Б. Я. Брусиловский

теория систем и система теорий

Б. Я. Брусиловский

теория систем и система теорий

Киев
Головное издательство
издательского объединения
«Вища школа»
1977

6Ф0.1
Б89

УДК 519.95

Теория систем и система теорий. Брусиловский Б. Я. Киев, Издательское объединение «Вища школа», 1977, 192 с.

Монография посвящена методологии описания общей теории систем как системы взаимосвязанных теорий на основе ряда новых понятий и нетрадиционной интерпретации старых. Обсуждаются основы математического аппарата, приспособленного для моделирования динамических систем наиболее общей природы и удобного при постановке задач в различных областях науки и техники.
Книга написана в подчеркнуто дискуссионной манере и рассчитана на творчески настроенного читателя любой специальности.
Список лит.: 143 назв.

Рецензент доктор физико-математических наук
Б. Н. Пшеничный

Редакция литературы по кибернетике, электронике и энергетике
Зав. редакцией *А. В. Дьячков*

Б $\frac{30501-247}{М211(04)-77}$ 299—77

В природе математики не заложена необходимость заниматься идеями числа и величины.

Д. Буль

ВВЕДЕНИЕ

Развитие современной науки как будто подтверждает тезис Паскаля о том, что в науке ровно столько науки, сколько в ней математики. Сейчас трудно найти научную работу в экономике, социологии, психологии, не говоря уже о традиционно математизированных науках — механике, физике и т. д., в которых не встречались бы формулы. Однако, хотя математика и предполагает использование сокращений и формул, формулы — это еще не математика, а зачастую вообще не математика. Знание латинского алфавита неравнозначно знанию латыни, или языка математики, даже если пополнить латинский алфавит греческим. И дело здесь, конечно, не в том, что специалист-нематематик не хочет знать современную математику, а в том, что в таком виде, в каком ее ему обычно предлагают, он ее знать не может, ибо он тогда должен быть специалистом-математиком. Конечно, можно ограничиться некоторой адаптацией языка, что чаще всего и имеется ввиду, когда говорят о прикладной математике, особенно в нетрадиционных областях ее применения. Но тогда едва ли можно надеяться на получение действительно глубоких прикладных результатов.

Так и возникает ситуация, при которой из всего мощного аппарата современной математики в приложениях (зачастую чисто символически) используются в основном те разделы, которые специалист изучал в вузе — немного теорию дифференциальных уравнений, элементы статистики и теории вероятностей, линейное программирование, реже теория случайных процессов и аппарат разностных уравнений, еще реже — математическую логику, почти никогда современную алгебру и никогда теорию категорий и функторов.

В то же время, к примеру, понятие категории ввиду общности, по сути, более доступно интуиции неспециалиста, чем теоремы математического анализа, не претерпевшие особых изменений за последние сто лет, по форме и по сути напоминающие школьную грамматику, бесполезную для человека, знающего язык, и недоступную для незнающего. Сложившуюся ситуацию лучше всего охарактеризовать словами Ч. Дарвина, сказанными им, конечно, по другому поводу: «Таким образом, мы имеем здесь дело со случаем, когда убеждение — если только можно назвать убеждением утверждение, с которым не связано никаких определенных представлений, — распространилось почти по всей Англии без всякого подобия доказательства» [72].

Очень схематично всю современную научную литературу можно разделить на четыре класса, в зависимости от того, кто для кого пишет: 1) математик для математика; 2) математик для нематематика; 3) нематематик для математика; 4) нематематик для нематематика.

Естественно, самое полное понимание имеет место в первом и, надо полагать, в четвертом случае, хотя для развития современной науки, если согласиться с тезисом Паскаля, наиболее важными являются второй и третий случаи, способствующие наведению моста между объектом и языком анализа. Следует, однако, отметить, что хотя строительство этого моста ведется достаточно давно с разных берегов навстречу друг другу, оно далеко до завершения.

А если с тезисом Паскаля не согласиться? Все равно мост строить надо, хотя бы в связи с прогрессирующей узкой специализацией, при которой в пределе специалист может знать все ни о чем. А это не так уже и невинно, ибо «... многие важные исследования проделываются трижды или четырежды. В то же время другие важные исследования задерживаются из-за того, что в одной области неизвестны результаты, уже давно ставшие классическими в других областях, поскольку любой вопрос к узкому специалисту не на его языке будет рассматриваться им, как нечто, относящееся к коллеге, который работает через три комнаты дальше по коридору» (Н. Винер). Да, но с другой стороны специализация необходима. Как же обеспечить взаимопонимание? Только на основе универсального языка науки — математики.

Однако почему математика, а не, к примеру, физика или философия — универсальный язык науки? Посильной попытке ответить на этот вопрос, по сути, и посвящена эта книга.

В двух словах — только математика позволяет расширить область приложений без ухудшения описания частных случаев и прекратить «вавилонское» многоязычие (гл. I, II).

Правда, не исключено, что кое-что нужно изменить в фундаменте самой математики, который дал серьезные трещины (гл. III). При этом, возможно, удастся по-иному взглянуть на сам процесс моделирования (гл. IV).

Трудно удержаться, чтобы не привести блестящий пример «эффективности» чисто словесной классификации, приведенной М. Минским: «Имеются объекты, заведомо живые, например мыши, объекты заведомо неживые, например булыжники, и имеется важная сейчас область неопределенности.

Биологи (или точнее преподаватели биологии) привыкли составлять всевозможные перечисления свойств живого объекта. Вот одно из них: (1) самовоспроизводимость, (2) раздражимость; (3) метаболизм; (4) состоит из протоплазмы или протеина, углеводов, ДНК и т. д.

Но (1) исключает мулов, (2) и (3) — споры, а если исключить эти свойства, то в соответствии с (4) к живым объектам придется отнести сосиску» [111]. А если согласиться с Паскалем, тогда — всем изучать математику и не будет никаких проблем? Но не все так просто.

Если проследить за тем, как пишут математики для нематематиков, то, приходится констатировать, что это либо популярная адаптация, либо тонкая вязь математических теорем, от которых нематематику как-то сразу приходят в голову мысли о бренности жизни. Итак, либо за деревьями не видно леса, либо деревьев просто нет. Что же делать?

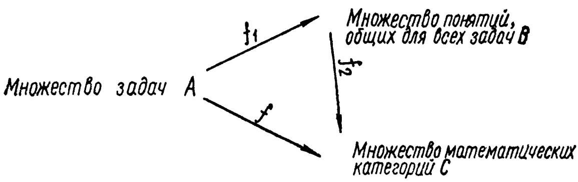
Обратим внимание прежде всего на то, что практически все книги по приложениям математики посвящены решениям задач. Даже блестящие книги Пойя [17, 73, 122] посвящены тому, как решать задачу. Успешно развивается теория исследования операций, общая теория решения задач, теория искусственного интеллекта и т. д., но везде авторы, желая заинтересовать читателя-нематематика, стараются проиллюстрировать теорию, ее прикладные возможности, решая задачи, которые кажутся читателю либо тривиальными, если ясен процесс их решения (что бывает при использовании адаптированного аппарата), либо необоснованными, если вывод неясен (что бывает в сложных и интересных случаях).

Однако все знают, что математика — это язык науки. Так создается своеобразная ситуация, при которой математики пишут для нематематиков в надежде на то, что те их поймут, а нематематики делают вид, что они действительно их понимают, широко используя в своих работах латинский и греческий алфавиты. Конечно, здесь несколько сгущены краски, поскольку имеются крупные успехи в использовании математики в самых различных областях науки, но эти успехи ни в коей мере не соответствуют возможностям современной математики.

Существует ли выход из создавшегося положения? По нашему мнению — да. Основная мысль тривиальна: нематематику незачем знать технологию математики по той простой причине, что он ее знать не может. Однако математику нет никакой необходимости в общем случае делать вид, что он разбирается, скажем, в экономике, поскольку это просто не его специальность. Должно существовать обыкновенное разделение труда, при котором каждый делает то, что он может делать лучше всего без того, чтобы знать всю технологию своего смежника. А встречаются математик и нематематик на мосту, конструкция которого понятна обоим.

Итак, взаимопонимание можно обеспечить, научив нематематика ставить задачи в такой форме, при которой математик мог бы их решить или доказать невозможность их решения на основе той информации, которую выдает специалист-нематематик. Сам процесс решения задачи может быть нематематику неизвестен, хотя он четко должен знать, как поставить задачу перед своим смежником. Это очевидно, и тем не менее едва ли в мировой литературе найдется хотя бы одна специальная книга, ориентированная на нематематиков и посвященная тому, как *ставить*, а не *решать* задачу.

Кратко строение и цель такой книги могут быть выражены следующей диаграммой:



Здесь f_1, f_2, f — некоторые морфизмы (см. гл. I, § 7). При некоторой фантазии можно считать, что f_1 — сюръективное отображение; f_2 — биекция; f — коммутативное замыкание, являющееся целью книги.

Такая книга еще не написана, а диаграмма приведена, во-первых, для того, чтобы отметить место нашей книги (это вершина B и частично морфизм f_2), а во-вторых, чтобы сразу проиллюстрировать интуитивную естественность понятий наиболее абстрактной (и наименее известной) математической теории — теории схем и категорий.

Мы убеждены, что мост между математикой и нематематикой, который является основой для всех других мостов, должен строиться по схемам этой теории и теории универсальных алгебр. Только тогда нематематик сможет корректно ставить задачи любой природы перед своим смежником-математиком и более того не всегда нужно будет обращаться «через три комнаты дальше по коридору» даже в корпусах биологических или гуманитарных наук.

Мы не объяснили название нашей книги и не сказали еще, причем здесь теория систем и что такое система вообще. И не скажем, поскольку не знаем, что такое несистема и какая теория (модель) не относится к (общей) теории систем (гл. I, II).

А зачем вообще теории? Увы, мир таков, что сущности умножаются без нужды (здесь сознательно опущено «не» в известном афоризме Окамы). И боротся с этим разнообразием систем динамических множеств (а других просто нет, гл. III) различного рода (§ 7, гл. I) можно только с помощью факторизации, строя $\theta_н$-инвариантные номиналистические системы (модели): числа, отношения, критерии, законы, предрассудки, морали и т. д. в рамках информативного баланса между «индукцией» и «дедукцией» (гл. III).

Экстраполируя эти $\theta_н$-инварианты, мы осуществляем и всегда осуществляли основную задачу мышления — прогноз, позволяющий создавать $\theta_р$-инвариантные реалистические системы: здания, АСУ, личность, экономику, общество и т. д. Правда, слово «прогноз» широко используется сравнительно недавно. Поэтому мы узнали, как и известный герой Мольера, что «говорим прозой». Ранее не знали, но говорили, хотя на разных языках, но, по существу об одном и том же (гл. II).

Ну вот теперь-то читатель, если он нетерпелив, имеет все основания подозревать, что книга философская — «о словах» (θ-инвариант», «информативный баланс» и т. д.). Но, любое слово — ярлык, (М-понятия, гл. I). И в этом своем качестве слово было вначале, и будет в конце — в меньшем количестве (§ 6, гл. I). Хотим надеяться, что по прочтении книги, возможно, кое-что прояснится.

Существует много прекрасных книг по математике, из которых читатель может почерпнуть в деталях все, что его заинтересует, если только интерес возникнет. Эта книга, в первую очередь, и рассчитана на то, чтобы читателю захотелось обратиться к таким книгам. Этим (но не только этим) объясняется и подчеркнуто дискуссионное изложение некоторых вопросов, и язык изложения. «Мы надеемся, что все это будет читаться не как цепь логических умозаключений, а как математический роман, в котором действующие лица раз возникнув, появляются вновь и вновь и совершенствуются» [60].

Мы убеждены, что слово «ученый» связано не только со словом «учить», но и со словом «учиться», а это невозможно делать всю жизнь без всякого удовольствия. Поэтому математика должна способствовать не только логическому мышлению, но и эмоциональному желанию мыслить вообще, а не угнетать его своим совершенством и завершенностью (кажущейся). В противном случае надежды К. Бернара на то, что «... придет время, когда физиолог, поэт и философ будут говорить на одном языке и будут понимать друг друга» (цит. по [67]) останутся только надеждами и мосты между науками еще долго будут числиться в списках незавершенных объектов строительства.

В обучении примеры важнее правил.
И. Ньютон

Глава I

СТРАТЕГИЯ МОДЕЛИРОВАНИЯ

Неформально обсуждаются некоторые проблемы формализации. При этом упо́р делается не столько на то, «как это делать», сколько на то, «зачем это делать». Задачей главы является, в частности, иллюстрация естественности понятий теории категорий, а также других понятий математики: отображения, программирования и т. д.

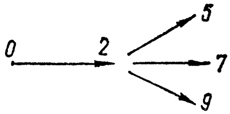
§ 1. ЗАДАЧА АННЫ

«Ну я получу развод и буду женой Вронского. Что же, Кити перестанет так смо́треть на меня, как она смотрела нынче? Нет. А Сережа перестанет спрашивать или думать о моих двух мужьях? А между мною и Вронским какое же я придумаю новое чувство? Возможно ли какое-нибудь не счастье уже, а только не мученье? Нет и нет » [10].

Так думала Анна Каренина перед тем, как приняла роковое решение. А был ли у нее другой выход? Вероятно, найдутся люди, которым покажется, что сама постановка вопроса о другом выходе просто кощунственна. Мы же используем этот пример только для иллюстрации некоторых общих положений настоящей книги.

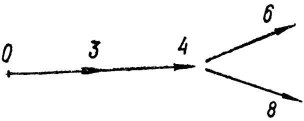
Итак, Анна перечисляла некоторые возможные события — альтернативы, в определенной последовательности во времени и оценивала, могут ли они осуществиться. Выделим эти альтернативы явно и пронумеруем их четными числами, начиная с 0 (это окажется удобным в дальнейшем): 0 — развод (с Карениным); *2* — замужество (с Вронским); *4* — светская жизнь («...Кити перестанет так смотреть...»; *6* — спокойствие сына («....Сережа перестанет спрашивать...»); *8* — сносная жизнь с Вронским.

Теперь обратим внимание, что неосуществление любого события есть, в сущности, тоже событие, которое может повлечь определенные последствия. Пронумеруем соответствующие альтернативы нечетными числами: *1* — развода не бу́дет; *3* — замужества не будет и т. д. Как любому нечетному числу соответствует следующее за ним четное, так и любой альтернативе соответствует другая, состоящая в том, что данное событие не осуществится. Конечно, что принять за «четное», а что за «нечетное» событие, в принципе условно (ведь неосуществление — тоже событие). Теперь учтем, что события имеют определенную последовательность во времени. Если «следует за» условно обозначить стрелочкой, то рассуждения Анны можно назвать композицией альтернатив и схематически изобразить в виде фигуры, которую называют направленным графом, или диаграммой. Причем стрелочки



(1)

именуют дугами, а точки, обозначенные цифрами, — вершинами. Итак, граф (диаграмма) размышлений Анны оканчивается «нечетными» событиями, которые для Анны неприемлемы. Однако проанализировала ли она все возможности? А может, например, имеет смысл и такой граф:



(2)

Она не выходит замуж за Вронского после развода с Карениным, тем самым поступает, в известном смысле, благородно, отплачивая ему и за его прежнее благородство и за развод, если он на него пойдет. Возможно, свет бы ее простил (событие *4*) и Сережа задавал бы гораздо более простой вопрос: — «Где папа?» Что касается возможности реализации события *8*, то, проявив самостоятельность и независимость (событие *3*), Анна вполне могла бы со временем «придумать новое чувство». Конечно, все это домыслы, которые, возможно, несовместимы с логикой обстоятельств и характеров, но важно, что это все-таки вариант, достойный обсуждения. А сколько вообще возможно вариантов только в рамках отмеченных десяти альтернатив безотносительно к степени их приемлемости?

Чтобы ответить на этот вопрос, опишем несколько иное представление последовательностей возможных событий. Введем величины $[i, j]$ $(i, j = 0, 1, \dots, 9)$, которые будут характеризовать последовательность расположения стрелок в соответствующем графе. Условимся считать

$$[i, j] = \begin{cases} 1, \text{ если событие } j \text{ непосредственно следует за событием } i \text{ (вершины } i \text{ и } j \text{ соединены стрелочкой от } i \text{ к } j); \\ 0, \text{ если событие } j \text{ непосредственно не следует за событием } i. \end{cases} \quad (3)$$

Тогда размышление Анны можно представить в виде

$$[0, 2] = [2, 5] = [2, 7] = [2, 9] = 1,$$

для остальных сочетаний i и j $[i, j]=0$, что соответствует графу (1). Граф (2) аналогично можно описать

$$[0, 3] = [3, 4] = [4, 6] = [4, 8] = 1,$$

в остальных случаях $[i, j] = 0$.

Величины (функции) $[i, j]$ удобно в общем случае представить в виде таблицы (матрицы) вида

$$\left\| \begin{matrix} [0, 0] & [0, 1] & \ldots & [0, 9] \\ [1, 0] & [1, 1] & \ldots & [1, 9] \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ [9, 0] & [9, 1] & \ldots & [9, 9] \end{matrix} \right\|, \quad (4)$$

которую мы обозначим $\| i, j \|$. Эта матрица при данном выше определении $[i, j]$ обычно называется матрицей смежности соответствующего графа, который можно построить, придавая $[i, j]$ те или иные значения (0 или 1). Нетрудно видеть, что в матрице (4) 100 функций $[i, j]$ $(i, j = 0, 1, \ldots, 9)$. Каждая из этих функций независимо в общем случае от других принимает два значения 0 или 1. Отсюда всего возможно 2^{100} различных матриц вида (4), характеризующих последовательность событий или композицию альтернатив.

Если бы на анализ каждого варианта Анна тратила всего лишь одну секунду, то и тогда ей нужно было бы думать значительно больше, чем прошло времени со дня возникновения солнечной системы. Конечно, ряд вариантов лишен смысла (и это очевидно сразу), например $[i, i] = 1$ при любом i. Но эти ясно абсурдные варианты тоже ведь надо выделить. Что касается таких вариантов, которые кажутся на первый взгляд абсурдными, то, кто знает, может среди них и следует искать наилучший. Ведь новое всегда неожиданно и инерция мышления зачастую плохой советчик, как об этом свидетельствует, например, развитие науки. Так или иначе, эти варианты надо анализировать. Сделала ли это Анна в достаточной степени? Здесь, как обычно, можно возразить, что Анна не вычислительная машина и ей незачем заниматься непосредственным перебором всех вариантов, она и так интуитивно знает, что лучше и что хуже. Мышление не всегда сводится непосредственно к последовательному перебору. Да, это, конечно, так. Но несомненно, что в результате мышления должен быть сделан выбор, при котором астрономическое число вариантов так или иначе сводится к малому числу, в пределе — к одному, который обычно и связывается с тем или иным решением. При этом выборе нам помогают и чувства, и интуиция, и предшествующий опыт других людей, воплощенный в законы, принципы и предрассудки. «... Вронский и Анна продолжали сидеть у маленького стола. — Это становится неприлично, — шепнула одна дама» [10]. Итак, «неприлично», а что это, в сущности, значит? Только то, что так поступать нельзя, что сразу уменьшает число вариантов тех или иных поступков, т. е. облегчает выбор. В пределе его вообще нет. Жесткая система правил, определявшая жизнь высшего света во времена Анны, сводила поведение любого человека по существу к бездумному выполнению этой системы и освобождала его от необходимости выбора.

В другие времена законы и правила были другими, иногда лучше (древняя Греция), иногда хуже (средние века) с нашей точки зрения. Но они всегда были. И трудно отделаться от мысли, что эти ограничения выработаны человечеством для облегчения решения задачи выбора в связи с невозможностью ее решить непосредственным перебором. Но в таком случае далеко не всегда решение может оказаться наилучшим в том или ином смысле. А наилучшее решение, даже если оно и найдено, не всегда приемлемо. Как заметил А. Сент-Дьерд, «... тот, кто логически доводит мысли до конца, совершенно не заботясь о последствиях, должен обладать исключительной, почти патологической конституцией. Из таких людей выходят мученики, апостолы или ученые, и большинство из них кончает на костре или же на стуле — электрическом или академическом» [3]. Как бы там ни было, у Анны вариантов было все-таки много, чтобы не сказать — слишком много, и стоило бы все-таки рассмотреть некоторые из них прежде, чем сказать «нет», ограничиваясь одной последовательностью (1) из пяти событий. Это, конечно, не значит, что необходимо обязательно рассматривать каждый вариант в отдельности. Мы уже убедились, что это невозможно даже в случае всего лишь десяти альтернатив.

Попробуем представить себе, как, пусть подсознательно, это могла бы делать Анна. Прежде всего, видимо, отбрасывались какие-то альтернативы, которые были неприемлемы ни при каких условиях (возможно, *7*). Оставлялись только те возможные события, которые казались существенными, важными. После этого та же операция осуществлялась со связями этих событий, часть из которых отбрасывалась просто подсознательно и даже не рассматривалась на уровне сознания (например, $2 \to 0$), а часть, возможно, требовала известных размышлений ($1 \to 2$). Затем могли бы рассматриваться и более сложные варианты, состоящие из трех и более альтернатив, без учета уже отброшенных вариантов меньшей размерности и т. д. Мы, разумеется, не станем утверждать, что Анна мыслила именно так, да это и не важно. Важно другое. В любом случае при первоначальном ли выборе альтернатив, или анализе их возможных последовательностей — композиций альтернатив, которые тоже, конечно, можно рассматривать как некоторые «составные» альтернативы, Анна осуществляла некоторый выбор. Основания для выбора (ОВ) могли быть разные: чувства, логические соображения, объективные обстоятельства, но они были. И здесь уместно несколько уточнить используемую терминологию.

Прежде всего те первичные альтернативы, которые Анна выбрала, не являются, по-видимому, ни единственно возможными, ни исчерпывающими. А почему бы, например, не рассмотреть альтернативу «я порву с этим обществом». Она неприемлема для Анны, но объективно ведь возможна. С другой стороны, разумеется, можно придумать и такие альтернативы, которые в то время были, в принципе, невозможными (например, «я пойду на курсы математиков-программистов»). Те же соображения можно высказать и о композициях альтернатив.

Таким образом, ОВ можно условно разбить на две части: 1) ОВ, которые не зависят от Анны и носят объективный характер; их мы назовем ограничениями (О); 2) ОВ, которые определяют тот или иной выбор самой Анны; такие ОВ мы назовем субъективными критериями (СК).

Так, условия $[i, i] = 0$ при любом i можно было бы считать следствием ограничения типа: никакое событие не осуществляется дважды подряд. Скажем, разводиться дважды подряд с Карениным абсурдно во всех случаях. А вот желание поступить так или иначе допустимо отнести к СК.

Введение ОВ в явном виде означает, другими словами, что мы хотим найти причины тех или иных решений и поступков. Простое описание фактов жизни Анны (условно —

дескриптивное описание) было бы не очень интересным. А вот описание, основанное на знании причин ОВ (нормативное описание), было бы куда более интересным, ибо важны не дороги, которые мы выбираем, а то, что заставляет нас их выбирать. Но, конечно, такое описание значительно труднее, поэтому в общем случае даже простое обсуждение понятия ОВ не может быть удовлетворительно выполнено сразу. Оправдав таким образом возможные промахи, вернемся все же к этому сложному вопросу.

Прежде всего, деление на О и СК далеко не однозначно. Можно было бы образно считать, что СК характеризуют субъективную степень достижения целей, а О — объективные условия. Однако все это весьма неопределенно, как, впрочем, и любое другое соглашение, в связи с неоднозначностью используемых слов и понятий. Поэтому мы не будем здесь анализировать трудности, связанные с понятием ограничения, а остановимся только очень кратко на СК. Для Анны СК являются, в конечном счете, чувства и рациональные соображения. Что здесь первично, а что вторично и имеет ли вообще смысл такой вопрос, мы здесь рассматривать не будем. Просто пока условимся считать, что у Анны были какие-то основания (СК) выбрать в рамках существующих ограничений ту или иную композицию альтернатив, которую в этом случае мы будем называть оптимальным планом.

Любую другую композицию, удовлетворяющую принятым ограничениям, назовем просто планом. Все было бы вполне прилично, если бы не одна тонкость, связанная с понятием СК, которую все-таки обойти нельзя. Несомненно, что СК, осознанные или нет, правильные или нет (с чьей точки зрения?) в той или иной степени были у Анны в любой момент ее жизни. «Степень наличия» СК определяется тем, что некоторые из этих СК были неопределенными. Часть из них была взаимно противоречивой; некоторые очень сильно изменялись на протяжении романа в зависимости от множества явных или неявных факторов и в том числе в зависимости от выбранных ранее субъективно оптимальных планов, существующих ограничений и т. д.; иногда СК было слишком много, а иногда недостаточно и тогда (но не только тогда) выбор был затруднен.

И вот здесь возникает та тонкость, о которой следует сказать явно. Если считать, что СК Анны определяют всегда ее оптимальный план, то тогда по самому определению СК она поступила оптимально и обсуждать, в сущности, нечего. С другой стороны, если полагать, что она сделала выбор не в соответствии со своими СК, то, естественно, возникает вопрос, а в связи с чем? Вопрос не такой невинный, ибо, в конце концов, он связан с определением такого понятия, как личность, и с массой других, не менее неясных проблем. В этом деле, допустим, что у Анны есть «ложные» и «истинные» СК, о которых она ничего не знает. Например, руководствуйся она «истинными» СК, ей вообще следовало бы абстрагироваться от своего общества и поехать в Лондон к Герцену выпускать «Колокол». Но в таком случае это, вероятно, была бы уже не Анна Каренина, а кто-то другой. Это не значит, что исключается возможность изменения СК. Но речь просто идет об определенной последовательности. Вначале выбор при данных СК, а уже затем возможное изменение и самих СК, т. е. СК инерционнее выбора. Поэтому будет принято следующее условие: Анна поступила оптимально, если никакая дополнительная информация о других возможных планах не изменила бы ее выбор. Иными словами, мы принимаем гипотезу о том, что первичной причиной неоптимальности плана для Анны являлся недостаток информации о других возможностях. Этот недостаток может быть связан с различными причинами, но одна из главных — это ограниченное время анализа имеющейся информации. Мы уже видели, что даже в пределах десяти альтернатив число планов, по-видимому, очень велико. Поэтому как бы там ни было, к рассмотрению допускаются далеко не все планы, особенно в условиях ограниченного времени, и какой бы «немашинный» метод анализа не был у Анны, она могла бы упустить оптимальную для себя (своих СК) возможность.

Предварительный выбор альтернатив и планов, оптимальных для СК в начале романа, прекрасно описан Л. Н. Толстым: «Она перебрала все свои московские воспоминания. Все были хорошие, приятные. Вспомнила бал, вспомнила Вронского и его влюбленное покорное лицо, вспомнила все свои отношения с ним; ничего не было стыдного. А вместе с тем на этом самом месте воспоминаний чувство стыда усиливалось, как будто какой-то внутренний голос именно тут, когда она вспомнила о Вронском, говорил ей: «Тепло, очень тепло, горячо» [10, стр. 89].

Ну что же, может быть Анне помогла бы ЭВМ? Возможно, если бы удалось описать ее СК. В противном случае ЭВМ работала бы как гадалка, может быть хуже, может быть лучше, в зависимости от степени описания СК Анны.

Пока слову «описать» мы придаем чисто интуитивный смысл. И в этом смысле несомненно можно сказать, что СК Анны плохо описываемы. Поскольку это скорее правило, чем исключение, имеет смысл ввести на интуитивном уровне общее понятие плохо описываемой системы [12].

Теперь следует отметить, что альтернативы и их композиции (планы) были разными на протяжении романа. Было бы очень интересно построить соответствующие графы для разных частей романа, но это специальная задача, которая могла бы заинтересовать литературоведов. Для нас существенно, что все процессы протекали во времени и те возможные события, которые казались Анне важными вначале или о которых, наоборот, вообще не могло быть и речи (событие *9*), исчезали или появлялись в соответствии с изменением ОВ — объективных или субъективных.

Итак, если обозначить буквой А множество альтернатив, то и они сами и их число n зависят от времени t (A_t, n_t). Аналогично зависят от времени и связи между альтернативами и их возможные композиции. Если нумеровать альтернативы с самого начала и не изменять нумерацию (а только добавлять по мере возникновения новые), то можно считать, что $[i, j] = [i, j]_t$, где $i, j = 0,1, \ldots, n_t$ и n_t — общее число пронумерованных на данный момент альтернатив. Если какая-то альтернатива i_1 становилась несущественной после момента t_1, то $[i_1, j]_t = [j, i_1]_t = 0$ для всех $t \geqslant t_1$ и всех j. Если, наоборот, после момента t_2 появлялось какое-то новое возможное событие (например, 7 или *9*), то ему можно присвоить новый номер i_2, и его существенность состоит, в частности, в том, что $[j, i_2]_t \neq 0$ или $[i_2, j]_t \neq 0$ хотя бы для одного j при $t \geqslant t_2$. Можно, конечно, считать, что важность некоторых альтернатив периодически зависела от времени — они то были существенными, то нет. Как описывать их с помощью введенного формализма, очевидно. В соответствии с изменением во времени величины $[i, j]_t$ меняются и матрицы смежности (4), а также направленные графы (диграфы), которые можно построить на основе этих матриц. В той или иной форме Анна должна была анализировать изменения во времени и числа и характера возможных событий и их взаимосвязей. Так что задача очень не из простых. Но это задача выбора тех или иных альтернатив и их композиций (планов) в условиях изменяющихся оснований для выбора, зависящих от обстоятельств и характеров героев.

Таким образом мы принимаем, что множество альтернатив, их композиций и результатов выбора в «Задаче Анны» зависит от времени $A = A_t$, $K = K_t$, $P = P_t$. Аналогично основания для выбора также зависят от времени (OB_t). Можно ли считать, что характер зависимости ОВ от времени предопределяет характер зависимости A_t, K_t, P_t? Хотя вопрос и поставлен в очень общей форме, он не так прост, как кажется на первый взгляд. Это становится очевидным, если его попытаться сформулировать в виде: предопределяли ли обстоятельства выбор Анны или у нее все-таки была «свобода воли»? Чтобы не заниматься обсуждением этих сложных вопросов, мы используем вместо слов «обстоятельства выбора» слова «основания для выбора», считая, что если знать все «основания», тогда выбор предопределен. Но дело в том, что знать мы их, как правило, не можем и поэтому для «свободы воли» всегда остается возможность хотя бы в виде «свободы ошибок» или «свободы незнания». Итак, если известно OB_t, то это в какой-то степени предопределяет зависимость K_t и в меньшей P_t оставляя место «свободе воли». Однако далеко не всегда наличие такой «свободы» является желательным: ведь вполне может быть, что «свободный» поступок Анны все-таки просто являлся следствием обыкновенного недосмотра, незнания лучшего и для нее и для окружающих Р. Естественно, поэтому стремиться к более полному определению и оснований, и результатов выбора. В «Задаче Анны» ОВ зависело не только от времени, но и от тех или иных прежних поступков Анны, так как эти поступки влияли и на нее, и на окружающих, что в свою очередь приводило к изменению ОВ для самой Анны. Это составляет важную особенность «Задачи Анны».

Кратко особенности этой задачи можно записать в виде:

1) число альтернатив и их композиций всегда конечно;

2) $A = A_t$; $K = K_t$; $P = P_t$;

3) $OB = OB_{t, P_{t_1}, P_{t_2}, \ldots, P_{t_m}}$, (5)

где $t_1, \ldots, t_m$ — моменты «выбора», предшествующие t; 4) ОВ являются плохо описываемыми (мы здесь явно не выделяли из ОВ отдельно О и СК).

Решить эту задачу — это найти такой план P_t, который бы удовлетворял наилучшим образом ее СК в рамках существующих OB_t. «Задача Анны» весьма сложна и обща (именно поэтому мы с нее начали), но по постановке ничем не отличается, например, от задачи выбора вариантов проекта, выбора структуры системы телемеханики, расстановки станков и планировки оборудования, оперативного планирования производства, синтеза форм нейтронов, расположения избирательных округов [24] и т. д., ибо все это — задачи выбора, правда, в более простом случае, когда А, К, Р, ОВ не зависят от времени и ОВ имеет достаточно простое явное выражение. Однако методологически это те же задачи дискретного программирования, отличающиеся просто различным уровнем сложности. Именно эта общность позволяет нам часто говорить о системах, независимо от того, что они собой представляют.

§ 2. Н-МОДЕЛИ И Р-МОДЕЛИ

Анна думала.... А что это, собственно, значит? Объективно вне ее существовали какие-то люди — Вронский, Кити, Сережа, а она сидела в коляске совсем одна и строила в своем воображении «модели» своих взаимоотношений с этими людьми. Конечно, Анна сочла бы неуместной шуткой, если бы ей сказали, что она занимается моделированием, но это, увы, так. Кстати, неприятное чувство, связанное с этим словом, вполне объяснимо. Ведь моделируют сейчас и машины. Но машина «не может выйти из рамок предопределенности, осуществить критическую функцию, переходить от конкретного к абстрактному, обучаться, изобретать» [5].

А человек, естественно, все это может, если его научить и это в данном конкретном случае возможно. Однако не всякого научишь, а если и научишь, то не сразу. Да, но ведь то же можно сказать и о машинах, которые по сравнению с возрастом человечества, мягко говоря, весьма молоды, а уже все-таки что-то могут. Может быть они смогли бы даже помочь Анне выбрать правильное решение? Но пока оставим этот сюжет. Важно только, хотим мы этого или нет, мышление все-таки это какие-то операции не с реальными объектами, а с их моделями (чтобы они собой не представляли) в мозгу. В этом смысле мышление человека отличается от «мышления» машин только характером моделей.

Итак, если определить моделирование как замену одних объектов, связей и процессов другими так, чтобы между ними соблюдалось определенное соответствие, то и человек и машина моделируют. Различие может состоять только в характере моделей и точности соответствия. Если обозначить то, что моделируется (моделируемую систему), буквами МС, а ее некоторую модель (систему моделирующую) буквами СМ, то сказанное выше можно условно записать в виде пока практически малосодержательного выражения

$$\text{МС} \to \text{СМ}. \tag{6}$$

Можно ли считать, что МС — это фрагмент объективной, а СМ — «субъективной» реальности? К сожалению, слово «модель» употребляется и тогда, когда и МС и СМ принадлежат к одной и той же «реальности» (так, муляж — модель человека, а мысли иногда — модели чувств). Если же, например, инженер проверяет свои расчеты на некоторой экспериментальной установке, то эта установка является объективной моделью его субъективных представлений. Так что такая классификация по существу беспредметна. Это и естественно и пока (6) — это просто сокращенная условная запись того, что некоторая система МС моделируется с помощью другой системы СМ в интуитивно описанном выше смысле.

И тем не менее некоторую классификацию моделей на основе соотношения (6) мы все-таки предложить можем;

1) МС может существовать (объективно или субъективно) как некоторая система, которую мы хотим изучить, построив для этой цели СМ; это соответствует обычному интуитивному пониманию слова «модель» и в этом случае СМ будем называть номиналистической моделью (Н-моделью);

2) СМ — система, строение которой нам известно и на которой мы проверяем истинность какой-то другой системы МС; такое понимание модели обычно используется в теории моделей [11], мы будем называть ее реалистической[1] (Р-моделью [8]).

Не следует думать, что Р-модели являются чем-то надуманным. Обратимся снова к размышлениям Анны. Она явно строит Н-модель системы своих взаимоотношений с другими людьми. Но как? «....Что же Кити перестанет так смотреть....? Нет.» и т. д. Разве это не проверка истинности какой-то части общей Н-модели, которая строится путем сопоставления ее частей с какой-то другой системой, Р-моделью, истинность которой для Анны бесспорна. В противном случае, что же позволяет Анне сказать «нет»?

Чтобы у читателя не сложилось впечатление, что автор жонглирует понятиями, которые никогда никого не интересовали, отметим, что «Гильберт (1926, 1928) устанавливает различие между «действительными» и «идеальными» предложениями классической математики, сущность которого состоит в следующем. *Действительные предложения* — это те, которые рассматриваются, как имеющие содержатель-

[1] Термины «номиналистический» и «реалистический» построены на основе названий двух основных философских школ, существовавших в средние века.

ный смысл, а *идеальные предложения* — это те, которые так не рассматриваются» [30]. Если «действительные предложения» назвать Р-моделями, опустить слова «классической математики» и уточнить «идеальные предложения» как синтаксически истинные, назвав их Н-моделями, то у читателя могут остаться только претензии другого рода.

Построение Н-модели любой системы предполагает проверку истинности частей, фрагментов, этапов, подмоделей строящейся Н-модели, т. е. любая система может оказаться и Н-моделью и Р-моделью. Более того, после построения Н-модели ее проверка в конце концов осуществляется путем сравнения с исходной системой (пусть в другой момент времени и по каким-то другим показателям). Поэтому обозначая одну из систем буквой S_1, а другую — S_2 и условившись, что стрелка направлена от МС к СМ, можно написать

$$S_1 \rightleftarrows S_2, \tag{7}$$

т. е. одна и та же система S_1 является то МС, то СМ (и тогда МС становится другая). Но при этом вначале S_2 является Н-моделью, а затем S_1 — Р-моделью. Если принять дополнительное условие, что стрелка слева направо это переход к Н-модели, а справа налево — к Р-модели и обозначить некоторое множество систем символами S_0, S_1,....., то в общем случае можно было бы построить диаграммы, которые характеризовали бы взаимосвязи Н- и Р-моделей в каждом конкретном случае.

Одна и та же система может иметь, разумеется, самые различные Н-модели, что можно условно записать в виде

$$S_0 \rightarrow S_i, \qquad i = 1, \ldots, n. \tag{8}$$

Но одна и таже Н-модель может быть принята для самых различных систем:

$$S_j \rightarrow S_0, \qquad j = 1, \ldots, m. \tag{9}$$

В первом случае можно считать, что система описывается с различных точек зрения. Так, человека можно описывать как млекопитающееся, систему молекул и т. д. Во втором случае об Н-модели S_0 можно сказать, что она является абстрактной. Причем интуитивно «степень абстракции», по-видимому, связана с числом систем, которые описывает данная Н-модель, и растет вместе с этим числом.

Обратим стрелки в диаграммах (8) и (9). Тогда получим следующие диаграммы для соотношения МС и СМ:

$$S_0 \leftarrow S_i; \tag{10}$$

$$S_j \leftarrow S_0. \tag{11}$$

Первая диаграмма означает, что S_0 является Р-моделью для систем $S_1, \ldots, S_n$. Теперь систему S_0 уже нелогично называть абстрактной. Так, конкретный человек может быть Р-моделью, на которой проверяются в коллективе первоначальные представления (Н-модели) о нем как о работнике, гражданине и человеке. В отличие от диаграммы (9), где S_0 — Н-модель, содержащая только наиболее существенные черты, присущие системам $S_1, \ldots, S_m$; S_0 в диаграмме (10), будучи Р-моделью, является синтетической, комплексной системой, на которой можно проверить самые различные Н-модели. В свою очередь, диаграмма (11) означает, что (дедуктивную) Н-модель S_0 можно проверить на самых различных системах (Р-моделях).

Интересно, что уже сейчас чисто формально мы можем получить некоторые диаграммы, которые при всей их отвлеченности наглядно иллюстрируют первичные и часто используемые слова и выражения. Рассмотрим, например, множество диаграмм типа (9) при несколько измененных обозначениях:

$$S^1_{i_k} \to S^2_k, \qquad i_k = 1, \ldots, m_k; \quad k = 1, \ldots, n.$$

Пусть

$$S^2_k \to S^3_r.$$

Тогда можно получить уже трехуровневую диаграмму вида:

$$S^1_{i_k} \to S^2_k \to S^3_r. \tag{12}$$

Теперь естественно говорить об уровнях абстрактности моделей: $S^1_{i_k}$ первого уровня, S^2_k второго и т. д. При этом S^2_k для заданного k является моделью моделей $S^1_{i_k}$ для различных i, соответствующих данному k. Удобно считать, что модель моделей—модель^2, модель моделей^2— модель^3. Так S^3_r является моделью^3 по отношению к $S^1_{i_k}$. В общем случае будем говорить, что некоторая модель S является метамоделью σ, если они (модели) принадлежат разным уровням абстрактности в рамках диаграммы типа (12) (метамодель = модель^l; $l > 1$. При $l = 2$ метамодель — теория). Принятый способ индексирования уровня абстрактности моделей наводит на мысль рассматривать этот уровень формально, как некоторую степень (системности) одной модели (системы) относительно другой. Если S и σ две модели, то степень

S относительно σ — $C\{S/\sigma\} = l$, если S — модель^l σ. А можно ли рассматривать $C\{\sigma/S\}$, выбирая в качестве «начала отсчета» более абстрактную модель S, обращая, например, стрелки в диаграмме (12)? Здесь формально имеются две возможности — использовать дробные или отрицательные показатели. Дробные «степени системности» удобно использовать при индексировании непосредственно символа модели. Так, если, например, положить $C\{\sigma/S\} = 1/2$, то тогда допустима запись $\sigma = S^{1/2}$ и $S = \sigma^2$, которую можно считать сокращением фразы: S — модель модели σ. При этом $C\{\sigma/S\} \times C\{S/\sigma\} = 1$. В некоторых случаях более удобным может оказаться введение отрицательных «степеней системности». Например, $C(S/\upsilon) = +2$ и $C(\sigma/S) = -2$ приводит к «соотношениям» S модель^2 σ;σ-модель$^{-2}$ S, откуда ясно, что во всех случаях $C(S/\sigma) + C(\sigma/S) = 0$ и «алгебра соответствует логике». Такой способ индексирования формально удобен при анализе сложных «многоуровневых» моделей. Поскольку интуитивно любая модель является системой, то, по-видимому, такая символика может оказаться правомерной и в этом случае (ср. § 4). Все это пока не более чем возможная иллюстрация путей возникновения абстрактных понятий и формализованных Н-моделей на основе обобщения некоторых наблюдений в соответствии с «индуктивной» диаграммой (9). Действительно, наблюдая некоторые частные формальные закономерности в обозначениях, мы приходим к понятию степени системности, которая в соответствии с «дедуктивной» диаграммой (11) может иметь смысл (Р-модели) в гораздо большем числе случаев. А как происходит само формирование Н-моделей? Рассмотрим некоторую Р-метамодель. Пусть имеется система степени α (существующая) в момент t — $\underset{c}{S_t^\alpha}$, причем она реализует некоторые функции $\underset{c}{\Phi_t^\alpha}$ ради достижения определенных целей $\underset{c}{Ц_t^\alpha}$. Мы хотим «спроектировать» (возможно в другой момент времени τ) для удовлетворения других целей $\underset{n}{Ц_\tau^\beta}$, реализуемых с помощью функций $\underset{n}{\Phi_\tau^\beta}$, некоторую другую систему $\underset{n}{S_\tau^\beta}$. При этом в той или иной степени мы используем наш опыт, закрепленный в ранее реализованных системах $\underset{p}{S_\theta^\gamma}$ с соответствующими функциями $\underset{p}{\Phi_\theta^\gamma}$ и целями $\underset{p}{Ц_\theta^\gamma}$. Последовательность «проектирования» можно условно изобразить в виде диаграммы «анализ-синтез-адаптация», которая, в частности, может иметь вид:

$$\begin{tikzcd}
\underset{c}{\text{Ц}}{}^{\alpha}_{t} \arrow[r] & \underset{n}{\text{Ц}}{}^{\beta}_{\tau} \arrow[r, leftrightarrow] \arrow[d] & \underset{p}{\text{Ц}}{}^{\gamma}_{\theta} \\
\underset{c}{\Phi}{}^{\alpha}_{t} \arrow[u] & \underset{n}{\Phi}{}^{\beta}_{\tau} \arrow[r, leftrightarrow] \arrow[d] & \underset{p}{\Phi}{}^{\gamma}_{\theta} \arrow[u] \\
\underset{c}{S}{}^{\alpha}_{t} \arrow[u] & \underset{n}{S}{}^{\beta}_{\tau} & \underset{p}{S}{}^{\gamma}_{\theta} \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

Анализ осуществляется «слева» от «систем — к целям», синтез — «посредине» от «целей — к системам» с адаптаций уже реализованного к проектируемому и наоборот — правая часть диаграммы. Можно рассматривать взаимосвязи (морфизмы, см. § 7) и между любыми другими индексируемыми точками квадрата (так удобно говорить об $\underset{c}{S}\ \underset{n}{S}$ — морфизмах: $\underset{c}{S} \to \underset{n}{S}$; $\underset{c}{\Phi}\ \underset{n}{\text{Ц}}\ \underset{n}{\Phi}$ морфизмах: $\underset{c}{\Phi} \to \underset{n}{\text{Ц}} \to \underset{n}{\Phi}$ и т. д.). При этом если мы из одной какой-то точки приходим в другую разными путями, то логично требовать, чтобы результат был одним и тем же — соответствующие частные диаграммы были бы «коммутативными». «Морфизмы» для конечных множеств реализуются с помощью матриц перехода.

Теперь следует отметить, что на самом деле мы имеем дело не с одной диаграммой, а с двухпараметрическим семейством, индексируемым параметрами степени системности и времени. Так что возникает интересная проблема увязки различных диаграмм на основе дедуктивных предположений (например, типа $\underset{c}{\text{Ц}}{}^{\alpha} = \underset{c}{\Phi}{}^{\alpha+1}$, что возможно имеет смысл для иерархических систем) и/или индуктивного анализа с соответствующим ранжированием по степени «важности, истинности» с введением соответствующих мер (ср. гл. II, § 1, п. 5). Можно интерпретировать «проектируемые» системы как создаваемые Н-модели существующих систем, адаптируемые к Р-моделям («созданным» системам). Эта диаграмма, однако, может быть полезной и при описании, например, динамических целевых программ и их подклассов (эволюционных, развивающихся и т. д.). Так что дедуктивная формализованная теория хотя и строится (всегда?) индуктивным путем на основе рассмотрения частных случаев, имеет более широкую область применения. А что такое формализованная теория? Она является «грубо говоря, множеством некоторых конечных последовательностей символов и множеством некоторых простых операций, производимых над этими последовательностями» [9].

Но почему все-таки нужны формализованные теории? Прежде всего потому, что в соответствии с приведенным определением неформализованных просто не существует. Ведь любой письменный текст, даже если это роман, как нетрудно видеть, удовлетворяет приведенному определению. Можно, правда, возразить, что операции над словами и фразами —не простые, но, во-первых, для кого как, а во-вторых, что такое простота вообще? Мы будем считать, что «простота» определяется тем, что отмеченные выше правила можно сообщить любому человеку, так чтобы он их понял и сумел использовать, то есть эти правила общезначимы [8] в указанном здесь смысле. Тогда можно считать, что арифметика — формализованная теория, а роман «Анна Каренина» — нет, хотя бы потому, что правила построения этого романа были известны только его автору (а то, что они в определенном смысле были, следует просто из того факта, что роман создан). Формализованные теории в этом понимании являются общезначимыми «последовательностями». Формализация, начинающаяся с использования определенной символики — это возникновения какого-то нового качества или, как отметил Гете: «Математики — это некоторый род французов: если говоришь им что-нибудь, они переводят это на свой язык, и тогда это становится тотчас же чем-то совсем другим» (цит. по [9]).

Конечно, все что здесь сказано — бездоказательно, но, возможно, достаточно по крайней мере для того, чтобы иметь право употреблять термин «моделирование» и тогда, когда речь идет о мышлении человека. Мы не ставим знак равенства между мышлением и моделированием: может моделирование — элемент мышления, а может мышление — весьма частный случай моделирования. В конце концов, дело не в словах, если нет соответствующих общезначимых моделей. И пусть Анна думает. Мы будем моделировать этот процесс, используя пока сокращения, а затем — математику.

§ 3. МОДУЛЬНЫЕ ПОНЯТИЯ

О чем думает Анна? Прежде всего о себе, о Вронском, Кити, Сереже и неявно о Каренине (см. цитату на стр. 9). Это объекты ее мышления (моделирования), являющиеся образами существующих конкретных людей вне ее. Наравне с этим в рассуждениях Анны фигурируют и другие объекты: «муж», «чувство», которые характеризуют лишь, по сути, некоторые состояния или взаимосвязи конкретных объектов. Это тоже объекты, но объекты другого рода — абстрактные, поскольку они могут характеризовать в том или ином смысле не один конкретный объект, а сразу какое-то их множество.

В рассуждениях Анны встречаются в меру и конкретные объекты и абстрактные, у людоедки Эллочки, как правило, только конкретные (и их мало), у Гегеля, например [6], только абстрактные (и их много), а у Х. Басса [7] и других математиков тоже только абстрактные (но их снова почему-то мало). Обсуждение этого интересного факта мы проведем впоследствии (см. § 6), а сейчас для нас важно только то, что при моделировании вначале должны быть выделены некоторые объекты (конкретные или абстрактные). При этом конкретные первичные объекты существуют чаще всего как объекты внешнего мира, в то же время, как абстрактные объекты уже не являются первичными, а суть некоторые результаты предшествующих событий и моделирования. Так или иначе, никакая модель где бы то ни было (в голове или в машине) не может быть построена, если не выделены объекты моделирования, которые отображаются на объекты модели. Однако, что считать объектом моделирования, не очень ясно. В одних случаях Вронский может быть первичным объектом, если он как нечто целое рассматривается в более сложной системе, в других — он сам (у врача после падения с лошади на скачках, например) является МС. Поэтому можно ввести понятие первичных объектов-индивидуалов, или индивидов [9], которые, конечно, являются таковыми только в рамках данной модели (и вполне могут оказаться сложными МС в других случаях). Так, в технике первичным является материал, в химии — атом, в физике — элементарная частица, у человека в данный момент — определенные убеждения, а у машины — команда. В СМ индивидам соответствуют индивидуальные переменные, символизирующие произвольные объекты (индивиды) [9]. В формализованных теориях — это некоторые знаки, но мы будем понимать их в более широком смысле, как индивиды системы моделирования. В соответствии с этим и (1) будем говорить о моделируемых индивидах МИ и индивидах моделирующих ИМ. Тогда можно символически написать

$$\text{МИ} \to \text{ИМ}. \tag{13}$$

Эта диаграмма в некотором смысле является следствием диаграммы (6). В соответствии с диаграммой (7) некоторые индивиды, являясь элементами определенной системы S, могут выступать либо как МИ, либо как ИМ, в зависимости от того, рассматривается ли S как моделируемая система или как модель (Н или Р). В любом случае моделированию должно предшествовать выделение МИ в данной системе и выбор соответствующих ИМ для Н-модели.

