

АВТОМАТИЧЕСКОЕ УПРАВЛЕНИЕ

Я.Н.РОЙТЕНБЕРГ

Я. Н. РОЙТЕНБЕРГ

АВТОМАТИЧЕСКОЕ УПРАВЛЕНИЕ

*Допущено Министерством
высшего и среднего специального образования СССР
в качестве учебного пособия для студентов
механико-математических и физико-математических
факультетов университетов*



ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
МОСКВА 1971

Автоматическое управление. Ройтенберг Я. Н., Изд-во «Наука», Главная редакция физико-математической литературы, М., 1971, 396 стр.

Книга предназначена в качестве учебного пособия для студентов механико-математических и физико-математических факультетов университетов.

В книге излагается теория линейных управляемых систем, как одномерных, так и многомерных. Рассматриваются методы исследования устойчивости и переходных процессов в линейных стационарных системах. Излагаются методы исследования абсолютной устойчивости нелинейных управляемых систем. Далее изучаются системы с конечным временем управления. Изложена теория функций от матриц и изучены вопросы управляемости и наблюдаемости линейных стационарных и нестационарных систем.

Значительная часть книги посвящена вопросам оптимального управления. Изложен метод динамического программирования для дискретных систем и систем непрерывного действия и принцип максимума Л. С. Понтрягина. Детально изучены системы с квадратичным критерием качества. Рассмотрены также вопросы оптимизации систем при наличии случайных помех. Изложены методы А. Н. Колмогорова и Н. Винера и дана подробная теория оптимальных фильтров Калмана — Бьюси.

Илл. 58. Библ. 95 назв.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие	8
Глава 1	
Линейные управляемые системы	9
§ 1. Одномерные управляемые системы	9
1. Системы с одной степенью свободы (9). 2. Функция веса и передаточная функция (12). 3. Частотная характеристика (14). 4. Замкнутая управляемая система (15). 5. Разомкнутая управляемая система (16). 6. Воспроизведение преобразованного входного сигнала (17). 7. Одномерная управляемая система с конечным числом степеней свободы (18). 8. Одно замечание об интегрировании уравнений движения одномерной системы (21).	
§ 2. Многомерные управляемые системы	22
1. Замкнутая управляемая система (22). 2. Характеристический определитель замкнутой управляемой системы (24). 3. Уравнение автоматического управления (25). 4. Разомкнутая управляемая система (26). 5. Интерпретация матричных операторов $W(D)$ и $E_m + W(D)$ (27). 6. О воспроизведении входного сигнала в многомерной управляемой системе (28).	
§ 3. Частотные методы исследования устойчивости линейных управляемых систем	29
1. Преобразование характеристического определителя замкнутой управляемой системы (29). 2. Критерий асимптотической устойчивости замкнутых управляемых систем, содержащих лишь устойчивые звенья (критерий Найквиста) (31). 3. Применение критерия Найквиста к системам с нейтральными звеньями (35). 4. Применение критерия Найквиста к системам с неустойчивыми звеньями (36). 5. Частотные характеристики управляемых систем и их экспериментальное определение (37). 6. Пример построения диаграммы Найквиста (40). 7. Управляемые системы, содержащие звенья с запаздыванием и критерии устойчивости этих систем (41). 8. Логарифмические частотные характеристики (45). 9. Определение устойчивости замкнутой управляемой системы по логарифмическим частотным характеристикам разомкнутой управляемой системы (48).	
§ 4. Функция веса и переходная функция стационарной линейной системы	48
1. Одномерная управляемая система (48). 2. Одномерная управляемая система, у которой передаточная функция	

	является неправильной дробью (54). 3. Многомерные управляемые системы (60).	
§ 5.	Переходные и установившиеся процессы в замкнутых управляемых системах	72
	1. Определение функции веса по частотной характеристике замкнутой системы (72). 2. Определение переходной функции по частотной характеристике замкнутой системы (75). 3. Минимально-фазовые системы (78). 4. Установившиеся процессы в замкнутых управляемых системах. Коэффициенты ошибок (82). 5. Установившиеся процессы в следящей системе (84).	
Г л а в а 2		
	Нелинейные управляемые системы	87
§ 6.	Устойчивость нелинейных управляемых систем. Частотные критерии. Применение прямого метода Ляпунова	87
	1. Об одном классе нелинейных управляемых систем (87). 2. Интерпретация функции $W(D)$ (89). 3. Видоизмененная частотная характеристика (90). 4. Теорема В.-М. Пóпова (93). 5. Геометрическая формулировка теоремы В.-М. Пóпова (93). 6. О возможности при доказательстве теоремы ограничиться случаем $q > 0$ (94). 7. Лемма I (96). 8. Лемма 2 (98). 9. Доказательство теоремы В.-М. Пóпова (100). 10. Применение прямого метода Ляпунова. Метод А. И. Лурье в теории абсолютной устойчивости нелинейных систем (107).	
§ 7.	Нелинейные системы под воздействием внешних сил	108
	1. Приведение задачи к интегральным уравнениям (108). 2. Построение приближенных решений (112).	
§ 8.	Качественные методы исследования движения нелинейных систем	114
	1. Нелинейные системы с одной степенью свободы (114). 2. Консервативные системы (118). 3. Диссипативные системы (123). 4. Автоколебательные системы. Метод точечных преобразований (128).	
§ 9.	Нелинейные системы под воздействием периодических внешних сил	135
	1. Вынужденные колебания нелинейной системы (135). 2. Установившиеся колебания с частотой внешней силы и их устойчивость (142).	
Г л а в а 3		
	Системы с конечным временем управления	147
§ 10.	Функции от матриц и их применение к интегрированию систем линейных дифференциальных уравнений	147
	1. Обобщенная теорема Безу (147). 2. Теорема Гамильтона—Кэли (148). 3. Минимальный полином матрицы (148). 4. Функции от матрицы (151). 5. Интерполяционный полином Лагранжа—Сильвестра (154). 6. Построение функ-	

ции e^{At} (157). 7. Компоненты матрицы A (160). 8. Общие формулы, определяющие компоненты Z_{kj} матрицы A (161). 9. Представление функций от матриц рядами (163). 10. Распространение на функции от матриц интегральной формулы Коши для аналитических функций (167). 11. Некоторые свойства функций от матриц (168). 12. Интегрирование систем линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами при помощи функций от матриц (170). 13. Сравнение с решениями, получаемыми при помощи преобразования Лапласа (174).

§ 11. Управляемость и наблюдаемость линейных систем 176

1. Управляемость систем, описываемых линейными дифференциальными уравнениями с постоянными коэффициентами (176). 2. Системы с одной управляющей силой (183). 3. Наблюдаемость систем, описываемых линейными дифференциальными уравнениями с постоянными коэффициентами (185). 4. Системы с одной наблюдаемой координатой (191). 5. Принцип двойственности в теории управляемости и наблюдаемости (192). 6. Управляемость линейных нестационарных систем (193). 7. Наблюдаемость линейных нестационарных систем (197). 8. Условие управляемости линейной стационарной системы в задаче с подвижными концами (200). 9. Условие управляемости линейной нестационарной системы в задаче с подвижными концами (204).

Глава 4

Метод динамического программирования 207

§ 12. Оптимальное управление в системах с ограниченными ресурсами 207

1. Вариационные задачи в теории управления (207). 2. Метод динамического программирования Р. Беллмана. Принцип оптимальности (208).

§ 13. Применение динамического программирования к дискретным системам 211

1. Рекуррентное соотношение Беллмана (211). 2. Многомерные дискретные системы (217).

§ 14. Применение динамического программирования к системам непрерывного действия 219

1. Задача с фиксированным временем и свободным концом траектории (219). 2. Задача с закрепленным концом траектории и свободным временем (225). 3. Задача о быстродействии (228).

§ 15. Достаточные условия оптимальности и обоснование метода динамического программирования для систем непрерывного действия. Теоремы В. Г. Болтянского 231

1. Постановка задачи. Геометрическая интерпретация уравнения Беллмана в задаче о быстродействии (231). 2. Теорема В. Г. Болтянского для задачи о быстродействии (234). 3. Теорема В. Г. Болтянского для общей задачи динамического программирования (242).

- § 16. Связь уравнения Беллмана с уравнением Гамильтона — Якоби в задачах аналитической механики 244
1. Задача о минимизации интеграла вида $Q = \int_{t_0}^t G(x, u, v) dv$
- (244). 2. Получение уравнения Гамильтона — Якоби из принципа Гамильтона (246).

Глава 5

Принцип максимума Л. С. Понтрягина в теории оптимального управления 251

- § 17. Теорема о необходимом условии оптимальности 251

1. Принцип максимума Л. С. Понтрягина (251). 2. Принцип максимума Л. С. Понтрягина в задаче о быстродействии (254). 3. Доказательство теоремы о необходимом условии оптимальности (принципа максимума) в задаче с закрепленным временем T и свободным концом траектории (255).

- § 18. Принцип максимума для неавтономных систем 261

1. Теорема о необходимом условии оптимальности для неавтономных систем (261). 2. Доказательство теоремы о необходимом условии оптимальности для неавтономной системы с линейным входящим управлением (264). 3. Линейные неавтономные системы. Приведение задачи о быстродействии к краевой задаче (273).

- § 19. Задача с подвижными концами. Применение принципа максимума. Условия трансверсальности 276

- § 20. Понятие регулярного синтеза в теории оптимальных систем 280

- § 21. Достаточное условие оптимальности в форме принципа максимума. Теорема В. Г. Болтянского 291

- § 22. Связь принципа максимума с методом динамического программирования 300

- § 23. Некоторые примеры применения принципа максимума . . . 305

1. Теорема о числе переключений управления в линейной задаче о быстродействии (305). 2. Задача о максимальном отклонении (308). 3. Применение принципа максимума при отсутствии ограничений на управление (310).

- § 24. Оптимальные линейные системы с квадратичным критерием качества 313

1. Задача о регуляторе состояния (313). 2. Задача о регуляторе выхода (324). 3. Стационарные системы с бесконечным временем наблюдения (327). 4. Задача слежения (329).

Глава 6

Стохастические системы 335

- § 25. Преобразование случайных сигналов линейными системами 335

§ 26. Прогноз и фильтрация одномерных случайных процессов	344
1. Метод А. Н. Колмогорова и Н. Винера. Стационарные случайные процессы (344). 2. Решение интегрального уравнения, определяющего функцию веса оптимальной системы (348). 3. Нестационарные случайные процессы. Интегральное уравнение для оптимальной функции веса (351). 4. Оптимальные фильтры Калмана — Бьюси (356).	
§ 27. Многомерные случайные процессы. Оптимальные фильтры Калмана — Бьюси	365
1. Системы с конечным временем наблюдения (355). 2. Стационарные системы с бесконечным временем наблюдения (380). 3. Нестационарные системы с бесконечным временем наблюдения (381). 4. Оптимальная фильтрация коррелированных шумов (383).	
Литература	387
Предметный указатель	392

ПРЕДИСЛОВИЕ

Теория автоматического управления сложилась в настоящее время в обширную дисциплину, результаты которой имеют принципиальное и прикладное значение. Изучение этой науки стало необходимым не только для специалистов в области управления. Вопросы теории управления изучаются теперь большим кругом студентов различных специальностей. В основу настоящей книги положен курс лекций, прочитанных автором студентам-механикам механико-математического факультета Московского университета.

Ведя своих читателей от исходных понятий теории управления к ее современным проблемам, автор стремился показать также связь задач и методов теории управления движением с общими принципами аналитической механики.

Беглый пересказ многочисленных проблем современной теории управления едва ли полезен. Поэтому автор отдал предпочтение детальному и по возможности строгому изложению ряда центральных проблем теории управления. При этом изложенный в книге круг вопросов, которые сами по себе имеют важное значение, может служить основой для последующего изучения монографий и статей по специальным проблемам теории управления — вопросам управления системами с распределенными параметрами, теории преследования, оптимальной стабилизации, теории адаптации и т. д.

Автор приносит глубокую благодарность академику Николаю Николаевичу Красовскому, прочитавшему рукопись и любезно сообщившему ряд важных замечаний, во многом способствовавших улучшению книги.

ЛИНЕЙНЫЕ УПРАВЛЯЕМЫЕ СИСТЕМЫ**§ 1. Одномерные управляемые системы**

1. Системы с одной степенью свободы. Уравнение движения системы с одной степенью свободы, у которой кинетическая энергия $T = \frac{1}{2} k_0 \dot{x}^2$, потенциальная энергия $V = \frac{1}{2} k_2 x^2$, а добавочная неконсервативная сила $Q = -k_1 \dot{x} + z(t)$, будет иметь следующий вид:

$$k_0 \ddot{x} + k_1 \dot{x} + k_2 x = z(t). \quad (1.1)$$

Обозначая через D оператор дифференцирования по времени

$$D = \frac{d}{dt}, \quad (1.2)$$

можно переписать уравнение (1) так:

$$(k_0 D^2 + k_1 D + k_2) x = z(t) \quad (1.3)$$

или

$$x = \frac{1}{k_0 D^2 + k_1 D + k_2} z(t). \quad (1.4)$$

Функция

$$\Phi(D) = \frac{1}{k_0 D^2 + k_1 D + k_2} \quad (1.5)$$

является дробно-рациональной функцией от оператора дифференцирования D и называется *передаточной функцией* системы.

Подставляя в (4) выражение (5), получим

$$x = \Phi(D) z(t). \quad (1.6)$$

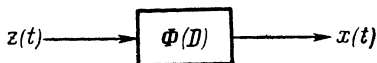


Рис. 1.1.

Соотношение (6) эквивалентно исходному дифференциальному уравнению (1). Этому соотношению можно поставить в соответствие структурную схему, показанную на рис. 1.1.

Функцию $z(t)$ можно назвать *входным* сигналом, а функцию $x(t)$ сигналом на *выходе* системы.

Найдем решение дифференциального уравнения (1). В случае, когда

$$k_1^2 - 4k_0 k_2 < 0, \quad (1.7)$$

корни характеристического уравнения

$$k_0 \lambda^2 + k_1 \lambda + k_2 = 0 \quad (1.8)$$

будут

$$\lambda_1, \lambda_2 = -\varepsilon \pm i\omega, \quad (1.9)$$

где

$$\varepsilon = \frac{k_1}{2k_0}, \quad \omega = \sqrt{\frac{k_2}{k_0} - \frac{k_1^2}{4k_0^2}}. \quad (1.10)$$

При условии (7) решение уравнения (1) имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} x(t) = & x(t_0) e^{-\varepsilon(t-t_0)} \cos \omega(t-t_0) + \\ & + \frac{1}{\omega} [\dot{x}(t_0) + \varepsilon x(t_0)] e^{-\varepsilon(t-t_0)} \sin \omega(t-t_0) + \\ & + \int_{t_0}^t \frac{1}{k_0 \omega} e^{-\varepsilon(t-\tau)} \sin \omega(t-\tau) z(\tau) d\tau. \end{aligned} \quad (1.11)$$

В случае нулевых начальных условий, то есть при

$$x(t_0) = 0, \quad \dot{x}(t_0) = 0, \quad (1.12)$$

закон движения рассматриваемой системы будет

$$x(t) = \int_{t_0}^t \frac{1}{k_0 \omega} e^{-\varepsilon(t-\tau)} \sin \omega(t-\tau) z(\tau) d\tau. \quad (1.13)$$

Обозначим через $k(t)$ следующую функцию:

$$k(t) = \frac{1}{k_0 \omega} e^{-\varepsilon t} \sin \omega t \quad (t \geq 0). \quad (1.14)$$

Эта функция называется *функцией веса* системы (1). Из выражения (11) видно, что $k(t-t_0)$ есть закон движения системы в случае, когда

$$z(t) \equiv 0,$$

а начальные условия таковы:

$$x(t_0) = 0, \quad \dot{x}(t_0) = \frac{1}{k_0}. \quad (1.15)$$

Из выражения (11) можно заключить, что $k(t-t_0)$ будет законом движения системы также и в случае, когда

$$x(t_0) = 0, \quad \dot{x}(t_0) = 0, \quad z(t) = \delta(t-t_0), \quad (1.16)$$

где $\delta(t)$ — единичная импульсная функция (дельта-функция Дирака). Поэтому функция $k(t)$ называется также *импульсной переходной функцией* системы.

Из соотношений (16) следует, что до момента времени $t = t_0$, то есть до приложения единичного импульса, система находилась в покое. В силу этого мы должны принять, что $k(t - t_0) = 0$ при $t < t_0$, то есть функция веса равна нулю при отрицательном значении ее аргумента.

Таким образом, выражение (14), которым определена функция веса $k(t)$, необходимо дополнить соотношением

$$k(t) = 0 \quad \text{при} \quad t < 0. \quad (1.17)$$

В соответствии с (14) можно выражение (13) записать так:

$$x(t) = \int_{t_0}^t k(t - \tau) z(\tau) d\tau. \quad (1.18)$$

Выражение (18) можно преобразовать, полагая

$$\xi = t - \tau. \quad (1.19)$$

Тогда, учитывая, что t является здесь параметром, будем иметь $d\xi = -d\tau$. Так как $\xi = 0$ при $\tau = t$ и $\xi = t - t_0$ при $\tau = t_0$, то получим

$$x(t) = \int_0^{t-t_0} k(\xi) z(t - \xi) d\xi. \quad (1.20)$$

Таким образом, закон движения системы, у которой

$$x(t_0) = 0, \quad \dot{x}(t_0) = 0,$$

будет следующим:

$$x(t) = \int_{t_0}^t k(t - \tau) z(\tau) d\tau = \int_0^{t-t_0} k(\xi) z(t - \xi) d\xi. \quad (1.21)$$

Рассмотрим теперь предельный случай. Пусть

$$t_0 = -\infty,$$

то есть входной сигнал подан бесконечно давно. Если $\varepsilon > 0$, то есть собственные колебания системы (1) асимптотически затухают, то выражение (11) принимает вид

$$x(t) = \lim_{t_0 \rightarrow -\infty} \int_{t_0}^t k(t - \tau) z(\tau) d\tau = \lim_{t_0 \rightarrow -\infty} \int_0^{t-t_0} k(\xi) z(t - \xi) d\xi,$$

что для краткости будем записывать так:

$$x(t) = \int_{-\infty}^t k(t - \tau) z(\tau) d\tau = \int_0^{\infty} k(\xi) z(t - \xi) d\xi. \quad (1.22)$$

Выражение (22) определяет собой *установившийся* процесс в системе.

Пример. В качестве примера найдем установившийся процесс в системе, описываемой дифференциальным уравнением (1),

$$k_0 \ddot{x} + k_1 \dot{x} + k_2 x = z(t)$$

для случая, когда

$$z(t) \equiv k_2 m = \text{const.}$$

Согласно (22) и (14)

$$\lim_{t_0 \rightarrow -\infty} x(t) = \lim_{t_0 \rightarrow -\infty} \int_0^{t-t_0} k(\xi) z(t-\xi) d\xi$$

или

$$\begin{aligned} \lim_{t_0 \rightarrow -\infty} x(t) &= \frac{k_2 m}{k_0 \omega} \lim_{t_0 \rightarrow -\infty} \int_0^{t-t_0} e^{-\varepsilon \xi} \sin \omega \xi d\xi = \\ &= \frac{k_2 m}{k_0 \omega} \lim_{t_0 \rightarrow -\infty} \left[\frac{-e \sin \omega \xi - \omega \cos \omega \xi}{\varepsilon^2 + \omega^2} e^{-\varepsilon \xi} \right]_0^{t-t_0}. \end{aligned}$$

Так как согласно (10) $\varepsilon > 0$, $\varepsilon^2 + \omega^2 = \frac{k_2}{k_0}$, то полученное выражение принимает вид

$$\lim_{t_0 \rightarrow -\infty} x(t) = m.$$

2. Функция веса и передаточная функция. Система, описываемая линейными дифференциальными уравнениями с постоянными коэффициентами, называется стационарной системой. При помощи преобразования Лапласа можно установить весьма интересное соотношение между передаточной функцией и функцией веса стационарной системы.

Напомним [90], что изображением (или преобразованием) некоторой функции $x(t)$ действительного переменного t по Лапласу называется функция комплексного переменного p , определяемая соотношением

$$\mathcal{L}[x(t)] = \int_0^{\infty} x(t) e^{-pt} dt. \quad (1.23)$$

В операционном исчислении Карсона — Хевисайда изображение $\xi(p)$ функции $x(t)$ определяется соотношением

$$\frac{\xi(p)}{p} = \int_0^{\infty} x(t) e^{-pt} dt, \quad (1.24)$$

что не содержит принципиальных отличий от преобразования Лапласа, но представляет удобство тем, что для функции

$x(t) \equiv c$, где $c = \text{const}$, постоянная c служит также изображением: $\xi(p) \equiv c$. Операционное соответствие между функциями $\xi(p)$ и $x(t)$ (функция $x(t)$ называется оригиналом) записывается так:

$$\xi(p) \drightarrow x(t) \quad \text{или} \quad x(t) \leftarrow \xi(p). \quad (1.25)$$

Если известна функция $\xi(p)$, то соответствующий ей оригинал определяется формулой Римана — Меллина

$$x(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{\xi(p)}{p} e^{pt} dp \quad (t \geq 0), \quad (1.26)$$

где интегрирование ведется в плоскости комплексного переменного p вдоль прямой, параллельной мнимой оси и отстоящей от нее на расстоянии c . Эта прямая расположена правее всех особых точек функции $\xi(p)/p$.

Рассмотрим теперь для изученной выше системы (1) функцию $\Phi(p)$ комплексного переменного p , которая образуется из передаточной функции $\Phi(D)$, если в ней аргумент D заменить на p . Согласно (5) функция $\Phi(p)$ будет иметь следующий вид:

$$\Phi(p) = \frac{1}{k_0 p^2 + k_1 p + k_2}. \quad (1.27)$$

Учитывая соотношение (7), (8) и (9), можно представить выражение (27) так:

$$\Phi(p) = \frac{1}{k_0 (p + \varepsilon - i\omega)(p + \varepsilon + i\omega)} = \frac{1}{k_0 [(p + \varepsilon)^2 + \omega^2]}. \quad (1.28)$$

В соответствии с (28)

$$p\Phi(p) = \frac{1}{k_0 \omega} \frac{p\omega}{(p + \varepsilon)^2 + \omega^2}. \quad (1.29)$$

Как известно [17],

$$\frac{p\omega}{(p + \varepsilon)^2 + \omega^2} \drightarrow e^{-\varepsilon t} \sin \omega t.$$

Таким образом,

$$p\Phi(p) \drightarrow \frac{1}{k_0 \omega} e^{-\varepsilon t} \sin \omega t, \quad (1.30)$$

и, следовательно, в соответствии с (14) мы приходим к соотношению

$$p\Phi(p) \drightarrow k(t). \quad (1.31)$$

Это и есть интересующее нас соотношение между передаточной функцией $\Phi(D)$ и функцией веса $k(t)$ системы (1).

Ниже будет показано, что соотношение (31) имеет место для любой стационарной линейной системы с конечным числом степеней свободы.

Передаточная функция $\Phi(D)$ или соответствующая ей функция веса $k(t)$ представляют собой основную динамическую характеристику линейной стационарной системы. Эти функции характеризуют как собственные колебания системы, так и способность системы воспроизводить внешние сигналы. Функции $\Phi(D)$ и $k(t)$ полностью эквивалентны друг другу.

3. Частотная характеристика. Заметим еще, что на основании формулы (26) Римана — Меллина

$$k(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \Phi(p) e^{pt} dp \quad (t \geq 0). \quad (1.32)$$

В системе, у которой все полюсы функции $\Phi(p)$ расположены левее мнимой оси, собственные колебания асимптотически затухают, как это видно из (28) и (11). При вычислении для такой системы интеграла (32) можно принять $c = 0$.

Из соотношений (31) и (24) вытекает, что по известной функции веса $k(t)$ системы функция $\Phi(p)$ определяется формулой

$$\Phi(p) = \int_0^{\infty} k(t) e^{-pt} dt. \quad (1.33)$$

Полагая $p = i\omega$ и учитывая, что $k(t) = 0$ при $t < 0$, можно для системы, у которой все полюсы функции $\Phi(p)$ расположены левее мнимой оси, представить преобразование Фурье для функции веса $k(t)$ в таком виде:

$$\Phi(i\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} k(t) e^{-i\omega t} dt. \quad (1.34)$$

Функция $\Phi(i\omega)$ называется *частотной характеристикой* системы.

В системе, у которой не все полюсы функции $\Phi(p)$ расположены левее мнимой оси, асимптотическое затухание собственных колебаний не имеет места, и определение ее частотной характеристики $\Phi(i\omega)$ нельзя производить по формуле (34), так как несобственный интеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty} |k(t)| dt$$

у такой системы является расходящимся.

4. Замкнутая управляемая система. На рис. 1.2 изображена структурная схема следящей системы, сигнал на выходе которой обозначен через x . Сигнал на входе системы представляет собой некоторую, заранее неизвестную функцию времени $z(t)$. Назначение системы — удерживать для любого момента времени t достаточно близким значение $x(t)$ сигнала на выходе к значению входного сигнала $z(t)$, иными словами, обеспечивать достаточную малость рассогласования

$$\varepsilon = z - x$$

следящей системы.

Конструкция следящей системы, соответствующая структурной схеме на рис. 1.2, может быть различной. Например (рис. 1.3), это может быть смонтированный в опорах вал (называемый следящим валом), центр тяжести которого расположен на оси вращения. Следящий вал приводится во вращение

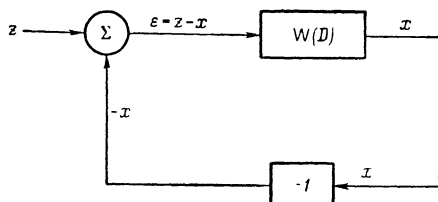


Рис. 1.2.

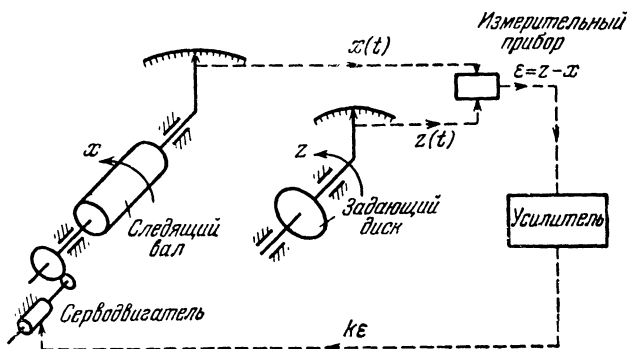


Рис. 1.3.

электродвигателем постоянного тока с независимым возбуждением (серводвигателем). Напряжение, подводимое к цепи якоря двигателя, пропорционально рассогласованию следящей системы. В рассматриваемом примере x представляет собой угол поворота следящего вала, а $z(t)$ — угол поворота некоторого (задающего) диска, движение которого должен повторять следящий вал.

Структурная схема на рис. 1.2 изображает замкнутую управляемую систему. Уравнения движения рассматриваемой здесь

следящей системы можно представить в следующем виде:

$$\left. \begin{aligned} (k_0 D^2 + k_1 D)x &= k_2 \varepsilon, \\ \varepsilon &= z - x, \end{aligned} \right\} \quad (1.35)$$

где $z = z(t)$ — сигнал на входе системы. Первое уравнение (35) представляет собой уравнение движения следящего вала. Второе уравнение (35) определяет величину рассогласования. Обозначая

$$W(D) = \frac{k_2}{k_0 D^2 + k_1 D}, \quad (1.36)$$

можно преобразовать систему уравнений (35) к виду

$$x = W(D)(z - x)$$

или

$$[1 + W(D)]x = W(D)z. \quad (1.37)$$

Если обозначить

$$\Phi(D) = \frac{W(D)}{1 + W(D)}, \quad (1.38)$$

то уравнение (37) примет вид

$$x = \Phi(D)z(t). \quad (1.39)$$

Уравнение (39) называется уравнением замкнутой управляемой системы. Функция $\Phi(D)$ — передаточная функция замкнутой управляемой системы. Изображенная на рис. 1.2 схема преобразована, таким образом, к виду (рис. 1.4), изученному в п. 1.

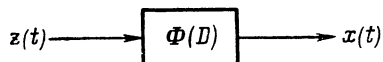


Рис. 1.4.

Для рассматриваемой здесь следящей системы функция $\Phi(D)$ согласно (36) и (38) имеет вид

$$\Phi(D) = \frac{k_2}{k_0 D^2 + k_1 D + k_2}, \quad (1.40)$$

а уравнение (39) эквивалентно дифференциальному уравнению

$$(k_0 D^2 + k_1 D + k_2)x = k_2 z(t). \quad (1.41)$$

5. Разомкнутая управляемая система. Представим себе теперь, что цепь обратной связи в следящей системе разомкнута (рис. 1.5). На вход цепи якоря поэтому поступает напряжение, пропорциональное входному сигналу $z(t)$, а не рассогласованию. Структурная схема следящей системы для указанного случая представлена на рис. 1.5. Эта схема изображает разомкнутую управляемую систему.

В соответствии с (35) уравнения движения следящей системы в рассматриваемом сейчас случае будут

$$(k_0 D^2 + k_1 D) x = k_2 z(t). \quad (1.42)$$

В соответствии с (36) можно преобразовать уравнение (42) к виду

$$x = W(D) z(t). \quad (1.43)$$

Уравнение (43) называется уравнением разомкнутой управляемой системы. Функция $W(D)$ является *передаточной функцией разомкнутой* управляемой системы.

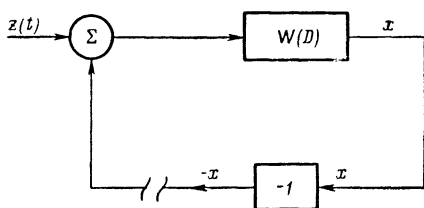


Рис. 1.5.

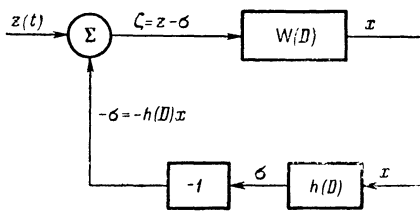


Рис. 1.6.

Полученное выше соотношение (38)

$$\Phi(D) = \frac{W(D)}{1 + W(D)}$$

устанавливает, таким образом, зависимость между передаточными функциями замкнутой и разомкнутой управляемых систем.

6. Воспроизведение преобразованного входного сигнала. Если управляемая система должна воспроизводить не сам входной сигнал $z(t)$, а преобразованный сигнал $H(D)z(t)$, где $H(D)$ — некоторая дробно-рациональная функция от оператора дифференцирования D , то это можно сделать, поместив в цепь обратной связи устройство, передаточная функция которого равна $h(D)$, где

$$h(D) = \frac{1}{H(D)}. \quad (1.44)$$

Таким образом, будем иметь схему, показанную на рис. 1.6. Сигнал рассогласования

$$\xi = z - h(D) x. \quad (1.45)$$

Уравнения замкнутой управляемой системы будут

$$\left. \begin{aligned} (k_0 D^2 + k_1 D) x &= k_2 \xi, \\ \xi &= z - h(D) x. \end{aligned} \right\} \quad (1.46)$$

Эти уравнения, учитывая соотношение (36), перепишем так:

$$x = W(D)[z - h(D)x]$$

или

$$[1 + W(D)h(D)]x = W(D)z(t). \quad (1.47)$$

Передаточная функция замкнутой управляемой системы будет иметь вид

$$\Psi(D) = \frac{W(D)}{1 + W(D)h(D)}. \quad (1.48)$$

Уравнение (47) замкнутой управляемой системы можно в соответствии с (48) переписать так:

$$x = \Psi(D)z(t). \quad (1.49)$$

Разомкнутая управляемая система показана на рис. 1.7. Уравнения разомкнутой управляемой системы будут

$$\left. \begin{aligned} x &= W(D)z(t), \\ \sigma &= h(D)x, \end{aligned} \right\} \quad (1.50)$$

откуда

$$\sigma = h(D)W(D)z(t). \quad (1.51)$$

Таким образом, передаточная функция разомкнутой управляемой системы имеет вид

$$S(D) = h(D)W(D). \quad (1.52)$$

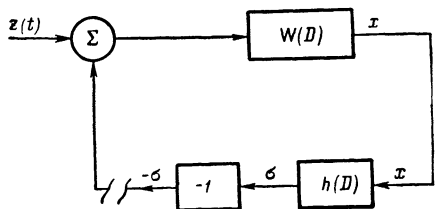


Рис. 1.7.

7. Одномерная управляемая система с конечным числом степеней свободы. Рассмотренная в предыдущих разделах управляемая система с одной степенью свободы представляет собой простейший вид управ-

ляемой системы. Многие управляемые системы обладают не одной, а несколькими степенями свободы. Если назначением управляемой системы является обеспечение близости закона изменения во времени лишь одной из координат $q_j = q_j(t)$ этой системы к некоторой (вообще, заранее неизвестной) функции времени $z(t)$, а к закону изменения во времени остальных обобщенных координат $q_i(t)$ ($i = 1, 2, \dots; i \neq j$) подобные требования не предъявляются, то такая управляемая система может быть названа *одномерной*.

Уравнения движения указанной управляемой системы будут иметь следующий вид:

$$\dot{q}_s = \sum_{k=1}^n A_{sk} q_k + m_s [z(t) - q_j] \quad (s = 1, \dots, n). \quad (1.53)$$

Система скалярных дифференциальных уравнений (53) эквивалентна векторному дифференциальному уравнению

$$\dot{q} = Aq + m [z(t) - q_j], \quad (1.54)$$

где через q , A и m обозначены матрицы

$$q = \begin{bmatrix} q_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ q_n \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} A_{11} & \dots & A_{1n} \\ \cdot & \dots & \cdot \\ A_{n1} & \dots & A_{nn} \end{bmatrix}, \quad m = \begin{bmatrix} m_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ m_n \end{bmatrix}. \quad (1.55)$$

Уравнение (54) можно переписать так:

$$(ED - A)q = m [z(t) - q_j] \quad \left(D = \frac{d}{dt} \right), \quad (1.56)$$

где через E обозначена единичная матрица. Отсюда

$$q = \frac{B(D)m[z(t) - q_j]}{f(D)}, \quad (1.57)$$

где $B(D)$ — присоединенная матрица для матрицы $ED - A$, а через $f(D)$ обозначен определитель матрицы $ED - A$:

$$f(D) = \det(ED - A). \quad (1.58)$$

Из (57) следует, что

$$q_j = \frac{\sum_{l=1}^n B_{jl}(D) m_l [z(t) - q_j]}{f(D)}. \quad (1.59)$$

Таким образом, дифференциальное уравнение, которому удовлетворяет интересующая нас обобщенная координата q_j , будет иметь следующий вид:

$$f(D)q_j = g(D)[z(t) - q_j], \quad (1.60)$$

где

$$g(D) = \sum_{l=1}^n B_{jl}(D) m_l. \quad (1.61)$$

Так как $B_{jl}(D)$ — алгебраическое дополнение элемента, расположенного на пересечении l -й строки и j -го столбца в определителе матрицы $ED - A$, то степень полинома $g(D)$ ниже степени полинома $f(D)$. Полиномы $f(D)$ и $g(D)$ можно записать так:

$$\left. \begin{aligned} f(D) &= a_0 D^n + a_1 D^{n-1} + \dots + a_{n-1} D + a_n, \\ g(D) &= b_0 D^v + b_1 D^{v-1} + \dots + b_{v-1} D + b_v \quad (v < n). \end{aligned} \right\} \quad (1.62)$$

У стационарной системы коэффициенты полиномов (62) a_i ($i = 0, 1, \dots, n$), b_k ($k = 0, 1, \dots, \nu$) постоянны.

Аналогично изложенному выше у рассматриваемой здесь системы можно считать q_j сигналом на выходе системы, а $z(t)$ — входным сигналом.

Для удобства сравнения с рассмотренными выше системами будем ниже вместо q_j писать x и перепишем уравнение (60) так:

$$\left. \begin{aligned} f(D)x &= g(D)\varepsilon, \\ \varepsilon &= z - x, \end{aligned} \right\} \quad (1.63)$$

где через ε обозначено рассогласование. Обозначая

$$G(D) = \frac{g(D)}{f(D)} = \frac{b_0 D^\nu + b_1 D^{\nu-1} + \dots + b_{\nu-1} D + b_\nu}{a_0 D^n + a_1 D^{n-1} + \dots + a_{n-1} D + a_n}, \quad (1.64)$$

можно преобразовать систему уравнений (63) к виду

$$x = G(D)(z - x)$$

или

$$[1 + G(D)]x = G(D)z(t). \quad (1.65)$$

Если обозначить

$$L(D) = \frac{G(D)}{1 + G(D)}, \quad (1.66)$$

то уравнение (65) примет вид

$$x = L(D)z(t). \quad (1.67)$$

Уравнение (67) представляет собой уравнение замкнутой одномерной управляемой системы с конечным числом степеней свободы (рис. 1.8). Функция $L(D)$ является *передаточной функцией замкнутой управляемой системы*.

Так как, согласно (64) и (66)

$$L(D) = \frac{g(D)}{f(D) + g(D)},$$

то уравнение (67) эквивалентно следующему дифференциальному уравнению:

$$[f(D) + g(D)]x = g(D)z(t). \quad (1.68)$$

Разомкнутая управляемая система здесь имеет вид, показанный на рис. 1.9. Уравнение движения разомкнутой системы будет

$$f(D)x = g(D)z(t). \quad (1.69)$$

Учитывая выражение (64), можно привести уравнение (69) к виду

$$x = G(D)z(t). \quad (1.70)$$

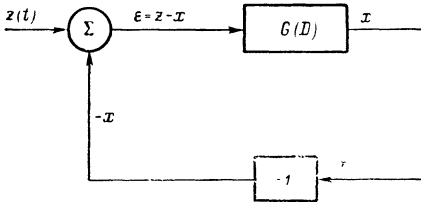


Рис. 1.8.

Уравнение (70) является уравнением разомкнутой управляемой системы, а функция $G(D)$ — передаточная функция этой системы.

8. Одно замечание об интегрировании уравнений движения одномерной системы. Выше мы перешли от исходной системы дифференциальных уравнений (53) к уравнению (60). Функция $z(t)$ входит в уравнение (60) под знаком дифференциального оператора, хотя в исходную систему уравнений (53) производные от $z(t)$ не входили. Решение дифференциального уравнения (60) будет зависеть от начального значения самой функции $z(t)$ и начальных значений производных от $z(t)$ (до начального значения производной от $z(t)$, порядок которой на единицу ниже степени дифференциального оператора $g(D)$). Между тем в решении исходной системы уравнений начальные значения самой функции $z(t)$ и ее производных (если производные от $z(t)$ не входят в исходную систему) не участвуют.

Чтобы пояснить существо вопроса, рассмотрим следующий пример. Пусть дана система уравнений

$$\left. \begin{aligned} \dot{q}_1 + kq_2 &= 0, \\ \dot{q}_2 - kq_1 &= z(t). \end{aligned} \right\} \quad (1.71)$$

Исключая из уравнений (71) переменную q_1 , получим следующее дифференциальное уравнение второго порядка:

$$\ddot{q}_2 + k^2 q_2 = \dot{z}(t). \quad (1.72)$$

Для интегрирования уравнения (72) можно применить методы операционного исчисления. Обозначим

$$\eta_2(p) \doteq q_2(t), \quad \zeta(p) \doteq z(t). \quad (1.73)$$

Так как

$$\left. \begin{aligned} \ddot{q}_2(t) &\leftarrow p^2 \eta_2(p) - p^2 q_2(0) - p \dot{q}_2(0), \\ \dot{z}(t) &\leftarrow p \zeta(p) - p z(0), \end{aligned} \right\} \quad (1.74)$$

то дифференциальному уравнению (72) будет соответствовать следующее уравнение в изображениях:

$$(p^2 + k^2) \eta_2(p) = p \zeta(p) + p^2 q_2(0) + p \dot{q}_2(0) - p z(0). \quad (1.75)$$

Отсюда

$$\eta_2(p) = \frac{1}{p} \frac{p^2}{p^2 + k^2} \zeta(p) + q_2(0) \frac{p^2}{p^2 + k^2} + \frac{1}{k} [\dot{q}_2(0) - z(0)] \frac{pk}{p^2 + k^2}. \quad (1.76)$$

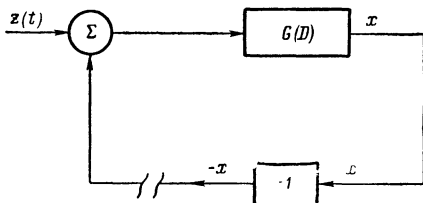


Рис. 1.9.

Учитывая, что

$$\frac{p^2}{p^2 + k^2} \rightarrow \cos kt, \quad \frac{pk}{p^2 + k^2} \rightarrow \sin kt$$

и что на основании теоремы об умножении изображений

$$\frac{1}{p} \frac{p^2}{p^2 + k^2} \xi(p) \rightarrow \int_0^t \cos k(t - \tau) z(\tau) d\tau,$$

найдем, согласно (76) следующий закон изменения координаты q_2 во времени:

$$q_2(t) = \frac{1}{k} [\dot{q}_2(0) - z(0)] \sin kt + q_2(0) \cos kt + \int_0^t \cos k(t - \tau) z(\tau) d\tau. \quad (1.77)$$

Заметим теперь, что из исходной системы уравнений (71) следует, что

$$\frac{1}{k} [\dot{q}_2(0) - z(0)] = q_1(0), \quad (1.78)$$

и, следовательно, решение (77) можно представить в следующем виде:

$$q_2(t) = q_1(0) \sin kt + q_2(0) \cos kt + \int_0^t \cos k(t - \tau) z(\tau) d\tau. \quad (1.79)$$

Выражение (79) не содержит начального значения $z(0)$ функции $z(t)$.

Таким образом, при $q_1(0) = 0$, $q_2(0) = 0$ первые два слагаемых в выражении (77) (соответствующие собственным колебаниям системы) исчезают и выражение (77) принимает вид

$$q_2(t) = \int_0^t \cos k(t - \tau) z(\tau) d\tau. \quad (1.80)$$

§ 2. Многомерные управляемые системы

1. Замкнутая управляемая система. Управляемую систему, у которой как входной сигнал, так и сигнал на выходе являются векторами, будем называть *многомерной* управляемой системой (рис. 2.1).

Структурная схема замкнутой многомерной управляемой системы изображена на рис. 2.2. Здесь α_1 — звено, объединяющее управляемый объект, усилители и исполнительные органы. Через α_2 обозначено звено, состоящее из совокупности

чувствительных элементов, то есть измерительных устройств, измеряющих состояние управляемой системы. Через x_1 обозначен сигнал на выходе звена α_1 . Это — m_1 -мерный вектор. Через x_2 обозначен сигнал на выходе звена α_2 . Это m_2 -мерный вектор.

Дифференциальные уравнения, описывающие процессы в звеньях α_1 и α_2 (имея в виду общую точку зрения Лагранжа, будем называть их уравнениями движения системы), можно представить в виде следующей системы векторных дифференциальных уравнений:

$$\left. \begin{aligned} f_1(D) x_1 &= e_1(D)(z - x_2) + e_r(D) r, \\ f_2(D) x_2 &= e_2(D) x_1. \end{aligned} \right\} \quad (2.1)$$

Здесь $f_1(D)$ — полиномиальная матрица типа $m_1 \times m_1$, элементы которой являются полиномами от D (где $D = d/dt$) с постоянными коэффициентами. Аналогично $f_2(D)$ — полиномиальная матрица типа $m_2 \times m_2$; $e_1(D)$ — полиномиальная матрица типа $m_1 \times m_2$; $e_2(D)$ — полиномиальная матрица типа $m_2 \times m_1$.

Входной сигнал $z(t)$ представляет собой m_2 -мерный вектор. Через $r(t)$ обозначен m_r -мерный вектор, представляющий собой совокупность помех (возмущающих сил), приложенных к системе. Через $e_r(D)$ обозначена полиномиальная матрица типа $m_1 \times m_r$.

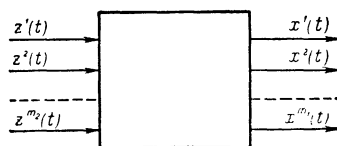


Рис. 2.1.

Вектор $z - x_2$ представляет собой рассогласование системы. Назначение системы — обеспечивать для любого момента времени

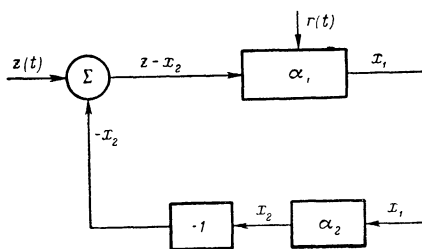


Рис. 2.2.

достаточную малость рассогласования. Критерии, оценивающие качество выполнения этой задачи, могут быть различными, в зависимости от той или иной конкретной управляемой системы. Некоторые из этих критериев будут изложены ниже.

2. Характеристический определитель замкнутой управляемой системы. Входной сигнал z и помеха r представляют собой некоторые (заранее неизвестные) функции времени

$$z = z(t), \quad r = r(t).$$

При изучении устойчивости системы рассматриваются лишь ее собственные движения. Полагая $z(t) \equiv 0$, $r(t) \equiv 0$, получим из (1) уравнения собственных колебаний системы

$$\left. \begin{aligned} f_1(D) x_1 + e_1(D) x_2 &= 0, \\ f_2(D) x_2 - e_2(D) x_1 &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (2.2)$$

Операционная матрица для системы уравнений (2) будет

$$f(D) = \begin{bmatrix} f_1(D) & e_1(D) \\ -e_2(D) & f_2(D) \end{bmatrix}. \quad (2.3)$$

Матрица $f(D)$ является коагулированной (блочной) матрицей. Для того чтобы найти определитель матрицы $f(D)$, сделаем следующие элементарные преобразования. Умножим вторую строку матрицы $f(D)$ слева на матрицу $-e_1(D)f_2^{-1}(D)$ (где $f_2^{-1}(D)$ — матрица, обратная для матрицы $f_2(D)$) и сложим вновь полученную строку с первой строкой. Мы получим тогда треугольную матрицу $f^*(D)$, эквивалентную матрице $f(D)$:

$$f^*(D) = \begin{bmatrix} f_1(D) + e_1(D)f_2^{-1}(D)e_2(D) & 0 \\ -e_2(D) & f_2(D) \end{bmatrix}. \quad (2.4)$$

Так как определители эквивалентных матриц отличаются лишь постоянным множителем, то, с точностью до постоянного множителя, определитель $\Delta(D)$ операционной матрицы $f(D)$ будет

$$\Delta(D) = \det [f_1(D) + e_1(D)f_2^{-1}(D)e_2(D)] \det f_2(D). \quad (2.5)$$

Выражение в квадратных скобках в формуле (5) можно преобразовать

$$\begin{aligned} f_1(D) + e_1(D)f_2^{-1}(D)e_2(D) &= f_1(D) [E_{m_1} + f_1^{-1}(D)e_1(D)f_2^{-1}(D)e_2(D)] = \\ &= f_1(D) [E_{m_1} + W_1(D)W_2(D)] = f_1(D) [E_{m_1} + W(D)], \end{aligned} \quad (2.6)$$

где

$$W_i(D) = f_i^{-1}(D)e_i(D) = \frac{F_i(D)e_i(D)}{\Delta_i(D)}, \quad (i = 1, 2), \quad (2.7)$$

$$W(D) = W_1(D)W_2(D) = \frac{F_1(D)e_1(D)F_2(D)e_2(D)}{\Delta_1(D)\Delta_2(D)}. \quad (2.8)$$

Здесь через E_{m_1} обозначена единичная матрица типа $m_1 \times m_1$. Через $F_i(D)$ обозначена присоединенная матрица для матрицы $f_i(D)$, а $\Delta_i(D)$ является определителем матрицы $f_i(D)$:

$$\Delta_i(D) = \det f_i(D) \quad (i = 1, 2).$$

Из выражений (7) видно, что $W_1(D)$ — матрица типа $m_1 \times m_2$, $W_2(D)$ — матрица типа $m_2 \times m_1$, а $W(D)$ — квадратная матрица типа $m_1 \times m_1$.

Матрица $W_i(D)$ ($i = 1, 2$) является *матричной передаточной функцией* звена α_i .

Таким образом, выражение (5) принимает вид

$$\Delta(D) = \det \{f_1(D) [E_{m_1} + W(D)]\} \det f_2(D). \quad (2.9)$$

Так как определитель произведения двух матриц равен произведению их определителей и, кроме того, определители коммутативны при умножении, то выражение (9) можно переписать так:

$$\Delta(D) = \Delta_1(D) \Delta_2(D) \det [E_{m_1} + W(D)]. \quad (2.10)$$

Определитель (10) представляет собой *характеристический определитель замкнутой* управляемой системы.

Характеристическое уравнение замкнутой управляемой системы будет следующим:

$$\Delta(p) = 0. \quad (2.11)$$

Замкнутая управляемая система будет асимптотически устойчивой, если все корни характеристического уравнения (11), то есть все нули функции $\Delta(p)$, будут расположены левее мнимой оси на плоскости комплексного переменного p .

3. Уравнение автоматического управления. Возвращаясь к уравнениям (1)

$$\begin{aligned} f_1(D) x_1 + e_1(D) x_2 &= e_1(D) z + e_r(D) r, \\ -e_2(D) x_1 + f_2(D) x_2 &= 0 \end{aligned}$$

и исключим из этих уравнений вектор x_2 . Для этого умножим все члены во втором уравнении (1) слева на матрицу $-e_1(D) f_2^{-1}(D)$ и сложим вновь полученное уравнение с первым уравнением (1). Будем иметь

$$[f_1(D) + e_1(D) f_2^{-1}(D) e_2(D)] x_1 = e_1(D) z + e_r(D) r, \quad (2.12)$$

или согласно (6)

$$f_1(D) [E_{m_1} + W(D)] x_1 = e_1(D) z + e_r(D) r. \quad (2.13)$$

Умножая левую и правую части уравнения (13) слева на матрицу $f_1^{-1}(D)$, получим

$$[E_{m_1} + W(D)] x_1 = f_1^{-1}(D) e_1(D) z + f_1^{-1}(D) e_r(D) r. \quad (2.14)$$

Обозначим

$$f_1^{-1}(D) e_r(D) = \frac{F_1(D) e_r(D)}{\Delta_1(D)} = R(D). \quad (2.15)$$

Матрица $R(D)$ будет матрицей типа $m_1 \times m_r$. Ее можно назвать *передаточной матрицей помех*.

Так как согласно (7)

$$f_1^{-1}(D) e_1(D) = \frac{F_1(D) e_1(D)}{\Delta_1(D)} = W_1(D),$$

то уравнение (14) принимает вид

$$[E_{m_1} + W(D)] x_1 = W_1(D) z + R(D) r \quad (2.16)$$

или

$$x_1 = [E_{m_1} + W(D)]^{-1} W_1(D) z + [E_{m_1} + W(D)]^{-1} R(D) r. \quad (2.17)$$

Уравнение (17) описывает процессы в замкнутой управляемой системе и называется *уравнением автоматического управления*.

4. Разомкнутая управляемая система. На рис. 2.3 изображена разомкнутая управляемая система. Как видно из

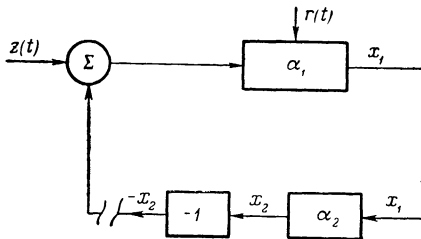


Рис. 2.3.

уравнений (1), процессы в разомкнутой управляемой системе описываются следующими векторными дифференциальными уравнениями:

$$\left. \begin{aligned} \hat{f}_1(D) x_1 &= e_1(D) z(t) + e_r(D) r, \\ \hat{f}_2(D) x_2 &= e_2(D) x_1. \end{aligned} \right\} \quad (2.18)$$

Уравнения собственных колебаний разомкнутой управляемой системы получим из уравнений (18), полагая $z(t) \equiv 0$, $r(t) \equiv 0$. Таким образом, будем иметь

$$\left. \begin{aligned} f_1(D) x_1 &= 0, \\ f_2(D) x_2 &= e_2(D) x_1. \end{aligned} \right\} \quad (2.19)$$

Операционная матрица для системы уравнений (19) будет

$$f_0(D) = \begin{bmatrix} f_1(D) & 0 \\ -e_2(D) & f_2(D) \end{bmatrix}. \quad (2.20)$$

Определитель $\Delta_0(D)$ матрицы $f_0(D)$ имеет следующий вид:

$$\Delta_0(D) = \Delta_1(D) \Delta_2(D), \quad (2.21)$$

где, как и выше, через $\Delta_i(D)$ ($i = 1, 2$) обозначен определитель матрицы $f_i(D)$. Определитель $\Delta_0(D)$ является *характеристическим определителем разомкнутой* управляемой системы.

Вернемся к уравнениям (18). Первое уравнение интегрируется независимо от второго уравнения. Это уравнение можно переписать так:

$$\begin{aligned} x_1 &= \\ &= f_1^{-1}(D) e_1(D) z + f_1^{-1}(D) e_r(D) r. \end{aligned} \quad (2.22)$$

Учитывая выражения (7) и (15), приведем уравнение (2.22) к виду

$$x_1 = W_1(D) z + R(D) r. \quad (2.23)$$

Уравнение (23) описывает движение управляемой системы, разомкнутой на выходе звена α_2 .

Уравнение автоматического управления (17) отличается от уравнения (23) наличием в правой части оператора $[E_{m_1} + W(D)]^{-1}$. Управляемая система должна возможно точнее воспроизводить входной сигнал $z(t)$ и быть мало восприимчивой к помехам $r(t)$. Оператор $W(D)$ должен строиться так, чтобы эти требования выполнялись возможно лучше.

5. Интерпретация матричных операторов $W(D)$ и $E_{m_1} + W(D)$. Рассмотрим управляемую систему, в которой разомкнута прямая связь между звеном α_1 и звеном α_2 . Пусть

$$z(t) \equiv 0, \quad r(t) \equiv 0, \quad (2.24)$$

а на вход звена α_2 подается некоторый сигнал $\vartheta(t)$, который представляет собой m_1 -мерный вектор (рис. 2.4).

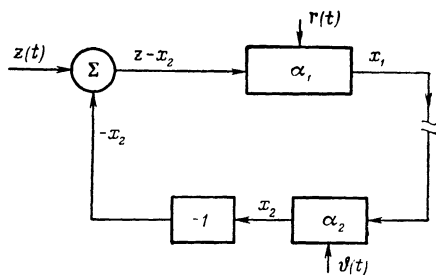


Рис. 2.4.

В соответствии с (1) процессы в разомкнутой на выходе звена α_1 управляемой системе будут описываться следующими уравнениями:

$$\left. \begin{aligned} f_1(D) x_1 &= -e_1(D) x_2, \\ f_2(D) x_2 &= e_2(D) \vartheta(t). \end{aligned} \right\} \quad (2.25)$$

Отсюда, учитывая (7), получим

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= -W_1(D) x_2, \\ x_2 &= W_2(D) \vartheta(t) \end{aligned} \right\} \quad (2.26)$$

или

$$x_1 = -W_1(D) W_2(D) \vartheta(t). \quad (2.27)$$

Так как согласно (8)

$$W_1(D) W_2(D) = W(D), \quad (2.28)$$

то уравнение (27) принимает вид

$$x_1 = -W(D) \vartheta(t). \quad (2.29)$$

Таким образом, матрица $W(D)$ представляет собой взятую с обратным знаком *матричную передаточную функцию* управляемой системы, *разомкнутой на выходе первого звена*.

Обратимся теперь к возможной интерпретации оператора $E_{m_1} + W(D)$. Сигнал на выходе звена α_1 , то есть вектор x_1 после прохождения сигнала $\vartheta(t)$ через разомкнутую систему, показанную на рис. 2.4, определяется выражением (29). Разность между сигналом $\vartheta(t)$, поданным на вход звена α_2 , и сигналом на выходе разомкнутой системы будет

$$\vartheta(t) - [-W(D) \vartheta(t)] = [E_{m_1} + W(D)] \vartheta(t). \quad (2.30)$$

Величину (30) Боде [13] назвал *возвратной разностью*. Квадратная матрица $E_{m_1} + W(D)$ может быть в этом смысле названа *матрицей возвратной разности*.

6. О воспроизведении входного сигнала в многомерной управляемой системе. Уравнение (17), описывающее процессы в многомерной управляемой системе, имеет вид

$$x_1 = [E_{m_1} + W(D)]^{-1} W_1(D) z(t) + [E_{m_1} + W(D)]^{-1} R(D) r(t).$$

Так как согласно (8)

$$W_1(D) = W(D) W_2^{-1}(D), \quad (2.31)$$

то уравнение (17) можно переписать так:

$$x_1 = [E_{m_1} + W(D)]^{-1} W(D) W_2^{-1}(D) z(t) + [E_{m_1} + W(D)]^{-1} R(D) r(t). \quad (2.32)$$

Из второго уравнения системы (1) следует, что

$$x_2 = W_2(D) x_1. \quad (2.33)$$

Подставляя в (33) значение x_1 из (32), получим

$$x_2 = W_2(D) [E_{m_1} + W(D)]^{-1} W(D) W_2^{-1}(D) z(t) + \\ + W_2(D) [E_{m_1} + W(D)]^{-1} R(D) r(t). \quad (2.34)$$

При $r(t) \equiv 0$ выражение (34) принимает вид

$$x_2 = W_2(D) [E_{m_1} + W(D)]^{-1} W(D) W_2^{-1}(D) z(t). \quad (2.35)$$

Уравнение (35) представляет собой обобщение уравнения (1.39), описывающего воспроизведение входного сигнала в одномерной системе.

§ 3. Частотные методы исследования устойчивости линейных управляемых систем

1. Преобразование характеристического определителя замкнутой управляемой системы. Как показано в § 2 (2.10), характеристический определитель замкнутой управляемой системы имеет следующий вид:

$$\Delta(D) = \Delta_1(D) \Delta_2(D) \det [E_{m_1} + W(D)].$$

Здесь $\Delta_i(D)$ ($i = 1, 2$) — характеристические определители звеньев управляемой системы, причем согласно (2.21) произведение этих определителей представляет собой определитель разомкнутой управляемой системы

$$\Delta_0(D) = \Delta_1(D) \Delta_2(D).$$

Таким образом, определитель замкнутой управляемой системы можно записать так:

$$\Delta(D) = \Delta_0(D) \det [E_{m_1} + W(D)]. \quad (3.1)$$

Согласно (2.7) и (2.8)

$$W(D) = W_1(D) W_2(D) = \frac{F_1(D) e_1(D) F_2(D) e_2(D)}{\Delta_1(D) \Delta_2(D)}, \quad (3.2)$$

то есть

$$W(D) = \frac{F_1(D) e_1(D) F_2(D) e_2(D)}{\Delta_0(D)}. \quad (3.3)$$

Матрица $W(D)$ является квадратной матрицей типа $m_1 \times m_1$ и в соответствии с выражением (3) все элементы матрицы

$$W(D) = \begin{bmatrix} W_{11}(D) & W_{12}(D) & \dots & W_{1m_1}(D) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ W_{m_1,1}(D) & W_{m_1,2}(D) & \dots & W_{m_1,m_1}(D) \end{bmatrix} \quad (3.4)$$

представляют собой дробно-рациональные функции от оператора дифференцирования D , у каждой из которых знаменатель равен $\Delta_0(D)$.

Матрица $E_{m_1} + W(D)$ имеет вид

$$E_{m_1} + W(D) = \begin{bmatrix} 1 + W_{11}(D) & W_{12}(D) & \dots & W_{1m_1}(D) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ W_{m_11}(D) & W_{m_12}(D) & \dots & 1 + W_{m_1m_1}(D) \end{bmatrix}. \quad (3.5)$$

Определитель этой матрицы можно привести к следующему виду:

$$\det [E_{m_1} + W(D)] = 1 + K(D), \quad (3.6)$$

где $K(D)$ — дробно-рациональная функция от D

$$K(D) = \frac{L(D)}{[\Delta_0(D)]^{m_1}}, \quad (3.7)$$

а $L(D)$ — некоторый полином от D . Из выражений (6) и (1) следует, что

$$\Delta(D) = \Delta_0(D) [1 + K(D)] \quad (3.8)$$

или согласно (7)

$$\Delta(D) = \Delta_0(D) + \frac{L(D)}{[\Delta_0(D)]^{m_1-1}}. \quad (3.9)$$

Так как $\Delta(D)$ — целая функция (поскольку она представляет собой определитель замкнутой управляемой системы), то очевидно, что

$$L(D) = M(D) [\Delta_0(D)]^{m_1-1}, \quad (3.10)$$

где $M(D)$ — некоторый полином от D .

Таким образом,

$$K(D) = \frac{M(D)}{\Delta_0(D)}. \quad (3.11)$$

Выражение (8) теперь принимает вид

$$\Delta(D) = \Delta_0(D) \left[1 + \frac{M(D)}{\Delta_0(D)} \right] = \Delta_0(D) + M(D). \quad (3.12)$$

Для того чтобы управляемая система была *асимптотически устойчивой*, необходимо, чтобы все нули полинома $\Delta(p)$ были расположены в левой полуплоскости комплексного переменного p .

Необходимые и достаточные условия, при которых эти требования выполняются, даются критерием Гурвитца [17, 21]. Большие возможности, однако, дает критерий Найквиста, который позволяет судить об устойчивости *замкнутой* управляемой системы по частотным характеристикам *разомкнутой* системы.

Частотной характеристикой разомкнутой управляемой системы называется функция

$$W(i\omega) = [W(p)]_{p=i\omega} \quad (-\infty < \omega < \infty),$$

где $W(D)$ — матричная передаточная функция разомкнутой системы, которая определена в § 2 формулой (2.28).

Так как, согласно (2.28)

$$W(D) = W_1(D) W_2(D),$$

где $W_1(D)$ и $W_2(D)$ — матричные передаточные функции звеньев системы, то

$$W(i\omega) = W_1(i\omega) W_2(i\omega),$$

и для построения частотной характеристики разомкнутой управляемой системы требуется лишь знание частотных характеристик ее звеньев. Последние же, если неизвестно аналитическое выражение функций $W_i(D)$, могут быть определены экспериментально, как это показано ниже. Таким образом, основная ценность критерия Найквиста состоит в том, что он позволяет судить об устойчивости замкнутой управляемой системы не только по аналитическим, но и по экспериментальным характеристикам *разомкнутой* системы. Этот критерий, излагаемый ниже, был предложен Найквистом [13] для усилителей с обратной связью и применен А. В. Михайловым [65] и др. к регулируемым системам.

2. Критерий асимптотической устойчивости замкнутых управляемых систем, содержащих лишь устойчивые звенья (критерий Найквиста). Сначала рассмотрим управляемые системы, звенья которых устойчивы. Это означает, что характеристические определители звеньев $\Delta_i(p)$ не имеют нулей в правой полуплоскости комплексного переменного p .

Мы ограничимся рассмотрением систем, для которых у функции

$$K(D) = \frac{M(D)}{\Delta_0(D)}$$

степень числителя не выше степени знаменателя. Так как согласно (8)

$$\Delta(p) = \Delta_0(p) [1 + K(p)] = \Delta_0(p) \left[1 + \frac{M(p)}{\Delta_0(p)} \right],$$

то очевидно, что нулями функции $\Delta(p)$ являются нули функции

$$1 + K(p) = \frac{\Delta_0(p) + M(p)}{\Delta_0(p)}. \quad (3.13)$$

Нулями функции $1 + K(p)$ являются нули ее числителя, а полюсами — нули ее знаменателя. Если все звенья управляемой системы асимптотически устойчивы, то функция $\Delta_0(p)$ не имеет нулей в правой полуплоскости комплексного переменного p . Поэтому указанный ниже интеграл по замкнутому контуру C , расположенному в правой полуплоскости p , будет иметь следующее значение:

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{K'(p) dp}{1 + K(p)} = -N + P = -N, \quad (3.14)$$

где N — число нулей, а P — число полюсов, которые имеет функция $1 + K(p)$ в области, ограниченной контуром C .

Заметим, что обычно при формулировке теоремы Коши в теории функций комплексного переменного обход по замкнутому наружному контуру производится против направления движения стрелки часов, то есть так, чтобы область, охватываемая контуром, оставалась слева. Здесь принят обход по направлению движения стрелки часов, и поэтому в правой части выражения (14) мы имеем $-N + P$.

Если при помощи конформного отображения

$$K = K(p)$$

отобразить контур C на плоскость K , то выражение (14) примет вид

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \frac{dK}{1 + K} = -N, \quad (3.15)$$

где Γ — контур на плоскости K , полученный в результате отображения. Направление обхода по этому контуру дается отображением и не может быть выбрано произвольно.

Так как коэффициенты полиномов $M(p)$ и $\Delta_0(p)$ действительны, то действительным точкам p соответствуют действительные точки на плоскости K . Точке $p = 0$ и бесконечно удаленной точке $p = \infty$ соответствуют также действительные точки $K(0)$ и $K(\infty)$. Точкам $p = \varepsilon + i\omega$ и $p = \varepsilon - i\omega$ соответствуют симметричные точки $K(\varepsilon + i\omega)$ и $K(\varepsilon - i\omega) = \bar{K}(\varepsilon + i\omega)$. Поэтому, если контур C симметричен относительно действительной оси, то и контур Γ на плоскости K будет симметрично расположен относительно действительной оси. Величина $1 + K$ есть некоторая комплексная величина. На плоскости K она представляет собой радиус-вектор точки, лежащей на контуре Γ . Начало этого радиус-вектора расположено в точке $(-1, 0)$.

Так как

$$1 + K = |1 + K| e^{i \arg(1 + K)}, \quad (3.16)$$

$$\ln(1 + K) = \ln|1 + K| + i \arg(1 + K), \quad (3.17)$$

$$\frac{dK}{1 + K} = d \ln(1 + K) = d \ln|1 + K| + i d \arg(1 + K), \quad (3.18)$$

то

$$-N = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \frac{dK}{1 + K} = \frac{1}{2\pi} \oint_{\Gamma} d \arg(1 + K) = \frac{\Delta \arg(1 + K)}{2\pi}, \quad (3.19)$$

где $\Delta \arg(1 + K)$ — приращение аргумента радиус-вектора $1 + K$ при обходе по замкнутому контуру Γ . Интеграл от первого слагаемого в выражении (18)

$$\oint_{\Gamma} d \ln|1 + K| = 0, \quad (3.20)$$

так как контур Γ — замкнутый.

Таким образом, N равно числу S полных оборотов вектора $1 + K$ вокруг точки $(-1, 0)$, когда p описывает контур C по стрелке часов, причем обороты вектора $1 + K$ считаются положительными также по стрелке часов

$$S = N. \quad (3.21)$$

Заметим, что если считать обороты вектора $1 + K$ положительными, когда они совершаются против стрелки часов, то число оборотов вектора $1 + K$ будет согласно (15) равно N .

Для решения вопроса об асимптотической устойчивости замкнутой управляемой системы необходимо выбрать в плоскости p контур, который охватывал бы всю правую полуплоскость.

Пусть контур в плоскости p составлен из полуокружности L радиуса R с центром в начале координат и из ее диаметра $C' + C$, расположенного на мнимой оси (рис. 3.1). Направление обхода — по стрелке часов.

Когда p изменяется вдоль мнимой оси от 0 до $+i\infty$, точка $K(p)$ пробегает путь Γ от точки $K(0)$ до точки $K(\infty)$, расположенной на действительной оси. Вместе с зеркальным отображением Γ' этого пути относительно действительной оси получаем замкнутый контур $\Gamma + \Gamma'$, изображенный сплошной линией.

Полуокружности L от $p = +iR$ через $p = R$ до $p = -iR$ соответствует дуга Λ от $K = K(+iR)$ через $K = K(R)$ на действительной оси до $K = K(-iR)$. Эта дуга Λ представляет собой ответвление контура $\Gamma' + \Gamma$.

При $R \rightarrow \infty$ контур в плоскости p , в пределе, охватывает всю правую полуплоскость. Нетрудно видеть, что при $R \rightarrow \infty$

ответвление Δ стягивается в точку $K(\infty)$. Действительно, при $p = Re^{i\varphi}$ будем иметь

$$K(p) = \frac{M(p)}{\Delta_0(p)} = \frac{a_0 R^n e^{i\varphi n} + a_1 R^{n-1} e^{i\varphi(n-1)} + \dots + a_n}{b_0 R^n e^{i\varphi n} + b_1 R^{n-1} e^{i\varphi(n-1)} + \dots + b_n}, \quad (3.22)$$

$$\lim_{R \rightarrow \infty} K(p) = K(\infty) = \frac{a_0}{b_0}. \quad (3.23)$$

В случае, когда степень полинома $M(p)$ ниже степени $\Delta_0(p)$, то есть при $a_0 = 0$, имеем $K(\infty) = 0$. Таким образом, при $R \rightarrow \infty$ на плоскости K остается только замкнутый контур $\Gamma + \Gamma'$.

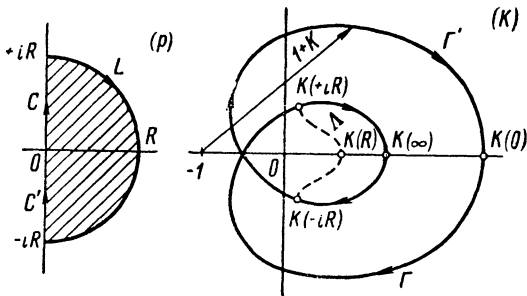


Рис. 3.1.

Число S оборотов контура $\Gamma + \Gamma'$ вокруг точки $(-1, 0)$ по стрелке часов равно числу нулей N характеристического определителя $\Delta(p)$ в правой полуплоскости p . Если число оборотов равно нулю, то замкнутая управляемая система асимптотически устойчива.

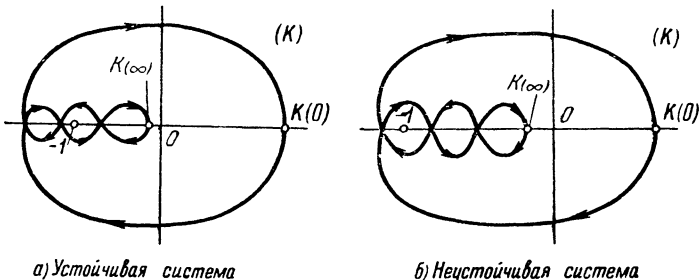


Рис. 3.2.

Если, в частности, контур $\Gamma + \Gamma'$ не имеет самопересечений, то асимптотическая устойчивость имеет место лишь в том случае, когда точка $(-1, 0)$ лежит вне контура. В этом и состоит критерий Найквиста [17].

Заметим, что возможны случаи, когда контур $\Gamma + \Gamma'$ охватывает точку $(-1, 0)$, но благодаря наличию самопересечений (рис. 3.2) число оборотов контура вокруг точки $(-1, 0)$ равно нулю. В этих случаях система устойчива.

Отметим еще взаимное расположение на плоскости K точек $K(0)$ и $K(\infty)$. Легко видеть, что числа $\Delta_0(0)$ и $\Delta_0(\infty)$ всегда имеют одинаковые знаки, так как иначе полином $\Delta_0(p)$ имел бы, по меньшей мере, один положительный действительный корень, что противоречит предположению об устойчивости разомкнутой системы. Если замкнутая управляемая система устойчива, то и числа $\Delta_0(0) + M(0)$, $\Delta_0(\infty) + M(\infty)$ должны иметь

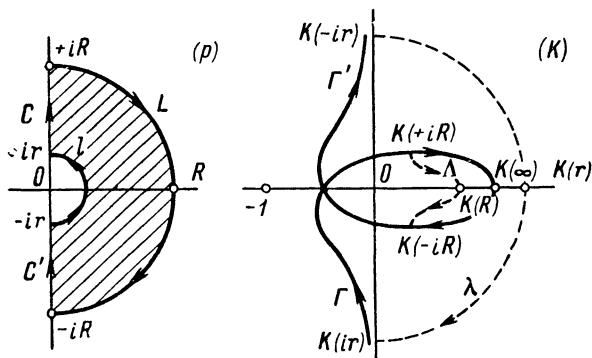


Рис. 3.3.

одинаковые знаки, откуда следует, что у действительных чисел $1 + K(0)$, $1 + K(\infty)$ знаки должны быть одинаковыми. Таким образом, у *устойчивой* системы точки $K(0)$ и $K(\infty)$ должны лежать по одну сторону от точки $(-1, 0)$. У *неустойчивой* системы точки $K(0)$ и $K(\infty)$ могут лежать как по одну сторону, так и по разные стороны от точки $(-1, 0)$.

3. Применение критерия Найквиста к системам с нейтральными звеньями. Объекты управления могут быть нейтральными или неустойчивыми (паровая машина, корабль, нейтральный или статически неустойчивый самолет) и задача регулирования состоит в превращении их в устойчивые системы. Среди звеньев регулятора также встречаются нейтральные (серводвигатели). При наличии нейтральных элементов точка $p = 0$ будет полюсом функции $K(p)$, и при построении контура в плоскости p этот полюс нужно обойти по малой полуокружности l радиуса r (рис. 3.3).

Если точка $p = 0$ — полюс первого порядка, то в ее окрестности функция $K(p)$ ведет себя как $\frac{1}{p}$, и аргументам $+i0$, $-i0$ функ-

ции $K(i\omega)$ соответствуют ветви кривых Γ , Γ' , уходящие в бесконечность вдоль мнимой оси. Полуокружность l отображается на кривую, близкую к полуокружности бесконечно большого радиуса, описываемую по стрелке часов и смыкающуюся с бесконечными ветвями кривых Γ , Γ' . Когда $R \rightarrow \infty$, $r \rightarrow 0$, дуга Λ , отображающая полуокружность l , стягивается в точку $K(\infty)$, а дуга λ , отображающая малую полуокружность l , уходит в бесконечность.

В итоге опять остается кривая $\Gamma + \Gamma'$, бесконечные ветви которой нужно представлять себе замкнутыми полуокружностью бесконечно большого радиуса, расположенной в правой полуплоскости K . К полученному замкнутому контуру по-прежнему применяем критерий Найквиста.

Диаграмма Найквиста, изображенная на рис. 3.3, относится к устойчивой системе, у которой точка $p = a$ является полюсом первого порядка. Для показанного на рис. 3.3 случая имеет место соотношение

$$S + \frac{1}{2} = N. \quad (3.24)$$

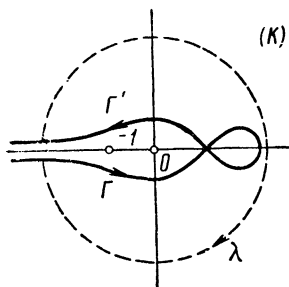


Рис. 3.4.

Показанная на рис. 3.4 диаграмма Найквиста относится к устойчивой системе, у которой точка $p = 0$ является полюсом 2-го порядка.

Если точка $p = 0$ есть полюс n -го порядка, то кривая $\Gamma + \Gamma'$ должна быть замкнута бесконечно удаленной линией, состоящей из n полуокружностей, пробегаемых по стрелке часов. Это следует из того, что в окрестности точки $p = 0$ функция $K(p)$ ведет себя как $\frac{1}{p^n} = \frac{1}{r^n e^{i\varphi n}}$, то есть полярный угол в плоскости K в n раз больше полярного угла в плоскости p . В рассматриваемом случае имеет место соотношение

$$S + \frac{n}{2} = N. \quad (3.25)$$

4. Применение критерия Найквиста к системам с неустойчивыми звеньями. При наличии неустойчивого звена функция $K(p)$ будет иметь n -кратный полюс в точке $p = a$, где $\text{Re } a > 0$. Предположим для определенности, что точка a расположена на действительной оси. При построении контура в плоскости p выключим полюс a при помощи окружности l малого радиуса r , проходимой против стрелки часов. В плоскости K ей будет соответствовать кривая λ , близкая к окружности бесконечно большого радиуса, описываемой n раз по стрелке часов.

Поэтому, при применении критерия Найквиста, нужно дополнить контур $\Gamma + \Gamma'$ бесконечно большой окружностью, описываемой n раз по стрелке часов. Это следует из того, что

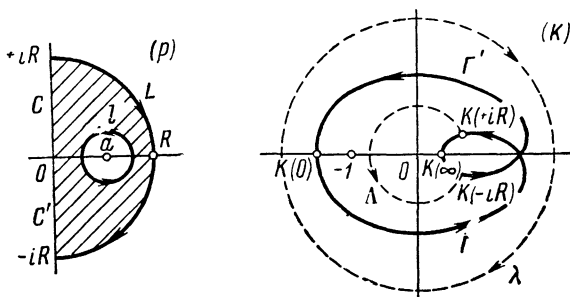


Рис. 3.5.

в окрестности полюса $p = a$ функция $K(p)$ ведет себя как

$$\frac{1}{(p-a)^n} = \frac{1}{r^n e^{i\varphi n}}. \quad (3.26)$$

В случае наличия неустойчивого звена имеет место следующее соотношение:

$$S + n = N. \quad (3.27)$$

Изображенная на рис. 3.5 диаграмма Найквиста относится к устойчивой системе, у которой точка $p = a$ является полюсом первого порядка ($n = 1$).

Во всех рассмотренных в пп. 3 и 4 случаях формула

$$N = S + P \quad (3.28)$$

оказывается верной, если простые полюсы во внутренних точках правой полуплоскости считать за единицу, а на мнимой оси — за половину; кратные полюсы соответственно за n и $\frac{n}{2}$.

5. Частотные характеристики управляемых систем и их экспериментальное определение. Как показано в п. 2, для применения критерия Найквиста при построении конформного отображения $K = K(p)$ фактически требуется построить лишь отображение $K(i\omega)$ ($-\infty < \omega < \infty$). А так как согласно (6)

$$1 + K(i\omega) = \det [E_m + W(i\omega)] = \det [E_m + W_1(i\omega) W_2(i\omega)], \quad (3.29)$$

то для возможности применения критерия Найквиста требуется лишь знание частотных характеристик $W_s(i\omega)$ ($s = 1, 2$) звеньев системы. Поскольку $W_s(D)$ ($s = 1, 2$) — дробно-рациональная функция от D , коэффициенты которой действительны, то $W_s(-i\omega) = \overline{W_s(i\omega)}$; поэтому достаточно определить функцию $W_s(i\omega)$ лишь на интервале $0 < \omega < \infty$.

Рассмотрим теперь возможность экспериментального определения частотной характеристики звена, описываемого векторным дифференциальным уравнением вида

$$f(D)x = e(D)\vartheta(t). \quad (3.30)$$

Пусть $f(D)$ — матрица типа $n \times n$, x — n -мерный вектор, $e(D)$ — матрица типа $n \times m$, $\vartheta(t)$ — m -мерный вектор.

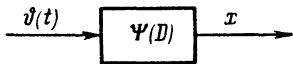


Рис. 3.6.

Из уравнения (30) следует, что

$$x = \Psi(D)\vartheta(t), \quad (3.31)$$

где

$$\Psi(D) = \frac{F(D)e(D)}{\Delta(D)}. \quad (3.32)$$

Матричная передаточная функция $\Psi(D)$ рассматриваемого звена (рис. 3.6) является матрицей типа $n \times m$.

Пусть входной сигнал $\vartheta(t)$ имеет вид

$$\vartheta(t) = A \cos \omega_1 t = \frac{1}{2} (Ae^{i\omega_1 t} + Ae^{-i\omega_1 t}), \quad (3.33)$$

где A — m -мерный вектор. Векторное дифференциальное уравнение (30) теперь принимает вид

$$f(D)x = \frac{1}{2} e(D) (Ae^{i\omega_1 t} + Ae^{-i\omega_1 t}). \quad (3.34)$$

Полагая, что $i\omega_1$ не является корнем характеристического уравнения $\det f(p) = 0$, будем искать частное решение уравнения (34) в виде

$$\tilde{x} = \frac{1}{2} (h_1 e^{i\omega_1 t} + h_2 e^{-i\omega_1 t}). \quad (3.35)$$

Подставляя выражение (35) в уравнение (34), найдем, что

$$h_1 = \Psi(i\omega_1)A, \quad h_2 = \Psi(-i\omega_1)A. \quad (3.36)$$

Таким образом,

$$\tilde{x} = \frac{1}{2} [\Psi(i\omega_1)Ae^{i\omega_1 t} + \Psi(-i\omega_1)Ae^{-i\omega_1 t}]. \quad (3.37)$$

Элемент \tilde{x}_j вектора \tilde{x} можно записать так:

$$\tilde{x}_j = \frac{1}{2} \left[\sum_{k=1}^m \Psi_{jk}(i\omega_1) A_k e^{i\omega_1 t} + \sum_{k=1}^m \Psi_{jk}(-i\omega_1) A_k e^{-i\omega_1 t} \right]. \quad (3.38)$$

Обозначим через $R_{jk}(\omega_1)$ и $\psi_{jk}(\omega_1)$ модуль и аргумент комплексной величины $\Psi_{jk}(i\omega_1)$:

$$\Psi_{jk}(i\omega_1) = R_{jk}(\omega_1) e^{i\psi_{jk}(\omega_1)}. \quad (3.39)$$

Функция $\Psi_{jk}(i\omega)$, как указывалось выше, называется *частотной характеристикой* или *амплитудно-фазовой частотной характеристикой*; функция $R_{jk}(\omega)$ — *амплитудная частотная характеристика*; функция $\psi_{jk}(\omega)$ — *фазовая частотная характеристика*.
Функция

$$P_{jk}(\omega) = \operatorname{Re} \Psi_{jk}(i\omega)$$

называется *действительной частотной характеристикой*, а функция

$$Q_{jk}(\omega) = \operatorname{Im} \Psi_{jk}(i\omega)$$

называется *мнимой частотной характеристикой*.

В соответствии с (39) можно представить частное решение (38) в следующем виде:

$$\tilde{x}_j = \sum_{k=1}^m R_{jk}(\omega_k) A_k \cos[\omega_k t + \psi_{jk}(\omega_k)] \quad (j = 1, \dots, n). \quad (3.40)$$

Как ясно из изложенного выше, матрица

$$\Psi(i\omega) = [\Psi_{jk}(i\omega)] = [R_{jk}(\omega) e^{i\psi_{jk}(\omega)}] \quad (3.41)$$

является *матричной частотной характеристикой* рассматриваемого здесь звена.

Опишем теперь эксперимент, при помощи которого можно определить матрицу $\Psi(i\omega)$.

Пусть у вектора A в выражении (33) лишь один элемент $A_1 \neq 0$, а элементы $A_2 = A_3 = \dots = A_m = 0$. При этом выражение (40) принимает вид

$$\tilde{x}_j = R_{j1}(\omega_1) A_1 \cos[\omega_1 t + \psi_{j1}(\omega_1)] \quad (j = 1, \dots, n).$$

Производя измерения сигнала на выходе системы (после затухания собственных колебаний системы), найдем значения $R_{j1}(\omega_1)$ и $\psi_{j1}(\omega_1)$ ($j = 1, \dots, n$). Повторяя эксперимент при $\vartheta(t) = A \cos \omega_2 t$, $\vartheta(t) = A \cos \omega_3 t$ и т. д., можно построить графики функций $R_{j1}(\omega)$ и $\psi_{j1}(\omega)$ ($j = 1, \dots, n$). Таким образом, при помощи описанного эксперимента мы найдем элементы первого столбца матрицы (41), т. е. функции

$$\begin{aligned} &\Psi_{11}(i\omega), \\ &\Psi_{21}(i\omega), \\ &\dots \\ &\Psi_{n1}(i\omega). \end{aligned}$$

Обращаясь теперь ко второй серии экспериментов, отличающейся от первой серии лишь тем, что теперь $A_2 \neq 0$,

а $A_1 = A_3 = A_4 = \dots = A_m = 0$, по данным измерений найдем элементы второго столбца матрицы (41), т. е. функции

$$\begin{array}{c} \Psi_{12}(i\omega), \\ \Psi_{22}(i\omega), \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \Psi_{n2}(i\omega). \end{array}$$

Выполнив m серий экспериментов описанным методом, найдем всю матрицу $\Psi(i\omega)$:

$$\Psi(i\omega) = \begin{bmatrix} \Psi_{11}(i\omega) & \Psi_{12}(i\omega) & \dots & \Psi_{1m}(i\omega) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \Psi_{n1}(i\omega) & \Psi_{n2}(i\omega) & \dots & \Psi_{nm}(i\omega) \end{bmatrix}.$$

Таким образом, необходимые для применения критерия Найквиста частотные характеристики отдельных звеньев (а, следовательно, и всей разомкнутой управляемой системы) могут быть найдены из эксперимента. Это является существенным в случаях, когда полное аналитическое описание некоторых звеньев или значения некоторых параметров звеньев и т. п. неизвестны. При этом, однако, должна быть уверенность в том, что данное звено описывается линейными дифференциальными уравнениями с постоянными коэффициентами.

6. Пример построения диаграммы Найквиста. Рассмотрим систему, описываемую дифференциальными уравнениями

$$\left. \begin{array}{l} Dx_1 + x_1 = -\mu_2[z(t) - x_2], \\ Dx_2 + x_2 = \mu_1 x_1. \end{array} \right\} \quad (3.42)$$

В соответствии с обозначениями, принятыми в § 2 в уравнениях (2.1), имеем

$$\left. \begin{array}{l} f_1(D) = D + 1, \quad e_1(D) = -\mu_2, \\ f_2(D) = D + 1, \quad e_2(D) = \mu_1, \\ W_1(D) = -\frac{\mu_2}{D+1}, \quad W_2(D) = \frac{\mu_1}{D+1}, \\ W(D) = W_1(D)W_2(D) = -\frac{\mu_1\mu_2}{(D+1)^2}. \end{array} \right\} \quad (3.43)$$

В рассматриваемом здесь примере $m_1 = 1$, то есть функция $W(D)$ является скаляром и поэтому

$$\det[E_{m_1} + W(D)] = 1 + W(D). \quad (3.44)$$

Таким образом, функция $K(D)$, определяемая согласно (6), здесь принимает вид

$$K(D) = W(D) = -\frac{\mu_1\mu_2}{(D+1)^2}. \quad (3.45)$$

Отсюда следует, что

$$K(i\omega) = -\frac{\mu_1\mu_2}{(i\omega + 1)^2} = -\mu_1\mu_2 \frac{1 - \omega^2 - 2i\omega}{(1 + \omega^2)^2}, \quad (3.46)$$

$$|K(i\omega)| = \frac{\mu_1\mu_2}{1 + \omega^2}, \quad K(\infty) = 0, \quad K(0) = -\mu_1\mu_2. \quad (3.47)$$

Диаграмма Найквиста для рассматриваемого примера приведена на рис. 3.7. Как видно из диаграммы Найквиста, система (42) будет устойчивой при выполнении условия

$$\mu_1\mu_2 < 1. \quad (3.48)$$

Условие устойчивости (48) совпадает, конечно, с условием устойчивости, которое можно получить из характеристического

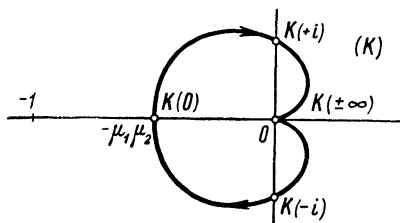


Рис. 3.7.

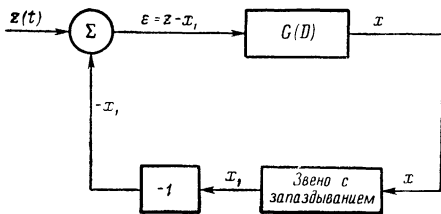


Рис. 3.8.

уравнения системы дифференциальных уравнений (42):

$$\Delta(p) = \begin{vmatrix} p + 1 & -\mu_2 \\ -\mu_1 & p + 1 \end{vmatrix} = p^2 + 2p + 1 - \mu_1\mu_2 = 0. \quad (3.49)$$

7. Управляемые системы, содержащие звенья с запаздыванием и критерии устойчивости этих систем. Рассмотрим одномерную управляемую систему (рис. 3.8), описываемую следующей системой скалярных дифференциальных уравнений:

$$\left. \begin{aligned} f(D)x(t) &= g(D)[z(t) - x_1(t)], \\ x_1(t) &= x(t - \tau) \quad (\tau = \text{const}), \end{aligned} \right\} \quad (3.50)$$

где $f(D)$ и $g(D)$ — некоторые полиномы (с постоянными коэффициентами) относительно оператора дифференцирования $D = d/dt$:

$$\left. \begin{aligned} f(D) &= a_0D^n + a_1D^{n-1} + \dots + a_{n-1}D + a_n, \\ g(D) &= b_0D^m + b_1D^{m-1} + \dots + b_{m-1}D + b_m \quad (m < n). \end{aligned} \right\} \quad (3.51)$$

Первое уравнение (50) описывает процессы в первом звене системы (рис. 3.8). Передаточная функция этого звена $G(D)$ имеет вид

$$G(D) = \frac{g(D)}{f(D)}. \quad (3.52)$$

Второе уравнение (50) описывает процессы во втором звене, в котором происходит задержка сигнала на некоторый промежуток времени $\tau = \text{const}$. Это звено можно назвать звеном с запаздыванием. Систему уравнений (50) можно заменить следующим эквивалентным ей дифференциально-разностным уравнением:

$$f(D)x(t) + g(D)x(t - \tau) = g(D)z(t). \quad (3.53)$$

Дифференциально-разностные уравнения представляют собой важный класс функциональных уравнений. Теория дифференциально-разностных уравнений разрабатывалась в трудах Л. С. Понтрягина, А. Д. Мышкиса, Р. Беллмана, Н. Н. Красовского, Л. Э. Эльсгольца, В. И. Зубова и других ученых [11, 31, 43, 67, 92].

Собственные колебания в замкнутой управляемой системе (рис. 3.8) будут описываться однородным дифференциально-разностным уравнением

$$f(D)x(t) + g(D)x(t - \tau) = 0, \quad (3.54)$$

которое получается из уравнения (53) при $z(t) \equiv 0$.

Частное решение уравнения (54) будем искать в форме

$$x(t) = C_i e^{\gamma_i t}, \quad (3.55)$$

где $\gamma_i = \text{const}$. Так как согласно (55)

$$x(t - \tau) = C_i e^{-\gamma_i \tau} e^{\gamma_i t},$$

$$\frac{d^s}{dt^s} [x(t - \tau)] = C_i e^{-\gamma_i \tau} \gamma_i^s e^{\gamma_i t} \quad (s = 1, 2, \dots),$$

то, подставляя выражение (55) в уравнение (54), получим

$$f(\gamma_i) C_i e^{\gamma_i t} + e^{-\gamma_i \tau} g(\gamma_i) C_i e^{\gamma_i t} = 0. \quad (3.56)$$

Так как $C_i e^{\gamma_i t} \neq 0$, то из уравнения (56) следует, что γ_i должно быть корнем уравнения

$$\Delta(p) = 0, \quad (3.57)$$

где

$$\Delta(p) = f(p) + e^{-p\tau} g(p). \quad (3.58)$$

Уравнение (57) является характеристическим уравнением для дифференциально-разностного уравнения (54). Как следует из выражения (58), характеристическое уравнение (57) является трансцендентным уравнением.

Кратным корням γ_s характеристического уравнения (57) соответствует не только решение $e^{\gamma_s t}$, но и решения

$$te^{\gamma_s t}, t^2 e^{\gamma_s t}, \dots, t^{q_s-1} e^{\gamma_s t},$$

где q_s — кратность корня γ_s .

Для линейных дифференциально-разностных уравнений вида (54) с постоянными коэффициентами и постоянным запаздыванием ($\tau = \text{const}$), у которых все корни характеристического уравнения (57) имеют отрицательные действительные части, доказано [31], что любое решение может быть разложено в абсолютно и равномерно сходящийся ряд из основных решений

$$\left. \begin{aligned} x(t) &= \sum_{s=1}^{\infty} P_s(t) e^{\lambda_s t}, \\ \text{Re}\lambda_1 &\geq \text{Re}\lambda_2 \geq \dots \geq \text{Re}\lambda_n \geq \dots, \end{aligned} \right\} \quad (3.59)$$

где $P_s(t)$ — многочлены от t степени не выше $q_s - 1$. Для этих уравнений доказано [31] также, что при $t > t_0 + \tau$

$$\left| \sum_{s=n+1}^{\infty} P_s(t) e^{\lambda_s t} \right| \leq B e^{(\lambda_{s+1} + \varepsilon)t}, \quad (3.60)$$

где B и ε — постоянные величины, причем ε — сколь угодно малое положительное число.

Из изложенного следует, что для того, чтобы все решения $x(t)$ уравнения (54) асимптотически стремились к нулю при $t \rightarrow \infty$, необходимо и достаточно, чтобы все корни характеристического уравнения (57) имели отрицательные действительные части.

Таким образом, условие асимптотической устойчивости замкнутой управляемой системы (54), содержащей звенья с запаздыванием, состоит в том, что квазиполином (58), который можно представить в виде

$$\Delta(p) = f(p) [1 + K(p)], \quad (3.61)$$

где

$$K(p) = e^{-p\tau} \frac{g(p)}{f(p)} = e^{-p\tau} G(p), \quad (3.62)$$

не должен иметь нулей в правой полуплоскости комплексного переменного p .

Как следует из доказательства критерия Найквиста, определение числа нулей квазиполинома $\Delta(p)$, расположенных в правой полуплоскости комплексного переменного p , можно и в рассматриваемой здесь задаче выполнить при помощи этого критерия, изложенного выше в пп. 2, 3 и 4. Эта возможность была указана Я. З. Цыпкиным. В соответствии с выражением (62)

$$K(i\omega) = e^{-i\omega\tau} G(i\omega). \quad (3.63)$$

Так как согласно (63)

$$K(i\omega) = |K(i\omega)| e^{i \arg K(i\omega)} = |G(i\omega)| e^{i [\arg G(i\omega) - \omega\tau]},$$

то для любого $\omega = \omega_1$ вектор $K(i\omega_1)$ будет по модулю равен вектору $G(i\omega_1)$, но повернут относительно него по направлению стрелки часов на угол $\omega_1\tau$ (рис. 3.9). В области малых значений ω годографы векторов $K(i\omega)$ и $G(i\omega)$ отличаются мало, но с возрастанием ω разность $\omega\tau$ аргументов $K(i\omega)$ и $G(i\omega)$ становится все более значительной. При $\omega \rightarrow \infty$ годограф $K(i\omega)$ асимптотически навивается на расположенную на действительной оси точку $K(\infty)$.

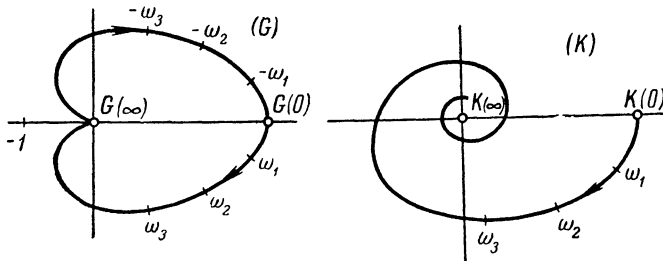


Рис. 3.9.

Если существуют значения ω , для которых $|G(i\omega)| > 1$, то даже в случае, когда годограф вектора $G(i\omega)$ не охватывает точки $(-1, 0)$, т. е. система без запаздывания устойчива, охват годографом вектора $K(i\omega)$ точки $(-1, 0)$ может оказаться возможным. Иными словами, возможны случаи, когда включение звена с запаздыванием в замкнутую устойчивую управляемую систему превращает эту систему в неустойчивую.

Эффективное построение решений дифференциально-разностных уравнений представляет собой достаточно трудную задачу. В некоторых случаях здесь целесообразно применить методы операционного исчисления. В качестве такого примера рассмотрим уравнение

$$\ddot{x}(t) + a_1 \dot{x}(t) + a_2 x(t) = b [z(t) - x(t - \tau)] \quad (\tau = \text{const}). \quad (3.64)$$

Изображения функций $z(t)$ и $x(t)$ обозначим через $\zeta(p)$ и $\xi(p)$:

$$\zeta(p) \leftrightarrow z(t), \quad \xi(p) \leftrightarrow x(t).$$

Так как

$$\ddot{x}(t) \leftrightarrow p^2 \xi(p) - p^2 x(0) - p \dot{x}(0), \quad \dot{x}(t) \leftrightarrow p \xi(p) - p x(0),$$

$$x(t - \tau) \leftrightarrow e^{-p\tau} \xi(p) + e^{-p\tau} p \int_{-\tau}^0 x(t) e^{-pt} dt,$$

то изображение искомого решения $x(t)$ будет следующим:

$$\xi(p) = p \frac{x(0)p + a_1 x(0) + \dot{x}(0)}{f(p) + be^{-p\tau}} - p \frac{be^{-p\tau}}{f(p) + be^{-p\tau}} \int_{-\tau}^0 x(t) e^{-pt} dt + \frac{b\xi(p)}{f(p) + be^{-p\tau}}, \quad (3.65)$$

где

$$f(p) = p^2 + a_1 p + a_2.$$

Для получения решения требуется найти оригинал, изображением которого является $\xi(p)$. Как видно из (65), искомое решение зависит от течения функции $x(t)$ на отрезке $-\tau \leq t \leq 0$. Функция

$$\varphi(t) \equiv x(t) \quad (-\tau \leq t \leq 0), \quad (3.66)$$

называемая *начальной функцией*, должна быть задана для возможности решения задачи. Решение уравнения (64), удовлетворяющее условию (66), обозначается $x_\varphi(t)$.

8. Логарифмические частотные характеристики. Передаточная функция одномерной разомкнутой управляемой системы, описываемой линейным дифференциальным уравнением

$$f(D)x = g(D)z(t) \quad \left(D = \frac{d}{dt}\right), \quad (3.67)$$

где

$$\left. \begin{aligned} f(D) &= a_0 D^n + a_1 D^{n-1} + \dots + a_{n-1} D + a_n, \\ g(D) &= b_0 D^m + b_1 D^{m-1} + \dots + b_{m-1} D + b_m \quad (m < n), \end{aligned} \right\} \quad (3.68)$$

имеет следующий вид:

$$G(D) = \frac{b_0 D^m + b_1 D^{m-1} + \dots + b_{m-1} D + b_m}{a_0 D^n + a_1 D^{n-1} + \dots + a_{n-1} D + a_n}. \quad (3.69)$$

При $z(t) \equiv 1(t)$ дифференциальное уравнение (67) имеет частное решение:

$$\tilde{x} = K_0, \quad (3.70)$$

где

$$K_0 = \frac{b_m}{a_n}.$$

Величина K_0 называется *коэффициентом усиления разомкнутой управляемой системы*.

Обозначая

$$G_G(D) = \frac{\frac{b_0}{b_n} D^m + \frac{b_1}{b_m} D^{m-1} + \dots + \frac{b_{m-1}}{b_m} D + 1}{\frac{a_0}{a_n} D^n + \frac{a_1}{a_n} D^{n-1} + \dots + \frac{a_{n-1}}{a_n} D + 1}, \quad (3.71)$$

можно представить передаточную функцию разомкнутой управляемой системы в следующем виде:

$$G(D) = K_0 G_0(D). \quad (3.72)$$

Функция $G(i\omega) = [G(p)]_{p=i\omega}$ называется, как указано выше, частотной характеристикой разомкнутой управляемой системы. Обозначая через $R(\omega)$ модуль функции $G(i\omega)$, а через $\psi(\omega) = \arg G(i\omega)$ аргумент этой функции, будем иметь

$$G(i\omega) = R(\omega) e^{i\psi(\omega)} \quad (3.73)$$

или

$$G(i\omega) = K_0 R_0(\omega) e^{i\psi(\omega)}, \quad (3.74)$$

где

$$R_0(\omega) = |G_0(i\omega)|. \quad (3.75)$$

Логарифмируя левую и правую части выражения (74), получим

$$\lg G(i\omega) = \lg K_0 + \lg R_0(\omega) + i\psi(\omega) \lg e. \quad (3.76)$$

Логарифмической амплитудной частотной характеристикой называется функция

$$L(\omega) = 20 \lg R(\omega) = 20 \lg K_0 + 20 \lg R_0(\omega). \quad (3.77)$$

В качестве аргумента функции $L(\omega)$ принимается $\lg \omega$.

Функция

$$\Psi(\lg \omega) = \psi(\omega) = \arg G(i\omega) \quad (0 < \omega < \infty),$$

в качестве аргумента которой принимается $\lg \omega$, называется *логарифмической фазовой частотной характеристикой*.

Величина $20 \lg R(\omega)$ выражает усиление системы в принятых в акустике единицах — децибелах (1 децибел = 0,1 бел). Усиление, при котором мощность сигнала возрастает в 10^2 раз, считается равным 2 бел. Мощность сигнала пропорциональна квадрату амплитуды сигнала. Пусть, например, $L(\omega_1) = 20 \lg R(\omega_1) = 40$ децибел. При этом $\lg R(\omega_1) = 2$, $R(\omega_1) = 10^2 = 100$. Мощность сигнала возросла в $100^2 = 10^4$ раз, что и соответствует коэффициенту усиления, равному 4 белам. При построении графика функции $L(\omega)$ по оси абсцисс откладываются значения $\lg \omega$, а по оси ординат — значения функции $L(\omega)$ в децибелах.

При построении графика функции $\psi(\omega)$ по оси абсцисс откладываются значения $\lg \omega$, а по оси ординат — значения $\psi(\omega)$ в радианах.

За единицу длины по оси абсцисс применяются логарифмические единицы — октава и декада. Октавой называется отрезок оси $\lg \omega$, заключенный между значениями ω_1 и $2\omega_1$. Длина этого отрезка, как легко видеть, не зависит от значения ω_1 :

$$l_{\text{окт}} = \lg 2\omega_1 - \lg \omega_1 = \lg 2 + \lg \omega_1 - \lg \omega_1 = \lg 2.$$

Декадой называется отрезок оси $\lg \omega$, заключенный между значениями ω_1 и $10\omega_1$. Длина декады не зависит от значения ω_1 :

$$l_{\text{дек}} = \lg 10\omega_1 - \lg \omega_1 = \lg 10 + \lg \omega_1 - \lg \omega_1 = 1.$$

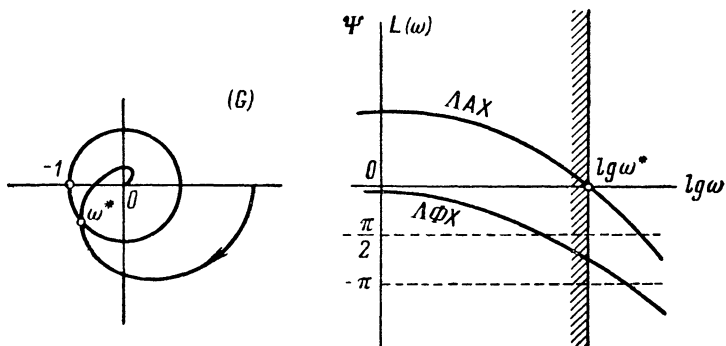


Рис. 3.10.

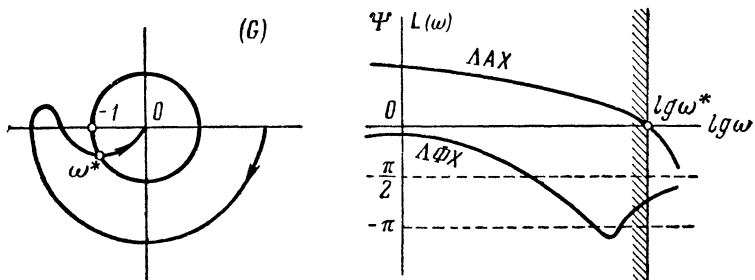


Рис. 3.11.

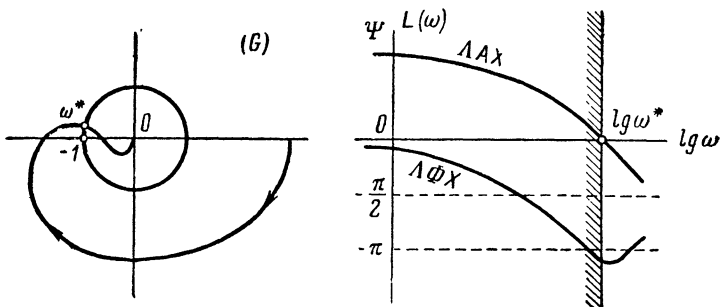


Рис. 3.12.

9. Определение устойчивости замкнутой управляемой системы по логарифмическим частотным характеристикам разомкнутой управляемой системы. По взаимному расположению логарифмической амплитудной и фазовой характеристик *разомкнутой* управляемой системы можно судить об устойчивости *замкнутой* управляемой системы. На рис. 3.10—3.12 показаны амплитудно-фазовые и логарифмические (амплитудная и фазовая) частотные характеристики устойчивых разомкнутых систем. Как видно из приведенных на этих рисунках амплитудно-фазовых характеристик (диаграмм Найквиста), системы, представленные на рис. 3.10 и рис. 3.11, будут в замкнутом состоянии устойчивыми. Система, представленная на рис. 3.12, будет в замкнутом состоянии неустойчивой.

Как нетрудно видеть, для того чтобы замкнутая управляемая система была устойчивой, если она устойчива в разомкнутом состоянии, необходимо, чтобы на интервале частот, на котором логарифмическая амплитудная характеристика положительна (т. е. $R(\omega) > 1$), фазовая частотная характеристика совершала одинаковое число положительных (сверху вниз) и отрицательных (снизу вверх) переходов через линию $\psi = -\pi$.

Описанный здесь критерий для определения устойчивости замкнутой управляемой системы по логарифмическим частотным характеристикам ее разомкнутой цепи можно обобщить на случай, когда передаточная функция разомкнутой системы $G(p)$ имеет полюсы на мнимой оси и в правой полуплоскости комплексного переменного p [69].

§ 4. Функция веса и переходная функция стационарной линейной системы

1. Одномерная управляемая система. Стационарными линейными системами называются системы, описываемые линейными дифференциальными уравнениями с постоянными коэффициентами. Дальнейшее изложение будет относиться к *замкнутым* управляемым системам. Пусть дифференциальное уравнение, описывающее процессы в замкнутой управляемой системе, имеет вид

$$f(D)x = l(D)z(t). \quad (4.1)$$

Здесь x — искомая функция (сигнал на выходе системы), $z(t)$ — заданная функция времени (сигнал на входе системы), а $f(D)$ и $l(D)$ — полиномы от оператора дифференцирования D :

$$\left. \begin{aligned} f(D) &= a_0 D^n + a_1 D^{n-1} + \dots + a_{n-1} D + a_n, \\ l(D) &= l_0 D^m + l_1 D^{m-1} + \dots + l_{m-1} D + l_m. \end{aligned} \right\} \quad (4.2)$$

Коэффициенты полиномов (2) предполагаются постоянными. Кроме того, здесь предполагается, что $m < n$. Для решения дифференциального уравнения (1) можно применить методы операционного исчисления. Обозначим

$$\zeta(p) \dashrightarrow z(t), \quad \xi(p) \dashrightarrow x(t). \quad (4.3)$$

Так как изображение $\frac{d^k x}{dt^k}$ будет

$$\begin{aligned} D^k x \dashrightarrow p^k \xi(p) - p^k x(0) - p^{k-1} \dot{x}(0) - \dots - p x^{(k-1)}(0) = \\ = p^k \xi(p) - p \frac{p^k - D_0^k}{p - D_0} x(0), \end{aligned} \quad (4.4)$$

то линейные дифференциальные выражения $f(D)x(t)$ и $l(D)z(t)$ будут иметь следующие изображения:

$$\left. \begin{aligned} f(D)x(t) \dashrightarrow f(p)\xi(p) - pQ(p), \\ l(D)z(t) \dashrightarrow l(p)\zeta(p) - pP(p), \end{aligned} \right\} \quad (4.5)$$

где

$$\left. \begin{aligned} Q(p) &= \frac{f(p) - f(D_0)}{p - D_0} x(0), \\ P(p) &= \frac{l(p) - l(D_0)}{p - D_0} z(0). \end{aligned} \right\} \quad (4.6)$$

Входящий в выражения (4) и (6) оператор D_0 определяется соотношением

$$D_0^k x(0) = \left[\frac{d^k x}{dt^k} \right]_{t=0}. \quad (4.7)$$

Дифференциальному уравнению (1) соответствует согласно (5) следующее уравнение в изображениях:

$$f(p)\xi(p) = p[Q(p) - P(p)] + l(p)\zeta(p). \quad (4.8)$$

Отсюда найдем, что

$$\xi(p) = p \frac{Q(p) - P(p)}{f(p)} + \frac{l(p)}{f(p)} \zeta(p). \quad (4.9)$$

Обозначая через

$$\Phi(D) = \frac{l(D)}{f(D)} \quad (4.10)$$

передаточную функцию системы (1), можно выражение (9) переписать так:

$$\xi(p) = p \frac{Q(p) - P(p)}{f(p)} + \Phi(p)\zeta(p). \quad (4.11)$$

Обозначим теперь через $M(t)$ и $N(t)$ оригиналы для следующих изображений:

$$p \frac{Q(p) - P(p)}{f(p)} \doteq M(t), \quad (4.12)$$

$$p\Phi(p) \doteq N(t). \quad (4.13)$$

Так как функции $[Q(p) - P(p)]/f(p)$ и $\Phi(p) = l(p)/f(p)$ в силу сделанного выше предположения о том, что степень полинома $l(p)$ ниже степени полинома $f(p)$, являются правильными дробями, то оригиналы $M(t)$ и $N(t)$ будут иметь следующий вид:

$$M(t) = \sum_{\sigma=1}^s \frac{e^{\lambda_{\sigma} t}}{(q_{\sigma}-1)!} \left[\left(t + \frac{\partial}{\partial p} \right)^{q_{\sigma}-1} \frac{Q(p) - P(p)}{f_{\sigma}(p)} \right]_{p=\lambda_{\sigma}}, \quad (4.14)$$

$$N(t) = \sum_{\sigma=1}^s \frac{e^{\lambda_{\sigma} t}}{(q_{\sigma}-1)!} \left[\left(t + \frac{\partial}{\partial p} \right)^{q_{\sigma}-1} \frac{l(p)}{f_{\sigma}(p)} \right]_{p=\lambda_{\sigma}}. \quad (4.15)$$

Здесь через s обозначено число несовпадающих между собой корней λ_{σ} характеристического уравнения

$$f(p) = 0, \quad (4.16)$$

через q_{σ} обозначена кратность корня λ_{σ} , а через $f_{\sigma}(p)$ обозначена функция

$$f_{\sigma}(p) = \frac{f(p)}{(p - \lambda_{\sigma})^{q_{\sigma}}}. \quad (4.17)$$

В числе корней характеристического уравнения (16) могут быть как действительные, так и комплексные корни. Так как коэффициенты полиномов (2) являются действительными, то в число корней уравнения (16) комплексные корни будут входить сопряженными парами. Поэтому функции $M(t)$ и $N(t)$ могут принимать только действительные значения, и при наличии комплексных корней у уравнения (16) функции $M(t)$ и $N(t)$ можно привести к явной действительной форме, на чем мы здесь останавливаться не будем [17].

На основании теоремы об умножении изображений

$$\frac{1}{p} p\Phi(p) \zeta(p) \doteq \int_0^t N(t-u) z(u) du. \quad (4.18)$$

Таким образом, согласно (11), (12) и (18) при заданных начальных условиях $x(0)$, $\dot{x}(0)$, ..., $x^{(n-1)}(0)$ закон движения системы, описываемой уравнением (1), будет следующим:

$$x(t) = M(t) + \int_0^t N(t-u) z(u) du. \quad (4.19)$$

Отсюда можно найти и закон изменения во времени остальных фазовых координат системы: $\dot{x}(t)$, $\ddot{x}(t)$, ..., $x^{(n-1)}(t)$.

Аналогично изложенному в § 1 (формула (1.31)) функцию $N(t)$, которая определена здесь операционным соотношением (13), будем называть *функцией веса* одномерной управляемой системы, описываемой скалярным дифференциальным уравнением (1).

Обратимся теперь к физической интерпретации функции $N(t)$. Пусть

$$z(t) = \delta(t), \quad (4.20)$$

то есть на вход системы подана единичная импульсивная функция (дельта-функция Дирака). Уравнение (1) принимает теперь вид

$$f(D)x = l(D)\delta(t). \quad (4.21)$$

Так как оригиналу

$$l(D)\delta(t) = l_0\delta^{(m)}(t) + l_1\delta^{(m-1)}(t) + \dots + l_{m-1}\dot{\delta}(t) + l_m\delta(t)$$

соответствует изображение

$$l_0p^{m+1} + l_1p^m + \dots + l_{m-1}p^2 + l_m p = pl(p),$$

то есть

$$l(D)\delta(t) \leftarrow \div pl(p), \quad (4.22)$$

то, учитывая, что согласно (5)

$$f(D)x(t) \leftarrow \div f(p)\xi(p) - pQ(p),$$

найдем, что дифференциальному уравнению (21) будет соответствовать следующее уравнение в изображениях:

$$f(p)\xi(p) = pQ(p) + pl(p). \quad (4.23)$$

Из уравнения (23) следует, что

$$\xi(p) = p \frac{Q(p)}{f(p)} + p\Phi(p), \quad (4.24)$$

так как согласно (10) $\Phi(p) = l(p)/f(p)$. При нулевых начальных условиях

$$x(0) = 0, \dot{x}(0) = 0, \dots, x^{(n-1)}(0) = 0 \quad (4.25)$$

будем согласно (4) и (6) иметь

$$Q(p) = 0.$$

Таким образом, при нулевых начальных условиях выражение (24) принимает вид

$$\xi(p) = p\Phi(p). \quad (4.26)$$

Учитывая операционное соотношение (13), получим отсюда, что

$$x(t) = N(t). \quad (4.27)$$

Таким образом, функция веса $N(t)$ представляет собой закон движения, который, при нулевых начальных условиях, совершает система под воздействием единичной импульсивной функции $\delta(t)$. Заметим теперь, что операционное соотношение (13), при помощи которого определена функция $N(t)$, в соответствии с теоремой о построении оригинала по изображению, определяет эту функцию лишь при $t \geq 0$. Таким образом, выражение (15), которым определена функция $N(t)$, имеет место лишь при $t \geq 0$. Так как согласно (25) при $t < 0$ система находилась в покое, то в соответствии с (27) мы должны принять, что

$$N(t) = 0 \quad \text{при} \quad t < 0. \quad (4.28)$$

Для того чтобы найти еще одну важную динамическую характеристику системы, называемую *переходной функцией*, рассмотрим случай, когда входной сигнал является единичной ступенчатой функцией

$$z(t) = \mathbf{1}(t). \quad (4.29)$$

Исходное дифференциальное уравнение (1) принимает вид

$$f(D)x = l(D)\mathbf{1}(t). \quad (4.30)$$

Оригинулу

$$l(D)\mathbf{1}(t) = l_0\delta^{(m-1)}(t) + l_1\delta^{(m-2)}(t) + \dots + l_{m-1}\delta(t) + l_m\mathbf{1}(t)$$

соответствует изображение

$$l_0p^m + l_1p^{m-1} + \dots + l_{m-1}p + l_m = l(p), \quad (4.31)$$

то есть

$$l(D)\mathbf{1}(t) \leftarrow l(p). \quad (4.32)$$

Из соотношений (32) и (5) следует, что дифференциальному уравнению (30) соответствует следующее уравнение в изображениях:

$$f(p)\xi(p) = pQ(p) + l(p), \quad (4.33)$$

откуда получим, что

$$\xi(p) = p \frac{Q(p)}{f(p)} + \Phi(p). \quad (4.34)$$

При нулевых начальных условиях (25) $Q(p) = 0$, и выражение (34) принимает вид

$$\xi(p) = \Phi(p). \quad (4.35)$$

Обозначим через $A(t)$ оригинал, изображением которого является функция $\Phi(p)$:

$$\Phi(p) \dashrightarrow A(t). \quad (4.36)$$

Из соотношения (35) следует, что

$$x(t) = A(t). \quad (4.37)$$

Таким образом, функция $A(t)$, которая определена операционным соотношением (36), представляет собой закон движения, который при нулевых начальных условиях совершает система под воздействием единичной ступенчатой функции $\mathbf{1}(t)$.

