

Л. ДРЕСНЕР

---

---

РЕЗОНАНСНОЕ  
ПОГЛОЩЕНИЕ  
В ЯДЕРНЫХ  
РЕАКТОРАХ

ГОСАТОМИЗДАТ

1 9 6 2

---

Л. ДРЕСНЕР

# РЕЗОНАНСНОЕ ПОГЛОЩЕНИЕ В ЯДЕРНЫХ РЕАКТОРАХ

*Перевод с английского  
Ю. И. КОЛЕСНИКОВА*

Предисловие д-ра физ.-мат. наук  
*проф. Г. И. Марчука*



ГОСУДАРСТВЕННОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО ЛИТЕРАТУРЫ  
В ОБЛАСТИ АТОМНОЙ НАУКИ И ТЕХНИКИ

Москва 1962

# RESONANCE ABSORPTION IN NUCLEAR REACTORS

by

LAWRENCE DRESNER

Physicist, Oak Ridge National  
Laboratory

PERGAMON PRESS

XFORD — LONDON — NEW YORK — PARIS

1960

## О Г Л А В Л Е Н И Е

Предисловие к русскому изданию . . . . .	3
Из предисловия автора . . . . .	5
<i>Глава I.</i> Исторический обзор . . . . .	7
<i>Глава II.</i> Замедление нейтронов в бесконечной гомогенной среде . . . . .	12
<i>Глава III.</i> Гомогенные резонансные интегралы . . . . .	32
<i>Глава IV.</i> Основы транспортной теории . . . . .	62
<i>Глава V.</i> Резонансные интегралы в гетерогенных средах (случай узких резонансов) . . . . .	68
<i>Глава VI.</i> Резонансные интегралы в гетерогенных средах (случай широких резонансов) . . . . .	79
<i>Глава VII.</i> Дополнительные специальные приложения . . . . .	93
<i>Глава VIII.</i> Сравнение теории и эксперимента . . . . .	108
Литература . . . . .	129
Предметный указатель . . . . .	133

---

## ПРЕДИСЛОВИЕ К РУССКОМУ ИЗДАНИЮ

В книге Л. Дреснера «Резонансное поглощение в ядерных реакторах» дан подробный обзор теории и методов расчета резонансных эффектов в гомогенных и гетерогенных средах. Методы учета резонансных эффектов всегда являлись составной частью теории ядерных реакторов.

Первоначально, когда сведения о параметрах резонансов были недостаточны, расчет резонансных эффектов производился при помощи различных полуэмпирических теорий.

В связи со спецификой подхода в основном определились два метода расчета резонансного захвата, которые нашли широкое распространение в теории ядерных реакторов: это метод Гуревича — Померанчука и метод Вигнера.

Метод Гуревича — Померанчука существенным образом основан на теории «первого прострела» и применим для блоков малых толщин, где рассеянием нейтронов в блоке поглотителя можно пренебречь. Метод Вигнера предполагает возможным подразделить резонансный захват на две части, одна из которых пропорциональна объему блока, а вторая — его поверхности. В методе Вигнера не учитывается возможность пролета нейтрона через блок без поглощения, поэтому он применим только для расчета резонансного захвата нейтронов в блоках больших размеров.

Оба метода являются различными предельными переходами более общей теории резонансного захвата, развитой в дальнейшем В. В. Орловым, А. П. Рудиком в СССР, Ф. Адлером, Г. Хинманом и Л. Нордгеймом — в США.

На основе построенных теоретических схем резонансного захвата были получены интерполяционные формулы, удовлетворительно описывающие экспериментальные данные по измерениям резонансного поглощения нейтронов в блоках. Такие интерполяционные формулы не утратили своего практического значения и до настоящего времени.

Более или менее точный математический расчет резонансных эффектов в ядерных реакторах оказался возможным только в последнее время, когда появились удовлетворительные данные о параметрах резонансов для ядер элементов, наиболее существ-

венных в реакторостроении. Такие данные подробно были обсуждены на Первой и Второй международных конференциях по мирному использованию атомной энергии.

Приведенные в книге Л. Дреснера некоторые сопоставления расчетных значений эффективного резонансного интеграла с результатами измерений свидетельствуют о том, что в настоящее время теория резонансного захвата находится в удовлетворительном согласии с экспериментом.

Несмотря на такое общее впечатление, теория резонансного поглощения нейтронов требует дальнейшего развития и совершенствования. Это развитие, по-видимому, пойдет прежде всего по пути более точного учета эффектов интерференции резонансного и потенциального рассеяния, более детального рассмотрения неразрешенных резонансов, а также более корректного учета колебаний потока нейтронов в области прерывающихся и непрерывающихся резонансов.

До последнего времени теория резонансного захвата развивалась в основном в связи с теорией гетерогенных реакторов на тепловых и промежуточных нейтронах. Особую значимость теория резонансного захвата приобретает в настоящее время в связи с теорией и методами расчета энергетических реакторов на быстрых нейтронах, где резонансные эффекты играют весьма существенную роль. Новым в этой связи является то, что наряду с резонансным поглощением нейтронов большое значение для теории имеет также резонансное рассеяние, особенно на ядрах элементов, которые служат наполнителями. Учет резонансного рассеяния может привести к заметным изменениям критических параметров реактора. Методам учета резонансных эффектов в коэффициенте диффузии посвящена статья В. В. Орлова и А. А. Лукьянова в сб. «Нейтронная физика» (Госатомиздат, 1961).

На состоявшемся в Вене в августе 1961 г. семинаре по теории быстрых и промежуточных реакторов была подчеркнута особая необходимость дальнейшего развития теории резонансных эффектов в связи с проблемой реакторов на быстрых нейтронах.

Наряду с развитием аналитических методов особое место, очевидно, займут численные методы расчета резонансных эффектов, учитывающие не только наиболее существенные особенности теории, но и детали, которые в различных случаях также выступают значительными факторами теории.

В связи с рассмотренными выше ближайшими перспективами развития методов расчета резонансных эффектов книга Л. Дреснера окажется весьма ценным методическим пособием для понимания основных вопросов теории и даст общее представление о современном состоянии этого вопроса широкому кругу читателей.

Следует отметить, что многие вопросы теории резонансного захвата, рассмотренные в книге Л. Дреснера, независимо были изучены в Советском Союзе.

Г. И. МАРЧУК

## ИЗ ПРЕДИСЛОВИЯ АВТОРА

Монография, по словам Фанка, есть «систематическое изложение одного предмета; исследование, написанное с большими подробностями». Таким образом, цель настоящей монографии — представить систематическое и подробное изложение теории резонансного поглощения в ядерных реакторах. Осуществление этой цели сталкивается, однако, с трудностями, одна из которых связана с тем, что «исследование, написанное с большими подробностями», нелегко для чтения. С целью устранения этого недостатка автор приводит два связанных друг с другом текста, из которых один является упрощенным изложением другого. Весь текст разделен на параграфы, и упрощенное изложение вопроса можно получить из чтения параграфов, отмеченных звездочками.

Вторая трудность заключается в том, что многие термины, используемые в тексте, особенно те, которые связаны с квантовомеханическими понятиями, не могут быть определены в рамках рассматриваемой проблемы. Например, термин «*s*-волновое взаимодействие» применяется в гл. II без определения в связи с очевидной трудностью кратко объяснить квантовомеханическое разложение плоской волны по ее компонентам с различными угловыми моментами.

В гл. III при обсуждении распределения ядер в твердом теле по скоростям вводятся такие неопределенные термины, как «нулевые колебания точки» и «принцип соответствия».

У тех читателей, которые знакомы с основами квантовой физики, эти термины не вызовут трудностей; другими они могут быть опущены без особого ущерба для дальнейшего чтения книги.

Книга построена следующим образом. В гл. I. приводится исторический обзор проблемы. В гл. II резонансное поглощение в гомогенной среде изучается в общих терминах, т. е. без подробного рассмотрения поперечных сечений. Последняя часть гл. II, посвященная различным методам получения некоторых формул, выведенных ранее, содержит параграфы, отмеченные звездочкой, которые можно опустить без ущерба для дальнейшего чтения. В гл. III вводятся понятия естественной формы линии и формы линии с доплеровским уширением и даны формулы для резо-

нансного поглощения в гомогенных средах. В отмеченных звездочкой параграфах проводится исследование зависимости резонансного поглощения от эффекта Допплера и расчет некоторых поправок второго порядка к формулам, выведенным в этой же главе. Глава IV представляет собой краткий обзор некоторых результатов транспортной теории, необходимых для изучения проблемы резонансного поглощения в гетерогенных средах. Эта проблема изучается в гл. V и VI. Многие параграфы во второй половине этих глав отмечены звездочкой; они посвящены оценке ошибок, вносимых различными упрощающими предположениями, сделанными в тексте. Глава VII представляет краткий обзор некоторых специальных приложений (эффект Данкоффа, оценка поглощения в неразрешенных резонансах). В гл. VIII дается подробное сравнение теории с экспериментом.

*ЛОУРЕНС ДРЕСНЕР*

*Ок-Ридж, шт. Теннесси,  
декабрь 1959 г.*



---

---

## Глава I

### ИСТОРИЧЕСКИЙ ОБЗОР

1. 1. В цепных реакциях, которые поддерживаются за счет тепловых нейтронов, необходимо замедлять нейтроны деления до тепловых энергий. Этот процесс осуществляется при помощи упругих столкновений быстрых нейтронов деления с ядрами некоторого подходящего материала, называемого замедлителем. Во время этого процесса часть нейтронов может выйти из цепной реакции за счет тех взаимодействий с материалами, находящимися в системе, в результате которых не производятся новые нейтроны. Исторически радиационный захват в резких линиях ядерного резонанса  $U^{238}$  рассматривался с самого начала как один из таких паразитических захватов, а процесс поглощения во время замедления был назван резонансным поглощением.

1. 2. Проблема резонансного поглощения выступила в качестве основной загадки при первых попытках выяснить возможность осуществления самоподдерживающейся цепной реакции на природном уране. Гарнер (Turner, 1940) в январе 1940 г. установил на основании измерений выхода нейтронов деления, многократно проведенных Андерсоном, Ферми и Сцилардом (Anderson, Fermi, Szilard, 1939), возможность получения цепной реакции, однако при этом он исключал из рассмотрения неизвестный вклад резонансного поглощения. Бор отметил в дальнейшем возможность следующего явления. Если цепная реакция может быть получена, когда уран в реакторе холодный, то нагревание урана при делении может увеличить резонансное поглощение из-за доплеровского уширения резонансных линий, что приведет к прекращению цепной реакции (Creutz et al., 1955a).

Еще до получения сколько-нибудь надежных данных по резонансному поглощению отмечалось, что расположение урана в виде блоков может значительно сократить величину резонансного поглощения по сравнению с гомогенной средой урана и замедлителя.

Это решающее заключение приписывается Ферми и Сциларду (США), однако предложения использовать уран в блоках независимо были сделаны Хартеком (ФРГ) и Халбаном, Коварски

и Жолио (Франция) (Creutz et al., 1955). В СССР также были проведены самостоятельные исследования (Фурсов, 1955).

Блочная структура урана имеет и недостатки. Наряду с уменьшением паразитического резонансного захвата нейтронов в уране она ведет также и к сокращению производительных захватов тепловых нейтронов в горючем. Таким образом, ранняя проблема проектирования реакторов состояла в выборе оптимальной решетки урановых блоков и замедлителя, в которой коэффициент размножения был бы максимальным.

Для решения этой проблемы в первую очередь необходимо было знать величину резонансного поглощения в блоках урана и зависимость его от размеров, формы, температуры и разбавленности горючего (например, содержания кислорода в  $UO_2$ ).

1. 3. Эксперименты с целью получения этих сведений были начаты Круцем, Уилсоном и их сотрудниками на циклотроне в Принстонском университете в 1941 г.

Окончательные результаты были опубликованы позже в двух статьях (Creutz et al., 1955 b, c). Дальнейшее развитие этой проблемы можно видеть в статье Вигнера и др. (Wigner et al., 1955), представляющей собой первую теоретическую работу, которая была проведена с двойной целью: получить предварительную оценку величины резонансного поглощения блочным ураном, а также основу для проведения и интерпретации экспериментов.

Другую теоретическую работу (неопубликованную) провели в США в 1939—1941 гг. Фиск, Шокли, Эккарт и Уилер (Creutz et al., 1955a).

Интерес к проблеме резонансного поглощения еще больше повысился после очень удачного начала принстонской группы. В 1944 г. Митчелом и др. (Mitchell et al., 1944) были сделаны активационные измерения на гомогенных средах урана и различных замедлителей на циклотроне в Индианском университете. Почти одновременно с этой экспериментальной работой Данкофф и Гинзбург (Dancoff and Ginsburg, 1944) провели тщательное теоретическое изучение проблемы.

Ко времени Первой международной конференции по мирному использованию атомной энергии (Женева, 1955 г.) были поставлены еще пять экспериментов в США: на гомогенной урановой системе (Hughes and Goldstein, 1946); на гомогенной ториевой системе (Hughes and Egger, 1945); на реакторном осцилляторе с блочным ураном (Muehlhause and Untermeyer, 1949); на блочном тории [эксперимент Эглера (Untermeyer and Egler, 1951), основанный на определении коэффициента опасности] и, наконец, по активации на блочном уране (Risser et al., 1951).

1. 4. Необходимость получения экспериментальных данных по резонансному поглощению в гетерогенных системах была также очевидна и ученым других стран. Круц и др. (Creutz et al., 1955a) отмечают многих английских и французских ученых, которые проводили свои работы в период с 1942 по 1944 г. Насколько

известно автору, в СССР самой ранней является экспериментальная работа Попова и Шапиро, проведенная при помощи метода активации на экспериментальной установке, по-видимому, использованной при проектировании первого советского графитового реактора (Грошев и др., 1955). Результаты этой работы неизвестны.

После пуска первого советского реактора дальнейшие измерения на основе активационной методики были проведены Егiazаровым и др. (1955). Другая советская работа по резонансному поглощению (доклад был представлен на Первую международную конференцию по мирному использованию атомной энергии) включала результаты Бургова (1955) на экспериментальной установке с тяжелой водой и Рудика (Бургов, 1955) на тяжеловодном реакторе АН СССР, который достиг критичности в 1949 г. Резонансное поглощение в обеих этих работах изучалось косвенным путем с учетом знания всех других факторов в формуле четырех сомножителей; согласно Бургову (1955), этот метод неудовлетворителен.

Теоретическое изучение резонансного поглощения началось в СССР в 1943 г. с работы Гуревича и Померанчука (1955), опубликованной в материалах Первой международной конференции по мирному использованию атомной энергии.

На этой же конференции в связи с теоретическими исследованиями в СССР были отмечены А. Д. Галанин и Ф. Л. Шапиро.

1. 5. На Первую международную конференцию по мирному использованию атомной энергии были также представлены пять других докладов по резонансному поглощению. Обзор всех работ в США сделан Макклином и Померансом (Macklin and Pomrance 1955); сюда были включены как уже отмеченные результаты по поглощению в блоках, так и совокупность результатов по резонансному поглощению очень тонкими фольгами. Статья Спивака и др. (СССР, 1955) являлась аналогичным обзором. Английскими учеными были представлены следующие доклады: работа Крокера (Crocker, 1955), основанная на технике самоотчета в коллимированном нейтронном пучке, и вторая работа Дженера, прочитанная Эриксоном (Eriksen, 1955), которая посвящена опытам, проведенным на блочном уране при помощи метода реакторного осциллятора.

Пятый доклад — теоретическая работа — представил голландский ученый Ван дер Хельд (Van der Held, 1955), однако он сильно проигрывал при сравнении с другими работами из-за неточности используемых ядерных данных. Шестой доклад, не посвященный специально резонансному поглощению, но содержащий некоторые важные идеи по этому вопросу, принадлежит Чернику (Chernick, 1955).

1. 6. После Первой международной конференции по мирному использованию атомной энергии продолжалось теоретическое и экспериментальное изучение резонансного поглощения. В течение 1956 и 1957 гг. были сообщены результаты основанных на активационной методике экспериментов, проведенных Хелл-

страндом (Hellstrand, 1957), Бейли дю Бойсом и др. (Baully du Bois et al., 1956), Шером (Sher, 1957), Клейном и др. (Klein et al., 1956) и Нимусом (Niemuth, 1956), и результаты экспериментов, основанных на изменении реактивности, которые были проведены Девисом (Davis, 1957 a, b, c) и Дейтоном и Петтусом (Dayton and Pettus, 1958). Кроме того, в течение этих лет были опубликованы количественные оценки резонансного поглощения, полученные при помощи экспоненциальных экспериментов и экспериментов на критических решетках. Такие работы проделали Деви (Davey, 1955), Маммери (Mummeury, 1955, 1956), Энтони и др. (Antony et al., 1957), Перссон и др. (Persson et al., 1956) и Коуц и Шер (Kouts and Sher, 1956).

В течение 1956 и 1957 гг. быстро развивались также и теоретические исследования по трем основным направлениям. Во-первых, был проявлен интерес к проблеме резонансного поглощения в гомогенных средах, главным образом из-за простоты изучения. Интересная работа в этом направлении, но с возможностью применения к проблеме гетерогенного поглощения была написана Спиннеем (Spinney, 1956, 1957). Дополнительную поправку второго порядка к обычной гомогенной формуле для вероятности избежать резонансного захвата предложили Вейнберг и Вигнер (Weinberg and Wigner, 1956); вариационное решение проблемы гомогенного резонансного поглощения было проведено Корнгольдом (Corngold, 1957). Во-вторых, были сделаны попытки изучить резонансное поглощение в реальных гетерогенных системах при помощи численных методов, особенно метода Монте-Карло. Статьи, посвященные этому приближению, были написаны Рихтмайером (Richtmyer, 1956) Сэмпсоном (Sampson, 1956), Ст. Джоном (St. John, 1956) и Черником (Chernick, 1956).

Третье направление ставило целью решить приближенно в аналитическом виде проблему гетерогенного поглощения при помощи комбинированной транспортной модели замедления. Вигнер и др. (Wigner et al., 1955) провели оригинальный анализ с добавлением таких уточнений, как исключение определенных геометрических приближений, точный учет эффекта Допплера, уточнение изучения широких низколежащих резонансов. Статьи с использованием этого приближения были написаны Корнгольдом (Corngold, 1957b), Нейманом (Neumann, 1956), Штейном (Stein, 1956) и Дреснером (Dresner, 1955, 1956 a, b). Обзорную статью написали Сэмпсон и Черник (Sampson and Chernick, 1957).

1. 7. В 1958 г. публикацией статей Черника и Вернона (Chernick and Vernon, 1958), Дреснера (Dresner, 1958c), Гордеева и др. (1958), Меммерта (Memmert, 1958), Адлера и др. (Adler et al., 1958) и Спинрада и др. (Spinrad et al., 1958) было продолжено развитие третьего теоретического приближения. Последние две работы были представлены на Вторую международную конференцию по мирному использованию атомной энергии (Женева, 1958). Кроме того, на этой же конференции были зачитаны доклад

Мортон (Morton, 1958) об использовании метода Монте-Карло и доклад Бломберга и др. (Blomberg et al., 1958) о подробном измерении температурной зависимости резонансного поглощения в блоках урана и двуокиси урана.

Кроме того, на Вторую международную конференцию по мирному использованию атомной энергии были представлены работы по развитию двух других направлений в теории, установленных в предшествующие годы. Дреснер (Dresner, 1958a), Марчук и Михайлус (1959) и Ергинзой (Erginsoy, 1959a) опубликовали работы, посвященные проблеме резонансного поглощения в гомогенных средах. Дреснер (Dresner, 1958b), Хазегава (Hasegawa, 1959) Корнгольд и Чермер (Corngold and Schermer, 1959), Ротенштейн (Rothenstein, 1959, 1959a) и Ергинзой (Erginsoy, 1959b) посвятили свои работы приближенному аналитическому методу.

Кроме того, выявилось четвертое направление, которое заключалось в возрождении интереса к эффекту самоблокировки в блоках горючего для тесных решеток; впервые этот эффект изучали Данкофф и Гинзбург (Dancoff and Ginsburg, 1944a) в 1944 г. Теоретические статьи по этому вопросу были написаны Фи (Thie, 1959), Петровым (1958) и Орловым (1959), а эксперименты поставлены Петтусом и Дейтоном (Pettus and Dayton, 1958). В качестве приближенного решения этих проблем Белл (Bell, 1959) предложил распространить на тесные решетки определенные теоремы эквивалентности, приравнивающие поглощение в изолированных блоках к поглощению в определенных гомогенных системах (Chernick and Vernon, 1958; Dresner, 1956b, 1958c; Spinrad et al., 1958; Nordheim, 1959; Nordheim and Sampson, 1959). Недавно Блэссер (Blässer, 1958) и Бакши (Bakshi, 1959) опубликовали материал об изучении таких эквивалентных теорем. Кленденин (Cledenin, 1959) и Такахаси (Takahashi, 1959) опубликовали работы по изучению резонансного поглощения в водородных решетках, в которых важное значение имеет эффект Данкоффа.

---

## Глава II

### ЗАМЕДЛЕНИЕ НЕЙТРОНОВ В БЕСКОНЕЧНОЙ ГОМОГЕННОЙ СРЕДЕ

2. 1. Изучение резонансного поглощения в настоящей главе мы начнем с рассмотрения резонансного поглощения в гомогенной среде, не вдаваясь в подробный анализ поперечных сечений. В результате такого принятого предположения мы получим ряд формул для вероятности избежать резонансного захвата, которые включают интегрирование по поперечным сечениям входящих в систему материалов. В следующей главе более подробно рассмотрим поперечные сечения, ответственные за резонансное поглощение, и проведем интегрирование.

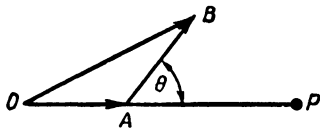


Рис. 2. 1. Кинематика столкновений.

2. 2. Рассмотрим процесс замедления нейтронов за счет упругих столкновений с ядрами массы  $A$ ; примем, что единица массы есть масса нейтрона.

Далее, рассмотрим только  $s$ -волновое взаимодействие, которое почти всегда соответствует энергиям ниже  $100$  кэв; в этом энергетическом интервале и осуществляется почти все резонансное поглощение. Следствием такого ограничения является то, что рассеяние в системе центра масс оказывается изотропным.

В этой системе координат нейтрон и ядро движутся до столкновения навстречу друг другу — в направлении, параллельном падающему нейтрону в лабораторной системе. Согласно законам сохранения энергии и момента в системе центра масс, скорости ядра и нейтрона в этой системе должны быть одинаковыми до и после столкновения, а их направления — противоположными. Для наглядности кинематику столкновения можно объяснить при помощи рис. 2. 1.

На этом рисунке:  $OP$  — направление скорости  $v$  нейтрона, падающего на ядро массы  $A$ ;  $OA$  — скорость центра масс; величина ее  $\frac{v}{A+1}$ ;  $AB$  — скорость нейтрона в системе центра масс после столкновения; величина ее такая же, как и до столкнове-

ния  $\left(\frac{Av}{A+1}\right)$ ;  $\theta$  — угол рассеяния в системе центра масс, а  $OB$  — скорость нейтрона в лабораторной системе после столкновения. Из закона косинусов следует, что

$$\frac{E'}{E} = \frac{v'^2}{v^2} = \left(\frac{1}{A+1}\right)^2 + \left(\frac{A}{A+1}\right)^2 + \frac{2A}{(1+A)^2} \cos \theta. \quad (2.1)$$

Здесь  $E'$  и  $E$  — соответственно конечная и начальная энергии нейтрона в лабораторной системе. Из этого уравнения ясно, что

$$E \geq E' \geq \left(\frac{A-1}{A+1}\right)^2 E \equiv \alpha E, \quad (2.2)$$

где  $\alpha$  — максимальная потеря энергии при одном столкновении с ядром массы  $A$ .

Распределение энергии  $E'$  можно найти из статистического распределения  $\theta$ . Для изотропного рассеяния в системе центра масс

$$P(E') = P(\cos \theta) \left| \frac{d(\cos \theta)}{dE'} \right| = \frac{1}{(1-\alpha)E}. \quad (2.3)$$

Таким образом, рассеянные нейтроны распределяются однородно в интервале, определенном соотношением (2. 2). Для дальнейшего использования выразим распределение рассеянных нейтронов в терминах переменной  $u$ , называемой летаргией и определенной выражением  $u = \ln(E_0/E)$ , где  $E_0$  — энергия деления. Распределение рассеянных нейтронов находится по уравнению

$$P(u') = P(E') \left| \frac{dE'}{du'} \right| = \frac{e^{u-u'}}{1-\alpha}. \quad (2.4)$$

В соответствии с выражением (2. 2)

$$u \leq u' \leq u + \varepsilon, \quad (2.5)$$

где величина  $\varepsilon$ , определяемая как  $\ln(1/\alpha)$ , есть максимальный прирост летаргии при одном столкновении с ядром массы  $A$ .

2. 3. Выражение (2. 4) может быть использовано в интегральном уравнении, описывающем замедление нейтронов в гомогенной среде ядрами массы  $A$ . Это уравнение можно написать в следующем виде:

$$\sum_t(u) \varphi(u) = \int_{u-\varepsilon}^u \sum_s(u') \varphi(u') \frac{e^{u'-u}}{1-\alpha} du' + S(u). \quad (2.6)$$

Здесь  $\varphi(u)$  — поток нейтронов летаргии  $u$ , определенный как произведение плотности нейтронов на единицу летаргии и скорости;  $\sum_s(u)$  — макроскопическое сечение рассеяния при летаргии  $u$ , определенное как  $N\sigma_s(u)$ , где  $N$  — атомная плотность рассеивателей, а  $\sigma_s(u)$  — их микроскопическое сечение рассеяния;  $\sum_s$  — величина, обратная средней длине рассеяния. Произведение  $\sum_s(u) \varphi(u)$  есть скорость рассеяния в единице объема на

единицу летаргии. Аналогично определяется и  $\Sigma_t$  — общее макроскопическое поперечное сечение:  $\Sigma_t = N\sigma_t$ , где  $\sigma_t$  — микроскопическое общее сечение замедляющих ядер.  $S(u)$  — функция мощности нейтронного источника, определенная как скорость введения нейтронов, не подвергшихся столкновению, в единицу объема на единицу летаргии.

Левая часть уравнения (2.6) представляет собой скорость ухода нейтронов из летаргии  $u$  в единицу объема на единицу летаргии. Этот уход может происходить по двум причинам: из-за рассеяния, в результате чего нейтроны замедляются до других энергий, и из-за поглощения, в результате которого нейтроны выходят из дальнейшего рассмотрения. Правая часть уравнения (2.6) представляет скорость введения нейтронов в летаргию  $u$  в единицу объема на единицу летаргии. Ясно, что последний член есть вклад источника нейтронов, не подвергшихся столкновению; первый член дает вклад нейтронов, рассеянных в летаргию  $u$  из летаргии  $u'^*$ .

В стационарном состоянии эти скорости ухода и введения нейтронов должны быть равны, что и описывается уравнением (2.6).

2.4. Общее решение уравнения (2.6) получено Плачком (Placzek, 1946) при отсутствии поглощения, т. е. когда  $\Sigma_s(u) = \Sigma_t(u)$ . Чтобы продемонстрировать это решение, отметим вначале, что без ограничения общности можно вследствие линейности уравнения (2.6) взять функцию источника  $S(u)$  в виде моноэнергетического источника. Для удобства возьмем энергию источника, соответствующую начальной летаргии  $u = 0$ . Плотность моноэнергетического источника единичной мощности будет тогда выражаться в виде  $\delta(u)$ , где  $\delta$  — функция Дирака. Использование такого вида источника приводит к сингулярному потоку из-за сингулярной природы функции источника, поэтому запишем:

$$\Sigma_s(u) \varphi(u) = \delta(u) + F_s(u), \quad (2.7)$$

где  $F_s(u)$  — несингулярная часть плотности рассеяния. Подстановка этого выражения в формулу (2.6) с  $\Sigma_t(u) = \Sigma_s(u)$  дает следующее интегральное уравнение для  $F_s(u)$ :

$$F_s(u) = \int_{u-\varepsilon}^u F_s(u') \frac{e^{u'-u}}{1-\alpha} du' + S_0(u), \quad (2.8a)$$

где

$$S_0(u) = \frac{e^{-u}}{1-\alpha} \quad (0 < u < \varepsilon) \quad (2.8б)$$

и

$$S_0(u) = 0 \quad (u > \varepsilon). \quad (2.8в)$$

---

\* Из определения летаргии следует, что при увеличении (уменьшении) энергии летаргия уменьшается (увеличивается).



Важно отметить, что функция источника  $S_0$  в уравнении (2. 8а) является разрывной как при  $u = 0$ , так и при  $u = \varepsilon$ .

Если уравнение (2. 8а) продифференцировать по летаргии, то оно приводится к виду

$$\frac{dF_s(u)}{du} = \frac{\alpha}{1-\alpha} [F_s(u) - F_s(u - \varepsilon)], \quad (2. 9)$$

где точки  $u = 0$  и  $u = \varepsilon$  исключаются, так как в них функция  $S_0$  не дифференцируется. Для интервала  $0 < u < \varepsilon$  последний член в правой части уравнения (2. 9) отсутствует, так как  $F_s = 0$  для  $u < 0$ , и уравнение (2. 9) можно непосредственно проинтегрировать. Для того чтобы решение в таком интервале было единственным, необходимо получить граничные условия. С этой целью, полагая  $u = 0$  при движении по энергетической оси справа, получим из уравнения (2. 8а)

$$F_s(0 +) = (1 - \alpha)^{-1}. \quad (2. 10)$$

Решение уравнения (2. 9) в интервале  $0 < u < \varepsilon$ , которое удовлетворяет граничному условию (2. 10), имеет вид

$$F_s(u) = (1 - \alpha)^{-1} \exp\left(\frac{\alpha}{1-\alpha} u\right). \quad (2. 11)$$

Теперь можно проинтегрировать уравнение (2. 9) в интервале  $\varepsilon < u < 2\varepsilon$ , так как  $F_s(u - \varepsilon)$  в этом интервале дается уравнением (2. 11). Необходимое граничное условие можно получить, приближая  $u$  к  $\varepsilon$  справа, аналогично тому, как это было сделано с уравнением (2. 8а).

Таким образом,

$$F_s(\varepsilon +) = \frac{\alpha}{1-\alpha} \int_0^{\varepsilon} F_s(u') e^{\alpha u'} du'; \quad (2. 12а)$$

$$F_s = \frac{\alpha}{1-\alpha} \left[ \exp\left(\frac{\varepsilon}{1-\alpha}\right) - 1 \right]. \quad (2. 12б)$$

Из уравнений (2. 9), (2. 11) и (2. 12) следует, что значение  $F_s$  в интервале  $\varepsilon < u < 2\varepsilon$  дается выражением

$$F_s(u) = \exp\left(\frac{\alpha}{1-\alpha} u\right) \frac{1}{1-\alpha} \times \\ \times \left[ 1 - \left(1 - \frac{\varepsilon - u}{1-\alpha}\right) \exp\left(-\frac{\varepsilon}{1-\alpha}\right) \right]. \quad (2. 13)$$

Это интегрирование по шагам может быть продолжено, однако очень быстро возрастает сложность результирующих формул.