Самое существенное состоит в том, что элементарность, первичность индивидов как моделируемых, так и моделирующих, является относительной не только по их значению, но и по их проявлению как объектов. Так, слово состоит из букв, но ведь и каждая буква может быть проанализирована как сложное образование (например, в теории распознавания образцов).

Но вернемся к индивидам моделирования Анны. Вронский, Кити, Сережа — это несомненно МИ, которым в пределах данного рассуждения Анны соответствуют какие-то неизвестные нам состояния в ее мозгу, в логических рассуждениях какие-то условные ИМ — их имена, изображаемые, в частности, на бумаге с помощью тех или иных символов (например, букв). Но Анна и мы с ней уверены в их реальном существовании. А вот что такое «муж»? Вне нас это не один определенный, единственный объект, а некоторое наименование, выражающее довольно сложную систему признаков, отношений, состояний и т. д. реальных объектов. Любой человек, в том числе, конечно, и Анна имеет определенную модель для этого понятия, и зачастую индивидуальные модели не очень совпадают. Тем не менее, в пределах приведенных рассуждений Анны понятие «муж» не анализируется и является явно первичным — его смысл предполагается известным. Это индивиды моделирования, которые в других частях романа вполне могут рассматриваться как сложные образования. За ними стоят какие-то системы представлений, которые могут быть рассмотрены как Н-модели или представлены как МС при наличии некоторой Р-модели. Во всех случаях имеется некоторое множество признаков и отношений между ними (модель), которое кратко индексируется понятием «муж». Образование любых понятий, возможно, осуществлялось путем «навешивания ярлычков» на наиболее часто употребляемые модели. Итак, понятия являются некоторыми условными обозначениями — «ярлычками», для наиболее часто употребляемых или, возможно, наиболее важных в том или ином смысле осознанных или неосознанных моделей. Понятия, как и соответствующие модели, обладают различным уровнем абстрактности. Конечно, они могут быть плохо описываемыми (как и соответствующие модели), но это принципиально не меняет суть дела.

Здесь мы снова обратимся к электронным вычислительным машинам (которые ведь тоже моделируют). При некоторых часто встречающихся стандартных вычислениях (например, вычислениях некоторых функций) в математическом обеспечении машины предусмотрены стандартные подпрограммы. Чтобы машина начала вычисления по этой программе, достаточно указать исходные данные и код программы. Незачем указывать каждый раз всю последовательность операции — они машине уже «известны». Итак, для машины одно сравнительно короткое слово (машинное) кодирует целую сложную систему операций, которые она выполняет уже, так сказать, «в подсознании». Может быть нечто подобное возникает, когда мы заменяем какую-то модель сложной системы ее названием или символом? Конечно, аналогия неполная, ибо когда Анна, например, думала о Вронском, то для нее это была одна «подпрограмма», а для кого-то другого — иная. Но важно то, что за этим словом скрывались, пусть разные у разных людей в разное время, но все же какие-то стандартные для каждого человека Н-модели.

«Однако, — скажет читатель, — все-таки машины это не то, ибо даже, если согласиться с некоторой аналогией между подпрограммами и кодированными Н-моделями, все равно человек индивидуален. Более того, у человека имеется такая интеллектуальная способность, которая позволяет ему добавлять новые средства своей собственной конструкции к существующей интеллектуальной способности и это, по-видимому, главная специфика человека». Если читатель действительно так думает, то нам придется его разочаровать. Берем прикладную книгу П. Брауна «Обзор макропроцессоров» [18] и на стр. 7 читаем: «Макропроцессор будет определен как часть математического обеспечения, разработанная для того, чтобы позволить пользователю добавлять новые средства его собственной конструкции к существующей части математического обеспечения». Если заменить «математическое обеспечение» на «интеллектуальную способность», то разница между человеком и машиной в рамках обсуждаемых здесь Н-моделей будет состоять только в том, что человек «сам себе все разработал (?)», а машина нет.

Так или иначе в рамках любого размышления (программы) существуют некоторые понятия («ярлычки», коды), являющиеся кратким названием уже известных Н-моделей (подпрограмм). Назовем такие понятия, которые в данных условиях выступают как наименования сознательно не анализируемых Н-моделей — модульными понятиями, или М-понятиями. Если М-понятия индексируют метамодели, их будем, естественно, называть метапонятиями. Так, слова «чувство, мучение, счастье» в рассуждениях (моделях) Анны являются М-понятиями. Однако эти М-понятия не одинакового уровня, ведь и мучение и счастье — это чувства, но не наоборот. Поэтому чувство является более общим понятием — метапонятием по отношению к тому уровню абстракции, который определяет мучение и счастье как понятие. Но ведь этот уровень условен «снизу», как, впрочем, и само понятие «чувство» не является самым верхним из возможных уровней абстракции. Так, понятие «состояние» является, по-видимому, еще более высоким уровнем абстракции, ибо может быть не только «состояние подсознания» — чувство, но и «состояние сознания» и вообще «состояние» чего угодно. Таким образом, действительно можно говорить о понятиях различного уровня. Обозначая для сокращения метапонятия как понятия^n («понятие понятий» и т. д.), можно условно говорить о понятиях в соответствии с различными уровнями абстракции. В этом смысле, говоря кратко, метапонятия — это просто понятия более высокого уровня абстракции. Эти обозначения на уровне примитивной символики отображают, однако, одну из основных черт человеческого мышления — способность к абстрагированию, без которой, по-видимому, вообще ни о каком мышлении не могло бы быть и речи.

А чем нам может помочь способность к абстрагированию? Прежде всего тем, что резко сокращает число рассматриваемых альтернатив и их композиций. Так, в «Задаче Анны» у нас есть полная уверенность, что незачем рассматривать такие композиции, в матрицах смежности которых, например, встречается $[i, j] = 1$ хотя бы для одного i и $j+1$, что резко уменьшает число «разумных» композиций и сокращает выбор. Еще пример: хотя Кити в рассуждениях Анны не выступает явно как некоторый собирательный образ (Р-модель) высшего света, ведь ясно, что дело не только в ней. Иначе Анне пришлось бы анализировать отношения всех ее знакомых, а это бы резко увеличило число альтернативы, затруднило выбор.

Конечно, это еще не все, что позволяет нам, в конце концов, не всегда ошибаться, выбирая те или иные планы в этом невероятно сложном мире. Однако без способности к образованию метапонятий и М-понятий не могло бы быть и речи о каком бы то ни было выборе. Вспомните 2^{100} композиций при 10 исходных альтернативах.

Но отметим и гораздо более серьезные вещи. Как можно проанализировать функционирование народного хозяйства, если в нем свыше 50 тыс. предприятий, столько же колхозов, более 100 тыс. строек и т. д. и в этой громадной системе производится и частично потребляется свыше 10 млн. наименований различных продуктов? Только если использовать способность к абстракции и образованию, в частности, системы метапонятий. А что можно сказать без этого, рассматривая вообще любую систему: «качающийся маятник или растущую культуру бактерий, или автопилот, или туземную деревню, или сердечно-легочный препарат?» [15]. Тоже, естественно, ничего. Итак, мышление дает нам возможность выбора относительно тех или иных ОВ. И важнейшими элементами мышления являются модульные понятия, без которых выбор в условиях громадного числа возможных композиций альтернатив был бы невозможен.

Как формируются М-понятия у человека? По-видимому, так же, как и способность к мышлению, если действительно главное в мышлении — выбор.

Крупнейший современный психолог Пиаже считает, что у человека формируются существенные признаки, инвариантные относительно некоторых преобразований, связанных с некоторыми действиями. Открытие инвариантов осуществляется при использовании в основном двух операций — классификации и сериации (выделение внутри класса объектов по нехарактеристическому для класса свойству), что, в конце концов, приводит к определенным схемам и способам переработки информации — структуре интеллекта. По-видимому, это соответствует диаграммам (9) и (11), а инварианты, о которых говорит Пиаже, вероятно, близки к М-понятиям. По Пиаже существуют четыре возрастных стадии: 1) сенсомоторная (до двух лет), реальность отражается по схеме восприятие — ответное действие; 2) дооперационный интеллект (от двух до семи лет); существенные свойства отражаются наглядно, операции — представления действий над вещами; 3) (восемь — одиннадцать лет), классификация и сериация производятся на основе понятий о существенных признаках, при непременной опоре на реальные образы, возникшие логические структуры носят предметный характер; 4) стадия формальных отношений

(11—15 лет), понятия освобождаются от своего материального носителя — вещи — и выступают как идеальные модели отношений, возникает возможность подлинного «теоретического обучения». Деятельность и созревание — вот формула мышления по Пиаже [36].

Мы привели соображения Пиаже, чтобы подчеркнуть, что наши рассуждения, в конце концов, не так уж и экзотичны, хотя, конечно, и имеют существенные особенности. Однако особенность первая не только наша: многие не разделяют мнение Пиаже, тяготеющее к гештальтпсихологии, что формирование структур происходит независимо от внешних и внутренних условий в ходе созревания мозга [36]. Особенность вторая состоит в том, что мы говорим пока об М-понятиях (что является не просто терминологическим отличием), связывая мышление с необходимостью выбора в условиях громадного числа вариантов. Можно попытаться объяснить не только то, как они возникают, но и зачем они возникают и, наконец, почему они так возникают.

§ 4. ЯЗЫКИ

Предположим, что мы заточены в цилиндрическую башню и перед нами по окружности расположены N дверей, причем мы не знаем ни как попали в эту башню, ни что нас ожидает. Естественно, нам захочется выйти из нее. Если все двери кажутся одинаковыми и у нас нет никаких других оснований предпочесть ту или иную дверь, мы будем последовательно открывать одну за другой в поисках выхода. А если дверей слишком много? По-видимому, мы попытаемся все-таки вначале найти какие-то пути сокращения вариантов перебора. Эти пути могут основываться и на нашем предыдущем опыте и на возможных различиях в дверях, которое при более внимательном изучении нам удается обнаружить. Для этого нам нужно «присмотреться» и «подумать», в результате чего, возможно, нам удастся найти более подходящий вариант, чем прямой перебор. Но это означает, что мы начинаем строить Н-модель ситуации, в которую мы попали. Пусть при более внимательном осмотре дверей окажется, что на некоторых из них имеются полоски различных цветов. Тогда можно уменьшить число объектов перебора, считая, что все двери одного цвета обладают одним и тем же свойством (предположение, которое, конечно, может быть и неверным). Если двери помечены, скажем, всего четырьмя цветами, то вначале нам достаточно проверить только лишь, что кроется за четырьмя дверями (по одной для каждого цвета).

Ход рассуждений может быть, например, таким: «Передо мной двери разных цветов, проверить все не успею. Значит, буду открывать только по одной двери данного цвета. Но с какой начать, ведь за ней может быть не только выход? Начну с желтой. Желтый цвет — цвет солнца. Или начну с зеленой. Зеленый—цвет растений, а значит, жизни». Здесь важны следующие обстоятельства:

1) путем использования М-понятий и построения каких-то Н-моделей мы сокращаем перебор;

2) эти М-понятия индексируют Н-модели, «степень общезначимости» которых различна (так, черную дверь едва ли кто-нибудь откроет сначала, а вот зеленую или желтую — это уже кто как);

3) все М-понятия: «Я, дверь, цвет, выход, солнце» и т. д. основаны на предшествующем опыте и являются чем-то внешним по отношению к строящейся Н-модели; назовем их экзогенными М-понятиями;

4) так как М-понятия индексируют, обозначают некоторые модели, можно говорить и об экзогенных моделях (Н и Р) по отношению к данной.

Естественно, возникает вопрос, а существуют ли вообще какие-либо другие М-понятия, кроме экзогенных? Для того, чтобы ответить на этот вопрос, вернемся к обсуждению такого М-понятия, как язык.

Мы уже выяснили, что любая Н-модель имеет индивиды моделирования ИМ. Но используя только эти индивиды, очевидно, никакую модель построить нельзя. Необходимо еще иметь некоторые сознательные или подсознательные правила, на основе которых из ИМ можно строить различные выражения. Систему моделирования СМ, состоящую из таких правил и множества ИМ, назовем языком. Если эти правила явно сформулированы в общезначимом виде, а ИМ в этом же смысле явно указаны, то язык будем считать формализованным.

В связи с принципиальной важностью этих вопросов, рассмотрим их более подробно с несколько иной точки зрения. Прежде всего, что значит «рассмотрим»? Очевидно, это значит, что мы собираемся построить какую-то их Н-модель, используя русский язык или какой-то другой. Что бы мы не пытались рассмотреть, в конечном счете мы будем использовать некоторую систему индивидов моделирования (в данном случае — слова), и с помощью известных правил строить те или иные Н-модели в виде некоторых последовательностей ИМ (например, предложений, фраз, текстов и т. д.). Эту систему индивидов вместе с соответствующими правилами, которую нам придется использовать во всех случаях, назовем, следуя X. Карри, U-языком. А теперь слово автору [13]: «Невозможно исчерпывающе описать U-язык. Все что мы можем сказать об этом языке, — это то, что он содержит совокупность правил, которые мы понимаем в данный момент. Это может показаться туманным, но в этой туманной области мы чувствуем себя не хуже, чем в любой другой области знания».

Для начала необходимо изучить, существуют ли еще менее туманные определения языка. Но определить — это значит объяснить язык на основе каких-то уже известных понятий, т. е. найти Р-модель. С этой точки зрения, если в качестве первичного понятия выбрать мышление, то может быть что-то проясняет высказывание Р. Линдона [19]: «.... Вместо мышления мы будем рассматривать язык». Правда, дальше следует уточнение: «.... точнее говоря, формализованный вариант некоторых аспектов естественного языка. Можно показать, что все чисто формальные аспекты мышления адекватным образом отображаются в таком языке». Это высказывание может быть и верным и нет в зависимости от того, что понимать под словом «формальный» и определить, где кончается «неформальное», не говоря уже о том, что мышление, как оно интуитивно понимается, является процессом, а язык — нет. Здесь сразу возникает реальная возможность впасть в схоластический спор о взаимоотношении процессов и систем. Итак, особой ясности на этом пути пока как будто не предвидится. Какой же выход? Обратимся к крупнейшему авторитету в области изучения естественного языка Н. Хомскому. В своей работе «Язык и мышление» [21, стр. 25] он высказывает следующие взгляды: «Мне представляется, что наиболее обнадеживающим подходом сегодня является путь описания явлений языка и умственной деятельности как можно более строгим образом, путь попыток создания абстрактного теоретического аппарата, который насколько возможно объяснит эти явления....». Итак, Хомский не утверждает, что вместо мышления можно рассмотреть язык. Это отличает его взгляды от взглядов Р. Линдона, но снова, как и Линдон, Хомский говорит о важности абстрактного аппарата, который может описать и то и другое. Но что значит описать, в сущности, средство или метод описания и как это сделать? Здесь представляется интересным высказывание Хомского: «Мы живем... в век «поведенческой науки», а не «науки о мышлении», которое перекликается с мнением Херрика: «Свойства, приписываемые обычному любому объекту, являются, в конечном счете, названиями его поведения» (цит. по [15]).

Если принять эту точку зрения, то следует пытаться отвечать не на вопрос «что?», а на вопрос «как?» В конечном счете, это возможно больше соответствует первичности практики и как основы и как критерия истинности. Итак, с этой точки зрения язык позволяет строить Н-модели различных объективных и субъективных систем. Обычно эти модели представляются в виде некоторого набора выражений, носящих характер последовательностей «слов» и «предложений». «Являются ли эти выражения в действительности предложениями в обычном понимании этого слова или нет — так же безразлично, как то, например, напоминают ли они нам обезьян в зоопарке» [13], т. е. понятие «язык» значительно шире понятия «естественный язык». Можно было бы попытаться описать особенности языка, используя понятие знака, как это делается в семиотике (см., например, [22]), но это больше соответствует попыткам ответить на вопрос «что?», чем на вопрос «как?» Самый важный ответ мы бы получили, если бы сумели ответить на вопрос: «как возник язык?» Конечно, построить соответствующую общезначимую Н-модель, являющуюся ответом на этот вопрос, мы не сможем хотя бы потому, что «фактически каждое мысленное отображение мировой системы остается ограниченным объективно-историческими условиями, субъективно-физической и духовной организацией его автора» [1]. А языки для нас — основное средство отображения «мировой системы», поэтому их отображение на Н-модель тоже неминуемо ограничено.

Как поступает человек, когда сталкивается с очень сложными системами, для которых он не может сразу построить единую Н-модель? В этом случае он начинает исследовать одну из таких систем, пытаясь построить Н-модель для нее одной. На каждом шаге такого построения человек имеет возможность проверить его истинность в соответствии с диаграммой (10), рассматривая исследуемую систему как Р-модель. Используем эти соображения для выяснения взаимосвязи языка и Н-моделей, выбирая какую-то объективно существующую Р-модель. В качестве таковой мы возьмем трактат Н. Бурбаки «Начала математики», в котором «математика рассматривается с самого ее начала» [20]. Поэтому он может служить Р-моделью эволюции конкретного языка математики. Естественно, мы рассмотрим не содержание «Трактата», а только принципы, положенные в основу его создания, т. е. речь пойдет о построении соответствующей метамодели (если сам трактат рассматривается как Р-модель). Это тем более просто, что Н. Бурбаки это делает вначале «Трактата» сам, так что нам остается только изложить и прокомментировать его точку зрения.

«Способ пользования данным трактатом», а также «Введение», естественно, написаны с использованием U-языка. Автор не дает определения языка, на котором он собирается излагать свой трактат (т. е. не отвечает на вопрос «что это такое?»). Однако описывает его функционально, отвечая на вопрос, как выражается «достаточно ясный математический «текст» с использованием данного «условного» языка, который содержит лишь небольшое число неизменных «слов» соединяемых друг с другом, согласно синтаксису, состоящему из небольшого числа, не допускающих исключения правил; так выраженный текст называется формализованным» [20]. Понятие формализованного текста Н. Бурбаки уточняет следующим образом: «...совершенно несущественно приписывается ли словам и знакам этого текста то или иное значение или даже не приписывается никакого,— важно лишь точное соблюдение правил синтаксиса». Отметим, что Н. Бурбаки: 1) разграничивает понятие формализованного языка и U-языка, когда говорит: «описание формализованного языка делается на обычном языке»; 2) по сути определяет уровень «общезначимости» (см. § 2), отмечая: «.... мы не будем обсуждать возможность обучить принципам формализованного языка существа, умственное развитие которых не доходило бы до умения читать, писать и считать»; 3) широко пользуется Р-моделями, примерами: «.... в текст довольно часто вводятся примеры, использующие факты, которые читатель может знать из других источников....»

Однако самыми интересными, как нам кажется, являются оговорки, которыми сопровождается первая фраза описания формальной математики (цитата и сноски к ней даны по [20]): «Знаки любой математической теории $\mathcal{T}$[1] таковы: 1° — логические знаки [2]; 2° — буквы. Оговорки: 1) смысл последнего выражения будет постепенно уточняться на протяжении всей главы; 2) об интуитивном смысле этих знаков см. n° 3, «Замечание».

Итак, «формальная» теория начинается с неформального текста, который в самом начале считается неясным и может быть в лучшем случае «уточнен», а кроме того, речь идет о интуитивном смысле, которым все-таки обладают введенные знаки.

Как же тогда понимать различие между формализованным и неформализованным текстом, в котором «всегда существует опасность ошибочных умозаключений, к которым может привести, например, злоупотребление интуицией или рассуждение по аналогии» [20]. Оставим пока этот вопрос открытым и последуем за Н. Бурбаки дальше. На этой же первой странице после определения знакосочетаний как последовательности знаков дается еще одно объяснение, которое ввиду его важности мы приведем полностью. «Употребление одних только знакосочетаний привело бы к непреодолимым типографским и умственным затруднениям. Поэтому в обычных текстах используются сокращающие символы (особенно слова обычного языка), не принадлежащие к формальной математике. Введение этих символов составляет цель определений. Их употребление теоретически не является необходимым и часто дает повод к путанице, избегать которую позволяет лишь некоторый опыт».

Так появляются М-понятия, смысл которых может быть однозначно восстановлен в рамках данной модели. Такие М-понятия будем называть эндогенными.

Итак, формализованный язык математики обладает эндогенными М-понятиями, которые в отличие от экзогенных не берутся из предшествующего опыта, а возникают внутри самого языка по мере его эволюции. Но в таком случае смысл этих понятий может быть всегда однозначно восстановлен на основе правил данного языка, в то время как смысл экзогенных понятий является чем-то внешним, а если он и может быть восстановлен, то, во-первых, как правило, неоднозначно, а, во-вторых, только на основе привлечения некоторых Н-моделей, которые, в частности, могут строиться с использованием правил данного языка, но правильность их построения еще не является гарантией их истинности. Иными словами, в формализованном языке построение эндогенной Н-модели в соответствии со «строительными правилами» данного языка и сокращенное обозначение этой модели с помощью М-понятия гарантирует в отличие от неформализованного языка истинность соответствующей модели и М-понятия, т. е. Н-модель в этом случае является и Р-моделью одновременно. Разумеется, это не значит, что у нее не может быть других Р-моделей, как и то, что она не может быть Н-моделью других систем.

Однако так ли уже чист язык математики? Нет, конечно. Математика тоже не может обойтись без экзогенных М-понятий. Как следует из нашей общей Р-модели (см. «Трактат» Н. Бурбаки), эти экзогенные понятия появляются в самом начале трактата, не только в виде явных «интуитивных» оговорок, но и в виде основных исходных понятий. Что, например, такое «логический знак» или даже просто «знак», без чего вообще говорить не о чем? Это типичное экзогенное М-понятие, котрое не принадлежит данной теории. В частности, любое метапонятие является экзогенным, хотя обратное, вообще говоря, неверно. Видимо, вообще никакая Н-модель не может быть построена без экзогенных М-понятий и любой язык содержит понятия такого рода. Но в таком случае, мы, естественно, возвращаемся к вопросу о различии языков. Какой-то предварительный ответ мы все-таки уже дать можем. В формализованных языках экзогенных М-понятий меньше, чем в неформализованных. Но все равно без экзогенных М-понятий не обойтись ни в какой теории. Среди этих понятий встречаются такие, Р-моделью которых является практически что угодно. Такие М-понятия являются метапонятиями в любой теории. Примером является понятие «система».

Чтобы почувствовать «универсальность» этого М-понятия, зададим себе вопрос, существуют ли несистемы? Можно сказать, что в данной Н-модели «элемент» является «несистемой» (а в другой?). Или, как это, например, делает Л. фон Берталанфи, можно определить систему как «комплекс взаимодействующих компонентов» Или по Р. Акофу «.... любая сущность, концептуальная или физическая, которая состоит из взаимозависимых частей» [37] и т. д.? Уже в 1964 г. существовало 25 определений системы [38].

Однако нетрудно видеть, что приведенные (да и все остальные) определения заменяют одно метапонятие (система) другим (комплекс, сущность), которые все равно являются метапонятиями такого же общего типа. Значит ли это, что любое определение беспредметно и теоретически не является необходимым (см. [20]). По-видимому, нет, если мы не хотим придти к непреодолимым умственным затруднениям.

Теперь попробуем неформально ответить на вопрос о связи между языком и мышлением в соответствии с [13]: «Язык в наиболее общем смысле этого слова определяется двумя видами соглашений. Во-первых, фиксируется алфавит, т. е. определенный набор объектов, называемых символами (или буквами)... Во-вторых, существуют правила, указывающие, как из букв можно образовывать определенные комбинации, называемые выражениями или словами».

Но примерно также определяется и любая Н-модель, в которой имеются «буквы» — индивиды моделирования, и система правил, допускающих только некоторые их сочетания. Итак, язык — это некоторая Н-модель. Однако ясно, что не любая Н-модель является языком. С использованием данного языка можно строить, как правило, многие Н-модели, а также модели этих моделей — модели ^{2} (теории), модели ^{3} и т. д. или /и теории, теории ^{2},... теории^n, следуя предложениям Лоренцена [19]. На каждом уровне абстракции для каждой Н-модели будут существовать экзогенные М-понятия, являющиеся, в частности, метапонятиями. Поэтому можно предположить, что язык — это некоторая Н-модель, содержащая в качестве индивидов моделирования и все экзогенные М-понятия. В таком случае язык должен содержать такие общезначимые правила композиций и выводы, которые допускали бы образование любых Н-моделей различного уровня без возникновения противоречий при нахождении соответствия между Н- и соответствующими Р-моделями. В этом смысле, видимо, можно понимать высказывания Р. Линдона: «.... логика, как принято считать, включает в себя только универсальные принципы, истинные во всех возможных мирах» [19]. Что касается других правил композиции, то они, вообще говоря, различны для разных языков, но в пределах данного языка обладают тем же универсальным свойством. Конечно, это дается недаром и приводит к тому, что Н-модель не всегда может быть однозначно восстановлена на основе существующих правил и индивидов.

Пока в основном мы говорим на U-языке об U-языке. Однако понятие языка используется и для более частных случаев, когда задается некоторое множество индивидов и определенная система правил. Так, Гинсбург и Грейбах вводят абстрактное семейство языков АСЯ как «.... любое семейство множеств, цепочек, замкнутое относительно операций шести типов». Далее идет перечисление этих операций и определяется взаимосвязь АСЯ и некоторого абстрактного семейства автоматов АСА [40].

Ахоу и Улман определяют язык без явного указания системы правил вывода: «Пусть Σ — конечное множество символов или алфавит. Обозначим через Σ^* множество всех строчек конечной длины, составленных из символов множества Σ, включая E — строчку длины O. Языком называется подмножество множества Σ^* для некоторого алфавита Σ» [41].

При трактовке языка как некоторого семейства объектов и явно или неявно заданных правил вывода в принципе можно «... говорить о каком-либо языке L_1 на каком-нибудь другом языке L_2. В таком случае L_1 обычно называют языком-объектом (или предметным языком), а L_2 — метаязыком... Иногда нам может понадобиться говорить о двух языках L_1 и L_2, относящихся друг к другу как язык-объект и метаязык, соответственно в этом случае мы используем третий язык, обычно называемый метаметаязыком. Таким образом, мы можем образовывать иерархию языков с любым числом уровней. Однако независимо от того, сколько существует уровней, U-язык будет наивысшим уровнем» [13].

Но «.... теория — это язык вместе с некоторым множеством T предложений или формул этого языка» [19]. Нетрудно видеть, что так определенная теория — это то же самое, что и язык (сравните, например, определение Ахоу и Улмана). Действительно, множество предложений T является подмножеством Σ^* и поэтому является языком. С другой стороны, выделяя, вообще говоря, произвольно в каком-либо языке некоторое другое подмножество, содержащее данное, можно говорить о языке как теории в некотором другом достаточно произвольном языке. Поэтому, естественно, возникает параллельно соответствующим понятиям для языков такие понятия как «предметная теория», «метатеория», «метаметатеория» [19] и т. д. Разумеется, такой подход правилен, но, возможно, он несколько избыточен. Может быть удобнее говорить просто о Н-моделях различного уровня (Н-модели, Н-модели ^{2} и т . д.), понимая под теорией просто модель более высокого уровня — модель ^{2}. Тогда термин «язык» можно было бы отнести только к U-языку, т. е. Н-модели, объединяющей все Н-модели различных уровней. Все это вопрос удобства и привычки. На уровне, где не конкретизируется система правил вывода, такой подход, по-видимому, допустим и не противоречит общепринятому.

Теперь остается еще раз подчеркнуть относительность понятий Н- и Р-модели (см. § 2). И то и другое является некоторыми системами. Только Р-модель — уже содержательная и истинная модель (система), а Н-модель — только синтаксически истинна (ибо получена на основе некоторых явных или неявных) правил. Как только она становится «содержательной» истинной, она уже может служить Р-моделью других систем. Так, геометрия Лобачевского являлась Н-моделью до тех пор, пока Бельтрами не нашел для нее «истинную» интерпретацию в виде псевдосферы, после чего она уже могла рассматриваться как Р-модель для других систем.

Если быть последовательным в «экономии мышления», то можно в некоторых случаях отказаться вообще от понятия модели, ограничиваясь понятием системы и истины. Тогда содержательно семантически «истинная» система является Р-моделью, а синтаксически «истинная» — Н-моделью. Возможно, это облегчит некоторые рассуждения на определенном уровне абстракции хотя бы тем, что уменьшает число одновременно рассматриваемых понятий. Говоря о системах, можно также рассматривать системы различного уровня по принципу: если система рассматривается как «элемент» некоторой другой системы с учетом ее структуры, то эта другая система есть система систем или система^2. Это не противоречит обычному интуитивному употреблению слов. Поэтому можно говорить о системах^2, и метасистемах = системам^n и т. д. Можно ввести для систем^n при $n = 2$ еще такой термин, как «комплекс», в случае, если «элемент» рассматривается как система. Не следует считать этот термин чем-то избыточным, не индексирующим интересные Р-модели. Если рассматривать только системы, состоящие из отдельных однородных элементов, и не учитывать в некоторых случаях сложное строение самих элементов и/или, их «разнородность», то «необходимо отметить, что таким образом могут быть решены далеко не все проблемы, возникающие в теории сложных систем и системотехнике» [42]. В качестве примера комплексов, имеющих важное практическое значение, можно привести понятие «многоосновной алгебры» [43] и комплекса в теории гомологий [44]. Впрочем, попробуйте привести пример «на самом деле» некомплекса, не метамоделей и не М-понятия. А если нельзя, то зачем их вводить? Чтобы подчеркнуть относительность «на самом деле» и перейти от констатации (что?) к процессу (как?) образования понятий.

§ 5. ФАКТОРИЗАЦИЯ СИСТЕМ

В предыдущем параграфе обсуждались ряд понятий и их иерархия, что весьма принципиально, ибо основная особенность мышления и состоит в способности к абстракции, поскольку только она в конечном счете может обеспечить рациональный выбор при наличии громадного числа вариантов.

Обратимся к диаграммам (8) — (10). Переходя в соответствии с (9) от многих частных Н-моделей к некоторой Н-метамодели (теории), которая в известном отношении эквивалентна исходным, мы тем самым сокращаем число объектов рассмотрения и можем уже говорить сразу о классе объектов и/или моделей в целом. Это важно для сокращения перебора и возможности в разумные сроки реализовать правильный выбор. Так достигается «экономия мышления» и облегчаются «умственные затруднения». Все на редкость «просто», но при такой замене мы не только что-то находим, но и что-то теряем.

Рассмотрим одну Р-модель, связанную с эволюцией наших представлений об управлении, и интуитивно введем на основе этого примера важное понятие факторизации систем. Рассмотрение такой Р-модели полезно еще и потому, что оно косвенно отвечает на вопрос — зачем нам вообще моделировать и почему это становится все сложней. При рассмотрении этой Р-модели мы будем пользоваться наиболее общим М-понятием «система» явно и М-понятием «истина», как обычно, неявно, подразумевая, что все, что сказано, — истинно. Кроме того, поскольку мы намерены ввести пока экзогенное М-понятие «факторизация», рассуждения проводятся в такой форме, чтобы это понятие казалось естественным, т. е. обеспечивалась его общезначимость за счет интуитивных и эмоциональных факторов.

Общеизвестно, что в эпоху научно-технической революции резко возросла и эффективность и ответственность управляющих решений, поскольку усложнились управляемые системы и критерии управления. Резко возросло количество взаимосвязей внутри каждой системы, которыми уже нельзя пренебрегать при управлении. Будем называть такие связи существенными. Существенность той или иной связи имеет смысл только по отношению к выбранной цели и критериям управления. В прежние времена цели человека не отличались большим разнообразием, а плата за ошибку касалась в основном его самого. В настоящее время количество существенных связей резко возросло.

Рассмотрим случай, когда лишь восемь человек принимают положительные или отрицательные решения по различным вопросам. В таком случае всего может быть $2^8 = 256$ различных распределений положительных и отрицательных решений. Если каждое из них существенно и может привести к одному из двух существенных последствий, то в общем случае возможно 2^{256} взаимосвязей принятых решений с возможными последствиями. Отметим, что это число не намного меньше числа всех электронов и протонов во Вселенной — $1{,}5 \cdot 136 \cdot 2^{256}$ [4]. Конечно, если последствия выбора не существенны, едва ли стоит беспокоиться о возможном механизме взаимосвязей решений и последствий. А если от распределения решений этих восьми человек зависит судьба тысяч людей, каждая из 2^{256} связей может оказаться существенной.

Обычно важно не каждое индивидуальное распределение решений, а только некоторые множества их, ведущие к одним и тем же последствиям (множества эквивалентных решений), которые определяются по тем или иным правилам, в рассматриваемом случае, например, часто по правилу большинства. Поэтому в реальных системах существуют некоторые процедуры (типа указанного правила), позволяющие определить класс эквивалентных решений. Будем называть процедуры такого рода процедурами факторизации того или иного множества либо системы [62, 137].

Итак, факторизация, в общем случае, — это некоторая процедура, заменяющая данную систему более простой эквивалентной исходной в рамках заданных критериев. По мере изменения критериев, те связи, которые ранее были существенными, могут перестать быть таковыми и наоборот. Важно, что с ростом числа существенных связей факторизация системы, как правило, усложняется или приходится ограничиваться меньшим множеством возможных последствий. В последнем случае можно сказать, что происходит факторизация выходов системы. Так, в статистической физике такие феноменологические параметры (Н-модели), как давление, температура и т. д., по существу являются характеристиками эквивалентных классов состояний отдельных молекул, насчитывающих необозримое число таких микросостояний. А сама статистическая физика является факторизацией изучаемых ею систем (объекта факторизации). Нами используется понятие факторизации и в смысле процесса, и в смысле результата аналогично использованию понятия функции в математике. В этих терминах можно сказать, что в современных условиях сложность управления возросла в связи с расширением и усложнением области факторизации и множества существенных связей управляемых объектов.

Со временем могут оказаться существенными связи между биологическими, экономическими, социальными, юридическими и другими аспектами, которыми сегодня еще пренебрегают, а вчера о них вообще не подозревали. Это явление, связанное с возрастанием числа существенных связей, приводит к необходимости рассмотрения объекта или явления с учетом новых связей. Обычно говорят в таких случаях, что необходимо провести «системное» исследование. Однако всегда любая факторизация предполагала учет всех существенных на то время связей. Так, дикарь, использовавший кремень для добычи огня, явно сделал величайшее «системное» открытие существенной для него взаимосвязи холодного камня с горячим огнем и социальными, психологическими и прочими последствиями, осознанными им в рамках достигнутых алгоритмов факторизации.

Понятие системности в обычно употребляемом смысле слова несет не очень много информации. Мы будем его использовать в ином значении, в рамках некоторой концепции, которую принято называть теорией систем.

Один из основоположников этой теории М. Месарович определяет ее так: «Теория систем есть теория формальных (математических) моделей реально существующих (или абстрактных) систем» [50].

Следует признать, что это определение мало дает, ибо сводится по сути к утверждению, что теория систем есть теория объектов (моделей), которые вполне подходят под класс абстрактных систем. Итак, если это не тавтология, то во всяком случае и не очень информативно. Такой недостаток присущ любым определениям, относящимся к очень общим объектам и явлениям. Поэтому дело не в определениях, а в том, какие задачи помогает решать та или иная теория и как она их решает.

Любую систему S можно представить как некоторое множество $\mathcal{M}$ состояний, особенностей, уровней, альтернатив, характеризующих в том или ином смысле S и множество отношений $\{\mathcal{P}\}$ между элементами $\mathcal{M}$, т. е. $S = (\mathcal{M}, \{\mathcal{P}\})$. Обычно S факторизуется на другие более изученные системы, которые являются Н-моделями. При этом можно условно выделить три последовательных этапа факторизации: определение, идентификация, спецификация.

Иногда в связи с неточностью наших знаний или особенностями S не удается реализовать тот или иной этап достаточно эффективно (по отношению к явному или неявному критерию). В таком случае будем говорить, что S является плохо определимой (ПО), плохо идентифицируемой (ПИ) или плохо специфицируемой (ПС) системой соответственно. Если реализуется хотя бы одна возможность, будем также использовать термин «плохо описываемая система» [12]. Условимся различать это понятие и понятие нечеткой системы Л. Заде [33], считая, что любая нечеткая система плохо описываема, хотя обратное имеет место не всегда. Так или иначе, существует некоторая другая система $C = (\mathfrak{M}, \{P\})$, являющаяся факторизацией системы S. Чтобы не представляла собой C, она должна состоять из множества $\mathfrak{M}$ каких-то элементов и класса $\{P\}$ отношений между ними. Причем при переходе от S к C все существенные в S отношения должны как-то иметь место в C, иначе модель не будет достаточно хорошо в рамках того или иного критерия отображать S. Итак, существует некоторое соответствие F между S и C, являющееся факторизацией. Если C — математическая модель, возможны преобразования C в другие формы с использованием методов и средств самой математики. В этом случае также можно говорить о факторизации (ведь C также система), но теперь факторизация может быть определена на языке математики (будем говорить, что она определена корректно).

Изучение любой системы начинается с определения множества $\mathcal{M}$ альтернатив и множества $\{\mathcal{P}\}$ отношений между ними, которые затем факторизуются на модель C, имеющую также множества $\mathfrak{M}$ элементов и множества $\{\mathcal{P}\}$ отношений, правила обращения с которыми нам уже известны. Любые экономические, социальные, психологические, биологические и другие системы, зачастую независимо от своей природы, могут быть факторизованы на Н-модели одинакового типа, которые в этом случае представляют собой удобный универсальный способ описания и исследования различных систем. Такие модели являются либо философскими, либо математическими в связи с тем, что и в том и в другом случае мы имеем дело с наиболее общими категориями, присущими любым системам. Однако, как уже отмечалось, математические модели обладают значительно меньшим количеством исходных экзогенных метапонятий и четко определенными синтаксическими правилами образования (определения) новых М-понятий (эндогенных), что делает математические результаты доказательными и общезначимыми. Можно предположить, что факторизация любых систем независимо от их природы на математические модели и является задачей теории систем.

§ 6. ПРИНЦИП ЭКА

Рассмотрим проблемы факторизации при дедукции. Возьмем трехуровневую диаграмму (12) и посмотрим, что происходит при переходе от нижнего к верхнему уровню. Так как мы здесь будем рассматривать только трехуровневые диаграммы, то изменим обозначения, полагая:

$S_i^1 \to S_j^2 \to S_1^3, \qquad i = 1, \ldots, m; \quad j = 1, \ldots, n; \quad m \geqslant n.$

Система S_1^3 является Н-метамоделью, а ее наименование — метапонятием. Рассмотрим теперь следующую Р-модель: пусть S_i^1 — некоторые города, S_j^2 — их схемы, некоторые из них могут совпадать. Строится Н-модель S_1^3, являющаяся совокупностью правил построения любых таких схем, т. е. S_1^3 — это некоторые высказывания типа: схема города (любого) представляет собой совокупность линий, обозначающих улицы, и точек, обозначающих дома. Такого рода «теория» построения схемы города есть обобщение S_j^2, которые являются Р-моделями этой теории, каждая из которых имеет соответствующую Р-модель S_i^1. Применение «теории» построения схем городов не ограничивается множеством S_i^2, на основании рассмотрения которых возникла эта теория. Можно построить любые схемы S_k^2 $(k = 1, \ldots, n, \ldots)$, используя теорию построения таких схем. Однако будут ли они истинными, т. е. имеются ли у них соответствующие Р-модели (реальные города)? Очевидно, не всегда. Переход от индукции к дедукции можно наглядно интерпретировать как обращение стрелок в диаграмме типа (12) — переход к кодиаграмме. При этом в принципе на конце стрелок может оказаться больше объектов, чем было в начале стрелок в исходной диаграмме.

Мы приходим к своеобразной ситуации, которую для наглядности назовем ситуацией двух истин. С одной стороны, системы S_k^2 построены в соответствии с теорией S_1^3 и истинны в том смысле, что могут соответствовать правилам построения, предписываемым этой теорией. Будем говорить, что S_k^2 дедуктивно (синтаксически) истинны. Если при этом некоторая $S_{k_1}^2$ является схемой действительного города (имеет Р-модель), то будем говорить, что $S_{k_1}^2$ индуктивно (семантически) истинна. Не всякая S_k^2, конечно, индуктивно истинна.

Однако возможны в принципе частные случаи, когда любая дедуктивно истинная модель теории S_1^3 является и индуктивно истинной. Теория S_1^3 называется в этом случае непротиворечивой. Если же любая индуктивно истинная Н-модель из некоторого класса дедуктивно истинна в теории S_1^3, то теория называется полной относительно этого класса. Но что значит определить «некоторый класс?» Это значит задать снова некоторую метамодель, индексируемую определенным метапонятием. Таким метапонятием в нашем случае будет понятие «город». Ясно, что в конкретном примере любой город имеет схему, но не любая схема соответствует городу. Итак, «теория схем городов» полна, но противоречива, ибо можно построить дедуктивно истинную схему, которая не является схемой города, т. е. индуктивно истинной. Можно попытаться сделать теорию не противоречивой, введя понятие потенциальной истинности (ведь может, в принципе, существовать город, описываемый данной дедуктивно истинной схемой). Очевидно, такой выход неудовлетворителен ибо понятие «в принципе» весьма растяжимо и является экзогенным М-понятием. В лучшем случае можно говорить о неопределенности теории. Тогда попытаемся сделать теорию не противоречивой, утверждая, что она описывает только реально существующие города. В таком случае мы привносим в теорию другое экзогенное М-понятие, «реально существующие». Таким образом, теория становится не замкнутой в том смысле, что кроме правил построения в нее вводится ряд экзогенных М-понятий, неопределяемых в ее языке.

Итак, общая картина такова: переходя от некоторых моделей к метамоделям, мы абстрагируемся от частностей, ибо иначе в принципе невозможно описать с помощью одной модели некоторое их множество (происходит факторизация моделей). В этом случае сфера приложения метамоделей, как правило, становится шире первоначального множества, моделей, т. е. абстракция может расширить область приложений, игнорируя конкретные детали.

При расширении сферы приложений теория становится если и не противоречивой, то во всяком случае неопределенной. Избавиться от этого неприятного обстоятельства можно, сократив область приложения теории. Однако это удается сделать, только введя дополнительные ограничения, которые, как правило, являются экзогенными. В этом случае теория становится незамкнутой. А могут ли в принципе существовать замкнутые теории? Если верить Н. Бурбаки, то могут — на основе аксиоматического метода, однозначно определяющего правило построения выражений в данном языке, после чего все сводится к простой манипуляции с символами и введению «определений», употребление которых «теоретически не является необходимым». Но, как уже отмечалось ранее, с самого начала вводятся экзогенные М-понятия, без которых едва ли в принципе удается обойтись. Таким образом, в лучшем случае можно говорить о «релятивистски замкнутой теории», считая, что введенные экзогенные М-понятия одинаковы в процессе построения теории, и никаких других экзогенных понятий в теорию не вводится.

Рассмотрим внимательно те экзогенные понятия, которые вводятся Н. Бурбаки. Это, например, такие понятия, как «знак», «подстановка», «система» и/или, «структура». Нетрудно видеть, что это наиболее общие метапонятия, без которых мы не обойдемся в любой теории. Их нельзя определить, но они явно общезначимы. Поэтому таковой должна быть и теория, построенная с их использованием. Более того, нетрудно видеть, что любые правила вывода в любой теории по необходимости являются экзогенными, но они постоянны по крайней мере в течении какого-то времени, что делает теорию релятивистски замкнутой. Любая формализованная теория, в частности математики, является, повидимому, примером такой теории.

Как в математике ставится вопрос о полноте и непротиворечивости теории? Приведем только два наиболее типичных описания.

В. А. Успенский: «Перед любым автором, избирающим для развития своей теории аксиоматический метод, всегда возникают две проблемы: проблема *непротиворечивости*, состоящая в выяснении того, не окажется ли в его формальной теории *слишком* много теорем (настолько много, что они уже начнут противоречить друг другу), и проблема полноты, состоящая в выяснении того, можно ли в этой теории получить *достаточно много* теорем (а именно, получить в качестве теорем все выразимые в теории содержательно истинные утверждения)» [20].

С. К. Клини: «Система *непротиворечива* по отношению к рассматриваемому свойству (или интерпретации), если доказуемы только формулы, обладающие этим свойством (или выражающие предложения истинные при этой интерпретации). Система полна по отношению к этому свойству (или интерпретации), если доказуемы все формулы, обладающие этим свойством (или выражающие предложения истинные при этой интерпретации)» [30].

Таким образом обычные определения этих понятий не противоречат тому, как они введены здесь в общем случае (а не только для формализованных теорий). Главное то, что определение понятий полноты и непротиворечивости не может быть чисто эндогенным. Оно экзогенно и сделано в некотором U-языке, который оперирует такими категориями, как истина (или интерпретация), т. е. речь идет снова таки о некоторых экзогенных по отношению к данной теории P-моделях. Но в таком случае можно ли доказать полноту или непротиворечивость теории в ней самой, если она «релятивистски замкнута»? По-видимому нет, если не «замыкать» ее тавтологиями (она описывает только то, что описывает). Тогда представляется почти очевидным, что если она непротиворечива (т. е. имеет P-модели), то она неполна, что и составляет существо знаменитой теоремы Геделя. Если вернуться к U-языку, то по самому определению этого языка все M-понятия в нем являются эндогенными, но в большинстве, нечеткими, плохо описываемыми, в смысле отсутствия «общезначимой расшифровки», общезначимого их определения. А как возникают общезначимые M-понятия в U-языке?

Представим себе монастырь. Когда в нем идет речь об утренней молитве, то это M-понятие расшифровывается всеми монахами одинаково, в том смысле, что после сигнала «утренняя молитва» наступает одна и та же последовательность действия, т. е. это M-понятие имеет одну определенную P-модель (оно категорично) и расшифровывается однозначно (во всяком случае в данных условиях). С другой стороны попытка ответить вообще на вопрос «что такое молитва»? совсем не просто. Любой ответ типа «молитва — это обращение к богу» не является общезначимым в связи с нечеткостью понятия «бог», да и «обращение» нечетко даже для монахов, ибо можно молиться и не верить.

Таким образом, существуют категоричные M-понятия, которые кодируют одинаковые, однозначные действия или системы, являющиеся таковыми в определенных условиях (в рамках «монастыря»), но становящиеся неоднозначными в других условиях. Такие M-понятия назовем инициальными.

При построении любой модели (теории) L, как уже отмечалось, должны быть использованы исходные, первичные, экзогенные по отношению к данной модели M-понятия. Их мы будем называть просто исходными, или L-исходными. Они не обязательно инициальны, хотя в математике чаще всего таковы. Кроме того, они могут быть эндогенными в какой-либо другой модели (теории) R. В этом случае они будут называться конечными, или R-конечными M-понятиями по отношению к этой теории. Соответственно можно говорить о L-инициальных и R-терминальных M-понятиях, если они однозначны. Интуитивно представляется ясным, что если взять за основу в данном языке инициальные M-понятия и использовать однозначные общезначимые синтаксические и логические правила их композиции, то любая Н-модель будет также общезначимой и любое M-понятие, индексирующее данную модель, будет обладать тем же свойством. Однако такое понятие может рассматриваться как терминальное и/или инициальное с точки зрения какой-то другой модели или теории. Таким образом, терминальные понятия в этом случае также являются общезначимыми и приводят к сложным вторичным инициальным общезначимым M-понятиям. Именно так строится любой формализованный язык, в том числе математика в целом.

Что это дает? Прежде всего то, что как бы далеко мы не пошли в своих построениях, всегда будет существовать возможность однозначно описать их в первоначальных понятиях и моделях, т. е. мы можем не только очень далеко зайти на основе диаграмм типа (12), расширив область моделирования, но и не ухудшить описания частных случаев, благополучно вернувшись обратно.

Иными словами, для математики можно высказать некий принцип эффективности корректной абстракции (ЭКА) [62]: чем более абстрактны Н-модели, тем шире область их применения без ухудшения описания частных случаев, или явно определен характер и степень ухудшения. При этом мы сокращаем перебор за счет абстрагирования.

Но, конечно, всякая инициальность, терминальность, полнота и прочее в конечном счете таковы только на каком-то интервале времени, так что, строго говоря, надо бы говорить об квазиинициальности, квазиполноте и т. д. Однако для понятий математики этот интервал, во-первых, существует, и, во-вторых, он часто достаточно велик.

Таким образом, любая Н-модель строится с использованием явно или не явно выраженных метапонятий и никакая Н-модель не может быть построена без этого. Математические Н-модели отличаются от других тем, что выбранные метапонятия являются инициальными, причем это в одинаковой степени относится как к ним, так и к отношениям между ними. Именно поэтому отметил Н. Бурбаки [20]: «со времен греков говорить «математика» — значит говорить «доказательство». Некоторые сомневаются даже, что вне математики имеются доказательства в том точном и строгом смысле, какой получило это слово у греков и какой мы хотим придать ему здесь. То, что было доказательством для Эвклида, остается доказательством и в наших глазах». Иными словами, метапонятие «доказательство» осталось неизменным, оно одинаково понимается и нами и древними греками. А это, очевидно, возможно только тогда, когда это метапонятие индексирует Н-модель, допускающую такую Р-модель, которая остается той же и для нас и для греков. Эту Н-модель и можно описать с помощью понятия формализованного языка, содержащего какую-то явно оговоренную систему символов — «слов» — и правил композиции этих символов. Любая другая Н-модель в этом случае является некоторым классом этих композиций, и доказательство ее правильности требует, как отмечает Н. Бурбаки, «.... лишь в некотором роде механического внимания, так как единственные возможные источники ошибок — это длина или сложность текста». Таким образом, существует некая Н-модель для метапонятия «доказательство», которая в конечном счете сводится к инициальным М-понятиям: нормальные алгоритмы, λ-определимость, вычислимость по Тьюрингу, эффективные процедуры, изобразимость в некоторой формальной системе по Геделю, общерекурсивность, общезначимость и т. д. Однако рано или поздно будет обнаружено еще что-то такое, о чем мы даже не подозреваем, и что приведет к девальвации наших понятий или превращению их в производные понятия, что бы мы ни говорили.

В заключение постараемся в качестве иллюстрации показать, что наши рассуждения допускают одно простое приложение. Для удобства читателя очень кратко повторим основные предпосылки с тем, чтобы соответствующие выводы представлялись ему более обоснованными.