Функция $A(t)$ называется *переходной функцией* системы.

Найдем теперь зависимость между функцией веса и переходной функцией. Заметим, что так как степень полинома $l(p)$ ниже степени полинома $f(p)$, то

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \Phi(p) = \lim_{p \rightarrow \infty} \frac{l(p)}{f(p)} = 0. \quad (4.38)$$

По теореме о начальном значении оригинала

$$A(0) = \lim_{p \rightarrow \infty} \Phi(p)$$

и в соответствии с (38)

$$A(0) = 0.$$

Изображение производной от функции $A(t)$

$$\dot{A}(t) \dashleftarrow p[\Phi(p) - A(0)] = p\Phi(p) \quad (4.39)$$

совпадает с изображением (13) функции $N(t)$. Таким образом, функция веса $N(t)$ и переходная функция $A(t)$ связаны соотношением

$$\dot{A}(t) = N(t). \quad (4.40)$$

Найдем теперь явное выражение функции $A(t)$. Для этого представим изображение функции $A(t)$ в виде суммы элементарных дробей. Так как

$$\frac{l(p)}{pf(p)} = \frac{l(0)}{f(0)} \frac{1}{p} + \sum_{\sigma=1}^s \sum_{\rho=0}^{q_{\sigma}-1} \frac{1}{(q_{\sigma}-\rho-1)!} \left[\frac{\partial^{q_{\sigma}-\rho-1}}{\partial p^{q_{\sigma}-\rho-1}} \frac{l(p)}{pf_{\sigma}(p)} \right]_{p=\lambda_{\sigma}} \frac{1}{(p-\lambda_{\sigma})^{\rho+1}}, \quad (4.41)$$

то разложение функции $\Phi(p)$ на сумму элементарных дробей будет следующим:

$$\begin{aligned} \Phi(p) &= \frac{l(p)}{f(p)} = \frac{l(0)}{f(0)} + \\ &+ \sum_{\sigma=1}^s \sum_{\rho=0}^{q_{\sigma}-1} \frac{1}{(q_{\sigma}-\rho-1)!} \left[\frac{\partial^{q_{\sigma}-\rho-1}}{\partial p^{q_{\sigma}-\rho-1}} \frac{l(p)}{pf_{\sigma}(p)} \right]_{p=\lambda_{\sigma}} \frac{p}{(p-\lambda_{\sigma})^{\rho+1}}. \end{aligned} \quad (4.42)$$

Так как

$$\frac{p}{(p - \lambda_\sigma)^{\rho+1}} \dot{\div} \frac{t^\rho e^{\lambda_\sigma t}}{\rho!}, \quad (4.43)$$

то оригинал для изображения (42) будет иметь вид

$$A(t) = \frac{l(0)}{f(0)} + \sum_{\sigma=1}^s \sum_{\rho=0}^{q_\sigma-1} \frac{t^\rho e^{\lambda_\sigma t}}{\rho! (q_\sigma - \rho - 1)!} \left[\frac{\partial^{q_\sigma - \rho - 1}}{\partial p^{q_\sigma - \rho - 1}} \frac{l(p)}{p f_\sigma(p)} \right]_{p=\lambda_\sigma}. \quad (4.44)$$

Как нетрудно проверить,

$$\sum_{\rho=0}^{q_\sigma-1} \frac{t^\rho}{\rho! (q_\sigma - \rho - 1)!} \frac{\partial^{q_\sigma - \rho - 1}}{\partial p^{q_\sigma - \rho - 1}} = \frac{1}{(q_\sigma - 1)!} \left(t + \frac{\partial}{\partial p} \right)^{q_\sigma - 1}, \quad (4.45)$$

и поэтому выражение (44) переходной функции можно переписать так:

$$A(t) = \frac{l(0)}{f(0)} + \sum_{\sigma=1}^s \frac{e^{\lambda_\sigma t}}{(q_\sigma - 1)!} \left[\left(t + \frac{\partial}{\partial p} \right)^{q_\sigma - 1} \frac{l(p)}{p f_\sigma(p)} \right]_{p=\lambda_\sigma}. \quad (4.46)$$

Из изложенного можно заключить, что передаточная функция $\Phi(D)$, функция веса $N(t)$ и переходная функция $A(t)$ являются основными, эквивалентными друг другу динамическими характеристиками управляемой системы.

2. Одномерная управляемая система, у которой передаточная функция является неправильной дробью. Рассмотрим теперь систему, описываемую скалярным дифференциальным уравнением

$$f(D)x(t) = r(D)z(t), \quad (4.47)$$

где

$$\begin{aligned} f(D) &= a_0 D^n + a_1 D^{n-1} + \dots + a_{n-1} D + a_n, \\ r(D) &= b_0 D^q + b_1 D^{q-1} + \dots + b_{q-1} D + b_q, \end{aligned} \quad (4.48)$$

причем $q > n$.

Передаточная функция рассматриваемой системы

$$\Phi(D) = \frac{r(D)}{f(D)} \quad (4.49)$$

может быть представлена в следующем виде:

$$\Phi(D) = S(D) + v(D), \quad (4.50)$$

где $S(D)$ — целая часть дробно-рациональной функции $r(D)/f(D)$ (т. е. некоторый полином от D), а $v(D)$ — правильная дробь, которая получается после выделения из $r(D)/f(D)$ целой части.

Обозначая, как и выше (5),

$$\xi(p) \dot{\div} x(t), \quad \zeta(p) \dot{\div} z(t),$$

будем иметь

$$\left. \begin{aligned} f(D)x(t) &\leftarrow \div f(p)\xi(p) - pQ(p), \\ r(D)z(t) &\leftarrow \div r(p)\zeta(p) - pL(p), \end{aligned} \right\} \quad (4.51)$$

где

$$\left. \begin{aligned} Q(p) &= \frac{f(p) - f(D_0)}{p - D_0} x(0), \\ L(p) &= \frac{r(p) - r(D_0)}{p - D_0} z(0). \end{aligned} \right\} \quad (4.52)$$

В соответствии с (51) будем иметь следующее уравнение в изображениях:

$$f(p)\xi(p) = p[Q(p) - L(p)] + r(p)\zeta(p). \quad (4.53)$$

Отсюда

$$\xi(p) = p \frac{Q(p) - L(p)}{f(p)} + \frac{r(p)}{f(p)} \zeta(p). \quad (4.54)$$

Нетрудно видеть, что функция $\frac{1}{f(p)}[Q(p) - L(p)]$ также является неправильной дробью. Действительно, согласно (52) будем иметь

$$\frac{Q(p) - L(p)}{f(p)} = \frac{f(p)x(0) - f(D_0)x(0) - r(p)z(0) + r(D_0)z(0)}{f(p)(p - D_0)}. \quad (4.55)$$

Так как согласно (49) и (50)

$$r(p) = f(p)S(p) + f(p)v(p), \quad (4.56)$$

то выражение (55) можно преобразовать к виду

$$\begin{aligned} \frac{Q(p) - L(p)}{f(p)} &= -\frac{S(p) - S(D_0)}{p - D_0} z(0) + \\ &+ \frac{1}{f(p)} \left\{ \frac{f(p) - f(D_0)}{p - D_0} [x(0) - S(D_0)z(0)] - \right. \\ &\quad \left. - \frac{f(p)v(p) - f(D_0)v(D_0)}{p - D_0} z(0) \right\}. \end{aligned} \quad (4.57)$$

Первое слагаемое в правой части выражения (57) является целой функцией (полиномом от p). Второе слагаемое является дробно-рациональной функцией от p , причем правильной дробью. Заметим, что поскольку $f(p)v(p)$ является полиномом от p , знаменатель $p - D_0$ во втором слагаемом в правой части выражения (57) сокращается.

Выражение (57) можно переписать так:

$$\frac{Q(p) - L(p)}{f(p)} = -R(p) + \mu(p), \quad (4.58)$$

где

$$R(p) = \frac{S(p) - S(D_0)}{p - D_0} z(0), \quad (4.59)$$

а $\mu(p)$ — правильная дробь, определяемая вторым слагаемым в правой части выражения (57).

Функцию $\mu(p)$ можно представить в виде суммы элементарных дробей в следующем виде [17]:

$$\mu(p) = \sum_{\sigma=1}^s \sum_{\rho=0}^{q_{\sigma}-1} \frac{1}{(q_{\sigma}-\rho-1)!} \left[\frac{\partial^{q_{\sigma}-\rho-1}}{\partial p^{q_{\sigma}-\rho-1}} \frac{Q(p)-L(p)}{f_{\sigma}(p)} \right]_{p=\lambda_{\sigma}} \frac{1}{(p-\lambda_{\sigma})^{\rho+1}}. \quad (4.60)$$

Оригинал, изображением которого является функция $p\mu(p)$, обозначим через $M^*(t)$:

$$p\mu(p) \dashrightarrow M^*(t). \quad (4.61)$$

Учитывая соотношение (45), представим функцию $M^*(t)$ в виде

$$M^*(t) = \sum_{\sigma=1}^s \frac{e^{\lambda_{\sigma}t}}{(q_{\sigma}-1)!} \left[\left(t + \frac{\partial}{\partial p} \right)^{q_{\sigma}-1} \frac{Q(p)-L(p)}{f_{\sigma}(p)} \right]_{p=\lambda_{\sigma}}. \quad (4.62)$$

Выражение (54), которым определена функция $\xi(p)$, можно при помощи (58) и (50) представить так:

$$\xi(p) = p\mu(p) + S(p)\zeta(p) - pR(p) + v(p)\zeta(p). \quad (4.63)$$

Учитывая соотношение (59) найдем, что

$$S(p)\zeta(p) - pR(p) \dashrightarrow S(D)z(t). \quad (4.64)$$

Оригинал для изображения $p\nu(p)$ обозначим через $N^*(t)$:

$$p\nu(p) \dashrightarrow N^*(t). \quad (4.65)$$

Аналогично (62) функция $N^*(t)$ будет иметь следующий вид:

$$N^*(t) = \sum_{\sigma=1}^s \frac{e^{\lambda_{\sigma}t}}{(q_{\sigma}-1)!} \left[\left(t + \frac{\partial}{\partial p} \right)^{q_{\sigma}-1} \frac{r(p)}{f_{\sigma}(p)} \right]_{p=\lambda_{\sigma}}. \quad (4.66)$$

Так как

$$\frac{1}{p} p\nu(p)\zeta(p) \dashrightarrow \int_0^t N^*(t-u)z(u)du, \quad (4.67)$$

то в соответствии с (63) закон движения системы, описываемой уравнением (47), будет следующим:

$$x(t) = M^*(t) + S(D)z(t) + \int_0^t N^*(t-u)z(u)du. \quad (4.68)$$

Обратимся теперь к скалярному дифференциальному уравнению

$$f(D)x(t) = r(D)\delta(t), \quad (4.69)$$

где $\delta(t)$ — единичная импульсивная функция (дельта-функция Дирака).

Аналогично (22)

$$r(D)\delta(t) \leftrightarrow pr(p). \quad (4.70)$$

Так как согласно (51)

$$f(D)x(t) \leftrightarrow f(p)\xi(p) - pQ(p),$$

то дифференциальному уравнению (69) будет соответствовать следующее уравнение в изображениях:

$$f(p)\xi(p) = pQ(p) + pr(p), \quad (4.71)$$

откуда

$$\xi(p) = p \frac{Q(p)}{f(p)} + p \frac{r(p)}{f(p)}. \quad (4.72)$$

Согласно (49) и (50) выражение (72) можно переписать так:

$$\xi(p) = p \frac{Q(p)}{f(p)} + pS(p) + pv(p). \quad (4.73)$$

При нулевых начальных условиях

$$x(0) = 0, \quad \dot{x}(0) = 0, \quad \dots, \quad x^{(n-1)}(0) = 0 \quad (4.74)$$

функция $Q(p)$ согласно (4) и (6) обращается в нуль

$$Q(p) = 0,$$

и выражение (73) принимает вид

$$\xi(p) = p\Phi(p), \quad (4.75)$$

где согласно (50)

$$\Phi(p) = S(p) + v(p).$$

Так как $S(p)$ является полиномом от p , то

$$pS(p) \leftrightarrow S(D)\delta(t). \quad (4.76)$$

Учитывая еще соотношение (65)

$$pv(p) \leftrightarrow N^*(t),$$

найдем, что изображению $p\Phi(p)$ соответствует следующий оригинал:

$$p\Phi(p) \leftrightarrow K(t), \quad (4.77)$$

где

$$K(t) = S(D)\delta(t) + N^*(t). \quad (4.78)$$

В соответствии с (75) и (77)

$$x(t) = K(t). \quad (4.79)$$

Таким образом, функция $K(t)$ представляет собой закон движения, который при нулевых начальных условиях совершает управляемая система под воздействием единичной импульсивной функции $\delta(t)$.

Функцию $K(t)$, определяемую операционным соотношением (77), можно назвать *функцией веса* одномерной управляемой системы, описываемой скалярным дифференциальным уравнением (47).

Как и в п. 1, выражение (78) определяет функцию $K(t)$ лишь при $t \geq 0$. Так как при $t < 0$ система находилась в покое, то, в соответствии с (79) мы должны принять, что

$$K(t) = 0 \quad \text{при} \quad t < 0. \quad (4.80)$$

Рассмотрим теперь уравнение

$$\dot{f}(D)x(t) = r(D)\mathbf{1}(t). \quad (4.81)$$

Аналогично (32)

$$r(D)\mathbf{1}(t) \leftarrow r(p).$$

Учитывая соотношение (51), получим соответствующее дифференциальному уравнению (81) уравнение в изображениях

$$f(p)\xi(p) = pQ(p) + r(p), \quad (4.82)$$

откуда

$$\xi(p) = p \frac{Q(p)}{f(p)} + \frac{r(p)}{f(p)} \quad (4.83)$$

или согласно (49) и (50)

$$\xi(p) = p \frac{Q(p)}{f(p)} + S(p) + v(p). \quad (4.84)$$

При нулевых начальных условиях (74)

$$x(0) = 0, \quad \dot{x}(0) = 0, \quad \dots, \quad x^{(n-1)}(0) = 0$$

функция $Q(p) = 0$ и выражение (84) принимает вид

$$\xi(p) = \Phi(p), \quad (4.85)$$

где согласно (50)

$$\Phi(p) = S(p) + v(p).$$

Функция $S(p)$ является полиномом от p , и поэтому

$$S(p) \rightarrow S(D)\mathbf{1}(t). \quad (4.86)$$

Оригинал, изображением которого является функция $v(p)$, обозначим через $A^*(t)$:

$$v(p) \dashrightarrow A^*(t). \quad (4.87)$$

В соответствии с (46) и (66) функция $A^*(t)$ будет иметь следующий вид:

$$A^*(t) = \frac{r(0)}{f(0)} + \sum_{\sigma=1}^s \frac{e^{\lambda_{\sigma} t}}{(q_{\sigma}-1)!} \left[\left(t + \frac{\partial}{\partial p} \right)^{q_{\sigma}-1} \frac{r(p)}{p f_{\sigma}(p)} \right]_{p=\lambda_{\sigma}}. \quad (4.88)$$

Таким образом, изображению $\Phi(p)$ будет соответствовать следующий оригинал:

$$\Phi(p) \dashrightarrow U(t), \quad (4.89)$$

где

$$U(t) = S(D) \mathbf{1}(t) + A^*(t). \quad (4.90)$$

В соответствии с (85) и (89)

$$x(t) = U(t), \quad (4.91)$$

и, следовательно, функция $U(t)$ представляет собой закон движения, который при нулевых начальных условиях совершает управляемая система под воздействием единичной ступенчатой функции $\mathbf{1}(t)$.

Функцию $U(t)$, определяемую операционным соотношением (89), можно назвать *переходной функцией* одномерной управляемой системы, описываемой скалярным дифференциальным уравнением (47).

Заметим, что так как $v(p)$ — правильная дробь, то $\lim_{p \rightarrow \infty} v(p) = 0$, и, следовательно, $A^*(0) = 0$. Поэтому

$$\dot{A}^*(t) \leftarrow p [v(p) - A^*(0)] = p v(p). \quad (4.92)$$

Учитывая еще, что

$$\frac{d}{dt} [S(D) \mathbf{1}(t)] = S(D) \delta(t) \leftarrow p S(p), \quad (4.93)$$

будем иметь

$$\dot{U}(t) \leftarrow p S(p) + p v(p) = p \Phi(p), \quad (4.94)$$

что совпадает с изображением (77) функции $K(t)$. Отсюда получаем аналогичную соотношению (40) связь между функцией веса $K(t)$ и переходной функцией $U(t)$:

$$\dot{U}(t) = K(t). \quad (4.95)$$

Пример. В качестве примера рассмотрим систему, описываемую следующим дифференциальным уравнением:

$$(D+1)x = (D^2 + D + 1)z(t). \quad (4.96)$$

Здесь

$$\begin{aligned} f(D) &= D + 1, & r(D) &= D^2 + D + 1, \\ \Phi(D) &= \frac{r(D)}{f(D)} = S(D) + v(D) = D + \frac{1}{D+1}, \\ S(D) &= D, & v(D) &= \frac{1}{D+1}, \\ Q(p) &= \frac{f(p) - f(D_0)}{p - D_0} x(0) = x(0), \\ L(p) &= \frac{r(p) - r(D_0)}{p - D_0} z(0) = \frac{p^2 + p - D_0^2 - D_0}{p - D_0} z(0) = (p + D_0 + 1) z(0), \\ \frac{Q(p) - L(p)}{f(p)} &= -R(p) + \mu(p) = \frac{x(0) - (p + D_0 + 1) z(0)}{p + 1} = \\ &= -z(0) + \frac{x(0) - \dot{z}(0)}{p + 1}, \end{aligned}$$

$$R(p) = z(0), \quad \mu(p) = \frac{x(0) - \dot{z}(0)}{p + 1}, \quad p\mu(p) \xrightarrow{\cdot} M^*(t),$$

$$M^*(t) = [x(0) - \dot{z}(0)] e^{-t}, \quad pv(p) \xrightarrow{\cdot} N^*(t), \quad N^*(t) = e^{-t}.$$

В соответствии с выражением (68) решение уравнения (96) будет

$$x(t) = [x(0) - \dot{z}(0)] e^{-t} + \dot{z}(t) + \int_0^t e^{-(t-u)} z(u) du. \quad (4.97)$$

Согласно (78) функция веса системы $K(t)$ имеет следующий вид:

$$K(t) = S(D) \delta(t) + N^*(t).$$

Для системы, описываемой дифференциальным уравнением (96), функция $K(t)$ принимает вид

$$K(t) = \dot{\delta}(t) + \mathbf{1}(t) e^{-t}. \quad (4.98)$$

Множитель $\mathbf{1}(t)$ введен в выражение (98), чтобы явно отметить, что $K(t) = 0$ при $t < 0$.

3. Многомерные управляемые системы. а) Закон движения многомерной системы. Рассмотрим теперь замкнутую управляемую систему, описываемую векторным дифференциальным уравнением

$$f(D) x(t) = r(D) z(t). \quad (4.99)$$

Здесь $x(t)$ — n -мерный вектор, элементы которого являются искомыми функциями, а $z(t)$ — m -мерный вектор, элементы которого являются заданными функциями времени:

$$x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \dots \\ x_n(t) \end{bmatrix}, \quad z(t) = \begin{bmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \\ \dots \\ z_m(t) \end{bmatrix}. \quad (4.100)$$

Матрицы $f(D)$ и $r(D)$ являются полиномиальными матрицами, аргумент которых — оператор дифференцирования $D = d/dt$:

$$f(D) = \begin{bmatrix} f_{11}(D) & \dots & f_{1n}(D) \\ \dots & \dots & \dots \\ f_{n1}(D) & \dots & f_{nn}(D) \end{bmatrix}, \quad r(D) = \begin{bmatrix} r_{11}(D) & \dots & r_{1m}(D) \\ \dots & \dots & \dots \\ r_{n1}(D) & \dots & r_{nm}(D) \end{bmatrix}. \quad (4.101)$$

Коэффициенты полиномов $f_{jk}(D)$ и $r_{j\mu}(D)$ предполагаются постоянными.

Векторное уравнение (99) эквивалентно следующей системе скалярных уравнений:

$$\sum_{k=1}^n f_{jk}(D) x_k(t) = \sum_{\mu=1}^m r_{j\mu}(D) z_{\mu}(t) \quad (j = 1, \dots, n). \quad (4.102)$$

Обозначим через ν_k порядок старшей производной от x_k ($k = 1, \dots, n$), встречающейся в уравнениях (102). Ранг ρ системы уравнений (102) будет

$$\rho = \nu_1 + \nu_2 + \dots + \nu_n. \quad (4.103)$$

Будем предполагать, что $\nu_k \geq 1$ ($k = 1, \dots, n$) и что определитель из коэффициентов, с которыми $x_k^{(\nu_k)}$ ($k = 1, \dots, n$) входят в уравнения (102), отличен от нуля. При этом условии степень определителя $\Delta(D)$ матрицы $f(D)$ будет равна рангу системы ρ .

При сделанных предположениях начальные значения

$$x_k(0), \dot{x}_k(0), \dots, x_k^{(\nu_k-1)}(0) \quad (k = 1, \dots, n)$$

не связаны между собой никакими зависимостями и могут задаваться произвольно.

Обозначая через $F(D)$ присоединенную матрицу для матрицы $f(D)$, можно представить уравнение (99) в виде

$$x(t) = \Phi(D) z(t), \quad (4.104)$$

где

$$\Phi(D) = \frac{F(D) r(D)}{\Delta(D)}. \quad (4.105)$$

Функция $\Phi(D)$ является *матричной передаточной* функцией системы, описываемой уравнением (99).

Будем предполагать для общности, что функция $\Phi(D)$ является неправильной дробью, и обозначим через $S(D)$ ее целую часть, а через $\nu(D)$ — правильную дробь, которая получается после выделения из $\Phi(D)$ целой части. Таким образом,

$$\Phi(D) = \frac{F(D) r(D)}{\Delta(D)} = S(D) + \nu(D). \quad (4.106)$$

Ниже нам потребуется одно соотношение, которое можно получить следующим образом. Умножая левую и правую части соотношения (106) слева на матрицу $f(D)$ и учитывая, что $f(D)F(D) = E\Delta(D)$, где E — единичная матрица, будем иметь

$$r(D) = f(D)S(D) + f(D)v(D). \quad (4.107)$$

Так как $r(D)$ и $f(D)S(D)$ являются целыми функциями (полиномами от D), то из (107) следует, что $f(D)v(D)$ является целой функцией (полиномом от D).

Найдем теперь решение уравнения (99). Обозначим

$$\xi(p) \dashrightarrow x(t), \quad \zeta(p) \dashrightarrow z(t). \quad (4.108)$$

В соответствии с операционным соотношением (4) изображения векторных линейных дифференциальных выражений $f(D)x(t)$ и $r(D)z(t)$ будут

$$\left. \begin{aligned} f(D)x(t) &\dashrightarrow f(p)\xi(p) - pQ(p), \\ r(D)z(t) &\dashrightarrow r(p)\zeta(p) - pL(p), \end{aligned} \right\} \quad (4.109)$$

где $Q(p)$ и $L(p)$ — векторы, которые имеют следующий вид:

$$\left. \begin{aligned} Q(p) &= \frac{f(p) - f(D_0)}{p - D_0} x(0), \\ L(p) &= \frac{r(p) - r(D_0)}{p - D_0} z(0). \end{aligned} \right\} \quad (4.110)$$

Уравнение в изображениях, соответствующее дифференциальному уравнению (99), будет следующим:

$$f(p)\xi(p) = p[Q(p) - L(p)] + r(p)\zeta(p), \quad (4.111)$$

откуда

$$\xi(p) = p \frac{F(p)[Q(p) - L(p)]}{\Delta(p)} + \frac{F(p)r(p)}{\Delta(p)} \zeta(p). \quad (4.112)$$

Преобразуем теперь первое слагаемое в правой части соотношения (112). Подставляя вместо $Q(p)$ и $L(p)$ их выражения (110), после несложных преобразований получим

$$\begin{aligned} \frac{F(p)[Q(p) - L(p)]}{\Delta(p)} &= - \frac{S(p) - S(D_0)}{p - D_0} z(0) + \\ &+ \frac{F(p)}{\Delta(p)} \left\{ \frac{f(p) - f(D_0)}{p - D_0} x(0) - \frac{[F^{-1}(p)\Delta(p) - F^{-1}(D_0)\Delta(D_0)]S(D_0)}{p - D_0} z(0) - \right. \\ &\quad \left. - \frac{F^{-1}(p)\Delta(p)v(p) - F^{-1}(D_0)\Delta(D_0)v(D_0)}{p - D_0} z(0) \right\}. \end{aligned} \quad (4.113)$$

Учитывая, что $F(p)f(p) = E\Delta(p)$ и, следовательно,

$$F^{-1}(p)\Delta(p) = f(p),$$

можно представить выражение (113) так:

$$\begin{aligned} \frac{F(p)[Q(p) - L(p)]}{\Delta(p)} = & - \frac{S(p) - S(D_0)}{p - D_0} z(0) + \\ & + \frac{F(p)}{\Delta(p)} \left\{ \frac{f(p) - f(D_0)}{p - D_0} [x(0) - S(D_0)z(0)] - \frac{f(p)v(p) - f(D_0)v(D_0)}{p - D_0} z(0) \right\}. \end{aligned} \quad (4.114)$$

Первое слагаемое в правой части выражения (114) является целой функцией (матричным полиномом от p), а второе слагаемое является дробно-рациональной функцией от p , причем правильной дробью. Заметим, что так как $f(p)v(p)$ является целой функцией (матричным полиномом от p), как это показано выше (107), то знаменатель $p - D_0$ во втором слагаемом в правой части выражения (114) сокращается.

Выражение (114) можно переписать так:

$$\frac{F(p)[Q(p) - L(p)]}{\Delta(p)} = -R(p) + \mu(p), \quad (4.115)$$

где

$$R(p) = \frac{S(p) - S(D_0)}{p - D_0} z(0), \quad (4.116)$$

а $\mu(p)$ — правильная дробь, определяемая вторым слагаемым в правой части выражения (114). Оригинал, изображением которого является функция $\rho\mu(p)$, обозначим через $M(t)$:

$$\rho\mu(p) \doteq M(t). \quad (4.117)$$

Ниже потребуется еще следующее преобразование. Определитель $\Delta(p)$ матрицы $f(p)$ можно представить так:

$$\Delta(p) = k_0 \mathcal{D}_n(p), \quad (4.118)$$

где

$$\mathcal{D}_n(p) = (p - \lambda_1)^{q_1} \dots (p - \lambda_s)^{q_s} = \prod_{\sigma=1}^s (p - \lambda_\sigma)^{q_\sigma}. \quad (4.119)$$

Таким образом, λ_σ — нули полинома $\Delta(p)$, а q_σ — их кратности.

Пусть $\mathcal{D}_{n-1}^*(p)$ — общий наибольший делитель миноров $(n-1)$ -го порядка матрицы $f(p)$, а α_0 — коэффициент при старшей степени p в полиноме $\mathcal{D}_{n-1}^*(p)$. Через $\mathcal{D}_{n-1}(p)$ обозначим следующий полином:

$$\mathcal{D}_{n-1}(p) = \frac{1}{\alpha_0} \mathcal{D}_{n-1}^*(p).$$

Полином $\mathcal{D}_{n-1}(p)$ является детерминантным делителем $(n-1)$ -го порядка полиномиальной матрицы $f(p)$.

Как известно [17, 21], функция

$$\mathcal{L}_n(p) = \frac{\mathcal{D}_n(p)}{\mathcal{D}_{n-1}(p)} \quad (4.120)$$

представляет собой полином следующего вида:

$$\mathcal{L}_n(p) = (p - \lambda_1)^{m_1} \dots (p - \lambda_s)^{m_s} = \prod_{\sigma=1}^s (p - \lambda_{\sigma})^{m_{\sigma}},$$

причем

$$1 \leq m_{\sigma} \leq q_{\sigma}. \quad (4.121)$$

Таким образом, нули полинома $\mathcal{L}_n(p)$ совпадают с нулями полинома $\Delta(p)$, а кратности нулей полинома $\mathcal{L}_n(p)$ удовлетворяют условию (121). Полином $\mathcal{L}_n(p)$ является старшим инвариантным множителем матрицы $f(p)$, а двучлены $(p - \lambda_{\sigma})^{m_{\sigma}}$ — старшие элементарные делители этой матрицы.

В соответствии с (118) и (120)

$$\Delta(p) = k_0 \mathcal{D}_{n-1}(p) \mathcal{L}_n(p).$$

Так как элементы матрицы $F(p)$ являются алгебраическими дополнениями элементов определителя матрицы $f(p)$, то все элементы $F_{jk}(p)$ матрицы $F(p)$ делятся на полином $\mathcal{D}_{n-1}(p)$ и матрицу $F(p)$ можно представить так:

$$F(p) = \mathcal{F}(p) \mathcal{D}_{n-1}(p).$$

Матрица $\mathcal{F}(p)$, таким образом, является полиномиальной матрицей.

Из полученных здесь соотношений следует, что

$$\frac{F(p)}{\Delta(p)} = \frac{\mathcal{F}(p)}{\Lambda(p)}, \quad (4.122)$$

где

$$\Lambda(p) = k_0 \mathcal{L}_n(p),$$

то есть

$$\Lambda(p) = k_0 (p - \lambda_1)^{m_1} \dots (p - \lambda_s)^{m_s} = k_0 \prod_{\sigma=1}^s (p - \lambda_{\sigma})^{m_{\sigma}}. \quad (4.123)$$

Перейдем теперь к отысканию функции $M(t)$, которая в соответствии с (117) является оригиналом для изображения $p\mu(p)$. При этом в выражении (115) заменим $F(p)/\Delta(p)$ согласно (122) через $\mathcal{F}(p)/\Lambda(p)$. Функция $M(t)$ будет иметь следующий вид:

$$M(t) = \sum_{\sigma=1}^s \frac{e^{\lambda_{\sigma} t}}{(m_{\sigma} - 1)!} \left[\left(t + \frac{\partial}{\partial p} \right)^{m_{\sigma} - 1} \frac{\mathcal{F}(p) [Q(p) - L(p)]}{\Lambda_{\sigma}(p)} \right]_{p=\lambda_{\sigma}}. \quad (4.124)$$

Здесь s — число не совпадающих между собой нулей λ_σ полинома $\Lambda(p)$, через m_σ обозначена кратность нуля λ_σ , а через $\Lambda_\sigma(p)$ обозначена функция

$$\Lambda_\sigma(p) = \frac{\Lambda(p)}{(p - \lambda_\sigma)^{m_\sigma}}. \quad (4.125)$$

Функция $M(t)$ является n -мерным вектором.

Выражение (112), которым определена функция $\xi(p)$, можно при помощи (115) и (106) представить так:

$$\xi(p) = p\mu(p) + S(p)\xi(p) - pR(p) + v(p)\xi(p). \quad (4.126)$$

Учитывая соотношение (116), найдем, что

$$S(p)\xi(p) - pR(p) \doteq S(D)z(t). \quad (4.127)$$

Как следует из изложенного, $S(D)$ является полиномиальной матрицей типа $n \times m$, аргументом которой является оператор дифференцирования $D = d/dt$. Оригинал для изображения $pv(p)$ обозначим через $N(t)$:

$$pv(p) \doteq N(t). \quad (4.128)$$

Аналогично (124) функция $N(t)$ будет иметь следующий вид:

$$N(t) = \sum_{\sigma=1}^s \frac{e^{\lambda_\sigma t}}{(m_\sigma - 1)!} \left[\left(t + \frac{\partial}{\partial t} \right)^{m_\sigma - 1} \frac{\mathcal{F}(p)r(p)}{\Lambda_\sigma(p)} \right]_{p=\lambda_\sigma}. \quad (4.129)$$

Функция $N(t)$ является прямоугольной матрицей типа $n \times m$. Так как по теореме об умножении изображений

$$\frac{1}{p} pv(p)\xi(p) \doteq \int_0^t N(t-u)z(u)du, \quad (4.130)$$

то закон движения системы, описываемой векторным дифференциальным уравнением (99), будет следующим:

$$x(t) = M(t) + S(D)z(t) + \int_0^t N(t-u)z(u)du. \quad (4.131)$$

Элементы $x_j(t)$ матрицы $x(t)$ будут

$$x_j(t) = M_j(t) + \sum_{\mu=1}^m S_{j\mu}(D)z_\mu(t) + \sum_{\mu=1}^m \int_0^t N_{j\mu}(t-u)z_\mu(u)du \quad (4.132)$$

$(j = 1, \dots, n).$

б) Матричная функция веса. Матричная передаточная функция системы $\Phi(D)$ определена выше выражением (106).

Функция $\Phi(D)$ представляет собой матрицу типа $m \times n$. Элемент $\Phi_{js}(p)$ матрицы $\Phi(p)$ согласно (106) имеет вид

$$\Phi_{js}(p) = \frac{\sum_{k=1}^n F_{jk}(p) r_{ks}(p)}{\Delta(p)} = S_{js}(p) + v_{js}(p), \quad (4.133)$$

где $S_{js}(p)$ — полином от p , а $v_{js}(p)$ — правильная дробь, которая получается после выделения из $\Phi_{js}(p)$ целой части.

Пусть теперь элементы вектора $z(t)$, который входит в правую часть векторного уравнения (99), будут

$$z_s(t) = \delta(t), \quad z_q(t) \equiv 0 \quad (q = 1, 2, \dots, s-1, s+1, \dots, m), \quad (4.134)$$

где $\delta(t)$ — единичная импульсивная функция (дельта-функция Дирака). При условии (134) вектор $r(D)z(t)$ будет иметь следующий вид:

$$r(D)z(t) = \begin{bmatrix} r_{1s}(D)z_s(t) \\ r_{2s}(D)z_s(t) \\ \cdot \\ \cdot \\ r_{ns}(D)z_s(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_{1s}(D)\delta(t) \\ r_{2s}(D)\delta(t) \\ \cdot \\ \cdot \\ r_{ns}(D)\delta(t) \end{bmatrix}. \quad (4.135)$$

Аналогично (22) изображение матрицы (135) будет

$$\begin{bmatrix} r_{1s}(D)\delta(t) \\ r_{2s}(D)\delta(t) \\ \cdot \\ \cdot \\ r_{ns}(D)\delta(t) \end{bmatrix} \leftarrow \begin{bmatrix} pr_{1s}(p) \\ pr_{2s}(p) \\ \cdot \\ \cdot \\ pr_{ns}(p) \end{bmatrix} = p \begin{bmatrix} r_{1s}(p) \\ r_{2s}(p) \\ \cdot \\ \cdot \\ r_{ns}(p) \end{bmatrix}. \quad (4.136)$$

Обозначая

$$\tilde{r}(p) = \begin{bmatrix} r_{1s}(p) \\ r_{2s}(p) \\ \cdot \\ \cdot \\ r_{ns}(p) \end{bmatrix}, \quad (4.137)$$

найдем, что в случае, когда элементы вектора $z(t)$ имеют вид (134),

$$r(D)z(t) \leftarrow p\tilde{r}(p). \quad (4.138)$$

Таким образом, в этом случае уравнение в изображениях (111) принимает вид

$$f(p)\xi(p) = pQ(p) + p\tilde{r}(p), \quad (4.139)$$

откуда

$$\xi(p) = p \frac{F(p)Q(p)}{\Delta(p)} + p \frac{F(p)\tilde{r}(p)}{\Delta(p)}. \quad (4.140)$$

Для элемента $\xi_j(p)$ вектора $\xi(p)$ будем, учитывая (137), иметь следующее выражение:

$$\xi_j(p) = p \frac{\sum_{k=1}^n F_{jk}(p) Q_k(p)}{\Delta(p)} + p \frac{\sum_{k=1}^n F_{jk}(p) r_{ks}(p)}{\Delta(p)} \quad (j = 1, \dots, n). \quad (4.141)$$

В соответствии с (133) выражение (141) можно переписать так:

$$\xi_j(p) = p \frac{\sum_{k=1}^n F_{jk}(p) Q_k(p)}{\Delta(p)} + p S_{js}(p) + p v_{js}(p) \quad (j = 1, \dots, n). \quad (4.142)$$

При нулевых начальных условиях

$$x_k(0) = 0, \quad \dot{x}_k(0) = 0, \dots, \quad x_k^{v_k-1}(0) = 0 \quad (k = 1, \dots, n) \quad (4.143)$$

матрица $Q(p)$ согласно (110) обращается в нуль

$$Q(p) = 0, \quad (4.144)$$

и выражение (142) принимает вид

$$\xi_j(p) = p S_{js}(p) + p v_{js}(p) = p \Phi_{js}(p). \quad (4.145)$$

Так как $S_{js}(p)$ является полиномом от p , то

$$p S_{js}(p) \dashrightarrow S_{js}(D) \delta(t). \quad (4.146)$$

Учитывая еще, что согласно (128)

$$p v_{js}(p) \dashrightarrow N_{js}(t), \quad (4.147)$$

где $N_{js}(t)$ есть элемент матрицы $N(t)$, которая определена выражением (129), найдем, что изображению $p \Phi_{js}(p)$ соответствует следующий оригинал:

$$p \Phi_{js}(p) \dashrightarrow K_{js}(t), \quad (4.148)$$

где

$$K_{js}(t) = S_{js}(D) \delta(t) + N_{js}(t). \quad (4.149)$$

Матрица $N(t)$ определена выше выражением (129). Приводя выражение элемента $N_{js}(t)$ этой матрицы к действительной форме, будем иметь

$$N_{js}(t) = \sum_{g=1}^{s'} \frac{e^{\kappa_g t}}{(m_g - 1)!} \left[\left(t + \frac{\partial}{\partial p} \right)^{m_g - 1} \frac{\sum_{k=1}^n \mathcal{F}_{jk}(p) r_{ks}(p)}{\Lambda_g(p)} \right]_{p=\kappa_g} + \\ + 2 \sum_{h=1}^{s''} \frac{e^{\epsilon_h t}}{(m_{s'+h} - 1)!} [\operatorname{Re} \mathcal{L} \cos \omega_h t - \operatorname{Im} \mathcal{L} \sin \omega_h t], \quad (4.150)$$

где

$$\mathcal{L} = \left[\left(t + \frac{\partial}{\partial p} \right)^{m_{s'+h} - 1} \frac{\sum_{k=1}^n \mathcal{F}_{jk}(p) r_{ks}(p)}{\Lambda_{s'+h}(p)} \right]_{p=\epsilon_h + i\omega_h}.$$

Здесь s' — число не совпадающих между собой действительных корней κ_g уравнения $\Lambda(p) = 0$, где $\Lambda(p)$ имеет вид (123), а s'' — число не совпадающих между собой пар комплексных корней $\epsilon_h \pm i\omega_h$ этого уравнения. Через m_g и $m_{s'+h}$ обозначена кратность этих корней. Через $\Lambda_g(p)$ и $\Lambda_{s'+h}(p)$ обозначены функции

$$\Lambda_g(p) = \frac{\Lambda(p)}{(p - \kappa_g)^{m_g}}, \quad \Lambda_{s'+h}(p) = \frac{\Lambda(p)}{(p - \epsilon_h - i\omega_h)^{m_{s'+h}}}. \quad (4.151)$$

В соответствии с (145) и (148)

$$x_j(t) = K_{js}(t) \quad (j = 1, \dots, n). \quad (4.152)$$

Таким образом, функция $K_{js}(t)$ ($j = 1, \dots, n$; s — фиксировано) представляет собой закон, по которому, при нулевых начальных условиях, изменяется во времени координата x_j системы, в случае, когда все элементы входного векторного сигнала $z(t)$ тождественно равны нулю, за исключением элемента $z_s(t)$, который равен единичной импульсивной функции $\delta(t)$.

Из операционного соотношения (148) следует, что

$$p\Phi(p) \doteq K(t), \quad (4.153)$$

где $K(t)$ — матрица типа $m \times n$, элемент которой $K_{js}(t)$ определен выражением (149).

Матрицу $K(t)$, определяемую операционным соотношением (153) можно назвать *матричной функцией веса* многомерной управляемой системы, описываемой векторным дифференциальным уравнением (99).

В соответствии с (153) выражение (149) определяет функцию $K(t)$ лишь при $t \geq 0$. Так как при $t < 0$ система находилась в покое, то в соответствии с (152) мы должны принять, что

$$K(t) = 0 \quad \text{при } t < 0.$$

в) Матричная переходная функция. Рассмотрим теперь случай, когда элементы вектора $z(t)$ имеют вид

$$z_s(t) = \mathbf{1}(t), \quad z_q(t) \equiv 0 \quad (q = 1, 2, \dots, s-1, s+1, \dots, m). \quad (4.154)$$

При условии (154) произведение матриц $r(D)$ и $z(t)$ будет

$$r(D)z(t) = \begin{bmatrix} r_{1s}(D)z_s(t) \\ r_{2s}(D)z_s(t) \\ \vdots \\ r_{ns}(D)z_s(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_{1s}(D)\mathbf{1}(t) \\ r_{2s}(D)\mathbf{1}(t) \\ \vdots \\ r_{ns}(D)\mathbf{1}(t) \end{bmatrix}. \quad (4.155)$$

Вектор (155) будет иметь следующее изображение:

$$\begin{bmatrix} r_{1s}(D)\mathbf{1}(t) \\ r_{2s}(D)\mathbf{1}(t) \\ \vdots \\ r_{ns}(D)\mathbf{1}(t) \end{bmatrix} \leftarrow \begin{bmatrix} r_{1s}(p) \\ r_{2s}(p) \\ \vdots \\ r_{ns}(p) \end{bmatrix}, \quad (4.156)$$

то есть

$$r(D)z(t) \leftarrow \tilde{r}(p), \quad (4.157)$$

где вектор $\tilde{r}(p)$ определен выражением (137). В рассматриваемом теперь случае уравнение в изображениях (111) принимает вид

$$f(p)\xi(p) = pQ(p) + \tilde{r}(p), \quad (4.158)$$

откуда

$$\xi(p) = p \frac{F(p)Q(p)}{\Delta(p)} + \frac{F(p)\tilde{r}(p)}{\Delta(p)}. \quad (4.159)$$

Для элемента $\xi_j(p)$ вектора $\xi(p)$ будем, учитывая (141), иметь следующее выражение:

$$\xi_j(p) = p \frac{\sum_{k=1}^n F_{jk}(p)Q_k(p)}{\Delta(p)} + \frac{\sum_{k=1}^n F_{jk}(p)r_{ks}(p)}{\Delta(p)} \quad (4.160)$$

$$(j = 1, \dots, n).$$

В соответствии с (133) выражение (160) можно переписать так:

$$\xi_j(p) = p \frac{\sum_{k=1}^n F_{jk}(p)Q_k(p)}{\Delta(p)} + S_{js}(p) + v_{js}(p). \quad (4.161)$$

При нулевых начальных условиях (143) матрица $Q(p)$ обращается в нуль, и выражение (161) принимает вид

$$\mathfrak{F}_j(p) = S_{js}(p) + v_{js}(p) = \Phi_{js}(p) \quad (j = 1, 2, \dots, n). \quad (4.162)$$

Так как $S_{js}(p)$ является полиномом от p , то

$$S_{js}(p) \dashrightarrow S_{js}(D) \mathbf{1}(t). \quad (4.163)$$

Обозначим через $A(t)$ матрицу, изображением которой является матрица $v(p)$:

$$v(p) \dashrightarrow A(t). \quad (4.164)$$

Аналогично (88) здесь будем иметь

$$A(t) = \frac{\mathcal{F}(0)r(0)}{\Lambda(0)} + \sum_{\sigma=1}^s \frac{e^{\lambda_\sigma t}}{(m_\sigma - 1)!} \left[\left(t + \frac{\partial}{\partial p} \right)^{m_\sigma - 1} \frac{\mathcal{F}(p)r(p)}{p\Lambda_\sigma(p)} \right]_{p=\lambda_\sigma}. \quad (4.165)$$

Из (164) следует, что

$$v_{js}(p) \dashrightarrow A_{js}(t), \quad (4.166)$$

где функция $A_{js}(t)$ является элементом матрицы $A(t)$.

Аналогично (150) приведенное к действительной форме выражение элемента $A_{js}(t)$ матрицы $A(t)$ будет следующим:

$$\begin{aligned} A_{js}(t) = & \frac{\sum_{k=1}^n \mathcal{F}_{jk}(0)r_{ks}(0)}{\Lambda(0)} + \\ & + \sum_{g=1}^{s'} \frac{e^{\lambda_g t}}{(m_g - 1)!} \left[\left(t + \frac{\partial}{\partial p} \right)^{m_g - 1} \frac{\sum_{k=1}^n \mathcal{F}_{jk}(p)r_{ks}(p)}{p\Lambda_g(p)} \right]_{p=\lambda_g} + \\ & + 2 \sum_{h=1}^{s''} \frac{e^{\varepsilon_h t}}{(m_{s'+h} - 1)!} \times \\ & \times \left\{ \operatorname{Re} \left[\left(t + \frac{\partial}{\partial p} \right)^{m_{s'+h} - 1} \frac{\sum_{k=1}^n \mathcal{F}_{jk}(p)r_{ks}(p)}{p\Lambda_{s'+h}(p)} \right]_{p=\varepsilon_h + i\omega_h} \cos \omega_h t - \right. \\ & \left. - \operatorname{Im} \left[\left(t + \frac{\partial}{\partial p} \right)^{m_{s'+h} - 1} \frac{\sum_{k=1}^n \mathcal{F}_{jk}(p)r_{ks}(p)}{p\Lambda_{s'+h}(p)} \right]_{p=\varepsilon_h + i\omega_h} \sin \omega_h t \right\}. \quad (4.167) \end{aligned}$$

Таким образом, изображению $\Phi_{js}(p)$ будет соответствовать следующий оригинал:

$$\Phi_{js}(p) \dashrightarrow U_{js}(t), \quad (4.168)$$

где

$$U_{js}(t) = S_{js}(D) \mathbf{1}(t) + A_{js}(t). \quad (4.169)$$

В соответствии с (162) и (168)

$$x_j(t) = U_{js}(t) \quad (j = 1, \dots, n). \quad (4.170)$$

Таким образом, функция $U_{js}(t)$ ($j = 1, \dots, n$; s — фиксировано) представляет собой закон, по которому при нулевых начальных условиях изменяется во времени координата x_j системы в случае, когда все элементы входного векторного сигнала $z(t)$ тождественно равны нулю, за исключением элемента $z_s(t)$, который равен единичной ступенчатой функции $\mathbf{1}(t)$.

Из операционного соотношения (168) следует, что

$$\Phi(p) \dashrightarrow U(t), \quad (4.171)$$

где $U(t)$ — матрица типа $m \times n$, элемент которой $U_{js}(t)$ определен выражением (169).

Матрицу $U(t)$, определяемую операционным соотношением (171), можно назвать *матричной переходной функцией* многомерной управляемой системы, описываемой векторным дифференциальным уравнением (99).

Заметим, что так как все элементы матрицы $v(p)$ являются правильными дробями, то $\lim_{p \rightarrow \infty} v(p) = 0$ и, следовательно, $A(0) = 0$. Поэтому

$$\dot{A}(t) \leftarrow p [v(p) - A(0)] = pv(p). \quad (4.172)$$

Учитывая еще, что

$$\frac{d}{dt} [S(D) \mathbf{1}(t)] = S(D) \delta(t) \leftarrow pS(p), \quad (4.173)$$

будем иметь

$$\dot{U}(t) \leftarrow pS(p) + pv(p) = p\Phi(p), \quad (4.174)$$

что совпадает с изображением (153) функции $K(t)$. Отсюда получаем следующую зависимость между матричной функцией веса $K(t)$ и матричной переходной функцией $U(t)$:

$$\dot{U}(t) = K(t). \quad (4.175)$$

§ 5. Переходные и установившиеся процессы в замкнутых управляемых системах

1. Определение функции веса по частотной характеристике замкнутой системы. В § 4 была введена функция веса (4.148), (4.133) (которая называется также импульсной переходной функцией) и переходная функция (4.168) при помощи следующих соотношений:

$$p\Phi_{js}(p) = p \frac{\sum_{k=1}^n F_{jk}(p) r_{ks}(p)}{\Delta(p)} \xrightarrow{\div} N_{js}(t), \quad (5.1)$$

$$\Phi_{js}(p) = \frac{\sum_{k=1}^n F_{jk}(p) r_{ks}(p)}{\Delta(p)} \xrightarrow{\div} A_{js}(t). \quad (5.2)$$

Будем здесь предполагать, что функция $\Phi_{js}(p)$ является правильной дробью. Ограничиваясь *устойчивыми* системами, мы должны принять, что все нули полинома $\Delta(p)$ расположены в левой полуплоскости p . Поэтому все полюсы функции $\Phi_{js}(p)$ будут расположены в левой полуплоскости p .

Если известна функция $\Phi_{js}(p)$, то функция веса $N_{js}(t)$ и переходная функция $A_{js}(t)$ могут быть найдены по формулам Римана — Меллина. Из соотношения (1) следует, что

$$N_{js}(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{p\Phi_{js}(p)}{p} e^{pt} dp \quad (t \geq 0)$$

или

$$N_{js}(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \Phi_{js}(p) e^{pt} dp \quad (t \geq 0). \quad (5.3)$$

В выражении (3) интеграл вычисляется вдоль прямой, параллельной мнимой оси и отстоящей от нее на расстоянии c , где величина c выбирается так, чтобы все полюсы функции $\Phi_{js}(p)$ были расположены левее этой прямой. Так как все полюсы функции $\Phi_{js}(p)$ расположены в левой полуплоскости, то можно принять $c = 0$.

Перейдем теперь из плоскости комплексного переменного p в плоскость q , где

$$p = iq. \quad (5.4)$$

Из формулы (4) следует, что

$$q = -ip.$$

Таким образом имеют место следующие соотношения:

$$\begin{aligned} p &= c - i\infty, & q &= -i(c - i\infty) = -ic - \infty, \\ p &= c + i\infty, & q &= -i(c + i\infty) = -ic + \infty, \end{aligned}$$

и выражение (3) принимает вид

$$N_{js}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-ic-\infty}^{-ic+\infty} \Phi_{js}(iq) e^{iqt} dq. \quad (5.5)$$

Так как

$$p = c + i\omega, \quad (5.6)$$

то

$$q = -i(c + i\omega) = -ic + \omega. \quad (5.7)$$

При $c = 0$ выражение (7) принимает вид

$$q = \omega.$$

Поэтому в соответствии со сделанным выше предположением о том, что рассматриваемая система является устойчивой, вследствие чего можно принять $c = 0$, приведем выражение (5) к следующему виду:

$$N_{js}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_{js}(i\omega) e^{i\omega t} d\omega. \quad (5.8)$$

Выражение (8) представляет собой обратное преобразование Фурье. Оно определяет функцию $N_{js}(t)$ на интервале $0 < t < \infty$,

если только интеграл $\int_{-\infty}^{\infty} N_{js}(t) dt$ абсолютно сходится. Это условие для устойчивой системы выполняется.

Выражение (8) можно переписать так:

$$\begin{aligned} N_{js}(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} [\operatorname{Re} \Phi_{js}(i\omega) \cos \omega t - \operatorname{Im} \Phi_{js}(i\omega) \sin \omega t] d\omega + \\ &+ \frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} [\operatorname{Re} \Phi_{js}(i\omega) \sin \omega t + \operatorname{Im} \Phi_{js}(i\omega) \cos \omega t] d\omega. \quad (5.9) \end{aligned}$$

Функции $\operatorname{Re} \Phi_{js}(i\omega)$ и $\cos \omega t$ являются четными функциями от ω . Функции $\operatorname{Im} \Phi_{js}(i\omega)$ и $\sin \omega t$ являются нечетными функциями от ω . Таким образом, подынтегральная функция во втором интеграле в выражении (9) является нечетной функцией

от ω , а так как интегрирование ведется в пределах от $-\infty$ до $+\infty$, то второй интеграл в выражении (9) обращается в нуль. Так как в первом интеграле в выражении (9) подынтегральная функция является четной функцией от ω , то можно заменить этот интеграл удвоенным интегралом, взятым в пределах от 0 до ∞ . Выражение (9) принимает следующий вид:

$$N_{js}(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \operatorname{Re} \Phi_{js}(i\omega) \cos \omega t d\omega - \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \operatorname{Im} \Phi_{js}(i\omega) \sin \omega t d\omega. \quad (5.10)$$

Таким образом, при помощи формулы (10) можно определить функцию веса системы $N_{js}(t)$ по частотной характеристике $\Phi_{js}(i\omega)$ этой системы.

Пусть теперь $t = -\tau$. Выражение (8) при этом принимает вид

$$N_{js}(-\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_{js}(i\omega) e^{-i\omega\tau} d\omega. \quad (5.11)$$

Переходя обратно в плоскость p , в соответствии с (6) будем иметь

$$N_{js}(-\tau) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} \Phi_{js}(p) e^{-p\tau} dp. \quad (5.12)$$

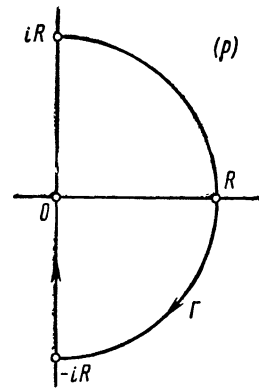


Рис. 5.1.

Так как по сделанному здесь предположению $\Phi_{js}(p)$ есть правильная дробь, то на полуокружности Γ радиуса R (рис. 5.1) функция $\Phi_{js}(p)$, где $p = Re^{i\varphi}$, при $R \rightarrow \infty$ стремится равномерно к нулю относительно φ , где $-\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{\pi}{2}$. Поэтому для этой полуокружности имеет место лемма Жордана

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \Phi_{js}(p) e^{-p\tau} dp = 0. \quad (5.13)$$

Полуокружность Γ , по которой ведется интегрирование в выражении (13), должна быть расположена в правой полуплоскости p , так как при $p = Re^{i\varphi}$ функция $|e^{-p\tau}| = e^{-(\operatorname{Re} p)\tau}$ стремится к нулю при $R \rightarrow \infty$ только в правой полуплоскости p . На осно-

вании соотношения (13) можно представить выражение (12) так:

$$N_{js}(-\tau) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} \Phi_{js}(p) e^{-p\tau} dp + \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \Phi_{js}(p) e^{-p\tau} dp = \\ = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \Phi_{js}(p) e^{-p\tau} dp, \quad (5.14)$$

где замкнутый контур C состоит из мнимой оси и полуокружности бесконечно большого радиуса. Этот контур охватывает всю правую полуплоскость.

Интеграл в правой части (14) равен сумме вычетов функции $\Phi_{js}(p) e^{-p\tau}$ по особым точкам функции $\Phi_{js}(p)$, расположенным в правой полуплоскости p . Но так как функция $\Phi_{js}(p)$ не имеет особых точек в правой полуплоскости, то этот интеграл равен нулю. Таким образом, мы получили, что

$$N_{js}(-\tau) = 0. \quad (5.15)$$

Так как согласно (10)

$$N_{js}(-\tau) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \operatorname{Re} \Phi_{js}(i\omega) \cos \omega\tau d\omega + \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \operatorname{Im} \Phi_{js}(i\omega) \sin \omega\tau d\omega, \quad (5.16)$$

то в соответствии с (15) будем иметь

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \operatorname{Re} \Phi_{js}(i\omega) \cos \omega\tau d\omega = - \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \operatorname{Im} \Phi_{js}(i\omega) \sin \omega\tau d\omega. \quad (5.17)$$

При помощи (17) и (10) получим следующее окончательное выражение для функции веса:

$$N_{js}(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \operatorname{Re} \Phi_{js}(i\omega) \cos \omega t d\omega = \\ = - \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \operatorname{Im} \Phi_{js}(i\omega) \sin \omega t d\omega \quad \text{при } t \geq 0. \quad (5.18)$$

2. Определение переходной функции по частотной характеристике замкнутой системы. Перейдем теперь к определению переходной функции $A_{js}(t)$. Так как согласно (2)

$$\Phi_{js}(p) = \frac{\sum_{k=1}^n F_{jk}(p) r_{ks}(p)}{\Delta(p)} \rightarrow A_{js}(t), \quad (5.19)$$

ТО

$$A_{js}(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{\Phi_{js}(p)}{p} e^{pt} dp \quad (t \geq 0). \quad (5.20)$$

Непосредственно применить полученные выше результаты к выражению (20) не представляется возможным, так как функ-

ция $\frac{\Phi_{js}(p)}{p} = \frac{\sum_{k=1}^n F_{jk}(p) r_{ks}(p)}{p \Delta(p)}$ имеет полюс первого порядка в начале координат. Поэтому займемся преобразованием этой функции, для чего разложим ее на сумму элементарных дробей. Учитывая соотношения (4.122), будем иметь

$$\begin{aligned} \frac{\Phi_{js}(p)}{p} &= \frac{\sum_{k=1}^n F_{jk}(p) r_{ks}(p)}{p \Delta(p)} = \frac{\sum_{k=1}^n \mathcal{F}_{jk}(p) r_{ks}(p)}{p \Lambda(p)} = \\ &= \frac{\sum_{k=1}^n \mathcal{F}_{jk}(0) r_{ks}(0)}{\Lambda(0)} \frac{1}{p} + \\ &+ \sum_{\sigma=1}^s \sum_{\rho=0}^{m_{\sigma}-1} \frac{1}{(m_{\sigma}-\rho-1)!} \left[\frac{\partial^{m_{\sigma}-\rho-1}}{\partial p^{m_{\sigma}-\rho-1}} \frac{\sum_{k=1}^n \mathcal{F}_{jk}(p) r_{ks}(p)}{p \Lambda_{\sigma}(p)} \right]_{p=\lambda_{\sigma}} \frac{1}{(p-\lambda_{\sigma})^{\rho+1}}. \end{aligned} \quad (5.21)$$

Второе слагаемое в правой части (21) обозначим через $\Psi_{js}(p)$. Таким образом,

$$\frac{\Phi_{js}(p)}{p} = \frac{\sum_{k=1}^n \mathcal{F}_{jk}(0) r_{ks}(0)}{\Lambda(0)} \frac{1}{p} + \Psi_{js}(p)$$

или

$$\frac{\Phi_{js}(p)}{p} = \Phi_{js}(0) \frac{1}{p} + \Psi_{js}(p). \quad (5.22)$$

Функция $\Psi_{js}(p)$ является дробно-рациональной функцией, все полюсы которой расположены левее мнимой оси на плоскости комплексного переменного p .

Так как согласно (22)

$$\Psi_{js}(p) = \frac{\Phi_{js}(p) - \Phi_{js}(0)}{p}, \quad (5.23)$$

то будем далее писать

$$\frac{\Phi_{js}(p)}{p} = \frac{\Phi_{js}(0)}{p} + \frac{\Phi_{js}(p) - \Phi_{js}(0)}{p}, \quad (5.24)$$

причем второе слагаемое в выражении (24) имеет все полюсы в левой полуплоскости p .

Выражение (20) теперь можно представить так:

$$A_{js}(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{\Phi_{js}(0)}{p} e^{pt} dp + \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{\Phi_{js}(p) - \Phi_{js}(0)}{p} e^{pt} dp. \quad (5.25)$$

Так как $\Phi_{js}(0)$ есть постоянная величина, то $\Phi_{js}(0) \rightarrow \Phi_{js}(0)$ (постоянные величины совпадают со своими изображениями) и

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{\Phi_{js}(0)}{p} e^{pt} dp = \Phi_{js}(0). \quad (5.26)$$

Выражение (25) принимает вид

$$A_{js}(t) = \Phi_{js}(0) + \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{\Phi_{js}(p) - \Phi_{js}(0)}{p} e^{pt} dp. \quad (5.27)$$

Второе выражение в правой части (27) можно привести к виду, аналогичному выражению (18). Предварительно вычислим действительную и мнимую части функции

$$\frac{\Phi_{js}(i\omega) - \Phi_{js}(0)}{i\omega}.$$

Будем иметь

$$\frac{\Phi_{js}(i\omega) - \Phi_{js}(0)}{i\omega} = \frac{\operatorname{Re} \Phi_{js}(i\omega) - \Phi_{js}(0)}{i\omega} + i \frac{\operatorname{Im} \Phi_{js}(i\omega)}{i\omega}.$$

Отсюда

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{Re} \left[\frac{\Phi_{js}(i\omega) - \Phi_{js}(0)}{i\omega} \right] &= \frac{\operatorname{Im} \Phi_{js}(i\omega)}{\omega}, \\ \operatorname{Im} \left[\frac{\Phi_{js}(i\omega) - \Phi_{js}(0)}{i\omega} \right] &= \frac{\Phi_{js}(0) - \operatorname{Re} \Phi_{js}(i\omega)}{\omega}. \end{aligned} \right\} \quad (5.28)$$

Поэтому

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{\Phi_{J_s}(p) - \Phi_{J_s}(0)}{p} e^{pt} dp &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\operatorname{Im} \Phi_{J_s}(i\omega)}{\omega} \cos \omega t d\omega = \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \left[\frac{\operatorname{Re} \Phi_{J_s}(i\omega)}{\omega} - \frac{\Phi_{J_s}(0)}{\omega} \right] \sin \omega t d\omega. \end{aligned} \quad (5.29)$$

Подставляя это выражение в (27), получим

$$\begin{aligned} A_{J_s}(t) &= \Phi_{J_s}(0) + \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\operatorname{Im} \Phi_{J_s}(i\omega)}{\omega} \cos \omega t d\omega = \\ &= \Phi_{J_s}(0) - \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\Phi_{J_s}(0)}{\omega} \sin \omega t d\omega + \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\operatorname{Re} \Phi_{J_s}(i\omega)}{\omega} \sin \omega t d\omega. \end{aligned} \quad (5.30)$$

Так как

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin \omega t}{\omega} d\omega = \frac{\pi}{2}, \quad (5.31)$$

то выражение (30) принимает вид

$$\begin{aligned} A_{J_s}(t) &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\operatorname{Re} \Phi_{J_s}(i\omega)}{\omega} \sin \omega t d\omega = \\ &= \Phi_{J_s}(0) + \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\operatorname{Im} \Phi_{J_s}(i\omega)}{\omega} \cos \omega t d\omega. \end{aligned} \quad (5.32)$$

Выражение (32) имеет место при $t \geq 0$.

3. Минимально-фазовые системы. Для одномерной управляемой системы соотношение (18) принимает вид

$$\begin{aligned} N(t) &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \operatorname{Re} \Phi(i\omega) \cos \omega t d\omega = \\ &= -\frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \operatorname{Im} \Phi(i\omega) \sin \omega t d\omega \quad (t \geq 0). \end{aligned} \quad (5.33)$$

Обозначая

$$\operatorname{Re} \Phi(i\omega) = P(\omega), \quad \operatorname{Im} \Phi(i\omega) = Q(\omega), \quad (5.34)$$

можно переписать соотношение (33) так:

$$N(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} P(\omega) \cos \omega t d\omega = -\frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} Q(\omega) \sin \omega t d\omega. \quad (5.35)$$

Аналогично соотношение (32) для одномерной системы принимает вид

$$A(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{P(\omega)}{\omega} \sin \omega t d\omega = P(0) + \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{Q(\omega)}{\omega} \cos \omega t d\omega. \quad (5.36)$$

В выражении (36) учтено, что

$$\Phi(0) = [\Phi(p)]_{p=0} = P(0).$$

При выводе соотношений (18) и (32) предполагалось, что функция $\Phi(p)$, представляющая собой дробно-рациональную функцию от p :

$$\Phi(p) = \frac{l(p)}{f(p)}, \quad (5.37)$$

является правильной дробью и что рассматриваемая система *асимптотически устойчива*. Последнее означает, что все нули полинома $f(p)$ или, что то же, все полюсы функции $\Phi(p)$ расположены на плоскости комплексного переменного p строго левее мнимой оси.

Заметим, без доказательства ([82], стр. 161, [41], стр. 246), что для асимптотически устойчивых систем (то есть для функции $\Phi(p)$, все полюсы которой расположены в левой полуплоскости p) функции $P(\omega)$ и $Q(\omega)$ определяют друг друга, будучи связаны следующими формулами, представляющими собой *преобразование Гильберта*:

$$\left. \begin{aligned} P(\omega) &= -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{Q(u)}{u-\omega} du, \\ Q(\omega) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{P(u)}{u-\omega} du. \end{aligned} \right\} \quad (5.38)$$

Обозначая через $R(\omega)$ модуль функции $\Phi(i\omega)$, а через $\psi(\omega)$ ее аргумент, будем иметь

$$\Phi(i\omega) = R(\omega) e^{i\psi(\omega)}, \quad (5.39)$$

откуда следует, что

$$\ln \Phi(i\omega) = \ln R(\omega) + i\psi(\omega). \quad (5.40)$$

Функции $\ln R(\omega)$ и $\psi(\omega)$ связаны с функцией $\ln \Phi(i\omega)$ таким же образом, как связаны $P(\omega)$ и $Q(\omega)$ с функцией $\Phi(i\omega)$. Поэтому аналогично (38) можно утверждать, что *если все полюсы функции $\ln \Phi(p)$ расположены строго левее мнимой оси на плоскости комплексного переменного p* , то функции $\ln R(\omega)$ и $\psi(\omega)$ будут удовлетворять соотношениям

$$\left. \begin{aligned} \ln R(\omega) &= -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\psi(u)}{u-\omega} du, \\ \psi(\omega) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\ln R(u)}{u-\omega} du. \end{aligned} \right\} \quad (5.41)$$

Так как согласно (37)

$$\ln \Phi(p) = \ln \frac{l(p)}{f(p)} = \ln l(p) - \ln f(p), \quad (5.42)$$

то к числу особых точек функции $\ln \Phi(p)$ относятся не только нули функции $f(p)$, но и нули функции $l(p)$. (При $l(p) \rightarrow 0$ в соответствии с (42) $\ln \Phi(p) \rightarrow -\infty$.)

Таким образом, формулы (41), позволяющие определить $R(\omega)$ через $\psi(\omega)$ и обратно, будут иметь место лишь в том случае, если у функции

$$\Phi(p) = \frac{l(p)}{f(p)}$$

не только все полюсы, но и все нули расположены строго левее мнимой оси на плоскости комплексного переменного p . Системы, удовлетворяющие этому условию, называются *минимально-фазовыми системами*.

Минимально-фазовые системы отличаются тем, что из всех возможных систем с одной и той же амплитудной характеристикой $R(\omega)$ сдвиг фазы будет у них наименьшим по сравнению с другими системами при любом значении частоты ω . *Сдвигом фазы* называется отрицательное значение аргумента $\Phi(i\omega)$, то есть $-\psi(\omega)$.

Так, например, функция

$$\Phi_1(p) = \frac{(1+p\tau_1)(1+p\tau_2)}{(1+pT_1)(1+pT_2)} \quad (5.43)$$

является передаточной функцией минимально-фазовой системы, в то время как функция

$$\Phi_2(p) = \frac{(1-p\tau_1)(1+p\tau_2)}{(1+pT_1)(1+pT_2)} \quad (5.44)$$

является передаточной функцией неминимально-фазовой системы.

Функцию $\Phi_2(p)$ можно представить так:

$$\Phi_2(p) = \Phi_1(p) \frac{1 - p\tau_1}{1 + p\tau_1}. \quad (5.45)$$

Отсюда

$$\Phi_2(i\omega) = \Phi_1(i\omega) \frac{1 - i\omega\tau_1}{1 + i\omega\tau_1}. \quad (5.46)$$

Так как

$$\frac{1 - i\omega\tau_1}{1 + i\omega\tau_1} = e^{-2i\varphi}, \quad \operatorname{tg} \varphi = \omega\tau_1, \quad (5.47)$$

то

$$\Phi_2(i\omega) = \Phi_1(i\omega) e^{-2i\varphi}. \quad (5.48)$$

Обозначим

$$\mu_1(\omega) = -\operatorname{arg} \Phi_1(i\omega). \quad (5.49)$$

Как указано выше, функция $\mu_1(\omega)$ называется *сдвигом фазы*. Смысл этого понятия состоит в следующем. Сигнал на выходе системы с передаточной функцией $\Phi(D)$ будет

$$x = \Phi(D) z(t).$$

При $z(t) = ae^{i\nu t}$ установившийся процесс в системе будет следующим:

$$x(t) = \Phi(i\nu) ae^{i\nu t} = R(\nu) e^{-i\mu_1(\nu)} ae^{i\nu t} = R(\nu) ae^{i[\nu t - \mu_1(\nu)]}.$$

Как следует из (48),

$$\operatorname{arg} \Phi_2(i\omega) = \operatorname{arg} \Phi_1(i\omega) - 2\varphi$$

или

$$-\mu_2(\omega) = -\mu_1(\omega) - 2\varphi.$$

Отсюда

$$\mu_2(\omega) = \mu_1(\omega) + 2\varphi. \quad (5.50)$$

Таким образом, при одном и том же виде функции $R(\omega)$ у минимально-фазовой системы сдвиг фазы $\mu_1(\omega)$ меньше, чем у любой неминимально-фазовой системы.

Неминимально-фазовые системы с нулями $p = \pm ik$ на мнимой оси применяются, например, для того, чтобы обратить $|\Phi(i\omega)|_{\omega=k}$ в нуль, когда требуется, чтобы система не пропускала сигналов на частоте $\omega = k$. К неминимально-фазовым системам относятся также астатические звенья, то есть звенья, у которых передаточная функция имеет полюс в начале координат.

При некоторых видах амплитудно-фазовой частотной характеристики разомкнутой системы, когда ликвидация охвата ею

точки $(-1, i0)$ возможна поворотом частотной характеристики по направлению стрелки часов, в разомкнутую систему (с целью стабилизации замкнутой системы) последовательно включается неминимально-фазовое звено.

При синтезе электрических цепей неминимально-фазовые звенья применяются как фазо-корректирующие звенья. Имеются и другие применения неминимально-фазовых систем.

4. Установившиеся процессы в замкнутых управляемых системах. Коэффициенты ошибок. Дифференциальное уравнение, описывающее процессы в замкнутой одномерной управляемой системе, было записано в § 4 в следующем виде:

$$f(D)x = l(D)z(t), \quad (5.51)$$

где $D = \frac{d}{dt}$, а функции $f(D)$ и $l(D)$ являются полиномами от оператора дифференцирования $D = \frac{d}{dt}$ с постоянными коэффициентами

$$f(D) = a_0 D^n + a_1 D^{n-1} + \dots + a_{n-1} D + a_n, \quad (5.52)$$

$$l(D) = l_0 D^m + l_1 D^{m-1} + \dots + l_{m-1} D + l_m \quad (m < n).$$

Передаточная функция замкнутой системы будет

$$\Phi(D) = \frac{l(D)}{f(D)}. \quad (5.53)$$

Установившимся процессом, как указано в § 1, называется закон движения асимптотически устойчивой системы в случае, когда входной сигнал $z(t)$ подан в момент времени $t_0 = -\infty$, то есть бесконечно давно. Предполагая, что система (51) устойчива, будем в соответствии с формулами (1.22) и (4.19) иметь для установившегося процесса следующее выражение:

$$x(t) = \int_{-\infty}^t N(t-\tau) z(\tau) d\tau = \int_0^{\infty} N(\xi) z(t-\xi) d\xi, \quad (5.54)$$

где функция веса системы $N(t)$ определяется операционным соотношением

$$p\Phi(p) \dot{\rightarrow} N(t). \quad (5.55)$$

В случае, когда входной сигнал $z(t)$ является *полиномом* от t степени q , можно представить функцию $z(t-\xi)$ в следующем виде:

$$z(t-\xi) = \sum_{r=0}^q (-1)^r \frac{z^{(r)}(t)}{r!} \xi^r. \quad (5.56)$$

В этом случае выражение (54) можно привести к следующему виду:

$$x(t) = \sum_{r=0}^q (-1)^r \frac{z^{(r)}(t)}{r!} \int_0^{\infty} \xi^r N(\xi) d\xi. \quad (5.57)$$

Несобственные интегралы в выражении (57) представляют собой моменты функции веса $N(t)$:

$$\mu_r = \int_0^{\infty} \xi^r N(\xi) d\xi \quad (r = 0, 1, 2, \dots). \quad (5.58)$$

Интегралы (58) являются сходящимися, как это видно из выражения (4.15) для функции $N(t)$. Учитывая, что в соответствии с операционным соотношением (55)

$$\int_0^{\infty} N(\xi) e^{-p\xi} d\xi = \Phi(p), \quad (5.59)$$

найдем, что

$$(-1)^r \int_0^{\infty} \xi^r N(\xi) e^{-p\xi} d\xi = \Phi^{(r)}(p). \quad (5.60)$$

Из соотношений (58), (59), (60) следует, что

$$\mu_0 = \int_0^{\infty} N(\xi) d\xi = \Phi(0), \quad (5.61)$$

$$\mu_r = \int_0^{\infty} \xi^r N(\xi) d\xi = (-1)^r \Phi^{(r)}(0) \quad (r = 1, 2, \dots). \quad (5.62)$$

В соответствии с (61) и (62) выражение (57) принимает вид

$$x(t) = \sum_{r=0}^q \frac{\Phi^{(r)}(0)}{r!} z^{(r)}(t). \quad (5.63)$$

Предположим теперь, что система, описываемая уравнением (51), предназначена для того, чтобы воспроизводить функцию $\sigma(D)z(t)$, где $\sigma(D)$ — полином от оператора $D = d/dt$ с постоянными коэффициентами

$$\sigma(D)z(t) = \sigma_l z^{(l)}(t) + \sigma_{l-1} z^{(l-1)}(t) + \dots + \sigma_1 z'(t) + \sigma_0 z(t). \quad (5.64)$$

Ошибка системы, таким образом, будет

$$\varepsilon(t) = x(t) - \sigma(D)z(t). \quad (5.65)$$

Из соотношений (63), (64) и (65) найдем, что

$$\varepsilon(t) = \sum_{r=0}^l \left[\frac{1}{r!} \Phi^{(r)}(0) - \sigma_r \right] z^{(r)}(t) + \sum_{r=l+1}^q \frac{1}{r!} \Phi^{(r)}(0) z^{(r)}(t). \quad (5.66)$$

Величины

$$c_r = \frac{1}{r!} \Phi^{(r)}(0) - \sigma_r \quad (r = 0, 1, 2, \dots). \quad (5.67)$$

называются *коэффициентами ошибок*. Если входной сигнал $z(t)$ является полиномом от t не выше k -й степени, то ошибка системы $\varepsilon(t)$ будет

$$\varepsilon(t) = \sum_{r=0}^k c_r z^{(r)}(t). \quad (5.68)$$

Коэффициент

$$c_0 = \Phi(0) - \sigma_0 \quad (5.69)$$

называется коэффициентом *статической* ошибки или коэффициентом ошибки *по положению*. Управляемые системы, у которых $c_0 = 0$, называются *астатическими*.

Коэффициент

$$c_1 = \Phi'(0) - \sigma_1 \quad (5.70)$$

называется коэффициентом ошибки *по скорости*. Коэффициент

$$c_2 = \frac{1}{2} \Phi''(0) - \sigma_2 \quad (5.71)$$

называется коэффициентом ошибки *по ускорению*. *Астатической системой k -го порядка* называется система, у которой

$$c_0 = 0, c_1 = 0, \dots, c_{k-1} = 0, c_k \neq 0.$$

5. Установившиеся процессы в следящей системе. Рассмотрим теперь коэффициенты ошибок следящей системы. Следящая система должна воспроизводить входной сигнал $z(t)$. Пусть $z(t)$ — некоторый полином от t . Ошибка следящей системы определяется выражением

$$\varepsilon(t) = x(t) - z(t). \quad (5.72)$$

Для следящей системы в соответствии с (64)

$$\sigma_0 = 1, \quad \sigma_1 = \sigma_2 = \dots = 0. \quad (5.73)$$

Коэффициенты ошибок следящей системы согласно (67) и (73) будут

$$c_0 = \Phi(0) - 1, \quad (5.74)$$

$$c_r = \frac{1}{r!} \Phi^{(r)}(0) \quad (r = 1, 2, \dots).$$

У астатической следящей системы коэффициент c_0 должен быть равен нулю. т. е. должно выполняться соотношение

$$\Phi(0) = 1. \quad (5.75)$$

Можно доказать, что для того, чтобы замкнутая следящая система была астатической системой k -го порядка (то есть чтобы у этой системы коэффициенты ошибок $c_0, c_1, c_2, \dots, c_{k-1}$ были равны нулю, а $c_k \neq 0$), необходимо и достаточно, чтобы передаточная функция $G(D)$ разомкнутой системы имела вид

$$G(D) = \frac{1}{D^k} G_1(D), \quad G_1(0) \neq 0. \quad (5.76)$$

Перейдем к доказательству этого утверждения. Передаточная функция замкнутой системы, в соответствии с (1.66), будет

$$\Phi(D) = \frac{G(D)}{1 + G(D)}. \quad (5.77)$$

Согласно (76) и (77)

$$\Phi(p) = \frac{G(p)}{1 + G(p)} = \frac{G_1(p)}{p^k + G_1(p)}$$

или

$$\Phi(p) = \frac{1}{1 + \frac{p^k}{G_1(p)}}. \quad (5.78)$$

При малых по модулю значениях p (то есть в окрестности точки $p = 0$) функция $\Phi(p)$ может быть представлена следующим сходящимся рядом:

$$\Phi(p) = 1 - \frac{p^k}{G_1(p)} + \frac{p^{2k}}{G_1^2(p)} - \dots \quad (5.79)$$

Из выражения (79) следует, что

$$\begin{aligned} \Phi(0) = 1, \quad \Phi'(0) = 0, \quad \Phi''(0) = 0, \quad \dots, \quad \Phi^{(k-1)}(0) = 0, \\ \Phi^{(k)}(0) = -\frac{k!}{G_1(0)} \neq 0. \end{aligned} \quad (5.80)$$

Определяемые выражениями (74) коэффициенты ошибок следящей системы, в соответствии с (80), будут

$$c_0 = 0, \quad c_1 = 0, \quad \dots, \quad c_{k-1} = 0, \quad c_k \neq 0, \quad (5.81)$$

то есть при выполнении условия (76) рассматриваемая следящая система действительно является астатической системой k -го порядка.

Таким образом, для того чтобы замкнутая следящая система была астатической системой k -го порядка, функция $G(p)$ должна иметь в точке $p = 0$ полюс k -го порядка.

§ 6. Устойчивость нелинейных управляемых систем.**Частотные критерии.****Применение прямого метода Ляпунова**

1. Об одном классе нелинейных управляемых систем. Мы будем рассматривать собственные колебания нелинейной управляемой системы, описываемой следующими дифференциальными уравнениями:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx_j}{dt} &= \sum_{k=1}^n a_{jk} x_k + b_j y & (j = 1, \dots, n), \\ y &= \varphi(\sigma), \\ \sigma &= \sum_{k=1}^n c_k x_k, \end{aligned} \right\} \quad (6.1)$$

где функция $\varphi(\sigma)$ удовлетворяет условию

$$\varphi(0) = 0. \quad (6.2)$$

Систему уравнений (1) можно переписать так:

$$\frac{dx_j}{dt} = \sum_{k=1}^n a_{jk} x_k + b_j \varphi \left(\sum_{k=1}^n c_k x_k \right) \quad (j = 1, \dots, n). \quad (6.3)$$

Если ввести матрицы

$$a = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}, \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} b_1 \\ \dots \\ b_n \end{bmatrix}, \quad \left. \begin{aligned} c = [c_1 \dots c_n] \end{aligned} \right\} \quad (6.4)$$

и обозначить через D оператор дифференцирования по времени

$$D = \frac{d}{dt},$$

то можно заменить систему дифференциальных уравнений (3)

векторным уравнением

$$(ED - a)x - b\varphi(cx) = 0, \quad (6.5)$$

где через E обозначена единичная матрица.

В дополнение к условию (2) будем считать, что функция $\varphi(\sigma)$ такова, что ее график не выходит из угловой области, показанной на рис. 6.1, то есть

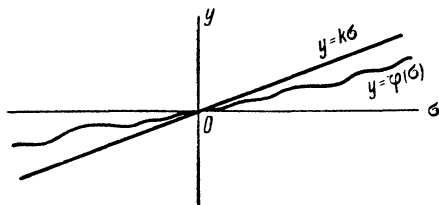


Рис. 6.1.

$$0 \leq \frac{\varphi(\sigma)}{\sigma} \leq k. \quad (6.6)$$

При $k = \infty$ условие (6) сводится к неравенству

$$\sigma\varphi(\sigma) \geq 0.$$

При $b = 0$ векторное уравнение (5) принимает вид

$$(ED - a)x = 0. \quad (6.7)$$

Дифференциальному уравнению (7) соответствует характеристическое уравнение

$$\Delta(p) = 0, \quad (6.8)$$

где

$$\Delta(p) = \det(Ep - a). \quad (6.9)$$

Случай, когда все корни характеристического уравнения (8) расположены на плоскости комплексного переменного p левее мнимой оси, то есть

$$\operatorname{Re} p_j < 0 \quad (j = 1, \dots, n),$$

будем называть *основным случаем*. Ниже мы ограничимся рассмотрением лишь основного случая.

Систему уравнений (1) можно в векторной форме записать так:

$$(ED - a)x = by, \quad y = \varphi(\sigma), \quad \sigma = cx. \quad (6.10)$$

Исключая x из уравнений (10), получим следующее уравнение:

$$\sigma = c(ED - a)^{-1}by. \quad (6.11)$$

Обозначим теперь

$$W(D) = -c(ED - a)^{-1}b. \quad (6.12)$$

Уравнение (11) примет вид

$$\sigma = -W(D)y. \quad (6.13)$$

Матрица $W(D)$ может быть записана так:

$$W(D) = -c \frac{\operatorname{adj}(ED - a)}{\det(ED - a)} b = \frac{M(D)}{\Delta(D)}. \quad (6.14)$$

Из выражения (14) видно, что функция $W(D)$ представляет собой скалярную дробно-рациональную функцию, у которой степень числителя ниже степени знаменателя.

2. Интерпретация функции $W(D)$. Управляемой системе, собственные колебания которой описываются уравнениями (1), можно поставить в соответствие структурную схему, изображенную на рис. 6.2. Схема на рис. 6.2 представляет собой замкнутую управляемую систему, у которой в цепь обратной связи включен нелинейный элемент. Через $z(t)$ обозначен входной сигнал. Рассматриваемая схема будет описываться уравнением

$$\sigma = W(D)[z(t) - \varphi(\sigma)], \quad (6.15)$$

откуда следует, что

$$\sigma + W(D)\varphi(\sigma) = W(D)z(t), \quad (6.16)$$

В частном случае, когда

$$\varphi(\sigma) = h\sigma, \quad (6.17)$$

уравнение (16) принимает следующий вид:

$$[1 + hW(D)]\sigma = W(D)z(t), \quad (6.18)$$

или

$$\sigma = \frac{W(D)}{1 + hW(D)} z(t). \quad (6.19)$$

Так как согласно (14)

$$\frac{W(D)}{1 + hW(D)} = \frac{M(D)}{\Delta(D) + hM(D)}, \quad (6.20)$$

то уравнение (19) можно переписать так:

$$[\Delta(D) + hM(D)]\sigma = M(D)z(t). \quad (6.21)$$

Собственные колебания *замкнутой* управляемой системы при $\varphi(\sigma) = h\sigma$ будут описываться однородным уравнением, которое получается из уравнения (21) при $z(t) \equiv 0$:

$$[\Delta(D) + hM(D)]\sigma = 0. \quad (6.22)$$

Характеристическое уравнение, соответствующее дифференциальному уравнению (22), будет следующим:

$$\Delta(p) \left[1 + h \frac{M(p)}{\Delta(p)} \right] = \Delta(p) [1 + hW(p)] = 0. \quad (6.23)$$

В рассматриваемом здесь основном случае все нули полинома $\Delta(p)$ расположены в левой полуплоскости комплексного

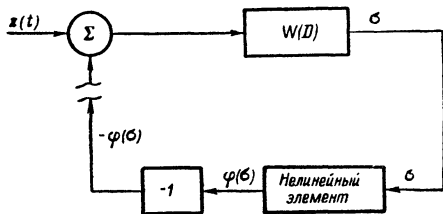


Рис. 6.2.

переменного p . Поэтому для того, чтобы при $\varphi(\sigma) = h\sigma$ замкнутая управляемая система была асимптотически устойчивой, то есть характеристическое уравнение (23) не имело корней

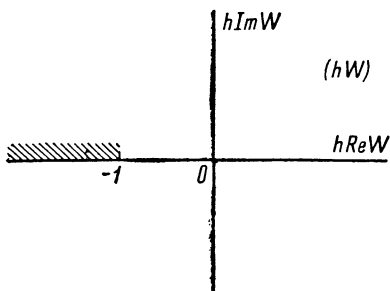


Рис. 6.3.

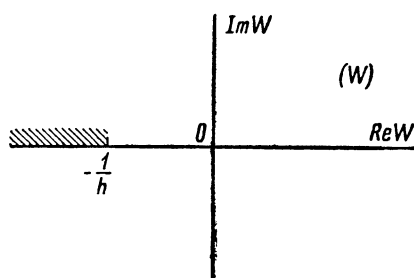


Рис. 6.4.

в правой полуплоскости p , достаточно в соответствии с критерием Найквиста, чтобы годограф вектора $hW(i\omega)$ не пересекал полуотрезка $(-\infty, -1]$ (рис. 6.3), или годограф вектора $W(i\omega)$ не пересекал полуотрезка $(-\infty, -\frac{1}{h}]$ (рис. 6.4). Так как функции $\varphi(\sigma)$ удовлетворяют условию (6), то принадлежащие

к этому классу линейные функции $h\sigma$ удовлетворяют условию $0 < h \leq k$, или

$$-\infty < -\frac{1}{h} \leq -\frac{1}{k}. \quad (6.24)$$

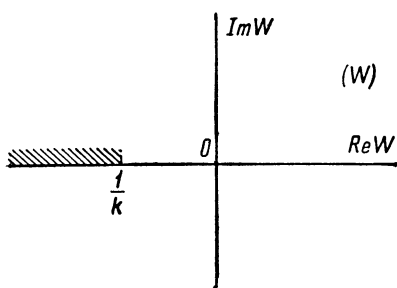


Рис. 6.5.

Поэтому для того, чтобы замкнутая управляемая система была асимптотически устойчивой при любой функции $\varphi(\sigma) = h\sigma$, где $h \in (0, k]$, необходимо и достаточно, чтобы годограф вектора $W(i\omega)$ не пересекал полуотрезка $(-\infty, -\frac{1}{k}]$

(рис. 6.5). В случае, когда $k = \infty$, имеем $0 < h < \infty$, то есть запретной зоной будет интервал $(-\infty, 0)$. Само начало координат в запретную зону не включается, ибо мы рассматриваем функции $\varphi(\sigma) = h\sigma$ с любым, сколь угодно большим, но конечным значением h .

3. Видоизмененная частотная характеристика. Выше при помощи соотношения (14) была введена функция

$$W(D) = \frac{M(D)}{\Delta(D)}.$$

Разомкнем цепь обратной связи у системы, изображенной на рис. 6.2. Разомкнутая система (рис. 6.6) будет описываться уравнением

$$\sigma = W(D) z(t), \tag{6.25}$$

где через $z(t)$ обозначен сигнал, поданный на вход системы.

Как следует из уравнения (25), функция $W(D)$ представляет собой передаточную функцию разомкнутой системы, показанной на рис. 6.6. В соответствии с выражением (14) частотная характеристика разомкнутой системы будет

$$W(i\omega) = \frac{M(i\omega)}{\Delta(i\omega)}. \tag{6.26}$$

Введем теперь функцию $W^*(\omega)$, определяемую следующими соотношениями:

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{Re} W^*(\omega) &= \operatorname{Re} W(i\omega), \\ \operatorname{Im} W^*(\omega) &= \omega \operatorname{Im} W(i\omega). \end{aligned} \right\} \tag{6.27}$$

Таким образом, функция $W^*(\omega)$ будет иметь вид

$$W^*(\omega) = \operatorname{Re} W(i\omega) + i\omega \operatorname{Im} W(i\omega). \tag{6.28}$$

Так как $\operatorname{Re} W(i\omega)$ является четной функцией от ω , а $\operatorname{Im} W(i\omega)$ является нечетной функцией от ω , то в соответствии с (27) функция $\operatorname{Im} W^*(\omega)$ будет четной функцией от ω и, таким образом,

$$W^*(-\omega) = W^*(\omega). \tag{6.29}$$

Функция $W^*(\omega)$ называется *видоизмененной частотной характеристикой*.

Так как в соответствии с (14) функция $W(D)$ представляет собой дробно-рациональную функцию, степень числителя у которой ниже степени знаменателя, то для $W(p)$ будем иметь следующее выражение:

$$W(p) = \frac{M(p)}{\Delta(p)} = \frac{B_0 p^m + B_1 p^{m-1} + \dots + B_{m-1} p + B_m}{p^n + A_1 p^{n-1} + \dots + A_{n-1} p + A_n} \quad (m < n). \tag{6.30}$$

В знаменателе выражения (30) коэффициент при p^n равен единице, так как согласно (9)

$$\Delta(p) = \det(Ep - a).$$

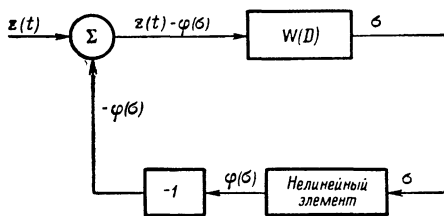


Рис. 6.6.

Полагая $p = i\omega$, получим согласно (30), что

$$W(i\omega) = \frac{M(i\omega)}{\Delta(i\omega)} = \frac{B_0(i\omega)^m + B_1(i\omega)^{m-1} + \dots + B_{m-1}i\omega + B_m}{(i\omega)^n + A_1(i\omega)^{n-1} + \dots + A_{n-1}i\omega + A_n} \quad (m < n). \quad (6.31)$$

Из выражения (31) следует, что

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} W(i\omega) = \frac{B_m}{A_n}, \quad \lim_{\omega \rightarrow \infty} W(i\omega) = 0. \quad (6.32)$$

Умножая левую и правую части выражения (31) на ω , получим

$$\begin{aligned} \omega W(i\omega) &= -i \frac{i\omega M(i\omega)}{\Delta(i\omega)} = \\ &= -i \frac{B_0(i\omega)^{m+1} + B_1(i\omega)^m + \dots + B_{m-1}(i\omega)^2 + B_m i\omega}{(i\omega)^n + A_1(i\omega)^{n-1} + \dots + A_{n-1}i\omega + A_n} \quad (m < n). \end{aligned} \quad (6.33)$$

Учитывая, что в соответствии с (27)

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} W^*(\omega) &= \operatorname{Re} W(i\omega), \\ \operatorname{Im} W^*(\omega) &= \omega \operatorname{Im} W(i\omega) = \operatorname{Im} [\omega W(i\omega)], \end{aligned}$$

найдем, что

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} \operatorname{Re} W^*(\omega) = \frac{B_m}{A_n}, \quad \lim_{\omega \rightarrow 0} \operatorname{Im} W^*(\omega) = 0,$$

и, следовательно,

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} W^*(\omega) = \frac{B_m}{A_n}. \quad (6.34)$$

Значение $\lim_{\omega \rightarrow \infty} W^*(\omega)$ будет различным в случае, когда $n - m = 1$, и в случае, когда $n - m > 1$.

При $n - m = 1$, то есть при $n = m + 1$, будем согласно (31) и (33) иметь

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} \operatorname{Re} W^*(\omega) = 0, \quad \lim_{\omega \rightarrow \infty} \operatorname{Im} W^*(\omega) = -B_0.$$

При $n - m > 1$, то есть при $n = m + 2, m + 3, \dots$, будем иметь

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} \operatorname{Re} W^*(\omega) = 0, \quad \lim_{\omega \rightarrow \infty} \operatorname{Im} W^*(\omega) = 0.$$

Таким образом,

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} W^*(\omega) = \begin{cases} -iB_0 & \text{при } n - m = 1, \\ 0 & \text{при } n - m > 1. \end{cases} \quad (6.35)$$

4. Теорема В.-М. Пóпова. Определение. Систему (1)

$$\frac{dx_j}{dt} = \sum_{k=1}^n a_{jk} x_k + b_j y \quad (j = 1, \dots, n),$$

$$y = \varphi(\sigma),$$

$$\sigma = \sum_{k=1}^n c_k x_k,$$

тривиальное решение которой $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$ асимптотически устойчиво при любых видах функции $\varphi(\sigma)$, удовлетворяющих условию (6)

$$0 \leq \frac{\varphi(\sigma)}{\sigma} \leq k,$$

будем называть абсолютно устойчивой в угле $[0, k]$.

Так как линейные функции $\varphi(\sigma) = h\sigma$ ($0 < h \leq k$) входят в число допустимых условием (6) функций $\varphi(\sigma)$, то требование, чтобы годограф вектора $W(i\omega)$ не пересекал полуотрезка $(-\infty, -\frac{1}{k}]$ (рис. 6.5), является необходимым условием абсолютной устойчивости системы (1). Достаточное условие абсолютной устойчивости дает теорема В.-М. Пóпова.

Теорема В.-М. Пóпова. Для того чтобы система (1) была абсолютно устойчива в угле $[0, k]$, достаточно, чтобы существовало такое конечное действительное число q , при котором для всех значений $\omega \geq 0$ выполнялось условие

$$\operatorname{Re}(1 + iq\omega) W(i\omega) + \frac{1}{k} > 0. \quad (6.36)$$

5. Геометрическая формулировка теоремы В.-М. Пóпова. Заметим, что сформулированное в теореме В.-М. Пóпова достаточное условие (36) абсолютной устойчивости нелинейной системы существенно отличается от требований критерия Найквиста для линейных систем. Последний накладывает ограничение на значение $\operatorname{Re} W(i\omega)$ лишь в точках, где $\operatorname{Im} W(i\omega) = 0$. В других точках значение $\operatorname{Re} W(i\omega)$ может быть любым, так как ограничение значения $\operatorname{Re} W(i\omega)$ в точках, где $\operatorname{Im} W(i\omega) = 0$, уже предотвращает возможность охвата точки $(-1/k, i0)$ годографом вектора $W(i\omega)$, что и обеспечивает асимптотическую устойчивость замкнутой линейной системы. Сформулированное же в теореме В.-М. Пóпова достаточное условие (36) абсолютной устойчивости нелинейной системы требует ограничения значений $\operatorname{Re}(1 + iq\omega) W(i\omega)$ для всех $\omega \geq 0$, а не только в точках, где $\operatorname{Im} W(i\omega) = 0$.

Выше была введена видоизмененная частотная характеристика $W^*(\omega)$. Обозначим через X и Y соответственно действи-

тельную и мнимую части $W^*(\omega)$. Согласно (27) будем тогда иметь

$$\left. \begin{aligned} X &= \operatorname{Re} W^*(\omega) = \operatorname{Re} W(i\omega), \\ Y &= \operatorname{Im} W^*(\omega) = \omega \operatorname{Im} W(i\omega). \end{aligned} \right\} \quad (6.37)$$

В соответствии с (37)

$$\operatorname{Re}(1 + iq\omega) W(i\omega) = \operatorname{Re} W(i\omega) - q\omega \operatorname{Im} W(i\omega) = X - qY. \quad (6.38)$$

Условие (36), таким образом, принимает вид

$$X - qY + \frac{1}{k} > 0 \quad (\text{для всех } \omega \geq 0). \quad (6.39)$$

На плоскости XY (то есть на плоскости комплексного переменного W^*) уравнение

$$X - qY + \frac{1}{k} = 0,$$

или эквивалентное ему уравнение

$$Y = \frac{1}{q} \left(X + \frac{1}{k} \right), \quad (6.40)$$

определяет собой прямую (рис. 6.7), проходящую через точку $(-1/k, 0)$. Угловым коэффициентом этой прямой равен $1/q$. Прямую (40) можно назвать *прямой Пóпова*.

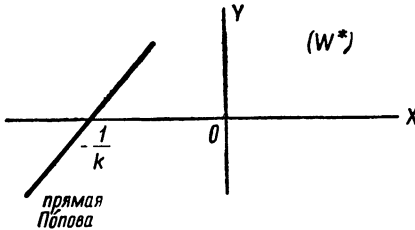


Рис. 6.7.

Нетрудно видеть, что условие (39) выполняется в любой точке плоскости комплексного переменного W^* , расположенной правее прямой Пóпова. Иными словами, условие (39) означает, что годограф вектора $W^*(\omega)$ должен быть расположен правее прямой Пóпова.

Геометрическая формулировка теоремы

В.-М. Пóпова. Для того чтобы имела место абсолютная устойчивость системы (1) в угле $[0, k]$, достаточно, чтобы в плоскости комплексного переменного W^* можно было выбрать прямую, проходящую через точку $(-1/k, i0)$ так, чтобы годограф вектора $W^*(\omega)$ был весь расположен правее этой прямой.

6. О возможности при доказательстве теоремы ограничиться случаем $q > 0$. Обратимся к системе уравнений (1). Преобразуем эту систему, полагая, что

$$y = k\sigma - \tilde{y}. \quad (6.41)$$

Так как согласно (1) $y = \varphi(\sigma)$, то соотношение (41) можно переписать так:

$$\varphi(\sigma) = k\sigma - \tilde{\varphi}(\sigma). \quad (6.42)$$

Функции $\varphi(\sigma)$ удовлетворяют условию (6) то есть графики функций $\varphi(\sigma)$ лежат (рис. 6.1) в угле $[0, k]$. Из соотношений (42) и (6) следует, что и функции $\tilde{\varphi}(\sigma)$ удовлетворяют условию

$$0 \leq \frac{\tilde{\varphi}(\sigma)}{\sigma} \leq k,$$

то есть графики функций $\tilde{\varphi}(\sigma)$ также расположены в угле $[0, k]$. Таким образом, если исходная система (1) абсолютно устойчива в угле $[0, k]$, то и преобразованная при помощи соотношения (41) система также будет абсолютно устойчивой в угле $[0, k]$.

Согласно (13)

$$-\sigma = W(D)y.$$

Подставляя вместо y его значение (41), получим

$$-\sigma = W(D)(k\sigma - \tilde{y}). \quad (6.43)$$

Отсюда найдем, что

$$-\sigma = \tilde{W}(D)\tilde{y}, \quad (6.44)$$

где

$$\tilde{W}(D) = -\frac{W(D)}{1+kW(D)}. \quad (6.45)$$

Из соотношения (45) следует, что

$$\tilde{W}(i\omega) = -\frac{W(i\omega)}{1+kW(i\omega)}. \quad (6.46)$$

Нетрудно проверить справедливость следующего тождества:

$$\operatorname{Re}(1-iq\omega)\tilde{W}(i\omega) + \frac{1}{k} = \frac{\operatorname{Re}(1+iq\omega)W(i\omega) + \frac{1}{k}}{|1+kW(i\omega)|^2}. \quad (6.47)$$

Действительно,

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}(1-iq\omega)\tilde{W} + \frac{1}{k} &= \operatorname{Re}\left[(-1+iq\omega)\frac{W}{1+kW} + \frac{1}{k}\right] = \\ &= \operatorname{Re}\frac{-W+iq\omega W + \frac{1}{k} + W}{1+kW} = \frac{1}{|1+kW|^2} \operatorname{Re}\left[\left(iq\omega W + \frac{1}{k}\right)(1+k\bar{W})\right] = \\ &= \frac{1}{|1+kW|^2} \operatorname{Re}\left[iq\omega W + \frac{1}{k} + \bar{W} + iq\omega k|W|^2\right] = \frac{\operatorname{Re}\left[(1+iq\omega)W + \frac{1}{k}\right]}{|1+kW|^2}, \end{aligned}$$

что и требовалось доказать.

Так как все полюсы функции $W(p) = \frac{M(p)}{\Delta(p)}$ расположены левее мнимой оси, то при любом значении ω значение функции $W(i\omega)$ будет конечным. Поэтому если для рассматриваемой системы имеет место соотношение

$$\operatorname{Re}(1 + iq\omega) W(i\omega) + \frac{1}{k} > 0, \quad (6.48)$$

то в соответствии с (47) будет иметь место также следующее соотношение:

$$\operatorname{Re}(1 + i\tilde{q}\omega) \tilde{W}(i\omega) + \frac{1}{k} > 0, \quad (6.49)$$

где

$$\tilde{q} = -q < 0. \quad (6.50)$$

Как указано выше, если исходная система абсолютно устойчива в угле $[0, k]$, то будет устойчива и преобразованная система. Но для преобразованной системы условие теоремы В.-М. Попова выражается неравенством (49), в котором $\tilde{q} = -q < 0$.

Из изложенного следует, что при доказательстве теоремы В.-М. Попова можно ограничиться лишь рассмотрением случая $q > 0$. Рассмотрение случая $\tilde{q} = -q < 0$ не может расширить класса охватываемых достаточным условием В.-М. Попова систем, ибо при $\tilde{q} = -q$ мы получаем ту же самую систему (устойчивость которой была уже установлена соотношением (36), где $q > 0$), но лишь преобразованную к новой переменной \tilde{y} .

7. Лемма 1. Пусть,

1) Непрерывная функция $f(t)$ и ее производная $\frac{df}{dt}$ ограничены при $t \geq 0$;

2) непрерывная функция $G(x) > 0$ при любом $x \neq 0$, а $G(0) = 0$;

$$3) \int_0^{\infty} G[f(t)] dt < \infty.$$

Требуется доказать, что при этих условиях

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = 0.$$

Доказательство. Пусть при $t > 0$

$$|f(t)| < a < \infty, \quad \left| \frac{df}{dt} \right| < b < \infty, \quad (6.51)$$

$$\int_0^{\infty} G[f(t)] dt = c < \infty. \quad (6.52)$$

Предположим, что утверждение леммы неверно. Тогда из определения понятия предела следует, что существует такая неограниченно возрастающая последовательность чисел $t_k > 0$, что

$$|f(t_k)| \geq \varepsilon > 0 \quad (k = 1, 2, \dots). \quad (6.53)$$

При этом всегда можно считать, что при всех k

$$t_{k+1} - t_k \geq m > 0, \quad (6.54)$$

ибо если для исходной последовательности это не выполняется, то, опуская часть членов последовательности, можно добиться выполнения этого неравенства.

Так как $\left| \frac{df}{dt} \right| < b$, то при любом $t \geq 0$ будем иметь

$$|f(t) - f(t_k)| \leq b |t - t_k|. \quad (6.55)$$

Учитывая, что $G(x) > 0$ при любом $x \neq 0$, будем иметь

$$\int_0^{\infty} G[f(t)] dt \geq \sum_{k=1}^{\infty} \int_{t_k - \frac{m}{2}}^{t_k + \frac{m}{2}} G[f(t)] dt. \quad (6.56)$$

Но для всех значений t из отрезка

$$t_k - \frac{m}{2} \leq t \leq t_k + \frac{m}{2}$$

имеет место неравенство

$$|f(t)| = |f(t_k) + [f(t) - f(t_k)]| \geq |f(t_k)| - |f(t) - f(t_k)| \geq \varepsilon - b \frac{m}{2} = \varepsilon_0. \quad (6.57)$$

Если выбрать m достаточно малым, то ε_0 будет положительным

$$\varepsilon_0 > 0. \quad (6.58)$$

Если обозначить

$$r = \min_{\varepsilon_0 \leq |x| \leq a} G(x), \quad (6.59)$$

где в силу условия леммы $r > 0$, то будем иметь такую оценку:

$$\int_{t_k - \frac{m}{2}}^{t_k + \frac{m}{2}} G[f(t)] dt \geq rm. \quad (6.60)$$

Отсюда в силу неравенства (56) получим, что

$$\int_0^{\infty} G[f(t)] dt = \infty, \quad (6.61)$$

что противоречит условию леммы. Полученное противоречие доказывает лемму.

8. Лемма 2. Если три действительные функции $f_1(t)$, $f_2(t)$, $f_3(t)$ при $t \rightarrow \infty$ стремятся к нулю не медленнее экспонент (что мы будем обозначать так: $f_k(t) \Rightarrow 0$) и если их изображения Фурье

$$F_k(i\omega) = \int_0^{\infty} f_k(t) e^{-i\omega t} dt \quad (k = 1, 2, 3) \quad (6.62)$$

связаны зависимостью

$$F_1(i\omega) = H(i\omega) F_3(i\omega) + F_2(i\omega), \quad (6.63)$$

где

$$\operatorname{Re} H(i\omega) \geq \delta > 0 \quad (6.64)$$

при всех ω , то

$$-\int_0^{\infty} f_1(t) f_3(t) dt \leq C \quad (C > 0), \quad (6.65)$$

где положительная постоянная C имеет конечное значение и определяется равенством

$$C = \frac{1}{8\pi\delta} \int_{-\infty}^{+\infty} |F_2(i\omega)|^2 d\omega. \quad (6.66)$$

Доказательство. Так как $f_1(t) \Rightarrow 0$, $f_3(t) \Rightarrow 0$, то можно применить формулу Парсеваля [17, 90]

$$\int_0^{\infty} f_1(t) f_3(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \overline{F_1(i\omega)} F_3(i\omega) d\omega. \quad (6.67)$$

Подставляя вместо $F_1(i\omega)$ его значение (63), получим

$$\int_0^{\infty} f_1(t) f_3(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} [\overline{H(i\omega)} \overline{F_3(i\omega)} + \overline{F_2(i\omega)}] F_3(i\omega) d\omega. \quad (6.68)$$

Поскольку левая часть соотношения (68) действительна, то мнимая часть интеграла в правой части (68) равна нулю. Поэтому

$$\begin{aligned}
 \int_0^{\infty} f_1(t) f_3(t) dt &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{Re} [\overline{H(i\omega)} |F_3(i\omega)|^2 + \overline{F_2(i\omega)} F_3(i\omega)] d\omega = \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \operatorname{Re} H(i\omega) |F_3(i\omega)|^2 + \frac{1}{2} [\overline{F_2(i\omega)} F_3(i\omega) + F_2(i\omega) \overline{F_3(i\omega)}] \right\} d\omega = \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\sqrt{\operatorname{Re} H(i\omega)} F_3(i\omega) + \frac{F_2(i\omega)}{2\sqrt{\operatorname{Re} H(i\omega)}} \right] \times \\
 &\times \left[\sqrt{\operatorname{Re} H(i\omega)} \overline{F_3(i\omega)} + \frac{\overline{F_2(i\omega)}}{2\sqrt{\operatorname{Re} H(i\omega)}} \right] d\omega - \frac{1}{8\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|F_2(i\omega)|^2}{\operatorname{Re} H(i\omega)} d\omega = \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left| \sqrt{\operatorname{Re} H(i\omega)} F_3(i\omega) + \frac{F_2(i\omega)}{2\sqrt{\operatorname{Re} H(i\omega)}} \right|^2 d\omega - \frac{1}{8\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|F_2(i\omega)|^2}{\operatorname{Re} H(i\omega)} d\omega.
 \end{aligned} \tag{6.69}$$

Отбрасывая в правой части соотношения (69) первое слагаемое, которое всегда положительно, и учитывая, что согласно (64)

$$\operatorname{Re} H(i\omega) \geq \delta > 0,$$

получим, что

$$\int_0^{\infty} f_1(t) f_3(t) dt \geq -\frac{1}{8\pi\delta} \int_{-\infty}^{\infty} |F_2(i\omega)|^2 d\omega, \tag{6.70}$$

то есть

$$-\int_0^{\infty} f_1(t) f_3(t) dt \leq \frac{1}{8\pi\delta} \int_{-\infty}^{\infty} |F_2(i\omega)|^2 d\omega. \tag{6.71}$$

Так как по условию леммы при $t \rightarrow \infty$ функция $f_2(t)$ стремится к нулю не медленнее экспоненты, то есть $\int_0^{\infty} f_2^2(t) dt$ сходится, и согласно формуле Парсеваля

$$\int_0^{\infty} f_2^2(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |F_2(i\omega)|^2 d\omega,$$

то выражение (71) принимает вид

$$-\int_0^{\infty} f_1(t) f_3(t) dt \leq C < \infty, \quad (6.72)$$

что и требовалось доказать.

9. Доказательство теоремы В.-М. Пóпова. Помимо статей В.-М. Пóпова [73] развитому им методу и дальнейшему его усилению посвящена обширная литература [3, 22, 54]. Из многих вариантов доказательства теоремы В.-М. Пóпова ниже излагается доказательство, предложенное в монографии [3].

Как показано в п. 6, доказательство теоремы достаточно провести лишь в предположении, что в формуле (36) $q > 0$. Пусть $x_j(t)$ ($j = 1, \dots, n$) — решение системы дифференциальных уравнений (1)

$$\frac{dx_j}{dt} = \sum_{k=1}^n a_{jk} x_k + b_j y \quad (j = 1, \dots, n),$$

$$y = \varphi(\sigma),$$

$$\sigma = \sum_{k=1}^n c_k x_k$$

при выбранной произвольно, но *фиксированной* функции $\varphi(\sigma)$ из угла $[0, k]$ и некоторых (произвольно выбранных, но фиксированных) начальных условиях.

Если подставить функции $x_j(t)$, представляющие собой указанное выше решение, в формулы $\sigma = \sum_{k=1}^n c_k x_k$ и $y = \varphi(\sigma)$, то получим, что для системы (1) при фиксированной функции $\varphi(\sigma)$ и выбранных выше начальных условиях

$$\sigma = \sigma(t) = \sum_{k=1}^n c_k x_k(t), \quad (6.73)$$

$$y = y(t) = \varphi[\sigma(t)], \quad (6.74)$$

то есть функция $y(t)$ оказывается некоторой *известной* функцией времени.

Поэтому можно указанные выше функции $x_j(t)$ ($j = 1, \dots, n$) считать решением системы *линейных неоднородных* уравнений

$$\frac{dx_j}{dt} = \sum_{k=1}^n a_{jk} x_k + b_j y(t) \quad (j = 1, \dots, n), \quad (6.75)$$

где функция $y(t)$ определена выражением (74), а начальные условия — те же, что были заданы при решении системы уравнений (1).