Тем не менее Вейнберг и Вигнер (Weinberg and Wigner, 1958) провели численные расчеты, результаты которых даны на рис. 2. 2, где видно, что  $F_s(u)$  терпит разрыв при  $u = \varepsilon$ , а при  $u = 2\varepsilon$

терпит разрыв первая производная  $F_s(u)$ . Вообще можно показать, что  $n$ -я производная терпит разрыв при  $u = (n + 1)\epsilon$ . Неизмеримо более важным является то, что, как видно из рис. 2.2, для  $u \geq 3\epsilon$  значение  $F_s(u)$  приблизительно постоянно.

2. 5. То, что постоянное решение асимптотически удовлетворяет уравнению (2. 8), можно легко показать непосредственно,

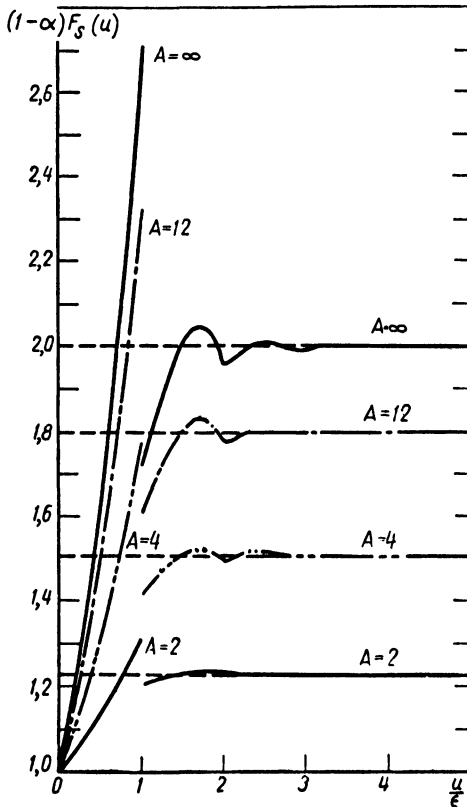


Рис. 2. 2. Функция Плачека  $F_s(u) (1 - \alpha)$ .

так как если  $u \gg \epsilon$ , то  $S_0 = 0$ . Если функция  $F_s(u)$  предполагается постоянной, то уравнение (2. 8а) удовлетворяется, что можно легко проверить прямым интегрированием. Величину этой постоянной асимптотики  $F_s(u)$  можно получить, как будет показано ниже, введением понятия плотности замедления.

Плотность замедления  $q(u)$  до лётаргии  $u$  определяется как число нейтронов, замедляющихся за лётаргию  $u$  в единицу времени в единице объема. Она связана с функцией  $F_s(u)$  уравнением

$$q(u) = \int_{u-\epsilon}^u F_s(u') du' \int_u^{u'+\epsilon} \frac{e^{u'-u''}}{1-\alpha} du'' \quad (2. 14)$$

Второй интеграл представляет собой вероятность того, что нейтрон, рассеянный до летаргии  $u'$ , будет выходить из столкновения с летаргией  $u'' > u$ . Первый интеграл выражает просто то, что одно рассеяние при всех летаргиях в интервале  $u > u' > u - \varepsilon$  может произвести нейтроны, которые замедляются за летаргию  $u$ . Если функция  $F_s(u)$  постоянная, то оба интегрирования в уравнении (2. 14) можно легко провести, и мы получим

$$q = \xi F_s, \quad (2. 15a)$$

где

$$\xi = 1 - \frac{\alpha\varepsilon}{1 - \alpha}. \quad (2. 15b)$$

Далее, при отсутствии поглощения в стационарном состоянии  $q$  должно быть равно плотности источника. Таким образом, для источника единичной мощности асимптотика  $F_s = \xi^{-1}$ . Из уравнения (2. 4) следует, что  $\xi$  — средний прирост летаргии на столкновение.

2. 6. При наличии поглощения общее решение, аналогичное только что описанному, получить нельзя, если не считать специального случая, впервые исследованного Бете (Bete, 1937), когда замедлителем является водород. Для водорода уравнение (2. 6) для единичного моноэнергетического источника может быть приведено к уравнению (2. 8) подстановкой

$$\Sigma_t(u) \varphi(u) = \delta(u) + F(u). \quad (2. 16)$$

Здесь  $F(u)$  — несингулярная часть общей плотности столкновений. Тогда, по аналогии с уравнением (2. 8),

$$F(u) = \int_0^u \frac{\Sigma_s(u')}{\Sigma_t(u')} F(u') e^{u'-u} du' + \frac{\Sigma_s(0)}{\Sigma_t(0)} e^{-u}. \quad (2. 17)$$

Нулевой нижний предел в интеграле появляется из-за того, что одно соударение с атомом водорода при всех летаргиях  $u' < u$  может произвести нейтроны конечной летаргии  $u$ . Это положение вызывается тем, что массы замедлителя и нейтрона равны.

Дифференцирование уравнения (2. 17) приводит к виду

$$\frac{dF(u)}{du} = - \frac{\Sigma_a(u)}{\Sigma_t(u)} F(u), \quad (2. 18)$$

где  $\Sigma_a = \Sigma_t - \Sigma_s$  — макроскопическое сечение поглощения.

Подстановка  $u = 0$  в уравнение (2. 17) дает граничное условие

$$F(0) = \frac{\Sigma_s(0)}{\Sigma_t(0)}. \quad (2. 19)$$

Единственное решение уравнения (2. 18) с граничным условием (2. 19) имеет следующий вид:

$$F(u) = \frac{\Sigma_s(0)}{\Sigma_t(0)} \exp\left(-\int_0^u \frac{\Sigma_a(u')}{\Sigma_t(u')} du'\right). \quad (2. 20)$$

По аналогии с уравнением (2. 14) плотность замедления дается выражением

$$q(u) = \int_0^u \frac{\Sigma_s(u')}{\Sigma_t(u')} F(u') du' \int_u^\infty e^{u'-u''} du'' + \frac{\Sigma_s(0)}{\Sigma_t(0)} \int_u^\infty e^{-u'} du'. \quad (2. 21)$$

Первый член здесь в точности аналогичен уравнению (2.14) и представляет собой вклад в плотность замедления многократно рассеянных нейтронов. Так как в водороде в результате первых столкновений нейтроны источника могут замедляться выше любой наперед заданной летаргии, то в этом случае мы должны добавить к первому члену в уравнении (2. 21) вклад от первых столкновений.

Если в первом члене правой части уравнения (2. 21) мы произведем интегрирование по летаргии  $u''$  и, кроме того, вычислим последний интеграл, то правая часть уравнения (2. 21) совпадет с правой частью уравнения (2. 17). Таким образом, как можно легко проверить прямым расчетом,

$$q(u) = F(u). \quad (2. 22)$$

В отсутствие поглощения это выражение приводится к уравнению (2. 15), так как для водорода  $\xi = 1$ . Значение  $q(u)$ , нормализованное к единичному источнику, как сделано здесь, называется вероятностью избежать резонансного захвата  $p(u)$  при летаргии  $u$ . Этой величиной непосредственно измеряется число нейтронов, избежавших поглощения до летаргии  $u$ .

2. 7. Рассмотренная выше проблема является лишь одной из проблем, которые могут быть достаточно легко решены при всех летаргиях. Имеется другая, не менее важная задача, которая решается асимптотически, т. е. при летаргиях, далеких от летаргии источника. Это случай замедления в среде с постоянным отношением сечения рассеяния к общему поперечному сечению  $\beta$ .

Предположим, что функция источника  $S(u)$  определена на интервале  $0 < u < u^*$ . Тогда для  $u > u^*$  уравнение (2. 6) может быть записано так:

$$F(u) = \beta \int_{u-\varepsilon}^u F(u') \frac{e^{u'-u}}{1-\alpha} du'. \quad (2. 23)$$

Примем для функций  $F(u)$  асимптотический экспоненциальный вид  $e^{\lambda u}$  (при  $u \gg u^*$ ). Действительно, для  $u \geq u^* + 3\varepsilon$  неасимптотические эффекты должны быть очень малыми. Если мы подставим

функцию  $F(u)$  в таком виде в уравнение (2. 23), то получим следующее выражение для определения  $\lambda$ :

$$1 + \lambda = \beta \frac{1 - \alpha^{1+\lambda}}{1 - \alpha}. \quad (2. 24)$$

Плотность замедления тогда дается выражением

$$q(u) = \beta \int_{u-\varepsilon}^u F(u') du' \int_u^{u'+\varepsilon} \frac{e^{u'-u''}}{1-\alpha} du''. \quad (2. 25)$$

Если мы здесь подставим  $e^{\lambda u}$  вместо  $F(u)$ , проинтегрируем и упростим, используя выражение (2. 24), то получим

$$q(u) = -\frac{1-\beta}{\lambda} e^{\lambda u}. \quad (2. 26)$$

Если  $\beta$  близко к единице, то можно разложить  $\lambda$  в ряд по степеням  $\beta - 1$ , первые два члена разложения имеют вид

$$\lambda = \frac{1}{\xi} (\beta - 1) - \frac{\xi - \gamma}{\xi^2} (\beta - 1)^2 + \dots, \quad (2. 27)$$

где

$$\gamma = 1 - \frac{\alpha \varepsilon^2}{2(1-\alpha)\xi}, \quad (2. 28)$$

а значение  $\xi$  определено выше.

Можно показать, что величина  $2\xi\gamma$  есть среднее квадратичное изменение летаргии на столкновение.

2. 8. При помощи этой задачи приближенно решается проблема замедления в среде со слабо меняющимся отношением сечений поглощения и рассеяния. Решение проводится с использованием приближенного ВКБ-метода, развитого Гурвитцем (Hugwitz, 1951). Напишем асимптотическое приближенное уравнение замедления в виде

$$F(u) = \int_{u-\varepsilon}^u F(u') \beta(u') \frac{e^{u'-u}}{1-\alpha} du', \quad (2. 29)$$

где  $F(u)$  — плотность столкновений.

Выберем решение в виде

$$\beta(u) F(u) = H(u) \exp \left[ \int_0^u \lambda(u') du' \right], \quad (2. 30)$$

где  $\lambda(u)$  выражается через  $\beta(u)$  при помощи уравнения (2. 24). Выразим приближенно  $\beta(u')$   $F(u')$  в интеграле, написав в правой части уравнения (2. 30)

$$H(u') = H(u) + \frac{dH}{du}(u' - u) \quad (2. 31a)$$

и

$$\exp \left[ \int_0^{u'} \lambda(u'') du'' \right] = \exp \left[ \int_0^u \lambda(u'') du'' + \lambda(u)(u' - u) + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \frac{d\lambda}{du}(u' - u)^2 \right], \quad (2. 31б)$$

$$\exp \left[ \int_0^{u'} \lambda(u'') du'' \right] = \exp \left[ \int_0^u \lambda(u'') du'' + \lambda(u)(u' - u) \right] \times \\ \times \left( 1 + \frac{1}{2} \frac{d\lambda}{du}(u' - u)^2 \right). \quad (2. 31в)$$

Если мы подставим эти выражения в уравнение (2. 29) и возьмем только члены, линейные относительно первой производной, то получим

$$F(u) = \beta(u) F(u) \int_{u-\epsilon}^u \frac{\exp \{[\lambda(u) + 1][u' - u]\}}{1 - \alpha} du' + \\ + \beta(u) F(u) \cdot \frac{1}{2} \frac{d\lambda}{du} \int_{u-\epsilon}^u \frac{\exp \{[\lambda(u) + 1][u' - u]\}}{1 - \alpha} (u' - u)^2 du' + \\ + \beta(u) F(u) \frac{1}{H} \frac{dH}{du} \int_{u-\epsilon}^u \frac{\exp \{[\lambda(u) + 1][u' - u]\}}{1 - \alpha} (u' - u) du'. \quad (2. 32)$$

Из уравнения (2. 24) следует, что

$$\int_{u-\epsilon}^u \frac{\exp \{[\lambda(u) + 1][u' - u]\}}{1 - \alpha} du' = \frac{1}{\beta(u)}. \quad (2. 33)$$

Таким образом, уравнение (2. 32) может быть написано (после преобразования и отбрасывания некоторых членов) в виде

$$\frac{1}{2} \frac{d\lambda}{du} \frac{d^2}{d\lambda^2} \left( \frac{1}{\beta} \right) = - \frac{d \ln H}{du} \frac{d}{d\lambda} \left( \frac{1}{\beta} \right) \quad (2. 34)$$

или

$$\frac{d \ln H}{du} = - \frac{1}{2} \frac{d}{du_i} \ln \left| \frac{d}{d\lambda} \left( \frac{1}{\beta} \right) \right|, \quad (2. 35)$$

так как  $d \ln y = d \ln (-y) = d \ln |y|$ . Тогда окончательно

$$H(u) = \left| \frac{d}{d\lambda} \left( \frac{1}{\beta} \right) \right|^{-\frac{1}{2}}. \quad (2.36)$$

2. 9. Решение уравнения (2. 36) приводит к постоянной величине. В случае, когда сечение поглощения равно нулю для  $u \leq u^* + 3\epsilon$ , а для  $u > u^* + 3\epsilon$  медленно растет, а затем падает вновь до нуля, эта постоянная легко связывается с мощностью источника, и можно получить точное выражение для вероятности избежать резонансного захвата.

Здесь снова плотность источника равна нулю для  $u > u^*$ .

Когда  $\beta = 1$ , то из уравнений (2. 36) и (2. 27)  $F(u) = \xi^{-\frac{1}{2}}$ .

Если мы хотим привести выражение к единичному источнику, то должны умножить величину  $H(u)$ , определяемую уравнением (2. 36), на  $\xi^{-\frac{1}{2}}$ . После того как область поглощения пройдена, функция  $F(u)$  дается в виде

$$F(u) = \frac{1}{\xi} \exp \left[ \int_0^u \lambda(u') du' \right]. \quad (2.37)$$

Плотность замедления, которая с принятой нормализацией равна вероятности избежать резонансного захвата, дается выражением

$$p(u) = q(u) = \xi F(u) = \exp \left[ \int_0^u \lambda(u') du' \right]. \quad (2.38)$$

Эта формула (приближение Гурвитца) принимает простой вид и очень напоминает уравнение (2. 20) для водорода, если значение  $\beta$  близко к единице. Мы можем тогда написать в соответствии с уравнением (2. 27):

$$\lambda(u) = -\frac{\Sigma_a(u)}{\xi \Sigma_t(u)} \quad (\text{справедливо до 1-го порядка } \beta - 1), \quad (2.39a)$$

$$\lambda(u) = -\frac{\Sigma_a(u)}{\xi \Sigma_s(u) + \gamma \Sigma_a(u)} \quad (\text{справедливо до 2-го порядка } \beta - 1). \quad (2.39b)$$

Значения величин  $\xi$  и  $\gamma$  определены раньше [уравнения (2. 15b) и (2. 28) соответственно]. Уравнение (2. 39a) известно как приближение Вигнера, уравнение (2. 39b) — как приближение Гертцеля—Грейлинга (Soodak et al., 1955).

2. 10. Уравнение (2. 38) как в приближении Вигнера, так и в приближении Гертцеля—Грейлинга, т. е. с величиной  $\lambda$ , определяемой уравнениями либо (2. 39a), либо (2. 39b), имеет вид, очень похожий на уравнение (2. 20) для водорода. Действительно, для водорода оба эти приближения и приближение Гурвитца

являются точными, так как для  $A = 1$  имеем  $\xi = \gamma = 1$  и  $\lambda = \beta - 1$ . Для тяжелых замедлителей справедливость приближений Вигнера, Гертцеля—Грейлинга и Гурвитца была исследована Дреснером (Dresner, 1958a), который рассчитал вероятность избежать резонансного захвата внутри области с экспоненциально падающим отношением поглощения к рассеянию, т. е.

$$\frac{\Sigma_a(u)}{\Sigma_s(u)} = 0 \quad (u < u^*), \quad (2.40a)$$

$$\frac{\Sigma_a(u)}{\Sigma_s(u)} = \beta^* e^{-k(u-u^*)} \quad (u > u^*). \quad (2.40b)$$

$u^*$  — летаргия, далекая от летаргии источника, так что при летаргиях, немного меньших  $u^*$ , функция  $F(u)$  может быть взята постоянной.  $\beta^*$  и  $k$  — постоянные. Метод расчета, примененный в этом анализе, не приводится в данном обсуждении, так как он не является общим, а целиком зависит от экспоненциального вида, выбранного для отношения поглощения к рассеянию. Однако результаты иллюстрируются на рис. 2.3 и 2.4 (здесь вероятность избежать резонансного захвата приводится как функция  $\beta^*$  для двух значений  $k$ ). Эти результаты одинаковы для всех тяжелых замедлителей ( $A \gg 1$ ), если для каждого элемента единица летаргии выбирается соответственно величине  $\epsilon$ .

Кривая для  $k = 1$  соответствует случаю, когда отношение поглощения к рассеянию падает на величину  $e^{-1}$  (равную 0,37) в единицу  $\epsilon$ . Так как для тяжелых замедлителей  $\xi = \frac{1}{2}$  в единицах  $\epsilon$ , то отношение поглощения к рассеянию падает на величину  $e^{-\frac{1}{2}}$  (равную 0,61) за одно столкновение. Сравнение кривых показывает, что для  $p > 0,20$  приближения Гурвитца и Гертцеля—Грейлинга являются более точными по сравнению с приближением Вигнера. Для фиксированной величины  $p$  приближенные формулы должны становиться более точными, когда  $k$  уменьшается, так как тогда отношение  $\Sigma_a/\Sigma_s$  будет меняться более медленно.

Кривые для  $k = 2$  соответствуют случаю, когда отношение поглощения к рассеянию падает примерно на величину  $e^{-1}$  (равную 0,37) за одно столкновение. При этом (также для  $p > 0,20$ ) приближения Гурвитца и Гертцеля—Грейлинга дают хорошие результаты. На первый взгляд может показаться странным, что на рис. 2.4 кривая Гертцеля—Грейлинга ближе к точной кривой, чем кривая Гурвитца, но, как будет видно в следующей главе, это происходит из-за того, что для тонкого поглощающего пика (который можно получить, например, при  $k \gg 1$ ) приближение Вигнера является наилучшим. Когда значение  $k$  возрастает, то точная кривая будет смещаться вверх. В любом случае оказывается ясным, что для среды, в которой отношение поглощения к рассеянию не изменяется более чем на 50% за одно столкновение, при-



ближения Гертцеля — Грейлинга и Гурвитца будут давать хорошие результаты, если поглощается не более 80% нейтронов. Если общее поглощение меньше, то допустимое изменение в поперечном сечении может быть более быстрым, и наоборот.

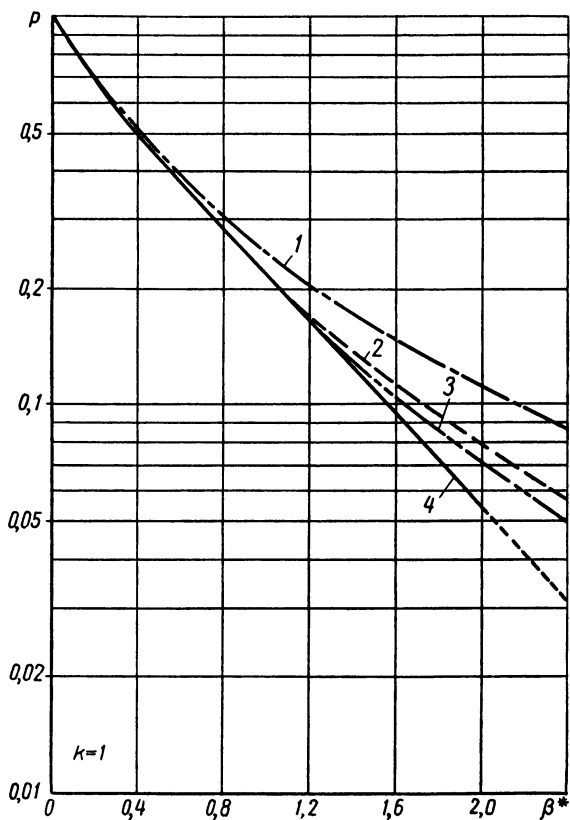


Рис. 2. 3. Сравнение приближенных и точных значений  $\rho$  для  $\kappa = 1$ . Приближения:

1 — Вигнера; 2 — Гертцеля—Грейлинга; 3 — Гурвитца; 4 — точное значение.

2. 11. Уравнения (2. 38), (2. 39а) и (2. 39б) можно распространить и на случай смеси элементов. Соответствующее обобщение асимптотического интегрального уравнения замедления имеет вид

$$F(u) = \sum_{i=1}^N \int_{u-\epsilon_i}^u C_i(u') \beta(u') F(u') \frac{e^{u'-u}}{1-\alpha_i} du', \quad (2. 41)$$

где

$$C_i(u') = \Sigma_{si}(u') / \Sigma_s(u'),$$

а  $\beta(u') = \Sigma_s(u') / \Sigma_t(u')$ , как и выше.

Если  $C_i(u')$  и  $\beta(u')$  — постоянные, то уравнение (2.41) вновь имеет экспоненциальное решение  $e^{\lambda u}$ , но величина  $\lambda$  определяется теперь из отношения

$$1 + \lambda = \beta \sum_{i=1}^N C_i \frac{1 - \alpha_i^{1+\lambda}}{1 - \alpha_i}. \quad (2.42)$$

Как и раньше, возможно разложение значения  $\lambda$  в ряд по степеням  $\beta - 1$ , и первые два члена имеют точно такой вид, как

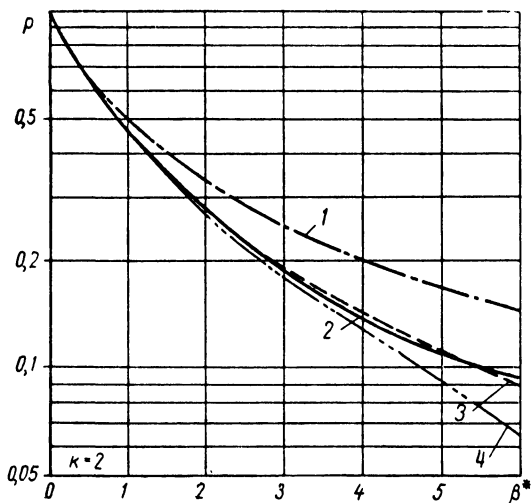


Рис. 2. 4. Сравнение приближенных и точных значений  $\rho$  для  $k = 2$ . Приближения:

1 — Вигнера; 2 — точное значение; 3 — Гертцеля—Грейлинга; 4 — Гурвитца.

и в уравнении (2.27), если вместо  $\xi$  и  $\gamma$  ввести  $\bar{\xi}$  и  $\bar{\gamma}$ , определяемые выражениями

$$\bar{\xi} = \sum_{i=1}^N C_i \xi_i, \quad (2.43a)$$

$$\bar{\xi} \bar{\gamma} = \sum_{i=1}^N C_i \xi_i \gamma_i. \quad (2.43b)$$

Если  $C_i(u')$  постоянно, а  $\beta(u)$  — медленно меняющаяся функция, то полностью применима процедура Гурвитца, описанная в параграфе 2.8. Это приводит к уравнениям (2.38), (2.39a) и (2.39b), где  $\lambda$  дается уравнением (2.42), а  $\xi$  и  $\gamma$  — уравнением (2.43).

2.12. Формулы (2.38), (2.39a) или (2.39b) могут быть использованы, например, для расчета резонансного поглощения в гомо-

генной смеси урана и графита (несмотря даже на то, что в уране наблюдается поглощение в высоких резких резонансах \*), если атомная плотность урана достаточно низкая.

С другой стороны, если атомная плотность урана высокая, то ВКБ-приближение Гурвитца неприменимо из-за узости резонансов. Однако Вигнер и др. (Wigner et al., 1955) показали, как этот недостаток обратить в преимущество.

Рассмотрим поглощающий резонанс, расположенный далеко от летаргии источника, размер которого на оси летаргии  $\Delta u$  гораздо меньше, чем  $\xi$  — средний прирост летаргии на одно столкновение. Это ограничение имеет два важных следствия:

1) лишь немного нейтронов может испытать более чем одно столкновение в  $\Delta u$ ;

2) большинство нейтронов из тех, которые испытывают столкновение в  $\Delta u$ , испытывают последние столкновения при летаргиях намного ниже  $\Delta u$ .

Последнее утверждение предполагает, что скорость поступления нейтронов в каждый бесконечно малый интервал летаргии  $du$  в  $\Delta u$  существенно не зависит от того, имеется резонанс или нет.

В стационарном состоянии скорость поступления нейтронов в данный интервал летаргии равна плотности столкновений при этой летаргии. Следовательно,

$$\Sigma_t(u) \varphi(u) du = \frac{1}{\xi} du. \quad (2.44)$$

Здесь  $1/\xi$  — плотность столкновений на единицу летаргии без резонанса, нормализованная к единичному источнику, а  $\varphi(u)$  — истинный поток с учетом резонанса. Общая скорость поглощения в резонансе тогда записывается в виде

$$A = \int \Sigma_a(u) \varphi(u) du = \int \frac{\Sigma_a(u)}{\xi \Sigma_t(u)} du. \quad (2.45)$$

Интегрирование распространено на весь резонанс.

Вероятность избежать резонансного поглощения, равная  $1 - A$ , дается в виде

$$p = 1 - \int \frac{\Sigma_a(u)}{\xi \Sigma_t(u)} du. \quad (2.46)$$

Если интеграл мал по сравнению с единицей, как часто и случается, то можно приближенно написать

$$p = \exp \left( - \int \frac{\Sigma_a(u)}{\xi \Sigma_t(u)} du \right), \quad (2.47)$$

что является в точности приближением Вигнера.

\* В качестве примера таких поперечных сечений см. рис. 3.1 и 3.2.

2. 13. Уравнение (2. 47) применимо также к смеси элементов, для которых  $\xi$  намного больше, чем ширина резонанса на оси летаргии.

В этом случае уравнение (2. 44) применимо, но с правой частью, в которой  $1/\xi$  заменено на  $1/\bar{\xi}$ , где  $\bar{\xi}$  — средний прирост летаргии на одно столкновение для смеси:

$$\bar{\xi} = \sum_{i=1}^N \xi_i C_i; \quad C_i = \frac{\sum_{s_i} s_i}{\sum_{s_i=1}^N \sum_{s_i} s_i}. \quad (2. 48)$$

Здесь  $\xi_i$  — средний прирост летаргии элемента  $i$ ;  $\sum_{s_i}$  — постоянное макроскопическое сечение рассеяния вне интервала летаргии.

Для доказательства этого положения отметим, что асимптотически плотность столкновений в непоглощающей смеси элементов с постоянными сечениями рассеяния подчиняется уравнению

$$F(u) = \sum_{i=1}^N \int_{u-\varepsilon_i}^u C_i F(u') \frac{e^{u'-u}}{1-\alpha_i} du', \quad (2. 49)$$

а плотность замедления связана с плотностью столкновений соотношением

$$q(u) = \sum_{i=1}^N \int_{u-\varepsilon_i}^u C_i F(u') du' \int_u^{u'+\varepsilon_i} \frac{e^{u'-u''}}{1-\alpha_i} du''. \quad (2. 50)$$

Легко показать, что уравнение (2. 49) удовлетворяется, если считать функцию  $F(u)$  постоянной ( $a$ ). Подстановка этого значения в уравнение (2. 50) дает после интегрирования

$$q(u) = \sum_{i=1}^N C_i \xi_i a = \bar{\xi} a. \quad (2. 51)$$

Таким образом, если  $q = 1$ , то  $a = F(u) = \frac{1}{\bar{\xi}}$ . Окончательно соответствующее обобщение уравнения (2. 47) можно получить, если заменить  $\xi$  на  $\bar{\xi}$ .

2. 14\*. Полностью отличное от рассмотренных приближение к проблеме резонансного поглощения в гомогенной среде было предложено Вейнбергом и Вигнером (Weinberg and Wigner, 1956) и независимо от них Корнгольдом (Corngold, 1957a). Эти авторы основывают свои работы на переформулировке проблемы замедления, в которой плотность замедления выбирается из единичного моноэнергетического источника (функция Плачека) в виде функции Грина.

\* Значение выделенных параграфов объяснено в предисловии.

Вейнберг и Вигнер приводят следующее описание этого приближения.

Рассмотрим вновь случай, когда нет поглощения для летаргий, превосходящих на несколько  $\epsilon$  летаргию  $u^*$ , выше которой мощность источника равна нулю. Для удобства положим общую мощность источника равной единице.

Если общее поперечное сечение представляет собой только сечение рассеяния, то плотность столкновений для  $u \geq u^* + 3\epsilon$  должна в точности равняться  $1/\xi$ . Однако часть столкновений в общей плотности столкновений, а именно поглощение, не приводит в действительности рассеянных нейтронов.

Следовательно, когда процесс замедления продолжается выше  $u^*$ , то будет ощущаться нехватка рассеянных нейтронов, необходимых для поддержания плотности столкновения асимптотически постоянной. Можно учесть эту недостачу (сохраняя предположение, что общее поперечное сечение равно сечению рассеяния), если ввести для любой летаргии отрицательный источник нейтронов, мощность которого равна плотности поглощения при этой летаргии. Этот источник будет вносить отрицательный вклад в общую плотность столкновений. Изменение летаргии в плотности столкновений дается функцией Плачека, где в качестве начальной выбирается летаргия поглощения. Таким образом, уравнение Вейнберга—Вигнера—Корнгольда имеет вид

$$F(u) = \frac{1}{\xi} - \int_0^u [1 - \beta(u')] F(u') F_P(u - u') du', \quad (2.52)$$

где  $F_P(u)$  — функция Плачека;  $\beta$  — доля рассеяния. Корнгольд (Corngold, 1957a) дал строгий вывод уравнения (2.52), используя преобразование Лапласа. Так как функция Плачека стремится в пределе к  $1/\xi$ , то уравнение (2.52) удобно переписать в виде

$$F(u) = \frac{1}{\xi} - \int_0^u \frac{[1 - \beta(u')] F(u')}{\xi} du' + \int_0^u [1 - \beta(u')] F(u') \times \\ \times \left[ \frac{1}{\xi} - F_P(u - u') \right] du'. \quad (2.53)$$

2. 15\*. В большинстве элементарных приближений к проблеме замедления последним членом в уравнении (2.53) пренебрегают, т. е. заменяют функцию Плачека ее асимптотическим видом. Дифференцируя результирующее интегральное уравнение, можно получить линейное однородное дифференциальное уравнение первого порядка и граничное условие

$$\frac{dF}{du} = - \frac{1 - \beta(u)}{\xi} F(u); \quad F(0) = \frac{1}{\xi}. \quad (2.54)$$

Решая это уравнение, получаем

$$F(u) = \frac{1}{\xi} \exp \left( - \int_0^u \frac{[1 - \beta(u')]}{\xi} du' \right). \quad (2.55)$$

Для того чтобы рассчитать плотность замедления, связанную с плотностью столкновений, отметим, что дифференцирование уравнения (2.14) дает

$$\frac{dq}{du} = F_s(u) - \int_{u-\varepsilon}^u F_s(u') \frac{e^{u'-u}}{1-\alpha} du'; \quad (2.56a)$$

$$\frac{dq}{du} = -[1 - \beta(u)] F(u). \quad (2.56b)$$

Второе равенство — результат того, что в отсутствие источников интеграл есть точно общая плотность столкновений. Из уравнений (2.55) и (2.56) следует, что для источника единичной мощности

$$p(u) = q(u) = \exp \left( - \int_0^u \frac{[1 - \beta(u')]}{\xi} du' \right). \quad (2.57)$$

Уравнение (2.57) подобно уравнениям (2.47) и (2.39a). Таким образом, приближение Вигнера не учитывает неасимптотические колебания, вносимые поглощением.

