,035	0,0210	21 800	
Stamm 1,4 mm	23,8	0,037	0,85	0,095	0,0105	16 600	
Vierer 1,4 mm	11,9	0,064	1,5	0,035	0,0105	21 000	

Die erreichten Werte von  $\beta$  sind etwa 15 v. H. geringer.

## 4. Freileitungen mit Spulen von 0,2 H und 9 Ohm in 10 km Abstand.

Art	$\sqrt{L/K}$ Ohm	$\beta$ für 1 km	$\omega_0$
Bronze 3 mm . . . .	1900	0,00223	17 400
4 mm . . . .	1900	0,00157	16 900
Eisen 3 mm . . . .	2210	0,0132	15 700
4 mm . . . .	2170	0,0104	14 700

## 5. Pupin-Stadt-kabel mit Spulen von 0,1 H in 3 km Abstand.

Drahtstärke	$R$ Ohm/km	$K$ $\mu F/km$	$\sqrt{L/K}$ Ohm	$\beta$ für 1 km	$\omega_0$
1,2	31,0	0,037	950	0,0175	19 000
1,5	19,8	0,038	935	0,0114	18 700
2,0	11,1	0,040	910	0,0073	18 300

## 6. Beispiele neuerer Krarup-Seekabel.

(Sternverseilte Vierer, Kupferleiter aus Fassondrähten.)

Jahr	Länge km	Leiter- stärke, mm	Be- wicklung	$R$ Ohm/km	$L$ mH/km	$\beta$ $\mu F/km$	$\beta$ für 1 km	$ 3 $ Ohm	$F'$ mm <sup>2</sup>
1920	169,5	2,15	Eisendraht 1 × 0,2 mm	11,1	10,0	0,040	0,0123	438 bis 460	117
1922	175,5	2,10	Silicium- eisendraht 1 × 0,3 mm	12,88	12,26	0,043	0,0121	507 bis 553	102
1923	156,5	2,10	desgl.	12,53	12,6	0,044	0,0120	504 bis 562	100

Elektrische Werte der Stammleitungen für  $\omega = 5000$ . Die Werte des Wellenwiderstandes sind bei den einzelnen Doppelleitungen etwas verschieden. Die Viererleitungen haben ungefähr gleiches Dämpfungsmaß und einen halb so großen Wellenwiderstand wie die Stammleitungen. Mit  $F'$  ist nach § 55 die auf einen Vierer entfallende Fläche im Querschnitt der Kabelseele angegeben.

## 7. Beispiele von Guttapercha-Telegraphenkabeln.

Nach Malcolm.

Jahr	Bezeichnung	Länge in Seemeilen	Kupfer	$Kl$	$Rl$	$KRl^2$
			Guttapercha	$\mu F$	Ohm	Sekunden
1894	Anglo-American	1848	650/400	776	3 388	2,63
1902	Fanning-Fidschi	2043	220/180	746	10 936	8,15
1903	Borkum-Fayal	1916	400/280	774	5 218	4,04
1903	San Francisco- Honolulu	2276	500/315	875	4 975	4,35

## Anmerkungen und Literaturangaben.

- 1) Zu S. 2. Über Maßsysteme, besonders das absolute, s. F. Kohlrausch, Lehrbuch der praktischen Physik, 13. Aufl., Leipzig 1921, S. 651.
- 2) " " 52. A. Dearlove, Tables to find the working speed of submarine cables, London bei Waterlow & Sons. Ohne Jahr (nicht mehr im Buchhandel).
- Die Tabellen beruhen auf folgenden Annahmen: 1. Die Kapazität eines Kabels mit gleichen Gewichten an Kupfer und Guttapercha beträgt  $0,355 \mu F$  für eine Seemeile. 2. Der Leitungswiderstand in Ohm für 1 Seemeile ist gleich 1124 durch das Kupfergewicht in engl. Pfunden für 1 Seemeile. 3. Die Zahl der in einer Minute zu übermittelnden Worte zu 5 Buchstaben (Einfach) beträgt 300 durch das Produkt aus Gesamtwiderstand und Gesamtkapazität in Ohm  $\times$  Farad.
- 3) " " 64. F. Breisig, E. T. Z. 1898, S. 774.
- 4) " " 66. Maxwell, Elektrizität und Magnetismus, übersetzt von Weinstein, Berlin 1893, 1, 106.
- 5) " " 83. H. Zielinski, E. T. Z. 1896, S. 36.
- 6) " " 116. Graetz, Handbuch der Elektrizität und des Magnetismus, Leipzig 1920, 4, 229.
- 7) " " 116. R. Gans, Phys. Zeitschr. 1910, S. 988.
- 8) " " 118. G. Kapp, Dynamomaschinen für Gleich- und Wechselstrom, Berlin 1904, S. 105.
- 9) " " 119. R. Gans, E. T. Z. 1907, S. 527.
- 10) " " 125. K. Strecker, Hilfsbuch für die Elektrotechnik, 8. Aufl., Berlin 1912, S. 250.
- 11) " " 152. W. Christiani, E. T. Z. 1891, S. 653, 685.
- 12) " " 152. C. Grawinkel, E. T. Z. 1891, S. 653.
- 13) " " 153. Über systematische Leitungskreuzungen zum Zweck des Induktionsschutzes siehe W. Pinkert, Tel. Fernspr. Techn., 3. Sonderheft 1919, S. 108.
- 14) " " 155. Maxwell, a. a. O., 2, 398; E. Orlich, E. T. Z. 1908, S. 310.
- 15) " " 163. Über die Frage der Induktivität von Mehrfachleitungssystemen unter Zurückführung auf einzelne geerdete Leitungen ist im Anschluß an eine Anregung von F. Breisig, E. T. Z. 1902, S. 1137, eine Diskussion entstanden, die unter Abänderung von Sätzen eines Ausschusses, E. T. Z. 1905, S. 460, 632, zu einer von H. Diesselhorst und F. Emde auf Leiterschleifen begründeten Fassung, E. T. Z., S. 1909, S. 1155, geführt hat.
- 16) " " 175. A. Kunert, Tel. Fernspr. Techn. 1920, 8. Jahrg., S. 191; Massin, Ann. télégr. 1890, 17, 506.
- 17) " " 194. A. Vaschy, Ann. télégr. 1888, 15, 289, löst diese Aufgabe für Kreise, in denen der stationäre Wert nicht erreicht wird.
- 18) " " 196. Diese Schaltung ist zuerst von W. H. Preece, Ann. télégr. 1888, 15, 67, beschrieben worden. Der Name Maxwellerde ist in Deutschland gebräuchlich, in England heißt die Schaltung shunted condenser.