Обозначим теперь через $y_T(t)$ следующую функцию:

$$y_T(t) = \begin{cases} y(t) & \text{при } t \leq T, \\ 0 & \text{при } t > T, \end{cases} \quad (6.76)$$

где T — произвольное фиксированное положительное число, и пусть функция

$$\sigma_T(t) = \sum_{k=1}^n c_k x_{kT}(t) \quad (6.77)$$

определяется решением системы линейных неоднородных уравнений

$$\frac{dx_{jT}}{dt} = \sum_{k=1}^n a_{jk} x_{kT} + b_j y_T(t) \quad (j = 1, \dots, n) \quad (6.78)$$

при тех же начальных условиях, при которых согласно (73) была определена функция $\sigma(t)$, то есть

$$x_{jT}(0) = x_j(0) \quad (j = 1, \dots, n). \quad (6.79)$$

Отсюда следует, что

$$\sigma_T(t) = \sigma(t) \quad \text{при } 0 \leq t \leq T. \quad (6.80)$$

Решение эквивалентного системе скалярных уравнений (78) неоднородного векторного дифференциального уравнения

$$\frac{dx_T}{dt} = ax_T + by_T(t) \quad (6.81)$$

можно представить в следующем виде:

$$x_T(t) = \theta(t) \theta^{-1}(0) x(0) + \theta(t) \int_0^t \theta^{-1}(\tau) y_T(\tau) d\tau, \quad (6.82)$$

где $\theta(t)$ — фундаментальная матрица решений однородного матричного уравнения

$$\frac{dx_T}{dt} = ax_T. \quad (6.83)$$

Элементы $\theta_{jk}(t)$ матрицы $\theta(t)$ имеют следующий вид:

$$\theta_{jk}(t) = P_{jk}(t) e^{p_k t}, \quad (6.84)$$

где $P_{jk}(t)$ — некоторые полиномы от t , а p_k — нули характеристического определителя (9)

$$\Delta(p) = \det(Ep - a).$$

В рассматриваемом здесь основном случае все нули характеристического определителя $\Delta(p)$ имеют отрицательную действительную часть $\operatorname{Re} p_k < 0$ и, следовательно,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \theta_{jk}(t) = 0 \quad (j, k = 1, \dots, n). \quad (6.85)$$

Из (82), (77) и (4) следует, что

$$\sigma_T(t) = \tilde{\sigma}_T(t) + \rho(t), \quad (6.86)$$

где

$$\tilde{\sigma}_T(t) = c\theta(t) \int_0^t \theta^{-1}(\tau) y_T(\tau) d\tau, \quad (6.87)$$

$$\rho(t) = c\theta(t) \theta^{-1}(0) x(0). \quad (6.88)$$

Таким образом, $\tilde{\sigma}_T(t)$ определяется из решения (82) системы уравнений (78) при нулевых начальных условиях, а $\rho(t)$ — функция времени, линейно зависящая от начальных данных $x_j(0)$ ($j = 1, \dots, n$). В рассматриваемом здесь основном случае, как следует из (85),

$$\rho(t) \rightarrow 0, \quad \frac{d\rho(t)}{dt} \rightarrow 0. \quad (6.89)$$

Дифференцируя (86), имеем

$$\dot{\sigma}_T(t) = \dot{\tilde{\sigma}}_T(t) + \dot{\rho}(t). \quad (6.90)$$

Из (86) и (90) можно получить следующее выражение:

$$\sigma_T(t) + q\dot{\sigma}_T(t) - \frac{y_T(t)}{k} = \tilde{\sigma}_T(t) + q\dot{\tilde{\sigma}}_T(t) - \frac{y_T(t)}{k} + \rho(t) + q\dot{\rho}(t). \quad (6.91)$$

Обозначим теперь

$$f_1(t) = -\sigma_T(t) - q\dot{\sigma}_T(t) + \frac{y_T(t)}{k}, \quad (6.92)$$

$$f_2(t) = -\rho(t) - q\dot{\rho}(t).$$

Изображения Фурье для функций $f_1(t)$, $f_2(t)$, $y_T(t)$, $\tilde{\sigma}_T(t)$ обозначим так: $F_1(i\omega)$, $F_2(i\omega)$, $Y_T(i\omega)$, $\tilde{\Sigma}_T(i\omega)$. Эти преобразования Фурье существуют, так как $y_T(t) \equiv 0$ при $t > T$, то есть $y_T(t) \rightarrow 0$. Функция $\tilde{\sigma}_T(t)$ определена выражением (87), в котором подынтегральная функция обращается в нуль при $t > T$; в соответствии с (85) из этого следует, что $\tilde{\sigma}_T(t) \rightarrow 0$, $\dot{\tilde{\sigma}}_T(t) \rightarrow 0$. Кроме того, согласно (88) и (85) $\rho(t) \rightarrow 0$, $\dot{\rho}(t) \rightarrow 0$. Таким образом, $f_1(t) \rightarrow 0$, $f_2(t) \rightarrow 0$. Согласно (13)

$$-\sigma(t) = W(D)y(t).$$

В соответствии с (14) и (78) будем иметь

$$-\sigma_T(t) = W(D)y_T(t). \quad (6.93)$$

При нулевых начальных условиях уравнению (93) соответствует следующее уравнение в изображениях Фурье:

$$-\tilde{\Sigma}_T(i\omega) = W(i\omega)Y_T(i\omega). \quad (6.94)$$

Здесь слева стоит $-\tilde{\Sigma}_T(i\omega)$, так как имеется в виду решение при нулевых начальных условиях, то есть $\tilde{\sigma}_T(t)$. Соотношение (91) в новых обозначениях (92) принимает вид

$$\dot{f}_1(t) = -\tilde{\sigma}_T(t) - q\dot{\tilde{\sigma}}_T(t) + \frac{y_T(t)}{k} + f_2(t). \quad (6.95)$$

Переходя к изображениям Фурье и учитывая (94), получим

$$F_1(i\omega) = \left[(1 + iq\omega) W(i\omega) + \frac{1}{k} \right] Y_T(i\omega) + F_2(i\omega). \quad (6.96)$$

Здесь учтено, что изображение Фурье для $\dot{\tilde{\sigma}}_T(t)$ будет $i\omega\tilde{\Sigma}_T(i\omega)$. Обозначим теперь

$$H(i\omega) = (1 + iq\omega) W(i\omega) + \frac{1}{k}. \quad (6.97)$$

Тогда соотношение (96) примет вид

$$F_1(i\omega) = H(i\omega)Y_T(i\omega) + F_2(i\omega). \quad (6.98)$$

В рассматриваемом здесь *основном* случае условие (36) теоремы Пóпова можно заменить неравенством

$$\operatorname{Re} H(i\omega) \geq \delta, \quad (6.99)$$

где δ — положительное число. Как показано в п. 3, годограф вектора $W^*(\omega)$ в основном случае всегда лежит в конечной части плоскости комплексного переменного W^* при всех ω . Наименьшее расстояние между точками прямой Пóпова (40) и годографом вектора $W^*(\omega)$ — положительное число, то есть координаты X и Y любой точки годографа вектора $W^*(\omega)$ удовлетворяют условию

$$X - qY + \frac{1}{k} \geq \delta > 0, \quad (6.100)$$

откуда и вытекает условие (99).

Кроме того, как установлено выше,

$$f_1(t) \rightarrow 0, \quad f_2(t) \rightarrow 0, \quad y_T(t) \rightarrow 0.$$

Поэтому согласно лемме 2 будем иметь

$$-\int_0^{\infty} \dot{f}_1(t) y_T(t) dt \leq C, \quad (6.101)$$

где

$$C = \frac{1}{8\pi\delta} \int_{-\infty}^{\infty} |F_2(i\omega)|^2 d\omega. \quad (6.102)$$

Функция $F_2(i\omega)$, как и ее оригинал $f_2(t)$, как видно из (88) и (92), линейно и однородно зависит от начальных данных и не зависит от величины T . Поэтому *положительная постоянная C* зависит однородно и квадратично от начальных данных и стремится к нулю, когда эти начальные данные стремятся к нулю. *От величины T постоянная C не зависит.*

Подставляя выражение (92) для $f_1(t)$, получим из (101)

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} y_T(t) \left[\sigma_T(t) + q\dot{\sigma}_T(t) - \frac{y_T(t)}{k} \right] dt = \\ = \int_0^T \varphi[\sigma(t)] \left\{ \sigma(t) + q\dot{\sigma}(t) - \frac{\varphi[\sigma(t)]}{k} \right\} dt \leq C. \end{aligned} \quad (6.103)$$

Разбивая левую часть неравенства (103) на два интеграла, получим

$$\int_0^T \varphi[\sigma(t)] \left\{ \sigma(t) - \frac{\varphi[\sigma(t)]}{k} \right\} dt + q \int_{\sigma(0)}^{\sigma(T)} \varphi(\sigma) d\sigma \leq C. \quad (6.104)$$

Прибавляя к обеим частям неравенства (104) положительную величину $q \int_0^{\sigma(0)} \varphi(\sigma) d\sigma$ и вводя новую постоянную

$$C^* = C + q \int_0^{\sigma(0)} \varphi(\sigma) d\sigma, \quad (6.105)$$

приходим к неравенству

$$\int_0^T \varphi(\sigma) \left[\sigma - \frac{\varphi(\sigma)}{k} \right] dt + q \int_0^{\sigma(T)} \varphi(\sigma) d\sigma \leq C^*. \quad (6.106)$$

Здесь постоянная C^* , так же как и C , зависит только от начальных данных и стремится к нулю вместе с ними.

В левой части (106) каждый интеграл неотрицателен. Поэтому будут иметь место неравенства

$$\int_0^T \varphi(\sigma) \left[\sigma - \frac{\varphi(\sigma)}{k} \right] dt \leq C^*, \quad (6.107)$$

$$\int_0^{\sigma(T)} \varphi(\sigma) d\sigma \leq \frac{1}{q} C^*. \quad (6.108)$$

Из неравенства (108) при условии, что $\varphi(\sigma)$ заключена в угле $[0, k]$, еще не следует, что функция $\sigma(t)$ ограничена, поскольку в этом угле могут быть выбраны такие характеристики $\varphi(\sigma)$, для которых $\int_0^{\infty} \varphi(\sigma) d\sigma$ конечен (например, функции $\varphi(\sigma)$, удовлетворяющие условию $\varphi(\sigma) \rightarrow 0$).

Поэтому допустим сначала, что $\varphi(\sigma)$ удовлетворяет более жесткому условию

$$0 < \varepsilon \leq \frac{\varphi(\sigma)}{\sigma} < k, \quad (6.109)$$

чем основное условие (6)

$$0 \leq \frac{\varphi(\sigma)}{\sigma} \leq k,$$

то есть что $\varphi(\sigma)$ лежит в угле $[\varepsilon, k]$, а не в угле $[0, k]$. Тогда из неравенства (108) сразу следует, что функция $\sigma(t)$ ограничена при $t \geq 0$, то есть

$$|\sigma(t)| \leq L \quad (t \geq 0), \quad (6.110)$$

где величина L стремится к нулю вместе с начальными отклонениями, поскольку этому свойству удовлетворяет C^* .

Так, например, заменяя $\varphi(\sigma)$ на $\varepsilon\sigma$ в левой части (108), получим

$$\frac{1}{2} \varepsilon \sigma^2(T) \leq \frac{C^*}{q}. \quad (6.111)$$

Отсюда, заменяя произвольную величину T на t , получим неравенство (110), в котором

$$L = \sqrt{\frac{2C^*}{\varepsilon q}}. \quad (6.112)$$

Но тогда в силу известных свойств линейных дифференциальных уравнений в рассматриваемом основном случае ограничены и решения $x_i(t)$ системы (75)

$$|x_i(t)| \leq N_i, \quad t \geq 0 \quad (i = 1, \dots, n), \quad (6.113)$$

где постоянные N_i , как и постоянная L , стремятся к нулю вместе с начальными отклонениями, так как правые части уравнений (75) $b_j y(t) = b_j \varphi[\sigma(t)]$ ограничены, если σ ограничено.

Это вытекает из следующего известного свойства решений систем неоднородных линейных уравнений в *устойчивом* случае: если правые части ограничены в интервале $0 \leq t \leq \infty$ либо стремятся к нулю при $t \rightarrow \infty$, то и любое решение обладает этим свойством, то есть соответственно ограничено или стремится к нулю при $t \rightarrow \infty$. Если при этом постоянные, ограничивающие правые части, зависят от начальных отклонений (как это имеет место в данном случае) и стремятся к нулю при стремлении к нулю начальных отклонений, то и любое решение обладает этим же свойством.

Из (113) следует, что тривиальное решение системы (1) $x_i = 0$ устойчиво по Ляпунову. Однако из (113) не следует еще асимптотическая устойчивость тривиального решения.

Обратимся теперь к неравенству (107). Здесь под интегралом стоит функция

$$G(\sigma) = \varphi(\sigma) \left[\sigma - \frac{\varphi(\sigma)}{k} \right], \quad (6.114)$$

которая положительна в силу неравенства (109) при любом $\sigma \neq 0$, а $G(0) = 0$. Кроме того, из ограниченности функций $x_i(t)$ следует согласно уравнениям (1) ограниченность производных \dot{x}_i , а значит, и ограниченность $\sigma(t)$ и $\dot{\sigma}(t)$. Заметим, что поскольку согласно (102) и (105) постоянная C^* не зависит от T , то неравенство (107) будет иметь место при произвольном $T > 0$. Отсюда следует, что

$$\int_0^{\infty} \varphi(\sigma) \left[\sigma - \frac{\varphi(\sigma)}{k} \right] dt < \infty.$$

Таким образом, выполнены все условия леммы 1. В соответствии с леммой 1 заключаем, что при *произвольных начальных условиях*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \sigma(t) = 0. \quad (6.115)$$

Из (115) следует, что

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \varphi[\sigma(t)] = 0. \quad (6.116)$$

Соотношение (116) можно переписать так: $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = 0$. При этом, в соответствии с замечанием о свойствах решений диффе-

ренциальных уравнений (стр. 106), из уравнений (75) следует, что

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x_i(t) = 0 \quad (i = 1, \dots, n). \quad (6.117)$$

Изложенным исчерпывалось бы доказательство теоремы Пóпова, если бы в ходе доказательства мы не заменили угол $[0, k]$ углом $[\varepsilon, k]$. Указанное ограничение можно снять. Однако, имея в виду, что ε можно в условии (109) выбирать сколь угодно малым, мы на этом останавливаться не будем.

10. Применение прямого метода Ляпунова. Метод А. И. Лурье в теории абсолютной устойчивости нелинейных систем. Задача о достаточных условиях абсолютной устойчивости управляемых систем, описываемых уравнениями вида (1), впервые была поставлена и изучена А. И. Лурье [59] при помощи прямого метода Ляпунова. Для этого была предложена функция Ляпунова следующего вида:

$$V = L(x) + q \int_0^\sigma \varphi(\xi) d\xi. \quad (6.118)$$

Здесь

$$L(x) = x^* H x, \quad (6.119)$$

где x^* — матрица-строка, полученная транспонированием вектора x , а H — квадратная матрица типа $n \times n$, элементы которой постоянны. Функция $L(x)$ является квадратичной формой переменных x_j ($j = 1, \dots, n$). Если оказывается возможным выбрать матрицу H так, чтобы $L(x)$ была положительной квадратичной формой, а производная dV/dt от функции Ляпунова (118), определяемая в силу уравнений (1), была отрицательной знакоопределенной функцией, то рассматриваемая система асимптотически устойчива.

Соотношение между методами А. И. Лурье и В.-М. Пóпова изучалось в работах В.-М. Пóпова [73], В. А. Якубовича [95], М. А. Айзермана и Ф. Р. Гантмахера [3].

Для рассмотренного выше основного случая окончательный результат получен в работе В. А. Якубовича [95], где доказана теорема о том, что *условие В.-М. Пóпова (36) является для основного случая необходимым и достаточным условием существования функций Ляпунова вида (118)*.

Из этой теоремы следует, что если абсолютная устойчивость системы (1) может быть установлена при помощи функции Ляпунова вида (118), то существует такое действительное положительное число q , что условие (36) теоремы В.-М. Пóпова выполняется. Таким образом, теорема В.-М. Пóпова охватывает

всю совокупность систем вида (1), абсолютная устойчивость которых может быть установлена при помощи функции Ляпунова вида (118).

§ 7. Нелинейные системы под воздействием внешних сил

1. Приведение задачи к интегральным уравнениям. Рассмотрим систему, описываемую следующими нелинейными дифференциальными уравнениями:

$$\dot{x}_j = \varphi_j(x_1, x_2, \dots, x_n, t) \quad (j = 1, \dots, n). \quad (7.1)$$

Вводя матрицы

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad \varphi(x_1, \dots, x_n, t) = \begin{bmatrix} \varphi_1(x_1, \dots, x_n, t) \\ \dots \\ \varphi_n(x_1, \dots, x_n, t) \end{bmatrix}, \quad (7.2)$$

можно заменить систему скалярных дифференциальных уравнений (1) векторным дифференциальным уравнением

$$\dot{x} = \varphi(x_1, \dots, x_n, t). \quad (7.3)$$

Предположим, что функции $\varphi_j(x_1, \dots, x_n, t)$ можно представить в таком виде:

$$\varphi_j(x_1, \dots, x_n, t) = -[u_{j1}(t)x_1 + u_{j2}(t)x_2 + \dots + u_{jn}(t)x_n] + y_j(t) + \psi_j(x_1, \dots, x_n, t) \quad (j = 1, \dots, n), \quad (7.4)$$

то есть в виде суммы некоторой линейной относительно x_1, \dots, x_n аппроксимирующей функции

$$- \sum_{k=1}^n u_{jk}(t)x_k + y_j(t)$$

и нелинейной поправки $\psi_j(x_1, \dots, x_n, t)$. Выбор линейного приближения может быть выполнен различными способами; его можно подчинить, например, условию малости $|\psi_j(x_1, \dots, x_n, t)|$ в рассматриваемой области изменения x_1, \dots, x_n и т. д. От удачного выбора линейного приближения в значительной мере зависит быстрота сходимости построенных ниже последовательных приближений (35) решения системы уравнений (1).

Система дифференциальных уравнений (1) принимает в соответствии с (4) следующий вид:

$$\dot{x}_j + \sum_{k=1}^n u_{jk}(t)x_k = y_j(t) + \psi_j(x_1, \dots, x_n, t), \quad (j = 1, \dots, n). \quad (7.5)$$

Система скалярных дифференциальных уравнений (5) эквивалентна векторному дифференциальному уравнению

$$\dot{x} + u(t)x = y(t) + \psi(x_1, \dots, x_n, t), \quad (7.6)$$

где через $u(t)$, $y(t)$ и $\psi(x_1, x_2, \dots, x_n, t)$ обозначены матрицы

$$\left. \begin{aligned} u(t) &= \begin{bmatrix} u_{11}(t) & \dots & u_{1n}(t) \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ u_{n1}(t) & \dots & u_{nn}(t) \end{bmatrix}, & y(t) &= \begin{bmatrix} y_1(t) \\ \cdot \\ y_n(t) \end{bmatrix}, \\ \psi(x_1, \dots, x_n, t) &= \begin{bmatrix} \psi_1(x_1, \dots, x_n, t) \\ \cdot \\ \psi_n(x_1, \dots, x_n, t) \end{bmatrix}. \end{aligned} \right\} \quad (7.7)$$

Обозначим теперь через $\theta(t)$ матрицу

$$\theta(t) = \begin{bmatrix} \theta_{11}(t) & \dots & \theta_{1n}(t) \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \theta_{n1}(t) & \dots & \theta_{nn}(t) \end{bmatrix}, \quad (7.8)$$

столбцы которой представляют собой линейно-независимые частные решения однородного векторного уравнения

$$\dot{x} + u(t)x = 0. \quad (7.9)$$

Матрица $\theta(t)$, таким образом, является фундаментальной матрицей решений дифференциального уравнения (9). Так как каждый столбец матрицы $\theta(t)$ является частным решением уравнения (9), то матрица $\theta(t)$ удовлетворяет уравнению

$$\dot{\theta}(t) + u(t)\theta(t) = 0. \quad (7.10)$$

Решение векторного дифференциального уравнения (6) будем искать в следующем виде:

$$x = \theta(t)\chi(t), \quad (7.11)$$

где

$$\chi(t) = \begin{bmatrix} \chi_1(t) \\ \cdot \\ \chi_n(t) \end{bmatrix}. \quad (7.12)$$

Вектор $\chi(t)$ подлежит определению. Подставляя выражение (11) в уравнение (6), получим

$$\theta(t)\chi(t) + \theta(t)\dot{\chi}(t) + u(t)\theta(t)\chi(t) = y(t) + \psi(x_1, \dots, x_n, t). \quad (7.13)$$

Первое и третье слагаемое в левой части уравнения (13) в соответствии с (10) сокращаются, и уравнение (13) принимает вид

$$\theta(t)\dot{\chi}(t) = y(t) + \psi(x_1, \dots, x_n, t), \quad (7.14)$$

откуда

$$\dot{\chi}(t) = \theta^{-1}(t)y(t) + \theta^{-1}(t)\psi(x_1, \dots, x_n, t), \quad (7.15)$$

где через $\theta^{-1}(t)$ обозначена обратная матрица. Из уравнения (15) следует, что

$$\chi(t) = \int_{t_0}^t \theta^{-1}(\tau) y(\tau) d\tau + \int_{t_0}^t \theta^{-1}(\tau) \psi[x_1(\tau), \dots, x_n(\tau), \tau] d\tau + C, \quad (7.16)$$

где C — вектор из произвольных постоянных

$$C = \begin{bmatrix} C_1 \\ \dots \\ C_n \end{bmatrix}. \quad (7.17)$$

Подставляя в (11) выражение (16) для вектора $\chi(t)$, получим

$$x(t) = \theta(t) C + \theta(t) \int_{t_0}^t \theta^{-1}(\tau) y(\tau) d\tau + \theta(t) \int_{t_0}^t \theta^{-1}(\tau) \psi[x_1(\tau), \dots, x_n(\tau), \tau] d\tau. \quad (7.18)$$

Вектор C определим из начальных условий

$$[x(t)]_{t=t_0} = x(t_0). \quad (7.19)$$

Из соотношения (18) следует, что

$$x(t_0) = \theta(t_0) C, \quad (7.20)$$

откуда

$$C = \theta^{-1}(t_0) x(t_0). \quad (7.21)$$

Таким образом, соотношение (18) принимает вид

$$x(t) = \theta(t) \theta^{-1}(t_0) x(t_0) + \int_{t_0}^t \theta(t) \theta^{-1}(\tau) y(\tau) d\tau + \int_{t_0}^t \theta(t) \theta^{-1}(\tau) \psi[x_1(\tau), \dots, x_n(\tau), \tau] d\tau. \quad (7.22)$$

Соотношение (22), в правой части которого подынтегральная функция содержит элементы матрицы $x(t)$, представляет собой векторное нелинейное интегральное уравнение относительно неизвестного $x(t)$. Это интегральное уравнение эквивалентно векторному дифференциальному уравнению (3) вместе с начальными условиями (19).

Обозначим теперь

$$N(t, \tau) = \theta(t) \theta^{-1}(\tau). \quad (7.23)$$

Функция $N(t, \tau)$ представляет собой квадратную матрицу

$$N(t, \tau) = \begin{bmatrix} N_{11}(t, \tau), & \dots, & N_{1n}(t, \tau) \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ N_{n1}(t, \tau), & \dots, & N_{nn}(t, \tau) \end{bmatrix},$$

элементы которой будут

$$N_{jk}(t, \tau) = \sum_{\mu=1}^n \theta_{j\mu}(t) [\theta^{-1}(\tau)]_{\mu k}.$$

Заметим, что для функции $N(t, \tau)$ будет справедливым следующее соотношение:

$$N(t, \sigma) = N(t, \tau) N(\tau, \sigma), \quad (7.24)$$

которое имеет место для любых t, τ и σ . Действительно, в соответствии с (23)

$$N(t, \tau) N(\tau, \sigma) = \theta(t) \theta^{-1}(\tau) \theta(\tau) \theta^{-1}(\sigma) = \theta(t) \theta^{-1}(\sigma),$$

что и совпадает с соотношением (24).

Обратная матрица для матрицы $N(t, \tau)$ будет

$$[N(t, \tau)]^{-1} = N(\tau, t). \quad (7.25)$$

Соотношение (25) вытекает из того, что

$$N(t, \tau) N(\tau, t) = \theta(t) \theta^{-1}(\tau) \theta(\tau) \theta^{-1}(t) = E,$$

где через E обозначена единичная матрица.

Из соотношения (23) также следует, что

$$N(t, t) = E$$

для любых значений t .

Нелинейное векторное интегральное уравнение (22) можно теперь переписать так:

$$x(t) = N(t, t_0) x(t_0) + \int_{t_0}^t N(t, \tau) y(\tau) d\tau + \int_{t_0}^t N(t, \tau) \psi[x_1(\tau), \dots, x_n(\tau), \tau] d\tau. \quad (7.26)$$

Уравнение (26) эквивалентно следующей системе скалярных нелинейных интегральных уравнений:

$$x_j(t) = \sum_{k=1}^n N_{jk}(t, t_0) x_k(t_0) + \sum_{k=1}^n \int_{t_0}^t N_{jk}(t, \tau) y_k(\tau) d\tau + \sum_{k=1}^n \int_{t_0}^t N_{jk}(t, \tau) \psi_k[x_1(\tau), \dots, x_n(\tau), \tau] d\tau \quad (j = 1, \dots, n). \quad (7.27)$$

2. Построение приближенных решений. В общем случае исходная система нелинейных дифференциальных уравнений (1) не интегрируется. В этом смысле приведение задачи к системе нелинейных интегральных уравнений (27) не изменяет существа дела, так как получение точного решения уравнений (27) в общем случае также не представляется возможным. Однако для построения приближенных решений системы нелинейных дифференциальных уравнений (1) удобнее исходить из эквивалентной ей системы интегральных уравнений (27). Для сокращения записи введем следующие обозначения:

$$g(t) = N(t, t_0) x(t_0) + \int_{t_0}^t N(t, \tau) y(\tau) d\tau, \quad (7.28)$$

$$K[t, \tau, x_1(\tau), \dots, x_n(\tau)] = N(t, \tau) \psi[x_1(\tau), \dots, x_n(\tau), \tau]. \quad (7.29)$$

Так как фундаментальная матрица $\theta(t)$ для линейного дифференциального уравнения (9) предполагается известной, то будет известной и функция $N(t, \tau)$, определяемая формулой (23). Таким образом, можно считать функцию $g(t)$ известной функцией.

Функции $g(t)$ и $K[t, \tau, x_1(\tau), \dots, x_n(\tau)]$ являются векторами. Элементы этих векторов будут

$$g_j(t) = \sum_{k=1}^n N_{jk}(t, t_0) x_k(t_0) + \sum_{k=1}^n \int_{t_0}^t N_{jk}(t, \tau) y_k(\tau) d\tau \quad (j = 1, \dots, n), \quad (7.30)$$

$$K_j(t, \tau, x_1(\tau), \dots, x_n(\tau)) = \sum_{k=1}^n N_{jk}(t, \tau) \psi_k(x_1(\tau), \dots, x_n(\tau), \tau) \quad (j = 1, \dots, n). \quad (7.31)$$

Векторное интегральное уравнение (26) можно теперь переписать так:

$$x(t) = g(t) + \int_{t_0}^t K[t, \tau, x_1(\tau), \dots, x_n(\tau)] d\tau. \quad (7.32)$$

Система скалярных интегральных уравнений, соответствующая векторному уравнению (32), будет

$$x_j(t) = g_j(t) + \int_{t_0}^t K_j[t, \tau, x_1(\tau), \dots, x_n(\tau)] d\tau \quad (j = 1, \dots, n). \quad (7.33)$$

Для решения системы нелинейных интегральных уравнений (33) при достаточно широких предположениях [81] относительно

Описанным методом может быть построено приближенное решение системы нелинейных интегральных уравнений (33), то есть может быть найден приближенный закон движения системы (1) на интересующем нас интервале времени (t_0, t) .

§ 8. Качественные методы исследования движения нелинейных систем

1. Нелинейные системы с одной степенью свободы. Качественные методы исследования движения нелинейных систем опираются на результаты восходящей к трудам А. Пуанкаре [75] качественной теории дифференциальных уравнений [68]. Эти методы получили широкое применение в теории нелинейных колебаний в трудах Л. И. Мандельштама, А. А. Андропова, Н. М. Крылова, Н. Н. Боголюбова, Б. В. Булгакова, Ю. А. Митропольского и других ученых [4, 17, 47, 64]. Особенно эффективны качественные методы при изучении движения нелинейных систем с одной степенью свободы; многие из этих методов могут быть успешно применены и для изучения нелинейных систем со многими степенями свободы. Ниже ограничимся лишь рассмотрением систем с одной степенью свободы.

Кинетическая энергия системы с одной степенью свободы, у которой связи склерономны (то есть не зависят явно от времени) и определение обобщенной координаты q также склерономно, может быть представлена так:

$$T = \frac{1}{2} m(q) \dot{q}^2. \quad (8.1)$$

Функция $m(q)$ называется *приведенной массой* системы. Потенциальная энергия системы $V = V(q)$. Функция Лагранжа для рассматриваемой системы будет

$$L = T - V. \quad (8.2)$$

Уравнение движения системы будет иметь следующий вид:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial L}{\partial q} = Q^*(q, \dot{q}, t) \quad (8.3)$$

или

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}} \right) - \left(\frac{\partial T}{\partial q} \right) = - \frac{\partial V}{\partial q} + Q^*(q, \dot{q}, t),$$

где через $Q^*(q, \dot{q}, t)$ обозначена добавочная, *неконсервативная* сила, приложенная к системе.

В некоторых задачах более удобным является применение канонических переменных. Таковыми для системы с одной сте-

пению свободы будут обобщенная координата q и канонический (или обобщенный) импульс p , определяемый формулой

$$p = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}. \quad (8.4)$$

Для систем со склерономными связями функция Гамильтона имеет вид

$$H = T + V. \quad (8.5)$$

Так как согласно (1) и (2)

$$p = m(q) \dot{q}, \quad (8.6)$$

то функция H может быть представлена в виде

$$H = \frac{p^2}{2m(q)} + V(q). \quad (8.7)$$

Канонические уравнения движения системы с одной степенью свободы будут

$$\left. \begin{aligned} \frac{dq}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial p}, \\ \frac{dp}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial q} + Q(q, p, t), \end{aligned} \right\} \quad (8.8)$$

где $Q(q, p, t)$ — преобразованная к каноническим переменным добавочная неконсервативная сила.

В соответствии с (7) канонические уравнения движения (8) принимают вид

$$\left. \begin{aligned} \frac{dq}{dt} &= \frac{p}{m(q)}, \\ \frac{dp}{dt} &= \frac{m'(q)}{2[m(q)]^2} p^2 - V'(q) + Q(q, p, t). \end{aligned} \right\} \quad (8.9)$$

Движение системы со склерономными связями в случае, когда добавочная неконсервативная сила Q не зависит явно от времени, носит название *собственных колебаний* системы. В этом случае канонические уравнения (9) принимают вид

$$\left. \begin{aligned} \frac{dq}{dt} &= \frac{p}{m(q)}, \\ \frac{dp}{dt} &= \frac{m'(q)}{2[m(q)]^2} p^2 - V'(q) + Q(q, p). \end{aligned} \right\} \quad (8.10)$$

Мгновенные значения q и p определяют собой положение и скорость системы с одной степенью свободы или ее состояние (фазу). Можно трактовать q и p как декартовы координаты некоторой точки (изображающей точки) на плоскости qp . Эта

плоскость называется *фазовой плоскостью*; q и p — фазовые координаты изображающей точки на фазовой плоскости. При этом $\frac{dq}{dt}$ и $\frac{dp}{dt}$ будут представлять собой компоненты скорости изображающей точки. Эта скорость называется *фазовой скоростью*.

Всякое решение уравнения (10)

$$q = q(t), \quad p = p(t)$$

определяет собой на плоскости qp некоторую траекторию, по которой движется изображающая точка. Эта траектория называется *фазовой траекторией*. (Не следует смешивать фазовую траекторию и фазовую скорость с траекториями и скоростями реальных точек рассматриваемой материальной системы.) Дифференциальное уравнение, определяющее фазовые траектории, можно получить в явном виде, исключая переменную t из канонических уравнений (10). Это уравнение будет следующим:

$$\frac{dp}{dq} = \frac{\frac{m'(q)}{2[m(q)]^2} p^2 - V'(q) + Q(q, p)}{\frac{p}{m(q)}}. \quad (8.11)$$

Интегрируя уравнение (11), найдем зависящее от параметра C уравнение семейства интегральных кривых

$$p = p(q; C). \quad (8.12)$$

Если дифференциальное уравнение (11) проинтегрировано, то время движения изображающей точки по фазовой траектории определяется квадратурой. Действительно, из первого уравнения (10) и уравнения (12) следует, что

$$dt = \frac{m(q) dq}{p(q; C)}, \quad (8.13)$$

откуда

$$t = \int \frac{m(q) dq}{p(q; C)} + C_1, \quad (8.14)$$

где C_1 — произвольная постоянная. Для определения произвольных постоянных C и C_1 надо задать начальные условия, то есть задать значения q и p в начальный момент времени $t = t_0$. Этим определится закон движения системы.

Если при изменении времени t от $-\infty$ до ∞ изображающая точка пробегает всю интегральную кривую (12), соответствующую некоторому фиксированному значению параметра C , то эта интегральная кривая является фазовой траекторией. Возможны, однако, случаи (описанные ниже), когда интегральная кривая состоит из нескольких фазовых траекторий, то есть при

изменении t от $-\infty$ до ∞ изображающая точка пробегает лишь одну ветвь интегральной кривой (12).

Точки (q^*, p^*) фазовой плоскости, в которых одновременно обращаются в нуль обе составляющие фазовой скорости $\frac{dq}{dt}$ и $\frac{dp}{dt}$, называются *особыми точками*. В этих точках уравнение (11) не определяет наклона фазовой траектории к оси абсцисс, так как в точках (q^*, p^*) согласно (11) имеем $\frac{dp}{dq} = \frac{0}{0}$.

Значения (q^*, p^*) фазовых координат особых точек определяются из следующих конечных уравнений:

$$\left. \begin{aligned} \frac{p}{m(q)} &= 0, \\ \frac{m'(q)}{2[m(q)]^2} p^2 - V'(q) + Q(q, p) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (8.15)$$

Поскольку функция $m(q)$ может принимать только положительные конечные значения (функция $m(q)$ представляет собой приведенную массу системы), то из первого уравнения (15) следует, что

$$p^* = 0, \quad (8.16)$$

то есть особые точки расположены на оси абсцисс фазовой плоскости. Из второго уравнения (15) и соотношения (16) следует, что абсциссы q^* особых точек являются корнями уравнения

$$-V'(q) + Q(q, 0) = 0. \quad (8.17)$$

Состояние системы

$$q = q^* = \text{const}, \quad p = p^* = 0 \quad (8.18)$$

является *частным решением* канонических уравнений движения (10) системы. Это частное решение представляет собой положение равновесия рассматриваемой системы. Таким образом, особые точки определяют собой *положения равновесия* системы.

За исключением особых точек, в любой точке фазовой плоскости фазовая скорость отлична от нуля, то есть изображающая точка движется по фазовой траектории без остановки. В точках пересечения фазовой траектории с осью абсцисс (не особых) имеем, как следует из (11),

$$\left(\frac{dq}{dp}\right)_{p=0} = 0, \quad \left(\frac{d^2q}{dp^2}\right)_{p=0} \neq 0. \quad (8.19)$$

Таким образом, фазовая траектория пересекает ось абсцисс в регулярной (то есть не особой) точке под прямым углом и располагается по одну сторону от вертикальной касательной.

Так как $m(q) > 0$, то на фазовой плоскости в верхней полуплоскости $\dot{q} > 0$, и движение по фазовой траектории происходит в сторону возрастающих значений q . В нижней полуплоскости $\dot{q} < 0$, и движение по фазовой траектории происходит в сторону убывающих значений q .

2. Консервативные системы. Если приложенные к системе силы имеют потенциал, то есть определяются выражением $-V'(q)$, а другие силы к системе не приложены

$$Q(q, p, t) \equiv 0, \quad (8.20)$$

то система называется *консервативной*.

В соответствии с (8) канонические уравнения движения консервативной системы с одной степенью свободы будут

$$\left. \begin{aligned} \frac{dq}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial p}, \\ \frac{dp}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial q}. \end{aligned} \right\} \quad (8.21)$$

Учитывая выражение (7) для функции Гамильтона H , приведем уравнения (21) к виду

$$\left. \begin{aligned} \frac{dq}{dt} &= \frac{p}{m(q)}, \\ \frac{dp}{dt} &= \frac{m'(q)}{2[m(q)]^2} p^2 - V'(q). \end{aligned} \right\} \quad (8.22)$$

Так как в соответствии с (21)

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial q} \frac{dq}{dt} + \frac{\partial H}{\partial p} \frac{dp}{dt} = 0,$$

то имеет место первый интеграл (интеграл энергии)

$$H = \text{const}, \quad (8.23)$$

который в соответствии с (7) можно представить в виде

$$\frac{p^2}{2m(q)} + V(q) = v. \quad (8.24)$$

Здесь v — значение полной энергии системы, которое можно определить из начальных условий: $q = q(t_0)$, $p = p(t_0)$ при $t = t_0$.

Соотношение (24) можно рассматривать, как зависящее от параметра v конечное уравнение фазовых траекторий системы. Как следует из (24),

$$p = \pm \sqrt{2m(q)[v - V(q)]}, \quad (8.25)$$

то есть фазовые траектории консервативной системы расположены симметрично относительно оси абсцисс.

Время перемещения изображающей точки по фазовой траектории (рис. 8.1) от точки с абсциссой q_0 до точки с абсциссой q в соответствии с (14) и (25) будет

$$t = \pm \int_{q_0}^q \frac{\sqrt{m(q)} dq}{\sqrt{2[v - V(q)]}}. \quad (8.26)$$

При этом верхний знак перед интегралом в выражении (26) соответствует случаю, когда движение изображающей точки происходит по дуге, расположенной в верхней полуплоскости, а нижний знак — в нижней полуплоскости.

Пример построения фазовых траекторий для консервативной системы приведен на рис. 8.2. Здесь по заданному графику функции $V(q)$ (рис. 8.2, а) построены для различных значений v_i ($i = 1, \dots, 5$) полной энергии системы графики функций $p^2 = 2m(q)[v_i - V(q)]$ (рис. 8.2, б).

При помощи этих графиков на рис. 8.2, в построены фазовые траектории системы, соответствующие приведенным на рис. 8.2, а значениям v_i ($i = 1, \dots, 5$) полной энергии системы.

Рассмотрим характер движений системы, соответствующих различным фазовым траекториям, показанным на рис. 8.2, в. Точкам А, В и С, в которых функция $V(q)$ имеет экстремум, соответствуют особые точки, отмеченные на рис. 8.2, в цифрами 2, 4 и 1 соответственно. Как указано выше, особые точки определяют собой положение равновесия системы.

В точке А функция $V(q)$ имеет минимум. Соответствующая ей особая точка 2 является *изолированной* особой точкой. Эта особая точка называется *центром*. Если в начальный момент времени изображающая точка находится достаточно близко от особой точки 2, то, как видно из рис. 8.2, в, она будет двигаться по замкнутой фазовой траектории, расположенной в достаточно малой окрестности точки 2. Континуум замкнутых фазовых траекторий, зависящих от параметра v_i и аналогичных траектории 3, заполняет всю область фазовой плоскости, ограниченную замкнутой кривой 4'. Таким образом, положение равновесия, соответствующее особой точке типа центр, является *устойчивым*, что и соответствует известной теореме Лежен — Дирихле.

В точке В функция $V(q)$ имеет максимум. Через соответствующую ей особую точку 4 проходит самопересекающаяся кривая 4'''4'4'', называемая *сепаратрисой*. Особая точка 4 называется *седлом*. Сепаратриса состоит из трех ветвей 4''', 4' и 4''.

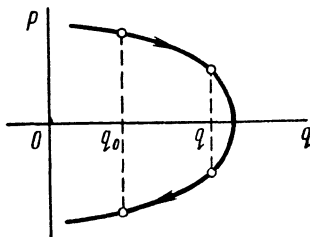


Рис. 8.1.

Как будет показано ниже, при движении по сепаратрисе изображающая точка приближается к особой точке 4 асимптотически при $t \rightarrow \infty$. Поэтому каждая из перечисленных выше отдельных ветвей сепаратрисы $4'''$, $4'$ и $4''$ является фазовой траекторией. При этом фазовой траектории $4'''$ соответствует *инфинитно-лимитационное* движение (при $t \rightarrow \infty q \rightarrow q_4$; при $t \rightarrow -\infty q \rightarrow \infty$). Фазовой траектории $4''$ соответствует *лимитационно-инфинитное* движение (при $t \rightarrow \infty q \rightarrow \infty$; при $t \rightarrow -\infty q \rightarrow q_4$). Фазовой траектории $4'$ соответствует *дважды лимитационное* движение (при $t \rightarrow \infty q \rightarrow q_4$; при $t \rightarrow -\infty q \rightarrow q_4$).

Если в начальный момент времени изображающая точка находилась сколь угодно близко от особой точки 4, то, как видно

из рис. 2, в, она будет двигаться по одной из фазовых траекторий типа 3, 5 или $3'$, а так как при движении по фазовым траекториям типа 5 и $3'$ $q \rightarrow \infty$ при $t \rightarrow \infty$, то положение равновесия, соответствующее особой точке 4 (то есть особой точке типа седла), будет *неустойчивым*.

В точке С функция $V(q)$ имеет стационарное значение. Соответствующая ей особая точка 1 будет (как показано ниже) точкой возврата первого рода. Как видно из расположения фазовых траекторий на рис. 8.2, в, положение равновесия, соответствующее особой точке 1, также является *неустойчивым*.

Сепаратриса, проходящая через особую точку 1, состоит из двух ветвей $1'$ и $1''$, каждая

из которых является фазовой траекторией системы. Фазовой траектории $1''$ соответствует *инфинитно-лимитационное* движение (при $t \rightarrow \infty q \rightarrow q_1$; при $t \rightarrow -\infty q \rightarrow \infty$). Фазовой траектории $1'$ соответствует *лимитационно-инфинитное* движение (при $t \rightarrow \infty q \rightarrow \infty$; при $t \rightarrow -\infty q \rightarrow q_1$).

Фазовые траектории типа 5, $3'$, $2'$ соответствуют *дважды* инфинитным движениям (при $t \rightarrow \infty q \rightarrow \infty$; при $t \rightarrow -\infty q \rightarrow \infty$).

Фазовая траектория 3 является замкнутой. В любой точке этой траектории фазовая скорость отлична от нуля; изображаю-

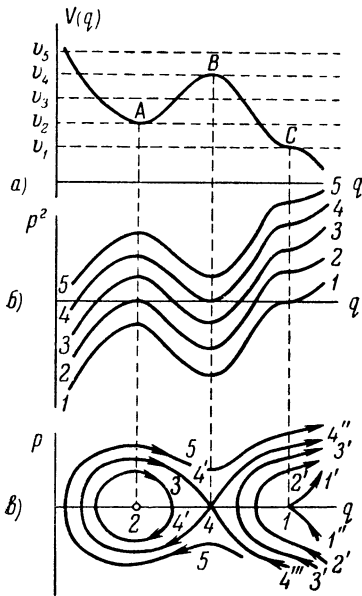


Рис. 8.2.

щая точка движется по траектории 3 без остановок, совершая один обход за конечный промежуток времени. Траектория 3 соответствует *либрационному* (периодическому) движению системы.

Перейдем теперь к определению наклона фазовой траектории к оси абсцисс в особой точке. Из выражения (25) следует, что

$$\frac{dp}{dq} = \pm \frac{m'(q) [v - V(q)] - m(q) V'(q)}{\sqrt{2m(q) [v - V(q)]}}. \quad (8.27)$$

Как показано выше (16), в особой точке $p = 0$. Согласно (17) у консервативной системы в особой точке $V'(q)$ обращается в нуль. Таким образом, учитывая выражение (25), будем иметь следующие соотношения:

$$v = V(q^*), \quad V'(q^*) = 0, \quad (8.28)$$

где q^* — абсцисса особой точки.

Пусть μ — порядок наименьшей производной от $V(q)$, отличной от нуля в особой точке

$$V^{(\mu)}(q^*) \neq 0.$$

Тогда можно представить функции $V(q)$ и $V'(q)$ в таком виде:

$$\left. \begin{aligned} V(q) &= V(q^*) + \frac{1}{\mu!} [V^{(\mu)}(q^*) + \varepsilon(q)] (q - q^*)^\mu, \\ V'(q) &= \frac{1}{(\mu-1)!} [V^{(\mu)}(q^*) + \eta(q)] (q - q^*)^{\mu-1}, \end{aligned} \right\} \quad (8.29)$$

где функции $\varepsilon(q)$ и $\eta(q)$ обращаются в нуль в точке $q = q^*$:

$$\varepsilon(q^*) = 0, \quad \eta(q^*) = 0. \quad (8.30)$$

В соответствии с (29) выражение (27) можно переписать так:

$$\frac{dp}{dq} = \pm \frac{\mathcal{R}}{\sqrt{2m(q) \mathcal{P} (q - q^*)^2}}, \quad (8.31)$$

где

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{P} &= \frac{1}{\mu!} [V^{(\mu)}(q^*) + \varepsilon(q)], \quad \mathcal{Q} = \frac{1}{(\mu-1)!} [V^{(\mu)}(q^*) + \eta(q)], \\ \mathcal{R} &= -m'(q) \mathcal{P} (q - q^*)^\mu - m(q) \mathcal{Q} (q - q^*)^{\mu-1}. \end{aligned} \right\} \quad (8.32)$$

Как следует из соотношения (28), $\mu \geq 2$. В случае, когда $\mu = 2$, а $V''(q^*) > 0$, функция $V(q)$ имеет в точке $q = q^*$ минимум, и, следовательно, точка $p = 0$, $q = q^*$ будет изолированной особой точкой.

В случае, когда $\mu = 2$, а $V''(q^*) < 0$, функция $V(q)$ имеет в точке $q = q^*$ максимум. Точка $p = 0$, $q = q^*$ будет особой

точкой типа *седла*. В этом случае согласно (31) получим

$$\lim_{q \rightarrow q^*} \frac{dp}{dq} = \pm k, \quad k = \sqrt{-m(q^*)V''(q^*)}. \quad (8.33)$$

Так как в рассматриваемом случае $V''(q^*) < 0$, то подрадикальное выражение в (33) положительно и k является действительной величиной. Таким образом, в рассматриваемом случае имеет место *самопересечение* сепаратрисы, проходящей через особую точку (рис. 8.3). В случае, когда $\mu > 2$ и является четным

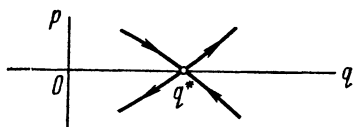


Рис. 8.3.

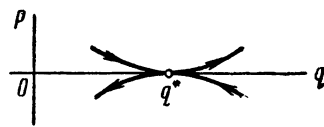


Рис. 8.4.

числом $\mu = 4, 6, 8, \dots$, а $V^{(\mu)}(q^*) < 0$, функция $V(q)$ имеет в точке $q = q^*$ максимум. В этом случае согласно (31) будем иметь

$$\lim_{q \rightarrow q^*} \frac{dp}{dq} = 0, \quad (8.34)$$

и, следовательно, будет иметь место *самоприкосновение* сепаратрисы, проходящей через особую точку (рис. 8.4). В случае, когда $\mu > 2$ и является нечетным числом $\mu = 3, 5, 7, \dots$, функция $V(q)$ имеет в точке $q = q^*$ *minimax*. Согласно (31) в этом случае

$$\lim_{q \rightarrow q^*} \frac{dp}{dq} = 0, \quad (8.35)$$

и особая точка будет точкой возврата первого рода. Сепаратриса, проходящая через особую точку, показана на рис. 8.5.

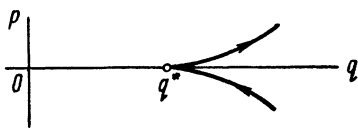


Рис. 8.5.

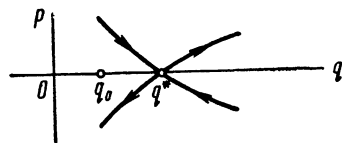


Рис. 8.6.

Обратимся теперь к определению времени перемещения изображающей точки по сепаратрисе от точки с абсциссой $q = q_0$ до особой точки, абсцисса которой $q = q^*$ (рис. 8.6). Пусть изображающая точка в момент времени $t = t_0$ находится на ветви сепаратрисы в верхней полуплоскости в точке, абсцисса

которой равна q_0 . Согласно (26) промежуток времени, в течение которого изображающая точка придет в особую точку, будет

$$t^* = \int_{q_0}^{q^*} \frac{\sqrt{m(q)} dq}{\sqrt{2[v - V(q)]}}. \quad (8.36)$$

Подставляя в (36) выражение (29), которым определена функция $V(q)$, получим

$$t^* = \int_{q_0}^{q^*} \frac{\sqrt{m(q)}}{\sqrt{-\frac{2}{\mu l} [V^{(\mu)}(q^*) + \varepsilon(q)]}} \frac{dq}{(q - q^*)^{\frac{\mu}{2}}}. \quad (8.37)$$

Так как $\frac{\mu}{2} \geq 1$, то несобственный интеграл (37) является расходящимся и, следовательно, изображающая точка приближается к особой точке асимптотически при $t \rightarrow \infty$, как это и указывалось выше.

3. Диссипативные системы. Диссипативными системами называются системы, у которых, помимо консервативных сил, в число приложенных сил входят еще *диссипативные* силы, то есть силы, работа которых рассеивает энергию системы.

Рассмотрим систему с одной степенью свободы, у которой

$$m(q) = m = \text{const}, \quad (8.38)$$

$$V(q) = \frac{1}{2} cq^2, \quad (8.39)$$

$$Q(q, p) = -cB \text{sign } p - 2\varepsilon p. \quad (8.40)$$

Добавочная сила $Q(q, p)$ представляет собой сумму сил сухого трения и сил вязкого трения.

Согласно (10) канонические уравнения движения системы будут

$$\left. \begin{aligned} \frac{dq}{dt} &= \frac{p}{m}, \\ \frac{dp}{dt} &= -cq - cB \text{sign } p - 2\varepsilon p. \end{aligned} \right\} \quad (8.41)$$

Систему дифференциальных уравнений (41) можно заменить дифференциальным уравнением второго порядка

$$m\ddot{q} = -cq - cB \text{sign } \dot{q} - 2\varepsilon m\dot{q}. \quad (8.42)$$

Обозначая

$$k^2 = \frac{c}{m}, \quad (8.43)$$

представим уравнение (42) в следующем виде:

$$\frac{d^2}{dt^2}(q+B) + 2\varepsilon \frac{d}{dt}(q+B) + k^2(q+B) = 0 \quad (\text{при } \dot{q} > 0), \quad (8.44)$$

$$\frac{d^2}{dt^2}(q-B) + 2\varepsilon \frac{d}{dt}(q-B) + k^2(q-B) = 0 \quad (\text{при } \dot{q} < 0). \quad (8.44')$$

Изучим движение системы при следующих начальных условиях:

$$q = a_j > 0, \quad \dot{q} = 0 \quad \text{при } t = 0. \quad (8.45)$$

Переходя к определению закона движения системы, предположим, что последующее за начальным моментом времени движение системы будет происходить при $\dot{q} < 0$, то есть на фазовой плоскости движение изображающей точки будет происходить в нижней полуплоскости. Тогда будет иметь место уравнение (44')

$$\frac{d^2}{dt^2}(q-B) + 2\varepsilon \frac{d}{dt}(q-B) + k^2(q-B) = 0.$$

Проинтегрировав это уравнение, надо будет проверить справедливость предположения о том, что $\dot{q} < 0$, и определить момент времени перехода изображающей точки в верхнюю полуплоскость.

При условии $\varepsilon < k$ характеристическое уравнение

$$\lambda^2 + 2\varepsilon\lambda + k^2 = 0 \quad (8.46)$$

будет иметь следующие корни:

$$\lambda_1, \lambda_2 = -\varepsilon \pm i\omega, \quad \omega = \sqrt{k^2 - \varepsilon^2}. \quad (8.47)$$

Решение дифференциального уравнения (44') при начальных условиях (45) будет следующим:

$$q(t) = B + (a_j - B)e^{-\varepsilon t} \cos \omega t + \frac{\varepsilon}{\omega} (a_j - B)e^{-\varepsilon t} \sin \omega t. \quad (8.48)$$

Отсюда

$$\dot{q}(t) = -\left(\frac{\varepsilon^2}{\omega} + \omega\right)(a_j - B)e^{-\varepsilon t} \sin \omega t. \quad (8.49)$$

Из выражения (49) видно, что $\dot{q} < 0$ на интервале времени $0 < t < t_1$, где

$$t_1 = \frac{\pi}{\omega}, \quad (8.50)$$

и, следовательно, сделанное выше предположение о том, что последующее за начальным моментом времени движение изображающей точки будет происходить в нижней фазовой полуплоскости, является справедливым.

Таким образом, выражение (48) определяет собой закон движения системы на интервале времени $0 < t < \frac{\pi}{\omega}$. В момент времени $t_1 = \frac{\pi}{\omega}$ обобщенная скорость $\dot{q}(t_1) = 0$, и изображающая точка в этот момент времени, пересекая ось абсцисс, переходит в верхнюю фазовую полуплоскость.

Как следует из (48), обобщенная координата q в момент времени t_1 будет иметь следующее значение:

$$q(t_1) = B - (a_j - B)\beta, \quad (8.51)$$

где

$$\beta = e^{-\varepsilon \frac{\pi}{\omega}} < 1. \quad (8.52)$$

Обозначая

$$a_{j+1} = \beta \left[a_j - B \left(1 + \frac{1}{\beta} \right) \right], \quad (8.53)$$

получим согласно (51), что

$$q(t_1) = -a_{j+1}.$$

Если начальное отклонение $a_j > B \left(1 + \frac{1}{\beta} \right)$, то

$$a_{j+1} > 0.$$

Дальнейшее движение изображающей точки будет происходить в верхней фазовой полуплоскости, то есть будет иметь место уравнение (44)

$$\frac{d^2}{dt^2} (q + B) + 2\varepsilon \frac{d}{dt} (q + B) + k^2 (q + B) = 0. \quad (8.54)$$

Это уравнение надо проинтегрировать при следующих начальных условиях:

$$q = -a_{j+1} < 0, \quad \dot{q} = 0 \quad \text{при} \quad t = t_1 = \frac{\pi}{\omega}. \quad (8.55)$$

Решение уравнения (44) при начальных условиях (55) будет следующим:

$$q(t) = -B - \frac{\varepsilon}{\omega} (a_{j+1} - B) e^{-\varepsilon(t-t_1)} \sin \omega(t-t_1) - (a_{j+1} - B) e^{-\varepsilon(t-t_1)} \cos \omega(t-t_1). \quad (8.56)$$

Из выражения (56) найдем, что

$$\dot{q}(t) = \left(\frac{\varepsilon^2}{\omega} + \omega \right) (a_{j+1} - B) e^{-\varepsilon(t-t_1)} \sin \omega(t-t_1). \quad (8.57)$$

Как следует из выражения (57), $\dot{q} > 0$ на интервале времени $t_1 < t < t_2$, где

$$t_2 = \frac{2\pi}{\omega}, \quad (8.58)$$

и выражение (56) определяет собой закон движения системы на этом интервале времени.

В момент времени t_2 обобщенная скорость $\dot{q}(t_2) = 0$, и изображающая точка в этот момент времени, пересекая ось абсцисс, переходит в нижнюю фазовую полуплоскость.

Значение обобщенной координаты q в момент времени t_2 будет согласно (56) следующим:

$$q(t_2) = a_{j+2}, \quad (8.59)$$

где

$$a_{j+2} = \beta \left[a_{j+1} - B \left(1 + \frac{1}{\beta} \right) \right]. \quad (8.60)$$

Как видно из выражения (60), если $a_{j+1} > B \left(1 + \frac{1}{\beta} \right)$, то $q(t_2) > 0$.

Величины $a_j, a_{j+1}, a_{j+2}, \dots$ представляют собой абсолютные значения абсцисс последовательных точек пересечения фазовой траектории системы с осью $p = 0$. Будем называть эти величины последовательными амплитудами. Из сравнения выражений (53) и (60) можно видеть, что формула, связывающая две последовательные амплитуды — одна и та же, как при переходе изображающей точки из верхней фазовой полуплоскости в нижнюю, так и при переходе из нижней полуплоскости в верхнюю.

Если теперь обозначить через a_0 начальную амплитуду, то согласно (53) и (60) будем иметь последовательность амплитуд, определяемых соотношениями

$$\left. \begin{aligned} a_1 &= \beta a_0 - B(1 + \beta), \\ a_2 &= \beta a_1 - B(1 + \beta), \\ a_3 &= \beta a_2 - B(1 + \beta), \\ &\dots \\ a_{n-1} &= \beta a_{n-2} - B(1 + \beta), \\ a_n &= \beta a_{n-1} - B(1 + \beta). \end{aligned} \right\} \quad (8.61)$$

Покажем теперь, что движение системы заканчивается за конечный промежуток времени и прекращается в момент времени, когда изображающая точка попадает на отрезок $[-B, +B]$ оси абсцисс фазовой плоскости (рис. 8.7). Отрезок $[-B, +B]$ оси абсцисс фазовой плоскости называется *зоной застоя* (или отрезком покоя) системы. Действительно, в любой точке этого отрезка $|q| \leq B$, и восстанавливающая сила cq уравновешивается силой сухого трения. Так как на оси абсцисс

$\dot{q} = 0$ и сила вязкого трения $-2\epsilon m\dot{q}$ обращается в нуль, то при попадании изображающей точки в зону застоя восстанавливающая сила sq уравнивается силой сухого трения покоя и движение прекращается. Поскольку, как следует из формул (53) и (60), за каждое полуколебание амплитуда колебаний убывает на величину, превышающую $2B$, то, какова бы ни была начальная амплитуда a_0 , через конечное число полуколебаний амплитуда системы достигнет значения, меньшего чем B , и движение прекратится. Таким образом, движение системы заканчивается за конечный промежуток времени.

Обратимся теперь к соотношениям (61). Обозначая через n число полуколебаний, за которые заканчивается движение, будем иметь (рис. 8.7)

$$a_n < B. \quad (8.62)$$

Умножая первое соотношение (61) на β^{n-1} , второе на β^{n-2} и т. д. и складывая соответственно левые и правые части вновь полученных соотношений, найдем, что

$$a_n = \beta^n a_0 - B(1 + \beta^n) - 2B\beta(1 + \beta + \dots + \beta^{n-2})$$

или

$$a_n = \beta^n a_0 - B(1 + \beta^n) - 2B\beta \frac{1 - \beta^{n-1}}{1 - \beta}. \quad (8.63)$$

В случае, когда $\epsilon = 0$, то есть в состав диссипативных сил, приложенных к системе, входит лишь сила сухого трения, будем иметь

$$\beta = 1, \quad \lim_{\beta \rightarrow 1} \frac{1 - \beta^{n-1}}{1 - \beta} = n - 1, \quad (8.64)$$

и формула (63) примет вид

$$a_n = a_0 - 2Bn. \quad (8.65)$$

Если же в рассматриваемой системе отсутствуют силы сухого трения ($B = 0$), то формула (63) принимает вид

$$a_n = \beta^n a_0. \quad (8.66)$$

При отсутствии сил сухого трения зона застоя у системы отсутствует, и собственные колебания системы затухают асимптотически при $t \rightarrow \infty$.

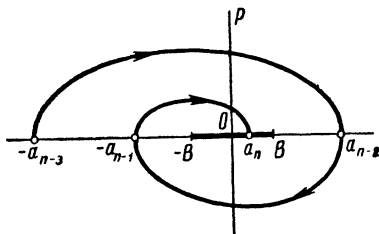


Рис. 8.7.

Из выражений (48) и (56) видно, что половина периода колебаний системы равна $\frac{\pi}{\omega}$. Период колебаний системы будет

$$P = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{k^2 - e^2}}. \quad (8.67)$$

Как видно из выражения (67), наличие сил сухого трения не влияет на величину периода собственных колебаний системы. Этот результат доказан здесь, однако, лишь для систем с одной степенью свободы.

4. Автоколебательные системы. Метод точечных преобразований. Перейдем теперь к рассмотрению систем, у которых, помимо сил, имеющих потенциал, и диссипативных сил, приложены еще силы, работа которых идет на пополнение энергии системы. По терминологии Кельвина такие силы называются искусственными силами. Наличие искусственных сил предполагает, что система связана с некоторым внешним источником энергии и при помощи искусственных сил из этого внешнего источника черпается энергия, идущая на пополнение энергии системы.

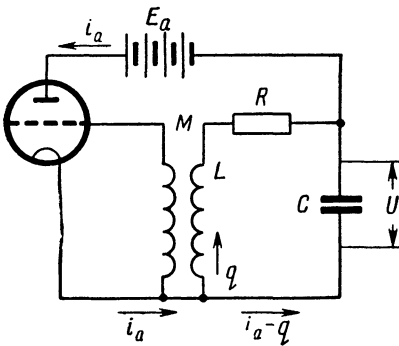


Рис. 8.8.

Если приложенные к системе диссипативные силы или искусственные силы (или и те и другие) являются нелинейными, то в системе могут возникнуть периодические колебания, параметры которых не зависят от начальных условий, а устанавливаются автоматически так, чтобы приращение энергии системы за один период колебаний оказалось равным нулю. Указанные периодические колебания (их называют также периодическими движениями) являются асимптотически устойчивыми периодическими частными решениями дифференциальных уравнений движения системы. Наряду с ними уравнения движения системы могут иметь также неустойчивые периодические частные решения. Асимптотически устойчивые периодические движения называются *автоколебаниями*; нелинейные системы, у которых имеют место такие движения, называются *автоколебательными системами*.

К числу хорошо изученных автоколебательных систем относятся часы, ламповые генераторы и др.

Мы рассмотрим здесь характерные свойства автоколебательных систем на примере лампового генератора.

Ламповый генератор предназначен для генерирования незатухающих колебаний в электрическом контуре, то есть для генерирования переменного тока высокой частоты. Основное применение он находит в радиотехнике. Схема лампового генератора изображена на рис. 8.8. Источником внешней энергии является анодная батарея E_a , питающая электронную лампу (триод). В анодную цепь лампы включен электрический колебательный контур RLC . В цепь сетки электронной лампы включена катушка индуктивности. Коэффициент взаимной индукции между катушками индуктивности в цепи сетки лампы и анодной цепи обозначен через M . Как показано ниже, осуществляемая благодаря взаимной индукции связь между анодной цепью и цепью сетки лампы дозирует пополнение (из анодной батареи) энергии контура RLC так, чтобы в этом контуре компенсировались потери энергии в омическом сопротивлении и установились незатухающие колебания.

Для того чтобы составить дифференциальное уравнение, которому удовлетворяет сила тока q в ветви LR колебательного контура, определим напряжение U на обкладках конденсатора. Обозначая через i_a анодный ток, будем иметь

$$U = \frac{1}{C} \int_0^t [i_a(\tau) - q(\tau)] d\tau. \quad (8.68)$$

Так как эта величина равна падению напряжения на катушке самоиндукции L и омическом сопротивлении R , то будет иметь место соотношение

$$U = L \frac{dq}{dt} + Rq. \quad (8.69)$$

Из соотношений (68) и (69) следует, что

$$L\dot{q} + Rq = \frac{1}{C} \int_0^t [i_a(\tau) - q(\tau)] d\tau. \quad (8.70)$$

Дифференцируя по t левую и правую части соотношения (70), получим следующее дифференциальное уравнение:

$$\ddot{q} + 2\varepsilon\dot{q} + k^2q = k^2i_a, \quad (8.71)$$

где

$$\varepsilon = \frac{1}{2} \frac{R}{L}, \quad k^2 = \frac{1}{LC}. \quad (8.72)$$

Анодный ток i_a является функцией от управляющего напряжения u :

$$i_a = f(u). \quad (8.73)$$

График функции $f(u)$ называется характеристикой лампы. Управляющее напряжение u имеет вид

$$u = U_g + \gamma U_a, \quad (8.74)$$

где U_g — разность потенциалов между сеткой лампы и катодом, а U_a — разность потенциалов между анодом и катодом. Через γ обозначена проницаемость лампы. Характеристика лампы изображена на рис. 8.9. С возрастанием u анодный ток i_a асимптотически приближается к току насыщения, величина которого обозначена через S .

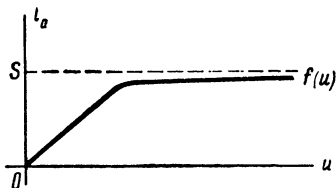


Рис. 8.9.

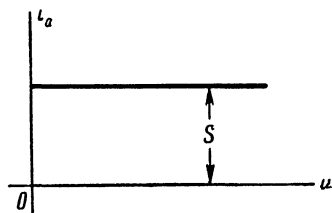


Рис. 8.10.

Параметры лампового генератора обычно таковы, что соотношение (74) можно аппроксимировать так:

$$u \approx U_g. \quad (8.75)$$

Для упрощения вычислений аппроксимируем еще характеристику лампы ступенчатой функцией, показанной на рис. 8.10. Можно показать, что замена характеристики лампы ступенчатой функцией не искажает характера решений дифференциального уравнения (71). В случае необходимости можно уточнить полученные решения, аппроксимируя характеристику лампы (рис. 8.9) ломаной линией.

При аппроксимации характеристики лампы ступенчатой функцией будем, учитывая (75), иметь

$$i_a = \begin{cases} S & \text{при } U_g \geq 0, \\ 0 & \text{при } U_g < 0. \end{cases} \quad (8.76)$$

Так как благодаря взаимной индукции катушек индуктивности в цепи сетки и анодной цепи

$$U_g = M \frac{dq}{dt}, \quad (8.77)$$

то соотношение (76) можно переписать так:

$$i_a = \begin{cases} S & \text{при } \dot{q} \geq 0, \\ 0 & \text{при } \dot{q} < 0. \end{cases} \quad (8.78)$$

Таким образом, дифференциальное уравнение (71) принимает вид

$$\ddot{q} + 2\varepsilon\dot{q} + k^2q = \begin{cases} k^2S & \text{при } \dot{q} \geq 0, \\ 0 & \text{при } \dot{q} < 0. \end{cases} \quad (8.79)$$

Перейдем к интегрированию уравнения (79). Интегрирование будем вести по интервалам времени, в течение которых функция $\dot{q}(t)$ сохраняет постоянный знак. Пусть

$$q = a > 0, \quad \dot{q} = 0 \quad \text{при } t = 0. \quad (8.80)$$

Так как в последующем за моментом времени $t = 0$ движении $\dot{q}(t)$ будет иметь отрицательный знак (что будет подтверждено ниже), то в соответствии с (78) надо обратиться к уравнению

$$\ddot{q} + 2\varepsilon\dot{q} + k^2q = 0. \quad (8.81)$$

При условии, что

$$\varepsilon < k,$$

решение уравнения (81), удовлетворяющее начальным условиям (80), будет следующим:

$$q(t) = \frac{\varepsilon a}{\omega} e^{-\varepsilon t} \sin \omega t + a e^{-\varepsilon t} \cos \omega t, \quad (8.82)$$

где

$$\omega = \sqrt{k^2 - \varepsilon^2}. \quad (8.83)$$

Из выражения (82) найдем, что

$$\dot{q}(t) = -\left(\frac{\varepsilon^2}{\omega} + \omega\right) a e^{-\varepsilon t} \sin \omega t. \quad (8.84)$$

Таким образом, выражение (82) определяет собой закон движения системы на интервале времени $0 < t < t_1$, где

$$t_1 = \frac{\pi}{\omega}, \quad (8.85)$$

так как на этом интервале времени согласно (84) $\dot{q}(t) < 0$, что и предполагалось при обращении к уравнению (81).

В момент времени $t = t_1$ функции $q(t)$ и $\dot{q}(t)$ в соответствии с (82) принимают следующие значения:

$$q(t_1) = -\beta a, \quad \dot{q}(t_1) = 0, \quad (8.86)$$

где

$$\beta = e^{-\varepsilon \frac{\pi}{\omega}} < 1. \quad (8.87)$$

Обозначая

$$b = \beta a, \quad (8.88)$$

получим согласно (86), что

$$q(t_1) = -b. \quad (8.89)$$

На последующем за моментом времени t_1 интервале времени $\dot{q}(t)$ будет иметь положительный знак и в соответствии с (79) на этом интервале времени будет иметь место уравнение

$$\ddot{q} + 2\epsilon\dot{q} + k^2q = k^2S, \quad (8.90)$$

которое надо проинтегрировать при начальных условиях

$$q = -b < 0, \quad \dot{q} = 0 \quad \text{при} \quad t = t_1 = \frac{\pi}{\omega}. \quad (8.91)$$

Решение дифференциального уравнения (90), удовлетворяющее начальным условиям (91), будет следующим:

$$q(t) = S - (b + S)e^{-\epsilon(t-t_1)} \cos \omega(t-t_1) - \\ - \frac{\epsilon}{\omega}(b + S)e^{-\epsilon(t-t_1)} \sin \omega(t-t_1). \quad (8.92)$$

Из выражения (92) найдем, что

$$\dot{q}(t) = \left(\frac{\epsilon^2}{\omega} + \omega \right) (b + S) e^{-\epsilon(t-t_1)} \sin \omega(t-t_1). \quad (8.93)$$

Как следует из (93), $\dot{q} > 0$ на интервале времени $t_1 < t < t_2$, где

$$t_2 = \frac{2\pi}{\omega}, \quad (8.94)$$

что и предполагалось при обращении к уравнению (90). Таким образом, выражение (92) определяет собой закон изменения q на интервале времени $t_1 < t < t_2$.

В момент времени $t = t_2$ функция $\dot{q}(t)$ обращается в нуль

$$\dot{q}(t_2) = 0. \quad (8.95)$$

Значение функции $q(t)$ в момент времени $t = t_2$ будет согласно (92) следующим:

$$q(t_2) = c, \quad (8.96)$$

где

$$c = \beta b + (1 + \beta) S. \quad (8.97)$$

Принимая q и \dot{q} в качестве фазовых координат системы, можно построить на фазовой плоскости (рис. 8.11) траекторию изображающей точки, определяемую выражениями (82), (84), (92) и (93).

Мы рассмотрели один цикл движения изображающей точки на фазовой плоскости (рис. 8.11) и установили зависимости (88)

и (97) между последовательными амплитудами a , b и c для этого цикла. Из изложенного выше нетрудно видеть, что эти зависимости имеют место и для последующих циклов, если, разумеется, под a , b и c понимать соответствующие амплитуды для рассматриваемого последующего цикла. Обозначая

$$\left. \begin{aligned} f_1(a, b) &= b - \beta a, \\ f_2(c, b) &= \beta b - c + (1 + \beta) S, \end{aligned} \right\} \quad (8.98)$$

можно переписать соотношения (88) и (97) так:

$$\left. \begin{aligned} f_1(a, b) &= 0, \\ f_2(c, b) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (8.99)$$

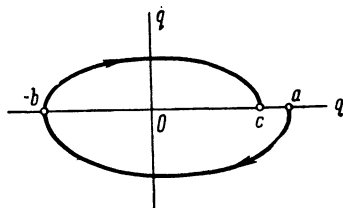


Рис. 8.11.

Соотношения (99) можно рассматривать как формулы точечного преобразования, преобразующие точки a_i оси абсцисс фазовой плоскости в точки c_i той же оси, где i — номер цикла, описываемого выражениями (82) и (92). Уравнения (99) можно также рассматривать как уравнения прямых соответственно на плоскостях ab и cb (рис. 8.12). Эти прямые при совмещении плоскостей ab и cb пересекаются в точке, координаты которой

$$a = c = A, \quad b = B. \quad (8.100)$$

Значения A и B , определяемые из уравнений

$$\left. \begin{aligned} B - \beta A &= 0, \\ \beta B - A + (1 + \beta) S &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (8.101)$$

будут следующими:

$$A = \frac{S}{1 - \beta}, \quad B = \frac{\beta S}{1 - \beta}. \quad (8.102)$$

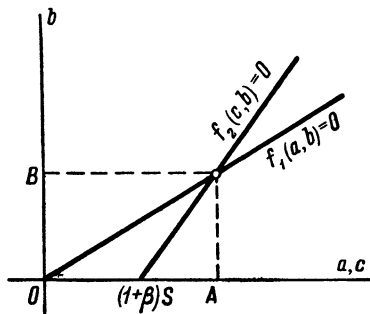


Рис. 8.12.

Точка оси абсцисс $q = A$ является *инвариантной точкой* точечного преобразования, определяемого соотношениями (99). Если $a = A$, то, перемещаясь по фазовой траектории, изображающая точка, по прошествии одного цикла, вновь приходит в точку $q = A$ (так как $c = A$), то есть описывает на фазовой плоскости *замкнутую* траекторию (рис. 8.13). Последующее движение изображающей точки будет происходить по той же фазовой траектории, то есть функция $q(t)$ будет изменяться по периодическому закону. Заметим, что величины A и B зависят лишь от параметров системы, но не от *начальных условий движения*. В этом существенное отличие найденного здесь периоди-

ческого движения от либрационных движений консервативной системы.

Соответствующий замкнутой фазовой траектории (рис. 8.13) график функции $q(t)$ приведен на рис. 8.14. Так как согласно (102) $B < A$, то центром колебаний является не точка $q = 0$,

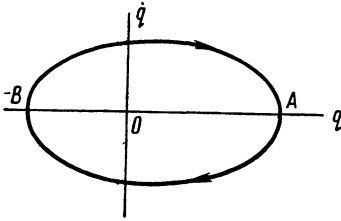


Рис. 8.13.

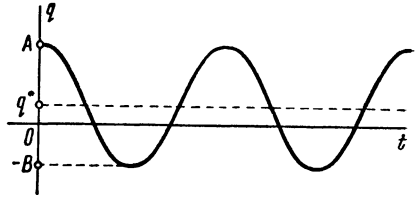


Рис. 8.14.

а некоторая точка $q^* > 0$. Подавая на сетку лампы (рис. 8.8) некоторое дополнительное постоянное напряжение (смещение), можно добиться симметричного расположения замкнутой фазовой траектории относительно оси ординат фазовой плоскости.

Изучим теперь движение изображающей точки в окрестности замкнутой фазовой траектории. Пусть

$$a = A + \delta a.$$

Тогда

$$b = B + \delta b, \quad c = A + \delta c.$$

Соотношения (99), связывающие последовательные амплитуды, принимают вид

$$\left. \begin{aligned} f_1(A + \delta a, B + \delta b) &= 0, \\ f_2(A + \delta c, B + \delta b) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (8.103)$$

Разлагая левые части соотношений (103) в ряды Тейлора в окрестности точки (A, B) , получим

$$\left. \begin{aligned} f_1(A, B) + \left(\frac{\partial f_1}{\partial a}\right)_{a=A, b=B} \delta a + \left(\frac{\partial f_1}{\partial b}\right)_{a=A, b=B} \delta b + \dots &= 0, \\ f_2(A, B) + \left(\frac{\partial f_2}{\partial c}\right)_{c=A, b=B} \delta c + \left(\frac{\partial f_2}{\partial b}\right)_{c=A, b=B} \delta b + \dots &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (8.104)$$

Ограничиваясь членами первого порядка относительно δa , δb и δc и учитывая, что согласно (101)

$$f_1(A, B) = 0, \quad f_2(A, B) = 0, \quad (8.105)$$

получим следующие соотношения:

$$\left. \begin{aligned} \left(\frac{\partial f_1}{\partial a} \right)_{\substack{a=A \\ b=B}} \delta a + \left(\frac{\partial f_1}{\partial b} \right)_{\substack{a=A \\ b=B}} \delta b = 0, \\ \left(\frac{\partial f_2}{\partial c} \right)_{\substack{c=A \\ b=B}} \delta c + \left(\frac{\partial f_2}{\partial b} \right)_{\substack{c=A \\ b=B}} \delta b = 0. \end{aligned} \right\} \quad (8.106)$$

Так как согласно (98)

$$\frac{\partial f_1}{\partial a} = -\beta, \quad \frac{\partial f_1}{\partial b} = 1, \quad \frac{\partial f_2}{\partial c} = -1, \quad \frac{\partial f_2}{\partial b} = \beta, \quad (8.107)$$

то соотношения (106) принимают вид

$$\left. \begin{aligned} -\beta \delta a + \delta b = 0, \\ -\delta c + \beta \delta b = 0. \end{aligned} \right\} \quad (8.108)$$

Отсюда

$$\delta c = \beta^2 \delta a. \quad (8.109)$$

Как видно из рис. 8.11, если считать a_i начальной амплитудой i -го цикла, то c_i будет начальной амплитудой $(i+1)$ -го цикла, то есть

$$c_i = a_{i+1}. \quad (8.110)$$

Отсюда следует, что

$$\delta c_i = \delta a_{i+1}. \quad (8.111)$$

Поэтому соотношение (109) можно переписать так:

$$\delta a_{i+1} = \beta^2 \delta a_i. \quad (8.112)$$

Соотношение (112) представляет собой линейное уравнение в конечных разностях относительно вариации амплитуды δa . Дискретным аргументом искомой функции δa является номер цикла i .

Так как согласно (87) $\beta < 1$, то

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \delta a_i = 0,$$

откуда следует, что фазовые траектории асимптотически приближаются к определяемой величинами (102) замкнутой фазовой траектории, показанной на рис. 8.13. Указанная фазовая траектория, таким образом, является *устойчивым предельным циклом*.

Этот предельный цикл и определяет собой *автоколебания*, которые генерирует ламповый генератор.

§ 9. Нелинейные системы под воздействием периодических внешних сил

1. Вынужденные колебания нелинейной системы. Рассмотрим нелинейную систему с одной степенью свободы, у которой приведенная масса

$$m(q) = m = \text{const}. \quad (9.1)$$

В этом случае, канонические уравнения движения (8.9) принимают вид

$$\left. \begin{aligned} \frac{dq}{dt} &= \frac{p}{m}, \\ \frac{dp}{dt} &= -V'(q) + Q(q, p, t). \end{aligned} \right\} \quad (9.2)$$

Пусть

$$-V'(q) + Q(q, p, t) = m[-f(q, \dot{q}) + \psi(vt)], \quad (9.3)$$

где $\psi(vt)$ — периодическая функция, период которой

$$P = \frac{2\pi}{v}. \quad (9.4)$$

Систему дифференциальных уравнений (2) можно заменить следующим уравнением второго порядка:

$$\ddot{q} + f(q, \dot{q}) = \psi(vt). \quad (9.5)$$

Обозначим теперь

$$\vartheta = vt. \quad (9.6)$$

Так как промежуток времени t , равный одному периоду функции $\psi(vt)$, составляет $\frac{2\pi}{v}$, а согласно (6) $\vartheta = vt$, то по новому аргументу ϑ период функции $\psi(\vartheta)$ будет равен 2π . Как известно, при выполнении некоторых условий (например, условий Дирихле) функция $\psi(\vartheta)$ разлагается в ряд Фурье

$$\begin{aligned} \psi(\vartheta) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \psi(\vartheta) d\vartheta + \left[\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \psi(\vartheta) \cos \vartheta d\vartheta \right] \cos \vartheta + \\ + \left[\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \psi(\vartheta) \sin \vartheta d\vartheta \right] \sin \vartheta + \dots \end{aligned} \quad (9.7)$$

Ряд (7) можно переписать так:

$$\psi(\vartheta) = C + R \cos(\vartheta + \gamma) + \dots, \quad (9.8)$$

где

$$\left. \begin{aligned} C &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \psi(\vartheta) d\vartheta, \\ R &= \sqrt{\left[\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \psi(\vartheta) \cos \vartheta d\vartheta \right]^2 + \left[\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \psi(\vartheta) \sin \vartheta d\vartheta \right]^2}, \end{aligned} \right\} \quad (9.9)$$

а угол γ определяется соотношениями

$$\cos \gamma = \frac{1}{\pi R} \int_{-\pi}^{\pi} \psi(\theta) \cos \theta d\theta, \quad \sin \gamma = -\frac{1}{\pi R} \int_{-\pi}^{\pi} \psi(\theta) \sin \theta d\theta. \quad (9.10)$$

Далее будем считать, что функция $\psi(\theta)$ симметрична, то есть

$$C = 0, \quad (9.11)$$

и, следовательно,

$$\psi(\theta) = R \cos(\theta + \gamma) + \dots \quad (9.12)$$

Рассмотрим предварительно один *частный* случай. Пусть

$$\left. \begin{aligned} f(q, \dot{q}) &= (\omega^2 + \varepsilon^2)q + 2\varepsilon\dot{q}, \\ \psi(vt) &= R \cos(\theta + \gamma). \end{aligned} \right\} \quad (9.13)$$

При этом уравнение (5) принимает вид

$$\ddot{q} + 2\varepsilon\dot{q} + (\omega^2 + \varepsilon^2)q = R \cos(vt + \gamma). \quad (9.14)$$

Частное решение уравнения (14), соответствующее его правой части, будет следующим:

$$q = a \cos(vt + \gamma - \theta). \quad (9.15)$$

Так как согласно (2) $p = m\dot{q}$, то в данном случае

$$p = -mav \sin(vt + \gamma - \theta). \quad (9.16)$$

Здесь a — амплитуда вынужденных колебаний, а θ — сдвиг фазы вынужденных колебаний относительно фазы внешней силы $\psi(vt)$. Так как уравнение (14) является линейным, то в выражениях (15) и (16) $a = \text{const}$, $\theta = \text{const}$.

В *общем* случае согласно (2) и (3) уравнения движения будут

$$\left. \begin{aligned} \frac{dq}{dt} &= \frac{p}{m}, \\ \frac{1}{m} \frac{dp}{dt} + f\left(q, \frac{p}{m}\right) &= \psi(\theta), \end{aligned} \right\} \quad (9.17)$$

и выражения

$$q = a \cos(\theta + \gamma - \theta), \quad p = -mav \sin(\theta + \gamma - \theta), \quad (9.18)$$

в которых $a = \text{const}$, $\theta = \text{const}$, не будут удовлетворять уравнениям (17).

Будем поэтому рассматривать для общего случая выражения (18) как формулы замены переменных, принимая в качестве новых переменных a и θ , то есть полагая в формулах (18)

$$a = a(t), \quad \theta = \theta(t). \quad (9.19)$$

Таким образом, вид частного решения (15), (16) линейного уравнения (14) здесь используется лишь как указание для выбора формул замены переменных.

Подставим теперь в уравнения (17) вместо q и p выражения (18), которые запишем так:

$$\left. \begin{aligned} q &= a \cos u, \\ p &= -\tau a v \sin u, \end{aligned} \right\} \quad (9.20)$$

где

$$u = \nu t + \gamma - \theta = \vartheta + \gamma - \theta. \quad (9.21)$$

Заметим, что так как согласно (10) $\gamma = \text{const}$, то

$$\dot{u} = \nu - \dot{\theta}. \quad (9.22)$$

Таким образом, уравнения (17) преобразуются к виду

$$\left. \begin{aligned} \dot{a} \cos u - a(\nu - \dot{\theta}) \sin u &= -\tau v \sin u, \\ -\dot{a} v \sin u - \tau v(\nu - \dot{\theta}) \cos u + f(a \cos u, -\tau v \sin u) &= \psi(\vartheta). \end{aligned} \right\} \quad (9.23)$$

Чтобы получить уравнения, разрешенные относительно \dot{a} и $\dot{\theta}$, умножим первое уравнение (23) на $\cos u$, а второе на $-\frac{1}{v} \sin u$ и сложим соответственно левые и правые части вновь полученных уравнений. При этом получим уравнение, не содержащее $\dot{\theta}$. Умножая первое уравнение (23) на $\sin u$, а второе уравнение (23) на $\frac{1}{v} \cos u$ и складывая полученные уравнения, найдем уравнение, не содержащее \dot{a} .

Таким образом, придем к следующим уравнениям:

$$\left. \begin{aligned} \dot{a} &= -\tau v \sin u \cos u + \frac{1}{v} f(a \cos u, -\tau v \sin u) \sin u - \\ &\quad - \frac{1}{v} \psi(\vartheta) \sin u, \\ \dot{\theta} &= \nu \cos^2 u - \frac{1}{\tau a} f(a \cos u, -\tau v \sin u) \cos u + \\ &\quad + \frac{1}{\tau a} \psi(\vartheta) \cos u. \end{aligned} \right\} \quad (9.24)$$

Уравнения (24) являются *точными* уравнениями. При преобразовании исходных уравнений к новым переменным никаких упро-

щений не делалось. Интегрирование уравнений (24) поэтому не легче выполнить, чем интегрирование исходных уравнений. В общем случае уравнения (24) проинтегрировать не удастся. В связи с этим возникает необходимость применения приближенных методов.

Если ограничиться функциями $f\left(q, \frac{p}{m}\right)$, мало отличающимися от линейных функций, то можно аппроксимировать систему уравнений (24) более простыми уравнениями, основываясь на том, что если входящие в уравнения (24) функции $f\left(q, \frac{p}{m}\right)$ близки к линейным, то искомые функции a и θ будут медленно изменяться во времени. Это свойство указанных здесь систем, называемых псевдолинейными системами, имеет место в силу непрерывной зависимости решения от параметра, ибо если функции $f\left(q, \frac{p}{m}\right)$ являются линейными, то $a = \text{const}$ и $\theta = \text{const}$.

Правые части уравнений (24) являются *периодическими функциями по аргументу u* , и их можно разложить в ряды Фурье. Поскольку у псевдолинейных систем a и θ — *медленно изменяющиеся* функции времени, то на решения уравнений (24) основное влияние окажут *свободные* члены рядов Фурье; влияние *осциллирующих* членов, то есть членов, содержащих первую и высшие гармоники, будет достаточно малым.

Для иллюстрации этого утверждения приведем следующий пример. Решение дифференциального уравнения

$$\dot{a} - ka = S + A \sin vt$$

будет

$$a(t) = \left[a(0) - \frac{S}{k} + \frac{Av}{k^2 + v^2} \right] e^{-kt} + \frac{S}{k} + \frac{Ak}{k^2 + v^2} \sin vt - \frac{Av}{k^2 + v^2} \cos vt.$$

Если $v \gg k$, то

$$a(t) \approx \left[a(0) - \frac{S}{k} + \frac{A}{v} \right] e^{-kt} + \frac{S}{k} - \frac{A}{v} \left(\cos vt - \frac{k}{v} \sin vt \right).$$

Так как при $v \gg k$ имеет место неравенство $\frac{1}{k} \gg \frac{1}{v}$, то главная часть решения будет

$$a(t) \approx \left[a(0) - \frac{S}{k} \right] e^{-kt} + \frac{S}{k}.$$

Быстроосциллирующая функция $A \sin vt$ оказывает сравнительно малое влияние на решение рассматриваемого здесь уравнения.

Учитывая указанное выше обстоятельство, в качестве уравнений первого приближения, примем уравнения, которые

получаются при замене в уравнениях (24) правых частей их средними значениями по u , то есть свободными членами их разложений в ряды Фурье. Таким образом, уравнения первого приближения будут

$$\left. \begin{aligned} \dot{a} &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left[-av \sin u \cos u + \frac{1}{v} f(a \cos u, -av \sin u) \sin u - \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{v} \psi(\theta) \sin u \right] du, \\ \dot{\theta} &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left[v \cos^2 u - \frac{1}{va} f(a \cos u, -av \sin u) \cos u + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{va} \psi(\theta) \cos u \right] du. \end{aligned} \right\} (9.25)$$

При вычислении интегралов в правых частях уравнений (25) будем считать a и θ постоянными, то есть пренебрежем изменением этих функций за один период колебаний. Вносимая этим погрешность будет иметь уже более высокий порядок малости. Так как

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sin u \cos u \, du = 0, \quad \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} v \cos^2 u \, du = \frac{v}{2}, \quad (9.26)$$

то уравнения (25) можно переписать так:

$$\left. \begin{aligned} \dot{a} &= \frac{1}{2\pi v} \int_{-\pi}^{\pi} f(a \cos u, -av \sin u) \sin u \, du - \\ &\quad - \frac{1}{2\pi v} \int_{-\pi}^{\pi} \psi(\theta) \sin u \, du, \\ \dot{\theta} &= \frac{v}{2} - \frac{1}{2\pi va} \int_{-\pi}^{\pi} f(a \cos u, -av \sin u) \cos u \, du + \\ &\quad + \frac{1}{2\pi va} \int_{-\pi}^{\pi} \psi(\theta) \cos u \, du. \end{aligned} \right\} (9.27)$$

Заметим сейчас, что

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi\nu} \int_{-\pi}^{\pi} \psi(\vartheta) \sin u \, du &= \frac{1}{2\pi\nu} \int_{-\pi}^{\pi} \psi(\vartheta) \sin(\vartheta + \gamma - \theta) \, d\vartheta = \\ &= \left[\frac{1}{2\pi\nu} \int_{-\pi}^{\pi} \psi(\vartheta) \sin \vartheta \, d\vartheta \right] \cos(\gamma - \theta) + \\ &+ \left[\frac{1}{2\pi\nu} \int_{-\pi}^{\pi} \psi(\vartheta) \cos \vartheta \, d\vartheta \right] \sin(\gamma - \theta) = \\ &= \frac{1}{2\nu} [-R \sin \gamma \cos(\gamma - \theta) + R \cos \gamma \sin(\gamma - \theta)] = -\frac{R}{2\nu} \sin \theta. \end{aligned} \quad (9.28)$$

Аналогично

$$\frac{1}{2\pi\nu} \int_{-\pi}^{\pi} \psi(\vartheta) \cos u \, du = \frac{R}{2\nu} \cos \theta. \quad (9.29)$$

Подставляя выражения (28) и (29) в уравнения (27), получим

$$\left. \begin{aligned} \dot{a} &= \frac{1}{2\pi\nu} \int_{-\pi}^{\pi} f(a \cos u, -a\nu \sin u) \sin u \, du + \frac{R}{2\nu} \sin \theta, \\ \dot{\theta} &= \frac{\nu}{2} - \frac{1}{2\pi\nu a} \int_{-\pi}^{\pi} f(a \cos u, -a\nu \sin u) \cos u \, du + \frac{R}{2\nu a} \cos \theta. \end{aligned} \right\} \quad (9.30)$$

Обозначим теперь

$$\left. \begin{aligned} \Phi(\nu, a) &= -\frac{1}{2\pi\nu a} \int_{-\pi}^{\pi} f(a \cos u, -a\nu \sin u) \sin u \, du, \\ \Psi(\nu, a) &= \frac{\nu}{2} + \frac{1}{2\pi\nu a} \int_{-\pi}^{\pi} f(a \cos u, -a\nu \sin u) \cos u \, du. \end{aligned} \right\} \quad (9.31)$$

При этом уравнения (30) примут вид

$$\left. \begin{aligned} \dot{a} &= -a\Phi(\nu, a) + \frac{R}{2\nu} \sin \theta, \\ \dot{\theta} &= \nu - \Psi(\nu, a) + \frac{R}{2\nu a} \cos \theta. \end{aligned} \right\} \quad (9.32)$$

Как уже сказано выше, уравнения (32) являются уравнениями первого приближения. Они называются *укороченными*

уравнениями. Метод, при помощи которого они получены, называется методом *осреднения*.

Построение высших приближений и определение условий сходимости процесса приближений для систем с n степенями свободы даны Б. В. Булгаковым в монографии [17], которой автор следует в изложении рассматриваемых в §§ 8 и 9 вопросов.

Развитию и обоснованию асимптотических методов в теории нелинейных колебаний, к которым относится и метод осреднения, посвящены работы Б. Ван-дер-Поля, Л. И. Мандельштама, А. А. Андропова, Н. М. Крылова, Н. Н. Боголюбова, Ю. А. Митропольского и др. [4, 12, 47, 64].

2. Установившиеся колебания с частотой внешней силы и их устойчивость. Частное решение уравнений (32)

$$\left. \begin{aligned} a &= a^* = \text{const}, \\ \theta &= \theta^* = \text{const} \end{aligned} \right\} \quad (9.33)$$

соответствует в исходных переменных согласно (20) следующему решению:

$$q = a^* \cos(\nu t + \gamma - \theta^*). \quad (9.34)$$

Решение (34) представляет собой *вынужденные колебания* системы, то есть установившиеся колебания с частотой ν внешней силы.

Для определения значений a^* и θ^* будем в соответствии с (32) иметь следующую систему конечных (вообще трансцендентных) уравнений:

$$\left. \begin{aligned} -a\Phi(\nu, a) + \frac{R}{2\nu} \sin \theta &= 0, \\ \nu - \Psi(\nu, a) + \frac{R}{2\nu a} \cos \theta &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (9.35)$$

Корни уравнений (35) и являются интересующими нас величинами a^* , θ^* .

Исключая θ из системы уравнений (35), получим следующее уравнение относительно a :

$$[a\Phi(\nu, a)]^2 + [\nu a - a\Psi(\nu, a)]^2 = \left(\frac{R}{2\nu}\right)^2. \quad (9.36)$$

Если обозначить

$$\mathcal{W}(\nu, a) = [a\Phi(\nu, a)]^2 + [\nu a - a\Psi(\nu, a)]^2 - \left(\frac{R}{2\nu}\right)^2, \quad (9.37)$$

то уравнение (36) примет вид

$$\mathcal{W}(\nu, a) = 0. \quad (9.38)$$

Из уравнения (38) для каждого заданного значения ν определяются r (где r — число корней уравнения) значений $a_i = a$ ($i = 1, \dots, r$) амплитуд вынужденных колебаний, которые возможны в системе при воздействии на нее внешней периодической силы, период которой равен $2\pi/\nu$.

Для каждого значения a_i^* можно найти из уравнений (35) соответствующие ему значения $\sin \theta^*$ и $\cos \theta^*$, по которым и определяется значение θ_i^* .

Уравнение $W(\nu, a) = 0$ определяет собой на плоскости νa кривую $a = a^*(\nu)$ зависимости амплитуды вынужденных колебаний a^* от частоты ν внешней силы. Эта кривая называется *резонансной кривой*.

Некоторые возможные виды резонансных кривых приведены на рис. 9.1. Как видно из выражения (37), в точках оси

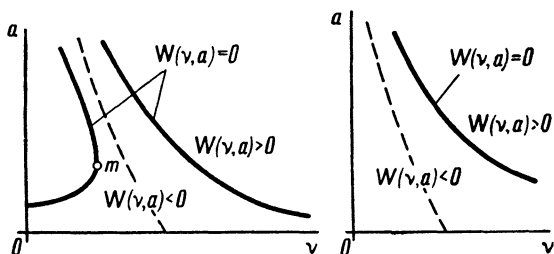


Рис. 9.1.

абсцисс ($a = 0$) функция $W(\nu, a)$ принимает отрицательные значения

$$W(\nu, 0) = -\left(\frac{R}{2\nu}\right)^2 < 0.$$

На резонансной кривой функция $W(\nu, a)$ обращается в нуль. По непрерывности можно заключить, что в области, заключенной между осью абсцисс и резонансной кривой, функция $W(\nu, a)$ отрицательна, а вне этой области положительна, как это отмечено на рис. 9.1.

Из соотношения (38) следует, что в точках резонансной кривой

$$\frac{dW}{d\nu} = \frac{\partial W}{\partial \nu} + \frac{\partial W}{\partial a} \frac{da}{d\nu} = 0. \quad (9.39)$$

Укажем теперь точки резонансной кривой, в которых $\frac{\partial W}{\partial a}$ обращается в нуль.

1) Пусть в некоторой точке $\frac{\partial W}{\partial \nu} = 0$, $\frac{da}{d\nu} \neq 0$. Тогда в силу соотношения (39) в этой точке $\frac{\partial W}{\partial a} = 0$. Таким образом, в этой

точке $\frac{\partial W}{\partial v} = 0$, $\frac{\partial W}{\partial a} = 0$, то есть рассматриваемая точка является особой.

2) Пусть в некоторой точке $\frac{\partial W}{\partial v} \neq 0$. Если в этой точке $\frac{da}{dv} = \infty$, то в силу соотношения (39) будем иметь $\frac{\partial W}{\partial a} = 0$. Рассматриваемая точка, следовательно, является точкой резонансной кривой, в которой касательная *вертикальна*. (Такая точка отмечена на рис. 9.1 буквой *m*.)

Во всех остальных точках резонансной кривой $\frac{\partial W}{\partial a} \neq 0$. При этом, как следует из расположения областей, в которых функция $W(v, a)$ положительна, и областей, в которых она отрицательна, лишь в точках дуги, расположенной выше точки *m* (рис. 9.1) на левой ветви резонансной кривой, $\frac{\partial W}{\partial a} < 0$. В остальных точках резонансной кривой $\frac{\partial W}{\partial a} > 0$.

Как указано выше, рассматриваемые установившиеся движения с частотой внешней силы (то есть вынужденные колебания) определяются частным решением (33) уравнений (32). Обратимся теперь к исследованию *устойчивости* этих движений.

Пусть

$$a = a^* + \delta a, \quad \theta = \theta^* + \delta \theta, \quad (9.40)$$

где a^* и θ^* удовлетворяют уравнениям (35).

Подставив величины (40) в уравнения (32) и разложив правые части этих уравнений в ряды Тейлора в окрестности точки (a^*, θ^*) , получим

$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{dt} \delta a &= -a^* \Phi(v, a^*) + \frac{R}{2v} \sin \theta^* - \left[\frac{\partial}{\partial a} a \Phi(v, a) \right]_{a=a^*} \delta a + \\ &\quad + \frac{R}{2v} \cos \theta^* \delta \theta + \dots, \\ \frac{d}{dt} \delta \theta &= v - \Psi(v, a^*) + \frac{R}{2va^*} \cos \theta^* - \left[\frac{\partial}{\partial a} \Psi(v, a) \right]_{a=a^*} \delta a - \\ &\quad - \frac{R}{2va^{*2}} \cos \theta^* \delta a - \frac{R}{2va^*} \sin \theta^* \delta \theta + \dots \end{aligned} \right\} (9.41)$$

Согласно (35)

$$\left. \begin{aligned} a^* \Phi(v, a^*) &= \frac{R}{2v} \sin \theta^*, \\ -[va^* - a^* \Psi(v, a^*)] &= \frac{R}{2v} \cos \theta^*. \end{aligned} \right\} (9.42)$$

Учитывая соотношения (42) и сохраняя в уравнениях (41) лишь члены первого порядка относительно δa и $\delta\theta$, получим следующие уравнения в вариациях:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{dt} \delta a + \left[\frac{\partial}{\partial a} a\Phi(v, a) \right]_{a=a^*} \delta a - \frac{R}{2v} \cos \theta^* \delta\theta &= 0, \\ \frac{d}{dt} \delta\theta + \left[\frac{\partial}{\partial a} \Psi(v, a) \right]_{a=a^*} \delta a + \frac{R}{2va^{*2}} \cos \theta^* \delta\theta + \\ &+ \frac{R}{2va^*} \sin \theta^* \delta\theta = 0. \end{aligned} \right\} (9.43)$$

Уравнения (43) являются линейными дифференциальными уравнениями с постоянными коэффициентами. Заменяя в этих уравнениях $\frac{R}{2v} \sin \theta^*$ и $\frac{R}{2v} \cos \theta^*$ их значениями (42), можно привести уравнения (43) к виду

$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{dt} \delta a + \left[\frac{\partial}{\partial a} a\Phi(v, a) \right]_{a=a^*} \delta a + [va^* - a^*\Psi(v, a^*)] \delta\theta &= 0, \\ \frac{d}{dt} \delta\theta + \left[\frac{\partial}{\partial a} \Psi(v, a) \right]_{a=a^*} \delta a - \frac{1}{a^*} [v - \Psi(v, a^*)] \delta a + \\ &+ \Phi(v, a^*) \delta\theta = 0. \end{aligned} \right\} (9.44)$$

Характеристическое уравнение системы дифференциальных уравнений (44) будет следующим:

$$\lambda^2 + M_1\lambda + M_2 = 0, \quad (9.45)$$

где

$$M_1 = \Phi(v, a^*) + \left[\frac{\partial}{\partial a} a\Phi(v, a) \right]_{a=a^*}, \quad (9.46)$$

$$\begin{aligned} M_2 = \Phi(v, a^*) \left[\frac{\partial}{\partial a} a\Phi(v, a) \right]_{a=a^*} - \\ - [va^* - a^*\Psi(v, a^*)] \left[\frac{\partial}{\partial a} \Psi(v, a) \right]_{a=a^*} + [v - \Psi(v, a^*)]^2. \end{aligned} \quad (9.47)$$

Рассматриваемые установившиеся движения (то есть вынужденные колебания) будут асимптотически устойчивыми, если δa и $\delta\theta$, определяемые уравнениями (44), будут асимптотически стремиться к нулю при $t \rightarrow \infty$. Последнее будет иметь место, если корни характеристического уравнения (45) будут удовлетворять условию

$$\operatorname{Re} \lambda_1 < 0, \quad \operatorname{Re} \lambda_2 < 0. \quad (9.48)$$

Для того же, чтобы условие (48) имело место, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия

$$M_1 > 0, \quad M_2 > 0. \quad (9.49)$$

Если хотя бы один из коэффициентов M_1 или M_2 будет отрицательным, то рассматриваемое установившееся движение будет неустойчивым.

Выполнение условия $M_1 > 0$ можно проверить, вычислив M_1 по формуле (46).

О выполнении же условия $M_2 > 0$ можно судить непосредственно по резонансной кривой. Это следует из того, что согласно (37) и (47)

$$M_2 = \left(\frac{1}{2a} \frac{\partial W}{\partial a} \right)_{a=a^*}. \quad (9.50)$$

Таким образом, знак M_2 совпадает со знаком $\frac{\partial W}{\partial a}$ в точке $a = a^*$. Знак же $\frac{\partial W}{\partial a}$ определяется по виду резонансной кривой, как это описано выше.

Из соотношения (50), в частности, следует, что все точки дуги расположенной выше точки t на левой ветви резонансной кривой (рис. 9.1) соответствуют *неустойчивым* вынужденным колебаниям, так как в любой из этих точек $\frac{\partial W}{\partial a} < 0$.

§ 10. Функции от матриц и их применение к интегрированию систем линейных дифференциальных уравнений

Применение функций от матриц к теории систем линейных дифференциальных уравнений явилось предметом основоположных работ И. А. Лаппо-Данилевского [50]. Эти вопросы подробно изучены также в монографиях Ф. Р. Гантмахера [21] и Б. В. Булгакова [17]. Этим трудам автор следует в изложении указанных вопросов. Непосредственное приложение методы теории функций от матриц имеют в рассмотренных ниже задачах управляемости и наблюдаемости линейных систем.

1. Обобщенная теорема Безу. Пусть $A = [A_{jh}]$ — квадратная матрица типа $n \times n$. Через $F(\lambda) = [F_{jh}(\lambda)]$ ($n \times n$) обозначим матричный полином m -й степени

$$F(\lambda) = F_0\lambda^m + F_1\lambda^{m-1} + \dots + F_m \quad (F_0 \neq 0). \quad (10.1)$$

Заметим, что если вместо скаляра λ подставить в выражение (1) матрицу A , то будем иметь

$$F(A) = F_0A^m + F_1A^{m-1} + \dots + F_mE, \quad (10.2)$$

$$\hat{F}(A) = A^mF_0 + A^{m-1}F_1 + \dots + EF_m, \quad (10.3)$$

причем в общем случае $F(A) \neq \hat{F}(A)$.

Разделим матричный полином $F(\lambda)$ на бином $\lambda E - A$ — A справа и слева

$$F(\lambda) = Q(\lambda)(\lambda E - A) + R, \quad F(\lambda) = (\lambda E - A)\hat{Q}(\lambda) + \hat{R}. \quad (10.4)$$

Так как при делении полиномов степень остатка ниже степени делителя, то правый остаток R и левый остаток \hat{R} не будут зависеть от λ .

Подставляя в тождества (4) вместо λ матрицу A , что можно сделать потому, что матрица A коммутативна при умножении с матричными коэффициентами бинома $\lambda E - A$, получим

$$F(A) = Q(A)(A - A) + R, \quad \hat{F}(A) = (A - A)\hat{Q}(A) + \hat{R}. \quad (10.5)$$

Отсюда вытекает следующая теорема.

Обобщенная теорема Безу. При правом (левом) делении матричного полинома $F(\lambda)$ на бином $\lambda E - A$ остаток от деления равен $F(A)$ (соответственно $\hat{F}(A)$).

Следствие. Матричный полином $F(\lambda)$ делится без остатка справа (слева) на бином $\lambda E - A$ тогда и только тогда, когда $F(A) = 0$ (соответственно $\hat{F}(A) = 0$).

2. Теорема Гамильтона — Кэли. Рассмотрим матрицу $A = [A_{jk}]$ ($n \times n$). Характеристической матрицей для матрицы A называется матрица $\lambda E - A$. Определитель характеристической матрицы

$$\Delta(\lambda) = \det(\lambda E - A) \quad (10.6)$$

представляет собой скалярный полином относительно λ и называется *характеристическим полиномом* матрицы A . Корни уравнения $\Delta(\lambda) = 0$ называются *характеристическими числами* матрицы A .

Через $B_{jk}(\lambda)$ обозначим алгебраическое дополнение элемента $\lambda E_{kj} - A_{kj}$ в определителе $\Delta(\lambda)$. Матрица $B(\lambda) = [B_{jk}]$ ($n \times n$) является *присоединенной* матрицей для матрицы $\lambda E - A$.

Из приведенных выше определений следуют следующие тождества относительно λ :

$$(\lambda E - A) B(\lambda) = \Delta(\lambda) E, \quad (10.7)$$

$$B(\lambda)(\lambda E - A) = \Delta(\lambda) E. \quad (10.8)$$

Так как

$$\Delta(\lambda) = \lambda^n + c_1 \lambda^{n-1} + c_2 \lambda^{n-2} + \dots + c_{n-1} \lambda + c_n, \quad (10.9)$$

то

$$\Delta(\lambda) E = E \lambda^n + (c_1 E) \lambda^{n-1} + \dots + (c_{n-1} E) \lambda + c_n E \quad (10.10)$$

есть полином от λ с матричными коэффициентами. Матрицу $B(\lambda)$ также можно представить в виде полинома от λ с матричными коэффициентами.

Равенства (7) и (8) показывают, что $\Delta(\lambda) E$ делится слева и справа на $\lambda E - A$ без остатка. Согласно обобщенной теореме Безу это возможно лишь тогда, когда остаток $\Delta(A) E = \Delta(A)$ равен нулю. Отсюда вытекает следующая теорема.

Теорема Гамильтона — Кэли. *Всякая квадратная матрица A удовлетворяет своему характеристическому уравнению, то есть*

$$\Delta(A) = 0. \quad (10.11)$$

3. Минимальный полином матрицы. Скалярный полином $f(\lambda)$ называется *аннулирующим полиномом* квадратной матрицы A , если

$$f(A) = 0.$$

Аннулирующий полином $\psi(A)$ *наименьшей* степени со старшим коэффициентом, равным единице, называется *минимальным полиномом* матрицы A .

Согласно теореме Гамильтона—Кэли характеристический полином $\Delta(\lambda)$ матрицы A является аннулирующим для матрицы A . Однако в общем случае этот полином не является минимальным.

Можно показать, что произвольный аннулирующий полином $f(\lambda)$ матрицы делится без остатка на ее минимальный полином $\psi(\lambda)$. Действительно, разделив $f(\lambda)$ на $\psi(\lambda)$, получим

$$f(\lambda) = \psi(\lambda)q(\lambda) + r(\lambda), \quad (10.12)$$

где степень $r(\lambda)$ ниже степени $\psi(\lambda)$. Из соотношения (12) следует, что

$$f(A) = \psi(A)q(A) + r(A). \quad (10.13)$$

Так как $f(A) = 0$, $\psi(A) = 0$, то и $r(A) = 0$. Но степень $r(\lambda)$ ниже степени минимального полинома $\psi(\lambda)$. Поэтому $r(\lambda) \equiv 0$, то есть $f(\lambda)$ делится без остатка на $\psi(\lambda)$.

Пусть $\psi(\lambda)$ и $\psi_1(\lambda)$ являются минимальными полиномами для матрицы A . Тогда они делятся друг на друга без остатка, то есть эти полиномы отличаются постоянным множителем. Но так как старшие коэффициенты у $\psi(\lambda)$ и $\psi_1(\lambda)$ равны единице, то $\psi_1(\lambda) \equiv \psi(\lambda)$. Таким образом, доказана *единственность* минимального полинома для данной матрицы A .

Обозначим через $D_{n-1}(\lambda)$ общий наибольший делитель всех миноров $(n-1)$ -го порядка характеристической матрицы $\lambda E - A$, то есть общий наибольший делитель элементов присоединенной матрицы $B(\lambda)$. При этом коэффициент при старшей степени λ в полиноме $D_{n-1}(\lambda)$ приводим к единице. Полином $D_{n-1}(\lambda)$ называется *детерминантным делителем* $(n-1)$ -го порядка матрицы $\lambda E - A$. Из изложенного следует, что

$$B(\lambda) = D_{n-1}(\lambda)C(\lambda), \quad (10.14)$$

где $C(\lambda)$ — некоторая полиномная матрица, которая называется *приведенной присоединенной матрицей* для матрицы $\lambda E - A$.

Умножая левую и правую части соотношения (14) слева на матрицу $\lambda E - A$, получим согласно (7), что

$$\Delta(\lambda)E = (\lambda E - A)C(\lambda)D_{n-1}(\lambda). \quad (10.15)$$

Разлагая характеристический определитель $\Delta(\lambda)$ по элементам какой-либо строки, получим сумму слагаемых, каждое из которых делится без остатка на $D_{n-1}(\lambda)$ и, следовательно, $\Delta(\lambda)$ делится без остатка на $D_{n-1}(\lambda)$, то есть

$$\frac{\Delta(\lambda)}{D_{n-1}(\lambda)} = \psi(\lambda), \quad (10.16)$$

где $\psi(\lambda)$ — некоторый полином. (Этот полином является старшим инвариантным множителем характеристической матрицы $\lambda E - A$.)

Из выражений (15) и (16) следует, что

$$\psi(\lambda) E = (\lambda E - A) C(\lambda). \quad (10.17)$$

Заметим, что, умножая левую и правую части соотношения (14) справа на матрицу $\lambda E - A$, получим согласно (8)

$$\Delta(\lambda) E = D_{n-1}(\lambda) C(\lambda) (\lambda E - A), \quad (10.18)$$

откуда в соответствии с (16) будем иметь

$$\psi(\lambda) E = C(\lambda) (\lambda E - A), \quad (10.19)$$

то есть $C(\lambda)$ является одновременно и левым и правым частным от деления $\psi(\lambda) E$ на $\lambda E - A$.

Таким образом, матричный полином $\psi(\lambda) E$ делится без остатка слева (и справа) на матрицу $\lambda E - A$. Поэтому согласно обобщенной теореме Безу

$$\psi(A) E = \psi(A) = 0, \quad (10.20)$$

и, следовательно, $\psi(\lambda)$ является аннулирующим полиномом для матрицы A .

Докажем теперь, что $\psi(\lambda)$ является минимальным полиномом. Пусть минимальным полиномом матрицы A будет $\psi^*(\lambda)$. Тогда $\psi(\lambda)$ делится без остатка на $\psi^*(\lambda)$, то есть

$$\psi(\lambda) = \psi^*(\lambda) \chi(\lambda). \quad (10.21)$$

Так как $\psi^*(A) = 0$, то согласно обобщенной теореме Безу матричный полином $\psi^*(\lambda) E$ делится слева без остатка на $\lambda E - A$:

$$\psi^*(\lambda) E = (\lambda E - A) C^*(\lambda). \quad (10.22)$$

Умножая левую и правую части соотношения (22) на полином $\chi(\lambda)$, получим

$$\psi(\lambda) E = (\lambda E - A) C^*(\lambda) \chi(\lambda). \quad (10.23)$$

Сравнивая соотношения (23) и (17), найдем, что

$$C(\lambda) = C^*(\lambda) \chi(\lambda). \quad (10.24)$$

Из соотношения (24) следует, что $\chi(\lambda)$ является общим делителем всех элементов полиномиальной матрицы $C(\lambda)$. Но, как видно из (14), общий наибольший делитель всех элементов матрицы $C(\lambda)$ равен некоторому постоянному числу, ибо матрица $C(\lambda)$ получена делением матрицы $B(\lambda)$ на общий наибольший делитель ее элементов $D_{n-1}(\lambda)$. Таким образом, $\chi(\lambda) = \mu = \text{const}$. Так как старшие коэффициенты у $\psi(\lambda)$ и $\psi^*(\lambda)$ равны единице,

то из (21) найдем, что $\mu = 1$ и, следовательно, $\chi(\lambda) = 1$. Таким образом, $\psi(\lambda) = \psi^*(\lambda)$, то есть $\psi(\lambda)$ является минимальным полиномом матрицы A .

Таким образом, согласно (16) минимальный полином матрицы A определяется формулой

$$\psi(\lambda) = \frac{\Delta(\lambda)}{D_{n-1}(\lambda)}. \quad (10.25)$$

Обратимся теперь к формуле (17):

$$\psi(\lambda) E = (\lambda E - A) C(\lambda).$$

Так как определитель произведения двух матриц равен произведению их определителей, а $\det[\psi(\lambda)E] = [\psi(\lambda)]^n$, то будем иметь

$$[\psi(\lambda)]^n = \Delta(\lambda) \det C(\lambda). \quad (10.26)$$

Отсюда следует, что $[\psi(\lambda)]^n$ делится без остатка на $\Delta(\lambda)$, а согласно (25) $\Delta(\lambda)$ делится без остатка на $\psi(\lambda)$ и, следовательно, нули полинома $\psi(\lambda)$ совпадают с нулями полинома $\Delta(\lambda)$, хотя кратности этих нулей в общем случае будут у $\psi(\lambda)$ и $\Delta(\lambda)$ различными. Таким образом, нулями минимального полинома $\psi(\lambda)$ будут все различные между собой характеристические числа матрицы A .

Из изложенного следует, что если

$$\Delta(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{n_1} (\lambda - \lambda_2)^{n_2} \dots (\lambda - \lambda_s)^{n_s}, \quad (10.27)$$

где

$$n_1 + n_2 + \dots + n_s = n, \quad (10.28)$$

то минимальный полином $\psi(\lambda)$ будет иметь вид

$$\psi(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{m_1} (\lambda - \lambda_2)^{m_2} \dots (\lambda - \lambda_s)^{m_s}, \quad (10.29)$$

где

$$1 \leq m_k \leq n_k \quad (k = 1, 2, \dots, s). \quad (10.30)$$

Степень m минимального полинома $\psi(\lambda)$ будет

$$m = m_1 + m_2 + \dots + m_s. \quad (10.31)$$

Двучлены $(\lambda - \lambda_k)^{m_k}$ ($k = 1, \dots, s$) являются старшими элементарными делителями матрицы $\lambda E - A$.

4. Функции от матрицы. Пусть дана квадратная матрица $A = [A_{jk}]$ ($n \times n$) и функция $f(\lambda)$ скалярного аргумента λ . Требуется определить, что следует понимать под $f(A)$, то есть требуется распространить функцию $f(\lambda)$ и на матричные значения аргумента.

Выше (29) через $\psi(\lambda)$ был обозначен минимальный полином матрицы A :

$$\psi(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{m_1} (\lambda - \lambda_2)^{m_2} \dots (\lambda - \lambda_s)^{m_s} \\ (m_1 + m_2 + \dots + m_s = m).$$

Пусть два полинома $g(\lambda)$ и $h(\lambda)$ таковы, что

$$g(A) = h(A). \quad (10.32)$$

Из соотношения (32) следует, что разность этих полиномов

$$d(\lambda) = g(\lambda) - h(\lambda) \quad (10.33)$$

является аннулирующим полиномом для матрицы A и, следовательно, делится на минимальный полином $\psi(\lambda)$ без остатка, то есть

$$\frac{d(\lambda)}{\psi(\lambda)} = \frac{g(\lambda) - h(\lambda)}{\psi(\lambda)} = S(\lambda), \quad (10.34)$$

где $S(\lambda)$ — полином от λ . Таким образом,

$$g(\lambda) = h(\lambda) + S(\lambda)\psi(\lambda). \quad (10.35)$$

Соотношение (35) записывают так:

$$g(\lambda) \equiv h(\lambda) \pmod{\psi(\lambda)} \quad (10.36)$$

и говорят, что $g(\lambda)$ сравнимо с $h(\lambda)$ по модулю $\psi(\lambda)$.

Из соотношения (34) следует, что

$$d(\lambda) = \psi(\lambda)S(\lambda), \quad (10.37)$$

и поэтому в соответствии с (29) будем иметь

$$d(\lambda_k) = 0, \quad d'(\lambda_k) = 0, \dots, \quad d^{(m_k-1)}(\lambda_k) = 0 \quad (k = 1, \dots, s) \quad (10.38)$$

или согласно (33)

$$g(\lambda_k) = h(\lambda_k), \quad g'(\lambda_k) = h'(\lambda_k), \dots, \quad g^{(m_k-1)}(\lambda_k) = h^{(m_k-1)}(\lambda_k) \quad (10.39) \\ (k = 1, \dots, s).$$

Здесь λ_k ($k = 1, \dots, s$) — нули минимального полинома $\psi(\lambda)$.