2.16\*. Так как  $1/\xi - F_P(u - u') \neq 0$  (если  $u - u' \lesssim 3\varepsilon$ ), то, когда  $\beta(u)$  и  $F(u)$  меняются мало в единице  $\varepsilon$ , последним интегралом в уравнении (2.53) пренебрегать нельзя. Тогда уравнение (2.53) можно переписать в виде

$$\begin{aligned} [1 - \beta(u)] F(u) \int_0^u \left[ \frac{1}{\xi} - F_P(u - u') \right] du' &\approx \\ &\approx [1 - \beta(u)] F(u) \int_0^\infty \left[ \frac{1}{\xi} - F_P(u) \right] du. \end{aligned} \quad (2.58)$$

Верхний предел в интеграле правой части уравнения (2.58) распространен до бесконечности. Можно показать, что этот интеграл имеет величину  $1 - \frac{\gamma}{\xi}$  \*.

\* Уравнение (2.8a) записывается в виде

$$F_P(u) = \int_0^u F_P(u') K(u - u') du' + S_0(u), \quad (I)$$

Уравнение (2. 53) можно тогда записать в виде

$$\left\{ \frac{\xi - \gamma}{\xi} \beta(u) + \frac{\gamma}{\xi} \right\} F(u) = \frac{1}{\xi} - \int_0^u \frac{[1 - \beta(u')]}{\xi} F(u') du'. \quad (2. 59)$$

Дифференцирование вновь приводит к простому дифференциальному уравнению

$$\frac{d}{du} \ln \left\{ \left( \frac{\xi - \gamma}{\xi} \beta(u) + \frac{\gamma}{\xi} \right) F(u) \right\} = - \frac{1 - \beta(u)}{\xi \beta(u) + \gamma [1 - \beta(u)]}. \quad (2. 60)$$

Наконец из уравнений (2. 56) и (2. 60) следует, что

$$p(u) = q(u) = \exp \left( - \int_0^u \frac{1 - \beta(u')}{\xi \beta(u') + \gamma [1 - \beta(u')]} du' \right). \quad (2. 61)$$

Уравнение (2. 61) подобно уравнению (2. 396). Таким образом, приближение Гертцеля—Грейлинга включает некоторый эффект колебаний Плачека, вносимый поглощением.

где  $S_0(u)$  и  $K(u)$  даются соответственно уравнениями (2. 86, в) и (2. 4). Преобразование Лапласа, примененное к уравнению (I), дает

$$\bar{F}_P(p) = \bar{K}(p) \bar{F}_P(p) + \bar{S}_0(p), \quad (II)$$

где использована теорема свертки.

Таким образом,

$$\bar{F}_P(p) = \frac{\bar{S}_0(p)}{1 - \bar{K}(p)}. \quad (III)$$

Преобразование Лапласа для  $1/\xi$  есть  $1/\xi p$ , тогда из уравнения (III) следует, что

$$\int_0^{\infty} \left\{ \frac{1}{\xi} - F_P(u) \right\} e^{-pu} du = \frac{1}{\xi p} - \frac{\bar{S}_0(p)}{1 - \bar{K}(p)}. \quad (IV)$$

Расчет  $\bar{K}(p)$  и  $\bar{S}_0(p)$  приводит к результату

$$\bar{K}(p) = \bar{S}_0(p) = \frac{1 - \alpha^{1+p}}{(1 - \alpha)(1 + p)}. \quad (V)$$

$\bar{K}(p)$  можно разложить в ряд Тейлора

$$\bar{K}(p) = 1 - \xi p + \xi \gamma p^2 + \dots \quad (VI)$$

Если в уравнении (IV)  $p \rightarrow 0$ , то при помощи уравнения (V) получим, что

$$\int_0^{\infty} \left\{ \frac{1}{\xi} - F_P(u) \right\} du = 1 - \frac{\gamma}{\xi}. \quad (VII)$$

2. 17. Вейнберг и Вигнер (Weinberg a. Wigner, 1956) предложили еще более лучший метод решения уравнения (2. 52). Вместо предположения, что  $F(u)$  постоянно в последнем члене уравнения (2. 53), Вейнберг и Вигнер аппроксимировали изменение этой функции с летаргией на нескольких интервалах  $\varepsilon$  в виде

$$F(u') = F(u) \exp \left( \int_{u'}^u \frac{[1 - \beta(u'')]}{\xi} du'' \right), \quad (2. 62)$$

где  $u' \leq u$ . Уравнение (2. 53) принимает тогда вид

$$\begin{aligned} \xi F(u) = 1 - \int_0^u [1 - \beta(u')] F(u') du' + \\ + F(u) \xi \int_0^u [1 - \beta(u')] \exp \left( \int_{u'}^u \frac{1 - \beta(u'')}{\xi} du'' \right) \left( \frac{1}{\xi} - F_P(u - u') \right) du'. \end{aligned} \quad (2. 63)$$

Если положим

$$\xi_1(u) = \xi \int_0^u [1 - \beta(u')] \exp \left( \int_{u'}^u \frac{1 - \beta(u'')}{\xi} du'' \right) \left( \frac{1}{\xi} - F_P(u - u') \right) du', \quad (2. 64)$$

то уравнение (2. 63) примет вид

$$[\xi - \xi_1(u)] F(u) = 1 - \int_0^u [1 - \beta(u')] F(u') du'. \quad (2. 65)$$

Уравнение (2. 65) вновь можно решить, приводя его к линейному дифференциальному уравнению первого порядка. Соответствующую плотность замедления можно получить из уравнения (2. 56), и после нормирования к единичному источнику имеем

$$p(u) = q(u) = \exp \left( - \int_0^u \frac{1 - \beta(u')}{\xi - \xi_1(u')} du' \right). \quad (2. 66)$$

Повышение точности благодаря использованию уравнения (2. 62) в качестве приближения к локальному изменению плотности рассеяния можно исследовать, решая проблему замедления асимптотически при постоянном  $\beta$  для  $A \gg 1$ . Если мы измеряем летаргию в единицах  $\varepsilon$  и, следовательно,  $\lambda$  в единицах  $\varepsilon^{-1}$ , то можно показать непосредственно из уравнения (2. 24), что

$$-\lambda = 2(1 - \beta) + \frac{2}{3}(1 - \beta)^2 + \frac{4}{9}(1 - \beta)^3 + \frac{44}{135}(1 - \beta)^4 + \dots \quad (2. 67)$$



Первые два члена уравнения (2. 67) являются, очевидно, предельными значениями членов, приведенных в уравнении (2. 27). Кроме того, можно показать из уравнений (2. 64) и (2. 66), что приближение Вейнберга—Вигнера дает для  $\lambda$  выражение

$$-\lambda_{\text{wW}} = 2(1 - \beta) + \frac{2}{3}(1 - \beta)^2 + \frac{4}{9}(1 - \beta)^3 + \\ + \frac{34}{135}(1 - \beta)^4 + \dots \quad (2. 68)$$

Для сравнения из уравнений (2. 39а) и (2. 39б) приведем приближения Вигнера и Гертцеля—Грейлинга

$$-\lambda_{\text{w}} = 2(1 - \beta), \quad (2. 69а)$$

$$-\lambda_{\text{GG}} = 2(1 - \beta) + \frac{2}{3}(1 - \beta)^2 + \frac{2}{9}(1 - \beta)^3 + \frac{2}{27}(1 - \beta)^4. \quad (2. 69б)$$

Таким образом, приближение Вигнера является приближением первого порядка, не учитывающим членов более высокого порядка. Приближение Гертцеля—Грейлинга—приближение второго порядка с оценкой члена третьего порядка, которая дает значение, заниженное на 50%. Приближение Вейнберга—Вигнера—приближение третьего порядка с оценкой члена четвертого порядка, которая дает значение, заниженное примерно на 25%. Как видно, приближение Вейнберга—Вигнера намного лучше по сравнению с приближением Гертцеля—Грейлинга.

2. 18\*. Наконец Корнгольд (Corngold, 1957а) решил уравнение (2. 52) при помощи вариационного принципа, который дает точные решения уравнения (2. 52). Преимущество такого вариационного выражения состоит в том, что для вероятности избежать резонансного захвата может быть получена более высокая точность при помощи простого приближенного выражения для потока и его сопряженной функции.

---

## Глава III

### ГОМОГЕННЫЕ РЕЗОНАНСНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

3. 1. Поперечные сечения, ответственные за поглощение нейтронов во время процесса замедления, в большинстве случаев имеют вид высоких резких резонансов\*.

Для материалов, используемых в реакторах в качестве замедлителей (например,  $H_2O$ ,  $D_2O$ ,  $C$ ,  $Be$ ), эти резонансные пики почти всегда очень узки по сравнению со средней потерей энергии на столкновение с атомом замедлителя. Однако что касается горючего или сырья (например,  $U^{238}$ ,  $U^{235}$ ,  $Th^{232}$ ,  $Pu^{239}$ ), то это предположение не выполняется для каждого резонанса. Тем не менее мы начнем эту главу с рассмотрения случая, часто встречающегося на практике, когда резонансы поглощения узки по сравнению с потерями энергии при столкновении со всеми рассматриваемыми материалами. Этот случай обсуждается в параграфах 2. 12 и 2. 13, где сделано предположение, что  $\xi$  для всех входящих в систему элементов очень велико по сравнению с шириной резонанса по оси летаргии. Вероятность избежать резонансного захвата для нейтронов, замедляющихся за один резонанс, дается уравнением (2. 47).

Обычно в этой проблеме рассматривают не самую вероятность избежать резонансного захвата, а так называемый эффективный резонансный интеграл  $I$ . Он определяется как проинтегрированное по летаргии поперечное сечение поглощения, требуемое для производства такого же количества поглощений, которое в дей-

---

\* Ядерные резонансные поперечные сечения обсуждаются во многих книгах по ядерной физике. Среди них наиболее выдающейся является книга Блатта и Вейскопфа «Теоретическая ядерная физика» (J. M. Blatt a. V. F. Weisskopf. Theoretical Nuclear Physics. Wiley a. Sons, New York, 1952). Более сложное описание этого вопроса дано в соответствующей главе книги Саха (S a c h. Nuclear Theory. Addison-Wesley. Cambridge, Mass., 1953). Резонансные реакции обсуждаются также Вейнбергом и Вигнером (Weinberg a. Wigner, 1958). Терминология резонансных реакций объясняется ниже. Единственным важным моментом, который необходимо здесь отметить, является то, что потенциальное расщепление не зависит от энергии в том энергетическом интервале, где играет важную роль резонансное поглощение.

ствительности имеется в резонансе (в предположении, что поток имеет такую же величину, которая была бы в отсутствие резонанса).

В отсутствие резонанса поперечное сечение рассеяния целиком обусловлено потенциальным рассеянием всех имеющихся ядер. Асимптотический поток благодаря источнику единичной мощности равен тогда  $1/\bar{\xi} \Sigma_p$ . Если  $N$  — атомная плотность ядер поглотителя, то общая плотность поглощения выражается так:  $\frac{NI}{\bar{\xi} \Sigma_p}$ . Плотность поглощения в одном изолированном узком резонансе дается уравнением (2.45), где  $\xi$  заменено на  $\bar{\xi}$ . Отсюда следует, что вклад в интеграл  $I$  от этого резонанса получается в виде

$$NI = \int_0^{\infty} \frac{\Sigma_p \Sigma_a(u)}{\Sigma_t(u)} du. \quad (3.1)$$

Основной вклад в интеграл дает только окрестность резонанса.

Резонансное поперечное сечение поглотителя, входящее в уравнение (3.1), имеет вид

$$\sigma_t = \frac{\pi}{k^2} g_J \frac{\Gamma_n \Gamma}{(E - E_0)^2 + \left(\frac{\Gamma}{2}\right)^2} + \frac{4\pi R}{k} g_J \frac{\Gamma_n (E - E_0)}{(E - E_0)^2 + \left(\frac{\Gamma}{2}\right)^2} + 4\pi R^2; \quad (3.2a)$$

$$\sigma_a = \frac{\pi}{k^2} g_J \frac{\Gamma_n \Gamma \gamma}{(E - E_0)^2 + \left(\frac{\Gamma}{2}\right)^2}. \quad (3.2b)$$

Если ввести следующие обозначения

$$\sigma_0 = \frac{4\pi}{k^2} g_J \frac{\Gamma_n}{\Gamma}; \quad (3.3a)$$

$$\sigma_{pa} = 4\pi R^2; \quad (3.3b)$$

$$x = \frac{E - E_0}{\Gamma/2}, \quad (3.3b)$$

то получим

$$\sigma_t = \sigma_0 (1 + x^2)^{-1} + \left( \sigma_0 \sigma_{pa} g_J \frac{\Gamma_n}{\Gamma} \right)^{\frac{1}{2}} \cdot 2x (1 + x^2)^{-1} + \sigma_{pa}; \quad (3.3\Gamma)$$

$$\sigma_a = \sigma_0 \frac{\Gamma \gamma}{\Gamma} (1 + x^2)^{-1}. \quad (3.3\Delta)$$

Здесь  $k = \frac{2\pi}{\lambda}$  — волновое число нейтрона в системе центра масс, где  $\lambda$  — длина волны нейтрона, получаемая из уравнения де-Бройля.  $g_J$  — статистический множитель, относящийся к спине частиц; он равен  $(2J + 1) / (2I + 1)$ , где  $J$  — квантовое

спиновое число составного ядра, образованного ядром-мишенью и нейтроном, а  $I$  — квантовое спиновое число ядра-мишени.  $E$  — энергия нейтрона.  $\Gamma_n$ ,  $\Gamma_\gamma$ ,  $\Gamma$  — физические параметры резонансных уровней с размерностью энергии, называемые соответственно нейтронной, радиационной и общей ширинами уровня. Все эти параметры вместе с  $E_0$  — энергией резонанса — обычно приводятся в сборниках ядерных данных.

В интересующих нас случаях обычно будут возможны только реакции рассеяния нейтронов и радиационного захвата; в этом случае общая ширина равна сумме нейтронной и радиационной ширины.  $R$  — радиус потенциального рассеяния, т. е. радиус непроницаемой сферы, поперечное сечение которой равно  $4\pi R^2$ . Тогда  $\sigma_{pa} = 4\pi R^2$  есть независящее от энергии сечение рассеяния, называемое потенциальным сечением рассеяния. Индекс  $a$  означает здесь, что  $\sigma_{pa}$  — потенциальное сечение рассеяния ядер, ответственных за поглощение. Безразмерная величина  $x$  измеряет отклонение энергии нейтрона  $E$  от энергии резонанса, выраженное в единицах полуширины. Наконец  $\sigma_0$  есть общее резонансное сечение (исключая  $\sigma_{pa}$ ) при  $x = 0$ .

Вышеприведенные поперечные сечения относятся только к нейтронам сравнительно низкой энергии с нулевым орбитальным угловым моментом; это, однако, находится в согласии с замечаниями в начале параграфа 2. 2. Для таких  $s$ -волновых нейтронов

$\Gamma_n$  пропорционально  $\sqrt{E}$ ; таким образом, величина  $\Gamma_n^0 = \Gamma_n E^{-\frac{1}{2}}$ , называемая сокращенной нейтронной шириной, должна быть постоянной от уровня к уровню. В действительности это не так, но средняя величина  $\langle \Gamma_n^0 \rangle$  не зависит от флуктуаций энергии. Статистическое распределение  $\Gamma_n^0$  было получено Портером и Томасом (Porter a. Tomas, 1956) в виде регулярного распределения для одноканального процесса (Cramér, 1956). Из эксперимента известно, что  $\Gamma_\gamma$  почти постоянно для всех уровней (Porter a. Tomas, 1956).

Общие поперечные сечения в резонансном интервале для двух наиболее важных резонансных поглотителей  $U^{238}$  и  $Th^{232}$  показаны на рис. 3. 1 и 3. 2. Недавно измеренные значения параметров  $E_0$ ,  $\Gamma_n$ ,  $\Gamma_\gamma$ ,  $\Gamma_n^0$ ,  $\Gamma$ ,  $\sigma_0$  для  $U^{238}$  и  $Th^{232}$  даны в табл. 3. 1 и 3. 2.

3. 2. С вышеприведенными замечаниями можно написать для поперечных сечений в уравнении (3. 1)

$$\Sigma_a = N\sigma_a; \quad (3. 4a)$$

$$\Sigma_t = N\sigma_t + \Sigma_m; \quad (3. 4б)$$

$$\Sigma_p = N\sigma_{pa} + \Sigma_m, \quad (3. 4в)$$

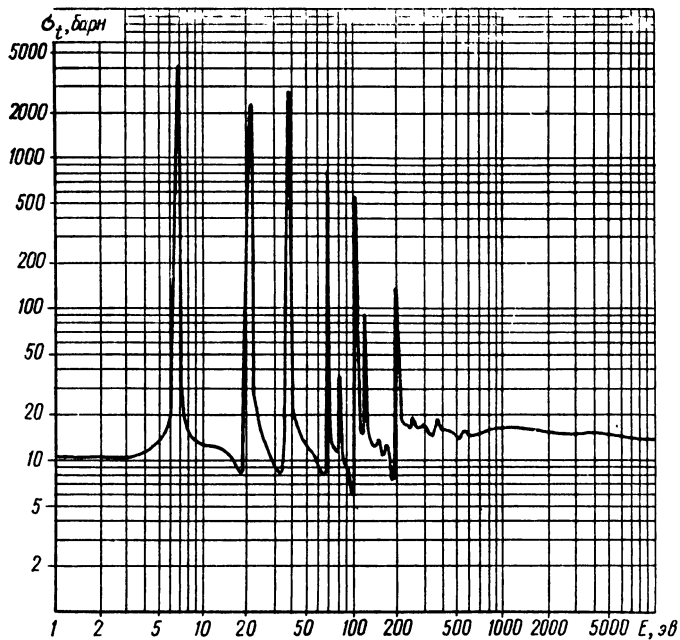


Рис. 3. 1. Общее поперечное сечение  $U^{238}$  в резонансной области.

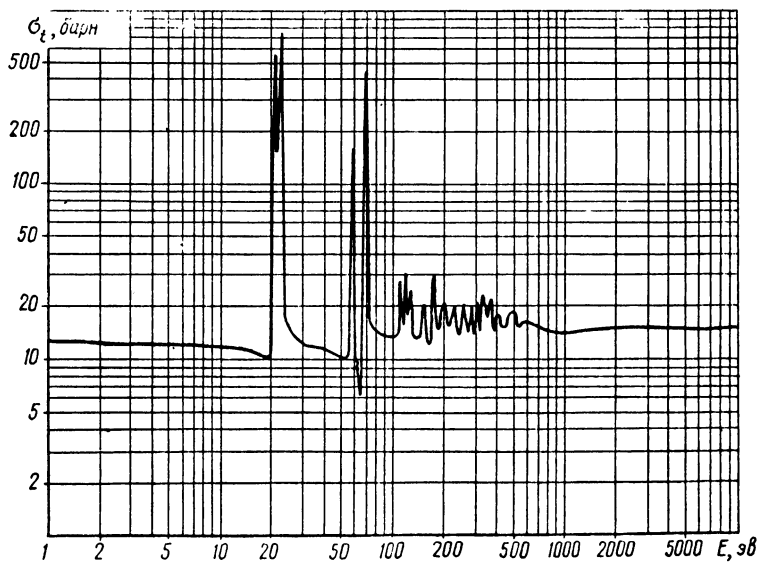


Рис. 3. 2. Общее поперечное сечение  $Th^{232}$  в резонансной области.

Резонансные параметры  $U_{288}$ , представленные Розеном (Rosen, 1959)\*

$E_0, \text{эВ}$	$\Gamma_n, \text{МэВ}$	$\Gamma_\gamma, \text{МэВ}$	$\Gamma_n^0, \text{МэВ}$	$\Gamma, \text{МэВ}$	$\sigma_0, \text{е}$
6,68±0,06	1,48±0,05	25±2	0,572	26,5	21 700
*10,2±0,1	0,0014±0,0007	25±2	0,0004	25	15
21,0±0,3	9,0±0,3	26±4	1,96	34	32 600
36,8±0,6	33±2	20±3	5,4	59	39 500
66,3±1,1	23±2		2,8	43	20 900
81,1±1,6	2,1±0,2		0,23	27	2 500
*90±2	0,08±0,01		0,008	25	92,5
102,8±0,1	70±5	21±6	6,9	91	19,500
117,0±0,1	18±3	21±6	1,66	39	10 300
145,9±0,1	0,8±0,2		0,067	25	550
165,7±0,2	3,5±0,4	14±14	0,27	28	1 960
190,0±0,2	135±15	22±6	9,8	157	11 800
209,1±0,2	55±6	26,5±4	3,8	82	8 350
238,0±0,3	32±4	20,5±4	2,1	53	6 600
*264±0,3	0,23±0,08		0,014	25	90
274,5±0,4	27±3	22,5±3	1,58	50	5 100
292±0,4	19±3	19±5	1,11	38	4 400
312,5±0,4	1,0±0,2		0,057	26	320
349±0,5	45±7	20±3	2,4	65	5 100
378±0,6	1,5±0,3		0,077	26	400
399±0,6	10±2	40±16	0,5	35	1 850
412±0,7	17±3	18±6	0,85	42	2 550
436±0,7	14±3	20±8	0,67	39	2 140
*456±0,8	0,7±0,3		0,033	25	160
465±0,8	7±2	18±14	0,33	32	1 200
480±0,8	4,5±0,8	35±25	0,205	29	840
*491±0,9	1±0,2		0,045	26	200
520±0,9	37±6	28,5±4	1,63	66	2 800
537±1	54±8	24,3±3	2,3	78	3 350
*558±1	1±0,3		0,042	26	180
582±1,1	42±7	23±3	1,74	65	2 900
597±1,1	66±10	23±3	2,7	89	3 200
*606±1,2	0,6±0,3		0,024	25	100
622±1,2	39±6	24±3	1,97	63	2 600
630±1,2	9±2		0,36	34	1 100
663±1,3	125±20	25,5±3	4,85	151	3 250
*681±1,4	1,3±0,3		0,05	26	190
696±1,4	53±8	25,2±3	2,0	78	2 540
711±1,5	17±4	33±17	0,64	42	1 480
*724±1,5	14,7±3		0,055	39	1 340
733±1,6	4,25±0,9		0,157	29	520
767±1,7	9±3		0,37	34	900
783±1,7	3±0,7		0,107	28	355
793±1,7	11±3	15±3	0,39	36	1 000
826±1,9	60±10	32±5	0,21	92	2 050
856±2,0	130±50		4,55	155	2 550
860±2,0	60±30		2,05	85	2 130
*869±2,0	2,2±0,5		0,075	27	240
*898±2,1	1,3±0,4		0,043	26	145
911±2,1	90±20		3,0	125	2 050
930±2,2	37±8	34,7	1,21	62	1 670

$E_0, \text{эв}$	$\Gamma_n, \text{мэв}$	$\Gamma_\gamma, \text{мэв}$	$\Gamma_n^0, \text{мэв}$	$\Gamma, \text{мэв}$	$\sigma_0, \text{в}$
942±2,3	195±40	25±3	6,35	220	2450
962±2,3	190±40	23,5±3	6,15	214	2400
*985±2,4	1,0±0,6		0,03	26	100
997±2,5	400±100	30±6	12,7	430	2400

† Параметры для семи резонансов ниже 100 эв взяты из работы Юза и Шварца (Hughes and Schwartz, 1958).  $\Gamma_n^0$  дается в виде  $\Gamma_n E_0 - \frac{1}{2}$ , где  $E_0$  измерено в электроновольтах (эв), а  $\Gamma_n^0$  — в миллиэлектронвольтах (мэв).  $\langle \Gamma_n^0 \rangle = 1,76 \pm 0,08$  мэв. Для резонансов, в которых  $\Gamma_\gamma$  не было измерено, оно берется равной средней из измеренных величин, 24,6 мэв.  $D$  — средний размер уровня — равен  $18,5 \pm 0,6$  эв,  $\sigma_{pa} = 10,7 \pm 0,3$  барн. Отмеченные звездочкой значения относятся к  $p$ -волновым резонансам.

Таблица 3. 2

**Резонансные параметры  $\text{Th}^{232}$ , представленные Юзом и Шварцем  
(Hughes and Schwartz, 1958) \***

$E_0, \text{эв}$	$\Gamma_n, \text{мэв}$	$\Gamma_\gamma, \text{мэв}$	$\Gamma_n^0, \text{мэв}$	$\Gamma, \text{мэв}$	$\sigma_0, \text{в}$
21,9±0,2	2,2±0,3	34±7	0,48	36,2	7 200
23,6±0,3	4,0±0,4	39±10	0,82	43,0	10 200
59,6±0,4	4,6±0,7	21±15	0,60	25,6	7 800
69,7±0,6	39±5	43±15	4,7	82	17 700
114±2	13±4		1,2	48	6 200
122±2	230±60		2,1	265	18 500
130±3	9±2		0,8	44	4 100
172±3	67±9		5,1	102	9 900
195±5	22±8		1,6	57	5 100
201±5	16±10		1,1	51	4 100
212±5	1,2±0,8		0,08	36,2	410
224±6	27±9		1,8	62	5 100
235±6	1,7±0,9		0,11	36,7	510

\*  $\Gamma_\gamma$  там, где не проводились измерения, принимается равным 35 мэв.  $\langle \Gamma_n^0 \rangle = 1,6$  мэв,  $D = 18$  эв. Сег (Seth, 1956) дает значение  $\sigma_{pa} = 12$  барн.

где  $\Sigma_m$  — макроскопическое потенциальное сечение рассеяния нерезонансного замедлителя. Наконец введем еще три определения:

$$\sigma_p = \frac{\Sigma_p}{N}; \quad (3.5a)$$

$$i = g_J \frac{\Gamma_n}{\Gamma} \frac{\sigma_{pa}}{\sigma_p}; \quad (3.5б)$$

$$\beta = \frac{\sigma_p}{\sigma_0}. \quad (3.5в)$$

Если мы подставим уравнения (3.3)—(3.5) в уравнение (3.1), то получим

$$I = \int_{\text{рез}} \frac{\sigma_p \left[ \sigma_0 \frac{\Gamma_\gamma}{\Gamma} (1+x^2)^{-1} \right]}{\sigma_0 (1+x^2)^{-1} + (\sigma_0 \sigma_p i)^{1/2} \cdot 2x (1+x^2)^{-1} + \sigma_p} dx \cdot \frac{\Gamma}{2E}. \quad (3.6)$$

Здесь мы использовали  $-du = \frac{dE}{E} = \frac{\Gamma}{2E} dx$ . Так как ядерные резонансы очень узки, т. е.  $\Gamma \ll E$ , то достаточно хорошее приближение можно получить, если пренебречь энергетической зависимостью величин  $\sigma_0$ ,  $\Gamma$  и  $E$  во всем интервале интегрирования и просто оценить их при энергии  $E_0$ . Кроме того, пределы интегрирования по  $x$  можно распространить до  $\pm\infty$ . После этих небольших преобразований уравнение (3.6) можно написать в виде

$$I = \frac{\sigma_p \Gamma_\gamma}{2E_0} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1 + (\beta i)^{1/2} \cdot 2x + \beta (1+x^2)}. \quad (3.7)$$

Этот интеграл легко вычисляется и получается следующий результат:

$$I = \frac{\frac{1}{2} \pi \sigma_p \frac{\Gamma_\gamma}{E_0}}{\sqrt{\beta (1 + \beta - i)}}. \quad (3.8)$$

Если  $\beta \ll 1 - i$ , что часто бывает в низкоэнергетических резонансах урана, тория или других поглотителей в сильно концентрированных системах, то величина  $I$  пропорциональна  $\sqrt{\sigma_p}$ .

Как будет видно в следующем параграфе, имеется одна причина, из-за которой эта зависимость не является точной.

Если  $\beta \gg 1 - i$ , что наблюдается в сильно разбавленных средах, то

$$I = I_\infty = \frac{\pi}{2} \sigma_0 \frac{\Gamma_\gamma}{E_0}, \quad (3.9)$$

где  $I_\infty$  — предел  $I$  при  $\sigma_p \rightarrow \infty$ . Это так называемый бесконечно разбавленный резонансный интеграл. Сумма  $I_\infty$  по всем резонансам была измерена для многих материалов (Masklin a. Romegance, 1955; Сливак, 1955; Климентов и Грязев, 1959).

3. 3. Результаты последнего параграфа, кроме уравнения (3.9), нельзя прямо сравнить с экспериментом, так как они получены на основе предположения стационарности ядер поглотителя. В действительности же ядра поглотителя находятся в тепловом движении, и это движение сильно влияет на поглощение нейтронов.



Определим эффективное поперечное сечение любого процесса для нейтронов, имеющих в лабораторной системе скорость  $v$ , так, чтобы оно давало такую же скорость реакции, которая в действительности имеется в случае движущихся ядер. Это эффективное поперечное сечение рассчитывается из соотношения

$$v\sigma_{\text{эф}}(v) = \int |\mathbf{v} - \mathbf{V}| \sigma(|\mathbf{v} - \mathbf{V}|) P(V) d^3V, \quad (3.10)$$

где  $\mathbf{V}$  — скорость ядра поглотителя,  $P(V)$  — нормализованное распределение  $V$ , а  $\sigma$  — поперечное сечение как функция относительной скорости  $\mathbf{v} - \mathbf{V}$  нейтрона и ядра. Для резонансных процессов  $\sigma$  дается уравнением (3.3).

Оценка уравнения (3.10) проведена в предположении, что  $P(V)$  представляет собой максвелловское распределение скоростей, т. е.

$$P(V) d^3V = \left(\frac{M}{2\pi T}\right)^{\frac{3}{2}} \exp\left(-\frac{MV^2}{2T}\right) \cdot 4\pi V^2 dV. \quad (3.11)$$

Здесь  $M$  — масса поглотителя,  $T$  — температура в единицах энергии, т. е. умноженная на постоянную Больцмана. Это предположение будет справедливо, если ядра поглотителя находятся в газообразном состоянии. Однако это нереально: в большинстве имеющихся на практике реакторов ядра поглотителя находятся в твердом или жидком состоянии. С целью нахождения  $P(V)$  можно использовать тогда две простые модели твердого тела, предложенные Эйнштейном и Дебаем для расчета удельной теплоты. В модели Эйнштейна ядра связаны в углах решетки силами, подчиняющимися закону Гука, и гармонически осциллируют с частотой  $\omega_E$ .

В модели Дебая движение ядер около положения равновесия в углах решетки представляет собой беспорядочное наложение гармонических движений, распределение частот которых изменяется как  $\omega^2$  от нуля до максимальной частоты  $\omega_D$ . В обеих моделях распределение  $P(V)$  находится из максвелловского, но температура Максвелла  $T^*$  не равна обычно термодинамической температуре  $T$  (Lamb, 1939). Действительно,

$$T^* = \frac{1}{2} \theta_E \operatorname{cth}(\theta_E/2T) \quad (\text{модель твердого тела — Эйнштейна}); \quad (3.12a)$$

$$T^* = \frac{3}{2} \theta_D \int_0^1 x^3 \operatorname{cth}\left(\frac{x\theta_D}{2T}\right) dx \quad (\text{модель твердого тела Дебая}), \quad (3.12b)$$

где  $\theta_E = \hbar\omega_E$  и  $\theta_D = \hbar\omega_D$ .