- 19) Zu S. 199. Godfroy, Ann. télégr. 1891, **18**, 523.
- 20) " " 202. K. W. Wagner, Elektromagnetische Ausgleichvorgänge in Freileitungen und Kabeln, Leipzig 1908, E. T. Z. 1908, S. 707. — Tel. Fernspr. Techn., 1. Sonderheft 1919, S. 1. — Anwendung z. B. F. Breisig, Zeitschr. Fernmeldetechnik 1920, S. 146.
- 21) " " 203. O. Heaviside, Electromagnetic Theory, London 1899, **2**, 127. — K. W. Wagner, Arch. El. 1916, **4**, 160. — Frühere Anwendungen der Heavisideschen Formel durch H. W. Malcolm, Electrician 1912, **68**, und später, A. Kunert, Tel. Fernspr. Techn. 1915, **4**. Jahrg., S. 73. — Verallgemeinerung durch W. Deutsch, Arch. El. 1918, **6**, 225.
- 22) " " 224. M. Wien, Phys. Zeitschr. 1903, S. 76. — A. Franke, E. T. Z. 1906, S. 1004. — F. Breisig, E. T. Z. 1916, S. 633.
- 23) " " 228. W. Bjercknes, Ann. Phys. Chem. 1895, **55**, 137.
- 24) " " 234. M. Wien, Ann. Phys. 1902, **8**, 692.
- 25) " " 235. Beispiele anderer Lösungen: P. Drude, Ann. Phys. 1904, **13**, 692. — F. Kiebitz, Ann. Phys. 1913, **40**, 138.
- 26) " " 242. J. Zenneck, Lehrbuch der drahtlosen Telegraphie, 2. Aufl., Stuttgart 1913, S. 168.
- 27) " " 243. F. Breisig, Sammelheft I d. Ausschusses f. techn. Mech., Berlin 1919, S. 35.
- 28) " " 245. M. Wien, Phys. Zeitschr. 1906, S. 871. — H. Rendahl, ebenda 1908, S. 203. — Graf Arco, E. T. Z. 1909, S. 535. — E. Nesper, ebenda 1914, S. 322 (zusammenfassend).
- 29) " " 247. Devaux-Charbonnel, Lum. él., Sér. 2, 1908, **3**, 328.
- 30) " " 257. R. Carson, Trans. Am. I. El. Eng. 1919, S. 345.
- 31) " " 257. P. Janet. Écl. él. 1897, **13**, 529.
- 32) " " 258. Über die Wechselstrommeßbrücke: M. Wien, Wied. Ann. 1891, **44**, 689. — E. Orlich, E. T. Z. 1903, S. 502. — Eine bequeme Form der Meßbrücke von F. Dolezalek (Siemens u. Halske), E. T. Z. 1904, S. 152; 1905, S. 390.
- 33) " " 260. K. W. Wagner, E. T. Z. 1911, S. 1001. — Anwendungen K. W. Wagner, ebenda 1912, S. 635. — F. Fischer, Tel. Fernspr. Techn. 1921, 10. Jahrg., S. 137. — H. Jordan, E. T. Z. 1922, S. 10.
- 34) " " 261. A. Franke, E. T. Z. 1891, S. 448. — A. Ebeling, ebenda 1913, S. 433.
- 35) " " 263. Ch. V. Drysdale, Electrician 1909, **62**, 723.
- 36) " " 264. A. Larsen, E. T. Z. 1910, S. 1031.
- 37) " " 265. P. O. Pedersen, Electrician 1919, **83**, 523.
- 38) " " 267. H. Jordan, E. T. Z. 1911, S. 127.
- 39) " " 267. K. W. Wagner, Phys. Zeitschr. 1914, S. 371.
- 40) " " 274. G. Kapp, E. T. Z. 1891, S. 451.
- 41) " " 274. A. Münch, E. T. Z. 1895, S. 260.
- 42) " " 275. F. Breisig, E. T. Z. 1911, S. 558.
- 43) " " 277. A. Franke, E. T. Z. 1891, S. 451.
- 44) " " 277. Über Ausgleichsrechnungen s. Kohlrausch, a. a. O., S. 10.
- 45) " " 280. S. P. Thompson, Der Elektromagnet, übers. von C. Grawinkel, Halle 1894, S. 261. — V. Wietlisbach, Handbuch der Telephonie, Wien, Pest, Leipzig 1899, S. 306. — H. Poincaré, Ecl. él. 1907, **50**, 221. — A. E. Kennelly, Journ. tél. 1922, S. 244. — K. W. Wagner, E. T. Z. 1911, S. 80; hieraus ist Kurve  $\alpha$  in Fig. 167 entnommen. — H. Carsten, Phys. Zeitschr. 1921, S. 501 (stark abweichende Kennlinie).
- 46) " " 291. W. Hahnemann u. H. Hecht, Phys. Zeitschr. 1919, S. 104.
- 47) " " 294. O. Brauns, Tel. Fernspr. Techn. 1919, 8. Jahrg., S. 70.
- 48) " " 296. Ältere Literatur: F. Schrottko, E. T. Z. 1907, S. 685. — O. Brauns, ebenda 1908, S. 377. — Neuere: O. Brauns, Tel. Fernspr. Techn. 1919, 8. Jahrg., S. 61. — W. Lienemann, ebenda, S. 173.
- 49) " " 309. K. W. Wagner, E. T. Z. 1911, S. 258.