Пусть теперь дана некоторая функция $f(\lambda)$. Числа

$$f(\lambda_k), \quad f'(\lambda_k), \dots, \quad f^{(m_k-1)}(\lambda_k) \quad (10.40) \\ (k = 1, \dots, s; \quad m_1 + m_2 + \dots + m_s = m)$$

будем называть значениями функции $f(\lambda)$ на спектре матрицы A . Совокупность этих значений будем символически обозначать через $f(\Lambda_A)$.

Если для функции $f(\lambda)$ существуют, то есть имеют смысл, значения (40), то говорят, что функция $f(\lambda)$ определена на спектре матрицы A .

Из формул (39) следует, что полиномы $g(\lambda)$ и $h(\lambda)$ имеют одни и те же значения на спектре матрицы A , то есть

$$g(\Lambda_A) = h(\Lambda_A). \quad (10.41)$$

Для полиномов $g(\lambda)$ и $h(\lambda)$ имеет место и обратная теорема. Если даны соотношения (39), то из этого вытекает соотношение (36), а из соотношения (36) следует, что $g(A) = h(A)$.

Таким образом, значения полинома $g(\lambda)$ на спектре матрицы A вполне определяют матрицу $g(A)$, то есть все полиномы $g(\lambda)$, принимающие одни и те же значения на спектре матрицы A , имеют одно и то же матричное значение $g(A)$.

Определение функции $f(A)$ в общем случае подчиняется тому же требованию: значения функции $f(\lambda)$ на спектре матрицы A должны полностью определять $f(A)$, то есть все функции $f(\lambda)$, имеющие одни и те же значения на спектре матрицы A , должны иметь одно и то же матричное значение $f(A)$.

Из этого следует, что для определения $f(A)$ в общем случае достаточно подыскать такой полином $g(\lambda)$, который принимал бы те же значения на спектре матрицы A , что и функция $f(\lambda)$, и положить $f(A) = g(A)$.

Таким образом, приходим к следующему определению.

Определение 1. Если функция $f(\lambda)$ определена на спектре матрицы A , то

$$f(A) = g(A), \quad (10.42)$$

где $g(\lambda)$ — любой полином, принимающий на спектре матрицы A те же значения, что и $f(\lambda)$:

$$f(\Lambda_A) = g(\Lambda_A). \quad (10.43)$$

Как известно [17, 21], среди всех полиномов с комплексными коэффициентами, принимающих те же значения на спектре матрицы A , что и функция $f(\lambda)$, имеется один и только один полином $r(\lambda)$, степень которого меньше или равна $m - 1$. Этот полином называется *интерполяционным полиномом Лагранжа — Сильвестра для функции $f(\lambda)$ на спектре матрицы A* . Он однозначно определяется интерполяционными условиями

$$r(\lambda_k) = f(\lambda_k), \quad r'(\lambda_k) = f'(\lambda_k), \quad \dots, \quad r^{(m_k-1)}(\lambda_k) = f^{(m_k-1)}(\lambda_k) \quad (10.44)$$

$$(k = 1, 2, \dots, s; m_1 + m_2 + \dots + m_s = m).$$

Определению 1 можно теперь дать следующую формулировку.

Определение 1'. Пусть $f(\lambda)$ — функция, которая определена на спектре матрицы A , а $r(\lambda)$ — интерполяционный полином Лагранжа — Сильвестра, определяемый интерполяционными условиями (44). Тогда

$$f(A) = r(A). \quad (10.45)$$

5. Интерполяционный полином Лагранжа — Сильвестра. Интерполяционный полином $r(\lambda)$ Лагранжа — Сильвестра, удовлетворяющий условиям (44)

$$r(\lambda_k) = f(\lambda_k), \quad r'(\lambda_k) = f'(\lambda_k), \quad \dots, \quad r^{(m_k-1)}(\lambda_k) = f^{(m_k-1)}(\lambda_k) \\ (k = 1, 2, \dots, s; \quad m_1 + m_2 + \dots + m_s = m),$$

где согласно (29) λ_k ($k = 1, \dots, s$) — нули минимального полинома $\psi(\lambda)$ матрицы A :

$$\psi(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{m_1} (\lambda - \lambda_2)^{m_2} \dots (\lambda - \lambda_s)^{m_s} \quad (m_1 + m_2 + \dots + m_s = m),$$

имеет следующий вид:

$$r(\lambda) = \sum_{k=1}^s \sum_{\rho=0}^{m_k-1} \frac{1}{(m_k - \rho - 1)!} \left[\frac{\partial^{m_k - \rho - 1}}{\partial \lambda^{m_k - \rho - 1}} \frac{f(\lambda)}{\psi_k(\lambda)} \right]_{\lambda=\lambda_k} \frac{\psi(\lambda)}{(\lambda - \lambda_k)^{\rho+1}}, \quad (10.46)$$

где

$$\psi_k(\lambda) = \frac{\psi(\lambda)}{(\lambda - \lambda_k)^{m_k}}. \quad (10.47)$$

Как видно из (46) и (29), степень полинома $r(\lambda)$ не выше $m - 1$.

В случае, когда все нули минимального полинома $\psi(\lambda)$ являются простыми

$$m_1 = m_2 = \dots = m_s = 1,$$

интерполяционный полином $r(\lambda)$ в соответствии с (26) принимает вид

$$r(\lambda) = \sum_{k=1}^s \frac{f(\lambda_k)}{\psi_k(\lambda_k)} \frac{\psi(\lambda)}{\lambda - \lambda_k}. \quad (10.48)$$

Формула (48) представляет собой известную интерполяционную формулу Лагранжа, которая, как легко видеть, удовлетворяет условиям $r(\lambda_\mu) = f(\lambda_\mu)$ ($\mu = 1, \dots, s$).

Нетрудно также непосредственно проверить, что интерполяционный полином Лагранжа — Сильвестра, определяемый для общего случая выражением (46), удовлетворяет интерполяционным условиям (44). Для этого удобнее выражение (46) в соответствии с (47) переписать так:

$$r(\lambda) = \sum_{k=1}^s \sum_{\rho=0}^{m_k-1} \frac{1}{(m_k - \rho - 1)!} \left[\frac{\partial^{m_k - \rho - 1}}{\partial \lambda^{m_k - \rho - 1}} \frac{f(\lambda)}{\psi_k(\lambda)} \right]_{\lambda=\lambda_k} (\lambda - \lambda_k)^{m_k - \rho - 1} \psi_k(\lambda) \quad (10.49)$$

или

$$r(\lambda) = \sum_{k=1}^s \left\{ \left[\frac{f(\lambda)}{\psi_k(\lambda)} \right]_{\lambda=\lambda_k} + \left[\frac{\partial}{\partial \lambda} \frac{f(\lambda)}{\psi_k(\lambda)} \right]_{\lambda=\lambda_k} (\lambda - \lambda_k) + \right. \\ \left. + \frac{1}{2!} \left[\frac{\partial^2}{\partial \lambda^2} \frac{f(\lambda)}{\psi_k(\lambda)} \right]_{\lambda=\lambda_k} (\lambda - \lambda_k)^2 + \dots \right. \\ \left. \dots + \frac{1}{(m_k - 1)!} \left[\frac{\partial^{m_k - 1}}{\partial \lambda^{m_k - 1}} \frac{f(\lambda)}{\psi_k(\lambda)} \right]_{\lambda=\lambda_k} (\lambda - \lambda_k)^{m_k - 1} \right\} \psi_k(\lambda). \quad (10.50)$$

Так, например, из (50) найдем, что

$$\left(\frac{\partial r}{\partial \lambda} \right)_{\lambda=\lambda_\mu} = \left\{ \left[\frac{f(\lambda)}{\psi_\mu(\lambda)} \right]_{\lambda=\lambda_\mu} \psi'_\mu(\lambda) + \left[\frac{\partial}{\partial \lambda} \frac{f(\lambda)}{\psi_\mu(\lambda)} \right]_{\lambda=\lambda_\mu} \psi_\mu(\lambda) \right\}_{\lambda=\lambda_\mu},$$

так как остальные слагаемые, которые появятся при дифференцировании выражения (49), обращаются в нуль при $\lambda = \lambda_\mu$. Отсюда

$$\left(\frac{\partial r}{\partial \lambda} \right)_{\lambda=\lambda_\mu} = \left\{ \left[\frac{f(\lambda)}{\psi_\mu(\lambda)} \right]_{\lambda=\lambda_\mu} \psi'_\mu(\lambda) + \left[\frac{f'(\lambda) \psi_\mu(\lambda) - f(\lambda) \psi'_\mu(\lambda)}{[\psi_\mu(\lambda)]^2} \right]_{\lambda=\lambda_\mu} \psi_\mu(\lambda) \right\}_{\lambda=\lambda_\mu} = f'(\lambda_\mu),$$

что и соответствует условиям (44). Аналогично можно проверить выполнение остальных условий (44).

Единственность интерполяционного полинома Лагранжа — Сильвестра можно доказать следующим образом.

Пусть $f(\lambda)$ — скалярная аналитическая функция комплексного переменного λ , регулярная в некоторой области, заключающей все точки λ_k , являющиеся нулями полинома $\psi(\lambda)$, определяемого выражением (29):

$$\psi(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{m_1} (\lambda - \lambda_2)^{m_2} \dots (\lambda - \lambda_s)^{m_s} \quad (m_1 + m_2 + \dots + m_s = m).$$

Функция $\frac{f(\lambda)}{\psi(\lambda)}$ не имеет в рассматриваемой области других особых точек, кроме полюсов, и может быть представлена в виде

$$\frac{f(\lambda)}{\psi(\lambda)} = R(\lambda) + \sum_{k=1}^s G_k \left(\frac{1}{\lambda - \lambda_k} \right). \quad (10.51)$$

Здесь $R(\lambda)$ — функция, регулярная в рассматриваемой области, а $G_k(1/\lambda - \lambda_k)$ — главная часть разложения функции $f(\lambda)/\psi(\lambda)$.

в ряд Лорана в окрестности точки $\lambda = \lambda_k$. Функцию $G_k(1/\lambda - \lambda_k)$ можно представить в следующем виде:

$$G_k\left(\frac{1}{\lambda - \lambda_k}\right) = \sum_{\rho=0}^{m_k-1} \frac{H_{k+\rho}}{(\lambda - \lambda_k)^{\rho+1}} \quad (k = 1, \dots, s). \quad (10.52)$$

Если подставить это выражение в (51) и полученное соотношение умножить на $(\lambda - \lambda_k)^{m_k}$, то получим

$$\frac{f(\lambda)}{\psi_k(\lambda)} = R(\lambda)(\lambda - \lambda_k)^{m_k} + \sum_{k=1}^s \sum_{\rho=0}^{m_k-1} H_{k+\rho}(\lambda - \lambda_k)^{m_k - \rho - 1}, \quad (10.53)$$

где $\psi_k(\lambda)$ определяется выражением (47). Так как функция $R(\lambda)(\lambda - \lambda_k)^{m_k}$ регулярна в окрестности точки λ_k и обращается в эту точку в нуль вместе с производными до $(m_k - 1)$ -го порядка, то из (53) найдем, что

$$H_{k+\rho} = \frac{1}{(m_k - \rho - 1)!} \left[\frac{\partial^{m_k - \rho - 1}}{\partial \lambda^{m_k - \rho - 1}} \frac{f(\lambda)}{\psi_k(\lambda)} \right]_{\lambda = \lambda_k}. \quad (10.54)$$

Таким образом, выражение (53) принимает вид

$$\frac{f(\lambda)}{\psi(\lambda)} = R(\lambda) + \sum_{k=1}^s \sum_{\rho=0}^{m_k-1} \frac{1}{(m_k - \rho - 1)!} \left[\frac{\partial^{m_k - \rho - 1}}{\partial \lambda^{m_k - \rho - 1}} \frac{f(\lambda)}{\psi_k(\lambda)} \right]_{\lambda = \lambda_k} \frac{1}{(\lambda - \lambda_k)^{\rho+1}}. \quad (10.55)$$

Из соотношения (55) следует, что

$$f(\lambda) = R(\lambda)\psi(\lambda) + r(\lambda), \quad (10.56)$$

где $r(\lambda)$ — полином, который определен выражением (46). Так как функции $R(\lambda)$ и $\psi(\lambda)$ регулярны в рассматриваемой области, причем в точке $\lambda = \lambda_k$ ($k = 1, \dots, s$) $\psi(\lambda)$ обращается в нуль вместе с производными до $(m_k - 1)$ -го порядка, то $r(\lambda)$ и есть интерполяционный полином, удовлетворяющий интерполяционным условиям (44).

Заметим, что если A — матрица, элементы которой являются действительными числами, то и ее минимальный полином $\psi(\lambda)$, как видно из (25), будет иметь действительные коэффициенты. Поэтому нули $\psi(\lambda)$ будут либо действительными, либо комплексными попарно сопряженными числами.

Функция $f(\lambda)$ называется *действительной на спектре матрицы A* , если для действительного характеристического числа λ_i все ее значения на спектре $f(\lambda_i)$, $f'(\lambda_i)$, ... действительны, а для

двух комплексных сопряженных характеристических чисел λ_h и $\lambda_g = \bar{\lambda}_h$ соответствующие значения на спектре — комплексные сопряженные величины: $f(\lambda_g) = \overline{f(\lambda_h)}$, $f'(\lambda_g) = \overline{f'(\lambda_h)}$, ... В этом случае интерполяционный полином $r(\lambda)$ будет иметь действительные коэффициенты, и матрица $r(A)$, а следовательно и $f(A) = r(A)$, будет матрицей с действительными элементами.

6. Построение функции e^{At} . Функция e^{At} согласно (45) имеет вид

$$e^{At} = r(A), \quad (10.57)$$

где $r(\lambda)$ — соответствующий интерполяционный полином, определяемый выражением (46). Формула (57) в соответствии с (46) может быть представлена в следующем виде:

$$e^{At} = \sum_{k=0}^{m-1} \alpha_k(t) A^k, \quad (10.58)$$

где m — степень минимального полинома матрицы A .

Пусть матрица A имеет, например, следующий вид:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}. \quad (10.59)$$

Характеристическая матрица $\lambda E - A$ будет

$$\lambda E - A = \begin{bmatrix} \lambda - 1 & -1 & 0 \\ 0 & \lambda - 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda - 2 \end{bmatrix}.$$

Определитель характеристической матрицы равен

$$\Delta(\lambda) = (\lambda - 1)^2 (\lambda - 2).$$

Присоединенная матрица имеет вид

$$B(\lambda) = \text{adj}(\lambda E - A) = \begin{bmatrix} (\lambda - 1)(\lambda - 2) & \lambda - 2 & 0 \\ 0 & (\lambda - 1)(\lambda - 2) & 0 \\ 0 & 0 & (\lambda - 1)^2 \end{bmatrix}.$$

Общий наибольший делитель элементов присоединенной матрицы

$$D_2(\lambda) = 1.$$

Минимальный полином матрицы A согласно (25) будет следующим:

$$\psi(\lambda) = \frac{\Delta(\lambda)}{D_2(\lambda)} = (\lambda - 1)^2 (\lambda - 2). \quad (10.60)$$

Согласно (40) значения функции $f(\lambda) = e^{\lambda t}$ на спектре матрицы A будут

$$f(\lambda_1) = (e^{\lambda t})_{\lambda=1} = e^t, \quad f'(\lambda_1) = \left(\frac{\partial}{\partial \lambda} e^{\lambda t} \right)_{\lambda=1} = t e^t,$$

$$f(\lambda_2) = (e^{\lambda t})_{\lambda=2} = e^{2t}.$$

Интерполяционные условия согласно (44) имеют следующий вид:

$$r(\lambda_1) = e^t, \quad \left(\frac{\partial r}{\partial \lambda} \right)_{\lambda=\lambda_1} = te^t, \quad r(\lambda_2) = e^{2t},$$

где

$$\lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = 2.$$

Так как согласно (47) для рассматриваемой здесь матрицы A

$$\psi_1(\lambda) = \frac{\psi(\lambda)}{(\lambda-1)^2} = \lambda - 2,$$

$$\psi_2(\lambda) = \frac{\psi(\lambda)}{\lambda-2} = (\lambda-1)^2,$$

то интерполяционный полином Лагранжа—Сильвестра согласно (50) будет

$$r(\lambda) = \left(\frac{e^{\lambda t}}{\lambda-2} \right)_{\lambda=1} (\lambda-2) + \left(\frac{\partial}{\partial \lambda} \frac{e^{\lambda t}}{\lambda-2} \right)_{\lambda=1} (\lambda-1)(\lambda-2) + \left[\frac{e^{\lambda t}}{(\lambda-1)^2} \right]_{\lambda=2} (\lambda-1)^2$$

или

$$r(\lambda) = -e^t(\lambda-2) + (-te^t - e^t)(\lambda^2 - 3\lambda + 2) + e^{2t}(\lambda^2 - 2\lambda + 1).$$

Это выражение можно переписать так:

$$r(\lambda) = \alpha_0(t) + \alpha_1(t)\lambda + \alpha_2(t)\lambda^2, \quad (10.61)$$

где

$$\alpha_0(t) = -2te^t + e^{2t},$$

$$\alpha_1(t) = 3te^t + 2e^t - 2e^{2t},$$

$$\alpha_2(t) = -te^t - e^t + e^{2t}.$$

Следовательно, для рассматриваемой здесь (59) матрицы A , учитывая, что $A^0 = E$ (где E — единичная матрица), будем иметь

$$e^{At} = \alpha_0(t)E + \alpha_1(t)A + \alpha_2(t)A^2. \quad (10.62)$$

Покажем теперь, что входящие в выражение (58) функции $\alpha_k(t)$ ($k = 0, 1, \dots, m-1$) *линейно независимы*. Рассмотрим сначала случай, когда все характеристические числа матрицы A — *простые*. В этом случае формула (58) принимает вид

$$e^{At} = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k(t) A^k. \quad (10.63)$$

Согласно (44) для функции $f(\lambda) = e^{\lambda t}$, которая определена на спектре матрицы A , в случае, когда все характеристические числа матрицы A простые, интерполяционные условия будут

$$r(\lambda_\rho) = f(\lambda_\rho) = e^{\lambda_\rho t} \quad (\rho = 1, \dots, n).$$

Так как согласно (45) по определению функции от матрицы

$$f(A) = e^{At} = r(A),$$

Заметим еще, что выражение (61) для интерполяционного полинома $r(\lambda)$ можно для матрицы (59) переписать так:

$$r(\lambda) = e^t \varphi_{11}(\lambda) + te^t \varphi_{12}(\lambda) + e^{2t} \varphi_{21}(\lambda) \quad (10.65)$$

где

$$\left. \begin{aligned} \varphi_{11}(\lambda) &= -\lambda^2 + 2\lambda, & \varphi_{12}(\lambda) &= -\lambda^2 + 3\lambda - 2, \\ \varphi_{21}(\lambda) &= \lambda^2 - 2\lambda + 1. \end{aligned} \right\} \quad (10.66)$$

При этом согласно (57) матрица e^{At} будет представлена так:

$$e^{At} = e^t Z_{11} + te^t Z_{12} + e^{2t} Z_{21}, \quad (10.67)$$

где

$$Z_{kj} = \varphi_{kj}(A). \quad (10.68)$$

Нетрудно видеть, что если вместо $e^{\lambda t}$ взять другую функцию $f(\lambda)$, то в соответствии с определением (45) функции от матрицы получим, что для матрицы A , определяемой согласно (59), функция $f(A)$ будет иметь следующий вид:

$$f(A) = f(\lambda_1) Z_{11} + f'(\lambda_1) Z_{12} + f(\lambda_2) Z_{21}. \quad (10.69)$$

Здесь $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$ суть нули минимального полинома $\psi(\lambda)$, определяемого выражением (60), кратности которых соответственно равны $m_1 = 2$, $m_2 = 1$.

7. Компоненты матрицы A . Если в выражении (49) интерполяционного полинома Лагранжа — Сильвестра $r(\lambda)$ объединить члены, содержащие одно и то же значение функции $f(\lambda)$ или какой-либо ее производной, то полином $r(\lambda)$ примет вид

$$r(\lambda) = \sum_{k=1}^s [f(\lambda_k) \varphi_{k1}(\lambda) + f'(\lambda_k) \varphi_{k2}(\lambda) + \dots + f^{(m_k-1)}(\lambda_k) \varphi_{km_k}(\lambda)]. \quad (10.70)$$

Здесь $\varphi_{kj}(\lambda)$ ($k = 1, \dots, s$; $j = 1, \dots, m_k$) — полиномы от λ с постоянными коэффициентами; степень этих полиномов не выше чем $m - 1$, где m — степень минимального полинома $\psi(\lambda)$ матрицы A .

Из формулы (45) в соответствии с (70) получим следующее выражение для функции $f(A)$:

$$f(A) = \sum_{k=1}^s [f(\lambda_k) Z_{k1} + f'(\lambda_k) Z_{k2} + \dots + f^{(m_k-1)}(\lambda_k) Z_{km_k}], \quad (10.71)$$

где

$$Z_{kj} = \varphi_{kj}(A) \quad (k = 1, \dots, s; j = 1, \dots, m_k). \quad (10.72)$$

Матрицы Z_{kj} не зависят от выбора функции $f(\lambda)$, а определяются лишь видом матрицы A . В правую часть выражения (71) входят значения функции $f(\lambda)$ на спектре матрицы A . Матрицы Z_{kj} ($k = 1, \dots, s$; $j = 1, \dots, m_k$) называются составляющими матрицами или компонентами матрицы A .

Можно показать, что компоненты Z_{kj} матрицы A линейно-независимы. Действительно, предположим, что

$$\sum_{k=1}^s \sum_{j=1}^{m_k} c_{kj} Z_{kj} = \sum_{k=1}^s \sum_{j=1}^{m_k} c_{kj} \Phi_{kj}(A) = 0. \quad (10.73)$$

Определим интерполяционный полином $r(\lambda)$ из m условий

$$r^{(j-1)}(\lambda_k) = c_{kj} \quad (k = 1, \dots, s; j = 1, \dots, m_k). \quad (10.74)$$

Согласно (70) будем иметь

$$r(\lambda) = \sum_{k=1}^s \sum_{j=1}^{m_k} c_{kj} \Phi_{kj}(\lambda). \quad (10.75)$$

Из выражений (75) и (73) следует, что

$$r(A) = 0. \quad (10.76)$$

Так как степень интерполяционного полинома $r(\lambda)$, определяемого формулой (75), ниже степени минимального полинома $\psi(\lambda)$, то из соотношения (76) следует, что

$$r(\lambda) \equiv 0. \quad (10.77)$$

Из тождества (77) и соотношений (74) следует, что

$$c_{kj} = 0 \quad (k = 1, \dots, s; j = 1, \dots, m_k). \quad (10.78)$$

Таким образом, соотношение (73) может иметь место лишь при выполнении условий (78), и, следовательно, матрицы Z_{kj} линейно-независимы.

Аналогично можно доказать, что ни одна из матриц Z_{kj} не равна нулю. Действительно, если бы какая-либо из матриц Z_{kj} была равна нулю, то, поскольку степень соответствующего ей полинома $\Phi_{kj}(\lambda)$ ниже степени m минимального полинома, имело бы место тождество

$$\Phi_{kj}(\lambda) \equiv 0. \quad (10.79)$$

Последнее, однако, невозможно, так как $\Phi_{kj}(\lambda)$ представляет собой интерполяционный полином Лагранжа — Сильвестра для функции, у которой все значения на спектре матрицы A равны нулю, за исключением значения $f^{(j-1)}(\lambda_k)$, равного единице.

Заметим, что в рассмотренном в п. 6 примере функции $\Phi_{kj}(\lambda)$ определены выражениями (66).

8. Общие формулы, определяющие компоненты Z_{kj} матрицы A . Выше было отмечено, что матрицы Z_{kj} определяются лишь видом матрицы A и не зависят от выбора функции $f(\lambda)$. Укажем теперь общие формулы, которыми определяются матрицы Z_{kj} .

Рассмотрим функцию

$$f(\mu) = \frac{1}{\lambda - \mu}, \quad (10.80)$$

где λ — некоторый параметр. Из выражения (80) найдем, что

$$\frac{\partial}{\partial \mu} f(\mu) = \frac{1}{(\lambda - \mu)^2}, \quad \frac{\partial^2}{\partial \mu^2} f(\mu) = \frac{2!}{(\lambda - \mu)^3}, \quad \dots, \quad \frac{\partial^s}{\partial \mu^s} f(\mu) = \frac{s!}{(\lambda - \mu)^{s+1}}, \quad \dots \quad (10.81)$$

Согласно (80) $f(\mu)(\lambda - \mu) = 1$. Так как $f(\mu)$ и $r(\mu)$, где $r(\mu)$ — интерполяционный полином Лагранжа — Сильвестра, совпадают на спектре матрицы A , то на этом спектре

$$r(\mu)(\lambda - \mu) = 1. \quad (10.82)$$

При замене в выражении (82) скалярного аргумента μ матрицей A получим следующее матричное соотношение:

$$r(A)(\lambda E - A) = E, \quad (10.83)$$

откуда следует, что

$$r(A) = (\lambda E - A)^{-1}. \quad (10.84)$$

В силу соотношения (45) отсюда следует, что функции $f(\mu)$, заданной выражением (80), соответствует

$$f(A) = (\lambda E - A)^{-1}. \quad (10.85)$$

Из выражений (70), (80) и (81) видно, что интерполяционный полином $r(\mu)$, определяемый значениями $f(\mu)$ на спектре матрицы A , будет следующим:

$$r(\mu) = \sum_{k=1}^s \left[\frac{\varphi_{k1}(\mu)}{\lambda - \lambda_k} + \frac{\varphi_{k2}(\mu)}{(\lambda - \lambda_k)^2} + \frac{2! \varphi_{k3}(\mu)}{(\lambda - \lambda_k)^3} + \dots + \frac{(m_k - 1)! \varphi_{km_k}(\mu)}{(\lambda - \lambda_k)^{m_k}} \right]. \quad (10.86)$$

Отсюда, заменяя скалярный аргумент μ матрицей A , получим

$$f(A) = \sum_{k=1}^s \left[\frac{Z_{k1}}{\lambda - \lambda_k} + \frac{Z_{k2}}{(\lambda - \lambda_k)^2} + \frac{2! Z_{k3}}{(\lambda - \lambda_k)^3} + \dots + \frac{(m_k - 1)! Z_{km_k}}{(\lambda - \lambda_k)^{m_k}} \right]. \quad (10.87)$$

Согласно (85), (8) и (19)

$$f(A) = (\lambda E - A)^{-1} = \frac{B(\lambda)}{\Delta(\lambda)} = \frac{C(\lambda)}{\Psi(\lambda)}. \quad (10.88)$$

Здесь $B(\lambda)$ — присоединенная матрица для матрицы $\lambda E - A$, $\Delta(\lambda)$ — определитель матрицы $\lambda E - A$. Матрица $C(\lambda)$ называется

приведенной присоединенной матрицей и определяется выражением (14), а $\psi(\lambda)$ — минимальный полином матрицы A , который определяется выражением (16).

Соотношение (87) можно теперь переписать так:

$$(\lambda E - A)^{-1} = \frac{C(\lambda)}{\psi(\lambda)} = \sum_{k=1}^s \left[\frac{Z_{k1}}{\lambda - \lambda_k} + \frac{Z_{k2}}{(\lambda - \lambda_k)^2} + \frac{2!Z_{k3}}{(\lambda - \lambda_k)^3} + \dots + \frac{(m_k - 1)! Z_{km_k}}{(\lambda - \lambda_k)^{m_k}} \right]. \quad (10.89)$$

Так как согласно (29)

$$\psi(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{m_1} (\lambda - \lambda_2)^{m_2} \dots (\lambda - \lambda_s)^{m_s} \\ (m_1 + m_2 + \dots + m_s = m),$$

то выражение (89) представляет собой разложение дробно-рациональной функции $\frac{C(\lambda)}{\psi(\lambda)}$ на сумму элементарных дробей, причем коэффициентами этого разложения являются матрицы

$$(j-1)! Z_{kj} \quad (k = 1, \dots, s; j = 1, \dots, m_k).$$

Сравнивая выражения (89) и (55), найдем, что матрицы Z_{kj} будут иметь следующий вид:

$$Z_{kj} = \frac{1}{(j-1)! (m_k - j)!} \left[\frac{\partial^{m_k - j}}{\partial \lambda^{m_k - j}} \frac{C(\lambda)}{\psi_k(\lambda)} \right]_{\lambda = \lambda_k} \quad (10.90) \\ (k = 1, \dots, s; j = 1, \dots, m_k).$$

9. Представление функций от матриц рядами. Обратимся вновь к матрице A , минимальный полином которой $\psi(\lambda)$ имеет вид (29)

$$\psi(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{m_1} (\lambda - \lambda_2)^{m_2} \dots (\lambda - \lambda_s)^{m_s} \quad (m_1 + m_2 + \dots + m_s = m),$$

и предположим, что функция $f(\lambda)$ и последовательность функций $f_1(\lambda), \dots, f_p(\lambda), \dots$ определены на спектре матрицы A .

Определение 1. Последовательность функций $f_p(\lambda)$ при $p \rightarrow \infty$ стремится к некоторому пределу на спектре матрицы A , если существуют пределы

$$\lim_{p \rightarrow \infty} f_p(\lambda_k), \quad \lim_{p \rightarrow \infty} f'_p(\lambda_k), \quad \dots, \quad \lim_{p \rightarrow \infty} f_p^{(m_k - 1)}(\lambda_k) \quad (k = 1, \dots, s).$$

Определение 2. Последовательность функций $f_p(\lambda)$ стремится при $p \rightarrow \infty$ к функции $f(\lambda)$ на спектре матрицы A , что записывается так:

$$\lim_{p \rightarrow \infty} f_p(\Lambda_A) = f(\Lambda_A), \quad (10.91)$$

если

$$\lim_{p \rightarrow \infty} f_p(\lambda_k) = f(\lambda_k), \quad \lim_{p \rightarrow \infty} f'_p(\lambda_k) = f'(\lambda_k), \dots$$

$$\dots, \quad \lim_{p \rightarrow \infty} f_p^{(m_k-1)}(\lambda_k) = f^{(m_k-1)}(\lambda_k) \quad (k = 1, \dots, s). \quad (10.92)$$

Формула (71)

$$f(A) = \sum_{k=1}^s [f(\lambda_k) Z_{k1} + f'(\lambda_k) Z_{k2} + \dots + f^{(m_k-1)}(\lambda_k) Z_{km_k}]$$

выражает функцию $f(A)$ через значения $f(\lambda)$ на спектре матрицы A . Если рассматривать матрицу как вектор в пространстве n^2 измерений \mathbb{R}^{n^2} , то из формулы (71) в силу линейной независимости матриц Z_{kj} следует, что все $f(A)$ (при заданном A) образует m -мерное подпространство в \mathbb{R}^{n^2} с базисом Z_{kj} ($k = 1, \dots, s; j = 1, \dots, m_k; m_1 + m_2 + \dots + m_s = m$). В этом базисе «вектор» $f(A)$ имеет своими координатами m значений функции $f(\lambda)$ на спектре матрицы A .

Указанная здесь геометрическая интерпретация облегчает доказательство приведенных ниже теорем.

Теорема 1. *Для того чтобы последовательность матриц $f_p(A)$ при $p \rightarrow \infty$ стремилась к некоторому пределу, необходимо и достаточно, чтобы последовательность $f_p(\lambda)$ при $p \rightarrow \infty$ на спектре матрицы A стремилась к пределу, т. е. пределы $\lim_{p \rightarrow \infty} f_p(A)$, $\lim_{p \rightarrow \infty} f_p(\Lambda_A)$ всегда существуют одновременно. При этом равенство*

$$\lim_{p \rightarrow \infty} f_p(\Lambda_A) = f(\Lambda_A) \quad (10.93)$$

влечет за собой равенство

$$\lim_{p \rightarrow \infty} f_p(A) = f(A) \quad (10.94)$$

и наоборот.

Доказательство. Если значения $f_p(\lambda)$ на спектре матрицы A при $p \rightarrow \infty$ стремятся к предельным значениям, то из формулы

$$f_p(A) = \sum_{k=1}^s [f_p(\lambda_k) Z_{k1} + f'_p(\lambda_k) Z_{k2} + \dots + f_p^{(m_k-1)}(\lambda_k) Z_{km_k}] \quad (10.95)$$

следует существование предела $\lim_{p \rightarrow \infty} f_p(A)$. Из формул (95) и (71) можно заключить, что если имеет место соотношение (93), то будет справедливым и соотношение (94).

Перейдем к доказательству обратного утверждения. Пусть существует $\lim_{p \rightarrow \infty} f_p(A)$. Матрица $f_p(A)$ является матрицей типа

$n \times n$, т. е. содержит n^2 элементов, причем $n \geq m$, так как m — степень минимального полинома матрицы A . Матричное соотношение (95) эквивалентно n^2 скалярным соотношениям. Выберем из этих соотношений m соотношений, которые будем рассматривать как систему из m линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных

$$f_p(\lambda_k), f'_p(\lambda_k), \dots, f_p^{(m_k-1)}(\lambda_k) \\ (k = 1, \dots, s; m_1 + m_2 + \dots + m_s = m).$$

Так как матрицы Z_{kj} линейно-независимы, то среди указанных n^2 соотношений найдется m таких соотношений, у которых определитель из коэффициентов при $f_p(\lambda_k), f'_p(\lambda_k), \dots, f_p^{(m_k-1)}(\lambda_k)$ будет отличен от нуля. Таким образом, можно выразить значения $f_p(\lambda_k), f'_p(\lambda_k), \dots, f_p^{(m_k-1)}(\lambda_k)$ ($k = 1, \dots, s$) в виде линейных форм от m элементов матрицы $f_p(A)$. Отсюда следует существование предела $\lim_{p \rightarrow \infty} f_p(\Lambda_A)$, и, следовательно, если имеет место соотношение (94), то будет справедливым и соотношение (93).

Из доказанной теоремы вытекает, что если последовательность полиномов $g_p(\lambda)$ ($p = 1, 2, \dots$) стремится к функции $f(\lambda)$ на спектре матрицы A , то

$$\lim_{p \rightarrow \infty} g_p(A) = f(A).$$

Определение 3. Ряд $\sum_{p=0}^{\infty} u_p(\lambda)$ сходится на спектре матрицы A к функции $f(\lambda)$, что записывается так:

$$f(\Lambda_A) = \sum_{p=0}^{\infty} u_p(\Lambda_A), \quad (10.96)$$

если все фигурирующие здесь функции определены на спектре матрицы A и имеют место равенства

$$f(\lambda_k) = \sum_{p=0}^{\infty} u_p(\lambda_k), f'(\lambda_k) = \sum_{p=0}^{\infty} u'_p(\lambda_k), \dots, f^{(m_k-1)}(\lambda_k) = \sum_{p=0}^{\infty} u_p^{(m_k-1)}(\lambda_k) \\ (k = 1, \dots, s),$$

причем в правых частях этих равенств стоят сходящиеся ряды.

Если обозначить

$$s_p(\lambda) = \sum_{q=0}^p u_q(\lambda) \quad (p = 0, 1, 2, \dots), \quad (10.97)$$

то соотношение (96) можно переписать так:

$$f(\Lambda_A) = \lim_{p \rightarrow \infty} s_p(\Lambda_A). \quad (10.98)$$

Доказанной выше теореме 1 можно теперь дать другую эквивалентную формулировку.

Теорема 1'. Для того чтобы ряд $\sum_{p=0}^{\infty} u_p(A)$ сходиллся к некоторой матрице, необходимо и достаточно, чтобы ряд $\sum_{p=0}^{\infty} u_p(\lambda)$ сходиллся на спектре матрицы A . При этом из равенства

$$f(\Lambda_A) = \sum_{p=0}^{\infty} u_p(\Lambda_A)$$

следует равенство

$$f(A) = \sum_{p=0}^{\infty} u_p(A)$$

и наоборот.

Рассмотрим теперь *степенной ряд* с кругом сходимости $|\lambda - \lambda_0| < R$ и суммой $f(\lambda)$:

$$f(\lambda) = \sum_{p=0}^{\infty} \alpha_p (\lambda - \lambda_0)^p \quad (|\lambda - \lambda_0| < R). \quad (10.99)$$

Так как степенной ряд можно почленно дифференцировать любое число раз внутри круга сходимости, то ряд (99) сходится на спектре любой матрицы, характеристические числа которой расположены внутри круга сходимости. Отсюда вытекает следующая теорема.

Теорема 2. Если функция $f(\lambda)$ разлагается в степенной ряд в круге $|\lambda - \lambda_0| < R$:

$$f(\lambda) = \sum_{p=0}^{\infty} \alpha_p (\lambda - \lambda_0)^p, \quad (10.100)$$

то это разложение сохраняет силу, если скалярный аргумент λ заменить любой матрицей A , характеристические числа которой лежат внутри круга сходимости.

Из доказанной теоремы вытекают, например, следующие разложения:

$$\left. \begin{aligned} e^A &= \sum_{p=0}^{\infty} \frac{A^p}{p!}, & \cos A &= \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p}{(2p)!} A^{2p}, \\ & & \sin A &= \sum_{p=0}^{\infty} (-1)^p \frac{A^{2p+1}}{(2p+1)!}, \\ \operatorname{ch} A &= \sum_{p=0}^{\infty} \frac{A^{2p}}{(2p)!}, & \operatorname{sh} A &= \sum_{p=0}^{\infty} \frac{A^{2p+1}}{(2p+1)!}, \end{aligned} \right\} \quad (10.101)$$

$$(E - A)^{-1} = \sum_{p=0}^{\infty} A^p \quad (|\lambda_k| < 1; k = 1, \dots, s). \quad (10.102)$$

Разложения (101) имеют место для любой матрицы A , так как разложения соответствующих функций от скалярного аргумента λ имеют место при $|\lambda| < \infty$.

10. Распространение на функции от матриц интегральной формулы Коши для аналитических функций. Рассмотрим в плоскости комплексного переменного λ область, ограниченную замкнутым контуром Γ и содержащую характеристические числа $\lambda_1, \dots, \lambda_s$ матрицы A . Пусть $f(\lambda)$ — произвольная аналитическая функция, регулярная в этой области, включая границу Γ . Согласно формулам Коши

$$\begin{aligned} f(\lambda_k) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(\lambda)}{\lambda - \lambda_k} d\lambda, & f'(\lambda_k) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(\lambda)}{(\lambda - \lambda_k)^2} d\lambda, \dots, & f^{(m_k-1)}(\lambda_k) &= \\ &= \frac{(m_k-1)!}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(\lambda)}{(\lambda - \lambda_k)^{m_k}} d\lambda \quad (k = 1, \dots, s). \end{aligned} \quad (10.103)$$

Умножая обе части матричного соотношения (89) на $\frac{f(\lambda)}{2\pi i}$ и интегрируя по замкнутому контуру Γ , получим

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} (\lambda E - A)^{-1} f(\lambda) d\lambda &= \\ &= \sum_{k=1}^s \left[f(\lambda_k) Z_{k1} + f'(\lambda_k) Z_{k2} + \dots + f^{(m_k-1)}(\lambda_k) Z_{km_k} \right]. \end{aligned} \quad (10.104)$$

Учитывая формулу (71), можно переписать соотношение (104) так:

$$f(A) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} (\lambda E - A)^{-1} f(\lambda) d\lambda. \quad (10.105)$$

Формулу (105) можно принять за определение *аналитической функции от матрицы*.

11. Некоторые свойства функций от матриц.

Теорема 1. Пусть $G(u_1, u_2, \dots, u_l)$ — полином относительно u_1, u_2, \dots, u_l ; $f_1(\lambda), f_2(\lambda), \dots, f_l(\lambda)$ — функции от λ , которые определены на спектре матрицы A , а

$$g(\lambda) = G[f_1(\lambda), f_2(\lambda), \dots, f_l(\lambda)]. \quad (10.106)$$

Тогда, если на спектре матрицы A функция $g(\lambda)$ обращается в нуль

$$g(\Lambda_A) = 0, \quad (10.107)$$

то будет иметь место следующее соотношение:

$$G[f_1(A), f_2(A), \dots, f_l(A)] = 0. \quad (10.108)$$

Доказательство. Обозначим через $r_1(\lambda), r_2(\lambda), \dots, r_l(\lambda)$ интерполяционные полиномы Лагранжа — Сильвестра для $f_1(\lambda), f_2(\lambda), \dots, f_l(\lambda)$, и пусть

$$h(\lambda) = G[r_1(\lambda), r_2(\lambda), \dots, r_l(\lambda)]. \quad (10.109)$$

Так как на спектре матрицы A значения $g(\lambda)$ и $h(\lambda)$ совпадают, то из соотношения (107) следует, что

$$h(\Lambda_A) = 0. \quad (10.110)$$

Но тогда из формулы (71) следует, что

$$h(A) = 0 \quad (10.111)$$

или

$$G[r_1(A), r_2(A), \dots, r_l(A)] = G[f_1(A), f_2(A), \dots, f_l(A)] = 0, \quad (10.112)$$

что и требовалось доказать.

В качестве следствия из теоремы 1 рассмотрим следующие примеры.

1°. Пусть

$$\begin{aligned} G(u_1, u_2) &= u_1^2 + u_2^2 - 1, \\ f_1(\lambda) &= \sin \lambda, \quad f_2(\lambda) = \cos \lambda. \end{aligned}$$

Тогда

$$g(\lambda) = G[f_1(\lambda), f_2(\lambda)] = \sin^2 \lambda + \cos^2 \lambda - 1.$$

Так как на спектре любой матрицы A для данной функции имеет место соотношение

$$g(\Lambda_A) = 0,$$

то согласно (112)

$$G[f_1(A), f_2(A)] = \sin^2 A + \cos^2 A - E = 0$$

или

$$\sin^2 A + \cos^2 A = E. \quad (10.113)$$

2°. Пусть

$$G(u_1, u_2) = u_1 u_2 - 1, \\ f_1(\lambda) = e^\lambda, \quad f_2(\lambda) = e^{-\lambda}.$$

Тогда

$$g(\lambda) = G[f_1(\lambda), f_2(\lambda)] = e^\lambda e^{-\lambda} - 1.$$

На спектре *любой* матрицы A для данной функции $g(\lambda)$ будем иметь

$$g(\Lambda_A) = 0.$$

Поэтому согласно (112)

$$G[f_1(A), f_2(A)] = e^A e^{-A} - E = 0$$

или

$$e^A e^{-A} = E. \quad (10.114)$$

Из соотношения (114) следует, что обратная матрица $(e^A)^{-1}$ имеет вид

$$(e^A)^{-1} = e^{-A}. \quad (10.115)$$

3°. Пусть

$$G(u_1, u_2, u_3) = u_1 u_2 - u_3, \\ f_1(\lambda) = e^{\lambda t_1}, \quad f_2(\lambda) = e^{\lambda t_2}, \quad f_3(\lambda) = e^{\lambda(t_1+t_2)}.$$

Тогда

$$g(\lambda) = G[f_1(\lambda), f_2(\lambda), f_3(\lambda)] = e^{\lambda t_1} e^{\lambda t_2} - e^{\lambda(t_1+t_2)}.$$

На спектре *любой* матрицы A для данной функции $g(\lambda)$ имеет место соотношение

$$g(\Lambda_A) = 0.$$

Согласно (112) отсюда следует, что

$$e^{A t_1} e^{A t_2} - e^{A(t_1+t_2)} = 0$$

или

$$e^{A t_1} e^{A t_2} = e^{A(t_1+t_2)}. \quad (10.116)$$

4°. Пусть

$$G(u_1, u_2, u_3) = u_1 + i u_2 - u_3, \\ f_1(\lambda) = \cos \lambda, \quad f_2(\lambda) = \sin \lambda, \quad f_3(\lambda) = e^{i\lambda}.$$

Тогда

$$g(\lambda) = G[f_1(\lambda), f_2(\lambda), f_3(\lambda)] = \cos \lambda + i \sin \lambda - e^{i\lambda}.$$

На спектре любой матрицы A для данной функции $g(\lambda)$ имеет место соотношение

$$g(\Lambda_A) = 0.$$

Согласно (112) отсюда следует, что

$$\cos A + i \sin A - e^{iA} = 0$$

или

$$e^{iA} = \cos A + i \sin A. \quad (10.117)$$

Таким образом, теорема 1 указывает условия (107), при которых тождества, связывающие функции от скалярного переменного λ , могут быть распространены на матричные значения аргумента.

Теорему 1 можно усилить и доказать следующую теорему ([21], стр. 121).

Теорема 2. Пусть

$$g(\lambda) \equiv G[f_1(\lambda), f_2(\lambda), \dots, f_l(\lambda)],$$

где функции $f_1(\lambda), f_2(\lambda), \dots, f_l(\lambda)$ определены на спектре матрицы A , а функция $G(u_1, u_2, \dots, u_l)$ есть результат последовательного применения к величинам u_1, u_2, \dots, u_l операций сложения, умножения, умножения на число и замены величины произвольной функцией от нее. Тогда, если на спектре матрицы A функция $g(\lambda)$ обращается в нуль:

$$g(\Lambda_A) = 0,$$

то будет иметь место следующее соотношение:

$$G[f_1(A), f_2(A), \dots, f_l(A)] = 0.$$

12. Интегрирование систем линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами при помощи функций от матриц. Найдем решение системы линейных дифференциальных уравнений

$$\frac{dx_j}{dt} = \sum_{k=1}^n A_{jk} x_k \quad (j = 1, \dots, n) \quad (10.118)$$

при начальных условиях

$$x_j = x_j(0) \quad (j = 1, \dots, n) \quad \text{при} \quad t = 0. \quad (10.119)$$

Здесь A_{jk} ($j, k = 1, \dots, n$) — некоторые постоянные (вообще комплексные) величины.

Введем матрицы

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & \dots & A_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ A_{n1} & \dots & A_{nn} \end{bmatrix}, \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ \cdot \\ x_n \end{bmatrix}. \quad (10.120)$$

Так как при дифференцировании (интегрировании) матриц дифференцируется (интегрируется) каждый элемент матрицы, то систему скалярных дифференциальных уравнений (118) можно заменить векторным дифференциальным уравнением

$$\dot{x} = Ax. \quad (10.121)$$

Начальные условия (119) можно записать так:

$$x = x(0) \quad \text{при} \quad t = 0. \quad (10.122)$$

Искомый вектор $x(t)$ представим в виде ряда Маклорена по степеням t :

$$x(t) = x(0) + \dot{x}(0)t + \ddot{x}(0)\frac{t^2}{2!} + \dots + x^{(n)}(0)\frac{t^n}{n!} + \dots \quad (10.123)$$

Дифференцируя левую и правую части уравнения (121), найдем

$$\ddot{x} = A\dot{x} = A^2x, \quad \dddot{x} = A^2\dot{x} = A^3x, \quad \dots, \quad x^{(n)} = A^n x, \quad \dots \quad (10.124)$$

Соотношения (121) и (124) имеют место для любого значения аргумента t . При $t = 0$ они принимают вид

$$\dot{x}(0) = Ax(0), \quad \ddot{x}(0) = A^2x(0), \quad \dots, \quad x^{(n)}(0) = A^n x(0), \quad \dots, \quad (10.125)$$

Ряд (123), таким образом, принимает вид

$$\begin{aligned} x(t) &= x(0) + tAx(0) + \frac{t^2}{2!}A^2x(0) + \dots + \frac{t^n}{n!}A^n x(0) + \dots = \\ &= \left(E + At + \frac{A^2t^2}{2!} + \dots + \frac{A^nt^n}{n!} + \dots \right) x(0), \quad (10.126) \end{aligned}$$

то есть согласно (101)

$$x(t) = e^{At}x(0). \quad (10.127)$$

Так как

$$\frac{d}{dt} e^{At} = \frac{d}{dt} \left(E + At + \frac{A^2t^2}{2!} + \dots \right) = A + A^2t + \frac{A^3t^2}{2!} + \dots = Ae^{At}, \quad (10.128)$$

то непосредственной подстановкой в дифференциальное уравнение (121) убеждаемся, что выражение (127) является решением этого уравнения, удовлетворяющим начальным условиям (122).

Так как из (127) следует, что

$$x(t_0) = e^{At_0}x(0),$$

а согласно (116)

$$e^{At}x(0) = e^{A(t-t_0)}e^{At_0}x(0) = e^{A(t-t_0)}x(t_0),$$

то можно преобразовать выражение (127) к виду

$$x(t) = e^{A(t-t_0)}x(t_0). \quad (10.129)$$

Выражение (129) представляет собой решение векторного дифференциального уравнения (121), удовлетворяющее начальным условиям

$$x = x(t_0) \quad \text{при} \quad t = t_0. \quad (10.130)$$

Обратимся теперь к выражению (71). Полагая

$$f(\lambda) = e^{\lambda t}, \quad (10.131)$$

будем иметь

$$\begin{aligned} f(\lambda_k) &= e^{\lambda_k t}, \quad f'(\lambda_k) = \left(\frac{\partial}{\partial \lambda} e^{\lambda t} \right)_{\lambda=\lambda_k} = t e^{\lambda_k t}, \dots, f^{(m_k-1)}(\lambda_k) = \\ &= \left(\frac{\partial^{m_k-1}}{\partial \lambda^{m_k-1}} e^{\lambda t} \right)_{\lambda=\lambda_k} = t^{m_k-1} e^{\lambda_k t}. \end{aligned} \quad (10.132)$$

В соответствии с (71), (131) и (132) функция e^{At} может быть записана так:

$$e^{At} = \sum_{k=1}^s (Z_{k1} + Z_{k2}t + \dots + Z_{km_k}t^{m_k-1}) e^{\lambda_k t}, \quad (10.133)$$

и решение (127) может быть приведено к форме, содержащей компоненты матрицы A .

Учитывая соотношение (133), нетрудно убедиться, что полученное применением функций от матриц решение системы дифференциальных уравнений (118) совпадает (как это и должно быть) с полученным в § 4 решением (4.124). (В § 4 рассмотрена система более общего вида.) Это соответствие в какой-то мере мотивирует принятое в теории матриц определение (45) функции от матрицы.

Рассмотрим теперь систему неоднородных линейных уравнений

$$\frac{dx_j}{dt} = \sum_{k=1}^n A_{jk}x_k + f_j(t) \quad (j = 1, \dots, n). \quad (10.134)$$

Систему скалярных дифференциальных уравнений (134) можно заменить векторным дифференциальным уравнением

$$\dot{x} = Ax + f(t), \quad (10.135)$$

где через $f(t)$ обозначен вектор

$$f(t) = \begin{bmatrix} f_1(t) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ f_n(t) \end{bmatrix}.$$

Решение уравнения (135), удовлетворяющее начальным условиям (130) будем искать в виде

$$x(t) = e^{At} z(t), \quad (10.136)$$

где

$$z(t) = \begin{bmatrix} z_1(t) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ z_n(t) \end{bmatrix}. \quad (10.137)$$

Элементы вектора $z(t)$ подлежат определению.

Подставляя выражение (136) в уравнение (135), получим

$$e^{At} \dot{z} = f(t)$$

или

$$\dot{z} = e^{-At} f(t). \quad (10.138)$$

Отсюда

$$z(t) = C + \int_{t_0}^t e^{-A\tau} f(\tau) d\tau, \quad (10.139)$$

где C — вектор из произвольных постоянных

$$C = \begin{bmatrix} C_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ C_n \end{bmatrix}. \quad (10.140)$$

Выражение (136) принимает теперь вид

$$x(t) = e^{At} \left(C + \int_{t_0}^t e^{-A\tau} f(\tau) d\tau \right). \quad (10.141)$$

Из выражения (141) следует, что

$$[x(t)]_{t=t_0} = e^{At_0} C,$$

откуда, учитывая начальные условия (130), получим

$$C = e^{-At_0} x(t_0). \quad (10.142)$$

Подставляя в (141) найденное значение C , найдем

$$x(t) = e^{A(t-t_0)} x(t_0) + \int_{t_0}^t e^{A(t-\tau)} f(\tau) d\tau. \quad (10.143)$$

Это и есть решение векторного дифференциального уравнения (135) при начальных условиях (130).

13. Сравнение с решениями, получаемыми при помощи преобразования Лапласа. Покажем теперь тождественность решения (143) и решения, которое можно получить развитыми в § 4 методами, основанными на применении преобразования Лапласа.

Обозначая

$$\xi(p) \doteq x(t), \quad \tilde{f}(p) \doteq f(t), \quad (10.144)$$

получим, что векторному дифференциальному уравнению (135)

$$\dot{x} = Ax + f(t)$$

будет соответствовать следующее уравнение в изображениях:

$$(pE - A)\xi(p) = px(0) + \tilde{f}(p), \quad (10.145)$$

где $x(0)$ — значение $x(t)$ при $t = 0$. Отсюда

$$\xi(p) = p(pE - A)^{-1}x(0) + (pE - A)^{-1}\tilde{f}(p). \quad (10.146)$$

Согласно (89) будем иметь

$$p(pE - A)^{-1} = \sum_{k=1}^s \left[Z_{k1} \frac{p}{p - \lambda_k} + Z_{k2} \frac{p}{(p - \lambda_k)^2} + \right. \\ \left. + Z_{k3} \frac{2! p}{(p - \lambda_k)^3} + \dots + Z_{km_k} \frac{(m_k - 1)! p}{(p - \lambda_k)^{m_k}} \right]. \quad (10.147)$$

Оригинал, изображением которого является функция $p(pE - A)^{-1}$, обозначим через $N(t)$:

$$p(pE - A)^{-1} \doteq N(t). \quad (10.148)$$

Учитывая, что

$$\frac{p}{(p - \lambda_k)^{\mu+1}} \doteq \frac{t^\mu e^{\lambda_k t}}{\mu!}, \quad (10.149)$$

найдем

$$N(t) = \sum_{k=1}^s \left[Z_{k1} + Z_{k2}t + \dots + Z_{km_k} t^{m_k-1} \right] e^{\lambda_k t}. \quad (10.150)$$

На основании теоремы об умножении изображений

$$\frac{1}{p} p(pE - A)^{-1} \tilde{f}(p) \doteq \int_0^t N(t - \tau) f(\tau) d\tau. \quad (10.151)$$

Таким образом, изображению (146) будет соответствовать следующий оригинал:

$$x(t) = N(t)x(0) + \int_0^t N(t-\tau)f(\tau) d\tau. \quad (10.152)$$

Из сравнения выражений (150) и (133) видно, что

$$N(t) = e^{At}, \quad (10.153)$$

и, таким образом, выражение (152) принимает вид

$$x(t) = e^{At}x(0) + \int_0^t e^{A(t-\tau)}f(\tau) d\tau. \quad (10.154)$$

Согласно (154)

$$x(t_0) = e^{At_0}x(0) + \int_0^{t_0} e^{A(t_0-\tau)}f(\tau) d\tau. \quad (10.155)$$

Выражение (154) можно преобразовать к следующему виду:

$$x(t) = e^{A(t-t_0)} \left[e^{At_0}x(0) + \int_0^{t_0} e^{A(t_0-\tau)}f(\tau) d\tau \right] + \int_{t_0}^t e^{A(t-\tau)}f(\tau) d\tau, \quad (10.156)$$

откуда, учитывая (155), получим

$$x(t) = e^{A(t-t_0)}x(t_0) + \int_{t_0}^t e^{A(t-\tau)}f(\tau) d\tau, \quad (10.157)$$

что совпадает с выражением (143).

Заменяя в соответствии с соотношением (153) функцию e^{At} через $N(t)$, перепишем выражение (157) так:

$$x(t) = N(t-t_0)x(t_0) + \int_{t_0}^t N(t-\tau)f(\tau) d\tau. \quad (10.158)$$

Заметим еще, что в соответствии со (153), (114) и (115) матрица $N(t)$, которая определена выражением (150), и обратная матрица $N^{-1}(t)$ удовлетворяют следующим соотношениям:

$$N(0) = E, \quad (10.159)$$

$$N^{-1}(t) = N(-t), \quad (10.160)$$

$$N(t)N^{-1}(\tau) = N(t-\tau). \quad (10.161)$$

Учитывая, что

$$e^{At} = E + At + \frac{A^2t^2}{2!} + \dots$$

и что степени матриц коммутативны при умножении, получим еще, что

$$AN = NA. \quad (10.162)$$

Из соотношений (153) и (128) следует также, что

$$\frac{dN}{dt} = AN. \quad (10.163)$$

§ 11. Управляемость и наблюдаемость линейных систем

1. Управляемость систем, описываемых линейными дифференциальными уравнениями с постоянными коэффициентами. Рассмотрим систему, описываемую векторным дифференциальным уравнением

$$\frac{dx}{dt} = Ax + Gu, \quad (11.1)$$

где

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} A_{11} & \dots & A_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ A_{n1} & \dots & A_{nn} \end{bmatrix}, \quad G = \begin{bmatrix} G_{11} & \dots & G_{1r} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ G_{n1} & \dots & G_{nr} \end{bmatrix}, \quad u = \begin{bmatrix} u_1 \\ \dots \\ u_r \end{bmatrix}. \quad (11.2)$$

Через x_k ($k = 1, \dots, n$) здесь обозначены переменные, определяющие состояние системы; u_l ($l = 1, \dots, r$) — приложенные к системе управляющие силы, называемые также «управлениями». Элементы матриц A и G предполагаются здесь постоянными.

Векторное дифференциальное уравнение (1) эквивалентно системе скалярных дифференциальных уравнений

$$\frac{dx_j}{dt} = \sum_{k=1}^n A_{jk}x_k + \sum_{l=1}^r G_{jl}u_l \quad (j = 1, \dots, n). \quad (11.3)$$

Уравнения (3) являются линейными дифференциальными уравнениями с постоянными коэффициентами, и их можно интерпретировать, например, как уравнения в вариациях относительно установившегося движения (или относительно состояния равновесия) некоторой системы материальных точек. Пусть s — число степеней свободы этой системы, а q_1, \dots, q_s — ее обобщенные координаты. Ранг системы уравнений (3) при этом будет

$$n = 2s.$$

Переменные x_i ($i = 1, \dots, n$) в уравнениях (3) могут быть фазовыми координатами или каноническими переменными (об-

обобщенными координатами и обобщенными импульсами) рассматриваемой системы материальных точек или быть связанными с ними при помощи некоторого линейного преобразования.

Так как у системы материальных точек число приложенных обобщенных сил не может превышать числа степеней свободы, то число r управляющих сил u_l ($l = 1, \dots, r$) в дифференциальных уравнениях (3) должно удовлетворять условию

$$r \leq s.$$

Заметим еще, что те из уравнений системы (3), которые выражают лишь зависимость между переменными x_j , например уравнения вида

$$\dot{x}_\mu = x_{\mu+1}, \quad (11.4)$$

в случае, когда x_j — фазовые координаты системы, требуют выполнения тождеств

$$\sum_{l=1}^r G_{\mu l} u_l \equiv 0 \quad (\mu = \mu_1, \dots, \mu_s), \quad (11.5)$$

для чего необходимо, чтобы соответствующие строки матрицы G состояли из нулевых элементов

$$G_{\mu 1} = G_{\mu 2} = \dots = G_{\mu r} = 0 \quad (\mu = \mu_1, \dots, \mu_s). \quad (11.6)$$

Обычно управляемая система имеет, однако, более сложную структуру. В ее состав входят еще устройства для формирования управляющих сигналов и др. При этом в число уравнений (3) могут входить также дифференциальные уравнения, описывающие программы включенных в состав системы вычислительных управляющих устройств и т. п. Эти уравнения могут содержать и свои управляющие воздействия. В этом случае будет иметь место соотношение $n > 2s$, где под s здесь подразумевается число степеней свободы лишь совокупности механических звеньев, входящих в систему (3), а также может оказаться, что $r > s$.

Рассмотрим сейчас вопрос о том, можно ли систему, описываемую уравнением (1), перевести из любого заданного начального состояния в любое желаемое состояние за конечный промежуток времени, выбирая надлежащим образом закон изменения управляющих сил $u_l = u_l(t)$ ($l = 1, \dots, r$).

Сформулированное здесь свойство получило название *управляемости*. Системы, обладающие этим свойством, называются *вполне управляемыми*.

Так как управляемость системы определяется строением матриц A и G , то понятие управляемости относят также к этим матрицам, говоря, что пара (A, G) вполне управляема, или соответственно неуправляема.

Перейдем к решению поставленной задачи. Согласно (10.143) закон движения системы, описываемой уравнением (1), будет следующим:

$$x(t) = e^{At} x(0) + \int_0^t e^{A(t-\tau)} G u(\tau) d\tau. \quad (11.7)$$

Предположим, что существует такой закон изменения управляющих сил $u_l = u_l(t)$ ($l = 1, \dots, r$), который обеспечивает приведение системы к моменту времени $t = T$ в начало координат, то есть обеспечивает выполнение условия

$$x(T) = 0. \quad (11.8)$$

Так как согласно (7)

$$x(T) = e^{AT} x(0) + \int_0^T e^{A(T-\tau)} G u(\tau) d\tau, \quad (11.9)$$

то в соответствии с (8) будем иметь следующее соотношение:

$$\int_0^T e^{A(T-\tau)} G u(\tau) d\tau = -e^{AT} x(0). \quad (11.10)$$

Умножая левую и правую части соотношения (10) на e^{-AT} , получим

$$\int_0^T e^{-A\tau} G u(\tau) d\tau = -x(0). \quad (11.11)$$

Согласно (10.58)

$$e^{-A\tau} = \sum_{k=0}^{m-1} \alpha_k(-\tau) A^k, \quad (11.12)$$

где m — степень минимального полинома $\psi(\lambda)$ матрицы A , а $\alpha_k(t)$ — коэффициенты интерполяционного полинома Лагранжа — Сильвестра $r(\lambda)$, построенного для функции $e^{\lambda t}$, которая определена на спектре матрицы A .

Соотношение (11) можно, учитывая выражение (12), переписать так:

$$\sum_{k=0}^{m-1} A^k G \int_0^T u(\tau) \alpha_k(-\tau) d\tau = -x(0) \quad (11.13)$$

или

$$G \int_0^T u(\tau) \alpha_0(-\tau) d\tau + AG \int_0^T u(\tau) \alpha_1(-\tau) d\tau + \dots$$

$$\dots + A^{m-1}G \int_0^T u(\tau) \alpha_{m-1}(-\tau) d\tau = -x(0). \quad (11.14)$$

Каждое из слагаемых в левой части соотношения (14) является вектором типа $n \times 1$.

Левую часть соотношения (14) можно представить в виде произведения двух матриц и переписать соотношение (14) так:

$$[G \ AG \ A^2G \ \dots \ A^{m-1}G] \times \begin{bmatrix} \int_0^T u(\tau) \alpha_0(-\tau) d\tau \\ \int_0^T u(\tau) \alpha_1(-\tau) d\tau \\ \dots \\ \int_0^T u(\tau) \alpha_{m-1}(-\tau) d\tau \end{bmatrix} = -x(0). \quad (11.15)$$

Так как A^kG ($k = 0, 1, \dots, m-1$) есть матрица типа $n \times r$, то матрица

$$W = [G \ AG \ A^2G \ \dots \ A^{m-1}G] \quad (11.16)$$

является коагулированной (блочной) матрицей типа $1 \times m$.

Сделаем сейчас следующее замечание. Согласно (10.29) минимальный полином матрицы A имеет вид

$$\psi(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{m_1} (\lambda - \lambda_2)^{m_2} \dots (\lambda - \lambda_s)^{m_s} \quad (m_1 + m_2 + \dots + m_s = m)$$

или

$$\psi(\lambda) = \lambda^m + c_1\lambda^{m-1} + \dots + c_{m-1}\lambda + c_m.$$

Так как $\psi(\lambda)$ является аннулирующим полиномом для матрицы A , то есть

$$\psi(A) = 0,$$

то будем иметь

$$A^m + c_1A^{m-1} + \dots + c_{m-1}A + c_mE = 0.$$

Отсюда следует, что

$$A^m = -c_1A^{m-1} - \dots - c_{m-1}A - c_mE,$$

то есть матрица A^m является линейной комбинацией матриц $E, A, A^2, \dots, A^{m-1}$.

Так как $A^{m+1} = AA^m$, $A^{m+2} = A^2A^m$, ... и степени матриц коммутативны при умножении, то приходим к следующему результату.

Если степень минимального полинома матрицы A равна m , то матрица A^k ($k \geq m$) является линейной комбинацией матриц $E, A, A^2, \dots, A^{m-1}$:

$$A^k = \sum_{j=0}^{m-1} \varepsilon_{kj} A^j \quad (k \geq m).$$

Обратимся теперь к матрице (16). Так как матрица $A^k G$, где $k \geq m$ (а G — матрица типа $n \times r$), может быть представлена в виде

$$A^k G = \sum_{j=0}^{m-1} \varepsilon_{kj} A^j G \quad (k \geq m),$$

то у расширенной матрицы

$$\tilde{W} = [G \ AG \ A^2G \ \dots \ A^{m-1}G \ A^mG \ A^{m+1}G \ \dots],$$

образующейся прибавлением к матрице W элементов $A^mG, A^{m+1}G, \dots$, ранг остается таким же, как и у матрицы W .

Подставляя в (16) вместо $A^k G$ ($k = 0, 1, \dots, m-1$) соответствующие матрицы, получим матрицу типа $n \times q$, где

$$q = mr, \quad (11.17)$$

элементы которой являются скалярами

$$W = \begin{bmatrix} W_{11} & W_{12} & \dots & W_{1q} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ W_{n1} & W_{n2} & \dots & W_{nq} \end{bmatrix}. \quad (11.18)$$

Матрица

$$U = \begin{bmatrix} \int_0^T u(\tau) \alpha_0(-\tau) d\tau \\ \int_0^T u(\tau) \alpha_1(-\tau) d\tau \\ \cdot \\ \cdot \\ \int_0^T u(\tau) \alpha_{m-1}(-\tau) d\tau \end{bmatrix} \quad (11.19)$$

Далее будем считать, что число управлений r выбрано так, что выполняется условие

$$q = mr \geq n. \quad (11.24)$$

Здесь, как указано выше, m — степень минимального полинома $\psi(\lambda)$ матрицы A (причем $m \leq n$), а r — размерность вектора управлений u .

Если обозначить через ω_k векторы-столбцы матрицы (18)

$$\omega_k = \begin{bmatrix} W_{1k} \\ W_{2k} \\ \dots \\ W_{nk} \end{bmatrix} \quad (k = 1, \dots, q), \quad (11.25)$$

то систему скалярных уравнений (23) можно заменить следующим векторным уравнением:

$$\sum_{k=1}^q \omega_k U_k = -x(0), \quad (11.26)$$

где ω_k ($k = 1, \dots, q$) и $x(0)$ — n -мерные векторы, а U_k ($k = 1, \dots, q$) — скаляры, причем согласно (24) $q \geq n$. Таким образом, вектор $x(0)$ представляет собой линейную комбинацию векторов ω_k ($k = 1, \dots, q$).

Так как в качестве $x(0)$ может быть выбран любой вектор n -мерного пространства x_1, \dots, x_n , то из соотношения (26) следует, что для того, чтобы система (1) была вполне управляемой, необходимо и достаточно, чтобы среди векторов ω_k ($k = 1, \dots, q$) имелось n линейно-независимых векторов.

Иными словами, условие управляемости [36] системы (1) состоит в том, что ранг матрицы (16)

$$W = [G \ AG \ A^2G \ \dots \ A^{m-1}G]$$

должен быть равен n .

Система значений U_1, \dots, U_q , удовлетворяющая уравнениям (23), в случае, когда $q > n$, будет не единственной. При выборе решения уравнений (23) необходимо еще учитывать зависимости, которые накладывают на U_1, \dots, U_q формулы (20). (Так, например, как видно из (20), у U_1 и U_{r+1} подынтегральные функции содержат один и тот же множитель $u_1(\tau)$ и т. д.)

Определив значения U_1, \dots, U_q , надо из соотношений (20) найти закон управления $u_l = u_l(t)$ ($l = 1, \dots, r$). Последняя задача также допускает не единственное решение.

Указанные обстоятельства открывают возможность наложения дополнительных условий, обеспечивающих тот или иной характер движения системы — каких-либо условий оптимальности и т. п.

Покажем, что одним из возможных управлений является, например, управление

$$\tilde{u}(t) = -G^* e^{-A^*t} R^{-1} x(0),$$

где

$$R = \int_0^T e^{-A\tau} G G^* e^{-A^*\tau} d\tau,$$

а символом $*$ обозначена транспонированная матрица.

Проверим, что $\tilde{u}(t)$ приводит систему (1) к моменту времени T в начало координат. Для этого подставим $\tilde{u}(t)$ в левую часть соотношения (11)

$$-\int_0^T e^{-A\tau} G G^* e^{-A^*\tau} d\tau R^{-1} x(0) = -R R^{-1} x(0) = -x(0).$$

Таким образом, соотношение (11) удовлетворяется, откуда в соответствии с (9) следует, что $x(T) = 0$.

Здесь мы предполагали, что матрица R^{-1} существует. В п. 6 будет доказано, что если система управляема, то R является положительно-определенной матрицей, и, следовательно, обратная матрица R^{-1} существует.

Пример. Рассмотрим систему, описываемую скалярным дифференциальным уравнением

$$\frac{dx}{dt} = ax + u.$$

Здесь управление $\tilde{u}(t)$ принимает вид

$$\tilde{u}(t) = -\frac{2a}{1 - e^{-2aT}} e^{-at} x(0).$$

Левая часть соотношения (11) теперь будет

$$\int_0^T e^{-a\tau} \tilde{u}(\tau) d\tau = -\frac{2a}{1 - e^{-2aT}} x(0) \int_0^T e^{-2a\tau} d\tau = -x(0),$$

то есть соотношение (11) удовлетворяется, и согласно (9) будем иметь $x(T) = 0$.

2. Системы с одной управляющей силой. Рассмотрим теперь систему, описываемую следующими скалярными дифференциальными уравнениями:

$$\frac{dx_j}{dt} = \sum_{k=1}^n A_{jk} x_k + B_j u \quad (j = 1, \dots, n). \quad (11.27)$$

В отличие от системы уравнений (3), у рассматриваемой системы имеется лишь одна управляющая сила u .

Вводя матрицы

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} A_{11} & \dots & A_{1n} \\ \cdot & \dots & \cdot \\ A_{n1} & \dots & A_{nn} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} B_1 \\ \dots \\ B_n \end{bmatrix}, \quad (11.28)$$

можно заменить систему уравнений (27) векторным уравнением

$$\frac{dx}{dt} = Ax + Bu. \quad (11.29)$$

Так как матрица $A^{\nu}B$, где ν — любое целое число, будет представлять собой матрицу-столбец (вектор), то полученное в п. 1 условие управляемости может быть выполнено лишь в случае, когда степень минимального полинома $\psi(\lambda)$ матрицы A равна n . Последнее имеет место, если все характеристические числа матрицы A являются простыми. Если среди характеристических чисел матрицы A имеются кратные, то степень m минимального полинома $\psi(\lambda)$ будет равна n лишь в случае, когда кратному характеристическому числу соответствует единственный элементарный делитель. Степень этого элементарного делителя равна тогда кратности характеристического числа.

У систем, в которых кратному характеристическому числу соответствует не один, а несколько элементарных делителей, степень минимального полинома $m < n$. При наличии лишь одной управляющей силы условие управляемости у таких систем не выполняется.

Для систем, у которых

$$m = n, \quad (11.30)$$

матрица (16) принимает вид

$$Q = [B \ AB \ A^2B \ \dots \ A^{n-1}B]. \quad (11.31)$$

Элементы матрицы (31) являются n -мерными векторами и условие управляемости системы состоит в том, что ранг матрицы Q должен быть равен n .

Вектор (21) здесь принимает вид

$$V = \begin{bmatrix} \int_0^T u(\tau) \alpha_0(-\tau) d\tau \\ \int_0^T u(\tau) \alpha_1(-\tau) d\tau \\ \dots \\ \int_0^T u(\tau) \alpha_{n-1}(-\tau) d\tau \end{bmatrix}. \quad (11.32)$$

Элементы вектора V являются скалярами.

Через \tilde{y} обозначен вектор

$$\tilde{y} = \begin{bmatrix} \tilde{y}_1 \\ \dots \\ \tilde{y}_p \end{bmatrix},$$

элементы которого $\tilde{y}_1, \dots, \tilde{y}_p$ являются линейными комбинациями фазовых координат \tilde{x}_k ($k = 1, \dots, n$) и управлений u_l ($l = 1, \dots, r$).

Далее предполагается, что элементы $\tilde{y}_1, \dots, \tilde{y}_p$ вектора \tilde{y} доступны наблюдению на отрезке времени $0 \leq t \leq T$, и, таким образом, по данным измерений известны функции $\tilde{y}_1(t), \dots, \dots, \tilde{y}_p(t)$ на отрезке времени $0 \leq t \leq T$. При этом предполагается также известным закон изменения управляющих сил $u_l = u_l(t)$ на рассматриваемом отрезке времени $0 \leq t \leq T$.

Так как согласно (7)

$$\tilde{x}(t) = e^{At}\tilde{x}(0) + \int_0^t e^{A(t-\tau)}Gu(\tau) d\tau,$$

то в соответствии с (37)

$$\tilde{y}(t) = Ce^{At}\tilde{x}(0) + C \int_0^t e^{A(t-\tau)}Gu(\tau) d\tau + Lu(t). \quad (11.38)$$

Так как функция $u(t)$ предполагается известной, то второе и третье слагаемые в правой части (38) могут быть вычислены, и эти слагаемые можно вычесть из полученной в результате наблюдений функции $\tilde{y}(t)$:

$$\tilde{y}(t) - C \int_0^t e^{A(t-\tau)}Gu(\tau) d\tau - Lu(t) = Ce^{At}\tilde{x}(0). \quad (11.39)$$

Левая часть соотношения (39), таким образом, является известной. Начальное состояние системы $\tilde{x}(0)$ предполагается неизвестным. Возникает вопрос, можно ли восстановить значение $\tilde{x}(0)$ по полученным из описанных наблюдений данным.

Поставленная здесь задача эквивалентна следующей задаче. У системы, описываемой векторными уравнениями (отличающимися от уравнений (36) и (37) тем, что $u(t) \equiv 0$):

$$\frac{dx}{dt} = Ax, \quad (11.40)$$

$$y = Cx \quad (11.41)$$

требуется восстановить начальное значение $x(0)$ по найденной из наблюдений вектор-функции $y(t)$ ($0 \leq t \leq T$).

Возможность восстановления начального состояния $x(0)$ системы по некоторой наблюдаемой линейной операции над ее выходом называется *наблюдаемостью*.

Системы, обладающие этим свойством, называются *вполне наблюдаемыми*.

Из уравнений (40) и (41) следует, что

$$y(t) = Ce^{At}x(0). \quad (11.42)$$

Матрица C , которая входит в уравнение (41), имеет следующий вид:

$$C = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{p1} & c_{p2} & \dots & c_{pn} \end{bmatrix}. \quad (11.43)$$

Обозначив через C_j ($j = 1, \dots, p$) строки матрицы (43)

$$C_j = [c_{j1} \ c_{j2} \ \dots \ c_{jn}] \quad (j = 1, \dots, p), \quad (11.44)$$

можно представить матрицу (43) в коагулированном виде

$$C = \begin{bmatrix} C_1 \\ \dots \\ C_p \end{bmatrix}. \quad (11.45)$$

Элемент $y_j(t)$ вектора $y(t)$ в соответствии с (42) можно записать так:

$$y_j(t) = C_j e^{At}x(0) \quad (j = 1, \dots, p). \quad (11.46)$$

Согласно (10.58)

$$e^{At} = \sum_{k=0}^{m-1} \alpha_k(t) A^k, \quad (11.47)$$

где m — степень минимального полинома $\psi(\lambda)$ матрицы A , а $\alpha_k(t)$ — коэффициенты интерполяционного полинома Лагранжа — Сильвестра $r(\lambda)$, построенного для функции $e^{\lambda t}$, которая определена на спектре матрицы A . Поэтому выражение (46) можно привести к виду

$$y_j(t) = \sum_{k=0}^{m-1} \alpha_k(t) C_j A^k x(0) \quad (j = 1, \dots, p). \quad (11.48)$$

Умножая левую и правую части соотношения (48) на $\alpha_i(t)$ ($i = 0, 1, \dots, m-1$) и интегрируя полученные функции по t в пределах от 0 до T , получим

$$\int_0^T \alpha_i(t) y_j(t) dt = \sum_{k=0}^{m-1} \int_0^T \alpha_i(t) \alpha_k(t) dt C_j A^k x(0) \quad (11.49)$$

$$(j = 1, \dots, p; i = 0, 1, \dots, m-1).$$

Введем теперь следующее обозначение:

$$(\varphi_i, \psi_j) = \int_0^T \varphi_i(t) \psi_j(t) dt. \quad (11.50)$$

Для каждого фиксированного j в соответствии с (49) будем иметь следующую систему уравнений:

$$\left. \begin{aligned} (\alpha_0, \alpha_0) C_j x(0) + (\alpha_0, \alpha_1) C_j A x(0) + \dots \\ \dots + (\alpha_0, \alpha_{m-1}) C_j A^{m-1} x(0) = (\alpha_0, y_j), \\ (\alpha_1, \alpha_0) C_j x(0) + (\alpha_1, \alpha_1) C_j A x(0) + \dots \\ \dots + (\alpha_1, \alpha_{m-1}) C_j A^{m-1} x(0) = (\alpha_1, y_j), \\ \dots \\ (\alpha_{m-1}, \alpha_0) C_j x(0) + (\alpha_{m-1}, \alpha_1) C_j A x(0) + \dots \\ \dots + (\alpha_{m-1}, \alpha_{m-1}) C_j A^{m-1} x(0) = (\alpha_{m-1}, y_j). \end{aligned} \right\} \quad (11.51)$$

Определитель из коэффициентов при $C_j x(0)$, $C_j A x(0)$, \dots , $C_j A^{m-1} x(0)$ в уравнениях (51) отличен от нуля

$$\Delta = \begin{vmatrix} (\alpha_0, \alpha_0) & (\alpha_0, \alpha_1) & \dots & (\alpha_0, \alpha_{m-1}) \\ (\alpha_1, \alpha_0) & (\alpha_1, \alpha_1) & \dots & (\alpha_1, \alpha_{m-1}) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ (\alpha_{m-1}, \alpha_0) & (\alpha_{m-1}, \alpha_1) & \dots & (\alpha_{m-1}, \alpha_{m-1}) \end{vmatrix} \neq 0, \quad (11.52)$$

так как это есть определитель Грама [23], стр. 79, для системы линейно-независимых функций $\alpha_0(t)$, $\alpha_1(t)$, \dots , $\alpha_{m-1}(t)$.

Таким образом, система уравнений (52) имеет единственное решение

$$\left. \begin{aligned} C_j x(0) &= \mu_{j1}, \\ C_j A x(0) &= \mu_{j2}, \\ \dots & \\ C_j A^{m-1} x(0) &= \mu_{jm}. \end{aligned} \right\} \quad (11.53)$$

Так как $j = 1, \dots, p$, то будем иметь ν соотношений вида (53), где

$$\nu = mp. \quad (11.54)$$

соотношений (57). Указанные векторы, таким образом, являются столбцами следующей коагулированной матрицы:

$$S = [C^* A^* C^* A^{*2} C^* \dots A^{*m-1} C^*]. \tag{11.60}$$

Заметим, что если вместо входящих в матрицу (60) блоков подставить соответствующие матрицы, то получим матрицу типа $n \times v$ (где $v = mp$), элементы которой являются скалярами.

Предположим теперь, что среди столбцов матрицы S имеется n линейно-независимых столбцов $S_{\sigma_1}, S_{\sigma_2}, \dots, S_{\sigma_n}$, то есть ранг матрицы S равен n .

Кроме того, предположим еще, что размерность p вектора y выбрана так, что выполняется условие

$$v = mp \geq n. \tag{11.61}$$

Из v уравнений (57) выберем те уравнения, в которые входят векторы $S_{\sigma_1}, S_{\sigma_2}, \dots, S_{\sigma_n}$. Эти уравнения будут

$$\left. \begin{aligned} \langle S_{\sigma_1}, x(0) \rangle &= \mu_{\sigma_1}, \\ \langle S_{\sigma_2}, x(0) \rangle &= \mu_{\sigma_2}, \\ \dots &\dots \\ \langle S_{\sigma_n}, x(0) \rangle &= \mu_{\sigma_n}, \end{aligned} \right\} \tag{11.62}$$

или

$$\left. \begin{aligned} S_{\sigma_1 1} x_1(0) + S_{\sigma_1 2} x_2(0) + \dots + S_{\sigma_1 n} x_n(0) &= \mu_{\sigma_1}, \\ S_{\sigma_2 1} x_1(0) + S_{\sigma_2 2} x_2(0) + \dots + S_{\sigma_2 n} x_n(0) &= \mu_{\sigma_2}, \\ \dots &\dots \\ S_{\sigma_n 1} x_1(0) + S_{\sigma_n 2} x_2(0) + \dots + S_{\sigma_n n} x_n(0) &= \mu_{\sigma_n}. \end{aligned} \right\} \tag{11.63}$$

Мы получили систему линейных неоднородных алгебраических уравнений относительно $x_1(0), x_2(0), \dots, x_n(0)$. Определитель из коэффициентов уравнений (63) отличен от нуля, так как векторы $S_{\sigma_1}, S_{\sigma_2}, \dots, S_{\sigma_n}$ линейно-независимы, и, следовательно, система уравнений (63) имеет единственное решение, то есть определяет единственным образом компоненты $x_1(0), x_2(0), \dots, x_n(0)$ вектора начального состояния системы $x(0)$.

Соотношениям (62) можно дать еще такую интерпретацию. Линейно-независимые векторы $S_{\sigma_1}, S_{\sigma_2}, \dots, S_{\sigma_n}$ можно рассматривать как базис n -мерного пространства x_1, \dots, x_n . Величины $\mu_{\sigma_1}, \mu_{\sigma_2}, \dots, \mu_{\sigma_n}$ представляют собой проекции вектора $x(0)$ на базисные векторы. Эти проекции определяют единственным образом искомый вектор $x(0)$.

Таким образом, *необходимое и достаточное условие наблюдаемости системы* (36), (37) *состоит в том, что ранг матрицы* (60)

$$S = [C^* \ A^*C^* \ A^{*2}C^* \ \dots \ A^{*m-1}C^*]$$

должен быть равен n .

4. Системы с одной наблюдаемой координатой. Рассмотрим теперь систему, описываемую уравнениями

$$\frac{dx_j}{dt} = \sum_{k=1}^n A_{jk}x_k \quad (j = 1, \dots, n). \quad (11.64)$$

$$y = \sum_{k=1}^n c_k x_k. \quad (11.65)$$

В отличие от уравнений (40), (41), здесь известна из наблюдений лишь скалярная функция $y = y(t)$, определяемая выражением (65), а не вектор-функция, как это имело место в п. 3.

Вводя матрицы

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} A_{11} & \dots & A_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ A_{n1} & \dots & A_{nn} \end{bmatrix}, \quad C = [c_1 \ c_2 \ \dots \ c_n], \quad (11.66)$$

можно переписать уравнения (64) и (65) так:

$$\frac{dx}{dt} = Ax, \quad (11.67)$$

$$y = Cx. \quad (11.68)$$

Так как матрица C^* в соответствии с (66) будет матрицей-столбцом (вектором)

$$C^* = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \dots \\ c_n \end{bmatrix}, \quad (11.69)$$

то матрица $A^{*k}C^*$, где k — любое целое число, будет представлять собой матрицу-столбец (вектор). Поэтому полученное в п. 3 условие наблюдаемости может быть здесь выполнено лишь в случае, когда степень минимального полинома $\psi(\lambda)$ матрицы A равна n . Это возможно лишь в случае, когда каждому кратному характеристическому числу матрицы A соответствует единственный элементарный делитель, а не несколько элементарных делителей.

Для систем с одной наблюдаемой координатой, у которых

$$m = n, \quad (11.70)$$

матрица (60) принимает вид

$$P = [C^* \ A^*C^* \ A^{*2}C^* \ \dots \ A^{*n-1}C^*]. \quad (11.71)$$

Элементы матрицы (71) являются n -мерными векторами, и условие наблюдаемости системы состоит в том, что ранг матрицы P должен быть равен n .

В рассматриваемой здесь задаче число уравнений вида (57) равно n , и эти уравнения будут следующими:

$$\left. \begin{aligned} \langle C^*, x(0) \rangle &= \mu_1, \\ \langle A^*C^*, x(0) \rangle &= \mu_2, \\ \langle A^{*2}C^*, x(0) \rangle &= \mu_3, \\ \dots &\dots \dots \dots \dots \dots \\ \langle A^{*n-1}C^*, x(0) \rangle &= \mu_n. \end{aligned} \right\} \quad (11.72)$$

Если векторы $C^*, A^*C^*, \dots, A^{*n-1}C^*$ линейно-независимы, то они образуют базис n -мерного пространства x_1, \dots, x_n . Величины $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n$ будут тогда проекциями вектора $x(0)$ на базисные векторы. По этим проекциям вектор $x(0)$ определяется единственным образом.

5. Принцип двойственности в теории управляемости и наблюдаемости. Рассмотрим систему I, описываемую уравнениями

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= Ax + Gu, \\ y &= Cx + Lu. \end{aligned} \right\} \quad (11.73)$$

Здесь x, u, y — векторы размерности n, r и p , а A, G, C, L — матрицы типа $n \times n, n \times r, p \times n, p \times r$.

Условие управляемости состоит в том, что ранг матрицы

$$W = [G \ AG \ A^2G \ \dots \ A^{m-1}G]$$

должен быть равен n .

Условие наблюдаемости состоит в том, что ранг матрицы

$$S = [C^* \ A^*C^* \ A^{*2}C^* \ \dots \ A^{*m-1}C^*]$$

должен быть равен n .

Пусть система II описывается уравнениями

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\xi}{dt} &= A^*\xi + C^*v, \\ \eta &= G^*\xi + L^*v. \end{aligned} \right\} \quad (11.74)$$

Здесь ξ, v, η — векторы размерности n, p и r .

Для системы II условие управляемости состоит в том, что ранг матрицы

$$S = [C^* \ A^*C^* \ A^{*2}C^* \ \dots \ A^{*m-1}C^*]$$

должен быть равен n .

Условие наблюдаемости системы II состоит в том, что ранг матрицы

$$W = [G \ AG \ A^2G \ \dots \ A^{m-1}G]$$

должен быть равен n .

Таким образом, имеет место установленный Калманом [36] принцип двойственности в задаче об управляемости и наблюдаемости.

Система I управляема (наблюдаема), если и только если система II наблюдаема (управляема соответственно).

6. Управляемость линейных нестационарных систем. Рассмотрим линейную нестационарную систему, описываемую векторным дифференциальным уравнением

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x + G(t)u, \tag{11.75}$$

где

$$\left. \begin{aligned} x &= \begin{bmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad A(t) = \begin{bmatrix} A_{11}(t) & \dots & A_{1n}(t) \\ \dots & \dots & \dots \\ A_{n1}(t) & \dots & A_{nn}(t) \end{bmatrix}, \\ u &= \begin{bmatrix} u_1 \\ \dots \\ u_r \end{bmatrix}, \quad G(t) = \begin{bmatrix} G_{11}(t) & \dots & G_{1r}(t) \\ \dots & \dots & \dots \\ G_{n1}(t) & \dots & G_{nr}(t) \end{bmatrix}. \end{aligned} \right\} \tag{11.76}$$

Элементы матриц $A(t)$ и $G(t)$ являются непрерывными, действительными функциями времени.

Система (75) называется *вполне управляемой в момент времени t_0* , если из любого состояния, которое она занимает в момент времени t_0 , ее можно перевести в нулевое состояние за конечный промежуток времени, выбирая надлежащим образом закон изменения управляющих сил $u_l = u_l(t)$ ($l = 1, \dots, r$).

Так как свойства нестационарной системы изменяются с течением времени, то возможны системы, которые управляемы (в смысле приведенного выше определения) в момент времени T и неуправляемы в любой последующий момент времени. Из самого определения управляемости следует, однако, что если система управляема в момент T , то она управляема в любой момент $t_0 < T$ (поскольку она будет управляемой, оказавшись в любом состоянии в момент времени T).

Теорема. Пусть $\Phi(t, \tau) = \theta(t)\theta^{-1}(\tau)$, где $\theta(t)$ — фундаментальная матрица решений системы, описываемой однородным векторным дифференциальным уравнением

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x, \quad (11.77)$$

а через $W(t_0, t)$ обозначена матрица

$$W(t_0, t) = \int_{t_0}^t \Phi(t_0, \tau) G(\tau) G^*(\tau) \Phi^*(t_0, \tau) d\tau. \quad (11.78)$$

Нестационарная линейная система (75) управляема в момент времени t_0 , если и только если для некоторого конечного t_1 матрица $W(t_0, t_1)$, определяемая выражением (78), является положительно-определенной матрицей).*

Доказательство теоремы.

1°. По предположению матрица $W(t_0, t_1)$ является симметрической, положительно-определенной матрицей. Следовательно, она является неособой матрицей, то есть $\det W(t_0, t_1) \neq 0$.

Таким образом, обратная матрица $W^{-1}(t_0, t_1)$ существует, и можно выбрать вектор управляющих сил $u(t)$ в следующем виде:

$$\tilde{u}(t) = -G^*(t)\Phi^*(t_0, t)W^{-1}(t_0, t_1)x(t_0). \quad (11.79)$$

Так как согласно (7.26)

$$x(t) = \Phi(t, t_0)x(t_0) + \int_{t_0}^t \Phi(t, \tau)G(\tau)\tilde{u}(\tau)d\tau, \quad (11.80)$$

то в момент времени $t = t_1$ состояние системы будет

$$x(t_1) = \Phi(t_1, t_0)x(t_0) + \int_{t_0}^{t_1} \Phi(t_1, \tau)G(\tau)\tilde{u}(\tau)d\tau. \quad (11.81)$$

Подставляя в (81) выражение (79) для $\tilde{u}(t)$, получим

$$x(t_1) = \Phi(t_1, t_0)x(t_0) - \int_{t_0}^{t_1} \Phi(t_1, \tau)G(\tau)G^*(\tau)\Phi^*(t_0, \tau)d\tau W^{-1}(t_0, t_1)x(t_0). \quad (11.82)$$

*) Матрица R (типа $n \times n$) называется положительно-определенной матрицей, если квадратичная форма $(\xi, R\xi)$ (где ξ — n -мерный вектор) положительна для всех значений $\xi \neq 0$.

Как показано выше (7.24) и (7.25),

$$\begin{aligned}\Phi(t_1, t_0) \Phi(t_0, t_1) &= E, \\ \Phi(t_0, t_1) \Phi(t_1, \tau) &= \Phi(t_0, \tau).\end{aligned}$$

Поэтому, учитывая (78), будем иметь

$$\begin{aligned}\int_{t_0}^{t_1} \Phi(t_1, \tau) G(\tau) G^*(\tau) \Phi^*(t_0, \tau) d\tau &= \\ = \Phi(t_1, t_0) \int_{t_0}^{t_1} \Phi(t_0, t_1) \Phi(t_1, \tau) G(\tau) G^*(\tau) \Phi^*(t_0, \tau) d\tau &= \\ = \Phi(t_1, t_0) W(t_0, t_1).\end{aligned}\quad (11.83)$$

В соответствии с (82) и (83) состояние системы в момент времени $t = t_1$ будет следующим:

$$x(t_1) = \Phi(t_1, t_0) x(t_0) - \Phi(t_1, t_0) W(t_0, t_1) W^{-1}(t_0, t_1) x(t_0) = 0. \quad (11.84)$$

Таким образом, управление (79) действительно приводит систему (75) к моменту времени $t = t_1$ в нулевое состояние.

Заметим, что заданное выражением (79) управление $\tilde{u}(t)$, которое, как здесь доказано, приводит систему (75) к моменту времени t_1 в нулевое состояние, *не является единственным*. Действительно, управление

$$u(t) = \tilde{u}(t) + v(t),$$

где $v(t)$ — любая r -мерная вектор-функция, удовлетворяющая условию

$$\int_{t_0}^{t_1} \Phi(t_1, \tau) G(\tau) v(\tau) d\tau = 0,$$

так же, как это следует из (81), приводит систему (75) к моменту времени $t = t_1$ в нулевое состояние.

Аналогично управление

$$\hat{u}(t) = -G^*(t) \Phi^*(t_0, t) W^{-1}(t_0, t_1) [x(t_0) - \Phi(t_0, t_1) x^*]$$

приводит систему к моменту времени $t = t_1$ в точку $x(t_1) = x^*$.

2°. Покажем теперь, что если система (75) управляема, то матрица $W(t_0, t_1)$ будет положительно-определенной матрицей.

Рассмотрим сначала квадратичную форму $\langle \xi, W(t_0, t_1) \xi \rangle$, где ξ — n -мерный вектор. Согласно (78) будем иметь

$$\langle \xi, W \xi \rangle = \int_{t_0}^{t_1} \langle \xi, \Phi G G^* \Phi^* \xi \rangle dt. \quad (11.85)$$

Так как для всякой прямоугольной матрицы a типа $n \times r$

$$\begin{aligned}\langle \xi, aa^*\xi \rangle &= \xi^*aa^*\xi, \\ (a^*\xi)^* &= \xi^*a, \\ \langle a^*\xi, a^*\xi \rangle &= (a^*\xi)^*a^*\xi = \xi^*aa^*\xi,\end{aligned}$$

то

$$\langle \xi, aa^*\xi \rangle = \langle a^*\xi, a^*\xi \rangle. \quad (11.86)$$

Таким образом, в соответствии с (86) и (85) для всех ξ имеет место соотношение

$$\langle \xi, W\xi \rangle = \int_{t_0}^{t_1} \langle G^*\Phi^*\xi, G^*\Phi^*\xi \rangle dt \geq 0. \quad (11.87)$$

Чтобы завершить доказательство, остается еще показать, что матрица W является неособой, и тогда соотношение (87) примет требуемый вид $\langle \xi, W\xi \rangle > 0$.

Предположим обратное: пусть W является особой матрицей. Тогда существует такой вектор $v \neq 0$, что

$$\langle v, Wv \rangle = 0. \quad (11.88)$$

Обозначим теперь через $\kappa(t)$ следующий вектор:

$$\kappa(t) = -G^*(t)\Phi^*(t_0, t)v. \quad (11.89)$$

Как следует из (89), $\kappa(t)$ является непрерывной функцией от t .

В соответствии с (89), (86), (78) и (88) будем иметь

$$\begin{aligned}\int_{t_0}^{t_1} \langle \kappa(t), \kappa(t) \rangle dt &= \int_{t_0}^{t_1} \langle G^*\Phi^*v, G^*\Phi^*v \rangle dt = \\ &= \int_{t_0}^{t_1} \langle v, \Phi GG^*\Phi^*v \rangle dt = \langle v, \int_{t_0}^{t_1} \Phi GG^*\Phi^* dt v \rangle = \langle v, Wv \rangle = 0,\end{aligned} \quad (11.90)$$

откуда следует, что

$$\kappa(t) \equiv 0 \quad (t_0 \leq t \leq t_1). \quad (11.91)$$

Учтем теперь, что по сделанному здесь предположению рассматриваемая система управляема. Следовательно, существует некоторое управление $u(t)$, которое приводит систему из состояния $v \neq 0$ (в момент времени t_0) в нулевое состояние (в момент времени t_1). Аналогично (81) будем поэтому иметь следующее соотношение:

$$0 = \Phi(t_1, t_0)v + \int_{t_0}^{t_1} \Phi(t_1, t)G(t)u(t)dt. \quad (11.92)$$

Отсюда следует, что

$$v = - \Phi(t_0, t_1) \int_{t_0}^{t_1} \Phi(t_1, t) G(t) u(t) dt,$$

или

$$v = - \int_{t_0}^{t_1} \Phi(t_0, t) G(t) u(t) dt. \quad (11.93)$$

Из (91) и (89) следует, что

$$0 = \int_{t_0}^{t_1} \langle x(t), u(t) \rangle dt = - \int_{t_0}^{t_1} \langle G^*(t) \Phi^*(t_0, t) v, u(t) \rangle dt. \quad (11.94)$$

Так как для всякой прямоугольной матрицы a

$$\langle a^* v, u \rangle = (a^* v)^* u = v^* a u = \langle v, a u \rangle,$$

то из соотношения (94) следует, что

$$- \int_{t_0}^{t_1} \langle v, \Phi(t_0, t) G(t) u(t) \rangle dt = \langle v, - \int_{t_0}^{t_1} \Phi(t_0, t) G(t) u(t) dt \rangle = 0. \quad (11.95)$$

В соответствии с (93) соотношение (95) принимает вид

$$\langle v, v \rangle = 0, \quad (11.96)$$

что противоречит исходному предположению о том, что $v \neq 0$.

Полученное противоречие возникло вследствие предположения (88) о том, что матрица $W(t_0, t_1)$ особая. Таким образом, установлено, что матрица $W(t_0, t_1)$ является неособой матрицей, т. е. ни для какого вектора $v \neq 0$ соотношение (88) не может иметь места и, следовательно,

$$\langle v, Wv \rangle \neq 0. \quad (11.97)$$

Из соотношений (87) и (97) вытекает, что

$$\langle \xi, W\xi \rangle > 0, \quad (11.98)$$

то есть если система (75) управляема, то матрица $W(t_0, t_1)$ является положительно-определенной матрицей.

7. Наблюдаемость линейных нестационарных систем. Рассмотрим теперь задачу о восстановлении начального значения $x(t_0)$ по найденной из наблюдений вектор-функции $y(t)$ ($t_0 \leq t \leq T$) для системы

$$\frac{dx}{dt} = A(t) x, \quad (11.99)$$

$$y(t) = C(t) x. \quad (11.100)$$

Здесь x — n -мерный вектор, y — p -мерный вектор, $A(t)$ — матрица типа $n \times n$, $C(t)$ — матрица типа $p \times n$. Элементы матриц $A(t)$ и $C(t)$ являются непрерывными, действительными функциями времени.

Если любое начальное состояние $x(t_0)$ может быть определено по известной на отрезке $[t_0, T]$ вектор-функции $y(t)$, то система называется вполне наблюдаемой на отрезке $[t_0, T]$.

Согласно (80) и (100)

$$x(t) = \Phi(t, t_0) x(t_0), \quad (11.101)$$

$$y(t) = C(t) \Phi(t, t_0) x(t_0). \quad (11.102)$$

Умножая левую и правую части выражения (102) слева на матрицу $\Phi^*(t, t_0) C^*(t)$ и интегрируя по t в пределах от t_0 до T , получим

$$\int_{t_0}^T \Phi^*(t, t_0) C^*(t) y(t) dt = \int_{t_0}^T \Phi^*(t, t_0) C^*(t) C(t) \Phi(t, t_0) dt x(t_0). \quad (11.103)$$

Обозначая

$$M(t_0, T) = \int_{t_0}^T \Phi^*(t, t_0) C^*(t) C(t) \Phi(t, t_0) dt, \quad (11.104)$$

$$\eta(t_0, T) = \int_{t_0}^T \Phi^*(t, t_0) C^*(t) y(t) dt, \quad (11.105)$$

можно переписать соотношение (103) так:

$$M(t_0, T) x(t_0) = \eta(t_0, T). \quad (11.106)$$

Если матрица $M(t_0, T)$ неособая, то есть ее определитель отличен от нуля, то существует обратная матрица $M^{-1}(t_0, T)$, и тогда уравнение (106) может быть разрешено относительно $x(t_0)$:

$$x(t_0) = M^{-1}(t_0, T) \eta(t_0, T). \quad (11.107)$$

Таким образом, если матрица $M(t_0, T)$ неособая, то система (99), (100) вполне наблюдаема.

Докажем теперь, что если система вполне наблюдаема, то матрица $M(t_0, T)$ является неособой матрицей.

Возьмем некоторое начальное состояние системы

$$x(t_0) = \mu \neq 0. \quad (11.108)$$

Предположим обратное: пусть $M(t_0, T)$ — особая матрица, и

$$\langle \mu, M\mu \rangle = 0. \quad (11.109)$$

Согласно (102) при начальном условии (108) функция $y(t)$ будет иметь следующий вид:

$$y(t) \equiv q(t), \quad (11.110)$$

где

$$q(t) = C(t) \Phi(t, t_0) \mu. \quad (11.111)$$

Учитывая, что

$$\langle C\Phi\mu, C\Phi\mu \rangle = (C\Phi\mu)^* C\Phi\mu = \mu^* \Phi^* C^* C\Phi\mu = \langle \mu, \Phi^* C^* C\Phi\mu \rangle,$$

будем в соответствии со (104) и (109) иметь

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^T \langle q(t), q(t) \rangle dt &= \int_{t_0}^T \langle C\Phi\mu, C\Phi\mu \rangle dt = \\ &= \int_{t_0}^T \langle \mu, \Phi^* C^* C\Phi\mu \rangle dt = \langle \mu, \int_{t_0}^T \Phi^* C^* C\Phi dt \mu \rangle = \langle \mu, M\mu \rangle = 0. \end{aligned} \quad (11.112)$$

Из соотношения (112) следует, что

$$q(t) \equiv 0 \quad (t_0 \leq t \leq T). \quad (11.113)$$

У вполне наблюдаемой системы при $x(t_0) \neq 0$ вектор-функция $y(t)$ удовлетворяет условию

$$y(t) \neq 0 \quad (t_0 \leq t \leq T), \quad (11.114)$$

что противоречит соотношениям (113) и (110).

Полученное противоречие возникло вследствие предположения (109) о том, что у вполне наблюдаемой системы матрица $M(t_0, T)$ является особой. Следовательно, если система вполне наблюдаема, то матрица $M(t_0, T)$ является неособой.

Итак, доказана следующая теорема.

Система (99), (100) вполне наблюдаема на отрезке $[t_0, T]$, если и только если матрица

$$M(t_0, T) = \int_{t_0}^T \Phi^*(t, t_0) C^*(t) C(t) \Phi(t, t_0) dt$$

является неособой матрицей.

Заметим, что так как матрица $M(t_0, T)$ является матрицей Грама, то в случае, когда $\det M(t_0, T) \neq 0$ (как это требуется в доказанной здесь теореме), матрица $M(t_0, T)$ будет положительно-определенной матрицей.

8. Условие управляемости линейной стационарной системы в задаче с подвижными концами. Рассмотрим систему, описываемую векторными уравнениями

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= Ax + Gu, \\ y &= Cx, \end{aligned} \right\} \quad (11.115)$$

где

$$\left. \begin{aligned} x &= \begin{bmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} A_{11} & \dots & A_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ A_{n1} & \dots & A_{nn} \end{bmatrix}, \quad G = \begin{bmatrix} G_{11} & \dots & G_{1r} \\ \dots & \dots & \dots \\ G_{n1} & \dots & G_{nr} \end{bmatrix}, \\ u &= \begin{bmatrix} u_1 \\ \dots \\ u_r \end{bmatrix}, \quad y = \begin{bmatrix} y_1 \\ \dots \\ y_p \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} c_{11} & \dots & c_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ c_{p1} & \dots & c_{pn} \end{bmatrix}. \end{aligned} \right\} \quad (11.116)$$

Элементы матриц A , G и C предполагаются постоянными. Ранг минимального полинома $\psi(\lambda)$ матрицы A равен m .

Через x_k ($k = 1, \dots, n$) обозначены фазовые координаты системы, u_l ($l = 1, \dots, r$) — приложенные к системе управляющие силы (управления).

Через y_j ($j = 1, \dots, p$; $p \leq n$) обозначены определяемые согласно (115) линейные комбинации фазовых координат x_1, \dots, x_n . Целью управления является приведение вектора $y(t)$ к моменту времени $t = T$ в заданное состояние

$$y(T) = K. \quad (11.117)$$

В соответствии с (115) векторное уравнение (117) эквивалентно следующей системе скалярных уравнений:

$$\sum_{k=1}^n c_{jk} x_k(T) = K_j \quad (j = 1, \dots, p). \quad (11.118)$$

Условия (118) означают, что изображающая точка (x_1, \dots, x_n) должна быть приведена в момент времени $t = T$ на $(n - p)$ -мерную плоскость n -мерного пространства X , определяемую соотношениями

$$\sum_{k=1}^n c_{jk} x_k = K_j \quad (j = 1, \dots, p). \quad (11.119)$$

Условия, при которых такое приведение является возможным, получили название [36] *управляемости по y* .

Теорема. Для того чтобы система (115) была вполне управляемой по y , необходимо и достаточно, чтобы ранг матрицы

$$P = [CG \quad CAG \quad CA^2G \quad \dots \quad CA^{m-1}G] \quad (11.120)$$

был равен p .

Доказательство теоремы. Так как согласно (115)

$$x(t) = e^{At}x(0) + \int_0^t e^{A(t-\tau)}Gu(\tau) d\tau, \quad (11.121)$$

то соотношение (117) принимает вид

$$C \int_0^T e^{A(T-\tau)}Gu(\tau) d\tau = -Ce^{AT}x(0) + K. \quad (11.122)$$

Обозначая через $z(t)$ вектор

$$z(t) = Ce^{At}x(0) - K, \quad (11.123)$$

можно переписать соотношение (122) так:

$$C \int_0^T e^{A(T-\tau)}Gu(\tau) d\tau = -z(T). \quad (11.124)$$

Согласно (10.58)

$$e^{A(T-\tau)} = \sum_{k=0}^{m-1} \alpha_k(T-\tau) A^k, \quad (11.125)$$

и поэтому

$$C \int_0^T e^{A(T-\tau)}Gu(\tau) d\tau = \sum_{k=0}^{m-1} CA^kG \int_0^T u(\tau) \alpha_k(T-\tau) d\tau. \quad (11.126)$$

Соотношение (124) можно теперь переписать так:

$$[CG \quad CAG \quad CA^2G \quad \dots \quad CA^{m-1}G] \times \begin{bmatrix} \int_0^T u(\tau) \alpha_0(T-\tau) d\tau \\ \int_0^T u(\tau) \alpha_1(T-\tau) d\tau \\ \dots \\ \int_0^T u(\tau) \alpha_{m-1}(T-\tau) d\tau \end{bmatrix} = -z(T). \quad (11.127)$$

Далее будем считать, что число управлений r выбрано так, что выполняется условие

$$q = mr \geq p. \quad (11.128)$$

Матрица P , которая определена соотношением (120), является прямоугольной матрицей типа $p \times q$:

$$P = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} & \dots & P_{1q} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ P_{p1} & P_{p2} & \dots & P_{pq} \end{bmatrix}. \quad (11.129)$$

Через ξ обозначим вектор, элементы которого ξ_j ($j = 1, \dots, q$) имеют следующий вид:

$$\left. \begin{aligned} \xi_1 &= \int_0^T u_1(\tau) \alpha_0(T-\tau) d\tau, \\ \xi_2 &= \int_0^T u_2(\tau) \alpha_0(T-\tau) d\tau, \\ &\dots \\ \xi_r &= \int_0^T u_r(\tau) \alpha_0(T-\tau) d\tau, \\ \xi_{r+1} &= \int_0^T u_1(\tau) \alpha_1(T-\tau) d\tau, \\ &\dots \\ \xi_q &= \int_0^T u_r(\tau) \alpha_{m-1}(T-\tau) d\tau. \end{aligned} \right\} \quad (11.130)$$

Векторное уравнение (127), таким образом, принимает следующий вид:

$$P\xi = -z(T). \quad (11.131)$$

Векторному уравнению (131) соответствует система из p скалярных уравнений относительно q (где $q \geq p$) неизвестных ξ_1, \dots, ξ_q :

$$\left. \begin{aligned} P_{11}\xi_1 + P_{12}\xi_2 + \dots + P_{1q}\xi_q &= -z_1(T), \\ \dots \\ P_{p1}\xi_1 + P_{p2}\xi_2 + \dots + P_{pq}\xi_q &= -z_p(T). \end{aligned} \right\} \quad (11.132)$$

Если обозначить через Π_k ($k = 1, \dots, q$) векторы

$$\Pi_k = \begin{bmatrix} P_{1k} \\ \cdot \\ P_{pk} \end{bmatrix}, \quad (11.133)$$

то систему уравнений (132) можно представить так:

$$\sum_{k=1}^q \Pi_k \xi_k = -z(T). \quad (11.134)$$

Таким образом, вектор

$$z(T) = \begin{bmatrix} z_1(T) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ z_p(T) \end{bmatrix}$$

является линейной комбинацией векторов Π_k ($k = 1, \dots, q$), где $q \geq p$. Так как вектор $z(T)$ может быть любым, то из условия разрешимости уравнения (134) относительно ξ_1, \dots, ξ_q следует, что для того чтобы система (115) была вполне управляемой по y , необходимо и достаточно, чтобы среди векторов Π_k ($k = 1, \dots, q$) имелось p линейно независимых векторов, то есть чтобы ранг матрицы P был равен p . Теорема доказана.

Система значений ξ_1, \dots, ξ_q , удовлетворяющая уравнениям (132), в случае, когда $q > p$, будет *не единственной*. Определив значения ξ_1, \dots, ξ_q , надо из соотношений (130) найти закон управления $u_l = u_l(t)$ ($0 \leq t \leq T$; $l = 1, \dots, r$). Эта задача также допускает не единственное решение.

Покажем в качестве примера, что одним из возможных управлений, обеспечивающих выполнение условия (117)

$$y(T) = K,$$

является управление

$$\tilde{u}(t) = -G^* e^{A^*(T-t)} C^* \Psi^{-1} [C e^{AT} x(0) - K], \quad (11.135)$$

где через Ψ обозначена квадратная матрица типа $p \times p$:

$$\Psi = \int_0^T C e^{A(T-\tau)} G G^* e^{A^*(T-\tau)} C^* d\tau. \quad (11.136)$$

Действительно, при $u = \tilde{u}(t)$ имеем

$$\begin{aligned} & C e^{AT} \int_0^T e^{-A\tau} G \tilde{u}(\tau) d\tau = \\ & = - \int_0^T C e^{A(T-\tau)} G G^* e^{A^*(T-\tau)} C^* d\tau \Psi^{-1} [C e^{AT} x(0) - K] = -C e^{AT} x(0) + K. \end{aligned} \quad (11.137)$$

В соответствии с (115), (121) и (137) $y(T)$ будет

$$y(T) = Ce^{AT}x(0) + \int_0^T Ce^{A(T-\tau)}G\ddot{u}(\tau)d\tau = K,$$

то есть соотношение (117) удовлетворяется.

Выше (135) предполагалось, что матрица Ψ^{-1} существует. В п. 9 будет показано, что если система (115) вполне управляема по y , то Ψ является положительно-определенной матрицей, и, следовательно, обратная матрица Ψ^{-1} существует.

9. Условие управляемости линейной нестационарной системы в задаче с подвижными концами. Для системы, описываемой векторными уравнениями

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= A(t)x + G(t)u, \\ y &= C(t)x, \end{aligned} \right\} \quad (11.138)$$

где

$$\begin{aligned} x &= \begin{bmatrix} x_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{bmatrix}, \quad A(t) = \begin{bmatrix} A_{11}(t) & \dots & A_{1n}(t) \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ A_{n1}(t) & \dots & A_{nn}(t) \end{bmatrix}, \\ G(t) &= \begin{bmatrix} G_{11}(t) & \dots & G_{1r}(t) \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ C_{n1}(t) & \dots & G_{nr}(t) \end{bmatrix}, \\ u &= \begin{bmatrix} u_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ u_r \end{bmatrix}, \quad y = \begin{bmatrix} y_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ y_p \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} c_{11}(t) & \dots & c_{1n}(t) \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ c_{p1}(t) & \dots & c_{pn}(t) \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (11.139)$$

рассмотрим задачу о приведении вектора $y(t)$ к моменту времени $t = t_1$ в заданное состояние

$$y(t_1) = K. \quad (11.140)$$

Эта задача была изучена в п. 8 для линейных стационарных систем, где возможность выполнения соотношения (140) была названа управляемостью по y .

Теорема. Пусть $\Phi(t, \tau) = \theta(t)\theta^{-1}(\tau)$, где $\theta(t)$ — фундаментальная матрица решений системы, описываемой однородным векторным дифференциальным уравнением

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x, \quad (11.141)$$

а через $V(t_0, t_1)$ обозначена матрица

$$V(t_0, t_1) = \int_{t_0}^{t_1} C(t_1)\Phi(t_1, \tau)G(\tau)G^*(\tau)\Phi^*(t_1, \tau)C^*(t_1)d\tau. \quad (11.142)$$

Линейная нестационарная система (138) вполне управляема по u на отрезке времени $t_0 \leq t \leq t_1$, если и только если матрица $V(t_0, t_1)$, определяемая выражением (142), является положительно-определенной матрицей.

Доказательство теоремы.

1°. По условию теоремы матрица $V(t_0, t_1)$ является положительно-определенной матрицей. Следовательно, она является неособой матрицей, то есть $\det V(t_0, t_1) \neq 0$. Поэтому обратная матрица $V^{-1}(t_0, t_1)$ существует, и можно выбрать вектор управляющих сил $u(t)$ в следующем виде:

$$\tilde{u}(t) = -G^*(t)\Phi^*(t_1, t)C^*(t_1)V^{-1}(t_0, t_1)[C(t_1)\Phi(t_1, t_0)x(t_0) - K]. \quad (11.143)$$

Согласно (138) состояние системы в момент времени $t = t_1$ будет

$$x(t_1) = \Phi(t_1, t_0)x(t_0) + \int_{t_0}^{t_1} \Phi(t_1, \tau)G(\tau)u(\tau)d\tau. \quad (11.144)$$

При управлении $u = \tilde{u}(t)$ в соответствии с (138) и (144) будем иметь

$$\begin{aligned} y(t_1) &= C(t_1)x(t_1) = \\ &= C(t_1)\Phi(t_1, t_0)x(t_0) + C(t_1)\int_{t_0}^{t_1} \Phi(t_1, \tau)G(\tau)\tilde{u}(\tau)d\tau. \end{aligned} \quad (11.145)$$

Так как

$$\begin{aligned} C(t_1)\int_{t_0}^{t_1} \Phi(t_1, \tau)G(\tau)\tilde{u}(\tau)d\tau &= \\ &= -\int_{t_0}^{t_1} C(t_1)\Phi(t_1, \tau)G(\tau)G^*(\tau)\Phi^*(t_1, \tau)C(t_1)d\tau V^{-1}(t_0, t_1) \times \\ &\times [C(t_1)\Phi(t_1, t_0)x(t_0) - K] = -C(t_1)\Phi(t_1, t_0)x(t_0) + K, \end{aligned} \quad (11.146)$$

то выражение (145) принимает вид

$$y(t_1) = K.$$

Таким образом, управление $\tilde{u}(t)$, определяемое выражением (143), обеспечивает выполнение соотношения (140).