То, что  $T^*$  не равно  $T$ , является квантовомеханическим эффектом, возникающим непосредственно из дискретного спектра энер-

гий, который достигается при гармонических осцилляциях ядер. В классической теории  $T^*$  всегда будет равно  $T$ , и не только для потенциала осциллятора, но и для любого, не зависящего от скорости потенциала. В квантовой теории это не так. Действительно, когда  $T = 0$ , распределение скорости будет таким же, как при нулевом колебании. Случайно оказывается, что для гармонического осциллятора это нулевое распределение есть максвелловское.  $T^*$  для  $T = 0$  определяется прямо из среднего квадратичного момента в наинизшем состоянии осциллятора. Случайно же оказывается, что для осциллятора  $P(V)$  также есть максвелловское распределение при низкой, но не нулевой температуре  $T$ .

Для типов связи, отличных от тех, которые подчиняются закону Гука, распределение скоростей при низкой температуре не будет максвелловским. Для высокой температуры, однако, распределение будет максвелловским и, кроме того,  $T^* = T$  независимо от природы сил связи. Это следует из того, что при высокой температуре состояние высокого квантового числа возбуждено, а, согласно принципу соответствия Бора, в области высоких квантовых чисел справедлива классическая механика. Таким образом, предсказание классической теории, что  $T^* = T$ , применимо для высоких  $T$ .

Это заключение проверяется уравнением (3. 12), для которого  $T^*$  действительно дает приближенно величину  $T$  для больших  $T$  и отличается от нее менее чем на 10%, когда  $T$  равно  $\theta_E$  или  $\theta_D$ .

Для большинства твердых тел  $\theta_E$  и  $\theta_D$  соответствуют температурам порядка  $300^\circ \text{K}$  или меньше.

3. 4. Если для  $V$  предполагается распределение (3. 11), то отношение  $V/v$  будет порядка величины  $(T/AE)^{1/2}$ , где  $A$  — массовое число ядер поглотителя, а  $E$  — энергия нейтрона. В большинстве практических случаев это отношение очень мало; например, для резонанса  $\text{U}^{238}$  при энергии 6,7 эв оно составляет всего 0,004, когда  $T = 300^\circ \text{K}$ . Следовательно, при оценке уравнения (3. 10) мы можем положить с очень небольшой ошибкой  $|v - V| = v$ .

Относительная энергия  $E'$ , связанная со скоростью  $|v - V|$ , в системе центра масс дается выражением

$$E' = \frac{1}{2} m |v - V|^2, \quad (3. 13)$$

где  $m$  — сокращенная масса нейтрона, равная  $\frac{A}{A+1}$  в единицах действительной массы нейтрона.

Вследствие малости  $V/v$  мы можем разложить  $E'$  по степеням  $V/v$ . Если мы выберем направление  $v$  по оси  $z$ , то для первого порядка по  $V/v$  получим:

$$E' = \frac{1}{2} m v^2 - m v V_z; \quad (3. 14a)$$

$$E' = E - (2mE)^{1/2} V_z, \quad (3. 14b)$$

где  $E = \frac{1}{2} m v^2$  — относительная энергия для стационарного ядра. Если мы возьмем  $|\mathbf{v} - \mathbf{V}|$  только как функцию от  $V_z$ , как определено выше, то можно провести интегрирование по  $V_x$  и  $V_y$  и заменить трехмерное распределение вероятности  $P(\mathbf{V})$  на одномерное распределение  $P(V_z)$ .

Используя уравнение (3. 14), мы можем написать

$$\sigma_{\text{эф}}(E) = \int \sigma(E') P\left(\frac{E - E'}{\sqrt{2mE}}\right) \frac{dE'}{\sqrt{2mE}}, \quad (3. 15)$$

где  $P$  — статистическое распределение  $V_z$ ; оно дается в виде

$$P(V_z) = \left(\frac{M}{2\pi T}\right)^{1/2} \exp\left(-\frac{M V_z^2}{2T}\right). \quad (3. 16)$$

Если для  $\sigma(E')$  выбрать уравнение (3. 2б) и подставить его и последнее выражение в уравнение (3. 15), то получим после упрощения

$$\sigma_{\text{эф}}(E) = \sigma_0 \frac{\Gamma \gamma}{\Gamma} \frac{\theta}{2\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp\left[-\frac{1}{4} \theta^2 (x - y)^2\right]}{1 + y^2} dy, \quad (3. 17)$$

где

$$x = \frac{2}{\Gamma} (E - E_0), \quad y = \frac{2}{\Gamma} (E' - E_0)$$

и

$$\theta = \frac{\Gamma}{\Delta}; \quad \Delta = \left(\frac{4mTE_0}{M}\right)^{1/2}. \quad (3. 18)$$

$\Delta$  — доплеровская ширина резонанса. Так как резонанс узкий, то  $\sigma_0$  и  $\Gamma$  вынесены из-под знака интеграла.

Поперечные сечения, использованные выше, соответствуют системе центра масс. В лабораторной системе ширины и резонансные энергии больше на величину  $\frac{A+1}{A}$ , однако  $k$ , волновое число нейтрона, должно всегда рассчитываться в системе центра масс.

Ни одна из величин в уравнениях (3. 2) или (3. 3) не изменяется при переходе от системы центра масс к лабораторной системе. Также не изменяется и  $\theta$ , но  $\Delta$  дается выражением

$$\Delta = \left(\frac{4TE_0}{A}\right)^{1/2}, \quad (3. 19)$$

где  $E_0$  — теперь энергия резонанса в лабораторной системе.

Второй множитель в правой части уравнения (3. 17) называется формой доплеровского уширения линий или, иногда, профилем Войта. Эта функция обозначается так:  $\psi(\theta, x)$ , где

$$\psi(\theta, x) = \frac{\theta}{2\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp\left[-\frac{1}{4}\theta^2(x-y)^2\right]}{1+y^2} dy, \quad (3. 20)$$

и является дополнением к естественной форме линий  $(1+x^2)^{-1}$ . Эта функция изучалась вначале Войтом (Voigt, 1912), а позднее Борном (Born, 1933), Бете (Bete, 1937), Бете и Плачком (Bete a. Placzek, 1937), Роузом и др. (Rose et al., 1954), Монком и др. (Monk et al., 1954) и Мелконяном и др. (Melkonian et al., 1953). Последние две работы дают кривые  $\psi(\theta, x)$ , в то время как Роуз построил численные таблицы. Дальнейшие численные значения даются Познером (Posner, 1959).

3. 5.\* В этом параграфе обсуждаются свойства функции  $\psi(\theta, x)$ ; некоторые из них следуют ниже.

Первое свойство

$$\psi(\infty, x) = (1+x^2)^{-1}. \quad (3. 21)$$

Это легко доказывается, если заметить, что когда  $\theta \rightarrow \infty$ , то

$$\frac{\theta}{2\sqrt{\pi}} \exp\left[-\frac{\theta^2}{4}(x-y)^2\right] \rightarrow \delta(x-y), \quad (3. 22)$$

где  $\delta$  — функция Дирака.

Второе свойство

Площадь под  $\psi(\theta, x)$  не зависит от  $x$  и равна

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi(\theta, x) dx = \pi. \quad (3. 23)$$

Это легко доказывается, если сначала проинтегрировать по  $x$ , а затем по  $y$ .

Третье свойство

$$\psi(\theta, x) \approx \frac{1}{1+x^2} \left[ 1 + \frac{2}{\theta^2} \frac{3x^2-1}{(1+x^2)^2} + \dots \right]. \quad (3. 24)$$

Эти асимптотические ряды можно получить, раскладывая  $(1+y^2)^{-1}$  в ряд Тэйлора в окрестности точки  $y=x$  и проводя почленное интегрирование. Предполагается, что достаточно далеко на флангах резонанса справедлива естественная форма линии; условие для этого таково (четвертое свойство):

$$\psi(\theta, x) \approx \frac{1}{2} \sqrt{\pi} \theta \exp\left(-\frac{1}{4}\theta^2 x^2\right), \quad (3. 25)$$

$$\text{если } \theta \ll 1; \quad x^2 \ll \frac{6}{\theta^2}.$$

Этот результат можно установить, отмечая, что если  $\theta \ll 1$ , то  $\psi(\theta, x)$  можно аппроксимировать вблизи центра линии, полагая в экспоненте  $y = 0$ ; тогда естественная форма линии  $(1 + y^2)^{-1}$  будет узкой по сравнению с экспонентой. Принимая во внимание уравнение (3. 24), заметим, что уравнение (3. 25) можно использовать только, если  $x^2 \gg 6/\theta^2$ .

Согласно уравнению (3. 25),  $\psi(\theta, 0) = \frac{1}{2} \sqrt{\pi} \theta$ , в то время как точный расчет дает

$$\psi(\theta, 0) = \frac{1}{2} \sqrt{\pi} \theta \exp\left(-\frac{1}{4} \theta^2, \operatorname{erfc} \frac{\theta}{2}\right), \quad (3. 26)$$

где  $\operatorname{erfc}(z)$ , функция ошибок, определяется в виде

$$\operatorname{erfc}(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_z^{\infty} e^{-u^2} du. \quad (3. 27)$$

Допплеровское уширение, дополняющее форму линии интерференционного рассеяния  $2x(1 + x^2)^{-1}$ , можно написать аналогично уравнению (3. 20) в виде

$$\chi(\theta, x) = \frac{\theta}{2\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp\left[-\frac{1}{4} \theta^2 (x - y)^2\right]}{1 + y^2} \cdot 2y dy. \quad (3. 28)$$

$\chi(\theta, x)$  связано с  $\psi(\theta, x)$  соотношением

$$\chi(\theta, x) = 2x\psi(\theta, x) + \frac{4}{\theta^2} \frac{d\psi(\theta, x)}{dx}. \quad (3. 29)$$

Из уравнения (3. 29) очевидно, что

$$\chi(\infty, x) = 2x(1 + x^2)^{-1}; \quad (3. 30a)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \chi(\theta, x) dx = 0; \quad (3. 30б)$$

$$\chi(\theta, x) \approx 2x(1 + x^2)^{-1}, \text{ если } x^2 \gg \frac{6}{\theta^2}; \quad (3. 30в)$$

$$\chi(\theta, 0) = 0. \quad (3. 30г)$$

3. 6. Рассмотрим теперь обобщение уравнения (3. 6) для значения  $I$  в случае доплеровского уширения. Рассмотрим сначала случай  $i = 0$  и отложим рассмотрение эффектов интерференции на более позднее время [ $i$  близко к нулю для чисто поглощающего резонанса ( $\Gamma_n \ll \Gamma$ ) или разбавленной среды ( $\sigma_{pa} \ll \sigma_p$ ). Последний случай наиболее часто встречается на практике].

Правильное обобщение уравнения (3. 6) получается, если заменить  $(1 + x^2)^{-1}$  на  $\psi(\theta, x)$ . Тогда

$$I = \sigma_p \frac{\Gamma \nu}{E_0} \int_0^{\infty} \frac{\psi(\theta, x)}{\psi(\theta, x) + \beta} dx \cdot \frac{\Gamma}{2E}. \quad (3. 31)$$

Интеграл в правой части уравнения (3. 31) обозначается через  $J(\theta, \beta)$ . Он изучался Данкоффом и Гинзбургом (Dancoff a. Ginsburg, 1944), Дреснером (Dresner, 1956a, 1958b), Адлером и др. (Adler et al., 1958) и Гордеевым и др. (1958).

3. 7\*. Ниже приводятся свойства  $J(\theta, \beta)$ .

Первое свойство

$$J(\infty, \beta) = \frac{\frac{1}{2} \pi}{\sqrt{\beta(1 + \beta)}}, \quad (3. 32)$$

что следует из уравнений (3. 21) и (3. 31). Предел  $\theta = \infty$  соответствует пределу  $T = 0$ .

Второе свойство

$$J(\theta, \beta) \approx J(\infty, \beta), \text{ если } \beta \ll \frac{\theta^2}{6}. \quad (3. 33)$$

Чтобы доказать это соотношение, заметим сначала, что если  $\beta$  очень мало, то подынтегральное выражение фактически будет равно единице до тех пор, пока  $\psi(\theta, x)$  не станет равным  $\beta$ . Если величина  $x$ , при которой это происходит, достаточно велика, то  $\psi(\theta, x)$  может быть заменено на  $(1 + x^2)^{-1}$  не только для больших, но и для малых значений  $x$ . Так как при малых значениях  $x$  подынтегральное выражение примерно равно единице, то можно использовать либо  $\psi(\theta, x)$ , либо  $(1 + x^2)^{-1}$ . Если такая замена формы линии с доплеровским уширением справедлива для всех  $x$ , то уравнение (3. 33) должно выполняться. Если же  $\psi(\theta, x) = (1 + x^2)^{-1}$ , когда  $\psi(\theta, x) = \beta$ , то  $x$  определяется приближенно в виде  $\beta^{-\frac{1}{2}}$ . Тогда замена  $\psi(\theta, x)$  на  $(1 + x^2)^{-1}$  будет справедлива, только если  $\frac{6\beta}{\theta^2} \ll 1$ , как можно видеть из условия применимости уравнения (3. 24).

Третье свойство

$$\frac{\pi}{2\beta} > J(\theta, \beta) > \frac{\pi}{2\beta} \left[ 1 - \frac{\psi(\theta, 0)}{\beta} \right], \text{ если } \beta > \psi(\theta, 0). \quad (3. 34)$$

Функцию  $J(\theta, \beta)$  можно представить в виде

$$J(\theta, \beta) = \int_0^{\infty} \frac{\psi(\theta, x)}{\psi(\theta, x) + \beta} dx = \int_0^{\infty} \sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^\nu \left[ \frac{\psi(\theta, x)}{\beta} \right]^{\nu+1} dx. \quad (3. 35)$$

Если  $\beta > \psi(\theta, 0) \geq \psi(\theta, x)$ , то ряды можно почленно проинтегрировать. Так как члены ряда знакопеременны, то можно написать

$$\int_0^{\infty} \frac{\psi(\theta, x)}{\beta} dx > J(\theta, \beta) > \int_0^{\infty} \left( \frac{\psi(\theta, x)}{\beta} - \frac{\psi^2(\theta, x)}{\beta^2} \right) dx > \\ > \left( 1 - \frac{\psi(\theta, 0)}{\beta} \right) \int_0^{\infty} \frac{\psi(\theta, x)}{\beta} dx. \quad (3.36)$$

Использование уравнения (3.23) для интеграла  $\psi(\theta, x)$  в уравнении (3.36) дает неравенство (3.34). Более точную оценку третьего члена в соотношении (3.36) можно получить, используя равенство, полученное Бете и Плачеком (Bete a. Placzek, 1937):

$$\int_0^{\infty} \psi(\theta, x) \psi(\theta', x) dx = \frac{\pi}{4} \psi\left(\frac{2\theta\theta'}{\sqrt{\theta^2 + \theta'^2}}, 0\right). \quad (3.37)$$

Согласно уравнению (3.37),  $\psi(\theta, 0)$  в правой части уравнения (3.34) заменяется на  $\frac{1}{2} \psi(\theta\sqrt{2}, 0)$ . Из уравнения (3.34) следует, что когда  $\beta$  становится очень большим, то

$$J(\theta, \beta) \approx \frac{\pi}{2\beta} \approx J(\infty, \beta). \quad (3.38)$$

Уравнение (3.38) имеет простое физическое объяснение. Если  $\beta$  достаточно велико по сравнению с  $\psi$ , то при оценке интеграла существенна только площадь под  $\psi$ . Так как эта площадь имеет то же значение, что и для естественной формы линии, то немедленно приходим к уравнению (3.38). По этой причине уравнение (3.9) для резонансного интеграла в бесконечно разбавленной среде справедливо даже при наличии доплеровского уширения.

Еще одно важное общее свойство  $J(\theta, \beta)$  состоит в том, что при уменьшении  $\theta$  оно увеличивается. Докажем это следующим образом. Сначала отметим, что

$$\frac{\partial J}{\partial \theta} = \beta \int_0^{\infty} \frac{\partial \psi / \partial \theta}{(\psi + \beta)^2} dx. \quad (3.39)$$

Далее из уравнения (3.20) следует, что

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = -\frac{\theta^3}{2} \frac{\partial \psi}{\partial \theta}. \quad (3.40)$$

Следовательно, подставляя уравнение (3.40) и интегрируя по частям, имеем

$$\frac{\partial J}{\partial \theta} = -\frac{4\beta}{\theta^3} \int_0^{\infty} \left( \frac{\partial \psi}{\partial x} \right)^2 (\psi + \beta)^{-3} dx. \quad (3.41)$$

Так как подынтегральное выражение в уравнении (3.41) положительно, то  $\frac{\partial J}{\partial \theta} < 0$ , что и требовалось доказать. Это неравенство устанавливает, что резонансное поглощение возрастает с ростом температуры. Кроме того, легко показать также, что и  $\frac{\partial J}{\partial \beta} < 0$ .

3. 8\*. В качестве дополнения для более точной оценки  $J(\theta, \beta)$  при отсутствии доплеровского уширения можно рассчитать его в случае так называемого экстремального доплеровского уширения. С этой целью возьмем ранее использованные неравенства  $\theta \ll 1$  и  $\beta \gg \theta^2/6$  и проверим в них знаки неравенств. Тогда получается, что  $J(\theta, \beta)$  дается уравнением (3.32). Если эти неравенства удовлетворяются, можно использовать для  $\psi(\theta, x)$  уравнение (3.25). Это выражение для  $\psi(\theta, x)$  не справедливо на краях резонанса, где  $\psi$  стремится к естественной форме линии, но при установленных условиях вклад краев в интеграл очень мал. Необходимо сказать, что в области, где  $x^2 \gg 6/\theta^2$  и  $\psi \approx (1 + x^2)^{-1}$ ,  $\psi$  порядка  $\theta^2/6$ , что гораздо меньше  $\beta$ . Таким образом, вклад в интеграл мал. Действительно, легко видеть для естественной формы линии, что

$$\int_x^{\infty} \frac{\psi(\infty, x)}{\psi(\infty, x) + \beta} dx = J(\infty, \beta) \left[ 1 - \frac{2}{\pi} \arctg \left( x \sqrt{\frac{\beta}{1 + \beta}} \right) \right]. \quad (3.42)$$

Так как  $J(\theta, \beta) > J(\infty, \beta)$ , то частичный вклад в интеграл из области  $x^2 > 6/\theta^2$  меньше, чем  $1 - \frac{2}{\pi} \arctg \sqrt{\frac{6\beta}{\theta^2(1 + \beta)}}$ , что равно  $\frac{2}{\pi} \sqrt{\theta^2/6\beta}$  (при условии  $\beta \gg \theta^2/6$ ). По предположению эта последняя величина много меньше единицы. Таким образом, при выбранных условиях можно написать с хорошей степенью точности

$$J(\theta, \beta) = \int_0^{\infty} \frac{\frac{1}{2} \sqrt{\pi} \theta \exp\left(-\frac{1}{4} \theta^2 x^2\right)}{\frac{1}{2} \sqrt{\pi} \theta \exp\left(-\frac{1}{4} \theta^2 x^2\right) + \beta} dx. \quad (3.43)$$

Если параметр  $\theta \sqrt{\pi/2\beta} \gg 1$ , то можно приблизительно оценить интеграл в уравнении (3.43) при помощи метода, предложенного



Вигнером и др. (Wigner et al., 1955). Подынтегральное выражение будет близко к единице до значения  $x = \frac{2}{\theta} \sqrt{\ln \frac{\theta \sqrt{\pi}}{2\beta}}$ , а затем быстро падает до нуля. Но тогда

$$J(\theta, \beta) \approx \frac{2}{\theta} \sqrt{\ln \frac{\theta \sqrt{\pi}}{2\beta}}. \quad (3.44)$$

С другой стороны, если параметр  $\theta \sqrt{\pi}/2\beta < 1$ , то можно представить  $J(\theta, \beta)$  в виде степенного ряда

$$J(\theta, \beta) = \frac{\sqrt{\pi}\theta}{2\beta} \int_0^{\infty} \exp\left(-\frac{1}{4}\theta^2 x^2\right) \left[1 + \frac{\sqrt{\pi}\theta}{2\beta} \exp\left(-\frac{1}{4}\theta^2 x^2\right)\right]^{-1} dx = \quad (3.45a)$$

$$= \frac{\sqrt{\pi}\theta}{2\beta} \int_0^{\infty} \exp\left(-\frac{1}{4}\theta^2 x^2\right) \sum_{v=0}^{\infty} (-1)^v \left(\frac{\sqrt{\pi}\theta}{2\beta}\right)^v \exp\left(-v \cdot \frac{1}{4}\theta^2 x^2\right) dx = \quad (3.45b)$$

$$= \frac{\sqrt{\pi}}{\beta} \sum_{v=0}^{\infty} (-1)^v \left(\frac{\sqrt{\pi}\theta}{2\beta}\right)^v \int_0^{\infty} \exp[-(v+1)y^2] dy = \quad (3.45b)$$

$$= \frac{\pi}{2\beta} \sum_{v=0}^{\infty} \frac{(-1)^v}{\sqrt{v+1}} \left(\frac{\sqrt{\pi}\theta}{2\beta}\right)^v. \quad (3.45г)$$

Уравнения (3.44) и (3.45) не полностью отвечают требованиям для расчета  $J(\theta, \beta)$ , так как они не учитывают той области, где параметр  $\sqrt{\pi}\theta/2\beta$  только немного больше единицы. Это положение можно поправить, продолжая аналитически степенной ряд (3.45г), при помощи следующего ухищрения: представим ряд в сокращенном виде  $\sum_{v=0}^{\infty} A_v x^v$ .

Если определить  $y = \frac{x}{1+x}$ , то

$$x = \sum_{v=0}^{\infty} y^{v+1}. \quad (3.46)$$

Подставляя уравнение (3. 46) в ряд  $\sum_{v=0}^{\infty} A_v x^v$  и собирая коэффициенты при соответствующих степенях  $y$ , получим ряд  $\sum_{v=0}^{\infty} B_v y^v$ .

Коэффициенты  $B_v$  и  $A_v$  связаны соотношением

$$B_0 = A_0; B_v = \sum_{\lambda=1}^v C_{\lambda-1}^{v-1} A_{\lambda} \quad (v \geq 1), \quad (3. 47)$$

где  $C_{\lambda-1}^{v-1}$  — биномиальные коэффициенты.

Коэффициенты  $B_v$  ряда в уравнении (3. 45г) уменьшаются, и, следовательно, ряд по  $y$  быстро сходится даже для значений  $y$ , соответствующих  $x > 1$ . Отметим, что если  $A_v = (-1)^v (v + 1)^{-\frac{1}{2}}$ , то первые несколько членов есть:

$$\begin{aligned} B_0 &= 1,00000; & B_3 &= -0,05241; & B_6 &= -0,01150; \\ B_1 &= -0,70711; & B_4 &= -0,02784; & B_7 &= -0,00822. \\ B_2 &= -0,12976; & B_5 &= -0,01710; \end{aligned}$$

Если заметить, что при  $J$ , определенном из уравнения (3. 44),  $J(\theta, \beta) \frac{2\beta}{\pi}$  стремится к нулю, когда  $\theta \sqrt{\pi}/2\beta$  стремится к бесконечности, увидим, что  $\sum_{v=0}^{\infty} B_v = 0$ . Если все  $B_v$ , кроме  $B_0$ , отрицательны, то ошибка при использовании  $N + 1$  членов ряда будет меньше, чем  $\left(-\sum_{v=0}^N B_v\right) y^{N+1}$ . Для  $N = 7$  значение  $\sum_{v=0}^N B_v = 0,04605$ .

**3. 9.** Свойства, изученные в параграфах (3. 7) и (3. 8), касаются только общего поведения  $J(\theta, \beta)$ .

С целью получения точных численных значений Дреснер (Dresner, 1956a) провел при помощи электронной вычислительной машины Окриджской лаборатории табулирование этой функции.

Результаты расчета приводятся в табл. 3. 3 для  $\theta = 0,1 (0,1) 1,0$  и  $\beta = 2^j \cdot 10^{-5}$ ,  $j = 0 (1) 31$ . Недавно Адлер и др. (Adler et al., 1958) пересчитали  $J(\theta, \beta)$  для  $\theta = 0,05 (0,05) 0,5$  и  $j = 4,0 (0,5) \times 20,0$ ; расхождение с работой Дреснера — всего в четвертом знаке.

Гордеев и др. (1958) также провели численные расчеты, из которых легко получить  $J(\theta, \beta)$ . На рис. 3. 3 и 3. 4  $J(\theta, \beta)$  приводится как функция  $j$  ( $\theta$  — в качестве параметра).

Как можно видеть,  $J(\theta, \beta)$  имеет вид, который мы уже предсказали на основе вышеописанных свойств. В частности,  $J$  падает с ростом  $\theta$  или  $\beta$ ; для очень больших и очень малых  $\beta$   $J(\theta, \beta)$  стремится к своей асимптотике  $J(\infty, \beta)$ .

Функция  $J(\theta, \beta)$  для  $\theta = 0,1(0,1)1,0$  и  $\beta = 2^j \cdot 10^{-5}$

Таблица 3.3

$j$	$J(\theta, \beta)$									
	$\theta = 0,1$	$\theta = 0,2$	$\theta = 0,3$	$\theta = 0,4$	$\theta = 0,5$	$\theta = 0,6$	$\theta = 0,7$	$\theta = 0,8$	$\theta = 0,9$	$\theta = 1,0$
0	4,979 · 10 <sup>2</sup>	4,970 · 10 <sup>2</sup>	4,969 · 10 <sup>2</sup>	4,968 · 10 <sup>2</sup>	4,968 · 10 <sup>2</sup>	4,968 · 10 <sup>2</sup>	4,967 · 10 <sup>2</sup>	4,967 · 10 <sup>2</sup>	4,967 · 10 <sup>2</sup>	4,967 · 10 <sup>2</sup>
1	3,532	3,517	3,514	3,513	3,513	3,513	3,513	3,513	3,513	3,513
2	2,514	2,491	2,487	2,485	2,485	2,484	2,484	2,484	2,484	2,484
3	1,801	1,767	1,761	1,759	1,758	1,757	1,757	1,757	1,757	1,757
4	1,307	1,257	1,248	1,245	1,244	1,243	1,243	1,243	1,242	1,242
5	9,667 · 10 <sup>-1</sup>	8,993 · 10 <sup>-1</sup>	8,872 · 10 <sup>-1</sup>	8,831 · 10 <sup>-1</sup>	8,812 · 10 <sup>-1</sup>	8,802 · 10 <sup>-1</sup>	8,796 · 10 <sup>-1</sup>	8,792 · 10 <sup>-1</sup>	8,790 · 10 <sup>-1</sup>	8,788 · 10 <sup>-1</sup>
6	7,355	6,501	6,355	6,278	6,252	6,238	6,230	6,225	6,221	6,218
7	5,773	4,777	4,652	4,450	4,430	4,419	4,419	4,412	4,407	4,403
8	4,647	3,589	3,328	3,230	3,183	3,158	3,143	3,133	3,126	3,121
9	3,781	2,759	2,471	2,354	2,297	2,265	2,245	2,232	2,223	2,217
10	3,045	2,153	1,867	1,741	1,675	1,638	1,614	1,598	1,587	1,579
11	2,367	1,676	1,423	1,301	1,235	1,194	1,168	1,151	1,138	1,129
12	1,730	1,268	1,074	9,718 · 10 <sup>-1</sup>	9,119 · 10 <sup>-1</sup>	8,739 · 10 <sup>-1</sup>	8,484 · 10 <sup>-1</sup>	8,304 · 10 <sup>-1</sup>	8,174 · 10 <sup>-1</sup>	8,077 · 10 <sup>-1</sup>
13	1,164	9,081 · 10 <sup>-1</sup>	7,815 · 10 <sup>-1</sup>	7,087	6,629	6,322	6,107	5,950	5,833	5,744
14	7,172 · 10 <sup>-1</sup>	6,014	5,342	4,914	4,624	4,419	4,268	4,154	4,066	3,997
15	4,088	3,658	3,371	3,169	3,022	2,911	2,826	2,759	2,706	2,663
16	2,204	2,067	1,966	1,889	1,829	1,781	1,743	1,712	1,687	1,666
17	1,148	1,109	1,078	1,053	1,033	1,016	1,002	9,904 · 10 <sup>-1</sup>	9,805 · 10 <sup>-1</sup>	9,722 · 10 <sup>-1</sup>
18	5,862 · 10 <sup>-1</sup>	5,757 · 10 <sup>-1</sup>	5,671 · 10 <sup>-1</sup>	5,599 · 10 <sup>-1</sup>	5,539 · 10 <sup>-1</sup>	5,488 · 10 <sup>-1</sup>	5,445 · 10 <sup>-1</sup>	5,408 · 10 <sup>-1</sup>	5,376 · 10 <sup>-1</sup>	5,348 · 10 <sup>-1</sup>
19	2,963	2,936	2,913	2,894	2,877	2,863	2,851	2,840	2,831	2,823
20	1,490	1,483	1,477	1,472	1,468	1,464	1,461	1,458	1,455	1,453
21	7,468 · 10 <sup>-2</sup>	7,452 · 10 <sup>-2</sup>	7,437 · 10 <sup>-2</sup>	7,424 · 10 <sup>-2</sup>	7,413 · 10 <sup>-2</sup>	7,403 · 10 <sup>-2</sup>	7,395 · 10 <sup>-2</sup>	7,388 · 10 <sup>-2</sup>	7,381 · 10 <sup>-2</sup>	7,375 · 10 <sup>-2</sup>
22	3,739	3,735	3,732	3,728	3,726	3,723	3,721	3,719	3,718	3,716
23	1,871	1,870	1,869	1,868	1,868	1,867	1,867	1,866	1,866	1,865
24	9,358 · 10 <sup>-3</sup>	9,356 · 10 <sup>-3</sup>	9,355 · 10 <sup>-3</sup>	9,352 · 10 <sup>-3</sup>	9,350 · 10 <sup>-3</sup>	9,349 · 10 <sup>-3</sup>	9,348 · 10 <sup>-3</sup>	9,346 · 10 <sup>-3</sup>	9,345 · 10 <sup>-3</sup>	9,344 · 10 <sup>-3</sup>
25	4,680	4,680	4,679	4,678	4,678	4,678	4,678	4,677	4,677	4,677
26	2,340	2,340	2,340	2,340	2,340	2,340	2,340	2,340	2,340	2,340
27	1,170	1,170	1,170	1,170	1,170	1,170	1,170	1,170	1,170	1,170
28	5,851 · 10 <sup>-4</sup>	5,851 · 10 <sup>-4</sup>	5,851 · 10 <sup>-4</sup>	5,851 · 10 <sup>-4</sup>	5,851 · 10 <sup>-4</sup>	5,851 · 10 <sup>-4</sup>	5,851 · 10 <sup>-4</sup>	5,851 · 10 <sup>-4</sup>	5,851 · 10 <sup>-4</sup>	5,851 · 10 <sup>-4</sup>
29	2,925	2,926	2,926	2,926	2,926	2,926	2,926	2,926	2,926	2,926
30	1,463	1,463	1,463	1,463	1,463	1,463	1,463	1,463	1,463	1,463
31	7,314 · 10 <sup>-5</sup>	7,314 · 10 <sup>-5</sup>	7,315 · 10 <sup>-5</sup>	7,315 · 10 <sup>-5</sup>	7,315 · 10 <sup>-5</sup>	7,315 · 10 <sup>-5</sup>	7,314 · 10 <sup>-5</sup>	7,314 · 10 <sup>-5</sup>	7,314 · 10 <sup>-5</sup>	7,314 · 10 <sup>-5</sup>

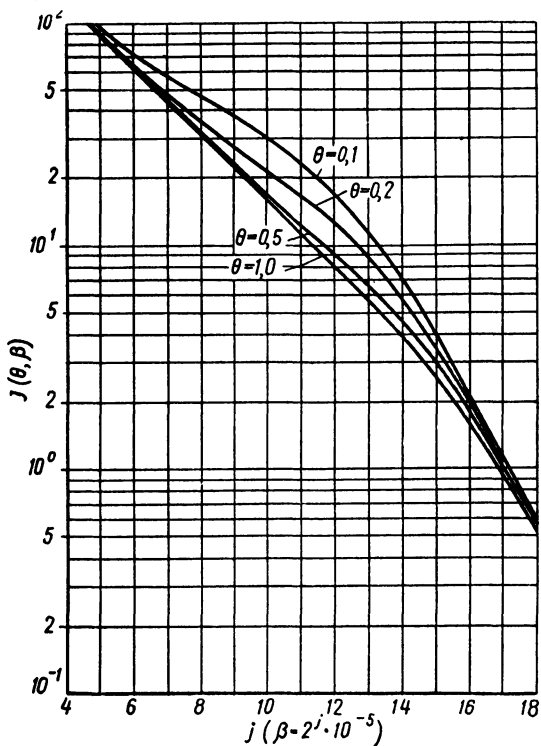


Рис. 3.3. Зависимость функции доплеровского уширения  $J(\theta, \beta)$  от  $\beta$  для различных  $\theta$ .