- 50) Zu S. 309. Siehe Anm. 49) und K. W. Wagner, Tel. Fernspr. Techn., 1. Sonderheft 1919, S. 29.
- 51) „ „ 310. H. Poincaré, Ecl. él. 1904, **40**, 121. — K. W. Wagner, E. T. Z. 1910, S. 163.
- 52) „ „ 310. A. Vaschy, Ann. télégr. 1888, **15**, 511.
- 53) „ „ 312. W. Deutsch, Zeitschr. d. Ver. deutsch. Ing. 1914, **58**, 568. — F. Breisig, E. T. Z. 1915, S. 521. — H. Wigge, Zeitschr. techn. Phys. 1921, S. 302.
- 54) „ „ 326. K. W. Wagner, Tel. Fernspr. Techn., 1. Sonderheft 1919, S. 30.
- 55) „ „ 331. E. Jahnke u. Emde, Funktionentafeln, Leipzig und Berlin 1909. — Smithsonian Mathematical Tables, Washington.
- 56) „ „ 342. B. S. Cohen, Electrician 1908, **60**, 983, hebt dies besonders hervor gegenüber einer in England damals anscheinend weit verbreiteten Meinung. Über die Bedeutung der Ableitung mit Kabeln mit induktiver Belastung s. § 274.
- 57) „ „ 342. Devaux-Charbonnel, Lum. él., Sér. 2, 1908, **3**, 323. — Cohen u. Shepherd, Electrician 1907, **59**, 182. — F. Breisig, Verh. d. Deutsch. Phys. Ges. 1910, S. 184. — K. W. Wagner, Phys. Zeitschr. 1910, S. 1122. — Ulf. Meyer, Tel. Fernspr. Techn. 1921, 10. Jahrg., S. 22. — Über die akustischen und physiologischen Grundlagen findet sich eine Zusammenstellung der Arbeiten von Stumpf bei K. W. Wagner, E. T. Z. 1923, S. 2. — J. B. Crandall u. D. Mc Kenzie, El. Communication, New York 1922, 1, Nr. 1, S. 34. — H. Fletcher, ebenda, S. 41. — R. L. Wegel, ebenda, Nr. 2, S. 43. — Zur Frage des Verzerrungsmaßes vgl. außer dem vorhin angeführten Aufsatz des Verfassers H. Jordan, E. T. Z. 1916, S. 31.
- 58) „ „ 344. A. B. Clark, El. Communication, New York 1923, 1, Nr. 3, S. 35.
- 59) „ „ 348. F. Lüschen, Verh. d. Deutsch. Phys. Ges. 1914, S. 245; E. T. Z. 1915, S. 138.
- 60) „ „ 354. Diesen Satz hat auf einem anderen Wege A. Franke, E. T. Z. 1891, S. 461, aufgestellt.
- 61) „ „ 358. C. R., Conf. intern. des techn., Paris 1910, S. 100. — F. Lüschen, E. T. Z. 1911, S. 390; Electrician 1900, **66**, 180. — Den Wirkungsgrad schlagen als Grundlage des Übertragungsmaßes vor L. Schultze, Arch. El. 1917, S. 73. — A. Poulsen, E. T. Z. 1923, S. 589. — Über die Entwicklung des Übertragungsmaßes F. Breisig, Das Fernkabel 1923, Heft 3, S. 12; E. T. Z. 1924, S. 74.
- 62) „ „ 362. F. Breisig, E. T. Z. 1908, S. 1216. — G. di Pirro, Lum. él., Sér. 2, 1909, **7**, 227.
- 63) „ „ 363. K. W. Wagner u. K. Küpfmüller, Arch. El. 1921, S. 461.
- 64) „ „ 373. M. H. Pleijel, Lum. él., Sér. 2, 1910, **11**, 259. — R. Holm, Arch. El. 1917, S. 113; 1920, S. 371. — H. Salinger, Tel. Fernspr. Techn. 1922, 11. Jahrg., S. 114.
- 65) „ „ 376. K. W. Wagner, Arch. El. 1915, S. 315, mit sehr vollständiger Angabe der älteren Literatur. — Derselbe, ebenda 1919, S. 61. — F. Lüschen u. G. Krause, Wissenschaftl. Veröffentl. a. d. Siemens-Konzern 1921, 1, Heft 3, S. 1. — H. Riegger, ebenda, S. 126; 1923, **3**, Heft 1, S. 190. — Vgl. Anm. 79).
- 66) „ „ 384. Electrician 1905, **54**, 740.
- 67) „ „ 385. F. Breisig, Verh. d. Deutsch. Phys. Ges. 1910, S. 184. — K. W. Wagner, Phys. Zeitschr. 1910, S. 1122.
- 68) „ „ 392. H. G. Möller, Die Elektronenröhren, 2. Aufl., Braunschweig 1922, S. 15. — J. Langmuir, Phys. Zeitschr. 1914, S. 350.
- 69) „ „ 393. W. Schottky, Arch. El. 1919, S. 3.
- 70) „ „ 397. A. Franke, E. T. Z. 1891, S. 459. — Die Angabe der Meßergebnisse in der Form des Leerlauf- und Kurzschlußwiderstandes scheint zuerst bei F. Breisig, E. T. Z. 1899, S. 194, gebraucht worden zu sein.

- 71) Zu S. 402. H. Jordan, Tel. Fernspr. Techn. 1919, 8. Jahrg., S. 17, gibt unter Hinweis auf einen Atlas von A. E. Kennelly Linientafeln für hyperbolische Funktionen, darunter auch für  $\mathfrak{E}g\gamma l$ . — Fluchtlinientafel von Ulf Meyer, E. T. Z. 1921, S. 1226.
- 72) „ „ 406. O. B. Blackwell u. G. A. Anderegg, Am. Pat. 1 064 433 (1913). — S. A. Pollock, Post-Off. El. Eng. Journ., April 1914, S. 41.
- 73) „ „ 407. A. Ebeling, E. T. Z. 1921, S. 875. — K. Dohmen u. K. Küpfmüller in der Druckschrift „Das Fernsprechen im Weitverkehr“, Berlin 1923, S. 77.
- 74) „ „ 407. L. Lichtenstein, E. T. Z. 1920, S. 188. — F. Breisig, ebenda 1921, S. 933. — K. Küpfmüller, Arch. El. 1923, S. 160.
- 75) „ „ 412. F. Breisig, E. T. Z. 1921, S. 936. — K. Küpfmüller, ebenda, S. 1482.
- 76) „ „ 412. K. Küpfmüller, Arch. El. 1923, S. 175.
- 77) „ „ 414. K. W. Wagner, E. T. Z. 1923, S. 28.
- 78) „ „ 415. C. E. Krarup, ebenda 1902, S. 344; Journ. tél. 1905, S. 187. — F. Dolezalek u. A. Ebeling, E. T. Z. 1903, S. 770. — A. Larsen, ebenda 1908, S. 1030. — H. Salinger, Arch. El. 1923, S. 268. — J. S. Mollerhoj, Electrician 1923, **91**, 692. — Neuere Kabel nach Krarup, Trans. Am. I. El. Eng. 1920, S. 396 (Florida-Havanna). — E. Schürer, in der Druckschrift „Deutsche See-Fernkabel“, Berlin 1922, S. 10. — Neue Versuche zur Verbesserung des Eisens siehe K. W. Wagner, E. T. Z. 1923, S. 4.
- 79) „ „ 418. M. J. Pupin, Trans. Am. I. El. Eng. 1900, S. 245; Am. Pat. 652 230 (1900). — S. P. Thompson, E. T. Z. 1893, S. 601. — Campbell, Phil. Mag. 1903, Ser. 6, **5**, 313. — Roeber, El. World 1901, **37**, 440. Aus der späteren Literatur werden außer den an besonderen Stellen nachstehend aufgeführten nur solche Arbeiten genannt, die sich hauptsächlich mit theoretischen Fragen befassen: F. Lüschen, E. T. Z. 1913, S. 31 (günstigste Schleifen- und Viererbelastung). — H. Jordan, ebenda 1918, S. 61 (belastete Leitung mit Verstärkern). — Gherardi u. Jewett, Electrician 1920, **84**, 572 (Frequenzabhängigkeit der Scheinwiderstände). — U. Meyer, Zeitschr. techn. Phys. 1921, **2**, 306 (günstigste Belastung mit Rücksicht auf verteilte Kapazität). — A. B. Clark, El. Communication 1923, **1**, Heft 3, S. 27; Trans. Am. I. El. Eng. 1923, **42**, 1 (verschieden schwere Belastung).
- 80) „ „ 422. Pupin, El. World 1901, **38**, 587. — B. S. Cohen u. G. M. Shepherd, Electrician 1907, **59**, 124. — F. Breisig, E. T. Z. 1909, S. 462.
- 81) „ „ 422. M. H. Pleijel, C. R. Conf. int. des techn., Paris 1910, Bd. 4.
- 82) „ „ 424. F. Breisig, E. T. Z. 1901, S. 1029. — F. Lüschen, Bl. Post. Telegr. 1908, S. 136.
- 83) „ „ 425. F. Breisig, E. T. Z. 1908, S. 587. — Siemens u. Halske, D. R.-P. 274 256 (1911). — El. Rev., London 1911, **69**, 539. — F. Lüschen, E. T. Z. 1913, S. 31.
- 84) „ „ 426. R. S. Hoyt, Am. Pat. 1 167 693 (1917). — K. Küpfmüller, D. R.-P. 330 964 (1919).
- 85) „ „ 428. K. Höpfner in der Druckschrift „Das Fernsprechen im Weitverkehr“, Berlin 1923, S. 58. — E. T. Z. 1924, S. 112.
- 86) „ „ 433. W. Thomson, Phil. Mag. 1856, **51**, 146. — A. Vaschy, Ann. télégr. 1888, **15**, 481. — Devaux-Charbonnel, Ecl. él. 1902, **31**, 124. — K. W. Wagner, Phys. Zeitschr. 1909, S. 865. — E. Young, Electrician 1913, **50**, 874.
- 87) „ „ 433. Außer den unter Anm. <sup>21)</sup> vermerkten Aufsätzen im Electrician in dem Buche: Theory of the submarine telegraph and telephone cable, London 1917.
- 88) „ „ 433. Außer den unter Anm. <sup>21)</sup>, <sup>30)</sup>, <sup>51)</sup>, <sup>52)</sup>, <sup>54)</sup>, <sup>86)</sup>, <sup>87)</sup>, <sup>90)</sup> angegebenen Stellen sind noch anzuführen: A. Vaschy, Traité d'El. et de Magn. Bd. 2, Paris 1890. — F. Breisig, E. T. Z. 1900, S. 1046; ebenda