Заметим, что заданное выражением (143) управление $\tilde{u}(t)$, которое, как здесь доказано, приводит вектор $y(t)$ в состояние $y(t_1) = K$, не является *единственным*. Действительно, управление

$$u(t) = \tilde{u}(t) + v(t), \quad (11.147)$$

где $v(t)$ — любая r -мерная вектор-функция, удовлетворяющая условию

$$C(t_1) \int_{t_0}^{t_1} \Phi(t_1, \tau) G(\tau) v(\tau) d\tau = 0, \quad (11.148)$$

так же, как это следует из (145), приводит вектор $y(t)$ к моменту времени $t = t_1$ в состояние $y(t_1) = K$. Первая часть теоремы доказана.

2°. Доказательство второй части теоремы о том, что если система (138) вполне управляема по y , то матрица $V(t_0, t_1)$ будет положительно-определенной матрицей, полностью повторяет доказательство аналогичного утверждения для матрицы $W(t_0, t_1)$, приведенное в п. 6, раздел 2°, стр. 195.

§ 12. Оптимальное управление в системах с ограниченными ресурсами

1. Вариационные задачи в теории управления. В § 11 при рассмотрении вопросов управляемости на управляющие силы не накладывались априорные ограничения. Равным образом считались допустимыми любые возможные (при выборе тех или иных управляющих сил) законы изменения во времени фазовых координат системы.

В действительности, однако, ресурсы управляемой системы ограничены. Так, например, возможны ограничения модуля управляющей силы, мощности источника управления и др. По тем или иным причинам может также оказаться, что допустимые отклонения некоторых фазовых координат системы ограничены и т. д.

Выбор закона управления (то есть закона изменения управляющих сил), с учетом указанных выше ограничений, определяется целью управления. В общем случае целью управления можно считать достижение экстремума некоторого функционала, который характеризует собой критерий оптимальности системы

$$Q(x, z, u, t) = \min. \quad (12.1)$$

Здесь x — n -мерный вектор, элементы которого x_1, \dots, x_n являются фазовыми координатами системы, z — m -мерный вектор, элементы которого z_1, \dots, z_m являются входными сигналами, которые должна воспроизводить (или преобразовывать заданным образом) система, u — r -мерный вектор, элементы которого u_1, \dots, u_r являются управляющими силами, t — время.

Функционал Q является числом, зависящим от вида вектор-функций $x(t)$, $z(t)$, $u(t)$. Так, например, функционал Q может иметь вид

$$Q = \sum_{i=1}^m \int_0^T [x_{\sigma_i}(t) - z_i(t)]^2 dt, \quad (12.2)$$

где T — некоторая фиксированная величина. Функционал Q , зависящий согласно (2) от вида функций $x_{\sigma_i}(t)$, $z_i(t)$ ($i = 1, \dots, m$) на интервале времени $0 < t < T$ является мерой

качества воспроизведения управляемой системой входного векторного сигнала $z(t)$.

Во многих задачах требуется, чтобы траектория изображающей точки, проходящая через две заданные в фазовом пространстве точки $x(0)$ и $x(T)$, где T — фиксированная величина (то есть, фазовая траектория, переводящая систему из начального состояния $x(0)$ в некоторое заданное состояние $x(T)$, где T — наперед заданный момент времени), доставляла минимум (или максимум) некоторому функционалу

$$Q = \int_0^T G(x(t), u(t), t) dt, \quad (12.3)$$

где G — некоторая ограниченная скалярная функция переменных $x_1, \dots, x_n, u_1, u_2, \dots, u_r, t$.

Вид функции $G(x, u, t)$ определяется для каждой конкретной задачи. Так, например, если задано конечное состояние системы $x(T)$, но не фиксировано заранее значение конечного момента времени T , а функция G имеет вид $G \equiv 1$, получим, что $Q = T$, и условие (1) $Q = \min$ примет вид $T = \min$. Мы приходим, таким образом, к задаче о быстрейшем действии, в которой надо найти такой закон управления $u = u(t)$, удовлетворяющий наложенным на u ограничениям, при котором система была бы переведена за минимальное время T из начального положения $x(0)$ в заданное конечное положение $x(T)$.

Изложенное характеризует постановку задач теории оптимального управления. Эти задачи представляют собой вариационные задачи на условный экстремум функционалов, вид которых определяется принятым критерием оптимальности управляемой системы.

2. Метод динамического программирования Р. Беллмана.

Принцип оптимальности. Рассмотрим управляемую систему описываемую следующей системой скалярных дифференциальных уравнений:

$$\frac{dx_j}{dt} = f_j(x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_r) \quad (j = 1, \dots, n). \quad (12.4)$$

Здесь x_1, \dots, x_n — фазовые координаты системы, u_1, \dots, u_r — управляющие силы.

Вводя векторы

$$\left. \begin{aligned} x &= \begin{bmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad u = \begin{bmatrix} u_1 \\ \dots \\ u_r \end{bmatrix}, \\ f(x, u) &= \begin{bmatrix} f_1(x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_r) \\ \dots \\ f_n(x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_r) \end{bmatrix}, \end{aligned} \right\} \quad (12.5)$$

можно заменить систему скалярных дифференциальных уравнений (4) следующим векторным дифференциальным уравнением:

$$\frac{dx}{dt} = f(x, u). \quad (12.6)$$

Полагая, что на управляющие силы u_1, \dots, u_r наложены некоторые ограничения, потребуем при выборе этих сил выполнения условия

$$u \in \Omega, \quad (12.7)$$

где Ω — некоторая область в пространстве (u_1, \dots, u_r) , определяемая видом наложенных ограничений.

Пусть целью управления является минимизация функционала

$$Q = \int_0^T G(x(t), u(t)) dt, \quad (12.8)$$

где G — некоторая ограниченная скалярная функция переменных $x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_r$, а T — заданная фиксированная величина.

Метод динамического программирования основывается на сформулированном Р. Беллманом [8] *принципе оптимальности*. Этот принцип имеет место для систем, последующее движение которых полностью определяется состоянием этих систем в любой текущий момент времени. К таким системам относятся, например, системы, описываемые дифференциальными уравнениями (4), где под состоянием подразумевается положение системы в фазовом пространстве, системы, описываемые уравнениями в конечных разностях с дискретным аргументом и др. Принцип оптимальности сформулирован Беллманом так:

Оптимальное поведение обладает тем свойством, что, каковы бы ни были первоначальное состояние и решение в начальный момент, последующие решения должны составлять оптимальное поведение относительно состояния, получающегося в результате первого решения.

Указанная формулировка принципа оптимальности (названного Беллманом интуитивным) относится к системам весьма общего вида. Для управляемых систем, описываемых дифференциальными уравнениями (4), под «поведением» системы следует понимать движение этих систем, а термин «решение» относится к выбору закона изменения во времени управляющих сил.

Если в понятие состояния системы в данный момент времени t^* включить и предысторию изменения фазовых координат системы на интервале последствия $t^* - \tau < t < t^*$, то сформулированный здесь принцип оптимальности будет справедлив и для систем с последствием, то есть для систем, описываемых дифференциально-разностными уравнениями.

Для систем, описываемых дифференциальными уравнениями (4), принцип оптимальности совпадает с хорошо известным фактом, что часть экстремали является снова экстремалью.

В качестве примера [85] на рис. 12.1 показана проходящая через заданную точку $x(0)$ оптимальная траектория системы (4), то есть траектория, минимизирующая при условии (7) функционал (8), в котором значение T предполагается фиксированным. Значение $x(T)$ предполагается здесь заранее неизвестным. Точка $x(t_1)$ разбивает рассматриваемую траекторию на два участка 1 и 2. Участку 2 соответствует функционал

$$Q_2 = \int_{t_1}^T G(x(t), u(t)) dt. \quad (12.9)$$

Участок 2 может рассматриваться и как самостоятельная траектория. Эта траектория будет оптимальной, если она доставляет минимум функционалу (9).

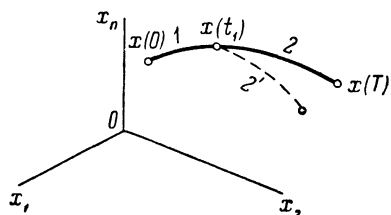


Рис. 12.1.

Принцип оптимальности утверждает, что *участок 2 оптимальной траектории 1—2 сам по себе является оптимальной траекторией системы (4), состояние которой при $t = t_1$ есть $x(t_1)$.*

Если допустить противное, то существует (рис. 12.1) другая траектория $2'$, доставляющая функционалу (9) значение меньшее, чем доставляет траектория 2. Но тогда на интервале времени $(0, T)$ оптимальной будет не траектория 1—2, а траектория 1— $2'$. Мы пришли к противоречию с исходными данными о том, что траектория 1—2 является оптимальной. Полученное противоречие и доказывает, что участок 2 оптимальной траектории 1—2 является в свою очередь оптимальной траекторией системы (4) на интервале времени (t_1, T) .

Заметим теперь, что утверждения принципа оптимальности относятся к последующему за данным состоянием движению системы. Для предшествующего данному состоянию движения системы они, вообще говоря, могут не иметь места.

Так, например, если задано лишь начальное состояние системы $x(0)$, то участок 1 оптимальной траектории 1—2 может сам

по себе и не быть оптимальной траекторией, то есть может и не доставлять минимума функционалу

$$Q_1 = \int_0^{t_1} G(x(t), u(t)) dt. \quad (12.10)$$

Только в том случае, когда задана конечная точка $x(t_1)$ участка I , этот участок сам по себе также будет оптимальной траекторией.

Таким образом, для управляемых систем принцип оптимальности утверждает, что *выбор оптимального управления определяется лишь состоянием системы в текущий момент времени.*

Это утверждение дает возможность получения приведенных ниже функциональных уравнений, определяющих закон изменения управляющих сил в задаче об оптимальном управлении.

Развитый Беллманом метод определения оптимального управления тесно связан с задачей вариационного исчисления о распространении возбуждения [24] и приводит к уравнениям типа уравнений Гамильтона—Якоби в частных производных.

Для дискретных систем метод Беллмана дает возможность многоэтапного определения управляющих сил.

§ 13. Применение динамического программирования к дискретным системам

1. Рекуррентное соотношение Беллмана. Многие управляемые системы описываются уравнениями в конечных разностях. Такие системы принято называть дискретными системами. К дискретным системам относятся импульсные системы, системы, в состав которых входят цифровые вычислительные устройства, и т. д.

Системы, описываемые дифференциальными уравнениями, принято (в этом смысле) называть системами непрерывного действия.

Любой системе обыкновенных дифференциальных уравнений можно поставить в соответствие эквивалентную ей систему уравнений в конечных разностях с непрерывным аргументом [77]. Для этого необходимо проинтегрировать заданную систему дифференциальных уравнений на конечном интервале времени $t_0 + \varepsilon \leq t < t_0 + \varepsilon + \tau$, где τ —фиксированный интервал дискретности, а ε (где $0 < \varepsilon < \tau$)—параметр, соответствующий некоторой точке, расположенной внутри интервала дискретности. Коэффициенты указанной системы уравнений в конечных разностях будут зависеть от ε и решение этой системы уравнений будет определять состояние рассматриваемой системы для любого момента времени t .

Полученная описанным способом система уравнений в конечных разностях будет представлять собой точные функциональные уравнения, связывающие между собой состояния системы в моменты времени, отстоящие друг от друга на величину, равную интервалу дискретности τ .

Если ограничиться изучением состояния системы лишь в дискретные моменты времени, промежутки между которыми равны интервалу дискретности τ , то можно фиксировать значение параметра ε , и тогда мы получим систему уравнений в конечных разностях с дискретным аргументом. Решение этой системы уравнений будет точно определять состояние системы в дискретные моменты времени, отстоящие друг от друга на величину $\tau = \text{const}$. Положение этих моментов времени внутри интервала дискретности фиксировано выбором параметра ε .

Получение указанных выше уравнений в конечных разностях, точно описывающих управляемую систему непрерывного действия, в достаточно сложных задачах может оказаться громоздким.

Приближенные уравнения в конечных разностях можно получить следующим образом.

Пусть управляемая система, описывается скалярным дифференциальным уравнением

$$\frac{d\tilde{x}}{dt} = f_1(\tilde{x}(t), \tilde{u}(t)), \quad (13.1)$$

где \tilde{x} — координата системы, а \tilde{u} — управляющая сила, которая должна удовлетворять ограничению

$$\tilde{u} \in \Omega. \quad (13.2)$$

Начальное состояние системы задано

$$[\tilde{x}(t)]_{t=0} = \tilde{x}(0),$$

и требуется найти управление $\tilde{u} = \tilde{u}(t)$, доставляющее минимум функционалу

$$Q = \int_0^T G_1(\tilde{x}(t), \tilde{u}(t)) dt + \varphi(\tilde{x}(T)), \quad (13.3)$$

где T — некоторая фиксированная величина. Будем считать, что

$$T = N\tau, \quad (13.4)$$

где N — некоторое целое число, а $\tau = \text{const}$ — достаточно малая величина, которую мы примем в качестве интервала дискретности. Ограничимся здесь изучением состояния системы лишь в дискретные моменты времени

$$t = \theta\tau \quad (\theta = 0, 1, 2, \dots, N). \quad (13.5)$$

Так как

$$\frac{d\bar{x}}{dt} \approx \frac{\bar{x}(t+\tau) - \bar{x}(t)}{\tau} = \frac{\bar{x}(\theta\tau + \tau) - \bar{x}(\theta\tau)}{\tau}, \quad (13.6)$$

то исходное дифференциальное уравнение (1) можно заменить следующим приближенным соотношением:

$$\bar{x}(\theta\tau + \tau) - \bar{x}(\theta\tau) = \tau f_1(\bar{x}(\theta\tau), \bar{u}(\theta\tau)). \quad (13.7)$$

Левая часть соотношения (7) представляет собой первую разность функции $\bar{x}(t)$, и поэтому соотношение (7) представляет собой уравнение в конечных разностях относительно неизвестной скалярной функции $\bar{x}(\theta\tau)$.

Так как аргумент функций \bar{x} и \bar{u} в правой части уравнения (7) является дискретным, то уравнение (7) является уравнением в конечных разностях с дискретным аргументом, и его решение определяет состояние системы лишь в дискретные моменты времени $t = \theta\tau$ ($\theta = 1, 2, \dots$).

Функционал (3) аппроксимируем интегральной суммой

$$Q = \tau \sum_{\theta=0}^{N-1} G_1(\bar{x}(\theta\tau), \bar{u}(\theta\tau)) + \varphi(\bar{x}(N\tau)). \quad (13.8)$$

Обозначая

$$x(\theta) = \bar{x}(\theta\tau), \quad u(\theta) = \bar{u}(\theta\tau), \quad (13.9)$$

$$\left. \begin{aligned} f(x(\theta), u(\theta)) &= \tau f_1(x(\theta), u(\theta)), \\ G(x(\theta), u(\theta)) &= \tau G_1(x(\theta), u(\theta)), \end{aligned} \right\} \quad (13.10)$$

придем в соответствии с (7), (2) и (8) к следующей задаче.

Для системы, описываемой скалярным уравнением в конечных разностях с дискретным аргументом

$$x(\theta + 1) = x(\theta) + f(x(\theta), u(\theta)), \quad (13.11)$$

начальное состояние которой задано

$$[x(\theta)]_{\theta=0} = x(0), \quad (13.12)$$

найти управление $u = u(\theta)$, удовлетворяющее ограничениям

$$u \in \Omega \quad (13.13)$$

и доставляющее минимум сумме

$$Q = \sum_{\theta=0}^{N-1} G(x(\theta), u(\theta)) + \varphi(x(N)), \quad (13.14)$$

где N — некоторая фиксированная величина.

Ниже при рассмотрении дискретных систем мы будем исходить из уравнений вида (11)—(14) (полагая в общем случае, что x , u , f являются векторами соответствующей размерности), не входя более в обсуждение вопроса

о том, как эти уравнения получить для конкретной системы, но полагая, однако, что эти уравнения являются точными (так как вообще точные разностные уравнения вида (11) могут быть получены).

Погрешность решений, доставляемых разностными уравнениями, полученными при помощи аппроксимации вида (6) (приведенной здесь лишь в виде иллюстрации), может оказаться весьма значительной, и приемлемость такой аппроксимации должна каждый раз обосновываться. Этот вопрос требует, однако, специальных исследований и здесь обсуждаться не будет.

Поставленная выше задача, описываемая уравнениями (11)–(14), состоит в том, чтобы найти совокупность значений $u(0)$, $u(1)$, $u(2)$, ..., $u(N-1)$, которая минимизирует сумму (14) при условиях (11), (12), (13).

Решение задачи начнем с последнего интервала времени $(N-1)\tau \leq t < N\tau$, предполагая, что состояние $x(N-1)$ нам известно. Согласно принципу оптимальности управление u на интервале времени $(N-1)\tau \leq t < N\tau$ должно быть выбрано с учетом ограничения (13) так, чтобы минимизировать соответствующую этому интервалу времени частичную сумму

$$Q_{N-1} = G(x(N-1), u(N-1)) + \varphi(x(N)). \quad (13.15)$$

Так как согласно (11)

$$x(N) = x(N-1) + f(x(N-1), u(N-1)), \quad (13.16)$$

то выражение (15) принимает вид

$$Q_{N-1} = G(x(N-1), u(N-1)) + \varphi[x(N-1) + f(x(N-1), u(N-1))]. \quad (13.17)$$

Поскольку состояние $x(N-1)$ предполагается известным, то выражение (17) зависит лишь от *одной* неизвестной величины $u(N-1)$, которая должна быть найдена с учетом ограничения (13) из условия минимизации величины Q_{N-1} . Найденное оптимальное значение $u(N-1)$ обозначим через $u^*(N-1)$. Получаемое при этом минимальное значение Q_{N-1} обозначим через S_{N-1} :

$$\min_{u(N-1) \in \Omega} Q_{N-1} = S_{N-1} = S_{N-1}(x(N-1)). \quad (13.18)$$

В (18) явно указано, что минимальное значение Q_{N-1} зависит от состояния системы $x(N-1)$.

В соответствии с (17) соотношение (18) можно переписать так:

$$\begin{aligned} S_{N-1}(x(N-1)) &= \min_{u(N-1) \in \Omega} Q_{N-1} = \\ &= \min_{u(N-1) \in \Omega} [G(x(N-1), u(N-1)) + \varphi(x(N))] = \\ &= \min_{u(N-1) \in \Omega} \{G(x(N-1), u(N-1)) + \varphi[x(N-1) + \\ &\quad + f(x(N-1), u(N-1))]\}. \end{aligned} \quad (13.19)$$

Рассмотрим теперь интервал времени $(N-2)\tau \leq t < N\tau$, состоящий из последнего и предпоследнего интервалов. Согласно (14) этому интервалу времени соответствует частичная сумма

$$Q_{N-2} = G(x(N-2), u(N-2)) + G(x(N-1), u(N-1)) + \varphi(x(N)) \quad (13.20)$$

или в соответствии с (15)

$$Q_{N-2} = G(x(N-2), u(N-2)) + Q_{N-1}. \quad (13.21)$$

Состояние $x(N-2)$ будем предполагать известным. Из принципа оптимальности следует, что лишь состояние $x(N-2)$ и цель управления (минимизация Q_{N-2}) определяют оптимальное управление на интервале времени $[(N-2)\tau, N\tau)$.

Найдем теперь величину S_{N-2} , то есть минимум Q_{N-2} по $u(N-2)$ и $u(N-1)$. Учтем при этом, что минимум по $u(N-1)$ частичной суммы Q_{N-1} уже найден выше и этот минимум

$$S_{N-1} = S_{N-1}(x(N-1))$$

представлен в виде функции от $x(N-1)$. Так как согласно (11)

$$x(N-1) = x(N-2) + f(x(N-2), u(N-2)), \quad (13.22)$$

то S_{N-1} принимает теперь вид

$$S_{N-1}(x(N-1)) = S_{N-1}[x(N-2) + f(x(N-2), u(N-2))]. \quad (13.23)$$

Поскольку первое слагаемое в правой части (21) не зависит от $u(N-1)$, то будем иметь

$$\begin{aligned} S_{N-2}(x(N-2)) &= \min_{\substack{u(N-2) \in \Omega \\ u(N-1) \in \Omega}} Q_{N-2} = \\ &= \min_{u(N-2) \in \Omega} [G(x(N-2), u(N-2)) + S_{N-1}(x(N-1))] = \\ &= \min_{u(N-2) \in \Omega} \{G(x(N-2), u(N-2)) + S_{N-1}[x(N-2) + \\ &\quad + f(x(N-2), u(N-2))]\}. \quad (13.24) \end{aligned}$$

Таким образом, выражение (24) приведено к такому виду, что минимизацию требуется выполнить лишь по одной переменной, а именно по $u(N-2)$. Найденное при этом значение $u(N-2)$ и будет искомым оптимальным значением, которое мы обозначим через $u^*(N-2)$.

Из выражения (24) видно, что выбор $u(N-2)$ из условия минимума одного лишь первого слагаемого в выражении (21), то есть из условия применения принципа оптимальности лишь к интервалу $(N-2)\tau \leq t < (N-1)\tau$, был бы ошибочным, что и указывалось выше при обсуждении принципа оптимальности.

Обратимся теперь к интервалу времени $(N-3)\tau \leq t < N\tau$, состоящему из трех последних интервалов. Этому интервалу времени согласно (14) соответствует частичная сумма

$$Q_{N-3} = G(x(N-3), u(N-3)) + G(x(N-2), u(N-2)) + \\ + G(x(N-1), u(N-1)) + \varphi(x(N)) \quad (13.25)$$

или согласно (20)

$$Q_{N-3} = G(x(N-3), u(N-3)) + Q_{N-2}. \quad (13.26)$$

Состояние $x(N-3)$ будем предполагать известным. Согласно принципу оптимальности лишь состояние $x(N-3)$ и цель управления (минимизация Q_{N-3}) определяют оптимальное управление на интервале времени $[(N-3)\tau, N\tau)$.

Найдем теперь величину S_{N-3} , то есть минимум Q_{N-3} по $u(N-3)$, $u(N-2)$ и $u(N-1)$. Учтем при этом, что минимум по $u(N-2)$ и $u(N-1)$ частичной суммы Q_{N-2} уже найден выше (24) и этот минимум

$$S_{N-2} = S_{N-2}(x(N-2))$$

представлен в виде функции от $x(N-2)$. Так как согласно (11)

$$x(N-2) = x(N-3) + f(x(N-3), u(N-3)), \quad (13.27)$$

то S_{N-2} имеет вид

$$S_{N-2}(x(N-2)) = S_{N-2}[x(N-3) + f(x(N-3), u(N-3))]. \quad (13.28)$$

Поскольку первое слагаемое в правой части (26) не зависит от $u(N-2)$ и $u(N-1)$, то будем иметь

$$S_{N-3}(x(N-3)) = \min_{\substack{u(N-3) \in \Omega \\ u(N-2) \in \Omega \\ u(N-1) \in \Omega}} Q_{N-3} = \\ = \min_{u(N-3) \in \Omega} [G(x(N-3), u(N-3)) + S_{N-2}(x(N-2))] = \\ = \min_{u(N-3) \in \Omega} \{G(x(N-3), u(N-3)) + \\ + S_{N-2}[x(N-3) + f(x(N-3), u(N-3))]\}. \quad (13.29)$$

Выражение (29) приведено к такому виду, что минимизацию требуется выполнить лишь по одной переменной, а именно по $u(N-3)$. Найденное при этом значение $u(N-3)$ будет искомым оптимальным значением, которое мы обозначим через $u^*(N-3)$.

Нетрудно теперь получить общую (рекуррентную) формулу, рассматривая интервал времени $(N-k)\tau \leq t < N\tau$ ($k = 2, 3, \dots, N$). Аналогично (24) и (29) будем иметь

$$\begin{aligned}
 S_{N-k}(x(N-k)) &= \min_{\substack{u(N-k) \in \Omega \\ u(N-k+1) \in \Omega \\ \dots \\ u(N-1) \in \Omega}} Q_{N-k} = \\
 &= \min_{u(N-k) \in \Omega} \{G(x(N-k), u(N-k)) + \\
 &+ S_{N-k+1}[x(N-k) + f(x(N-k), u(N-k))]\} \quad (k = 2, 3, \dots, N).
 \end{aligned}
 \tag{13.30}$$

Выражение (30) приведено к такому виду, что минимизацию требуется выполнить лишь по одной переменной, а именно по $u(N-k)$. Найденное при этом значение $u(N-k)$ будет искомым оптимальным значением, которое мы обозначим через $u^*(N-k)$.

Таким образом, при помощи (19) и (30) будут найдены

$$\left. \begin{aligned}
 u^*(N-1) &= \hat{u}(x(N-1)), \\
 u^*(N-2) &= \hat{u}(x(N-2)), \\
 &\dots \\
 u^*(1) &= \hat{u}(x(1)), \\
 u^*(0) &= \hat{u}(x(0)).
 \end{aligned} \right\} \tag{13.31}$$

В выражениях (31) явно указано, что найденные из рассмотрения частичных интервалов времени $[(N-j)\tau, N\tau)$ ($j = 1, 2, \dots, N$) значения $u^*(N-j)$ выражены в виде функций от состояния системы $x(N-j)$ в начале частичного интервала.

Так как состояние $x(0)$ задано, то значение $u^*(0)$ определится. Тогда согласно (11) найдется состояние $x(1)$ и определится значение $u^*(1)$. После этого согласно (11) найдется состояние $x(2)$ и определится значение $u^*(2)$ и т. д.

Таким образом, изложенный метод позволяет полностью определить оптимальное управление на заданном промежутке времени $[0, N\tau)$.

В построенном выше алгоритме динамического программирования для системы (11) существенную роль играло предположение о том, что конечный момент времени функционирования системы $T = N\tau$ фиксирован. Построение алгоритма динамического программирования для случая, когда значение T заранее не фиксировано, как это имеет место, например, в задаче о быстрейшем действии, приводится ниже.

2. Многомерные дискретные системы. Построенный выше для системы (11) алгоритм динамического программирования можно применить и для системы, описываемой векторным уравнением

в конечных разностях или системой скалярных уравнений в конечных разностях

$$x_j(\theta + 1) = x_j(\theta) + f_j(x_1(\theta), \dots, x_n(\theta), u_1(\theta), \dots, u_r(\theta)) \quad (13.32)$$

$$(j = 1, \dots, n).$$

Вводя векторы

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad u = \begin{bmatrix} u_1 \\ \dots \\ u_r \end{bmatrix}, \quad f(x, u) = \begin{bmatrix} f_1(x, u) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ f_n(x, u) \end{bmatrix}, \quad (13.33)$$

где для краткости обозначено

$$f_j(x, u) = f_j(x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_r),$$

можно систему разностных уравнений (32) заменить векторным разностным уравнением

$$x(\theta + 1) = x(\theta) + f(x(\theta), u(\theta)). \quad (13.34)$$

Функции Q , G и φ , входящие в выражение (14), будут в рассматриваемой здесь задаче скалярными функциями векторных аргументов $x(\theta)$, $u(\theta)$ ($\theta = 0, 1, \dots, N-1$) и $x(N)$.

Как нетрудно видеть, соотношения (19) и (30) сохраняют здесь свой вид, если только под x , u и f подразумевать векторы (33).

Существенное отличие состоит, однако, в том, что выражение в фигурных скобках в правой части соотношения (19) теперь будет функцией r скалярных переменных $u_1(N-1)$, $u_2(N-1)$, \dots , $u_r(N-1)$ и минимум этой функции должен быть найден по всем этим переменным. Аналогично и в соотношении (30) должен быть найден минимум по r переменным $u_1(N-k)$, $u_2(N-k)$, \dots , $u_r(N-k)$.

Скалярная функция

$$S_{N-j} = S_{N-j}(x(N-j)) \quad (j = 1, \dots, N)$$

является теперь функцией векторного аргумента $x(N-j)$. Определяемое на каждом этапе оптимальное управление — вектор $u^*(N-j)$, аналогично (31) будет функцией состояния системы

$$u^*(N-j) = \hat{u}(x(N-j)) \quad (j = 1, \dots, N). \quad (13.35)$$

Функция $\hat{u}(x(N-j))$ является векторной функцией векторного аргумента $x(N-j)$.

§ 14. Применение динамического программирования к системам непрерывного действия

1. Задача с фиксированным временем и свободным концом траектории. Рассмотрим управляемую систему, описываемую векторным дифференциальным уравнением

$$\frac{dx}{dt} = f(x, u, t), \tag{14.1}$$

где x , u и \dot{f} — векторы следующего вида:

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad u = \begin{bmatrix} u_1 \\ \dots \\ u_r \end{bmatrix}, \quad \dot{f}(x, u, t) = \begin{bmatrix} \dot{f}_1(x, u, t) \\ \dots \\ \dot{f}_n(x, u, t) \end{bmatrix}. \tag{14.2}$$

Начальное состояние системы задано

$$[x(t)]_{t=0} = x(0). \tag{14.3}$$

Требуется найти управление $u = u(t)$, удовлетворяющее ограничениям

$$u \in \Omega \tag{14.4}$$

и доставляющее минимум функционалу

$$Q = \int_0^T G(x(t), u(t), t) dt, \tag{14.5}$$

где T — некоторая фиксированная величина.

Пусть найдена оптимальная траектория системы (1) (рис. 14.1), проходящая через заданную точку $x(0)$, то есть траектория, минимизирующая при условии (4) функционал (5). Значение $x(T)$ в рассматриваемой задаче заранее не задано.

Минимальное значение функционала Q , соответствующее оптимальной траектории, обозначим через $S(x(0), 0)$.

На рис. 14.1 указаны положения изображающей точки на оптимальной траектории в моменты времени t и $t' = t + \Delta t$.

Состояние системы в момент времени t будет $x(t)$. Состояние системы в момент времени $t' = t + \Delta t$ обозначим так:

$$x(t + \Delta t) = x(t') = x'. \tag{14.6}$$

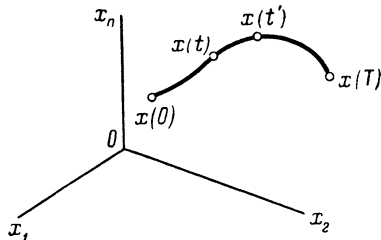


Рис. 14.1.

Согласно принципу оптимальности участок оптимальной траектории от точки $x(t)$ до точки $x(T)$ сам по себе является оптимальной траекторией, которая доставляет минимум функционалу

$$Q_t = \int_t^T G(x, u, v) dv. \quad (14.7)$$

Это минимальное значение функционала (7) обозначим через $S(x(t), t)$ или для краткости $S(x, t)$.

Аналогично участок оптимальной траектории от точки $x(t')$ (где $t' = t + \Delta t$) до точки $x(T)$ также сам по себе является оптимальной траекторией, доставляющей минимум функционалу

$$Q_{t'} = \int_{t'}^T G(x, u, v) dv \quad (t' = t + \Delta t). \quad (14.8)$$

Минимальное значение функционала (8) обозначим так:

$$S(x(t + \Delta t), t + \Delta t) = S(x', t'). \quad (14.9)$$

По принятому выше определению

$$S(x, t) = \min_{u(v) \in \Omega} \int_t^T G(x(v), u(v), v) dv. \quad (14.10)$$

Интеграл в правой части выражения (10) можно, учитывая малость Δt , представить так:

$$\begin{aligned} \int_t^T G(x(v), u(v), v) dv &= \int_t^{t'+\Delta t} G(x(v), u(v), v) dv + \\ &+ \int_{t'+\Delta t}^T G(x(v), u(v), v) dv = G(x(t), u(t), t) \Delta t + \\ &+ o_1(\Delta t) + \int_{t'}^T G(x(v), u(v), v) dv, \end{aligned} \quad (14.11)$$

где предполагается, что функция $u(t)$ непрерывна на полуинтервале $[t, t + \Delta t)$. Выражение (10) принимает вид

$$\begin{aligned} S(x, t) &= \min_{u(t) \in \Omega} [G(x(t), u(t), t) \Delta t + \\ &+ \min_{u(v) \in \Omega} \int_{t'}^T G(x(v), u(v), v) dv] + o_1(\Delta t). \end{aligned} \quad (14.12)$$

Первое слагаемое в квадратной скобке в выражении (12) зависит лишь от значения управления u в момент t , то есть от $u(t)$. Второе слагаемое в квадратной скобке надо минимизировать на множестве всех допустимых управлений $u(v)$ в интервале времени $t' < v < T$. Это минимальное значение, которое мы обозначили через $S(x', t')$, является в свою очередь функцией от состояния системы $x' = x(t')$. Последнее же зависит от управления u на интервале $(t, t + \Delta t)$ или, с точностью до $o_1(\Delta t)$, от значения $u(t)$ в момент времени t . Поэтому в соотношении (12) минимизируется по $u(t)$ все выражение, заключенное в квадратные скобки, а не только его первое слагаемое.

Учитывая принятое здесь обозначение

$$S(x', t') = \min_{u(v) \in \Omega} \int_{t'}^T G(x(v), u(v), v) dv, \quad (14.13)$$

перепишем соотношение (12) так:

$$S(x, t) = \min_{u(t) \in \Omega} [G(x(t), u(t), t) \Delta t + S(x', t')] + o_1(\Delta t). \quad (14.14)$$

Нетрудно видеть, что соотношение (14), которым связаны $S(x, t)$ и $S(x', t')$, можно получить также из (13.30), если учесть, что моментам времени $(N-k)\tau$ и $(N-k+1)\tau$ здесь соответствуют моменты времени t и $t' = t + \Delta t$. Заметим при этом, что в функционале (13.3) подынтегральная функция была обозначена через G_1 , а входящая в выражение (13.30) функция G согласно (13.10) имеет вид $G = \tau G_1$. Поэтому вместо функции $G(x(N-k), u(N-k))$, входящей в выражение (13.30), здесь в соответствии с (5) надо подставить функцию $G(x(t), u(t), t) \Delta t = G(x, u, t) \Delta t$.

Таким образом, рекуррентное соотношение (13.30) здесь должно быть заменено соотношением

$$S(x, t) = \min_{u(t) \in \Omega} [G(x(t), u(t), t) \Delta t + S(x', t')] + o_1(\Delta t),$$

где $o_1(\Delta t)$ — величина высшего порядка малости, чем Δt . Эта величина добавлена потому, что при выводе соотношения (13.30) мы исходили из разностного уравнения (13.7), которое было получено при помощи приближенного соотношения (13.6), содержащего погрешность порядка $o_1(\tau)$. Входящее в выражение (13.6) приращение аргумента τ здесь заменено через Δt .

Заметим, что в соответствии с (1)

$$\begin{aligned} x' &= x(t + \Delta t) = x(t) + \frac{dx}{dt} \Delta t + o_2(\Delta t) = \\ &= x(t) + f(x(t), u(t), t) \Delta t + o_2(\Delta t). \end{aligned} \quad (14.15)$$

Предположим теперь, что функция S непрерывна и всюду имеет непрерывные частные производные по всем своим аргументам

$$\frac{\partial S}{\partial x_i} \quad (i = 1, \dots, n), \quad \frac{\partial S}{\partial t}.$$

Это предположение весьма существенно, так как во многих задачах оно не имеет места и для этих задач последующие рассуждения требуют дополнительного обоснования [14].

При сделанном выше предположении будем в соответствии с (15) иметь

$$\begin{aligned} S(x', t') &= S(x(t + \Delta t), t + \Delta t) = \\ &= S(x(t) + f(x(t), u(t), t)\Delta t + o_2(\Delta t), t + \Delta t) = \\ &= S(x, t) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial S(x, t)}{\partial x_i} f_i(x, u, t)\Delta t + \frac{\partial S(x, t)}{\partial t} \Delta t + o_3(\Delta t). \end{aligned} \quad (14.16)$$

Обозначая через

$$\langle \text{grad } S, f \rangle = \frac{\partial S}{\partial x_1} f_1 + \frac{\partial S}{\partial x_2} f_2 + \dots + \frac{\partial S}{\partial x_n} f_n, \quad (14.17)$$

скалярное произведение векторов

$$\text{grad } S = \begin{bmatrix} \frac{\partial S}{\partial x_1} \\ \dots \\ \frac{\partial S}{\partial x_n} \end{bmatrix}, \quad f(x, u, t) = \begin{bmatrix} f_1(x, u, t) \\ \dots \\ f_n(x, u, t) \end{bmatrix},$$

можно переписать выражение (16) так:

$$\begin{aligned} S(x', t') &= S(x, t) + \langle \text{grad } S(x, t), f(x, u, t) \rangle \Delta t + \\ &\quad + \frac{\partial S(x, t)}{\partial t} \Delta t + o_3(\Delta t). \end{aligned} \quad (14.18)$$

Подставляя выражение (18) в соотношение (14), получим

$$\begin{aligned} S(x, t) &= \min_{u \in \Omega} \left[G(x, u, t)\Delta t + S(x, t) + \right. \\ &\quad \left. + \langle \text{grad } S(x, t), f(x, u, t) \rangle \Delta t + \frac{\partial S(x, t)}{\partial t} \Delta t + o_3(\Delta t) \right] + o_1(\Delta t). \end{aligned} \quad (14.19)$$

Согласно (10) функция $S(x, t)$ получена в результате минимизации функционала $\int_t^T G(x(v), u(v), v) dv$ по u на интервале $t < v < T$, то есть функция $S(x, t)$ уже не содержит u . Поэтому содержащиеся в квадратных скобках в (19) слагаемые $S(x, t)$ и $\frac{\partial S(x, t)}{\partial t} \Delta t$ можно вынести за знак \min и переписать соотношение (19) так:

$$\begin{aligned} S(x, t) &= S(x, t) + \frac{\partial S(x, t)}{\partial t} \Delta t + \min_{u \in \Omega} [G(x, u, t)\Delta t + \\ &\quad + \langle \text{grad } S(x, t), f(x, u, t) \rangle \Delta t + o_3(\Delta t)] + o_1(\Delta t), \end{aligned}$$

или

$$-\frac{\partial S(x, t)}{\partial t} = \min_{u \in \Omega} [G(x, u, t) + \langle \text{grad } S(x, t), f(x, u, t) \rangle] + \frac{o_4(\Delta t)}{\Delta t}. \quad (14.20)$$

Так как $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{o_4(\Delta t)}{\Delta t} = 0$, то, переходя в (20) к пределу при $\Delta t \rightarrow 0$, получим

$$-\frac{\partial S(x, t)}{\partial t} = \min_{u \in \Omega} [G(x, u, t) + \langle \text{grad } S(x, t), f(x, u, t) \rangle]. \quad (14.21)$$

Уравнение (21) [9] называется *уравнением Беллмана*.

Так как в результате минимизации по u выражения в квадратных скобках правая часть уравнения (21) не будет содержать u , то уравнение (21) будет нелинейным уравнением первого порядка в частных производных типа уравнений Гамильтона — Якоби. Функция u , которая доставляет минимум выражению в квадратных скобках в (21), является искомым оптимальным управлением u^* . Эта функция будет, однако, зависеть от $\text{grad } S(x, t)$. Только получив решение уравнения в частных производных (21) (в котором уже выполнена минимизация по u), мы найдем явный вид $\text{grad } S(x, t)$, а следовательно, и явный вид оптимального управления u^* .

Граничные условия для уравнения (21) будут следующими: для функционала (5) $S(x, T) = S(x(T), T) = 0$; для функционала (13.3) $S(x, T) = \varphi(x(T))$.

Подчеркнем теперь, что при выводе уравнения (21) мы исходили из найденной уже оптимальной траектории системы (1). Для всякой оптимальной траектории в предположении гладкости функции $S(x, t)$, уравнение (21) будет иметь место. Таким образом, уравнение Беллмана дает, при сделанных выше предположениях о гладкости функции $S(x, t)$, *необходимые* условия оптимальности. Вопрос о достаточных условиях оптимальности требует отдельного рассмотрения.

Пример 1. Рассмотрим систему, описываемую следующими уравнениями [85]:

$$\frac{dx_1}{dt} = ux_1 + x_2,$$

$$\frac{dx_2}{dt} = u^2.$$

Предположим, что подынтегральная функция в функционале (5) имеет вид

$$G = G(x_1, x_2, t).$$

Как следует из (1), в рассматриваемом примере

$$\begin{aligned} f_1(x, u) &= ux_1 + x_2, \\ f_2(x, u) &= u^2. \end{aligned}$$

Уравнение Беллмана (21) здесь принимает вид

$$-\frac{\partial S}{\partial t} = \min_u K(x_1, x_2, u),$$

где

$$K(x_1, x_2, u) = G(x_1, x_2, t) + \frac{\partial S}{\partial x_1}(ux_1 + x_2) + \frac{\partial S}{\partial x_2}u^2.$$

Так как

$$\frac{dK}{du} = \frac{\partial S}{\partial x_1}x_1 + 2\frac{\partial S}{\partial x_2}u, \quad \frac{d^2K}{du^2} = 2\frac{\partial S}{\partial x_2},$$

то в случае, когда $\frac{\partial S}{\partial x_2} > 0$, функция K будет иметь минимум при $u = u^*$, где

$$u^* = -\frac{1}{2}\frac{\partial S}{\partial x_1}x_1 \frac{1}{\frac{\partial S}{\partial x_2}}.$$

Минимальное значение $[K(x_1, x_2, u)]_{u=u^*}$ будет следующим:

$$\min_u K(x_1, x_2, u) = K(x_1, x_2, u^*) = G(x_1, x_2, t) + \frac{\partial S}{\partial x_1}x_2 - \frac{1}{4}x_1^2 \left(\frac{\partial S}{\partial x_1}\right)^2 \frac{1}{\frac{\partial S}{\partial x_2}}.$$

Таким образом, уравнение Беллмана (21) в рассматриваемом примере принимает вид

$$-\frac{\partial S}{\partial t} = G(x_1, x_2, t) + \frac{\partial S}{\partial x_1}x_2 - \frac{1}{4}x_1^2 \left(\frac{\partial S}{\partial x_1}\right)^2 \frac{1}{\frac{\partial S}{\partial x_2}}.$$

Пример 2. В предыдущем примере на управление u не было наложено ограничений. Рассмотрим теперь систему, описываемую уравнениями

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= u_1x_1 + x_2, \\ \frac{dx_2}{dt} &= u_2. \end{aligned}$$

Пусть подынтегральная функция в функционале (5) имеет вид

$$G = G(x_1, x_2, t).$$

На управления u_1, u_2 наложены ограничения

$$-1 \leq u_i \leq 1 \quad (i = 1, 2).$$

Согласно (1) в рассматриваемом примере

$$\begin{aligned} f_1(x, u) &= u_1x_1 + x_2, \\ f_2(x, u) &= u_2. \end{aligned}$$

Уравнение Беллмана (21) принимает вид

$$-\frac{\partial S}{\partial t} = \min_{\substack{-1 \leq u_1 \leq 1 \\ -1 \leq u_2 \leq 1}} K(x_1, x_2, u),$$

где

$$K(x_1, x_2, u) = G(x_1, x_2, t) + \frac{\partial S}{\partial x_1}(u_1 x_1 + x_2) + \frac{\partial S}{\partial x_2} u_2.$$

Оптимальное управление u_i^* , доставляющее минимум функции $K(x_1, x_2, u)$, будет следующим:

$$u_1^* = -\operatorname{sign}\left(x_1 \frac{\partial S}{\partial x_1}\right), \quad u_2^* = -\operatorname{sign} \frac{\partial S}{\partial x_2}.$$

Таким образом, при наложенных на управление ограничениях $|u_i| \leq 1$ ($i = 1, 2$) минимальное значение $[K(x_1, x_2, u)]_{u=u^*}$ имеет вид

$$[K(x_1, x_2, u)]_{u=u^*} = G(x_1, x_2, t) - \left| x_1 \frac{\partial S}{\partial x_1} \right| + x_2 \frac{\partial S}{\partial x_1} - \left| \frac{\partial S}{\partial x_2} \right|.$$

Уравнение Беллмана (21) принимает в рассматриваемом здесь примере следующий вид:

$$-\frac{\partial S}{\partial t} = G(x_1, x_2, t) - \left| x_1 \frac{\partial S}{\partial x_1} \right| + x_2 \frac{\partial S}{\partial x_1} - \left| \frac{\partial S}{\partial x_2} \right|.$$

Заметим, что при наложенных здесь ограничениях на управления $-1 \leq u_i \leq 1$ ($i = 1, 2$) функция $S(x_1, x_2, t)$ не будет всюду гладкой (см. ниже, § 15). Полученное в настоящем примере уравнение Беллмана поэтому должно рассматриваться лишь в области, где функция S непрерывна и имеет непрерывные частные производные по всем своим аргументам.

2. Задача с закрепленным концом траектории и свободным временем. Управляемую систему, описываемую дифференциальными уравнениями

$$\frac{dx_j}{dt} = f_j(x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_r) \quad (j = 1, \dots, n), \quad (14.22)$$

которым эквивалентно векторное уравнение

$$\frac{dx}{dt} = f(x, u), \quad (14.23)$$

где x , u и f — векторы следующего вида:

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad u = \begin{bmatrix} u_1 \\ \dots \\ u_r \end{bmatrix}, \quad f(x, u) = \begin{bmatrix} f_1(x, u) \\ \cdot \\ \cdot \\ f_n(x, u) \end{bmatrix},$$

требуется перевести из точки $x(t_0) = x^0$ фазового пространства X в заданную точку x^* . Момент времени t_1 , в который изображающая точка попадет в точку x^* , заранее не фиксируется.

Управление $u = u(t)$ должно удовлетворять ограничениям

$$u \in \Omega, \quad (14.24)$$

и его надо выбрать так, чтобы функционал

$$Q = \int_{t_0}^{t_1} G(x(v), u(v)) dv \quad (14.25)$$

принимал наименьшее возможное значение.

Удовлетворяющее этим условиям управление, соответствующую ему траекторию и промежуток времени $t_1 - t_0$ будем считать *оптимальными*.

Полученное при указанных выше условиях наименьшее возможное значение Φ функционала Q будет функцией от начального состояния x^0 системы

$$\Phi = \Phi(x^0) = \Phi(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0). \quad (14.26)$$

В предположении, что функция Φ непрерывна и всюду имеет непрерывные частные производные по всем своим аргументам, можно получить уравнение в частных производных (уравнение Беллмана), которому эта функция удовлетворяет.

По определению

$$\Phi(x^0) = \Phi(x(t_0)) = \min_{u(v) \in \Omega} \int_{t_0}^{t_1} G(x(v), u(v)) dv. \quad (14.27)$$

Интеграл в правой части (27) можно представить в виде

$$\int_{t_0}^{t_1} G(x(v), u(v)) dv = \int_{t_0}^{t_0 + \Delta t} G(x(v), u(v)) dv + \int_{t_0 + \Delta t}^{t_1} G(x(v), u(v)) dv. \quad (14.28)$$

Для малых значений Δt выражение (28) можно переписать так:

$$\int_{t_0}^{t_1} G(x(v), u(v)) dv = G(x(t_0), u(t_0)) \Delta t + o_1(\Delta t) + \int_{t_0 + \Delta t}^{t_1} G(x(v), u(v)) dv, \quad (14.29)$$

где предполагается, что функция $u(t)$ непрерывна на полуинтервале $[t_0, t_0 + \Delta t)$. Выражение (27) принимает вид

$$\Phi(x^0) = \min_{u(t_0) \in \Omega} \left[G(x(t_0), u(t_0)) \Delta t + \min_{u(v) \in \Omega} \int_{t_0 + \Delta t}^{t_1} G(x(v), u(v)) dv \right] + o_2(\Delta t). \quad (14.30)$$

Необходимость знака \min перед всей квадратной скобкой в (30) обосновывается теми же рассуждениями, которые были изложены при выводе соотношения (12).

Второе слагаемое в квадратных скобках в выражении (30) есть $\Phi(x(t_0 + \Delta t))$, и выражение (30) можно переписать так:

$$\Phi(x(t_0)) = \min_{u(t_0) \in \Omega} [G(x(t_0), u(t_0)) \Delta t + \Phi(x(t_0 + \Delta t))] + o_2(\Delta t). \quad (14.31)$$

Поскольку согласно (23)

$$\begin{aligned} x(t_0 + \Delta t) &= x(t_0) + \left(\frac{dx}{dt}\right)_{t=t_0} \Delta t + o_3(\Delta t) = \\ &= x(t_0) + f(x(t_0), u(t_0)) \Delta t + o_3(\Delta t), \end{aligned} \quad (14.32)$$

то, при сделанном выше предположении относительно гладкости функции $\Phi(x^0)$, будем иметь

$$\begin{aligned} \Phi(x(t_0 + \Delta t)) &= \Phi(x(t_0)) + \\ &+ \sum_{i=1}^n \left[\frac{\partial \Phi(x)}{\partial x_i} \right]_{x=x(t_0)} f_i(x(t_0), u(t_0)) \Delta t + o_4(\Delta t). \end{aligned} \quad (14.33)$$

Подставим теперь выражение (33) в (31). Учитывая, что функция $\Phi(x(t_0))$, полученная в результате минимизации функционала (25), уже не содержит u , можно вынести $\Phi(x(t_0))$ за знак \min в выражении (31). Тогда получим

$$\begin{aligned} \min_{u(t_0) \in \Omega} \left\{ G(x(t_0), u(t_0)) \Delta t + \right. \\ \left. + \sum_{i=1}^n \left[\frac{\partial \Phi(x)}{\partial x_i} \right]_{x=x(t_0)} f_i(x(t_0), u(t_0)) \Delta t \right\} + o(\Delta t) = 0. \end{aligned} \quad (14.34)$$

В качестве начального состояния можно принять любое текущее состояние $x(t)$ и переписать соответственно соотношение (34)

$$\min_{u \in \Omega} \left[G(x, u) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial \Phi(x)}{\partial x_i} f_i(x, u) \right] + \frac{o(\Delta t)}{\Delta t} = 0. \quad (14.35)$$

Поскольку $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{o(\Delta t)}{\Delta t} = 0$, то, переходя в (35) к пределу при $\Delta t \rightarrow 0$, получим

$$\min_{u \in \Omega} \left[G(x, u) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial \Phi(x)}{\partial x_i} f_i(x, u) \right] = 0. \quad (14.36)$$

Уравнение (36) и является *уравнением Беллмана* в рассматриваемой здесь задаче с закрепленным концом траектории и свободным временем.

3. Задача о быстродействии. К задачам, у которых момент времени t_1 окончания процесса управления заранее не фиксирован, относится и задача об управлении, оптимальном по *быстродействию*.

Рассмотрим систему, описываемую векторным дифференциальным уравнением

$$\frac{dx}{dt} = f(x, u), \quad (14.37)$$

где x , u и f — векторы следующего вида:

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad u = \begin{bmatrix} u_1 \\ \dots \\ u_r \end{bmatrix}, \quad f(x, u) = \begin{bmatrix} f_1(x, u) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ f_n(x, u) \end{bmatrix}.$$

На управляющие силы u_i наложены ограничения

$$u \in \Omega, \quad (14.38)$$

которые, в частности, могут иметь и такой вид:

$$-m_i \leq u_i \leq m_i \quad (i = 1, \dots, r). \quad (14.39)$$

Требуется найти оптимальное управление $u \in \Omega$, которое за *минимально возможное время* T приводит систему из начального состояния $x(t_0) = x^0$ в состояние $x(t_1) = x(t_0 + T) = 0$, то есть в начало координат в фазовом пространстве.

Минимально возможное время T , в течение которого управление $u \in \Omega$ приводит систему из точки $x(t_0) = x^0$ в точку $x(t_0 + T) = 0$, является функцией от начального состояния системы

$$T = T(x^0) = T(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0), \quad (14.40)$$

и задача о быстродействии будет, таким образом, частным случаем рассмотренной в п. 2 задачи о минимизации функционала (25)

$$Q = \int_{t_0}^{t_1} G(x(v), u(v)) dv.$$

Действительно, полагая

$$G(x(t), u(t)) \equiv 1, \quad (14.41)$$

найдем, что при этом функционал Q представляет собой время приведения системы из начального состояния $x(t_0) = x^0$ в состояние $x(t_1) = 0$:

$$Q = t_1 - t_0, \quad (14.42)$$

и, следовательно,

$$T = \min_{u \in \Omega} Q = \min_{u \in \Omega} (t_1 - t_0). \quad (14.43)$$

Учитывая, что в качестве начального состояния можно принять любое текущее состояние $x(t)$, и предполагая, что функция $T(x_1, x_2, \dots, x_n)$ непрерывна и всюду имеет непрерывные частные производные по всем своим аргументам, найдем в соответствии с (36) и (41) следующее дифференциальное уравнение первого порядка в частных производных, которому удовлетворяет функция $T(x_1, \dots, x_n)$:

$$\min_{u \in \Omega} \left[\sum_{i=1}^n \frac{\partial T}{\partial x_i} f_i(x, u) \right] = -1$$

или

$$\min_{u \in \Omega} [\langle \text{grad } T, f(x, u) \rangle] = -1. \quad (14.44)$$

Уравнение (44) и является *уравнением Беллмана* в задаче о *быстродействии*.

Минимизация по u выражения в квадратных скобках в левой части (44) при условии (38) позволит определить оптимальное управление u^* , которое будет представлено в виде функции от $\frac{\partial T}{\partial x_i}$ ($i = 1, \dots, n$). При подстановке в (44) указанного значения u^* получим не содержащее u уравнение первого порядка в частных производных. Решение этого уравнения должно удовлетворять граничному условию

$$T(0, 0, \dots, 0) = 0. \quad (14.45)$$

Если это решение удастся найти, то будет определено в виде явной функции от фазовых координат системы оптимальное управление $u^* = u^*(x)$.

К сожалению, получить решение уравнения (44) в замкнутом виде удастся лишь в простейших случаях.

Пример. В качестве примера рассмотрим задачу о быстродействии в линейной системе, описываемой скалярными дифференциальными уравнениями

$$\frac{dx_j}{dt} = \sum_{k=1}^n A_{jk} x_k + \sum_{l=1}^r B_{jl} u_l \quad (j = 1, \dots, n), \quad (14.46)$$

где на управления u_l наложены ограничения

$$-m_l \leq u_l \leq m_l \quad (l = 1, \dots, r). \quad (14.47)$$

Системе (46) эквивалентно векторное дифференциальное уравнение

$$\frac{dx}{dt} = Ax + Bu, \quad (14.48)$$

где

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} A_{11} & \dots & A_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ A_{n1} & \dots & A_{nn} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} B_{11} & \dots & B_{1r} \\ \dots & \dots & \dots \\ B_{n1} & \dots & B_{nr} \end{bmatrix}, \quad u = \begin{bmatrix} u_1 \\ \dots \\ u_r \end{bmatrix}. \quad (14.49)$$

В соответствии с (37) в рассматриваемом примере

$$f_j(x, u) = \sum_{k=1}^n A_{jk} x_k + \sum_{l=1}^r B_{jl} u_l \quad (j = 1, \dots, n), \quad (14.50)$$

и уравнение Беллмана (44) принимает здесь следующий вид:

$$\min_{u \in \Omega} \left[\sum_{j=1}^n \frac{\partial T}{\partial x_j} \left(\sum_{k=1}^n A_{jk} x_k + \sum_{l=1}^r B_{jl} u_l \right) \right] = -1. \quad (14.51)$$

Уравнение (51) можно переписать так:

$$\min_{u \in \Omega} \left[\sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \frac{\partial T}{\partial x_j} A_{jk} x_k + \sum_{l=1}^r \left(\sum_{j=1}^n \frac{\partial T}{\partial x_j} B_{jl} \right) u_l \right] = -1. \quad (14.52)$$

При ограничениях (47) наименьшее возможное значение выражению, расположенному в квадратных скобках в левой части уравнения (52), доставляют управления

$$u_l = -m_l \operatorname{sign} \sum_{j=1}^n \frac{\partial T}{\partial x_j} B_{jl} \quad (l = 1, \dots, r). \quad (14.53)$$

При управлениях (53) уравнение Беллмана (52) принимает вид

$$\sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \frac{\partial T}{\partial x_j} A_{jk} x_k - \sum_{l=1}^r \left| \sum_{j=1}^n \frac{\partial T}{\partial x_j} B_{jl} \right| m_l = -1. \quad (14.54)$$

Мы получили не содержащее управлений u_l нелинейное дифференциальное уравнение первого порядка в частных производных (54), решение которого должно удовлетворять граничным условиям

$$T(0, 0, \dots, 0) = 0. \quad (14.55)$$

Полученное здесь уравнение Беллмана (54) должно рассматриваться в области, где функция T непрерывна и имеет непрерывные частные производные по всем своим аргументам.

**§ 15. Достаточные условия оптимальности
и обоснование метода динамического программирования
для систем непрерывного действия.
Теоремы В. Г. Болтянского**

Метод динамического программирования вполне обоснован для систем, описываемых уравнениями в конечных разностях.

Для систем, описываемых обыкновенными дифференциальными уравнениями (то есть для систем непрерывного действия) корректное обоснование метода динамического программирования требовало бы доказательства существования гладкой функции $\Phi = \Phi(x_1, \dots, x_n)$, определяемой нелинейным уравнением в частных производных (14.36) — уравнением Беллмана (то же относится и к функции $T(x)$, определяемой уравнением (14.44)), так как при выводе этого уравнения предполагалось, что функция Φ непрерывна и всюду имеет непрерывные частные производные по всем своим аргументам. Это требование не вытекает из постановки задачи и представляет собой ограничение, которое, однако, не выполняется во многих даже простых задачах, где оказывается [15], что функция $\Phi(x_1, \dots, x_n)$ является негладкой.

Задача об обосновании метода динамического программирования для систем непрерывного действия решена в работах В. Г. Болтянского [14], к изложению которых мы и перейдем.

1. Постановка задачи. Геометрическая интерпретация уравнения Беллмана в задаче о быстродействии. Рассмотрим управляемую систему, описываемую скалярными дифференциальными уравнениями

$$\frac{dx_j}{dt} = f_j(x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_r) \quad (j = 1, \dots, n). \quad (15.1)$$

В векторной форме систему уравнений (1) можно записать так:

$$\frac{dx}{dt} = f(x, u), \quad (15.2)$$

где x, u, f — векторы следующего вида:

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad u = \begin{bmatrix} u_1 \\ \dots \\ u_r \end{bmatrix}, \quad f(x, u) = \begin{bmatrix} f_1(x, u) \\ \cdot \\ \cdot \\ f_n(x, u) \end{bmatrix}. \quad (15.3)$$

На управление u наложены ограничения

$$u \in \Omega. \quad (15.4)$$

Обратимся к задаче о быстродействии. Требуется найти оптимальное управление $u \in \Omega$, то есть управление, которое перево-

дит систему из начального состояния $x(t)$ в состояние $x(t+T) = 0$ за минимально возможное время T .

Конечное состояние системы $x(t+T)$, то есть точка в фазовом пространстве, в которую надо привести систему, фиксирована: $x(t+T) = 0$. В качестве начального состояния мы рассматриваем любое состояние системы, то есть любую точку x фазового пространства X .

Минимально возможное время T , в течение которого управление u , удовлетворяющее условию $u \in \Omega$, переводит систему из точки $x(t)$ в точку $x(t+T) = 0$, является функцией от начального состояния x :

$$T = T(x) = T(x_1, \dots, x_n).$$

В § 14, в предположении, что функция $T(x_1, \dots, x_n)$ непрерывна и всюду (кроме конечной точки $x=0$) имеет непрерывные частные производные $\frac{\partial T}{\partial x_1}, \frac{\partial T}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial T}{\partial x_n}$, было показано, что эта функция удовлетворяет уравнению в частных производных (14.44)

$$\min_{u \in \Omega} \left[\sum_{i=1}^n \frac{\partial T(x)}{\partial x_i} f_i(x, u) \right] = -1.$$

Управление, доставляющее минимум выражению в квадратных скобках, является *оптимальным* и было обозначено через u^* .

Ниже удобнее вместо $T(x)$ рассматривать функцию $\omega(x)$, отличающуюся от нее знаком

$$\omega(x) = -T(x). \quad (15.5)$$

Из соотношения (14.44) следует, что

$$\max_{u \in \Omega} \left[- \sum_{i=1}^n \frac{\partial T(x)}{\partial x_i} f_i(x, u) \right] = 1. \quad (15.6)$$

Учитывая (5), можно переписать соотношение (6) так:

$$\max_{u \in \Omega} \left[\sum_{i=1}^n \frac{\partial \omega(x)}{\partial x_i} f_i(x, u) \right] = 1. \quad (15.7)$$

Функция $\omega(x)$ определена во всем фазовом пространстве X . В силу предположений, при которых получено соотношение (14.44), следует, что соотношение (7) имеет место в предположении, что функция $\omega(x)$ непрерывна и всюду (кроме конечной точки $x=0$) имеет непрерывные частные производные $\frac{\partial \omega}{\partial x_1}, \frac{\partial \omega}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial \omega}{\partial x_n}$. Соотношение (7) представляет собой уравнение Беллмана в задаче о быстродействии.

Для *любого* управления из совокупности управлений, ограниченных условием $u \in \Omega$ (в том числе и оптимального), переводящих систему из точки x в точку $x = 0$, будем в соответствии с (7) иметь такое соотношение:

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial \omega(x)}{\partial x_i} f_i(x, u) \leq 1 \quad (u \in \Omega). \quad (15.8)$$

Так как $x = x(t)$, $u = u(t)$, то соотношение

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial \omega(x(t))}{\partial x_i} f_i(x(t), u(t)) = 1 \quad (15.9)$$

будет выполняться в течение всего времени движения для каждой оптимальной траектории, то есть всего времени перехода из начальной точки x в конечную точку $x = 0$.

Уравнению Беллмана в задаче о быстродействии можно дать следующую геометрическую интерпретацию. Так как согласно (1)

$$f_i(x, u) = \frac{dx_i}{dt}, \quad (15.10)$$

то уравнение Беллмана (14.44) можно переписать так:

$$\min_{u \in \Omega} \left[\sum_{i=1}^n \frac{\partial T(x)}{\partial x_i} \frac{dx_i}{dt} \right] = \min_{u \in \Omega} \frac{dT(x(t))}{dt} = -1, \quad (15.11)$$

то есть при движении по оптимальной траектории промежутков времени, оставшийся до достижения начала координат, убывает так, что $-\frac{dT}{dt} = 1$.

Согласно (11)

$$\min_{u \in \Omega} \left[\langle \text{grad } T, \frac{dx}{dt} \rangle \right] = -1. \quad (15.12)$$

Выражение в квадратных скобках представляет собой скалярное произведение вектора градиента функции $T(x)$ на вектор фазовой скорости изображающей точки.

Представим себе семейство поверхностей $T(x) = \text{const}$. Эти поверхности можно назвать изохронными поверхностями — наименьшее время попадания из любой точки поверхности $T(x) = C$ в начало координат равно одной и той же величине C . Вектор $\text{grad } T$ направлен в точке x по нормали к поверхности $T(x) = \text{const}$, проходящей через эту точку. Соотношение (12) показывает, что оптимальное управление $u = u^*$ обеспечивает то, что проекция фазовой скорости $\frac{dx}{dt}$ на отрицательное направление

нормали к поверхности $T(x) = \text{const}$, проходящей через точку x , в любой момент времени положительна, то есть изображающая точка все время перемещается в сторону убывающих значений $T(x)$.

Предположение о существовании непрерывных частных производных $\frac{\partial T(x)}{\partial x_i}$ ($i = 1, \dots, n$) в любой точке x означает, что предполагается гладкость поверхностей $T(x) = \text{const}$, то есть единственность направления нормали в любой точке этих поверхностей. Точки, в которых частные производные $\frac{\partial T(x)}{\partial x_i}$ ($i = 1, \dots, n$) не существуют, являются особыми точками поверхностей $T(x) = \text{const}$, и в этих точках направление нормали к поверхности $T(x) = \text{const}$ не определено.

2. Теорема В. Г. Болтянского для задачи о быстродействии. Перейдем к отысканию достаточных условий оптимальности. Предложенный В. Г. Болтянским метод состоит в следующем. Функция $\omega(x)$ рассматривается теперь с иной точки зрения, чем выше, а именно в качестве исходного принимается соотношение (8). При помощи этого соотношения можно дать оценку времени перехода системы из любого начального состояния в заданное конечное состояние. При этом будем считать, что правые части дифференциальных уравнений (1) определены, непрерывны и имеют непрерывные производные $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$ в любой точке $x \in X$, когда $u \in \Omega$.

Лемма 1. Предположим, что на некотором открытом множестве D пространства X задана непрерывная и непрерывно дифференцируемая функция $\omega(x) = \omega(x_1, x_2, \dots, x_n)$, удовлетворяющая для всех $x \in D$, $u \in \Omega$ неравенству вида (8)

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial \omega(x)}{\partial x_i} f_i(x, u) \leq 1. \quad (15.13)$$

Тогда если $u(t)$ ($t_0 \leq t \leq t_1$) — допустимое (то есть $u(t) \in \Omega$) управление, переводящее изображающую точку из положения x^0 в положение x^* , причем соответствующая траектория $x(t)$ расположена целиком в множестве D , то время $t_1 - t_0$ перехода из точки x^0 в точку x^* оценивается неравенством

$$t_1 - t_0 \geq \omega(x^*) - \omega(x^0). \quad (15.14)$$

Доказательство. Пусть $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_k$ — точки, в которых управления $u(t)$ терпят разрыв, причем

$$t_0 < \tau_1 < \tau_2 < \dots < \tau_k < t_1.$$

Обозначим еще

$$t_0 = \tau_0, \quad t_1 = \tau_{k+1}.$$

Точки разрыва управлений обязательно будут иметь место, если, например, ограничения (4), наложенные на управление, имеют вид

$$-m_i \leq u_i \leq m_i \quad (i = 1, \dots, r).$$

На каждом из интервалов (τ_0, τ_1) , (τ_1, τ_2) , \dots , (τ_k, τ_{k+1}) функция $u(t)$ непрерывна.

Согласно (8) и (1)

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial \omega(x(t))}{\partial x_i} \dot{f}_i(x(t), u(t)) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial \omega(x(t))}{\partial x_i} \frac{dx_i(t)}{dt} = \frac{d\omega(x(t))}{dt} \leq 1. \quad (15.15)$$

Внутри каждого из интервалов времени (τ_i, τ_{i+1}) ($i = 0, 1, \dots, k$) функция $\omega(x(t))$ непрерывна и в соответствии с условием леммы имеет непрерывную производную по t , удовлетворяющую неравенству (15)

$$\frac{d\omega(x(t))}{dt} \leq 1.$$

Отсюда следует, что

$$\omega(x(\tau_{i+1})) - \omega(x(\tau_i)) \leq \tau_{i+1} - \tau_i \quad (i = 0, 1, \dots, k).$$

Складывая левые и правые части этих соотношений, написанных для интервалов (τ_i, τ_{i+1}) ($i = 0, 1, \dots, k$), получим

$$\omega(x(\tau_{k+1})) - \omega(x(\tau_0)) \leq \tau_{k+1} - \tau_0,$$

что совпадает с соотношением (14). Таким образом, лемма доказана.

Так как прибавление любой константы к функции $\omega(x)$ не изменяет соотношения (8), то можно принять, что функция $\omega(x)$ удовлетворяет условию

$$\omega(x^*) = 0. \quad (15.16)$$

При этом неравенство (14) примет вид

$$t_1 - t_0 \geq -\omega(x^0). \quad (15.17)$$

Заметим теперь, что соотношение (7), представляющее собой уравнение Беллмана в задаче о быстродействии, было получено выше как *необходимое* условие оптимальности.

Здесь, при тех же предположениях о непрерывности и непрерывной дифференцируемости функции $\omega(x)$ и условии $\omega(x^*) = 0$, доказано, что если соотношение (8) имеет место, то

управление, переводящее систему из точки x^0 в точку x^* за время $-\omega(x^0)$, является оптимальным. Как следует из (17), быстрее осуществить этот переход невозможно. Следовательно, здесь показано, что соотношение (7) является *достаточным* условием оптимальности.

Таким образом, в случае, когда $\omega(x)$ — непрерывная и непрерывно дифференцируемая функция, уравнение Беллмана (7) является *необходимым и достаточным* условием оптимальности.

Как уже упоминалось выше, требование о непрерывной дифференцируемости функции $\omega(x)$ во многих задачах не выполняется. В качестве примера

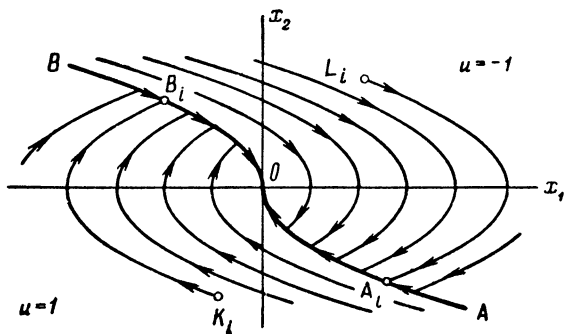


Рис. 15.1.

такой задачи рассмотрим задачу построения оптимальных по быстродействию управлений в системе, описываемой уравнениями

$$\begin{aligned}\frac{dx_1}{dt} &= x_2, \\ \frac{dx_2}{dt} &= u,\end{aligned}$$

где допустимое управление ограничено условием

$$-1 \leq u \leq 1.$$

Можно показать (см. ниже стр. 285), что дуга AO (рис. 15.1) параболы $x_1 = \frac{1}{2} x_2^2$ и дуга OB параболы $x_1 = -\frac{1}{2} x_2^2$ являются линиями переключения оптимального управления. В области над линией AOB управление должно иметь вид $u = -1$. Изображающая точка будет двигаться по дуге L_1A_1 параболы $x_1 = -\frac{1}{2} x_2^2 + c_1$. В точке A_1 встречи этой параболы с линией AO управление надо переключить и принять $u = 1$. Дальнейшее движение будет происходить по линии A_1O до встречи с началом координат.

В области, расположенной ниже линии AOB , надо принять $u = 1$. Изображающая точка будет двигаться по дуге K_1B_1 параболы $x_1 = \frac{1}{2} x_2^2 + c_1$. В точке B_1 встречи этой параболы с кривой BO управление надо переключить на $u = -1$. Дальнейшее движение будет происходить по линии B_1O до момента попадания изображающей точки в начало координат.

Траектория $L_i A_i O$ и аналогично траектория $K_i B_i O$ будут оптимальными по быстрейдействию траекториями для начальных положений изображающей точки, расположенных на линии $L_i A_i$ и $K_i B_i$ соответственно.

Ниже (стр. 288) показано, что функция $\omega(x) = -T(x)$ непрерывна во всей фазовой плоскости $x_1 x_2$. Частные производные $\frac{\partial \omega(x)}{\partial x_1}$ и $\frac{\partial \omega(x)}{\partial x_2}$ существуют во всех точках фазовой плоскости $x_1 x_2$, за исключением точек линии переключения AOB . Ни в одной из точек линии переключения AOB частные производные $\frac{\partial \omega(x)}{\partial x_1}$ и $\frac{\partial \omega(x)}{\partial x_2}$ не существуют.

Предположим теперь в общем случае, что в множестве D , на котором задана функция $\omega(x)$, выделено некоторое множество M («особое множество» функции $\omega(x)$) и что функция $\omega(x)$ непрерывна на всем множестве D , а непрерывные частные производные $\frac{\partial \omega(x)}{\partial x_i}$ ($i = 1, \dots, n$) имеет лишь в тех точках множества D , которые не принадлежат M .

Лемма 2. Пусть D — открытое множество фазового пространства X и M — некоторое множество, содержащееся в D . Предположим, что на множестве D задана непрерывная функция $\omega(x) = \omega(x_1, x_2, \dots, x_n)$, которая в точках, не принадлежащих множеству M , имеет непрерывные частные производные и удовлетворяет неравенству (8)

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial \omega(x)}{\partial x_i} f_i(x, u) \leq 1.$$

Пусть, далее, $u(t)$ ($t_0 \leq t \leq t_1$) — допустимое управление, переводящее изображающую точку из положения x^0 в положение x^ , причем соответствующая траектория $x(t)$ расположена целиком в D и пересекается с множеством M лишь в конечном числе моментов времени. Тогда оценка (14)*

$$t_1 - t_0 \geq \omega(x^*) - \omega(x^0)$$

остаётся справедливой.

Доказательство. 1°. Заметим, что оценка (14) остаётся справедливой, если траектория $x(t)$ пересекается с множеством M лишь в моменты времени t_0, t_1 , или в один из этих моментов. Действительно, в этом случае полностью проходит доказательство леммы 1, поскольку функция $\omega(x)$ по-прежнему непрерывна, а когда t заключено внутри интервалов (τ_i, τ_{i+1}) (границы которых суть моменты времени, в которых управления $u(t)$ терпят разрыв), точка $\omega(x(t))$ лежит вне множества M и, следовательно, на этих интервалах производные $\frac{\partial \omega(x(t))}{\partial x_i}$ существуют и непрерывны.

2⁰. Пусть теперь $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_s$ — все принадлежащие интервалу (t_0, t_1) моменты встречи траектории $x(t)$ с множеством M , причем $t_0 < \theta_1 < \theta_2 < \dots < \theta_s < t_1$. Обозначим еще

$$t_0 = \theta_0, \quad t_1 = \theta_{s+1}.$$

К каждому из отрезков $[\theta_i, \theta_{i+1}]$ ($i = 0, 1, \dots, s$) применимо сделанное выше (1⁰) замечание, и потому

$$\theta_{i+1} - \theta_i \geq \omega(x(\theta_{i+1})) - \omega(x(\theta_i)) \quad (i = 0, 1, \dots, s).$$

Складывая левые и правые части этих соотношений, написанных для отрезков времени $[\theta_i, \theta_{i+1}]$ ($i = 0, 1, \dots, s$), получим соотношение

$$\theta_{s+1} - \theta_0 \geq \omega(x(\theta_{s+1})) - \omega(x(\theta_0)),$$

которое совпадает с требуемым в условии леммы неравенством (14). Таким образом, лемма доказана.

Отметим теперь, что ситуация, которая имеет место в задаче о быстродействии (см. пример на рис. 15.1), не охватывается условиями леммы 2.

Действительно, в этом примере (рис. 15.1, 15.2) не отдельные точки, а дуга оптимальной траектории расположена на линии переключения AOB , то есть по терминологии леммы 2 целый участок оптимальной траектории расположен в множестве M . По условию леммы 2 допускается пересечение оптимальной траектории с множеством M лишь в конечном числе моментов времени. Здесь же оптимальная траектория в течение некоторого промежутка времени находится в множестве M .

Выход из создавшейся трудности дается в приведенной ниже лемме 3.

Лемма 3. Сохраним предположения о функции ω , сделанные в лемме 2. Пусть $u(t)$ ($t_0 \leq t \leq t_1$) — допустимое управление, переводящее изображающую точку из положения x^0 в положение x^* , причем соответствующая траектория $x(t)$ расположена целиком в D . Предположим еще, что как угодно близко к x^0 найдется такая точка y^0 , что траектория $y(t)$, исходящая из точки y^0 и соответствующая тому же управлению $u(t)$ ($t_0 \leq t \leq t_1$), пересекается с M лишь в конечном числе моментов времени. Тогда оценка (14)

$$t_1 - t_0 \geq \omega(x^*) - \omega(x^0)$$

остается справедливой.

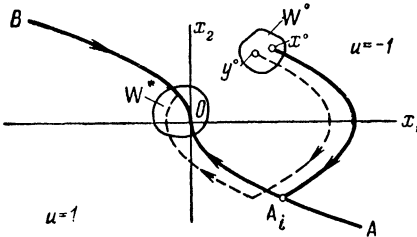


Рис. 15.2.

Доказательство. Выберем произвольное число $\varepsilon > 0$, и пусть W^0 и W^* (рис. 15.2) — такие окрестности точек x^0 и x^* соответственно, что

$$\left. \begin{aligned} |\omega(x) - \omega(x^0)| < \varepsilon & \text{ при } x \in W^0, \\ |\omega(x) - \omega(x^*)| < \varepsilon & \text{ при } x \in W^*. \end{aligned} \right\} \quad (15.18)$$

Согласно теореме о непрерывной зависимости решений дифференциальных уравнений от начальных условий, существует такая окрестность $W^\sigma \subset W^0$ точки x^0 , что всякое решение системы уравнений, аналогичной системе (1) (с тем же управлением $u(t)$ ($t_0 \leq t < t_1$))

$$\frac{dy_j}{dt} = f_j(y_1, \dots, y_n, u_1, \dots, u_r) \quad (j = 1, \dots, n), \quad (15.19)$$

для которого $y(t_0) \in W^\sigma$, определено на всем отрезке $t_0 \leq t \leq t_1$ и удовлетворяет соотношению $y(t_1) \in W^*$.

По условию доказываемой леммы указанное решение $y(t)$ ($t_0 \leq t \leq t_1$) системы (19) с начальными данными $y(t_0) \in W^\sigma$ пересекается с M лишь в конечном числе точек. Из этого вытекает в силу леммы 2, что имеет место неравенство

$$\omega(y(t_1)) - \omega(y(t_0)) \leq t_1 - t_0. \quad (15.20)$$

Далее, так как $y(t_0) \in W^\sigma \subset W^0$, то $y(t_1) \in W^*$. Следовательно, в соответствии с (18) имеем

$$\left. \begin{aligned} |\omega(y(t_0)) - \omega(x^0)| < \varepsilon, \\ |\omega(y(t_1)) - \omega(x^*)| < \varepsilon. \end{aligned} \right\} \quad (15.21)$$

Из соотношений (21) следует, что

$$\left. \begin{aligned} \omega(y(t_0)) - \omega(x^0) < \varepsilon, \\ -\omega(y(t_1)) + \omega(x^*) < \varepsilon. \end{aligned} \right\} \quad (15.22)$$

Складывая левые и правые части неравенств (20) и (22), получим

$$\omega(x^*) - \omega(x^0) < t_1 - t_0 + 2\varepsilon. \quad (15.23)$$

Отсюда в виду произвольности ε вытекает неравенство (14).

Лемма 3 дает наиболее общие условия, при выполнении которых оценка (14) справедлива. Однако условия леммы 3 сформулированы отдельно для каждого управления $u(t)$. Остается еще показать справедливость этих условий для всевозможных управлений $u(t)$.

В. Г. Болтянским в цитированных выше работах показано, что при наложении некоторых условий на множество M

сформулированные в лемме 3 условия выполняются для любых допустимых управлений $u(t)$. В частности, это имеет место, если M — кусочно-гладкое множество размерности $< n$.

Приведем определение кусочно-гладкого множества [15]. Пусть K — некоторый ограниченный s -мерный выпуклый многогранник ($s \leq n$), расположенный в векторном пространстве Ξ переменных $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_s$ и рассматриваемый вместе с границей (то есть замкнутый). Предположим, что в некотором открытом множестве пространства Ξ , содержащем многогранник K , заданы n непрерывно дифференцируемых функций

$$\varphi_i(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_s) \quad (i = 1, 2, \dots, n), \quad (15.24)$$

обладающих тем свойством, что функциональная матрица

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial \xi_1} & \frac{\partial \varphi_2}{\partial \xi_1} & \dots & \frac{\partial \varphi_n}{\partial \xi_1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial \varphi_1}{\partial \xi_s} & \frac{\partial \varphi_2}{\partial \xi_s} & \dots & \frac{\partial \varphi_n}{\partial \xi_s} \end{bmatrix}$$

имеет в каждой точке $\xi \in K$ ранг s . Функции (24) осуществляют гладкое отображение φ многогранника K в пространстве X по формулам

$$x_i = \varphi_i(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_s) \quad (i = 1, \dots, n). \quad (15.25)$$

Если это отображение взаимно однозначно (то есть различные точки многогранника K переводит в различные точки пространства X), то образ $L = \varphi(K)$ многогранника K называется *криволинейным s -мерным многогранником в пространстве X* . Очевидно, что криволинейный многогранник является замкнутым и ограниченным множеством пространства X .

Пусть теперь D — некоторое открытое множество фазового пространства X . Всякое множество $M \subset D$, представляющееся в виде объединения конечного или бесконечного числа криволинейных многогранников, расположенных таким образом, что с каждым замкнутым ограниченным множеством, лежащим в D , пересекается лишь конечное число этих многогранников, называется *кусочно-гладким множеством в D* . (K границе множества D многогранники могут скапливаться.)

Если среди криволинейных многогранников, объединением которых является кусочно-гладкое множество M , имеется хотя бы один многогранник размерности k , а все остальные многогранники имеют размерность, меньшую или равную k , то кусочно-гладкое множество называется *k -мерным*. В частности, всякая замкнутая в D гладкая поверхность размерности, меньшей чем n , является кусочно-гладким множеством в D (ибо ее можно разбить на криволинейные многогранники). Из изложенного следует, что кусочно-гладкое в D множество размерности, меньшей чем n , не содержит внутренних точек.

В качестве примера укажем, что при $n = 2$ кусочно-гладкими множествами размерности < 2 являются линии, состоящие из отдельных дифференцируемых кусков (например, линия AOB на рис. 15.1).

Следующую лемму приведем без доказательства. Доказательство этой леммы требует привлечения ряда понятий теории гладких многообразий и дано в цитированных работах В. Г. Болтянского [15].

Лемма 4. Пусть M — кусочно-гладкое в D множество размерности $\leq n - 1$. Пусть далее $u(t)$ ($t_0 \leq t \leq t_1$) — допустимое

управление, переводящее изображающую точку из положения x^0 в положение x^* , причем соответствующая траектория $x(t)$ ($t_0 \leq t \leq t_1$) расположена целиком в множестве D . Тогда в любой окрестности W^0 точки x^0 найдется такая точка y^0 , что траектория $y(t)$ ($t_0 \leq t \leq t_1$), исходящая из точки y^0 и соответствующая управлению $u(t)$, целиком расположена в D и пересекается с M лишь в конечном числе точек, то есть существует лишь конечное число моментов времени t ($t_0 \leq t \leq t_1$), для которых $y(t) \in M$.

Из леммы 4 и леммы 3 вытекает непосредственно справедливость следующей основной леммы.

Основная лемма. Пусть M — кусочно-гладкое множество размерности $< n$, расположенное в открытом множестве D фазового пространства X . Предположим, что на множестве D задана непрерывная функция $\omega(x) = \omega(x_1, \dots, x_n)$, которая в точках, не принадлежащих множеству M , имеет непрерывные производные и удовлетворяет неравенству (8):

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial \omega(x)}{\partial x_i} f_i(x, u) \leq 1.$$

Тогда если $u(t)$ ($t_0 \leq t \leq t_1$) — допустимое управление, переводящее изображающую точку из положения x^0 в положение x^* , причем соответствующая траектория $x(t)$ расположена целиком в множестве D , то для времени перехода справедлива оценка (14)

$$t_1 - t_0 \geq \omega(x^*) - \omega(x^0).$$

Изложенные выше результаты приводят к следующей теореме*), представляющей собой необходимое и достаточное условие оптимальности в форме метода динамического программирования.

Теорема В. Г. Болтянского. Пусть M — кусочно-гладкое множество размерности $< n$, расположенное в фазовом пространстве X , и $\omega(x) = \omega(x_1, \dots, x_n)$ — непрерывная функция, заданная на X и имеющая в точках, не принадлежащих множеству M , непрерывные производные. Пусть, далее, $\omega(x^*) = 0$ для некоторой точки $x^* \in X$. Предположим, что для каждой отличной от x^* точки $x^0 \in X$ существует допустимое управление $u(t) = u_{x^0}(t)$, переводящее изображающую точку из положения x^0 в положение x^* за время $-\omega(x^0)$. Для того чтобы все

*) Приведенные здесь результаты В. Г. Болтянского впервые были опубликованы им в журнале «Доклады Академии наук СССР», т. 140, № 5, 1961, стр. 994—997. Подробные доказательства даны в статье В. Г. Болтянского [14].

управления $u_{x^0}(t)$ были оптимальными, необходимо и достаточно, чтобы во всех точках x , не принадлежащих множеству M , функция $\omega(x)$ удовлетворяла уравнению Беллмана (7)

$$\max_{u \in \Omega} \left[\sum_{i=1}^n \frac{\partial \omega(x)}{\partial x_i} f_i(x, u) \right] = 1$$

или, что то же самое, неравенству (8)

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial \omega(x)}{\partial x_i} f_i(x, u) \leq 1 \quad (u \in \Omega).$$

Доказательство. Необходимость приведенного в теореме условия доказывается так же, как и на стр. 235. Приведенное там доказательство применимо ко всякой точке $x = x^0$, в которой производные $\frac{\partial \omega}{\partial x_i}$ ($i = 1, \dots, n$) существуют и непрерывны.

Достаточность вытекает из основной леммы. Действительно, из основной леммы следует, что если соотношение (8) удовлетворяется во всех точках x , не принадлежащих множеству M , а, кроме того, $\omega(x^*) = 0$, то управление, приводящее систему из точки x^0 в точку x^* за время $-\omega(x^0)$, будет оптимальным. При $\omega(x^*) = 0$ оценка времени перевода системы из точки x^0 в точку x^* при любом допустимом управлении будет

$$t_1 - t_0 \geq -\omega(x^0),$$

то есть быстрее чем за время $-\omega(x^0)$ осуществить этот перевод невозможно.

В доказанной теореме требования о непрерывной дифференцируемости функции $\omega(x)$ столь серьезно ослаблены, что теорема применима к весьма большому кругу задач. Это и позволяет ее считать обоснованием метода динамического программирования.

3. Теорема В. Г. Болтянского для общей задачи динамического программирования. Уравнение Беллмана (14.36) для этой задачи получено в § 14, п. 2. Из уравнения (14.36) следует, что для любого управления $u(t) \in \Omega$, переводящего систему из начального положения $x(t)$ в положение x^* , имеет место неравенство

$$G(x, u) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial \Phi(x)}{\partial x_i} f_i(x, u) \geq 0 \quad (15.26)$$

или

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial \Phi(x)}{\partial x_i} f_i(x, u) \geq -G(x, u) \quad (u \in \Omega), \quad (15.27)$$

где знак равенства имеет место для оптимального управления $u^*(t)$.

Если ввести теперь функцию $\omega(x)$ при помощи соотношения

$$\omega(x) = -\Phi(x), \quad (15.28)$$

то неравенство (27) примет вид

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial \omega(x)}{\partial x_i} f_i(x, u) \leq G(x, u) \quad (u \in \Omega). \quad (15.29)$$

Аналогично изложенному в п. 2 для рассматриваемой здесь общей задачи доказывается теорема [14], доставляющая необходимые и достаточные условия оптимальности.

Теорема В. Г. Болтянского для общей задачи динамического программирования. Пусть M — кусочно-гладкое множество размерности $< n$, расположенное в фазовом пространстве X , и $\omega(x) = \omega(x_1, \dots, x_n)$ — непрерывная функция, заданная на X и имеющая в точках, не принадлежащих множеству M , непрерывные производные. Пусть, далее, $\omega(x^*) = 0$ для некоторой точки $x^* \in X$. Предположим, что для каждой отличной от x^* точки $x^0 \in X$ существует допустимое управление $u(t) = u_{x^0}(t)$, переводящее изображающую точку из положения x^0 в положение x^* и удовлетворяющее соотношению

$$\int_{t_0}^{t_1} G(x(t), u(t)) dt = -\omega(x^0). \quad (15.30)$$

Для того чтобы все управления $u_{x^0}(t)$ были оптимальными, необходимо и достаточно, чтобы во всех точках x , не принадлежащих множеству M , функция $\omega(x)$ удовлетворяла уравнению Беллмана (14.36)

$$\min_{u \in \Omega} \left[G(x, u) - \sum_{i=1}^n \frac{\partial \omega(x)}{\partial x_i} f_i(x, u) \right] = 0$$

или, что то же самое, неравенству (29)

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial \omega(x)}{\partial x_i} f_i(x, u) \leq G(x, u) \quad (u \in \Omega).$$

§ 16. Связь уравнения Беллмана с уравнением Гамильтона — Якоби в задачах аналитической механики

1. Задача о минимизации интеграла вида $Q = \int_{t_0}^t G(x, u, v) dv$.

Рассмотрим систему, описываемую векторным дифференциальным уравнением

$$\frac{dx}{dt} = f(x, u, t), \quad (16.1)$$

где x , f , а также u — n -мерные векторы

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad u = \begin{bmatrix} u_1 \\ \dots \\ u_n \end{bmatrix}, \quad f(x, u, t) = \begin{bmatrix} f_1(x, u, t) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ f_n(x, u, t) \end{bmatrix}.$$

Начальное состояние системы

$$[x(t)]_{t=t_0} = x(t_0) \quad (16.2)$$

и состояние системы в момент времени t заданы. Требуется найти управление

$$u = u^*(t), \quad (16.3)$$

обеспечивающее перевод системы из состояния $x(t_0)$ в состояние $x(t)$ и доставляющее минимум интегралу

$$Q = \int_{t_0}^t G(x(v), u(v), v) dv. \quad (16.4)$$

Обозначим

$$W(x(t), t) = \min_{u(v)} \int_{t_0}^t G(x(v), u(v), v) dv. \quad (16.5)$$

Пусть $u^*(v)$ ($0 \leq v \leq t$) — управление, доставляющее минимум интегралу (4), а $x(v)$ — соответствующая этому управлению фазовая траектория (рис. 16.1). Тогда будем иметь

$$W(x(t), t) = \int_{t_0}^t G(x(v), u^*(v), v) dv.$$

Возьмем на оптимальной траектории (рис. 16.1) точку $x(t - \Delta t)$. Поскольку положение системы в конечной точке $t - \Delta t$ интервала $(t_0, t - \Delta t)$ фиксировано, то участок оптимальной траектории от точки $x(t_0)$ до точки $x(t - \Delta t)$ сам по себе также будет

оптимальной траекторией. Поэтому для $W(x(t - \Delta t), t - \Delta t)$ будем иметь следующее выражение:

$$W(x(t - \Delta t), t - \Delta t) = W(x(t), t) - \int_{t-\Delta t}^t G(x(v), u^*(v), v) dv. \quad (16.6)$$

Так как

$$\int_{t-\Delta t}^t G(x(v), u^*(v), v) dv = G(x(t), u^*(t), t) \Delta t + o_1(\Delta t), \quad (16.7)$$

то будем иметь

$$W(x(t - \Delta t), t - \Delta t) = W(x(t), t) - G(x(t), u^*(t), t) \Delta t - o_1(\Delta t). \quad (16.8)$$

Предположим теперь, что функция $W(x, t)$ непрерывна и всюду имеет непрерывные частные производные по всем своим

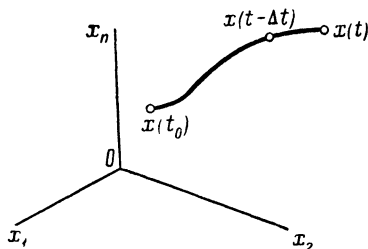


Рис. 16.1.

аргументам. Так как в соответствии с (1) при $u = u^*(t)$

$$\begin{aligned} x(t - \Delta t) &= x(t) - \frac{dx}{dt} \Delta t + o_2(\Delta t) = \\ &= x(t) - f(x(t), u^*(t), t) \Delta t + o_2(t), \end{aligned} \quad (16.9)$$

то

$$\begin{aligned} W(x(t - \Delta t), t - \Delta t) &= W(x(t) - f(x(t), u^*(t), t) \Delta t + o_2(\Delta t), t - \Delta t) = \\ &= W(x(t), t) - \sum_{i=1}^n \frac{\partial W(x, t)}{\partial x_i} f_i(x, u^*, t) \Delta t - \frac{\partial W(x, t)}{\partial t} \Delta t + o_3(\Delta t). \end{aligned} \quad (16.10)$$

Подставляя выражение (10) в левую часть уравнения (8), получим

$$\begin{aligned} - \sum_{i=1}^n \frac{\partial W(x, t)}{\partial x_i} f_i(x, u^*, t) \Delta t - \frac{\partial W(x, t)}{\partial t} \Delta t = \\ = - G(x, u^*, t) \Delta t + o_4(\Delta t). \end{aligned} \quad (16.11)$$

Разделив в уравнении (11) все члены на Δt и учитывая, что $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{o(\Delta t)}{\Delta t} = 0$, получим в пределе при $\Delta t \rightarrow 0$ следующее соотношение:

$$G(x, u^*, t) - \sum_{i=1}^n \frac{\partial W(x, t)}{\partial x_i} \dot{f}_i(x, u^*, t) - \frac{\partial W(x, t)}{\partial t} = 0 \quad (16.12)$$

или эквивалентное ему соотношение

$$G(x, u^*, t) - \sum_{i=1}^n \frac{\partial W(x, t)}{\partial x_i} \frac{dx_i}{dt} - \frac{\partial W(x, t)}{\partial t} = 0. \quad (16.13)$$

Из рассуждений, при помощи которых получено соотношение (6), следует, что соотношение (13) сохраняет свой вид и в задаче об отыскании максимума интеграла (4).

2. Получение уравнения Гамильтона — Якоби из принципа Гамильтона. Принцип Гамильтона состоит в том, что для действительного движения между двумя заданными в моменты времени t_0 и t конфигурациями системы (речь идет о положении системы в пространстве q_1, q_2, \dots, q_n , а не в фазовом пространстве) интеграл $\int_{t_0}^t L dt$ (где L — функция Лагранжа) имеет стационарное значение. Это стационарное значение обозначим через W .

В силу уравнений движения системы

$$\left. \begin{aligned} \frac{dq_i}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial p_i}, \\ \frac{dp_i}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial q_i} \quad (i = 1, \dots, n) \end{aligned} \right\} \quad (16.14)$$

стационарность интеграла $\int_{t_0}^t L dt$ обеспечивается.

Можно, однако, принять *другую точку зрения*.

Пусть пространство конфигураций q_1, \dots, q_n системы (14) есть фазовое пространство другой системы, описываемой уравнениями

$$\frac{dq_i}{dt} = \dot{f}_i(q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n, t) \quad (i = 1, \dots, n), \quad (16.15)$$

где

$$\dot{f}_i(q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n, t) = \frac{\partial H}{\partial p_i} \quad (16.16)$$

есть известная функция своих переменных. Таким образом, вид функций f_i в правых частях уравнений (15) известен.

Действительное движение доставляет интегралу $\int_{t_0}^t L dt$ стационарное значение. Поэтому можно мысленно отождествить p_1, p_2, \dots, p_n с такими управлениями $u_1^*, u_2^*, \dots, u_n^*$ в системе

$$\frac{dq_i}{dt} = f_i(q_1, \dots, q_n, u_1, \dots, u_n, t) \quad (i = 1, \dots, n), \quad (16.17)$$

которые доставляют экстремум интегралу $\int_{t_0}^t L dt$, то есть с оптимальными управлениями в системе (17).

По доказанному выше входящие в соотношение (13) функции $u^*(t)$ уже являются оптимальными управлениями. Поэтому соотношение (13) для системы, описываемой уравнениями (17), можно представить в виде

$$L(q_1, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n, t) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial W(q, t)}{\partial q_i} \frac{dq_i}{dt} + \frac{\partial W(q, t)}{\partial t}. \quad (16.18)$$

Как известно, функция Гамильтона для системы (14) имеет вид

$$\begin{aligned} \hat{H}(q_1, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n, t) = \\ = -L(q_1, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n, t) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i. \end{aligned} \quad (16.19)$$

Учитывая, что

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \quad (i = 1, \dots, n), \quad (16.20)$$

и выражая \dot{q}_i через канонические переменные

$$\dot{q}_i = \dot{q}_i(q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n, t) \quad (i = 1, \dots, n), \quad (16.21)$$

приведем функцию \hat{H} к каноническим переменным

$$H = H(q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n, t). \quad (16.22)$$

Уравнение (18) можно переписать так:

$$\frac{\partial W}{\partial t} - L(q_1, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n, t) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial W}{\partial q_i} \dot{q}_i = 0. \quad (16.23)$$

Дифференцируя по \dot{q}_i левую и правую части соотношения (18), найдем

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial W(q, t)}{\partial q_i} \quad (i = 1, \dots, n).$$

Поэтому если в выражениях (21) заменить аргументы p_i через

$$p_i = \frac{\partial W}{\partial q_i} \quad (i = 1, \dots, n), \quad (16.24)$$

то получим

$$\dot{q}_i = \dot{q}_i \left(q_1, \dots, q_n, \frac{\partial W}{\partial q_1}, \dots, \frac{\partial W}{\partial q_n}, t \right) \quad (i = 1, \dots, n). \quad (16.25)$$

Заменяя теперь в уравнении (23) \dot{q}_i выражениями (25), приведем уравнение (23) к виду

$$\frac{\partial W}{\partial t} + H \left(q_1, \dots, q_n, \frac{\partial W}{\partial q_1}, \dots, \frac{\partial W}{\partial q_n}, t \right) = 0. \quad (16.26)$$

Уравнение в частных производных (26) и представляет собой уравнение Гамильтона — Якоби для механической системы, движение которой описывается дифференциальными уравнениями (14).

Пример. В качестве примера рассмотрим систему с одной степенью свободы, у которой кинетическая энергия T и потенциальная энергия V имеют следующий вид:

$$T = \frac{1}{2} m \dot{q}^2, \quad V = \frac{1}{2} c q^2. \quad (16.27)$$

Функция Лагранжа здесь будет следующей:

$$L = \frac{1}{2} m \dot{q}^2 - \frac{1}{2} c q^2. \quad (16.28)$$

Так как

$$p = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = m \dot{q}, \quad (16.29)$$

то будем иметь

$$\dot{q} = \frac{p}{m}. \quad (16.30)$$

Согласно (19) в рассматриваемой задаче функция Гамильтона имеет вид

$$\hat{H} = -L + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \dot{q} = \frac{m \dot{q}^2}{2} + \frac{c q^2}{2}. \quad (16.31)$$

Подставляя в (31) вместо \dot{q} выражение (30), приведем функцию Гамильтона к каноническим переменным

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{c q^2}{2}. \quad (16.32)$$

Канонические уравнения движения системы

$$\left. \begin{aligned} \frac{dq}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial p}, \\ \frac{dp}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial q} \end{aligned} \right\} \quad (16.33)$$

в соответствии с (32) принимают вид

$$\left. \begin{aligned} \frac{dq}{dt} &= \frac{1}{m} p, \\ \frac{dp}{dt} &= -cq. \end{aligned} \right\} \quad (16.34)$$

Действие по Гамильтону в рассматриваемом примере будет следующей функцией:

$$W = \int_{t_0}^t L dt = \int_{t_0}^t \left[\frac{1}{2} m \dot{q}^2 (t) - \frac{1}{2} cq^2 (t) \right] dt. \quad (16.35)$$

Уравнение (17) в нашем примере согласно (34) и (30) принимает вид

$$\frac{dq}{dt} = \frac{1}{m} u. \quad (16.36)$$

Функционал (4), который здесь требуется минимизировать, в соответствии с (28) будет

$$Q = \int_{t_0}^t \left[\frac{u^2 (t)}{2m} - \frac{cq^2 (t)}{2} \right] dt. \quad (16.37)$$

Экстремальное значение W функционала Q будет достигнуто при оптимальном управлении $u = u^*(t)$, которое в соответствии с принципом Гамильтона должно быть выбрано следующим:

$$u^*(t) = p, \quad (16.38)$$

так как только при таком управлении действие W будет удовлетворять условию $\delta W = 0$.

При этом уравнение (13) принимает вид

$$\frac{p^2}{2m} - \frac{1}{2} cq^2 - \frac{\partial W}{\partial q} \dot{q} - \frac{\partial W}{\partial t} = 0. \quad (16.39)$$

Согласно (24), заменим в выражении (30) аргумент p через

$$p = \frac{\partial W}{\partial q}. \quad (16.40)$$

При такой замене выражение (30) примет вид

$$\dot{q} = \frac{1}{m} \frac{\partial W}{\partial q}. \quad (16.41)$$

Подставляя в уравнение (39) вместо \dot{q} выражение (41), приведем уравнение (39) к виду

$$\frac{\partial W}{\partial t} + \frac{1}{2m} \left(\frac{\partial W}{\partial q} \right)^2 + \frac{1}{2} c q^2 = 0. \quad (16.42)$$

Уравнение (42) есть уравнение Гамильтона — Якоби для рассматриваемого примера.

Так как согласно (32) функция Гамильтона в рассматриваемом примере имеет вид

$$H(q, p, t) = \frac{p^2}{2m} + \frac{c q^2}{2},$$

то уравнение (42) можно записать так:

$$\frac{\partial W}{\partial t} + H\left(q, \frac{\partial W}{\partial q}, t\right) = 0. \quad (16.43)$$

ПРИНЦИП МАКСИМУМА Л. С. ПОНТРЯГИНА В ТЕОРИИ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ

§ 17. Теорема о необходимом условии оптимальности

1. Принцип максимума Л. С. Понтрягина. Управляемая система описывается дифференциальными уравнениями

$$\frac{dx_j}{dt} = f_j(x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_r) \quad (j = 1, \dots, n). \quad (17.1)$$

Требуется перевести систему из точки $x(t_0)$ n -мерного фазового пространства X в заданную точку x^* . Момент времени t_1 , в который изображающая точка попадет в точку x^* , заранее не фиксируется.

Управление $u(t)$ — кусочно-непрерывная вектор-функция, значения которой принадлежат некоторому замкнутому ограниченному множеству Ω r -мерного пространства U

$$u \in \Omega. \quad (17.2)$$

Функции $f_j(x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_r)$ ($j = 0, 1, \dots, n$) определены для любых значений $x \in X$ и $u \in \Omega$. Они предполагаются непрерывными по совокупности переменных $x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_r$ и непрерывно дифференцируемыми по x_1, \dots, x_n .

Управление u надо выбрать так, чтобы функционал

$$Q = \int_{t_0}^{t_1} f_0(x(\xi), u(\xi)) d\xi \quad (17.3)$$

принимал наименьшее возможное значение.

Обозначим через $x_0(t)$ функцию, определяемую дифференциальным уравнением

$$\frac{dx_0}{dt} = f_0(x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_r) \quad (17.4)$$

и начальным условием

$$x_0(t_0) = 0. \quad (17.5)$$

При этом подлежащий минимизации функционал Q можно представить так:

$$Q = x_0(t_1). \quad (17.6)$$

Пусть помимо основной системы уравнений (1) и уравнения (4), которые можно записать совместно так:

$$\frac{dx_j}{dt} = f_j(x, u) \quad (j = 0, 1, \dots, n), \quad (17.7)$$

мы имеем еще одну систему уравнений относительно вспомогательных (дополнительно рассматриваемых) переменных $\psi_0, \psi_1, \dots, \psi_n$:

$$\frac{d\psi_k}{dt} = - \sum_{i=0}^n \frac{\partial f_i(x, u)}{\partial x_k} \psi_i \quad (k = 0, 1, \dots, n). \quad (17.8)$$

Если мы выбрали некоторое допустимое управление $u(t)$ ($t_0 \leq t \leq t_1$), переводящее систему (1) из точки $x(t_0)$ в точку x^* , и имеем соответствующую фазовую траекторию $x(t)$ системы (7) с начальным условием $x(t_0), x_0(t_0) = 0$, то система уравнений (8) принимает вид

$$\frac{d\psi_k}{dt} = - \sum_{i=0}^n \frac{\partial f_i(x(t), u(t))}{\partial x_k} \psi_i \quad (k = 0, 1, \dots, n). \quad (17.9)$$

Это — система однородных линейных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами. При любых начальных значениях для ψ_i она допускает единственное решение

$$\Psi = (\psi_0, \psi_1, \dots, \psi_n).$$

Всякое решение системы уравнений (9) (при любых начальных условиях) будем называть решением системы (8), соответствующим выбранному управлению $u(t)$ и фазовой траектории $x(t)$.

Обозначая

$$\tilde{H}(\psi, x, u) = \sum_{i=0}^n \psi_i f_i(x, u), \quad (17.10)$$

будем иметь

$$\frac{\partial \tilde{H}}{\partial \psi_j} = f_j(x, u), \quad (17.11)$$

$$\frac{\partial \tilde{H}}{\partial x_k} = \sum_{i=0}^n \psi_i \frac{\partial f_i(x, u)}{\partial x_k}, \quad (17.12)$$

и системы уравнений (7) и (8) можно переписать так:

$$\frac{dx_j}{dt} = \frac{\partial \tilde{H}}{\partial \psi_j} \quad (j = 0, 1, \dots, n), \quad (17.13)$$

$$\frac{d\psi_j}{dt} = - \frac{\partial \tilde{H}}{\partial x_j} \quad (j = 0, 1, \dots, n). \quad (17.14)$$

Поставленная выше задача решается при помощи принципа максимума Л. С. Понтрягина, установленного и доказанного [72] в виде сформулированной ниже теоремы.

Предварительно сделаем следующие замечания. Взяв произвольное допустимое управление $u(t)$ ($t_0 \leq t \leq t_1$) (то есть управление, которое переводит систему из точки $x(t_0)$ в точку x^* и удовлетворяет ограничениям $u \in \Omega$) и начальное условие $x(t_0)$, $x_0(t_0) = 0$, можно найти соответствующую (то есть удовлетворяющую системе (13)) траекторию $x(t) = (x_0(t), x_1(t), \dots, x_n(t))$. После этого можно найти соответствующие функциям $u(t)$ и $x(t)$ решения системы (14)

$$\psi(t) = (\psi_0(t), \psi_1(t), \dots, \psi_n(t)).$$

При фиксированных (постоянных) значениях ψ и x функция \tilde{H} переменных $x_1, \dots, x_n, \psi_0, \psi_1, \dots, \psi_n, u_1, \dots, u_r$

$$\tilde{H}(\psi, x, u) = \sum_{i=0}^n \psi_i f_i(x, u)$$

становится функцией параметра $u \in \Omega$; точную верхнюю грань значений этой функции обозначим через $\tilde{M}(\psi, x)$:

$$\tilde{M}(\psi, x) = \sup_{u \in \Omega} \tilde{H}(\psi, x, u). \quad (17.15)$$

Если точная верхняя грань значений непрерывной функции \tilde{H} достигается в некоторой точке области управления Ω , то $\tilde{M}(\psi, x)$ есть максимум значений функции \tilde{H} при фиксированных ψ и x . Поэтому приведенная ниже теорема (необходимое условие оптимальности), главным содержанием которой является равенство (16), названа ее автором *принципом максимума*.

Теорема 1 (принцип максимума Л. С. Понтрягина [72]). Пусть $u(t)$ ($t_0 \leq t \leq t_1$) — такое допустимое управление, что соответствующая ему траектория $x(t)$, исходящая в момент t_0 из точки $x(t_0)$, проходит в момент t_1 через точку x^* . Для оптимальности управления $u(t)$ и траектории $x(t)$ необходимо существование такой ненулевой непрерывной вектор-функции $\psi(t) = (\psi_0(t), \psi_1(t), \dots, \psi_n(t))$, соответствующей функциям $u(t)$ и $x(t)$, что

1°. Для любого момента t ($t_0 \leq t \leq t_1$), являющегося точкой непрерывности управления $u(t)$, функция $\tilde{H}(\psi(t), x(t), u)$ переменного $u \in \Omega$ достигает в точке $u = u(t)$ максимума

$$\tilde{H}(\psi(t), x(t), u(t)) = \tilde{M}(\psi(t), x(t)). \quad (17.16)$$

2°. В конечный момент t_1 выполнены соотношения

$$\psi_0(t_1) \leq 0, \quad \tilde{M}(\psi(t_1), x(t_1)) = 0. \quad (17.17)$$

Оказывается, далее, что если величины $\psi(t)$, $x(t)$, $u(t)$ удовлетворяют системе (13), (14) и условию 1°, то функции $\psi_0(t)$ и $\tilde{M}(\psi(t), x(t))$ переменного t являются постоянными, так что проверку соотношений (17) можно проводить не обязательно в момент t_1 , а в любой момент t ($t_0 \leq t \leq t_1$).

2. Принцип максимума Л. С. Понтрягина в задаче о быстродействии. Из теоремы 1 можно получить аналогичное необходимое условие оптимальности по быстродействию. Для этого в соответствии с (3) надо положить

$$f_0(x, u) \equiv 1. \quad (17.18)$$

Согласно (10) и (18) функция \tilde{H} принимает теперь вид

$$\tilde{H}(\psi, x, u) = \psi_0 + \sum_{i=1}^n \psi_i f_i(x, u). \quad (17.19)$$

Обозначим через ψ n -мерный вектор

$$\psi = \begin{bmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \dots \\ \psi_n \end{bmatrix}, \quad (17.20)$$

а через $H(\psi, x, u)$ обозначим функцию

$$H(\psi, x, u) = \sum_{i=1}^n \psi_i f_i(x, u). \quad (17.21)$$

Уравнения (1) и уравнения (8) можно представить так:

$$\frac{dx_j}{dt} = \frac{\partial H}{\partial \psi_j} \quad (j = 1, \dots, n), \quad (17.22)$$

$$\frac{d\psi_j}{dt} = - \frac{\partial H}{\partial x_j} \quad (j = 1, \dots, n). \quad (17.23)$$

При фиксированных значениях ψ и x функция H становится функцией параметра u ; верхнюю грань значений этой функции обозначим через $\tilde{M}(\psi, x)$:

$$M(\psi, x) = \sup_{u \in \Omega} H(\psi, x, u). \quad (17.24)$$

Так как согласно (21) и (19)

$$H(\psi, x, u) = \tilde{H}(\psi, x, u) - \psi_0, \quad (17.25)$$

то получим, что

$$M(\psi, x) = \tilde{M}(\psi, x) - \psi_0. \quad (17.26)$$

Поэтому условия (16) и (17) теперь принимают вид

$$H(\psi(t), x(t), u(t)) = M(\psi(t), x(t)) = -\psi_0 \geq 0. \quad (17.27)$$

Таким образом, получаем следующую теорему [72].

Теорема 2 (принцип максимума в задаче о быстродействии). Пусть $u(t)$ ($t_0 \leq t \leq t_1$) — допустимое управление, переводящее изображающую точку из положения $x(t_0)$ в положение x^* , а $x(t)$ — соответствующая траектория, так что $x(t_1) = x^*$. Для оптимальности (по быстродействию) управления $u(t)$ и траектории $x(t)$ необходимо существование такой ненулевой непрерывной вектор-функции $\psi(t) = (\psi_1(t), \psi_2(t), \dots, \psi_n(t))$, соответствующей функциям $u(t)$ и $x(t)$, что:

1°. Для любого момента t ($t_0 \leq t \leq t_1$), являющегося точкой непрерывности управления $u(t)$, функция $H(\psi(t), x(t), u)$ переменного $u \in \Omega$ достигает в точке $u = u(t)$ максимума

$$H(\psi(t), x(t), u(t)) = M(\psi(t), x(t)). \quad (17.28)$$

2°. В конечный момент t_1 выполнено соотношение

$$M(\psi(t_1), x(t_1)) \geq 0. \quad (17.29)$$

Оказывается, далее, что если величины $\psi(t)$, $x(t)$, $u(t)$ удовлетворяют системе (22), (23) и условию 1°, то функция $M(\psi(t), x(t))$ переменного t постоянна, так что проверку соотношения (29) можно проводить не обязательно в момент t_1 , а в любой момент t ($t_0 \leq t \leq t_1$).

3. Доказательство теоремы о необходимом условии оптимальности (принципа максимума) в задаче с закрепленным временем T и свободным концом траектории. В общем случае доказательство принципа максимума является довольно сложным. Поэтому здесь мы ограничимся сравнительно простым частным случаем.

Рассмотрим систему, описываемую дифференциальными уравнениями

$$\frac{dx_j}{dt} = f_j(x_1, x_2, \dots, x_n, u_1, u_2, \dots, u_r) = f_j(x, u) \quad (17.30)$$

$$(j = 1, \dots, n),$$

которым эквивалентно векторное дифференциальное уравнение

$$\frac{dx}{dt} = f(x, u), \quad (17.31)$$

где x , u и f — векторы следующего вида:

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad u = \begin{bmatrix} u_1 \\ \dots \\ u_r \end{bmatrix}, \quad f(x, u) = \begin{bmatrix} f_1(x, u) \\ \vdots \\ f_n(x, u) \end{bmatrix}. \quad (17.32)$$

Управление $u(t)$ является кусочно-непрерывной вектор-функцией и должно удовлетворять ограничениям

$$u \in \Omega. \quad (17.33)$$

Начальное состояние системы задано

$$[x(t)]_{t=t_0} = x(t_0). \quad (17.34)$$

Требуется найти управление $u(t)$ ($t_0 \leq t \leq T$), удовлетворяющее ограничениям (33) и доставляющее минимум функционалу

$$Q = \int_{t_0}^T f_0(x(\xi), u(\xi)) d\xi, \quad (17.35)$$

где T — некоторая фиксированная величина.

Как и в п. 1, обозначим через $x_0(t)$ скалярную функцию, определяемую дифференциальным уравнением

$$\frac{dx_0}{dt} = f_0(x_1, x_2, \dots, x_n, u_1, u_2, \dots, u_r) = f_0(x, u) \quad (17.36)$$

и начальным условием

$$[x_0(t)]_{t=t_0} = 0. \quad (17.37)$$

Из (36), (37) и (35) следует, что

$$Q = x_0(T). \quad (17.38)$$

Обозначим здесь оптимальное управление через $\hat{u}(t)$. Соответствующая этому управлению траектория $\hat{x}(t)$ будет оптимальной траекторией.

Оптимальное управление $\hat{u}(t)$ является вектором, координаты которого $\hat{u}_i(t)$ могут, как указано выше, иметь на отрезке $t_0 \leq t \leq T$ разрывы первого рода в конечном числе точек.

Рассмотрим бесконечно малый интервал времени $\tau - \varepsilon < t < \tau$, где ε — бесконечно малая величина, а $\tau \in (t_0, T)$.

Дадим управлению $\hat{u}(t)$ вариацию, заменив $\hat{u}(t)$ на бесконечно малом интервале времени $\tau - \varepsilon < t < \tau$ другим управлением u (не изменяя управления $\hat{u}(t)$ вне этого бесконечно малого интервала).

Заметим, что здесь не требуется, чтобы приращение $u_i(t) - \hat{u}_i(t)$ ($i = 1, \dots, r$), где $t \in (\tau - \varepsilon, \tau)$ было бесконечно малой величиной. Если ограничение (33) имеет, например, вид $|u_i| \leq m_i$, то приращение $u_i(t) - \hat{u}_i(t)$ ($t \in (\tau - \varepsilon, \tau)$) может принимать любое значение k_i , где $0 \leq |k_i| \leq 2m_i$.