Изучение любой системы начинается с факторизации ее на наиболее простые модели типа номинальных и классификационных (см. § 7). Обычно — это этап перехода «плохо определимых» к «хорошо определимым» системам. При этом Н-модель еще слишком «велика» и осознать ее в том или ином смысле трудно. Возможно, это связано с ограниченной пропускной способностью мозга, но так или иначе начинается переход к более экономному описанию, при котором между альтернативами классификационных моделей определяются «существенные» связи, позволяющие перейти к более абстрактным моделям. Если это осуществляется путем введения минимального числа дополнительных метапонятий, но так, что не ухудшается описание частных случаев (соблюдается принцип ЭКА), по-видимому мы имеем дело с математическими моделями.

Итак, математику феноменологически можно было бы определить как наиболее экономный способ описания систем. Можно определить факторизацию любых систем на модели как решение некоторой оптимизационной задачи, сводящейся к минимизации общего числа метапонятий за счет перехода к шкалам более высокого порядка и более абстрактным построениям при соблюдении принципа ЭКА. Независимо от справедливости этого предположения, было бы интересно его проверить, хотя бы очень приблизительно, на основе анализа семантичности научных текстов.

Ни в какой мере не претендуя на решение этой проблемы, мы хотим только обратить внимание на одно соображение, которое, возможно, окажется полезным. Как уже отмечалось, первым этапом в развитии любой прикладной науки является этап чисто описательный, хотя бы потому, что вначале необходимо определить область исследований. На этом этапе в тексте должны преобладать повествовательные предложения и простейшие логические связки типа дизъюнкции [45]. Затем неминуемо наступает этап обобщения материала и переход от индуктивного метода описания к дедуктивному, при котором факты и свойства выводятся из некоторых общих принципов и понятий. Такой подход свойственен не только дедуктивно развитым наукам (как математика), но и в некотором отношении науке как таковой. Ведь едва ли можно назвать наукой простое описание фактов или свойств, поскольку такое описание только фиксирует состояние объекта изучения, но не дает возможности исследовать его развитие. Даже перечисление возможных состояний не может считаться наукой хотя бы потому, что для реальных систем оно практически невозможно в связи с очень большим числом таких состояний. Только модель объекта, основанная на обозримом числе принципов и правил, с помощью которых можно получить информацию о будущем поведении объекта, по-видимому, может считаться научным продуктом, характерным для последующих этапов.

Поэтому развитие науки неминуемо связано с появлением в тексте соответствующих работ большего числа логических связок (типа импликации) «если ... то» («→») и ей эквивалентных. Использование таких связок может являться косвенным показателем того, что в более полной степени в данной работе присутствует элемент дедукции и моделирования, что она носит менее описательный характер, даже независимо от употребления каких бы то ни было сокращений. Конечно, здесь может играть определенную роль стиль автора в связи с тем, что, например,

$$a \to b = \bar{a} \vee b = \overline{(a \wedge \bar{b})}, \ \bar{a} \text{ — «не } a\text{»; «}\vee\text{» — «или» [45].}$$

Поэтому следует учитывать не только буквально сами связки, но и соответствующие семантические эквиваленты: «поэтому», «тогда» и т. д. Видимо, составление словарика таких эквивалентов не представит особого труда. Дело облегчается еще тем, что конструкции типа $\overline{(a \wedge \bar{b})}$ являются не очень естественными для живого языка (ведь основные логические связки выбирались именно в связи с их наибольшей распространенностью).

Таким образом, можно было бы, например, в первом приближении ввести индекс дедукции научной работы как отношения числа предложений импликативного характера к общему числу предложений в тексте. В дальнейшем возможны уточнения путем учета не просто числа связок в отдельном предложении, поскольку одно предложение может быть логическим следствием другого, но и их взаимосвязей.

Индекс дедукции сам по себе, видимо, не может служить характеристикой семантичности текста, хотя бы потому, что тексты относятся к различным областям науки, и для первого этапа развития любой науки этот индекс, как уже отмечалось, по-видимому, весьма мал. Да и кроме того, дедукция сама по себе безотносительно к результатам еще мало что значит. Однако, если иметь, например, средний коэффициент дедукции для данной научной области, определяемой по большому числу работ, и предположить, что все-таки в основном научные статьи по замыслу их авторов отличаются от кроссвордов, то отклонение коэффициента дедукции конкретной статьи от среднего уровня в ту или иную сторону, возможно, уже являлось бы косвенным показателем ее семантичности.

В качестве сугубо иллюстративного примера рассмотрим выборочные оценки коэффициентов дедукции трех работ, посвященных близкой теме. Подсчитывался индекс дедукции для § 6 работы А. Д. Урсула [74] «Теория систем и теория информации». Оказалось, что среднее значение индекса дедукции $d_У \simeq 0,2$ (при этом цитаты и схемы не учитывались). Для § 3 гл. IV «Количественная мера самоорганизации и самосовершенствования в автоматах» книги В. М. Глушкова [75] $d_Г \simeq 0{,}7$. Наконец, для небольшой статьи К. Шеннона «Бандвагон» [76] $d_Ш \simeq 0{,}6$. По внешнему виду работы В. М. Глушкова и К. Шеннона отличаются очень сильно: во второй не содержится ни одной формулы, в этом отношении она является даже менее математизированной, чем работа А. Д. Урсула, в которой содержится одна формула. Однако, как видно, $d_Ш$ значительно ближе к $d_Г$ чем $d_У$. Может показаться, что это связано с тем, что книга А. Д. Урсула рассчитана на массового читателя, но то же относится и к статье К. Шеннона.

Весьма интересно и другое обстоятельство: значение индекса дедукции в работе А. Д. Урсула очень сильно меняется. Если разбить исследуемый параграф примерно на три части, то для каждой части $d_У$ принимает примерно значения 0,1; 0,1; 0,4. Это представляется как будто бы естественным, ибо вначале описывается объект исследования. Однако в § 3 работы В. М. Глушкова эта закономерность почему-то не наблюдается — индекс дедукции по всему параграфу примерно постоянен — 0,7; 0,7; 0,6 (заметим, что и в том и другом случае параграфы взяты из середины книг). То же постоянство наблюдается для статьи К. Шеннона, хотя она является совершенно самостоятельной работой. Конечно, в связи с несовершенством методики определения d все изложенное следует рассматривать не более, чем иллюстрацию еще одной возможной области, которую очень бы хотелось промоделировать, например, на основе применения математической логики. Поэтому подчеркнуто дискуссионный характер иллюстративных числовых данных может быть оправдан желанием привлечь читателей к более глубокому изучению этой теории.

По-видимому, очень интересным мог бы быть анализ с использованием формализма Генцена, который очень близок «естественному» мышлению. При этом коэффициент дедукции в первом приближении мог бы быть определен по количеству секвеций (выводов), встречающихся в тексте. В дальнейшем можно было бы учесть глубину секвеций, вводя меру иерархичности, связывая соответствующие высказывания стрелками, строя диаграммы и т. д. Так или иначе, нет никаких сомнений, что решение проблемы оценки семантичности научных работ в той степени, в какой это удовлетворит интересы практики, возможно только на пути широкого использования достижений современной математики.

А стоило ли так много говорить об анализе текстов? Нам кажется, что стоило. Ведь, если, как считает Р. Линдон, язык — модель мышления, то тексты — в известном отношении модель языка или некоторых его фрагментов. Рассмотренный пример является еще одним косвенным феноменологическим доказательством семантичности математики как теории абстрактных иерархических систем, поскольку если не подбирать явно искусственные примеры, математические тексты будут содержать все же большее число импликаций по сравнению с научными текстами других наук. Не это ли дало основание Б. Паскалю заметить, что в науке ровно столько науки, сколько в ней математики? С одной стороны, математика как Н-модель — некая абстрактная система, созданная в результате факторизации, а с другой — дальнейшее практическое применение математики будет способствовать построению содержательной теории факторизации систем, в частности осознанию роли и значения самой математики как универсального языка науки.

Поэтому у нас имеются все основания перейти к математике, покинув U-язык, в котором нет никаких ограничений, но нет и никаких гарантий, где можно сказать все что угодно и вас могут понять как угодно.

Если теперь этот переход покажется по крайней мере оправданным, наша задача будет выполнена. В следующем параграфе мы наметим такой переход.

§ 7. ЯЗЫК МАТЕМАТИКИ

Математику можно рассматривать как теорию абстрактных систем, т. е. как некоторую теорию Н-моделей, для которых, в принципе не обязательно существование Р-моделей. Однако независимо от этого ее построение стандартно — в ней существуют экзогенные и эндогенные М-понятия и т. д., связываемые в систему (потенциально) общезначимым образом.

Наиболее употребляемым метапонятием в математике является понятие множества. Интуитивно оно представляется очевидным. Основоположник современной теории множеств Г. Кантор описал в 1895 г. это понятие следующим образом: «Под множеством мы понимаем любое объединение в одно целое $\mathfrak{M}$ определенных вполне различаемых объектов $\mathfrak{M}$ из нашего восприятия или мысли, которые называются элементами» [30]. Конечно, это не может служить определением, ибо здесь содержатся другие понятия (объединение, целое и т. д.), которые в свою очередь требуют каких-то определений. Поэтому удобно считать множество метапонятием, придавая ему интуитивный смысл, описанный, например, Кантором. Следует, однако, заметить, что в дальнейшем теория множеств столкнулась с серьезными противоречиями, связанными с таким использованием этого понятия. Примером этого является так называемый парадокс Б. Рассела: «Содержит ли само себя множество всех множеств, не содержащих в качестве элементов самих себя?» Очевидно, что и положительный и отрицательный ответ на этот вопрос приводит к противоречию. Мы рассмотрим эту проблему в третьей главе. Важно, что наличие таких парадоксов даже в математике предостерегает нас от слишком свободного употребления ряда понятий как метапонятий, поскольку это очень просто может привести к противоречиям, не всегда нами своевременно осознанным. Таким образом, этот парадокс в математике лишний раз демонстрирует ее преимущества, поскольку в связи с значительно меньшим числом метапонятий возможность возникновения противоречий в ней значительно меньше, чем, например, в философии, и каждый раз можно принять эффективные меры к их устранению или во всяком случае проявить известную осторожность в их использовании. В частности, можно ввести еще одно метапонятие — класс. «Множество» может быть элементом «класса», но не наоборот. Похоже, что это (как и чисто аксиоматический подход, см., например, [81])не лучший выход из положения. Наш вариант излагается в третьей главе («класс» и «множество» для нас просто синонимы).

Для сокращений при описании множеств используется ряд обозначений. Так, $m \in \mathfrak{M}$ обозначает, что m — элемент $\mathfrak{M}$; $\mathfrak{M}_1 \subset \mathfrak{M}$, где $\mathfrak{M}_1$ — подмножество $\mathfrak{M}$; $\mathfrak{M}_1 \cup \mathfrak{M}_2$ обозначает множество, состоящее из элементов, принадлежащих $\mathfrak{M}_1$ или $\mathfrak{M}_2$; $\mathfrak{M}_1 \cap \mathfrak{M}_2$ — множество элементов, принадлежащих обоим множествам. Каждому множеству, факторизуемому на одно и то же множество, можно сопоставить некоторую характеристику, называемую мощностью, или кардинальным числом. «Кантор определял мощность, или кардинальное число, множества A как такое его свойство, которое остается после абстрагирования от качества элементов множества A и от их порядка» [61]. В случае конечных множеств мощность просто совпадает с числом элементов, для бесконечных — это некоторая абстракция, характеризующая возможность факторизации. Мощность $\mathfrak{M}$ обычно обозначается в виде $|\mathfrak{M}|$.

Как в математике задаются отношения? В общем в соответствии с нашим интуитивным представлением. Рассматриваются различные наборы элементов из множества $\mathfrak{M}$. Какое-то подмножество этих наборов может удовлетворять данному отношению P. Поэтому отношение задается просто как это подмножество. Точнее, рассмотрим всевозможные упорядоченные наборы из n элементов, множество которых обозначим в виде

$$\mathfrak{M}^n = \mathfrak{M} \times \mathfrak{M} \times \cdots \times \mathfrak{M}, \qquad (14)$$

где множество $\mathfrak{M}$ в правой части повторяется как «сомножитель» n раз. Соотношение (14) называют декартовым произведением, но это просто удобное сокращенное наименование для множества всех упорядоченных последовательностей из n элементов множества $\mathfrak{M}$, т. е. эндогенное, а не экзогенное М-понятие (определение — по Н. Бурбаки). В общем случае можно определять декартово произведение, используя n различных множеств. Отношение P^n называется n-арным, если оно определяется как подмножество

$$P^n \subset \mathfrak{M}^n,$$

или в общем случае подмножество

$$\mathfrak{M}_1 \times \mathfrak{M}_2 \times \cdots \times \mathfrak{M}_n.$$

Содержательно это означает, что берутся не все наборы по n элементов, а только некоторые из них. Тот факт, что элементы $m_1 m_2 \ldots m_n$ находятся между собой в отношении P, будет записываться в виде $m_1 m_2 \ldots m_n\ P$ (запятые между элементами будем ставить только, если возможны недоразумения). Степень («-арность») отношения не всегда будет указываться явно. Если она равна двум, то отношение будет называться бинарным, или соответствием. Иногда используется также термин многозначное отображение. Естественно, бинарные отношения могут определяться на различных множествах. Композиция (или умножение) бинарных отношений P и Q определяется в виде

$xz(P \cdot Q) \leftrightarrow (xyP) \wedge (yzQ)$, («$\leftrightarrow$» — «тогда и только тогда», «$\wedge$» — «И»).

Особое значение имеет бинарное отношение $\Delta_{\mathfrak{M}} = \{(xx) \mid x \in \mathfrak{M}\}$, называемое диагональю. Очевидно, если P — соответствие из A в B, то

$$P \cdot \Delta_B = \Delta_A \cdot P = P.$$

Важным частным случаем отношений являются операции (отображения). Отношение P^{n+1} называется n-арной операцией [63], если в нем как подмножестве $\mathfrak{M}^{n+1}$ не могут встретиться пары вида $(m_1m_2 \ldots m_nm_{n+1})$и$(m_1m_2 \ldots m_n\, m'_{n+1})$, $m_n \neq m'_n$, т. е. если «... любой упорядоченной системе из n элементов ... множества ... сопоставлен однозначно определенный элемент этого же множества» [64].

Множество всех элементов, стоящих на n первых местах, можно назвать источником, а множество элементов, стоящих на $(n+1)$-м месте в отношении,— результатом (целью) операции. Операции будем в соответствии с [28, 63] обозначать в виде (иногда без запятых) $m_1m_2 \ldots m_n\, f$ или $f_{m_1m_2\ldots m_n}$, подразумевая, что написанный символ f является $(n+1)$-м элементом соответствующего отношения P^{n+1} и, как обычно, «законом преобразования». Важными частными случаями отображений являются: инъективное (взаимно однозначное) отображение, когда любому элементу цели соответствует один элемент источника; сюръективное, когда каждому элементу результата соответствует хотя бы один элемент источника; биективное отображение, являющееся одновременно сюръективным и инъективным.

Теперь вернемся к рассмотрению некоторых важных частных случаев отношений. Отношение $Q^2 = P$ называется симметричным, если в определяемом им подмножестве наравне с упорядоченной парой (m_1m_2) содержится и упорядоченная пара (m_2m_1). Короче, это можно записать так:

$$m_1m_2P \rightarrow m_2m_1P,$$

где стрелочка, как обычно, обозначает сокращение выражения «если ... то» (импликация).

P рефлексивно, если пары (mm) содержатся в P; $\ulcorner mmP \urcorner = 1$ ($\ulcorner\ \urcorner = 1$ — условная запись истинности выражения в скобках «с уголками»), транзитивно при условии

$$m_1m_2P \wedge m_2m_3P \rightarrow m_1m_3P.$$

Если отношения P удовлетворяют условиям симметричности, рефлексивности и транзитивности, то P называется эквивалентностью. Будем в этом случае обозначать P символом Э или «$\sim$».

Эквивалентность разбивает подмножество $\mathfrak{M}^2$ на классы, не имеющие общих элементов. Если рассмотреть множество, элементами которого являются эти классы, то это множество называют фактор-множеством исходного множества по данной эквивалентности и обозначают в виде $\mathfrak{M}/_{\sim}$.

Рассмотрим некоторые примеры фактор-множеств. Пусть $\mathfrak{M}$ — множество всех предприятий страны. Будем считать эквивалентными все предприятия, принадлежащие одной отрасли. Тогда множество отраслей является фактор-множеством $\mathfrak{M}/_{\sim}$ по определенной так эквивалентности. Если же считать эквивалентными предприятия, стоимость продукции которых лежит в заданных пределах, то получим фактор-множество, классы которого будут определяться заданными пределами. Таким образом, определение фактор-множества по той или иной эквивалентности равнозначно классификации данного множества по какому-то признаку и рассмотрению всех полученных классов как нового множества, элементами которого являются эти классы. Поэтому модель C в этом случае естественно назвать классификационной (КМ). Это простейший тип моделей, с которых по существу начинается любое описание. Если фактор-множество состоит из одного элемента, можно говорить о номинальной модели (НМ), которая просто означает, что в множестве выделяется некоторое одно подмножество эквивалентных в том или ином смысле элементов.

Если P — только рефлексивно и транзитивно, модель C назовем квазипорядковой (КПМ). Если P определено для всех m, можно говорить о линейной квазипорядковой модели (ЛКПМ). В частном случае, если P и симметрично, получаем КМ или НМ. Если же P антисимметрично, то

$$m_1 m_2 P \wedge m_2 m_1 P \to m_1 = m_2$$

и получаем частично порядковую модель (ЧПМ) и линейно порядковую модель (ЛПМ), соответственно. В этом случае P будем обозначать символом «$>$», а для ЛКПМ — «$\geqslant$».

Плохо описываемые системы обычно вначале изучения факторизуются на указанные выше качественные модели. Поскольку в экономике, биологии и психологии таких систем большинство, не удивительно, что там особенно распространены качественные методы описания. По мере изучения некоторой системы определяются дополнительные отношения, что позволяет факторизовать систему на более богатые модели. Таким образом, существует постепенный переход от качественных к количественным моделям путем увеличения множества отношений $\{P\}$, являющегося факторизацией «существенного» подмножества множества $\{\mathcal{P}\}$ (см. § 5). При этом некоторое подмножество $\{P\}_ш \subset \{P\}$ связано с изменением характера множества $\mathfrak{M}$ от свободного множества, на которое не наложены никакие ограничения до множества действительных чисел R. Можно сказать, что $\{P\}_ш$ определяет тот или иной тип шкалы. Оставшееся подмножество $\{P\}_м$ в рамках данной шкалы является дополнительными отношениями. Обычно под моделью понимают $(\mathfrak{M}, \{P\}_м)$. Конечно, это деление плохо описываемо, поэтому ему можно придать только смысл некоторого принятого здесь условия. Говорят, что качественные модели, определенные выше, являются шкалами порядка ШП, представляющими наиболее слабые типы шкал. Нижней границей этих типов является шкала наименований ШН, тождественная определенной нами номинальной модели НМ. Чтобы описать другие типы шкал, возникающие при наличии большого числа существенных связей и большего множества $\{P\}_ш$, определим C как полную числовую систему с отношениями ($\mathfrak{M}$ — множество или подмножество действительных чисел).

Назовем шкалой упорядоченную тройку (S, C, F), где F — соответствие, факторизующее S в C, в частности это может быть и отображение. Соответствие должно переносить в определенном смысле те отношения, которые имеют место в S на C. Если F — отображения, то такая факторизация обычно является гомоморфизмом (см. гл. III, § 2). Отображение в общем случае не является единственно возможным. Иными словами, после отображения S в C можно осуществить преобразование C в C_1 с помощью другой функции Φ так, что в результате снова получится шкала системы S. Класс допустимых функций Φ и определяет тип шкалы. Шкала интервалов ШИ определяется, если Φ — линейное преобразование общего вида. Так, температурная шкала является примером шкалы интервалов. Мы можем в принципе выбрать произвольно и начало отсчета температуры и единицу ее измерения. Но уже если этот выбор сделан, шкала определяется однозначно.

Очевидно, ШИ предполагает линейную порядковую модель. Дальнейшим шагом по пути количественного описания альтернатив являются шкалы разностей ШР, для которых допустимое преобразование может сводиться только к изменению начальной точки отсчета (т. е. Φ — частный случай линейного преобразования, у которого угловой коэффициент равен единице).

Например, промышленное развитие страны можно шкалировать по величине их национального дохода, если найти определенный уровень его, начиная с которого страна считается промышленно развитой. Наконец, самый высокий уровень шкалирования — абсолютные шкалы АШ, для которых Φ является тождественным преобразованием.

Иными словами, для систем, факторизуемых на АШ, существует только одна шкала, однозначно определяемая особенностью системы.

Системы, обладающие АШ, могут быть описаны количественно, т. е. отношения $\{\mathcal{P}\}$ таковы, что они могут факторизоваться в числовую систему с определенными в ней арифметическими операциями.

В случае НШ, например, S может факторизоваться также на подмножество чисел, но они просто играют роль наименований и арифметические операции с ними ничему не соответствуют в S. Может возникнуть вопрос, почему при определении шкал использовались только сравнительно узкие классы преобразований. Действительно, любое преобразование Ф в принципе определяет особый тип шкал. В частности, если Ф — произвольное монотонное преобразование, получаем шкалы порядка. Однако практически наиболее важны отмеченные выше типы, которые можно упорядочить по степени «количественности» описания системы S или по степени «силы» шкал:

$$\text{ШН} \leqslant \text{ШП} \leqslant \text{ШИ} \leqslant \text{ШР} \leqslant \text{АШ}. \tag{15}$$

Каждый «больший» член этой цепи (линейно упорядоченного множества) предполагает возможность «более слабого» шкалирования, и эта цепь иллюстрирует переход от качественных к количественным шкалам.

Большое значение в приложениях имеют множества, которые допускают абсолютные шкалы для любых пар элементов. Обычно эти множества называются метрическими пространствами, а число, соответствующее каждой паре элементов m_1m_2P — расстоянием между ними, если при этом удовлетворяются три интуитивно очевидных условия

$$mm\rho = 0; \quad m_1m_2\rho = m_2m_1\rho; \quad m_1m_2\rho + m_2m_3 \geqslant m_1m_3\rho.$$

Линейные метрические пространства называются нормируемыми [117]. Норма

$$\|m\| = m0\rho \qquad (0 \text{ — начало отсчета}).$$

Бинарные отношения являются важными, но, конечно, не единственно возможными видами отношений, определенными на некотором множестве — носителе $\mathfrak{M}$. В общем случае можно определить некоторое множество отношений (или предикатов) $\Omega^p = \{P_0, \ldots, P_\eta, \ldots\}$. Если отношение P_η имеет арность n_η, то это будет записываться в виде:

$$P_\eta = \Omega^p_{n\eta}$$

(это несколько видоизмененные обозначения, используемые в [28, 64]).

Систему $(\mathfrak{M}, \Omega^p)$ называют моделью, или реляционной системой [64]. Так как любая операция является частным видом отношений, то можно было бы в общем случае ограничиваться только рассмотрением моделей, но обычно множество операций Ω^f (для симметрии мы ввели здесь верхний индекс f) выделяют отдельно и определяют алгебраическую систему как тройку $(\mathfrak{M}, \Omega^f, \Omega^p)$.

Типом τ порядка (α, β) условимся называть набор всех арностей операций и отношений алгебраической системы, которые называются главными (задаются при определении системы). «Если арность $f_q = \Omega^f_{k_q}$ и $P_\eta = \Omega^p_{n_\eta}$, то

$$\tau = (k_0, \ldots, k_q, \ldots; n_0, \ldots, n_\eta, \ldots),$$

$$\text{причем } q < \alpha;\ \eta < \beta.$$

Нульарные операции алгебраической системы идентифицируются с некоторыми главными или выделенными элементами» [28]. При $\Omega^p = \varnothing$ ($\varnothing$ — пустое множество) алгебраические системы называют универсальными алгебрами, частные виды которых имеют большое прикладное значение.

В математической логике используются специальные обозначения, не только для «и», «или», «следует», но и для таких выражений, как «для всех» $\forall$, «существует» $\exists$. Знаки $\forall$ и $\exists$ называют кванторами (см., например, [19]).

Кванторы в конкретной алгебраической системе представляют определенный интерес, если ввести их как «относительные» кванторы, т. е. явно будет отмечаться множество, на котором определен квантор (множество определения). Это будет делаться двумя различными способами: существует $m \in \mathfrak{M}$, что и т. д. $(\exists m \in \mathfrak{M})$ (...); или путем задания предиката, область истинности которого совпадает с множеством, на котором определен квантор $(\exists mP)$ (...).

Обычно кванторы вводят без явного указания их области определения, хотя в некоторых случаях ее и оговаривают. Нам кажется, что введение относительных кванторов не только более наглядно, но и весьма принципиально, в частности, для возможности анализа и снятия некоторых парадоксов теории множеств. Вернуться к обычному, «глобальному» квантору легко, считая, что множество определений относительного квантора является множеством вообще всех множеств.

При изучении различных систем нас интересуют не только, а иногда и не столько какие-то объекты, сколько связи между ними. Простейший тип связи — связь между двумя объектами. Передатчик связан с приемником, человек — с его окружением, атомы кислорода—с атомами водорода в воде и т. д.

Что такое связь? В общем это М-понятие. Можно назвать связь соотношением, соответствием и т. д. Слов много, но конкретный смысл они получают только при той или иной интерпретации. Соответствие между двумя объектами можно понимать как соответствие между первым и вторым и/или наоборот, поэтому для двух объектов оно направлено. Назовем его нейтральным термином — морфизм, чтобы избавиться от частных интуитивных ассоциаций и М-понятий (ведь мы говорим о математике — теории абстрактных систем). В частности, отображение является морфизмом, хотя обратное, конечно, не верно и «смысл», кроме только что введенного, морфизм получает только в рамках конкретных Р-моделей.

Рассмотрим два класса $\mathrm{Ob}\zeta$ и $\mathrm{Ur}\zeta$. Элементы первого назовем объектами, а элементы второго — морфизмами. Графически объекты будем обозначать точками или буквами (с индексами), а морфизмы — стрелочками (с индексами).

Прежде всего полезно представить, что между двумя объектами существует более одного морфизма. Это обстоятельство будем записывать в виде $x \underset{\overset{u_2}{\to}}{\overset{u_1}{\to}} y$ (если морфизмов немного) или $u_{xy} : x \Rightarrow y$, где u_{xy} некоторое подмножество морфизмов $u_{xy} \subset \mathrm{Ur}\zeta$.

Подмножество u_{xy} в теории категорий [27] обозначается также символом $\mathrm{Hom}\,(x, y)$. Морфизмы из $\mathrm{Hom}\,(x, y)$ могут быть самыми различными. Мощность множества $\mathrm{Hom}\,(x, y)$ может быть какой угодно. В частности, между двумя объектами возможны «разнонаправленные» морфизмы $x \underset{u_2}{\overset{u_1}{\rightleftarrows}} y$.

Каждой системе, состоящей из класса объектов и морфизмов между объектами, можно сопоставить двойственную систему, в которой направление всех морфизмов изменено на противоположное.

Теперь можно дать формальное определение (диаграммной) схемы. Диаграммная схема или просто схема ζ — это четверка Ob ζ; Ur ζ; δ^{ζ}; r^{ζ}, где δ^{ζ} и r^{ζ} — морфизмы, являющиеся отображениями δ^{ζ}; r^{ζ}; Ur $\zeta \to$ Ob ζ.

Для любого морфизма $u \in$ Ur ζ δ^{ζ} называется областью определения (или началом) морфизма, а r^{ζ} областью значений (или концом) морфизма [35]. Так как δ^{ζ} и r^{ζ} — отображения, один и тот же объект может служить началом и/или концом многих морфизмов. Примерами схем являются графы и мультиграфы (ср. § 1, 2). Поскольку под объектом мы можем понимать что угодно, то, в частности, объектами могут быть диаграммные схемы, например T и ζ. Морфизм ζ_T: $T \to \zeta$ называют диаграммой типа T над схемой ζ [35].

Частным случаем диаграммных схем являются категории [48]. Это диаграммные схемы, для каждого объекта которых определен тождественный морфизм и специальным образом определена композиция морфизмов. Если T и ζ — категории, то морфизм ζ_T при некоторых дополнительных условиях ([35]) называют функтором. Теория категорий возникла в 40-х годах при исследовании ряда задач алгебраической топологии [44, 47, 52, 55].

«Разумеется как авторам, так и другим математикам с самого начала было ясно, что область применения ее понятий далеко выходит за рамки алгебраической топологии» (П. Хилтон, из предисловия к [27]). Мы думаем, что за теорией схем (и категорий) очень большое будущее при создании прикладной теории абстрактных систем — абстрактной теории систем.

Рассмотрим, в частности, метамножество (множество [2]) всех ($\forall$) множеств, удовлетворяющих определенным условиям P (это уже относительный квантор $\forall P$). Каким «определенным»? Каким надо, чтобы все было «хорошо» (см. гл. III § 1 ср. также понятие «универсальное множество U» Гротендика [27]). Определим в этом «метамножестве» морфизмы как всевозможные отображения между «элементами» (множествами). «Метамножество» становится «метасистемой», в частности комплексом. При очевидных условиях Н-моделью этого комплекса является категория всех множеств, которую обозначим St (как и в [29], в [27, 35] она обозначается $\mathcal{E}_{ns}$).

Теперь рассмотрим «квадратную» схему $\square$:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\varphi"'] & Y \\ Z \arrow[r, "\psi"'] & W \arrow[u, "\chi"'] \end{tikzcd} \qquad \begin{array}{l} \mathrm{Ob}\,\square = (X,\ Y,\ Z,\ W); \\ \mathrm{Ur}\,\square = (f,\ \varphi,\ \psi,\ \chi). \end{array} \tag{16}$$

Диаграмма типа $\square$ над категорией St сведется к замене Ob $\square$ какими-то ObSt и замене Ur $\square$ какими-то отображениями из UrSt, т. е. просто можно подразумевать на схеме (16) под X, Y, Z, W некоторые множества и под f, φ, χ, ψ некоторые отображения. Особый интерес представляют такие диаграммы типа $\square$ над категорией St, для которых

$$f = \varphi\psi\chi, \tag{17}$$

т. е. отображение $f : X \to Y$ приводит к тому же результату, что и последовательность отображений: $\varphi : X \to Z$; $\psi : Z \to W$; $\chi : W \to Y$. Такую диаграмму естественно назвать коммутативной. При отображении $f : X \to Y$ элементу из множества Y может соответствовать не один элемент из X. Поэтому отображение f разбивает множество X на непересекающиеся подмножества, отображаемые (каждое) на один элемент множества Y. Иначе, отображение f индуцирует на X отношение эквивалентности $\sim_f$. Можно факторизовать X по этому отношению $X/\sim_f$ и отобразить X на это множество. Положим $Z = X/\sim_f$. Тогда $\varphi : X \to X/\sim_f$. Теперь учтем, что X может отображаться не на все множество Y, а только на часть его. Обозначим эту часть символом Xf и положим $W = Xf$. Наконец, введем отображение «вложения» $\chi : Xf \to Y$. Тогда, очевидно, диаграмма (16) оказывается коммутативной (равенство (17) справедливым) и мы получили теорему о разложении любого отображения f на съюрективный φ, биективный ψ и инъективный χ «сомножители». Эта теорема, несмотря на свою очевидность и простоту (а может быть именно поэтому), является, по нашему мнению, одной из важнейших Н-моделей абстрактной теории систем (см. гл. II, § 1), уточняя, в частности, интуитивное понятие факторизации. «Но только для множеств»,— скажет читатель. Однако любое отношение — это подмножество некоторого множества (ср. (14)). Таким образом, можно на основе тех или иных множеств «... образовывать другие множества, беря множество их частей или составляя произведения...» и т. д., а затем «применить к вновь образованным множествам... те же операции...» [20], т. е. образовывается «шкала множеств» с той или иной базой. Для некоторого множества (метамножества) M шкалы можно задать какие-то явно сформулированные свойства общего элемента этого множества (метамножества). Пусть T — пересечение частей множества M, определяемых этими свойствами, говорят, что элемент σ множества T определяет на базовых множествах «структуру рода T» [20].

Это же M-понятие удобно выразить и на языке теории категорий (схем). Построим подкатегорию BSt категории St с объектами $\mathrm{ObBSt} \subset \mathrm{ObSt}$ и морфизмами — всевозможными биективными отображениями с обычно определяемой композицией [27]. Теперь определим некоторый функтор $F: \mathrm{BSt} \to \mathrm{BSt}$. Этот функтор назовем родом структуры, поскольку его «свойства» задаваемые, например, аксиоматически, определяют «свойства» структур — результатов морфизма F. Любую конкретную структуру (которая всегда может рассматриваться как элемент некоторого множества из ObBSt) естественно назвать структурой рода F.

Пусть например, A-множество F-множество всех отображений $F: A \times A \to A$, определяющих на A некоторые бинарные алгебрагические операции, скажем, ассоциативные, с единицей, относительно которых каждый элемент обратим. Так как A произвольно, F можно считать функтором из BSt в BSt, т. е. родом структуры. В частности, при отмеченных «свойствах» F-род структуры группы и любая группа — структура рода F.

Род структуры тесно связан с H-метамоделью (теорией) структур данного рода. Если все структуры при этом изоморфны, то теория однозначна; в противном случае — многозначна (те же термины возможно имеет смысл относить и к роду структуры F, как функтору). «Теория целых чисел, теория действительных чисел, классическая эвклидова геометрия — однозначные теории; теория упорядоченных множеств, теория групп, топология — многозначные теории. Изучение многозначных теорий — самая резкая черта, отличающая современную математику от классической» (Н. Бурбаки [20]).

Итак, похоже, что любые математические структуры можно в значительной степени описать, основываясь только на метапонятии множества, которое по праву может считаться основным метапонятием современной математики.

Так же, как цена добродетели не растет с годами, так для меня и истина не становится глубже от того, что она известна уже давно.

М. Монтень

Глава II

ТЕОРИЯ СИСТЕМ КАК СИСТЕМА ТЕОРИЙ

Рассмотрены «претенденты на титул» (абстрактной) теории систем среди различных формализованных теорий. При этом предлагается различать общую теорию систем как систему существующих взаимосвязанных теорий (наук); метатеорию систем как теорию, объединяющую множество существующих теорий в систему; теорию абстрактных систем — математику; абстрактную теорию систем — общезначимую метатеорию общей теории систем.

Основной наш тезис состоит в том, что метатеория систем должна быть абстрактной теорией систем, что подтверждается как логикой развития наук, так и логикой их специализации и объединения.

§ 1. КЛАССИЧЕСКИЕ ТЕОРИИ СИСТЕМ

1. Три возражения

Существование классических теорий систем может показаться бессмысленным по трем причинам:

1) поскольку М-понятие системы является метапонятием в любой теории (см. гл. I), то как может существовать теория систем, ведь она должна быть теорией самой себя?

2) если она даже может существовать, то о каких классических теориях может идти речь, если сама программа создания общей теории систем провозглашена Л. фон Берталанфи всего несколько десятилетий назад?

3) наконец, эта теория должна быть одна по определению.

Действительно, замкнутая теория систем существовать не может по причине, указанной в первом возражении. В любой теории (см. § 6, гл. 1) всегда должны быть некоторые экзогенные М-понятия, с которыми в конечном счете связаны все эндогенные. Однако результаты единой теории систем, если бы таковая была возможна, должны иметь вид: если система (любая) обладает такими-то свойствами, то произойдет нечто при соблюдении определенных условий. Но система перестанет быть «любой», если перечислены ее свойства и зафиксированы условия и приведенный «общесистемный» ответ ничем не отличается от ответа любой из существующих теорий — физики, химии и т. д., которые ведь тоже исследуют некоторые системы. Другое дело, что каждая из наук имеет свои экзогенные М-понятия, которые вполне могут оказаться эндогенными в другой науке. Так, в химии атом — экзогенное, а в физике эндогенное М-понятие. Однако результат, полученный в любой науке, является абсолютным в том смысле, что он будет иметь место для данной системы всегда при соблюдении определенных условий независимо от того, описываются ли одни и те же «свойства» и «условия» непосредственно в экзогенных или в эндогенных М-понятиях. Поэтому каждая теория, изучая некоторый подкласс систем (или свойств), может рассматриваться как часть общей теории систем, специализированная с помощью некоторых М-понятий именно для этого подкласса. Ее результаты будут иметь вполне общесистемный вид с превращением некоторых экзогенных М-понятий в эндогенные в другой части (теории) общей теории систем.

Итак, общая теория систем — это система теорий. Множество теорий становится системой теорий, только если имеются взаимосвязи между элементами этого множества. Следовательно, общая теория систем включает не только множество теорий, но и некоторые средства их взаимосвязи. Для соблюдения принципа ЭКА необходимо, чтобы, в частности, экзогенные М-понятия двух каких-либо теорий оказались эндогенными в какой-то более общей теории при возможности их общезначимого описания с постепенным уменьшением числа экзогенных М-понятий. С этой точки зрения система теорий должна быть иерархичной и число экзогенных М-понятий должно уменьшаться (конечно, не до нуля) с ростом абстрактности теории. На каком-то уровне (высоком) абстракции находится теория абстрактных систем — математика, которая тоже состоит из систем взаимосвязанных теорий (как и любая менее абстрактная теория).

Итак, можно говорить о теориях (частных) систем общей теории систем как системе таких теорий и теории наиболее высокого уровня абстракции (метатеории любых теорий систем), которую мы назовем абстрактной теорией или математической метатеорией систем при условии, если она общезначима (в противном случае будем говорить просто о метатеории систем). Иначе общая теория систем — это система теорий, а абстрактная теория систем — математически корректная метатеория любых теорий систем, превращающая множество этих теорий в систему в рамках принципа ЭКА. Поэтому по определению абстрактная теория систем должна быть вершиной теории абстрактных систем — математики, при условии, конечно, что математика непротиворечива и всегда имеет Р-модели.

Обычно под общей теорией систем понимают «скелет науки» (Боулдинг [65]), «общую теорию системных теорий» (Садовский [37]), «теорию абстрактных моделей» (Месарович [69]), т. е. либо то, что предлагается здесь называть теорией абстрактных систем, либо абстрактную теорию систем. Мы сохраним за термином «общая теория систем» его первоначальный смысл, декларированный Л. фон Берталанфи, который «видит главную функцию теоретических моделей в объяснении и предсказании еще не исследованных явлений и управлению ими» [65]. Другими словами, если абстрактная теория систем — вершина математики, «скелет науки», то общая — сама наука во всем разнообразии конкретных системных теорий.

Во всяком случае мы не согласны с мнением А. Рапопорта, который считает, что «общая теория систем — это мировоззрение или методология, а не теория в том смысле, который придается этому термину в науке» [65], хотя бы потому, что любое мировоззрение есть также Н-модель, сводящаяся к некоторой системе М-понятий и связей между ними. Поэтому мировоззрение тоже теория «в том смысле ...», даже если оно формулируется в U-языке. Впрочем, если мировоззрение или методология отличается по А. Рапопорту от научных теорий необщезначимостью соответствующих Н-моделей, то общая теория систем тем более не может ориентироваться на такую «перспективу». Вероятно, не стоило бы столь подробно обсуждать «ярлычки» — «общая», «абстрактная» и т. д. (тем более, что там, где это не может привести к недоразумениям, мы их будем опускать), если бы за ними не стояли «два главных направления исследования. Первое, достаточно хорошо разработанное фон Берталанфи и его сотрудниками, принимает мир таким, каким мы его обнаруживаем: исследуются содержащиеся в нем различные системы — зоологические, физиологические и т. п ... При втором методе начинают с другого конца. Вместо того, чтобы исследовать сначала одну систему, затем вторую, третью и т. д., следуют противоположному принципу...» (Эшби [67]).

Итак, речь просто идет об индуктивном и дедуктивном подходах к моделированию, которые составляют диалектическое единство, поскольку любая дедуктивная теория вначале обычно строится индуктивным путем «на основе хорошо понятых реальных задач и частных случаев» [60], и с течением времени оказываясь очередным частным случаем более общей теории (см. гл. I).

Однако на каждом этапе развития науки существовали теории, которые претендовали на объединение всех явлений и/или теорий, например классическая механика в прошлом веке и квантовая механика вместе с релятивистской в нашем. Ведь все системы, в конечном счете, имеют «физическую» природу. Поэтому считалось, что все можно свести к физике, которая тем самым выступала в роли метатеории систем (вспомним детерминистскую модель мира Лапласа). В этом отношении характерно также высказывание одного из крупнейших физиков нашего века П. А. Дирака. «Общий принцип суперпозиции квантовой механики применим к состояниям (в любом из указанных выше значений) произвольной динамической системы» [90].

Итак, общая теория и метатеории (и не одна!) систем возможны и они существуют, находясь в непрерывном становлении и развитии. При этом любая теория, в том числе явно или неявно претендующая на титул метатеории систем, имеет все шансы оказаться со временем на более низком уровне иерархии системы теорий общей теории систем, которая по определению действительно одна. Но противоречий в названии пункта нет, ибо любая научная теория есть теория систем в определенных условиях при некоторых ограничениях (а без этого вообще любая модель беспредметна).

Тем не менее, говоря о классических теориях систем, мы будем в связи с необозримостью вообще всех теорий в истории науки иметь в виду только те теории последних лет, которые явно или неявно претендуют на звание (абстрактной) теории систем. Но почему в таком случае их нужно называть классическими? Хотя бы потому, что они впервые назвали себя открыто теориями систем. И это факт, который останется инвариантным во времени,— интуитивно первая предпосылка «классичности» теории.

2. Критерий ФАДЭП

Прежде чем очень бегло рассмотреть классические абстрактные теории систем или некоторые теории, которые имеют основания «претендовать на этот титул», отметим еще раз, что здесь не будет определяться понятие «система» в рамках U-языка (см. [37, 38]). Мы уже частично обсуждали этот вопрос в гл. I и пришли к выводу, что это наиболее общее метапонятие, определить которое именно поэтому не возможно (если не вводить другие метапонятия, пожалуй менее наглядные). Однако имеет смысл вопрос, как мы будем изучать системы, оставляя за этим термином его интуитивное содержание. Ясно, что изучать — это значит факторизовать получаемую систему на те или иные Н-модели. Поэтому вопрос может стоять иначе: каковы должны быть Н-модели, на которые могут факторизоваться любые системы так, чтобы эти Н-модели можно было считать моделями абстрактной теории систем.

Мы выдвинем некоторые критерии, которым должны удовлетворять эти Н-модели, как обычно в U-языке. Если некоторые Н-модели удовлетворяют этим критериям, то это Н-модели абстрактной теории систем. Эти критерии таковы:

1) Н-модели должны строиться в рамках формального языка, что допускает реализацию принципа ЭКА;

2) модели абстрактной теории систем должны быть настолько общими, чтобы можно было описывать любые системы, независимо от их природы, хотя бы на уровне постановки задач;

3) модели должны учитывать динамику систем, ибо любые системы из известных нам являются динамичными и могут рассматриваться как статические только, как правило, при специальной факторизации;

4) в связи со сложностью моделируемых систем модели абстрактной теории систем должны строиться на основе эволюционного программно-целевого метода (ЭПЦМ), при котором определена конечная цель (максимальная «эффективность» моделирования), но программа ее реализации создается и совершенствуется по мере развития системы наших знаний на основе принципов, предопределяющих совместимость разрабатываемых программ (отдельных моделей [32]); кроме того, абстрактная теория систем должна допускать развитие общей теории систем также на основе ЭПЦМ, т. е. общая теория систем — это эволюционирующая система Н-моделей (теорий); впрочем, и абстрактная тоже;

5) Н-модели должны допускать наглядные Р-модели (быть «простыми»).

Кратко эти принципы можно заиндексировать М-понятиями: Ф — эффективная формализация; А — абстракция; Д — динамичность; Э — эволюция; П — простота (ФАДЭП).

Если теория систем формализуема Ф, то мы можем на основе принципа ЭКА «опуститься» от общей постановки А до решения конкретных задач и, с другой стороны, при соблюдении принципа Э учесть и объединить новые результаты частных экспериментов и теорий. Несколько в стороне стоит принцип динамичности Д. На первый взгляд он кажется слишком частным. Однако мы думаем, что время имеет особый статус, который дает ему право быть включенным в самые первичные и общие определения (см. гл. III). Более того, именно такой подход может не только стимулировать новые приложения, но, возможно, и укрепить основы математики, которые, по мнению многих математиков, в этом нуждаются.

Ниже мы рассмотрим различные Н-модели, которые прямо или косвенно претендуют или могут претендовать на титул абстрактных теорий систем.

3. Алгебраические Н-модели систем

К алгебраическим Н-моделям систем можно отнести Н-модели, которые используют какие-то (частные) модели универсальных алгебр. Наиболее типичным примером такого рода моделей являются модели отношений. По М. Месаровичу [69], «абстрактной системой называется некоторое отношение, определенное на произведении X». Аналогично, «алгебраическая теория множеств в применении к отображениям и отношениям» (У. Эшби [67]) является по сути кратким изложением некоторой части теории универсальных алгебр и алгебраических систем, хотя ни то, ни другое понятие в нем не используется. Если абстрагироваться от возможного различия в терминологии, то работа У. Эшби является типичной для попыток факторизации систем на Н-модели систем алгебраических. Это естественно, ибо такие системы наиболее универсальны из всех тех, которые прямо или косвенно использовались в прикладных теориях. Назовем такой подход алгебраическим. Недостатком большинства из алгебраических моделей, на наш взгляд, являются: 1) трудности с описанием систем стохастических и нечетких [33, 32] и 2) нединамичность моделей такого рода.

Время в общем случае даже как параметр явно не входит в аппарат. Требования Э и П ФАДЭП, по-видимому, выполняются. Требование Ф в принципе также удовлетворено, хотя в настоящее время спуск к отдельным теориям из системы теорий еще не очень освоен. Делаются первые интересные шаги в этом направлении (см., например, [89, 71]).

Итак, алгебраический подход пока не полностью удовлетворяет принципам ФАДЭП. Доказательством того, что эти недостатки не выдуманы только для того, чтобы приписать достоинства еще худшей точке зрения (такой метод общеизвестен), является тот простой факт, что на сегодня «алгебраическая» теория систем существует сама по себе, а все остальные теории тоже сами по себе, хотя в них и очень широко используются частные модели универсальных алгебр (группы, например). Более предметным доказательством неудовлетворительности такого подхода является наличие в самой теории систем другого направления, которое основывается на иных моделях. Это направление резко улучшает прикладные аспекты теории систем, позволяя легко реализовать принцип ЭКА; явно вводит время в первоначальное определение систем; настолько легко объединяет некоторый класс Н-моделей (теории автоматического регулирования), что зачастую растворяется в нем; если не просто, то во всяком случае привычно, ибо за ним, по сути, века и авторитеты. Условно это направление предпочитает более традиционный подход.

4. Дифференциальные Н-модели систем

Идейной основой дифференциальных Н-моделей систем является определение В. В. Немыцкого и В. В. Степанова [84], согласно которому динамической системой называется некоторая группа преобразований R_t, определенная на метрическом пространстве R. При этом:

1) R_t определена для всех t;
2) R_t — группа $(f_t,\ f_\tau \in R_t) \to f_t f_\tau = f_{t+\tau} \in R_t$;
3) R_t непрерывна, для любых последовательностей

$$\lim_{n\to\infty} t_n = t_0 \text{ и } \lim_{n\to\infty} x_n = x_0,\ x_0,\quad x_n \in R$$

(пределы обычные, обозначения см. § 7, гл. I).

$$\lim_{n\to\infty} x_n f_{t_n} = x_0 f_{t_0}.$$

Чтобы последнее определение было вполне корректным и динамическая система описывалась привычным аппаратом дифференциальных уравнений, на R накладывают дополнительные ограничения, необходимые для получения результата, с которым можно эффективно реализовать принцип ЭКА. Как заметил Р. Калман [71], «дело вкуса, определять ли гладкую динамическую систему как систему, описываемую дифференциальными уравнениями, или основываться на определении» типа приведенного выше.

Дифференциальные Н-модели систем вполне удовлетворяют первому принципу ФАДЭП — они формальны и допускают «легкий спуск» на основе принципа ЭКА к конкретным задачам и моделям. Они совершенно не удовлетворяют второму принципу, ибо описывают чрезвычайно узкий класс систем. Дело не только в том, что «мы не собираемся рассматривать здесь вероятностные динамические системы (условные марковские процессы)» [71].Кстати, едва ли можно считать эти классы идентичными. Главное, что не позволит этому направлению, на наш взгляд, претендовать на звание математического аппарата общей теории систем, состоит в том, что R считается метризуемым, т. е. предполагается возможность факторизации систем на очень сильную шкалу, что совершенно нереально для преобладающего большинства систем. Но без метризуемости практически нет первичного аппарата дифференциальных уравнений. Правда, делаются попытки построить дифференциальное исчисление в векторных пространствах без нормы и т. д. (см., например, [85]), но пока это только попытки.

Далее дифференциальные Н-модели в принципе удовлетворяют требованию Д ФАДЭП и в рамках того узкого класса систем, которые они описывают, удовлетворяют требованию Э ФАДЭП. Что же касается простоты, то вероятно, эти модели скорее привычны, чем просты.

Итак, дифференциальные Н-модели систем не удовлетворяют второму требованию ФАДЭП, которое, по нашему мнению, является определяющим для того, чтобы Н-модель имела право именоваться абстрактной теорией систем.

Конечно, из этого ни в коей степени не следует, что такое направление не эффективно. Наоборот, большинство практических результатов получены именно здесь, ведь вся теория автоматического регулирования является частным ответвлением этого направления. Более того, существуют, по-видимому, далеко не исчерпанные возможности расширения области его приложений, а именно на пути рассмотрения вероятностных динамических систем. При этом, наверное, можно охватить гораздо более общую ситуацию, чем детерминированные движения [42], рассматривая, например, уравнения Колмогорова — Чепмена или обобщенное уравнение Колмогорова [12] как исходное. Однако это уже будет в принципе другой подход, который не укладывается в исходное определение В. В. Немыцкого и его модификации.

В самом деле, существуют две возможности.