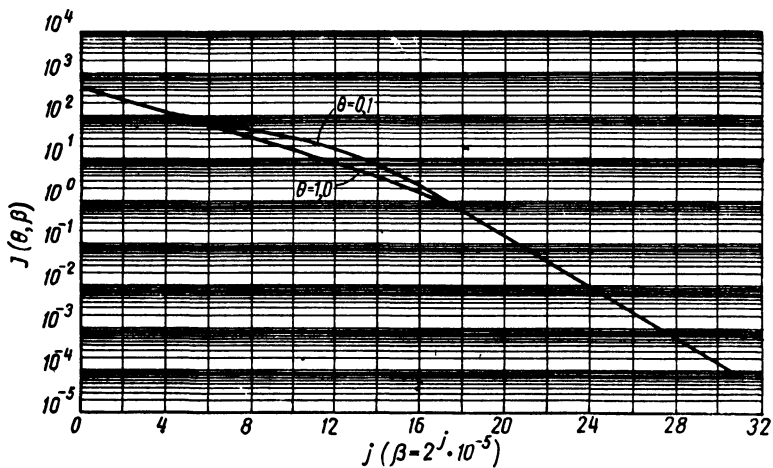


Рис. 3.4. Зависимость функции доплеровского уширения  $J$  от  $\beta$  для  $\theta = 0,1$  и  $\theta = 1,0$ .

Кроме того, полезно отметить, что для  $\theta = 1,0$  функция  $J(\theta, \beta)$  очень близка к  $J(\infty, \beta)$  для всех  $\beta$ . Наконец мы отметим, что в соответствии с уравнениями (3.34) и (3.26) при малых  $\beta$  и  $\theta$   $J$  ведет себя как  $\pi/2\beta$ .

Табл. 3.3 можно использовать для проверки справедливости уравнений (3.44) и (3.45). На рис. 3.5 на основе этих уравнений

$\frac{2\beta}{\pi} J(\theta, \beta)$  представлена как функция  $\frac{\theta\sqrt{\pi}}{2\beta}$ . Область, отмеченная пунктирной кривой, представляет собой графическую интерполяцию решения в виде рядов слева и логарифмического асимптотического выражения справа. Приведены также точные значения

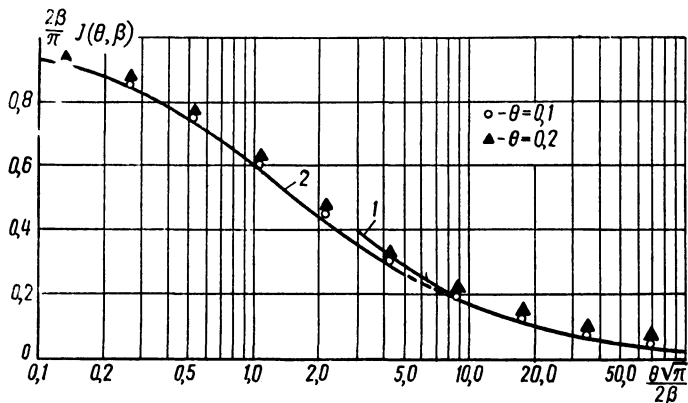


Рис. 3.5. 1 — уравнение (3.45) 2 — уравнение (3.44). Сравнение приближенных формул (3.44) (1) и (3.45) (2) для расчета  $J(\theta, \beta)$  при экстремальном доплеровском уширении с точными численными значениями.

ния  $J(\theta, \beta)$  для  $\theta = 0,1$  и  $\theta = 0,2$ . Из рис. 3.5 видно, что получается хорошее согласие как в общей форме кривых, так и в отдельных значениях.

Для  $\theta = 0,1$  расхождение составляет всего 5% или меньше при  $\theta\sqrt{\pi}/2\beta$ , меньших чем 20.

При увеличении  $\theta\sqrt{\pi}/2\beta$  ошибка растет и становится равной примерно 30% при  $\frac{\theta\sqrt{\pi}}{2\beta} = 100$ .

3. 10\*. В параграфе 3.6 мы начали изучение влияния доплеровского уширения резонансных линий на эффективный резонансный интеграл в случае  $i = 0$ . Когда  $i \neq 0$ , то уравнение (3.31) для  $I$  должно быть заменено на следующее:

$$I = \sigma_p \frac{\Gamma_\nu}{E_0} \cdot \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\Psi(\theta, x)}{\Psi(\theta, x) + (\beta i)^{1/2} \chi(\theta, x) + \beta} dx. \quad (3.48)$$

Второй множитель в уравнении (3.48) обозначим через  $J(\theta, \beta, i)$ . Он обладает следующими свойствами.

Первое свойство

$$J(\infty, \beta, i) = \frac{\pi}{2\sqrt{\beta(1+\beta-i)}}. \quad (3.49)$$

Это свойство получается, например, если уравнения (3.21) и (3.30a) подставить в уравнение (3.48) и произвести интегрирование.

Второе свойство

$$J(\theta, \beta, i) \approx J(\infty, \beta, i), \text{ если } \beta \ll \frac{\theta^2}{6}. \quad (3.50)$$

Для того чтобы доказать это соотношение, поступим следующим образом. Для естественной формы линии можно легко показать, что максимальный вклад интерференционного члена в общий знаменатель происходит при  $x = -\sqrt{(1+\beta)}/\beta$ . Если  $\beta \ll \theta^2/6$ , то это будет справедливо и для формы линии с доплеровским уширением, так как для  $x \approx 1/\sqrt{\beta} \gg \sqrt{6}/\theta$  форма линии с доплеровским уширением очень близка к естественной форме. С другой стороны, в центре линии интерференционным членом можно пренебречь.

Легко доказать, например, из уравнения (3.29), что  $|\chi(\theta, x)| \leq 2|x|\psi(\theta, x)$ . Для этого мы просто отметим, что два члена в уравнении (3.29) имеют противоположные знаки (так как  $\frac{\partial \psi(\theta, x)}{\partial x} > 0$ ) и что  $\chi(\theta, x)$  имеет знак первого члена. Таким образом, в центре линии интерференционный член дает вклад в знаменатель подынтегрального выражения меньший, чем  $2|x|(\beta i)^{1/2}$ . Таким образом, если  $\beta \ll \theta^2/6$ , то мы можем найти постоянную  $C$  между  $\sqrt{6}/\theta$  и  $1/\sqrt{\beta}$  такую, что для  $|x| \leq C$  интерференционным членом можно пренебречь, а для  $|x| \geq C$  можно пренебречь эффектом доплеровского уширения.

Тогда мы можем написать

$$2J(\theta, \beta, i) = \int_{-C}^C \frac{\psi(\theta, x)}{\psi(\theta, x) + \beta} dx + \left( \int_C^\infty + \int_{-\infty}^{-C} \right) \frac{\psi(\infty, x)}{\psi(\infty, x) + (\beta i)^{1/2} \chi(\infty, x) + \beta} dx. \quad (3.51a)$$

Кроме того, можно написать следующие выражения:

$$2J(\infty, \beta, i) = \int_{-C}^C \frac{\Psi(\infty, x)}{\Psi(\infty, x) + \beta} dx + \left( \int_C^{\infty} + \int_{-\infty}^{-C} \right) \frac{\Psi(\infty, x)}{\Psi(\infty, x) + (\beta i)^{1/2} \chi(\infty, x) + \beta} dx \quad (3.51б)$$

и

$$2J(\theta, \beta) = \int_{-C}^C \frac{\Psi(\theta, x)}{\Psi(\theta, x) + \beta} dx + \left( \int_C^{\infty} + \int_{-\infty}^{-C} \right) \frac{\Psi(\infty, x)}{\Psi(\infty, x) + \beta} dx. \quad (3.51в)$$

Вычитая уравнения (3.51б) и (3.51в) из уравнения (3.51а), получим

$$J(\theta, \beta, i) - J(\infty, \beta, i) - J(\theta, \beta) + J(\infty, \beta) = 0. \quad (3.52)$$

При сравнении уравнений (3.49) и (3.52) видно, что

$$J(\theta, \beta, i) = \frac{\pi/2}{\sqrt{\beta(1+\beta-i)}} + J(\theta, \beta) - J(\infty, \beta). \quad (3.53)$$

Уравнение (3.53) количественно выражает то, что, когда  $\beta \ll \theta^2/6$ , эффект доплеровского уширения резонансных линий вызывается главным образом изменением центра линии, в то время как эффект интерференции между потенциальным и резонансным рассеянием вызывается в основном флангами резонанса. Так как уравнение (3.54) выведено в предположении, что  $\beta \ll \theta^2/6$ , то два последних члена в нем будут взаимно погашать друг друга, как можно видеть из уравнения (3.33).

Третье свойство.

Когда  $\beta$  достаточно велико, то можно доказать неравенство, аналогичное (3.34):

$$\frac{\pi}{2\beta} \geq J(\theta, \beta, i) \geq \frac{\pi}{2\beta} \left[ 1 - \frac{\Psi(\theta, 0)}{\beta} \right]. \quad (3.54)$$

Начнем с замечания, что

$$J(\theta, \beta, i) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\Psi(\theta, x)}{\beta} \left[ 1 + \frac{\Psi(\theta, x) + (\beta i)^{1/2} \chi(\theta, x)}{\beta} \right]^{-1} dx; \quad (3.55а)$$

$$J(\theta, \beta, i) = \frac{1}{2} \sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^{\nu} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\Psi(\theta, x)}{\beta} \times \left[ \frac{\Psi(\theta, x) + (\beta i)^{1/2} \chi(\theta, x)}{\beta} \right]^{\nu} dx. \quad (3.55б)$$

Все интегралы в рядах положительны, так как они представляют собой произведения степеней  $\chi$  (которая должна быть положительной) и  $\psi$  (которая также положительна). Так как ряд знакочередующийся, то

$$\frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\psi(\theta, x)}{\beta} dx > J(\theta, \beta, i) > \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\psi(\theta, x)}{\beta} \times \\ \times \left[ 1 - \frac{\psi(\theta, x) + (\beta i)^{1/2} \chi(\theta, x)}{\beta} \right] dx. \quad (3.55b)$$

Из этого выражения получается уравнение (3.54), если заметить, что согласно формуле (3.30), интеграл от  $\chi$  равен нулю.

Четвертое свойство

$$J(\theta, \beta, i) = J(\theta, \beta), \text{ если } \theta \ll 1 \text{ и } \beta \gg \frac{\theta^2}{6}. \quad (3.56)$$

Если  $\theta \ll 1$  и  $\beta \gg \theta^2/6$ , то, подставляя уравнение (3.25) в уравнение (3.29), получим  $\chi(\theta, x) = 0$ . Это значит, что в центре линии тепловое движение атомов замедлителя усредняет интерференционное сечение по его положительной и отрицательной частям примерно с равным весом. Следовательно, при установленных условиях уравнение (3.56) является очень хорошим приближением.

Ротенштейн (Rothenstein, 1959) разложил  $J(\theta, \beta, i)$  по степеням  $i$  и получил

$$J(\theta, \beta, i) = J(\theta, \beta) + i\beta \int_0^{\infty} \frac{\psi(\theta, x) [\chi(\theta, x)]^2}{[\beta + \psi(\theta, x)]^3} dx + \dots \quad (3.57a)$$

Он также рассчитал отношение  $f(\theta, \beta)$ , величины интеграла к его величине при  $\theta = \infty$  ( $T = 0$ ), т. е.

$$f(\theta, \beta) = \int_0^{\infty} \frac{\psi(\theta, x) [\chi(\theta, x)]^2}{[\beta + \psi(\theta, x)]^3} dx \cdot \frac{4}{\pi} \beta [1 + \beta]^{3/2}. \quad (3.57b)$$

Результаты этого расчета приведены на рис. 3.6.

**3.11.** Результаты последних десяти параграфов основаны на предположении, что резонансы являются узкими по сравнению с потерями энергии при столкновении нейтрона со всеми ядрами, находящимися в гомогенной среде.

В то время как при столкновении с ядрами замедлителя это предположение почти всегда выполняется, оно часто неприменимо для ядер поглотителя,



Если резонанс узок по сравнению с потерями энергии при столкновении нейтрона с ядрами замедлителя, но не обязательно узок по сравнению с потерями энергии при столкновении с ядрами поглотителя, то плотность столкновений в этой окрестности может быть описана при помощи следующего интегрального уравнения:

$$F(u) = \int_{u-\varepsilon}^u \frac{\Sigma_s(u') + \Sigma_{pa}}{\Sigma_t(u')} F(u') \frac{e^{u'-u}}{1-\alpha} du' + \frac{\Sigma_m}{\xi \Sigma_p}. \quad (3.58)$$

Поперечные сечения определяются так же, как и в уравнении (3.4). Здесь  $\Sigma_s = \Sigma_t - \Sigma_a - \Sigma_p$ . Последний член в правой

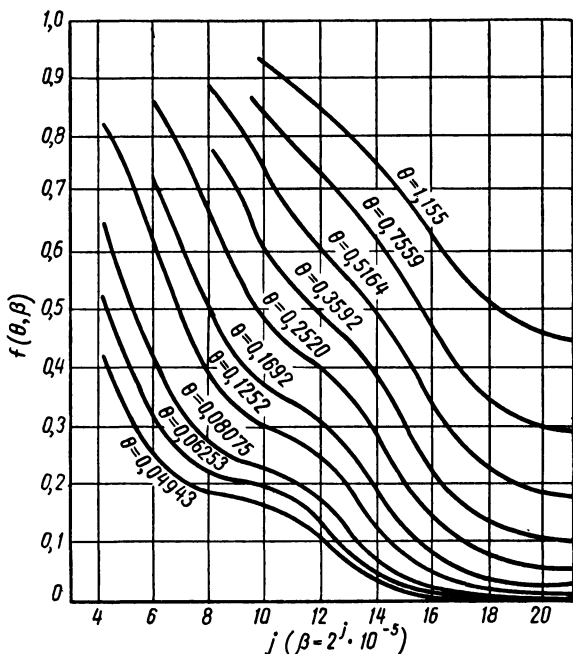


Рис. 3.6. Зависимость функции доплеровского уширения  $J(\theta, \beta)$  от  $\beta$  для различных  $\theta$  (Rothenstein, 1959a).

части уравнения (3.58) есть источник столкновений благодаря столкновениям с ядрами замедлителя, которые происходят при энергиях, далеких от резонансного интервала. При расчете величины  $F$  значение  $\Sigma_m$  в других членах уравнения (3.58) рассматривается как поперечное сечение поглощения.

Уравнение (3.58) в общем случае решить трудно, однако в двух специальных случаях (важных на практике) может быть получено приближенное решение. В первом из них замедлением на ядрах поглотителя можно полностью пренебречь (случай поглотителя

бесконечной массы) (Wigner et al., 1955; Chernick a. Vernon, 1958). Это означает, что размер резонанса по оси летаргии больше, чем средний прирост летаргии при одном столкновении с ядром поглотителя. В таком случае замедлением ядрами поглотителя можно пренебречь (в предположении, что в резонансе отсутствует слишком сильное многократное рассеяние нейтронов ядрами поглотителя), и ядро в уравнении (3. 58) заменяется на  $\delta$ -функцию. Плотность столкновений тогда становится равной

$$F(u) = \frac{\sum_m}{\xi \sum_p} \cdot \frac{\sum_t(u)}{\sum_a(u) + \sum_m}. \quad (3. 59)$$

Из уравнения (3. 59) следует, что истинная плотность поглощения есть

$$\frac{\sum_a(u)}{\sum_t(u)} F(u) = \frac{1}{\xi \sum_p} \cdot \frac{\sum_m \sum_a(u)}{\sum_m + \sum_a(u)}. \quad (3. 60)$$

Так как  $(\xi \sum_p)^{-1}$  — поток в отсутствие резонанса, то эффективный резонансный интеграл, очевидно, будет

$$I = \int \frac{\sigma_m \sigma_a(u')}{\sigma_m + \sigma_a(u')} du'. \quad (3. 61)$$

Используя для нахождения  $\sigma_a$  выражение (3. 17), уравнение (3. 61) можно легко переписать в виде

$$I = \sigma_m \frac{\Gamma}{E_0} J \left( \theta, \frac{\sigma_m \Gamma}{\sigma_0 \Gamma_\gamma} \right). \quad (3. 62)$$

Уравнение (3. 62) по форме сходно с предыдущими результатами для случая узкого резонанса и может быть оценено при помощи уже описанного метода.

Второй случай, при котором уравнение (3. 58) можно решить, это, во-первых, когда  $\sum_{pa}/\sum_p = \Gamma_n/\Gamma$  и, во-вторых, когда интерференционным рассеянием можно пренебречь (Spinney, 1956). При этих условиях

$$\frac{\sum_s(u') + \sum_{pa}}{\sum_t(u')} = \frac{\Gamma_n}{\Gamma} \quad (3. 63)$$

при всех летаргиях  $u'$ . Выбор  $F(u')$  в виде постоянной удовлетворяет уравнению (3. 58); значение этой постоянной есть

$$F(u') = \frac{\sum_m}{\xi \sum_p} \left( 1 - \frac{\sum_{pa}}{\sum_p} \right)^{-1}. \quad (3. 64)$$

При условии (3. 63) уравнение (3. 64) подобно уравнению (3. 59). Следовательно, эффективный резонансный интеграл в этом случае также дается уравнением (3. 62). Условие  $\sum_{pa}/\sum_p = \Gamma_n/\Gamma$  можно переписать в виде  $\sigma_m/\sigma_p = \Gamma_\gamma/\Gamma$ ; применяя это отношение в уравнении (3. 62), можно показать, что данное уравнение аналогично результату в случае узких резонансов.

Таким образом, если удовлетворяется условие  $\Sigma_{pa}/\Sigma_p = \Gamma_n/\Gamma$ , то эффективные резонансные интегралы для случаев узкого резонанса и поглотителя бесконечной массы совпадают.

3. 12\*. Замечание, что уравнение (3. 58) решается, когда  $\Sigma_{pa}/\Sigma_p = \Gamma_n/\Gamma$ , может быть сделано на основе очень полезного обобщения формулы узких резонансов следующим образом (Spinney, 1956).

В отсутствие интерференционного рассеяния

$$\frac{\Sigma_s(u') + \Sigma_{pa}}{\Sigma_t(u')} = \left( \frac{\Gamma_n}{\Gamma} - \frac{\Sigma_{pa}}{\Sigma_p} \right) \frac{\Sigma_t(u') - \Sigma_p}{\Sigma_t(u')} + \frac{\Sigma_{pa}}{\Sigma_p}. \quad (3. 65)$$

Таким образом, уравнение (3. 58) можно переписать:

$$F(u) = \frac{\Sigma_{pa}}{\Sigma_p} \int_{u-\varepsilon}^u F(u') \frac{e^{u'-u}}{1-\alpha} du' + \frac{\Sigma_m}{\xi \Sigma_p} + \left( \frac{\Gamma_n}{\Gamma} - \frac{\Sigma_{pa}}{\Sigma_p} \right) \int_{u-\varepsilon}^u \frac{\Sigma_t(u') - \Sigma_p}{\Sigma_t(u')} F(u') \frac{e^{u'-u}}{1-\alpha} du'. \quad (3. 66)$$

Решение уравнения (3. 66), когда  $\Gamma_n/\Gamma = \Sigma_{pa}/\Sigma_p$ , дается при помощи уравнения (3. 64). Если мы подставим его в правую часть уравнения (3. 66), то получим для улучшенного значения  $F(u)$  выражение

$$F^{(1)}(u) = \frac{\Sigma_m}{\xi \Sigma_p} \left( 1 - \frac{\Sigma_{pa}}{\Sigma_p} \right)^{-1} \times \left[ 1 + \left( \frac{\Gamma_n}{\Gamma} - \frac{\Sigma_{pa}}{\Sigma_p} \right) \int_{u-\varepsilon}^u \frac{(\Sigma_t(u') - \Sigma_p) e^{u'-u}}{\Sigma_t(u') (1-\alpha)} du' \right]. \quad (3. 67)$$

Множитель перед квадратными скобками в уравнении (3. 67) представляет собой асимптотическую плотность столкновений выше резонанса, как можно видеть из уравнения (3. 66). Отсюда следует, что  $I$  дается в виде

$$\frac{\Sigma_m}{\xi \Sigma_p} \left( 1 - \frac{\Sigma_{pa}}{\Sigma_p} \right)^{-1} \frac{I}{\sigma_p} = \int_0^{\infty} \frac{\Sigma_a(u')}{\Sigma_t(u')} F^{(1)}(u') du', \quad (3. 68)$$

так что

$$I = \int_0^{\infty} \frac{\sigma_p \sigma_a(u')}{\sigma_t(u')} du' + \left( \frac{\Gamma_n}{\Gamma} - \frac{\Sigma_{pa}}{\Sigma_p} \right) \int_0^{\infty} \frac{\sigma_p \sigma_a(u')}{\sigma_t(u')} du' \times \times \int_{u'-\varepsilon}^{u'} \frac{\sigma_t(u'') - \sigma_p}{\sigma_t(u'')} \frac{e^{u''-u'}}{1-\alpha} du''. \quad (3. 69)$$

Если резонанс узкий, то  $u' - \varepsilon$  во втором интеграле правой части уравнения можно положить равным нулю, а  $u''$  в экспоненте можно заменить на  $u'$ . Кроме того,  $\Sigma_t(u'') - \Sigma_p = (\Gamma/\Gamma_\gamma) \Sigma_a(u'')$ . Следовательно,

$$I = \int_0^\infty \frac{\sigma_p \sigma_a(u')}{\sigma_t(u')} du' + \\ + \frac{\Gamma_n/\Gamma - \sigma_{pa}/\sigma_p}{1-\alpha} \frac{\Gamma}{\Gamma_\gamma \sigma_p} \int_0^\infty \frac{\sigma_p \sigma_a(u')}{\sigma_t(u')} du' \int_0^{u'} \frac{\sigma_p \sigma_a(u'')}{\sigma_t(u'')} du''. \quad (3.70)$$

Используя равенство

$$\int_0^\infty f(x) dx \int_0^x f(x') dx' = \frac{1}{2} \int_0^\infty d \left( \int_0^x f(x') dx' \right)^2 = \\ = \frac{1}{2} \left( \int_0^\infty f(x) dx \right)^2, \quad (3.71)$$

уравнение (3.70) можно записать в таком виде:

$$I = I_{NR} \left[ 1 + \left( \frac{\Gamma_n}{\Gamma} - \frac{\sigma_{pa}}{\sigma_p} \right) \frac{I_{NR}}{\sigma_p \Gamma_\gamma / \Gamma} \frac{1}{2(1-\alpha)} \right], \quad (3.72)$$

где  $I_{NR}$  — величина  $I$  в случае узких резонансов. Для естественной формы линии

$$\frac{I_{NR}}{\sigma_p \Gamma_\gamma / \Gamma} \frac{1}{2(1-\alpha)} = \frac{\pi}{2} \Gamma \left( \frac{\sigma_0}{\sigma_p} \right)^{1/2} \frac{1}{2(1-\alpha)} = \frac{\pi}{4} \frac{\Delta}{(1-\alpha) E_0} \quad (3.73)$$

$$(\beta \ll 1).$$

Величина  $\Delta = \Gamma (\sigma_0/\sigma_p)^{1/2}$  называется практической шириной и представляет собой интервал энергии между двумя точками, в котором общее резонансное поперечное сечение становится равным поперечному сечению потенциального рассеяния. Из уравнений (3.72) и (3.73) следует, что когда  $\Delta \ll (1-\alpha) E_0$ , то  $I = I_{NR}$ . Это заключение является очевидным. Наконец, мы можем сделать значительные улучшения в случаях, где применимо приближение узких резонансов, производя простые преобразования над полученными выше результатами.

3.13\*. Формула, аналогичная уравнению (3.72), но применяемая к случаю поглотителя бесконечной массы, может быть выведена для приближения первого порядка к плотности столкновения методом итерации уравнения (3.50) с использованием

равенства (3.59) (Chernick a. Vernon, 1958). Тогда первая итерация плотности столкновений дается выражением

$$F^{(1)}(u) = \frac{\sum_m}{\xi_a \sum_p} \left[ 1 + \int_{u-\varepsilon}^u \frac{\sum_s(u') + \sum_{pa}}{\sum_a(u') + \sum_m} \cdot \frac{e^{u'-u}}{1-a} du' \right]. \quad (3.74)$$

Если резонанс широкий, то первый множитель под знаком интеграла изменяется медленно и может быть разложен в ряд Тэйлора вблизи  $u' = u$ . Таким образом,

$$F^{(1)}(u) = \frac{\sum_m}{\xi_a \sum_p} \left[ \frac{\sum_t(u)}{\sum_a(u) + \sum_m(u)} - \xi_a \frac{d}{du} \left( \frac{\sum_s(u) + \sum_{pa}}{\sum_a(u) + \sum_m} \right) + \right. \\ \left. + \xi_a \gamma_a \frac{d^2}{du^2} \left( \frac{\sum_s(u) + \sum_{pa}}{\sum_a(u) + \sum_m} \right) + \dots \right], \quad (3.75)$$

где  $\xi_a$  — средний прирост летаргии для рассеивающих столкновений с ядрами поглителя,  $2\xi_a \gamma_a$  — соответствующий средний квадратичный прирост летаргии. Тогда для  $I$  следует выражение

$$I = \int_0^\infty \frac{\sigma_m \sigma_a(u)}{\sigma_a(u) + \sigma_m} du + \xi_a \gamma_a \int_0^\infty \frac{\sigma_m \sigma_a(u)}{\sigma_t(u)} \frac{d^2}{du^2} \left( \frac{\sigma_s(u) + \sigma_{pa}}{\sigma_a(u) + \sigma_m} \right) du, \quad (3.76)$$

так как член, содержащий первую производную, в отсутствие интерференционного рассеяния равен нулю из-за симметрии формы линии. Первый член в правой части уравнения (3.76) представляет собой значение резонансного интеграла  $I$  для широких резонансов  $I_{WR}$ . Кроме того,

$$\frac{\sigma_s(u) + \sigma_{pa}}{\sigma_a(u) + \sigma_m} = \left( \frac{\Gamma_n}{\Gamma_\gamma} - \frac{\sigma_{pa}}{\sigma_m} \right) \frac{\sigma_a(u)}{\sigma_a(u) + \sigma_m} + \frac{\sigma_{p1}}{\sigma_m}. \quad (3.77)$$

Таким образом,

$$\Delta I \equiv I - I_{WR} = \xi_a \gamma_a \times \\ \times \left( \frac{\Gamma_n}{\Gamma_\gamma} - \frac{\sigma_{pa}}{\sigma_m} \right) \int_0^\infty \frac{\sigma_m \sigma_a(u)}{\sigma_t(u)} \cdot \frac{d^2}{du^2} \left( \frac{\sigma_a(u)}{\sigma_a(u) + \sigma_m} \right) du, \quad (3.78a)$$

$$\Delta I = -\xi_a \gamma_a \times \\ \times \left( \frac{\Gamma_n}{\Gamma_\gamma} - \frac{\sigma_{pa}}{\sigma_m} \right) \sigma_m \int_0^\infty \frac{d}{du} \left( \frac{\sigma_a(u)}{\sigma_t(u)} \right) \frac{d}{du} \left( \frac{\sigma_a(u)}{\sigma_a(u) + \sigma_m} \right) du. \quad (3.78b)$$

Равенство (3.786) появилось в результате интегрирования по частям верхнего выражения. Если теперь использовать соотношение  $\frac{d}{du} = -\left(\frac{2E_0}{\Gamma}\right) \frac{d}{dx}$  и выражения

$$\sigma_a = \sigma_0 \frac{\Gamma_\gamma}{\Gamma} (1 + x^2)^{-1}; \quad (3.79a)$$

$$\sigma_t = \sigma_0 (1 + x^2)^{-1} + \sigma_p \quad (3.796)$$

для поперечных сечений, то  $\Delta I$  можно записать в виде

$$\begin{aligned} \Delta I = & -\xi_a \gamma_a \left( \frac{\Gamma_n}{\Gamma_\gamma} - \frac{\sigma_{pa}}{\sigma_m} \right) \sigma_m \frac{2E_0}{\Gamma} \cdot \frac{\Gamma_\gamma}{\Gamma} u^2 v^2 \times \\ & \times \int_{-\infty}^{\infty} \frac{4x^2 dx}{(x^2 + u^2)^2 (x^2 + v^2)^2}, \end{aligned} \quad (3.80)$$

где  $u = \left(\frac{\sigma_0}{\sigma_p}\right)^{\frac{1}{2}}$  и  $v = \left(\frac{\sigma_0 \Gamma_\gamma}{\sigma_m \Gamma}\right)^{\frac{1}{2}}$  (здесь пренебрегается величинами порядка единицы по сравнению с  $u^2$  и  $v^2$ ).