Однако так как ε — бесконечно малая величина, то импульс $[u_i(t) - \hat{u}_i(t)]\varepsilon$ ($i = 1, \dots, r$) приращения управления будет ве-

личной бесконечно малой. Найдем вызываемое этим импульсом изменение траектории системы. В соответствии с уравнениями (30) и (36) будем иметь

$$\begin{aligned} x_j(\tau) - \hat{x}_j(\tau) &= \left[\left(\frac{dx_j}{dt} \right)_{t=\tau} - \left(\frac{d\hat{x}_j}{dt} \right)_{t=\tau} \right] \varepsilon + o(\varepsilon) = \\ &= [f_j(x(\tau), u(\tau)) - f_j(\hat{x}(\tau), \hat{u}(\tau))] \varepsilon + o(\varepsilon) \quad (17.39) \\ &\quad (j = 0, 1, \dots, n). \end{aligned}$$

Согласно (39) разность $x_j(\tau) - \hat{x}_j(\tau)$ будет величиной того же порядка малости, что и ε . Отсюда следует, что $f_j(x(\tau), u(\tau)) - f_j(\hat{x}(\tau), u(\tau))$ также будет величиной того же порядка малости, что и ε . В силу этого соотношение (39) можно заменить следующим соотношением:

$$\begin{aligned} x_j(\tau) - \hat{x}_j(\tau) &= [f_j(\hat{x}(\tau), u(\tau)) - f_j(\hat{x}(\tau), \hat{u}(\tau))] \varepsilon + o_1(\varepsilon) \quad (17.40) \\ &\quad (j = 0, 1, \dots, n). \end{aligned}$$

Введем теперь функции $\delta x_j(t)$ ($j = 0, 1, \dots, n$) при помощи соотношений

$$x_j(t) = \hat{x}_j(t) + \delta x_j(t) \quad (\tau \leq t \leq T; j = 0, 1, 2, \dots, n) \quad (17.41)$$

Функции δx_j называются вариациями координат.

Как видно из (40), вариации δx_j имеют тот же порядок малости, что и ε . Поэтому при отыскании уравнений, которым удовлетворяют функции δx_j ($j = 0, 1, \dots, n$), будем пренебрегать величинами $o(\varepsilon)$.

Согласно (40) и (41) в момент времени $t = \tau$ значения вариаций δx_j будут

$$\delta x_j(\tau) = [f_j(\hat{x}(\tau), u(\tau)) - f_j(\hat{x}(\tau), \hat{u}(\tau))] \varepsilon. \quad (17.42)$$

На интервале времени $\tau \leq t \leq T$ управление u совпадает с оптимальным управлением $\hat{u}(t)$. Дифференциальные уравнения, которым удовлетворяют вариации $\delta x_j(t)$ ($\tau \leq t \leq T$), можно получить следующим образом. Согласно (30), (36) и (41) будем иметь

$$\frac{d\hat{x}_j}{dt} + \frac{d(\delta x_j)}{dt} = f_j(\hat{x}_1 + \delta x_1, \dots, \hat{x}_n + \delta x_n, \hat{u}_1, \dots, \hat{u}_r) \quad (17.43)$$

$$(j = 0, 1, \dots, n).$$

Разлагая правые части (43) в ряды Тейлора в окрестности $\hat{x}_1(t), \dots, \hat{x}_n(t)$, получим

$$\begin{aligned} \frac{d\hat{x}_j}{dt} + \frac{d(\delta x_j)}{dt} &= f_j(\hat{x}_1, \dots, \hat{x}_n, \hat{u}_1, \dots, \hat{u}_r) + \\ &+ \sum_{k=0}^n \frac{\partial f_j(\hat{x}_1, \dots, \hat{x}_n, \hat{u}_1, \dots, \hat{u}_r)}{\partial x_k} \delta x_k + o(\delta x_0, \delta x_1, \dots, \delta x_n) \quad (17.44) \\ &\quad (j = 0, 1, \dots, n). \end{aligned}$$

Согласно (30) и (36) первые слагаемые в левых и правых частях уравнений (44) взаимно сокращаются. Поэтому, отбрасывая в (44) члены, содержащие δx_i во второй и высших степенях, совокупность которых обозначена через $o(\delta x_0, \delta x_1, \dots, \delta x_n)$, получим следующую систему линейных дифференциальных уравнений относительно δx_j :

$$\frac{d(\delta x_j)}{dt} = \sum_{k=0}^n \frac{\partial f_j(\hat{x}, \hat{u})}{\partial x_k} \delta x_k \quad (j = 0, 1, 2, \dots, n). \quad (17.45)$$

Дифференциальные уравнения (45), которым удовлетворяют вариации δx_j , называются *уравнениями в вариациях*.

Заметим, что если ввести матрицы

$$F(x, u) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_0}{\partial x_0} & \frac{\partial f_0}{\partial x_1} & \frac{\partial f_0}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_0}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_1}{\partial x_0} & \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_0} & \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{bmatrix}, \quad \delta x = \begin{bmatrix} \delta x_0 \\ \delta x_1 \\ \dots \\ \delta x_n \end{bmatrix}, \quad (17.46)$$

то систему скалярных дифференциальных уравнений (45) можно представить в виде эквивалентного векторного дифференциального уравнения

$$\frac{d(\delta x)}{dt} = F(\hat{x}, \hat{u}) \delta x. \quad (17.47)$$

Матрица $F^*(x, u)$, транспонированная для матрицы $F(x, u)$, будет согласно (46) иметь следующий вид:

$$F^*(x, u) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_0}{\partial x_0} & \frac{\partial f_1}{\partial x_0} & \frac{\partial f_2}{\partial x_0} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_0} \\ \frac{\partial f_0}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_0}{\partial x_n} & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{bmatrix}. \quad (17.48)$$

Через ψ обозначим $(n + 1)$ -мерный вектор

$$\psi = \begin{bmatrix} \psi_0 \\ \psi_1 \\ \psi_2 \\ \dots \\ \psi_n \end{bmatrix}, \quad (17.49)$$

который удовлетворяет векторному дифференциальному уравнению

$$\frac{d\psi}{dt} = -F^*(\hat{x}, \hat{u})\psi. \quad (17.50)$$

Векторное дифференциальное уравнение (50) эквивалентно системе скалярных дифференциальных уравнений

$$\frac{d\psi_k}{dt} = - \sum_{i=0}^n \frac{\partial f_i(\hat{x}, \hat{u})}{\partial x_k} \psi_i \quad (k = 0, 1, 2, \dots, n). \quad (17.51)$$

Система дифференциальных уравнений (51) совпадает с системой уравнений (9), которая была введена в п. 1.

В соответствии с (47) и (50) имеет место следующее соотношение:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \langle \psi(t), \delta x(t) \rangle &= \left\langle \frac{d\psi}{dt}, \delta x \right\rangle + \langle \psi, \frac{d}{dt} \delta x \rangle = \\ &= \langle -F^*\psi, \delta x \rangle + \langle \psi, F \delta x \rangle = -\psi^* F \delta x + \psi^* F \delta x = 0, \end{aligned} \quad (17.52)$$

откуда следует, что

$$\sum_{i=0}^n \psi_i(t) \delta x_i(t) = \text{const} \quad (\tau \leq t \leq T). \quad (17.53)$$

Полученное здесь соотношение (53) является известным соотношением Лагранжа для сопряженных систем однородных линейных дифференциальных уравнений, каковыми по определению являются системы, представленные векторными уравнениями (47) и (50).

Согласно (38)

$$\delta Q = \delta x_0(T),$$

а так как оптимальное управление $\hat{u}(t)$ доставляет функционалу Q минимум, то при любом другом управлении, отличном от оптимального, имеет место неравенство

$$\delta Q = \delta x_0(T) \geq 0. \quad (17.54)$$

Зададим теперь для системы дифференциальных уравнений (51) следующие условия, которым должно удовлетворять решение уравнений (51) в момент времени $t = T$ (см. стр. 273):

$$\psi_0(T) = -1, \quad \psi_1(T) = \psi_2(T) = \dots = \psi_n(T) = 0. \quad (17.55)$$

При этом в соответствии с (54) и (55) будем иметь

$$\sum_{i=0}^n \psi_i(T) \delta x_i(T) = -\delta x_0(T) = -\delta Q \leq 0. \quad (17.56)$$

В соответствии с (53) можно переписать неравенство (56) так:

$$-\delta Q = \sum_{i=0}^n \psi_i(\tau) \delta x_i(\tau) \leq 0. \quad (17.57)$$

Здесь

$$\psi_i(\tau) = [\psi_i(t)]_{t=\tau} \quad (i = 0, 1, \dots, n),$$

где $\psi(t)$ — решение системы дифференциальных уравнений (51), удовлетворяющее условиям (55).

Значения $\delta x_i(\tau)$ ($i = 1, \dots, n$) известны — они определены выше выражениями (42). Подставляя эти выражения в неравенство (57), получим

$$\sum_{i=0}^n \psi_i(\tau) [f_i(\hat{x}(\tau), u(\tau)) - f_i(\hat{x}(\tau), \hat{u}(\tau))] \varepsilon \leq 0. \quad (17.58)$$

Интервал времени $(\tau - \varepsilon, \tau)$ есть тот интервал времени, на котором оптимальное управление $\hat{u}(t)$ было заменено другим управлением. Учитывая, что $\varepsilon > 0$, можно заменить неравенство (58) следующим неравенством:

$$\sum_{i=0}^n \psi_i(\tau) [f_i(\hat{x}(\tau), u(\tau)) - f_i(\hat{x}(\tau), \hat{u}(\tau))] \leq 0. \quad (17.59)$$

Так как в качестве момента времени τ можно выбрать любой текущий момент времени t ($t_0 + \varepsilon \leq t \leq T$), где ε — сколь угодно малая величина, то неравенство (59) можно представить так:

$$\sum_{i=0}^n \psi_i(t) f_i(\hat{x}(t), u(t)) \leq \sum_{i=0}^n \psi_i(t) f_i(\hat{x}(t), \hat{u}(t)). \quad (17.60)$$

Выше (10) через \tilde{H} была обозначена следующая функция переменных $x_1, \dots, x_n, \psi_0, \psi_1, \dots, \psi_n, u_1, \dots, u_r$:

$$\tilde{H}(\psi, x, u) = \sum_{i=0}^n \psi_i f_i(x, u).$$

Поэтому неравенство (60) принимает следующий вид:

$$\tilde{H}(\psi, \hat{x}, u) \leq \tilde{H}(\psi, \hat{x}, \hat{u}). \quad (17.61)$$

Заметим еще, что так как согласно (30) и (36)

$$\frac{\partial f_i(x, u)}{\partial x_0} = \frac{\partial f_i(x_1, x_2, \dots, x_n, u_1, \dots, u_r)}{\partial x_0} = 0 \quad (17.62)$$

$$(i = 0, 1, \dots, n),$$

то из (51) следует, что

$$\frac{d\psi_0}{dt} = 0, \quad (17.63)$$

откуда в соответствии с (55) найдем

$$\psi_0(t) = -1 \quad (t_0 \leq t \leq T). \quad (17.64)$$

Таким образом, для рассматриваемой здесь задачи доказано утверждение (16) теоремы 1. Доказана также первая часть утверждения (17) этой теоремы. Вторая часть утверждения (17) о том, что $\tilde{H}(\psi(t), \hat{x}(t), \hat{u}(t)) = 0$ для любого значения t на отрезке $t_0 \leq t \leq T$, требует отдельного доказательства.

Мы убедились, что если управление $\hat{u}(t)$ является оптимальным, то имеют место условия (61) и (64), то есть эти условия являются необходимыми условиями оптимальности.

Таким образом, для рассмотренного здесь частного случая доказано, что теорема 1 доставляет необходимые условия оптимальности.

Доказательство теоремы 1 для общей задачи оптимального управления дано в монографии [72].

§ 18. Принцип максимума для неавтономных систем

1. Теорема о необходимом условии оптимальности для неавтономных систем. Рассмотрим теперь систему, описываемую дифференциальными уравнениями

$$\frac{dx_j}{dt} = f_j(x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_r, t) = f_j(x, u, t) \quad (18.1)$$

$$(j = 1, \dots, n),$$

которым эквивалентно векторное уравнение

$$\frac{dx}{dt} = f(x, u, t), \quad (18.2)$$

где x , u и f — векторы следующего вида:

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{bmatrix}, \quad u = \begin{bmatrix} u_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ u_r \end{bmatrix}, \quad f(x, u, t) = \begin{bmatrix} f_1(x, u, t) \\ \cdot \\ \cdot \\ f_n(x, u, t) \end{bmatrix}. \quad (18.3)$$

Требуется перевести систему из точки $x(t_0)$ фазового пространства X в заданную точку x^* . Момент времени t_1 , в который изображающая точка попадет в точку x^* , заранее не фиксируется.

Управление $u = u(t)$ должно удовлетворять ограничениям

$$u \in \Omega, \quad (18.4)$$

причем область Ω предполагается не зависящей от времени.

С учетом ограничений (4) требуется выбрать управление u так, чтобы функционал

$$Q = \int_{t_0}^{t_1} f_0(x(t), u(t), t) dt \quad (18.5)$$

принимал наименьшее возможное значение.

Удовлетворяющее этим условиям управление u , соответствующую ему траекторию и промежуток времени $t_1 - t_0$ будем считать *оптимальными*.

Как и выше, обозначим через $x_0(t)$ скалярную функцию, определяемую дифференциальным уравнением

$$\frac{dx_0}{dt} = f_0(x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_r, t) = f_0(x, u, t) \quad (18.6)$$

и начальным условием

$$x_0(t_0) = 0. \quad (18.7)$$

В соответствии с (6) и (7) функционал (5) можно представить так:

$$Q = x_0(t_1). \quad (18.8)$$

Введем теперь еще скалярную функцию x_{n+1} , определяемую дифференциальным уравнением

$$\frac{dx_{n+1}}{dt} = 1 \quad (18.9)$$

и начальным условием

$$x_{n+1}(t_0) = t_0. \quad (18.10)$$

Очевидно, что

$$x_{n+1} = t. \quad (18.11)$$

Пространство переменных $x_1, x_2, \dots, x_n, x_{n+1}$ обозначим через X^* .

Систему уравнений (1) и уравнение (6) можно теперь записать совместно так:

$$\frac{dx_j}{dt} = f_j(x, u, x_{n+1}) \quad (j = 0, 1, \dots, n). \quad (18.12)$$

Рассматриваемую здесь задачу можно теперь сформулировать так. Требуется найти оптимальную траекторию, соединяющую в пространстве X^* точку $(x_0(t_0), x_2(t_0), \dots, x_n(t_0), t_0)$ с некоторой точкой прямой S_1 (рис. 18.1), проходящей через точку $(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*, 0)$ параллельно оси x_{n+1} .

Рассматриваемая задача, таким образом, приведена к оптимальной автономной задаче с закрепленным левым концом, но подвижным правым концом. Вследствие подвижности правого конца траектории теорема 1 (§ 17) непосредственно не может быть здесь применена.

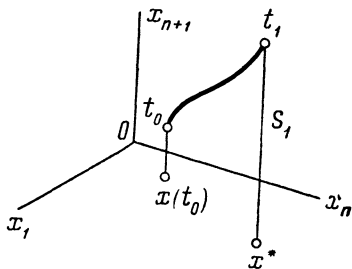


Рис. 18.1.

Вспомогательная система уравнений (17.9) здесь принимает вид

$$\frac{d\psi_k}{dt} = - \sum_{i=0}^n \frac{\partial f_i(x, u, t)}{\partial x_k} \psi_i \quad (k = 0, 1, \dots, n), \quad (18.13)$$

$$\frac{d\psi_{n+1}}{dt} = - \sum_{i=0}^n \frac{\partial f_i(x, u, t)}{\partial t} \psi_i. \quad (18.14)$$

Аналогично (17.10) обозначим

$$\tilde{H}(\psi, x, t, u) = \sum_{i=0}^n \psi_i f_i(x, u, t). \quad (18.15)$$

Уравнения (12) и (13) можно представить в виде

$$\frac{dx_i}{dt} = \frac{\partial \tilde{H}}{\partial \psi_i}, \quad \frac{d\psi_i}{dt} = - \frac{\partial \tilde{H}}{\partial x_i} \quad (i = 0, 1, \dots, n). \quad (18.16)$$

Необходимое условие оптимальности для неавтономной системы дается следующей теоремой.

Теорема (принцип максимума для неавтономных систем) [72]. Пусть $u(t)$ ($t_0 \leq t \leq t_1$) — такое допустимое управление, что соответствующая ему траектория $x(t)$

системы (1), исходящая в момент t_0 из точки $x(t_0)$, проходит в момент t_1 через точку x^* . Для оптимальности управления $u(t)$ и траектории $x(t)$ необходимо существование такой ненулевой непрерывной вектор-функции $\psi(t) = (\psi_0(t), \psi_1(t), \dots, \psi_n(t))$, соответствующей функциям $u(t)$ и $x(t)$, что:

1°. Для любого момента t ($t_0 \leq t \leq t_1$), являющегося точкой непрерывности управления $u(t)$, функция $\tilde{H}(\psi(t), x(t), t, u)$ переменного $u \in \Omega$ достигает в точке $u = u(t)$ максимума

$$\tilde{H}(\psi(t), x(t), t, u(t)) = M(\psi(t), x(t), t). \quad (18.17)$$

2°. Выполнены соотношения

$$\psi_0(t) = \text{const} \leq 0, \quad (18.18)$$

$$M(\psi(t), x(t), t) = \int_{t_1}^t \sum_{i=1}^n \frac{\partial f_i(x(t), u(t), t)}{\partial t} \psi_i(t) dt. \quad (18.19)$$

Оказывается, далее, что если величины $\psi(t)$, $x(t)$, $u(t)$ удовлетворяют системе (12), (13) и условию 1°, то функция $\psi_0(t)$ переменного t постоянна, а функция $M(\psi(t), x(t), t)$ может лишь на константу отличаться от интеграла, указанного в (19), так что проверку соотношений (18) и (19) достаточно произвести лишь в какой-либо один момент времени t ($t_0 \leq t \leq t_1$); например, вместо (18) и (19) достаточно проверить соотношения

$$\psi_0(t_1) \leq 0, \quad M(\psi(t_1), x(t_1), t_1) = 0. \quad (18.20)$$

Из сравнения приведенной здесь теоремы с теоремой 1 (§ 17) видно, что и для неавтономных систем, описываемых уравнениями вида (1), первая часть теоремы 1 — принцип максимума — полностью сохраняется.

Отличие состоит лишь в том, что у неавтономных систем функция

$$M(\psi(t), x(t), t) = \tilde{H}(\psi(t), x(t), t, u(t))$$

теперь уже не является константой, а определяется выражением (19).

2. Доказательство теоремы о необходимом условии оптимальности для неавтономной системы с линейно входящим управлением. Для частного случая, когда управление входит линейно, можно дать [27, 72] непосредственное доказательство теоремы о необходимом условии оптимальности для неавтономной системы.

Рассмотрим систему, описываемую скалярными дифференциальными уравнениями

$$\frac{dx_j}{dt} = f_j(x_1, \dots, x_n, t) + \sum_{l=1}^r B_{jl}(t) u_l \quad (j = 1, \dots, n), \quad (18.21)$$

которым эквивалентно векторное дифференциальное уравнение

$$\frac{dx}{dt} = f(x, t) + B(t) u, \quad (18.22)$$

где

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad f(x, t) = \begin{bmatrix} f_1(x, t) \\ \dots \\ f_n(x, t) \end{bmatrix}, \quad (18.23)$$

$$B(t) = \begin{bmatrix} B_{11}(t) & \dots & B_{1r}(t) \\ \dots & \dots & \dots \\ B_{n1}(t) & \dots & B_{nr}(t) \end{bmatrix}, \quad u = \begin{bmatrix} u_1 \\ \dots \\ u_r \end{bmatrix}.$$

Требуется перевести систему из точки $x(t_0)$ в заданную точку x^* . Момент времени t_1 , в который изображающая точка попадет в точку x^* , заранее не фиксируется.

Управления $u_l(t)$ должны удовлетворять ограничениям

$$|u_l(t)| \leq m_l, \quad (l = 1, \dots, r), \quad (18.24)$$

и их надо выбрать так, чтобы приведение системы в точку x^* было выполнено при минимально возможном значении функционала

$$Q = \int_{t_0}^{t_1} \left[f_0(x(t), t) + \sum_{l=1}^r B_{0l}(t) u_l(t) \right] dt. \quad (18.25)$$

Через $x_0(t)$ обозначим функцию, определяемую дифференциальным уравнением

$$\frac{dx_0}{dt} = f_0(x_1, \dots, x_n, t) + \sum_{l=1}^r B_{0l}(t) u_l(t) \quad (18.26)$$

и начальным условием

$$x_0(t_0) = 0. \quad (18.27)$$

Тогда функционал Q примет вид

$$Q = x_0(t_1). \quad (18.28)$$

Вспомогательные переменные $\psi_0, \psi_1, \dots, \psi_n$ будут удовлетворять следующей системе дифференциальных уравнений:

$$\frac{d\psi_k}{dt} = - \sum_{i=0}^n \frac{\partial f_i(x_1, \dots, x_n, t)}{\partial x_k} \psi_i \quad (k = 0, 1, \dots, n), \quad (18.29)$$

Функция \tilde{H} в рассматриваемой задаче имеет вид

$$\tilde{H} = \sum_{i=0}^n \psi_i \left[f_i(x_1, \dots, x_n, t) + \sum_{l=1}^r B_{il}(t) u_l \right]$$

или

$$\tilde{H} = \sum_{i=0}^n \psi_i f_i(x_1, \dots, x_n, t) + \sum_{l=1}^r u_l \left[\sum_{i=0}^n B_{il}(t) \psi_i \right]. \quad (18.30)$$

Обозначим через $\hat{u}(t)$ оптимальное управление, а через $\hat{x}(t)$ и $\hat{\psi}(t)$ — соответствующие ему векторы фазовых координат и вспомогательных переменных.

Покажем, что оптимальное управление будет иметь следующий вид, соответствующий теореме о принципе максимума:

$$\hat{u}_l(t) = m_l \operatorname{sign} \sum_{i=0}^n B_{il}(t) \hat{\psi}_i(t) \quad (l = 1, \dots, r) \quad (18.31)$$

или

$$\hat{u}_l(t) = m_l \operatorname{sign} R_l(t) \quad (l = 1, \dots, r), \quad (18.32)$$

где

$$R(t) = \tilde{B}^*(t) \hat{\psi}(t), \quad (18.33)$$

$$\tilde{B}(t) = \begin{bmatrix} B_{01}(t) & \dots & B_{0r}(t) \\ B_{11}(t) & \dots & B_{1r}(t) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ B_{n1}(t) & \dots & B_{nr}(t) \end{bmatrix}, \quad \hat{\psi}(t) = \begin{bmatrix} \hat{\psi}_0(t) \\ \hat{\psi}_1(t) \\ \vdots \\ \hat{\psi}_n(t) \end{bmatrix}. \quad (18.34)$$

Дадим оптимальному управлению $\hat{u}_l(t)$ приращение $\delta u_l(t)$, удовлетворяющее условию

$$|\hat{u}_l(t) + \delta u_l(t)| < m_l \quad (l = 1, \dots, r). \quad (18.35)$$

Функцию $\delta u_l(t)$ назовем *допустимой вариацией* оптимального управления.

Управлению $\hat{u}_l(t) + \delta u_l(t)$ ($l = 1, \dots, r$) будет соответствовать решение $\hat{x}_k(t) + \delta x_k(t)$ ($k = 0, 1, \dots, n$) дифференциальных уравнений (21) и (26), где $\hat{x}_k(t)$ ($k = 0, 1, \dots, n$) — решение этих уравнений при $u_l(t) = \hat{u}_l(t)$ ($l = 1, \dots, r$).

Так как начальное состояние системы $x_0(t_0), x_1(t_0), \dots, x_n(t_0)$ фиксировано, то

$$\delta x_k(t_0) = 0 \quad (k = 0, 1, \dots, n). \quad (18.36)$$

Таким образом, в соответствии с (21) и (26) будем иметь следующую систему дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} (\hat{x}_j + \delta x_j) &= f_j(\hat{x}_1 + \delta x_1, \dots, \hat{x}_n + \delta x_n, t) + \\ &+ \sum_{l=1}^r B_{jl}(t) (\hat{u}_l + \delta u_l) \quad (j = 0, 1, \dots, n). \end{aligned} \quad (18.37)$$

Так как

$$\begin{aligned} \dot{f}_j(\hat{x}_1 + \delta x_1, \dots, \hat{x}_n + \delta x_n, t) = \\ = \dot{f}_j(\hat{x}_1, \dots, \hat{x}_n, t) + \sum_{k=0}^n \frac{\partial f_j(\hat{x}_1, \dots, \hat{x}_n, t)}{\partial x_k} \delta x_k + \\ + o(\delta x_0, \delta x_1, \dots, \delta x_n) \quad (j=0, 1, \dots, n), \end{aligned} \quad (18.38)$$

то уравнения (37) принимают вид

$$\begin{aligned} \frac{d\hat{x}_j}{dt} + \frac{d}{dt} \delta x_j = \dot{f}_j(\hat{x}_1, \dots, \hat{x}_n, t) + \sum_{l=1}^r B_{jl}(t) \hat{u}_l + \\ + \sum_{k=0}^n \frac{\partial f_j(\hat{x}_1, \dots, \hat{x}_n, t)}{\partial x_k} \delta x_k + \sum_{l=1}^r B_{jl}(t) \delta u_l + o(\delta x_0, \delta x_1, \dots, \delta x_n) \\ (j=0, 1, \dots, n). \end{aligned} \quad (18.39)$$

Первое слагаемое в левой части уравнений (39) взаимно сокращается с первыми двумя слагаемыми в правой части этих уравнений, как это следует из уравнений (21) и (26). При малых допустимых вариациях управления $\delta u_l(t)$, будут малыми и вариации $\delta x_l(t)$ ($l=0, 1, \dots, n$). Тогда, отбрасывая в уравнениях (39) совокупность членов второго и высших порядков относительно $\delta x_0, \delta x_1, \dots, \delta x_n$, получим следующую систему линейных дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \delta x_j = \sum_{k=0}^n \frac{\partial f_j(\hat{x}_1, \dots, \hat{x}_n, t)}{\partial x_k} \delta x_k + \sum_{l=1}^r B_{jl}(t) \delta u_l(t) \quad (18.40) \\ (j=0, 1, \dots, n). \end{aligned}$$

Уравнения (40) представляют собой систему уравнений в вариациях для рассматриваемой задачи. Так как $\hat{x}_1(t), \dots, \hat{x}_n(t)$ определяют собой оптимальную траекторию, то функции $\frac{\partial f_j(\hat{x}_1, \dots, \hat{x}_n, t)}{\partial x_k}$ являются некоторыми функциями времени.

Обозначим через $A(t)$ матрицу типа $(n+1) \times (n+1)$, элементами которой являются функции $\frac{\partial f_j(\hat{x}_1, \dots, \hat{x}_n, t)}{\partial x_k}$:

$$A(t) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_0}{\partial x_0} & \frac{\partial f_0}{\partial x_1} & \frac{\partial f_0}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_0}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_1}{\partial x_0} & \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_0} & \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{bmatrix}. \quad (18.41)$$

Через ξ обозначим $(n + 1)$ -мерный вектор

$$\xi = \begin{bmatrix} \xi_0 \\ \xi_1 \\ \dots \\ \xi_n \end{bmatrix}, \quad (18.42)$$

где

$$\xi_j = \delta x_j \quad (j = 0, 1, \dots, n). \quad (18.43)$$

Систему уравнений в вариациях (40) можно представить в виде векторного дифференциального уравнения

$$\dot{\xi} = A(t)\xi + \tilde{B}(t)\delta u(t), \quad \xi(t_0) = 0. \quad (18.44)$$

где матрица $\tilde{B}(t)$ имеет вид (34).

Матрица $A^*(t)$, образуемая транспонированием матрицы (41), имеет следующий вид:

$$A^*(t) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_0}{\partial x_0} & \frac{\partial f_1}{\partial x_0} & \frac{\partial f_2}{\partial x_0} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_0} \\ \frac{\partial f_0}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_0}{\partial x_n} & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{bmatrix}. \quad (18.45)$$

Согласно (29) вспомогательные переменные $\tilde{\psi}_0, \tilde{\psi}_1, \dots, \tilde{\psi}_n$, соответствующие оптимальному управлению $\hat{u}_l(t)$, удовлетворяют следующей системе дифференциальных уравнений:

$$\frac{d\hat{\psi}_k}{dt} = - \sum_{i=0}^n \frac{\partial f_i(x_1, \dots, x_n, t)}{\partial x_k} \tilde{\psi}_i \quad (k = 0, 1, \dots, n). \quad (18.46)$$

Систему скалярных дифференциальных уравнений (46) можно заменить векторным дифференциальным уравнением

$$\frac{d}{dt} \tilde{\psi} = - A^*(t) \tilde{\psi}. \quad (18.47)$$

Через $\Xi(t)$ обозначим фундаментальную матрицу решений векторного дифференциального уравнения (47), удовлетворяющую условию $\Xi(t_0) = E$, где E — единичная матрица.

Через $\Lambda(t)$ обозначим фундаментальную матрицу решений векторного дифференциального уравнения

$$\dot{\zeta} = A(t)\zeta, \quad (18.48)$$

удовлетворяющую условию $\Lambda(t_0) = E$.

Так как согласно (47) и (48)

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \langle \bar{\psi}(t), \zeta(t) \rangle &= \left\langle \frac{d}{dt} \bar{\psi}(t), \zeta(t) \right\rangle + \langle \bar{\psi}(t), \frac{d}{dt} \zeta(t) \rangle = \\ &= \langle -A^*(t) \bar{\psi}(t), \zeta(t) \rangle + \langle \bar{\psi}(t), A(t) \zeta(t) \rangle = \\ &= -\bar{\psi}^*(t) A(t) \zeta(t) + \bar{\psi}^*(t) A(t) \zeta(t) = 0, \end{aligned} \quad (18.49)$$

то

$$\langle \bar{\psi}(t), \zeta(t) \rangle = \text{const}, \quad (18.50)$$

откуда следует, что

$$\langle \bar{\psi}(t), \zeta(t) \rangle = \langle \bar{\psi}(t_0), \zeta(t_0) \rangle. \quad (18.51)$$

Подставляя вместо $\bar{\psi}(t)$ и $\zeta(t)$ решения уравнений (47) и (48)

$$\bar{\psi}(t) = \Xi(t) \bar{\psi}(t_0), \quad \zeta(t) = \Lambda(t) \zeta(t_0),$$

приведем соотношение (51) к виду

$$[\Xi(t) \bar{\psi}(t_0)]^* \Lambda(t) \zeta(t_0) = \bar{\psi}^*(t_0) \zeta(t_0)$$

или

$$\bar{\psi}^*(t_0) \Xi^*(t) \Lambda(t) \zeta(t_0) = \bar{\psi}^*(t_0) \zeta(t_0). \quad (18.52)$$

Из соотношения (52) следует, что

$$\Xi^*(t) \Lambda(t) \equiv E, \quad \Xi^*(t) = \Lambda^{-1}(t). \quad (18.53)$$

Транспонируя матрицы в левой и правой части соотношения (53), получим

$$\Lambda^*(t) \Xi(t) \equiv E, \quad \Lambda^*(t) = \Xi^{-1}(t). \quad (18.54)$$

Аналогично (49) из уравнений (44) и (47) найдем, что

$$\frac{d}{dt} \langle \xi(t), \bar{\psi}(t) \rangle = \langle \tilde{B}^*(t) \bar{\psi}(t), \delta u(t) \rangle, \quad (18.55)$$

откуда, интегрируя, получим

$$\langle \xi(t_1), \bar{\psi}(t_1) \rangle - \langle \xi(t_0), \bar{\psi}(t_0) \rangle = \int_{t_0}^{t_1} \langle \tilde{B}^*(\tau) \bar{\psi}(\tau), \delta u(\tau) \rangle d\tau. \quad (18.56)$$

Так как согласно (44) $\xi(t_0) = 0$, то соотношение (56) принимает вид

$$\langle \xi(t_1), \bar{\psi}(t_1) \rangle = \int_{t_0}^{t_1} \langle \tilde{B}^*(\tau) \bar{\psi}(\tau), \delta u(\tau) \rangle d\tau. \quad (18.57)$$

Покажем теперь, что при выполнении условия (31) имеет место соотношение

$$\langle \xi(t_1), \bar{\psi}(t_1) \rangle \leq 0, \quad (18.58)$$

где $\xi(t_1)$ — любой вектор, принадлежащий множеству векторов, соответствующему множеству допустимых вариаций $\delta u(t)$.

Действительно, в соответствии с (31) при

$$\sum_{i=0}^n B_{i\mu}(t) \bar{\psi}_i(t) > 0 \quad (t \in [t^*, t^{**}] \subset [t_0, t_1])$$

согласно (31) имеем $\hat{u}_\mu(t) = m_\mu$ ($t \in [t^*, t^{**}]$), и допустимая вариация $\delta u_\mu(t)$ будет удовлетворять условию

$$-2m_\mu < \delta u_\mu(t) \leq 0.$$

При

$$\sum_{i=0}^n B_{i\sigma}(t) \bar{\psi}_i(t) < 0 \quad (t \in [t_*, t_{**}] \subset [t_0, t_1])$$

имеем согласно (31) $\hat{u}_\sigma(t) = -m_\sigma$ ($t \in [t_*, t_{**}]$), и допустимая вариация будет удовлетворять условию

$$0 \leq \delta u_\sigma(t) < 2m_\sigma.$$

При этом

$$\int_{t_0}^{t_1} \langle \bar{B}^*(\tau) \bar{\psi}(\tau), \delta u(\tau) \rangle d\tau \leq 0,$$

откуда согласно (57) вытекает соотношение (58).

Нетрудно также видеть, что если условие (31) не выполнено, то существуют такие допустимые вариации, для которых

$$\langle \xi(t_1) \bar{\psi}(t_1) \rangle > 0.$$

Действительно, пусть вне отрезка времени $[t^*, t^{**}] \subset [t_0, t_1]$ вариация управления $\delta u(t) \equiv 0$. На отрезке времени $[t^*, t^{**}]$

$$\delta u_\mu(t) \neq 0, \quad \delta u_j(t) \equiv 0 \quad (j = 1, \dots, \mu - 1, \mu + 1, \dots, r).$$

Пусть

$$\sum_{i=0}^n B_{i\mu}(t) \bar{\psi}_i(t) > 0, \quad u_\mu(t) < m_\mu \quad (t \in [t^*, t^{**}]),$$

то есть условие (31) не выполнено.

Выберем в качестве допустимой вариации управления

$$\delta u_\mu(t) = v > 0 \quad (t \in [t^*, t^{**}]),$$

где v удовлетворяет условию

$$u_\mu(t) + v < m_\mu \quad (t \in [t^*, t^{**}]).$$

При этом выражение (57) принимает вид

$$\langle \xi(t_1) \bar{\psi}(t_1) \rangle = \int_{t^*}^{t^{**}} \left[\sum_{i=0}^n B_{i\mu}(\tau) \bar{\psi}_i(\tau) \right] v d\tau > 0.$$

Таким образом, соотношение (58) имеет место только при выполнении условия (31).

Допустимые вариации $\delta u(t)$ оптимального управления должны удовлетворять соотношению (35), из которого следует, что векторы $\delta u(t)$ ограничены по норме. Так как мы здесь исходим из линейной системы уравнений в вариациях (44), то ограничимся лишь достаточно малыми вариациями $\delta u(t)$, удовлетворяющими как условию (35), так и условию

$$|\delta u_l(t)| \leq \varepsilon \quad (l = 1, \dots, r), \quad (18.59)$$

где ε — достаточно малая величина.

Каждой допустимой вариации $\delta u(t)$ соответствует некоторое решение $\xi(t)$ векторного дифференциального уравнения (44). Это решение в момент времени t_1 принимает значение $\xi(t_1)$. В $(n+1)$ -мерном пространстве (x_0, x_1, \dots, x_n) из точки $\tilde{x}(t_1) = (x_0(t_1), \hat{x}(t_1))$ отложим вектор $\xi(t_1)$. Множество концов векторов $\xi(t_1)$, соответствующих допустимым вариациям $\delta u(t)$, назовем *множеством достижимости* и обозначим через $K(t_1)$. Так как согласно (59) допустимые вариации $\delta u(t)$ ограничены, то и векторы $\xi(t_1)$ также ограничены, и, следовательно, множество $K(t_1)$ будет ограниченным.

Можно показать, что $K(t_1)$ является выпуклым множеством. Для этого требуется, чтобы все точки

$$(1-\lambda)\xi^*(t_1) + \lambda\xi^{**}(t_1) \quad (0 \leq \lambda \leq 1)$$

отрезка прямой, соединяющего две точки $\xi^*(t_1)$ и $\xi^{**}(t_1)$ множества $K(t_1)$, принадлежали множеству $K(t_1)$. Вариации управления $\delta u^*(t)$ и $\delta u^{**}(t)$, которым соответствуют $\xi^*(t_1)$ и $\xi^{**}(t_1)$, удовлетворяют условиям (35) и (59). Определим $\delta u_\lambda(t)$ ($t \in [t_0, t_1]$) соотношением

$$\delta u_\lambda(t) = (1-\lambda)\delta u^*(t) + \lambda\delta u^{**}(t) \quad (0 \leq \lambda \leq 1).$$

Вариация управления $\delta u_\lambda(t)$ удовлетворяет условиям (35) и (59), то есть точка $\xi_\lambda(t_1) \in K(t_1)$. Решение $\xi_\lambda(t)$, соответствующее вариации $\delta u_\lambda(t)$ и начальному условию $\xi_\lambda(t_0) = 0$, в соответствии с (44) будет

$$\begin{aligned} \xi_\lambda(t) &= \Lambda(t) \int_{t_0}^t \Lambda^{-1}(\tau) \tilde{B}(\tau) \delta u_\lambda(\tau) d\tau = \\ &= (1-\lambda) \Lambda(t) \int_{t_0}^t \Lambda^{-1}(\tau) \tilde{B}(\tau) \delta u^*(\tau) d\tau + \\ &+ \lambda \Lambda(t) \int_{t_0}^t \Lambda^{-1}(\tau) \tilde{B}(\tau) \delta u^{**}(\tau) d\tau = (1-\lambda)\xi^*(t) + \lambda\xi^{**}(t). \end{aligned}$$

Отсюда следует, что

$$\xi_\lambda(t_1) = (1 - \lambda)\xi^*(t_1) + \lambda\xi^{**}(t_1),$$

и, таким образом, $K(t_1)$ является ограниченным, выпуклым множеством.

Покажем еще, что точка $\tilde{x}(t_1) = (\hat{x}_0(t_1), \hat{x}(t_1))$, соответствующая вариации $\delta u(t) \equiv 0$ ($t \in [t_0, t_1]$), лежит на границе множества $K(t_1)$. Действительно, точка $\tilde{x}(t_1)$ в пространстве (x_0, x_1, \dots, x_n) расположена на прямой L , проходящей через точку $(0, \hat{x}_1(t_1), \dots, \hat{x}_n(t_1))$ параллельно оси x_0 . Если бы точка $(\hat{x}_0(t_1), \hat{x}_1(t_1), \dots, \hat{x}_n(t_1))$ была внутренней точкой ограниченного выпуклого множества $K(t_1)$, то существовал бы отрезок L^* прямой L с граничной точкой $(\hat{x}_0(t_1), \hat{x}_1(t_1), \dots, \hat{x}_n(t_1))$, все точки которого принадлежали бы множеству $K(t_1)$ и имели бы координату x_0 , меньшую чем координата $\hat{x}_0(t_1)$ граничной точки оптимальной траектории. Тогда сфера достаточно малого радиуса ρ с центром в точке $(\hat{x}_0(t_1), \hat{x}_1(t_1), \dots, \hat{x}_n(t_1))$, все точки которой принадлежат множеству $K(t_1)$, пересекла бы отрезок L^* в точке $(x_0^*, \hat{x}_1(t_1), \dots, \hat{x}_n(t_1))$, где $x_0^* < \hat{x}_0(t_1)$, что противоречило бы оптимальности траектории $(\hat{x}_0(t), \hat{x}_1(t), \dots, \hat{x}_n(t))$ ($t \in [t_0, t_1]$).

Отсюда следует, что точка $\tilde{x}(t_1) = (\hat{x}_0(t_1), \hat{x}(t_1))$ расположена на границе ограниченного выпуклого множества $K(t_1)$.

Как известно [15], через любую граничную точку выпуклого множества можно провести хотя бы одну гиперплоскость такую, что все точки этого множества будут расположены по одну сторону от этой гиперплоскости. Указанная гиперплоскость называется *опорной*. Через угловую граничную точку можно провести более одной опорной гиперплоскости. Обозначим через M опорную для множества $K(t_1)$ гиперплоскость, проходящую через граничную точку $\tilde{x}(t_1) = (\hat{x}_0(t_1), \hat{x}(t_1))$. Единичную нормаль к гиперплоскости M в точке $\tilde{x}(t_1) = (\hat{x}_0(t_1), \hat{x}(t_1))$, направленную в полупространство, не содержащее множества $K(t_1)$, обозначим через N . Из изложенного следует, что для любого вектора $\xi(t_1) \in K(t_1)$ будет иметь место соотношение

$$\langle \xi(t_1), N \rangle \leq 0. \quad (18.60)$$

Чтобы завершить доказательство теоремы, надо показать существование вектор-функции $\tilde{\psi}(t)$, удовлетворяющей условию (17). Положим

$$\tilde{\psi}(t_1) = N. \quad (18.61)$$

Тогда, как показано выше (соотношение (58)), для выполнения условия (60) требуется, чтобы управление $\hat{u}(t)$ определялось

формулой (31), где $\bar{\psi}(t)$ — решение системы дифференциальных уравнений (46), удовлетворяющее граничному условию (61).

В качестве примера заметим, что для задачи с закрепленным временем T и свободным концом траектории опорная плоскость M для множества достижимости $K(T)$ будет перпендикулярна к оси x_0 . Поэтому нормаль N к плоскости M , направленная в полупространство, не содержащее множества $K(T)$, будет $N = (-1, 0, \dots, 0)$, и, следовательно, согласно (61) в этой задаче $\psi(T) = (-1, 0, \dots, 0)$, как это указано в формуле (17.55).

Приведенные здесь, при помощи линейных уравнений в вариациях (44), рассуждения справедливы, если *вариации* $\delta u_i(t)$ *достаточно малы*, то есть если рассматриваются лишь траектории, достаточно близкие к оптимальной траектории.

Итак доказано, что условие (31) является *необходимым* условием оптимальности.

Вопрос о достаточных условиях оптимальности в форме принципа максимума требует отдельного рассмотрения.

3. Линейные неавтономные системы. Приведение задачи о быстродействии к краевой задаче. Предварительно введем некоторые обозначения. Рассмотрим две системы, описываемые векторными дифференциальными уравнениями

$$\frac{d\xi}{dt} = A(t)\xi, \quad (18.62)$$

$$\frac{d\eta}{dt} = -A^*(t)\eta, \quad (18.63)$$

где матрица $A^*(t)$ является транспонированной матрицей для матрицы $A(t)$. Через $\theta(t)$ обозначим фундаментальную матрицу решений для уравнения (62), а через $X(t)$ обозначим матрицу

$$X(t) = \theta(t)\theta^{-1}(0). \quad (18.64)$$

Решение задачи Коши для векторного дифференциального уравнения (62) будет иметь следующий вид:

$$\xi(t) = X(t)\xi(0). \quad (18.65)$$

Решение задачи Коши для векторного уравнения (63) запишем так:

$$\eta(t) = \Xi(t)\eta(0). \quad (18.66)$$

Здесь $\Xi(t)$ — квадратная матрица, удовлетворяющая условию

$$\Xi(0) = E, \quad (18.67)$$

где E — единичная матрица.

Как показано выше (53), матрицы $X(t)$ и $\Xi(t)$ удовлетворяют условию

$$\Xi^*(t) = X^{-1}(t). \quad (18.68)$$

Обратимся теперь к управляемой системе, описываемой линейным векторным уравнением

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x + B(t)u, \quad (18.69)$$

где x , $A(t)$, $B(t)$, u — следующие матрицы:

$$\left. \begin{aligned} x &= \begin{bmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad u = \begin{bmatrix} u_1 \\ \dots \\ u_r \end{bmatrix}, \\ A(t) &= \begin{bmatrix} A_{11}(t) & \dots & A_{1n}(t) \\ \dots & \dots & \dots \\ A_{n1}(t) & \dots & A_{nn}(t) \end{bmatrix}, \\ B(t) &= \begin{bmatrix} B_{11}(t) & \dots & B_{1r}(t) \\ \dots & \dots & \dots \\ B_{n1}(t) & \dots & B_{nr}(t) \end{bmatrix}. \end{aligned} \right\} \quad (18.70)$$

Векторное уравнение (69) эквивалентно следующей системе скалярных уравнений:

$$\frac{dx_j}{dt} = \sum_{k=1}^n A_{jk}(t)x_k + \sum_{l=1}^r B_{jl}(t)u_l \quad (j = 1, \dots, n). \quad (18.71)$$

На управления u_l наложены ограничения

$$-1 \leq u_l \leq 1 \quad (l = 1, \dots, r). \quad (18.72)$$

Рассматриваемую систему требуется перевести из точки $x(0)$, в которой система находится в момент времени $t_0 = 0$, в точку $x = 0$ за наименьшее возможное время.

Через ψ обозначим n -мерный вектор

$$\psi = \begin{bmatrix} \psi_1 \\ \dots \\ \psi_n \end{bmatrix} \quad (18.73)$$

и согласно (15) введем функцию

$$H(\psi, x, u) = \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \psi_j A_{jk}(t)x_k + \sum_{l=1}^r u_l \left(\sum_{j=1}^n \psi_j B_{jl}(t) \right). \quad (18.74)$$

Согласно (13) функции ψ_j ($j = 1, \dots, n$) удовлетворяют диффе-

ренциальным уравнениям

$$\frac{d\psi_j}{dt} = - \sum_{k=1}^n A_{kj}(t) \psi_k \quad (j = 1, \dots, n), \quad (18.75)$$

которые эквивалентны векторному дифференциальному уравнению

$$\frac{d\psi}{dt} = - A^*(t) \psi. \quad (18.76)$$

В соответствии с теоремой о принципе максимума оптимальное управление будет иметь следующий вид:

$$u_l(t) = \text{sign} \sum_{j=1}^n B_{jl}(t) \psi_j(t) \quad (l = 1, \dots, r). \quad (18.77)$$

Соотношения (77) можно переписать так:

$$u_l(t) = \text{sign} R_l(t) \quad (l = 1, \dots, r), \quad (18.78)$$

где через $R(t)$ обозначен r -мерный вектор, являющийся произведением следующих матриц:

$$R(t) = B^*(t) \psi(t). \quad (18.79)$$

Обозначим теперь через $Y(t)$ следующую матрицу:

$$Y(t) = X^{-1}(t) B(t). \quad (18.80)$$

Так как в соответствии с (66) и (63) решение векторного уравнения (76) имеет вид

$$\psi(t) = \Xi(t) \psi(0), \quad (18.81)$$

то выражение (79) можно, учитывая (68), переписать так:

$$\begin{aligned} R(t) &= B^*(t) \Xi(t) \psi(0) = [\Xi^*(t) B(t)]^* \psi(0) = \\ &= [X^{-1}(t) B(t)]^* \psi(0) = Y^*(t) \psi(0). \end{aligned} \quad (18.82)$$

Согласно (82) элементы вектора $R(t)$ будут

$$R_l(t) = \sum_{j=1}^n Y_{jl}(t) \psi_j(0) \quad (l = 1, \dots, r). \quad (18.83)$$

Таким образом, в соответствии с (78) и (83) оптимальное управление имеет следующий вид:

$$u_l(t) = \text{sign} \sum_{j=1}^n Y_{jl}(t) \psi_j(0) \quad (l = 1, \dots, r). \quad (18.84)$$

Запишем теперь решение задачи Коши для векторного уравнения (69)

$$x(t) = X(t)x(0) + X(t) \int_0^t X^{-1}(\tau) B(\tau) u(\tau) d\tau. \quad (18.85)$$

Через t_1 обозначим момент времени, когда система (69) будет приведена в начало координат

$$x(t_1) = 0. \quad (18.86)$$

В соответствии с (85), (80) и (86) получим

$$X(t_1)x(0) + X(t_1) \int_0^{t_1} Y(\tau) u(\tau) d\tau = x(t_1) = 0. \quad (18.87)$$

Поскольку матрица $X(t)$ является неособой матрицей, то из (87) следует соотношение

$$x(0) = - \int_0^{t_1} Y(\tau) u(\tau) d\tau. \quad (18.88)$$

Векторному соотношению (88) эквивалентны следующие скалярные соотношения:

$$x_s(0) = - \sum_{l=1}^r \int_0^{t_1} Y_{sl}(\tau) u_l(\tau) d\tau \quad (s = 1, \dots, n). \quad (18.89)$$

Подставляя вместо $u_l(\tau)$ оптимальное управление (84), приведем соотношения (89) к виду

$$x_s(0) = - \sum_{l=1}^r \int_0^{t_1} Y_{sl}(\tau) \left[\text{sign} \sum_{j=1}^n Y_{jl}(\tau) \psi_j(0) \right] d\tau \quad (18.90)$$

($s = 1, \dots, n$).

В соотношениях (90) неизвестными являются величины $\psi_1(0), \dots, \psi_n(0)$, а также значение t_1 момента времени, в который система будет приведена в начало координат.

Уравнения (90) являются исходными в некоторых численных методах определения оптимального управления.

§ 19. Задача с подвижными концами. Применение принципа максимума. Условия трансверсальности

Существует ряд задач, в которых конечное состояние системы задается на некотором множестве M_1 (плоскости, линии и т. п.) фазового пространства, а не в виде фиксированной точки в фазовом пространстве. Так, например, возможны задачи,

в которых в конечный момент времени t_1 представляют интерес значения лишь некоторых фазовых координат системы $x_{\sigma_1}, x_{\sigma_2}, \dots, x_{\sigma_p}$. Для остальных $n - p$ фазовых координат системы допускаются произвольные значения в конечный момент времени t_1 .

Равным образом возможны задачи, в которых начальное состояние $x(t_0)$ системы заранее не задается, а известно лишь, что точка $x(t_0)$ принадлежит некоторому множеству M_0 фазового пространства.

Мы приходим, таким образом, к оптимальной задаче с подвижными концами, результаты решения которой, полученные в монографии [72], будут здесь приведены.

Прежде чем дать точную формулировку задачи, необходимо уточнить геометрические характеристики указанных выше множеств M_0 и M_1 , [72]. Пусть X — n -мерное пространство с ортогональными координатами x_1, \dots, x_n . Множество S точек $x = (x_1, \dots, x_n)$, удовлетворяющих соотношению

$$f(x_1, \dots, x_n) = 0, \quad (19.1)$$

называется гиперповерхностью пространства X , а соотношение (1) — уравнением этой гиперповерхности. Точка $x \in S$, удовлетворяющая соотношениям

$$\frac{\partial f(x)}{\partial x_1} = \frac{\partial f(x)}{\partial x_2} = \dots = \frac{\partial f(x)}{\partial x_n} = 0$$

(предполагается, что производные $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ существуют), называется *особой точкой* гиперповерхности S . Таким образом, в особой точке вектор

$$\text{grad } f(x) = \left(\frac{\partial f(x)}{\partial x_1}, \frac{\partial f(x)}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial f(x)}{\partial x_n} \right)$$

равен нулю. Точки гиперповерхности S , в которых $\text{grad } f(x) \neq 0$, называются неособыми точками.

Гиперповерхность, определяемая уравнением (1) с непрерывно дифференцируемой левой частью и не содержащая особых точек, называется *гладкой гиперповерхностью*. (Все рассматриваемые ниже гиперповерхности предполагаются гладкими.)

Если уравнение (1) линейно, то есть имеет вид

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_n x_n + b = 0, \quad (19.2)$$

то отсутствие особых точек означает, что хотя бы один из коэффициентов a_i отличен от нуля. В этом случае гиперповерхность, определяемая уравнением (2), называется *гиперплоскостью*.

Вектор $\text{grad } f(x^0)$ называется *нормальным вектором* гиперповерхности S в точке x^0 . В случае гиперплоскости нормальные векторы, как видно из (2), во всех точках одинаковы и имеют вид

$$(a_1, a_2, \dots, a_n).$$

Всякая гиперплоскость однозначно определяется заданием нормального вектора и одной точки, принадлежащей этой плоскости.

Пусть S — гладкая гиперповерхность, определяемая уравнением (1) и x^0 — некоторая ее точка. Гиперплоскость, проходящая через точку x^0 и имеющая вектор $\text{grad } f(x^0)$ своей нормалью, называется *касательной гиперплоскостью* к гиперповерхности S в точке x^0 . Каждый вектор, начинающийся в

M_0 и M_1 . Такими соотношениями являются условия трансверсальности, которые позволяют написать $r_0 + r_1$ соотношений, включающих координаты концевых точек x^0 и x^* .

Заметим, что число неизвестных параметров (по сравнению с задачей с закрепленными концами) также увеличилось на $r_0 + r_1$, так как положение точки x^0 на многообразии M_0 определяется r_0 параметрами, а положение точки x^* на многообразии M_1 определяется r_1 параметрами.

Условия трансверсальности будут следующими. Пусть $x^0 \in M_0$, $x^* \in M_1$ — некоторые точки, а T_0 и T_1 — касательные плоскости многообразий M_0 и M_1 , проведенные в этих точках. Размерности плоскостей T_0 и T_1 будут r_0 и r_1 соответственно.

Пусть $u(t)$, $x(t)$ ($t_0 \leq t \leq t_1$) — решение задачи с закрепленными концами x^0 и x^* , а $\psi(t)$ — вектор, существование которого утверждается в теореме 1 (стр. 253).

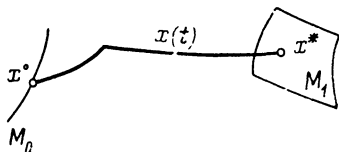


Рис. 19.1.

Условие трансверсальности в правом конце траектории $x(t)$ (то, есть в точке $x(t_1)$) состоит в том, что вектор $\psi(t_1) = (\psi_1(t_1), \psi_2(t_1), \dots, \psi_n(t_1))$ ортогонален плоскости T_1 . Иными словами, для любого вектора $\Theta = (\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n)$, принадлежащего плоскости T_1 , выполняется соотношение

$$\langle \psi(t_1), \Theta \rangle = 0. \quad (19.5)$$

Аналогичный смысл имеет условие трансверсальности в левом конце траектории $x(t)$ (нужно лишь заменить t_1 и T_1 на t_0 и T_0 соответственно).

Так как в соотношении (5) можно подставить r_1 линейно независимых векторов $\Theta_1, \Theta_2, \dots, \Theta_{r_1}$, расположенных в плоскости T_1 , то условие трансверсальности в правом конце траектории $x(t)$ доставляет r_1 независимых соотношений. Условие трансверсальности в левом конце доставляет r_0 независимых соотношений.

Таким образом, имеет место [72] следующая теорема.

Теорема. Пусть $u(t)$ ($t_0 \leq t \leq t_1$) — допустимое управление, переводящее изображающую точку из некоторого положения $x^0 \in M_0$ в положение $x^* \in M_1$, а $x(t)$ — соответствующая траектория, исходящая из точки $x^0 = (x_1, x_2, \dots, x_n)$. Для того чтобы $u(t)$ и $x(t)$ давали решение оптимальной задачи с подвижными концами, необходимо существование ненулевой непрерывной вектор-функции $\psi(t)$, удовлетворяющей условиям, указанным в теореме 1 (стр. 253) и, кроме того, условию трансверсальности в обоих концах траектории $x(t)$.

§ 20. Понятие регулярного синтеза в теории оптимальных систем

Понятие *регулярного синтеза*, введенное В. Г. Болтянским [14], для системы, описываемой дифференциальными уравнениями (17.1)

$$\frac{dx_j}{dt} = f_j(x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_r) \quad (j = 1, \dots, n),$$

или эквивалентным векторным уравнением

$$\frac{dx}{dt} = f(x, u), \quad (20.1)$$

где $u \in \Omega$, для которых теперь предполагается непрерывность производных

$$\frac{\partial f_j}{\partial x_i}, \quad \frac{\partial f_j}{\partial u_k} \quad (j, i = 1, \dots, n; k = 1, \dots, r),$$

состоит в следующем.

Предположим, что заданы кусочно-гладкое (см. § 15, стр. 240) множество N размерности $\leq n - 1$, кусочно-гладкие множества

$$P^0 \subset P^1 \subset P^2 \subset \dots \subset P^{n-1} \subset P^n = D \quad (20.2)$$

и функция $v(x)$, определенная в D и принимающая значения в Ω .

Множества (2) и функция $v(x)$ осуществляют *регулярный синтез* для уравнения (1) в области D , если выполнены следующие условия, сформулированные В. Г. Болтянским.

А. Множество P^0 содержит точку $a = x^*$ и не имеет предельных точек в открытом множестве D . Каждая компонента множества $P^i \setminus (P^{i-1} \cup N)$ ($i = 1, 2, \dots, n$) представляет собой i -мерное гладкое многообразие в D ; эти компоненты называются i -мерными клетками. Точки множества P^0 называются нульмерными клетками. Функция $v(x)$ непрерывна и непрерывно дифференцируема на каждой клетке и может быть продолжена в непрерывно дифференцируемую функцию на окрестности клетки.

Б. Все клетки распределены на клетки первого и второго рода. Все n -мерные клетки являются клетками первого рода, все нульмерные — клетками второго рода.

В. Если σ — некоторая i -мерная клетка *первого рода*, то через каждую точку этой клетки проходит единственная траектория уравнения

$$\frac{dx}{dt} = f(x, v(x)) \quad (20.3)$$

(проходящая по клетке σ). Существует такая $(i - 1)$ -мерная клетка $\Pi(\sigma)$, что каждая траектория системы (3), идущая в клет-

ке σ , через конечное время покидает клетку σ , упираясь под нулевым углом в клетку $\Pi(\sigma)$ и подходя к ней с ненулевой фазовой скоростью. Если σ — *одномерная* клетка первого рода, то она представляет собой кусок фазовой траектории системы (3), подходящей с ненулевой фазовой скоростью к некоторой нульмерной клетке $\Pi(\sigma)$.

Если σ — некоторая i -мерная клетка *второго рода*, отличная от точки a , то существует такая $(i + 1)$ -мерная клетка $\Sigma(\sigma)$, являющаяся клеткой первого рода, что из любой точки клетки σ исходит единственная траектория системы (3), идущая по клетке $\Sigma(\sigma)$, причем функция $v(x)$ непрерывна и непрерывно дифференцируема на $\sigma \cup \Sigma(\sigma)$.

Г. Перечисленные выше условия обеспечивают возможность продолжения траекторий системы (3) от клетки к клетке: из клетки σ в клетку $\Pi(\sigma)$, если клетка $\Pi(\sigma)$ первого рода, и из клетки σ в клетку $\Sigma(\Pi(\sigma))$, если клетка $\Pi(\sigma)$ второго рода. Требуется, чтобы каждая такая траектория шла лишь по конечному числу клеток (то есть чтобы «протыкание» клеток второго рода происходило для каждой траектории конечное число раз). При этом любая траектория кончается в точке a .

Указанные траектории называются *отмеченными*.

Таким образом, из каждой точки множества $D \setminus N$ исходит единственная отмеченная траектория, ведущая в точку a . Требуется также, чтобы из каждой точки множества N исходила (возможно, не единственная) траектория системы (3), ведущая в точку a и также называемая отмеченной.

Д. Все отмеченные траектории удовлетворяют принципу максимума.

Е. Значение функционала Q (см. (17.3)), вычисленное вдоль отмеченных траекторий (кончающихся в точке a), является непрерывной функцией начальной точки $x(t_0)$.

В частности, если из точки $x(t_0) \in N$ исходят несколько отмеченных траекторий, то значение функционала Q для них одинаково.

Пример регулярного синтеза. Задача о быстродействии в линейной системе. Все известные примеры синтеза оптимального по быстродействию управления в линейных системах являются частными случаями регулярного синтеза.

Покажем это на сравнительно простом примере линейной системы, рассмотренной в § 15, стр. 236.

Уравнения движения системы имеют следующий вид:

$$\frac{dx_1}{dt} = x_2, \quad \frac{dx_2}{dt} = u. \quad (20.4)$$

На управление u наложено следующее ограничение:

$$-1 \leq u \leq 1. \quad (20.5)$$

Требуется перевести систему из заданного начального состояния $x(t_0)$ в состояние $x = 0$ в наименьшее возможное время.

Промежуток времени, в течение которого удастся привести систему в состояние $x = 0$, существенно зависит от наложенных на управляющую силу u ограничений: $|u| \leq 1$.

В соответствии с (1) и (4) в рассматриваемом примере

$$f_1(x, u) = x_2, \quad f_2(x, u) = u. \quad (20.6)$$

Функция H согласно (17.21) здесь принимает вид

$$H = \psi_1 x_2 + \psi_2 u, \quad (20.7)$$

где ψ_1 и ψ_2 в соответствии с (17.23) удовлетворяют следующим дифференциальным уравнениям:

$$\frac{d\psi_1}{dt} = 0, \quad \frac{d\psi_2}{dt} = -\psi_1. \quad (20.8)$$

Из (7) следует, что для любого момента времени t при ограничении (5) наибольшее возможное значение функции $H(\psi(t), x(t), u)$ переменного u , где $|u| \leq 1$, доставит управление

$$u(t) = \text{sign } \psi_2(t). \quad (20.9)$$

Таким образом, оптимальное управление будет согласно (9) следующим:

$$u(t) = 1 \text{ при } \psi_2(t) > 0, \quad u(t) = -1 \text{ при } \psi_2(t) < 0.$$

Согласно (8) функции $\psi_1(t)$ и $\psi_2(t)$ будут иметь следующий вид:

$$\psi_1(t) = \psi_1(t_0), \quad \psi_2(t) = -\psi_1(t_0)(t - t_0) + \psi_2(t_0), \quad (20.10)$$

где через $\psi_1(t_0)$ и $\psi_2(t_0)$ обозначены начальные значения функций $\psi_1(t)$ и $\psi_2(t)$ соответственно.

Если бы начальные значения $\psi_1(t_0)$ и $\psi_2(t_0)$ были известны, то в соответствии с (9) и (10) задача синтеза оптимального управления была бы завершена. Отыскание начального значения $\psi(t_0)$ вектор-функции $\psi(t)$ является основной трудностью в общей задаче синтеза оптимального управления по принципу максимума.

В рассматриваемом здесь простом примере задачу удается решить благодаря возможности явного определения на фазовой плоскости $x_1 x_2$ кривой $x_2 = \varphi(x_1)$, на которой управление u (модуль которого согласно (9) остается постоянным $|u| = 1$) должно изменять знак. Кривая $x_2 = \varphi(x_1)$ называется *линией переключения управления*.

Так как согласно (9)

$$u(t) = \text{sign } \psi_2(t) = \text{sign} [-\psi_1(t_0)(t - t_0) + \psi_2(t_0)], \quad (20.11)$$

а функция $\psi_2 = -\psi_1(t_0)(t - t_0) + \psi_2(t_0)$ изменяет свой знак лишь один раз в момент времени $t_{\text{п}} = \frac{\psi_2(t_0)}{\psi_1(t_0)} + t_0$, то оптимальное управление $u(t)$ изменяет свой знак не более одного раза на отрезке времени $t_0 \leq t \leq t_1$, где t_1 — момент попадания изображающей точки в начало координат.

Таким образом, оптимальное управление $u = u(t)$ является кусочно-постоянной функцией (модуль этой функции $|u(t)| = 1$), которая имеет не более двух интервалов постоянства.

Указанное свойство оптимального управления $u(t)$ в рассматриваемом примере позволяет построить семейство оптимальных траекторий на фазовой плоскости $x_1 x_2$.

На отрезке времени, на котором управление $u = 1$, уравнения (4) принимают вид

$$\frac{dx_1}{dt} = x_2, \quad \frac{dx_2}{dt} = 1, \quad (20.12)$$

откуда следует, что

$$\frac{dx_1}{dx_2} = x_2.$$

Интегрируя это уравнение, получим семейство парабол

$$x_1 = \frac{x_2^2}{2} + C_1, \quad (20.13)$$

зависящее от параметра C_1 . При $C_1 = 0$ получим параболу

$$x_1 = \frac{x_2^2}{2}, \quad (20.14)$$

проходящую через начало координат. Дуга AO параболы (14) показана на

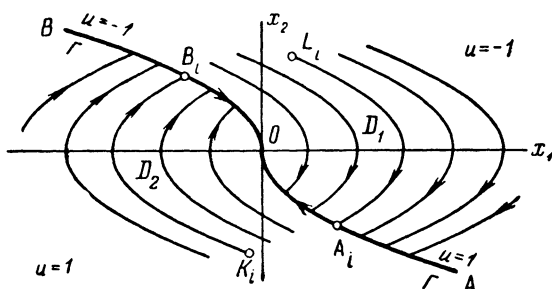


Рис. 20.1.

рис. 20.1. Линии $K_i B_i$ ($i = 1, 2, \dots$) являются дугами парабол (13), которые соответствуют различным значениям параметра C_1 .

Аналогично при $u = -1$ уравнения (4) принимают вид

$$\frac{dx_1}{dt} = x_2, \quad \frac{dx_2}{dt} = -1, \quad (20.15)$$

откуда следует, что

$$\frac{dx_1}{dx_2} = -x_2.$$

Интегрируя это уравнение, найдем семейство парабол

$$x_1 = -\frac{x_2^2}{2} + C_2, \quad (20.16)$$

зависящее от параметра C_2 . При $C_2 = 0$ получим параболу

$$x_1 = -\frac{x_2^2}{2}, \quad (20.17)$$

проходящую через начало координат. Дуга BO параболы (17) показана на рис. 20.1. Линии $L_i A_i$ являются дугами парабол (16), которые соответствуют различным значениям параметра C_2 .

Обозначим теперь через Γ линию, состоящую из дуг AO и OB . Линия Γ делит фазовую плоскость $x_1 x_2$ на две области D_1 и D_2 , расположенные над линией Γ и под ней соответственно.

Если в начальный момент времени t_0 изображающая точка находится в области D_1 , например в точке L_i , то надо принять $u = -1$. Тогда изображающая точка будет двигаться по дуге $L_i A_i$ параболы (16), проходящей через точку $x(t_0) = L_i$. В момент времени, когда изображающая точка попадет в точку A_i , надо изменить управление на $u = 1$. Изображающая точка будет тогда продолжать движение по дуге $A_i O$, по которой и придет в начало координат. Кривая $L_i A_i O$, состоящая из дуг $L_i A_i$ и $A_i O$, является *оптимальной траекторией*, соответствующей начальному состоянию $x(t_0) = L_i$. В соответствии с теоремой о единственности оптимальной траектории в задаче о быстродействии в линейных системах [72] время движения по траектории $L_i A_i O$ будет наименьшим по сравнению с временем движения по любой другой траектории, ведущей из точки L_i в начало координат.

Аналогично, если в начальный момент времени изображающая точка находится в области D_2 , например в точке K_i , то надо принять $u = 1$. Изображающая точка будет двигаться по дуге $K_i B_i$ параболы (13). В точке B_i надо переключить управление на $u = -1$. Дальнейшее движение будет происходить по дуге $B_i O$, по которой изображающая точка придет в начало координат. Таким образом, для начального состояния $x(t_0) = K_i$ оптимальной будет траектория $K_i B_i O$.

Как указано выше, для задачи о быстродействии в линейных системах доказана теорема о единственности оптимальной траектории [72] выделяемой принципом максимума.

В рассматриваемом примере *единственность* найденной выше оптимальной траектории можно доказать непосредственно [15]. Обозначим через t_1 момент попадания изображающей точки в начало координат. Тогда время движения по траектории $L_i A_i O$ будет $t_1 - t_0$. Через t_n обозначим момент переключения управления.

Предположим, что существует другое управление $\tilde{u}(t)$, где $|\tilde{u}(t)| \leq 1$, которое приводит систему в начало координат за время $t_1^* - t_0$, где $t_1^* < t_1$. Траекторию, соответствующую управлению (9), обозначим по-прежнему через $x(t)$, а управлению $\tilde{u}(t)$ — через $\tilde{x}(t)$. Таким образом, будем иметь следующие соотношения:

$$\begin{aligned} x_1(t_1) &= 0, & x_2(t_1) &= 0, \\ \tilde{x}_1(t_1^*) &= 0, & \tilde{x}_2(t_1^*) &= 0. \end{aligned}$$

Траектории $x(t)$ и $\tilde{x}(t)$ определяются уравнениями движения

$$\dot{x}_1(t) = x_2(t), \quad \dot{x}_2(t) = u(t) \quad (t_0 \leq t \leq t_1)$$

и соответственно

$$\dot{\tilde{x}}_1(t) = \tilde{x}_2(t), \quad \dot{\tilde{x}}_2(t) = \tilde{u}(t) \quad (t_0 \leq t \leq t_1^*).$$

Обозначим теперь

$$\Phi(t) = -x_1(t) + x_2(t)(t - t_n), \quad \Psi(t) = -\tilde{x}_1(t) + \tilde{x}_2(t)(t - t_n).$$

Так как

$$x_1(t_0) = \tilde{x}_1(t_0), \quad x_2(t_0) = \tilde{x}_2(t_0),$$

то

$$\Phi(t_0) = \Psi(t_0).$$

Из приведенных выше соотношений следует, что

$$\Phi(t_1) = 0, \quad \Psi(t_1^*) = 0.$$

Производные по t от $\Phi(t)$ и $\Psi(t)$ будут

$$\begin{aligned}\frac{d\Phi}{dt} &= \frac{\partial\Phi}{\partial x_1} \frac{dx_1}{dt} + \frac{\partial\Phi}{\partial x_2} \frac{dx_2}{dt} + \frac{\partial\Phi}{\partial t} = (t - t_n) u, \\ \frac{d\Psi}{dt} &= \frac{\partial\Psi}{\partial \bar{x}_1} \frac{d\bar{x}_1}{dt} + \frac{\partial\Psi}{\partial \bar{x}_2} \frac{d\bar{x}_2}{dt} + \frac{\partial\Psi}{\partial t} = (t - t_n) \bar{u}.\end{aligned}$$

Так как на траектории $L_i A_i O$ управление $u(t)$ удовлетворяет условиям

$$u(t) = -1 \text{ при } t \in [t_0, t_n], \quad u(t) = 1 \text{ при } t \in [t_n, t_1],$$

то

$$(t - t_n) u(t) = |t - t_n| \quad (t_0 \leq t \leq t_1).$$

Нетрудно видеть, что для любого другого управления $\bar{u}(t)$, где $|\bar{u}(t)| \leq 1$, будет иметь место неравенство

$$(t - t_n) \bar{u}(t) \leq |t - t_n| \quad (t_0 \leq t \leq t_1^*).$$

Из полученных соотношений следует, что

$$\dot{\Phi}(t) \geq \dot{\Psi}(t), \quad t \in [t_0, t_1^*],$$

откуда найдем, что

$$\int_{t_0}^{t_1^*} \dot{\Phi} dt \geq \int_{t_0}^{t_1^*} \dot{\Psi} dt.$$

Таким образом,

$$\Phi(t_1^*) - \Phi(t_0) \geq \Psi(t_1^*) - \Psi(t_0),$$

а так как $\Phi(t_0) = \Psi(t_0)$, а кроме того, $\Psi(t_1^*) = 0$, то будем иметь

$$\Phi(t_1^*) \geq 0.$$

С другой стороны, поскольку мы предполагали, что $t_1 > t_1^*$, то, учитывая, что $\Phi(t_1) = 0$, можно получить такое соотношение:

$$-\Phi(t_1^*) = \Phi(t_1) - \Phi(t_1^*) = \int_{t_1^*}^{t_1} \dot{\Phi} dt = \int_{t_1^*}^{t_1} |t - t_n| dt > 0,$$

откуда следует, что

$$\Phi(t_1^*) < 0.$$

Мы получили противоречие. Следовательно, невозможно, чтобы t_1^* было меньше, чем t_1 . Таким образом, доказана единственность (при ограничении $|u| \leq 1$) оптимального управления (9) и единственность соответствующей этому управлению оптимальной траектории для заданного начального состояния системы.

Найдем теперь функцию Беллмана для рассматриваемой задачи

$$\omega(x(t_0)) = -T(x(t_0)). \quad (20.18)$$

Здесь

$$T(x(t_0)) = t_1 - t_0 \quad (20.19)$$

есть время движения изображающей точки по оптимальной траектории из начального положения $x(t_0)$ в начало координат $x = 0$.

Пусть в начальный момент времени $t = t_0$ изображающая точка находится в точке L_i плоскости x_1x_2 , то есть $x_1(t_0)$ и $x_2(t_0)$ являются координатами точки L_i . Уравнение параболы, дугой которой является линия L_iA_i , будет в соответствии с (16) иметь вид

$$x_1 = -\frac{x_2^2}{2} + x_1(t_0) + \frac{x_2^2(t_0)}{2}. \quad (20.20)$$

Точка A_i , в которой переключается управление, является точкой пересечения парабол (20) и (14). Ордината точки A_i удовлетворяет соотношению

$$(x_{A_i})_2^2 = x_1(t_0) + \frac{x_2^2(t_0)}{2}.$$

Так как дуга AO расположена ниже оси абсцисс, то надо принять

$$(x_{A_i})_2 = -\left[x_1(t_0) + \frac{1}{2}x_2^2(t_0)\right]^{1/2}. \quad (20.21)$$

При движении изображающей точки по дуге L_iA_i имеют место уравнения (15). Второе из этих уравнений имеет вид

$$\frac{dx_2}{dt} = -1,$$

откуда, учитывая, что здесь координаты точки L_i обозначены через $x_1(t_0)$ и $x_2(t_0)$, найдем

$$\int_{x_2(t_0)}^{(x_{A_i})_2} dx_2 = -\int_{t_0}^{t_{\pi}} dt. \quad (20.22)$$

где t_{π} — момент времени, в который переключается управление.

Из (22) следует, что

$$(x_{A_i})_2 - x_2(t_0) = t_0 - t_{\pi}. \quad (20.23)$$

При движении изображающей точки по дуге A_iO имеет место согласно (12) уравнение

$$\frac{dx_2}{dt} = 1,$$

откуда следует, что

$$\int_{(x_{A_i})_2}^0 dx_2 = \int_{t_{\pi}}^{t_1} dt, \quad (20.24)$$

где t_1 — момент времени, в который изображающая точка попадает в начале координат. Из (24) найдем, что

$$-(x_{A_i})_2 = t_1 - t_{\pi}. \quad (20.25)$$

Из (23) и (25) следует, что

$$T(x(t_0)) = t_1 - t_0 = x_2(t_0) - 2(x_{A_i})_2. \quad (20.26)$$

В соответствии с (21) выражение (26) принимает вид

$$T(x(t_0)) = x_2(t_0) + 2\left[x_1(t_0) + \frac{1}{2}x_2^2(t_0)\right]^{1/2} \quad \text{при} \quad x(t_0) \in D_1. \quad (20.27)$$

Выражение (27) имеет место, когда точка $x(t_0)$ лежит в области D_1 , то есть в любой точке фазовой плоскости над линией AOB .

Однако нетрудно видеть, что выражение (27) сохраняется, если точка $x(t_0)$ лежит на линии AO . Действительно, в этом случае $t_{\pi} = t_0$, $x_2(t_0) = (x_{A_i})_2$, и выражение (26) принимает для точек линии AO следующий вид:

$$T(x(t_0)) = - (x_{A_i})_2 = |(x_{A_i})_2| \quad \text{при} \quad x(t_0) \in AO,$$

что совпадает с выражением (25) для времени движения изображающей точки по дуге A_iO .

Аналогичным путем можно найти $T(x(t_0))$ для случая, когда точка $x(t_0)$ лежит в области D_2 и на линии BO .

В случае, когда точка $x(t_0)$ лежит в области D_2 , то есть в любой точке фазовой плоскости под линией AOB , будем иметь

$$T(x(t_0)) = -x_2(t_0) + 2 \left[-x_1(t_0) + \frac{1}{2} x_2^2(t_0) \right]^{1/2} \quad \text{при} \quad x(t_0) \in D_2. \quad (20.28)$$

Если изображающая точка в начальный момент времени находится на линии BO в точке B_i , то время приведения системы в начало координат будет следующим:

$$T(x(t_0)) = (x_{B_i})_2 \quad \text{при} \quad x(t_0) \in BO. \quad (20.29)$$

Из формул (28) и (27) следует, что для симметричных начальных точек K_i и L_i время приведения в начало координат одинаково, как это, естественно, и должно быть.

Нетрудно видеть, что в точках линии AO функции (27) и (28) принимают одинаковое значение. Действительно, так как AO является дугой парабола (14)

$$x_1 = \frac{x_2^2}{2},$$

то в точках линии AO функция (27) принимает значение, которое, учитывая, что линия AO расположена ниже оси абсцисс, можно записать так

$$[T(x(t_0))]_1 = -|x_2(t_0)| + 2|x_2(t_0)| = |x_2(t_0)| \quad (x(t_0) \in AO) \quad (20.30)$$

Функция (28) в точках линии AO принимает значение

$$[T(x(t_0))]_2 = -x_2(t_0) = |x_2(t_0)| \quad (x(t_0) \in AO). \quad (20.31)$$

Значения (30) и (31) совпадают. Аналогично можно показать, что значения функций (27) и (28) будут совпадать и в точках линии BO ; принимаемое ими значение будет равно $x_2(t_0)$.

Таким образом, функция $T(x(t_0))$, которая определена в областях D_1 и D_2 соответственно выражениями (27) и (28), сохраняет *непрерывность* на всей фазовой плоскости x_1x_2 .

Частные производные от функции (27) по ее аргументам будут

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial x_1(t_0)} &= \left[x_1(t_0) + \frac{1}{2} x_2^2(t_0) \right]^{-1/2}, \\ \frac{\partial T}{\partial x_2(t_0)} &= 1 + x_2(t_0) \left[x_1(t_0) + \frac{1}{2} x_2^2(t_0) \right]^{-1/2} \end{aligned} \right\} \quad (x(t_0) \in D_1). \quad (20.32)$$

Аналогично частные производные от функции (28) будут

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial x_1(t_0)} &= - \left[-x_1(t_0) + \frac{1}{2} x_2^2(t_0) \right]^{-1/2}, \\ \frac{\partial T}{\partial x_2(t_0)} &= -1 + x_2(t_0) \left[-x_1(t_0) + \frac{1}{2} x_2^2(t_0) \right]^{-1/2} \quad (x(t_0) \in D_2). \end{aligned} \right\} \quad (20.33)$$

Найдем значения, которые принимают функции (32) и (33) в точке A_i , то есть положим, что

$$x_1(t_0) = (x_{A_i})_1, \quad x_2(t_0) = (x_{A_i})_2.$$

Так как согласно (21)

$$(x_{A_i})_2 = - \left[x_1(t_0) + \frac{1}{2} x_2^2(t_0) \right]^{1/2},$$

то значения функций (32) в точке A_i будут

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial x_1(t_0)} \Big|_{A_i \in \bar{D}_1} &= - \frac{1}{(x_{A_i})_2}, \\ \frac{\partial T}{\partial x_2(t_0)} \Big|_{A_i \in \bar{D}_1} &= 1 + \frac{(x_{A_i})_2}{-(x_{A_i})_2} = 0. \end{aligned} \right\} \quad (20.34)$$

Значения функций (33) в точке A_i в которой, как на всей линии AO , $x_1 = \frac{x_2^2}{2}$, будут

$$\frac{\partial T}{\partial x_1(t_0)} \Big|_{A_i \in \bar{D}_2} = -\infty, \quad \frac{\partial T}{\partial x_2(t_0)} \Big|_{A_i \in \bar{D}_2} = -\infty. \quad (20.35)$$

Из (34) и (35) видно, что значения функций (32) и (33) на линии AO (то есть на кривой $x_1 = \frac{x_2^2}{2}$) будут различными. На линии BO (то есть на кривой $x_1 = -\frac{x_2^2}{2}$) значения функций (32) и (33) также будут различными.

Таким образом, в точках линии AOB функция $T(x(t_0))$, а, следовательно, и функция $\omega(x(t_0)) = -T(x(t_0))$ не имеют частных производных по своим аргументам $x_1(t_0)$ и $x_2(t_0)$.

Нетрудно убедиться в том, что оптимальные траектории, построенные в рассматриваемом здесь примере (рис. 20.1), удовлетворяют сформулированным выше (стр. 280) условиям *регулярного синтеза*.

Заметим при этом, что в рассматриваемом примере множество $P^0 = 0$, то есть множество P^0 содержит лишь точку $x = 0$.

Множество $P^1 = \Gamma$, где через Γ обозначена линия, состоящая из AO и OB (то есть линия переключения управления).

Множество $P^2 = D$, где D — вся фазовая плоскость x_1x_2 .

Множество N в рассматриваемом примере является пустым. Таким образом, здесь $P^{n-1} \cup N = P^1$, то есть объединение множеств P^{n-1} и N представляет собой линию AOB (линию переключения управления Γ).

Линии AO и OB представляют собой две одномерные клетки первого рода. Области D_1 и D_2 , на которые линия Γ разбивает фазовую плоскость, представляют собой две двумерные клетки первого рода.

Отметим еще некоторые свойства оптимальных траекторий, достаточно очевидные в рассматриваемом примере.

На рис. 20.2 через $x(t_0)$ обозначена точка, в которой находилась система в момент времени t_0 , и изображена оптимальная траектория, которая ведет из точки $x(t_0)$ в начало координат. Положение точки A_i (в которой переключается управление) на кривой AO зависит от начального состояния $x(t_0)$ системы. Так как точки кривой AO удовлетворяют соотношению (14)

$$(x_{A_i})_1 = \frac{(x_{A_i})_2^2}{2},$$

то, обозначая

$$\xi_1 = (x_{A_i})_2, \quad (20.36)$$

можно представить координаты точки A_i на плоскости x_1x_2 так:

$$\frac{\xi_1^2}{2}, \xi_1.$$

Таким образом, положение точки A_i (принадлежащей линии AO , то есть одномерной клетке первого рода) определяется лишь одним параметром ξ_1 , который является функцией от начального состояния системы

$$\xi_1 = \xi_1(x(t_0)). \quad (20.37)$$

Согласно (21) и (36)

$$\xi_1(x(t_0)) = - \left[x_1(t_0) + \frac{1}{2} x_2^2(t_0) \right]^{1/2}. \quad (20.38)$$

Равным образом и промежуток времени

$$\theta_1 = t_n - t_0, \quad (20.39)$$

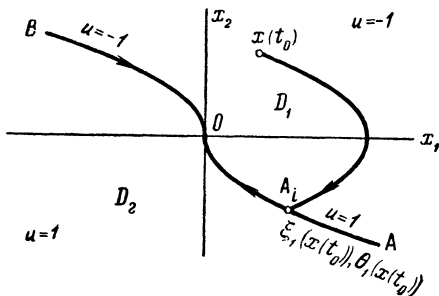


Рис. 20.2.

за который система проходит из точки $x(t_0)$ в точку A_i , есть функция от начального состояния системы $x(t_0)$:

$$\theta_1 = \theta_1(x(t_0)). \quad (20.40)$$

Согласно (23)

$$\theta_1(x(t_0)) = -(x_{A_i})_2 + x_2(t_0).$$

В соответствии с (21) это выражение принимает вид

$$\theta_1(x(t_0)) = x_2(t_0) + \left[x_1(t_0) + \frac{1}{2} x_2^2(t_0) \right]^{1/2}. \quad (20.41)$$

Как видно из (38) и (41), функции $\xi_1(x(t_0))$ и $\theta_1(x(t_0))$ являются непрерывными и непрерывно дифференцируемыми функциями своих аргументов $x_1(t_0)$ и $x_2(t_0)$ (то есть координат вектора $x(t_0)$).

Так как в качестве начальной точки $x(t_0)$ может служить любая точка x дуги оптимальной траектории в области D_1 , то выражения (38) и (41) можно переписать так

$$\xi_1(x) = - \left(x_1 + \frac{1}{2} x_2^2 \right)^{1/2}, \quad (20.42)$$

$$\theta_1(x) = x_2 + \left(x_1 + \frac{1}{2} x_2^2 \right)^{1/2}. \quad (20.43)$$

Рассмотрим теперь *попятное движение* изображающей точки — от точки A_i к точке $x(t_0)$. Это движение мы получим, обратив время t . В соответствии с (15) попятное движение будет описываться дифференциальными уравнениями

$$\frac{dy_1}{dt} = -y_2, \quad \frac{dy_2}{dt} = 1. \quad (20.44)$$

Решение уравнений (44) будет следующим:

$$y_1(t) = y_1(0) - y_2(0)t - \frac{t^2}{2}, \quad y_2(t) = y_2(0) + t. \quad (20.45)$$

Так как в попятном движении начальная точка $y(0)$ лежит на линии AO , то согласно (14)

$$y_1(0) = \frac{y_2^2(0)}{2}. \quad (20.46)$$

Поэтому решение (45) можно привести к виду

$$y_1(t, \xi) = \frac{\xi^2}{2} - \xi t - \frac{t^2}{2}, \quad y_2(t, \xi) = \xi + t, \quad (20.47)$$

где через ξ обозначено

$$\xi = y_2(0). \quad (20.48)$$

Так как

$$\left| \begin{array}{cc} \frac{\partial y_1}{\partial \xi} & \frac{\partial y_1}{\partial t} \\ \frac{\partial y_2}{\partial \xi} & \frac{\partial y_2}{\partial t} \end{array} \right| = \left| \begin{array}{cc} \xi - t & -(\xi + t) \\ 1 & 1 \end{array} \right| = 2\xi \neq 0, \quad (20.49)$$

то уравнения (47) можно разрешить относительно ξ и t .

Заметим еще, что если $x(t_0)$ является начальным состоянием в исходном движении (от точки $x(t_0)$ к точке A_i), то, подставляя в (47) вместо ξ и t величины

$$\begin{aligned} \xi &= \xi_1(x(t_0)) = - \left[x_1(t_0) + \frac{1}{2} x_2^2(t_0) \right]^{1/2}, \\ t &= \theta_1(x(t_0)) = x_2(t_0) + \left[x_1(t_0) + \frac{1}{2} x_2^2(t_0) \right]^{1/2}, \end{aligned}$$

получим

$$\begin{aligned} y_1(\theta_1(x(t_0)), \xi_1(x(t_0))) &= x_1(t_0), \\ y_2(\theta_1(x(t_0)), \xi_1(x(t_0))) &= x_2(t_0), \end{aligned}$$

то есть если попятное движение началось (как следует из (36)) из точки A_i , то по истечении промежутка времени θ_1 изображающая точка придет в точку $x(t_0)$, как это, естественно, и должно быть.

§ 21. Достаточное условие оптимальности в форме принципа максимума. Теорема В. Г. Болтянского

Как указано выше, принцип максимума представляет собой *необходимое* условие оптимальности. Следовательно, принцип максимума позволяет выделить траектории, которые могут быть оптимальными.

Для *линейных систем в задаче о быстродействии* доказана [72] теорема существования оптимальной траектории и теорема об единственности траектории выделяемой принципом максимума. Таким образом, в этом случае принцип максимума *однозначно* определяет траекторию, которая может быть оптимальной; эта траектория и является единственной оптимальной траекторией, соединяющей две заданные в фазовом пространстве точки.

Для *нелинейных систем* (а также для линейных систем в задаче, отличных от задачи о быстродействии) вопрос о том, приводит ли синтез управления, осуществленный на основе принципа максимума, к оптимальным траекториям, решается полученной В. Г. Болтянским теоремой о *достаточных условиях оптимальности*. Эта теорема позволяет, как правило, утверждать, что синтез, осуществленный на основе принципа максимума, действительно приводит к оптимальным траекториям.

В теореме В. Г. Болтянского основным условием является осуществление регулярного синтеза для векторного дифференциального уравнения (20.1), описывающего управляемую систему. В связи с этим заметим, что условия $A - E$ (стр. 280) регулярного синтеза фактически не накладывают ограничений на систему, описываемую векторным дифференциальным уравнением (20.1), а постулируют те обычные обстоятельства, которые имеют место при осуществлении синтеза. В нижеследующей теореме доказано, что синтез, осуществленный на основе принципа максимума, при выполнении условий $A - E$ действительно приводит к оптимальным траекториям. В этом смысле принцип максимума является достаточным условием оптимальности.

Теорема В. Г. Болтянского. *Если в множестве D осуществлен регулярный синтез для уравнения (20.1) (в предположении существования непрерывных производных $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$, $\frac{\partial f_i}{\partial u_k}$ и справедливости соотношения $\dot{f}_0(x, u) > 0$), то все отмеченные траектории являются оптимальными (в области D). В этом смысле принцип максимума является достаточным условием оптимальности.*

Доказательство теоремы. Приведенное ниже доказательство дано в статье [14] В. Г. Болтянского в 1964 г. Ограничимся здесь случаем, когда в выражении (17.3) функция

$$f_0(x, u) \equiv 1,$$

что имеет место в задаче о быстродействии.

В этом случае функционал Q представляет собой время движения изображающей точки от точки $x(t_0)$ до точки a .

Обозначим через $\omega(x)$ время движения изображающей точки вдоль отмеченной траектории от точки x до точки a .

Множество $P^{n-1} \cup N$ обозначим через M .

Если доказать, что $\omega(x)$ является функцией Беллмана с особым множеством M , то доказываемая здесь теорема будет вытекать из теоремы, доказанной в § 15 на стр. 241.

Таким образом, достаточно доказать, что функция $\omega(x)$, которая введена здесь, дифференцируема на множестве $D \setminus M$ и удовлетворяет уравнению Беллмана (15.7)

$$\max_{u \in \Omega} \left[\sum_{i=1}^n \frac{\partial \omega(x)}{\partial x_i} f_i(x, u) \right] = 1.$$

Пусть x — произвольная точка, принадлежащая некоторой n -мерной клетке σ , и пусть траектория системы (20.3)

$$\frac{dx}{dt} = \dot{f}(x, v(x)),$$

которая исходит в момент времени t_0 из указанной здесь точки x , проходит в момент времени $t_0 + \theta_1(x)$ через точку $\xi_1(x)$ клетки $\Pi(\sigma)$.

Из общих теорем о дифференцируемости решений дифференциальных уравнений по параметрам следует, что функции $\xi_1(x)$ и $\theta_1(x)$ — непрерывно дифференцируемые функции от x .

Для рассмотренного в § 20 примера линейной системы явный вид функций $\xi_1(x)$ и $\theta_1(x)$ определен выражениями (20.42) и (20.43). В общем случае функции $\xi_1(x)$ и $\theta_1(x)$ можно найти из решения векторного дифференциального уравнения, описывающего попятное движение

$$\dot{y} = -f(y, v(y)). \quad (21.1)$$

Решение уравнения (1) будет

$$y = y(t, \xi), \quad (21.2)$$

где $\xi = \xi_1(x)$, $t = \theta_1(x)$. Уравнение

$$y(t, \xi) = x \quad (21.3)$$

однозначно разрешимо при x , близких к $x(t_0)$, так как соответствующий функциональный определитель отличен от нуля. (В рассмотренном в § 20 примере уравнения попятного движения имеют вид (20.44), а упомянутый функциональный определитель имеет вид (20.49)). Найденные из (3) функции $\xi_1(x)$ и $\theta_1(x)$ будут непрерывно дифференцируемыми по x .

Из точки $\xi_1(x)$ траектория продолжается по клетке $\Pi(\sigma)$ или $\Sigma(\Pi(\sigma))$. Аналогично устанавливается, что точка $\xi_2(x)$, в которой траектория покидает клетку $\Pi(\sigma)$ или $\Sigma(\Pi(\sigma))$, и время $\theta_2(x)$ движения по этой клетке — дифференцируемые функции от $\xi_1(x)$, а следовательно, и от x .

Общее время $\omega(x) = \theta_1(x) + \theta_2(x) + \dots$ движения по отмеченной траектории из точки x в точку a , таким образом, будет (внутри клетки σ) непрерывно дифференцируемой функцией точки x .

Из изложенного следует, что функция $\omega(x)$ непрерывно дифференцируема на множестве $D \setminus M$.

Теперь надо показать, что на множестве $D \setminus M$ функция $\omega(x)$ удовлетворяет уравнению Беллмана (15.7).

Пусть $x(t_0) \in D \setminus M$. Через $x(t)$ обозначим отмеченную траекторию, которая исходит в момент t_0 из точки $x(t_0)$, а в момент t_1 попадает в точку a .

Через S обозначим множество, состоящее из всех точек x , удовлетворяющих условию

$$\omega(x) = \omega(x(t_0)).$$

Вблизи точки $x(t_0)$ множество S представляет собой гладкую гиперповерхность в D с нормальным к ней вектором

$$\text{grad } \omega(x(t_0)) = \left(\frac{\partial \omega(x(t_0))}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial \omega(x(t_0))}{\partial x_n} \right).$$

Функция $\omega(x(t_0)) = -(t_1 - t_0)$, где $t_1 - t_0$ — время движения по отмеченной траектории из точки $x(t_0)$ в точку a . Для всякой текущей точки $x(t)$ отмеченной траектории функция $\omega(x(t)) = -(t_1 - t)$, откуда следует, что $\frac{d\omega(x(t))}{dt} = 1$. Так как в соответствии с (20.3)

$$\left[\frac{d\omega(x(t))}{dt} \right]_{x(t)=x(t_0)} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial \omega(x(t_0))}{\partial x_i} f_i(x(t_0), v(x(t_0))),$$

то

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial \omega(x(t_0))}{\partial x_i} f_i(x(t_0), v(x(t_0))) = 1 \quad (21.4)$$

или

$$\langle \text{grad } \omega(x(t_0)), f(x(t_0), v(x(t_0))) \rangle = 1. \quad (21.5)$$

Из (5) следует, что

$$\text{grad } \omega(x(t_0)) \neq 0. \quad (21.6)$$

Согласно условию D регулярного синтеза, отмеченная траектория удовлетворяет принципу максимума. Через

$$\psi(t) = (\psi_1(t), \dots, \psi_n(t))$$

обозначим вектор-функцию, соответствующую траектории $x(t)$ в силу принципа максимума.

Можно показать, что вектор $\psi(t_0)$ ортогонален гиперповерхности S в точке $x(t_0)$, то есть

$$\psi(t_0) = \lambda \text{grad } \omega(x(t_0)) \quad (21.7)$$

или, что то же,

$$\psi_i(t_0) = \lambda \frac{\partial \omega(x(t_0))}{\partial x_i} \quad (i = 1, \dots, n). \quad (21.8)$$

В соответствии с (17.21) и (20.3) функция H здесь имеет вид

$$H(\psi, x, v(x)) = \sum_{i=1}^n \psi_i f_i(x, v(x)). \quad (21.9)$$

Из (9), (8) и (4) следует, что

$$\begin{aligned} H(\psi(t_0), x(t_0), v(x(t_0))) &= \sum_{i=1}^n \psi_i(t_0) f_i(x(t_0), v(x(t_0))) = \\ &= \lambda \sum_{i=1}^n \frac{\partial \omega(x(t_0))}{\partial x_i} f_i(x(t_0), v(x(t_0))) = \lambda. \end{aligned} \quad (21.10)$$

Так как согласно (17.27)

$$H(\psi(t), x(t), v(x(t))) \geq 0,$$

то из (10) и п. 2° теоремы 2 (стр. 255) следует, что $\lambda \geq 0$. Из (7) следует, что $\lambda \neq 0$, так как иначе было бы $\psi(t_0) = 0$. Таким образом,

$$\lambda > 0. \quad (21.11)$$

Из принципа максимума следует, что для *любого* $u \in \Omega$

$$H(\psi(t_0), x(t_0), v(x(t_0))) \geq H(\psi(t_0), x(t_0), u). \quad (21.12)$$

Из (12), (4), (8), (10) и (11) найдем, что для *любого* $u \in \Omega$

$$\begin{aligned} 1 &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial \omega(x(t_0))}{\partial x_i} f_i(x(t_0), v(x(t_0))) = \frac{1}{\lambda} \sum_{i=1}^n \psi_i(t_0) f_i(x(t_0), v(x(t_0))) = \\ &= \frac{1}{\lambda} H(\psi(t_0), x(t_0), v(x(t_0))) \geq \frac{1}{\lambda} H(\psi(t_0), x(t_0), u) = \\ &= \frac{1}{\lambda} \sum_{i=1}^n \psi_i(t_0) f_i(x(t_0), u) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial \omega(x(t_0))}{\partial x_i} f_i(x(t_0), u). \end{aligned} \quad (21.13)$$

Из (13) вытекает соотношение

$$\max_{u \in \Omega} \sum_{i=1}^n \frac{\partial \omega(x(t_0))}{\partial x_i} f_i(x(t_0), u) = 1, \quad (21.14)$$

которое совпадает с уравнением Беллмана (15.7), так как в качестве начальной точки $x(t_0)$ можно принять любую (принадлежащую множеству $D \setminus M$) точку x отмеченной траектории.

Таким образом, *если выполнено условие (7)*, то функция $\omega(x)$ удовлетворяет на множестве $D \setminus M$ уравнению Беллмана (15.7).

Для завершения доказательства теоремы надо еще показать справедливость соотношения (7)

$$\psi(t_0) = \lambda \operatorname{grad} \omega(x(t_0)).$$

Отмеченная траектория $x(t)$ исходит в момент времени t_0 из точки $x(t_0)$, которая находится внутри клетки первого рода σ_1 . Обозначим через $\hat{x}(t)$ траекторию системы (20.3)

$$\frac{dx}{dt} = f(x, v(x)),$$

исходящую из некоторой внутренней точки $\hat{x}(t_0)$ той же клетки σ_1 . Будем считать, что точка $\hat{x}(t_0)$ расположена достаточно близко от точки $x(t_0)$ и при этом лежит на гиперповерхности S . Из последнего следует, что обе траектории $x(t)$ и $\hat{x}(t)$, выходящие в момент t_0 соответственно из точек $x(t_0)$ и $\hat{x}(t_0)$, приходят в точку a в один и тот же момент времени $t_1 = -\omega(x(t_0)) + t_0 = -\omega(\hat{x}(t_0)) + t_0$.

Обозначим через ε расстояние между точками $x(t_0)$ и $\hat{x}(t_0)$ и будем считать ε достаточно малым.

Так как точки $x(t_0)$ и $\hat{x}(t_0)$ лежат в одной и той же клетке σ_1 , то траектории $x(t)$ и $\hat{x}(t)$ придут в точку a , проходя по одной и той же последовательности клеток $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_q$, где σ_q — одномерная клетка, примыкающая к точке a .

Выше было показано, что моменты времени τ_i ($i = 1, 2, \dots, q-1$) перехода отмеченной траектории $x(t)$ из одной клетки в другую и соответствующие точки траектории $x(\tau_i)$ дифференцируемым образом зависят от начальной точки $x(t_0) \in \sigma_1$.

Обозначим через δ_i промежуток времени

$$\delta_i = \tau_i - \hat{\tau}_i \quad (i = 1, 2, \dots, q-1),$$

полагая при этом, что $\tau_0 = t_0, \tau_q = t_1$.

Из того, что τ_i и $x(\tau_i)$ дифференцируемым образом зависят от точки $x(t_0) \in \sigma_1$ (а $\hat{\tau}_i$ и $\hat{x}(\hat{\tau}_i)$ дифференцируемым образом зависят от точки $\hat{x}(t_0) \in \sigma_1$), следует, что существует такая положительная константа C , что любой из промежутков времени δ_i ($i = 1, 2, \dots, q-1$) не превосходит по модулю $C\varepsilon$, а траектории $x(t)$ и $\hat{x}(t)$ находятся друг от друга на расстоянии порядка ε :

$$|x(t) - \hat{x}(t)| \leq C\varepsilon \quad (t_0 \leq t \leq t_1). \quad (21.15)$$

Выполним теперь некоторые преобразования. Как и выше, через $\psi(t) = (\psi_1(t), \dots, \psi_n(t))$ обозначим вектор-функцию, соответствующую в силу принципа максимума траектории $x(t)$.

Так как $x(t_1) = \hat{x}(t_1) = a$, то будем иметь

$$\begin{aligned}
 & - \sum_{i=1}^n [x_i(t_0) - \hat{x}_i(t_0)] \psi_i(t_0) = \\
 & = - \sum_{i=1}^n [x_i(t_0) - \hat{x}_i(t_0)] \psi_i(t_0) + \sum_{i=1}^n [x_i(t_1) - \hat{x}_i(t_1)] \psi_i(t_1) = \\
 & = \int_{t_0}^{t_1} \frac{d}{dt} \left\{ \sum_{i=1}^n [x_i(t) - \hat{x}_i(t)] \psi_i(t) \right\} dt = \\
 & = \int_{t_0}^{t_1} \left\{ \sum_{i=1}^n \psi_i(t) \frac{d}{dt} [x_i(t) - \hat{x}_i(t)] + \sum_{i=1}^n [x_i(t) - \hat{x}_i(t)] \frac{d\psi_i(t)}{dt} \right\} dt = \\
 & = \int_{t_0}^{t_1} \left\{ \sum_{i=1}^n \psi_i(t) [f_i(x(t), v(x(t))) - f_i(\hat{x}(t), v(\hat{x}(t)))] - \right. \\
 & \quad \left. - \sum_{i=1}^n [x_i(t) - \hat{x}_i(t)] \frac{\partial H(\psi(t), x(t), v(x(t)))}{\partial x_i} \right\} dt = \\
 & = \int_{t_0}^{t_1} \left\{ H(\psi(t), x(t), v(x(t))) - H(\psi(t), \hat{x}(t), v(\hat{x}(t))) - \right. \\
 & \quad \left. - \sum_{i=1}^n [x_i(t) - \hat{x}_i(t)] \frac{\partial H(\psi(t), x(t), v(x(t)))}{\partial x_i} \right\} dt.
 \end{aligned}$$

Таким образом,

$$- \sum_{i=1}^n [x_i(t_0) - \hat{x}_i(t_0)] \psi_i(t_0) = \int_{t_0}^{t_1} F(t) dt, \quad (21.16)$$

где

$$\begin{aligned}
 F(t) = & H(\psi(t), x(t), v(x(t))) - H(\psi(t), \hat{x}(t), v(\hat{x}(t))) - \\
 & - \sum_{i=1}^n [x_i(t) - \hat{x}_i(t)] \frac{\partial H(\psi(t), x(t), v(x(t)))}{\partial x_i}. \quad (21.17)
 \end{aligned}$$

Если обозначить через ξ некоторую точку отрезка, соединяющего точки $x(t)$ и $\hat{x}(t)$, то на основании известной теоремы Лагранжа будем иметь следующее соотношение:

$$\begin{aligned}
 & H(\psi(t), \hat{x}(t), v(\hat{x}(t))) - H(\psi(t), x(t), v(x(t))) = \\
 & = \sum_{i=1}^n [\hat{x}_i(t) - x_i(t)] \frac{\partial H(\psi(t), \xi, v(\hat{x}(t)))}{\partial x_i}. \quad (21.18)
 \end{aligned}$$

Поэтому выражение (17) можно переписать так:

$$F(t) = -H(\psi(t), x(t), v(\dot{x}(t))) + H(\psi(t), x(t), v(x(t))) - \\ - \sum_{i=1}^n [x_i(t) - \hat{x}_i(t)] \left[\frac{\partial H(\psi(t), x(t), v(x(t)))}{\partial x_i} - \frac{\partial H(\psi(t), \xi, v(\dot{x}(t)))}{\partial x_i} \right]. \quad (21.19)$$

Так как $x(t)$ и $v(x(t))$ представляют собой отмеченную траекторию и соответствующее ей управление, которые согласно условию D регулярного синтеза удовлетворяют принципу максимума, то в силу соотношения (17.28)

$$H(\psi(t), x(t), v(x(t))) \geq H(\psi(t), x(t), v(\dot{x}(t))). \quad (21.20)$$

Из соотношений (19) и (20) следует, что

$$F(t) \geq G(t), \quad (21.21)$$

где

$$G(t) = - \sum_{i=1}^n [x_i(t) - \hat{x}_i(t)] \left[\frac{\partial H(\psi(t), x(t), v(x(t)))}{\partial x_i} - \frac{\partial H(\psi(t), \xi, v(\dot{x}(t)))}{\partial x_i} \right]. \quad (21.22)$$

Рассмотрим теперь следующие два случая. В первом случае точка t принадлежит одному из интервалов времени Δ_i , в течение которого $x(t)$ и $\hat{x}(t)$ находятся в одной и той же клетке σ_i , на которой функция $v(x)$ непрерывно дифференцируема. Учитывая (15) будем иметь оценку

$$|v(\dot{x}(t)) - v(x(t))| \leq C' |\dot{x}(t) - x(t)| \leq CC'\varepsilon. \quad (21.23)$$

Так как точка ξ расположена на отрезке, соединяющем точки $x(t)$ и $\hat{x}(t)$, то в соответствии с (15) имеем

$$|\xi - x(t)| \leq |\hat{x}(t) - x(t)| \leq C\varepsilon. \quad (21.24)$$

Так как функция $\frac{\partial H}{\partial x_i}$ непрерывна по своим аргументам, то при $t \in \Delta_i$ разность

$$\frac{\partial H(\psi(t), x(t), v(x(t)))}{\partial x_i} - \frac{\partial H(\psi(t), \xi, v(\dot{x}(t)))}{\partial x_i} \quad (21.25)$$

будет бесконечно малой величиной порядка ε и вместе с ε будет стремиться к нулю.

Из (15) и (22) поэтому имеем

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{G(t)}{\varepsilon} = 0 \quad (\text{равномерно по } t \in \Delta_i).$$

Отсюда следует, что

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} \int_{t_{k_i}}^{t_{k_i} + \Delta_i} G(t) dt = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, q), \quad (21.26)$$

где t_{k_i} — начало интервала Δ_i .

Во втором случае точка t принадлежит одному из интервалов времени δ_i , в течение которого $x(t)$ и $\hat{x}(t)$ находятся в двух соседних клетках σ_i и σ_{i+1} . Здесь уже нельзя утверждать, что разность (25) бесконечно мала вместе с ε , так как точки $x(t)$ и $\hat{x}(t)$ принадлежат разным клеткам, а при переходе от клетки к клетке управление $v(x)$ может терпеть разрывы.

Однако разность (25) при всех t остается *ограниченной* в силу ограниченности траектории $x(t)$. Поэтому в соответствии с (15)

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} G(t) = 0 \quad (\text{равномерно по } t \in \delta_i).$$

Так как длина отрезка δ_i не превосходит $C\varepsilon$ (см. стр. 296), то

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} \int_{t_{k_i} + \Delta_i}^{t_{k_i} + \Delta_i + \delta_i} G(t) dt = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, q - 1). \quad (21.27)$$

Складывая соотношения (26) и (27), получим

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} \int_{t_0}^{t_1} G(t) dt = 0. \quad (21.28)$$

Пусть теперь точка $\hat{x}(t_0)$ приближается к точке $x(t_0)$ по поверхности S , касаясь некоторого вектора $p = (p_1, p_2, \dots, p_n)$. Тогда будем иметь

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\hat{x}(t_0) - x(t_0)}{\varepsilon} = p. \quad (21.29)$$

Согласно (16), (21) и (28) будем иметь

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n p_i \psi_i(t_0) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \frac{1}{\varepsilon} [\hat{x}_i(t_0) - x_i(t_0)] \psi_i(t_0) = \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} \int_{t_0}^{t_1} F(t) dt \geq \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} \int_{t_0}^{t_1} G(t) dt = 0. \end{aligned} \quad (21.30)$$

При $\hat{x}(t_0) \rightarrow x(t_0)$ траектория $\hat{x}(t) \rightarrow x(t)$, и обусловленная неравенством (20) разность

$$F(t) - G(t) = H(\psi(t), x(t), v(x(t))) - H(\psi(t), x(t), v(\hat{x}(t))) \quad (21.31)$$

может быть представлена выражением, аналогичным (18). Повторяя рассуждения, при помощи которых получено соотношение (28), найдем, что

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} \int_{t_0}^{t_1} [F(t) - G(t)] dt = 0, \quad (21.32)$$

откуда в соответствии с (30) получим, что для любого касательного гиперповерхности S в точке $x(t_0)$ вектора p будет иметь место соотношение

$$\sum_{i=1}^n p_i \psi_i(t_0) = 0. \quad (21.33)$$

Из (33) вытекает соотношение (7), то есть рассматриваемая теорема доказана.

§ 22. Связь принципа максимума с методом динамического программирования

Обратимся к задаче с закрепленным концом траектории и свободным временем. Рассмотрим систему, описываемую дифференциальными уравнениями

$$\frac{dx_j}{dt} = f_j(x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_r) \quad (j = 1, \dots, n), \quad (22.1)$$

которым эквивалентно векторное уравнение

$$\frac{dx}{dt} = f(x, u), \quad (22.2)$$

где x , u и f — векторы следующего вида:

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad u = \begin{bmatrix} u_1 \\ \dots \\ u_r \end{bmatrix}, \quad f(x, u) = \begin{bmatrix} f_1(x, u) \\ \cdot \\ \cdot \\ f_n(x, u) \end{bmatrix}. \quad (22.3)$$

Требуется перевести систему из точки $x(t_0)$ фазового пространства X в заданную точку x^* . Момент времени t_1 , в который изображающая точка попадет в точку x^* , заранее не фиксируется.

Управление $u = u(t)$ должно удовлетворять ограничениям

$$u \in \Omega, \quad (22.4)$$

и его надо выбрать так, чтобы функционал

$$Q = \int_{t_0}^{t_1} f_0(x(\xi), u(\xi)) d\xi \quad (22.5)$$

принимал наименьшее возможное значение.

Удовлетворяющее этим условиям управление, соответствующую ему траекторию и промежуток времени $t_1 - t_0$ будем считать оптимальными.

Полученное при указанных выше условиях наименьшее возможное значение $\Phi(x(t_0))$ функционала Q будет функцией от начального состояния $x(t_0)$ системы

$$\Phi(x(t_0)) = \Phi(x_1(t_0), x_2(t_0), \dots, x_n(t_0)). \quad (22.6)$$

В § 14, в предположении, что функция $\Phi(x)$ непрерывна и всюду имеет непрерывные частные производные по всем своим аргументам, было показано, что эта функция удовлетворяет нелинейному уравнению первого порядка в частных производных (уравнение Беллмана) (14.36):

$$\min_{u \in \Omega} \left[f_0(x, u) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial \Phi(x)}{\partial x_i} f_i(x, u) \right] = 0.$$

Как и выше, обозначим через $x_0(t)$ скалярную функцию, определяемую дифференциальным уравнением

$$\frac{dx_0}{dt} = f_0(x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_r) = f_0(x, u) \quad (22.7)$$

и начальным условием

$$x_0(t_0) = 0. \quad (22.8)$$

Из (7), (8) и (5) следует, что подлежащий минимизации функционал Q можно представить так:

$$Q = x_0(t_1). \quad (22.9)$$

Введем теперь следующие $(n + 1)$ -мерные векторы:

$$\tilde{x} = \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad \tilde{f} = \begin{bmatrix} f_0 \\ f_1 \\ \dots \\ f_n \end{bmatrix}. \quad (22.10)$$

Через $\tilde{\Phi}(\tilde{x})$ обозначим функцию

$$\tilde{\Phi}(\tilde{x}) = x_0 + \Phi(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_0 + \Phi(x). \quad (22.11)$$

Уравнение Беллмана (14.36) можно теперь записать так:

$$\min_{u \in \Omega} \sum_{i=0}^n \frac{\partial \tilde{\Phi}(\bar{x})}{\partial x_i} f_i(x, u) = 0. \quad (22.12)$$

Если умножить левую и правую части соотношения (12) на -1 , то знак \min в левой части (12) надо будет заменить на знак \max . Таким образом, уравнение (12) можно представить так:

$$\max_{u \in \Omega} \sum_{i=0}^n \left[-\frac{\partial \tilde{\Phi}(\bar{x})}{\partial x_i} \right] f_i(x, u) = 0. \quad (22.13)$$

Аналогично (15.28) обозначим

$$\omega(x) = -\Phi(x), \quad (22.14)$$

$$\tilde{\omega}(\bar{x}) = -\tilde{\Phi}(\bar{x}). \quad (22.15)$$

Уравнение Беллмана (13) принимает вид

$$\max_{u \in \Omega} \sum_{i=0}^n \frac{\partial \tilde{\omega}(\bar{x})}{\partial x_i} f_i(x, u) = 0. \quad (22.16)$$

При этом верхняя грань достигается для некоторого $u \in \Omega$, а именно для значения оптимального управления в момент выхода из точки x .

Сделаем теперь еще следующие дополнительные предположения. Будем предполагать, что функция $\omega(x)$ имеет непрерывные вторые производные $\frac{\partial^2 \omega(x)}{\partial x_i \partial x_j}$ ($i, j = 1, \dots, n$), а функции $f_i(x, u)$ имеют непрерывные производные $\frac{\partial f_i(x, u)}{\partial x_j}$ ($i = 0, 1, \dots, \dots, n; j = 1, \dots, n$).