1. Ограничиться первоначальным определением и использовать статистические модели для другой формы описания и вместо того, чтобы спрашивать: «каково будет состояние данной системы в момент времени t?», спрашивать: «какова вероятность того, что в момент t состояние системы будет принадлежать определенному подмножеству фазового пространства?» (П. Р. Халмош [86]). Это направление, начинающееся, по-видимому, с А. Пуанкаре, привело к редкой по красоте теории, которая связана с чисто геометрической трактовкой механики. «Гамильтонова механика — это геометрия в фазовом пространстве» (В. И. Арнольд [87]). Однако если сохранить первоначальное требование непрерывности и метризуемости, в конечном счете мы сумеем описать только весьма узкий класс систем, и вся абстрактная теория систем, в сущности, окажется другим языком для описания теории дифференциальных уравнений. Конечно, это совсем не мало, но не удовлетворяет требованию А ФАДЭП и поэтому должно быть некоторым не самым абстрактным блоком в эволюционной программе создания общезначимой метатеории систем. К нему всегда должен быть путь в соответствии с принципом ЭКА, но, видимо, эта теория все же останется в основном уделом математиков при решении конкретных задач, а не оружием нематематиков при их постановке.

2. Наложить на пространство R гораздо более скромные требования, чем метризуемость, требуя абсолютную шкалируемость только для меры. Тогда мы можем описывать не только «количественные», но и некоторые «качественные» свойства систем, т. е. расширить класс описываемых систем. Это означает, что шкалы (см. § 7, гл. I) окажутся более слабыми и при соблюдении принципа ЭКА расширится поле зрения без ухудшения разрешающей способности.

5. Динамическая теория меры

Множество всех подмножеств некоторого множества Ω может считаться булевой алгеброй [13]. Весьма скромное предположение, совместимое с принципом ЭКА, состоит в том, что булева алгебра полна, замкнута относительно счетных теоретико-множественных операций [88] (σ-алгебра) и на ней можно определить счетно-аддитивную конечную меру, т. е. любому подмножеству $\Omega^i \subset \Omega$ приписать некоторое число μ_{Ω^i} такое, что если Ω^i — непересекающееся объединение двух подмножеств, то меры этих подмножеств дают в сумме μ_{Ω^i}. Мера всего пространства Ω равна μ_Ω. Если $\mu_\Omega = 1$, то меру такого рода назовем мерой истинности.

Здесь необходимо отметить, что часто используемая вероятностная трактовка меры истинности не является ни единственно возможной, ни тем более корректной при описании многих однократно реализуемых процессов, в частности экономических и социальных. Естественно, здесь бессмысленно понятие вероятности в классическом понимании этого слова, ибо непонятно, что такое генеральная совокупность. Поэтому в общем случае меру истинности можно трактовать как вероятность условно, понимая под этим некоторую «субъективную вероятность», степень правдоподобия, относительную меру мощности классов — ОММ [62] или еще какое-либо интуитивно удобное М-понятие.

Поскольку нас интересуют математические модели, а не привязываемые к ним М-понятия, то будем просто говорить о мере и по существу рассматривать некоторые вопросы, связанные с математической теорией меры. Теория вероятности, в частности, после классических работ Колмогорова «несомненно, является ветвью анализа и в узком смысле ветвью теории меры» (Кац [118]). С другой стороны, детерминированные процессы можно рассматривать как предельный частный случай стохастических. Поскольку теория меры допускает и более общие Р-модели, естественно попытаться проанализировать ее шансы как «претендентки на титул» общезначимой метатеории на основе критерия ФАДЭП (см. п. 2). Начнем с трудностей, возникающих при этом. «Многие из трудностей теории меры и вся имеющаяся здесь паталогия возникают в связи с существованием множеств меры нуль» (Халмош [86]). Если для Р-модели меры выбрать вероятность, то при «геометрической интерпретации теории вероятностей ... необходимым ее элементом является понятие «элементарного события». Эти события как правило, имеют нулевую вероятность, однако отличны от «невозможного» события (пустого множества)» [88]. Это связано с представлением об актуальной бесконечности, которая и здесь стоит на нашем пути (см. гл. III).

Одним из возможных выходов является рассмотрение не множеств, а классов множеств, сравнимых по модулю множеств меры нуль [86]. Однако мы пока пойдем по другому пути. Пусть Ω конечное множество. Тогда любая «точка» из Ω имеет какую-то меру. Сумма этих мер равна μ_Ω. Множества меры нуль — это множества элементов $\omega \in \in \Omega$ таких, что $\omega\mu = \mu_\omega = 0$, т. е. мера рассматривается просто как аддитивная функция на конечном множестве Ω. Если φ — некоторая числовая функция, принимающая значения $y_1 \ldots y_2 \ldots$ ($y_i \neq y_j$ при $i \neq j$), то она называется измеримой, если $y\varphi^{-1} = \Omega^i \subset \Omega$. Сумму $\sum y_i \mu_{\Omega^i}$ можно было бы назвать суммой Лебега. Самое существенное здесь, что Ω^i — подмножества и только в частном случае элементы Ω. Задачи, которые можно ставить и решать в рамках столь «тощей» схемы, тем не менее весьма разнообразны. В простейшем случае общая их идея такова: ищется мера некоторой логической функции от элементов подмножеств множества Y ($y_i \in Y$). Поэтому, в частности, теория вероятностей « ... в своей наиболее рудиментарной (и часто наиболее трудной!) части ... связана с комбинаторикой» (Кац [118]). Однако очевидно сразу, что такая схема статична и не удовлетворяет критерию Д ФАДЭП. Попробуем ввести время. Пусть Y — не числовое множество и y_i — не элементы, а подмножества Y. Если на Y аналогично Ω ввести меру γ_y, то φ называют измеримым преобразованием, если прообразы измеримых множеств измеримы. «Множества, принадлежащие области определения меры, называются измеримыми ...» (Халмош [86]).

Далее естественно рассмотреть двухпараметрическое множество $\varphi_{\tau,t}$ измеримых преобразований, которое, в частности, можно считать полугруппой или даже группой. Если идентифицировать параметры τ, t с некоторыми моментами времени и положить $Y = \Omega$, то для произвольного множества Ω можно получить обобщение определения динамической системы, данного В. П. Немыцким и В. В. Степановым (см. п. 4). Мы будем называть в этом случае Ω вместе с $\varphi_{\tau,t}$ динамическим множеством [120]. Если $\Omega^i_\tau \subset \subset \Omega$; $\Omega^i_t \subset \Omega$, то можно изучать и $\Omega^i_t = \Omega^i_\tau \varphi_{\tau,t}$, и изменение со временем меры $\mu_{\Omega^i_t} = \mu_{\Omega^i_\tau} U_{\tau,t}$, где $U_{\tau,t}$ — некоторый оператор, действующий на меру. Иными словами, мера динамического множества динамична (зависит от времени, как в связи с изменением Ω^i_τ, так и независимо). Это дает основание говорить о динамической теории меры. Если прообраз каждого измеримого множества имеет ту же меру, что и само это множество [86], и преобразование $\varphi_{\tau,t}$ измеримо, то оно сохраняет меру. В этом случае динамическая теория меры сводится к хорошо известной эргодической теории (обычно при вероятностной интерпретации меры). Однако в этом случае мы можем описать только весьма узкий класс систем, которые могут быть сведены к P-моделям стационарных случайных процессов, мера $\mu_{\Omega_t^i}$ каждого «сечения» которых одна и та же. Поэтому эргодическая теория не удовлетворяет критерию А ФАДЭП и не может претендовать на звание абстрактной теории систем.

Обобщение в виде динамической теории меры, в которой преобразования $\varphi_{\tau,t}$ не обязательно сохраняют меру, является совершенно естественным (более того, можно даже считать μ_Ω зависящей от t).

6. Частные модели

Рассмотрим множество Ω_τ^i и будем считать, что под действием преобразования $\varphi_{\tau,t}$ происходят следующие процессы: часть элементов вместе с их мерой ушла из этого множества, а часть пришла за время $t - \tau$. В результате образовалось множество Ω_t^i с соответствующей мерой $\mu_{\Omega_t^i}$. Можно делать различные предположения об изменении меры каждого отдельного элемента Ω_τ^i, в частности считать ее неизменной. Здесь необходимо внести некоторые уточнения. Когда мы говорим, что часть элементов ушла из множества Ω_τ^i, а часть пришла в него, то неявно предполагаем, что существует некоторый признак, позволяющий определять, принадлежит ли некоторый элемент тому или иному множеству. В частности, таким признаком может быть пространственное положение отдельного элемента. В таком случае множество Ω_τ^i в частности может рассматриваться как некоторое множество, заданное в обыкновенном трехмерном евклидовом пространстве. Простейшее обобщение — переход к n-мерным евклидовым пространствам.

В последнем случае в зависимости от различных предположений о характере множества Ω и специфике меры соответствующих подмножеств можно строить различные «законы сохранения». Примером такого «закона» является уравнение непрерывности, которое описывает очень широкий класс систем [121]:

$$\frac{\partial \rho_{x,t}}{\partial t} + \operatorname{div} \rho_{x,t} V_{x,t} = 0.$$

Здесь Ω — n-мерное евклидово пространство, на котором задана мера с плотностью $\rho_{x,t}$ x — n-мерный вектор «координат» в Ω (в частности, Ω может совпадать с «пространством опорных элементов» [121], тогда компонентами x могут являться и скорости, ускорения и т. д.); $V_{x,t}$ — n-мерный вектор «скорости» носителей меры.

Р-моделью такой ситуации может служить n-мерное эвклидово пространство, заполненное «веществом» с плотностью $\rho_{x,t}$, поток которого определяется скоростью $V_{x,t}$. Уравнение непрерывности является законом сохранения вещества в том смысле, что изменение со временем его плотности в некоторой области определяется только потоками вещества через ее границу. Характер потоков определяется преобразованиями $\varphi_{\tau,t}$. Дивергенция $\operatorname{div} \rho_{x,t} V_{x,t}$ определяется как соотношение потока через $(n - 1)$-мерную границу, ограничивающую бесконечно малый объем, к величине этого объема. Можно определять дивергенцию, исходя из приведенных рассуждений и для других Р-моделей. Так, пусть Ω — множество точек некоторого пространства, где не определено ни понятие непрерывности, ни понятие метризуемости. «Дивергенция функции f_u заданной на дугах графа U и принимающей действительные значения, представляет собой разность сумм ее значений на выходящих и входящих дугах» [119]. Связь функции f_u с мерой («потоком меры») весьма прозрачна. Таким образом, при различных определениях Ω и μ можно надеяться описать довольно широкий класс систем. Этот класс еще более расширится (в частности, на незамкнутые системы), если предположить, что мера может меняться и независимо от потоков за счет некоторых экзогенных факторов (которые, разумеется, надо как-то задать). Даже при отсутствии таких факторов в рамках классических моделей возможности динамической теории меры очень велики. Так, используя по существу только уравнение непрерывности, удается описать важнейшие задачи термодинамики, электродинамики, «роста кристаллических, плазменных и биологических структур с сохранением их подобия» и т. д. (А. Власов [121]). А разве, например, уравнения Колмогорова — Чепмена в теории марковских процессов [124], уравнение Больцмана и уравнение

Б-Б-Г-К-И в физике [118], схема гибели и размножения в биологии [124], основные уравнения гидродинамики и т. д. не могут рассматриваться как частные Н-модели динамической теории меры? Более того, многие из таких моделей, по-видимому, могут быть получены формально на основе уравнения непрерывности [121], да и интуитивно это представляется довольно очевидным, так что критерий П ФАДЭП для теории меры, как будто, удовлетворяется.

При определении дивергенции на графах (см. выше), удовлетворяя принципу ЭКА, переходим к мощному аппарату «потоковых методов», относящихся как к линейному программированию, так и к комбинаторике. «К области приложений потоковых методов относятся комбинаторные задачи: о допустимых назначениях на должности (иначе о представителях множеств), о минимальных множествах ребер или вершин сети, удаления которых нарушает ее связность. Задачи о потоках в сетях применяются также при составлении расписаний, не говоря уже о канонической области приложений — нахождении оптимальных планов перевозок» [119]. Так, возможно, динамическая теория меры и есть «достойная претендентка» на звание абстрактной теории систем? Но, во-первых, пока не совсем ясен переход от этой теории к другим (так что удовлетворение критерия А ФАДЭП под вопросом). Во-вторых, в самой теории имеются принципиальные трудности, связанные с возможностью единообразного описания непрерывных и дискретных величин. В-третьих, понятие динамического множества введено пока на чисто интуитивном уровне. Поэтому отложим окончательное решение вопроса о статусе динамической теории меры в общей теории систем до следующих параграфов.

7. Еще претенденты

Существует в настоящее время еще одна Н-модель, которая явно обладает чертами общезначимой метатеории систем (особенно после появления работ Р. Калмана, перебросившего мостик, пока правда, весьма узкий, от дифференциальных моделей к моделям этой теории, являющимися алгебраическими). Речь идет о теории конечных автоматов. В ней обычно задается некоторое множество (входной алфавит) X, другое множество (выходной алфавит) Y, множество состояний Q и две одношаговые функции перехода $\lambda : Q \times X \to Q$; $\delta : Q \times X \to Y$, определяющие следующее состояние и выходное значение. Автоматы представляют собой «стационарные (т. е. с независящими от времени свойствами) системы с дискретным временем $T = \{0,1...\}$» (М. Арбиб [71]). Таким образом, удается избегнуть явного введения времени в первоначальные определения и свести автоматы в конечном счете к полугруппам — моноидам. Это удобно, но резко сужает область применения этой модели (нарушается принцип Д ФАДЭП), ведь большинство систем явно нестационарны (например, любая социальная или экономическая система, где понятие стационарности просто бессмысленно). И тем не менее теория автоматов если и не стала общесистемной метатеорией, то (неявно) претендует на это «вакантное место», рассматривая «машины как физические модели реальных процессов» (М. Минский [112]).

Алгебраизация теории конечных автоматов осуществляется обычно путем определения сочленения элементов как полугрупповой операции. Если рассматривать пробел между символами l как пустое слово, такое что $xe = ex = x$, то можно говорить не о полугруппах, а моноидах.

Функции λ и δ легко распространяются на любые входные последовательности, представляющие собой свободный моноид X^*:

$$\begin{aligned} \lambda : Q \times X^* \to Q; \\ \delta : Q \times X^* \to Y, \end{aligned} \tag{1}$$

с помощью соотношений из [71] (запись функций по § 7 гл. I):

$$\begin{aligned} q\,(x_1x_2)\,\lambda &= (qx_1\lambda)\,x_2\lambda, \qquad & q \in Q; \\ q\,(x_1x_2)\,\delta &= (qx_1\lambda)\,x_2\delta, \qquad & x_1,x_2 \in X^*. \end{aligned} \tag{2}$$

Нас могут не интересовать внутренние состояния автомата. Тогда определяют функцию вход — выход так:

$$M_q : X^* \to Y \qquad (xM_q = qx\delta).$$

Если соответствие $q \rightsquigarrow M_q$ — взаимно однозначное отображение, то автомат называется приведенным. Приведение автомата осуществляется путем факторизации пространства состояний по одной из эквивалентностей:

Нерода

$$x_1x_2Э_f^{\text{Н}} \leftrightarrow x_1x_3f = x_2x_3f$$

или Майхилла

$$x_1x_2Э_f^{\text{М}} \leftrightarrow xx_1x_3f = xx_2x_3f,$$

где f — функция вход-выход. Цепочки x_1, $x_2 \in X^*$ эквивалентны по Нероду, если функция f отображает их в одно и то же выходное состояние при любом (одинаковом) их продолжении справа, и эквивалентны по Майхиллу, если выход будет одинаков при их любом одинаковом продолжении и справа и слева. В результате факторизации множество состояний Q оказывается наименьшим, поскольку объединяются в один элемент состояния с одинаковым внешним поведением.

8. Автоматы как отображения

В принципе понятие состояния можно не вводить при определении автомата, что и было реализовано К. Кроном, Дж. Роудзом и Б. Р. Тилсоном [92]. Они определяют автомат более изящно, сразу как отображение вход-выход. «Автоматом называется любая функция

$$f : X^* \to Y". \tag{3}$$

Полугруппа S автомата f — S^f определяется как фактор-множество

$$X^*/Э_f^M. \tag{4}$$

Возможно и обратное определение автомата f^S полугруппы S как отображения

$$f^S : S^* \to S, \quad S_1 S_2 \ldots S_n f^S = S_1 S_2 \ldots S_n, \tag{5}$$

где $S_i \in S$ и S^*, как обычно, множество цепочек символов элементов полугруппы с сочленением как полугрупповой операцией. Далее, естественно, вводится такое понятие, как полугруппа автомата полугруппы S^{f^S}, которая эквивалентна исходной полугруппе

$$S^{f^S} \sim S. \tag{6}$$

Можно также говорить о автомате полугруппы автомата f и показать, что

$$f = h^* f^{S^f} \mu, \tag{7}$$

где h^* — отображение цепочек X^* автомата f в цепочки его полугруппы S^f, сопоставляющие каждой цепочке ее класс эквивалентности Майхилла (h без звездочки — отображения алфавита X в S^f); f^{S^f} — автомат этой полугруппы с отображением типа (5) результата предыдущего отображения в выходной алфавит.

Следует оговорить, что мы несколько изменили обозначения по сравнению с оригинальной работой К. Крона, Дж. Роудза и Б. Р. Тилсона [92], порядок записи композиции отображений у нас также другой. Обозначения изменены так, что они соответствуют построению русской фразы. Если вначале говорится «автомат» независимо от того, что следует дальше (полугруппы, полугруппы автомата), то нижним первым символом является f, если полугруппа — то S. Это представляется более естественным.

9. Только отображения!

Равенство (7) может быть истолковано как каноническое разложение отображений в соответствии с диаграммой типа (16) гл. I, которая приобретает вид:

$$\begin{tikzcd} X^* \arrow[r, "f"] \arrow[d, "h^*"'] & Y \\ S^f \arrow[r, "f^{S^f}"'] & Y_f \arrow[u, "\mu"'] \end{tikzcd}, \tag{8}$$

т. е. автомат f (являющийся просто отображением) может быть представлен как композиция отображения h^* в полугруппу автомата S^f, что равнозначно введению эквивалентности Майхилла на множестве X^*, затем отображению этой полугруппы с помощью автомата полугруппы автомата f^{S^f} и наконец инъективному отображению μ.

При таком толковании

$$h^* = \operatorname{nat} Э_f^M = \operatorname{nat} \ker f$$

и мы остаемся в пределах обыкновенной теоремы о разложении отображений [29].

Поэтому теоретически можно рассматривать любой автомат как последовательную композицию трех автоматов: ядерного, реализующего отображение X^* на его фактормножества по эквивалентности Майхилла, являющееся полугруппой; кодирующего, сопоставляющего (биективно) полученной полугруппе символы выходного алфавита; инъективного, вкладывающего полученный результат в выходной алфавит. Очевидно, наибольший интерес представляют

Н-и Р-модели ядерных автоматов, т. е. основной вывод, важный для нас в дальнейшем, состоит в том, что мы можем пока теоретически ограничиться рассмотрением ядер обыкновенных отображений, называемых автоматами. Здесь следует оговорить во избежание недоразумений, что наше разложение автомата не совпадает ни по терминологии, ни по сути с разложением К. Крона, Дж. Роудза и Б. Р. Тилсона [92]. У них вместо μ исследуется отображение $h_2 : S^f \to Y$ из полугруппы в выходной алфавит. Но это противоречит их же определению f^{S^f} автомата полугруппы автомата (у них f^{S_f}), который уже отображает как автомат полугруппу S в выходной алфавит. Тем не менее следует отметить, что именно их первичная трактовка автомата как отображения вход-выход представляется наиболее изящной и перспективной.

10. Синтез

Сравнительно недавно Р. Калман предложил определение динамической системы, которое конкретизирует определение В. В. Немыцкого. Последнее «было сформулировано на основе анализа задач небесной механики или, если смотреть шире, задач динамики твердого тела. Поэтому в нем явным образом не выделены входы и выходы системы» (Л. Заде [69]). Путем незначительного изменения Р. Калман распространил определение В. В. Немыцкого на системы, где явно выделены входы и выходы. Мы не будем пересказывать это определение (см. [71]) тем более, что идейно оно соответствует определению конечного автомата (см. п. 7). Значительно интереснее другое: оказалось, что на уровне абстрактных Н-моделей и в этом случае удобнее работать с отображением вход-выход (это показал тот же Р. Калман).

Пусть X — пространство, элементами которого являются всевозможные входные функции такие, что законны все предпосылки построения дифференциальных Н-моделей («функции с компактным носителем»). Кроме того, предполагается, что любая $x_t \in X$ равна нулю при $t > 0$. Аналогично Y — пространство выходных функций, определенных только для $t > 0$.

Если X и Y — линейны, то их можно наделить структурой свободного R-модуля [71]. Р. Калман использует только представление такого модуля в виде специального кольца многочленов. В таком случае отображение вход — выход подчиняется общим закономерностям для любых отображений (диаграмма (16)) и множество Z (из этой диаграммы) «совпадает с множеством классов эквивалентности Нерода из теории конечных автоматов» (Р. Калман [71]), являясь фактор-множеством по данной эквивалентности. Поэтому Z можно рассматривать как пространство состояний. Изменим несколько обозначений и перерисуем эту диаграмму в виде

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ \varphi\downarrow & & \uparrow\mu \\ X_1 & \xrightarrow[V]{} & Y_1 \end{array} \qquad (9)$$

Тогда, очевидно, $\varphi = \text{nat ker} f$ [29] V — биективно, а μ — инъективно, т. е. с точностью до обозначений мы получаем диаграмму (8). Только ли с точностью до обозначений? В нашем случае умножение в пространстве входных воздействий соответствует операции свертки, а в теории Крона—Роудза — операции сочленения. Это различие Р. Калман считает существенным. Возможно это и так с точки зрения вычислительной, но в принципе представление Р. Калманом свободных модулей в виде кольца многочленов является только одним из возможных. Более того, если перейти на язык топологических полугрупп (см., например, [92]) здесь по сути не окажется никакого принципиального различия. Более важным нам кажется тот факт, что в Н-модели Р. Калмана используются не любые возможные функции данного класса, а только такие, которые заканчиваются в нуле. Это соответствует рассмотрению некоторого подмножества X^* в теории конечных автоматов. Различие также наблюдается в терминологии и, следовательно, едва ли может считаться принципиальным. В общем естественней считать, что любая система в принципе имеет в качестве Н-модели диаграмму типа (9), которая называется минимальной реализацией, причем в зависимости от особенностей системы пространство входных воздействий может допускать различные Н-модели (полугруппы, линейное пространство и т.д.). Однако во всех случаях происходит факторизация этого пространства по отношению эквивалентности $Э_f$, определяемому по «выходам» системы. При этом, если $\varphi = \text{nat}\, Э_f$ сьюрективно, система обладает свойством полной достижимости. Так как V биективно, то система наблюдаема, откуда представляется очевидным, что всегда можно найти такое входное воздействие, которое переведет систему в заданное состояние, т. е. она управляема.

Учитывая различную специфику пространства входных величин и особенности отображения вход-выход, можно на основе этой модели описать конечные автоматы, линейные и в принципе нелинейные системы. При этом модель явно формализуема (критерий Ф), допускает различные интерпретации, класс которых может расширяться (Э) и, наконец, она идейно очень проста (П).

Тогда, возможно, эта модель способна занять вакантное место общесистемной Н-модели? Для этого нужно посмотреть, все ли системы она способна описать и как быть с динамичностью, чтобы критерии ФАДЭП были удовлетворены полностью. Сразу ясно, что критерий Д не удовлетворяется, ибо время как М-понятие никак не входит в первоначальные определения.

Что касается универсальности (критерий А) модели (9), то она может быть, как показано, верхним уровнем рассмотренных абстрактных теорий систем. Один из путей обобщения модели и на плохо описываемые (стохастические) системы состоит в соответствующем переопределении пространства состояний. Если рассматривать некоторое метрическое пространство меры, в котором определены те или иные соотношения на основе преобразований $\mathcal{U}_t$ (типа уравнения непрерывности), аналогичные уравнениям калмановской теории систем (только для других величин, плотности меры, например), то формально математически все сводится к исследованию дифференциальных (разностных, дифференциально-разностных) уравнений со всеми вытекающими отсюда последствиями и аналогиями. При этом, конечно, в той или иной форме может быть использована и диаграмма (9) при должной интерпретации величин, а еще лучше ее универсальный прототип (16) из гл. I.

Разумеется, перенесение абсолютных шкал с состояний на меру — не единственная и, видимо, не лучшая возможность изучения плохо описываемых систем. Можно было бы отметить и другие идеи и теории, которые в той или иной форме допускают интерпретацию в рамках Н-модели (16) гл. I, хотя бы просто потому, что все они основываются на метапонятии множества. Однако и теории «новых классиков», и классические теории случайных процессов в основном почему-то осторожно обходят одну из старейших теорий всех веков, в сущности, «главную претендентку» на титул метатеории систем — физику. Поэтому их метасистемность с этой точки зрения только декларативна, независимо от статуса рассмотренной в этом пункте Н-модели.

§ 2. МОСТ К ФИЗИКЕ

1. Физика — метатеория систем?

«Значение физических наук... сотоит не только в том, что они все время пополняют сумму наших знаний о неодушевленной материи, но и, прежде всего, в том, что они позволяют подвергнуть проверке те основания, на которых покоятся наши самые первичные понятия, и выяснить область их применимости» [93]. Это высказывание Н. Бора в 1959 г. отражает то мнение о физике, которое сложилось на протяжении тысячелетий. Иными словами это означает, что физика является по существу основой любых теорий и, следовательно, вполне может претендовать на «титул» метатеории систем. Во всяком случае современная кибернетика, не говоря уже о явных претендентах на этот «титул», по сравнению с физикой выглядит не очень внушительно.

Еще влиятельна физика, поэтому новые «классики» пытаются не обсуждать ее проблематику, но, с другой стороны, и сама физика в лучшем случае пользуется услугами вычислительной техники, делая обычно вид, что в остальном ей не о чем говорить с кибернетикой и общей теорией систем Л. фон Берталанфи. И это не просто образ. Попробуйте найти в работах по общей теории систем математически корректное исследование фундаментальных проблем квантовой и релятивистской механики, явно имеющей к ней прямое отношение.

У того же Н. Бора, например, можно найти статьи «Физическая наука и проблема жизни», «Квантовая физика и философия», «Квантовая физика и биология» [93]. Э. Шредингер в книге «Что такое жизнь?» [94], обсуждая явление жизни и необходимость в новом принципе, однозначно говорит: «Новый принцип — это подлинно физический закон: на мой взгляд, он не что иное, как опять-таки принцип квантовой теории». А. Эйнштейн в 1953 г. писал: «Физика должна стремиться к описанию реального состояния отдельной системы. Природу в целом можно рассматривать как отдельную (однократно существующую) систему, а не как „ансамбль систем"» [95]. Отсюда во всяком случае следует, что физика должна описать природу (т. е. именно физика — метасистемная теория).

П. А. М. Дирак в 1967 г. пишет: «Нам нужна единая самосогласованная всеобъемлющая теория. Этой общей теории не должна противоречить любая специальная теория, выдвигаемая в связи с какой-либо частной проблемой. Вряд ли необходимо говорить вам, что такая общая теория еще не создана. Она является той конечной целью, к достижению которой стремятся все физики» [96]. Первые три фразы можно было бы отнести к «общесистемной» теории, но последняя фраза означает, что либо физика и является такой теорией в соответствии со взглядами Н. Бора, либо П. А. М. Дирак просто не принимает всерьез такие теории, для которых сама физика оказалась бы «специальной теорией». А может быть так оно и есть?

Попробуем посмотреть на физику (теоретическую) с точки зрения критериев ФАДЭП (см. § 1). В какой степени она удовлетворяет этим критериям, чтобы претендовать на роль метасистемной теории? Сразу отметим тот критерий, которому она явно не удовлетворяет, чтобы облегчить возможную дискуссию, а именно критерий А.

Физика недостаточно абстрактна, чтобы ее модели могли в качестве «специальной теории» описать подавляющий по мощности класс систем. Какие это системы? Прежде всего отметим основную задачу и используемый аппарат теоретической физики: «Физическая задача, которую ставит перед нами пространство и время, заключается в том, чтобы зафиксировать при помощи чисел место и момент времени, соответствующие каждому физическому событию. Это позволяет нам выделить событие, как оно есть, из хаоса сосуществования и последовательности явлений» (М. Борн, [97]). Итак, основной особенностью физики является стремление описать исследуемую систему с помощью чисел, то есть факторизовать исследуемую систему, на абсолютную шкалу (см. гл. I).

Таково мнение не только крупнейшего теоретика М. Борна, его, судя по всему, разделяет и Н. Бор: «Завет Галилея, согласно которому отчет о явлении следует основывать на измеримых величинах, позволил избавиться от тех анимистических взглядов, которые так долго мешали формулировать механику» (Н. Бор [93]). Наконец главный факт состоит в том, что математический аппарат классической механики и теории относительности (дифференциальные и разностные уравнения) предполагает явную измеримость моделируемых величин. А много ли систем, окружающих нас, допускают такое? Поэтому отказ от измеримости под давлением экспериментальных фактов был неминуем. Переход к квантовой механике и явился таким частичным отказом, четко зафиксированным в соотношении неопределенности. Этот переход оказался очень болезненным. Достаточно отметить незаконченный спор Н. Бора и А. Эйнштейна. Более того, может быть именно стремление следовать заветам Галилея привело не только к методологическим осложнениям, но и приводит к чисто методическим трудностям. «Чтобы преодолеть эти трудности, физики прибегали к помощи всевозможных трюков, однако в результате теория очутилась в довольно неприятном положении. Отступление от законов логики настолько серьезны, что местами всякие претензии на логическое развитие теории выглядят совершенно безнадежными» [96]. Это мнение П. А. М. Дирака об одном из основных направлений в квантовой теории поля. А ведь может быть это просто плата за привычку факторизовать системы только на абсолютные шкалы и нежелание признать тот очевидный факт, что это вообще редко когда удается сделать. Итак, «заветы Галилея» не позволяют современной теоретической физике претендовать на возможность описания всех систем просто потому, что для большинства из них пространство состояний не метрируемо, не нормируемо и параметры системы плохо специфицируемы.

Но, может быть, физика является метасистемной в том смысле, что исследует такие наиболее общие закономерности неживой природы, которые неминуемо проявляются во всех системах. Ведь все они в конечном счете состоят из «атомов», «молекул» и т. д. Это может быть и так, если бы у нас были основания полагать, что данные М-понятия являются единственно возможными при описании реальности и являются Р-моделями самого низкого уровня в любой теории. Но поскольку электрон так же неисчерпаем, как и атом, то не исключено, что существует более удобная Н-модель, при которой в качестве метапонятий будут приняты другие категории. Впрочем, дуализм волна—частица является наиболее яркой иллюстрацией относительности экзогенных М-понятий. Естественно, это не означает отрицание «...объективной реальности, которая дана человеку в ощущениях его, которая копируется, фотографируется, отображается нашими ощущениями, существуя независимо от него» [2, стр. 131]. Ведь фотографировать можно с разных ракурсов и с разной степенью подробности, на разную пленку (чувствительную к ультрафиолетовым, видимым и другим лучам) и при этом изображения одной и той же реальности будут, конечно, разными. С другой стороны, «иначе как через ощущения мы ни о каких формах вещества», и ни о каких формах движения ничего узнать не можем....» [2, стр. 320]. Поэтому многообразие теорий с различными М-понятиями является неизбежным при описании одной и той же объективной реальности. Более того, именно абсолютизация какой-то одной из теорий несовместима с материализмом. Но отказ от привычных М-понятий и моделей всегда, конечно, болезненен, как и вообще отказ от привычного. Сколько страстей бушевало вокруг проблемы волна — частица, которая просто означала более чем естественный отказ от абсолютных шкал при описании некоторых систем.

2. «Эволюция физики»

Итак, система классических теорий не может опираться на физику как на метатеорию систем, поскольку сама физика способна описать только узкий класс систем. Это является следствием специфики используемого математического аппарата, предполагающего метризуемость соответствующих пространств или факторизацию исследуемых систем, при котором возможны абсолютные шкалы. Развитие самой физики наглядно иллюстрирует стремление освободиться от этой ограниченности. Так, ньютонова механика полностью построена на аппарате дифференциальных уравнений и на возможности абсолютной глобальной шкалируемости пространства и времени. Общая теория относительности знаменует переход от эвклидовых к римановым пространствам, абсолютно шкалируемым только в малом (т. е. метрика здесь локальна, пространство и время не независимы).

Наконец, квантовая механика уже отказывается от возможности одновременной независимой факторизации координат и импульсов на абсолютные шкалы, хотя все еще пытается найти пути построения шкал такого рода для каких-то других величин. В ней все в большей степени начинают использоваться такие формальные Н-модели, которые не предполагают абсолютную шкалируемость. К ним в первую очередь относится теория групп. Интересна их эволюция. В классической работе Е. Вигнера [101], положившей начало использованию теории групп в квантовой механике, эта теория рассматривалась только как вспомогательное методическое средство. Вот что пишет сам Е. Вигнер: «Точное решение квантовомеханических уравнений в общем случае настолько трудно, что с помощью прямых вычислений можно получить лишь грубое приближение к точным решениям. Поэтому оказывается весьма полезным вывести значительную часть квантовомеханических результатов из рассмотрения основных «свойств симметрии». Однако со временем оказалось, что, используя «свойства симметрии», можно предсказать такие вещи, которые никак не следуют из «квантовомеханических уравнений», в частности описать свойства новых «частиц», существование которых не предполагалось. «Хотя вопрос о существовании частиц Ξ^* и Ω^- и не обсуждался, их свойства фактически были предсказаны на основе представления об SU (3)-симметрии» [102].

В теорию относительности групповые понятия, естественно, проникали в соответствии с так называемой «эрлангенской программой» Клейна, которая по существу явилась программой перехода от арифметизации пространства (по Декарту) к современной алгебраической геометрии, которая факторизует пространство не на абсолютные шкалы, а на алгебраические системы. Вот что пишет по этому поводу сам Ф. Клейн: «... не следует недооценивать преимуществ, которые можно получить применением хорошо приспособленного для дальнейших исследований формализма, который, если можно так выразиться, опережает нашу мысль» (цит. по [25]). Не лишне отметить, что все это было написано еще в 1832 г. Если добавить, что пространство теории относительности оказывается римановым, а квантовая механика пользуется также достаточно почтенным математическим аппаратом, то можно предположить, что эволюция физики (теоретической) со сдвигом лет на 50—70 следует за эволюцией математики.

3. Физика и алгебра

Поскольку универсальная алгебра в настоящее время прочно утвердилась в качестве одной из основных отраслей современной математики, то, по-видимому, для физики наступает время продолжать эволюцию в обычном направлении. Действительно, все больше появляется работ, где такая эволюция уже явно проявляется. Здесь можно отметить очень интересную работу Г. А. Зайцева [89], где отмечается, что наблюдаемые в классической и квантовой механике образуют кольца специального типа (лиево-иордановы).

Определяющими соотношениями для этих колец являются выражения:

$$[g_1 \cdot g_2, g_3] = g_1 \cdot [g_2, g_3] + g_2 \cdot [g_1, g_3];$$
$$g_1 \cdot (g_2 \cdot g_3) - (g_1 \cdot g_2) \cdot g_3 = \frac{\hbar^2}{4} [g_2, [g_1, g_3]], \tag{10}$$

где точкой обозначено иорданово умножение (в общем случае неассоциативное), а квадратными скобками — лиево.

Для произвольного ассоциативного кольца G с двумя операциями («сложением» и «умножением») лиево-иорданово умножения определяется соответственно в виде:

$$[g_1, g_2] = k_1 (g_1 g_2 - g_2 g_1); \quad g_1 \cdot g_2 = k_2 (g_1 g_2 + g_2 g_1),$$

где k_1, k_2— некоторые элементы из подкольца H кольца G, такого, что для всех $h \in H$ и $g \in G$

$$hg = gh;$$

H называется центром кольца G.

Для классической механики G является кольцом бесконечно дифференцируемых функций (наблюдаемых) от обобщенных координат и импульсов, а в нерелятивистской квантовой механике G — кольцо эрмитовых операторов, выражаемых аналогично классическому случаю через операторы обобщенных координат и импульсов. Для классической механики при соответствующем выборе $k_2 = \frac{1}{2}$ иорданово умножение сводится к обыкновенному «кольцевому», а лиево — определяется как обычная скобка Пуассона. Для квантовой механики иорданово умножение в общем случае некоммутирующих эрмитовых операторов уже не сводится к умножению, а лиево определяет «перестановочные соотношения» с $k_1 = \frac{i}{\hbar}$ $(i = \sqrt{-1})$.

Замечательно то, что соотношения (10) являются едиными для классической ($\hbar = 0$) и квантовой механики ($\hbar \neq 0$) при различном истолковании переменных. Это означает, что с точки зрения алгебраической и та и другая теория являются просто очень специальным типом колец с указанными определяющими соотношениями, а постоянная Планка приобретает четкий алгебраический смысл, определяя тот или иной примитивный класс (многообразие). Нельзя не согласиться с Г. А. Зайцевым, что «эта идея открывает возможность создания алгебраической теории физических теорий, причем, другие изменения примитивного класса алгебры наблюдаемых в принципе, могут приводить к другим возможным физическим теориям, отличным как от классической, так и от квантовой механики» [89].

Почему же физика в самом начале не пошла по этому несомненно изящному и перспективному пути? Может быть потому что П. А. М. Дирак, который ввел понятие «наблюдаемые», «не был в достаточной степени знаком с алгебраическим аппаратом» [89]. Возможно и так, но почему он не захотел с ним ознакомиться? Дело в том, что физикам-теоретикам никак нельзя отказать в высокой (даже чрезмерной) математической изобретательности, так что уж кто-кто, а Дирак наверное без особого труда смог бы более полно воспользоваться современной алгеброй. Почему же он не захотел? Вероятно это была плата за привычку использовать в конечном счете М-понятия ньютоновой механики, которые хотелось спасти во что бы то ни стало, поскольку они уже четко ассоциировались с определенными структурами, игравшими роль и Р-моделей. В самом деле, а почему законы механики определяются именно таким многообразием универсальных алгебр? Сразу невольно начинаешь с представления «частицы», которая движется в пространстве, с определения ее «координат» и «импульсов», построения тех же ньютоновых (лагранжевых, гамильтоновых) дифференциальных уравнений, которые удовлетворяют определенным соотношениям, а здесь уже можно как-то обосновать алгебраический формализм. Он оказывается при таком чисто индуктивном подходе пусть очень красивым, но все-таки только украшением, без которого как-будто бы можно обойтись. И физики в основном «обходились и прибегали к помощи всевозможных трюков» [96], делающих честь их изобретательности. Дело ведь в том, что вся современная экспериментальная техника, являющаяся, в конечном счете, продолжением наших органов чувств, ориентирована на «частицы», «волны» и на все то, чего мы не можем себе не представлять, несмотря на категорические запреты квантовой механики. Эта техника построена на факторизацию систем на абсолютные шкалы, а какова может быть другая альтернатива в эксперименте в физике, пока не очень известно. А не в физике? Вне физики мало кто следует «заветам Галилея». Мы имеем дело, в основном, с качественными шкалами и в повседневной жизни и в новых теориях (см. § 1). Возьмем, например, теорию языков или автоматов. Здесь явно нет количественных шкал для наблюдаемых и состояний и тем не менее эти теории имеют Р-модели, вероятно, не менее наглядные, чем Р-модели физики. Более того, в наше время они имеют и не менее впечатляющее практическое применение (достаточно отметить современные ЭВМ). Наконец, эти теории проще, несмотря на то, что имеют дело едва ли с менее сложными системами.

Тем не менее физика в настоящее время продолжает занимать особое место, не имея как-будто бы особых точек соприкосновения с этими новыми теориями. С другой стороны, у нас есть некоторые основания считать эту исключительность кажущейся. Действительно, алгебраизация физики привела к Н-моделям, являющимся чрезвычайно частными универсальными алгебрами. И было бы весьма странным, если бы эта алгебра была в состоянии описать «все» системы, обладающие самыми различными свойствами. Впрочем, она не описывает даже конечные автоматы. Поэтому в этом смысле исключительность аппарата физики — это скорее исключительность частного, а не универсального. Но все это — некоторые формальные наводящие рассуждения, которые едва ли нас удовлетворят полностью.

4. «Эррозия» исключительности

Обратимся к наиболее почтенному разделу физики — классической механике. Она потеряла свой статус общесистемной теории уже давно и во всех отношениях. Прежде всего она потерпела крах внутри самой физики, уступив пальму первенства теории относительности и квантовой механике, оказавшись их частным случаем. Наравне с этим ее математический аппарат, и это главное, оказался частным случаем математического общесистемного аппарата Немыцкого — Калмана. Поэтому классическая механика оказалась наиболее удобной (а иногда и единственной) Р-моделью общей теории систем, основанной на этом аппарате (см. § 1, п. 4). «Классическое» направление такой теории наиболее определенно представлено в первой и второй частях работы [71].

«Классичность» направления прежде всего связана с тем, что оно известно уже давно — ему посвящена громадная литература, отличающаяся в основном некоторыми М-понятиями, но не Н-моделями, причем иногда возникают довольно любопытные ситуации. Так, книга У. Портера называется «Современные основания общей теории систем» [70], а книга П. ле ла Барьера «Курс теории автоматического управления» [103]. Судя по названию, У. Портер рассматривает гораздо более широкий круг вопросов, но на самом деле все происходит наоборот (хотя бы потому, что в [103] рассмотрены управляемые марковские системы, чего нет в [70]).

Однако так или иначе, Н-модели классической общей теории систем в конечном счете сводятся к дифференциальным уравнениям. Дальнейшее развитие этого направления относится к поиску другого языка для описания (аналитических) систем, определяемых такими уравнениями. Что касается классической механики, то, как отметил А. Н. Колмогоров: «Динамические системы классической механики являются частным случаем аналитических динамических систем с интегральным инвариантом» [104]. Ясно, что классическая механика уже точно не может претендовать на метасистемную теорию и ее исключительность канула в Лету.

5. Итак — эволюция математики

Можно теперь подняться еще на одну ступеньку дедукции, рассматривая не классическую механику, а теорию аналитических динамических систем. Заведомо известно (см. § 1), что эта теория не может также быть общесистемной, поскольку предполагает абсолютные шкалы. Тем не менее эволюция этой теории любопытна по двум обстоятельствам. Она еще раз иллюстрирует приоритет математики, вопервых, и наиболее абстрактных разделов самой математики, во-вторых. Как уже отмечалось, отказ от глобальных абсолютных шкал, единых для всего фазового пространства, естественно, привел к введению локальных абсолютных шкал римановой геометрии. На этом этапе продолжает доминировать «координатная» точка зрения, только теперь координаты являются, естественно, локальными. Однако главной остается все-таки возможность измерения, т. е. факторизации величин на абсолютные шкалы (пусть в малом). Такая точка зрения, видимо, доминировала до начала 50-х годов. «Мы принимаем длину вектора $\vec{dx}$ за дифференциал дуги dS вдоль нашей кривой, ... мы можем измерить длину этого вектора, чего раньше (в многообразии) нельзя было сделать» [105].

Инварианты преобразований определялись на языке этих локальных координат. Конечно, это ни в коей мере не значит, что понятию инвариантов не придавалось должного значения. Более того, в ряде работ даже подчеркивалось, что «.... теория дифференциальных инвариантов, подобно теории алгебраических инвариантов, имеет формальный характер по существу» (О. Веблен [106]). Однако исходной являлась все же координатная точка зрения даже в той же книге О. Веблена. Но уже в 1962 г. С. Ленг пишет: «Оказывается, что изложение ощутимо выигрывает от систематического изгнания беспорядочного употребления локальных координат. Они заменяются изоморфизмом открытого подмножества многообразия на открытое подмножество банахова пространства» [107]. Итак, уже не первый раз в математике более важным оказывается не то, что преобразуется, а то, как преобразуется.

Такой подход явно «экономит мышление», делая соответствующие Н-модели моделями более высокого уровня абстракции, обеспечивая, в частности, не просто освоение «ничьей земли.... между математическим анализом и тремя большими дифференциальными теориями (дифференциальная топология, дифференциальная геометрия и обыкновенные дифференциальные уравнения)» [107], но как нам кажется, и возможный синтез этой системы теорий в рамках соответствующей «теории динамических систем», которая просто оказывается «ветвью математики» по замечанию В. М. Алексеева (см. предисловие к [108]). В свою очередь, эволюция Н-моделей этой теории оказалась связанной со стремлением отказаться вначале от абсолютных глобальных шкал в пользу шкал локальных. Затем был осуществлен переход к чисто алгебраическим формам и моделям, которые еще больше освобождали механику от «заветов Галилея». В результате «... к началу шестидесятых годов дело обстояло так, что, собственно, дифференциальные методы и понятия занимали в этой теории весьма скромное место по сравнению с топологическими или метрическими (в смысле теории меры)» (В. М. Алексеев). Таким образом, эта теория все больше удовлетворяла принципу А ФАДЭП, но Р-модели ее становились все менее «наглядными», т. е. критерий П удовлетворялся все меньше в рамках сложившихся представлений о простоте. Поэтому развиваются и другие направления типа «дифференциальной динамики», которые пользуются несколько иным набором М-понятий, рассчитанным, в частности, на возможность удовлетворить критерии А и П в большей степени.

Чтобы убедиться, что именно в этом одна из вероятно скрытых задач этого направления, достаточно просмотреть книгу Э. Нитецкого [108] и сравнить ее, например, с учебником К. Годбийона [109]. Дело здесь не только в том, что в книге К. Годбийона (хотя это учебник) нет ни одного рисунка, апеллирующего к геометрической интуиции, а у З. Нитецкого есть, и довольно наглядные (хотя это специальная монография). Главное в том, что дифференциальная динамика делает попытку больше апеллировать к «качественным и топологическим» Р-моделям, более близким и привычным геометрической интуиции, нежели, скажем, формализм дифференциальных форм. Конечно, привычным — не значит лучшим и мы далеки от того, чтобы как-то оценивать перспективность каждого из этих (и других) направлений. Нам важно только отметить, что начав с механики, мы в полном соответствии с развитием науки незаметно перешли в сущности к математике, которая определенно развивается по пути все более абстрактных Н-моделей.

Если кратко отметить тот язык, к которому явно или чаще неявно начинает апеллировать класс дифференциальных теорий, то это язык категорий и функторов (см. § 7, гл. I).

Приведем некоторые примеры. С. Ленг [107]: «Изложение удобно вести на языке теории категорий». Д. Хьюзмолер [59]: «На всем протяжении этой книги мы наряду с языком теории множеств будем пользоваться также языком теории категорий». Наконец сам Н. Бурбаки в [110] явно использует язык теории категорий, хотя и не считал возможным даже упомянуть об этой теории в своей «Архитектуре математики» [25]. Правда, в «Коммутативной алгебре» [34, § 4, гл. I], где он не смог пройти мимо этой теории, имеется примечание: «См. ту часть этого трактата, которая посвящена категориям..... (готовится к изданию). Пока этот раздел не опубликован, читатель может почерпнуть необходимые сведения....», далее идут ссылки. Мы не знаем, опубликована ли эта часть, но то, что Н. Бурбаки явно в «Коммутативной алгебре» переоценил некоторые ценности по сравнению с [25], кажется правдоподобным.

Но зачем ломиться в открытую дверь. И так ясно, что механика не может претендовать на роль метасистемной теории, да и любые ее модификации, следующие пусть в малом «заветам Галилея», тоже. Конечно, очень интересно, что происходит постепенное освобождение от этих заветов, но судя по всему, это процесс длительный. И самое главное — при чем здесь физика? Физика уже давно не механика, и если связь механики с теорией динамических систем совершенно очевидна и общеизвестна, то физика в лице квантовой механики стоит в стороне. Более того, если Н-модели общей и специальной теории относительности очень естественно связаны с эволюцией математики от эвклидовых к римановым пространствам и от глобальных абсолютных шкал к локальным, то где место ψ-функции, корпускулярно-волновому дуализму, принципу суперпозиции и прочим специфическим атрибутам квантовой механики? Почему квантовая механика и «новые классики» действительно не замечают друг друга и как более убедительно доказать, что квантовая механика все-таки частная теория? То, что лиево-иорданова алгебра, описывающая механику,— частная универсальная алгебра — это только наводящее соображение. Ведь в конце концов может получиться, что все остальные алгебры просто досужий домысел, относящийся к теории абстрактных систем, а не к абстрактной теории систем. Мир же лиево-иорданов. Просто мы еще не умеем свести именно к этим частным Н-моделям Н-модели любых систем. А если все-таки квантовая механика частная теория, то где мосты от нее к другим теориям, которые бы определили ее место и статус? Такие вопросы в общем правомерны, но ответ на них нельзя дать сразу.

Поэтому здесь нам важно было, во-первых, показать, в каком направлении развивается «теория динамических систем», являющаяся пока всего лишь частной теорией дифференцируемых многообразий. Если идет процесс «освобождения» от «заветов Галилея», то переход «снизу» ко все более абстрактным Н-моделям и более слабым шкалам внушает надежду, что движение идет в направлении создания теория динамических систем (без кавычек). Во-вторых, именно в процессе этой эволюции механики начали делать то, что обычно не любили делать физики. «К несчастью, физики редко предлагают свои теории в форме, которую хотелось бы видеть логику. Они не говорят: «Это мой язык, вот исходные термины, здесь мои правила образования, вот логические аксиомы» (Р. Карнап [112]). Иными словами, физики строили свои дедуктивные теории в основном не аксиоматически, а индуктивно. Отсюда привычка к широкому использованию Р-моделей, которые зачастую были более привычными, чем истинными. Переход к другим Н-моделям оказался очень болезненным, чего обычно не бывает при аксиоматическом построении теорий хотя бы потому, что здесь меньше влияние привычки и осознаешь только релятивистскую замкнутость (см. § 6, гл. I) любых Н- и Р-моделей. Таким образом, обсуждение эволюции механики как эволюции математики полезно, поскольку нечто подобное, по-видимому, ожидает и квантовую механику. Наконец, описав, разумеется, в самом общем виде направление этой эволюции, логичнее рассматривать, что же происходит в этом отношении в квантовой механике.

6. Так ли все необычно?