Далее,

$$u^2 v^2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{4x^2 dx}{(x^2 + u^2)^2 (x^2 + v^2)^2} = uv \frac{\partial^2}{\partial u \partial v} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2 dx}{(x^2 + u^2) (x^2 + v^2)}. \quad (3.81)$$

Интеграл в правой части можно подсчитать при помощи вычетов; он равен  $\pi (u + v)^{-1}$ . Если использовать то, что для естественной формы линии

$$I_{WR} = \frac{\pi}{2} \sigma_m \frac{\Gamma}{E_0} \left( \frac{\sigma_0 \Gamma_\gamma}{\sigma_m \Gamma} \right)^{\frac{1}{2}} (\sigma_m \Gamma \ll \sigma_0 \Gamma_\gamma) \quad (3.82)$$

и понятие практической ширины, то можем получить после преобразований

$$\frac{\Delta I}{I_{WR}} = -\frac{\frac{4}{3} \left[ (1-\alpha) \frac{E_0}{\Delta} \right]^2 \left( \frac{\Gamma_n}{\Gamma_\gamma} - \frac{\sigma_{pa}}{\sigma_m} \right)}{\left( 1 + \sqrt{\frac{\sigma_p \Gamma_\gamma}{\sigma_m \Gamma}} \right)^3} \cdot \frac{\Gamma_\gamma}{\Gamma}. \quad (3.83)$$

Следует отметить, что, как следует из формулы (3.83), для симметричной формы линии ошибка пропорциональна квадрату отношения  $(1 - \alpha) E_0 / \Delta$ . Кроме того, рассмотрение второго множителя показывает, как и выше, что ошибка исчезает при  $\frac{\Gamma_n}{\Gamma} = \frac{\sigma_{pa}}{\sigma_p}$ .

3. 14. Анализ последних нескольких параграфов показывает, что формализм, развитый в первой части этой главы в связи с приближением узких резонансов, имеет более широкую применимость, что можно было предположить вначале.

При расчете резонансных интегралов часто встречается случай, когда низко лежащие резонансы поглотителя являются широкими [ $(1 - \alpha) E_0 \ll \Delta$ , так как  $E_0$  мало] и имеют сравнительно небольшие нейтронные ширины (так как  $\Gamma_n \approx \sqrt{E_0}$ ). Если  $\sigma_m \gg \sigma_{pa}$ , как обычно бывает в практических гомогенных средах, то уравнение (3. 83) показывает очень хорошую применимость формулы для поглотителя бесконечной массы. При высоких энергиях резонансы могут почти всегда рассматриваться как узкие [так как  $(1 - \alpha) E_0$  растет с энергией быстрее, чем  $\Delta$ ]. При промежуточных энергиях исследование каждого резонанса должно проводиться на строго индивидуальной основе, и часто оказывается, что ни приближение узких резонансов, ни приближение поглотителя бесконечной массы не применимы достаточно строго. Знак ошибки при переходе от одного резонанса к другому, однако, меняется, и часто ошибки погашаются, так что в общем поглощении может быть достигнута высокая точность.

Для более тщательного ознакомления с такими расчетами читатель может обратиться к работе Спиннея (Spinney, 1956).

---

## Глава IV

### ОСНОВЫ ТРАНСПОРТНОЙ ТЕОРИИ

4. 1. В следующих двух главах мы рассмотрим проблему резонансного поглощения в гетерогенных средах. Мы ограничим вначале наше рассмотрение случаем поглощения одним резонансом в единственном поглощающем блоке выпуклой формы. Предполагается, что соседние блоки отделены замедлителем толщиной во много средних длин пробега. Эти условия применимы во многих типах реакторов (например, графитовом или тяжеловодном с естественным ураном). Однако в энергетических реакторах блоки горючего часто имеют более сложную форму; кроме того, в реакторах на обогащенном горючем и с легководным замедлителем соседние блоки горючего обычно близки друг к другу, так что важную роль начинают играть эффекты взаимодействия (эффект Данкоффа). Наконец резонансы могут располагаться по оси летаргии достаточно близко один к другому, так что поглощение в одном вызывает отклонение зависимости плотности столкновений от ее асимптотического постоянного вида в другом, поэтому эти резонансы не могут рассматриваться независимо. Однако, несмотря на эти ограничения, проблема поглощения одним резонансом в единственном блоке играет центральную роль при изучении резонансного поглощения в гетерогенных средах.

В качестве необходимой помощи при изучении этой проблемы мы разовьем в этой главе определенные специальные теоремы моноэнергетической нейтронной транспортной теории.

Все эти теоремы касаются вопроса движения нейтронов в случаях, когда выпуклый блок помещен в бесконечной чисто поглощающей среде. В следующих двух главах эти теоремы будут применены к проблеме резонансного поглощения, в которой выпуклый блок рассматривается как поглотитель, а окружающая среда — как замедлитель. То, что замедлитель можно рассматривать как чисто поглощающую среду, можно подтвердить следующими рассуждениями. Так как замедлители всегда представляют собой материалы с относительно небольшим массовым числом, то среднее изменение летаргии  $\bar{\xi}$  на столкновение с ядром замедли-



теля предполагается много большим по сравнению с размерами резонанса на оси летаргии. Это предположение справедливо во многих случаях, хотя возможны и исключения (например, резонанс в  $\text{Pu}^{239}$  при энергии 0,3 эв). Это предположение имеет следствия, аналогичные ранее отмеченным в гл. II в связи с формой узких резонансов:

1) нейтроны, которые появляются в замедлителе с резонансной летаргией благодаря последним столкновениям в замедлителе, испытывают эти последние столкновения при более низких летаргиях, при которых резонансное поперечное сечение равно нулю;

2) если в таком замедлителе нейтроны, имеющие резонансную летаргию, сталкиваются с ядрами замедлителя, до того как достигнут блока, то они замедляются до летаргий, лежащих вне резонансного интервала, и поэтому не должны рассматриваться в дальнейшем при расчете поглощения в отдельном резонансе;

3) нейтрон, уходящий из блока при резонансной летаргии, не может вернуться в блок при той же резонансной летаргии, так как должно произойти по крайней мере одно столкновение с ядром замедлителя. Следовательно, такие нейтроны также не должны рассматриваться в дальнейшем.

Из второго и третьего следствий следует, что так как поглощение относится к отдельному резонансу, то оказывается, что замедлитель является чисто поглощающим. Согласно первому следствию, плотность источника столкновений в замедлителе при резонансной летаргии пространственно однородна, так как ведет свое начало от последних столкновений при летаргиях, при которых поглощение отсутствует.

Использование моноэнергетической транспортной теории в блоке справедливо только в двух предельных случаях — приближениях узких и широких резонансов. В настоящем описании только эти случаи и рассматриваются. В приближении широких резонансов возможность использования моноэнергетической транспортной теории очевидна. В приближении узких резонансов эта теория также применима, так как рассеяние ядрами поглотителя может рассматриваться как поглощение. Кроме того, для узких резонансов плотность источника столкновений в блоке (и в замедлителе) будет пространственно однородна, так как возникает эта плотность в результате последних столкновений в блоке при летаргиях, лежащих вне резонансного интервала.

4. 2. Первое, что необходимо для изучения переноса нейтронов, — это нахождение тока нейтронов внутрь тела от однородного изотропного источника мощностью  $Q$ , находящегося вне тела. Поэтому рассмотрим ограниченное выпуклое тело  $V$ , расположенное в чисто поглощающей среде, в которой существует пространственно однородный, изотропный источник нейтронов мощностью  $Q$ . Рассчитаем ток нейтронов внутрь тела в каждой точке его поверхности и угловое распределение этих нейтронов вокруг нормали.

На рис. 4.1  $S$  представляет собой выпуклую поверхность поглотителя,  $T$  — касательную плоскость в некоторой точке  $P$  и  $PN$  — нормаль, направленную внутрь среды с источником. Ясно, что внутренний ток в точке  $P$  азимутально симметричен вокруг  $PN$ . Внутренний ток в дифференциальном конусе между полярными углами  $\theta$  и  $\theta + d\theta$  дается выражением

$$- j(\cos \theta) d(\cos \theta) dS = \int_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi} \int_{r=0}^{r=\infty} Qr^2 dr \sin \theta d\theta d\varphi \frac{dS \cos \theta}{4\pi r^2} e^{-\Sigma_a^* r}. \quad (4.1)$$

Первый множитель в правой части есть мощность изотропного источника, второй — бесконечно малый элемент объема, третий — часть нейтронов источника, ориентированных в направлении  $\theta$ , и последний — вероятность того, что нейтрон достигнет точки  $P$  без столкновений в среде источника. Проведя интегрирование, получим

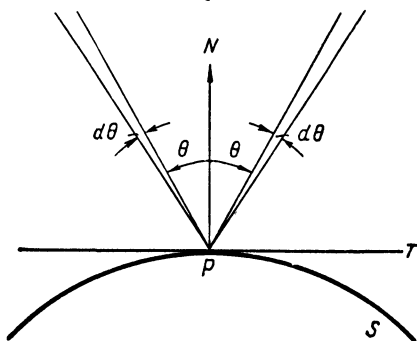


Рис. 4.1. Угловая зависимость тока нейтронов.

$$j(\cos \theta) d(\cos \theta) = \frac{Q}{2 \Sigma_a^*} \cos \theta d(\cos \theta). \quad (4.2)$$

Общий внутренний ток дается в виде

$$J = \int_0^{\pi/2} j \sin \theta d\theta = \frac{Q}{4 \Sigma_a^*}. \quad (4.3)$$

$Q / \Sigma_a^*$  есть поток  $\bar{\varphi}^*$  в среде источника.

4.3. Если ток нейтронов, выходящих из тела, составляет величину  $\delta$  (называемую альбедо) от тока падающего, то общая скорость поглощения в теле дается выражением  $\frac{1}{4} \bar{\varphi}^* S (1 - \delta)$ .

Если  $\bar{\varphi}$  — средний поток в блоке, то общая скорость поглощения может быть также записана в виде  $\Sigma_a \bar{\varphi} V$ , где  $\Sigma_a$  — макроскопическое сечение поглощения в блоке. Таким образом,

$$\frac{\bar{\varphi}}{\bar{\varphi}^*} = \frac{1 - \delta}{\Sigma_a (4V/S)}. \quad (4.4)$$

Если пространственно однородный изотропный источник нейтронов помещен в объем  $V$ , то вероятность избежать поглощения для этих нейтронов источника  $P$  также дается правой или левой

частями уравнения (4. 4). Чтобы показать это, мы должны использовать теорему взаимности моноэнергетической транспортной теории, которая заключается в том, что \*

$$\varphi(\mathbf{r}_1; \mathbf{r}_2) = \varphi(\mathbf{r}_2; \mathbf{r}_1), \quad (4. 5)$$

где  $\varphi(\mathbf{r}_1; \mathbf{r}_2)$  — поток в точках  $\mathbf{r}_1$  (благодаря единичному изотропному источнику) и  $\mathbf{r}_2$ , и наоборот. Вероятность избежать поглощения дается выражением

$$P = \int_{V^*} \sum_a^* d^3r \int \frac{1}{V} \varphi(\mathbf{r}; \mathbf{r}') d^3r'. \quad (4. 6)$$

\* Строгое, но слишком громоздкое доказательство теоремы взаимности можно найти в книге Кейса, Плачека и Гофмана (Case, Placzek a. Hoffman, 1953) или в книге Дэвисона (Дэвисон). Теория переноса нейтронов. М., Атомиздат, 1960). Мы ограничимся в этом примечании более простым рассуждением, которое основано на следующем. Поток нейтронов, не испытавших столкновения, в точке  $\mathbf{r}$  в направлении  $\omega$  благодаря точечному источнику в начале координат есть  $g(\omega) \exp[-\alpha(\mathbf{r})]/r^2$ , где  $g(\omega)$  — вероятность эмиссии (на стерадиан) в направлении  $\omega$ ,  $\alpha(\mathbf{r})$  — «оптическая» длина пути в точке  $\mathbf{r}$ , т. е.  $\alpha(\mathbf{r}) = \int_0^r \sum_t(s\omega) ds$ .

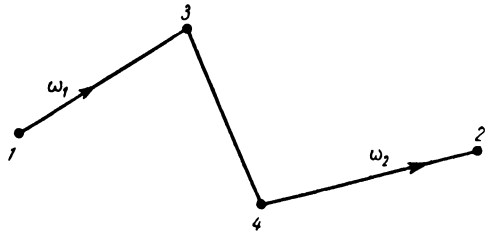


Рис. 4.2.

Теперь рассмотрим нейтроны, покидающие источник в точке  $\mathbf{r}_1$  в направлении  $\omega_1$  и достигающие  $\mathbf{r}_2$  в направлении  $\omega_2$  после прохождения некоторого произвольного пути, как показано на рис. 4. 2. Вклад в поток нейтронов, пришедших в точку 2 по направлению  $\omega_2$ , благодаря единичному источнику в точке 1, испускающему нейтрон в направлении  $\omega_1$ , для этого выбранного пути имеет вид

$$\varphi(\mathbf{r}_2\omega_2; \mathbf{r}_1\omega_1) = \frac{e^{-\alpha_{13}}}{|\mathbf{r}_{13}|^2} q_3 \frac{e^{-\alpha_{34}}}{|\mathbf{r}_{34}|^2} q_4 \frac{e^{-\alpha_{42}}}{|\mathbf{r}_{42}|^2} \quad (I)$$

Здесь  $q_3$  — вероятность рассеяния в точке 3 из направления 13 в направление 34. Если эта вероятность зависит, как обычно, лишь от угла рассеяния, то вклад в поток нейтронов, приходящих в точку 1 по направлению  $\omega_1$  благодаря единичному источнику в точке 2, испускающему нейтрон в направлении  $\omega_2$ , для обратного пути также дается уравнением (I). После суммирования по всем возможным путям получим

$$\varphi(\mathbf{r}_2\omega_2; \mathbf{r}_1\omega_1) = \varphi(\mathbf{r}_1 - \omega_1; \mathbf{r}_2 - \omega_2). \quad (II)$$

Формула (II) является наиболее общей формулой теоремы обратимости. Уравнение (4. 5) следует из этой формулы, если проинтегрировать по всем направлениям  $\omega_1$  и  $\omega_2$ .

Здесь  $1/V$  — плотность мощности нормализованного источника в объеме  $V$ , а  $V^*$  — объем вне  $V$ . С другой стороны,

$$\sum_a V \bar{\varphi} = \int_V \sum_a d^3 r' \int_{V^*} Q \varphi(\mathbf{r}'; \mathbf{r}) d^3 r. \quad (4.7)$$

Сравнивая уравнения (4.6) и (4.7), получаем при помощи уравнения (4.5)

$$P = \frac{\bar{\varphi}}{\Phi^*}. \quad (4.8)$$

Все приложения транспортной теории, которые будут использованы в следующих двух главах, включают только относительные величины  $P$ ,  $\bar{\varphi}$  и  $\delta$ .

4.4. Если в объеме  $V$  совсем нет рассеяния, то полезное точное выражение для  $P$  можно получить, написав общую скорость поглощений нейтронов в объеме  $V$  от внешнего источника  $Q$  в виде

$$\sum_a \left( \frac{Q}{\sum_a} P_0 \right) V = \int dS \int d\omega \left( \frac{Q}{4\pi \sum_a} \cos \theta \right) (1 - e^{-\Sigma_a l}). \quad (4.9)$$

Здесь  $P_0$  — величина  $P$ , когда в объеме  $V$  нет рассеяния. Член в круглых скобках в левой части уравнения есть средний поток в  $V$ , как можно легко видеть из уравнения (4.8). Первый член в подинтегральном выражении в правой части есть направленный внутрь ток на поверхности  $S$  в пространственном углу  $d\omega = \sin \theta d\theta d\varphi$ .  $l$  — длина хорды, направленной из бесконечно малой поверхности  $dS$  в направлении  $\omega$ . Последняя скобка в правой части уравнения (4.9) представляет собой вероятность захватиться нейтроном, приходящим на поверхность в направлении  $\omega$ .

Уравнение (4.9) может быть переписано в виде

$$P_0 = \frac{1}{\sum_a} \left( \frac{S}{4V} \right) \frac{1}{S} \int dS \int d\omega \frac{\cos \theta}{\pi} (1 - e^{-\Sigma_a l}); \quad (4.10a)$$

$$P_0 = \frac{1}{\sum_a} \left( \frac{S}{4V} \right) \frac{1}{S} \int dS \int d\omega \int dl' \frac{\cos \theta}{\pi} \delta(l - l') (1 - e^{-\Sigma_a l'}); \quad (4.10б)$$

$$P_0 = \frac{1}{\sum_a} \left( \frac{S}{4V} \right) \int f(l') dl' (1 - e^{-\Sigma_a l'}), \quad (4.10в)$$

где

$$f(l') = \frac{1}{S} \int dS \int d\omega \frac{\cos \theta}{\pi} \delta(l - l'). \quad (4.11)$$

Здесь  $f(l')$  — нормализованное распределение длин хорд в  $V$ , взвешенное по элементу поверхности, элементу пространственного угла и косинусу угла между нормалью и соответствующей хордой.

Когда  $\Sigma_a \rightarrow 0$ , то очевидно, что  $P_0 \rightarrow 1$  согласно определению  $P$  как вероятности избежать поглощения.

Из уравнения (4. 10в) получим

$$1 = \frac{S}{4V} \int f(l) dl \lim_{\Sigma_a \rightarrow 0} \left( \frac{1 - e^{-\Sigma_a l}}{\Sigma_a} \right); \quad (4. 12a)$$

$$1 = \frac{S}{4V} \int f(l) dl \cdot l = \frac{S}{4V} \bar{l}. \quad (4. 12б)$$

Таким образом  $\bar{l}$  — длина хорды, усредненная по распределению (4. 11), — дается в виде  $4V/S$ .

Особенно полезное приближение к  $P_0$  впервые предложенное Вигнером и др. (Wigner et al., 1955), есть

$$P_0 = \frac{1}{1 + \Sigma_a \bar{l}}. \quad (4. 13)$$

Когда  $\Sigma_a \bar{l} \ll 1$ , то  $P_0 \approx 1$ , как и должно быть; когда  $\Sigma_a \bar{l} \gg 1$ , то  $P_0 \approx (\Sigma_a \bar{l})^{-1}$ . Правильность последнего предела следует из уравнения (4. 10в), так как при условии  $\Sigma_a \bar{l} \gg 1$  экспонента в интеграле дает пренебрежимо малый вклад. Таким образом, выражение (4. 13) имеет правильное поведение в пределе для малых и больших тел. У формулы (4. 13) есть еще одно преимущество, заключающееся в простоте вычисления средней длины хорды, которое не зависит от формы тела. При анализе следующих двух глав мы исследуем более подробно величину ошибки благодаря использованию канонического вида (4. 13) (см., например, табл. (5. 1) и (6. 2)).

---

---

## Глава V

### РЕЗОНАНСНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ В ГЕТЕРОГЕННЫХ СРЕДАХ (СЛУЧАЙ УЗКИХ РЕЗОНАНСОВ)

5. 1. В этой главе будет рассмотрена проблема расчета эффективного резонансного интеграла для гетерогенных систем. Мы ограничимся приближением узких резонансов, т. е. будем предполагать, что  $\xi$  и для замедлителя, и для поглотителя значительно больше, чем размер рассматриваемого резонанса по оси летаргии. Метод, которому мы будем следовать, был впервые предложен Вигнером и др. (Wigner et al., 1955), работы которого содержат все результаты первых пяти параграфов этой главы. Введение вероятности избежать столкновений было впервые предложено Черником (Chernick 1955, 1957).

Рассмотрим блок поглотителя в форме выпуклого тела, окруженного бесконечной замедляющей средой. Рассчитаем поглощение нейтронов в блоке единственным узким резонансом. С этой целью разделим нейтроны, которые испытывают столкновение в блоке в окрестности резонансной энергии, на два класса, в зависимости от того, где произошли последние столкновения этих нейтронов — в блоке или в замедлителе. В любом случае их последние столкновения произошли при энергиях, значительно превышающих энергию резонанса; при этих энергиях поток  $\phi$  пространственно однороден и в блоке, и в замедлителе. Рассмотрим нейтроны, чьи последние столкновения были в блоке. Скорость, с которой эти нейтроны появляются в единице летаргии в резонансе, не зависит от того, имеется резонанс или нет, так как эти нейтроны пришли в резонансный интервал в результате столкновений, происходящих при энергиях, далеких от резонансной.

Если резонанса нет, то эта скорость равна плотности столкновений при рассматриваемой летаргии, так как из-за пространственной однородности потока не может быть никакой чистой перетечки нейтронов. Таким образом, плотность источника в блоке на единицу летаргии в резонансе равна в точности  $\Sigma_p \phi$ , где  $\Sigma_p$  — попе-

речное сечение потенциального рассеяния материала блока. Если блок представляет собой химически сложный поглотитель, например  $UO_2$ , или смесь элементов, то  $\Sigma_p$  может включать две части  $\Sigma_{pa}$  и  $\Sigma_m$ , как говорилось в гл. III. Так как при летаргии последнего столкновения поток был пространственно однороден и равен  $\phi$ , то источник  $\Sigma_p\phi$  также будет пространственно однородным.

В присутствии резонанса поток вблизи резонанса не будет пространственно однородным и может происходить перетечка нейтронов. Плотность источника  $\Sigma_p\phi$  однородна в блоке, поэтому общая скорость столкновений нейтронов в блоке, чьи последние столкновения произошли в блоке, имеет вид

$$\Sigma_p\phi [1 - P_0(\Sigma_t)] V. \quad (5.1)$$

$P_0$  — средняя вероятность избежать столкновений, определенная уравнением (4.10в), но оцененная для значения поперечного сечения блока, равного  $\Sigma_t$ , где  $\Sigma_t$  — общее поперечное сечение в блоке включая резонансный вклад.

Любой нейтрон источника, который уходит из блока, теряется, так как достаточно одного столкновения с атомом замедлителя, чтобы нейтрон замедлился до энергии ниже резонансной. Аналогично любой нейтрон, который испытывает рассеивающее столкновение в блоке, теряется по той же самой причине. Следовательно, общая скорость поглощений нейтронов в блоке, чьи последние столкновения произошли в блоке, дается выражением

$$\Sigma_p\phi [1 - P_0(\Sigma_t)] V \frac{\Sigma_a}{\Sigma_t}. \quad (5.2)$$

5.2. Теперь рассмотрим нейтроны, чьи последние столкновения были в замедлителе. По той же самой причине, которая была отмечена в параграфе 1, мы видим, что поток на единицу летаргии в замедлителе при резонансной энергии равен  $\phi$ . В соответствии с уравнением 4.8 скорость первых столкновений этих нейтронов в блоке есть

$$\phi P_0(\Sigma_t) V \Sigma_t. \quad (5.3)$$

Вновь столкновения, которые являются рассеивающими, приводят к тому, что часть нейтронов выходит из резонансного интервала и не будет поглощаться в блоке. Следовательно, общая скорость поглощений нейтронов в блоке, чьи последние столкновения произошли в замедлителе, имеет вид

$$\phi P_0(\Sigma_t) V \Sigma_t \frac{\Sigma_a}{\Sigma_t}. \quad (5.4)$$

5.3. Эффективный резонансный интеграл  $I$  есть интеграл по летаргии от такого поперечного сечения, которое, будучи

умноженным на поток в отсутствие резонанса, дает правильную скорость поглощения.

В гетерогенном случае, рассматриваемом здесь, интеграл  $I$  дается уравнением

$$NI\varphi = \int_0^{\infty} \Sigma_p \varphi [1 - P_0(\Sigma_t)] V \frac{\Sigma_a}{\Sigma_t} du + \int_0^{\infty} \varphi P_0(\Sigma_t) V \Sigma_t \frac{\Sigma_a}{\Sigma_t} du, \quad (5.5)$$

которое после упрощения имеет вид

$$NI = \int_0^{\infty} \frac{\Sigma_p \Sigma_a}{\Sigma_t} du + \int_0^{\infty} \frac{(\Sigma_t - \Sigma_p) \Sigma_a}{\Sigma_t} P_0(\Sigma_t) du. \quad (5.6)$$

Здесь  $N$  — атомная плотность ядер поглотителя в блоке. Если  $P_0(\Sigma_t)$  заменить рациональным приближением Вигнера [уравнение (4.13)], то выражение для  $I$  может быть переписано следующим образом:

$$NI = \left(1 + \frac{1}{\Sigma_p \bar{l}}\right) \int_0^{\infty} \frac{\Sigma_p \Sigma_a}{\Sigma_t + (\bar{l})^{-1}} du. \quad (5.7)$$

Здесь

$$\Sigma_t = N\sigma_t + \Sigma_m = N(\sigma_s + \sigma_a) + \Sigma_p, \quad (5.8a)$$

где  $\sigma_s$  и  $\sigma_a$  — резонансное поперечное сечение рассеяния и поглощения соответственно. Но тогда

$$\Sigma_t + (\bar{l})^{-1} = N(\sigma_s + \sigma_a) + \Sigma_p \left(1 + \frac{1}{\Sigma_p \bar{l}}\right). \quad (5.8b)$$

Следовательно, если мы определим

$$b = 1 + (\Sigma_p \bar{l})^{-1}, \quad (5.9)$$

то уравнение (5.7) можно переписать в таком же виде, что и уравнение (3.1), но вместо  $\sigma_p$  мы всюду должны написать  $b\sigma_p$ . Таким образом, мы привели гетерогенный случай к гомогенному в приближении узких резонансов, и все результаты гл. III применимы к настоящему случаю.

**5. 4. Заключение,** полученное в предыдущем параграфе, приводит к двум очень интересным и имеющим большое практическое значение теоремам эквивалентности (Chernick a. Vernon, 1958; Dresner, 1956b; 1958c, Spinrad et al., 1958; Nordheim a. Sampson, 1959; Blässer, 1958; Bell, 1958; Vakshi, 1959). Первая теорема заключается в следующем. Рассмотрим блоки, содержащие некоторый поглощающий материал и различные количества других замедляющих веществ. Все такие блоки с одинаковой величиной  $\sigma_p + (N\bar{l})^{-1}$  имеют один и тот же эффективный резонансный



интеграл. Для доказательства этого положения достаточно отметить, что  $\sigma_p$  в уравнении (5. 7) появляется только в комбинации  $b\sigma_p = \sigma_p + (N\bar{b})^{-1}$ . Полезно отметить, что коэффициент интерференции формы линии  $(\beta i)^{1/2}$  действительно не зависит от  $\sigma_p$ , как можно видеть из уравнения (3. 5). Чтобы продемонстрировать важность этого правила, мы приведем такой пример. Если известен резонансный интеграл для рядов ториевых стержней, то можно немедленно получить значение  $I$  для соответствующих рядов стержней из  $\text{ThO}_2$  (или для сфер, или для любой геометрии блоков). Вторая теорема эквивалентности, которая доказывается точно таким же образом, состоит в том, что эффективный резонансный интеграл для блока имеет такое же значение, как и для однородной среды замедлителя и того же поглотителя, в которой поперечное сечение потенциального рассеяния на ядро поглотителя равно  $\sigma_p + (N\bar{l})^{-1}$  (здесь  $\sigma_p$  относится к материалу блока). Важно отметить, что эти правила не зависят от знания параметров резонанса. Они могут использоваться как для предсказания результатов, так и для проверки теории.

5. 5. Другое очень интересное правило, правда, более приближенное, чем только что рассмотренные, но которое также имеет преимущества, не зависящие от параметров резонанса, касается зависимости эффективно резонансного интеграла от геометрии. Рассмотрим сначала только естественную форму линии. Эффективный резонансный интеграл тогда дается уравнением (3. 8), соответственно модифицированным:

$$I = \frac{1}{2} \frac{\pi (b\sigma_p) \Gamma_\gamma / E_0}{\sqrt{b\beta} (1 + b\beta - i/\beta)} \approx \frac{\pi}{2} \sigma_p \frac{\Gamma_\gamma}{E_0} \beta^{-1/2} \frac{b}{\sqrt{b-i}}, \quad (5. 10)$$

где  $b$  определено в уравнении (5. 9).

Приближенное равенство основано на требовании, что  $\beta b \gg 1$  (условие, которое почти всегда выполняется для важных резонансов в большинстве материалов). На рис. 5. 1 приведен второй множитель правой части уравнения (5. 10) для всех  $b$  и нескольких значений  $i$ . Как видно из рисунка, все эти кривые асимптотически стремятся к величине  $\sqrt{b}$ . Таким образом, с увеличением  $b$  зависимость эффективного резонансного интеграла от интерференции между потенциальным и резонансным рассеянием исчезает. Для любого поглощающего материала, в котором резонансы поглощения узкие, зависимость  $I$  от геометрии для не слишком малых  $I$  должна быть пропорциональна  $\sqrt{b}$ . Эту зависимость от геометрии впервые отметил Дреснер (Dresner, 1956b) при  $i = 0$  и сделал попытку использовать независимость данного свойства от параметров резонанса. Однако, как мы увидим позднее, сильно поглощающие резонансы часто не являются узкими. Геометрическая зависимость в виде  $\sqrt{b}$  для гетерогенных систем эквивалентна

закону  $\sqrt{\sigma_p}$  для гомогенных систем, что есть прямое следствие второй теоремы эквивалентности.

5. 6\*. Все предыдущие результаты основаны на использовании рационального приближения (4. 13) для вероятности избежать столкновений. Оставшаяся часть главы будет посвящена анализу ошибок, получаемых при использовании этого приближения (Dresner, 1958b; Bakshi, 1959).

Средние вероятности избежать столкновений для пластин, цилиндров и сфер затабулированы Кейсом, Плачеком и Гофманом

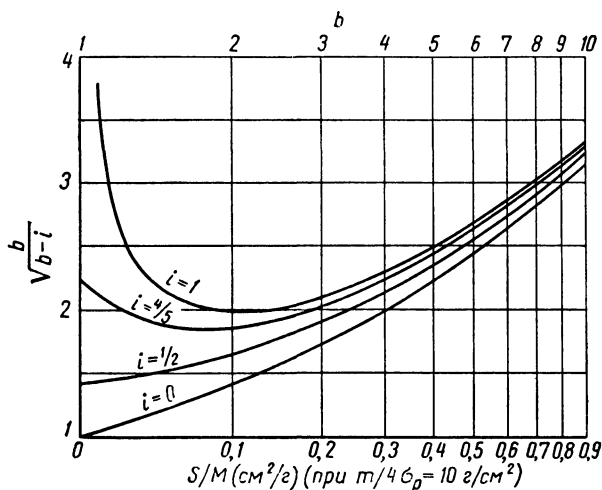


Рис. 5. 1. Приближенная геометрическая зависимость резонансного интеграла в случае узких резонансов [см. уравнение (2. 2)].

(Case, Placzek a. Hoffman, 1953). На рис. 5. 2 приводятся эти результаты вместе со значением  $P_0$ , подсчитанным по уравнению (4. 13). Как оказывается, точные средние значения вероятности избежать столкновений для сферы и цилиндра отличаются не более чем на 2% для любых значений  $\Sigma \bar{l}$ , а при  $\Sigma \bar{l} \geq 3$  почти полностью совпадают. Среднее значение вероятности избежать столкновений для пластины на 10% меньше, чем для сферы (или цилиндра), а при  $\Sigma \bar{l} \geq 3$  совпадает со значениями для сферы (или цилиндра). С другой стороны, рациональное приближение всюду ниже, часто более чем на 23% (такое расхождение достигается при  $\Sigma \bar{l} \sim 2$ ).