- 1901, S. 415 (Zurückführung auf andauernde Wechselströme). — E. Young, *Electrician* 1903, **50**, 874 (Bedeutung des Verhältnisses  $R/K$ ). — K. W. Wagner, *Phys. Zeitschr.* 1909, S. 865 (Berücksichtigung der Endschaltungen). — H. Salinger, *Arch. El.* 1923, S. 268 (Zeichen auf einem Krappkabel unter Berücksichtigung der Magnetisierungskurve).
- 89) Zu S. 445. Zur Frage des Einschwingens: K. W. Wagner, *E. T. Z.* 1910, S. 163. — H. Maior, ebenda, S. 383. — Diskussion zwischen K. W. Wagner u. B. Gati, *El. Maschb.*, Wien 1909, S. 847; 1910, S. 686, 880; 1911, S. 107, 851, 1017. — Neuere Arbeiten: F. Lüschen u. K. Küpfmüller, *Wissenschaftl. Veröffentl. a. d. Siemens-Konzern* 1923, **3**, Heft 1, S. 109. — K. Küpfmüller, *Telegr. Fernspr. Techn.* 1923, 12. Jahrg., S. 53.
- 90) " " 449. R. Holm, *Arch. El.* 1919, S. 263.
- 91) " " 451. Deutsche Anmeldung der Bell Tel. Mfg. Co., B. 103 603 (1921).
- 92) " " 451. K. W. Wagner, *E. T. Z.* 1924, S. 29.
- 93) " " 458. E. Wollin, *Tel. Fernspr. Techn.* 1921, 10. Jahrg., S. 50.
- 94) " " 470. K. W. Wagner u. K. Küpfmüller, *D. R.-P.* 387 381 (1921) und 388 235 (1921).
- 95) " " 474. H. Hertz, *Unters. über die Ausbreitung der elektr. Kraft*, Leipzig 1892, S. 234. — J. H. Poynting, *Phil. Trans.* 1884, **2**, 343.
- 96) " " 477. H. Hertz, *a. a. O.*, S. 176.
- 97) " " 481. C. Hersen u. R. Hartz, *Fernsprechtechnik*, Braunschweig 1910, S. 212.
- 98) " " 487. J. Zenneck, *Phys. Zeitschr.* 1908, S. 50.
- 99) " " 488. E. Lecher, *Phys. Zeitschr.* 1902, S. 273; 1903, S. 320. — L. Zehnder, *D. R.-P.* 178 861 (1904). — F. Kiebitz, *Verh. d. Deutsch. Phys. Ges.* 1911, S. 876. — *Jahrb. drahtl. Telegr.* 1923, **22**, S. 196.
- 100) " " 489. H. Hertz, *a. a. O.*, S. 150.
- 101) " " 497. Siehe hierzu auch K. W. Wagner, *Arch. El.* 1919, S. 145.
- 102) " " 499. Bellini u. Tosi, *Phil. Mag.* 1908, Ser. 6, **16**, 638; *E. T. Z.* 1908, S. 790.
- 103) " " 499. M. Abraham, *Phys. Zeitschr.* 1901, S. 329.
- 104) " " 505. F. Kiebitz, *Verh. d. Deutsch. Phys. Ges.* 1908, S. 984.
- 105) " " 507. E. Jahnke u. F. Emde, *a. a. O.*, S. 90.
- 106) " " 511. E. Jahnke u. F. Emde, *a. a. O.*, Tafel XXI auf S. 147. Die darin benutzten Veränderlichen  $\kappa$  und  $q$  sind in der hier gebrauchten Bezeichnungsweise  $\kappa = \frac{ar}{\sqrt{2}}$ ,  $q = 2ar$ .
- 107) " " 513. J. R. Carson u. J. J. Gilbert, *Journ. Frankl. Inst.* 1921, S. 705.
- 108) " " 513. O. Oldenberg, *Arch. El.* 1920, S. 289.
- 109) " " 515. E. Jahnke u. F. Emde, *a. a. O.*, S. 166, 13 a) vierte Gleichung.
- 110) " " 522. W. H. Martin, G. A. Anderegg u. B. W. Kendahl, *Journ. Am. J. El. Eng.* 1922, S. 184.