Как известно [113], первоначальная формулировка квантовой механики была дана в двух различных видах — в виде матричной механики Гейзенберга — Борна — Иордана и волновой механики Шредингера. Важно отметить, что обе формулировки носили характер некоторого рецепта или «наставления», как пишет Дж. фон Нейман. Никакой Р-модели, апеллирующей к наглядным представлениям, во всяком случае в матричной механике не было. Более того, основным принципом этой механики и являлась невозможность существования такой Р-модели. «Мы стоим здесь перед крушением обычных физических наглядных представлений» (Н. Бор [93]). В волновой механике, правда, делались попытки рассматривать, скажем, частицу как волновой пакет, но очень скоро была показана их несостоятельность. Естественная невозможность сопоставить Р-модели классической механики Н-модели другой теории (квантовой) представлялась чуть ли не катастрофой. С точки зрения теории систем было бы, наоборот, весьма странно, если бы Р-модели для двух механик (классической и квантовой) оказались идентичными. Ведь в классической предполагается возможность факторизации систем на абсолютные шкалы (в релятивистской — только «в малом»), а в квантовой механике такая факторизация для координат и импульсов одновременно не допускалась соотношением неопределенности. Переход к более слабым шкалам не мог быть осуществлен в рамках аппарата дифференциальных уравнений классической механики. Следовательно, и соответствующие Р-модели также должны быть изменены. Но в каком направлении? Прежде всего возникали некоторые аналогии с оптикой. В оптике существовали «волны», которые можно было себе легко представить, поэтому естественно было искать Р-модели именно там. «Аналогия» между оптикой и механикой (Э. Ферми [114]) оказывается, однако, не совсем однозначной. Чтобы в этом убедиться, достаточно сравнить, например, «две аналогии» — Э. Ферми [114, стр. 15] и В. Арнольда [87, стр. 217). Поэтому соответствующие Р-модели также в некотором отношении различаются. Но главным оказалось даже не это. Просто само понятие «волны» оказалось ненадежной основой для аналогии, поскольку волны проявляются в некоторых случаях как частицы — фотоны.

Итак, простой Р-модели у квантовой механики пока нет. Невозможность построения такой Р-модели на основе классической механики была воспринята «классиками» квантовой механики как невозможность существования любой наглядной Р-модели вообще. Более того, это и явилось одним из принципов квантовой механики. Мы уже цитировали Н. Бора по этому вопросу. А вот что пишет П. А. М. Дирак: «...природа действует иначе. Ее основные законы не управляют непосредственно миром наших наглядных представлений, но относятся к таким понятиям, о которых мы не можем составить себе наглядных представлений, не впадая в противоречие» [96]. Но почему наглядные представления Р-модели должны быть связаны только с классической механикой. И так ли необычна сложившаяся ситуация?

Вернемся к Анне Карениной. «....Но если ты сама чувствуешь, что есть хоть малейшие основания, то я тебя прошу подумать и, если сердце тебе говорит, высказать мне...» [10]. Анна находилась в *состоянии* влюбленности во Вронского. Алексей Александрович подозревал это, но *наблюдаемые* им признаки не однозначно соответствовали ее состоянию. А ему очень нужно было знать обо всем. Пытаясь узнать, он влиял на нее, изменяя состояния ее души, которая находилась «частично в одном состоянии, а частично в другом...» (П. А. М. Дирак [90]). И может быть именно первоначальная настойчивость Алексея Александровича (только ли его?) в желании узнать правду о состоянии Анны сделала это состояние определенным. Да и что здесь удивительного? В любом общении мы, как правило, хотим узнать состояние человека (чтобы, возможно, повлиять на него), наблюдая те или иные его проявления. Однако человек динамичен и едва ли в результате общения он остался в том же состоянии, в каком был до этого. Да и вообще «...взаимодействие... составляет нераздельную часть описания» (Н. Бор [93]). В высказывании Н. Бора мы намеренно опустили после слова «взаимодействие» слова «между измерительным прибором и объектом», чтобы подчеркнуть, что уже даже в этой более общей форме понятие дополнительности, а именно об этом идет речь у Н. Бора, не представляет собой ничего специфического именно для квантовой механики и принадлежит к истинам, которые известны уже давно.

А что специфического в другом основном принципе квантовой механики? «Основная аксиома состоит в том, что при вычислении каких-либо величин, например энергии, частоты и т. д., должны использоваться только соотношения между принципиально наблюдаемыми величинами» (В. Гейзенберг [115]). Одно из двух: или под «принципиально наблюдаемыми величинами» В. Гейзенберг понимает не то, что обычно вкладывается в эти понятия (тогда зачем их использовать), или «основная аксиома» граничит с тривиальностью. В самом деле, как можно вычислить какие-либо величины на основе принципиально ненаблюдаемых величин? Представляется очевидным, что любая система может находиться в том или ином состоянии, которое непосредственно не всегда можно наблюдать (например, душевное состояние человека), а наблюдать мы можем только некоторые внешние проявления, которые можно назвать «наблюдаемыми» (величинами). Скобка поставлена потому, что с точки зрения теории систем и здравого смысла «наблюдаемая» не обязательно должна быть величиной (например, улыбка). Итак, и в основных понятиях («состояние» и «наблюдаемая»), и в основных принципах квантовой механики, сформулированных даже в более общем виде, нет ничего специфического, не допускающего существования Р-моделей, если, конечно, отказаться от «заветов Галилея» и не фетишизировать абсолютные шкалы. «Не может быть,— скажет читатель, здесь что-то не то, например обсуждены не все принципы, ибо все слишком тривиально». Ну что ж, примем чисто аксиоматическое изложение квантовой механики.

7. Основные постулаты квантовой механики [116]

1. Каждому физическому состоянию системы соответствует единственный вектор (с точностью до нормировочной константы для его длины) линейного векторного пространства.

2. Каждая динамическая переменная может быть представлена линейным оператором; все физические наблюдаемые величины могут быть представлены эрмитовыми операторами.

3. С помощью эксперимента может быть определен такой полный набор одновременно наблюдаемых величин, которому соответствует полный набор коммутирующих эрмитовых операторов ξ, η,... , что собственные значения последних

однозначно определяют всевозможные состояния физической системы.

4. Изменение во времени шредингеровского состояния $| \,,t >$ можно описать уравнением

$$i\hbar \frac{d}{dt} | \,,t> = H | \,,t>, \tag{11}$$

где H — оператор Гамильтона, характеризующий систему.

Постулируется, что математическое ожидание наблюдаемой ξ в момент времени t

$$\bar{\xi} = < ,t | \xi | \,,t>. \tag{12}$$

5. Динамические переменные не обязательно коммутируют друг с другом. Для полноты описания необходимы коммутационные соотношения, которые должны быть постулированы для конкретных физических систем.

В сущности эти постулаты с точки зрения абстрактной теории систем означают следующее.

1. Есть некоторая система, находящаяся в разных состояниях.

2. Существует ряд динамических переменных, характеризующих эти состояния, часть из которых является наблюдаемыми.

3. Есть Н-модель взаимосвязи состояний и динамических переменных.

Эти положения одинаково справедливы и для электрона и для Анны Карениной, да и вообще для любой, по крайней мере, определимой системы. Разница возникает при конкретизации третьего пункта: для Анны Н-модель (роман Л. Н. Толстого) не общезначима (математически некорректна, в частности), но зато налицо Р-модель (если предположить, что по фактам все «так и было», как описано в романе). Здесь нет противоречия, ибо роман — Н-модель, в которой описываются не просто факты. С другой стороны, квантовая механика как Н-модель математически корректна, но не имеет Р-модели в М-понятиях классической механики. Последнее чрезвычайно важно, ибо Р-модели в М-понятиях, связанных с результатами физических экспериментов, в квантовой механике, разумеется, существуют, иначе она была бы просто ненаблюдаемой или ложной. И, конечно, совершенно естественно иметь дело с наблюдаемыми объектами, имеющими Р-модель. Это по существу и является «основной аксиомой» по В. Гейзенбергу. Соотношение неопределенности обычно получается на основе уравнения

Шредингера (11) и других принципов квантовой механики, относящихся в приведенной здесь формулировке к совершенно определенной общезначимой Н-модели, которая с точки зрения математики является чрезвычайно частной.

8. Основная модель квантовой механики

В соответствии с основными постулатами квантовой механики Н-модели физических систем могут быть построены на основе использования линейного векторного пространства. При этом состояния факторизуются на векторы, а динамические переменные — на линейные операторы этого пространства. Сама по себе математическая модель относится к функциональному анализу и с точки зрения математики является довольно частной Н-моделью.

Но почему именно она принята в квантовой механике и характерна ли она только для квантовой механики? Ответ на этот вопрос найти невозможно. Вначале переход от классической к квантовой механике был связан с процедурой квантования, носившей характер полумистического предписания, не имеющего никакой Р-модели. А почему бы не попробовать описать какую-то другую стохастическую систему, используя ту же систему постулатов квантовой механики? Кажется правдоподобным, что эти постулаты не так уже специфичны. В конце концов теория эрмитовых операторов имеет достаточно обширные приложения и почему бы не попытаться описать состояния некоторых систем векторами линейного векторного пространства? Наверное, это будет не такой уже обширный класс систем, но во всяком случае он может быть шире системы частиц, атомов и т. д. Но как быть в таком случае с уравнением Шредингера, которое выделяет некоторый специальный эрмитов оператор Н, придавая ему совершенно особый статус? По существу, именно это уравнение является основной загадкой квантовой механики. Почему динамика состояния должна подчиняться именно ему? Все, что не относится к этому уравнению, кажется вполне правдоподобным интерпретировать как Н-модель абстрактных систем, для состояний которых возможна факторизация на линейное векторное пространство, где справедлив принцип суперпозиции. То, что он «существенным образом отличается от суперпозиции в любой классической теории» (Дирак [90]) не представляет ничего загадочного, поскольку наблюдаемые уже не факторизуются на абсолютные шкалы и теория, естественно, выше в иерархии абстрактных теорий. Поэтому общую математическую схему квантовой механики вполне можно понимать значительно шире. Не зря в тех местах книги Дирака [90], где излагается эта схема, почти невозможно встретить ни «частиц», ни «атомов», ни других М-понятий квантовой механики, разве в виде отдельных примеров. Но уравнение Шредингера обычно выводится на основе процедуры квантования, которая, грубо говоря, состоит в замене переменных операторами в некоторых уравнениях классической механики. Можно что-то «объяснить», взяв за основу некоторые перестановочные соотношения между операторами, что ничего не дает. Поэтому даже если и удастся многое описать в рамках теории линейных пространств, задача обоснования квантовой механики с помощью какой-то другой теории остается.

Итак, либо квантовая механика — метасистемная теория и тогда Н-модели других теорий хотя бы в принципе могут быть получены из нее, либо возникает задача вывода уравнения Шредингера и объяснения специфики Н-моделей квантовой механики (например, комплексности векторов состояний) на основе независимых более общих соображений желательно при немистических Р-моделях (критерий П ФАДЭП). Здесь уместно вспомнить традиционное высказывание: «Как вам лучше всего поступить с этой задачей? Оставьте ее в покое и придумайте себе какую-нибудь другую» (цит. по [122]).

9. Наводящие соображения

Динамическая теория меры, как она сформулирована в п. 5, § 1, обладает одним негативным, с точки зрения математика, свойством — ее основные уравнения нелинейны. Это видно на примере уравнения непрерывности. Еще более наглядно это проявляется в самих основах теории меры. Пусть для некоторого $\Omega^i \subset \Omega$

$$\Omega^i = A \cup B; \quad A \cap B \neq \varnothing.$$

Тогда совершенно очевидно, что

$$\mu_{A \cup B} = \mu_A + \mu_B - \mu_{A \cap B}. \tag{13}$$

Мера объединения двух множеств равна сумме мер этих множеств, только если у них нет общей части. А нельзя ли уравнение (13) как-то линеаризовать? Поскольку мера — число, то представим ее в виде произведения двух величин

$$\mu = ab \tag{14}$$

и будем в любом случае считать, что соблюдается линейность в виде

$$a_{A\cup B} = a_A + a_B; \quad b_{A\cup B} = b_A + b_B. \tag{15}$$

Тогда с учетом (14)

$$\mu_{A\cup B} = a_{A\cup B} b_{A\cup B} = \mu_A + \mu_B + (a_A b_B + a_B b_A). \tag{16}$$

Многочлен в скобках с отрицательным знаком определяет меру перекрытия множеств A и B, если мы хотим, чтобы соблюдалось соответствие между формулами (13) и (16), т. е.

$$\mu_{A\cup B} = -(a_A b_B + a_B b_A). \tag{17}$$

В частности, если $A \cap B = \varnothing$, то

$$\frac{a_A}{a_B} = -\frac{b_A}{b_B}. \tag{18}$$

Обозначим:

$$a_A = a_B f_{A,B}; \quad b_A = -b_B f_{A,B}. \tag{19}$$

Перемножая левые и правые части этих равенств, получим

$$\mu_A = -\mu_B f^2_{A,B}. \tag{20}$$

Так как мера по определению выражается действительным числом, то $f_{A,B} = i\sqrt{\dfrac{\mu_A}{\mu_B}}$.

Итак, если мы хотим линеаризовать H-модели теории меры, то, по-видимому, придется иметь дело с комплексными числами. Положим, в частности, $b_A = \overset{*}{a}_A$; $b_B = \overset{*}{a}_B$ (т. е. a и b — просто комплексно сопряженные числа). В этом случае будем называть a амплитудой меры (по аналогии с квантовой механикой, где близкая величина называется амплитудой вероятности). Учитывая, что любое комплексное число z может быть представлено в виде $z = |z|\, e^{i\varphi_z}$, получим из (18)

$$e^{2i\varphi_A} = -e^{2i\varphi_B}. \tag{21}$$

Отсюда

$$\varphi_A - \varphi_B = \left(k + \frac{1}{2}\right)\pi, \qquad k = 0,\ 1,\ 2\ \ldots \tag{22}$$

Итак, множества A и B не перекрываются, если разность фаз амплитуд их мер определяется «квантовыми числами» $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{2}$, $\frac{5}{2}$;... «Квантовое число» употребляется здесь пока просто, чтобы показать, что квантовомеханическая «мистика» может возникать на основе самых элементарных соображений.

10. Что такое уравнение Шредингера?

Теперь пойдем дальше и попробуем аналогично линеаризовать уравнения непрерывности (см. п. 6, § 1). Напомним, что это уравнение является весьма частным соотношением с точки зрения динамической теории меры, когда множество Ω представляет собой n-мерное эвклидово пространство. Величина $\rho_{x,t}$ в этом уравнении является не мерой, а ее плотностью (здесь x — n-мерный вектор), x_i — i-я компонента x (мера объема $d\omega = dx_1 dx_2 \ldots dx_n$ в момент t равна $\rho_{x,t}\, d\omega$). Уравнение непрерывности хорошо известно и достаточно очевидно, поэтому мы не будем на нем подробно останавливаться.

Положим $\rho_{x_1 t} = \rho$,

$$\rho = \alpha\beta; \quad v = c \operatorname{grad} \ln \frac{\alpha}{\beta}, \tag{23}$$

где c — константа.

Тогда уравнение непрерывности преобразуется к виду

$$\alpha(\dot\beta - c\Delta\beta) + \beta(\dot\alpha + c\Delta\alpha) = 0, \tag{24}$$

где $\Delta = \operatorname{div} \operatorname{grad} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$ — оператор Лапласа; $\dot\alpha = \frac{\partial\alpha}{\partial t}$; $\dot\beta = \frac{\partial\beta}{\partial t}$.

Уравнение (24) можно также переписать в виде (ср. с (18))

$$-\frac{\dot\alpha + c\Delta\alpha}{\alpha} = \frac{\dot\beta - c\Delta\beta}{\beta}. \tag{25}$$

Отсюда аналогично предыдущему, обозначая эти отношения буквой f, получим два уравнения:

$$\dot\alpha + c\Delta\alpha + \alpha f = 0; \quad \dot\beta - c\Delta\beta - \beta f = 0, \tag{26}$$

линейные относительно величин α и β.

Рассмотрим теперь следующую Р-модель. Пусть $n = 3$ и в этом пространстве движется некоторая частица, положение которой мы можем определить только с некоторой вероятностью с плотностью ρ. Математическое ожидание радиуса-вектора этой частицы r:

$$\bar{r} = \int r\rho d\omega.$$

Аналогично определяется средняя скорость $\bar{v}$, ускорение и т. д. Можно, в частности, показать [123]:

$$\frac{d^2\bar{r}}{dt^2} = \frac{d\bar{v}}{dt};$$

$$\frac{d^2\bar{r}}{dt^2} = \frac{d\bar{v}}{dt} = \frac{d}{dt}\int v\rho dv = c\int (\dot{\beta}\,\mathrm{grad}\,\alpha + \beta\,\mathrm{grad}\,\alpha -$$

$$- \dot{\alpha}\,\mathrm{grad}\,\beta - \alpha\,\mathrm{grad}\,\dot{\beta})\,d\omega.$$

Путем несложных преобразований [123] последнее уравнение можно привести к виду

$$\frac{d^2\bar{r}}{\partial t^2} = \frac{d\bar{v}}{dt} = -2c\,\overline{\mathrm{grad}\,f}. \tag{27}$$

«Мы интерпретируем это соотношение в смысле классической механики как усредненное уравнение для силы $m\frac{d^2\bar{r}}{dt} = \bar{F}$. Если силы получены из некоторого потенциала V, то будем иметь

$$\bar{F} = -\overline{\mathrm{grad}\,V} = -2mc\,\overline{\mathrm{grad}\,f}.$$

Мы интерпретируем таким образом $2mcf = V$ как потенциал действующей силы... Заменим α и β через ψ и ψ *... Тогда ψ должно быть мнимым. Положим $2\,mc = \frac{\hbar}{i}$, следовательно, $f = \frac{i}{\hbar}v$, получим уравнение Шредингера

$$\frac{\hbar}{i}\dot{\psi} - \frac{\hbar^2}{2m}\Delta\psi + v\psi = 0; \quad \frac{\hbar}{i}\dot{\psi}^* - \frac{\hbar^2}{2m}\Delta\psi^* + v\psi^* = 0$$

с постоянной $\hbar$, которой еще можно распорядиться. Сравнение с опытом показывает, что $\hbar = \frac{h}{2\pi} = 1{,}054 \times \times 10^{-27}$ *эрг · сек*, где h есть квант действия Планка» (Маделунг [123]).

Мы привели цитату для того, чтобы в столь важном вопросе, как определение места физики в системе теорий, иметь возможность снять какие-либо возражения в математической некорректности.

Квантование или переход к операторному представлению динамических переменных при таком выводе уравнения

Шредингера, оказывается более чем естественным следствием перехода от детерминированного к вероятностному описанию. В этом случае мы имеем дело со средними значениями и при их вычислении и возникает это представление. Так, например, среднее значение импульса «частицы»:

$$\bar{P} = m\bar{v} = m\int \rho v d\omega = mc\int (\psi^* \operatorname{grad}\psi - \psi \operatorname{grad}\psi^*)\, d\omega =$$
$$= \frac{\hbar}{i}\int \psi^* \operatorname{grad}\psi d\omega = \int \psi^* \left(\frac{\hbar}{i}\operatorname{grad}\right)\psi d\omega. \qquad (28)$$

Отсюда импульсу P можно сопоставить оператор $\frac{\hbar}{i}\operatorname{grad} \leftrightarrow$ $\leftrightarrow P$.

При вычислении средних значений (математических ожиданий) других динамических переменных совершенно аналогично появляются операторы, которые можно сопоставить этим переменным. То, что некоторые соотношения между классическими переменными сохраняются и для их квантовых аналогов, очевидно в связи с линейностью операции математического ожидания. Столь же естественны и отличия, связанные, например, с тем, что не все операторы коммутируют. Вся «классическая» квантовая механика может быть построена на основе данной точки зрения [123]. Здесь важно только то, что на вопрос, что такое уравнение Шредингера, можно дать совершенно однозначный ответ в нашей терминологии: уравнение Шредингера есть линеаризованное уравнение непрерывности динамической теории меры (см. п. 6, § 1). Но это уравнение является весьма частным случаем этой теории, когда множество Ω — эвклидово пространство. Поэтому основное уравнение квантовой механики оказывается по сути не квантовым в другой теории, которая допускает весьма простые Р-модели, настолько простые, что уравнение непрерывности обычно даже не выводят, не без основания считая его очевидным. Но уравнение Шредингера — линеаризованное уравнение непрерывности. Следовательно, во всяком случае, нерелятивистская квантовая механика не имеет основания претендовать на звание абстрактной теории систем, не удовлетворяя критерию А ФАДЭП.

Естественно, появляется мысль построить квантовую теорию, используя исходное уравнение непрерывности, рассматривая ее задачи как обычные задачи динамической теории меры. В связи с изложенным есть все основания считать, что это возможно и, как нам кажется, несомненно будет сделано.

Почему физика не пошла по этому пути с самого начала? Вероятно, здесь сыграла свою роль привычка к Н-моделям волновой теории и М-понятиям, освященным столетиями и авторитетами, а главное наглядными Р-моделями колебаний и макродвижений. Правда, речь идет о начальном этапе развития квантовой теории, ибо в дальнейшем под влиянием привычки с одной стороны и давления экспериментальных фактов — с другой физикам самим пришлось очень сильно поколебаться. В частности, это касается их отношения к «волновой картине» Шредингера. «Как только Вы видите ссылку на картину Шредингера, сейчас же выбросьте ее вон... Я сказал бы, что таким образом из обычной трактовки квантовой теории поля удаляется значительная часть хлама» (Дирак [96]). Но далее в этой же книге Дирак пишет: «Я не хочу настаивать, что шредингеровская картина не вернется назад; на самом деле у нее имеется масса привлекательных особенностей, и в глубине души я чувствую, что она должна возвратиться». Да, видимо, трудно примирить привычку и факты в узких рамках традиций теоретической физики. И не просто трудно (см. цитату из [96] на стр. 87). Но каков выход? Логично взять другую Н-модель, например уравнение непрерывности, и попробовать решить задачи по крайней мере классической квантовой механики, рассматривая их как задачи динамической теории меры, стараясь обойтись без квантовомеханических «странностей», являющихся вероятным следствием платы за привычку. Надежда на то, что этот путь окажется перспективным и не приведет к «отступлениям от законов логики», а, наоборот, поможет найти новые удобные Р-модели, основывается не только на историческом опыте эффективности «стыков наук». Имеются очень интересные результаты применения непосредственно уравнения непрерывности для решения самых различных задач (см., например, книгу А. Власова [121]). Здесь, однако, не будет рассматриваться этот прикладной путь, поскольку для этого необходима отдельная специальная работа. И, кроме того, уравнение непрерывности, а следовательно, и его линеаризованная модификация — уравнение Шредингера, явно не удовлетворяют критерию А ФАДЭП. Конечно, они уже позволяют частично освободиться от «заветов Галилея», поскольку предполагается только абсолютная шкалируемость меры, а не самих величин, для которых одновременная измеримость ограничивается соотношением неопределенности, но только частично. Поэтому, отказываясь от любых «физических»

М-понятий, мы наметим эскиз метатеории квантовой механики, которой присвоим наименование линейной теории меры.

11. Линейная теория меры

Прежде всего вернемся к общему случаю множества Ω, о котором не будем предполагать пока ничего, так что уравнение непрерывности бессмысленно, ибо нет ни метризуемости, ни нормируемости, а значит, в частности, нельзя дифференцировать и т. д. Таким образом, переходим на более высокий уровень абстракции в надежде, что «большое видится издалека». Предполагаем только возможность ввести меру на Ω. Рассмотрим двухпараметрическое множество измеримых преобразований $\varphi_{\tau,t}$, заданных на Ω или его подмножествах.

Тогда, как уже отмечалось в § 1.5, любому $\varphi_{\tau,t}$ можно сопоставить некоторый оператор $U_{\tau,t}$, действующий непосредственно «на меру». В частном случае, когда начало отсчета не существенно и можно ввести дискретное время, так что $t = 0, 1, 2, \ldots, n, \ldots$; $\varphi_{\tau,t}$ при $\tau = 0$ можно считать однопараметрической полугруппой с одной образующей φ, полагая $\varphi_n = \varphi^n$. Если φ обратимо, то можно говорить о соответствующей группе. Тогда легко показать [86], что оператор U, отвечающий φ, является унитарным в L_2, если φ — обратимое, сохраняющее меру преобразование. Здесь L_2 — как обычно, пространство функций с интегрируемым квадратом [125] (при этом норма в смысле L_2 функции f равна квадратному корню из нормы функции f^2 в L_1'' [86]); L_1 — пространство интегрируемых функций. Можно перейти к комплексному пространству L_2 и ввести скалярное произведение векторов и совекторов этого пространства, которое является функционалом, определенным на произведении одной функции на комплексно сопряженную другую. При этом «...комплексное пространство L_2, отвечающее мере со счетным базисом, есть комплексное гильбертово пространство» [125]. Векторы в этом пространстве удобно обозначить символом $|A\rangle$, совектора — $\langle B|$, скалярное произведение — $\langle B/A\rangle$, где A, B могут быть какими-то параметрами (множествами параметров), индексирующими соответствующий вектор (совектор). Мы упомянули об этом квантовомеханическом формализме, чтобы еще раз подчеркнуть частный характер Н-моделей квантовой механики, где используются вектора состояний в комплексном гильбертовом пространстве. Важно отметить, что переход от L_1 к L_2 может позволить линеаризовать те или иные уравнения теории меры, расщепляя их на линейные уравнения, как это было показано выше. Аксиоматически этот фрагмент линейной теории меры вполне может строиться (даже без особого изменения терминологии) с использованием п. 7, или, например, на основе книги Дирака [96], где при построении теории вообще, как уже отмечалось, практически отсутствуют физические *М*-понятия. Векторы состояний, естественно, возникают при линеаризации. Что касается «наблюдаемых», то формально являясь эрмитовыми операторами (эрмитовость необходима, в частности, для получения действительных значений для собственных значений наблюдаемых), они могут рассматриваться как класс операторов, действующих «на меру» в соответствии, в частности, с некоторой группой преобразований пространства Ω. При этом «...унитарные преобразования квантовой теории являются аналогом касательных преобразований классической теории» [96], что в линейной теории меры и по сути просто означает, что соответствующее преобразование φ пространства Ω является «обратимым, сохраняющим меру» [86].

При описании динамических задач логически имеется три возможности: рассматривать состояния, зависимые от времени, фиксируя операторы (наблюдаемые); наоборот; считать, что от времени зависят и операторы и состояния.

Как известно, в квантовой механике первая схема называется схемой Шредингера, вторая — Гейзенберга, третья — не используется. Так, может быть схемы квантовой механики — это уже разработанные схемы линейной теории меры? Возможно, но только для весьма частного случая, определяемого спецификой используемых операторов и пространства Ω (см. выше).

Конечно, мы далеки от утверждения о том, что имеется прямая ясность в путях построения линейной теории меры, которая здесь только декларируется. Более того, трудности могут возникнуть в самом начале. Так, полагая в (16) $A=B$, приходим к противоречию. В квантовой механике, рассматриваемой как частный случай линейной теории меры, эта трудность устраняется тем, что векторы состояний задаются с точностью до их длины. «Если вектор, соответствующий некоторому состоянию, умножить на любое не равное нулю комплексное число, то полученный вектор будет соответствовать тому же состоянию» [96]. Возможно, так удастся поступить и в общем случае. Однако подробное развитие линейной теории меры лежит вне этой книги. Мы хотели только показать, что Н-модели квантовой механики являются, во-первых, очень частными, и, во-вторых, могут быть получены на основе линеаризации частных моделей динамической теории меры, которая допускает очень простые и наглядные Р-модели.

12. Куда идет физика?

В каком направлении нужно вести поиск М-понятий и Н-моделей? Поскольку речь идет о наиболее абстрактной теории, естественно освобождаться от частных М-понятий и переходить ко все более общим Н-моделям. Именно в этом направлении и развивается современная теоретическая физика. Вот перечень названий глав только одной из книг по теоретической физике [126]: «Сингулярности. Гомологии. Интегралы. Скачки на разрезах. Еще о гомологии». Ни частиц, ни волн, ни других физических М-понятий. Можно возразить, что книга [126] посвящена просто другой тематике, связанной с «квантовой теорией поля». Но вот содержание книги, посвященной взаимодействию частиц — «Особенности процессов многократного рассеяния» [127]: «Некоторые комбинаторные свойства графов. Топологическое исследование пространств, связанных с графами. Аналитичность амплитуд рассеяния и поглощения. Упругие пороги и графы с кратными линиями». И здесь то же самое. Физические понятия уступают все в большей степени место другим, связанным с наиболее абстрактными Н-моделями современной математики, позволяющими работать с самого начала с множествами, не факторизуемыми на абсолютные шкалы. Здесь говорилось о квантовой механике, но в теории относительности происходит то же самое. Ведь уже специальная теория относительности по существу является некоторым ограничением на независимое измерение координат, скоростей и времени, т. е. и здесь происходит частичный отказ от «заветов Галилея». Риманова геометрия, являющаяся основой общей теории относительности, отказывается от измерения в «большом» и переходит к локальным измерениям. Итак, и здесь налицо стремление освободиться от «диктатуры количества».

В § 7, гл. I мы очень бегло отметили часть той математики качества, которая позволяет моделировать системы с множествами общей природы. Особое место занимает здесь теория схем и категорий как наиболее абстрактная и наиболее молодая математическая теория. Достаточно просто перелистать упомянутые выше, да и многие другие книги и статьи по теоретической физике, чтобы убедиться, что последняя и здесь следует проверенному и, по-видимому, неизбежному курсу — вслед за математикой, по пути создания все более абстрактных и общих теорий, позволяющих строить мосты между различными теориями общей теории систем, уменьшая число М-понятий и не ухудшая описания частностей в соответствии с принципом ЭКА. Направление развития определено — абстрактная теория систем как высшая ступень в динамической иерархии системы теорий.

Но направление это еще не путь. Как идти? В § 1 настоящей главы мы привели диаграмму (9), к которой могут быть сведены современные классические абстрактные теории систем. Особая роль этой диаграммы совершенно понятна, если вспомнить, что какие угодно алгебраические системы могут быть рассмотрены как структуры различного рода, определенные в той или иной шкале множеств (см. § 7, гл. I) и (9) — просто теорема о разложении любого отображения (см. (16), гл. I). Значит, этот результат относится ко всем системам, где имеет смысл понятие отображения. Поскольку это явное М-понятие абстрактной теории систем, то кажется, что это же относится и к результату как к Н-модели. Таким образом, остается в поисках наиболее абстрактной из абстрактных теорий систем, охватывающей, в частности, и физику, вести поиск в рамках тех же М-понятий: «отображение», «множество», и аналогичных Н-моделей. Однако мы этого пока делать не будем, не только потому, что это требует специального исследования, но главным образом и потому, что основное метапонятие современной математики «множество» по сути не имеет Р-модели, как об этом свидетельствуют парадоксы, обнаруженные в основах математики. Поэтому у нас нет пока оснований считать Н-модели, основанные на М-понятии множества, принадлежащими к абстрактной теории систем. Их можно отнести к теории абстрактных систем — математике. Однако, наверное, немногие математики согласятся даже с такой точкой зрения. Большинство, видимо, не сумеет утешиться синтаксической истинностью формальных конструкций, как об этом свидетельствует признание одного из крупнейших математиков нашего века Г. Вейля в 1953 г.: «Мы меньше, чем когда-либо, уверены в первичных основах логики и математики. Как все и вся в мире сегодня мы переживаем «кризис». Он продолжается уже почти пятьдесят лет. На первый взгляд он не мешает нашей ежедневной работе; однако я могу признаться, что он оказал сильное влияние на мою математическую деятельность; он направил мои интересы в область, казавшуюся мне относительно «безопасной», и постоянно подрывал во мне энтузиазм и решимость, необходимые для всякой исследовательской работы» [78].

Задача математики состоит в том, чтобы узаконить интуицию, и никакой другой задачи у нее нет.

Ж. Адамар

Глава III

ОТ ТЕОРИИ АБСТРАКТНЫХ СИСТЕМ К АБСТРАКТНОЙ ТЕОРИИ СИСТЕМ

Предпринимается попытка заменить фундамент современной математики, не трогая само здание. Это необходимо, чтобы избавить математику от парадоксов и превратить ее из теории абстрактных систем, для которых может и не существовать Р-моделей, в абстрактную теорию систем, занимающую высшую ступеньку в системе теорий.

§ 1. СМЕНА МЕТАПОНЯТИЙ

1. «Направление главного удара»

Итак, похоже, можно построить мост между физикой и теорией абстрактных систем — математикой — в виде линейной теории меры. Мост, который в значительной степени проясняет смысл некоторых категорий теоретической физики, например квантования, представляя основные уравнения квантовой механики как специальную форму обычного уравнения динамической теории меры. Дальнейшее развитие теории — это навешивание ярлычков М-понятий на те или иные математические конструкции. Последнее имеет место и для теории автоматического регулирования, и для теории автоматов и для других наук, общезначимые Н-модели которых развиты в различной степени. Но мы ищем наиболее абстрактную теорию систем, из которой все конкретные теории вытекали бы как частные случаи.

В каком направлении нужно идти в этом поиске? Существует система Н-моделей частных теорий систем, между которыми имеются взаимосвязи. У каждой из них свое множество экзогенных М-понятий, которые вполне могут оказаться эндогенными в другой теории. По мере роста абстрактности теории число экзогенных М-понятий уменьшается и множество Р-моделей увеличивается при соблюдении принципа ЭКА. Представьте систему теории в виде некоторого графа или схемы. Тогда общезначимый переход (если он есть) между различными теориями (Н-моделями) можно кратко назвать синтаксическим морфизмом, а соответствие между схемой теорий и множеством возможных Р-моделей соответственно семантическим морфизмом. Семантический морфизм таков, что множество Р-моделей для наиболее абстрактной теории включает в себя множество Р-моделей теорий, находящихся на более низком уровне иерархии абстрактности. Поэтому если мы хотим искать кандидатуру «на титул» абстрактной теории систем, необходимо это делать с использованием минимального числа М-понятий, но таких, которые имеют максимальное множество Р-моделей. Именно это и характерно для математики. Так, возможно, абстрактная теория систем в действительности и есть теория абстрактных систем — математика? Вероятно, если мы будем уверены, что любая Н-модель математики имеет Р-модель и для любой Р-модели можно найти соответствующую Н-модель в математике. Так ли это? Похоже, что нет, как об этом свидетельствуют хотя бы парадоксы, обнаруженные в основах математики.

Итак, принцип ЭКА требует, чтобы мы оставались при поиске абстрактной теории систем в рамках общезначимых, математически корректных Н-моделей. Это оправдано и тем, что М-понятия математики являются наиболее абстрактными, так что в конечном счете любые теории явно или неявно апеллируют к этим М-понятиям и именно математика имеет, в конечном счете, наибольшее множество Р-моделей. Теперь попытаемся выделить в математике наиболее общее метапонятие, используемое во всех ее разделах. Это метапонятие множества. Здесь сразу возникает возражение, что множество не может быть метапонятием, ибо это приводит к парадоксам и к необходимости строить аксиоматические системы, в которых это понятие эндогенно и/или вводить дополнительное интуитивное М-понятие класса. Забудем пока об опасностях и предположим, что множество — основное метапонятие абстрактной теории систем. Далее естественно перейти к последовательному построению соответствующих математических теорий и затем выйти на алгебраические Н-модели систем. Выйти, но придти к неутешительным выводам, что критерий Д ФАДЭП во всяком случае не удовлетворяется. И здесь напрашивается новое М-понятие «динамическое множество» [120]. Оно удобно как метапонятие, ибо по сути мы имеем дело только с множествами, состав которых меняется со временем, т. е. с динамическими множествами. Однако, с другой стороны, его можно попытаться определить и как эндогенное М-понятие в рамках традиционной математики, вводя в основу математики метапонятие времени. Игнорирование этого понятия в основах математики, по нашему мнению, и привело к кризису в виде парадоксов, проистекающих из уверенности, что математические истины не зависят от времени. И если эти высказывания верны в данный момент, но не гарантированы от последующего опровержения, то «такого рода высказывания едва ли следует относить к математике» (Марков [39]).

Но так ли уже очевидно это требование к математическим истинам? Ведь, например, та истина, что существует только одна прямая, параллельная данной, была, безусловно, справедлива во времена Эвклида и справедлива лишь условно (для эвклидовых пространств) в наше время. Однако любая истина всегда справедлива, если оговорить соответствующие условия, и разница, в частности, между метапонятиями математики и нематематики состоит только в более медленной эволюции первых. Но все-таки и они только квазиинициальны, квазитерминальны (см. § 6, гл. I) и, следовательно, «квазисохранны». Тем более это относится к «математическим истинам», которые, в конечном счете, являются абстракциями при факторизации реальных систем, существующих в пространстве и во времени. Игнорировать время при факторизации — это зачастую выплескивать с водой и ребенка.

Итак, наш основной тезис: следует ввести время прямо или косвенно в основные метапонятия математики.

2. Конструктивное определение динамических множеств

При рассмотрении любого множества предполагается некоторый интервал времени, в течение которого это множество определено. Когда говорят: «дано множество элементов» и не оговаривают при этом интервал времени, в течение которого это множество «дано», то интуитивно предполагают, что это множество существует как угодно долго. Такая абстракция не имеет Р-моделей в принципе. Все реально существующие множества могут быть определены только на некотором временном интервале, после чего становятся неопределенными в течение конечного или бесконечного времени с точки зрения первоначальных определений или могут считаться таковыми (неопределенными). Так, простейшая Р-модель «множество всех людей, находящихся в данной комнате» теряет смысл в момент времени, когда хотя бы один человек выходил (но еще не вышел) из комнаты или входил (но еще не вошел) в нее или когда комната перестает существовать.

Если нас это множество просто не интересует или мы не обладаем никакой информацией о нем, можно считать также множество людей в этой комнате неопределенным. Как быть с Н-моделями в таких случаях?

Рассмотрим множество A с интервалом (отрезком) определения T/A. Это значит, что для любого $t \in T/A$ множество A определено и, если оно не пусто, существуют элементы этого множества, т. е. для $t \in T/A$ имеет смысл соотношение $\exists\, a \in A$ (в дальнейшем $\exists$ будем подразумевать). Для $t \notin T/A$ A не определено. Условимся обозначать неопределенность символом $\circ$.

Введем функцию принадлежности (ср. § 1 гл. I)

$$[x, X] = \begin{cases} 1, & \text{если } x \in X; \\ 0, & \text{если } x \bar{\in} X; \\ \circ, & \text{если } x = \circ \text{ или } X = \circ. \end{cases} \qquad (1)$$

Тогда приведенные определения можно записать в форме:

$$[a, A] = \begin{cases} 1, & \text{если } [t, T/A] = 1; \\ \circ, & \text{если } [t, T/A] \neq 1. \end{cases}$$

Величину $[a, A]$ можно рассматривать зависящей от времени и принять для нее более привычную форму записи

$$[a, A]_t.$$

Множество A будем называть стационарным на интервале T/A. Данные выше определения отличаются введением интервала T/A, который, как уже отмечалось, обычно подразумевается.

Разобьем теперь интервал $\theta \in T/A$ на $2n$ подинтервалов длительностью $t(\beta) = t_{\beta+1} - t_\beta$ ($\beta = 1, \ldots, 2n$). При этом $T/A = \sum_{\beta=1}^{2n} t(\beta)$. Определим для каждого интервала $t(2\alpha)$ стационарное подмножество $A_\alpha \in A$ с интервалом определения

$$T/A_\alpha = t(2\alpha) \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots, n).$$

Тогда имеем:

$$[a, A_\alpha]_t \neq \circ \text{ при } t \in t\,(2\alpha);$$

$$[a, A_\alpha]_t = \circ \text{ при } t \in t\,(2\alpha + 1),$$

т. е. на интервалах с нечетными номерами множества A_α не определены (в некоторых случаях удобнее считать неопределенными четные интервалы, что в общем не принципиально).

Опишем теперь динамическое множество A_t, заданное на множестве A с интервалом определения θ как множество всех множеств A_α, рассматриваемое в любой момент времени $t \in \theta$. При этом будем говорить, что множество A_α является сечением динамического множества A_t в момент времени $t \in \theta$; интервалы (отрезки) $t\,(2\alpha)$ назовем интервалами стационарности множества A_t, $t\,(2\alpha + 1)$ — интервалами неопределенности этого множества.

В дальнейшем исходное множество A, определенное на T/A, с использованием которого определяется динамическое множество A_t, будем называть базовым.

Если множество $t\,(\beta)$ с нечетными β является множеством меры нуль, будем говорить, что множество A_t определено на $\theta = T/A_t$ почти всегда.

Если динамическое множество определено почти всегда, то его состав может изменяться только мгновенно. Конечно, реально не существует динамических множеств, определенных почти всегда. Однако во многих задачах можно принять такую идеализацию, если интервал неопределенности достаточно мал (семантически неразличим), где понятие достаточно определяется из требований к точности описания. Можно рассмотреть другой крайний случай, когда множество интервалов стационарности образует множество меры нуль. Тогда A_t является неопределенным на любом конечном интервале времени. В этом случае будем говорить, что динамическое множество A_t является непрерывно меняющимся. Примером такого множества является множество положений движущегося тела.

3. Несколько Р-моделей

Для иллюстрации изложенного рассмотрим в качестве множества A совокупность всех клавиш фортепиано, которое существует время T/A. Это множество стационарно в течение промежутка T/A. В качестве динамического множества A_t выберем текущее множество всех клавиш, по которым ударяет исполнитель какого-то музыкального произведения; θ — время исполнения этого произведения. Интервалы стационарности $t\ (2\alpha)$ — это те промежутки времени, когда нажата одна или несколько клавиш (аккорд). Множество нажатых клавиш в заданном интервале стационарности является (сечением) A_α множества A_t. Интервалы неопределенности $t\ (2\alpha + 1)$ — это промежутки между интервалами стационарности. Что касается определения границ этих интервалов, то они могут быть выбраны, например, из условия: клавиша считается нажатой, если возникает соответствующий звук. При этом понятия «возникает» и «звук» считаются определенными и не анализируются.

Рассмотрим далее A — множество видов товаров, выпущенных за девятую пятилетку. Итак, T/A = 1971—1975; A_t — динамическое множество видов товаров со знаком качества в момент t. Интервалы стационарности и неопределенности множества A_t можно определить по-разному. Можно, например, принять следующее соглашение. Предположим, что все предприятия отчитываются перед вышестоящими органами, а те дают сведения в ЦСУ в конце года. Тогда можно считать, что A_t имеет интервал стационарности весь год, но в конце года «мгновенно» изменяется, увеличиваясь на множество видов товаров, получивших знак качества в течение года. Для органов, использующих только информацию ЦСУ, это именно так. Но, на самом деле множество A_t изменяется иначе, в частности, когда ЦСУ публикует свои сведения, оно уже может быть другим. Кроме того, A_t, конечно, не постоянно в течение года. Поэтому возможно и иное условие. Интервал неопределенности A_t — весь год.

Действительно, на уровне ЦСУ не известно в каждый момент t, каково множество A_t. Далее определяется A_t путем агрегирования соответствующей информации, например на конец года. Интервал стационарности здесь «мгновенный», потому что уже сразу в новом году множество A_t может стать другим, что неизвестно ЦСУ. Более того, сами отчетные сведения только приблизительно относятся к концу года, ибо пока происходило агрегирование соответствующей информации множество A_t, естественно, менялось. Для уменьшения этой неопределенности можно в начале года выдавать плановые задания до конца года. Однако только для уменьшения. Итак, «одно и то же» динамическое множество может определяться по-разному, в зависимости от имеющейся информации и целей определения. Важно, однако, что зачастую неопределенность может быть уменьшена, но не устранена. На самом деле неопределенность присуща любому динамическому множеству, ибо его состав не может изменяться мгновенно.

Рассмотрим теперь динамическое множество A_t положений тела, движущегося по замкнутой траектории. Тогда множеством A является множество точек этой траектории, T/A можно определить как время рассмотрения данного примера. Сечение A_α — подмножество точек траектории, определяемое размерами тела.

А как быть с интервалами стационарности и неопределенности? Вопрос приводит к хроническим трудностям, связанным с наиболее фундаментальными понятиями современной математики, особенно если перейти к материальной точке. Используя последнее определение предыдущего пункта, имеем, что динамическое множество положений движущегося тела является непрерывно меняющимся — неопределенным на каждом конечном интервале.

Прежде всего сталкиваемся с кажущимся противоречием: как может динамическое множество положений движущегося тела быть неопределенным, если, скажем, для детерминических движений мы можем точно сказать (в рамках классической механики), каково положение тела в любой заданный момент времени. Парадокс снимается, если заметить, что момент времени не является конечным интервалом, а, говоря о неопределенности, мы подчеркнули конечность интервала времени. В этом случае любое динамическое множество положений движущегося тела является неопределенным в рамках некоторых ограничений. Например, на вопрос, где находится движущееся тело на интервале времени (t_1, t_2), можно только указать соответствующий интервал координат (x_1, x_2), в пределах которого положение тела является неопределенным. Сформулируем теперь совершенно очевидное положение: наблюдаемы только конечные интервалы времени (и пространства). Поэтому любому движению свойственна принципиальная неопределенность, ограниченная возможностями нашего наблюдения. Она может быть сколь угодно уменьшена, но никогда не снята. И вот теперь пришло время обратиться к знаменитой апории Зенона «Стрела».

4. Существует ли в современной математике Н-модель движения?

«Апория «Стрела» состоит в том, что если время слагается из неделимых «теперь» и всякое тело всегда либо покоится, либо движется, то: так как в течение неделимого «теперь» тело не может двигаться (иначе «теперь» подразделилось бы на части, соответствующие различным положениям тела), то в каждом «теперь» оно должно покоиться. Поскольку же ничего кроме «теперь» во всем промежутке времени нет, то тело вообще не может двигаться» (Яновская [129]). В нашей терминологии в апории предполагается, что существует такой интервал времени «теперь», когда динамическое множество положений тела стационарно и никакой неопределенности нет (тело покоится). Этот интервал, однако, не может быть конечным, ибо непрерывное динамическое множество на любом конечном интервале по определению неопределенно. С другой стороны, наблюдаемы только конечные интервалы. Поэтому парадокс Зенона ненаблюдаем и не имеет Р-модели. Действительно, мы не наблюдаем летящую стрелу, которая покоится во всех точках траектории, а наблюдаем только летящую стрелу. Более того, мы совершенно уверены, что не сумеем наблюдать стрелу «в каждой точке» в принципе. Да, но в принципе, мы никогда не сможем наблюдать, скажем, иррациональное число в десятичной системе счисления, да и вообще большинство М-понятий и Н-моделей современной математики, прямо или косвенно связанных с понятием актуальной («сосчитанной») бесконечности. Здесь возможны различные взгляды на само понятие наблюдаемой и Р-модели. Будем толковать М-понятие «наблюдаемая» (система, явление) в ее обычном, интуитивном смысле, т. е. то, что можно в принципе воспринимать органами чувств непосредственно или с помощью (через посредство) любых приборов и устройств. Если принять такое условие, то можно считать, что актуальная бесконечность не имеет Р-модели и апория Зенона тоже. Р-модель имеет только движение или динамическое множество положений стрелы. Однако апория Зенона вводит принципиально ненаблюдаемые понятия, поэтому оказывается противоречивой Н-моделью, не имеющей Р-модели.

Но это значит, что современная математика не имеет общезначимых Н-моделей движения в рамках существующих метапонятий, таких Н-моделей, для которых бы существовали Р-модели. И апория (Н-модель) Зенона является одним из доказательств этого факта. «Ну, это уж чепуха,— скажет читатель,— а движение машин, спутников и т. д., разве это не Р-модели классической механики как Н-модели? А ведь она основывается на классических метапонятиях множества и актуальной бесконечности». Если к этому добавить, что и апория Зенона основывается на этих понятиях, и парадоксы теории множеств также используют эти понятия, то мы придем к единственно возможному выводу: противоречия иногда проявляются, а иногда нет. Едва ли это является доказательством того, что современная математика обладает общезначимыми Н-моделями движения. Ведь там, где парадоксов нет, они еще могут возникнуть.

5. Принцип преемственности

Но почему вообще возникли апории Зенона? Потому что «этот грек был идиотом» (П. Леви [130])? Похоже, что в этом случае пришлось бы отнести к отмеченному П. Леви классу большинство великих ученых, ибо «...пропасть между дискретным и непрерывным опять является слабым местом, вечной точкой наименьшего сопротивления и в то же время исключительной научной важности в математике, философии и даже физике» (Френкель, Бар-Хиллел [81]). Мы думаем, что эта «пропасть» свидетельствует о том, что «не все в порядке в королевстве» метапонятий математики. Именно метапонятий, ибо речь идет о первичных основах, фундаменте, который не могут заменить никакие сколь угодно эффектные надстроечные конструкции. Слабость фундамента, по нашему мнению, состоит, как это уже отмечалось, в том, что математика статична и время рассматривается только в лучшем случае как параметр при решении некоторых задач. И здесь мы согласны с другим высказыванием Поля Леви: «Почему воображать себе, что время остановит свой ход вследствие того, что некий философ занимается...» [130]. Мы специально оборвали цитату (дальше следовало «перечислением членов сходящегося ряда»), ибо очевидно, что время нельзя остановить, чем бы философ, математик или кто угодно не занимался.

Любые Н-модели, не учитывающие прямо или косвенно время, не могут иметь Р-моделей в принципе, ибо все существует в пространстве и во времени. А поскольку речь идет о любых Н-моделях, время в той или иной форме должно входить в число метапонятий современной математики.

Один из вариантов введения времени состоит в предлагаемой здесь замене метапонятия «множество» метапонятием «динамическое множество». Словосочетания «динамическое множество на интервале стационарности» можно рассматривать как синоним понятия «статическое множество» или просто «множество». И тогда ничего не надо менять в современной «статической» математике, которая оказывается частным случаем возможной будущей математики, основанной на метапонятии динамического множества. Такого рода преемственность существенна, ибо, например, интуиционистская математика Брауэра противопоставила себя классической математике. Но «...в качестве замены для классической математики интуиционистская математика оказалась менее мощной и во многих случаях более сложной» (Клини [30]).

Мы считаем, что отдельные блоки схемы, графа общей теории систем должны не насильственно отсекаться, а существовать как частные случаи более общих теорий (принцип преемственности) или постепенно отмирать, если они не выдерживают конкуренции. Но начать с революций в науке, начисто отрицающих все предыдущее, это значит начинать с нуля. Можно считать, что общая теория систем — наука — развивается и самоутверждается на основе эволюционного программно-целевого метода ЭПЦМ [32], при котором известна конечная цель науки—построение Н-моделей любых систем, но программа реализации этой цели изменяется по мере развития при соблюдении принципа ЭКА, обеспечивающего совместимость отдельных ее подпрограмм. И перестроить такую программу можно в основном только путем ее дополнения с последующей постепенной адаптацией или отмиранием оставшейся части. Попробуйте поменять что-либо в любой экономической или социальной программе после того, как она уже начала выполняться. А ведь за наукой и ее лидером — математикой как программой познания — тысячелетия.