Функцию, стоящую под знаком \max в левой части уравнения (16), обозначим так:

$$g(\bar{x}, u) = \sum_{i=0}^n \frac{\partial \tilde{\omega}(\bar{x})}{\partial x_i} f_i(x, u). \quad (22.17)$$

Пусть $u(t)$ ($t_0 \leq t \leq t_1$) — оптимальное управление, переводящее изображающую точку из состояния $x(t_0)$ в состояние x^* , а $x(t)$ — соответствующая оптимальная траектория. Фиксируем некоторый момент времени t ($t_0 \leq t \leq t_1$) и рассмотрим функцию $g(\bar{x}, u(t))$ переменного \bar{x} . В соответствии со сделанными

выше предположениями функция $g(\bar{x}, u(t))$ имеет непрерывные производные по переменным x_i ($i = 0, 1, \dots, n$):

$$\frac{\partial g(\bar{x}, u(t))}{\partial x_k} = \sum_{i=0}^n \frac{\partial^2 \bar{\omega}(\bar{x})}{\partial x_i \partial x_k} f_i(x, u(t)) + \sum_{i=0}^n \frac{\partial \bar{\omega}(\bar{x})}{\partial x_i} \frac{\partial f_i(x, u(t))}{\partial x_k} \quad (22.18)$$

$$(k = 0, 1, \dots, n).$$

Из уравнения (16) следует, что для любого оптимального движения $(x(t), u(t))$ имеет место соотношение

$$g(\bar{x}(t), u(t)) \equiv 0. \quad (22.19)$$

Точки x , не лежащие в данный фиксированный момент времени на оптимальной траектории, будут принадлежать другим траекториям, реализуемым допустимым, но не оптимальным управлением. Поэтому в силу уравнения (16) в этих точках

$$g(\bar{x}, u) \leq 0. \quad (22.20)$$

Следовательно, рассматриваемая в (18) функция $g(\bar{x}, u(t))$ переменного x достигает в точке $\bar{x} = \bar{x}(t)$ максимума (момент t фиксирован), и поэтому ее частные производные по x_0, x_1, \dots, x_n обращаются в этой точке в нуль. Согласно (18), таким образом, получим следующие соотношения, выполняющиеся вдоль оптимальной траектории:

$$\sum_{i=0}^n \frac{\partial^2 \bar{\omega}(\bar{x}(t))}{\partial x_i \partial x_k} f_i(x(t), u(t)) + \sum_{i=0}^n \frac{\partial \bar{\omega}(\bar{x}(t))}{\partial x_i} \frac{\partial f_i(x(t), u(t))}{\partial x_k} = 0 \quad (22.21)$$

$$(k = 0, 1, \dots, n; t_0 \leq t \leq t_1).$$

Учитывая, что согласно (1) и (7) для оптимального движения $(x(t), u(t))$ имеет место соотношение

$$\frac{dx_i(t)}{dt} = f_i(x(t), u(t)) \quad (i = 0, 1, \dots, n), \quad (22.22)$$

будем иметь

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \bar{\omega}(\bar{x}(t))}{\partial x_k} \right) = \sum_{i=0}^n \frac{\partial^2 \bar{\omega}(\bar{x}(t))}{\partial x_i \partial x_k} \frac{dx_i(t)}{dt} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 \bar{\omega}(\bar{x}(t))}{\partial x_i \partial x_k} f_i(x(t), u(t)). \quad (22.23)$$

Соотношение (21) в соответствии с (23) можно переписать так:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \bar{\omega}(\bar{x}(t))}{\partial x_k} \right) + \sum_{i=0}^n \frac{\partial \bar{\omega}(\bar{x}(t))}{\partial x_i} \frac{\partial f_i(x(t), u(t))}{\partial x_k} = 0 \quad (22.24)$$

$$(k = 0, 1, \dots, n).$$

Обозначим теперь через $\psi_k(t)$ ($k = 0, 1, \dots, n$) следующую функцию:

$$\psi_k(t) = \frac{\partial \bar{\omega}(\bar{x}(t))}{\partial x_k} \quad (k = 0, 1, \dots, n). \quad (22.25)$$

Как следует из (24), вдоль всякой оптимальной траектории величины $\psi_k(t)$ удовлетворяют следующей системе линейных дифференциальных уравнений:

$$\frac{d\psi_k(t)}{dt} = - \sum_{i=0}^n \frac{\partial f_i(x(t), u(t))}{\partial x_k} \psi_i(t) \quad (k = 0, 1, \dots, n). \quad (22.26)$$

Заметим, что согласно (25), (15) и (11)

$$\psi_0(t) = -1, \quad (22.27)$$

что не противоречит уравнениям (26), так как $f_i(x(t), u(t))$ ($i = 0, 1, \dots, n$) согласно (1) и (5) не зависят от x_0 , и для $k = 0$ уравнение (26) имеет следующий вид:

$$\frac{d\psi_0(t)}{dt} = 0. \quad (22.28)$$

Вектор ψ , координаты которого ψ_k ($k = 0, 1, 2, \dots, n$), определены соотношениями (25), будет следующим:

$$\psi = \begin{bmatrix} \psi_0 \\ \psi_1 \\ \dots \\ \psi_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \bar{\omega}}{\partial x_0} \\ \frac{\partial \bar{\omega}}{\partial x_1} \\ \dots \\ \frac{\partial \bar{\omega}}{\partial x_n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ \frac{\partial \bar{\omega}}{\partial x_1} \\ \dots \\ \frac{\partial \bar{\omega}}{\partial x_n} \end{bmatrix}. \quad (22.29)$$

Уравнение Беллмана (16) в соответствии с (25), (10), (29) теперь можно переписать так:

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^n \psi_i(t) f_i(x(t), u(t)) &= \max_{u \in \Omega} \sum_{i=0}^n \psi_i(t) f_i(x(t), u) = \\ &= \max_{u \in \Omega} \langle \psi(t), \tilde{f}(x(t), u) \rangle = 0. \end{aligned} \quad (22.30)$$

Обозначим теперь через $\tilde{H}(\psi, x, u)$ следующую функцию:

$$\tilde{H}(\psi, x, u) = \sum_{i=0}^n \psi_i f_i(x, u) = \langle \psi, \tilde{f}(x, u) \rangle, \quad (22.31)$$

зависящую от $2n + r + 1$ аргументов $\psi_0, \psi_1, \dots, \psi_n, x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_r$.

Уравнение (30) принимает теперь следующий вид:

$$\max_{u \in \Omega} \tilde{H}(\psi, x, u) = 0. \quad (22.32)$$

Из соотношения (32) можно заключить, что оптимальное управление $u(t)$ доставляет функции \tilde{H} в любой момент времени t наибольшее значение по сравнению с любым другим управлением $u \in \Omega$, переводящим систему из точки $x(t_0)$ в точку x^* . Это наибольшее значение одно и то же, а именно равно нулю в любой точке оптимальной траектории, то есть вдоль оптимальной траектории выполняется равенство

$$\tilde{H}(\psi(t), x(t), u(t)) \equiv 0. \quad (22.33)$$

Заметим, однако, что соотношения (30), (32) и (33) получены здесь при исходном предположении о том, что функция $\Phi(x_1, \dots, x_n)$ имеет непрерывные частные производные по всем своим аргументам, что, как было показано выше (§ 20), не имеет места даже в сравнительно простых задачах. Поэтому приведенные в настоящем параграфе преобразования и вытекающие из них следствия имеют лишь эвристический характер и могут только служить наводящими указаниями.

§ 23. Некоторые примеры применения принципа максимума

1. Теорема о числе переключений управления в линейной задаче о быстродействии. Рассмотрим систему, описываемую линейным векторным дифференциальным уравнением

$$\frac{dx}{dt} = Ax + Bu, \quad (23.1)$$

где x , A , B — следующие матрицы:

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ A_{n1} & A_{n2} & \dots & A_{nn} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} B_1 \\ \dots \\ B_n \end{bmatrix}, \quad (23.2)$$

а управление u представляет собой скалярную функцию, на которую наложены ограничения

$$-1 \leq u \leq 1. \quad (23.3)$$

Требуется перевести систему из точки $x(0)$, в которой система находится в момент времени $t_0 = 0$, в точку $x = 0$ за наименьшее возможное время.

Через ψ обозначим n -мерный вектор

$$\psi = \begin{bmatrix} \psi_1 \\ \dots \\ \psi_n \end{bmatrix}, \quad (23.4)$$

и согласно (17.21) введем функцию

$$H(\psi, x, u) = \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \psi_j A_{jk} x_k + \sum_{j=1}^n B_j \psi_j u = \langle \psi, Ax \rangle + \langle \psi, Bu \rangle. \quad (23.5)$$

Согласно (17.23) функции ψ_j ($j = 1, \dots, n$) будут удовлетворять следующим дифференциальным уравнениям:

$$\frac{d\psi_j}{dt} = - \sum_{k=1}^n A_{kj} \psi_k \quad (j = 1, \dots, n). \quad (23.6)$$

Система скалярных дифференциальных уравнений (6) эквивалентна векторному дифференциальному уравнению

$$\frac{d\psi}{dt} = - A^* \psi, \quad (23.7)$$

где согласно (6)

$$A^* = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{bmatrix}. \quad (23.8)$$

Матрица A^* является транспонированной матрицей для матрицы A .

Векторное дифференциальное уравнение (7) является сопряженным для уравнения

$$\frac{d\xi}{dt} = A\xi. \quad (23.9)$$

Как показано выше (18.51), интегралы уравнений (9) и (7) обладают следующим свойством:

$$\langle \xi(t), \psi(t) \rangle = \langle \xi(0), \psi(0) \rangle.$$

Согласно (18.53) фундаментальная матрица $X(t)$ решений уравнения (9) и фундаментальная матрица $\Xi(t)$ решений уравнения (7) удовлетворяют соотношению

$$\Xi^*(t) = X^{-1}(t).$$

Согласно (10.160)

$$X^{-1}(t) = X(-t),$$

и, таким образом,

$$\Xi^*(t) = X(-t), \quad (23.10)$$

откуда следует, что корни соответствующих дифференциальным уравнениям (9) и (7) характеристических уравнений $\det(\lambda E - A) = 0$ и $\det(\mu E + A^*) = 0$ отличаются лишь знаками [28], стр. 171.

В соответствии с теоремой 2 (§ 17) оптимальное управление будет иметь следующий вид:

$$u(t) = \text{sign} \sum_{j=1}^n B_j \psi_j(t). \quad (23.11)$$

Рассмотрим случай, когда все корни λ_i ($i = 1, \dots, n$) характеристического уравнения

$$\det(\lambda E - A) = 0$$

простые и являются действительными величинами.

В этом случае в соответствии с отмеченным выше свойством сопряженной системы решение векторного дифференциального уравнения (7) будет следующим:

$$\psi_j(t) = \sum_{l=1}^n C_{jl} e^{\mu_l t} \quad (j = 1, \dots, n), \quad (23.12)$$

где μ_l ($l = 1, \dots, n$) — действительные величины, а C_{jl} ($j, l = 1, \dots, n$) — некоторые постоянные величины, зависящие от n произвольных постоянных, для определения которых должны быть заданы начальные значения $\psi_j(0)$ ($j = 1, \dots, n$) функций $\psi_j(t)$ (либо значения, которые должны принять функции $\psi_j(t)$ в какой-либо другой фиксированный момент времени).

Подставляя в (11) выражения (12), получим

$$u(t) = \text{sign}(S_1 e^{\mu_1 t} + S_2 e^{\mu_2 t} + \dots + S_n e^{\mu_n t}), \quad (23.13)$$

где S_j — некоторые постоянные величины

$$S_j = \sum_{v=1}^n B_v C_{vj} \quad (j = 1, \dots, n). \quad (23.14)$$

Так как число нулей функции

$$s(t) = \sum_{j=1}^n S_j e^{\mu_j t} \quad (23.15)$$

на полубесконечном интервале $0 < t < \infty$ не превышает $n - 1$, то определяемая выражением (11) функция $u(t)$, модуль которой $|u(t)| = 1$ является кусочно-постоянной функцией, имеющей на интервале времени $0 < t < t_1$ не более $n - 1$ точек

разрыва, то есть функция $u(t)$ имеет не более n интервалов постоянства.

Иными словами, число переключений управления $u(t)$ не превышает $n - 1$.

Доказанная здесь теорема называется теоремой об n интервалах и принадлежит А. А. Фельдбауму [85].

2. Задача о максимальном отклонении. Рассмотрим систему, описываемую скалярным дифференциальным уравнением

$$\frac{dx_1}{dt} = f_1(x_1, u), \quad (23.16)$$

где

$$f_1(x_1, u) = -ax_1 + bu. \quad (23.17)$$

На управление u наложено ограничение

$$-1 \leq u \leq 1. \quad (23.18)$$

Требуется выбрать управление u так, чтобы отклонение системы $x_1(T)$ в момент времени T достигло наибольшего возможного значения.

Разумеется, для системы, описываемой столь простым уравнением (16), эта задача может быть решена непосредственно.

Найдем, однако, решение задачи при помощи принципа максимума с целью иллюстрации общего метода примером, в котором отсутствуют громоздкие вычисления.

Обозначим через Q функционал

$$Q = \int_0^T f_0(x_1, u) dt, \quad (23.19)$$

где

$$f_0(x_1, u) = -f_1(x_1, u) = ax_1 - bu. \quad (23.20)$$

Через $x_0(t)$ обозначим скалярную функцию, удовлетворяющую дифференциальному уравнению

$$\frac{dx_0}{dt} = f_0(x_1, u) \quad (23.21)$$

и начальному условию

$$x_0(0) = 0. \quad (23.22)$$

Из (19), (21) и (22) следует, что

$$Q = x_0(T). \quad (23.23)$$

Согласно (16), (21) и (20)

$$\frac{dx_0}{dt} = -\frac{dx_1}{dt}, \quad (23.24)$$

откуда, учитывая (22), получим

$$x_0(T) = -x_1(T) + x_1(0). \quad (23.25)$$

Так как начальное отклонение $x_1(0)$ не зависит от управления, то из соотношения (25) следует, что управление $u(t)$, доставляющее минимально возможное значение функционалу Q , обеспечивает максимально возможное значение отклонения $x_1(T)$.

Обозначим теперь через ψ вектор

$$\psi = \begin{bmatrix} \psi_0 \\ \psi_1 \end{bmatrix}, \quad (23.26)$$

и согласно (17.10) введем функцию

$$\tilde{H}(\psi, x, u) = \psi_0 f_0(x_1, u) + \psi_1 f_1(x_1, u) = a(\psi_0 - \psi_1)x_1 + b(-\psi_0 + \psi_1)u. \quad (23.27)$$

Согласно (17.14) функции ψ_0 и ψ_1 будут удовлетворять уравнениям

$$\frac{d\psi_0}{dt} = -\frac{\partial \tilde{H}}{\partial x_0}, \quad \frac{d\psi_1}{dt} = -\frac{\partial \tilde{H}}{\partial x_1}, \quad (23.28)$$

которые в соответствии с (27) принимают вид

$$\frac{d\psi_0}{dt} = 0, \quad \frac{d\psi_1}{dt} = a\psi_1 - a\psi_0. \quad (23.29)$$

Общее решение уравнений (29) имеет вид

$$\psi_0 = C_1, \quad \psi_1(t) = C_2 e^{at} + C_1. \quad (23.30)$$

Рассматриваемая задача представляет собой задачу с закрепленным временем T и свободным концом траектории. Поэтому согласно (17.55) функции $\psi_0(t)$ и $\psi_1(t)$ должны удовлетворять условиям

$$\psi_0(T) = -1, \quad \psi_1(T) = 0. \quad (23.31)$$

При условиях (31) решения (30) принимают вид

$$\psi_0(t) = -1, \quad \psi_1(t) = e^{a(t-T)} - 1. \quad (23.32)$$

При $b > 0$ определяемая выражением (27) функция $\tilde{H}(\psi(t), x(t), u)$ переменного u (на которое наложены ограничения (18)) будет для всех t ($0 \leq t \leq T$) достигать в точке $u = u(t)$ максимума, если управление будет иметь вид

$$u(t) = \text{sign}[-\psi_0(t) + \psi_1(t)]. \quad (23.33)$$

Подставляя в (33) вместо $\psi_0(t)$ и $\psi_1(t)$ их выражения (32), получим

$$u(t) = \text{sign } e^{a(t-T)} = 1. \quad (23.34)$$

При условии (34) найдем из (16) и (17)

$$\max_{-1 \leq u \leq 1} x_1(T) = x_1(0)e^{-aT} + \frac{b}{a}(1 - e^{-aT}), \quad (23.35)$$

что, как уже было сказано, в этой задаче очевидно.

3. Применение принципа максимума при отсутствии ограничений на управление. При отсутствии ограничений на управление во многих случаях оказывается возможным получить в явном виде решение задачи о выборе управления, доставляющего минимум некоторому функционалу.

Рассмотрим систему, описываемую скалярным дифференциальным уравнением (см. § 16, п. 2),

$$\frac{dq_1}{dt} = f_1(q_1, u), \quad (23.36)$$

где

$$f_1(q_1, u) = \frac{1}{m}u, \quad (23.37)$$

начальное состояние которой

$$[q_1(t)]_{t=0} = q_1(0).$$

Требуется привести систему в момент времени t_1 в точку $q_1(t_1) = 0$, выбирая управление $u = u(t)$, которое доставило бы минимум функционалу

$$Q = \int_0^{t_1} f_0(q_1, u) dt, \quad (23.38)$$

где

$$f_0(q_1, u) = -\frac{c}{2}q_1^2 + \frac{1}{2m}u^2. \quad (23.39)$$

В соответствии с (17.10) образуем функцию

$$\begin{aligned} \tilde{H}(\psi, q_1, u) &= \psi_0 f_0(q_1, u) + \psi_1 f_1(q_1, u) = \\ &= \psi_0 \left(-\frac{c}{2}q_1^2 + \frac{1}{2m}u^2 \right) + \frac{1}{m}\psi_1 u \end{aligned} \quad (23.40)$$

и составим уравнения

$$\frac{dq_j}{dt} = \frac{\partial \tilde{H}}{\partial \psi_j}, \quad \frac{d\psi_j}{dt} = -\frac{\partial \tilde{H}}{\partial q_j} \quad (j = 0, 1). \quad (23.41)$$

Согласно (40) уравнения (41) принимают вид

$$\frac{dq_0}{dt} = -\frac{c}{2}q_1^2 + \frac{1}{2m}u^2, \quad \frac{dq_1}{dt} = \frac{1}{m}u, \quad (23.42)$$

$$\frac{d\psi_0}{dt} = 0, \quad \frac{d\psi_1}{dt} = cq_1\psi_0. \quad (23.43)$$

Найдем теперь управление u (на которое заранее никаких ограничений не наложено), доставляющее максимум функции \tilde{H} . Так как

$$\frac{\partial \tilde{H}}{\partial u} = \frac{1}{m}(\psi_0 u + \psi_1), \quad \frac{\partial^2 \tilde{H}}{\partial u^2} = \frac{1}{m}\psi_0, \quad (23.44)$$

то при условии

$$\psi_0 < 0 \quad (23.45)$$

функция \tilde{H} будет иметь максимум по u при

$$u = -\frac{\psi_1}{\psi_0}. \quad (23.46)$$

Из первого уравнения (43) следует, что

$$\psi_0 = \text{const}. \quad (23.47)$$

Подставляя во второе уравнение (42) оптимальное значение управления u , которое определено выражением (46), получим

$$\frac{dq_1}{dt} = -\frac{1}{m}\frac{\psi_1}{\psi_0}. \quad (23.48)$$

Дифференцируя по t левую и правую части уравнения (48) и учитывая при этом, что $\psi_0 = \text{const}$, получим

$$\frac{d^2q_1}{dt^2} = -\frac{1}{m\psi_0}\frac{d\psi_1}{dt}. \quad (23.49)$$

В соответствии со вторым уравнением (43) уравнение (49) принимает вид

$$\frac{d^2q_1}{dt^2} = -k^2q_1, \quad (23.50)$$

где

$$k^2 = \frac{c}{m}. \quad (23.51)$$

Мы пришли, таким образом, к краевой задаче: требуется найти решение дифференциального уравнения (50), удовлетворяющее условиям

$$[q_1(t)]_{t=0} = q_1(0), \quad [q_1(t)]_{t=t_1} = 0. \quad (23.52)$$

Интересующее нас решение будет следующим:

$$q_1(t) = - \frac{q_1(0) \cos kt_1}{\sin kt_1} \sin kt + q_1(0) \cos kt. \quad (23.53)$$

Решение (53) существует при условии

$$t_1 \neq \frac{n\pi}{k} \quad (n = 1, 2, 3, \dots), \quad (23.54)$$

которое мы будем предполагать выполненным.

Из второго уравнения (42) следует, что

$$u = m \frac{dq_1}{dt},$$

откуда в соответствии с (53) получим

$$u = - \sqrt{mc} q_1(0) \left[\frac{\cos kt_1}{\sin kt_1} \cos kt + \sin kt \right]. \quad (23.55)$$

Из сравнения выражения (46), полученного из принципа максимума Л. С. Понтрягина, со вторым уравнением (42) следует, что в рассматриваемой задаче

$$-\frac{\psi_1}{\psi_0} = m \frac{dq_1}{dt}, \quad (23.56)$$

откуда

$$\psi_1(t) = \sqrt{mc} q_1(0) \left[\frac{\cos kt_1}{\sin kt_1} \cos kt + \sin kt \right] \psi_0. \quad (23.57)$$

Заметим, что у механической системы, функция Лагранжа которой имеет вид

$$L = \frac{1}{2} m \dot{q}_1^2 - \frac{1}{2} c q_1^2, \quad (23.58)$$

канонический импульс p_1 будет

$$p_1 = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1} = m \dot{q}_1. \quad (23.59)$$

Отсюда следует, что для управляемой системы, описываемой уравнением (36),

$$u = p_1, \quad (23.60)$$

$$\psi_1 = - \psi_0 p_1, \quad (23.61)$$

где p_1 — канонический импульс механической системы (58).

Соотношения (60) и (61) имеют место потому, что здесь, как и в § 16, п. 2, функционал (38) выбран так, что для механической системы (58) он принимает вид

$$Q = \int_0^{t_1} L dt, \quad (23.62)$$

что представляет собой действие по Гамильтону, которое в силу принципа Гамильтона принимает стационарное значение на действительных движениях механической системы.

При подстановке в (40) вместо u и ψ_1 выражений (60) и (61) функция \tilde{H} принимает вид

$$\tilde{H} = -\psi_0 \left(\frac{p_1^2}{2m} + \frac{cq_1^2}{2} \right), \quad (23.63)$$

то есть функция \tilde{H} в рассматриваемом здесь примере представляет собой произведение функции Гамильтона механической системы (58) на постоянный множитель $-\psi_0$.

§ 24. Оптимальные линейные системы с квадратичным критерием качества

1. Задача о регуляторе состояния [34]. Рассмотрим нестационарную линейную систему

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u(t), \quad (24.1)$$

где x — n -мерный вектор фазовых координат системы, $u(t)$ — r -мерный вектор управления $A(t)$ — $n \times n$ -матрица, $B(t)$ — $n \times r$ -матрица. Предполагаем, что на управления $u_j(t)$ ($j = 1, \dots, r$) ограничения не наложены. Управление $u(t)$ должно быть выбрано так, чтобы минимизировать функционал

$$J_1 = \frac{1}{2} \langle x(T), Fx(T) \rangle + \frac{1}{2} \int_{t_0}^T [\langle x(t), Q(t)x(t) \rangle + \langle u(t), R(t)u(t) \rangle] dt. \quad (24.2)$$

Здесь T — некоторый фиксированный момент времени. Целью управления является удержание фазовых координат системы $x_j(t)$ ($j = 1, \dots, n$) вблизи нуля, то есть речь идет о регулировании состояния системы. Через F и $Q(t)$ обозначены неотрицательно-определенные $n \times n$ -матрицы, то есть симметрические матрицы, удовлетворяющие условию $\langle a, Fa \rangle \geq 0$, $\langle a, Q(t)a \rangle \geq 0$ для любого n -мерного вектора $a \neq 0$. Матрица $R(t)$ представляет собой положительно-определенную $r \times r$ -матрицу, то есть симметрическую матрицу, удовлетворяющую условию $\langle b, R(t)b \rangle > 0$ для любого r -мерного вектора $b \neq 0$.

Необходимые условия оптимальности управления $u(t)$ можно получить из принципа максимума Л. С. Понтрягина.

Согласно (18.15) функция \tilde{H} для рассматриваемой здесь задачи имеет вид

$$\tilde{H} = \frac{1}{2} \Psi_0(t) \langle x(t), Q(t) x(t) \rangle + \frac{1}{2} \Psi_0(t) \langle u(t), R(t) u(t) \rangle + \\ + \langle A(t) x(t), \psi(t) \rangle + \langle B(t) u(t), \psi(t) \rangle, \quad (24.3)$$

где $\psi(t)$ — n -мерный вектор, элементами которого являются вспомогательные переменные $\psi_1(t), \dots, \psi_n(t)$. Оптимальное управление $u(t)$ должно доставлять функции \tilde{H} максимум. Согласно принципу максимума для неавтономных систем в задаче с закрепленным временем и свободным концом траектории $\psi_0(t) = \text{const} = -1$. Поэтому, обозначая

$$p_i(t) = \frac{\psi_i(t)}{\psi_0} \quad (i = 1, \dots, n), \quad (24.4)$$

получим, что оптимальное управление $u(t)$ доставляет минимум функции

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2} \langle x(t), Q(t) x(t) \rangle + \frac{1}{2} \langle u(t), R(t) u(t) \rangle + \\ + \langle A(t) x(t), p(t) \rangle + \langle B(t) u(t), p(t) \rangle. \quad (24.5)$$

Так как

$$\dot{\psi}_j = \psi_0 \dot{p}_j = - \frac{\partial \tilde{H}}{\partial x_j} \quad (j = 1, \dots, n),$$

то элементы вектора p удовлетворяют следующей системе дифференциальных уравнений:

$$\dot{p}_j = - \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x_j} \quad (j = 1, \dots, n). \quad (24.6)$$

Частные производные по x_j ($j = 1, \dots, n$) от функции $\Xi = \frac{1}{2} \langle x(t), Q(t) x(t) \rangle$, где $Q(t)$ — симметрическая матрица, имеют вид

$$\frac{\partial \Xi}{\partial x_j} = \sum_{k=1}^n Q_{jk}(t) x_k(t) \quad (j = 1, \dots, n),$$

а вектор $\text{grad } \Xi = \left(\frac{\partial \Xi}{\partial x_1}, \frac{\partial \Xi}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial \Xi}{\partial x_n} \right)$ будет следующим:

$$\text{grad } \Xi = Q(t) x(t).$$

Аналогично для функции $\mathcal{L} = \langle A(t) x(t), p(t) \rangle$ имеем

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_j} = \sum_{k=1}^n A_{kj}(t) p_k(t) \quad (j = 1, \dots, n),$$

а вектор $\text{grad } \mathcal{L} = \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_1}, \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_n} \right)$ имеет следующий вид:

$$\text{grad } \mathcal{L} = A^*(t) p(t),$$

где через $A^*(t)$ обозначена матрица, образуемая транспонированием матрицы $A(t)$.

Таким образом, в соответствии с (6) и (5) вектор-функция $p(t)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\dot{p} = -Q(t)x - A^*(t)p. \quad (24.7)$$

Найдем теперь управление $u(t)$, доставляющее экстремум функции \mathcal{H} . Так как

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial u_j} = \sum_{l=1}^r R_{jl}(t) u_l(t) + \sum_{k=1}^n B_{kj}(t) p_k(t) \quad (j = 1, \dots, r), \quad (24.8)$$

то необходимые условия экстремума

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial u_j} = 0 \quad (j = 1, \dots, r)$$

принимают вид

$$\sum_{l=1}^r R_{jl}(t) u_l(t) = - \sum_{k=1}^n B_{kj}(t) p_k(t) \quad (j = 1, \dots, r). \quad (24.9)$$

Система скалярных уравнений (9) эквивалентна векторному уравнению

$$R(t)u(t) = -B^*(t)p(t). \quad (21.10)$$

Из уравнения (10) следует, что управление $u(t)$, доставляющее экстремум функции \mathcal{H} , будет следующим:

$$u(t) = -R^{-1}(t)B^*(t)p(t). \quad (24.11)$$

Поскольку $R(t)$ — положительно-определенная матрица, то $\det R(t) \neq 0$ и обратная матрица $R^{-1}(t)$ существует.

Согласно (8)

$$\frac{\partial^2 \mathcal{H}}{\partial u_j \partial u_k} = R_{jk}(t) \quad (j, k = 1, \dots, r),$$

и, следовательно, матрица

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial^2 \mathcal{H}}{\partial u_1 \partial u_1} & \cdots & \frac{\partial^2 \mathcal{H}}{\partial u_1 \partial u_r} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 \mathcal{H}}{\partial u_r \partial u_1} & \cdots & \frac{\partial^2 \mathcal{H}}{\partial u_r \partial u_r} \end{bmatrix} = R(t) \quad (24.12)$$

является положительно-определенной матрицей. Отсюда следует, что управление $u(t)$, которое определено выражением (11), доставляет функции \mathcal{H} минимум.

Подставляя выражение (11) для $u(t)$ в уравнение (1), приведем это уравнение к виду

$$\dot{x} = A(t)x - S(t)p, \quad (24.13)$$

где $S(t)$ — симметрическая матрица типа $n \times n$:

$$S(t) = B(t)R^{-1}(t)B^*(t). \quad (24.14)$$

Уравнения (13) и (7) образуют систему векторных дифференциальных уравнений, которую можно записать так:

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{p} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A(t) & -S(t) \\ -Q(t) & -A^*(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ p \end{bmatrix}. \quad (24.15)$$

Векторное дифференциальное уравнение (15) определяет собой искомую оптимальную систему.

Начальное состояние $x(t_0)$ системы (1) предполагается известным. Поэтому решение системы дифференциальных уравнений (15), ранг которой равен $2n$, должно удовлетворять n начальным условиям, определяемым векторным соотношением

$$[x(t)]_{t=t_0} = x(t_0). \quad (24.16)$$

Для вспомогательных переменных p_j ($j = 1, \dots, n$) вытекающие из условий трансверсальности n граничных условий определяются соотношением

$$p(T) = Fx(T). \quad (24.17)$$

Условия (16) и (17) определяют единственное решение системы уравнений (15).

Покажем, как получить граничное условие (17). Предварительно преобразуем функционал (2) к виду, не содержащему аддитивного члена, зависящего от $x(T)$. Так как

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \langle x(T), Fx(T) \rangle &= \frac{1}{2} \langle x(t_0), Fx(t_0) \rangle + \int_{t_0}^T \frac{d}{dt} \left[\frac{1}{2} \langle x(t), Fx(t) \rangle \right] dt, \\ \frac{d}{dt} \left[\frac{1}{2} \langle x(t), Fx(t) \rangle \right] &= \langle Fx(t), \dot{x}(t) \rangle, \end{aligned}$$

то имеем

$$\frac{1}{2} \langle x(T), Fx(T) \rangle = \frac{1}{2} \langle x(t_0), Fx(t_0) \rangle + \int_{t_0}^T \langle Fx(t), \dot{x}(t) \rangle dt. \quad (24.18)$$

Учитывая тождество (18), можно преобразовать функционал (2) к следующему виду:

$$\widehat{J} = \frac{1}{2} \langle x(t_0), Fx(t_0) \rangle + \int_{t_0}^T \left[\langle Fx(t), \dot{x}(t) \rangle + \frac{1}{2} \langle x(t), Q(t)x(t) \rangle + \frac{1}{2} \langle u(t), R(t)u(t) \rangle \right] dt. \quad (24.19)$$

Соответственно функция \mathcal{H} , определяемая выражением (5), может быть заменена следующей функцией:

$$\widehat{\mathcal{H}} = \frac{1}{2} \langle x(t), Q(t)x(t) \rangle + \frac{1}{2} \langle u(t), R(t)u(t) \rangle + \langle Fx(t), \dot{x}(t) \rangle + \langle \beta, [A(t)x(t) + B(t)u(t)] \rangle$$

Так как согласно (1)

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t),$$

то функция $\widehat{\mathcal{H}}$ принимает вид

$$\widehat{\mathcal{H}} = \frac{1}{2} \langle x(t), Q(t)x(t) \rangle + \frac{1}{2} \langle u(t), R(t)u(t) \rangle + \langle [Fx(t) + \beta], [A(t)x(t) + B(t)u(t)] \rangle. \quad (24.20)$$

Поскольку функционалы (2) и (19) получены друг из друга при помощи тождественного преобразования, то и функции \mathcal{H} и $\widehat{\mathcal{H}}$ должны совпадать. Для этого, как следует из выражений (5) и (20), должно выполняться условие

$$p(t) = Fx(t) + \beta(t). \quad (24.21)$$

В задаче с закрепленным временем и свободным концом траектории, в случае, когда функционал, который требуется минимизировать, имеет вид (19), условия трансверсальности приводят согласно (17.55) к соотношению

$$\dot{p}(T) = 0. \quad (24.22)$$

При этом в соответствии с (21) для исходной задачи с функционалом (2) будет иметь место соотношение (17)

$$p(T) = Fx(T).$$

Найдем еще дифференциальное уравнение, которому удовлетворяет вектор-функция $\dot{p}(t)$ в задаче с функционалом (19). Аналогично (6)

$$\frac{d}{dt} \dot{p}_j = - \frac{\partial \widehat{\mathcal{H}}}{\partial x_j} \quad (j = 1, \dots, n). \quad (24.23)$$

Так как

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \langle Fx, Ax \rangle = \left\langle \begin{bmatrix} F_{1j} \\ F_{2j} \\ \dots \\ F_{nj} \end{bmatrix}, Ax \right\rangle + \left\langle \begin{bmatrix} A_{1j} \\ A_{2j} \\ \dots \\ A_{nj} \end{bmatrix}, Fx \right\rangle,$$

то, учитывая, что F — симметрическая матрица, то есть $F^* = F$, будем иметь

$$\text{grad} \langle Fx, Ax \rangle = FAx + A^*Fx.$$

Система дифференциальных уравнений (23), таким образом, может быть представлена в виде следующего векторного дифференциального уравнения:

$$\frac{d}{dt} \hat{p} = -Q(t)x - A^*(t)\hat{p} - FB(t)u - FA(t)x - A^*(t)Fx \quad (24.24)$$

или

$$\frac{d}{dt} \hat{p} = -Q(t)x - A^*(t)(Fx + \hat{p}) - F[A(t)x + B(t)u].$$

Так как согласно (1)

$$\dot{x}(t) = A(t)x + B(t)u,$$

то уравнение (24) приводится к виду

$$\frac{d}{dt} (\hat{p} + Fx) = -Q(t)x - A^*(t)(\hat{p} + Fx),$$

откуда в соответствии с (21) получим уравнение (7)

$$\dot{p} = -Q(t)x - A^*(t)p$$

для исходной задачи с функционалом (2), что мы и хотели показать.

Обратимся теперь к дифференциальным уравнениям (7) и (13)

$$\begin{aligned} \dot{p} &= -Q(t)x - A^*(t)p, \\ \dot{x} &= A(t)x - S(t)p. \end{aligned}$$

Будем искать $p(t)$ в виде

$$p(t) = K(t)x(t), \quad (24.25)$$

где $K(t)$ — $n \times n$ -матрица, подлежащая определению. При этом уравнение (13) принимает следующий вид:

$$\dot{x} = [A(t) - S(t)K(t)]x. \quad (24.26)$$

Из соотношения (25) следует, что

$$p(T) = K(T)x(T). \quad (24.27)$$

Сравнивая выражение (27) и (17), найдем, что

$$K(T) = F. \quad (24.28)$$

Из уравнений (7) и (13) можно найти дифференциальное уравнение, которому должна удовлетворять матрица $K(t)$. Подставляя в уравнения (7) и (13) выражение (25), получим

$$\begin{aligned} \dot{K}(t)x(t) + K(t)A(t)x(t) - K(t)S(t)K(t)x(t) &= \\ &= -Q(t)x(t) - A^*(t)K(t)x(t). \end{aligned} \quad (24.29)$$

Учитывая, что согласно (14)

$$S(t) = B(t)R^{-1}(t)B^*(t),$$

можно привести уравнение (29) к виду

$$[\dot{K}(t) + K(t)A(t) + A^*(t)K(t) - K(t)B(t)R^{-1}(t)B^*(t)K(t) + Q(t)]x(t) = 0. \quad (24.30)$$

Соотношение (30) должно выполняться при любом значении $x(t)$, откуда следует, что матрица $K(t)$ должна удовлетворять дифференциальному уравнению

$$\dot{K} = -KA(t) - A^*(t)K + KB(t)R^{-1}(t)B^*(t)K - Q(t) \quad (t \in [t_0, T]). \quad (24.31)$$

Уравнение (31) представляет собой нелинейное матричное дифференциальное уравнение Риккати. Вместе с граничным условием (28) уравнение (31) определяет единственным образом матрицу $K(t)$.

Покажем еще, что матрица $K(t)$ симметрическая. Транспонируя матрицы в левой и правой части уравнения (31) и учитывая, что $B(t)R^{-1}(t)B^*(t)$ и $Q(t)$ — симметрические матрицы и что

$$[\dot{K}(t)]^* = \frac{d}{dt} [K^*(t)],$$

получим следующее уравнение:

$$\frac{d}{dt} K^* = -K^*A(t) - A^*(t)K^* + K^*B(t)R^{-1}(t)B^*(t)K^* - Q(t) \quad (t_0 \in [t, T]). \quad (24.32)$$

Граничное условие (28) в силу симметричности матрицы F принимает вид

$$K^*(T) = F. \quad (24.33)$$

Таким образом, дифференциальные уравнения и граничные условия, которым удовлетворяют $K(t)$ и $K^*(t)$, совпадают, и в силу теоремы единственности

$$K(t) = K^*(t), \quad (24.34)$$

то есть $K(t)$ является симметрической матрицей.

Дифференциальное уравнение, определяющее закон движения оптимальной системы, в соответствие с (26) и (14) будет следующим:

$$\dot{x} = [A(t) - B(t)R^{-1}(t)B^*(t)K(t)]x. \quad (24.35)$$

Покажем теперь, как связана матрица $K(t)$ с фундаментальной матрицей $\hat{\theta}(t)$ решений векторного дифференциального уравнения (15). Обозначим через $\Omega(t, \tau)$ следующую $2n \times 2n$ -матрицу:

$$\Omega(t, \tau) = \hat{\theta}(t)\hat{\theta}^{-1}(\tau). \quad (24.36)$$

Решение уравнения (15) будет следующим:

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ p(t) \end{bmatrix} = \Omega(t, t_0) \begin{bmatrix} x(t_0) \\ p(t_0) \end{bmatrix}. \quad (24.37)$$

Аналогично (37) при $T > t$ будем иметь

$$\begin{bmatrix} x(T) \\ p(T) \end{bmatrix} = \Omega(T, t) \begin{bmatrix} x(t) \\ p(t) \end{bmatrix}. \quad (24.38)$$

Представляя матрицу $\Omega(T, t)$ в виде блочной матрицы, элементы которой являются $n \times n$ -матрицами:

$$\Omega(T, t) = \begin{bmatrix} \Omega_{11}(T, t) & \Omega_{12}(T, t) \\ \Omega_{21}(T, t) & \Omega_{22}(T, t) \end{bmatrix}, \quad (24.39)$$

получим из (38) и (17) следующие соотношения:

$$\left. \begin{aligned} x(T) &= \Omega_{11}(T, t)x(t) + \Omega_{12}(T, t)p(t), \\ p(T) &= Fx(T) = \Omega_{21}(T, t)x(t) + \Omega_{22}(T, t)p(t). \end{aligned} \right\} \quad (24.40)$$

Из соотношений (40) следует, что

$$p(t) = \{[\Omega_{22}(T, t) - F\Omega_{12}(T, t)]^{-1} [F\Omega_{11}(T, t) - \Omega_{21}(T, t)]\} x(t). \quad (24.41)$$

Так как $\Omega(T, T) = E_{2n}$, где E_{2n} — единичная матрица типа $2n \times 2n$, то

$$\begin{aligned} \Omega_{11}(T, T) &= \Omega_{22}(T, T) = E_n, \\ \Omega_{12}(T, T) &= \Omega_{21}(T, T) = 0, \end{aligned}$$

где E_n — единичная матрица типа $n \times n$, и из (41) следует

$$p(T) = Fx(T),$$

что совпадает с выражением (17).

Сравнивая выражения (41) и (25), найдем, что

$$K(t) = [\Omega_{22}(T, t) - F\Omega_{12}(T, t)]^{-1} [F\Omega_{11}(T, t) - \Omega_{21}(T, t)]. \quad (24.42)$$

Определение матрицы $\Omega(T, t)$ может быть выполнено интегрированием векторного дифференциального уравнения, сопряженного для векторного дифференциального уравнения (15) [68].

В случае, когда A , B , Q и R — постоянные матрицы, построение фундаментальной матрицы $\hat{\theta}(t)$ не вызывает затруднений и матрица $\Omega(T, t)$ может быть определена в замкнутой форме. Оптимальная система, описываемая векторным дифференциальным уравнением (35), будет линейной системой, однако даже в случае, когда A , B , Q и R — постоянные матрицы, она будет системой нестационарной.

Перейдем теперь к определению минимального значения $J_1^*(x, t)$ функционала

$$\begin{aligned} J_1(x, t) &= \frac{1}{2} \langle x(T), Fx(T) \rangle + \\ &+ \frac{1}{2} \int_t^T [\langle x(\xi), Q(\xi)x(\xi) \rangle + \langle u(\xi), R(\xi)u(\xi) \rangle] d\xi \quad (t \in [t_0, T]). \end{aligned} \quad (24.43)$$

Докажем, что

$$J_1^*(x, t) = \frac{1}{2} \langle x(t), K(t)x(t) \rangle \quad (t \in [t_0, T]), \quad (24.44)$$

где $K(t)$ — решение уравнения Риккати (31) при граничном условии (28). При этом, учитывая (28), будем иметь

$$J_1^*(x(T), T) = \frac{1}{2} \langle x(T), Fx(T) \rangle. \quad (24.45)$$

Для доказательства справедливости выражения (44) составим уравнение Беллмана для рассматриваемой здесь задачи. Согласно (14.21) это уравнение будет следующим:

$$\frac{\partial J_1^*}{\partial t} + \min_{u(t)} \left\{ \frac{1}{2} \langle x(t), Q(t)x(t) \rangle + \frac{1}{2} \langle u(t), R(t)u(t) \rangle + \langle A(t)x(t), \text{grad } J_1^*(x, t) \rangle + \langle B(t)u(t), \text{grad } J_1^*(x, t) \rangle \right\} = 0. \quad (24.46)$$

Выражение в фигурных скобках в уравнении (46) совпадает с выражением (5), которым определена функция \mathcal{H} , если в нем заменить вектор $p(t)$ вектором $\text{grad } J_1^*(x, t)$. В соответствии с (11) этому выражению доставляет минимум управление

$$u(t) = -R^{-1}(t)B^*(t)\text{grad } J_1^*(x, t). \quad (24.47)$$

Так как согласно (44)

$$\begin{aligned} \frac{\partial J_1^*}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{1}{2} \langle x, K(t)x \rangle \right] = \frac{1}{2} \langle x, \dot{K}(t)x \rangle, \\ \text{grad } J_1^* &= \text{grad} \left[\frac{1}{2} \langle x, K(t)x \rangle \right] = K(t)x, \end{aligned}$$

то формула (47) принимает вид

$$u(t) = -R^{-1}(t)B^*(t)K(t)x(t). \quad (24.48)$$

Уравнение (46) можно теперь переписать так:

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2} \langle x(t), \dot{K}(t)x(t) \rangle + \frac{1}{2} \langle x(t), Q(t)x(t) \rangle + \\ &+ \frac{1}{2} \langle R^{-1}(t)B^*(t)K(t)x(t), B^*(t)K(t)x(t) \rangle + \\ &+ \langle A(t)x(t), K(t)x(t) \rangle - \langle B(t)R^{-1}(t)B^*(t)K(t)x(t), K(t)x(t) \rangle = 0. \end{aligned} \quad (24.49)$$

Для преобразования уравнения (49) потребуются тождества

$$\langle R^{-1}B^*Kx, B^*Kx \rangle = (R^{-1}B^*Kx)^* B^*Kx = (BR^{-1}B^*Kx)^* Kx = \langle BR^{-1}B^*Kx, Kx \rangle, \quad (24.50)$$

$$\langle x, KAx \rangle = x^*KAx = (K^*x)^* Ax = \langle K^*x, Ax \rangle = \langle Kx, Ax \rangle = \langle Ax, Kx \rangle.$$

Здесь учтено, что согласно (34) $K = K^*$. Аналогично

$$\langle x, A^* K x \rangle = x^* A^* K x = (Ax)^* K x = \langle Ax, K x \rangle.$$

Из последних двух тождеств следует, что

$$\langle Ax, K x \rangle = \frac{1}{2} \langle x, A^* K x \rangle + \frac{1}{2} \langle x, K Ax \rangle. \quad (24.51)$$

При помощи (50) и (51) можно преобразовать уравнение (49) к виду

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \langle x(t), \dot{K}(t) x(t) \rangle + \frac{1}{2} \langle x(t), Q(t) x(t) \rangle + \\ & + \frac{1}{2} \langle x(t), A^*(t) K(t) x(t) \rangle + \frac{1}{2} \langle x(t), K(t) A(t) x(t) \rangle - \\ & - \frac{1}{2} \langle x(t), K(t) B(t) R^{-1}(t) B^*(t) K(t) x(t) \rangle = 0. \end{aligned} \quad (24.52)$$

Таким образом, в соответствии с (44) уравнение Беллмана (46) принимает следующий вид:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \langle x(t), [\dot{K}(t) + K(t) A(t) + A^*(t) K(t) - \\ & - K(t) B(t) R^{-1}(t) B^*(t) K(t) + Q(t)] x(t) \rangle = 0. \end{aligned} \quad (24.53)$$

Так как $K(t)$ есть решение уравнения Риккати (31), то выражение в квадратных скобках в уравнении (53) тождественно равно нулю, и, следовательно, определяемая выражением (44) функция $J_1^*(x, t)$ есть решение уравнения Беллмана для рассматриваемой задачи.

Из изложенного видно, что функция $J_1^*(x, t)$ удовлетворяет уравнению Беллмана (53) при любых значениях ее аргументов: $x(t) \in X$ (где X — n -мерное фазовое пространство системы) и $t \in [t_0, T]$. Можно показать [14] (аналогично теореме § 15), что из этого следует, что управление (48) удовлетворяет необходимым и достаточным условиям оптимальности и что это управление является единственным.

Покажем еще, что матрица $K(t)$ при $t \in [t_0, T]$ является положительно-определенной матрицей. В силу того, что F и $Q(t)$ — неотрицательно-определенные матрицы, а $R(t)$ — положительно-определенная матрица, функционал $J_1(x, t)$ при любом управлении $u(t) \neq 0$ будет согласно (43) иметь положительное значение при любом $t \in [t_0, T]$. Следовательно, минимальное значение $J_1^*(x, t)$ функционала $J_1(x, t)$, определяемое выражением (44):

$$J_1^*(x, t) = \frac{1}{2} \langle x(t), K(t) x(t) \rangle > 0, \quad t \in [t_0, T]$$

для любого вектора $x(t)$. Отсюда следует положительная определенность матрицы $K(t)$ при $t \in [t_0, T)$.

Определение граничного значения $p(T)$ в общем случае задачи с закрепленным временем и свободным концом траектории. В общем случае уравнения движения системы имеют следующий вид:

$$\dot{x} = f(x, u, *t), \quad (24.54)$$

где f и x — n -мерные векторы, u — r -мерный вектор.

Пусть функционал, который требуется минимизировать, имеет вид

$$J = N(x(T), T) + \int_{t_0}^T L(x(t), u(t), t) dt. \quad (24.55)$$

Аналогично (5) функция \mathcal{H} , которой оптимальное управление должно доставить минимум, имеет вид

$$\mathcal{H} = L(x, u, t) + \langle p, f(x, u, t) \rangle. \quad (24.56)$$

Так как

$$N(x(T), T) = N(x(t_0), t_0) + \int_{t_0}^T \frac{d}{dt} N(x(t), t) dt,$$

$$\frac{d}{dt} N(x(t), t) = \langle \text{grad } N, \dot{x} \rangle + \frac{\partial N}{\partial t} = \langle \text{grad } N, f(x, u, t) \rangle + \frac{\partial N}{\partial t},$$

то имеем

$$N(x(T), T) = N(x(t_0), t_0) + \int_{t_0}^T \left[\langle \text{grad } N, f(x, u, t) \rangle + \frac{\partial N}{\partial t} \right] dt. \quad (24.57)$$

Функционал (55) преобразуется к следующему виду:

$$\hat{J} = N(x(t_0), t_0) + \int_{t_0}^T \left[\langle \text{grad } N, f(x, u, t) \rangle + \frac{\partial N}{\partial t} + L(x, u, t) \right] dt. \quad (24.58)$$

Функция \mathcal{H} теперь должна быть заменена следующей функцией:

$$\hat{\mathcal{H}} = \langle \text{grad } N, f(x, u, t) \rangle + \frac{\partial N}{\partial t} + L(x, u, t) + \langle \hat{p}, f(x, u, t) \rangle. \quad (24.59)$$

Найдем дифференциальное уравнение, которому должна удовлетворять вектор-функция $\hat{p}(t)$. Так как

$$\frac{d\hat{p}_j}{dt} = - \frac{\partial \hat{\mathcal{H}}}{\partial x_j} \quad (j = 1, \dots, n),$$

то будем иметь

$$\frac{d\hat{p}_j}{dt} = - \frac{\partial}{\partial x_j} \langle \text{grad } N, f(x, u, t) \rangle - \frac{\partial^2 N}{\partial x_j \partial t} - \frac{\partial L}{\partial x_j} - \frac{\partial}{\partial x_j} \langle \hat{p}, f(x, u, t) \rangle$$

или

$$\frac{d\hat{p}_j}{dt} = - \left\langle \frac{\partial}{\partial x_j} \text{grad } N, f(x, u, t) \right\rangle - \left\langle \text{grad } N, \frac{\partial f(x, u, t)}{\partial x_j} \right\rangle - \left\langle \frac{\partial^2 N}{\partial x_j \partial t} - \frac{\partial L}{\partial x_j} - \left\langle \hat{p}, \frac{\partial f(x, u, t)}{\partial x_j} \right\rangle \right\rangle. \quad (24.60)$$

Покажем теперь, что вектор $p(t)$, который входит в выражение (56), будет иметь следующий вид:

$$p(t) = \hat{p}(t) + \text{grad } N(x, t), \quad (24.61)$$

то есть, что

$$p_j(t) = \hat{p}_j(t) + \frac{\partial N(x, t)}{\partial x_j} \quad (j = 1, \dots, n). \quad (24.62)$$

Из (62) и (60) следует, что

$$\begin{aligned} \dot{\hat{p}}_j = & - \left\langle \frac{\partial}{\partial x_j} \text{grad } N, f(x, u, t) \right\rangle - \left\langle \text{grad } N, \frac{\partial f(x, u, t)}{\partial x_j} \right\rangle - \\ & - \left\langle \frac{\partial^2 N}{\partial x_j \partial t} - \frac{\partial L}{\partial x_j} - \left\langle p - \text{grad } N, \frac{\partial f(x, u, t)}{\partial x_j} \right\rangle + \frac{d}{dt} \frac{\partial N}{\partial x_j} \right\rangle. \end{aligned} \quad (24.63)$$

Так как

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial N}{\partial x_j} = \left\langle \frac{\partial}{\partial x_j} \text{grad } N, \dot{x} \right\rangle + \frac{\partial^2 N}{\partial x_j \partial t} = \left\langle \frac{\partial}{\partial x_j} \text{grad } N, f(x, u, t) \right\rangle + \frac{\partial^2 N}{\partial x_j \partial t}, \quad (24.64)$$

то уравнение (63) принимает вид

$$\dot{\hat{p}}_j = - \left\langle \frac{\partial L}{\partial x_j} - \left\langle \hat{p}, \frac{\partial f(x, u, t)}{\partial x_j} \right\rangle \right\rangle \quad (j = 1, \dots, n), \quad (24.65)$$

то есть

$$p_j = - \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x_j} \quad (j = 1, \dots, n), \quad (24.66)$$

где функция \mathcal{H} определена выражением (56). Полученный результат подтверждает справедливость соотношения (61).

В задаче с закрепленным временем и свободным концом траектории, в случае, когда функционал, который требуется минимизировать, имеет вид (58), условия трансверсальности приводят согласно (17.55) к соотношению

$$\dot{p}(T) = 0. \quad (24.67)$$

При этом в соответствии с (61) для исходной задачи с функционалом (55) будет иметь место соотношение

$$p(T) = [\text{grad } N(x(T), T)]. \quad (24.68)$$

2. Задача о регуляторе выхода. Рассмотрим нестационарную линейную систему

$$\left. \begin{aligned} \dot{x} &= A(t)x + B(t)u(t), \\ y &= C(t)x, \end{aligned} \right\} \quad (24.69)$$

где x — n -мерный вектор фазовых координат системы (то есть вектор состояния системы), $u(t)$ — r -мерный вектор управления,

$y(t)$ — m -мерный вектор, определяющий собой выход системы, $A(t)$ — $n \times n$ -матрица, $B(t)$ — $n \times r$ -матрица, $C(t)$ — $m \times n$ -матрица. Предполагается, что система (69) вполне наблюдаема, то есть матрица

$$M(t_0, T) = \int_{t_0}^T \Phi^*(t, t_0) C^*(t) C(t) \Phi(t, t_0) dt \quad (24.70)$$

является положительно-определенной матрицей. Здесь

$$\Phi(t, \tau) = \theta(t) \theta^{-1}(\tau),$$

где через $\theta(t)$ обозначена фундаментальная матрица решений векторного дифференциального уравнения

$$\dot{x} = A(t)x.$$

Как и в п. 1, предполагается, что на управления $u_j(t)$ ($j = 1, \dots, r$) ограничения не наложены. Требуется выбрать вектор управления $u(t)$ так, чтобы минимизировать функционал

$$J_2 = \frac{1}{2} \langle y(T), F(y(T)) \rangle + \frac{1}{2} \int_{t_0}^T [\langle y(t), Q(t)y(t) \rangle + \langle u(t), R(t)u(t) \rangle] dt, \quad (24.71)$$

где T — некоторый фиксированный момент времени. Целью управления является удержание вектора $y(t)$ вблизи нуля, то есть задача состоит в регулировании *выхода* системы. Матрицы F и $Q(t)$ являются неотрицательно-определенными $m \times m$ -матрицами, а матрица $R(t)$ — положительно-определенная $r \times r$ -матрица. Так как

$$\begin{aligned} \langle y(t), Q(t)y(t) \rangle &= \langle C(t)x(t), Q(t)C(t)x(t) \rangle = \\ &= \langle x(t), C^*(t)Q(t)C(t)x(t) \rangle, \\ \langle y(T), Fy(T) \rangle &= \langle x(T), C^*(T)FC(T)x(T) \rangle, \end{aligned}$$

то функционал (71) можно переписать так:

$$J_2 = \frac{1}{2} \langle x(T), C^*(T)FC(T)x(T) \rangle + \frac{1}{2} \int_{t_0}^T \langle x(t), C^*(t)Q(t)C(t)x(t) \rangle + \langle u(t), R(t)u(t) \rangle dt. \quad (24.72)$$

Заметим, что поскольку система (69) вполне наблюдаема, а F и $Q(t)$ — неотрицательно-определенные матрицы, то симметрические матрицы $C^*(T)FC^*(T)$ и $C^*(t)Q(t)C(t)$ также будут неотрицательно-определенными матрицами.

Действительно, в силу того, что $Q(t)$ — неотрицательно-определенная матрица, имеет место соотношение

$$\langle y(t), Q(t) y(t) \rangle \geq 0, \quad (24.73)$$

откуда следует, что

$$\langle C(t) x(t), Q(t) C(t) x(t) \rangle \geq 0 \quad (24.74)$$

для любого вектора

$$y(t) = C(t) x(t).$$

Если система вполне наблюдаема, то по вектор-функции $y(t)$ на $[0, T]$ можно определить единственным образом начальный вектор $x(t_0)$ системы (69), а каждый вектор $x(t_0)$ определяет единственную траекторию $x(t)$ системы (69). Следовательно, уравнения (69) вполне наблюдаемой системы взаимно однозначно отображают пространство Y на пространство X . Поэтому из условия (74) следует, что

$$\langle x(t), C^*(t) Q(t) C(t) x(t) \rangle \geq 0 \quad \text{для любого вектора } x(t).$$

Таким образом, матрица $C^*(t) Q(t) C(t)$ и аналогично матрица $C^*(T) F C(T)$ являются неотрицательно-определенными матрицами.

Так как функционалы (2) и (72) отличаются лишь тем, что неотрицательно-определенные матрицы F и $Q(t)$ заменены неотрицательно-определенными матрицами $C^*(T) F C(T)$ и $C^*(t) Q(t) C(t)$ соответственно, то результаты п. I можно перенести на рассматриваемую здесь задачу.

Аналогично (48) оптимальное управление будет иметь вид

$$u(t) = -R^{-1}(t) B^*(t) \mathcal{K}(t) x(t). \quad (24.75)$$

Дифференциальное уравнение, описывающее закон движения оптимальной системы, будет согласно (35) и (69) следующим:

$$\dot{x} = [A(t) - B(t) R^{-1}(t) B^*(t) \mathcal{K}(t)] x. \quad (24.76)$$

Минимальное значение $J_2^*(x, t)$ функционала $J_2(x, t)$, определяемого аналогично (43), будет

$$J_2^*(x, t) = \frac{1}{2} \langle x(t), \mathcal{K}(t) x(t) \rangle, \quad t \in [t_0, T]. \quad (24.77)$$

Входящая в выражения (75) и (77) и в дифференциальное уравнение (76) положительно-определенная, симметрическая матрица $\mathcal{K}(t)$ есть решение уравнения Риккати

$$\begin{aligned} \dot{\mathcal{K}} = & -\mathcal{K} A(t) - A^*(t) \mathcal{K} + \mathcal{K} B(t) R^{-1}(t) B^*(t) \mathcal{K} - \\ & - C^*(t) Q(t) C(t) \quad (t \in [t_0, T]), \end{aligned} \quad (24.78)$$

удовлетворяющее граничному условию

$$\mathcal{H}(T) = C^*(T)FC(T). \quad (24.79)$$

3. Стационарные системы с бесконечным временем наблюдения. а) Регулирование состояния системы. Уравнение движения системы имеет вид

$$\dot{x} = Ax + Bu.$$

Рассмотрим предельный случай, когда конец интервала наблюдения $T \rightarrow \infty$. При этом функционал, который требуется минимизировать, будет иметь вид

$$J_\infty = \frac{1}{2} \lim_{T \rightarrow \infty} \int_0^T \langle x(t), Qx(t) \rangle + \langle u(t), Ru(t) \rangle dt,$$

где Q и R — постоянные, положительно-определенные матрицы. На управление $u(t)$ ограничения не наложены. Предполагается, что рассматриваемая система *вполне управляема*, то есть

$$\text{ранг} [B \ AB \ \dots \ A^{n-1}B] = n.$$

Уравнение Риккати (31) теперь принимает вид

$$\dot{K} = -KA - A^*K + KBR^{-1}B^*K - Q.$$

Так как в функционале J_∞ в отличие от функционала (2) $F=0$, то граничное условие (28) принимает теперь вид

$$K(T) = 0.$$

Решение уравнения Риккати, удовлетворяющее граничному условию $K(T) = 0$, обозначим через $K(t; 0, T)$. Как следует из результатов Калмана [34], при $F = 0$ для стационарных вполне управляемых систем это решение имеет при $T \rightarrow \infty$ предел

$$\lim_{T \rightarrow \infty} K(t; 0, T) = \hat{K},$$

где \hat{K} — постоянная, симметрическая положительно-определенная матрица, являющаяся решением нелинейного матричного алгебраического уравнения

$$-\hat{K}A - A^*\hat{K} + \hat{K}BR^{-1}B^*\hat{K} - Q = 0.$$

Аналогично (48) оптимальное управление имеет вид

$$u(t) = -R^{-1}B^*\hat{K}x(t).$$

Дифференциальное уравнение движения оптимальной системы будет следующим:

$$\dot{x} = (A - BR^{-1}B^*\hat{K})x,$$

причем оптимальная система *асимптотически устойчива*, то есть

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0.$$

Минимальное значение $J_{\infty}^*(x, t)$ функционала

$$J_{\infty}^*(x, t) = \frac{1}{2} \int_t^{\infty} [\langle x(\xi), Qx(\xi) \rangle + \langle u(\xi), Ru(\xi) \rangle] d\xi$$

будет аналогично (44) следующим:

$$J_{\infty}^*(x, t) = \frac{1}{2} \langle x(t), \hat{K}x(t) \rangle.$$

б) Регулирование выхода системы. Система описывается уравнениями

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu, \\ y &= Cx. \end{aligned}$$

Требуется минимизировать функционал

$$\tilde{J}_{\infty} = \frac{1}{2} \lim_{T \rightarrow \infty} \int_0^T [\langle y(t), Qy(t) \rangle + \langle u(t), Ru(t) \rangle] dt,$$

где Q и R — постоянные, положительно-определенные матрицы. На управление $u(t)$ ограничения не наложены. Предполагается, что рассматриваемая система вполне управляема и вполне наблюдаема, то есть

$$\text{ранг} [B \ AB \ \dots \ A^{n-1}B] = n, \quad \text{ранг} [C^* \ A^*C^* \ \dots \ A^{n-1}C^*] = n.$$

Аналогично предыдущей задаче в предельном случае при $T \rightarrow \infty$ оптимальное управление будет

$$u(t) = -R^{-1}B^* \hat{\mathcal{K}}x(t),$$

где постоянная симметрическая положительно-определенная матрица $\hat{\mathcal{K}}$ есть решение нелинейного матричного алгебраического уравнения

$$-\hat{\mathcal{K}}A - A^* \hat{\mathcal{K}} + \hat{\mathcal{K}}BR^{-1}B^* \hat{\mathcal{K}} - C^*QC = 0.$$

Уравнение движения оптимальной системы

$$\dot{x} = (A - BR^{-1}B^* \hat{\mathcal{K}})x.$$

Оптимальная система *асимптотически устойчива*, то есть

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0.$$

Минимальное значение $\tilde{J}_\infty^*(x, t)$ функционала

$$\tilde{J}_\infty(x, t) = \frac{1}{2} \int_t^\infty [\langle Cx(\xi), QCx(\xi) \rangle + \langle u(\xi), Ru(\xi) \rangle] d\xi$$

будет следующим:

$$\tilde{J}_\infty^*(x, t) = \frac{1}{2} \langle x(t), \hat{\mathcal{K}}x(t) \rangle.$$

4. Задача слежения [34]. Рассмотрим нестационарную линейную систему

$$\left. \begin{aligned} \dot{x} &= A(t)x + B(t)u(t), \\ y &= C(t)x, \end{aligned} \right\} \quad (24.80)$$

где x — n -мерный вектор состояния системы, $u(t)$ — r -мерный вектор управления, $y(t)$ — m -мерный вектор, определяющий собой выход системы, $A(t)$ — $n \times n$ -матрица, $B(t)$ — $n \times r$ -матрица, $C(t)$ — $m \times n$ -матрица. Предполагается, что система (80) вполне наблюдаема, то есть определяемая выражением (70) $n \times n$ -матрица $M(t_0, T)$ является положительно определенной матрицей.

Через $z(t)$ обозначим m -мерный вектор, закон изменения которого во времени задается извне, представляющий собой *желаемый* выход системы. Вектор

$$e(t) = z(t) - y(t) \quad (24.81)$$

является рассогласованием или ошибкой следящей системы.

В предположении, что на управление $u(t)$ ограничения не наложены, требуется минимизировать функционал

$$J_3 = \frac{1}{2} \langle e(T), Fe(T) \rangle + \frac{1}{2} \int_{t_0}^T [\langle e(t), Q(t)e(t) \rangle + \langle u(t), R(t)u(t) \rangle] dt, \quad (24.82)$$

где T — некоторый заданный момент времени. Таким образом, целью управления является удержание рассогласования системы, то есть вектора $e(t)$, вблизи нуля. Матрицы F и $Q(t)$ являются неотрицательно-определенными $m \times m$ -матрицами, а матрица $R(t)$ — положительно-определенная $r \times r$ -матрица.

Подставляя в (82) вместо $e(t)$ выражение

$$e(t) = z(t) - C(t)x(t), \quad (24.83)$$

преобразуем функционал (82) к следующему виду:

$$J_3 = \frac{1}{2} \langle [z(T) - C(T)x(T)], F[z(T) - C(T)x(T)] \rangle + \\ + \frac{1}{2} \int_{t_0}^T \{ \langle [z(t) - C(t)x(t)], Q(t)[z(t) - C(t)x(t)] \rangle + \\ + \langle u(t), R(t)u(t) \rangle \} dt. \quad (24.84)$$

Оптимальное управление $u(t)$ должно доставлять минимум функции $\tilde{\mathcal{H}}$, которая строится аналогично функции \mathcal{H} , определяемой выражением (5). Функция $\tilde{\mathcal{H}}$, соответствующая функционалу (84), имеет следующий вид:

$$\tilde{\mathcal{H}} = \frac{1}{2} \langle [z(t) - C(t)x(t)], Q(t)[z(t) - C(t)x(t)] \rangle + \\ + \frac{1}{2} \langle u(t), R(t)u(t) \rangle + \langle A(t)x(t), p(t) \rangle + \langle B(t)u(t), p(t) \rangle. \quad (24.85)$$

Соотношения (8)–(11) сохраняют свой вид и для рассматриваемой здесь задачи и в соответствии с (11) управление $u(t)$, доставляющее минимум функции $\tilde{\mathcal{H}}$, будет следующим:

$$u(t) = -R^{-1}(t)B^*(t)p(t). \quad (24.86)$$

Подставляя выражение (86) для $u(t)$ в первое уравнение (80), приведем это уравнение к виду

$$\dot{x} = A(t)x - S(t)p, \quad (24.87)$$

где

$$S(t) = B(t)R^{-1}(t)B^*(t). \quad (24.88)$$

Так как

$$\dot{p}_j = -\frac{\partial \tilde{\mathcal{H}}}{\partial x_j} \quad (j = 1, \dots, n),$$

то вектор-функция $p(t)$ будет удовлетворять дифференциальному уравнению

$$\dot{p} = -C^*(t)Q(t)C(t)x - A^*(t)p + C^*(t)Q(t)z(t). \quad (24.89)$$

Обозначая

$$V(t) = C^*(t)Q(t)C(t), \quad W(t) = C^*(t)Q(t), \quad (24.90)$$

можно представить уравнение (89) в таком виде:

$$\dot{p} = -V(t)x - A^*(t)p + W(t)z(t). \quad (24.91)$$

Уравнения (87) и (91) образуют систему векторных дифференциальных уравнений, которую можно записать так:

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{p} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A(t) & -S(t) \\ -V(t) & -A^*(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ p \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ W(t)z(t) \end{bmatrix}. \quad (24.92)$$

Решение системы дифференциальных уравнений (92), ранг которой равен $2n$, должно удовлетворять n начальным значениям, определяемым векторным соотношением

$$[x(t)]_{t=t_0} = x(t_0). \quad (24.93)$$

Для вспомогательных переменных p_j ($j = 1, \dots, n$) в соответствии с (68), (55) и (82) граничные условия определяются соотношением

$$p_j(T) = \left\{ \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\frac{1}{2} \langle e(t), Fe(t) \rangle \right] \right\}_{t=T}. \quad (24.94)$$

Так как

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \langle e(t), Fe(t) \rangle &= \\ &= \frac{1}{2} \langle z(t), Fz(t) \rangle - \langle z(t), FC(t)x(t) \rangle + \frac{1}{2} \langle x(t), C^*(t)FC(t)x(t) \rangle, \end{aligned}$$

то в соответствии с (94) будем иметь для вектор-функции $p(t)$ следующее граничное условие:

$$p(T) = C^*(T)FC(T)x(T) - C^*(T)Fz(T). \quad (24.95)$$

Обозначим теперь через $\tilde{\theta}(t)$ фундаментальную матрицу решений однородного векторного дифференциального уравнения, которое образуется из уравнения (92) при $z(t) \equiv 0$. Через $\tilde{\Omega}(t, \tau)$ обозначим следующую $2n \times 2n$ -матрицу:

$$\tilde{\Omega}(t, \tau) = \tilde{\theta}(t) \tilde{\theta}^{-1}(\tau). \quad (24.96)$$

Решение уравнения (92) будет

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ p(t) \end{bmatrix} = \tilde{\Omega}(t, t_0) \begin{bmatrix} x(t_0) \\ p(t_0) \end{bmatrix} + \int_{t_0}^t \tilde{\Omega}(t, \tau) \begin{bmatrix} 0 \\ W(\tau)z(\tau) \end{bmatrix} d\tau. \quad (24.97)$$

Аналогично (97) при $T > t$ будем иметь

$$\begin{bmatrix} x(T) \\ p(T) \end{bmatrix} = \tilde{\Omega}(T, t) \begin{bmatrix} x(t) \\ p(t) \end{bmatrix} + \int_t^T \tilde{\Omega}(T, \tau) \begin{bmatrix} 0 \\ W(\tau)z(\tau) \end{bmatrix} d\tau \quad (t \in [t_0, T]). \quad (24.98)$$

Представляя $2n \times 2n$ -матрицу $\tilde{\Omega}(T, t)$ в виде блочной матрицы, элементы которой являются $n \times n$ -матрицами:

$$\tilde{\Omega}(T, t) = \begin{bmatrix} \tilde{\Omega}_{11}(T, t) & \tilde{\Omega}_{12}(T, t) \\ \tilde{\Omega}_{21}(T, t) & \tilde{\Omega}_{22}(T, t) \end{bmatrix}, \quad (24.99)$$

можно привести (98) к виду

$$\begin{bmatrix} x(T) \\ p(T) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{Q}_{11}(T, t) x(t) + \tilde{Q}_{12}(T, t) p(t) \\ \tilde{Q}_{21}(T, t) x(t) + \tilde{Q}_{22}(T, t) p(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Gamma_1(t) \\ \Gamma_2(t) \end{bmatrix}, \quad (24.100)$$

где

$$\Gamma_j(t) = \int_t^T \tilde{Q}_{j2}(T, \tau) W(\tau) z(\tau) d\tau \quad (j = 1, 2). \quad (24.101)$$

Из (100) следует, что

$$x(T) = \tilde{Q}_{11}(T, t) x(t) + \tilde{Q}_{12}(T, t) p(t) + \Gamma_1(t), \quad (24.102)$$

$$p(T) = \tilde{Q}_{21}(T, t) x(t) + \tilde{Q}_{22}(T, t) p(t) + \Gamma_2(t). \quad (24.103)$$

Подставляя в (103) вместо $p(T)$ выражение (95), получим следующее соотношение:

$$\begin{aligned} [C^*(T) FC(T) \tilde{Q}_{12}(T, t) - \tilde{Q}_{22}(T, t)] p(t) = \\ = [-C^*(T) FC(T) \tilde{Q}_{11}(T, t) + \tilde{Q}_{12}(T, t)] x(t) - \\ - C^*(T) FC(T) \Gamma_1(t) + \Gamma_2(t) + C^*(T) Fz(T). \end{aligned} \quad (24.104)$$

Так как

$$\begin{aligned} \tilde{Q}_{11}(T, T) = \tilde{Q}_{22}(T, T) = E, \quad \tilde{Q}_{12}(T, T) = \tilde{Q}_{21}(T, T) = 0, \\ \Gamma_1(T) = 0, \quad \Gamma_2(T) = 0, \end{aligned}$$

то при $t = T$ соотношение (104) принимает вид (95)

$$p(T) = C^*(T) FC(T) x(T) - C^*(T) Fz(T).$$

Из соотношения (104) следует, что вектор-функция $p(t)$ может быть представлена в виде

$$p(t) = K(t) x(t) - g(t), \quad (24.105)$$

причем в соответствии с (95)

$$K(T) = C^*(T) FC(T), \quad (24.106)$$

$$g(T) = C^*(T) Fz(T). \quad (24.107)$$

Найдем теперь дифференциальные уравнения, которым удовлетворяют матрица $K(t)$ и вектор $g(t)$. Из (105) следует, что

$$\dot{p}(t) = \dot{K}(t) x(t) + K(t) \dot{x}(t) - \dot{g}(t). \quad (24.108)$$

Уравнение (108) в соответствии с (87) и (105) можно привести к следующему виду:

$$\begin{aligned} \dot{p}(t) = \dot{K}(t) x(t) + K(t) A(t) x(t) - K(t) S(t) K(t) x(t) + \\ + K(t) S(t) g(t) - \dot{g}(t). \end{aligned} \quad (24.109)$$

Исключая \dot{p} из уравнений (109) и (91) и заменяя $p(t)$ выражением (105), найдем следующее соотношение:

$$[\dot{K}(t) + K(t)A(t) + A^*(t)K(t) - K(t)S(t)K(t) + V(t)]x(t) - \{\dot{g}(t) - [K(t)S(t) - A^*(t)]g(t) + W(t)z(t)\} = 0. \quad (24.110)$$

Так как соотношение (110) имеет место при любых $x(t)$, $z(t)$ и t , то должны выполняться условия

$$\dot{K}(t) + K(t)A(t) + A^*(t)K(t) - K(t)S(t)K(t) + V(t) = 0, \quad (24.111)$$

$$\dot{g}(t) - [K(t)S(t) - A^*(t)]g(t) + W(t)z(t) = 0, \quad (24.112)$$

то есть $K(t)$ и $g(t)$ должны быть решениями дифференциальных уравнений (111) и (112).

Заменяя $S(t)$, $V(t)$ и $W(t)$ выражениями (88) и (90), найдем, что матрица $K(t)$ есть решение дифференциального уравнения Риккати

$$\dot{K} = -KA(t) - A^*(t)K + KB(t)R^{-1}(t)B^*(t)K - C^*(t)Q(t)C(t) \quad (t \in [t_0, T]), \quad (24.113)$$

удовлетворяющее граничному условию (106)

$$K(T) = C^*(T)FC(T).$$

Вектор-функция $g(t)$ есть решение дифференциального уравнения

$$\dot{g} = -[A(t) - B(t)R^{-1}(t)B^*(t)K(t)]^*g - C^*(t)Q(t)z(t) \quad (t \in [t_0, T]), \quad (24.114)$$

удовлетворяющее граничному условию (107)

$$g(T) = C^*(T)Fz(T).$$

Дифференциальное уравнение, описывающее закон движения оптимальной системы, в соответствии с (87), (88) и (105) будет иметь следующий вид:

$$\dot{x} = [A(t) - B(t)R^{-1}(t)B^*(t)K(t)]x + B(t)R^{-1}(t)B^*(t)g(t) \quad (24.115) \\ (t \in [t_0, T]).$$

Оптимальное управление $u(t)$ согласно (86) и (105) будет следующим:

$$u(t) = -R^{-1}(t)B^*(t)K(t)x(t) + R^{-1}(t)B^*(t)g(t). \quad (24.116)$$

Заметим, что дифференциальное уравнение (113) не содержит членов, зависящих от входного сигнала $z(t)$. Таким образом, матрица $K(t)$ не будет зависеть от входного сигнала $z(t)$.

Для определения согласно (116) оптимального управления $u(t)$, а также для интегрирования дифференциального уравнения (115) должна быть известна функция $g(t)$, что требует интегрирования дифференциального уравнения (114). Обозначим через $\vartheta(t)$ фундаментальную матрицу решений однородного уравнения, которое образуется из уравнения (114) при $z(t) \equiv 0$. Через $\psi(t, \tau)$ обозначим матрицу

$$\psi(t, \tau) = \vartheta(t) \vartheta^{-1}(\tau). \quad (24.117)$$

При этом решение векторного уравнения (114) будет иметь вид

$$g(T) = \psi(T, t) g(t) - \int_t^T \psi(T, \tau) C^*(\tau) Q(\tau) z(\tau) d\tau \quad (24.118)$$

$$(t \in [t_0, T]).$$

Так как

$$\psi^{-1}(T, t) = \psi(t, T), \quad \psi(t, T) \psi(T, \tau) = \psi(t, \tau),$$

то из (118) найдем

$$g(t) = \psi(t, T) g(T) + \int_t^T \psi(t, \tau) C^*(\tau) Q(\tau) z(\tau) d\tau,$$

или в соответствии с (107)

$$g(t) = \psi(t, T) C^*(T) Fz(T) + \int_t^T \psi(t, \tau) C^*(\tau) Q(\tau) z(\tau) d\tau \quad (24.119)$$

$$(t \in [t_0, T]).$$

Из выражения (119) видно, что определение текущего значения $g(t)$ возможно лишь, если известно, каким будет входной сигнал $z(t)$ на *будущем* отрезке времени $[t, T]$. Следовательно, для возможности определения $g(t)$ на отрезке времени $[t_0, T]$ должен быть уже в момент времени t_0 известен входной сигнал $z(t)$ на *всем будущем* отрезке времени $[t_0, T]$. Необходимость предварительных сведений о течении входного сигнала $z(t)$ обусловлена видом (82) функционала J_3 , который в данной задаче требуется минимизировать.

**§ 25. Преобразование случайных сигналов
линейными системами**

Во многих задачах сигнал, поступающий на вход управляемой системы, представляет собой *реализацию* некоторого *случайного процесса*, причем никаких сведений об этой реализации, помимо сведений о статистических свойствах соответствующего случайного процесса, не имеется. Так, например, может быть известно, что рассматриваемый процесс является гауссовым и даны его среднее значение и корреляционная функция.

При таком объеме сведений о входном сигнале не представляется возможным получение более полной по объему информации о сигнале на выходе системы. Возможно лишь определение статистических свойств сигнала на выходе системы.

Если система описывается линейными дифференциальными уравнениями, то речь идет об определении *статистических свойств интегралов этих дифференциальных уравнений* по заданным статистическим свойствам правых частей уравнений. Решение этой задачи изложено ниже.

Значительно большие трудности представляет задача об определении статистических свойств интегралов линейных дифференциальных уравнений, у которых не только правые части, но и коэффициенты являются случайными процессами (случайными функциями времени).

Решение аналогичных задач для нелинейных дифференциальных уравнений возможно лишь при помощи приближенных методов.

Рассмотрим одномерную линейную систему, передаточная функция которой $\Phi(D)$ (где $D = \frac{d}{dt}$) представляет собой правильную дробь, и обозначим через $k(t)$ функцию веса этой системы. Как показано в § 4, функция $p\Phi(p)$ представляет собой изображение по Карсону — Хевисайду функции $k(t)$:

$$p\Phi(p) \dot{\rightarrow} k(t), \quad (25.1)$$

то есть

$$\Phi(p) = \int_0^{\infty} k(t) e^{-pt} dt. \quad (25.2)$$

Для устойчивой системы несобственный интеграл $\int_{-\infty}^{\infty} k(t) dt$ абсолютно сходится

$$\int_{-\infty}^{\infty} |k(t)| dt < \infty,$$

и преобразование Фурье для функции $k(t)$ будет следующим:

$$\Phi(i\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} k(t) e^{-i\omega t} dt. \quad (25.3)$$

Если обозначить через $\varphi(t)$ входной сигнал, то сигнал $x(t)$ на выходе системы, находившейся в момент $t = t_0$ в покое, будет равен

$$x(t) = \int_{t_0}^t k(t-\tau) \varphi(\tau) d\tau = \int_0^{t-t_0} k(\xi) \varphi(t-\xi) d\xi. \quad (25.4)$$

В предельном случае при $t_0 = -\infty$ имеем

$$x(t) = \lim_{t_0 \rightarrow -\infty} \int_{t_0}^t k(t-\tau) \varphi(\tau) d\tau = \lim_{t_0 \rightarrow -\infty} \int_0^{t-t_0} k(\xi) \varphi(t-\xi) d\xi, \quad (25.5)$$

что для краткости мы условились (§ 1) записывать так:

$$x(t) = \int_{-\infty}^t k(t-\tau) \varphi(\tau) d\tau = \int_0^{\infty} k(\xi) \varphi(t-\xi) d\xi. \quad (25.6)$$

Выражение (6) определяет собой *установившийся процесс* в системе. Так как $k(\tau) = 0$ при $\tau < 0$, то выражение (6) можно представить так:

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} k(t-\tau) \varphi(\tau) d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} k(\xi) \varphi(t-\xi) d\xi. \quad (25.7)$$

Ниже будет предполагаться, что рассматриваемая система *устойчива*. Пусть входной сигнал $\varphi(t)$ является реализацией ограниченного случайного процесса. Так как каждая реализация ограниченного случайного процесса является ограниченной функцией времени, то

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} k(\xi) \varphi(t-\xi) d\xi < \infty \quad (25.8)$$

для каждой реализации случайного процесса $\varphi(t)$. Соотношение (8) представляет собой соотношение между реализациями случайного процесса $\varphi(t)$ на входе системы и реализациями случайного процесса $x(t)$ на выходе системы.

Пусть входной сигнал является реализацией стационарного случайного процесса. Математическое ожидание этого случайного процесса $M[\varphi(t)] = m_\varphi = \text{const}$. Определяемый соотношением (7) установившийся процесс на выходе системы также будет стационарным случайным процессом, для которого

$$M[x(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} k(\xi) M[\varphi(t - \xi)] d\xi = m_\varphi \int_{-\infty}^{\infty} k(\xi) d\xi. \quad (25.9)$$

Далее будем рассматривать стационарные случайные процессы $\varphi(t)$ с нулевыми средними значениями.

По определению корреляционная функция случайного процесса $x(t)$, определяемого выражением (7), будет

$$\begin{aligned} R_x(t_1, t_2) &= M[x(t_1) x(t_2)] = \\ &= M \left[\int_{-\infty}^{\infty} k(\xi) \varphi(t_1 - \xi) d\xi \int_{-\infty}^{\infty} k(\eta) \varphi(t_2 - \eta) d\eta \right]. \end{aligned} \quad (25.10)$$

Операции математического ожидания и интегрирования коммутативны. Поэтому выражение (10) можно представить так:

$$R_x(t_1, t_2) = \int_{-\infty}^{\infty} k(\xi) \int_{-\infty}^{\infty} k(\eta) M[\varphi(t_1 - \xi) \varphi(t_2 - \eta)] d\eta d\xi$$

или

$$R_x(t_1, t_2) = \int_{-\infty}^{\infty} k(\xi) \int_{-\infty}^{\infty} k(\eta) R_\varphi(t_1 - \xi, t_2 - \eta) d\eta d\xi. \quad (25.11)$$

Так как $\varphi(t)$ и $x(t)$ — стационарные случайные процессы, то

$$\left. \begin{aligned} R_\varphi(t_1 - \xi, t_2 - \eta) &= R_\varphi(t_1 - t_2 + \eta - \xi), \\ R_x(t_1, t_2) &= R_x(t_1 - t_2), \end{aligned} \right\} \quad (25.12)$$

и выражение (11) принимает следующий вид:

$$R_x(t_1 - t_2) = \int_{-\infty}^{\infty} k(\xi) \int_{-\infty}^{\infty} k(\eta) R_\varphi(t_1 - t_2 + \eta - \xi) d\eta d\xi \quad (25.13)$$

или

$$R_x(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} k(\xi) \int_{-\infty}^{\infty} k(\eta) R_\varphi(\tau + \eta - \xi) d\eta d\xi. \quad (25.14)$$

В трудах А. Я. Хинчина показано, что спектральная плотность и корреляционная функция стационарного случайного процесса $f(t)$ связаны соотношениями

$$\left. \begin{aligned} S_f(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} R_f(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau, \\ R_f(\tau) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_f(\omega) e^{i\omega\tau} d\omega. \end{aligned} \right\} \quad (25.15)$$

В соответствии с (14) и (15) спектральная плотность стационарного случайного процесса $x(t)$ будет

$$S_x(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} k(\xi) \int_{-\infty}^{\infty} k(\eta) \int_{-\infty}^{\infty} R_\varphi(\tau + \eta - \xi) e^{-i\omega\tau} d\tau d\eta d\xi. \quad (25.16)$$

Вводя новую переменную

$$\gamma = \tau + \eta - \xi, \quad (25.17)$$

приведем выражение (16) к виду

$$S_x(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} k(\xi) e^{-i\omega\xi} d\xi \int_{-\infty}^{\infty} k(\eta) e^{i\omega\eta} d\eta \int_{-\infty}^{\infty} R_\varphi(\gamma) e^{-i\omega\gamma} d\gamma$$

или в соответствии с (3)

$$S_x(\omega) = \Phi(i\omega) \Phi(-i\omega) \int_{-\infty}^{\infty} R_\varphi(\gamma) e^{-i\omega\gamma} d\gamma. \quad (25.18)$$

Из (18) и (15) следует, что спектральные плотности стационарных случайных процессов на выходе и входе устойчивой линейной системы связаны соотношением

$$S_x(\omega) = |\Phi(i\omega)|^2 S_\varphi(\omega). \quad (25.19)$$

Так как $x(t)$ — стационарный случайный процесс с нулевым средним значением, то дисперсия этого случайного процесса имеет вид

$$M[x^2(t)] = R_x(0). \quad (25.20)$$

В соответствии с (15) и (20)

$$M[x^2(t)] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_x(\omega) d\omega. \quad (25.21)$$

Согласно (19) можно представить выражение (21) в виде

$$\overline{x^2} = M[x^2(t)] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |\Phi(i\omega)|^2 S_\varphi(\omega) d\omega. \quad (25.22)$$

Для стационарного случайного процесса $\zeta(t)$ (с нулевым средним значением) типа *белого шума*

$$R_\zeta(\tau) = F\delta(\tau), \quad (25.23)$$

где $\delta(\tau)$ — дельта-функция Дирака, а F — интенсивность шума. Спектральная плотность этого процесса согласно (15) будет

$$S_\zeta(\omega) = F \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega\tau} \delta(\tau) d\tau = F = \text{const}, \quad (25.24)$$

что может быть принято в качестве определения белого шума. Условие (24) означает, что мощность парциальных составляющих случайного процесса $\zeta(t)$ для *любых* частот одна и та же. Поэтому белый шум является наиболее интенсивным видом помехи.

Если входной сигнал $\varphi(t)$ представляет собой стационарный случайный процесс типа белого шума со спектральной плотностью

$$S_\varphi(\omega) = F, \quad (25.25)$$

то в соответствии с (22) дисперсия стационарного случайного процесса $x(t)$ на выходе системы будет

$$\overline{x^2} = \frac{1}{2\pi} F \int_{-\infty}^{\infty} |\Phi(i\omega)|^2 d\omega.$$

Согласно (20) и (14)

$$\overline{x^2} = R_x(0) = F \int_{-\infty}^{\infty} k(\xi) \int_{-\infty}^{\infty} k(\eta) \delta(\eta - \xi) d\eta d\xi = F \int_{-\infty}^{\infty} [k(\xi)]^2 d\xi.$$

Таким образом, дисперсия стационарного случайного процесса $x(t)$ на выходе системы в случае, когда входной сигнал $\varphi(t)$ является белым шумом, имеет следующий вид:

$$\overline{x^2} = F \int_{-\infty}^{\infty} [k(\omega)]^2 d\omega = \frac{F}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |\Phi(i\omega)|^2 d\omega. \quad (25.26)$$

Обозначая

$$|\Phi(i\omega)| = A(\omega), \quad (25.27)$$

будем иметь

$$\Phi(i\omega) = A(\omega) e^{i\psi(\omega)}. \quad (25.28)$$

Здесь $A(\omega)$ — амплитудная частотная, а $\psi(\omega)$ — фазовая частотная характеристика системы.

Из (26) и (28) следует, что

$$\overline{x^2} = \frac{F}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} [A(\omega)]^2 d\omega. \quad (25.29)$$

Если обозначить через Δf величину

$$\Delta f = \frac{\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} [A(\omega)]^2 d\omega}{A_{\max}^2}, \quad (25.30)$$

то выражение (29) примет вид

$$\overline{x^2} = F A_{\max}^2 \Delta f. \quad (25.31)$$

Величина Δf называется *полосой пропускания* системы.

Найдем теперь взаимную корреляционную функцию и взаимную спектральную плотность стационарных случайных процессов $x(t)$ и $\varphi(t)$, из которых $\varphi(t)$ представляет собой входной сигнал, а $x(t)$ — сигнал на выходе линейной системы. Передаточная функция системы равна $\Phi(D)$, где $D = \frac{d}{dt}$.

По определению *взаимная корреляционная функция* будет

$$R_{x\varphi}(t_1, t_2) = M[x(t_1)\varphi(t_2)]. \quad (25.32)$$

Так как согласно (7) при $t_0 \rightarrow -\infty$ сигнал $x(t_1)$ на выходе системы имеет вид

$$x(t_1) = \int_{-\infty}^{\infty} k(\xi)\varphi(t_1 - \xi) d\xi, \quad (25.33)$$

то

$$\begin{aligned} R_{x\varphi}(t_1, t_2) &= M \left[\int_{-\infty}^{\infty} k(\xi) \varphi(t_1 - \xi) d\xi \varphi(t_2) \right] = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} k(\xi) M[\varphi(t_1 - \xi) \varphi(t_2)] d\xi = \int_{-\infty}^{\infty} k(\xi) R_{\varphi}(t_1 - t_2 - \xi) d\xi. \end{aligned} \quad (25.34)$$

Таким образом, для стационарных случайных процессов

$$R_{x\varphi}(t_1, t_2) = R_{x\varphi}(t_1 - t_2) = R_{x\varphi}(\tau), \quad (25.35)$$

где

$$\tau = t_1 - t_2, \quad (25.36)$$

причем в соответствии с (34)

$$R_{x\varphi}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} k(\xi) R_{\varphi}(\tau - \xi) d\xi. \quad (25.37)$$

Аналогично

$$\begin{aligned} R_{\varphi x}(t_1, t_2) &= M[\varphi(t_1) x(t_2)] = M \left[\varphi(t_1) \int_{-\infty}^{\infty} k(\xi) \varphi(t_2 - \xi) d\xi \right] = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} k(\xi) M[\varphi(t_1) \varphi(t_2 - \xi)] d\xi = \int_{-\infty}^{\infty} k(\xi) R_{\varphi}(t_1 - t_2 + \xi) d\xi. \end{aligned} \quad (25.38)$$

Таким образом,

$$R_{\varphi x}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} k(\xi) R_{\varphi}(\tau + \xi) d\xi, \quad (25.39)$$

где, как и выше (36),

$$\tau = t_1 - t_2.$$

Взаимная спектральная плотность $S_{x\varphi}(\omega)$ согласно (15) будет

$$S_{x\varphi}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} R_{x\varphi}(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau. \quad (25.40)$$

В соответствии с (37) выражение (40) принимает вид

$$S_{x\varphi}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} k(\xi) \int_{-\infty}^{\infty} R_{\varphi}(\tau - \xi) e^{-i\omega\tau} d\tau d\xi. \quad (25.41)$$

Вводя новую переменную

$$v = \tau - \xi, \quad (25.42)$$

приведем выражение (41) к виду

$$S_{x\varphi}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} k(\xi) e^{-i\omega\xi} d\xi \int_{-\infty}^{\infty} R_{\varphi}(v) e^{-i\omega v} dv.$$

В соответствии с (3) и (15) это выражение можно записать так:

$$S_{x\varphi}(\omega) = \Phi(i\omega) S_{\varphi}(\omega). \quad (25.43)$$

Аналогично

$$S_{\varphi x}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} R_{\varphi x}(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} k(\xi) \int_{-\infty}^{\infty} R_{\varphi}(\tau + \xi) e^{-i\omega\tau} d\tau d\xi. \quad (25.44)$$

Вводя новую переменную

$$\mu = \tau + \xi, \quad (25.45)$$

можно привести выражение (44) к виду

$$S_{\varphi x}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} k(\xi) e^{i\omega\xi} d\xi \int_{-\infty}^{\infty} R_{\varphi}(\mu) e^{-i\omega\mu} d\mu \quad (25.46)$$

или в соответствии с (3) и (15)

$$S_{\varphi x}(\omega) = \Phi(-i\omega) S_{\varphi}(\omega). \quad (25.47)$$

Так как $S_{\varphi}(\omega) = S_{\varphi}(-\omega)$, то из выражений (43) и (47) следует, что

$$S_{\varphi x}(\omega) = S_{x\varphi}(-\omega). \quad (25.48)$$

Учитывая, что

$$R_{\varphi}(\sigma) = R_{\varphi}(-\sigma),$$

найдем из (37)

$$R_{x\varphi}(-\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} k(\xi) R_{\varphi}(\tau + \xi) d\xi,$$

что в соответствии с (39) приводит к соотношению

$$R_{\varphi x}(\tau) = R_{x\varphi}(-\tau). \quad (25.49)$$

Найдем еще взаимную корреляционную функцию $R_{x\rho}(\tau)$ стационарных случайных процессов $x(t)$ и $\rho(t)$ (с нулевыми средними значениями), где $x(t)$ определяется выражением (8).

По определению

$$\begin{aligned} R_{x\rho}(t_1, t_2) &= M[x(t_1)\rho(t_2)] = M\left[\int_{-\infty}^{\infty} k(\xi)\varphi(t_1 - \xi)d\xi\rho(t_2)\right] = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} k(\xi)M[\varphi(t_1 - \xi)\rho(t_2)]d\xi = \int_{-\infty}^{\infty} k(\xi)R_{\varphi\rho}(t_1 - t_2 - \xi)d\xi. \end{aligned} \quad (25.50)$$

Обозначая, как и выше (36),

$$\tau = t_1 - t_2,$$

будем иметь

$$R_{x\rho}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} k(\xi)R_{\varphi\rho}(\tau - \xi)d\xi. \quad (25.51)$$

Взаимная спектральная плотность $S_{x\rho}$ будет

$$S_{x\rho}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} R_{x\rho}(\tau)e^{-i\omega\tau}d\tau$$

или согласно (51)

$$S_{x\rho}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} k(\xi)\int_{-\infty}^{\infty} R_{\varphi\rho}(\tau - \xi)e^{-i\omega\tau}d\tau d\xi. \quad (25.52)$$

Вводя, как и выше (42), новую переменную

$$\nu = \tau - \xi,$$

получим

$$S_{x\rho}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} k(\xi)e^{-i\omega\xi}d\xi \int_{-\infty}^{\infty} R_{\varphi\rho}(\nu)e^{-i\omega\nu}d\nu \quad (25.53)$$

или

$$S_{x\rho}(\omega) = \Phi(i\omega)S_{\varphi\rho}(\omega). \quad (25.54)$$

Учитывая теперь, что согласно (49) и (48)

$$R_{\rho x}(\tau) = R_{x\rho}(-\tau),$$

$$S_{\rho x}(\omega) = S_{x\rho}(-\omega),$$

получим в соответствии с (51) и (54)

$$R_{\rho x}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} k(\xi)R_{\varphi\rho}(\tau + \xi)d\xi, \quad (25.55)$$

$$S_{\rho x}(\omega) = \Phi(-i\omega)S_{\varphi\rho}(\omega). \quad (25.56)$$

§ 26. Прогноз и фильтрация одномерных случайных процессов

1. Метод А. Н. Колмогорова и Н. Винера. Стационарные случайные процессы. Рассмотрим одномерную линейную управляемую систему, на вход которой поступает сигнал

$$\varphi(t) = h(t) + f(t), \quad (26.1)$$

где $h(t)$ — полезный сигнал, а $f(t)$ — помеха. Будем считать, что $h(t)$ и $f(t)$ — *стационарные* случайные процессы с нулевыми средними значениями. Назначением системы является возможно более точное преобразование (в частном случае — воспроизведение) полезного сигнала $h(t)$.

Передаточную функцию системы обозначим через $Y(D)$, а ее функцию веса через $k(t)$.

Согласно (25.7) сигнал на выходе системы (в предположении, что начальный момент времени $t_0 \rightarrow -\infty$) будет иметь следующий вид:

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t - \tau) k(\tau) d\tau. \quad (26.2)$$

Пусть система предназначена для прогноза полезного входного сигнала. Для осуществления прогноза потребуем, чтобы сигнал $x(t)$ на выходе системы в момент времени t представлял собой наилучшее (в смысле минимума дисперсии ошибки) приближение к $h(t + \eta)$, где $\eta = \text{const}$. При $\eta > 0$ имеем задачу прогноза. При $\eta = 0$ рассматриваемая задача является задачей *фильтрации* входного сигнала [20, 40].

Ошибка приближения сигнала $x(t)$ на выходе системы к $h(t + \eta)$ будет

$$\varepsilon(t) = h(t + \eta) - x(t) \quad (26.3)$$

или в соответствии с (2)

$$\varepsilon(t) = h(t + \eta) - \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t - \tau) k(\tau) d\tau. \quad (26.4)$$

Дисперсия ошибки приближения будет

$$M[\varepsilon^2] = M \left\{ \left[h(t + \eta) - \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t - \tau) k(\tau) d\tau \right]^2 \right\}. \quad (26.5)$$

Будем искать теперь функцию веса $k(t)$, которая доставляет минимум функционалу $M[\varepsilon^2]$. Указанную функцию веса будем считать *оптимальной функцией веса*, а соответствующую ей систему оптимальной линейной системой.

Согласно (5)

$$M[\varepsilon^2] = M \left\{ h^2(t + \eta) - 2h(t + \eta) \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t - \tau) k(\tau) d\tau + \left[\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t - \tau) k(\tau) d\tau \right]^2 \right\}$$

или

$$M[\varepsilon^2] = M[h^2(t + \eta)] - 2 \int_{-\infty}^{\infty} k(\lambda) M[h(t + \eta)\varphi(t - \lambda)] d\lambda + \int_{-\infty}^{\infty} k(\lambda) \int_{-\infty}^{\infty} k(\vartheta) M[\varphi(t - \lambda)\varphi(t - \vartheta)] d\vartheta d\lambda. \quad (26.6)$$

Так как случайные процессы $h(t)$ и $\varphi(t)$ являются стационарными случайными процессами с нулевыми средними значениями, то выражение (6) принимает вид

$$M[\varepsilon^2] = R_h(0) - 2 \int_{-\infty}^{\infty} k(\lambda) R_{h\varphi}(\lambda + \eta) d\lambda + \int_{-\infty}^{\infty} k(\lambda) \int_{-\infty}^{\infty} k(\vartheta) R_{\varphi}(\lambda - \vartheta) d\vartheta d\lambda. \quad (26.7)$$

Корреляционные функции $R_h(t)$, $R_{\varphi}(t)$ и $R_{h\varphi}(t)$ предполагаются известными.

Найдем теперь необходимое условие, которому должна удовлетворять функция $k(t)$ для того, чтобы она доставляла минимум функционалу

$$I = M[\varepsilon^2]. \quad (26.8)$$

Для этого заменим $k(t)$ функцией $k(t) + \gamma \kappa(t)$, где γ — некоторый произвольный параметр, не зависящий от t , а $\kappa(t)$ — произвольная функция, которая аналогично функции $k(t)$, удовлетворяет требованию

$$\kappa(-t) = 0.$$

Значение, принимаемое функционалом I при замене $k(t)$ функцией $k(t) + \gamma \kappa(t)$, обозначим через $I + \delta I$. В соответствии с (7) будем иметь

$$I + \delta I = R_h(0) - 2 \int_{-\infty}^{\infty} [k(\lambda) + \gamma \kappa(\lambda)] R_{h\varphi}(\lambda + \eta) d\lambda + \\ + \int_{-\infty}^{\infty} [k(\lambda) + \gamma \kappa(\lambda)] \int_{-\infty}^{\infty} [k(\vartheta) + \gamma \kappa(\vartheta)] R_{\varphi}(\lambda - \vartheta) d\vartheta d\lambda. \quad (26.9)$$

Последнее слагаемое в выражении (9) можно переписать так:

$$Q = \int_{-\infty}^{\infty} k(\lambda) \int_{-\infty}^{\infty} k(\vartheta) R_{\varphi}(\lambda - \vartheta) d\vartheta d\lambda + \\ + \gamma \int_{-\infty}^{\infty} \kappa(\lambda) \int_{-\infty}^{\infty} k(\vartheta) R_{\varphi}(\lambda - \vartheta) d\vartheta d\lambda + \\ + \gamma \int_{-\infty}^{\infty} k(\lambda) \int_{-\infty}^{\infty} \kappa(\vartheta) R_{\varphi}(\lambda - \vartheta) d\vartheta d\lambda + \\ + \gamma^2 \int_{-\infty}^{\infty} \kappa(\lambda) \int_{-\infty}^{\infty} \kappa(\vartheta) R_{\varphi}(\lambda - \vartheta) d\vartheta d\lambda. \quad (26.10)$$

Второе и третье слагаемые в выражении (10) совпадают в силу четности функции $R_{\varphi}(\tau)$.

Через I_2 обозначим множитель при γ^2 в последнем слагаемом в выражении (10)

$$I_2 = \int_{-\infty}^{\infty} \kappa(\lambda) \int_{-\infty}^{\infty} \kappa(\vartheta) R_{\varphi}(\lambda - \vartheta) d\vartheta d\lambda. \quad (26.11)$$

Аналогично последнему слагаемому в выражении (7), можно представить (11) в таком виде:

$$I_2 = M \left\{ \left[\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t - \tau) \kappa(\tau) d\tau \right]^2 \right\}. \quad (26.12)$$

Очевидно, что

$$I_2 > 0. \quad (26.13)$$

Таким образом, выражение (9) можно привести к следующему виду:

$$I + \delta I = I - 2\gamma I_1 + \gamma^2 I_2, \quad (26.14)$$

где

$$I_1 = \int_{-\infty}^{\infty} R_{h\varphi}(\lambda + \eta) \kappa(\lambda) d\lambda - \int_{-\infty}^{\infty} \kappa(\lambda) \int_{-\infty}^{\infty} k(\vartheta) R_{\varphi}(\lambda - \vartheta) d\vartheta d\lambda. \quad (26.15)$$

Учитывая, что

$$k(-t) = 0, \quad \kappa(-t) = 0, \quad (26.16)$$

можно выражение (15) переписать так:

$$I_1 = \int_0^{\infty} \kappa(\lambda) \left[R_{h\varphi}(\lambda + \eta) - \int_0^{\infty} k(\vartheta) R_{\varphi}(\lambda - \vartheta) d\vartheta \right] d\lambda. \quad (26.17)$$

Необходимое условие минимума функционала (7) имеет вид

$$\left[\frac{\partial}{\partial \gamma} (I + \delta I) \right]_{\gamma=0} = 0 \quad \text{при любых } \kappa(\lambda). \quad (26.18)$$

В соответствии с (14) условие (18) принимает вид

$$I_1 = 0. \quad (26.19)$$

Нетрудно видеть, что условие (19) является не только необходимым, но и достаточным условием минимума функционала I . Для этого надо показать, что при любом выборе функции $\kappa(t)$ будет иметь место неравенство

$$(I + \delta I)_{I_1=0} > I.$$

Из выражения (14) следует, что

$$(I + \delta I)_{I_1=0} = I + \gamma^2 I_2 > I,$$

так как согласно (12) $I_2 > 0$.

Таким образом, доказано, что условие (19) является необходимым и достаточным условием минимума дисперсии $M[e^2]$.

Так как условие (19) должно выполняться при любых функциях $\kappa(\lambda)$, то в соответствии с (17) условие минимума дисперсии $M[e^2]$ принимает вид

$$R_{h\varphi}(\lambda + \eta) - \int_0^{\infty} R_{\varphi}(\lambda - \vartheta) k(\vartheta) d\vartheta = 0 \quad (\lambda \geq 0). \quad (26.20)$$

Таким образом, функция веса $k(t)$, удовлетворяющая интегральному уравнению (20), обеспечивает минимально возможное значение дисперсии ошибки $M[e^2]$.

Интегральное уравнение (20) получено Н. Винером [20]. Чтобы согласовать с обозначениями Винера, заменим в (20) переменную интеграцию ϑ на λ . Аргумент корреляционных

функций $R_{h\varphi}$ и R_φ , который в (20) обозначен через λ , заменим на τ . Уравнение (20) примет тогда вид

$$R_{h\varphi}(\tau + \eta) - \int_0^\infty R_\varphi(\tau - \lambda) k(\lambda) d\lambda = 0 \quad (\tau \geq 0). \quad (26.21)$$

В задаче *фильтрации*, то есть при

$$\eta = 0, \quad (26.22)$$

оптимальная функция веса $k(t)$ должна в соответствии с (21) удовлетворять интегральному уравнению

$$R_{h\varphi}(\tau) - \int_0^\infty R_\varphi(\tau - \lambda) k(\lambda) d\lambda = 0 \quad (\tau \geq 0). \quad (26.23)$$

2. Решение интегрального уравнения, определяющего функцию веса оптимальной системы. Спектральную плотность входного сигнала $\varphi(t)$ обозначим через $S_\varphi(\omega)$. Так как $S_\varphi(\omega)$ является четной положительной функцией от ω :

$$S_\varphi(\omega) = S_\varphi(-\omega) > 0, \quad (26.24)$$

то ее можно представить в виде произведения двух комплексно-сопряженных функций

$$S_\varphi(\omega) = \Psi(i\omega) \overline{\Psi(i\omega)} = |\Psi(i\omega)|^2, \quad (26.25)$$

где функция $\Psi(p)$ (которая образуется из $\Psi(i\omega)$ при замене аргумента $i\omega$ на p) обладает тем свойством, что *все ее нули и полюсы* расположены на плоскости комплексного переменного p , *левее мнимой оси*. Преобразование (25) называется *факторизацией* функции $S_\varphi(\omega)$. В случае, когда $S_\varphi(\omega)$ является дробно-рациональной функцией от ω , выполнение преобразования (25) не вызывает затруднений.

В силу указанных здесь свойств функции $\Psi(p)$ система с передаточной функцией $\frac{1}{\Psi(D)}$, где $D = \frac{d}{dt}$, будет *устойчивой*.

Представим себе, что искомая оптимальная система состоит из двух последовательно соединенных линейных систем с передаточными функциями $\frac{1}{\Psi(D)}$ и $L(D)$ соответственно [76].

Спектральная плотность сигнала $\sigma(t)$ на выходе системы с передаточной функцией $\frac{1}{\Psi(D)}$ будет в соответствии с (25.19) и (25) следующей:

$$S_\sigma(\omega) = \frac{1}{|\Psi(i\omega)|^2} S_\varphi(\omega) = 1, \quad (26.26)$$

то есть сигнал $\sigma(t)$ будет стационарным случайным процессом типа белого шума с единичной спектральной плотностью. Корреляционная функция случайного процесса $\sigma(t)$ согласно (25.23) и (26) будет

$$R_{\sigma}(\tau) = \delta(\tau), \quad (26.27)$$

где $\delta(\tau)$ — дельта-функция Дирака.

Через $l(t)$ обозначим функцию веса показанной на рис. 26.1 системы с передаточной функцией $L(D)$. В соответствии с (25.1) будем иметь

$$pL(p) \dashrightarrow l(t). \quad (26.28)$$

Как следует из схемы, изображенной на рис. 26.1, передаточная функция $Y(D)$ искомой оптимальной системы будет

$$Y(D) = \frac{1}{\Psi(D)} L(D). \quad (26.29)$$

Для того чтобы функция $Y(D)$ была передаточной функцией системы, оптимально преобразующей сигнал $\varphi(t)$, необходимо,

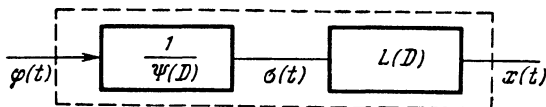


Рис. 26.1.

чтобы система с передаточной функцией $L(D)$ оптимальным образом преобразовывала сигнал $\sigma(t)$. Для этого функция $l(t)$ должна удовлетворять интегральному уравнению, которое в соответствии с (23) будет иметь вид

$$R_{h\sigma}(\tau) = \int_0^{\infty} R_{\sigma}(\tau - \lambda) l(\lambda) d\lambda \quad (\tau \geq 0). \quad (26.30)$$

Так как согласно (27)

$$R_{\sigma}(\tau - \lambda) = \delta(\tau - \lambda),$$

то уравнение (30) принимает вид

$$R_{h\sigma}(\tau) = \int_0^{\infty} l(\lambda) \delta(\tau - \lambda) d\lambda \quad (\tau \geq 0),$$

откуда следует, что

$$l(\tau) = R_{h\sigma}(\tau). \quad (26.31)$$

Согласно (25.15)

$$R_{h\sigma}(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_{h\sigma}(\omega) e^{i\omega\tau} d\omega. \quad (26.32)$$

В соответствии с (25.56), учитывая, что $\sigma(t)$ — выход, а $\varphi(t)$ — вход системы с передаточной функцией $\frac{1}{\Psi(D)}$, можно представить спектральную плотность $S_{h\sigma}(\omega)$ в следующем виде:

$$S_{h\sigma}(\omega) = \frac{1}{\Psi(-i\omega)} S_{h\varphi}(\omega). \quad (26.33)$$

Из (31), (32) и (33) следует, что

$$l(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{S_{h\varphi}(\omega)}{\Psi(-i\omega)} e^{i\omega\tau} d\omega. \quad (26.34)$$

Согласно (28)

$$L(p) = \int_0^{\infty} l(\tau) e^{-p\tau} d\tau, \quad (26.35)$$

откуда в соответствии с (34) найдем

$$L(p) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} e^{-p\tau} d\tau \int_{-\infty}^{\infty} \frac{S_{h\varphi}(\omega)}{\Psi(-i\omega)} e^{i\omega\tau} d\omega. \quad (26.36)$$

Передаточная функция $Y(D)$ (где $D = \frac{d}{dt}$) искомой оптимальной системы в соответствии с (29) и (36) будет определена следующим выражением:

$$Y(p) = \frac{1}{2\pi\Psi(p)} \int_0^{\infty} e^{-p\tau} d\tau \int_{-\infty}^{\infty} \frac{S_{h\varphi}(\omega)}{\Psi(-i\omega)} e^{i\omega\tau} d\omega. \quad (26.37)$$

В случае, когда спектральные плотности $S_{\varphi}(\omega)$ и $S_{h\varphi}(\omega)$ являются *дробно-рациональными* функциями от ω , передаточная функция $Y(D)$ может быть легко вычислена. В этом случае в соответствии с (25)

$$S_{\varphi}(\omega) = \Psi(i\omega) \Psi(-i\omega),$$

причем, как уже сказано выше, у функции $\Psi(p)$ *все нули и полюсы* расположены на плоскости комплексного переменного p *левее мнимой оси*.

Обозначим теперь

$$K(i\omega) = \frac{S_{h\varphi}(\omega)}{\Psi(-i\omega)} \quad (26.38)$$

и рассмотрим функцию $K(p)$, которая образуется из $K(i\omega)$ при замене аргумента $i\omega$ на p . Так как $K(p)$ — дробно-рациональная функция от p , то ее можно разложить на сумму элементарных дробей и представить в виде

$$K(p) = K^+(p) + K^-(p), \quad (26.39)$$

где функция $K^+(p)$ имеет все полюсы в левой полуплоскости комплексного переменного p , а функция $K^-(p)$ имеет все полюсы в правой полуплоскости p . Интеграл

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{S_{h\varphi}(\omega)}{\Psi(-i\omega)} e^{i\omega t} d\omega$$

равен сумме вычетов функции $K(i\xi)e^{i\xi t}$ по всем особым точкам функции $K(i\xi)$, расположенным в верхней полуплоскости комплексного переменного ξ , то есть представляет собой оригинал $F(t)$, изображением которого является функция $K^+(i\xi)$.

Поскольку $K^+(i\xi)$ есть изображение функции $F(t)$, то

$$\int_0^{\infty} F(t) e^{-i\omega t} dt = K^+(i\omega),$$

и, таким образом, выражение (37) принимает вид

$$Y(i\omega) = \frac{K^+(i\omega)}{\Psi(i\omega)},$$

откуда следует, что

$$Y(p) = \frac{K^+(p)}{\Psi(p)}. \quad (26.40)$$

Выражение (40) определяет собой передаточную функцию оптимальной системы в случае, когда спектральные плотности $S_{\varphi}(\omega)$ и $S_{h\varphi}(\omega)$ являются дробно-рациональными функциями от ω .

3. Нестационарные случайные процессы. Интегральное уравнение для оптимальной функции веса. Пусть на вход одномерной нестационарной линейной системы подается нестационарный случайный процесс $\xi(t)$. Через $\theta(t, \tau)$ обозначим функцию веса этой системы. Сигнал на выходе системы будет

$$\xi(t) = \theta(t, t_0) \xi(t_0) + \int_{t_0}^t \theta(t, \tau) \xi(\tau) d\tau. \quad (26.41)$$

При

$$\xi(t_0) = 0 \quad (26.42)$$

будем иметь

$$\xi(t) = \int_{t_0}^t \theta(t, \tau) \zeta(\tau) d\tau. \quad (26.43)$$

Через $\mu(t)$ обозначим сигнал, который желательно получить на выходе системы (желаемый сигнал). Если, например, $\zeta(t) = m(t) + n(t)$, где $m(t)$ — полезный сигнал, а $n(t)$ — помехи, то желаемый сигнал может иметь вид $\mu(t) = m(t)$ или представлять собой некоторое заданное преобразование полезного сигнала $m(t)$.