Для того чтобы определить влияние этих различий на эффективный резонансный интеграл, рассмотрим поглощение блоками в отсутствие интерференции между потенциальным и резонансным рассеянием. При этих условиях член в части I, включающей сред-

ние вероятности избежать столкновений, может быть записан в виде

$$I' = \int_0^{\infty} \frac{\sigma_a(\sigma_a + \sigma_s)}{\sigma_t} P_0(\Sigma_t) du; \quad (5.11a)$$

$$I' = \frac{\sigma_p \Gamma_\nu}{\beta E_0} \int_0^{\infty} P_0 \left( N\sigma_p \left[ \frac{\psi(\theta, x)}{\beta} + 1 \right] \right) \frac{\psi^2(\theta, x)}{\psi(\theta, x) + \beta} dx \quad (5.11б)$$

или, если отсутствует и доплеровское уширение,

$$I' = \frac{1}{N\bar{l}} \cdot \frac{\Gamma_\nu}{E_0} \int f(l) dl \int_0^{\infty} \frac{dx}{[1 + \beta(1 + x^2)]^2} \times \\ \times \left[ 1 - \exp \left( -\frac{N\sigma_0 l}{1 + x^2} - Nl\sigma_p \right) \right]. \quad (5.11в)$$

При выведении уравнения (3.11б) мы использовали уравнение (4.10в) для  $P_0$  и переменили порядок интегрирования по  $x$  и  $l$  [ $x$  определяется, как обычно, по уравнению (3.3в)].

Интеграл в уравнении (5.11в), обозначенный как  $L(N\bar{l}\sigma_p, \theta, \beta)$ , затабулирован Адлером и Нордгеймом (Adler and Nordheim, 1958), которые использовали электронно-счетную машину IBM-704. Он служит для точной и совместной оценки геометрических и температурных эффектов в уравнении (5.6) (так же как функция  $J(\theta, \beta)$  позволяет точно оценить температурные эффекты в уравнении (3.1). Обычно разница между точной величиной  $I$  и рассчитанной из уравнения (5.7) зависит от  $\theta$ ,  $\beta$  и  $N\bar{l}\sigma_p$ . Однако, когда  $\theta = \infty$  ( $T = 0$ ), зависимость от  $\beta$  исчезает, если  $N\bar{l}\sigma_p \gg \beta$  (т. е. если  $N\bar{l}\sigma_0 \gg 1$ ), и разница зависит только от  $N\bar{l}\sigma_p$ .

Чтобы убедиться в этом, мы проведем в уравнении (5.11в) приближенное интегрирование по  $x$ , применяя метод, предложенный Гуревичем и Померанчуком (1955). Если  $N\bar{l}\sigma_p \gg 1$ , то  $1 + x^2$  можно заменить в экспоненте на  $x^2$ , так как экспонента дает вклад, только если  $x^2 \geq N\bar{l}\sigma_0 \gg 1$ . Если мы произведем эту замену и затем сделаем подстановку  $y = (N\bar{l}\sigma_0)^{1/2}/x$ , то получим после преобразования

$$I' = (N\bar{l})^{-1/2} \frac{(\sigma_0 \Gamma_\nu^2)^{1/2}}{E_0} \int f(l) \left( \frac{l}{\bar{l}} \right)^{1/2} dl \times \\ \times \int_0^{\infty} \frac{y^2 dy}{(y^2 + N\bar{l}\sigma_p)^2} (1 - e^{-N\bar{l}\sigma_p - y^2}). \quad (5.12)$$

При выводе уравнения (5.12) мы пренебрегли  $\beta$  по сравнению с единицей.

5.7. Рассмотрим две функции  $L(a)$  и  $K(a)$ , определенные в виде

$$L(a) = \int_0^{\infty} e^{-y^2} \frac{y^2 dy}{(y^2 + a^2)^2} \quad (5.13)$$

и

$$K(a) = \int_0^{\infty} \frac{y^2 dy}{(y^2 + a^2)^2}, \quad (5.14)$$

в терминах которых  $I'$  может быть подсчитан. Чтобы оценить  $L$  в терминах затабулированных функций, мы поступим следующим образом. Отметим сначала, что

$$L(a) = \frac{d}{da^2} a^2 \int_0^{\infty} \frac{e^{-y^2}}{y^2 + a^2} dy = \frac{d}{d(a^2)} a \int_0^{\infty} \frac{e^{-a^2 z^2}}{1 + z^2} dz. \quad (5.15)$$

Второе равенство следует из подстановки  $y = az$ . Если обозначить через  $F(a)$  бесконечный интеграл по  $z$  в правой части уравнения (5.15), то можно легко показать, что он удовлетворяет следующему линейному дифференциальному уравнению первого порядка и граничному условию

$$\frac{dF}{d(a^2)} - F = -\frac{V\pi}{2a}; \quad F(0) = \frac{\pi}{2}. \quad (5.16)$$

Единственное решение этой системы есть

$$F(a) = e^{a^2} \left( \frac{\pi}{2} - \frac{V\pi}{2} \int_0^{a^2} e^{-x} \frac{dx}{Vx} \right). \quad (5.17)$$

Подставляя  $x = y^2$  в уравнение (5.17), можно получить

$$F(a) = \frac{\pi}{2} e^{a^2} \operatorname{erfc}(a), \quad (5.18)$$

где  $\operatorname{erfc}(a)$  — функция ошибок [см. уравнение (3.27)]. Подстановка этого выражения в уравнение (5.15) дает

$$L(a) = \frac{\pi}{4a} \left[ (1 + 2a^2) e^{a^2} \operatorname{erfc}(a) - \frac{2}{V\pi} a \right]. \quad (5.19)$$

При помощи интегрирования по частям легко показать, что

$$K(a) = \frac{\pi}{4a}. \quad (5.20)$$

Используя уравнения (5. 19) и (5. 20), можно уравнение (5. 12) записать в виде

$$I' = (N\bar{l})^{-1/2} \frac{(\sigma_0 \Gamma_{\gamma}^2)^{1/2}}{E_0} \cdot \frac{\pi/4}{\sqrt{N\bar{l}\sigma_p}} \times \\ \times \langle 1 - (1 + 2Nl\sigma_p) \operatorname{erfc} \left( \sqrt{Nl\sigma_p} + \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sqrt{Nl\sigma_p} e^{-Nl\sigma_p} \right) \rangle, \quad (5. 21)$$

где скобки  $\langle \rangle$  обозначают усреднение по распределению длин хорд. Если к  $I'$  добавим уравнение (3. 8) с  $i = 0$  и пренебрежем  $\beta$  по сравнению с единицей, то получим соответствующий общий эффективный резонансный интеграл. Уравнение (3. 8) можно преобразовать следующим образом:

$$\frac{\pi}{2} \sigma_p \frac{\Gamma_{\gamma}}{E_0} \beta^{-1/2} = (N\bar{l})^{-1/2} \frac{(\sigma_0 \Gamma_{\gamma}^2)^{1/2}}{E_0} \cdot \frac{\pi}{2} \sqrt{N\bar{l}\sigma_p}. \quad (5. 22)$$

Таким образом,

$$I = (N\bar{l})^{-1/2} \frac{(\sigma_0 \Gamma_{\gamma}^2)^{1/2}}{E_0} \left[ \frac{\pi}{2} \sqrt{N\bar{l}\sigma_p} + \frac{\pi/4}{\sqrt{N\bar{l}\sigma_p}} \times \right. \\ \left. \times \langle 1 - (1 + 2Nl\sigma_p) \operatorname{erfc} \left( \sqrt{Nl\sigma_p} + \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sqrt{Nl\sigma_p} e^{-Nl\sigma_p} \right) \rangle \right]. \quad (5. 23)$$

Соответствующее выражение в рациональном приближении можно записать в виде, аналогичном уравнению (5. 22),

$$I = (N\bar{l})^{-1/2} \frac{(\sigma_0 \Gamma_{\gamma}^2)^{1/2}}{E_0} \cdot \frac{\pi}{2} \sqrt{1 + N\bar{l}\sigma_p}. \quad (5. 24)$$

5. 8. Так как средние вероятности избежать столкновений для сферы и цилиндра почти одинаковы, то соответствующие значения  $I$  будут почти равны. Следовательно, если мы оценим среднюю величину, определенную в уравнении (5. 23) для сфер, то результаты с хорошей точностью могут быть применены и к цилиндрам. Для осуществления этого необходимо сначала подсчитать распределение длин хорд из уравнения (4. 11). В связи с тем, что все точки на поверхности сферы эквивалентны, поверхностный интеграл исчезает; кроме того, из-за наличия азимутальной симметрии относительно нормали интегрирование по азимутальному углу тривиально. Отмечая далее, что  $l = 2R \cos \theta$ , где  $\theta$  — угол, образуемый хордой и нормалью, имеем из уравнения (4. 11)

$$f(l) = \int_0^{\pi/2} \sin \theta d\theta \cdot 2 \cos \theta \cdot \delta(l - 2R \cos \theta); \quad (5. 25a)$$

$$f(l) = \frac{1}{2R^2} \int_{\theta=\pi/2}^0 d(2R \cos \theta) \cdot 2R \cos \theta \cdot \delta(l - 2R \cos \theta); \quad (5. 25b)$$

$$f(l) = \frac{1}{2R^2}; \quad 0 \leq l \leq 2R. \quad (5. 25b)$$

Теперь величина в угловых скобках в уравнении (5. 23) может быть написана в виде следующих степенных рядов:

$$\frac{4}{\sqrt{\pi}} \left[ (Nl\sigma_p)^{1/2} - \frac{\sqrt{\pi}}{2} (Nl\sigma_p) + \frac{(Nl\sigma_p)^{3/2}}{3} - \frac{(Nl\sigma_p)^{5/2}}{30} + \right. \\ \left. + \frac{(Nl\sigma_p)^{7/2}}{210} - \frac{(Nl\sigma_p)^{9/2}}{1512} + \dots \right]. \quad (5. 26)$$

Эти ряды могут быть усреднены по распределению (5. 25в), если отметить, что

$$\int_0^{2R} \frac{1}{2R^2} l^{v+1/2} dl = \frac{4(2R)^{v+1/2}}{2v+5} = \frac{4\left(\frac{3}{2}\right)^{v+1/2}}{2v+5} (\bar{l})^{v+1/2}. \quad (5. 27)$$

Обозначая через  $a$  величину  $N\bar{l}\sigma_p$ , мы можем записать для квадратных скобок в уравнении (5. 23) ряды

$$\sqrt{\pi} \left[ \frac{4}{5} \left(\frac{3}{2}\right)^{1/2} + \frac{1}{3} \cdot \frac{4}{7} \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{3/2} a - \frac{1}{30} \cdot \frac{4}{9} \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{5/2} a^2 + \right. \\ \left. + \frac{1}{210} \cdot \frac{4}{11} \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{7/2} a^3 - \frac{1}{1512} \cdot \frac{4}{13} \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{9/2} a^4 + \dots \right]. \quad (5. 28)$$

Соответствующее выражение в рациональном приближении есть  $\frac{1}{2} \pi \sqrt{1+a}$ . В табл. 5. 1 приводятся значения относительной ошибки, получаемой при использовании рационального приближения для вероятности избежать столкновений.

Таблица 5. 1

**Ошибки, возникающие при использовании рационального приближения для сфер и цилиндров**

$a = Nl\sigma_p$	0	0,25	0,50	0,75	1,00	$\infty$
Ошибка, % . .	-10,6	-7,5	-5,5	-4,2	-3,3	0

Точные значения, с которыми сравниваются эти ошибки, относятся к сферам и цилиндрам. Из рис. 5. 2 ясно, что разница между точными результатами для цилиндров и сфер очень мала. Эта разница не может превзойти 2%, а в большинстве случаев гораздо меньше. В табл. 5. 1 приводятся ошибки для той части кривых (см. рис. 5. 2), где кривые для сферы и цилиндра совпадают. Кривые вероятности избежать столкновений для сферы и цилиндра имеют относительную разницу, которая всегда более чем в 10 раз меньше, чем предельные кривые и, следовательно, ведут к незначительным различиям в эффективных резонансных интегралах. Ошибки для плоской геометрии будут меньше, чем значения в табл. 5. 1, так как кривая вероятности избежать столкновений

для пластины лежит между кривой для сфер и кривой рационального приближения.

Значения, приведенные в табл. 5.1, справедливы для  $\beta \ll 1$  и должны быть переоценены для больших величин  $\beta$ . Ошибка, получаемая при использовании рационального приближения, возникает в основном из-за флангов резонанса, где  $\Sigma_i \bar{l} \sim 1$ . В центре линии, где  $\Sigma_i \bar{l} \gg 1$ , рациональное приближение дает правильный результат. Относительный вклад центра резонанса

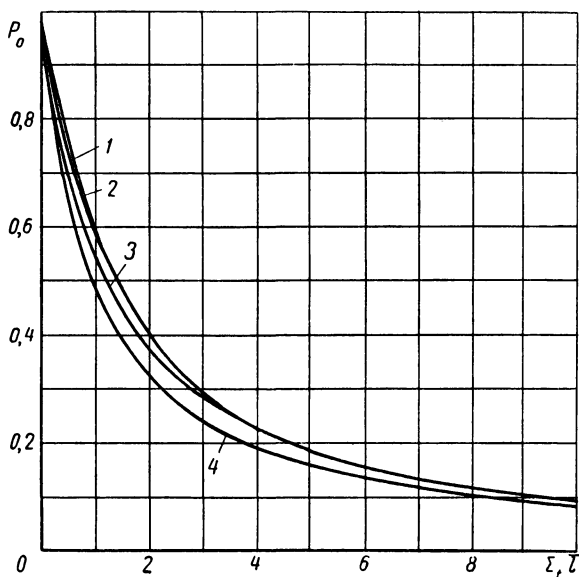


Рис. 5.2. Средние вероятности избежать столкновений  $P_0$  для сфер цилиндров бесконечной длины и пластин, а также рациональное приближение Вигнера: 1 — сфера; 2 — цилиндр; 3 — пластина; 4 — рациональное приближение.

минимален, когда  $\beta \ll 1$ ; тогда поток испытывает выедание в окрестности резонанса. Когда  $\beta$  возрастает, выедание потока уменьшается и относительная важность центра резонанса возрастает. Когда  $\beta \gg 1$ , резонансный интеграл, определенный уравнением (5.10), приближается к значению в бесконечно разбавленной среде, которое справедливо для полного отсутствия выедания потока.

Результаты табл. 5.1 справедливы, конечно, только при  $\theta = \infty$ , т. е. когда  $T = 0$ . Используя таблицы функции  $L(N\bar{l}\sigma_p, \theta, \beta)$ , построенные Адлером и Нордгеймом, можно исследовать зависимость ошибки, получаемой при использовании рационального приближения, для  $P_0$  от доплеровского уширения. Мы выбрали в качестве типичного примера резонанс, для которого

$\beta = 0,2048$  и  $\theta = 0,1$ . Этот выбор  $\beta$  соответствует значению  $j = 11$ , и из рис. 3. 3 можно видеть, что этот выбор особенно ярко подчеркивает эффекты доплеровского уширения.

Для  $N\bar{l}\sigma_p = 1,07$  ошибка в  $I$  с учетом доплеровского уширения равна  $-5,1\%$  по сравнению с  $-3,3\%$  из табл. 5. 1; для  $N\bar{l}\sigma_p = 0,267$  соответствующие величины  $-9,6$  и  $-7,5\%$ , в то время как для  $N\bar{l}\sigma_p = 0,067$  они равны  $-5,8$  и  $-9,8\%$ . Эти цифры показывают, что данные табл. 5. 1 можно использовать для доплеровского уширения, только если интересен порядок величины ошибки. В любом случае уравнение (5. 7) и теоремы эквивалентности, основанные на нем, дают правильные результаты с точностью до  $10\%$ , кроме того, из рис. 5. 2 ясно, что уравнение (5. 7) дает заниженные оценки для сфер, цилиндров и пластин.

---



---

---

## Глава VI

### РЕЗОНАНСНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ В ГЕТЕРОГЕННЫХ СРЕДАХ (СЛУЧАЙ ШИРОКИХ РЕЗОНАНСОВ)

6. 1. В этой главе будет рассмотрено резонансное поглощение в гетерогенных реакторах, когда ширина резонанса по летаргии значительно превосходит средний прирост летаргии на столкновение с атомами поглощающего материала. Это условие представляет собой идеализированный случай, когда массовое число  $A$  поглотителя принимается бесконечным, так что рассеяние ядрами поглотителя изменяет только направление движения нейтрона, не изменяя его энергии. С другой стороны, резонанс предполагается узким по сравнению с приростом летаргии на столкновение с ядрами окружающего блок замедлителя, так же как и с любым замедляющим материалом в самом блоке (например, с кислородом в  $\text{UO}_2$ ). Это условие узости резонанса по отношению к любому нерезонансному разбавителю в блоке предполагает, что при расчете резонансного поглощения сечение (потенциальное) рассеяния разбавителя может рассматриваться как сечение поглощения.

Таким образом, в самом блоке применима моноэнергетическая транспортная теория, причем допускается, что рассеяние происходит только на ядрах поглотителя, а все другие процессы рассматриваются как поглощение (Dancoff а. Ginsburg, 1944; Гуревич и Померанчук, 1955; Neumann, 1956; Stein, 1956; Dresner, 1958в). Наконец, как уже отмечалось выше, поток  $\phi$  в замедлителе пространственно однороден при летаргии в окрестности резонанса.

Рассмотрим блок из  $\text{UO}_2$ , помещенный в графитовый замедлитель. Для того чтобы рассчитать эффективный резонансный интеграл, мы разделим все резонансные нейтроны на два класса, в зависимости от того, с какими ядрами произошли их последние замедляющие столкновения — с ядрами кислорода или с ядрами углерода. Замедлением при столкновении с ядрами урана пренебрежем. Замедление кислородом и углеродом считается сильным, так что резонанс узок по сравнению с потерями на столкновение

с этими ядрами. Скорость поглощения на единицу летаргии нейтронов, которые испытывают свои последние столкновения с ядрами кислорода, дается в полной аналогии с уравнением (5. 1) в виде

$$\Sigma_m \varphi [1 - P] V, \quad (6. 1)$$

где  $\Sigma_m$  — макроскопическое сечение потенциального рассеяния кислорода,  $\varphi$  — поток в замедлителе и  $P$  — вероятность избежать поглощения для пространственно однородного источника в блоке. Здесь  $P$  рассчитывается так, как если бы столкновение с ядром кислорода вызывало бы чистое поглощение, потому что единственное столкновение с ядром кислорода замедляет нейтрон ниже резонансной энергии. Таким образом, этот нейтрон выходит из рассмотрения. Истинная скорость поглощения благодаря нейтронам, рассеянными на кислороде, записывается так:

$$\frac{\Sigma_a}{\Sigma_a + \Sigma_m} \Sigma_m \varphi [1 - P] V. \quad (6. 2)$$

Аналогично истинная скорость поглощения нейтронов, последние замедляющие столкновения которых произошли с ядрами углерода, дается в виде

$$\varphi P V \Sigma_a. \quad (6. 3)$$

Эффективный резонансный интеграл  $I$  можно тогда записать:

$$I = \int \frac{\sigma_a \sigma_m}{\sigma_a + \sigma_m} du + \int P \frac{\sigma_a^2}{\sigma_a + \sigma_m} du. \quad (6. 4)$$

6. 2. Для того чтобы провести расчет этого интеграла, необходимо ввести для  $P$  некоторое приближение аналогично тому, как это было сделано для  $P_0$  в уравнении (5. 6). Такое приближение было предложено Спинрадом и др. (Spinrad et al. 1958), с одной стороны, и Адлером и др. (Adler et al., 1958) — с другой. Эти авторы установили связь  $P$  с  $P_0$ , используя метод последовательных генераций в предположении, что все генерации имеют пространственно однородную плотность столкновений. При этом скорость поглощения для пространственно однородного источника единичной мощности в объеме  $V$  дается геометрическими прогрессиями:

$$(1 - P) V = V [(1 - P_0) (1 - C) + (1 - P_0) C (1 - P_0) (1 - C) + (1 - P_0) C (1 - P_0) C (1 - P_0) (1 - C) + \dots], \quad (6. 5a)$$

$$(1 - P) V = V (1 - P_0) (1 - C) [1 + C (1 - P_0) + C^2 (1 - P_0)^2 + \dots]; \quad (6. 5б)$$

$$(1 - P) V = \frac{V (1 - P_0) (1 - C)}{1 - C (1 - P_0)}, \quad (6. 5в)$$

где  $C = \Sigma_s / \Sigma_t$  — вероятность рассеяния на столкновение в блоке. Когда  $C = 0$ , то  $P = P_0$ , как и должно быть; следовательно, ожидается, что результат (6. 5в), основанный на предположении плоского потока, будет достаточно хорошим, когда  $C$  мало. Если для  $P_0$  используется рациональное приближение Вигнера [уравнение (4. 13)], то уравнение (6. 5в) дает очень простой результат:

$$P = \frac{1}{1 + (\Sigma_t - \Sigma_s) \bar{l}} = \frac{1}{1 + (\Sigma_a + \Sigma_m) \bar{l}}. \quad (6. 6)$$

Таким образом, приближение плоского потока, применяемое вместе с рациональным приближением Вигнера, дает результат, совпадающий с результатом для случая полного пренебрежения всем рассеянием. Подставив уравнение (6. 6) в (6. 4) и проведя преобразование, получим результат:

$$I = \int \frac{\sigma_a (b_m \sigma_m)}{\sigma_a + (b_m \sigma_m)} du, \quad (6. 7)$$

где  $b_m = 1 + (N \bar{l} \sigma_m)^{-1}$ .

Этот результат для резонансного интеграла  $I$  имеет вид, одинаковый с уравнением (3. 1) для гомогенного случая, и может быть оценен точно таким же путем. В нем вновь можно учесть эффект Допплера при помощи функции  $J(\theta, \beta)$ . Наконец, так как  $b_m \sigma_m = b \sigma_p - \sigma_{pa}$  для фиксированных  $b \sigma_p, \sigma_{pa}$ , то резонансные параметры в интеграле  $I$  не зависят от  $\sigma_m / \sigma_p$ . Таким образом, с учетом канонического вида (6. 6) первая теорема эквивалентности выполняется.

Геометрическая зависимость резонансного интеграла, определенного уравнением (6. 7), пропорциональна величине  $\sqrt{\sigma_m b_m}$ , которая, в свою очередь, пропорциональна  $\sqrt{b - (\sigma_{pa} / \sigma_p)}$ . Эта зависимость асимптотически стремится к закону  $\sqrt{b}$ ; следовательно, для не слишком малых  $b$  геометрическая зависимость эффективного резонансного интеграла совершенно одинакова как для широких, так и для узких резонансов.

**6. 3. Совокупность приближения плоского потока и рационального приближения для  $P$  формально сводит в приближении широких резонансов гетерогенный случай к гомогенному. Последнее замечание относительно приближения широких резонансов не существенно, и эквивалентность гетерогенных и гомогенных систем при совместном приближении плоского потока и рациональном приближении можно показать прямо из интегрального уравнения для плотности столкновений в блоке (Nordheim, 1959). Тогда работы Спиннея (Spinney, 1956) и Черника и Вернона (Chernick a. Vernon, 1958), о которых говорилось в последней части гл. III, могут быть использованы во всех случаях. Мы продолжим наше дальнейшее рассмотрение следующим образом.**

В приближении плоского потока плотность столкновений в блоке подчиняется интегральному уравнению, аналогичному уравнению (3. 58):

$$F(u) = \Sigma_t(u) P_0(u) \varphi + [1 - P_0(u)] \int_{u-\varepsilon}^u \frac{\Sigma_s(u') + \Sigma_{pa}}{\Sigma_t(u')} F(u') \times \\ \times \frac{e^{u'-u}}{1-\alpha} du' + \Sigma_m \varphi [1 - P_0(u)], \quad (6. 8)$$

где  $\varphi$  — поток в замедлителе, а  $P_0$  — вероятность избежать столкновений для однородного источника в блоке. Если использовать уравнение (4. 13) для  $P_0$ , то можно переписать уравнение (6. 8) в виде

$$G(u) = \left( \Sigma_m + \frac{1}{l} \right) \varphi + \int_{u-\varepsilon}^u \frac{\Sigma_s(u') + \Sigma_{pa}}{\Sigma_t(u') + 1/l} G(u') \frac{e^{u'-u}}{1-\alpha} du', \quad (6. 9)$$

где

$$G(u) = F(u) (\Sigma_t(u) + 1/\bar{l}) / \Sigma_t(u) = (\Sigma_t(u) + 1/\bar{l}) \varphi(u).$$

Это уравнение по форме идентично уравнению (3. 58), но  $\Sigma_m$  в нем заменено на  $\Sigma_m + \frac{1}{l}$ . Таким образом, весь анализ, проведенный в параграфах 10—13 гл. III, применим без всяких ограничений и в настоящей главе.

В частности, когда

$$\frac{b\Gamma_n}{\Gamma} = \frac{\sigma_{pa}}{\sigma_p}, \quad (6. 10)$$

то результаты для узких и широких резонансов [уравнения (5. 7) и (6. 7) соответственно] совпадают и могут быть подсчитаны из точного решения уравнения (6. 9) (Hasegawa, 1959).

6. 4\*. Вся процедура, на которой основан окончательный результат — уравнение (6. 7), зависит от точности канонического выражения (6. 6) для вероятности избежать столкновений  $P$ . Последующая часть этой главы будет посвящена изучению точности этого выражения. Сначала рассмотрим случай  $\Sigma_t \bar{l} \ll 1$ , применимый на флангах резонанса. Можно найти выражение для  $P$  быстро и достаточно точно, если использовать вариационную технику (Stuart, 1957). В расчетах, которые следуют ниже, удобно выбрать общую среднюю длину пробега в качестве единицы длины и положить  $C = \Sigma_s / \Sigma_t$  — числу вторичных нейтронов на столкновение в блоке. Наконец, положим поток вне блока пространственно однородным и равным единице. Тогда уравнение, определяющее альбедо  $1 - \delta$ , которое связано с  $P$  уравнениями (4. 4) и (4. 8), имеет вид

$$(1 - \delta) \frac{S}{4} = \int_V P_0(\mathbf{r}) d^3\mathbf{r} - C \int_V \varphi(\mathbf{r}) P_0(\mathbf{r}) dr^3. \quad (6. 11)$$

Здесь обе части представляют собой скорости поглощения в блоке. Левая часть определяет разность между падающим и выходящим токами нейтронов через поверхность блока  $S$ . Первый член в правой части есть плотность первых столкновений в блоке;  $P_0(\mathbf{r})$  определяется как плотность первых столкновений в точке  $\mathbf{r}$  благодаря однородному, изотропному, единичному внешнему потоку. Как и раньше,  $P_0(\mathbf{r})$  есть также и вероятность избежать столкновений от единичного изотропного источника в точке  $\mathbf{r}$  в объеме  $V$ . Таким образом, если  $\varphi(\mathbf{r})$  — плотность столкновений в блоке в точке  $\mathbf{r}$ , то второй член в правой части есть скорость ухода нейтронов, подвергшихся столкновениям, из блока.

Значение  $\varphi(\mathbf{r})$  определяется из интегрального транспортного уравнения

$$\varphi(\mathbf{r}) = P_0(\mathbf{r}) + C \int_V \varphi(\mathbf{r}') \frac{\exp(-|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|)}{4\pi |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2} d^3r'. \quad (6.12)$$

Два члена в правой части представляют собой соответственно вклад в плотность столкновений в точке  $\mathbf{r}$  как нейтронов, предварительно подвергшихся столкновениям, так и нейтронов, не подвергшихся им. Легко показать при помощи обычных методов вариационного исчисления, что функционал  $J[\varphi]$ , написанный ниже, не зависит от вариации решения уравнения (6.12).

$$J[\varphi] = C \int_V d^3r \int_V d^3r' \varphi(\mathbf{r}) \frac{\exp(-|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|)}{4\pi |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2} \varphi(\mathbf{r}') - \int_V \varphi^2(\mathbf{r}) d^3r + 2 \int_V \varphi(\mathbf{r}) P_0(\mathbf{r}) d^3r. \quad (6.13)$$

Кроме того, эта постоянная величина  $J[\varphi]$  есть точно второй интеграл в правой части уравнения (6.11), т. е.

$$J[\varphi^*] = \int_V \varphi^*(\mathbf{r}) P_0(\mathbf{r}) d^3r, \quad (6.14)$$

где  $\varphi^*$  — решение уравнения (6.12). Из уравнений (6.11), (6.13) и (6.14) следует тогда, что

$$1 - \delta = \bar{l} \left\{ \frac{1}{V} \int_V P_0(\mathbf{r}) d^3r - \frac{C}{V} I[\varphi] \right\}; \quad (6.15a)$$

$$1 - \delta = \bar{l} \left\{ \frac{1}{V} \int_V P_0(\mathbf{r}) d^3r - \frac{C^2}{V} \int_V d^3r \int_V d^3r' \varphi(\mathbf{r}) \times \right. \\ \left. \times \frac{\exp(-|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|)}{4\pi |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2} \varphi(\mathbf{r}') + \frac{C}{V} \int_V \varphi^2(\mathbf{r}) d^3r - \frac{2C}{V} \int_V \varphi(\mathbf{r}) P_0(\mathbf{r}) d^3r \right\}. \quad (6.15b)$$

Это уравнение имеет очень важное преимущество, которое состоит в том, что ошибка в альbedo  $1 - \delta$  является величиной второго

порядка по сравнению с ошибкой в пробной функции для плотности столкновений. Обычно эти интегралы достаточно трудны, но при постоянной пробной функции они могут быть выражены в терминах вероятности избежать столкновений для однородного источника  $P_0$ , которая заатабулирована (Case et al., 1953).

Положим  $\varphi(r) = A$ . Тогда

$$J[A] = CA^2V [1 - P_0] - VA^2 + 2AVP_0. \quad (6. 16)$$

Здесь использовано равенство

$$\frac{1}{V} \int_V d^3r \int_V d^3r' \frac{\exp(-|r - r'|)}{4\pi|r - r'|^2} = 1 - P_0, \quad (6. 17)$$

обе части которого представляют собой плотности столкновений, усредненные по объему блока. Величина  $A$  определяется из требования, чтобы  $\frac{dJ}{dA} = 0$ :

$$A = \frac{P_0}{1 - C(1 - P_0)}. \quad (6. 18)$$

Подставляя уравнение (6. 18) в уравнение (6. 16), а затем полученный результат в формулу (6. 15а), найдем

$$1 - \delta = \frac{\bar{l}(1 - C)P_0}{1 - C(1 - P_0)} \quad (6. 19)$$

или

$$P = \frac{P_0}{1 - C(1 - P_0)} \quad (6. 20)$$

для вероятности избежать поглощения. Но это соотношение совпадает с выражением (6. 5в), которое, таким образом, является точным на флангах резонанса.

Стюарт (Stuart, 1957) показал из сравнения с точными расчетами, что для бесконечных цилиндрических стержней уравнение (6. 20) дает достаточно надежные значения  $C$  для диаметров, меньших чем четыре средних значения пути пробега. Для величин  $C$ , близких к единице, использование постоянной пробной функции должно давать хорошие результаты даже для больших диаметров.

6. 5. Аналогичная процедура, основанная на вариационном исчислении, может быть развита и для другого предельного случая  $\Sigma_t \bar{l} \gg 1$ . При этом поверхность блока можно рассматривать как плоскость, и альbedo будет близко к значению для бесконечного полупространства. (В пределе, когда  $\bar{l} \rightarrow \infty$ , результаты для бесконечного полупространства будут точными для рассматриваемого случая.)

Следовательно, мы рассмотрим альbedo в проблеме Милна для косинусоидального тока на поверхности. Косинусоидальное

распределение тока на поверхности эквивалентно однородному источнику вне отражающей среды [см. уравнение (4. 2)].