Остается показать, что метапонятие «динамическое множество» лучше, чем «множество». Для этого либо нужно построить законченную теорию таких множеств и показать, что она более эффективна хотя бы в соответствии с ФАДЭП, либо проиллюстрировать эффективность нового метапонятия при устранении парадоксов, лежащих в основе современной математики. Апорию Зенона мы снимаем утверждением — положения летящей стрелы являются динамическим множеством. И если считать «динамическое множество» первичным метапонятием и не анализировать его на основе понятия «множество», то противоречия как-будто нет. Но полного удовлетворения мы, конечно, не испытываем прежде всего потому, что обойти понятие актуальной бесконечности простой ссылкой на то, что она не имеет Р-модели, похоже, нельзя. По сути это уже делал Брауэр. Неопределенность непрерывно меняющегося динамического множества на любом конечном интервале интуитивно приемлема и явно имеет Р-модель, но почему бы не перейти к пределу (в смысле современной математики), а если не переходить, то как обеспечить принцип преемственности? Ведь отказываясь от этого понятия, мы отказываемся практически от всей современной математики и следуем революционным принципам Брауэра, а не эволюционному программно-целевому методу.

6. Зачем нужна бесконечность?

Прежде всего объясним, почему мы работаем в U-языке. Здесь просто нет иного выхода, ибо мы обсуждаем основные экзогенные М-понятия любой теории, а значит, абсолютные метапонятия, которые только в U-языке и можно обсуждать.

Итак, почему понадобилось создавать актуальную бесконечность и много ли у нее защитников? Оказывается, защитников немного, во всяком случае среди крупнейших математиков. Будем в основном апеллировать к авторитетам [30].

«Я возражаю... против употребления бесконечной величины, как чего-либо завершенного, что никогда не позволительно в математике» (Гаусс). «Мы никогда не будем рассматривать бесконечный класс, как завершенное целое» (Клини). «Классическая логика была абстрагирована от математики конечных множеств и их подмножеств... Забывая об этом ограниченном происхождении, впоследствии эту логику приняли ошибочно за нечто высшее и первичное по отношению ко всей математике и в конце концов стали применять ее без какого-либо оправдания к математике бесконечных множеств» (Вейль, излагая взгляды Брауэра). «Ситуация оказывается сходной во всех случаях, когда имеется вера в возможность непосредственного узрения (актуальной) бесконечности как данной посредством опыта или восприятия... Более подробное исследование показывает затем, что бесконечность на самом деле вовсе не была нам дана, а была только интерполирована или экстраполирована посредством некоторого интеллектуального процесса» (Гильберт и Бернайс).

Итак, как будто бы ясно, что «...какие бы опыты и наблюдения и какую бы отрасль науки мы не рассматривали, нигде в действительности мы не находим бесконечности» (Гильберт [143]), т. е. у бесконечности нет Р-модели. И тем не менее, приходится констатировать, что в математике от бесконечности очень трудно избавиться. С чем это связано? Во-первых, с тем, что бесконечность формально удобна. И, во-вторых, потому что «...к математическим истинам уместно предъявлять требования сохранности: установленная в данный момент истина должна оставаться таковой завтра, послезавтра и т. д.» (Марков [39]). Так, сумма ряда

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2^n}=2\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right] \qquad (2)$$

становится при $n \to \infty$, во-первых, очень простой (равной двум), а, во-вторых, «абсолютной» в том смысле, что «бесконечность всегда бесконечность». Что касается требований к математическим истинам, то они уместны, если реалистичны. Как раз в этом имеются серьезные сомнения, к которым мы вернемся ниже. А вот удобство — это явно «вечная», хотя и не математическая категория, с которой нельзя не считаться.

Как же быть с бесконечностью?

Мы далеки от того, чтобы предложить какое-то окончательное «вечное» решение, отдавая себе отчет, насколько фундаментальна обсуждаемая проблема. Дело в том, что начинать убеждать математиков в преимуществах любой другой теории можно, только построив ее во всех деталях, ибо здание современной математики — это все-таки лучшее, что создано человеком. Оно настолько совершенно, что не так-то просто доказать, что даже половица в другом здании лучше и ее следовало бы заменить. А что уже говорить о фундаменте! Построить же какое-то другое здание, пусть на более прочной основе, не так просто. Поэтому нам кажутся не очень оправданными затраты интеллектуальных ресурсов на новое капитальное строительство. Скорее всего здание будет пустовать при всех условиях, даже если бы его и удалось полностью построить, что совершенно нереалистично. Остается постепенно эволюционно перестраивать все здания классической математики, причем так, чтобы эту перестройку делали сами математики.

Однако читатель может возразить, что и фундамент здания ведь непрочный. А какой смысл заниматься перестройкой, если все здание может рухнуть, тем более, что трещины в фундаменте в виде парадоксов уже налицо? Остается единственный выход — заменить фундамент, не трогая здания. Это «новаторство» в строительстве кажется настолько «легкомысленным», что обсуждать его нужно на том же уровне, хотя бы для того, чтобы не затемнять основную идею второстепенными деталями.

7. Р-модель конечной бесконечности

«Бесконечность» обычно рассматривается как некоторое экзогенное понятие высшего уровня абстракции по отношению к любой теории: и той, которая есть, и той, которая в принципе может существовать, т. е. «бесконечность» — это абсолютное метапонятие. Но что мешает нам считать бесконечность конечной, настолько большой, насколько это нам надо? Объясним это на Р-модели (2). При достаточно большом n сумма ряда будет как угодно близка к 2. Наверняка всегда найдется такое n, которое нас устроит при вычислении этой суммы. Обозначим его символом ∞. А дальше все, как обычно, с той только разницей, что бесконечность конечна, хотя ее «величина» может нам и не быть известной. Она такая, какая необходима для того, чтобы все было, как при «настоящей» бесконечности. «А мораль отсюда такова: думай о смысле, а слова придут сами» [26]. При таком подходе и удобство остается, и абсолютность сохраняется. Более того, похоже, что ничего в математике менять не надо, даже обозначения, в отличие от интуиционистского подхода Брауэра, из-за чего он и не оказался общепринятым. Может это не совсем так? Как, например, быть с понятием мощности (кардинальных чисел) множеств? Ведь, к примеру, множества $1, 2, \dots, n, \dots$ и $2, 4, \dots, 2n, \dots$ считаются множествами одной мощности, а «количество элементов» у них различно. Если уже есть необходимость сохранить и эти понятия, никто не мешает считать ∞ настолько «большой», что «число элементов» в этих двух множествах неразличимо велико в рамках нашего представления о величине. Можно возразить, что «на самом деле» оно все-таки разное. Но «на самом деле» — это некоторое экзогенное метапонятие, лежащее вне нашего опыта. А почему бы не попытаться изучить и его? Тогда мы придем к «парадоксальным» выводам. Например, к таким, что «на самом деле», т. е. при определенных экзогенных условиях, которые удобны ввиду их экзогенности, назвать «вынуждающими условиями» [51], существуют множества, мощность («на самом деле» — число элементов) которых промежуточна между мощностью счетных множеств и мощностью множества всех подмножеств счетных множеств (континуальной мощностью). «На самом деле» этот «парадокс» является одним из результатов «замечательного открытия» [51] П. Дж. Коэна.

Рассмотрим категорию, объектами которой будут различные последовательности целых чисел, являющиеся, очевидно, линейными диаграммами, а морфизмами — всевозможные отображения этих последовательностей друг в друга (β-категория). Обозначим последовательность всех (в смысле потенциальной бесконечности) целых чисел символом b. Тогда b — треугольная подкатегория категории морфизмов $\mathrm{Ar}\beta$ — β/b [35] содержит только инъективные морфизмы в b. Если b — Р-модель, то и все «подобъекты» $a \in \mathrm{Ob}\beta/b$, очевидно, Р-модели.

8. Разные «принципы» и квантор становления

Несколько перефразируя А. Пуанкаре, можно считать, что любая абстракция — это искусство называть разные вещи одним и тем же именем. Так переходят от моделей городов, шляп и т. д. к моделям просто, от знаков препинания, остановки и т. д. к знакам вообще. Впрочем, это лучше всего сказано у Л. Кэролла:

«— Множество чего? — спросила Алиса.— Ничего,— отвечала Соня.— Просто множество» [26].

При этом в связи со стремлением к обобщениям мы можем потерять чувство реальности в том смысле, что при этом переходе начнем заниматься такой абстракцией, которая не имеет Р-модели. Не удивительно, что рано или поздно мы можем прийти к противоречию, т. е. к такой Н-модели, которая не имеет Р-модели. Примером является понятие актуальной бесконечности, оно явно не имеет Р-модели по авторитетным мнениям, приведенным выше. Отсюда возможны и трудности, связанные с парадоксами. Поэтому мы выдвинем принцип: в абстрактной теории систем любая Н-модель всегда должна иметь Р-модель. Назовем его для разнообразия «принципом рая» в соответствии с требованием «рай сегодня». Тогда на основе Р-модели конечной бесконечности можем рассматривать бесконечности разных порядков, но во всех случаях у нас будет абсолютная модель всех этих бесконечностей — множество целых чисел, подобъектами которого будут все эти бесконечности. «Принцип рая» также явно соблюдается на каждом этапе абстракции, ибо любые бесконечности соответствуют достаточно большим (настолько, насколько нам это надо) конечным отрезкам этого ряда. Но тогда одни и те же величины могут быть одинаковыми или нет в зависимости от того, на каком уровне абстракции они рассматриваются. По отношению к данному уровню все экзогенные М-понятия высших уровней являются метапонятиями и на данном уровне абстракции не анализируются. Однако при переходе к высшему уровню происходит «расслоение» этих метапонятий на эндогенные данного уровня и метапонятия высших уровней.

Можно ли представить себе совершенно замкнутую Н-модель, все понятия которой эндогенны. Ясно, что нет, ибо с помощью чего определять все? Это положение отметим как принцип «незамкнутости»: любая Н-модель содержит экзогенные М-понятия (т. е. является незамкнутой). Это, по-видимому, соответствует «объективному» принципу — любая система не замкнута. Поэтому, если мы хотим говорить о всех каких-то объектах, то должны оговаривать, имеем ли в виду все объекты данного уровня или все объекты всех уровней. В первом случае мы вправе использовать относительный квантор общности (см. гл. I, § 7), во втором в связи с принципиальной незамкнутостью любых теорий можно только говорить о некоем «кванторе становления» $-\!\!\!\forall\!\!\!-$, индексирующем потенциальную, а не актуальную счетную бесконечность.

Можно ли теперь обойти парадоксы? Некоторые да. Так, в парадоксе Рассела явно используется квантор становления (а не общности) и одно из решений парадокса очевидно: сколько бы мы не рассматривали множеств, все все равно не рассмотрим и речь идет только о потенциальной осуществимости, т. е. понятие множество всех множеств (вообще всех) имеет только динамическую Р-модель. Наглядно это можно представить себе при рассмотрении другого (адаптированного) вида парадокса Рассела: «парикмахер в деревне бреет всех тех, кто не бреет сам себя. Кто бреет парикмахера?» Кто-то из другой деревни. Но ведь мы можем расширить область определения тех, кто не бреет сам себя, до двух деревень и т. д. В результате получим все расширяющееся множество не бреющих самих себя. Здесь также явно используется квантор становления. А если мы вообще включим всех людей в сферу, обслуживаемую парикмахером? Кто же будет брить парикмахера? Итак, мы пришли к поистине странному положению: при потенциально бесконечном числе объектов парадокса можно избежать, расширяя область определения с помощью квантора становления, реализующего динамическую Р-модель. А при конечной области парадокс остается? Чтобы еще больше оттенить трудности в конечной области, рассмотрим другой парадокс: «Я лжец». Правда это или нет? Здесь в общем налицо только один объект «я». Причем если правда то, что я лжец, то я говорю правду, а значит, я не лжец, а если я говорю неправду, значит я говорю правду. Что же в этом случае — отсутствует Р-модель или нет Н-модели?

Так что кажется правдоподобным так сказать парадокс [2] — бесконечность неповинна в парадоксах. Как тут быть? Поможет ли нам квантор становления, ведь бесконечность вроде бы и ни при чем.

9. Динамическая математика

Выше мы построили Н-модель динамического множества конструктивно, используя независимые метапонятия времени и множества. Теперь предлагаем сместить акценты и считать первичными метапонятиями динамическое множество и время. Понятие стационарного множества является в этом случае производным, частным случаем множества динамического, рассматриваемого на каком-либо интервале стационарности. Во-первых, такой шаг удовлетворяет «принципу рая», ибо понятие «множество» не имеет Р-модели, так как все реально существующие множества — динамические. Даже «идеальное» определение какого-либо множества предполагает (как это уже отмечалось в § 1) задание интервала (отрезка) определения. Таким образом, Р-модель имеется только у динамического множества. А «конечная бесконечность» исключает «принципиальную ненаблюдаемость» этих Р-моделей и позволяет нам (и компьютерам) работать в рамках чистой интуиции, к чему мы и стремимся.

Но тогда чем отличается наша точка зрения от точки зрения интуиционистов или современных конструктивистов (см., например, Гудстейн [79], Кушнер [131])? В этом стремлении, по сути, ничем. Мы полностью разделяем также «...желание получать такие теории,.., которые проясняют, как можно отчетливее, «источники и границы работоспособности» исходных теорий классической математики (и в этом смысле как можно полнее «демистифицируют» исходные теории) при помощи как можно более «осязаемых» математических и логических понятий» (Шанин, вступительная статья к [79]).

Более того, в конструктивной математике несомненно уже имеются такие понятия. И тем не менее мы считаем, что современная конструктивная «математика» «недостаточно конструктивна». Во-первых, потому, что она не сумела построить мост, который бы позволил спасти все то в классической математике, от чего не без основания не желает отказываться большинство математиков. Ведь сейчас «переосмысливание какой-либо уже сложившейся математической теории на конструктивной основе является в общем сложной задачей... По существу, приходится строить новую теорию с резко выраженной спецификой...» (Шанин [79]), т. е. современная конструктивная математика, по сути, отбрасывает классическую математику и в этом смысле она оказывается чересчур революционной. Во-вторых, и это главное, она, разрушая надстройку, частично сохраняет базис метапонятий и основные методологические иллюзии классической математики, в частности, на вечность математических истин (см. высказывание Маркова, цитируемое в § 1). И в этом смысле она чересчур консервативна. Это можно проиллюстрировать на отношении интуиционистской и конструктивной математики к закону исключенного третьего. Отвергая его, они тем самым его принимают. «Ясно, что... закон исключенного третьего не может быть принят» (Кушнер [131]). Именно эта категоричность (или может или не может), вытекающая из иллюзии «вечности» математических истин, формально и означает принятие этого закона и принципиальной статичности классической математики, т. е. налицо еще один парадокс «исключенного третьего» — однозначно отрицая этот закон, мы тем самым разделяем его. На самом деле существует гораздо более «конструктивная» возможность: иногда закон исключенного третьего верен, а иногда мы этого не можем доказать. Значит, налицо неопределенность, откуда никак не следует, что закон ложен. Это соответствует как обычному жизненному опыту, так и опыту современной математики. Достаточно сослаться на знаменитую теорему Геделя о неполноте. «Она утверждает, грубо говоря, что в любой формальной системе, которая непротиворечива и достаточно богата,... можно конструктивно найти элементарное утверждение, которое не является ни доказуемым, ни формально опровержимым» (Карри [13]).

Это утверждение или его отрицание можно принять в виде дополнительной аксиомы и все начнется сначала. Наиболее ярким примером такой ситуации является, как нам кажется, история с пятым постулатом, который и не следовал из четырех и не противоречил им. В зависимости от того, считать ли аксиомой его или его отрицание, получим эвклидову или неэвклидову геометрию. По-видимому, аналогичный характер носит результат Коэна о независимости континуум-гипотезы и аксиомы выбора в аксиоматике (Цермело — Френкеля) теории множеств [51]. «Главное в рассуждении Геделя — замена слова *ложное* на слово *недоказуемое*» (Линдон [19]).

Итак, неопределенность и динамичность порождались самой математикой, не говоря уже о том, что они, являясь одними из самых первичных метапонятий нашей интуиции, уже давно стучались в ее дверь. Но их не пустили ни Брауэр, ни Гильберт. «Поиск абсолютной надежности был, очевидно, основной мотивировкой для концепций Брауэра и Гильберта» (Карри [13]). К сожалению, современные конструктивисты в основном разделяют эту мотивировку. Поэтому не удивительно, что «... хотя интуитивная ясность и является, согласно позиции интуиционистов, главным и единственным критерием математической истинности, именно этому критерию, по мнению многих математиков, часто не удовлетворяли как философские посылки, так и конкретные математические теории интуиционистов. Что касается построения конструктивной логики, то эта чрезвычайно сложная проблема до сих пор не решена...» [131]. Как, впрочем, и апории, и парадоксы. Похоже, что интуиционизм не интуитивен, а конструктивизм — не конструктивен. Добавим к этому, что большинство математиков, особенно в приложениях, предпочитает неконструктивную математику, которая, следовательно, более эффективна, но противоречива. Итак, плата за иллюзию вечности математических истин в рамках статических метапонятий слишком высока. Введение метапонятий «динамическое множество» и «время» в качестве первичных и переселение «неопределенности» с периферии в центр позволяет говорить о динамической математике, которую еще предстоит построить.

Прежде чем переходить от декларации к действиям, приведем решающий довод в пользу смены метапонятий — снимем парадоксы. При этом мы умышленно попытаемся обойтись минимумом средств, чтобы не затемнять существо дела — ведь речь идет о первичных метапонятиях. Все, что нам понадобится, — это интуитивно очевидное понятие периодического динамического множества.

Пусть на первом интервале стационарности фотография (сечение) динамического множества A_t состоит из одного элемента «и», затем идет интервал неопределенности, после чего на втором интервале стационарности фотография состоит также из одного элемента «л». После следующего интервала неопределенности фотографии снова следует «и» и т. д. Р-моделью такого динамического множества может служить, например, проекция на киноэкран части вращающегося диска, предварительно разделенного на два не обязательно равных сектора цвета «индиго» («и») и «лимона» («л»). Возможно, более наглядной Р-моделью является динамическсе множество положений кузнечика, прыгающего с одной половины плоскости на другую и обратно. Нахождение его в левой полуплоскости индексируется буквой «и», а в правой — «л». Пока он находится в полете, положение его не определено. Естественно, оно не определено и до начала прыжков и после того, как нам надоест за ним наблюдать (или ему прыгать). Конечно, можно было бы обойтись и без экзотических примеров, ибо периодические динамические множества буквально окружают нас. В математике они также используются, если допускается их факторизация на абсолютные шкалы и они всюду определены (теория Фурье, например). Классическая механика, послушно следовавшая «заветам Галлилея» (см. гл. II, § 2) и научившаяся снимать неопределенность в периодическом множестве положений планет с фантастической точностью, по сути не имеет математических средств описания простейшей ситуации — «солнце всходит и заходит».

Итак, периодическое динамическое множество, несмотря на обилие Р-моделей, не имеет в общем нечисловом случае Н-моделей в современной математике, находясь по существу на ее периферии. В динамической математике оно находится в центре метапонятий в полном соответствии с нашей интуицией. И тогда парадоксы снимаются одной фразой — их множество истинности является периодическим динамическим множеством. Если «я лгу» — истинно (кузнечик в левой полуплоскости — «и»), то оно ложно (кузнечик перепрыгнул в правую полуплоскость «л»). Можно сокращать интервалы пребывания кузнечика в «и» и «л», но нельзя свести их к нулю, ибо мы отказались от актуальной бесконечности. Впрочем, если заставить кузнечика прыгать как угодно быстро, предел не будет, по-видимому, существовать даже в классическом его понимании и мы просто придем к «чудовищам» (в представлении классиков) типа непрерывной периодической кривой, не имеющей касательной. Так что противоречия все равно не будет. Важно другое — построить Р-модель реальнейшей ситуации «я лгу» с использованием метапонятия «множество» невозможно. Давайте представим, что будет «на самом деле», если вы заявите «я лгу» компьютеру. Его мысли потекут в такой последовательности: «если это «и», то это «л», если это «л», то это «и», если и т. д.». Здесь важно, что они «потекут» и только такая Р-модель возможна.

Итак, понятие статического множества бессильно, ибо высказывание «я лгу» оказывается в статической математике *одновременно* и истинным, и ложным. «Динамическое множество», частным случаем которого является «периодическое динамическое множество», действительно является *первичным* метапонятием математики. Совершенно аналогично можно снять и парадокс Рассела. Причем любопытно, что при его формулировке мы можем даже использовать классический неограниченный квантор общности $\forall$(«все»), т. е. понимать «множество всех множеств...» в классическом смысле. Нам вообще не важно, о чем идет речь, ибо о чем бы она не шла, множество истинности всегда динамично (иногда, в частности, периодично), ибо никаких других множеств никогда не существовало и не может существовать даже в нашем воображении.

10. Конец бесконечности!

Кажется правдоподобным, что сменить метапонятия можно, оставляя всю статическую математику на интервале стационарности. Тогда ничего менять не надо и налицо чистая эволюция. Парадоксы, конечно, придется снимать новыми метапонятиями, но все уже достигнутое остается без изменений, если договориться вместо нескольких слов «динамическое множество на интервале стационарности» использовать просто слово «множество» и прибегать к «динамическому множеству» в крайних случаях. Такой подход, видимо, возможен, особенно с учетом очень изящной «динамизации» классической и вообще любой статической математики с помощью теории схем (см. ниже).

Однако закрыть глаза на актуальную бесконечность все-таки не хочется хотя бы из принципиальных соображений — у нее нет Р-модели. Кроме того, апория Зенона лучше снимается в рамках динамического множества с интервалами неопределенности, являющимися достаточно (потенциально), а не бесконечно (актуально) малыми. Да и снимается ли она вообще в противоположном случае? Но отказаться от всей классической математики и пойти по революционному пути аналогично интуиционистам и конструктивистам тоже страшно. Попробуем все-таки на основе соображений п. 7 построить такую схему, при которой актуальная бесконечность уйдет сама за ненадобностью, а не погибнет в результате Пирровой победы конструктивистов. Прежде всего используя классические соображения, покажем, что это возможно в принципе. Известна теорема Левенгейма — Скулема (в классической математике): «Если $\mathcal{T}$ — счетная теория, имеющая модель, то $\mathcal{T}$ имеет конечную или счетную модель» [135].

Мы никогда реально не будем иметь дело с теорией, в которой число символов, отношений и постоянных было бы несчетным. Более того, оно всегда будет конечным. Но тогда из теоремы Левенгейма — Скулема следует, что для любых выводов и построений теории мы всегда можем иметь Р-модель M в счетной области и рассмотрение других областей ничего нового не даст. «Позвольте,— скажет читатель,— а если я хочу моделировать несчетность?» Это возможно в рамках счетных моделей. Дело здесь в том, «... что утверждение о несчетности какого-либо множества означает лишь несуществование взаимно однозначного отображения этого множества на множество всех целых чисел. «Несчетное» множество в M содержит в действительности только счетное количество элементов из M, но в M не существует никакого взаимно однозначного отображения этого множества на множество всех целых чисел» (Коэн [51]). Теорема станет еще более понятной, если отметить, что, например, для человека, который не умеет считать, любое (конечное) множество несчетно, ибо в рамках его Н-моделей «не существует никакого...» Так что при желании несчетность можно промоделировать и на конечном множестве, что, кстати, вполне соответствует нашей интуиции. А как же с несчетностью действительных чисел, ведь она же существует «на самом деле»?

«Мы, наверняка, можем формализовать достаточно большую часть математики в счетной теории, чтобы доказать, что множество действительных чисел несчетно. Как же может такая теория иметь счетную модель? Объясним это. Множество действительных чисел в модели на самом деле счетно, значит, существует биективное отображение этого множества в множество натуральных чисел. Но это отображение не находится в этой модели; поэтому теорема теории, утверждающая, что не существует биективного отображения множества действительных чисел в множество натуральных чисел, не опровергается» (Шенфилд [135]).

Мы привели эту мысль, чтобы еще раз подчеркнуть, что понятие «на самом деле» существует всегда в рамках каких-то моделей. Поэтому у Шенфилда множество действительных чисел «на самом деле счетно» в одной модели и «на самом деле несчетно» — в другой. Теорема Левенгейма — Скулема, по нашему мнению, имеет здесь решающее значение не столько потому, что корректно подтверждает интуитивно очевидную истину относительности «на самом деле», сколько потому, что доказала, что понятие несчетной бесконечности по сути ничего нового дать не может. А отсюда уже кажутся правдоподобными и конечная бесконечность, и конец актуальной бесконечности.

11. Семантическое и синтаксическое следование

Допустим, что все изложенное правдоподобно, но как превратить возможность в действительность? И здесь нам на помощь приходит классическая математика, которую конструктивистам еще рано пускать в расход. Пусть p и q — некоторые Н-модели. Если все Р-модели p являются и Р-моделями q, то будем говорить, что между p и q установлено отношение семантического следования $p \models q$. При $(p \models q) \wedge (q \models p)$ p и q будем называть семантически эквивалентными $p \mid = \mid q$.

Это по сути обычное классическое определение семантической эквивалентности (конечно, оно делается без использования понятия Р и Н-моделей, а на основе понятия интерпретации [19], что пока не существенно). Мы немного изменим определение семантического следования, заменив квантор общности «все» относительным квантором общности (см. гл. I, § 7). Содержательно это означает, что мы будем говорить «все при некоторых условиях», поскольку понятие просто «все», по нашему мнению, беспредметно и не имеет Р-модели. «Условия» мы будем обозначать некоторым предикатом Q с различными индексами, а относительный квантор, как обычно (см. гл. I, § 7), опуская только индексацию переменных, поскольку здесь «размерность» «множества истинности условий» — арность предиката Q, да и вид этого предиката не существенен, а важно только его существование. Тогда вполне возможно, что $(\forall \ldots Q_1)\quad (p \models q)$, но $(\forall \ldots Q_2)\ (p \not\models q)$, т. е. семантическое следование (и семантическая эквивалентность) является относительной — при одних условиях некоторые Н-модели можно считать семантически эквивалентными, при других— нет. Так, $e^{-0,1} \mid=\mid 1 - 0,1)$ при условии, что расчеты ведутся с точностью до 0,01.

Можно ввести также понятие синтаксического следования Н-моделей в рамках той или иной теории $\mathcal{T}$. Н-модель q синтаксически следует из Н-модели p в теории $\mathcal{T}$ $(p \mid_{\overline{\mathcal{T}}}\, q)$, если существует «формальный» вывод q из p средствами $\mathcal{T}$. Здесь «относительность» — зависимость от теории очевидна и сразу включается в определение. Аналогично предыдущему определяется синтаксическая эквивалентность.

Пример. $1 \mid\!-\!\mid 4$ в «теории» $\mathcal{T}_1$ вычетов по модулю 3, но, конечно, $1 \not\dashv\vdash 4$ в обычной теории чисел $\mathcal{T}_2$. Интуитивно идеальная теория $\mathcal{T}$ должна была бы удовлетворять условию $p \mid_{\overline{\mathcal{T}}}\, q \leftrightarrow (\forall \ldots Q_i)\quad (p \models q)$ для «любых» Q_i. Такой теорией является логика предикатов, для которой в рамках принятых в классической математике метапонятий можно доказать теорему адекватности: «$p \vdash q$ равносильно $p \models q$ для произвольного множества p формул и любой формулы q [19]. Отметим, что эту теорему «... называют обычно теоремой Геделя о полноте; поскольку, однако, мы пользуемся термином «полнота» в другом смысле, мы будем называть это предложение теоремой адекватности» (Линдон [19]).

12. «Прагматическая математика»

Цитата из [19] — лишнее свидетельство того, что в классической математике также не всегда существует одинаковое, общезначимое понимание одних и тех же (даже фундаментальных) терминов. Это и понятно, ибо «убеждение в непротиворечивости сколько-либо сложных математических теорий базируется в конечном счете на интуиции и опыте» [19]. А ведь любой термин — это только ярлык, индексирующий очень сложную Н-модель (теорию) (см. гл. I).

Хотим мы того или нет — от интуиции и опыта не избавиться. Но, может быть, в связи с этим и незачем было бы доказывать теорему адекватности, ибо она просто означает, что логическое мышление — это правильное мышление, и не мыслить логически — это значит не мыслить вообще. Собственно, здесь просто нет другого выхода.

Итак, интуиции не избежать. Но, с другой стороны, используя инициальные M-понятия (см. § 6, гл. I) и общезначимые связи между ними, мы не выйдем за рамки общезначимых Н-моделей. Однако, возможно, их удастся построить и использовать значительно проще.

Пуританство классической математики, стремящейся всегда оперировать с минимальным числом метапонятий и получать вневременные истины «в последней инстанции» (а это все равно невозможно), приводит к тому, что сама математика становится только потенциально общезначимой и, что более существенно, это пуританство оказывается, зачастую, только кажущимся.

Здесь уместно уточнить понятие общезначимости. Наша трактовка (см. гл. I) может показаться, по меньшей мере, нестрогой, а то и просто неверной по сравнению с классической.

«Если $\varnothing \models q$, т. е. если $\varphi q = 1$ для любой интерпретации φ, то мы будем писать просто $\models q$ и говорить, что q общезначима или тождественно истинна» (Линдон [19]). Но что значит для любой интерпретации, ведь далеко не всегда она «строгая функция». Да и так ли уж однозначно определена интерпретация даже как функция, если в основе ее определения лежат понятия истины и лжи, которые «незачем, да это было бы и затруднительно, разъяснять» [19]. Что касается «незачем», то это может вызвать сомнения, а вот «затруднительно» — это точно.

Мы далеки от того, чтобы призывать к превращению математики в нечто напоминающее современную экономику в связи с обилием и необщезначимостью экзогенных и даже эндогенных M-понятий. Однако нам кажется, что, по-видимому, существуют гораздо больше инициальных M-понятий, чем их используется в современной математике, и чрезмерная воздержанность и консервативность, связанные со стремлением к иллюзорным вечным истинам, делает математику практически необозримой и необщезначимой даже для математиков, тем более, что инициальные M-понятия (а, зачастую, не только они) все равно в математику проникают.

По сути классическая математика рассчитана не столько на людей, сколько на первые компьютеры, «метапонятия» которых не выходят за рамки множества конструктивно реализуемых команд. Более того, кажется правдоподобным, что классическая математика постепенно отстает от динамической системы методов и приемов, «существенно облегчающих составление и отладку программ и позволяющих их автоматизировать» [18].

В «копилке знаний» [18] этой системы возникают все более крупные блоки, индексируемые своими М-понятиями, поэтому есть подозрения, что классическая математика окажется в конце концов не общезначимой даже для роботов. Конечно, здесь умышленно сгущены краски и математика, обогатившись новыми мощными метапонятиями, такими как «алгоритм», «вычислимость» и т. д., и развивается, и полезна. Однако вот мнение одного из ведущих современных математиков Ван Хао о важнейшем разделе математики — математической логике: «... в настоящее время математическая логика находится в безликой и отчужденной форме и поэтому изучение ее не является необходимым» [134]. Поэтому нам кажется вполне уместным высказывание Карри о пределах формализации: «Используя формалистскую концепцию для объяснения того, что представляет собой теория, мы принимаем теорию, коль скоро она полезна, удовлетворяет некоторым условиям естественности и простоты, разумным для своего времени, и коль скоро известно, что эта теория не введет нас в заблуждение... Теорема Геделя утверждает, что это все, что мы можем сделать; эмпирическая философия науки утверждает, что все это, что мы должны сделать» [13]. Таким образом, стремление к строгости не должно вступать в конфликт с общезначимостью и прагматизмом, что возможно при более свободном использовании интуитивных метапонятий, имеющих инициальный характер. А таковыми являются не только «квазивечные» понятия, но и многие другие, возможно, имеющие и более короткий «интервал общезначимости», но могущие принести большую пользу за время своего существования.

При этом лучше думать не столько о том, как доказать, что только твоя концепция истинна и полезна, сколько о мостах, которые помогут взаимопониманию. «Более того, поскольку оценка полезности теории зависит от ее назначения, можно для различных целей принимать по-разному построенные теории, так что интуиниционистская и классическая математика могут сосуществовать» (Карри [13]). Возможно, мост между ними удастся построить в рамках динамической математики, а возможно, для этого придется ввести новые или дополнительные инициальные метапонятия, кроме «времени» и «динамического множества». Похоже, что такая математика будет более динамична и общезначима (действительно, а не потенциально), более «конструктивна» и «интуитивно» приемлема. Назовем ее прагматической математикой.

13. Н-модели неразличимости

Одним из самых важных интуитивных понятий является понятие неразличимости. Совершенно очевидна относительность неразличимости. Мы не различаем, например, два предмета при одних условиях (большое расстояние, отсутствие бинокля или микроскопа) и различаем при других. Важно, что неразличимость явным образом связана с понятием наблюдаемости. Можно было бы описать неразличимость как ненаблюдаемость некоторой классификации, но, видимо, это понятие и так достаточно общезначимо. Различать в любом эксперименте можно только конечное число объектов.

Значит, если мы хотим, чтобы наши теории имели Р-модели («принцип рая»), следует всегда их уметь адаптировать к этому случаю. Поэтому в любой формальной теории $\mathcal{T}$, удовлетворяющей «принципу рая», должны быть некоторые возможности такой адаптации. Можно это выразить и иначе. Неразличимость означает, что некоторые «разные» объекты и/или явления могут считаться в том или ином (семантическом) смысле эквивалентными. Следовательно, формально $\mathcal{T}$ должна допускать факторизацию по семантической эквивалентности $p \mathrel{|{=}|} q$. Рассматривая $\mathcal{T}$ как некоторую алгебру формул F, можно определить факторизацию по эквивалентности в обычном алгебраическом понимании (см. гл. I, § 7).

«Фактор алгебру $[F]$ алгебры F по отношению $p \mathrel{|{=}|} q$ называют алгеброй Линденбаума» [19]. Таким образом, в классической математике явно предусматривалась возможность огрубления моделей по мере появления (семантической) неразличимости объектов и/или явлений. Очень удобным конструктивным приемом такого огрубления является операция классической математики «по модулю». Интуитивно ее суть очень проста и явно общезначима. Что-то α мы считаем неразличимым с чем-то β, т. е. различием между α и β можно пренебречь в данных условиях и в данном смысле. Тогда все наши модели, в которых встречаются α и β или их образы, нужно соответственно изменить с учетом этого факта, т. е. $\alpha \mid=\mid \beta$ и мы должны построить для данной (данных) Н-модели алгебру Линденбаума по данной эквивалентности. Самое существенное состоит здесь в том, что «на самом деле», т. е. в рамках других моделей, которые мы считаем более истинными, чем данные, α и β могут быть различными и мы даже можем об этом знать. Однако нам удобнее в том или ином смысле считать $\alpha \mid=\mid \beta$ для данного класса Н-моделей, или у нас просто нет иного выхода. Пример: какова длина одного километра на Луне? Конечно, «на самом деле» километр — это километр и на Луне и где угодно. Но когда мы смотрим на Луну и в нашем сознании возникает ее Н-модель, то километр на Луне представляется точкой, не имеющей размеров, т. е. имеет меру нуль. Н-модель Луны в нашем сознании является алгеброй Линденбаума по семантической эквивалентности, определяемой разрешающей способностью нашего зрения.

Более «конструктивно» факторизация по неразличимости может быть, видимо, определена следующим образом. Пусть имеются две системы

$$S_1 = (X, \Omega^{(1)}) \text{ и } S_2 = (Y, \Omega^{(2)})$$

и дано инъективное отображение $f : X \to Y$.

Если для $P \in \Omega_n^{(1)}$ и любых $x_1^i, x_2^i, \ldots, x_n^i \in X$ и $z_1^i, z_2^i, \ldots, z_n^i \in X$ $(i = 1 \ldots m)$ таких, что $x_1^i x_2^i \ldots x_n^i P$ и $z_1^i z_2^i \ldots z_n^i P$,

$$S_2 \models [(x_1^1 f), \ldots, (x_m^1 f), \ldots, (x_1^m f), \ldots, (x_n^m f)]\, F \leftrightarrow$$
$$\leftrightarrow [(z_1^1 f), \ldots, (z_n^1 f), \ldots, (z_1^m f), \ldots, (z_n^m f)]\, F, \qquad (3)$$

где [ ] F — формула сигнатуры $\Omega^{(2)}$, то элементы множества X назовем PF — неразличимыми в S_2.

Если F — любая формула сигнатуры $\Omega^{(2)}$, то будем просто говорить о P-неразличимости. Содержательно это означает, что если некоторое подмножество $X \times X \times \ldots$ $\ldots \times X$ удовлетворяет предикату P, то оно семантически неразличимо в рамках сигнатуры системы S_2. В частном случае $P = <$ получим «упорядочено неразличимые множества» (Сакс [132]).

Другой пример. P — унарный предикат, принадлежности к некоторому множеству $X_1 \subset X$. Тогда естественно говорить о семантически неразличимых в S_2 элементах $x \in X_1$ и множестве X_1 в целом (ср. [132]). Для бинарных отношений можно определить понятие неразличимости при несколько иных условиях. Пусть PF неразличимость (3) имеет место только для таких элементов x_j^i, $z_j^i \in X$, что $x_j^i z_j^i P$, где P — некоторый бинарный предикат в $\Omega^{(1)}$. В частном случае $P = \sim$ эквивалентность. При соблюдении условия (3) будем называть ее отношением семантической конгруэнтности (для определенных или любых F оговаривая это особо). Если «семантика» в S_2 однозначно определяется ее синтаксисом, то отношение (3) можно записать в более категоричной форме:

$$[(x_1^1 f), \ldots, (x_n^1 f), \ldots, (x_1^m f), \ldots, (x_n^m f)] F =$$
$$= (z_1^1 f), \ldots, (z_n^1 f), \ldots, (z_1^m f), \ldots, (z_n^m f)] F.$$

Синтаксическая неразличимость может быть определена, например, и так: «... объекты $\mathcal{U}$, $\mathcal{B}$ неразличимы на языке Ξ или Ξ-эквивалентны, если каждое свойство, сформулированное на языке Ξ и присущее одному из объектов, присуще и другому» (Мальцев [28]). Обычно определение неразличимости дается в синтаксических категориях (см., например, определение конгруэнтности в [138]).

Из иных «конструктивных» определений неразличимости остановимся на одном, использующем понятие меры. Пусть X_t и Y_t — два динамических множества, определенных почти всюду, и $T/X_t = T/Y_t = \theta$ (см. п. 2). Введем основное пространство Ω и пространство состояний, общее для X_t и Y_t. Если для любого $t \in \theta$ мера множества $\Omega_t^c = \{\omega \in \in \Omega/X_t \not\models\!\dashv Y_t\}$ ($\not\models\!\dashv$ — семантически неэквивалентно) пренебрежима, то Y_t будем называть семантической модификацией динамического множества X_t. Если, кроме того, пренебрежимо и множество $\bigcup\limits_{t \in \theta} \Omega_t^c$, то X_t и Y_t будем называть с-неотличимыми. В частном случае, когда семантика «равнозначна» синтаксису и $|{=}| \leftrightarrow =$, естественно просто говорить «модификация», «неразличимость», опуская «с». Если, кроме того, понимать «процесс» как динамическое множество с интервалом определения таким, каким надо для того, чтобы все рассуждения имели смысл, то мы приходим, в частности, к определениям Деллашери [133]. Это сразу наводит на мысль, что мост между классической и динамической математикой — не такое уже проблематичное сооружение, при использовании в качестве стройматериала частично динамической теории меры. «Частично» потому, что переход к алгебре удобно осуществить с помощью алгебраической трактовки меры «... путем отказа от рассмотрения отдельных множеств вообще; вместо этого рассматриваются классы множеств сравнимых по модулю множеств меры нуль», что снимет имеющуюся в теории меры патологию (Халмош [86]).

При этом теория меры формально оказывается какой-то частной алгеброй Линденбаума, а не наоборот. Однако с другой стороны кажется правдоподобным, что сам переход к такой алгебре для широкого класса систем удобно реализовать именно на основе М-понятия меры. Конечно, для беспрепятственного двухстороннего движения по мосту нужно соблюдать одни и те же правила движения, в частности в использовании тех метапонятий, которые привели к парадоксам, поэтому адаптация неминуема. При этом необходима определенная осторожность.

Рассматривая любое динамическое множество, мы часто можем считать интервалы его неопределенности пренебрежимо малыми, имеющими меру нуль, тогда оно окажется всюду определенным. Однако не следует забывать, что это только иллюзия «факторизации Линденбаума» и при другой семантической эквивалентности, определяемой, например, иными условиями наблюдения, «мера нуль» окажется вовсе не нулевой. «На самом деле» в любой абстрактной теории систем, занимающей верхнюю ступеньку иерархии теории, любое динамическое множество всегда имеет интервалы неопределенности.

А теперь важнейший вопрос: как быть с непрерывно меняющимся множеством, «неопределенным на любом конечном интервале»? Не означает ли это определение невозможность факторизации множества положений «непрерывно» движущегося тела на любую определенную (булевскую) Н-модель? Означает. Но ведь на ней основана вся наука и техника!

Здесь все дело в том, что мы факторизуем не множество положений тела, а «конечные интервалы», содержащие какие-то подмножества этого множества. По нашему мнению, это чрезвычайно принципиально и прямо связано с проблемами физики. Суть в том, что эти интервалы являются чем-то внешним, экзогенным по отношению к движению, хотя, конечно, они связаны с нашим стремлением измерить положение тела, т. е. провести факторизацию множества положений на какую-то Н-модель. Однако мы всегда имеем дело только с этими экзогенными интервалами и иначе не может быть, ибо остановленное движение — это уже не движение. А это значит, что отождествление этих интервалов с какими-то множествами, «элементами» или «границами» положений — большая самостоятельная задача, выходящая за рамки математики, как это и было показано теорией относительности. Однако она решена? Да, но она была решена и классической механикой, а вот решение оказалось неверным. Кто знает, может быть со временем придется уточнять и теорию относительности в части этого сопоставления? Впрочем, наличие квантовой механики уже дает положительный ответ и на этот риторический вопрос.

Таким образом, факторизация «положений» — это всегда факторизация «экзогенных интервалов», а сопоставление «положений» и «интервалов» лежит в принципе вне математики, предполагая другой класс метапонятий и Н-моделей. Если у нас есть основания верить в то, что принятая современной физикой процедура сопоставления не приводит к противоречию, то можно условно считать, что мы факторизуем непосредственно «множество положений», памятуя о том, что все-таки всегда имеем дело только с «экзогенными интервалами». И, что очень важно, их всегда только конечное (даже не счетное!) число, ибо сопоставление «положений» и «интервалов» мы всегда реально производим в конечном числе точек, а между ними полагаемся на экстраполяцию, которая подводила нас уже много раз. Поэтому и необходима осторожность. Если не забывать об относительности «вечных» математических истин, то можно факторизовать и множество положений на конечные динамические множества различных Н-моделей в рамках «становящейся» потенциальной бесконечности. При этом, исходя из «семантической эквивалентности», мы можем считать некоторое множество неразличимым в нашей Н-модели. В более общем случае можно говорить о множестве систем (X), связанных некоторым отношением (P) (или множеством отношений $\{P\}$), неразличимых в Н-модели, которую, конечно, можно рассматривать как систему (S_2).

Наиболее наглядный частный случай семантической эквивалентности имеет место, когда мы не различаем обычное эвклидово расстояние между двумя точками. Тогда есть смысл говорить о достаточно, а не бесконечно малой величине. Не возвращаемся ли мы в таком случае к доканторовской эпохе «расплывчатых динамических» концепций старого анализа бесконечно малых»? [131]. Если и да, то во всеоружии новых метапонятий и более чем полувекового опыта новой математики, что позволит надеяться на достойную замену «рая» Кантора. Тем более, что пророчество Гильберта о том, что ничто не заставит математиков уйти из этого рая, надо думать, не оправдывается. Уходить приходится. А куда?

14. «Классический» путь

Итак, поиски «наиболее абстрактной» теории систем закономерно приводят к теории абстрактных систем — математике, которая оказывается противоречивой при использовании классических метапонятий — множества и бесконечности. Если согласиться с тем, что предлагаемая замена этих метапонятий метапонятиями «динамическое множество» и «конечная бесконечность» снимает парадоксы, то выход как будто бы есть. Но еще предстоит построить динамическую математику так, чтобы она удовлетворяла и ЭПЦМ, и критерию ФАДЭП в целом. Кажется естественным пойти по пути классической математики при новых метапонятиях. Разумеется, при этом возникнут новые Н-модели, но важно, что вся классическая математика останется как частный случай динамической при должном определении интервала стационарности. Наметим этот (индуктивный) путь. Вначале определим динамические отношения. Начнем с простейших определений.

Пусть даны статические множества $A^1, A^2, \ldots, A^n$ с интервалами определения $T/A^1, T/A^2, \ldots, T/A^n$. Образуем декартово произведение

$$A = A^1 \times A^2 \times \cdots \times A^n \qquad (4)$$

и рассмотрим A как некоторое множество с интервалом определения

$$T/A = T/A^1 \cap T/A^2 \cap \ldots \cap T/A^n. \qquad (5)$$

Пусть теперь $B \subset A$ некоторое базовое множество и возможно определить на нем конструктивно динамическое множество. Тогда B_t естественно назвать n-местным динамическим отношением.

Его удобно записать как обычно и в виде (см. гл. I)

$$a^1a^2 \ldots a^nB_t; \quad a^i \in A^i.$$

Данное определение приведено только для того, чтобы еще раз отметить возможность перехода от классической к динамической математике. Если уже привыкнуть к метапонятию динамического множества, то более общим является определение динамического отношения как подмножества декартового произведения динамических множеств

$$B_t \subset A_t^1 \times A_t^2 \times \cdots \times A_t^n. \tag{6}$$

Новыми понятиями, не имеющими аналога в классической математике (но с ними-то мы только и имеем дело!), являются запаздывающее отношение

$$B_{t+\tau} \subset A_t^1 \times A_t^2 \times \cdots \times A_t^n \tag{7}$$

и отношение с запаздываниями

$$B_t \subset A_{t-\tau_1}^1 \times A_{t-\tau_2}^2 \times \cdots \times A_{t-\tau_n}^n. \tag{8}$$

Очевидно, запаздывающее отношение является частным случаем отношения с запаздываниями ($\tau_1 = \tau_2 = \ldots = \tau_n = \tau$ при соответствующем определении интервалов стационарности и неопределенности). Естественна и другая запись:

запаздывающее отношение $a^1 a^2 \ldots a^n B_{t+\tau}$;

отношение с запаздываниями $\overset{1}{a}_{\tau_1} \overset{2}{a}_{\tau_2} \ldots \overset{n}{a}_{\tau_n} B_t$.

Мы не будем здесь рассматривать другие типы динамических отношений (упреждающие, с упреждениями и т. д.), ибо целью нашей книги является только иллюстрация возможных путей построения теории.

Теперь можно легко обобщить определение Месаровича (см. гл. II, § 1) таким образом, чтобы оно начало удовлетворять критерию Д ФАДЭП, и назвать динамической системой динамическое отношение. Тем самым мы делаем явный шаг на пути «к пустующему трону» абстрактной теории систем. Конечно, здесь дело не в словах, если за ними не стоят эффективные Н-модели. Но в нашем случае это, видимо, не так. Здесь успехи пока скромны, но все-таки они имеются, даже если оставить в стороне возможный конец парадоксов. Можно отметить частный случай отношений с $n = 2$, которые удобно интерпретировать в виде динамических направленных графов (биграфов [12]), использованных для построения некоторых содержательных моделей. Важно, что интуитивно понятие биграфа, как и вообще динамического отношения, очень наглядно и напрашивается в самых различных случаях (см., например, задачу Анны). Другие примеры динамических систем: конечные автоматы, преобразующие одно динамическое множество (входное) в другое выходное (пример абстрактной динамической системы), человек, рассматриваемый как система молекул, ощущений или предрассудков и т. д.

15. Динамическая логика и алгебра

После определения динамического отношения открыт путь для дальнейших математических конструкций. В частности, естественно, появляется динамический предикат как характеристическая функция динамического множества (отношения)

$$[a^1_{\tau_1} a^2_{\tau_2} \ \ldots \ a^n_{\tau_n} B_t]. \tag{9}$$

Можно определить динамический предикат, вводя зависимость от времени самой характеристической функции при стационарности отношений:

$$[a^1_{\tau_1} a^2_{\tau_2} \ \ldots \ a^n_{\tau_n} B]_t. \tag{10}$$

Еще более общим является определение динамического предиката в виде

$$[a^1_{\tau_1} a^2_{\tau_2} \ \ldots \ a^n_{\tau_n} B_t]_{t+\theta}, \tag{11}$$

где θ — некоторое запаздывание в определении истинности отношения. Условия, при которых все эти определения эквивалентны, требуют дополнительного исследования. Важно, что во всех случаях динамический предикат имеет динамическое множество истинности. А поскольку все множества динамичны, то нединамичных предикатов просто не бывает.

Теперь в общем ясен путь построения динамической логики, если принять за основу динамическое множество и соответствующие Р-модели с учетом взаимосвязи теоретико-множественных и логических операций. Аналогично можно попытаться конструктивно определить динамические алгебраические системы и модели как динамические множества с определенными на них динамическими отношениями и функциями (динамической сигнатурой)

$$S_t = (\mathfrak{M}_t, \ \Omega_t). \tag{12}$$

Конечно, здесь возникает очень много вопросов, и пока этот «классический» способ построения здания динамической математики и логики представляется весьма громоздким. Мы сделаем решающий шаг и наметим дедуктивный путь, при котором здание будет строиться с крыши.

16. Универсальные Н-модели динамической системы

Н-модель динамической системы S_t — это частично определенная диаграмма типа I (I — частично упорядоченное множество) над некоторой (базовой) схемой (категорией) ζ. Морфизмы $\zeta_\tau : \tau \to \zeta$ для всех τ, соответствующих определенному «моменту времени» t, назовем Н-моделью сечения, или просто сечением динамической системы S_t. При этом «моменту времени» t соответствует конечный интервал (не обязательно упорядоченный) τ, который может рассматриваться и как «неделимый» элемент. При таком определении «моменту времени» t может в принципе соответствовать некоторое множество из $\mathrm{Ob}\,\zeta$. Достичь такой «неоднозначности» можно было бы и проще, определяя Н-модель динамической системы как диаграмму типа ζ над схемой T (I), т. е. рассматривая отображение из схемы (категории) ζ в схему T (I). В первом случае мы идем от «времени» к системе, во втором — наоборот. Для дальнейшего назовем Н-модель по первому определению индуктивной Н-моделью, по второму — проективной Н-моделью динамической системы.