## Namen- und Sachverzeichnis.

- Ableitung 92.  
— bei belasteten Leitungen 424.  
Abraham, M. 499, 515.  
Abstand, mittlerer geometrischer 155.  
Amperesche Regel 30, 109.  
— Theorie des Magnetismus 113.  
Amperewindungen 123.  
Andauernde elektrische Schwingungen, Begriff 246.  
— — —, geometrische und algebraische Darstellung 249.  
— — —, mittlere Leistung 247.  
Andauernde Sinusströme auf Leitungen 328.  
Ankommender Strom bei geringem Längenmaß 437.  
— — auf idealer Leitung 440.  
— — bei großem Längenmaß 442.  
— — bei schwingungsfähigen Endschaltungen 467.  
Anpassung von Apparaten an Wechselstromleitungen 368.  
Ansprung eines Stromes 323.  
—, Zeitfunktion der EMK 203.  
—, Darstellung der abhängigen Veränderlichen 205.  
Antennen in schräger Lage 486.  
—, Kapazität 77.  
—, Strahlung 499.  
Arco, Graf 538.  
Ausbreitungsgeschwindigkeit 1.  
Ausgleichsvorgänge 201.
- Balata bei belasteten Kabeln 425.  
Bellini u. Tosi 499.  
Berechnung von Elektromagneten 129.  
— von Fernsprechübertragungen 430.  
— von Krarupkabeln 417.  
Besselsche Funktionen 321, 503, 533.  
Biot-Savartsches Gesetz 8, 31, 109, 492, 516.  
Bjerknes 228.  
Blackwell, O. B. u. Anderegg, G. A. 539, 541.  
Blindspannung 266.  
Brauns 294, 295, 538.
- Campbell 418.  
Carson 257.  
Carson u. Gilbert 513.  
Carsten, H. 538.  
Charakteristik 313,  
Christiani 152.  
Clark 344.  
Cohen, B. S. 539.  
— u. Shepherd 342, 540.  
Coulomb 2, 8, 45.  
Crandall u. Mc. Kenzie 539.
- Dämpfung einer Schwingung 221.  
—, räumliche, elektrischer Wellen an der Erdoberfläche 485.  
Dämpfungsexponent 358.  
Dämpfungsfaktor bei gleichmäßigen Leitungen 355.  
— b. nicht symmetrischen Leitungen 356.  
— des Nebensprechens 411.  
Dämpfungskonstante einer Leitung 337.  
— einer Schwingung 221.  
Dämpfungsmaß 337.  
—, Bedeutung für das Fernsprechen 358.  
— von Kettenleitern 379.  
— von Pupinleitungen 422.  
Dauerzeichen 460.  
Dearlove 52.  
Dekrement, logarithmisches, eines Schwingungskreises 221.  
—, —, einer Antenne 503.  
Determinanten 526.  
Deutsch, W. 538, 539.  
Devaux-Charbonnel 246, 342, 538, 539, 540.  
Dichte der Elektrizität, räumliche 37, 46.  
— — —, Flächendichte 40, 73, 487.  
Dielektrizitätskonstante 5, 533.  
Diesselhorst u. Emde 537.  
Differentialgleichung von Laplace 37.  
— von Poisson 37, 390.  
Divergenz 16.  
—, Formeln 18, 20.  
Dohmen 539.  
Dolezalek 538, 540.  
Doppelleitung, elektromagnetisches Feld 523.  
—, Kapazität 63.  
—, Induktivität 159.  
—, Potentialfunktion 57.  
—, stationäres elektrisches Feld 91.

- Doppelleitung, stationäres magnetisches Feld 106.  
 —, Störungen durch Influenz 302.  
 Doppelschicht 5.  
 —, magnetische 112.  
 Drehspulen 142.  
 Dreisbach 199.  
 Drosselkette 382.  
 Drude, P. 538.  
 Drysdale 263.  
 Duddell 266.  
 Durchgriff 393.  
 Ebeling, A. 538, 539.  
 Echowirkungen 421.  
 Effektive Werte b. Wechselströmen 248.  
 Eichleitungen absoluten Maßes 384.  
 Eigenschwingung eines einfachen Stromkreises 222.  
 — einer Leitung 386.  
 Einschwingen einer Leitung bei Sinusströmen 445.  
 Einschwingungsdauer, Abkürzung d. 451.  
 Einschwingungsvorgänge, Heavisidesche Formel 215.  
 — bei einem einfachen Stromkreis 216.  
 — bei gekoppelten Kreisen 242.  
 Einstellung eines Relais für Doppelstrom 139.  
 — neutraler Relais 132.  
 — polarisierter Relais 135.  
 Elektrische Influenz in Mehrfachleitersystemen 296.  
 Elektrische Wellen auf Leitungen 306.  
 — —, Bestimmungsgrößen 337.  
 — —, Fortpflanzungsgeschwindigkeit 310.  
 — — im Felde gestreckter Leiter 506.  
 — —, Längenmaß 323.  
 — —, Phasengeschwindigkeit 333, 344.  
 — —, Reflexionen 315, 359.  
 — —, stehende 331.  
 — —, Verzerrung 320, 340.  
 Elektrische Wellen im Raume 482.  
 — —, Aussendung 488.  
 — —, Eindringen in Halbleiter 485.  
 — — in homogenen Nichtleitern 482.  
 — — im Nahbereich u. Fernbereich 491.  
 — — längs der Oberfl. eines Leiters 482.  
 — —, Reflexion und Absorption an einer ebenen Leiterfläche 477.  
 — — und Oberflächenladungen 487.  
 Elektrizitätsmenge, Einheit der 2.  
 —, Gesetze der Verzweigung 194.  
 Elektromagnete, Berechnung 121.  
 —, Tragkraft 129.  
 — von Telegraphenapparaten 131.  
 Elektromotorische Kraft, eingeprägte 32.  
 — —, Integralwert 195.  
 Elektronenröhre, Feldverteilung 389.  
 — als Verstärker 392.  
 Energie, elektr., in Kondensatoren 181.  
 —, elektromagnetische des Feldes 6.  
 — im Schwingungskreis 223.  
 —, magnetische, des Feldes einer Strömung 144.  
 —, —, eines Feldes mit Magneten 119.  
 —, —, eines Systems von Strömen und Magneten 145.  
 —, —, linearer Ströme 148.  
 —, potentielle und kinetische 223.  
 Energieänderungen bei Bewegungen von Leitern 147.  
 Energiebilanz einer Leitung 308.  
 Energiegleichung d. station. Feldes 179.  
 Energiestreuung 276.  
 Energiestrom 471.  
 — bei einer Doppelleitung 476.  
 — in einadrigen Kabeln 474.  
 Erdantennen 488.  
 Ericson 279.  
 Ersatzleiter für Leitungsbündel 303.  
 Ersatzleitung, gleichmäßige 352.  
 — für ein Kettenglied 377.  
 Exponentialfunktionen 534.  
 Extrastrom 202.  
 Farbschreiber nach Wheatstone 458.  
 Feld einer Antenne im Fernbereich 499.  
 — einer Doppelleitung 523.  
 — eines einadrigen Seekabels 520.  
 —, elektromagnetisches 3.  
 —, elektrostatisches 34.  
 —, quasistationäres 176.  
 —, stationäres 80.  
 — von Skalaren 13.  
 — von Vektoren 13.  
 — vor einem Gitter 43.  
 —, elektrisches, einer Doppelleitung 91.  
 —, —, einer Elektronenröhre 389.  
 —, —, eines konzentrischen Kabels 87.  
 —, —, stationärer Ströme 80.  
 —, magnetisches, an Trennflächen 117.  
 —, —, einer Doppelleitung 106.  
 —, —, stationärer Ströme 96.  
 —, —, Zugkraft 121.  
 —, —, zwischen Stromleitern 143.  
 Felder, Quellen und Senken 15.  
 Feldgleichungen, Maxwellsche 29.  
 Feldlinien, Konstruktion 42.  
 — vor einem Gitter 43.  
 Feldstärke, elektrische 3.  
 —, —, an Grenzflächen 38.  
 —, —, an Trennflächen 37.  
 —, magnetische 3.  
 —, —, an Trennflächen 116.  
 Felten u. Guilleaume 416.  
 Fernbereich (Wellenzone) 493.