Через $e(t)$ обозначим ошибку в воспроизведении желаемого сигнала:

$$e(t) = \mu(t) - \xi(t) \quad (26.44)$$

или, в соответствии с (43),

$$e(t) = \mu(t) - \int_{t_0}^t \theta(t, \tau) \zeta(\tau) d\tau. \quad (26.45)$$

Среднее значение $e^2(t)$ будет

$$I(t) = M[e^2(t)] = M \left\{ \left[\mu(t) - \int_{t_0}^t \theta(t, \tau) \zeta(\tau) d\tau \right]^2 \right\} \quad (26.46)$$

или

$$I(t) = M[\mu^2(t)] - 2M \left[\mu(t) \int_{t_0}^t \theta(t, \tau) \zeta(\tau) d\tau \right] + \\ + M \left[\int_{t_0}^t \theta(t, \tau) \zeta(\tau) d\tau \int_{t_0}^t \theta(t, \sigma) \zeta(\sigma) d\sigma \right]. \quad (26.47)$$

Полагая, что $\mu(t)$ и $\zeta(t)$ — случайные процессы с нулевыми средними значениями, и обозначая через

$$\left. \begin{aligned} \Phi_{\mu\mu}(\tau, \sigma) &= M[\mu(\tau)\mu(\sigma)], \\ \Phi_{\mu\zeta}(\tau, \sigma) &= M[\mu(\tau)\zeta(\sigma)], \\ \Phi_{\zeta\zeta}(\tau, \sigma) &= M[\zeta(\tau)\zeta(\sigma)] \end{aligned} \right\} \quad (26.48)$$

корреляционные функции, которые определены на множестве соответствующих случайных функций, можно представить

выражение (47) в следующем виде:

$$I(t) = \varphi_{\mu\mu}(t, t) - 2 \int_{t_0}^t \vartheta(t, \tau) \varphi_{\mu\xi}(t, \tau) d\tau + \\ + \int_{t_0}^t \vartheta(t, \tau) \int_{t_0}^t \vartheta(t, \sigma) \varphi_{\xi\xi}(\tau, \sigma) d\sigma d\tau. \quad (26.49)$$

Величина $I(t)$, представляющая собой дисперсию ошибки, зависит от вида функции веса системы, то есть представляет собой функционал, который определен на классе функций веса линейных нестационарных систем. Если $\vartheta(t, \tau)$ является оптимальной функцией веса, то есть доставляет минимум функционалу $I(t)$, то это означает, что при любой другой функции веса $\vartheta(t, \tau) + \gamma h(t, \tau)$ (где γ — произвольный параметр, не зависящий от t и τ) дисперсия ошибки будет $I(t) + \delta I(t) > I(t)$. В соответствии с (49)

$$I(t) + \delta I(t) = \varphi_{\mu\mu}(t, t) - 2 \int_{t_0}^t \vartheta(t, \tau) \varphi_{\mu\xi}(t, \tau) d\tau - \\ - 2\gamma \int_{t_0}^t h(t, \tau) \varphi_{\mu\xi}(t, \tau) d\tau + \\ + \int_{t_0}^t [\vartheta(t, \tau) + \gamma h(t, \tau)] \int_{t_0}^t [\vartheta(t, \sigma) + \gamma h(t, \sigma)] \varphi_{\xi\xi}(\tau, \sigma) d\sigma d\tau. \quad (26.50)$$

Последнее слагаемое в правой части выражения (50) можно переписать так:

$$Q(t) = \int_{t_0}^t \vartheta(t, \tau) \int_{t_0}^t \vartheta(t, \sigma) \varphi_{\xi\xi}(\tau, \sigma) d\sigma d\tau + \\ + \gamma \int_{t_0}^t h(t, \tau) \int_{t_0}^t \vartheta(t, \sigma) \varphi_{\xi\xi}(\tau, \sigma) d\sigma d\tau + \\ + \gamma \int_{t_0}^t \vartheta(t, \tau) \int_{t_0}^t h(t, \sigma) \varphi_{\xi\xi}(\tau, \sigma) d\sigma d\tau + \\ + \gamma^2 \int_{t_0}^t h(t, \tau) \int_{t_0}^t h(t, \sigma) \varphi_{\xi\xi}(\tau, \sigma) d\sigma d\tau. \quad (26.51)$$

Так как

$$\varphi_{\xi\xi}(\tau, \sigma) = \varphi_{\xi\xi}(\sigma, \tau),$$

то предпоследнее слагаемое в правой части выражения (51) можно представить так:

$$\int_{t_0}^t \Theta(t, \tau) \int_{t_0}^t h(t, \sigma) \varphi_{\zeta\zeta}(\tau, \sigma) d\sigma d\tau = \\ = \int_{t_0}^t h(t, \sigma) \int_{t_0}^t \Theta(t, \tau) \varphi_{\zeta\zeta}(\sigma, \tau) d\tau d\sigma. \quad (26.52)$$

Обозначим теперь

$$I_1(t) = \int_{t_0}^t h(t, \sigma) \varphi_{\mu\zeta}(t, \sigma) d\sigma - \int_{t_0}^t h(t, \sigma) \int_{t_0}^t \Theta(t, \tau) \varphi_{\zeta\zeta}(\sigma, \tau) d\tau d\sigma$$

или

$$I_1(t) = \int_{t_0}^t h(t, \sigma) \left[\varphi_{\mu\zeta}(t, \sigma) - \int_{t_0}^t \Theta(t, \tau) \varphi_{\zeta\zeta}(\sigma, \tau) d\tau \right] d\sigma. \quad (26.53)$$

Через $I_2(t)$ обозначим следующую функцию:

$$I_2(t) = \int_{t_0}^t h(t, \tau) \int_{t_0}^t h(t, \sigma) \varphi_{\zeta\zeta}(\tau, \sigma) d\sigma d\tau. \quad (26.54)$$

Выражение (54) можно переписать так:

$$I_2(t) = M \left\{ \left[\int_{t_0}^t h(t, \tau) \zeta(\tau) d\tau \right]^2 \right\},$$

откуда следует, что

$$I_2(t) > 0.$$

Таким образом, выражение (50) принимает следующий вид:

$$I(t) + \delta I(t) = I(t) - 2\gamma I_1(t) + \gamma^2 I_2(t). \quad (26.55)$$

Необходимое условие минимума функционала (46) имеет вид

$$\frac{\partial}{\partial \gamma} [I(t) + \delta I(t)]_{\gamma=0} = 0 \quad \text{при любых } h(t, \tau). \quad (26.56)$$

В соответствии с (55) условие (56) принимает вид

$$I_1(t) = 0. \quad (26.57)$$

Условие (57) является не только необходимым, но и достаточным условием минимума функционала (46). Действительно, при

$I_1(t) = 0$ выражение (55) принимает вид

$$[I(t) + \delta I(t)]_{I_1(t)=0} = I(t) + \gamma^2 I_2(t) > I(t),$$

так как $I_2(t) > 0$ при любых $h(t, \tau)$.

Так как условие (57) должно выполняться при любых функциях $h(t, \tau)$, то в соответствии с (53) условие минимума $M[e^2(t)]$ принимает вид

$$\int_{t_0}^t \vartheta(t, \tau) \varphi_{\zeta\zeta}(\sigma, \tau) d\tau = \varphi_{\mu\zeta}(t, \sigma), \quad t_0 \leq \sigma < t. \quad (26.58)$$

Таким образом, оптимальная функция веса $\vartheta(t, \tau)$ должна удовлетворять интегральному уравнению (58). Это уравнение называется уравнением Винера.

Найдем теперь дисперсию ошибки оптимальной системы. Согласно (49)

$$\begin{aligned} M[e^2(t)] &= \varphi_{\mu\mu}(t, t) - \int_{t_0}^t \vartheta(t, \tau) \varphi_{\mu\zeta}(t, \tau) d\tau - \\ &- \int_{t_0}^t \vartheta(t, \tau) \left[\varphi_{\mu\zeta}(t, \tau) - \int_{t_0}^t \vartheta(t, \sigma) \varphi_{\zeta\zeta}(\tau, \sigma) d\sigma \right] d\tau. \end{aligned} \quad (26.59)$$

Так как оптимальная функция веса удовлетворяет соотношению (58), то для оптимальной системы выражение (59) принимает вид

$$M[e^2(t)] = \varphi_{\mu\mu}(t, t) - \int_{t_0}^t \vartheta(t, \tau) \varphi_{\mu\zeta}(t, \tau) d\tau. \quad (26.60)$$

Дадим еще вывод двух соотношений, которые для рассматриваемой задачи представляют собой содержание важной для теории линейной фильтрации [25] стр. 298, леммы об ортогональной проекции в гильбертовом пространстве.

Уравнение (58) можно переписать так:

$$M[\mu(t) \zeta(\sigma)] = \int_{t_0}^t \vartheta(t, \tau) M[\zeta(\sigma) \zeta(\tau)] d\tau, \quad t_0 \leq \sigma < t,$$

или

$$M[\mu(t) \zeta(\sigma)] = M \left[\int_{t_0}^t \vartheta(t, \tau) \zeta(\tau) d\tau \zeta(\sigma) \right], \quad t_0 \leq \sigma < t,$$

В соответствии с (43) это выражение принимает вид

$$M[\mu(t)\zeta(\sigma)] = M[\xi(t)\zeta(\sigma)], \quad t_0 \leq \sigma < t,$$

или

$$M\{\mu(t) - \xi(t)\zeta(\sigma)\} = 0, \quad t_0 \leq \sigma < t.$$

Так как согласно (44) $e(t) = \mu(t) - \xi(t)$, то получим

$$\varphi_{e\zeta}(t, \sigma) = 0, \quad t_0 \leq \sigma < t. \quad (26.61)$$

Обратимся теперь к выражению (43). Умножая на $e(t)$ левую и правую части выражения (43), получим

$$e(t)\xi(t) = \int_{t_0}^t \theta(t, \sigma) e(t)\zeta(\sigma) d\sigma.$$

Заменяя левую и правую части их математическими ожиданиями, найдем

$$M[e(t)\xi(t)] = \int_{t_0}^t \theta(t, \sigma) M[e(t)\zeta(\sigma)] d\sigma.$$

Согласно (61) правая часть этого выражения равна нулю, и, следовательно,

$$\varphi_{e\xi}(t, t) = 0. \quad (26.62)$$

4. Оптимальные фильтры Калмана — Бьюси. Рассмотрим систему, описываемую скалярным дифференциальным уравнением

$$\frac{dx}{dt} = f(t)x + u(t). \quad (26.63)$$

Вследствие наличия помех в измерительных устройствах состояние системы определяется с ошибкой, так что результаты наблюдения имеют вид

$$z(t) = x(t) + v(t). \quad (26.64)$$

Будем предполагать, что $u(t)$ и $v(t)$ представляют собой нестационарные случайные процессы типа белого шума с нулевыми средними значениями. Корреляционные функции этих случайных процессов имеют следующий вид:

$$\left. \begin{aligned} \varphi_{uu}(t, \tau) &= M[u(t)u(\tau)] = q(t)\delta(t - \tau), \\ \varphi_{vv}(t, \tau) &= M[v(t)v(\tau)] = r(t)\delta(t - \tau), \\ \varphi_{uv}(t, \tau) &= M[u(t)v(\tau)] = 0, \end{aligned} \right\} \quad (26.65)$$

где $q(t)$ и $r(t)$ — непрерывные дифференцируемые функции, причем $q(t)$ — неотрицательная функция, а $r(t)$ положительна для всех значений t . Через $\delta(t)$ обозначена дельта-функция Дирака.

Для определения оценки $\hat{x}(t)$ состояния $x(t)$ системы (63) Калман и Бьюси [37] предложили применить фильтр, представляющий собой систему, описываемую линейным неоднородным дифференциальным уравнением

$$\frac{d\hat{x}}{dt} = s(t)\hat{x} + k(t)z(t), \quad \hat{x}(t_0) = 0. \quad (26.66)$$

При этом функции $s(t)$ и $k(t)$ в дифференциальном уравнении (66) должны быть выбраны так, чтобы удовлетворялось условие

$$M\{[x(t) - \hat{x}(t)]^2\} = \min. \quad (26.67)$$

Через $\psi(t, \tau)$ обозначим функцию веса системы, описываемой однородным дифференциальным уравнением

$$\frac{d\hat{x}}{dt} = s(t)\hat{x}. \quad (26.68)$$

Тогда решение дифференциального уравнения (66) будет иметь следующий вид:

$$\hat{x}(t) = \psi(t, t_0)\hat{x}(t_0) + \int_{t_0}^t \psi(t, \tau)k(\tau)z(\tau)d\tau. \quad (26.69)$$

Обозначим теперь

$$a(t, \tau) = \psi(t, \tau)k(\tau). \quad (26.70)$$

Из (70) следует, что $a(t, t) = \psi(t, t)k(t)$, а так как

$$\psi(t, t) = 1,$$

то

$$a(t, t) = k(t). \quad (26.71)$$

В соответствии с (70) и (71) при $\hat{x}(t_0) = 0$ сигнал на выходе системы (66) будет иметь следующий вид:

$$\hat{x}(t) = \int_{t_0}^t a(t, \tau)z(\tau)d\tau. \quad (26.72)$$

Выражению (72) соответствует выражение (43) в задаче Винера. Желаемым сигналом теперь является функция $x(t)$. Поэтому интегральное уравнение Винера (58) здесь принимает вид

$$\int_{t_0}^t a(t, \tau)\varphi_{zz}(\sigma, \tau)d\tau = \varphi_{xz}(t, \sigma), \quad t_0 \leq \sigma < t. \quad (26.73)$$

Функция $a(t, \tau)$, удовлетворяющая интегральному уравнению (73), как следует из решения задачи Винера, будет доставлять минимум функционалу (67).

Дифференцируя по t левую и правую части уравнения (73), получим

$$\int_{t_0}^t \frac{\partial}{\partial t} a(t, \tau) \varphi_{zz}(\sigma, \tau) d\tau + a(t, t) \varphi_{zz}(\sigma, t) = \\ = \frac{\partial}{\partial t} \varphi_{xz}(t, \sigma), \quad t_0 \leq \sigma < t. \quad (26.74)$$

Так как случайные процессы $x(t)$ и $v(t)$ некоррелированы, а $v(\sigma)$ и $v(t)$ некоррелированы для всех значений $\sigma < t$, то выражение

$$\varphi_{zz}(\sigma, t) = M \{ [x(\sigma) + v(\sigma)][x(t) + v(t)] \} \quad (26.75)$$

можно переписать так:

$$\varphi_{zz}(\sigma, t) = \varphi_{xx}(\sigma, t) = \varphi_{zx}(\sigma, t), \quad t_0 \leq \sigma < t. \quad (26.76)$$

Заметим, что так как $\varphi_{xx}(t, \sigma) = \varphi_{xx}(\sigma, t)$, то из (76) вытекает соотношение

$$\varphi_{zx}(\sigma, t) = \varphi_{xz}(t, \sigma), \quad t_0 \leq \sigma < t. \quad (26.77)$$

Обратимся теперь к правой части соотношения (74). В соответствии с (63) будем иметь

$$\frac{\partial}{\partial t} \varphi_{xz}(t, \sigma) = \frac{\partial}{\partial t} M [x(t) z(\sigma)] = M [\dot{x}(t) z(\sigma)] = \\ = M [f(t) x(t) z(\sigma)] + M [u(t) z(\sigma)]. \quad (26.78)$$

Как видно из уравнений (63) и (64), случайный процесс $z(\sigma)$ для всех значений $\sigma < t$ не коррелирован с более поздним входным сигналом $u(t)$, то есть

$$M [u(t) z(\sigma)] = 0, \quad t_0 \leq \sigma < t, \quad (26.79)$$

и выражение (78) принимает вид

$$\frac{\partial}{\partial t} \varphi_{xz}(t, \sigma) = f(t) \varphi_{xz}(t, \sigma), \quad t_0 \leq \sigma < t. \quad (26.80)$$

Таким образом, в соответствии с (76), (77), (80) уравнение (74) принимает вид

$$\int_{t_0}^t \frac{\partial}{\partial t} a(t, \tau) \varphi_{zz}(\sigma, \tau) d\tau + a(t, t) \varphi_{xz}(t, \sigma) = f(t) \varphi_{xz}(t, \sigma), \quad (26.81) \\ t_0 \leq \sigma < t.$$

Подставляя вместо $\varphi_{xz}(t, \sigma)$ выражение (73), приведем уравнение (81) к виду

$$\int_{t_0}^t \frac{\partial}{\partial t} a(t, \tau) \varphi_{zz}(\sigma, \tau) d\tau + [a(t, t) - f(t)] \int_{t_0}^t a(t, \tau) \varphi_{zz}(\sigma, \tau) d\tau = 0, \quad t_0 \leq \sigma < t, \quad (26.82)$$

или

$$\int_{t_0}^t \left[f(t) a(t, \tau) - a(t, t) a(t, \tau) - \frac{\partial}{\partial t} a(t, \tau) \right] \varphi_{zz}(\sigma, \tau) d\tau = 0, \quad (26.83)$$

$$t_0 \leq \sigma < t.$$

Обозначим теперь

$$b(t, \tau) = f(t) a(t, \tau) - a(t, t) a(t, \tau) - \frac{\partial}{\partial t} a(t, \tau). \quad (26.84)$$

Тогда уравнение (83) можно переписать так:

$$\int_{t_0}^t b(t, \tau) \varphi_{zz}(\sigma, \tau) d\tau = 0, \quad t_0 \leq \sigma < t. \quad (26.85)$$

Складывая левые и правые части уравнений (73) и (85), получим

$$\int_{t_0}^t [a(t, \tau) + b(t, \tau)] \varphi_{zz}(\sigma, \tau) d\tau = \varphi_{xz}(t, \sigma), \quad t_0 \leq \sigma < t. \quad (26.86)$$

Таким образом, как функция $a(t, \tau)$, так и функция $a(t, \tau) + b(t, \tau)$ являются решениями интегрального уравнения (73) и доставляют минимум функционалу (67).

Нетрудно показать, что поскольку входящая в выражение (65) функция $r(t)$ предполагается положительной при всех значениях t , то разность двух решений интегрального уравнения (73) равна нулю:

$$[a(t, \tau) + b(t, \tau)] - a(t, \tau) = 0, \quad t_0 \leq \tau < t.$$

Для доказательства обратимся к соотношению (61). В рассматриваемой здесь задаче это соотношение принимает вид

$$M[e(t)z(\sigma)] = 0, \quad t_0 \leq \sigma < t, \quad (26.87)$$

или

$$\varphi_{ez}(t, \sigma) = 0, \quad t_0 \leq \sigma < t. \quad (26.88)$$

Функция $a(t, \tau)$ и функция $a(t, \tau) + b(t, \tau)$ являются решениями интегрального уравнения (73). Функции $a(t, \tau)$ соответствует,

согласно (72), оптимальная оценка

$$\hat{x}(t) = \int_{t_0}^t a(t, \tau) z(\tau) d\tau. \quad (26.89)$$

Функции $a(t, \tau) + b(t, \tau)$ соответствует оптимальная оценка

$$\check{x}(t) = \int_{t_0}^t [a(t, \tau) + b(t, \tau)] z(\tau) d\tau. \quad (26.90)$$

Обозначая

$$\rho(t) = \check{x}(t) - \hat{x}(t), \quad (26.91)$$

будем иметь

$$\rho(t) = \int_{t_0}^t b(t, \tau) z(\tau) d\tau. \quad (26.92)$$

Из условия (87) вытекают соотношения

$$M\{[x(t) - \hat{x}(t)]z(\sigma)\} = 0, \quad M\{[x(t) - \check{x}(t)]z(\sigma)\} = 0,$$

откуда следует, что

$$M[\rho(t)z(\sigma)] = 0. \quad (26.93)$$

Обратимся теперь к соотношениям (89) и (90), из которых найдем

$$M[\rho(t)\hat{x}(t)] = \int_{t_0}^t a(t, \sigma) M[\rho(t)z(\sigma)] d\sigma,$$

$$M[\rho(t)\check{x}(t)] = \int_{t_0}^t [a(t, \sigma) + b(t, \sigma)] M[\rho(t)z(\sigma)] d\sigma.$$

Так как согласно (93) правые части этих соотношений равны нулю, то получим

$$M[\rho(t)\hat{x}(t)] = 0, \quad M[\rho(t)\check{x}(t)] = 0.$$

Отсюда следует, что

$$M\{\rho(t)[\check{x}(t) - \hat{x}(t)]\} = M[\rho(t)\rho(t)] = 0. \quad (26.94)$$

Подставляя в (94) значение (92) функции $\rho(t)$, получим

$$\int_{t_0}^t b(t, \tau) \int_{t_0}^t b(t, \sigma) M[z(\tau)z(\sigma)] d\sigma d\tau = 0. \quad (26.95)$$

Так как

$$M[z(\tau)z(\sigma)] = M[x(\tau)x(\sigma)] + M[v(\tau)v(\sigma)] = \\ = M[x(\tau)x(\sigma)] + r(\tau)\delta(\tau - \sigma),$$

то выражение (95) принимает вид

$$\int_{t_0}^t b(t, \tau) \int_{t_0}^t b(t, \sigma) \{M[x(\tau)x(\sigma)] + r(\tau)\delta(\tau - \sigma)\} d\sigma d\tau = 0,$$

или

$$\int_{t_0}^t b^2(t, \tau) r(\tau) d\tau + M[\lambda^2(t)] = 0, \quad (26.96)$$

где

$$\lambda(t) = \int_{t_0}^t b(t, \tau) x(\tau) d\tau.$$

Так как $r(\tau) > 0$, $M[\lambda^2(t)] \geq 0$, то из соотношения (96) следует, что

$$b(t, \tau) = 0, \quad t_0 \leq \tau < t. \quad (26.97)$$

Из соотношений (97) и (84) получим

$$\frac{\partial}{\partial t} a(t, \tau) = f(t) a(t, \tau) - a(t, t) a(t, \tau). \quad (26.98)$$

Дифференцируя по t левую и правую части выражения (72), будем иметь

$$\frac{d\hat{x}}{dt} = \int_{t_0}^t \frac{\partial}{\partial t} a(t, \tau) z(\tau) d\tau + a(t, t) z(t). \quad (26.99)$$

Из (99) и (98) найдем, что

$$\frac{d\hat{x}}{dt} = \int_{t_0}^t [f(t) a(t, \tau) - a(t, t) a(t, \tau)] z(\tau) d\tau + a(t, t) z(t) \quad (26.100)$$

или

$$\frac{d\hat{x}}{dt} = f(t) \int_{t_0}^t a(t, \tau) z(\tau) d\tau - a(t, t) \int_{t_0}^t a(t, \tau) z(\tau) d\tau + a(t, t) z(t). \quad (26.101)$$

В соответствии с (72) и (71) уравнение (101) принимает вид

$$\frac{d\hat{x}}{dt} = [f(t) - k(t)] \hat{x} + k(t) z(t). \quad (26.102)$$

Из уравнений (102) и (66) следует, что входящая в уравнение (66) функция $s(t)$ имеет вид

$$s(t) = f(t) - k(t). \quad (26.103)$$

Таким образом, оптимальный фильтр, уравнение (102) которого можно представить в виде

$$\frac{d\hat{x}}{dt} = f(t) \hat{x} + k(t) [z(t) - \hat{x}], \quad (26.104)$$

является системой с обратной связью, в которую рассогласование входит с коэффициентом усиления $k(t)$.

Остается еще определить вид функции $k(t)$. Подставляя в уравнение (102) выражение (64) для $z(t)$, получим следующее уравнение:

$$\frac{d\hat{x}}{dt} = f(t) \hat{x} + k(t) (x - \hat{x}) + k(t) v(t). \quad (26.105)$$

Обозначим через $e(t)$ ошибку оценки состояния системы:

$$e(t) = x(t) - \hat{x}(t). \quad (26.106)$$

Из уравнений (63) и (105) найдем дифференциальное уравнение, которому удовлетворяет $e(t)$:

$$\frac{de}{dt} = [f(t) - k(t)] e + u(t) - k(t) v(t). \quad (26.107)$$

Согласно (68), (69) и (103), функция веса однородного дифференциального уравнения

$$\frac{de}{dt} = [f(t) - k(t)] e$$

будет $\psi(t, \tau)$. Решение уравнения (107) будет иметь следующий вид:

$$e(t) = \psi(t, t_0) e(t_0) + \int_{t_0}^t \psi(t, \tau) [u(\tau) - k(\tau) v(\tau)] d\tau. \quad (26.108)$$

Найдем теперь дифференциальное уравнение, которому удовлетворяет дисперсия ошибки

$$l(t) = M[e^2(t)]. \quad (26.109)$$

Так как

$$\frac{de^2}{dt} = 2e \frac{de}{dt},$$

то в соответствии с (107) будем иметь

$$\frac{de^2(t)}{dt} = 2[f(t) - k(t)]e^2(t) + 2u(t)e(t) - 2k(t)v(t)e(t). \quad (26.110)$$

Заменяя левую и правую части уравнения (110) их математическими ожиданиями, получим следующее дифференциальное уравнение относительно $l(t)$:

$$\frac{dl}{dt} = 2[f(t) - k(t)]l + 2M[u(t)e(t)] - 2k(t)M[v(t)e(t)]. \quad (26.111)$$

Чтобы найти $M[u(t)e(t)]$, обратимся к выражению (108). Умножая левую и правую части этого выражения на $u(t)$ и переходя к математическим ожиданиям, получим

$$M[u(t)e(t)] = \psi(t, t_0)M[u(t)e(t_0)] + \\ + \int_{t_0}^t \psi(t, \tau)\{M[u(t)u(\tau)] - k(\tau)M[u(t)v(\tau)]\}d\tau. \quad (26.112)$$

Согласно (65) $M[u(t)v(\tau)] = 0$. Так как начальная ошибка $e(t_0) = x_0(t_0) - \hat{x}(t_0)$ не коррелирована с $u(t)$, то $M[u(t)e(t_0)] = 0$. Таким образом, выражение (112) принимает вид

$$M[u(t)e(t)] = \int_{t_0}^t \psi(t, \tau)M[u(t)u(\tau)]d\tau$$

или, в соответствии с (65),

$$M[u(t)e(t)] = \int_{t_0}^t \psi(t, \tau)q(t)\delta(t - \tau)d\tau = \frac{1}{2}\psi(t, t)q(t) = \frac{1}{2}q(t). \quad (26.113)$$

Аналогичным образом получим, что

$$M[v(t)e(t)] = -\frac{1}{2}k(t)r(t). \quad (26.114)$$

Дифференциальное уравнение (111), в соответствии с (113) и (114), принимает теперь следующий вид:

$$\frac{dl}{dt} = 2[f(t) - k(t)]l + q(t) + k^2(t)r(t). \quad (26.115)$$

Ниже нам потребуются формулы (61) и (62) предыдущего раздела. Здесь они принимают следующий вид:

$$\varphi_{ez}(t, \sigma) = 0, \quad t_0 \leq \sigma < t, \quad (26.116)$$

$$\varphi_{\widehat{ex}}(t, t) = 0. \quad (26.117)$$

Учитывая формулы (106) и (64), можно представить соотношение (116) в виде

$$M\{[x(t) - \hat{x}(t)][x(\sigma) + v(\sigma)]\} = 0. \quad (26.118)$$

В соответствии с (63) и (64)

$$M[x(t)v(\sigma)] = 0. \quad (26.119)$$

Подставляя вместо $\hat{x}(t)$ выражение (72), получим

$$M[x(t)x(\sigma)] - \int_{t_0}^t a(t, \tau) M\{[x(\tau) + v(\tau)][x(\sigma) + v(\sigma)]\} d\tau = 0$$

или, в соответствии с (119),

$$M[x(t)x(\sigma)] - \int_{t_0}^t a(t, \tau) \{M[x(\tau)x(\sigma)] + M[v(\tau)v(\sigma)]\} d\tau = 0.$$

Отсюда, учитывая, что $M[v(\tau)v(\sigma)] = r(\tau)\delta(\tau - \sigma)$, получим

$$\varphi_{xx}(t, \sigma) - \int_{t_0}^t a(t, \tau) \varphi_{xx}(\tau, \sigma) d\tau = \int_{t_0}^t a(t, \tau) r(\tau) \delta(\tau - \sigma) d\tau, \\ t_0 \leq \sigma < t,$$

или

$$\varphi_{xx}(t, \sigma) - \int_{t_0}^t a(t, \tau) \varphi_{xx}(\tau, \sigma) d\tau = a(t, \sigma) r(\sigma), \quad t_0 \leq \sigma < t. \quad (26.120)$$

Левая и правая части соотношения (120) являются непрерывными функциями от σ при любом фиксированном t . Поэтому, переходя в (120) к пределу при $\sigma \rightarrow t$ и учитывая, что $a(t, t) = k(t)$, получим

$$\varphi_{xx}(t, t) - \int_{t_0}^t a(t, \tau) \varphi_{xx}(\tau, t) d\tau = k(t) r(t). \quad (26.121)$$

Так как согласно (76)

$$\varphi_{xx}(\tau, t) = \varphi_{zx}(\tau, t),$$

то выражение (121) можно переписать так:

$$M[x(t)x(t)] - M\left[\int_{t_0}^t a(t, \tau) z(\tau) d\tau x(t)\right] = k(t)r(t)$$

или, в соответствии с (72),

$$M[x(t)x(t)] - M[\hat{x}(t)x(t)] = M\{[x(t) - \hat{x}(t)]x(t)\} = k(t)r(t).$$

Последнее выражение можно переписать так:

$$M\{e(t)[e(t) + \hat{x}(t)]\} = k(t)r(t). \quad (26.122)$$

Так как согласно (117) $M[e(t)\hat{x}(t)] = 0$, то из (122) и (109) получаем

$$l(t) = k(t)r(t), \quad (26.123)$$

Из (123) следует, что

$$k(t) = \frac{l(t)}{r(t)}. \quad (26.124)$$

Из (115) и (124) найдем окончательный вид дифференциального уравнения, которому удовлетворяет функция $l(t)$:

$$\frac{dl}{dt} = 2f(t)l - \frac{1}{r(t)}l^2 + q(t). \quad (26.125)$$

Дифференциальное уравнение (125) представляет собой уравнение Риккати. Для решения уравнения (125) надо задать начальное значение $l(t_0)$. Будем предполагать, что

$$\hat{x}(t_0) = 0. \quad (26.126)$$

Так как согласно (106) $e(t_0) = x(t_0) - \hat{x}(t_0)$, то в соответствии с (109) и (126) начальное значение $l(t_0) = M[e^2(t_0)]$ принимает вид

$$l(t_0) = M[x(t_0)x(t_0)],$$

то есть

$$l(t_0) = \Phi_{xx}(t_0, t_0). \quad (26.127)$$

§ 27. Многомерные случайные процессы. Оптимальные фильтры Кальмана — Бьюси

1. Системы с конечным временем наблюдения. Рассмотрим нестационарную линейную систему

$$\left. \begin{aligned} \dot{x} &= A(t)x + B(t)u(t), \\ y &= C(t)x. \end{aligned} \right\} \quad (27.1)$$

Здесь x — n -мерный вектор состояния системы, $u(t)$ — r -мерный вектор, представляющий собой сигнал на входе системы, $y(t)$ — m -мерный вектор, определяющий собой выход системы, $A(t)$ — $n \times n$ -матрица, $B(t)$ — $n \times r$ -матрица, $C(t)$ — $m \times n$ -матрица. Предполагается, что система (1) *вполне наблюдаема*.

Входной сигнал $u(t)$ есть векторный случайный гауссов процесс типа *белого шума* с нулевым средним значением

$$M\{u(t)\} = 0 \quad \text{для всех } t \quad (27.2)$$

и корреляционной матрицей

$$\text{cov}[u(t); u(\tau)] = M\{u(t), u^*(\tau)\} = \delta(t - \tau) Q(t), \quad (27.3)$$

где $\delta(t)$ — дельта-функция Дирака, а $Q(t)$ — симметрическая, неотрицательно-определенная $r \times r$ -матрица.

Пусть t_0 — начальный момент времени ($t_0 > -\infty$), а вектор $x(t_0)$ — начальное состояние системы. Предполагается, что $x(t_0)$ — гауссова векторная случайная величина, не зависящая от $u(t)$ с известным средним значением

$$M\{x(t_0)\} = \bar{x}_0 \quad (27.4)$$

и известной корреляционной матрицей

$$\text{cov}[x(t_0); x(t_0)] = M\{[x(t_0) - \bar{x}_0][x(t_0) - \bar{x}_0]^*\} = \Sigma_0. \quad (27.5)$$

В сделанных выше предположениях $x(t)$ и $y(t)$ являются гауссовыми случайными процессами.

Предположим, что наблюдение вектора $y(t)$ происходит при наличии помех типа гауссова белого шума, и поэтому наблюдаемый сигнал имеет вид

$$z(t) = y(t) + v(t) = C(t)x(t) + v(t), \quad (27.6)$$

где $v(t)$ — гауссов белый шум с нулевым средним значением

$$M\{v(t)\} = 0 \quad \text{для всех } t \quad (27.7)$$

и корреляционной матрицей

$$\text{cov}[v(t); v(\tau)] = M\{v(t)v^*(\tau)\} = \delta(t - \tau) R(t), \quad (27.8)$$

где $R(t)$ — симметрическая, положительно-определенная $m \times m$ -матрица. Кроме того, предполагается, что $v(t)$, $u(t)$ и $x(t_0)$ некоррелированы.

Пусть теперь требуется получить оценку $\hat{x}(t)$ состояния $x(t)$ системы (1) по доступной измерению на отрезке времени $[t_0, T]$ вектор-функции $z(t)$. (Вектор-функции $x(t)$ и $y(t)$ непосредственно недоступны измерению.) Систему, которая будет определять вектор $\hat{x}(t)$, назовем *фильтром*. Здесь мы ограничимся

фильтрами, представляющими собой нестационарные линейные системы вида

$$\dot{w} = F(t) w + G(t) z(t), \quad (27.9)$$

где $w(t)$ — n -мерный вектор, $F(t)$ — $n \times n$ -матрица, $G(t)$ — $n \times m$ -матрица. Вектор функция $w(t)$ принимается в качестве оценки $\hat{x}(t)$ состояния $x(t)$ исходной системы (1)

$$\hat{x}(t) = w(t). \quad (27.10)$$

В соответствии с (10) ошибка оценки $e(t) = x(t) - \hat{x}(t)$ будет иметь следующий вид:

$$e(t) = x(t) - w(t). \quad (27.11)$$

Вектор-функция $e(t)$ может быть названа ошибкой фильтра.

К фильтру (9) предъявим следующие требования: вектор-функция $w(t)$ должна представлять собой *несмещенную* оценку $x(t)$ и при этом должна минимизировать дисперсию ошибки $e(t)$ (точнее, минимизировать некоторый функционал, зависящий от корреляционной матрицы векторного случайного процесса $e(t)$). Из этих требований и надлежит выбрать матрицы $F(t)$ и $G(t)$ и начальное состояние фильтра $w(t_0)$.

Найдем сначала дифференциальное уравнение, которому удовлетворяет вектор-функция $e(t)$. Согласно (11), (1), (9) и (6) будем иметь

$$\dot{e}(t) = [A(t) - F(t) - G(t)C(t)]x(t) + F(t)e(t) + B(t)u(t) - G(t)v(t). \quad (27.12)$$

Для того чтобы вектор-функция $w(t)$ была несмещенной оценкой $x(t)$, должно выполняться условие

$$M\{x(t)\} = M\{w(t)\} \quad \text{при всех } t \geq t_0, \quad (27.13)$$

откуда согласно (11) будем иметь

$$M\{e(t)\} = 0 \quad \text{при всех } t \geq t_0, \quad (27.14)$$

$$\frac{d}{dt} M\{e(t)\} = M\{\dot{e}(t)\} = 0 \quad \text{при всех } t \geq t_0. \quad (27.15)$$

Учитывая, что согласно (2) и (7) $M\{u(t)\} = 0$, $M\{v(t)\} = 0$, и заменяя левую и правую части дифференциального уравнения (12) их математическими ожиданиями, получим в соответствии с (14) и (15) следующее соотношение:

$$[A(t) - F(t) - G(t)C(t)]M\{x(t)\} = 0. \quad (27.16)$$

Так как $M\{x(t)\} \neq 0$, то условие (16) несмещенности оценки $x(t)$ принимает вид

$$A(t) - F(t) - G(t)C(t) = 0. \quad (27.17)$$

Таким образом, входящие в уравнение фильтра (9) матрицы $F(t)$ и $G(t)$ должны удовлетворять соотношению

$$F(t) = A(t) - G(t)C(t). \quad (27.18)$$

Начальное состояние фильтра $w(t_0)$ в соответствии с (13) и (4), должно быть следующим:

$$w(t_0) = \bar{x}_0. \quad (27.19)$$

При выполнении условий (18) и (19) вектор-функция $w(t)$ будет несмещенной оценкой состояния $x(t)$ исходной системы (1) для всех $t \geq t_0$.

Таким образом, фильтр, обеспечивающий несмещенность оценки $x(t)$, будет описываться дифференциальным уравнением

$$\dot{w} = [A(t) - G(t)C(t)]w + G(t)z(t), \quad w(t_0) = \bar{x}_0. \quad (27.20)$$

Фильтры, описываемые уравнением (20), содержат в качестве параметра матрицу $G(t)$. Выбор матрицы $G(t)$ должен быть сделан из указанного выше условия минимизации дисперсии ошибки $e(t)$.

Укажем теперь критерий качества фильтра. Предварительно заметим, что так как согласно (14) $M\{e(t)\} = 0$, то корреляционная матрица ошибки $e(t)$ будет иметь вид

$$\Sigma(t) = M\{e(t)e^*(t)\}. \quad (27.21)$$

Матрица $\Sigma(t)$ является симметрической матрицей. Начальное значение $\Sigma(t_0)$ матрицы $\Sigma(t)$ будет следующим:

$$\begin{aligned} \Sigma(t_0) &= M\{e(t_0)e^*(t_0)\} = M\{[x(t_0) - w(t_0)][x(t_0) - w(t_0)]^*\} = \\ &= M\{[x(t_0) - \bar{x}_0][x(t_0) - \bar{x}_0]^*\} \end{aligned}$$

или согласно (5)

$$\Sigma(t_0) = \Sigma_0. \quad (27.22)$$

Матрица Σ_0 , как указано выше, предполагается известной.

Рассмотрим функционал

$$J = M\{e^*(T)L(T)e(T)\}, \quad (27.23)$$

где T — некоторый фиксированный момент времени, а $L(T)$ — симметрическая, положительно-определенная $n \times n$ -матрица. Так как скалярное произведение a^*b двух n -мерных векторов a и b равно следу $n \times n$ -матрицы ba^* , то есть сумме элементов, расположенных на ее главной диагонали

$$a^*b = \text{Sp}[ba^*],$$

то выражение (23) можно записать так:

$$J = M\{\text{Sp}[L(T)e(T)e^*(T)]\} = \text{Sp}[L(T)M\{e(T)e^*(T)\}]$$

или в соответствии с (21)

$$J = \text{Sp} [L(T) \Sigma(T)]. \quad (27.24)$$

Мерой качества фильтра (20) примем функционал (24). Матрица $G(t)$ в дифференциальном уравнении (20) должна быть выбрана так, чтобы доставить минимум функционалу (24). Фильтр, удовлетворяющий этому условию, будем называть *оптимальным фильтром*.

Найдем теперь дифференциальное уравнение, которому удовлетворяет корреляционная матрица $\Sigma(t)$.

Дифференциальное уравнение (12), которому удовлетворяет вектор-функция $e(t)$ в соответствии с (17) и (18), принимает вид

$$\dot{e}(t) = [A(t) - G(t)C(t)]e(t) + B(t)u(t) - G(t)v(t). \quad (27.25)$$

Так как согласно (21)

$$\Sigma(t) = M\{e(t)e^*(t)\},$$

то

$$\dot{\Sigma}(t) = \frac{d}{dt} M\{e(t)e^*(t)\} = M\{\dot{e}(t)e^*(t)\} + M\{e(t)\dot{e}^*(t)\}$$

или в соответствии с (25)

$$\begin{aligned} \dot{\Sigma}(t) = & [A(t) - G(t)C(t)]M\{e(t)e^*(t)\} + M\{e(t)e^*(t)\}[A(t) - G(t)C(t)]^* + \\ & + B(t)M\{u(t)e^*(t)\} + M\{e(t)u^*(t)\}B^*(t) - \\ & - G(t)M\{v(t)e^*(t)\} - M\{e(t)v^*(t)\}G^*(t). \end{aligned} \quad (27.26)$$

Учитывая (21), можно уравнение (26) переписать так:

$$\begin{aligned} \dot{\Sigma}(t) = & [A(t) - G(t)C(t)]\Sigma(t) + \Sigma(t)[A(t) - G(t)C(t)]^* + \\ & + B(t)M\{u(t)e^*(t)\} + M\{e(t)u^*(t)\}B^*(t) - \\ & - G(t)M\{v(t)e^*(t)\} - M\{e(t)v^*(t)\}G^*(t). \end{aligned} \quad (27.27)$$

Заметим теперь, что согласно (2), (7), (14)

$$M\{u(t)\} = 0, \quad M\{v(t)\} = 0, \quad M\{e(t)\} = 0.$$

Согласно (11) и (19)

$$e(t_0) = x(t_0) - \bar{x}_0. \quad (27.28)$$

Так как предполагается, что $v(t)$, $u(t)$ и $x(t_0)$ независимы (некоррелированы), то отсюда следует

$$\left. \begin{aligned} M\{e(t_0)u^*(t_0)\} = 0, & \quad M\{e(t_0)v^*(t_0)\} = 0, \\ M\{u(t_0)e^*(t_0)\} = 0, & \quad M\{v(t_0)e^*(t_0)\} = 0. \end{aligned} \right\} \quad (27.29)$$

Обозначим теперь через $\Phi(t, \tau)$ следующую $n \times n$ -матрицу

$$\Phi(t, \tau) = \theta(t)\theta^{-1}(\tau), \quad (27.30)$$

где $\theta(t)$ — фундаментальная матрица решений однородного дифференциального уравнения

$$\dot{e}(t) = [A(t) - G(t)C(t)]e(t). \quad (27.31)$$

Решение дифференциального уравнения (25) будет иметь следующий вид:

$$e(t) = \Phi(t, t_0) e(t_0) + \int_{t_0}^t \Phi(t, \tau) B(\tau) u(\tau) d\tau - \int_{t_0}^t \Phi(t, \tau) G(\tau) v(\tau) d\tau. \quad (27.32)$$

В соответствии с (32), (29), (3) и (8) будем иметь

$$\begin{aligned} M\{e(t) u^*(t)\} &= \\ &= \Phi(t, t_0) M\{e(t_0) u^*(t)\} + \int_{t_0}^t \Phi(t, \tau) B(\tau) M\{u(\tau) u^*(t)\} d\tau - \\ &\quad - \int_{t_0}^t \Phi(t, \tau) G(\tau) M\{v(\tau) u^*(t)\} d\tau = \\ &= \int_{t_0}^t \Phi(t, \tau) B(\tau) \delta(t - \tau) Q(t) d\tau = \frac{1}{2} B(t) Q(t), \quad (27.33) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -M\{e(t) v^*(t)\} &= -\Phi(t, t_0) M\{e(t_0) v^*(t)\} - \\ &\quad - \int_{t_0}^t \Phi(t, \tau) B(\tau) M\{u(\tau) v^*(t)\} d\tau + \int_{t_0}^t \Phi(t, \tau) G(\tau) M\{v(\tau) v^*(t)\} d\tau = \\ &= \int_{t_0}^t \Phi(t, \tau) G(\tau) \delta(t - \tau) R(t) d\tau = \frac{1}{2} G(t) R(t). \quad (27.34) \end{aligned}$$

Аналогично

$$M\{u(t) e^*(t)\} = \frac{1}{2} Q(t) B^*(t), \quad (27.35)$$

$$-M\{v(t) e^*(t)\} = \frac{1}{2} R(t) G^*(t). \quad (27.36)$$

В соответствии с (27), (33)—(36) и (22) матрица $\Sigma(t)$ будет определяться следующим дифференциальным уравнением и начальным условием:

$$\begin{aligned} \dot{\Sigma}(t) &= [A(t) - G(t)C(t)]\Sigma(t) + \Sigma(t)[A(t) - G(t)C(t)]^* + \\ &\quad + B(t)Q(t)B^*(t) + G(t)R(t)G^*(t), \quad \Sigma(t_0) = \Sigma_0. \quad (27.37) \end{aligned}$$

Так как матрицы $A(t)$, $B(t)$, $C(t)$, $Q(t)$, $R(t)$ и Σ_0 заданы, то параметром, от которого зависит решение $\Sigma(t)$ задачи Коши (37), будет являться матрица $G(t)$. Таким образом, и значение функционала (24)

$$J = \text{Sp}[L(T)\Sigma(T)]$$

будет зависеть от матрицы $G(t)$, как от параметра.

Матрица $\hat{G}(t)$, доставляющая минимум функционалу (24), будет оптимальной, а фильтр (20), у которого $G(t) = \hat{G}(t)$, бу-

дет оптимальным фильтром. В исходной работе Калмана — Бьюси [37] для построения оптимального фильтра были применены методы функционального анализа. Ниже излагается другой метод решения задачи [5].

Если считать совокупность элементов σ_{ij} ($i, j = 1, \dots, n$) матрицы Σ состоянием системы (37), а элементы g_{jk} ($j = 1, \dots, n; k = 1, \dots, m$) матрицы G — приложенными к системе (37) управлениями, то мы придем, как это показал М. Атанс [5], к одной из детерминированных задач оптимального управления, в которой требуется выбрать управления $g_{jk}(t)$ ($j = 1, \dots, n; k = 1, \dots, m$) ($t_0 \leq t \leq T$) так, чтобы они доставляли минимум функционалу (24), причем в этой задаче время T закреплено, а конец траектории свободен. Указанная задача может быть решена при помощи принципа максимума Л. С. Понтрягина.

Аналогично (24.5) оптимальное управление $\hat{G}(t)$ должно доставлять минимум функции

$$\mathcal{H} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \dot{\sigma}_{ij}(t) p_{ij}(t) = \text{Sp}[\dot{\Sigma}(t) P^*(t)], \quad (27.38)$$

где через $P(t)$ обозначена $n \times n$ -матрица, элементы которой p_{ij} ($i, j = 1, \dots, n$) являются аналогично (24.4) вспомогательными переменными в задаче с закрепленным временем и свободным концом траектории.

В соответствии с (37) выражение (38) можно преобразовать к виду

$$\begin{aligned} \mathcal{H} = & \text{Sp}[A(t)\Sigma(t)P^*(t)] - \text{Sp}[G(t)C(t)\Sigma(t)P^*(t)] + \\ & + \text{Sp}[\Sigma(t)A^*(t)P^*(t)] - \text{Sp}[\Sigma(t)C^*(t)G^*(t)P^*(t)] + \\ & + \text{Sp}[B(t)Q(t)B^*(t)P^*(t)] + \text{Sp}[G(t)R(t)G^*(t)P^*(t)]. \end{aligned} \quad (27.39)$$

Обратимся теперь к выводу некоторых вспомогательных соотношений, которые потребуются ниже.

1) Рассмотрим матрицу $axbx^*$, где a — $n \times n$ -матрица, b — $m \times m$ -матрица, x — $n \times m$ -матрица. Найдем след этой матрицы $\text{Sp}[axbx^*]$, а также частные производные от $\text{Sp}[axbx^*]$ по x_{jk} ($j = 1, \dots, n; k = 1, \dots, m$), где x_{jk} — элементы матрицы x .

Обозначим

$$c = ax, \quad d = bx^*, \quad e = cd.$$

Элементы матриц c и d будут

$$c_{\rho\nu} = \sum_{l=1}^n a_{\rho l} x_{l\nu}, \quad d_{\nu\rho} = \sum_{\mu=1}^m b_{\nu\mu} x_{\rho\mu} \quad (\rho = 1, \dots, n; \nu = 1, \dots, m).$$

Отсюда

$$e_{\rho\rho} = \sum_{\nu=1}^m c_{\rho\nu} d_{\nu\rho}$$

или

$$e_{\rho\rho} = \sum_{\nu=1}^m \left(\sum_{l=1}^n a_{\rho l} x_{l\nu} \right) \left(\sum_{\mu=1}^m b_{\nu\mu} x_{\rho\mu} \right) \quad (\rho = 1, \dots, n).$$

След матрицы $e = axbx^*$ будет иметь следующий вид:

$$\text{Sp}[axbx^*] = \sum_{\rho=1}^n \sum_{\nu=1}^m \left(\sum_{l=1}^n a_{\rho l} x_{l\nu} \right) \left(\sum_{\mu=1}^m b_{\nu\mu} x_{\rho\mu} \right). \quad (27.40)$$

Из выражения (40) найдем

$$\frac{\partial}{\partial x_{jk}} \text{Sp}[axbx^*] = \sum_{\rho=1}^n \sum_{\mu=1}^m a_{\rho j} x_{\rho\mu} b_{k\mu} + \sum_{l=1}^n \sum_{\nu=1}^m a_{jl} x_{l\nu} b_{\nu k} \quad (27.41)$$

$(j = 1, \dots, n; k = 1, \dots, m).$

Прямоугольную $n \times m$ -матрицу, элементами которой являются $\frac{\partial}{\partial x_{jk}} \text{Sp}[axbx^*]$ ($j = 1, \dots, n; k = 1, \dots, m$), обозначим через $\frac{\partial}{\partial x} \text{Sp}[axbx^*]$.

Обозначим теперь через q следующую $n \times m$ -матрицу:

$$q = \bar{q} + \hat{q}, \quad (27.42)$$

где

$$\bar{q} = a^* x b^*, \quad \hat{q} = axb. \quad (27.43)$$

Элементы $n \times m$ -матриц $\tilde{\xi} = a^* x$ и $\hat{\xi} = ax$ будут

$$\tilde{\xi}_{j\mu} = \sum_{\rho=1}^n a_{\rho j} x_{\rho\mu}, \quad \hat{\xi}_{j\nu} = \sum_{l=1}^n a_{jl} x_{l\nu}.$$

Элементы $n \times m$ -матриц \bar{q} и \hat{q} будут

$$\bar{q}_{jk} = \sum_{\mu=1}^m \tilde{\xi}_{j\mu} b_{k\mu}, \quad \hat{q}_{jk} = \sum_{\nu=1}^m \hat{\xi}_{j\nu} b_{\nu k}$$

или

$$\bar{q}_{jk} = \sum_{\mu=1}^m \sum_{\rho=1}^n a_{\rho j} x_{\rho\mu} b_{k\mu}, \quad \hat{q}_{jk} = \sum_{\nu=1}^m \sum_{l=1}^n a_{jl} x_{l\nu} b_{\nu k}. \quad (27.44)$$

В соответствии с (42) и (44)

$$q_{jk} = \sum_{\rho=1}^n \sum_{\mu=1}^m a_{\rho j} x_{\rho\mu} b_{k\mu} + \sum_{l=1}^n \sum_{\nu=1}^m a_{jl} x_{l\nu} b_{\nu k} \quad (j = 1, \dots, n; k = 1, \dots, m). \quad (27.45)$$

Как следует из выражений (41) и (45),

$$\frac{\partial}{\partial x_{jk}} \text{Sp}[axbx^*] = q_{jk} \quad (j = 1, \dots, n; k = 1, \dots, m). \quad (27.46)$$

Таким образом, имеет место соотношение

$$\frac{\partial}{\partial x} \text{Sp}[axbx^*] = a^* x b^* + axb. \quad (27.47)$$

2) Рассмотрим теперь $m \times m$ -матрицу

$$\lambda = ex,$$

где e — $m \times n$ -матрица, x — $n \times m$ -матрица. Так как

$$\lambda_{\rho\rho} = \sum_{l=1}^n e_{\rho l} x_{l\rho}, \quad \text{Sp} [ex] = \sum_{\rho=1}^m \sum_{l=1}^n e_{\rho l} x_{l\rho},$$

то

$$\frac{\partial}{\partial x_{jk}} \text{Sp} [ex] = e_{kj} \quad (j = 1, \dots, n; k = 1, \dots, m).$$

Таким образом,

$$\frac{\partial}{\partial x} \text{Sp} [ex] = e^*. \quad (27.48)$$

3) Пусть теперь h — $n \times m$ -матрица, x — $n \times m$ -матрица. Рассмотрим $n \times n$ -матрицу

$$\gamma = hx^*.$$

Так как

$$\gamma_{\rho\rho} = \sum_{l=1}^m h_{\rho l} x_{\rho l}, \quad \text{Sp} [hx^*] = \sum_{\rho=1}^n \sum_{l=1}^m h_{\rho l} x_{\rho l},$$

то

$$\frac{\partial}{\partial x_{jk}} \text{Sp} [hx^*] = h_{jk} \quad (j = 1, \dots, n; k = 1, \dots, m),$$

и, следовательно,

$$\frac{\partial}{\partial x} \text{Sp} [hx^*] = h \quad (27.49)$$

4) Рассмотрим еще некоторые тождества. Пусть c — $n \times m$ -матрица, а d — $m \times n$ -матрица. Обозначим через φ и ψ следующие матрицы:

$$\varphi = cd, \quad \psi = dc.$$

Так как

$$\varphi_{jj} = \sum_{l=1}^m c_{jl} d_{lj}, \quad \text{Sp} [cd] = \sum_{j=1}^n \sum_{l=1}^m c_{jl} d_{lj},$$

$$\psi_{ll} = \sum_{j=1}^n d_{lj} c_{jl}, \quad \text{Sp} [dc] = \sum_{l=1}^m \sum_{j=1}^n d_{lj} c_{jl},$$

то имеет место тождество

$$\text{Sp} [cd] = \text{Sp} [dc]. \quad (27.50)$$

5) Аналогично пусть ξ и ζ — $n \times m$ -матрицы. Обозначим через q и p следующие матрицы:

$$q = \xi \xi^*, \quad p = \zeta \zeta^*.$$

Так как

$$q_{jj} = \sum_{l=1}^m \xi_{jl} \xi_{jl}, \quad \text{Sp} [\xi \xi^*] = \sum_{j=1}^n \sum_{l=1}^m \xi_{jl} \xi_{jl},$$

$$p_{jj} = \sum_{l=1}^m \zeta_{jl} \zeta_{jl}, \quad \text{Sp} [\zeta \zeta^*] = \sum_{j=1}^n \sum_{l=1}^m \zeta_{jl} \zeta_{jl},$$

то имеет место тождество

$$\text{Sp} [\xi \xi^*] = \text{Sp} [\zeta \zeta^*]. \quad (27.51)$$

При помощи формул (47) — (51) нетрудно найти $n \times m$ -матрицу $\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial G}$ и $n \times n$ -матрицу $\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \Sigma}$. В соответствии с (38) будем иметь

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial G} = & -P(t) \Sigma^*(t) C^*(t) - P^*(t) \Sigma(t) C^*(t) + \\ & + P(t) G(t) R^*(t) + P^*(t) G(t) R(t), \end{aligned} \quad (27.52)$$

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \Sigma} = A^*(t) P(t) - C^*(t) G^*(t) P(t) + P(t) A(t) - P(t) G(t) C(t). \quad (27.53)$$

Условия, необходимые для того, чтобы управления g_{jk} ($j = 1, \dots, \dots, n$; $k = 1, \dots, m$) доставляли функции \mathcal{H} минимум, имеют вид

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial g_{jk}} = 0 \quad (j = 1, \dots, n; k = 1, \dots, m). \quad (27.54)$$

Система скалярных соотношений (54) эквивалентна матричному соотношению

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial G} = 0. \quad (27.55)$$

В соответствии с (52) условие (55) принимает вид

$$\begin{aligned} -P(t) \Sigma^*(t) C^*(t) - P^*(t) \Sigma(t) C^*(t) + P(t) G(t) R^*(t) + \\ + P^*(t) G(t) R(t) = 0. \end{aligned} \quad (27.56)$$

Аналогично (24.6) вспомогательные переменные p_{ij} ($i, j = 1, \dots, n$) согласно принципу максимума Л. С. Понтрягина удовлетворяют следующей системе дифференциальных уравнений:

$$\dot{p}_{ij} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \sigma_{ij}} \quad (i, j = 1, \dots, n), \quad (27.57)$$

эквивалентной матричному дифференциальному уравнению

$$\dot{P} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \Sigma}. \quad (27.58)$$

В соответствии с (53) уравнение (58) принимает вид

$$\dot{P}(t) = -P(t) [A(t) - G(t) C(t)] - [A(t) - G(t) C(t)]^* P(t). \quad (27.59)$$

В соответствии с (24) граничные значения $p_{ij}(T)$ ($i, j = 1, \dots, n$) вспомогательных переменных в рассматриваемой здесь задаче аналогично (24.68) будут

$$p_{ij}(T) = \frac{\partial}{\partial \sigma_{ij}(T)} \text{Sp} [L(T) \Sigma(T)] \quad (i, j = 1, \dots, n), \quad (27.60)$$

что в матричной записи можно представить так:

$$P(T) = \frac{\partial}{\partial \Sigma(T)} \text{Sp} [L(T) \Sigma(T)]. \quad (27.61)$$

Согласно (48)

$$\frac{\partial}{\partial \Sigma(T)} \text{Sp} [L(T) \Sigma(T)] = L^*(T). \quad (27.62)$$

Так как $L(T)$ — симметрическая, положительно-определенная матрица, то $L(T) = L^*(T)$, и, следовательно,

$$P(T) = L(T). \quad (27.63)$$

Таким образом, $n \times n$ -матрица $P(T)$ является симметрической, положительно-определенной матрицей.

Транспонируя левую и правую части уравнения (59), получим следующее уравнение:

$$\dot{P}^*(t) = -P^*(t) [A(t) - G(t) C(t)] - [A(t) - G(t) C(t)]^* P^*(t). \quad (27.64)$$

Так как $P(T)$ — симметрическая матрица, то согласно (63) граничное условие будет следующим:

$$P^*(T) = L(T). \quad (27.65)$$

Из сравнения уравнения (59) и граничного условия (63) с уравнением (64) и граничным условием (65) видно, что дифференциальные уравнения и граничные условия, которым удовлетворяют $P(t)$ и $P^*(t)$, совпадают и, следовательно, в силу теоремы единственности

$$P(t) = P^*(t), \quad (27.66)$$

то есть $P(t)$ является симметрической матрицей. Покажем еще, что $P(t)$ — положительно-определенная матрица. Обозначая через $A_1(t)$ и $A_2(t)$ $n \times n$ -матрицы

$$\left. \begin{aligned} A_1(t) &= -[A(t) - G(t) C(t)]^*, \\ A_2(t) &= -[A(t) - G(t) C(t)], \end{aligned} \right\} \quad (27.67)$$

можно преобразовать матричное уравнение (59) к следующему виду:

$$\dot{P}(t) = A_1(t) P(t) + P(t) A_2(t). \quad (27.68)$$

Пусть $M_1(t, t_0)$ — $n \times n$ -матрица, удовлетворяющая матричному дифференциальному уравнению

$$\left. \begin{aligned} \dot{M}_1(t, t_0) &= A_1(t) M_1(t, t_0) & (t \in [t_0, T]), \\ M_1(t_0, t_0) &= E. \end{aligned} \right\} \quad (27.69)$$

Пусть элементы матрицы $A_1(t)$, а следовательно, и матрицы $A_2(t)$ — ограниченные, кусочно-непрерывные функции на отрезке $[t_0, T]$. Тогда, как известно, решение уравнения (69) может быть представлено в виде *матрицанта* [17], то есть абсолютно и равномерно сходящегося ряда

$$M_1(t, t_0) = E + \Gamma A_1 + \Gamma A_1 \Gamma A_1 + \Gamma A_1 \Gamma A_1 \Gamma A_1 + \dots,$$

где

$$\Gamma A_1 = \int_{t_0}^t A_1(\tau_1) d\tau_1, \quad \Gamma A_1 \Gamma A_1 = \int_{t_0}^t A_1(\tau_1) \int_{t_0}^{\tau_1} A_1(\tau_2) d\tau_2 d\tau_1,$$

$$\Gamma A_1 \Gamma A_1 \Gamma A_1 = \int_{t_0}^t A_1(\tau_1) \int_{t_0}^{\tau_1} A_1(\tau_2) \int_{t_0}^{\tau_2} A_1(\tau_3) d\tau_3 d\tau_2 d\tau_1, \dots$$

Матрицант $M_1(t, t_0)$ обладает свойством [17]

$$\det M_1(t, t_0) = \exp \int_{t_0}^t \text{Sp } A_1(\tau) d\tau \quad (27.70)$$

и, следовательно, является неособой матрицей.

Через $M_2(t, t_0)$ обозначим $n \times n$ -матрицу, удовлетворяющую матричному дифференциальному уравнению

$$\left. \begin{aligned} M_2(t, t_0) &= A_2^*(t) M_2(t, t_0), & t \in [t_0, T], \\ M_2(t_0, t_0) &= E. \end{aligned} \right\} \quad (27.71)$$

Аналогично (70)

$$\det M_2(t, t_0) = \exp \int_{t_0}^t \text{Sp } A_2^*(\tau) d\tau, \quad (27.72)$$

то есть матрица $M_2(t, t_0)$ является неособой.

Решение дифференциального уравнения (68) будет иметь вид

$$P(t) = M_1(t, t_0) P(t_0) M_2^*(t, t_0) \quad (t \in [t_0, T]), \quad (27.73)$$

в справедливости чего можно убедиться непосредственной подстановкой. Из (73) следует, что

$$P(T) = M_1(T, t_0) P(t_0) M_2^*(T, t_0). \quad (27.74)$$

Так как согласно (63) $P(T) = L(T)$, то есть $P(T)$ является симметрической положительно-определенной матрицей, то

$$\det P(T) \neq 0,$$

и в силу (70) и (72) из соотношения (74) следует, что

$$\det P(t_0) \neq 0.$$

Из соотношения (73) тогда вытекает, что

$$\det P(t) \neq 0 \quad (t \in [t_0, T]). \quad (27.75)$$

Так как согласно (67) $A_2^*(t) = A_1(t)$, то в силу уравнений (69) и (71) $M_2(t, t_0) = M_1(t, t_0)$, и выражение (73) принимает вид

$$P(t) = M_1(t, t_0) P(t_0) M_1^*(t, t_0), \quad t \in [t_0, T]. \quad (27.76)$$

Из (76), (75) и (66) следует, что матрица $P(t)$, $t \in [t_0, T]$, удовлетворяющая дифференциальному уравнению (59) и граничному условию (63), является симметрической положительно-определенной матрицей.

Учитывая, что $P(t)$, $\Sigma(t)$ и $R(t)$ являются симметрическими матрицами, можно представить необходимое условие (56) минимума функции \mathcal{H} в следующем виде:

$$P(t) [-\Sigma(t) C^*(t) + G(t) R(t)] = 0. \quad (27.77)$$

Так как согласно (75) $P(t)$ является неособой матрицей, то соотношение (77) может иметь место лишь при выполнении условия

$$-\Sigma(t) C^*(t) + G(t) R(t) = 0. \quad (27.78)$$

Матричное уравнение (78), в котором неизвестной является матрица $G(t)$, имеет единственное решение

$$G(t) = \Sigma(t) C^*(t) R^{-1}(t). \quad (27.79)$$

Матрица $G(t)$, определяемая выражением (79), и представляет собой *оптимальное управление*, доставляющее минимум функционалу (24).

Подставляя в дифференциальное уравнение (37) значение $G(t)$ согласно (79), приведем это уравнение к виду

$$\dot{\Sigma}(t) = A(t) \Sigma(t) + \Sigma(t) A^*(t) - \\ - \Sigma(t) C^*(t) R^{-1}(t) C(t) \Sigma(t) + B(t) Q(t) B^*(t), \quad (27.80)$$

$$\Sigma(t_0) = \Sigma_0. \quad (27.81)$$

В работах Калмана [34, 35] показано, что в случае, когда Σ_0 — неотрицательно-определенная матрица, уравнение (80) имеет единственное решение, которое существует для всех $t \geq t_0$.

Согласно (20) и (79) дифференциальное уравнение оптимального фильтра будет иметь следующий вид:

$$\dot{w} = [A(t) - \Sigma(t) C^*(t) R^{-1}(t) C(t)] w + \\ + \Sigma(t) C^*(t) R^{-1}(t) z(t), \quad w(t_0) = \bar{x}_0, \quad (27.82)$$

где $\Sigma(t)$ — решение дифференциального уравнения Риккати (80), удовлетворяющее начальному условию (81).

Решение $w(t)$ ($t_0 \leq t \leq T$) дифференциального уравнения (82) представляет собой несмещенную оптимальную оценку состояния $x(t)$ системы (1).

Сделаем еще следующие замечания. Уравнение (82) можно представить в виде

$$\left. \begin{aligned} \dot{w} &= A(t) w + \Sigma(t) C^*(t) R^{-1}(t) [z(t) - C(t) w], \\ w(t_0) &= \bar{x}_0, \end{aligned} \right\} \quad (27.83)$$

где согласно (6) и (11)

$$z(t) - C(t) w = C(t) [x(t) - w(t)] + v(t) = C(t) e(t) + v(t). \quad (27.84)$$

Таким образом, оптимальный фильтр представляет собой систему с *обратной связью*, сигнал на входе которой состоит из зависящей от рассогласования функции $C(t)e(t)$ и аддитивной помехи в виде белого шума $v(t)$.

Из дифференциального уравнения (80) и выражения (79) видно, что матрицы $\Sigma(t)$ и $G(t)$ не зависят от входящего в функционал (23) значения T конца отрезка времени $[t_0, T]$, на котором ведется наблюдение. От значения T зависит лишь матрица $P(t)$, определяемая дифференциальным уравнением (59) и граничным условием (63). Однако при определении матрицы $G(t)$ из условия (56) потребовалось лишь свойство симметричности и невырожденности матрицы $P(t)$. Это позволяет заключить, что оптимальный фильтр (82) доставляет *равномерно по t* несмещенную оптимальную оценку состояния $x(t)$ системы (1).

Как следует из (79), (80) и (81), оптимальный фильтр не зависит от конкретного вида матрицы $L(T)$. Однако предположение о том, что $L(T)$ — симметрическая положительно-определенная матрица, весьма существенно, так как только при этом, как видно из (63), (74) и (76), будет положительно-определенной матрица $P(t)$. Выражение (79) для матрицы G получено из условия $\partial \mathcal{H} / \partial G = 0$ и определяет собой единственное экстремальное значение функции \mathcal{H} . Симметрическая матрица $\partial^2 \mathcal{H} / \partial G^2$ типа $nm \times nm$, элементами которой являются частные производные $\partial^2 \mathcal{H} / \partial g_{jk} \partial g_{il}$ ($j, i = 1, \dots, n; k, l = 1, \dots, m$), может быть представлена в виде симметрической блочной матрицы S типа $m \times m$, элементы которой $s_{\mu\nu}$ имеют вид $s_{\mu\nu} = 2P(t)r_{\mu\nu}(t)$, где $r_{\mu\nu}$ — элементы матрицы R . Можно показать, что матрица $\partial^2 \mathcal{H} / \partial G^2$ будет положительно-определенной матрицей лишь в случае, когда $P(t)$ является положительно-определенной матрицей.

Следующее доказательство этого утверждения принадлежит А. М. Формальскому. Пусть $\Xi(t)$ — $n \times n$ -матрица, удовлетворяющая условию $\Xi^*(t)P(t)\Xi(t) = \hat{E}$, где \hat{E} — единичная матрица типа $n \times n$. Тогда

$$\begin{bmatrix} \Xi^* & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \Xi^* \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} Pr_{11} & \dots & Pr_{1m} \\ \dots & \dots & \dots \\ Pr_{m1} & \dots & Pr_{mm} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \Xi & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \Xi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{E}r_{11} & \dots & \hat{E}r_{1m} \\ \dots & \dots & \dots \\ \hat{E}r_{m1} & \dots & \hat{E}r_{mm} \end{bmatrix}.$$

Обозначая через N $m \times m$ -матрицу, удовлетворяющую условию $N^*RN = E$, где E — единичная матрица типа $m \times m$, будем иметь

$$\begin{bmatrix} \hat{E}n_{11} & \dots & \hat{E}n_{m1} \\ \dots & \dots & \dots \\ \hat{E}n_{1m} & \dots & \hat{E}n_{mm} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \hat{E}r_{11} & \dots & \hat{E}r_{1m} \\ \dots & \dots & \dots \\ \hat{E}r_{m1} & \dots & \hat{E}r_{mm} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \hat{E}n_{11} & \dots & \hat{E}n_{1m} \\ \dots & \dots & \dots \\ \hat{E}n_{m1} & \dots & \hat{E}n_{mm} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{E} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \hat{E} \end{bmatrix},$$

что и доказывает сделанное выше утверждение.

Из изложенного видно, что только при условии, что $P(t)$ — положительно-определенная матрица, функция \mathcal{H} имеет мини-

мум при значении (79) матрицы G . Таким образом, матрица G , определяемая выражением (79), доставляет функции \mathcal{H} минимум и, следовательно, удовлетворяет необходимым условиям оптимальности для функционалов вида (23) лишь при условии, что $L(T)$ — положительно-определенная матрица.

Отметим, что управление (79) удовлетворяет не только необходимым, но и достаточным условиям оптимальности, что можно доказать, как и в § 24, рассмотрением для данной задачи уравнения Беллмана, аналогичного уравнению (24.46).

Аналогично (24.42) покажем теперь, как матрица $\Sigma(t)$, являющаяся решением дифференциального уравнения Риккати (80) при начальном условии (81), может быть выражена при помощи фундаментальной матрицы решений следующей системы линейных векторных дифференциальных уравнений:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\xi}{dt} &= -A^*(t) \xi + C^*(t) R^{-1}(t) C(t) \rho, \\ \frac{d\rho}{dt} &= B(t) Q(t) B^*(t) \xi + A(t) \rho, \end{aligned} \right\} \quad (27.85)$$

где $\xi(t)$ и $\rho(t)$ — n -мерные векторы.

Нетрудно проверить, что из (85) вытекает соотношение

$$\rho(t) = \Sigma(t) \xi(t), \quad (27.86)$$

где $\Sigma(t)$ — решение уравнения Риккати (80). Действительно, в соответствии с (86) второе уравнение (85) принимает вид

$$\dot{\Sigma}(t) \xi(t) + \Sigma(t) \dot{\xi}(t) = B(t) Q(t) B^*(t) \xi(t) + A(t) \Sigma(t) \xi(t). \quad (27.87)$$

Подставляя в уравнение (87) вместо $\dot{\xi}(t)$ правую часть первого уравнения (85) и учитывая (86), получим следующее соотношение:

$$[\dot{\Sigma}(t) - A(t) \Sigma(t) - \Sigma(t) A^*(t) + \Sigma(t) C^*(t) R^{-1}(t) C(t) \Sigma(t) - B(t) Q(t) B^*(t)] \xi(t) = 0. \quad (27.88)$$

Соотношение (88) удовлетворяется тождественно в силу дифференциального уравнения Риккати (80), которым определена матрица $\Sigma(t)$. Это и доказывает справедливость соотношения (86).

Фундаментальную матрицу решений системы векторных дифференциальных уравнений (85) обозначим через $\Phi(t)$. Через $\Psi(t, t_0)$ обозначим $2n \times 2n$ -матрицу

$$\Psi(t, t_0) = \Phi(t) \Phi^{-1}(t_0). \quad (27.89)$$

Решение системы векторных уравнений (85) будет следующим:

$$\begin{bmatrix} \xi(t) \\ \rho(t) \end{bmatrix} = \Psi(t, t_0) \begin{bmatrix} \xi(t_0) \\ \rho(t_0) \end{bmatrix}. \quad (27.90)$$

Представляя $2n \times 2n$ -матрицу $\Psi(t, t_0)$ в виде блочной матрицы, элементы которой являются $n \times n$ -матрицами

$$\Psi(t, t_0) = \begin{bmatrix} \Psi_{11}(t, t_0) & \Psi_{12}(t, t_0) \\ \Psi_{21}(t, t_0) & \Psi_{22}(t, t_0) \end{bmatrix}, \quad (27.91)$$

получим из (90) следующие соотношения:

$$\left. \begin{aligned} \xi(t) &= \Psi_{11}(t, t_0) \xi(t_0) + \Psi_{12}(t, t_0) \rho(t_0), \\ \rho(t) &= \Psi_{21}(t, t_0) \xi(t_0) + \Psi_{22}(t, t_0) \rho(t_0). \end{aligned} \right\} \quad (27.92)$$

Так как согласно (86) и (81)

$$\rho(t_0) = \Sigma_0 \xi(t_0), \quad (27.93)$$

то в соответствии с (86) и (92) будем иметь

$$\Sigma(t) [\Psi_{11}(t, t_0) + \Psi_{12}(t, t_0) \Sigma_0] = \Psi_{21}(t, t_0) + \Psi_{22}(t, t_0) \Sigma_0, \quad (27.94)$$

откуда следует, что

$$\Sigma(t) = [\Psi_{21}(t, t_0) + \Psi_{22}(t, t_0) \Sigma_0] [\Psi_{11}(t, t_0) + \Psi_{12}(t, t_0) \Sigma_0]^{-1}. \quad (27.95)$$

2. Стационарные системы с бесконечным временем наблюдения. Рассмотрим теперь предельный случай, когда начальный момент времени наблюдения $t_0 \rightarrow -\infty$. В этом случае мы имеем систему с бесконечным временем наблюдения, так как при $t_0 \rightarrow -\infty$ интервал наблюдения удовлетворяет условию

$$\lim_{t_0 \rightarrow -\infty} (t - t_0) = \infty.$$

Предположим, что система (1) является стационарной, то есть A , B и C — постоянные матрицы, а входящие в выражения (3) и (7) матрицы Q и R — постоянные, положительно-определенные матрицы. Предположим также, что система (1) *вполне управляема и вполне наблюдаема*. Для стационарной системы это будет иметь место при выполнении условий

$$\text{ранг } [B \ AB \ \dots \ A^{n-1}B] = n, \quad \text{ранг } [C^* \ A^*C^* \ \dots \ A^{*n-1}C^*] = n. \quad (27.96)$$

Решение уравнения Риккати (80) при начальном условии (81) обозначим через $\Sigma(t; \Sigma_0, t_0)$. Решение, соответствующее начальному условию $\Sigma(t_0) = 0$, будет $\Sigma(t; 0, t_0)$.

В рассматриваемом здесь случае уравнение Риккати (80) принимает вид

$$\dot{\Sigma} = A\Sigma + \Sigma A^* - \Sigma C^* R^{-1} C \Sigma + BQB^*. \quad (27.97)$$

В работах Калмана [34, 35] показано, что при выполнении условий (96) имеют место следующие результаты.

1°. Решение $\Sigma(t; 0, t_0)$ уравнения Риккати (97) имеет при $t_0 \rightarrow -\infty$ предел

$$\lim_{t_0 \rightarrow -\infty} \Sigma(t; 0, t_0) = \hat{\Sigma}, \quad (27.98)$$

который существует для всех t , причем $\hat{\Sigma}$ есть постоянная

симметрическая положительно-определенная матрица, являющаяся решением нелинейного матричного алгебраического уравнения

$$A\hat{\Sigma} + \hat{\Sigma}A^* - \hat{\Sigma}C^*R^{-1}C\hat{\Sigma} + BQB^* = 0. \quad (27.99)$$

2°. Каждое решение уравнения Риккати (97), удовлетворяющее начальному условию $\Sigma(t_0) = \Sigma_0$, где $t_0 > -\infty$, а Σ_0 — неотрицательно-определенная матрица, стремится равномерно к $\hat{\Sigma}$ при $t \rightarrow \infty$, то есть матрица $\hat{\Sigma}$ представляет собой единственное положительно-определенное состояние равновесия, удовлетворяющее дифференциальному уравнению (97).

3°. Оптимальный фильтр, описываемый согласно (82) и (98) дифференциальным уравнением

$$\dot{w} = (A - \hat{\Sigma}C^*R^{-1}C)w + \hat{\Sigma}C^*R^{-1}z(t), \quad (27.100)$$

асимптотически устойчив, то есть характеристические числа матрицы $A - \hat{\Sigma}C^*R^{-1}C$ имеют отрицательные действительные части.

3. Нестационарные системы с бесконечным временем наблюдения. Рассмотрим теперь для исходной нестационарной системы (1) предельный случай, когда начальный момент времени наблюдения $t_0 \rightarrow -\infty$. При этом будем предполагать, что существуют такие фиксированные положительные постоянные $\sigma, \alpha_1, \dots, \alpha_4$, что для всех t выполняются условия

$$0 < \alpha_1 E \leq \mathcal{M}(t - \sigma, t) \leq \alpha_2 E, \quad (27.101)$$

$$0 < \alpha_3 E \leq W(t - \sigma, t) \leq \alpha_4 E, \quad (27.102)$$

где E — единичная матрица,

$$\mathcal{M}(t - \sigma, t) = \int_{t-\sigma}^t \Phi^*(\tau, t - \sigma) C^*(\tau) C(\tau) \Phi(\tau, t - \sigma) d\tau, \quad (27.103)$$

$$W(t - \sigma, \tau) = \int_{t-\sigma}^t \Phi(t - \sigma, \tau) B(\tau) B^*(\tau) \Phi^*(t - \sigma, \tau) d\tau. \quad (27.104)$$

Здесь $\Phi(t, \tau) = \theta(t)\theta^{-1}(\tau)$, а $\theta(t)$ — фундаментальная матрица решений однородного векторного уравнения

$$\dot{x} = A(t)x.$$

Условие (101) означает, что система (1) *равномерно вполне наблюдаема*; условие (102) означает, что система (1) *равномерно вполне управляема*.

Заметим, что для симметрических матриц M и N условия $M > N$ и $M \geq N$ означают, что матрица $M - N$ является соответственно положительно-определенной и неотрицательно-определенной матрицей.

Норму матрицы A будем обозначать через $\|A\|$. Обозначая через $\|x\|$ норму n -мерного вектора x из n -мерного пространства X и полагая $\|x\| = \sqrt{x^*x}$, примем в качестве нормы $\|A\|$ матрицы A следующую величину:

$$\|A\| = \sup_{\substack{x \in X \\ x \neq 0}} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}.$$

Кроме условий (101) и (102) будем предполагать, что $Q(t)$ — положительно-определенная матрица и что для всех t нормы матриц $Q(t)$, $R(t)$ и $A(t)$ удовлетворяют условиям

$$\alpha_5 \leq \|Q(t)\| \leq \alpha_6, \quad \alpha_7 \leq \|R(t)\| \leq \alpha_8, \quad \|A(t)\| \leq \alpha_9, \quad (27.105)$$

где $\alpha_5, \dots, \alpha_9$ — некоторые фиксированные положительные постоянные.

В цитированных выше работах Калмана [34, 35] показано, что при выполнении условий (101), (102), (105) имеют место следующие результаты.

1°. Решение $\Sigma(t; \Sigma_0, t_0)$ уравнения Риккати (80) в случае, когда $\Sigma(t_0) = \Sigma_0$ — неотрицательно-определенная матрица, будет равномерно ограниченной, положительно-определенной матрицей для всех $t \geq t_0 + \sigma$.

2°. Норма матрицы $\Sigma^{(a)}(t) - \Sigma^{(b)}(t)$, где $\Sigma^{(a)}(t)$ и $\Sigma^{(b)}(t)$ — решения уравнения Риккати (80) при начальных условиях $\Sigma^{(a)}(t_0) = \Sigma_0^{(a)}$ и $\Sigma^{(b)}(t_0) = \Sigma_0^{(b)}$ соответственно, а $\Sigma_0^{(a)}$ и $\Sigma_0^{(b)}$ — неотрицательно-определенные матрицы, удовлетворяет условию

$$\|\Sigma^{(a)}(t) - \Sigma^{(b)}(t)\| \leq c_1 e^{-c_2(t-t_0)} \|\Sigma^{(a)}(t_0) - \Sigma^{(b)}(t_0)\| \quad (c_1, c_2 > 0) \quad (27.106)$$

для всех $t \geq t_0$.

3°. Решение $\Sigma(t; 0, t_0)$ уравнения Риккати (80), соответствующее начальному условию $\Sigma(t_0) = 0$, имеет при $t_0 \rightarrow -\infty$ предел

$$\lim_{t_0 \rightarrow -\infty} \Sigma(t; 0, t_0) = \tilde{\Sigma}(t), \quad (27.107)$$

который существует для всех t .

4°. Каждое решение $\Sigma(t; \Sigma_0, t_0)$ уравнения Риккати (80), удовлетворяющее начальному условию $\Sigma(t_0) = \Sigma_0$, где $t_0 > -\infty$, а Σ_0 — неотрицательно-определенная матрица, равномерно сходится к $\tilde{\Sigma}(t)$, где матрица $\tilde{\Sigma}(t)$ определена выражением (107). В этом смысле $\tilde{\Sigma}(t)$ есть подвижное состояние равновесия, удовлетворяющее дифференциальному уравнению (80).

5°. Оптимальный фильтр, описываемый согласно (82) и (107) дифференциальным уравнением

$$\dot{\omega} = [A(t) - \tilde{\Sigma}(t)C^*(t)R^{-1}(t)C(t)]\omega + \tilde{\Sigma}(t)C^*(t)R^{-1}(t)z(t), \quad (27.108)$$

равномерно асимптотически устойчив, то есть норма матрицы $\Lambda(t, t_0)$ удовлетворяет условию

$$\|\Lambda(t, t_0)\| \leq \alpha e^{-\beta(t-t_0)} \text{ для всех } t \geq t_0,$$

где α и β — некоторые положительные постоянные, $\Lambda(t, t_0) = v(t)v^{-1}(t_0)$, а $v(t)$ — фундаментальная матрица решений однородного векторного дифференциального уравнения, образуемого из (108) при $z(t) \equiv 0$.

4. Оптимальная фильтрация коррелированных шумов. Оптимальные фильтры Калмана — Бьюси построены в предыдущих разделах для случая, когда помехи представляют собой белый шум. Обобщение на случай, когда измерения сигнала на выходе системы искажены шумами, образуемыми в результате прохождения белого шума через линейную нестационарную систему, дано в работах Бьюси [19].

Рассмотрим систему, описываемую векторными уравнениями

$$\left. \begin{aligned} \dot{x} &= A(t)x + B(t)u(t), & x(t_0) &= c, \\ \dot{v} &= S(t)v + \kappa(t), & v(t_0) &= b, \\ z(t) &= Cx(t) + v(t). \end{aligned} \right\} \quad (27.109)$$

Здесь x — n -мерный вектор состояния системы; $u(t)$ — r -мерный вектор, представляющий сигнал на входе системы; $A(t)$ — $n \times n$ -матрица; $B(t)$ — $n \times r$ -матрица; $\kappa(t)$ — m -мерный вектор; v — m -мерный вектор; $S(t)$ — $m \times m$ -матрица; $z(t)$ — m -мерный вектор; C — постоянная $m \times n$ -матрица.

Входной сигнал $u(t)$ есть векторный случайный гауссов процесс типа белого шума с нулевым средним значением

$$M\{u(t)\} = 0 \quad (27.110)$$

и корреляционной матрицей

$$\text{cov}[u(t); u(\tau)] = M\{u(t)u^*(\tau)\} = \delta(t - \tau)Q(t), \quad (27.111)$$

где $\delta(t)$ — дельта-функция Дирака, а $Q(t)$ — симметрическая неотрицательно-определенная $r \times r$ -матрица.

Сигнал $\kappa(t)$ есть векторный случайный гауссов процесс типа белого шума с нулевым средним значением

$$M\{\kappa(t)\} = 0 \quad (27.112)$$

и корреляционной матрицей

$$\text{cov}[\kappa(t); \kappa(\tau)] = M\{\kappa(t)\kappa^*(\tau)\} = \delta(t - \tau)R(t), \quad (27.113)$$

где $R(t)$ — симметрическая положительно-определенная $m \times m$ -матрица.

Вектор c — гауссова n -мерная векторная случайная величина, не зависящая от $u(t)$, с нулевым средним значением и известной корреляционной матрицей

$$M\{cc^*\} = \Gamma. \quad (27.114)$$

Вектор b — гауссова m -мерная векторная случайная величина, не зависящая от $\kappa(t)$, с нулевым средним значением и известной корреляционной матрицей

$$M\{bb^*\} = \mathcal{K}. \quad (27.115)$$

Предполагается, что $u(t)$, $\kappa(t)$, c и b некоррелированы.

Через $\hat{x}(t)$ обозначим оптимальную, то есть доставляющую минимум функционалу (24), оценку состояния $x(t)$ системы (109) по доступной измерению на отрезке времени $[t_0, T]$ вектор-функции $z(t)$.

Аналогично (26.116) оптимальная оценка $\hat{x}(t)$ удовлетворяет лемме об ортогональной проекции в гильбертовом пространстве, которая в данной задаче приводит к соотношению

$$M\{[x(t) - \hat{x}(t)]z^*(\tau)\} = 0, \quad t_0 \leq \tau < t. \quad (27.116)$$

Обозначим через $\mathcal{D}(t)$ и \mathcal{U} следующие симметрические $m \times m$ -матрицы:

$$\mathcal{D}(t) = CB(t)Q(t)B^*(t)C^* + R(t), \quad (27.117)$$

$$\mathcal{U} = \Gamma C^* + \mathcal{K}. \quad (27.118)$$

Будем далее предполагать, что $\mathcal{D}(t)$ и \mathcal{U} — положительно-определенные матрицы.

Как показано Бьюси [19], оптимальная оценка $\hat{x}(t)$ состояния $x(t)$ системы (109) будет

$$\hat{x}(t) = w(t), \quad (27.119)$$

где $w(t)$ — решение дифференциального уравнения

$$\dot{w} = [A(t) - \mathcal{W}^p(t)CA(t) + \mathcal{W}^p(t)S(t)C]w + \\ + \mathcal{W}^p(t)\dot{z}(t) - \mathcal{W}^p(t)S(t)z(t), \quad (27.120)$$

$$w(t_0) = \Gamma C^* \mathcal{U}^{-1} z(t_0).$$

Здесь через $\mathcal{W}^p(t)$ обозначена следующая $n \times m$ -матрица:

$$\mathcal{W}^p(t) = \{\mathcal{E}(t)[A^*(t)C^* - C^*S(t)] + B(t)Q(t)B^*(t)C^*\} \mathcal{D}^{-1}(t), \quad (27.121)$$

а $\mathcal{E}(t)$ представляет собой решение матричного дифференциаль-

ного уравнения Риккати

$$\dot{\mathcal{E}} = A(t) \mathcal{E} + \mathcal{E} A^*(t) - \mathcal{W}^\rho(t) \mathcal{D}(t) \mathcal{W}^{\rho*}(t) + B(t) Q(t) B^*(t), \quad (27.122)$$

удовлетворяющее начальному условию

$$\mathcal{E}(t_0) = \Gamma - \Gamma C^* \mathcal{U}^{-1} C \Gamma = \mathcal{F}. \quad (27.123)$$

Дифференциальное уравнение (120) является уравнением *оптимального фильтра* для рассматриваемой здесь задачи.

Обозначим через $\rho(t)$ n -мерную вектор-функцию

$$\rho(t) = \omega(t) - \mathcal{W}^\rho(t) z(t). \quad (27.124)$$

Через $\mathcal{F}(t)$ и $\mathcal{N}^\rho(t)$ обозначим следующие $m \times m$ и $m \times m$ -матрицы:

$$\mathcal{F}(t) = A(t) - \mathcal{W}^\rho(t) C A(t) + \mathcal{W}^\rho(t) S(t) C, \quad (27.125)$$

$$\mathcal{N}^\rho(t) = \mathcal{F}(t) \mathcal{W}^{\rho*}(t) - \mathcal{W}^\rho(t) S(t) - \frac{d\mathcal{W}^\rho}{dt}. \quad (27.126)$$

Уравнение (120) оптимального фильтра можно теперь преобразовать к следующему виду:

$$\dot{\rho} = \mathcal{F}(t) \rho + \mathcal{N}^\rho(t) z(t), \quad (27.127)$$

$$\rho(t_0) = [\Gamma C^* \mathcal{U}^{-1} - \mathcal{W}^\rho(t_0)] z(t_0).$$

В отличие от уравнения (120), уравнение (127) не содержит в своей правой части производной от определяемой при помощи наблюдений вектор-функции $z(t)$.

Определив из дифференциального уравнения (127) вектор-функцию $\rho(t)$, найдем в соответствии с (124) и (119) искомую оценку $\hat{x}(t)$ состояния системы:

$$\hat{x}(t) = \rho(t) + \mathcal{W}^\rho(t) z(t). \quad (27.128)$$

Покажем еще, что уравнение Риккати (122) можно привести к виду, аналогичному уравнению (80). Для этого введем следующие обозначения:

$$\left. \begin{aligned} \tilde{A}(t) &= A(t) - B(t) Q(t) B^*(t) C^* \mathcal{D}^{-1}(t) \tilde{C}(t), \\ \tilde{B}(t) &= B(t), \quad \tilde{C}(t) = C A(t) - S(t) C, \\ \tilde{Q}(t) &= Q(t) - Q(t) B^*(t) C^* \mathcal{D}^{-1}(t) C B(t) Q(t), \\ \tilde{R}(t) &= \mathcal{D}(t). \end{aligned} \right\} \quad (27.129)$$

Заметим, что поскольку $\mathcal{D}(t)$ и $\mathcal{E}(t)$ — симметрические матрицы, то согласно (121) и (129) имеют место следующие соотношения:

$$\mathcal{W}(t) = [\mathcal{E}(t) \tilde{C}^*(t) + B(t)Q(t)B^*(t)C^*] \mathcal{D}^{-1}(t), \quad (27.130)$$

$$\mathcal{W}^*(t) = \mathcal{D}^{-1}(t) [\tilde{C}(t)\mathcal{E}(t) + CB(t)Q(t)B^*(t)], \quad (27.131)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{W}(t)\mathcal{D}(t)\mathcal{W}^*(t) &= \mathcal{E}(t)\tilde{C}^*(t)\mathcal{D}^{-1}(t)\tilde{C}(t)\mathcal{E}(t) + \\ &+ \mathcal{E}(t)\tilde{C}^*(t)\mathcal{D}^{-1}(t)CB(t)Q(t)B^*(t) + \\ &+ B(t)Q(t)B^*(t)C^*\mathcal{D}^{-1}(t)\tilde{C}(t)\mathcal{E}(t) + \\ &+ B(t)Q(t)B^*(t)C^*\mathcal{D}^{-1}(t)CB(t)Q(t)B^*(t). \end{aligned} \quad (27.132)$$

Подставляя выражение (132) в уравнение (122), приведем это уравнение к виду

$$\dot{\mathcal{E}} = \tilde{A}(t)\mathcal{E} + \mathcal{E}\tilde{A}^*(t) - \mathcal{E}\tilde{C}^*(t)\tilde{R}^{-1}(t)\tilde{C}(t)\mathcal{E} + \tilde{B}(t)\tilde{Q}(t)\tilde{B}^*(t), \quad (27.133)$$

$$\mathcal{E}(t_0) = \mathcal{F}.$$

Дифференциальное уравнение (127) оптимального фильтра, в соответствии с (130) и (129), принимает вид

$$\begin{aligned} \dot{\rho} &= [\tilde{A}(t) - \mathcal{E}(t)\tilde{C}^*(t)\tilde{R}^{-1}(t)\tilde{C}(t)]\rho + \mathcal{N}(t)z(t), \\ \rho(t_0) &= [\Gamma C^* \mathcal{U}^{-1} - \mathcal{W}^*(t_0)]z(t_0). \end{aligned} \quad (27.134)$$

Дифференциальное уравнение Риккати (133) отличается от уравнения Риккати (80) лишь заменой параметров $A(t)$, $B(t)$, $C(t)$, $Q(t)$ и $R(t)$ соответственно на $\tilde{A}(t)$, $\tilde{B}(t)$, $\tilde{C}(t)$, $\tilde{Q}(t)$ и $\tilde{R}(t)$. В таком же соответствии находятся и однородные дифференциальные уравнения, которые образуются из уравнений (134) и (82) при $z(t) \equiv 0$. Поэтому приведенные в п. 3 результаты для систем с бесконечным временем наблюдения распространяются и на рассматриваемую здесь задачу. Разумеется, входящие в соотношения (103), (104) и (105) функции $A(t)$, $B(t)$, $C(t)$, $Q(t)$ и $R(t)$ должны быть при этом заменены функциями $\tilde{A}(t)$, $\tilde{B}(t)$, $\tilde{C}(t)$, $\tilde{Q}(t)$ и $\tilde{R}(t)$ соответственно.

ЛИТЕРАТУРА *)

1. Айзекс Р. (Isaacs R.), Дифференциальные игры. Перев. с англ., изд-во «Мир», 1967.
2. Айзерман М. А., Теория автоматического управления. Изд-во «Наука», 1966.
3. Айзерман М. А., Гантмахер Ф. Р., Абсолютная устойчивость регулируемых систем. Изд-во Академии наук СССР, 1963.
4. Андронов А. А., Витт А. А., Хайкин С. Э., Теория колебаний. Изд. 2-е, Физматгиз, 1959.
5. Атанс М. (Athans M.), A direct derivation of the Optimal Linear Filters, using the maximal principle. IEEE, Transactions on Automatic Control, № 6, 1967, pp. 690—697.
6. Атанс М., Фалб П. (Athans M., Falb P.), Оптимальное управление. Перев. с англ., изд-во «Машиностроение», 1968.
7. Барбашин Е. А., Введение в теорию устойчивости. Изд-во «Наука», 1967.
8. Беллман Р. (Bellman R.), Динамическое программирование. Перев. с англ., изд-во иностранной литературы, 1960.
9. Беллман Р., Гликсберг И., Гросс О. (Bellman R., Glicksberg I., Gross O.), Некоторые вопросы математической теории процессов управления. Перев. с англ., изд-во иностранной литературы, 1962.
10. Беллман Р., Калаба Р. (Bellman R., Kalaba R.), Динамическое программирование и современная теория управления. Перев. с англ., изд-во «Наука», 1969.
11. Беллман Р., Кук К. (Bellman R., Cooke K.), Дифференциально-разностные уравнения. Перев. с англ., изд-во «Мир», 1967.
12. Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А., Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. Гостехиздат, 1955.
13. Боде Г. (Bode H.), Теория цепей и проектирование усилителей с обратной связью. Перев. с англ., изд-во иностранной литературы, 1948.
14. Болтянский В. Г., Достаточные условия оптимальности и обоснование метода динамического программирования. Изв. АН СССР, серия математическая, т. 28, № 3, 1964, стр. 481—514.
15. Болтянский В. Г., Математические методы оптимального управления. Изд. 2-е, изд-во «Наука», 1969.
16. Брайсон А., Хо Ю. (Bryson A., Yu-Chi Ho.), Applied Optimal Control. Blaisdell Publishing Company, 1969.
17. Булгаков Б. В., Колебания. Гостехиздат, 1954.

*) Список литературы ни в коей мере не претендует на полноту. Указаны лишь основные монографии, обзорные работы и небольшое число журнальных статей.

18. Бутковский А. Г., Теория оптимального управления системами с распределенными параметрами. Изд-во «Наука», 1965.
19. Бьюси Р. (Bucy R. S.) Optimal Filtering for Correlated Noise. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, v. 20, № 1, 1967, p.p. 1—8.
20. Винер Н. (Wiener N.), Extrapolation, interpolation and smoothing of stationary Time Series. J. Wiley, New York, Second printing, 1950.
21. Гантмахер Ф. Р., Теория матриц. Изд-во «Наука», 1966.
22. Гантмахер Ф. Р., Якубович В. А., Абсолютная устойчивость нелинейных регулируемых систем. Труды II Всесоюзного съезда по теоретической и прикладной механике, Обзорные доклады, вып. 1, Изд-во «Наука», 1965, стр. 30—63.
23. Гельфанд И. М., Лекции по линейной алгебре. Изд. 3-е, изд-во «Наука», 1966.
24. Гельфанд И. М., Фомин С. В., Вариационное исчисление. Физматгиз, 1961.
25. Гихман И. И., Скороход А. В., Введение в теорию случайных процессов. Изд-во «Наука», 1965.
26. Гихман И. И., Скороход А. В., Стохастические дифференциальные уравнения. Изд-во «Наукова думка», 1967.
27. Гноенский Л. С., Каменский А. Г., Эльсгольц Л. Э., Математические основы теории управляемых систем. Изд-во «Наука», 1969.
28. Демидович Б. П., Лекции по математической теории устойчивости. Изд-во «Наука», 1967.
29. Демьянов В. Ф., Рубинов А. М., Приближенные методы решения экстремальных задач. Изд-во Ленинградского университета, 1968.
30. Дубовицкий А. Я., Милютин А. А., Задачи на экстремум при наличии ограничений. *Журнал вычислительной математики и математической физики*, т. 5, № 3, 1965, стр. 395—493.
31. Зубов В. И., Колебания в нелинейных управляемых системах. Судпромгиз, 1962.
32. Ишлинский А. Ю., Инерциальное управление баллистическими ракетами. Изд-во «Наука», 1968.
33. Калман Р. (Kalman R.), A new approach to linear filtering and prediction problems. *J. Basic Engr. (ASME Trans.)*, v. 82, D, 1960, pp. 35—45.
34. Калман Р. (Kalman R.), Contributions to the Theory of optimal control. *Boletín de la Sociedad Matematica Mexicana*, v. 5, Segunda serie, № 1, 1960, pp. 102—119.
35. Калман Р. (Kalman R.), New methods in Wiener filtering theory. *Proceedings of the First Symposium on Engineering applications of random function theory and Probability*, J. Wiley, 1963, pp. 270—388.
36. Калман Р. (Kalman R.), Об общей теории систем управления. Труды I конгресса ИФАК, т. 2, Изд-во АН СССР, 1961, стр. 521—547.
37. Калман Р., Бьюси Р. (Kalman R., Bucy R.), New results in linear filtering and prediction theory. *J. Basic Engr. (ASME Trans.)*, v. 83, D, 1961, pp. 95—108.
38. Карлин С. (Karlin S.), Математические методы в теории игр, программировании и экономике. Изд-во «Мир», 1964.
39. Кирич Н. Е., Вычислительные методы в теории оптимального управления. Изд-во Ленинградского университета. 1968.
40. Колмогоров А. Н., Интерполяция и экстраполяция стационарных случайных последовательностей. *Изв. АН СССР, серия математическая*, № 5, 1941.
41. Конторович М. И., Операционное исчисление и процессы в электрических цепях. Изд. 3-е, изд-во «Наука», 1964.

42. Красовский Н. Н., Игровые задачи о встрече движений. Изд-во «Наука», 1970.
43. Красовский Н. Н., Некоторые задачи теории устойчивости движения. Физматгиз, 1959.
44. Красовский Н. Н., Теория оптимальных управляемых систем. Механика в СССР за 50 лет, т. I, «Общая и прикладная механика», изд-во «Наука», 1968, стр. 178—244.
45. Красовский Н. Н., Теория управления движением. Изд-во «Наука», 1968.
46. Кротов В. Ф., Методы решения вариационных задач на основе достаточных условий абсолютного минимума, ч. I, II, III. «Автоматика и телемеханика», т. 23, № 12, 1962; т. 24, № 5, 1963; т. 25, № 7, 1964.
47. Крылов Н. М., Боголюбов Н. Н., Введение в нелинейную механику. Изд-во АН УССР, 1937.
48. Куликовский Р. (Kulikowski R.), Оптимальные и адаптивные процессы в системах автоматического регулирования, Перев. с польск., изд-во «Наука», 1967.
49. Кушнер Г. Дж. (Kushner H. J.), Стохастическая устойчивость и управление. Перев. с англ., изд-во «Мир», 1969.
50. Лаппо-Данилевский И. А., Применение функций от матриц к теории линейных систем обыкновенных дифференциальных уравнений. Гостехиздат, 1957.
51. Латтес Р., Лионс Ж.-Л. (Lattes R., Lions J.-L.), Метод квазиобращения и его приложения. Перев. с франц., изд-во «Мир», 1970.
52. Лейтман Дж. (Leitmann G.), Введение в теорию оптимального управления. Перев. с англ., изд-во «Наука», 1968.
53. Летов А. М., Динамика полета и управление. Изд-во «Наука», 1969.
54. Лефшец С. (Lefschetz S.), Устойчивость нелинейных систем автоматического управления. Перев. с англ., изд-во «Мир», 1967.
55. Лефшец С., Ла-Салль Ж. (Lefschetz S., La Salle J.), Исследование устойчивости прямым методом Ляпунова. Перев. с англ., изд-во «Мир», 1964.
56. Ли Е., Маркус Л. (Lee E. B., Markus L.), Foundations of optimal control theory. J. Wiley, 1967.
57. Ли Р. (Lee R.), Оптимальные оценки, определение характеристик и управление. Перев. с англ., изд-во «Наука», 1966.
58. Лионс Ж.-Л. (Lions J.-L.), Contrôle optimal des systèmes gouvernés par des équations aux dérivées partielles. Dunod, Gauthier — Villars, 1968.
59. Лурье А. И., Некоторые нелинейные задачи теории автоматического регулирования. Гостехиздат, 1951.
60. Ляпунов А. М., Общая задача об устойчивости движения. Гостехиздат, 1960.
61. Мак-Кинси Дж. (Mc Kinsey J.), Введение в теорию игр. Перев. с англ., Физматгиз, 1960.
62. Малкин И. Г., Теория устойчивости движения. Изд. 2-е, изд-во «Наука», 1966.
63. Методы оптимизации с приложениями к механике космического полета. Под редакцией Дж. Лейтмана (G. Leitmann), перев. с англ., изд-во «Наука», 1965.
64. Митропольский Ю. А., Проблемы асимптотической теории нестационарных колебаний. Изд-во «Наука», 1964.
65. Михайлов А. В., Метод гармонического анализа в теории регулирования. Автоматика и телемеханика, № 3, 1938, стр. 27—81.

66. Моисеев Н. Н., Численные методы оптимального управления. Вычислительный центр АН СССР, 1968.
67. Мышкис А. Д., Линейные дифференциальные уравнения с запаздывающим аргументом. Гостехиздат, 1951.
68. Немецкий В. В., Степанов В. В., Качественная теория дифференциальных уравнений. Гостехиздат, 1949.
69. Основы автоматического управления. Под редакцией В. С. Пугачева, Физматгиз, 1963.
70. Охоцимский Д. Е., Энеев Т. М., Некоторые вариационные задачи, связанные с запуском искусственного спутника Земли. Успехи физ. наук, т. 63, № 1а, 1957.
71. Понтрягин Л. С., К теории дифференциальных игр. Успехи матем. наук, т. XXI, вып. 4 (130), 1966, стр. 219—275.
72. Понтрягин Л. С., Болтянский В. Г., Гамкрелидзе Р. В., Мищенко Е. Ф., Математическая теория оптимальных процессов. Изд. 2-е, изд-во «Наука», 1969.
73. Попов В.-М. (Роров V. M.), Об абсолютной устойчивости нелинейных систем автоматического регулирования. Автоматика и телемеханика, т. 22, № 8, 1961.
74. Пшеничный Б. Н., Необходимые условия экстремума. Изд-во «Наука», 1969.
75. Пуанкаре А. (Poincaré H.), О кривых, определяемых дифференциальными уравнениями. Перев. с франц., Гостехиздат, 1947.
76. Пугачев В. С., Теория случайных функций и ее приложение к задачам автоматического управления. Физматгиз, 1960.
77. Ройтенберг Я. Н., Некоторые задачи управления движением. Физматгиз, 1963.
78. Ройтенберг Я. Н., Теория нелинейных колебаний и автоматическое регулирование, ч. I, II. Изд-во Московского университета, 1967.
79. Румянцев В. В., Метод функций Ляпунова в теории устойчивости движения. Механика в СССР за 50 лет, т. I, «Общая и прикладная механика», изд-во «Наука», 1968, стр. 7—66.
80. Свешников А. А., Прикладные методы теории случайных функций. Изд-во «Наука», 1968.
81. Смирнов Н. С., Введение в теорию нелинейных интегральных уравнений. ОНТИ, 1936.
82. Титчмарш Е. (Titchmarsh E. C.), Введение в теорию интегралов Фурье. Перев. с англ., Гостехиздат, 1948.
83. Тихонов А. Н., О методах регуляризации задач оптимального управления. ДАН СССР, т. 162, № 4, 1965.
84. Троицкий В. А., О вариационных методах оптимизации процессов управления. Прикладная математика и механика, т. 26, № 1, 1962.
85. Фельдбаум А. А., Основы теории оптимальных автоматических систем. Изд. 2-е, изд-во «Наука», 1966.
86. Филиппов А. Ф., О некоторых вопросах теории оптимального регулирования. Вестник МГУ, серия матем., мех., астр., физ., хим., № 2, 1959.
87. Хасьминский Р. З., Устойчивость систем дифференциальных уравнений при случайных возмущениях их параметров. Изд-во «Наука», 1969.
88. Цыпкин Я. З., Адаптация и обучение в автоматических системах. Изд-во «Наука», 1968.
89. Четаев Н. Г., Устойчивость движения. Изд. 2-е, Гостехиздат, 1955.
90. Шилов Г. Е., Математический анализ. Специальный курс. Физматгиз, 1961.

91. Ш и л о в Г. Е., Математический анализ. Второй специальный курс. Изд-во «Наука», 1965.
92. Э л ь с г о л ь ц Л. Э., Введение в теорию дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом. Изд-во «Наука», 1964.
93. Я к у б о в и ч В. А., К теории адаптивных систем, ДАН СССР, т. 182, № 3, 1968, стр. 518—521.
94. Я к у б о в и ч В. А., Метод матричных неравенств в теории устойчивости нелинейных регулируемых систем, ч. I, II. Автоматика и телемеханика, т. 25, № 7, 1964, т. 26, № 4, 1965.
95. Я к у б о в и ч В. А., Решение некоторых специальных матричных неравенств, встречающихся в нелинейной теории регулирования. ДАН СССР, т. 156, № 2, 1964, стр. 278—281.

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

- Автоколебания 128, 135
Амплитуда вынужденных колебаний 137, 143
Амплитуды последовательные 126
Аргумент дискретный 135
- Белый шум 339, 366
Быстродействие 208, 228, 255
- Вариации координат 257
Вариация управления допустимая 266, 271
Вектор нормальный гиперповерхности 277
Величина случайная векторная 366
Винера интегральное уравнение 347, 355
Время оптимальное 262
- Гамильтона функция 115, 118, 247
Гамильтона—Якоби уравнение 248
Генератор ламповый 128
Гиперплоскость 272, 277
— касательная 277
— опорная 272
Гиперповерхность 277
— гладкая 294
Годограф вектора 44, 93, 103
- Движение дважды инфинитное 120
— — лимитационное 120
— инфинитно-лимитационное 120
— либрационное 121
— лимитационно-инфинитное 120
— периодическое 121, 128
— попятное 290, 293
Действие по Гамильтону 249, 313
Делитель детерминантный 63, 149
— элементарный старший 151
Дельта-функция Дирака 10, 51, 66, 366
Дисперсия 338, 344, 367
— ошибки 344, 353
- Задача краевая 273, 311
— о быстродействии 208, 228, 255, 292
— — — линейная для нестационарных систем 273
— — — для стационарных систем 305
— — — максимальном отклонении 308
Задача оптимальная с подвижными концами 277
— — — фиксированным временем 255
— слежения 329
Закон движения системы многомерной 65
— — — одномерной 56
Звено нейтральное 35
— неустойчивое 36
— с запаздыванием 42
— устойчивое 31
Зона застоя 126
- Изображение по Лапласу 12
— Фурье 98, 103
Импульс канонический 115
Интервал дискретности 211
- Карсона—Хевисайда преобразование 12
Клетка двумерная 289
— нульмерная 281
— одномерная 281, 289
Колебания вынужденные 135, 142
— собственные 11, 42, 115
— установившиеся 142
Компоненты матрицы 160, 163
Контур колебательный 129
Координаты обобщенные 18, 115
— фазовые 116, 132, 176, 185
Коэффициент взаимной индукции 129
— усиления разомкнутой цепи 45
Коэффициенты ошибок 82, 84
— — следящей системы 86

- Кривая резонансная 143
 Критерий Гурвитца 31
 — качества фильтра 368
 — — квадратичный 313 и др.
 — оптимальности 207
 — устойчивости Найквиста 31, 36, 43
- Лапласа преобразование 12
 Линия переключения управления 282, 289
- Масса приведенная 114, 135
 Математическое ожидание 337, 367
 Матрица возвратной разности 28
 — Грама 199
 — коагулированная 24, 179
 — корреляционная 366
 — — ошибки 368
 — неотрицательно-определенная 326, 377
 — полиномиальная 23, 150
 — положительно-определенная 183, 194, 368
 — присоединенная 19, 148
 — — приведенная 149
 — решений фундаментальная 109, 268, 334
 Матрицант 75
 Мера качества фильтра 369
 Метод динамического программирования 208 и др.
 — — для дискретных систем 211, 217
 — — для непрерывных систем 219
 — осреднения 142
 — последовательных приближений 113
 Многогранник криволинейный 240
 Многообразие гладкое 278
 Множество выпуклое 271
 — достижимости 271
 — кусочно-гладкое 240, 280
 Множитель инвариантный 150
- Наблюдаемость линейных систем нестационарных 197
 — — — стационарных 185, 191
 Найквиста диаграмма 36, 41
 — критерий устойчивости 31, 36, 43
 Наклон фазовой траектории 121
 Норма матрицы 382
- Объект управляемый 22
 — — нейтральный 35
 — — неустойчивый 35
- Определитель Вандермонда 159
 — Грама 188
 — операционной матрицы 24
 — характеристический замкнутой системы 25, 29
 — — разомкнутой системы 27, 29
 Осреднение 142
 Отображение конформное 32
 Оценка несмещенная 367
 Ошибка следящей системы 84
 — фильтра 367
- Парсеваля формула 98
 Переменные канонические 115, 247
 Период колебаний 128
 Плоскость фазовая 116
 Полином аннулирующий 148, 179
 — интерполяционный 153, 155, 178
 — матричный 147
 — минимальный 149, 151
 — характеристический 148
 Полоса пропускания 340
 Помеха 23, 344, 366, 378
 Понтрягина принцип максимума 251 и др., 313, 371
 — — — в задаче о быстродействии 255
 — — — для неавтономных систем 263
 Пóпова теорема 93
 Последовательность матриц 164
 Преобразование Гильберта 79
 — Карсона—Хевисайда 12
 — Лапласа 12
 — точечное 133
 — Фурье 14
 — — обратное 73
 Приближение линейное 108
 Принцип Гамильтона 313
 — двойственности 193
 — максимума Понтрягина 251 и др., 313, 371
 — оптимальности 209
 Прогноз случайных процессов 344
 Пространство фазовое 251
 Процесс случайный 335 и др.
 — — гауссов 366
 — — нестационарный 351
 — — стационарный 337, 344
 — установившийся 12, 82, 336
 Прямая Пóпова 94, 103
- Рассогласование 16, 23
 Регулятор выхода 324, 328
 — состояния 313, 327

- Римана—Меллина формула 13, 72
- Связь обратная 16, 378
- Сдвиг фазы 80, 137
- Седло 119
- Сепаратриса 119
- Серводвигатель 15, 35
- Сигнал входной 9, 15, 48, 333
- — преобразованный 17
- на выходе 9, 20, 48, 351
- рассогласования 17
- Сила восстанавливающая 126
- диссипативная 123, 128
- искусственная 128
- неконсервативная 114
- управляющая 176
- Синтез регулярный 280, 288
- Система абсолютно устойчивая 93
- автоколебательная 128
- астатическая 84
- вполне наблюдаемая нестационарная 198, 366
- — — стационарная 187
- — — управляемая нестационарная 193, 205
- — — стационарная 177, 182, 200
- диссипативная 123
- замкнутая 15, 22, 48, 60
- консервативная 118
- минимально-фазовая 78, 80
- многомерная 22
- — замкнутая 22, 60
- — разомкнутая 26
- неминимально-фазовая 81
- одномерная 18, 48, 54
- — замкнутая 20, 48
- — разомкнутая 20
- оптимальная 319, 326, 333
- — по быстродействию 208, 228, 255
- псевдолинейная 139
- равномерно вполне наблюдаемая 381
- — — управляемая 381
- разомкнутая 16, 20, 26
- следящая 15, 84, 329
- с одной степенью свободы линейная 9
- — — — — нелинейная 114, 135 и др.
- Системы дискретные 213
- нестационарные 193, 197, 365, 381
- стационарные 12, 48
- стохастические 335 и др.
- Скорость обобщенная 125
- фазовая 116
- След матрицы 368
- Спектр матрицы 152
- Спектральная плотность 338
- — взаимная 341
- Теорема Безу 148
- Болтянского 241, 243, 292
- Гамильтона—Кэли 148
- Лежен-Дирихле 119
- Пóпова 93
- — геометрическая формулировка 94
- Фельдбаума 308
- Точка изображающая 115, 125, 132
- инвариантная 133
- особая 117, 119, 122
- Траектория оптимальная 210, 237, 263, 284
- отмеченная 281, 293
- фазовая 116, 126, 135, 252
- — замкнутая 119, 133
- Трение вязкое 123
- сухое 123, 127
- Управление 176
- допустимое 234, 237
- линейно-входящее 264
- оптимальное 211, 217, 226, 253
- — по быстродействию 229, 232
- Управляемость линейных систем нестационарных 193, 205
- — — стационарных 177, 200
- Уравнение Беллмана 223, 292, 302, 321
- — в задаче о быстродействии 229, 232
- — геометрическая интерпретация 233
- Гамильтона—Якоби 211, 223, 248
- дифференциально-разностное 42
- интегральное 110
- — Винера 347, 355
- Риккати 319, 333, 377, 385
- характеристическое 10, 25, 42
- Уравнения в вариациях 145, 258
- — изображениях 21, 55, 174
- — конечных разностях 135, 211, 213
- движения канонические 115, 118, 249
- сопряженные 259, 306
- укороченные 141
- Условие оптимальности достаточное 236, 273, 291

- Условия оптимальности необходимое 223, 235, 253, 261
 — — — для неавтономных систем 263, 273
 — — — и достаточное 241, 243
 Условия интерполяционные 153
 — регулярного синтеза 288
 — трансверсальности 279, 316
 Устойчивость асимптотическая 25, 43, 79
 — вынужденных колебаний 144, 145
 — по Ляпунову 106
- Фаза 115
 Факторизация функции 348
 Фильтр 366
 — оптимальный Калмана—Бьюси 357, 369, 378, 383, 385
 Фльтрация случайных процессов 344, 348
 Формула Парсеваля 98
 — Римана—Меллина 13, 72
 Формула Коши 167
 Формулы рекуррентные Беллмана 217
 Функции от матриц 147 и др.
 Функция аппроксимирующая 108
 — Беллмана 285
 — веса 10, 12, 72, 335
 — — матричная 65, 68
 — — одномерной системы 51, 58
 — — оптимальная 345, 353, 355
 — Гамильтона 115, 118, 247
 — действительная на спектре матрицы 156
 — импульсивная Дирака 10, 51, 66, 366
 — импульсная переходная 10
- Функция корреляционная 337, 352
 — — взаимная 340
 — — Ляпунова 107
 — от матрицы аналитическая 168
 — передаточная 9, 12, 25, 335
 — — матричная 25, 28, 38, 61
 — — системы замкнутой 16, 20, 49
 — — — оптимальной 349, 351
 — — — разомкнутой 17, 21
 — — переходная 53, 59, 72, 75
 — — матричная 69, 71
 — ступенчатая 71, 130
- Характеристика лампы 130
 — частотная 14, 39
 — — амплитудная 39, 340
 — — видоизмененная 91
 — — действительная 39
 — — логарифмическая 45, 46
 — — — амплитудная 46
 — — — фазовая 46
 — — матричная 39
 — — мнимая 39
 — — разомкнутой системы 31
 — — фазовая 39, 340
- Цель управления 209
 Цепь обратной связи 16, 89
 Цикл предельный 135
- Число характеристическое матрицы 148, 151
- Энергия кинетическая 9, 114
 — потенциальная 9, 114

Яков Наумович Ройтенберг
АВТОМАТИЧЕСКОЕ УПРАВЛЕНИЕ

М., 1971 г., 396 стр. с илл.

Редактор *И. А. Балаева*

Техн. редакторы *И. Ш. Аксельрод,*

А. А. Благовещенская

Корректоры *Т. С. Вайсберг, Г. С. Смоликова*

Сдано в набор 25/VI 1970 г. Подписано к печати 12/II 1971 г. Бумага 60×90^{1/8}. Физ. печ. л. 24,75. Условн. печ. л. 24,75. Уч.-изд. л. 22,77. Тираж 21000 экз. Т-02181. Цена книги 94 коп. Заказ № 804.

Издательство «Наука»

Главная редакция
физико-математической литературы.
Москва, В-71, Ленинский проспект, 15.

Ордена Трудового Красного Знамени
Ленинградская типография № 2
имени Евгении Соколовой Главполиграфпрома
Комитета по печати при Совете Министров
СССР. Измайловский проспект, 29,