Комментарий. Прежде всего о соответствии $t \rightsquigarrow \tau$ в индуктивной Н-модели. «Моменту» t соответствует (неупорядоченное) подмножество $\tau \in I$, каждый «элемент» которого $\tau_1 \in \tau$ нумерует один из возможных объектов $\zeta_{\tau_1} \in \mathrm{Ob}\,\zeta$, а ζ_τ — это в общем случае подмножество таких объектов. Если τ рассматривается как элемент, система S_t допускает детерминированное описание, если нет — стохастическое.

При таком подходе можно считать, что для детерминированных систем соответствие $t \rightsquigarrow \tau$ просто отображение (t и τ — «элементы», а не множества).

Для дедуктивной Н-модели стохастичность проявляется в сюръективности морфизма схемы ζ в схему T. Следовательно, в том и другом определении при стохастичности одному и тому же «моменту» может соответствовать несколько объектов схемы ζ, т. е. в сечении динамической системы есть несколько фотографий.

Некоторые фотографии могут быть и неопределенны, в частности фотографии для любых «нечетных» моментов (интервалов времени, см. п. 2). Если ζ — просто множество, мы возвращаемся к конструкции п. 2. Не лишне еще раз подчеркнуть, что понятие момента времени — это просто дань привычной терминологии. На самом деле момент — это всегда достаточно малый конечный интервал, где понятие «достаточно малый» означает, что длина интервала семантически неразличима в данной сигнатуре, т. е. этой длиной можно пренебречь в рассматриваемой Н-модели.

Основной смысл определения настоящего пункта состоит в том, что перебрасывается мостик между новыми понятиями динамической математики и хорошо разработанным (впрочем, тоже новым) аппаратом теории схем и категорий. При равенстве нулю всех интервалов неопределенности мы приближаемся к классическому случаю. Собственно, классическая детерминированная динамическая система в смысле Немыцкого — Калмана является еще более частным случаем, когда ζ — та или иная категория (или схема) метризуемых пространств и τ — элемент.

Тем самым для определенной нами Н-модели динамической системы критерий ФАДЭП удовлетворяется в большей степени, чем для систем, рассмотренных в § 1, хотя бы потому, что все они — частные случаи этого определения. Явная наглядность и простота определения, с одной стороны, и солидная основа наиболее абстрактного аппарата теории схем (категорий) — с другой позволяют надеяться на достижение истинной на данном этапе, а не потенциальной общезначимости соответствующих Н-моделей.

17. «Оживление» статических конструкций классической математики

Нам остается показать (в самых общих чертах, разумеется), как можно перейти от общего определения предыдущего пункта к любым частным Н-моделям. Обратимся вначале к § 1, гл. II, где приведена Н-модель, которая обобщает и Н-модели конечных автоматов, и системы Немыцкого — Калмана. Но только ли их? Ведь по существу диаграмма (9) имеет смысл для любых отображений, уточняя «структуру» факторизации (см. гл. I).

Как уже отмечалось в § 1, гл. II, диаграмма (9) статична, не удовлетворяет критерию Д ФАДЭП и поэтому не «дотягивает» до высшей ступеньки в иерархии Н-моделей абстрактных систем. Теперь, однако, нам очень просто ввести динамику, основываясь на определении п. 16. Это достигается буквально одной фразой: пусть ζ — категория схем (диаграмм) вида (9). Тогда для детерминированных динамических систем сечение ζ_t— определенная диаграмма вида (9) в момент t. Определяя ζ тем или иным образом, можно «оживить» любые статические конструкции классической математики.

Возвращаясь к категории диаграмм вида (9), отметим, что даже при динамизации мы еще не достигли высшей ступеньки абстракции. Прежде всего в этих диаграммах отображение понимается при абсолютном толковании неразличимости. Это сравнительно легко исправить, вводя понятие семантической неразличимости и используя соответствующие Н-модели. Но и это не все. Пока речь шла о детерминированных системах. Перейдем к еще более общим Н-моделям, когда для каждого t существует множество фотографий ζ_τ. Возможность использования аппарата динамической теории меры здесь кажется правдоподобной. Конечно, можно заменить синтаксические категории (например, неразличимость) семантическими. А что означает такая замена? Только то, что вместо иллюзорной абсолютности мы узакониваем прагматическую относительность. В частности, мы вполне можем работать с достаточно малыми величинами, семантически равными нулю.

Закономерно считать, что переход от классической к динамической (и прагматической) математике связан с отказом от иллюзорных абсолютных истин классической математики.

Формально он связан и с заменой «синтаксической» неразличимости «семантической», что приводит к «узаконенной кончине» актуальной бесконечности.

18. Финиш

Итак, теория схем (категорий) — это мост, обеспечивающий эволюционный переход от классической к динамической теории абстрактных систем. Последняя свободна от противоречий, т. е. всегда имеет Р-модели. Это обеспечивается заменой метапонятия «множество» метапонятием «динамическое множество» и более реалистическим подходом к «вечности» и общезначимости математических истин. Следствием является более прагматический взгляд на математические конструкции, при котором семантическое следование предпочитается синтаксическому. В частности, правдоподобно «похоронить» актуальную бесконечность с помощью понятия семантической неразличимости. При построении прагматической математики на такой основе ее моделирующие возможности несомненно возрастут.

В результате мы можем сформулировать наш основной тезис: переход к динамической математике — это переход от теории абстрактных систем (которые могут и не иметь Р-моделей) к абстрактной теории систем, удовлетворяющей «принципу рая». Таким образом, высшая ступенька в иерархии теорий систем, по нашему мнению, принадлежит динамической (прагматической) математике. Взаимосвязь остальных теорий общей теории систем может быть схематично представлена снова в виде динамической диаграммы, или мультиграфа теорий. Его вершинами являются данная система Н-моделей, называемая теорией, а связями — семантические и синтаксические морфизмы. Каждая из вершин, в свою очередь, является динамическим мультиграфом М-понятий (которые тоже просто индексируют некоторые Н-модели) и соответствующих морфизмов и т. д. Итак, и наше индивидуальное знание, и знание всего человечества можно представить в виде системы взаимосвязанных вложенных динамических мультиграфов разной степени общезначимости. На наиболее агрегированном структурном уровне (вершина — теория), который соответствует общезначимому знанию, существует высшая ступенька и по общезначимости, и по тому, что любая Н-модель может быть построена на основе наиболее абстрактных М-понятий и Н-моделей этой общей теории. Это не всегда очевидно за много-численными экзогенными и эндогенными *М*-понятиями и не всегда удается сделать в явном виде, но стремление к этому — магистральное направление движения науки.

§ 2. ТАКТИКА МОДЕЛИРОВАНИЯ

1. Конкурент или фрагмент

В «Правилах для руководства ума» Р. Декарт отмечает (цитируется по [122]):

«1) задача любого вида сводится к математической задаче;

2) математическая задача любого вида сводится к алгебраической задаче;

3) любая алгебраическая задача сводится к решению одного единственного уравнения».

Приведенная мысль интересна, по крайней мере, в трех отношениях. Во-первых, она иллюстрирует тот факт, что возникающая сейчас теория решения задач (см., например, [136]) имеет своих классиков и свою историю. Во-вторых, показывает, что ошибаются даже классики, и, в-третьих, несомненно доказывает, что даже в своих ошибках классики были великими. Три правила Декарта окажутся справедливыми (но и бессодержательными), если заменить в них квантор всеобщности («любой вид») квантором существования («существуют задачи»). Таким образом, неточность высказанной Декартом концепции состоит в ее незаконном расширении, при котором желаемое безосновательно принимают за действительное. Впрочем, это утверждение относится скорее к психологическим причинам ошибок такого рода, нежели к их сути, которая сводится просто к тому, что объекту приписываются те особенности, которыми он не обладает. В этом случае обычно говорят, что высказывание носит характер домысла. Разница между домыслом и гипотезой хорошо иллюстрируется известным [122] рассуждением «голодного человека»: «Если бы у меня было немного ветчины (гипотеза), то я мог бы приготовить яичницу с ветчиной (домысел), конечно, при условии, что у меня было бы еще и несколько яиц (гипотеза)». Разумеется, все приведенные рассуждения являются плохо описываемыми, а значит, спорными, почему и необходимо перейти к попыткам их постепенного уточнения.

Итак, пусть имеется некоторая система S_1^0 (задачная ситуация), которую интуитивно можно представлять как некоторый фрагмент реальности (не обязательно объективной), относительно которого мы хотим сделать некоторые выводы (решить задачу). Первый шаг решения состоит в построении системы S_1^1, которая является «модёлью» S_1^0, доступной в том или ином смысле «решателю» задачи. Таким образом, вначале предполагается некоторый морфизм (в частности, отображение) $F_1^{01} : S_1^0 \rightarrow S_1^1$ одной системы в другую (ср. § 5, гл. I). Конечно, S_1^1 — не обязательно является математической системой, если под математикой понимать то, что имел в виду Декарт. Если же допустить принципиальную возможность алгоритмизации любых процессов переработки и создания информации, и, например, под алгоритмизацией понимать возможность построения общезначимых моделей, то морфизм F_1^{01} непосредственно связан с первым правилом Декарта. Впрочем, в указанном допущении здесь нет особой необходимости, поскольку в любом случае мы имеем дело с некоторой Н-моделью S_1^1 в том или ином языке. Дальнейший шаг в решении задачи состоит в преобразовании S_1^1 в некоторую систему S_1^2, которую называют решением $F_1^{12} : S_1^1 \rightarrow S_1^2$. Этот переход осуществляется, как правило, в пределах языка системы S_1^1, затем обычно происходит сравнение S_1^2 с некоторой системой $S_{\pi_1}^0$, принадлежащей той же «реальности», что и S_1^0, т. е. имеем интерпретирующий и/или проверочный морфизм $F_1^{20} : S_1^2 \rightarrow S_{\pi_1}^0$. $S_{\pi_1}^0$ может быть, в частности, некоторой подсистемой S_1^0 или иметь к ней то или иное отношение, позволяющее классифицировать $S_{\pi_1}^0$ (или S_1^2) как удовлетворительное решение задачи. В связи с этим $S_{\pi_1}^0$ может рассматриваться и как результат морфизма $f_1 : S_1^0 \rightarrow S_{\pi_1}^0$ (решение задачи), причем f является произведением морфизмов $f = F_1^{01} F_1^{12} F_1^{20}$. С другой стороны, можно рассматривать и морфизм «вложения» $\psi_1 : S_{\pi_1}^0 \rightarrow S_1^0$, «проверяющий», правильно ли решена задача. Если она решена неудовлетворительно, то с учетом $S_{\pi_1}^0$ и S_1^0 рассматривается новый фрагмент «реальности» S_2^0 и/или новый морфизм F_2^{01} и процесс начинается сначала. Конечно, в некоторых случаях могут иметь место различные особенности (так, иногда S_1^0 и S_1^1 могут быть системами в одном языке и т. д.), однако, здесь это несущественно.

Если согласиться с приведенной выше схемой, то можно отметить пока следующие характерные черты процесса решения задач.

1. Этот процесс представляет собой последовательность морфизмов F_i^{kl} (i — целое, $l = k + 1 \pmod 3$).

2. Процесс в общем случае носит итеративный характер (можно предположить наличие систем S_i^0, S_i^1, S_i^2, $S_{\pi_i}^0$ для любых i).

3. Существуют два этапа, которые имеют отношение к употреблению понятия моделирования. Так, можно считать, что S^1 (нижний индекс не будет употребляться, если высказывания справедливы для всех i) является моделью S^0, или S_π^0 можно рассматривать как некоторую модель S^2. Ясно, что в первом случае S^1 — Н-модель, во втором S_π^0 — Р-модель.

Изложенная схема настолько обща, что может возникнуть вопрос, а не является ли метатеория систем вообще частным случаем теории решения задач или во всяком случае какова взаимосвязь этих теорий? Ведь что бы мы не делали, в конце концов мы решаем задачу. С нашей точки зрения все зависит от соотношения множества исходных экзогенных M-понятий (в частности, метапонятий). Если множество таких понятий A одной теории содержит соответствующее множество B другой и разность этих множеств $A—B$ представляет эндогенные M-понятия во второй теории, то вторую целесообразно считать более общей. Теория решения задач с введением M-понятия задачи не обходится без метапонятия системы, в то время как задача может быть описана в терминах систем и морфизмов определенного типа. Следовательно, теория задач — фрагмент теории систем.

Формально процесс решения задачи сводится к последовательным морфизмам, описанным выше между теми или иными системами. Соответствующая диаграмма будет иметь вид

$$\begin{tikzcd}
S \arrow[r, shift left=3, "f"] \arrow[d, "F^{01}"'] & S_\pi^0 \arrow[l, "\varphi"'] \\
S^1 \arrow[r, "F^{12}"'] & S^2 \arrow[u, "F^{20}"']
\end{tikzcd} \tag{13}$$

Если измерить время в единицах длительности этапа, то диаграмма (13) может рассматриваться как фотография процесса решения задачи. Эта фотография сделана со слишком большой выдержкой, в результате чего «смазаны детали». На самом деле «морфизмы» приводят к определенным запаздываниям, так что более точно было бы описать процесс решения задач как динамическое отношение с запаздываниями (см. п. 14, § 1)

$$S^0_{t+\tau^0} S^1_{t+\tau^1} S^2_{t+\tau^2} S^0_{\pi_{t+\tau^n}} Q. \tag{14}$$

Пока мы ограничимся рассмотрением одной фотографии (13) и в рамках «статических» рассуждений изучим некоторые особенности морфизмов F^{kl}, т. е. будем пытаться провести дальнейшую формализацию процесса решения задач, «погружая» теорию решения задач в абстрактную теорию систем. Вначале рассмотрим морфизм F^{01} для частного случая, когда S^0 и S^1 — реляционные системы (см. гл. I, § 7). Любую систему S^0 мы можем себе представить только как некоторое динамическое множество с динамическими отношениями. Его фотографией будет пусть плохо описываемая, но классическая реляционная система. Этим оправдывается возможность рассмотрения S^0 в таком виде, поскольку у нас просто нет другого выхода. Процесс решения задачи в этих терминах сводится к последовательным морфизмам одной реляционной системы в другую.

2. Изоморфизм и элементарная эквивалентность

Вначале рассмотрим в общем виде некоторые две системы $G = (X, \Omega)$, $D = (Y, \gamma)$ и отображение $F: G \to D$. Будем считать сигнатуры Ω и γ состоящими только из предикатов (любая функция может быть представлена как отношение или предикат). Тогда взаимно однозначное отображение F называется изоморфизмом, если оно «сохраняет главные предикаты системы» [28], т. е.

$$x_1 x_2 \ldots x_{n_\eta} P_\eta \leftrightarrow (x_1F)(x_2F) \ldots (x_{n_\eta}F) Q_\eta \tag{15}$$

для всех $x_i \in X$; $(x_iF) \in Y$; $P_\eta = \Omega_{n_\eta}$; $Q_\eta \in \gamma$ и для всех $\eta < \beta$ [28]. Как обычно,... арность предиката P_η равна n_η, а β определяет число (для конечных множеств) различных (главных) предикатов в сигнатурах Ω и γ (см. также § 7, гл. I). Делается дополнительная оговорка, что изоморфизм определяется при одном и том же количестве предикатов соответственно одинаковой арности в системах G и D.

Если системы G и D изоморфны ($G <> D$), то говорят, что они имеют один и тот же тип. Вводится обозначение α Tr G, по которому α есть тип G. При этом [61]

$$\alpha \operatorname{Tr} G \wedge \beta \operatorname{Tr} D \to [(\alpha = \beta) \leftrightarrow (G <> D)]. \tag{16}$$

Здесь, как обычно, «$\rightarrow$» — логическая импликация; «$\wedge$» — конъюнкция; «$\leftrightarrow$» — двойная импликация. Кажется естественным предположить, что изоморфные системы могут быть Р-моделями для одной и той же системы. Иными словами, «любые две изоморфные системы служат представлениями одной и той же абстрактной системы, которая получается путем абстрагирования от любой из них, т. е. путем игнорирования всех отношений и свойств, за исключением тех, которые рассматриваются в этой абстрактной системе» (Клини [30]).

А имеют ли изоморфные системы одни и те же Р-модели? «Каждое свойство системы (X, Ω), которое можно выразить с помощью символов исчисления высказываний и кванторов, ограниченных полем системы, присуще также каждой системе, изоморфной (X, Ω), т. е. является инвариантом относительно изоморфизма» [61]. И если это свойство истинно, т. е. имеет Р-модель, то кажется правдоподобным, что общность свойств порождает общность Р-моделей.

Однако рассмотрим в рамках классических представлений множество целых чисел N и множество их квадратов N^2. Н-моделями будут последовательности: 1, 2, 3,... и $1^2, 2^2, 3^2,\ldots$

В 1638 г. Галилей «...заметил, что квадраты целых положительных чисел могут быть поставлены в 1—1-соответствие с самими положительными числами следующим образом:

$$\begin{array}{c} 1,\ 4,\ 9,\ 16,\ \ldots \\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ \ldots, \end{array}$$

несмотря на древнюю аксиому, что целое больше любой своей части» [30]. Если рассматривать цифры просто как элементы некоторых множеств двух систем, то кажется, что эти системы изоморфны, хотя обладают разными Р-моделями (целые числа и их квадраты семантически явно различаются). Что это, издержки бесконечности или какая-то неувязка в истолковании Р-моделей? Ни то, ни другое. Здесь просто умышленно допущена неточность, чтобы еще раз подчеркнуть отличие изоморфизма от 1—1-соответствия (биективного). Такое соответствие необходимо для изоморфизма, но недостаточно, поскольку еще должны взаимно соблюдаться любые отношения, определенные в рассматриваемых системах. Когда мы говорим «множество целых чисел или их квадратов», то имеется в виду, строго говоря, система, состоящая из некоторого набора элементов и отношений, определенных на этих множествах. В частности, в N определено сложение для всех чисел, не выводящее за пределы N, а в N^2 это невозможно. Поэтому N и N^2 не изоморфны, даже если считать их биективными как множества.

Итак, всегда нужно явно оговаривать сигнатуру систем, что очень не просто, особенно для плохо описываемых систем. Но во всех случаях у нас имеется какое-то описание систем в том или ином языке L. Поэтому представляется более удобным выбрать за первичное — понятие элементарной эквивалентности (а не изоморфизма) систем. «Система $\mathfrak{U}$ называется элементарно эквивалентной системе $\mathcal{B}$, символически

$$\mathfrak{U} \equiv \mathcal{B},$$

если $\mathfrak{U} \models F \leftrightarrow \mathcal{B} \models F$ для любого предложения F языка L. Тарский высказал идею, что классификация алгебраических систем по элементарной эквивалентности предпочтительней классификации по изоморфизму» (Дж. Сакс [132]). У Дж. Сакса L — язык первого порядка и несколько иные обозначения; $\mathfrak{U} \models F$ означает, как обычно, семантическое следование, или по Дж. Саксу: «F истинно в U» [132]. Можно еще сказать, что $\mathfrak{U}$ — это Р-модель F (или в $\mathfrak{U}$ содержится Р-модель F, при необходимости это подчеркнуть).

Если, обобщая определение, приведенное у Дж. Сакса, понимать под L любой язык, связанный с семантическим описанием, то приведенные рассуждения — еще одна иллюстрация первичности и в конечном счете неизбежности использования семантических категорий (см. § 1). И может быть в будущем даже такие фундаментальные понятия, как изоморфизм, будут адаптированы к еще «более семантическим» категориям не только в теоретических работах по теории моделей типа [132], но и в математике вообще. Наступление «на классику» в общей теории систем, похоже, ведется и снизу, и сверху, и со стороны стратегии, и со стороны тактики моделирования (на компьютерах, например) в направлении создания явно более прагматичной математики, непосредственно связанной с абстрактной теорией систем.

3. Изоморфизм?

А стоит ли вообще обсуждать понятие изоморфизма? Оно ведь предельно ясно и едва ли требует обсуждения. Так ли это?

Рассмотрим две системы G и D. При этом пусть $G = (X, P)$, где X — множество всех чисел, на котором определено некоторое отношение P; D — число (например, 2). Могут ли G и D быть изоморфными? Кажется, что на основе обычного определения изоморфизма (15), конечно, нет, ибо в D просто нет соответствующего предиката. Однако пусть P — унарный предикат, который определяется в G для любого $x \in X$ в виде

$$[x, P] = \begin{cases} 1, & \text{если } x = 2; \\ 0, & \text{если } x \neq 2. \end{cases}$$

Тогда G и D явно изоморфны, точнее, G и D — одна и та же система, по-разному описанная. Это очевидно семантически, но формально G и D — совершенно различные системы. Они элементарно эквивалентны, потому что любое предложение, скажем в языке первого порядка, истинное в одной системе, истинно и в другой. Однако самое интересное то, что системы могут быть истолкованы как изоморфные и в классическом смысле. «Это невозможно,— скажет читатель,— у них разные сигнатуры, разные мощности базовых множеств».

Тем не менее обратимся к определению изоморфизма. Оно, по сути, сводится к тому, что устанавливается биективное соответствие между базовыми множествами рассматриваемых систем и такое же отношение между их сигнатурами. Это соответствие определяется в метамодели — языке первого порядка с использованием двойной импликации «$\leftrightarrow$» — «тогда и только тогда». Таким образом, и «классическое» определение аппелирует к экзогенным логическим понятиям, т. е. по сути является семантическим. Так вот двойная импликация истинна и тогда, когда обе предпосылки ложны. А это значит, что «доопределяя» должным образом левую или правую часть, вводя ложные предикаты, мы можем сделать рассматриваемые системы изоморфными в смысле классического определения гл. I. Конечно, естественней поступить наоборот — избавиться и слева и справа от ложных предикатов и тогда ясно, изоморфны системы или нет. Как будто в принципе противоречий с классическим определением нет. Однако это только в принципе. На самом-то деле нам нужно для того, чтобы определить изоморфны системы или нет, выделить из каждой системы такую подсистему, где истинны все предикаты сигнатуры, и сопоставить эти «минимальные» системы. Наглядно можно себе представить, что сигнатура определяет на основном (базовом) множестве некоторое подмножество, где истинны все предикаты первого порядка; на декартовом произведении базового множества на себя (множество «второго порядка»), соответствующее подмножество, где истинны все предикаты второго порядка сигнатуры и т. д., что можно представлять себе как образование некоторой шкалы множеств (Бурбаки [20]).

Изоморфизм по сути есть биективное соответствие между соответствующими подмножествами, а «минимальная» система — это множество подмножеств различных порядков, определенных на базовом множестве. Обычно система задается как базовое множество и отношения, но не в виде подмножеств различных порядков, а в неявном виде некоторых предикатов. Переход к явному виду «минимальной» системы — по сути предмет вычислительной математики. Можно считать, что это и есть процедура решения задач в математике. Семантически результат решения задачи элементарно эквивалентен заданным условиям, которые могут рассматриваться как некоторая алгебраическая система. И если решение известно, то оно изоморфно условиям. Например, система $S^1 = (N, P)$, где N — целые числа, P — предикат вида $[n^2 - 5n + 6 = 0] = 1$, изоморфна системе (множеству) $S^2 = (\{2,3\}, \varnothing)$ с пустой сигнатурой. Но в общем случае неизвестно, например, изоморфна ли система S^1 пустому подмножеству, если предикат P трехместен и имеет вид $m^n + l^n - r^n = 0$, n, m, l, $r \in N$, $n > 2$. Это и есть великая теорема Ферма, не доказанная и не опровергнутая. Поэтому можно образно сказать, что решение задач в математике — это определение «минимальной» системы (решения), изоморфной данной (условиям). Можно было бы ввести понятие потенциального изоморфизма (условий решению) и трактовать процесс решения задачи как переход от потенциального к «настоящему» изоморфизму.

А как быть, если решение приближенное? Тогда «настоящего» изоморфизма в математическом смысле ведь как будто нет. Здесь снова обнаруживается преимущество семантического описания, о котором по сути говорил Тарский (см. стр. 154).

Дело в том, что условия и решения элементарно эквивалентны в языке теорий, где истинными оказываются все неразличимые подсистемы (подмножества), определяемые допустимым приближением. Возможно, задачу можно переформулировать, выбирая более «грубое» базовое множество и соответствующие отношения, так что можно говорить и о «настоящем» изоморфизме условий и решения. Однако это будет уже, так сказать, вторичная формулировка — подгонка «синтаксиса под семантику».

Нам остается отметить, что по существу, в этом пункте мы обсудили именно морфизм F^{12} (см. диаграмму (13)).

4. Просто гомоморфизм

Возвратимся к отображению F^{01} диаграммы (13). Обычно Н-модель S^1 не изоморфна S^0. Естественно предположить, что имеет смысл говорить о ней как о Н-модели, если она как-то отображает особенности S^0 (ср. § 5, гл. II). Это обстоятельство уточняет понятие гомоморфизма, который обычно определяется в таком виде: F—гомоморфизм G в D $G \succ D$, если:

1) для любого $x \in X$ существует $xF \in Y$ (F — съюрективно);

2) для всех предикатов Q_η, определенных в системе D, истинна импликация

$$x_1 x_2 \ \ldots \ x_{n_\eta} P_\eta \rightarrow (x_1F)(x_2F) \ \ldots \ (x_{n_\eta}F) Q_\eta, \qquad (17)$$

где $x_1, x_2, \ldots, \in X$, P_η — предикаты сигнатуры Ω. Обозначим символом $\mathrm{Mg}S$ базовое множество, на котором задана система S, символом $\mathrm{Pr}S$ — множество предикатов, задаваемых при определении системы (определяющие множество и предикаты). Тогда условие гомоморфизма G в D, как оно обычно понимается, можно записать в виде:

$$G \succ D \rightarrow (\mathrm{Pr}\, G \sim \mathrm{Pr}\, D),$$

где эквивалентность «$\sim$» определяется как равенство количества предикатов и соответственно их арностей.

Формула (17) является обычным определением, однако нетрудно видеть, что импликация истинна и тогда, когда P_η ложно (ср. предыдущий пункт). Условимся индексировать в сигнатуре системы только те предикаты, которые истинны хотя бы на одном элементе базового множества (или шкалы множеств). Тогда понятие гомоморфизма в соответствии с определением (17) имеет смысл и при менее жестких ограничениях:

$$G \succ D \rightarrow (\mathrm{Pr}\, G \sim \mathrm{Pr}_1 D) \wedge (\mathrm{Pr}_1 D \subset \mathrm{Pr}\, D). \qquad (18)$$

Еще раз подчеркнем, что эта формула не противоречит классическому определению гомоморфизма, но не соответствует его обычному истолкованию. Обобщим формулу (16), используя принятое понимание гомоморфизма:

$$(\alpha\, \mathrm{Tr}\, G \wedge \beta\, \mathrm{Tr}\, D) \rightarrow [(\alpha = \beta) \leftrightarrow (G \prec\succ D)] \vee [(\alpha \geqslant \beta) \leftrightarrow$$
$$\leftrightarrow (G \succ D)] \vee [(\alpha \leqslant \beta) \leftrightarrow (G \prec D)]. \qquad (19)$$

Таким образом, используемое понятие гомоморфизма позволяет ввести упорядоченность для широкого класса систем и перейти от номинальных по крайней мере к порядковым шкалам. В частности, если $\mathrm{Pr}\,G = \varnothing$, то для любых D таких, что $|MgG| = |MgD|$ (где, как обычно, $|\mathrm{A}|$ — мощность множества A), $\alpha\mathrm{Tr}\,G \geqslant \beta\mathrm{Tr}\,D$. В том числе любое упорядоченное подмножество гомоморфно множеству той же мощности (любой ординал «содержится» в своем кардинале).

Таким образом, выходит, в частности, что любая система с пустой сигнатурой (т. е. просто множество) гомоморфна системе с любой сигнатурой, лишь бы существовало соответствующее отображение базовых множеств.

Посмотрим, противоречит ли это вначале здравому смыслу и интуиции. Пусть X — множество людей. Введем унарный предикат P — быть рыжим и рассмотрим теперь систему $S = (X,\ P)$.

Это означает, что на множестве X определяется предикат P, истинный для любого $x \in X$, только если он рыжий. Обозначим $X_p \subset X$ — подмножество всех рыжих людей. Очевидно, X_p и S элементарно эквивалентны, ибо любое предложение, истинное в системе S, истинно и в множестве X_p. Иными словами, системы S и X_p изоморфны в смысле изложенного выше. Иначе: X_p является минимальной системой для S, в которой «реализован» предикат P (решена задача явного определения рыжих). Рассмотрим диаграмму

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "\chi"] \arrow[dr, "\varphi"'] & & X_p \\ & S \arrow[ur, "\nu"'] & \end{tikzcd} \tag{20}$$

Диаграмма очевидно коммутативна. Более того, она естественно отображает последовательность реализации морфизма (в частности отображения) χ (вначале определяется отношение P — «быть рыжим», а затем находятся все рыжие). Так что условно $\chi = \varphi\nu$, где ν — изоморфизм. Логично считать φ (как и χ) морфизмом, «уменьшающим разнообразие», а не сохраняющим его как при изоморфизме. Именно это интуитивно и связывается с понятием гомоморфизма.

Принятое истолкование гомоморфизма может вызвать еще одно возражение. Рассмотрим его в общем случае на простейшем примере гомоморфизма множества N в систему $D = (N, <)$ с тем же базовым множеством и с непустой сигнатурой, состоящей из предиката порядка «$<$», определенного на N, т. е. возвращаемся к морфизму множества в то же самое, но упорядоченное множество. Чтобы толковать этот морфизм как гомоморфизм, рассмотрим систему $G = (N, \sigma)$, где бинарный предикат σ ложен для любых элементов. «Любое отображение G в D есть гомоморфизм. Действительно, условие (17) здесь автоматически выполняется, так как отношение $xy\sigma$ всегда ложно» (А. И. Мальцев [28, стр. 49]). Мы специально привели цитату, чтобы иметь возможность сослаться на классиков, допускающих такое толкование гомоморфизма. Но разве множество N и система G одно и то же? Ведь система G — это не просто множество, а множество со всюду определенным (пусть ложным) предикатом? Тогда, что такое множество, если попытаться определить его через понятие системы? Мы думаем, что логичный ответ таков: множество это система, в которой ложен любой предикат (кроме, возможно, одного — унарного предиката принадлежности). «Да,— скажет читатель,— любой предикат ложен, если его попытаться определить на множестве, но ведь в само определение множества явно предикат (любой) не входит — он просто не определяется вначале, а между неопределенностью и ложью большая разница». С этим можно и не согласиться. Если мы говорим «множество», то в самом начале предполагаем, что любой предикат на этом множестве ложен, множество — система, между элементами которой нет никаких связей — все связи ложны, а не неопределенны, ибо считая их неопределенными, мы допускаем, в принципе, их существование. Определяя, собственно, абстрактное множество, не логично рассматривать его как неопределенную систему, но гораздо логичнее рассматривать его как систему, о которой известно, что связей между ее элементами нет — то есть любые предикаты в этой системе являются ложными. Тогда образование системы из «чистого множества» — это «превращение» некоторых ложных предикатов в истинные, что означает появление определенных связей между элементами, связей которых ранее заведомо не было (то есть они были по определению ложными). С учетом ранее принятого нами условия — явно индексировать только истинные предикаты (впрочем, по существу это условие является общепринятым в математической логике) — формулы (18), (19) оказываются довольно наглядными.

Впрочем, даже если считать, что в «чистом множестве» любые отношения неопределенны, импликация (17) все равно истинна, ибо неопределенность, допуская потенциальную истинность, ближе к истине, нежели ложь.

Ввиду принципиальной важности обсуждаемого расширения понятия гомоморфизма заручимся еще поддержкой Н. Бурбаки. В нашем понимании наложение дополнительных ограничений на алгебраическую систему уменьшает разнообразие и именно это ассоциируется с гомоморфизмом. Обратимся к представлению некоторой алгебраической системы как структуры рода T, определяемой как часть некоторого множества M шкалы множеств (см. гл. I, § 7). «Если добавить новые «аксиомы» к тем, которые определяют T, полученная система аксиом определит некоторую часть v множества M, содержащуюся в T; говорят, что структура рода v богаче, чем структура рода T» (Н. Бурбаки [20]). А это значит, что поскольку $v \subset T$, то возможно сюрьективное отображение T на v, но не наоборот, и мощность v, а следовательно, его разнообразие как множества, меньше T.

При этом гомоморфизм любых систем как множеств в той или иной шкале можно рассматривать в соответствии с диаграммой типа $\square$ над схемой St (см. гл. I, § 7, диаграмма (16)). Так что шансы этой диаграммы на место одной из основных метамоделей абстрактной теории систем явно возрастают (ср. гл. II).

Последним аргументом в пользу такого истолкования гомоморфизма является аргумент прагматический: мы можем ввести порядок, перейти к порядковым шкалам на гораздо «большем» множестве алгебраических систем, что оказывается очень удобным. В частности, мы можем высказать утверждение, «что каждый взаимно однозначный гомоморфизм есть изоморфизм» [28], опуская далее следовавший у А. И. Мальцева текст «— в общем случае неверно» [28, стр. 49]. Более того, именно пример, приводимый А. И. Мальцевым, который мы истолковали здесь, как нам кажется, и доказывает правомерность или во всяком случае допустимость такого подхода. Впрочем, при необходимости можно различать «классический» и введенный гомоморфизм по какому-либо дополнительному слову (обобщенный, расширенный и т. д.).

5. «Акт вежливости»

Прежде чем пойти дальше в направлении, декларированном в заглавии настоящего параграфа, очень кратко отметим некоторые работы, в которых в той или иной форме дебатировались вопросы, близкие обсуждаемым. Излишне говорить, что ни о какой полноте не может быть и речи, ибо просто нет работ, в которых по сути не обсуждались бы проблемы тактики моделирования систем. Поэтому мы отметим только две из них. Одну [136] потому, что некоторые ее положения очень удобно было бы изложить на языке динамических множеств, а другую [137] потому, что она близка к нашей по исходной тематике и, похоже, по эмоциональному подтексту, отличаясь основными результатами.

В интересной работе Р. Бенерджи [136] основным метапонятием является понятие задачи, для описания которой рассматриваются некоторые формальные структуры, в сущности сводящие описание задач к некоторым теоретико-множественным Н-моделям систем. Мы не будем излагать определяемые в [136] M-ситуации и W-задачи на классическом языке, а отметим только их Н-модели с использованием понятий, введенных в предыдущем параграфе. W-задачу можно определить как диаграммы типа I над категорией множеств St [27]. Здесь I — направленное множество, которое, в частности, может быть изоморфным временному отрезку T. Тогда W-задача — это просто множество динамических множеств $\{X_t\}$ особого типа, сечения которых определены, например, только для целочисленных моментов времени.

Особенность этих динамических множеств состоит; во-первых, в определенных требованиях к морфизмам сечений и, во-вторых, в наличии некоторого выделенного в St множества B, при «попадании» в которое реализуется выигрышное решение. Точнее, если $x_0 \in X_0$ и существует, динамическое множество X_θ такое, что $B \subset X_\theta$ для некоторого $\theta \leqslant \leqslant T$ и «образ» x_0 принадлежит B, то последовательность морфизмов сечений $f_{t+1}: X_t \to X_{t+1} (t = 0, 1, \ldots \theta)$ называется выигрышным решением.

У Р. Бенерджи используются другие исходные понятия (ср. [136, стр. 38]), но нам кажется, что метапонятия динамического множества и/или теории схем являются более удобными и конструктивными. Это еще более наглядно при определении M-ситуации [136, стр. 36], которая в наших терминах оказывается просто некоторым трехместным динамическим отношением $scdQ_t$; $s \in S$; $c \subset C$; $d \in D$; $t \in \in T$, задаваемым вместе с выделенными множествами S_W и S_L на T (I), где S — множество ситуаций; C, D — множества возможных управлений и возмущений соответственно; S_W — выигрышные, S_L — проигрышные ситуации.

Используя нашу терминологию, можно значительно расширить класс M-ситуаций по сравнению с описанными в [136], рассматривая запаздывающие отношения и отношения с запаздываниями, сохраняя интуитивную наглядность и математическую корректность в соответствии с критерием ФАДЭП. Конечно, речь пока идет только об описании исходных понятий Н-моделей, конкретизация и развитие которых вне данной книги, хотя бы в связи с ограниченным ее объемом. Здесь отметим только взаимосвязь W-задач и Н-модели, рассмотренной в п. 1. Очевидно, эта Н-модель может трактоваться как специальный частный случай W-задач.

Остается очень кратко остановиться на путях обобщения гомоморфизма, предпринятых, например, Ю. А. Гастевым [137, стр. 90]. Им вводятся интересные понятия метаморфизма и параморфизма. «Пусть $U = (A, \Omega_A)$ и $B = (B, \Omega_B)$ — алгебраические системы... Однозначное (но отнюдь не обязательно взаимнооднозначное) отображение

$$\varphi;\ U \to B\,(A \to B;\ \Omega_A \to \Omega_B)$$

такое, что для любого предиката P_A из Ω_B его образ $\varphi(P_A) = P_B$ имеет тот же ранг, а для произвольных x_1, $x_2, \ldots, x_n \in A$ и P_A^n из Ω_A имеет место

$$P_A^n(x_1\ \ldots\ x_n) \supset P_B^n(\varphi(x_1)\ \ldots\ \varphi(x_n)),$$

...мы будем называть метаморфизмом».

Мы привели цитату с принятыми у Ю. А. Гастева обозначениями, отличными от используемых здесь (аргументы перед предикатом, а не после), что, очевидно, не затруднит восприятие.

Итак, при метаморфизме «мы имеем дело с однозначным, но не взаимно однозначным соответствием между сигнатурами» [137], так что несколько предикатов данной арности (это очень существенно) могут, в частности, «склеиться». Говоря нестрого, но наглядно, при метаморфизме сигнатура «уменьшается» за счет того, что «произвольный метаморфизм... индуцирует... некоторое отношение между предикатами (предикат второго порядка)» [137]. Еще более общим понятием является понятие параморфизма, при котором допускается соответствующее уменьшение рангов предикатов при отображении.

Таким образом, по Ю. А. Гастеву возникает возможность ранжирования систем по мере «обеднения» сигнатуры при метаморфизме и параморфизме. Мы же сохраняем понятие гомоморфизма нетронутым и ранжируем системы по мере «обогащения» сигнатуры, т. е. как раз наоборот. Где же здесь «обеднение», если в сигнатуру вводятся дополнительно «предикаты второго порядка»?

Не возникает ли здесь противоречий с интуицией? Рассмотрим пример Ю. А. Гастева. Пусть имеется цветная фотография. Тогда метаморфизм «склеивает в одно бинарное отношение различные отношения порядка: пары «красный — желтый», «синий — голубой» и т. п. переходят (каждая) в пару «темный — светлый» [137] (на черно-белой фотографии). Параморфизм еще более «склеит» отношения, превращая, в частности, цветную фотографию просто в белое поле, все элементы которого по существу одинаковы — неразличимы с точностью до их расположения друг относительно друга. Но ведь белое поле получено путем наложения дополнительных ограничений на первоначальную систему (цветную фотографию), при которых какие-то свойства оказались семантически неразличимыми. Это могло осуществиться, например, путем наложения эквивалентности, являющейся конгруэнтностью по отношению к каким-то свойствам (см. § 1). Так что происходит не «обеднение», а «обогащение» сигнатуры и имеет место (просто) гомоморфизм в предлагаемом нами понимании. При этом за счет наложения дополнительных ограничений разнообразие (еще одно экзогенное М-понятие) основного множества исходной системы уменьшается — система становится проще за счет увеличения наших знаний о ней, что проявилось в наложении дополнительных ограничений — «обогащении» сигнатуры Ω^p.

Чтобы проиллюстрировать тот факт, что «чистое» множество обладает разнообразием большим, чем «нечистое» (с отношениями) множество той же мощности, используем остроумный прием, придуманный Карри [13].

Рассмотрим два множества с одним и тем же числом элементов: множество стульев и множество «евов». Что проще? А что же такое «ев»? Не знаем. Может, это что-то очень сложное или наоборот. Никакие свойства множества «евов» нам неизвестны и любые можно считать ложными. Ясно, что множество стульев проще. Карри придумал, правда, другие слова («об», «тетел», «тантет»), чтобы «вытравить семантический (т. е. относящийся к значению) оттенок...» [13] и получить по существу, как и мы, «чистое» множество (хотя об этом он явно не говорит). Мы не использовали его «неологизмы» просто потому, что они уже имеют определенные свойства, введенные в его книге, и не представляют собой поэтому «чистые» множества для всех, кто эту книгу прочел.

Если нам от «чистого» множества «ничего не нужно», можно не индивидуализировать его отдельные элементы, считая это множество чем-то вроде чистого листа бумаги. При этом накладываются очень сильные ограничения тождественности или, точнее, несущественности нетождественности отдельных элементов. Однако для чистого множества эти, как и остальные, ограничения ложны, и множество при случае может «отомстить» нам разнообразием, не ограниченным никакими отношениями. Чистый лист, если он «на самом деле» чистое множество, может оказаться чем угодно. Не зря же у некоторых восточных народов самым страшным является белый дракон, символизируемый чистым листом бумаги.

6. Язык как алгебраическая система

Если есть основания сделать какие-то допущения о сигнатуре системы, т. е. основное множество вроде бы и не чисто, тогда можно говорить о потенциальном гомоморфизме чистого множества в эту «вроде бы» систему, учитывая, что импликация (17) истинна, если слева ложь, а справа даже потенциальная истина, которая может быть и ложной.

В частности, пусть $S = (X, \Omega)$ — некоторая алгебраическая система. Мы можем дополнить сигнатуру Ω «логической частью» $\Omega^{л}$ $\mathrm{Pr}S = \Omega \bigvee \Omega^{л}$, допуская над предикатами из Ω (и над подмножествами множества X) любые теоретико-множественные и/или логические операции, которые в принципе можно рассматривать как некоторые метаоперации или метапредикаты. Тогда допустимо рассмотрение «расширенной» алгебраической системы $S = (X, \Omega, \Omega^{л})$ как некоторого специального языка моделирования, превращающегося в ту или иную конкретную алгебраическую систему при конструктивной реализации некоторых операций из $\Omega^{л}$. Важно, что во всех этих случаях полученная система является гомоморфным образом данной (базовой), ибо формально в сигнатуру добавляются некоторые предикаты, являющиеся комбинациями исходных. Пока операции из $\Omega^{л}$ не реализуются, речь может идти только о потенциальной осуществимости и ранжированию систем «по гомоморфизму». Конечно, $\Omega^{л}$ может быть, в принципе, произвольной системой метапредикатов. Формально мы можем различать в любой алгебраической системе S множество главных предикатов $\mathrm{Pr}_0 S$ и множество реализованных (с учетом $\Omega^{л}$)

предикатов при тех или иных ограничениях L—$\mathrm{Pr}_L S$. При $L = \varnothing$ индексацию мы будем часто опускать и писать $\mathrm{PR}.S$ ($= \mathrm{Pr}_{\varnothing}S$) и $\mathrm{Pr}S$ ($=\mathrm{Pr}_0 S$). Если

$$\mathrm{Pr}_0 S \subset \mathrm{Pr}_L S, \tag{21}$$

то условие гомоморфизма (18) удовлетворяется и возникает возможность соответствующего ранжирования систем. Интуитивно (21) означает, что объем наших знаний о системе S возрос, что позволило наложить на то же базовое множество больше ограничений.

7. Принцип минимизации домыслов

Возвратимся теперь к моделированию процесса решения задач. Очевидно, отображение $F^{01} : S^0 \to S^1$ может быть реализовано различным образом. При этом, если во всех случаях это отображение — гомоморфизм, возникает естественная упорядоченность возможных Н-моделей по их типам. Верхней границей этого упорядочения является $\alpha \mathrm{Tr} S^0$, так что для любых $\beta \mathrm{Tr} S^1$, $\alpha \geqslant \beta$ равенство типов систем достигается при их изоморфизме. Чем больше предикатов (ограничений), не эквивалентных предикатам из $\mathrm{Pr}S^0$, мы вводим в Н-модель S^0, тем меньше общего между системой и ее Н-моделью. При этом возможны ошибки двух видов.

1. Пусть $P \in \mathrm{Pr}S^0$, но в $\mathrm{Pr}S^1$ вообще не существует предиката, соответствующего P. Тогда условие гомоморфизма (18) нарушается и упущена некоторая (возможно, очень существенная) особенность S^0. Так что на S^1, вообще говоря, нельзя полностью моделировать S^0, поскольку выводы, которые можно получить путем исследования S^1, могут быть несправедливы в S^0.

2. Гомоморфизм имеет место, так что любому предикату из $\mathrm{Pr}S^0$ соответствует предикат из $\mathrm{Pr}S^1$. В общем случае, возможно, что это соответствие осуществляется между $\mathrm{PR}.S^0$ и $\mathrm{PR}.S^1$ или $\mathrm{Pr}S^0$ и $\mathrm{PR}.S^1$ и т. д.

В этом случае мы не упустим никакие связи из S^0, однако, можем прибавить дополнительные как за счет принципиальных особенностей языка, например, в котором строится S^1 (неустранимые в данной ситуации ограничения), так и за счет приписывания S^1 таких свойств (предикатов), которыми S^0 не обладает. Естественно, считать связи, не вытекающие из принципиальной ограниченности моделирования и не присущие S^0 как системе, домыслами, искажающими Н-модель S^1.

При переходе от S^1 к S^2 (решению) возможны также ошибки обеих видов. Как и ранее, естественно стремится к тому, чтобы лишние связи (домыслы) как можно меньше искажали соответствующее отображение. При этом, в отличие от F^{01}, F^{12} может быть чаще изоморфизмом, т. е. возможно $S^1 <> S^2$. Это имеет место в математике, например когда находится точное решение какого-либо уравнения или формулируются две эквивалентные теоремы и т. д. Систему S^2 также можно рассматривать как «индуктивную» Н-модель системы S^1. На основе предыдущего естественно сформулировать принцип минимизации домыслов (ПМД) в виде: Н-модель системы должна обладать максимальным типом, совместным с гомоморфизмом (системы на соответствующую модель), и неустранимыми ограничениями моделирования (в данных условиях).

8. Мера в алгебраических системах

Чтобы наши рассуждения не показались неконструктивными, приведем одну Н-модель, «работающую» по существу на основе ПМД. Вначале несколько слов о понятии меры для алгебраических систем. В «чистом» множестве все элементы равноправны и если им приписывать какую-либо меру, она должна быть совершенно одинакова, ибо нет никаких оснований поступать иначе. По существу это принцип недостаточного основания, выдвинутый при вероятностном истолковании меры еще Я. Бернулли. Вводя те или иные ограничения, т. е. переходя от множества к системе, мы осуществляем гомоморфизм, уменьшающий разнообразие, что приводит к изменению распределения меры на элементах множества — они становятся неравноправными. Рассматривая любое подмножество в алгебраической системе, можно считать, что его мера является характеристикой относительного разнообразия этого подмножества в системе. В частности, для чистых множеств меру подмножеств можно рассматривать как относительную меру мощности ОММ [62]. Мера, в известном смысле, позволяет сводить подмножество системы к подмножеству чистого множества, эквивалентному данному подмножеству по относительному разнообразию. Например, если нормированная к 1 мера подмножества равна 1/2, то это означает, что его относительное разнообразие в системе такое же, как и разнообразие одного элемента в чистом множестве двух элементов. Рассуждая таким образом, можно поставить задачу определения распределения меры на любой алгебраической системе. Мы рассмотрим одну из конструктивных процедур, которая в принципе позволяет говорить об отображении сигнатуры любой алгебраической системы на распределение меры на основном множестве (μ-представлении сигнатуры).

9. Энтропийная форма ПМД

Как известно, существует функционал-энтропия, который зависит от ограничений, накладываемых на множество элементов, и убывает вместе с ростом сигнатуры ограничений. Будем придавать энтропии именно такой общий смысл в связи с более широким истолкованием меры (не только как вероятности). Поэтому энтропия будет пониматься как некоторое отображение (конечно, не биективное) реляционного типа систем на абсолютную (числовую) шкалу.

ПМД в этом случае сводится к максимизации энтропии при дополнительном ограничении, свойственном языку системы (например, $\sum\limits_{i=1}^{n} \mu_i = 1$, где μ_i — мера i-го элемента). Максимизация энтропий

$$H = -\sum_{i=1}^{n} p_i \ln p_i$$

при естественном требовании нормировки гарантирует получение решения S^2, которое вытекает только из явно сформулированных ограничений.

Важный шаг был сделан в 1957 г. Джейнсом [139], который максимизировал энтропию (при вероятностном понимании меры) в общем случае при известных математических ожиданиях некоторых функций от дискретной случайной величины с множеством значений ε

$$f^k = \sum_{\varepsilon} \mu_\varepsilon f^k_{\varepsilon,\alpha}, \qquad k = 1, \ldots, l,$$

где α — некоторое множество параметров. Нетрудно проверить, что максимизация энтропии при этих условиях приводит к так называемому каноническому виду функций распределения:

$$\mu_\varepsilon = [Z_{\{\lambda_k\}}]^{-1} \exp\left\{-\sum_k \lambda_k f^k_{\varepsilon,\alpha}\right\};$$

$$Z_{\{\lambda_k\}} = \sum_{\varepsilon} \exp\left[-\sum_k \lambda_k f^k_{\varepsilon,\alpha}\right].$$

Таким путем Джейнсу удалось построить всю классическую термодинамику, минуя традиционный формализм Гиббса. Конечно, совершенно очевидно, что, как и принцип недостаточного основания, формализм Джейнса применим к широкому кругу задач, в том числе социологических и психологических. Столь же очевидно, что ПМД является более общим утверждением, из которого рассматриваемые процедуры вытекают в виде частных случаев, поскольку в приведенной формулировке ПМД допускает не обязательно энтропийную меру типа систем, не говоря уже об узости вероятностного понимания меры. Тем не менее, основываясь на энтропийной мере и известных (см., например, [140]) свойствах энтропии, в теории вероятностей можно сформулировать энтропийный ПМД [12]. Распределение меры в любой системе максимизирует энтропию при явно заданных ограничениях. Если ограничения неизвестны, необходимо начать с простейших. Вторая фраза явно вытекает из общей формулировки ПМД, ибо, привнося домыслы, мы можем сделать реляционный тип Н-модели несовместимым с типом моделируемой системы. Несмотря на кажущуюся тривиальность этой фразы, из нее вытекают совершенно нетривиальные выводы даже в известных случаях. Простейший вопрос: почему при прогнозировании однократно реализуемых процессов (в частности, экономических) используется критерий наименьших квадратов? Всякого рода вероятностные и статистические аргументы едва ли основательны, так как для таких процессов бессмысленно само понятие вероятности. Тем не менее какие-то предположения надо делать. По ПМД в условиях незнания нужно ограничиться простейшими. Что проще: предположение о том, что имеет смысл понятие среднего значения прогнозируемых параметров по мере или то же предположение с добавлением, что имеет смысл и среднее значение среднеквадратической погрешности. Естественно, первое предположение проще, ибо второе включает дополнительное ограничение. По ПМД следует предпочесть то предположение, которое проще. Но тогда на основании первой части энтропийного ПМД мы придем не к единственно используемому в экономике классическому нормальному распределению и критерию наименьших квадратов (как во втором случае), а к распределению Лапласа и критерию наименьших модулей, который действительно практически часто оказывается более предпочтительным [141]. Другие применения энтропийного ПМД см., например, в [12].