- Fernsprechapparate als Sender und Empfänger 278.  
 —, günstigster Scheinwiderstand 374.  
 Fernsprechkabel, elektrische Eigenschaften 535.  
 — nach Krarup 536.  
 —, vielpaarige 72.  
 Fernsprechleitungen, Reflexionen in 359.  
 Fernsprechübertrager 274, 369.  
 Fernwirkungstheorie 1.  
 Fischer, F. 538.  
 Flächendichte 40, 73, 487.  
 Fletcher, H. 539.  
 Fluß, magnetischer 31, 124.  
 —, —, in Verkettung mit einem Stromleiter 140.  
 Forbes 280.  
 Fortpflanzungsgeschwindigkeit elektrischer Wellen auf Leitungen 310.  
 Fortpflanzungskonstante bei gleichmäßigen Leitungen 337.  
 — bei Kettenleitern 378.  
 Fourier 310, 433.  
 Fouriersche Reihen 440.  
 Franke 261, 277, 397.  
 Frequenz, mittlerer Wert beim Fernsprechen 342.  
**G**  
 Gans 119, 537.  
 Gati 540.  
 Gegeninduktivität gerader paralleler Leiter 149.  
 — von Leitern mit allseitiger Rückleitung 173.  
 Gegenstromrollen 199.  
 Gekoppelte Schwingungskreise 234.  
 — —, Energiewanderung 244.  
 — —, Resonanzkurve 242.  
 — —, zum Empfangen 242.  
 — —, zum Senden 235.  
 Gerichtete drahtlose Telegraphie 504.  
 Gestreckte Leiter 56, 506.  
 Gherardi u. Jewett 540.  
 Gitter 43, 492.  
 Gleichungspaar, lineares 351.  
 Gleichwertige Ersatzleitung 352.  
 Gleichwertiger Strahlungswiderstand 503.  
 Godfroy 199.  
 Gradient 26.  
 Grawinkel 152.  
 Green 53.  
 Grenzfrequenz 381, 421.  
 Guttaperchakabel, Kapazität 50.  
 —, Isolationswiderstand 82.  
**H**  
 Hahnemann u. Hecht 291.  
 Heaviside 203, 257, 340, 415, 417.  
 Heavisidesche Formel 207, 235, 433.  
 — — für das Einschwingen unter sinusförmiger EMK 215.  
 Heavisidesche Formel für einen Anstieg nach einem anderen Zeichen 213.  
 — — — — nach Wechselln 211.  
 — — für veränderliche EMK 209.  
 Heberschreiber 458.  
 Hersen u. Hartz 541.  
 Hertz 474, 488, 515.  
 Hertzscher Doppelpol 492.  
 Hertzsche Funktion 490.  
 Holm, R. 539.  
 Höpfner 428, 538.  
 Hoyt 426.  
 Hugoniot 310.  
 Hülle, geerdete 35, 261.  
 —, —, Ersatzgröße bei vielpaarigen Kabeln 72.  
 —, leitende 34.  
 Hysterese 117.  
**I**  
 Ideale Leitung 313.  
 Induktion, magnetische 6, 114.  
 Induktionsgesetz 178.  
 Induktionsschutz 153, 537.  
 Induktivität bandförmiger Leiter 164.  
 — einer konzentrischen Doppelleitung 161.  
 — geerdeter Einzelleitungen 163.  
 — körperlicher Leiter 153.  
 — von Schleifen mit Eisenbewehrung 162.  
 — von Systemen gerader paralleler Leiter 149.  
 Influenz, elektrische, durch Drehstromleitungen 300.  
 —, —, zwischen Einzelleitungen 299.  
 —, —, zwischen Mehrfachleitersystemen 296.  
 Integral einer EMK 195.  
 Integraleffekt einer Schwingung 228.  
 Isolationswiderstand, scheinbarer 94.  
 — von Guttapercha 83.  
**J**  
 Jahnke u. Emde 511.  
 Janet 257.  
 Jordan, H. 536.  
**K**  
 Kabel, Doppelleitungs- 68.  
 —, Guttapercha- 50.  
 —, konzentrische 48.  
 —, Litzen- 51.  
 — mit Krarupscher Bewicklung 415.  
 Kapazität des ebenen Kondensators 47.  
 — des Kugelkondensators 44.  
 —, Einheiten der 47.  
 — einer Doppelleitung 63.  
 — eines Körpers beliebiger Form 47.  
 — und Raumbeanspruchung 72.  
 — von Adern vielpaariger Kabel 71  
 — von Antennen 77.  
 Kapp 116, 118, 274.

Kennelly 280, 289, 293, 377.  
 Kennleitwert 257.  
 Kettenleiter 376.  
 Kiebitz 505, 541.  
 Kirchhoffsche Regeln 87.  
 Kompensator von Larsen 264.  
 Komplexe Rechnung 252.  
 Kondensator an Relaiskontakten 192.  
 —, ebener 47.  
 — in quasistationären Kreisen 180.  
 —, koaxiale Zylinder 48.  
 —, Kugel- 44.  
 Kondensatorkreis als Empfänger 233.  
 —, aperiodischer 219.  
 — zur Erzeugung v. Schwingungen 217.  
 Kondensatorleitung 382.  
 Kontinuitätsgleichung 32.  
 Konzentrische Leiter, elektromagnetisches Feld 506.  
 — —, Kapazität 48.  
 — —, Induktivität 160.  
 — —, stationäres elektrisches Feld 87.  
 Kopplung, feste und lose 237.  
 — und Schwebungen 241.  
 Kopplungsfaktor 237.  
 Kopplungskapazitäten 407.  
 Kräfte zwischen Magneten und Strömen 140.  
 Krarup 415.  
 Krarup-Seekabel 536.  
 Krause 539.  
 K R-Gesetz 457.  
 Kreis, magnetischer, geteilter 123.  
 —, —, mit vollem Eisenschluß 122.  
 Kreisfrequenz 220.  
 Kunert 175, 538.  
 Küpfmüller 363, 407, 430, 539, 540, 541.  
 Kurzschlußstrom bei Störungen durch Starkstrom 297.  
 Kurzschlußwiderstand bei Leitungen 345.  
 —, graphische Bestimmung 404.  
 —, Messung 397.  
 Lagrange, Gleichungen von 280, 283.  
 Längenmaß 323.  
 Langmuir 539.  
 Laplace 37, 392.  
 Larsen 264, 416.  
 Lecher 541.  
 Leerlaufspannung bei Störungen durch Starkstrom 298.  
 Leerlaufwiderstand bei Leitungen 345.  
 —, graphische Bestimmung 404.  
 —, Messung 397.  
 Leistung eines mehrwelligen Wechselstroms 258.  
 —, Ermittlung bei komplexer Rechnung 257.

Breisig, Theoretische Telegraphie.