10. Р-статистика

Пусть имеется некоторая (детерминированная) динамическая система, которую мы условно представим в виде S^0 (на самом деле это уже Н-модель).

Первый этап построения Н-моделей реализуется в следующей последовательности:

1) выбирается некоторая схема (категория) Н-моделей ζ;

2) определяется диаграмма типа I над схемой ζ, где I — некоторое упорядоченное множество, сопоставляемое подмножеству множества $T = T/S^0$;

3) сечению S_t^0 системы S^0 сопоставляется $S_\tau^1 \in \mathrm{Ob}\zeta$; $F_{t,\tau}^{01}$: : $S_t^0 \to S_\tau^1$, т. е. сечению S_t^0 соответствует некоторый объект из множества объектов $\mathrm{Ob}\zeta$.

Полученная диаграмма Н-моделей S_τ^1 ($\tau \in I$) является, в частности, просто некоторым частично упорядоченным набором объектов, соответствующих сечениям моделируемой динамической системы.

Итак, изучение системы S^0 начинается с наблюдения за ней на каком-то интервале времени T (интервал определения, существование и т. д.). В результате наблюдений мы получаем в каком-то языке некоторый набор Н-моделей (фотографий) S_τ^1, которые могут быть определены не на всем интервале T, а только на некоторых подинтервалах наблюдения. Множество этих интервалов обозначим символом $\{t_н\}$, а наименьший интервал, их содержащий—$T_н$ ($T_н \leqslant T$). При этом отображение $\{t_н\} \to I$ уже может быть биективно. Множество $\{S_\tau^1\}_{\tau \in I}$, обозначаемое C_I, назовем Р-статистикой (иногда «Р» мы будем подразумевать, если это не может привести к неточности). Начальные знания о системе мы получаем только на основании ее Р-статистики (S_t^0 — не наблюдаемо непосредственно), которую мы, естественно, считаем истинной. Отсюда первым этапом в построении Н-моделей является индуктивный этап, основанный на сборе и на анализе имеющейся Р-статистики. При этом возможны различные индуктивные Н-модели.

Однако среди них особое место будет занимать «наиболее беспристрастная» Н-модель, на которую наложен минимум ограничений и домыслов. Такой моделью может являться в частности, прямая сумма фотографий S_τ^1. Н-модель такого рода мы назовем максимально индуктивной. Будем ее обозначать символом $\sigma_{C_I}^0$ или просто σ_I^0, если ясно, о какой

Р-статистике идет речь. Иногда будет опускаться и индекс I. Все остальные Н-модели являются гомоморфными образами $\sigma^0_{c_I}$, если использовать наше истолкование гомоморфизма. Более того, можно ввести по предыдущему частичный порядок в множество индуктивных моделей. При этом верхней границей будет $\sigma^0_{c_I}$ ($\sigma^0_{c_I} > \sigma_{c_I}$, σ_{c_I} — любая индуктивная Н-модель при данной статистике). σ^0, как будто, минимизирует домыслы и поэтому кажется естественным считать ее идеальной моделью. Однако она является просто «констатацией фактов» и, отображая значения наблюдаемой статистики на множестве I $(=T_{\text{н}})$, ничего не говорит о фотографиях динамической системы в другие моменты времени даже внутри интервала T, т. е. максимально индуктивная Н-модель наименее пригодна для интерполяции и прогнозирования. Мы придаем этим терминам не обязательно численную интерпретацию (интерполяция — определение сечений S^1_τ вне $\{t_{\text{н}}\}$, но внутри интервала $T_{\text{н}}$, а прогнозирование — вне интервала $T_{\text{н}}$).

Ограниченность σ^0 для интерполяции и прогнозирования связана просто с тем, что эта модель не содержит соответствующих сечений, а любые предположения об этих сечениях носят характер ограничений, накладываемых на σ^0. Таким образом, после наложения ограничений уже будем в общем случае иметь какую-то другую модель, гомоморфную σ^0, если только эти ограничения экзогенны. Для более четкого описания введем понятие динамических инвариантов (экзогенных и эндогенных). Будем понимать под динамическим θ-инвариантом свойство, отношение, которое остается неизменным на интервале θ. Можно считать динамическим инвариантом динамическое отношение, интервал стационарности которого равен θ. Иногда θ будем опускать, если ясно, о каком интервале идет речь (например, T) или величина интервала не существенна. Динамический инвариант по отношению к некоторой системе индуктивен, если он определяется на основе Р-статистики, и дедуктивен, если он задан независимо. Анализ Р-статистики сводится к поиску индуктивных динамических θ-инвариантов. Эти инварианты могут быть различны в зависимости от целей анализа (интерполяция или прогнозирование). При прогнозировании «хорошие» θ-инварианты будем называть базовыми [142]. Пример (базового) θ-инварианта — энергия, где θ — время замкнутости системы.

11. Максимально-индуктивная Н-модель

Перейдем теперь к более строгим определениям. Н-модель σ^0 максимально индуктивна в схеме (категории) ζ_{c_I}, являющейся подсхемой ζ, если для любых $\sigma \in \mathrm{Ob}\zeta_{c_I}$, $\sigma^0 \succ \sigma$ при заданной или фиксированной Р-статистике. Обратимся к диаграмме d типа I над схемой (категорией) ζ_{c_I}. Иногда в дальнейшем мы будем идентифицировать множества I и $\{t_{\text{н}}\}$, хотя они не обязаны совпадать в общем случае. Тогда для любых $\tau' \geqslant \tau$ (τ, $\tau' \in I$)

$$\begin{tikzcd}
\tau' \arrow[r, "d"] & S'_{\tau'} \arrow[dr, "u^0_{\tau'}"] \arrow[drr, "u_{\tau'}"] & & \\
 & & \sigma^0 \arrow[r, "g"] & \sigma \\
\tau \arrow[uu] \arrow[r, "d"] & S'_{\tau} \arrow[uu, "f_{\tau,\tau'}"] \arrow[ur, "u^0_{\tau}"] \arrow[urr, "u_{\tau}"'] & &
\end{tikzcd} \qquad (22)$$

Потребуем $\mathcal{U}_\tau = f_{\tau\tau'}\,\mathcal{U}_{\tau'}$ для всех $\mathcal{U}_\tau$ и $\mathcal{U}^0_\tau$. Тогда интуитивно наглядно понятие индуктивного конуса с конечной вершиной σ^0. Формальное определение см., например, в [48]. Н-модели σ получаются на основе обработки всей статистики C_I. Это условно индексируется на диаграмме «выборочными» морфизмами $\mathcal{U}_\tau$, $\mathcal{U}_{\tau'}$. Здесь существенен тот факт, что σ^0 связан с каждой другой индуктивной Н-моделью σ морфизмом g, единым для всех моментов времени из заданного множества θ_I. Конечно, для разных σ — это не один и тот же морфизм. Любая Н-модель σ, кроме «абсолютно точной» максимально индуктивной σ^0, имеет дополнительные ограничения, таким образом, g — гомоморфизм.

Содержательно это означает, что все индуктивные Н-модели могут быть построены на основе σ^0, т. е. σ^0 — это Н-модель, в которую привнесено минимум домыслов. Индуктивные модели наиболее «близки» к Р-статистике. Но «близки» ли они к моделируемой системе S^0?

12. Минимально-проективная Н-модель

Рассмотрим диаграмму, получающуюся из (22) «обращением стрелок» в треугольной части при условии $P_\tau f_{\tau,\tau'} = P_{\tau'}$.

$$\begin{tikzcd}
\tau' \arrow[r] & S'_{\tau'} & & \\
 & & \Sigma^0 \arrow[ul, "P^0_{\tau'}"'] \arrow[dl, "P^0_{\tau}"] & \Sigma \arrow[l, "r"'] \arrow[ull, "P_{\tau'}"'] \arrow[dll, "P_{\tau}"] \\
\tau \arrow[uu] \arrow[r] & S'_{\tau} \arrow[uu, "f_{\tau\tau'}"] & &
\end{tikzcd} \qquad (23)$$

Предположим, что у нас имеется Н-модель Σ^0 такая, что значение Р-статистики в любой момент может быть получено «проекцией» Σ^0 с помощью P_τ^0. При этом любая другая Н-модель Σ, также «проектирующаяся» на Р-статистику, допускает морфизм τ на Σ^0, единый для всех $\tau \in I$. Если τ — гомоморфизм в нашем понимании, то Σ^0 является Н-моделью, на которую наложено максимум ограничений, совместимых с возможностью проективного (дедуктивного) представления статистики с помощью канонических проекций P_τ^0, т. е. Σ^0 можно было бы назвать минимальной проективной Н-моделью, имея в виду упорядоченность, индуцируемую гомоморфизмом.

Подчеркнем еще раз тот факт, что и σ^0 и Σ^0 связаны с каждой другой Н-моделью — морфизмом, единым для всех моментов времени из заданного множества (например, I). Таким образом, σ^0 и Σ^0 в этом смысле являются своеобразными динамическими инвариантами (индуктивным и проективным) рассматриваемой Р-статистики.

13. Принцип максимизации соответствия

Естественно при построении дедуктивных Н-моделей заданной статистики стремиться к тому, чтобы они наиболее полно и точно отображались на статистику $\{S_\tau^1\}$. С этой точки зрения «минимальная» модель Σ^0 является наиболее удовлетворительной, ибо любая другая модель Σ не обладает полным набором ограничений. Иными словами, сигнатура Σ^0 содержит максимальное множество предикатов, соответствующих отношениям в моделируемой статистике. Любая другая проективная Н-модель не обладает столь полной сигнатурой, в результате чего, надо полагать, ее «моделирующие способности» будут ниже. В чем это конкретно может проявиться? В связи с «бедностью» сигнатуры Σ следует ожидать, что проекции P_τ модели Σ в статистику C_I могут оказаться неоднозначными. Иными словами, одному и тому же «значению из статистики» S_τ^1 может соответствовать либо несколько различных морфизмов P_τ, либо несколько различных областей (точек) в Н-модели Σ («либо» — не исключающее). Иначе, Σ обладает слишком многими степенями свободы, из-за чего «дедуктивная» проекция P_τ может оказаться неоднозначной. Если мы добиваемся однозначности за счет сюръективности соответствующего морфизма, то это эквивалентно определению дополнительного отношения (эквивалентности) в сигнатуре Σ. Но введение этого дополнительного отношения означает, что мы уже имеем дело с гомоморфным образом системы, который может совпасть с минимально-проективной Н-моделью Σ^0. Но в идеале нам нужна Н-модель, точно «проектирующаяся» на любую статистику. Однако реализовать это не всегда возможно в связи с неустранимыми ограничениями моделирования, которые, в частности, могут оказаться просто ограничениями нашего знания о моделируемой системе или формально о ее сигнатуре. При построении дедуктивных Н-моделей Σ желательно стремиться к наиболее полному соответствию выбранной модели Σ не только «минимальной» модели Σ^0 при данной C_l. Кажется правдоподобным, что то же имеет место и для случая построения Н-моделей уже не просто статистики, но и самой системы S^0. Отсюда естественно сформулировать для проективных Н-моделей принцип максимизации соответствия ПМС в виде: проективная (дедуктивная) Н-модель системы должна обладать минимальным типом, совместимым с гомоморфизмом (модели на соответствующую систему) и неустранимыми ограничениями моделирования. Здесь существенным является требование гомоморфизма модели на систему (а не Р-статистику, которая нам иногда только и известна). Поэтому ПМС, как и ПМД, является некоторой «идеальной» формулировкой. Частным случаем ПМД для μ-представления алгебраических систем (см. п. 7) является принцип максимального правдоподобия, широко используемый в статистике.

14. На пути к «идеальным» Н-моделям

Минимально-проективная Н-модель Σ^0, вообще говоря, может быть разной в зависимости от Р-статистики. То же относится и к максимально индуктивной Н-модели. Хорошим примером является многочлен n-ой степени, который совершенно точно «проектируется» на обычную статистику, состоящую из n точек. При этом коэффициенты многочлена явно зависят от выбранных точек. Таким образом, минимально-проективная Н-модель, как и максимально-индуктивная, в общем случае не является той идеальной Н-моделью, к которой следует стремиться, просто потому, что она совершенно точно проектируется только на данную статистику.

Нам необходима Н-модель, которая в идеале была бы изоморфна системе S^0, причем не только на интервале наблюдения. Обозначим эту модель $S^{\text{и}}$. По определению идеальная Н-модель $S^{\text{и}}$ является, вообще говоря, недостижимой абстракцией, ибо она должна учитывать не только «настоящее», но и «будущее» системы S^0. Иными словами, сигнатура $S^{\text{и}}$ должна обладать θ-инвариантами при произвольном θ, что не реалистично. Можно ослабить требования к $S^{\text{и}}$, перейдя к моделям «конечной бесконечности», заменяя квантор всеобщности $\forall$ квантором становления $\tilde{\forall}$ (см. § 1) или делая еще какие-то допущения в рамках «прагматической» математики. Однако в общем случае все же имеет смысл представлять себе некоторую «идеальную» Н-модель, к которой мы стремимся при моделировании. Ограничимся теперь некоторым интервалом θ, рассматривая θ-идеальную модель U_θ.

Естественен вопрос, как по крайней мере приблизиться к U_θ в условиях ограниченной статистики и априорных знаний. Пусть имеется некоторая статистика C_l и соответственно максимально-индуктивная Н-модель σ_l^0. Любая другая индуктивная модель σ_l, с помощью которой мы захотим, основываясь на данной статистике, описать более широкое множество фотографий динамической системы, по определению является гомоморфизмом σ_l^0. Она «меньше» σ_l^0, ибо σ_l^0 «наибольшая» для данной статистики модель. Аналогично, так как Σ_l^0 минимально-проективная модель для данного множества C_l, то любая другая проективная модель Σ_l, рассчитанная для описания «расширенного множества», может быть только больше Σ_l^0.

Итак:

$$\sigma_l^0 \succ \sigma_l; \quad \Sigma_l^0 \prec \Sigma_l. \tag{24}$$

Иными словами, для расширения области описания при данной статистике нам нужно накладывать дополнительные ограничения на σ^0 и ослаблять их в Σ^0. Отсюда, в частности, при «прогнозировании» на основе данной статистики

$$\theta_1 \supset \theta \to \left(\sum_{\theta_1} \succ \sum_{\theta}^0\right) \wedge (\sigma_{\theta_1} \prec \sigma_{\theta}^0), \tag{25}$$

где Σ_θ, σ_{θ_1} — Н-модели, описывающие Р-статистику на интервалах θ, θ_1; аналогично $\Sigma_{\theta_1}^0$, σ_θ^0 — «предельные» Н-модели на интервалах θ_1, θ.

Таким образом, в поисках идеальных моделей по мере увеличения интервала описания, мы переходим к «большим» проективным и «меньшим» индуктивным Н-моделям, продвигаясь в диаграммах (22) и (23) вправо. Конечно, за это «движение» в общем случае приходится расплачиваться. В σ как гомоморфном образе σ^0 возможно «склеивание» некоторых сечений S^1_τ, т. е. происходит ухудшение «разрешающей способности» индуктивной Н-модели. В Σ в связи с ослаблением ограничений возможно увеличение разброса (уменьшение точности) морфизмов P_τ. До каких пор будет продолжаться это продвижение вправо? Очевидно, пока не будет с помощью Σ достигнуто описание сечений во всем интервале. Это будет некоторая максимальная (по гомоморфизму) модель относительно базовой Σ^0. Ее естественно обозначить $\max \Sigma^0$. Учитывая, что Σ^0 минимальна среди всех проективных моделей при данной статистике, можно условно записать

$$\max \Sigma^0 = \max \min \Sigma,$$

т. е. происходит максимизация минимально-проективной модели путем последовательного ослабления ограничений.

При этом возможны четыре случая:

1) в соответствии с ПМС мы угадали истинную сигнатуру и тогда

$$\max \min \Sigma = U_\theta;$$

2) мы угадали эту сигнатуру неполностью, но не привнесли никаких лишних предикатов (домыслов), тогда

$$\max \min \Sigma \succ U_\theta;$$

3) «перебор» предикатов сверх истинной сигнатуры

$$\max \min \Sigma \prec U_\theta;$$

4) угаданы не все истинные предикаты и привнесены домыслы, $\max \min \Sigma$ и U_θ не сопоставимы по гомоморфизму.

15. Принцип информативного баланса

Теперь вернемся к рассмотрению σ^0. Увеличивая ограничения, «минимизируем» σ^0 до какого-то значения $\min \sigma^0$. Учитывая, что $\sigma^0 = \max \sigma$, имеем аналогично предыдущему

$$\min \sigma^0 = \min \max \sigma.$$

До каких пор мы будем уменьшать σ^0? Очевидно это желательно делать, пока не произойдет «встреча» индуктивной и проективной модели, т. е.

$$\max\min\Sigma = \min\max\sigma. \tag{26}$$

Эта модель одновременно и индуктивна, и проективна (стрелочки идут и от нее, и к ней от Р-статистики).

В случае 1) (п. 14) мы получаем, очевидно, «настоящий» изоморфизм, в остальных случаях — только «приближенный» и, соответственно, не идеальную, а некоторую компромиссную Н-модель. Здесь существенно, что при «настоящем» изоморфизме исходная статистика не имеет значения, ибо мы угадали истинную, идеальную модель, так что

$$\max\min\Sigma = \min\max\sigma = U_\theta$$

для любой статистики из θ (т. е. статистика нужна только как «индексатор диаграммы»).

Хорошим примером является классическая механика, где для спецификации Н-моделей достаточно одной точки в соответствующем пространстве (начальные условия). Для «приближенного» изоморфизма максимальная проективная модель только «приблизительно» одна и та же для всего интервала θ, а поэтому ее необходимо адаптировать к той или иной статистике, используя «точку встречи», определяемую равенством (26). При этом существует некий предел «точности», определяемый «неустранимыми ограничениями моделирования», связанными и с неполнотой наших знаний, и с неизбежностью наших домыслов. При заданной «точности» моделирования чем лучше мы знаем тип системы, тем меньше нуждаемся в Р-статистике, и наоборот. Иными словами, при прочих равных условиях неточности в априорном и апостериорном знании подчиняются принципу дополнительности. Можно назвать это утверждение принципом информативного баланса ПИБ. Несмотря на очевидность, ПИБ может быть полезен как напоминание о неизбежности компромиссов при моделировании систем.

16. Минимакс!

В общем случае равенство (26), конечно, не должно соблюдаться («индуктивный» путь не всегда приводит к тем же результатам, что и «дедуктивный»). Оно имеет чисто символическое значение, отмечая некоторое направление поисков идеальных моделей. По крайней мере, на данном этапе развития науки моделирования это не только наука, но и искусство в том смысле, что построение моделей, близких к $S^{и}$,— процесс, алгоритмически неопределенный по крайней мере при идентификации. Рассуждения, проводимые при идентификации, как правило, носят эвристический характер — мы широко пользуемся экзогенной (относительно Р-статистики) информацией о «свойствах», «особенностях», «природе» и т. д. системы S^0. Их результатом является выбор некоторого класса диаграмм типа I над базовой схемой (категорией) или схемами, и/или выбор базового множества и/или сигнатуры некоторого класса алгебраических систем. В частности, элементы этого класса могут индексироваться некоторыми численными параметрами, тогда можно говорить, что класс параметризован. Этап спецификации состоит в выборе одной из диаграмм типа I над определенной схемой, элементы которой также однозначно определены. При этом мы стремимся выбрать класс Н-моделей, обладающий в соответствии с ПМС максимумом ограничений, совместимых с неизвестной сигнатурой $S^{и}$, и Н-моделей с минимумом домыслов в рамках выбранных (заданных) ограничений в соответствии с ПМД (этапы не всегда четко определены). Образно говоря, мы реализуем минимаксную стратегию при последовательном выборе ограничений (при идентификации) и домыслов (при спецификации) — максимизируем ограничения и минимизируем домыслы.

В реальных случаях построения Н-моделей сложных систем, сигнатура которых совершенно неизвестна, мы вынуждены искать компромисс на основе «минимаксной стратегии моделирования» в рамках ПИБ. В результате получаются «компромиссные» Н-модели, в различной степени зависящие от Р-статистики в связи с «неустранимыми ограничениями моделирования», определяемыми на каждом этапе уровнем наших знаний.

17. Индуктивная Ф-свертка и дедуктивная В-развертка

Рассмотрим несколько иной подход к описанию тактики моделирования. Пусть X_τ — некоторое динамическое множество. Если к набору сечений этого множества на интервале θ применить некоторую операцию Ф, то в результате получим какое-то множество, которое назовем индуктивной

Ф-сверткой X_τ (обозначение $\underset{\theta}{\Phi} X_\tau$) [12]. Для простоты пока будем считать $\tau = 1, \ldots, n$. В этой терминологии σ^0 есть Ф-свертка Р-статистики при условии, что Ф — прямая сумма сечений $\oplus$, т. е.

$$\sigma^0 = \underset{\theta}{\oplus} X_\tau.$$

Теперь рассмотрим n-арное отношение W, определенное на некотором (стационарном) множестве X. По определению W есть множество цепочек вида $x_i^1 x_i^2 \ldots x_i^n$, где $x_i^k \in X$. Все элементы множества X, стоящие на k-ом месте в цепочках, назовем k-ой проекцией отношения W — $(P_k W)$, множество $\{P_k W\}$ — проекций для разных k — дедуктивной разверткой отношения W. Само отношение W, если оно регламентирует допустимые временны́е последовательности, будем называть временны́м или B-отношением (и соответственно говорить о дедуктивной B-развертке).

В этой терминологии минимально-проективная система Σ^0 есть B-отношение, B-дедуктивная развертка которого совпадает с упорядоченными «цепочками» Р-статистики.

Ослабление ограничений на Σ связано с расширением множества допустимых «цепочек», т. е. с увеличением множества возможных элементов в каждой τ-ой проекции отношения $\Sigma \succ \Sigma^0$. Аналогично наложение дополнительных ограничений на σ^0 приводит к «уменьшению» σ^0 по гомоморфизму.

Реализация «минимаксной» стратегии есть по сути поиск определенного компромисса в рамках ПИБ между индуктивными свертками и дедуктивными развертками.

Рассмотрим пример. Пусть Р-статистика является некоторым набором значений x_τ^i $(\tau = 1, \ldots, n)$ параметров x^i $(i = 1, \ldots, m)$. Максимально-индуктивная Н-модель является прямой суммой Р-статистики. Ее можно рассматривать как множество «парциальных» прямых сумм $\sigma^0 = \{\sigma_i^0\}$, т. е.

$$\sigma_i^0 = \underset{\tau}{\oplus} x_\tau^i.$$

При наложении дополнительных ограничений на σ_0^i (движении «вправо» по диаграмме (22)) мы можем реализовывать, например, «парциальную» интерполяцию в виде

$$\bar{x}^i = \left(\tau, \begin{Bmatrix} x \\ \circ \end{Bmatrix}^i\right) \bar{x}^i,$$

где $\left\{\underset{0}{x}\right\}^i$ — некоторое множество параметров, выбираемых на основании того или иного критерия (например, квадратичного, используемого классической статистикой), который, в частности, минимизируется. При этом мы получаем некоторую Н-модель $\sigma_m \prec \sigma^0$ или условно $\sigma_m = \min\max\sigma$. С другой стороны, на основе тех или иных дедуктивных соображений мы выбираем B-отношения Σ_M, которые можно рассматривать как максимизацию минимальной Н-модели Σ^0, т. е.

$$\Sigma_M = \max\min\Sigma.$$

Конечно, в общем случае $\sigma_m \neq \Sigma_M$ и необходимо их как, то «адаптировать» друг к другу в рамках тех или иных процедур.

18. АТА, АПА и прогнозирование

Рассмотрим для иллюстрации несколько конкретных алгоритмов согласования «минимакса» и «максимина», используемых в разрабатываемой в настоящее время системе прогнозирования параметров (СПП) [142].

Пусть Σ_M определено в виде набора функций $(\{x\}, \{z\})F^k = 0$, где $\{x\}$ — набор переменных $(x^1, x^2, \ldots, x^m)$ $(k = 1, \ldots, l)$; $\{z\}$ — набор каких-то параметров. Для данного частного случая возможен, например, такой алгоритм: для каждого τ минимизируем по $\{x\}$ некоторый «точечный» критерий $(\{x_\tau^i - x^i\})\ V_\tau$, например $V_\tau = \sum\limits_{i=1}^{m} (x_\tau^i - x^i)^2$ в рамках ограничений $F^k = 0$. Производя эту операцию для каждого τ, получим некоторую «адаптированную» к ограничениям «квазистатистику» $\check{x}_\tau^i$, которая может использоваться для интерполяции и построения новой Н-модели σ_m^i, более «согласующей» минимакс и максимин. Алгоритм такого типа назовем алгоритмом точечной адаптации АТА.

Возможен и другой подход, когда ограничения $F^k = 0$ накладываются на «парциальные» модели $\bar{x}^i = \left(\tau, \left\{\underset{0}{x}\right\}\right) x^i$ и мы реализуем «адаптацию» $\left\{\underset{0}{x}\right\}^i$ на различных подмножествах (в частности, расширяющихся) статистической базы. В результате получим «квазистатистику» для $\left\{\underset{0}{x}\right\}^i$. Затем осуществляем парциальную интерполяцию каждого параметра из этого множества и т. д. При этом возможна реализация некоторой итеративной процедуры, на каждом ν-ом этапе которой мы получаем некоторую парциальную Н-модель σ_m^ν, все более согласованную со статистикой и ограничениями. Поэтому описанный алгоритм можно было бы назвать алгоритмом последовательной адаптации АПА. Если адаптируются не обязательно парциальные модели, можно при различных условиях говорить об алгоритмах последовательных прогнозов АПП.

Задача согласования «минимакса с максимином» по существу сводится к определению некоторых (базовых) θ-инвариантов, которые как-то отображают «истинную» структуру системы, Р-статистика которой исследуется. Это необходимо прежде всего для прогнозирования и интерполяции. Поэтому можно рассмотреть различные типы прогнозов в зависимости от вида выбранных θ-инвариантов. Это могут быть числа, функции, отношения, отношения между функциями и т. д.

Реалистично в связи с этим различать прогнозы в зависимости от исходных θ-инвариантов, которые в некоторых случаях могут определяться на основе отмеченных алгоритмов. При этом множество параметров $\{z\}$ в обеих алгоритмах также может рассматриваться как переменные, если параметры не являются базовыми. Для АПА мы получаем последовательность все уточняющихся системных прогнозов, представляемых в «парциальном» виде. Одновременно с этим, специфицируя параметры $\{z\}$, мы «адаптируем» к Р-статистике и функции F^k, превращая их (приближенно) в базовые. Если θ-инвариантом являются функции между параметрами, это позволяет реализовать многовариантный или условный прогноз, особенно важный в практике управления [12].

Нам остается обратить внимание читателя на связь максимально индуктивной и минимально проективной Н-моделей с фундаментальными понятиями прямого и обратного предела, используемыми в теории категорий (и не только там, см. [20]), именно на связь, а не на тождественность. Прямой предел по нашей терминологии — это Ф-свертка по эквивалентности, определяемой исходя из известных морфизмов сечений, а обратный (с точностью до «направления» τ) — дедуктивная развертка, совместимая с этими (известными) морфизмами. Перебросить мостик между этими понятиями можно и нужно для возможности использования очень мощного аппарата теории категорий и другой интерпретации рассмотренных здесь понятий и моделей. Но это предмет более специального исследования.

19. «Влево по лестнице, ведущей вправо»

В предыдущем описании предполагалось фиксированным исходное (базовое) множество Р-статистики, которое и определяет уровень наших индуктивных (апостериорных) знаний о динамической системе S^0. Естественно стремление расширить Р-статистику за счет таких факторов, как специализация (изучение системы S^0 по частям), эксперимент (многократное повторение эволюции системы) и т. д. При расширении Р-статистики в принципе можно считать, что речь идет об увеличении мощности некоторого «чистого» базового множества. В этом случае максимально-индуктивная Н-модель становится больше в соответствии с определениями гомоморфизма (17) и (18) (сигнатура в обеих случаях пуста). Однако действительное увеличение Р-статистики позволяет реализовать «точку встречи», определяемую равенством (26), «правее», дальше от исходной статистики. Ведь при меньшей Р-статистике мы пытаемся расширить множество фотографий системы за счет наложения дополнительных ограничений на σ^0, сдвигаясь по гомоморфизму вправо (22). Таким образом, происходит как бы искусственное «модельное» увеличение Р-статистики в общем случае за счет информации, содержащейся в исходной. Это приводит, в частности, к уменьшению точности проективного описания исходной Р-статистики в меньших σ^0 и больших Σ^0 Н-моделях, т. е. полнота описания в общем случае покупается ценой точности и наоборот. Действительное увеличение Р-статистики, сдвигающее σ^0 левее, в более глубокий минимум, одновременно позволяет продвинуться дальше вправо при тех же ограничениях, ибо то, что получалось при меньшей Р-статистике наложением дополнительных ограничений, теперь этих ограничений не требует.

Итак, чем глубже минимум ($\min \sigma$), тем в общем случае дальше вправо смещается «точка встречи», определяемая равенством (26), значит, «компромиссная» Н-модель может иметь более слабую сигнатуру, т. е. для получения того же эффекта (по точности, полноте и т. д.) моделирования достаточно меньше дедуктивных предположений. Это, очевидно, другая форма ПИБ, который может быть высказан и в более эффектном, но, видимо, менее точном виде: Р-статистика (индукция) и предположения (дедукция) взаимозаменяемы (в определенных пределах, конечно).

Нам остается добавить, что понятие Р-статистики не является абсолютным (как и понятие истины) и может рассматриваться как множество информативных систем СИ, сопряженных тем или иным информационным ИС [12]. Интерпретируя, в частности, динамическую систему S^0 как объективную реальность, а ее Р-статистику $\{S^1_\tau\}$ — как «индуктивные» знания о мире, можно трактовать «компромиссную» Н-модель как общую теорию систем, являющуюся многоуровневой динамической моделью ^{n} (системой ^{n}) (см. гл. I). При этом общезначимые предикаты наиболее высокого уровня в сигнатуре этой модели относятся к абстрактной теории систем, являющейся фрагментом теории абстрактных систем — математики, которая сама, возможно, является минимальной проективной динамической системой, совместимой с изменяющимся уровнем наших знаний.

Может быть именно так построены не только любые Н-модели, но при определенной интерпретации предикатов, сигнатур и т. д. и сам интеллект, который их создает? Почему бы и нет? Ведь речь идет о моделировании произвольных динамических систем.

А нельзя ли хотя бы наметить более наглядную (имеющую привычные Р-модели) интерпретацию для наиболее общей метамодели абстрактной теории систем? По-видимому, можно.

Любую теорию систем (систему?) удобно представить в виде динамической диаграммы (динамического мультиграфа — ДМ, в частности биграфа [12]), вершинами которого является Н-модели (индексируемые М-понятиями, которые можно в абстрактной теории систем назвать массами m_k). Вершины связаны семантическими и синтаксическими морфизмами — потоками m^i_j. При реализации такого ДМ на компьютере можно говорить о компьютерной модели (КМДМ, КМБ). Нашей задачей при работе с такой моделью (как и со всякой другой) является поиск θ-инвариантов с помощью минимаксной тактики моделирования для возможности прогнозирования. Поэтому КМДМ можно также считать автоматизированной (эргатической) системой прогнозирования (АСП). Морфизмы Р-статистики в АСП должны уменьшать разнообразие в рамках компромисса индукции и дедукции. Эти морфизмы неоднозначны, так что одни и те же системы могут иметь самые различные Н-модели и наоборот (синонимия и омонимия моделирования).

В частном случае, когда массы и потоки в АСП — функционалы, допускающие многомерные абсолютные шкалы, мы приходим к меньшей (по гомоморфизму) чем АСП автоматизированной системе прогнозирования параметров. (АСПП). Эту систему можно представить состоящей из блоков: парциальных, взаимоувязанных, функциональных, многовариантных (условных) и оптимизируемых прогнозов, реализуемых, в частности, на основе АТА, АПА и АПП. Эти алгоритмы заменяют Р-статистику квазистатистикой, по поведению которой можно судить — удовлетворяет ли выбранная дедуктивная модель ПМС и/или ПМД. Одним из признаков может быть большая стабильность квазистатистики по сравнению с Р-статистикой (для АТА) или квазистатистики i-го порядка (после i-й итерации) — для АПА и АПП. Эти (и другие) алгоритмы уже реализуются при решении конкретных задач (ср. [12, 142]). В частности, найдены пути оценки инвестиционных коэффициентов эффективности некоторых экономических систем и факторов β_i, коэффициентов эффективности сокращения временных лагов (коэффициентов «время — деньги») γ_i и т. д. Их удалось получить на основе обобщения моделей из [12] на многофакторные системы. Так, для экстенсивных систем [142] норма скорости воспроизводства массы m (в частности, национального дохода) в формуле

$$m^{m^{\tau/t}} = e^{\lambda t} \tag{27}$$

может быть представлена в виде $\lambda = \lambda\,(t, \tau^i, \lambda^i, \tau, \Gamma, \mu, \ldots)$, для которого найдено явное выражение. Здесь τ — парциальный лаг между вложениями и отдачей для i-го фактора; Λ^i — парциальные нормы скорости воспроизводства m; $\tau = \frac{\max}{i}\tau^i$; Г характеризует степень незамкнутости системы; μ — темп роста m.

Итак, от общей метамодели мы спустились достаточно низко в иерархии теорий систем. При этом за счет того, что исходная модель достаточно «большая», удалось расширить множество Н-моделей, ставших Р-моделями, т. е. произошло увеличение Р-статистики таких моделей. Это позволит сдвинуть минимакс абстрактной теории систем правее, в область еще более абстрактную (больших проективных) Н-моделей, что еще больше может увеличить Р-статистику и т. д.

И в этой «положительной обратной связи» индукции и дедукции — движению «влево по лестнице, ведущей вправо» (и/или наоборот) залог бесконечности лестницы (познания) и «экспоненциальности» амплитуды закона движения по ней.

На каждом этапе развития любой теории систем (системы?) в ней может преобладать индуктивная (левая) или дедуктивная (правая) компонента, стремящаяся к балансу (информативному).

Дедуктивные морфизмы проективных Н-моделей из абстрактной теории систем (где используется минимальное число наиболее общих метапонятий, являющихся элементами любых Н-моделей), образующие Р-статистику моделей, могут дать много неожиданного. Например, для последовательностного биграфа с экзогенной n-й вершиной можно, в частности, получить уравнения [12]:

$$\frac{dm_{\kappa-1}}{dt} = \Pi_{\kappa,\,\kappa-1} m_{\kappa}; \quad \frac{dm_{n-1}}{dt} = \Gamma_n,\ \kappa = 1, 2, \ldots, n. \quad (28)$$

Назовем Γ_n — «силой» n-го ранга, а m_κ — «импульсами» k-го порядка. Тогда для определенной интерпретации при $n=1$ имеет закон Аристотеля, при $n=2$ — закон Ньютона, при $n=3$ — закон Лорентца (ср. [121]) как очень частные Н-модели биграфа. И на одной из этих частных Н-моделей (законах Ньютона) в течение нескольких столетий основывалась по крайней мере вся механика. Почему?

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Энгельс Ф. Анти-Дюринг. М., Госполитиздат, 1953.
2. Ленин В. И. Материализм и эмпириокритицизм.— Полн. собр. соч., т. 18.
3. Цопф Г. Отношение и контекст.— В сб.: Принципы самоорганизации. М., «Мир», 1968.
4. Бир Ст. Кибернетика и управление производством. М., «Наука», 1965.
5. Косса П. Кибернетика. М., ИЛ, 1958.
6. Гегель Г. В. Ф. Наука логики. Соч., т. V. М., 1937.
7. Басс Х. Алгебраическая K-теория. М., «Мир», 1973.
8. Брусиловский Б. Я. Информационные и информативные системы.— «Научно-техническая информация», 1970, № 8.
9. Расева Е., Сикорский Р. Математика метаматематики. М., «Наука», 1972.
10. Толстой Л. Н. Анна Каренина. К., Гослитиздат Украины, 1953.
11. Робинсон А. Введение в теорию моделей и метаматематику алгебры. М., «Наука», 1967.
12. Брусиловский Б. Я. Математические модели в прогнозировании и организации науки. К., «Наукова думка», 1975.
13. Карри Х. Основание математической логики. М., «Мир», 1969.
14. Международный математический конгресс в Эдинбурге. М., Физматгиз, 1962.
15. Эшби У. Р. Введение в кибернетику. М., ИЛ, 1959.
16. Хигман Б. Сравнительное изучение языков программирования. М., «Мир», 1974.
17. Пойа Д. Математика и правдоподобные рассуждения. М., «Наука», 1975.
18. Браун П. Обзор макропроцессоров. М., «Статистика», 1975.
19. Линдон Р. Заметки по логике. М., «Мир», 1968.
20. Бурбаки Н. Теория множеств. М., «Мир», 1965.
21. Хомский Н. Язык и мышление. М., Изд-во МГУ, 1972.
22. Шрейдер Ю. А. Логика знаковых систем. М., «Знание», 1974.
23. Маккалок У. Символическое изображение нейрона в виде некоторой логической функции.— В сб.: Принципы самоорганизации. М., «Мир», 1966.
24. Лихтенштейн В. Е. Модели дискретного программирования. М., «Наука», 1971.
25. Бурбаки Н. Очерки по истории математики. М., ИЛ, 1963.
26. Керролл Л. Алиса в стране чудес. София, Издательство литературы на иностранных языках, 1967.

27. Букур И., Деляну А. Введение в теорию категорий и функторов. М., «Мир», 1972.
28. Мальцев А. И. Алгебраические системы. М., «Наука», 1970.
29. Кон П. Универсальная алгебра. М., «Мир», 1968.
30. Клини С. К. Введение в метаматематику. М., ИЛ, 1957.
31. Ленг С. Алгебра. М., «Мир», 1968.
32. Брусиловский Б. Я. Эволюционное программно-целевое управление.— В кн.: Материалы республиканской конференции «Пути повышения эффективности управленческого и инженерно-технического труда». К., изд. УкрНИИНТИ, 1974.
33. Zadeh L. A. Fuzzy Sets.— «Inform. Sontr», 1965, vol. 8.
34. Бурбаки Н. Коммутативная алгебра. М., «Мир», 1971.
35. Габриель И., Цисман М. Категория частных и теория гомотомий. М., «Мир», 1971.
36. Шапиро С. И. От алгоритмов к суждениям. М., «Советское радио», 1973.
37. Садовский В. Н. Основания общей теории систем. М., «Наука», 1974.
38. Михалевский Б. Н. Система моделей среднесрочного народнохозяйственного планирования. М., «Наука», 1972.
39. Марков А. А. О логике конструктивной математики. М., «Знание», 1972.
40. Гинзбург С., Грейбах Ш. Абстрактные семейства языков.— В сб.: Языки и автоматы. М., «Мир», 1975.
41. Ахоу А. В., Улман Дж. Д. Теория языков.— «Кибернетический сборник», 1969, № 6.
42. Бусленко Н. П., Калашников В. В., Коваленко И. Н. Лекции по теории сложных систем. М., «Советское радио», 1973
43. Глушков В. М., Цейтлин Г. Е., Ющенко Е. Л. Алгебра, языки, программирование. К., «Наукова думка», 1974.
44. Маклейн С. Гомология. М., «Мир», 1968.
45. Эйдельман С. Я. Математическая логика. М., «Высшая школа», 1975.
46. Шрейдер Ю. А. Равенство, сходство, порядок. М., «Наука», 1971.
47. Гротендик А. О некоторых вопросах гомологической алгебры. М., ИЛ, 1961.
48. Цаленко М. Ш., Шульгейфер Е. Г. Основы теории категорий. М., «Наука», 1974.
49. Ляпин Е. С. и др. Упражнения по теории групп. М., «Наука», 1967.
50. Теория систем и биология. М., «Мир», 1971.
51. Коэн П. Дж. Теория множеств и континуум — гипотеза. М., «Мир», 1969.
52. Стинрод Н., Эйленберг С. Основания алгебраической топологии. М., Физматгиз, 1958.
53. Спеньер Э. Алгебраическая топология. М., «Мир», 1971.
54. Кроуэлл Р., Фокс Р. Введение в теорию узлов. М., «Мир», 1967.
55. Мошер Р., Тангора М. Когомологические операции и их приложение в теории гомотомий. М., «Мир», 1970.
56. Уайтхед Дж. Новейшие достижения в теории гомотопий. М., «Мир», 1974.
57. Кох Х. Теория Галуа Р-расширений. М., «Мир», 1973.

58. Мендельсон Э. Введение в математическую логику. М., «Наука», 1971.
59. Хьюзмоллер Д. Ю. Расслоенные пространства. М., «Мир», 1970.
60. Минский М., Пейперт С. Персептроны. М., «Мир», 1971.
61. Куратовский К., Мостовский А. Теория множеств М., «Мир», 1970.
62. Брусиловский Б. Я. Применение математических методов в экономике, социологии и психологии К,. «Знання», 1975.
63. Курош А. Г. Общая алгебра. М., «Наука», 1974.
64. Курош А. Г. Лекции по общей алгебре. М., Физматгиз, 1962.
65. Исследования по общей теории систем. М., «Прогресс», 1969.
66. Бурбаки Н. Алгебра. М., Физматгиз, 1962.
67. Эшби У. Р. Принципы самоорганизации.— В сб.: Принципы самоорганизации. М., «Мир», 1968.
68. Ланцош К. Практические методы прикладного анализа. М., Физматгиз, 1961.
69. Общая теория систем. М., «Мир», 1966.
70. Портер У. Современные основания общей теории систем. М., «Наука», 1972.
71. Калман Р., Фалб П., Арбиб М. Очерки по математической теории систем. М., «Мир», 1971.
72. Дарвин Ч. Автобиография. М., «Наука», 1973.
73. Пойа Д. Как решать задачу. М., Учпедгиз, 1959.
74. Урсул А. Д. Природа информации. М., Политиздат, 1968
75. Глушков В. М. Введение в кибернетику К., Изд-во АН УССР. 1964.
76. Шеннон К. Работы по теории информации и кибернетике. М. ИЛ, 1963.
77. Математическая логика и ее приложение. М., «Мир», 1965.
78. Mathematics and Logic.— «Math. Mouthly», 1953, v. 19.
79. Гудстейн Р. Я. Рекурсивный математический анализ. М., «Наука», 1970.
80. Винер Н. Кибернетика. М., «Советское радио», 1958.
81. Френкель А., Бар-Хиллел И Основания теории множества. М., «Мир», 1968.
82. Новиков П. С. Элементы математической логики. М., «Наука», 1973.
83. Лавров И. А., Максимова Л. Л. Задачи по теории множеств математической логики и теории алгоритмов. М., «Наука», 1975.
84. Немыцкий В. В., Степанов В. В. Качественная теория дифференциальных уравнений. М.,, ГИТТЛ, 1949.
85. Фрелихер А., Бухер В. Дифференциальное исчисление в векторных пространствах без нормы. М., «Мир», 1970.
86. Халмош П. Р. Лекции по эргодической теории. М., ИЛ, 1959.
87. Арнольд В. И. Математические методы классической механики. М., «Наука», 1974.
88. Владимиров Д. А. Булевы алгебры. М., «Наука», 1969.
89. Зайцев Г. А. Алгебраические проблемы математической и теоретической физики. М., «Наука», 1974.
90. Дирак П. А. М. Принципы квантовой механики. М., Физматгиз, 1960.
91. Беллман Р. Процессы регулирования с адаптацией. М., «Наука», 1964.

92. Алгебраическая теория автоматов, языков и полугрупп. М., «Статистика», 1975.
93. Бор Н. Атомная физика и человеческое познание. М., ИЛ, 1961.
94. Шредингер Э. Что такое жизнь? М., Атомиздат, 1972.
95. Эйнштейн А. Собр. научных трудов, т. 3. М., «Наука», 1966.
96. Дирак П. А. М. Лекции по квантовой теории поля. М., «Мир», 1971.
97. Борн М. Эйнштейновская теория относительности. М., «Мир», 1964.
98. Эшби У. Р. Конструкция мозга. М., ИЛ, 1962.
99. Бриллюэн Л. Наука и теория информации. М., Физматгиз, 1960.
100. Бриллюэн Л. Научная неопределенность и информация. М., «Мир», 1969.
101. Вигнер Е. Теория групп. М., ИЛ, 1961.
102. Газиорович С. Физика элементарных частиц. М., «Наука», 1969.
103. Де ла Барьер П. Курс теории автоматического управления. М., «Машиностроение», 1973.
104. Международный математический конгресс в Амстердаме. М., Физматгиз, 1961.
105. Рашевский П. К. Риманова геометрия и тензорный анализ. М., ГИТТЛ, 1953.
106. Веблен О. Инварианты дифференциальных квадратичных форм. М., ИЛ, 1948.
107. Ленг С. Введение в теорию дифференцируемых многообразий. М., «Мир», 1967.
108. Нитецки З. Введение в дифференциальную динамику. М., «Мир», 1975.
109. Годбийон К. Дифференциальная геометрия и аналитическая механика. М., «Мир», 1975.
110. Бурбаки Н. Дифференцируемые и аналитические многообразия. М., «Мир», 1975.
111. Минский М. Вычисления и автоматы. М., «Мир», 1971.
112. Карнап Р. Философские основания физики. М., «Прогресс», 1971.
113. Нейман фон Д. Математические основы квантовой механики. М., «Наука», 1964.
114. Ферми Э. Квантовая механика. М., «Мир», 1965.
115. Гейзенберг В. Воспоминания об эпохе развития квантовой механики. Теоретическая физика 20 века. М., ИЛ, 1962.
116. Фудзита С. Введение в неравновесную квантовую статистическую механику. М., «Мир», 1969.
117. Справочная математическая библиотека. Функциональный анализ. М., «Наука», 1972.
118. Кац М. Вероятность и смежные вопросы в физике. М., «Мир», 1965.
119. Адельсон-Вельский Г. М., Диниц Е. А., Карзанов А. В. Потоковые алгоритмы. М., «Наука», 1975.
120. Брусиловский Б. Я. Определение динамических множеств и систем.— В сб.: IV Киевский симпозиум по науковедению и научно-техническому прогнозированию. К., изд. УкрНИИНТИ, 1974.
121. Власов А. А. Статистические функции распределения. М., «Наука», 1966.

122. Пойа Д. Математическое открытие. М., «Наука», 1970.
123. Маделунг Э. Математический аппарат физики. М., Физматгиз, 1961.
124. Вентцель Е. С. Исследование операций. М., «Советское радио», 1972.
125. Колмогоров А. Н., Фомин С. В. Элементы теории функций и функционального анализа. М., «Наука», 1976.
126. Хуа Р., Теплиц В. Гомология и фейнмановские интегралы. М., «Мир», 1969.
127. Фам Ф. Особенности процессов многократного рассеяния. М. «Мир», 1972.
128. Паркинсон С. Н. Закон Паркинсона или пути прогресса.— «Иностранная литература», 1959, № 6.
129. Яновская С. А. Методологические проблемы науки. М., «Мысль», 1972.
130. L'evy P. A propos du paradoxe et de la logique.— «Rev. Metaphys. Mopale», 1957, № 2, p. 130.
131. Кушнер Б. А. Лекции по конструктивному анализу. М., «Наука», 1973.
132. Сакс Дж. Теория насыщенных моделей. М., «Мир», 1976.
133. Деллашери К. Емкости и случайные процессы. М., «Мир», 1975.
134. Ван Хао. Процесс и существование в математике.— В сб. Математическая логика и ее применение. М., «Мир», 1965.
135. Шенфилд Дж. Математическая логика. М., «Наука», 1975.
136. Бенерджи Р. Теория решения задач. М., «Мир», 1972.
137. Гастев Ю. А. Гомоморфизмы и модели. М., «Наука», 1975.
138. Пфанцагль И. Теория измерений. М., «Мир», 1976.
139. Yaynes E. T.— «Phys. Rev.», 1957, v. 106, p. 620.
140. Каган А. М., Линник Ю. В., Рао С. Р. Характеризационные задачи математической статистики. М., «Наука», 1972.
141. Мудров В. И., Кушко В. Л. Метод наименьших модулей М., «Знание», 1971.
142. Брусиловский В. Я. Моделирование организации науки К., «Знання», 1976.
143. Gilbert D.— «Math. Ann.», 1926, № 95, p. 161—190.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Борис Яковлевич Брусиловский

Теория систем и система теорий

Редактор И. В. Мисюренко
Обложка художника Ю. А. Иванченко
Художественный редактор С. П. Духленко
Технический редактор Л. Ф. Волкова
Корректор И. Б. Милевская

Информ. бланк № 1862

Сдано в набор 20. 12. 1976 г. Подписано к печати 3.06. 1977 г. Формат $84 \times 108^1/_{32}$. Бумага типографская № 2. 10,08 усл. печ. л. 10,26 уч.-изд. л. Тираж 3800 экз. Изд. № 3020. БФ 08293. Зак. № 6—3290. Цена 1 р. 79 к.

Головное издательство издательского объединения «Вища школа» 252054, Киев—54, Гоголевская, 7

Головное предприятие республиканского производственного объединения «Полиграфкнига» Госкомиздата УССР, г. Киев, Довженко, 3.