Leiter 4.  
 — im magnetischen Felde 140, 142.  
 —, lineare 87.  
 —, magnetische Wirkungen zwischen Stromleitern 143.  
 — mit Ableitung 92.  
 — mit allseitiger Rückleitung 83, 166, 513.  
 Leitfähigkeit, spezifische 4, 533.  
 Leitungen, Eigenfrequenz 386.  
 —, gleichmäßige 328.  
 —, Grenzfrequenz 381, 421.  
 —, ideale 308, 313.  
 — mit erheblicher Induktivität 339.  
 — mit starker Verzerrung 343.  
 — mit verschiedenen Endschaltungen 461.  
 — ohne Verzerrung 326, 340.  
 —, symmetrische 352.  
 —, Tabelle elektr. Eigenschaften 535.  
 —, zusammengesetzte 351.  
 Leitungsstrom 4.  
 Leitwerte, gerichtete 255.  
 Lichtenstein, L. 540.  
 Lienemann 538.  
 Linienintegral eines Vektors 22.  
 —, Abhängigkeit vom Wege 178.  
 — einer komplexen Funktion 170, 203, 206, 529.  
 Löschfunken 245.  
 Luftleiter für drahtlose Telegraphie, Potentialfunktion und Kapazität 77.  
 —, Schwingungsformen 495.  
 —, symmetrische Ergänzung 497.  
 —, Strahlung eines geradlinigen 499.  
 Lüschen 263, 539, 540, 541.  
 Magnetische Energie einer Strömung 144.  
 — — eines Feldes mit ruhenden Magneten 119.  
 — — — mit Strömen u. Magneten 145.  
 — —, gemeinsame, zweier Strömungen in unbegrenztem Mittel 168.  
 Magnetisches Feld einer Doppelleitung 106.  
 — — einer Einzelleitung mit Rückleitung in unbegrenztem Mittel 166.  
 — —, Kräfte, die auf einen Stromleiter wirken 140.  
 Magnetische Induktion von Starkstrom auf Schwachstromleitungen 294.  
 — Kreise 122.  
 Magnetisierungskurven 114.  
 Magnetismus, Ampèr'sche Theorie 113.  
 —, freier 32.  
 —, räumliche Dichte 120.  
 —, remanenter 113.  
 Magnetomotorische Kraft 125.  
 Magnetpole 118.  
 Major 540.

- Malcolm 433, 462, 538, 540.  
 Martin 541.  
 Maschine, Frankesche 261.  
 Massenpunkt, elektrischer 45.  
 Massin 175.  
 Maß, elektromagnetisches 2.  
 Maßsystem, elektromagnetisches 525.  
 Maxwell 8, 66, 155.  
 — -Erde 196, 467.  
 Maxwell'sche Feldgleichungen 9.  
 Mehrfachleitersysteme, Potentialfunktion 60.  
 —, Influenz zwischen 296.  
 Mengen, magnetische 2.  
 Messungen an Amtseinrichtungen 401.  
 — an gleichmäßigen Leitungen 398.  
 — an zusammengesetzten Leitungen 400.  
 — an Verstärkerleitungen 401.  
 — an Wechselstromleitungen 397.  
 — an Leitungen mittels Gleichstrom 94.  
 Meyer, Ulf. 539, 540.  
 Mikrophon 275.  
 Mitsprechen 409.  
 Modelle, mechanische, elektrischer Leitungen 312.  
 —, — von Schwingungssystemen 224.  
 Möller 392, 539.  
 Mollerhoj 540.  
 Münch 274.  
 Nachbildung des Scheinwiderstandes bei Leitungen mit Verstärkern 426.  
 — von Freileitungen 429.  
 Nahbereich elektrischer Wellen 492.  
 Nahwirkung 2.  
 Nebensprechen 406.  
 —, Ausgleich durch Kondensatoren oder Kreuzungen 411.  
 — in Verstärkerleitungen 414.  
 —, Messung 355, 412.  
 — zusammengesetzter Leitungen 412.  
 Neumannsches Potential 144.  
 Neutrale Relais, Einstellung 132.  
 Nichtleiter 4.  
 Niveaufäche 55.  
 Normal-Fernkabel 535.  
**O**berflächenintegral 16.  
 Oberflächenladung bei elektrischen Wellen 487.  
 Ohmsches Gesetz 87.  
 Oldenberg 513.  
**P**edersen 265.  
 Periode einer Schwingung 220.  
 Permeabilität 6.  
 —, Anfangs- und reversible 116.  
 Phase und Phasenunterschied 220.  
 Phasengeschwindigkeit 333.  
 Pinkert 537.  
 Pirro, G. di 539.  
 Pleijel 422, 539, 540.  
 Poincaré 280, 310.  
 Polarisierte Relais, Bewegungsgleichung 136.  
 — —, Einstellung 139.  
 Pollock 406.  
 Potential, elektrisches, in einem sehr fernen Punkte 46.  
 —, —, stationärer Felder 80.  
 —, —, wesentliche Eigenschaften 40.  
 —, magnetisches 115.  
 —, außerhalb der Strömung 109.  
 —, Neumannsches, zweier Stromkreise 144.  
 Potentialdifferenz, elektrische 36.  
 —, magnetische 125.  
 Potentialfunktion 52.  
 — an Flächen verschiedener Krümmung 74.  
 — an Spitzen 74.  
 —, Eindeutigkeit 53.  
 —, Feststellung von Leiteroberflächen aus der 55.  
 Potentiometer von Drysdale 263.  
 — von Pedersen 265.  
 Poulsen, A. 539.  
 Poyntingscher Vektor 473.  
 Produkte von Vektoren, gemischte 13.  
 — — —, skalare 10.  
 — — —, vektorielle 11.  
 Pupin 376, 418.  
 Pupinleitungen, Anforderungen an Gleichmäßigkeit 430.  
 —, Bedeutung der Ableitung 424.  
 —, Dämpfungsmaß 422.  
 —, Wellenausbreitung 418.  
 Pupinsche Regel 419.  
 Pupinspulen 123.  
**Q**uellpunkte 15, 41.  
**R**aumladung 390.  
 Rechnungsbehilfe 402.  
 Rechtssystem 10.  
 Reflexionen in Fernsprechleitungen 359.  
 — in Leitungen an einem Kondensator 320.  
 — an einem Widerstand 317.  
 — an einer Drosselspule 319.  
 — an einer Stoßstelle 318.  
 — bei idealen Leitungen 315.  
 — bei Wechselströmen 359.  
 —, Übergangsfaktor 361.  
 Reflexionsfaktor 318.  
 Regel von Ampère 109.  
 — von Kirchhoff 87.  
 — von Pupin 419.  
 Relais, Einstellung 132, 139.

- Relais, neutrale 131.  
 —, polarisierte 134.  
 —, Schutz der Kontakte durch Kondensatoren 192.  
 Resonanz 227.  
 Resonanzkurve 227.  
 —, Auswertung 230.  
 Riegger 539.  
 Ringübertrager 274.  
 Roeber 376.  
 Rotation eines Vektors 23.  
 —, Formeln 24, 25, 28.  
**S**alinger 513, 539, 540.  
 Sättigung des Eisens 114.  
 Satz von Gauß 17.  
 — von Green 53.  
 — von Kirchhoff 87.  
 — von Stokes 26.  
 Scheinwiderstand, günstigster, der Fernsprechapparate 374.  
 —, Nachbildung für Verstärker 426.  
 — von Fernsprechapparaten 278.  
 Scheinwiderstände einer Leitung bei verschiedenen Frequenzen 348.  
 — einer Wechselstromleitung 345.  
 — zusammengesetzter Leitungen 355.  
 Schienenverbinder 295.  
 Schleife, Gegen- u. Selbstinduktivität 159.  
 Schleifen, Kapazität 65.  
 —, Theorie störungsfreier 152.  
 Schottky, W. 539.  
 Schwingungen, andauernde 246.  
 —, Bestimmungsgrößen 219.  
 —, gedämpfte 221.  
 —, freie und erzwungene 216.  
 — in Kondensatorkreisen 217.  
 —, schwebende 234, 239.  
 —, ungedämpfte 220.  
 Schwingungskreis, Analogie mit dem Pendel 223.  
 —, Dekrement 221.  
 —, Eigenschwingung 222.  
 —, einfacher 217.  
 —, —, als Empfänger 224.  
 —, gekoppelter 234.  
 —, Anstoß durch Sinusschwingungen 242.  
 —, mechanische Modelle 224.  
 —, Wellenlänge 222.  
 Schwingungskreise, gleichgestimmte 237.  
 Schwingungssysteme, offene und geschlossene 498.  
 Schrottke 538.  
 Schultheiss 539.  
 Schutzhülle 35, 261.  
 Schwebungen 234, 239.  
 Selbstinduktivität bei Krarupleitungen 416.  
 —, scheinbare, von Leitungen 201.  
 Sender, gekoppelter 235.  
 Senken 15.  
 Siebketten 383.  
 Siemens u. Halske 407, 540.  
 Skalare 3.  
 Spannung 36, 178.  
 Spannungsresonanz 268.  
 Spiralendiagramm 333.  
 Spitzen 74.  
 Spulenleitung 380.  
 Stammfunktion 206.  
 — bei Leitungsproblemen 433.  
 — für betriebsmäßige Schaltungen 456.  
 — für Kettenleiter 435.  
 — mit gleichen Wurzeln 208.  
 —, Unstetigkeitspunkte 206.  
 Standardkabel 384.  
 Steinmetz 118.  
 Stokes 26, 433.  
 Störungen von Schwachstromleitungen durch Starkstromleitungen 293.  
 Stoßerregung 245.  
 Strahlung 494.  
 Strahlungsdekrement 503.  
 Strahlungsvektor 473.  
 Strahlungswiderstand 503.  
 Streuung 125.  
 Strom, elektrischer 4.  
 — in linearen Leitern 87.  
 —, Leitungs- 4.  
 —, notwendig geschlossen 32.  
 —, umschlungener 30.  
 —, Verschiebungs- 5.  
 —, wahrer 6.  
 Stromdichte 4.  
 Stromfaden, Feld eines 517.  
 Stromintegrale 194.  
 Stromkreise mit Induktivität und Kapazität 190.  
 — mit Widerstand und Induktivität 182.  
 — — — und Kapazität 185.  
 — — — und Induktivität in Parallelschaltung 187.  
 — — — und Kapazität in Parallelschaltung 188.  
 Stromresonanz 268.  
 Stromschritt 457.  
 Stromstöße, Fortpflanzung auf langen Leitungen 432.  
 Stromverdrängung 476.  
 Stromvorgänge, dauernde und flüchtige 202.  
 —, sprunghaft ansteigende 203.  
 Strömung, stationäre, in einer Doppelleitung 91.  
 — in einer Platte 86.  
 — in konzentrischem Kabel 87.  
 — in unbegrenztem Mittel 83.  
 Stumpf 539.

- Teilkapazitäten 66.  
 Telegraphengleichung 306.  
 —, allgemeine Form 309.  
 Telegraphiergeschwindigkeit 457.  
 Telephon, Eigenschwingung 285.  
 —, Scheinwiderstand 289.  
 —, Theorie 280.  
 —, Wirkungsgrad 291.  
 Thompson, S. P. 417, 540.  
 Thomson 433.  
 Thomsonkurve 442.  
 Toroid 122.  
 Transformator 269.  
 —, Selbstregulierung 272.  
 Trennflächen 37, 116.  
 Typendrucker nach Siemens 458.
- Übersprechen** 408.  
**Übertragungsmaße** 359.  
**Umkehrungssatz** 354.  
**Unsymmetrie bei Leitungen** 358.
- Vaschy** 310, 537, 539, 540.  
**Vektoren** 3.  
**Vektorenrechnung** 9.  
**Vektorlinien** 14.  
**Vektorpotential** 96, 524.  
**Vektorröhre** 14, 39.  
**Vektorzeichnung** 249.  
**Verkettung** 100.  
**Verlustwiderstand bei Kabeln nach Krarup** 417.  
**Verlustwinkel** 266.  
**Verschiebung, dielektrische** 5.  
**Verschiebungsstrom** 5.  
**Verstärker als Leitungselement** 393.  
**Verstärkerleitungen als Kettenleiter** 395.  
 —, Messungen 401.  
 —, Nebensprechen 414.  
**Verzerrung, Bedeutung für das Fernsprechen** 341.  
**Verzerrung der Wellenform** 320.  
 — gemäß dem Winkelmaß 344, 451.  
**Verzweigung von Elektrizitätsmengen** 194.  
**Vierpol** 401, 412.
- Wagner, K. W.** 202, 206, 260, 363, 376, 430, 451, 538, 539, 540, 541.  
**Wechselströme in quasistationären Kreisen** 266.  
 —, Kompensationsverfahren 261.  
 —, Meßeinrichtungen für schwache 258.  
**Wechselstromgrößen, effektive Werte** 248.  
 —, komplexe Darstellung 252.  
**Wechselstromleitungen, Bestimmungsgrößen** 337.
- Wechselstromleitungen, Messungen** 397.  
**Wechselstrommeßbrücke** 259.  
 —, Hilfsbrücke nach Wagner 260.  
**Wechselstromwiderstand** 256.  
 — von Drähten 510.  
**Wechselzeichen auf einem Kabel** 452.  
**Wegel, R. L.** 539.  
**Wellen, elektrische, stehende** 331.  
**Wellenausbreitung, Bedeutung in der Fernmeldetechnik** 307.  
 — auf Pupinleitungen 418.  
**Wellenlänge stehender Wellen** 333.  
 —, im freien Raum 222, 488.  
**Wellenleiter in allseitig ausgedehntem Mittel** 513.  
**Wellenmesser** 227.  
**Wellenschwanz** 323, 326.  
**Wellenverkürzung** 497.  
**Wellenverlängerung** 496.  
**Wellenwiderstand** 313.  
 —, Bedeutung für den Wirkungsgrad 318.  
 — bei Wechselstrom 329, 347.  
 — ungleichmäßiger Leitungen 363.  
**Wellenzone** 492.  
**Western El. Co.** 406.  
**Widerstand, elektrischer** 87.  
 —, —, einer Seerückleitung 520.  
 —, —, eines Leiters bei Hochfrequenz 512.  
 —, —, gerichteter 255.  
 —, magnetischer 125.  
**Wien, M.** 538.  
**Wietlisbach** 280.  
**Wigge** 539.  
**Winkelmaß** 337.  
**Wirbel** 22.  
**Wirksame Werte elektrischer Eigenschaften** 337.  
**Wirkungsgrad bei einer Fernsprechübertragung** 374.  
 — einer Übergangsstelle in Leitungen 318, 361.  
 — eines Telephons 291.  
 — eines Übertragers 275.  
**Wollin** 541.
- Young** 540.
- Zehnder** 541.  
**Zeitfunktion für einen Ansprung** 203.  
**Zeitkonstante eines Stromkreises** 183.  
**Zenneck, J.** 538, 541.  
**Zielinski** 83.  
**Zylindrisches Feld mit zwei singulären Punkten** 514.