Перед тем как приступить к развитию вариационных уравнений, необходимо ввести два частных интегральных ядра. Рассмотрим сначала ток нейтронов, не подвергшихся столкновениям, на пластину благодаря плоскому источнику единичной мощности с угловым распределением  $G(\cos \theta/2\pi)$ , отстоящему от плоскости на расстоянии  $x$  (рис. 6. 1). Возьмем, как и раньше, общую среднюю длину пробега в качестве единицы длины. Тогда

$$j(x)dS = \int_{\theta=0}^{\theta=\pi/2} d \left[ \pi (x \operatorname{tg} \theta)^2 \cdot \frac{dS \cos \theta}{(x \sec \theta)^2} \cdot \frac{G(\cos \theta)}{2\pi} \cdot e^{-x \sec \theta} \right]. \quad (6. 21)$$

Первый член в подынтегральном выражении представляет собой мощность кругового источника на плоскости источника, второй член — бесконечно малый пространственный угол, который стягивает бесконечно малую площадь  $dS$ , третий член — вероятность того, что скорость нейтрона источника ориентирована таким образом, чтобы пересечь  $dS$ , если нейтрон не испытывает столкновений, и, наконец, четвертый член — вероятность избежать столкновений. Полагая  $\cos \theta = \mu$ , уравнение (6. 21) можно упростить:

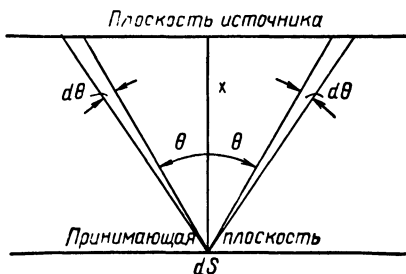


Рис. 6. 1. Ток нейтронов, не подвергшихся столкновениям.

$$j(x) = \int_0^1 e^{-x/\mu} G(\mu) d\mu. \quad (6. 22)$$

$G(\mu)$  нормализовано на интервале изменения  $(-1, +1)$ . Соответствующая плотность столкновений на принимающей плоскости дается в виде

$$\varphi(x) = -\frac{dj(x)}{dx} = \int_0^1 e^{-x/\mu} G(\mu) \frac{d\mu}{\mu}. \quad (6. 23)$$

Для изотропного случая  $G(\mu) = \frac{1}{2}$  и

$$j(x) = \frac{1}{2} \int_1^{\infty} e^{-sx} \frac{dS}{S^2} \equiv \frac{1}{2} E_2(x); \quad (6. 24)$$

$$\varphi(x) = \frac{1}{2} \int_1^{\infty} e^{-sx} \frac{dS}{S} \equiv \frac{1}{2} E_1(x), \quad (6. 25)$$

где  $S = \mu^{-1}$ ,  $E_n$  — функции, определенные соотношением  $E_n(x) = \int_1^{\infty} e^{-Sx} dS/S^n$ , подробно изучены; таблицы и библиография даются Кейсом и др. (Case et al., 1953). Для косинусоидального распределения  $G(\mu) = |\mu|$  и

$$j(x) = \int_1^{\infty} e^{-Sx} \frac{dS}{S^3} \equiv E_3(x); \quad (6.26)$$

$$\varphi(x) = \int_1^{\infty} e^{-Sx} \frac{dS}{S^2} \equiv E_2(x). \quad (6.27)$$

6. 6. Используя установленные выше соотношения, мы выведем теперь вариационное выражение для альбедо. Аналогом уравнения (6. 11) для полубесконечной отражающей среды, расположенной справа от плоскости  $x = 0$ , является

$$\frac{1}{4}(1 - \delta) = \frac{1}{4} - \frac{C}{2} \int_0^{\infty} E_2(x) \varphi(x) dx, \quad (6.28)$$

где  $\varphi(x)$  — плотность столкновений. Поток слева от плоскости  $x = 0$  берется пространственно однородным и равным единице. Интегральное транспортное уравнение, соответствующее уравнению (6. 12), есть

$$\varphi(x) = \frac{C}{2} \int_0^{\infty} \varphi(x') E_1(|x - x'|) dx' + \frac{1}{2} E_2(x). \quad (6.29)$$

Неоднородный член — плотность первых столкновений — пропорционален  $E_2(x)$ , как следует из уравнения (6. 27). Коэффициент  $1/2$  вводится для того, чтобы нормализовать общую скорость первых столкновений к  $1/4$ , а не к  $1/2$ , как следует из уравнения (6. 27).

Из уравнения (6. 28) можно написать

$$\delta = 2C \int_0^{\infty} E_2(x) \varphi(x) dx. \quad (6.30)$$

Функционал, который является постоянным для решения уравнения (6. 29), имеет вид

$$J[\varphi] = \frac{C}{2} \int_0^{\infty} dx \int_0^{\infty} dx' \varphi(x) E_1(|x - x'|) \varphi(x') - \int_0^{\infty} \varphi^2(x) dx + \\ + \int_0^{\infty} \varphi(x) E_2(x) dx. \quad (6.31)$$



Наконец, стационарная величина  $J$  записывается так:

$$J[\Phi^*] = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \Phi^*(x) E_2(x) dx, \quad (6.32)$$

где  $\Phi^*$  удовлетворяет уравнению (6.29). Комбинация уравнений (6.30), (6.31) и (6.32) дает вариационное выражение для  $\delta$ , ошибка которого является величиной второго порядка по сравнению с ошибкой в пробной функции для  $\Phi$ :

$$\begin{aligned} \delta = & 2C^2 \int_0^{\infty} dx \int_0^{\infty} dx' \Phi(x) E_1(|x - x'|) \Phi(x') - \\ & - 4C \int_0^{\infty} \Phi^2(x) dx + 4C \int_0^{\infty} \Phi(x) E_2(x) dx. \end{aligned} \quad (6.33)$$

6.7. Если  $C$  не слишком мало, то возможные пробные функции приводятся при помощи приближения сферических гармоник к линейному уравнению Больцмана (Davison, 1957). Эти решения всегда имеют вид сумм отрицательных экспонент. Для того чтобы точно оценить интегралы в уравнении (6.33), необходимо прежде знать интеграл

$$F(k, k') = \int_0^{\infty} dx \int_0^{\infty} dx' e^{kx - k'x'} E_1(|x - x'|). \quad (6.34)$$

Мы можем записать  $F(k, k')$  в виде

$$F(k, k') = \Gamma(k, k') + \Gamma(k', k), \quad (6.35)$$

где

$$\Gamma(k, k') = \int_0^{\infty} dx \int_0^x dx' e^{-kx - k'x'} E_1(x - x'); \quad (6.36a)$$

$$F(k, k') = \int_0^{\infty} dx \int_0^{\infty} dx' e^{-kx - k'x'} \int_1^{\infty} e^{-S(x-x')} \frac{dS}{S}; \quad (6.36b)$$

$$F(k, k') = \int_1^{\infty} \frac{dS}{S} \int_0^{\infty} dx e^{-(k+S)x} \int_0^x e^{-(k'-S)x} dx'; \quad (6.36b)$$

$$F(k, k') = \int_1^{\infty} \frac{dS}{S(k' - S)} \int_0^{\infty} dx \{e^{-(k+S)x} - e^{-(k+k')x}\}; \quad (6.36b)$$

$$F(k, k') = \frac{1}{k + k'} \int_1^{\infty} \frac{dS}{S(k + S)}; \quad (6.36d)$$

$$F(k, k') = \frac{\ln(1 + k/k')}{k(k + k')}; \quad (6.36e)$$

Второй интеграл, который необходимо знать, есть

$$\int_0^{\infty} E_2(x) e^{-kx} dx = \int_1^{\infty} \frac{dS}{S^2} \int_0^{\infty} dx e^{-(k+S)x}; \quad (6.37a)$$

$$\int_0^{\infty} E_2(x) e^{-kx} = \int_1^{\infty} \frac{dS}{S^2(k+S)}; \quad (6.37б)$$

$$\int_0^{\infty} E_2(x) e^{-kx} = \frac{k - \ln(1+k)}{k^2}. \quad (6.37в)$$

6. 8. Рассмотрим теперь пробную функцию в виде, определяемом диффузионной теорией. Согласно диффузионной теории,

$$\varphi(x) = Ae^{-kx}, \quad (6.38a)$$

где

$$k = \sqrt{3(1-C)}. \quad (6.38б)$$

Постоянная  $A$  будет определена из условия, что она делает  $\delta$  постоянным. В принципе такая же процедура может быть использована и для  $k$ , но она слишком утомительна и, как мы увидим, не нужна.

Из уравнений (6.38a), (6.37в), (6.36е) и (6.33) находим, что

$$\delta = -M(k)A^2 + 2N(k)A, \quad (6.39a)$$

где

$$M(k) = 2C \frac{k - C \ln(1+k)}{k^2} \quad (6.39б)$$

и

$$N(k) = 2C \frac{k - \ln(1+k)}{k^2}. \quad (6.39в)$$

Величина  $A$ , которая делает  $\delta$  постоянным, есть  $N(k)/M(k)$ . Соответствующая величина  $\delta$  есть

$$\delta = \frac{N^2(k)}{M(k)}. \quad (6.40)$$

Подобный результат применяется для случая  $P_3$ -приближения в уравнении Больцмана, в котором

$$\varphi(x) = A_1 e^{-k_1 x} + A_2 e^{-k_2 x}. \quad (6.41)$$

Величины  $k_1$  и  $k_2$  зависят только от среды и являются положительными корнями уравнения

$$9k^4 - [35 + 55(1-C)]k^2 + 105(1-C) = 0, \quad (6.42)$$

Эти корни затабулированы Дэвисоном (Davison, 1957). Значения  $A_1$  и  $A_2$  вновь выбираются такими, чтобы сделать  $\delta$  постоянным. Окончательный результат записывается в виде

$$\delta = \frac{M(k_1)N^2(k_2) + M(k_2)N^2(k_1) + 2Q(k_1, k_2)N(k_1)N(k_2)}{M(k_1)M(k_2) - Q^2(k_1, k_2)}, \quad (6.43)$$

где  $M$  и  $N$  определяются из уравнения (6.39) и

$$Q(k_1, k_2) = \frac{2C}{k_1 + k_2} \left[ C \frac{\ln(1+k_1)}{k_1} + C \frac{\ln(1+k_2)}{k_2} - 2 \right]. \quad (6.44)$$

**6. 9.** Результаты, полученные в уравнениях (6.40) или (6.43), применимы только тогда, когда справедливы, по крайней мере приближенно, диффузионная теория или  $P_3$ -приближение, т. е. если  $C$  не слишком мало.

При очень малых  $C$  мы можем получить полезное выражение для альбедо, рассматривая только те нейтроны, которые уходят из среды после одного столкновения. Как и в уравнении (6.29), плотность первых столкновений есть  $1/2 E_2(x)$ .

Так как рассеяние изотропно, то отраженный ток, возникающий из первых столкновений в точке  $x$ , дается уравнением (6.24). Но отраженный ток есть  $1/4 \delta$ , таким образом

$$\delta = C \int_0^{\infty} E_2^2(x) dx; \quad (6.45a)$$

$$\delta = C \int_0^{\infty} dx \int_1^{\infty} \frac{dv}{v^2} e^{-vx} \int_1^{\infty} \frac{du}{u^2} e^{-ux}; \quad (6.45б)$$

$$\delta = C \int_1^{\infty} \frac{dv}{v^2} \int_1^{\infty} \frac{du}{u^2} \cdot \frac{1}{u+v}; \quad (6.45в)$$

$$\delta = C \int_1^{\infty} \frac{dv}{v^2} \left\{ \frac{v - \ln(1+v)}{v^2} \right\}; \quad (6.45г)$$

$$\delta = C \cdot \frac{2}{3} (1 - \ln 2). \quad (6.45д)$$

Переход от вида (6.45в) к виду (6.45г) осуществляется при помощи разложения на частичные дроби:

$$\frac{1}{u^2(u+v)} = \frac{1}{u^2v} - \frac{1}{v^2u} + \frac{1}{v^2(u+v)}. \quad (6.46)$$

Логарифмический интеграл вида (6.45г) можно взять по частям. Уравнение (6.45) всегда дает заниженное значение для  $\delta$ , как это ясно из его определения,

6. 10.\* В табл. 6. 1 приводятся альbedo, рассчитанные различными способами для трех значений  $C$ . Из этих результатов следует прежде всего, что вариационные результаты для пробных функций, рассчитанных при помощи диффузионной теории и  $P_3$ -приближения, отличаются не более чем на 0,2%. Таким образом,  $P_3$ -приближение для пробной функции будет давать почти точные результаты, в то время как диффузионная теория — результаты с точностью до нескольких десятых процента. Во-вторых, ни диффузионная теория, ни  $P_3$ -приближение не будут давать достаточно точных результатов, если значения  $C$  таковы, что не выполняется соотношение  $1 - C \ll 1$ .

Таблица 6. 1

Альbedo полупространства

Метод	$C = 0,7$	$C = 0,5$	$C = 0,3$
Первых столкновений [уравнение (6. 45)] . . .	0,1432	0,1022	0,06137
Диффузионная теория . . . . .	0,2252	0,1010	0,01723
$P_3$ -приближение . . . . .	0,2443	0,1370	—
Вариационно-диффузионная теория для пробной функции [уравнение (6. 40)] . . . . .	0,2560	0,1461	0,07413
Вариационная $P_3$ -теория для пробной функции — [уравнение (6. 43)] . . . . .	0,2565	0,1464	0,07423

Ошибки, получающиеся при использовании этих теорий, достигают значений соответственно —14 и —5% при  $C = 0,7$ ; —45 и —7% при  $C = 0,5$ . Для  $C > 0,95$  ошибка в альbedo, подсчитанном при помощи диффузионной теории, составляет всего —1%. В-третьих, оказывается, что вариационный результат стремится к точному результату снизу. На рис. 6. 2 приводятся значения альbedo, подсчитанные при помощи вариационного метода с диффузионной пробной функцией; обычной диффузионной теории; приближения первого столкновения. Вариационный расчет проводили для  $C \gg 0,3$  и затем, зная из уравнения (6. 45) наклон кривой и ее значение в нуле, кривую экстраполировали графически до  $C = 0$ . На рис. 6. 2 приводится также кривая, отмеченная « $P_3$ -приближение», для  $C \geq 0,5$ . Она построена при помощи двух точек табл. 6. 1 и графической экстраполяции в направлении  $C = 1$ . Абсолютная точность этой кривой невелика, и она может служить лишь иллюстрацией того, что переход от диффузионной теории к  $P_3$ -приближению приводит к существенному улучшению результатов.

6. 11.\* Используя результаты предыдущих вариационных расчетов, можно проверить точность результата (6. 7). Рассмотрим только случай чистого поглотителя, т. е. случай, в котором  $\sigma_m = 0$ . Кроме того, рассмотрим случай, в котором  $\sigma_{pa} = 0$ . Это последнее ограничение будет важным только если  $Nl\sigma_{pa}$  немного меньше

единицы. С учетом отмеченных выше условий, уравнение (6. 4) принимает вид

$$I = \int \sigma_a P(\Sigma_t \bar{l}) du; \quad (6. 47a)$$

$$I = \frac{1}{N\bar{l}} \frac{\Gamma}{E_0} \int_0^{\infty} [1 - \delta(N\sigma_0 \bar{l}(1+x^2)^{-1})] dx. \quad (6. 47b)$$

Теперь вновь используем метод Гуревича — Померанчука (1955) и заменим  $(1+x^2)^{-1}$  на  $x^{-2}$  в аргументе  $\delta$  в уравнении (6. 47b).

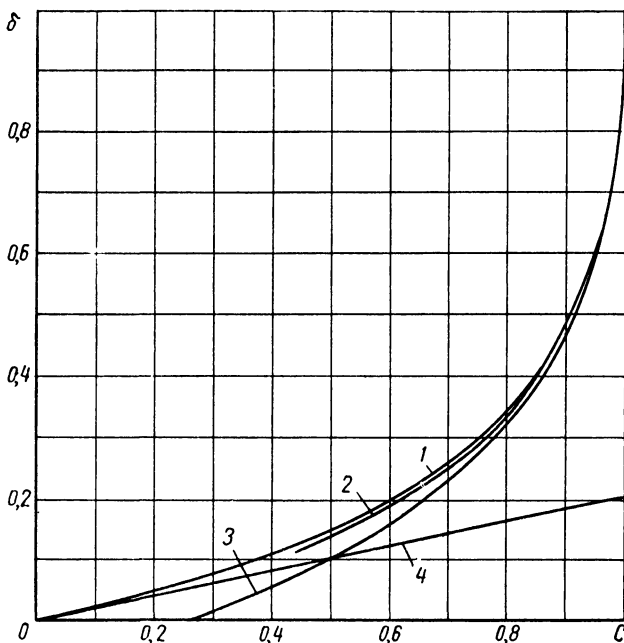


Рис. 6. 2. Альбеда  $\delta$  для полупространства с плоской границей как функция вероятности рассеяния  $C$ . Рассеяние изотропно, и падающий ток нейтронов пропорционален косинусу угла с нормалью:

1 — вариационный метод; 2 —  $P_3$ -приближение; 3 — диффузионная теория; 4 — приближение первых столкновений.

Когда  $x = 1$ , то и  $\delta(N\sigma_0 \bar{l}(1+x^2)^{-1})$  и  $\delta(N\sigma_0 \bar{l}x^{-2})$  равны милновскому значению. Только когда  $x \sim (N\bar{l}\sigma_0)^{1/2}$ ,  $\delta$  отличается от милновского значения; затем если  $N\bar{l}\sigma_0 \gg 1$ , то  $x^2 \gg 1$ . Если мы сделаем эту замену и введем подстановку  $y = N\bar{l}\sigma_0 x^{-2}$ , уравнение (6. 47б) принимает вид

$$I = \frac{\Gamma}{E_0} \left(\frac{\sigma_0}{N\bar{l}}\right)^{1/2} \cdot \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \frac{1 - \delta(y)}{y^{3/2}} dy. \quad (6. 48)$$

Значение  $1 - \delta$ , соответствующее уравнению (6. 6), есть

$$1 - \delta = \frac{(1 - C) \sum_i \bar{l}}{1 + (1 - C) \sum_i \bar{l}} = \frac{(1 - C) y}{1 + (1 - C) y}. \quad (6. 49)$$

Подставляя уравнение (6. 49) в уравнение (6. 48) и интегрируя, получим

$$\begin{aligned} I &= \frac{\Gamma}{E_0} \left( \frac{\sigma_0}{N\bar{l}} \right)^{1/2} \cdot \frac{\pi}{2} (1 - C)^{1/2} = \frac{\pi}{2} \frac{(\sigma_0 \Gamma_{\gamma}^2)^{1/2}}{E_0} (N\bar{l})^{-1/2} \cdot \left( \frac{\Gamma}{\Gamma_{\gamma}} \right)^{1/2} = \\ &= \frac{\pi}{2} \cdot \frac{\sigma_p \Gamma_{\gamma}}{E_0} \beta^{-1/2} \cdot \sqrt{b - 1} \left( \frac{\Gamma}{\Gamma_{\gamma}} \right)^{1/2}. \end{aligned} \quad (6. 50)$$

Этот результат можно также получить из уравнения (6. 7). В табл. 6. 2 приводятся ошибки в уравнении (6. 50), возникающие при использовании канонического вида (6. 49) для цилиндров бесконечной длины. Как следует из табл. 5. 1, эти результаты применимы также и к сферам. Действительно,  $C = 0$  в табл. 6. 2 соответствует  $a = 0$  в табл. 5. 1. Когда  $C = 0$ , то приближение плоского потока не вносит ошибки, и изучаемая проблема сводится к получению ошибки, вносимой подстановкой  $P = P_0$  в уравнении (6. 47а) из рационального приближения. Но это в точности случай  $a = 0$  в уравнении (5. 6). Другие значения в табл. (6. 2) были получены из уравнения (6. 48) при помощи численного интегрирования, использующего вариационные значения  $\delta$ .

Характер результатов (табл. 6. 2) можно объяснить следующим образом. Канонический вид (6. 6) полностью пренебрегает рассея-

Таблица 6. 2

Ошибки, возникающие при совместном использовании приближения плоского потока и рационального приближения для цилиндров

$C$	0	0,4	0,8	0,9
Ошибка, % . . .	-10,6	-5,7	+6,8	+17,8

нием. Когда  $C \ll 1$  и рассеяние всюду несущественно, основная ошибка возникает из-за использования рационального приближения и поэтому имеет отрицательный знак. Однако, когда  $1 - C \ll 1$ , то эффект многократного рассеяния становится важным и приводит к тому, что захватывается меньшее число нейтронов, чем должно быть.

Действительно, канонический вид  $1 - \delta$  приближается к единице в центре линии, что отличается от соответствующего значения на рис. 6. 2. Таким образом, каноническое значение  $1 - \delta$  завышает поглощение и вызывает изменение знака ошибки.

## Глава VII

### ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ СПЕЦИАЛЬНЫЕ ПРИЛОЖЕНИЯ

7. 1. Теория, развитая в предыдущих шести главах, позволяет относительно точно рассчитать поглощение резонансных нейтронов единственным резонансом в изолированном блоке поглотителя. Для того чтобы обобщить теорию, необходимо расширить те предположения, которые были сделаны при построении использованного выше метода. Требуется внести следующие поправки: 1) в решетках, в которых блоки не изолированы один от другого, должны быть введены в теорию эффекты перехода нейтрона из одного блока в другой без столкновений в замедлителе; 2) должны быть приняты во внимание возмущения потока в одном резонансе из-за поглощения в другом; 3) даже если пренебречь п. 2 и предположить, что резонансы можно изучать независимо один от другого, то необходимо учесть поглощение в высокоэнергетических резонансах, наличие которых не подлежит сомнению, но параметры их неизвестны.

7. 2. Первый расчет эффекта п. 1 был сделан Данкоффом и Гинзбургом (Dancoff a. Ginsburg, 1944a), которые, однако, имели дело лишь с предельным случаем  $N\bar{l}\sigma_p \gg 1$ . Их исследование зависит от предположения узких резонансов и от условия, что каждый стержень полностью экранирует своих соседей, т. е. что каждый стержень полностью непрозрачен для нейтронов. Для узких резонансов условие  $N\bar{l}\sigma_p \gg 1$  предполагает непрозрачность, и наоборот. Тогда одно столкновение в блоке, которое будет происходить из-за больших размеров блока, замедлит нейтрон за резонансный интервал. Данкофф и Гинзбург использовали уравнение (5. 10), справедливое для  $b - 1 = (N\bar{l}\sigma_p)^{-1} \ll 1$  и  $i = 0$ . Раскладывая  $\sqrt{b}$  вблизи  $b = 1$  и сохраняя только члены первого порядка  $b - 1$  или ниже, получим

$$I = \frac{\pi}{2} \sigma_p \frac{\Gamma_V}{E_0} \beta^{-1/2} \left( 1 + \frac{1}{2N\bar{l}\sigma_p} \right). \quad (7. 1)$$

Легко показать, что

$$\frac{1}{2N\bar{l}\sigma_p} = \left( \frac{m}{8\sigma_p} \right) \frac{S}{M}, \quad (7. 2)$$

где  $M$  — масса блока,  $S$  — его поверхность и  $m = M/Nv$  — масса на поглощающий атом, включая и массу любого разбавителя. Таким образом, величина  $I$  представляет собой сумму двух членов: одного, не зависящего от размера блока, и другого, пропорционального поверхности блока. Первый член имеет такую же величину, как и эффективный резонансный интеграл бесконечной среды поглотителя. Поверхностный член возникает в результате следующих процессов: 1) некоторые нейтроны, замедленные внутри блока до резонансной энергии, утекают через поверхность блока; 2) другие нейтроны, замедленные вне блока до резонансной энергии, втекают в блок. Разность этих двух вкладов составляет ток нейтронов внутрь блока через его поверхность. Этот ток сокращается из-за наличия соседних стержней по следующим причинам: 1) нейтроны, утекающие из первого блока, могут войти во второй, где они все поглотятся, так как  $N\bar{\sigma}_p \gg 1$ ; 2) второй блок удаляет часть замедлителя.

Ток, входящий в любой изолированный блок из замедлителя, равен, согласно уравнению (4. 3),  $\frac{1}{4} \phi$ . Ток, выходящий из блока, согласно тому же самому уравнению, равен  $1/4 \phi \frac{\Sigma_p}{\Sigma_t}$  (так как объемная плотность источника в блоке постоянна и равна  $\Sigma_p \phi$ ). Тогда поток внутрь блока будет равен

$$J = \frac{\Sigma_t - \Sigma_p}{\Sigma_t} \cdot \frac{\phi}{4}. \quad (7. 3)$$

Если это равенство умножить на  $\Sigma_a/\Sigma_t$  и проинтегрировать по естественной форме линии с  $i = 0$ , то легко получить после деления на  $NV\phi/S$  второй член в уравнении (7. 1) для  $I$  (Wigner et al., 1955). Когда второй блок находится близко к первому блоку, то он экранирует часть замедлителя  $V_2$  для первого блока. Отсутствующий источник в замедлителе, заблокированный объемом  $V_2$ , производил бы наружный ток  $1/4\phi$  на поверхности второго блока. Следовательно, если мы удалим второй блок и поместим источник отрицательного тока нейтронов величины  $1/4 \phi$  на месте прежней поверхности второго блока, то мы точно определим его экранирующий эффект на первый блок. Если теперь учтем еще и то, что второй блок также является и источником положительного наружного тока величины  $1/4\phi \frac{\Sigma_p}{\Sigma_t}$ , то увидим, что общий эффект второго блока на первый получается, если поместить на месте прежней поверхности второго блока источник отрицательного тока величины, приведенной в уравнении (7. 3). Если предположить косинусоидальную зависимость этого тока вокруг нормали к поверхности второго блока [см. уравнение (4. 2)], тогда ток, входящий в первый блок, примет вид

$$J = \frac{\Sigma_t - \Sigma_p}{\Sigma_t} \cdot \frac{\phi}{4} \left[ 1 - \frac{4}{S_1} \int dS_i \int dS_2 \cos \theta_1 \cdot \cos \theta_2 \frac{e^{-|r_1 - r_2|}}{4\pi |r_1 - r_2|^2} \right] \quad (7. 4)$$



где  $dS_1$  и  $dS_2$  — элементы поверхности первого и второго блоков соответственно, локализованные в точках  $r_1$  и  $r_2$ , а  $\theta_1$  и  $\theta_2$  — углы между  $r_1 - r_2$  и нормальми к первому и второму блоку в точках  $r_1$  и  $r_2$  соответственно. (В замедлителе за единицу длины выбирается средний свободный пробег.)

Квадратные скобки в уравнении (7.4) можно интерпретировать как сокращение эффективной поверхности блока, которое зависит только от свойств замедлителя и от геометрии решетки,

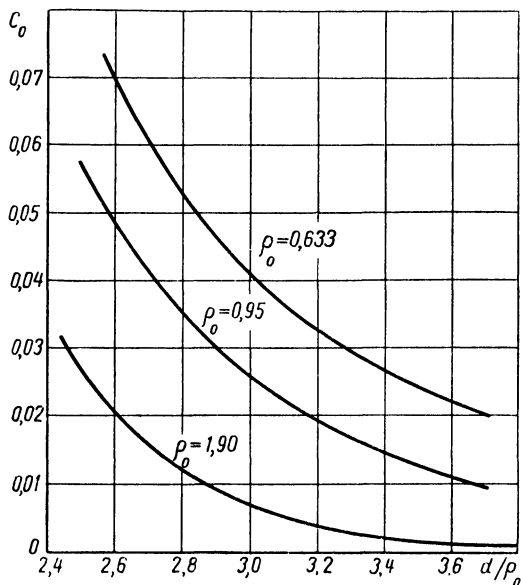


Рис. 7. 1. Частичное сокращение  $C_0$  поверхности блока для двух параллельных цилиндрических стержней как функция отношения  $d$  (расстояния между стержнями) к  $r_0$  — радиусу стержня. За единицу длины принят средний свободный пробег в замедлителе (Dancoff a. Ginsburg, 1944a).

но не зависит от частных значений резонансных параметров. Данкофф и Гинзбург нашли эту величину в двух параллельных цилиндрических стержнях для различных значений радиусов стержней и расстояний между ними. Эти результаты графически показаны на рис. 7. 1. В практических случаях тесных решеток (например, с водородным замедлителем) поправка Данкоффа относительно мала и поверхность сокращается примерно на 5%.

7. 3. Основное предположение Данкоффа и Гинзбурга состоит в непрозрачности блока, т. е. в том, что  $N\bar{l}\sigma_p \gg 1$ . Нордгейм (Nordheim, 1959) исследовал результаты ослабления этого предположения и пришел к важному заключению, что использование множителя в квадратных скобках, описывающего сокращение

поверхности блока, дает хорошее приближение даже при прозрачном блоке. Это заключение можно объяснить следующим образом.

Представим себе регулярную решетку блоков горючего, размещенных в некотором замедлителе. Определим  $P_0$  как среднюю вероятность того, что нейтрон из однородного, изотропного источника в блоках горючего будет испытывать свое следующее столкновение в замедлителе. Таким образом,  $P_0$  является обобщением на случай многих взаимодействующих блоков вероятности избежать столкновений, определенной в параграфе 4. 4. Из аргументов, приведенных в параграфе 4. 3, следует, что если в замедлителе существует однородный изотропный поток  $\phi$ , то средняя плотность столкновений есть в точности  $\Sigma_t \phi P_0$ , где  $\Sigma_t$  — общее макроскопическое сечение поглощения в блоке. В терминах  $P$  формальное решение уравнения (5. 6) можно провести без изменений, хотя переход от уравнения (5. 6) к уравнению (5. 7) уже не может быть сделан.

Приближенное значение  $P_0$ , которое позволит перейти от уравнения (5. 6) к уравнению, идентичному по форме уравнению (5. 7), можно найти следующим образом. Последний член в уравнении (5. 6) можно представить себе как суммарный эффект чистого тока внутрь стержня величины:

$$J = \sum_t \bar{l} P_0 \cdot \frac{\Sigma_t - \Sigma_p}{\Sigma_t} \cdot \frac{\phi}{4}. \quad (7. 5)$$

В отсутствие эффекта взаимодействия  $J$  может быть также дано уравнением (7. 5), только тогда  $P_0$  в нем заменяется на  $P_{0s}$ , где  $P_{0s}$  — вероятность избежать столкновений для единственного блока, определенная в уравнении (4. 10). При взаимодействии соседних блоков, которые «видят» друг друга непосредственно,  $J$  дается выражением

$$J = \sum_t \bar{l} P_{0s} \cdot \frac{\Sigma_t - \Sigma_p}{\Sigma_t} \cdot \frac{\phi}{4} - \sum_t \bar{l} P_0 \frac{\Sigma_t - \Sigma_p}{\Sigma_t} \cdot \frac{\phi}{4} \cdot C_0 \cdot \Sigma_t \bar{l} P_{0s}. \quad (7. 6)$$

Во втором члене первый множитель есть эффективный внешний ток на поверхность соседнего блока,  $C_0$  — поправка Данкоффа — Гинзбурга и  $\Sigma_t \bar{l} P_{0s}$  — вероятность столкновений входящих в блок нейтронов. Если мы добавим к внешнему току «видимых соседей» умноженный на  $C_0$  внешний ток видимых соседей второго эшелона, то получим

$$J = \sum_t \bar{l} P_{0s} \frac{\Sigma_t - \Sigma_p}{\Sigma_t} \cdot \frac{\phi}{4} - \sum_t \bar{l} P_0 \frac{\Sigma_t - \Sigma_p}{\Sigma_t} \times \\ \times \frac{\phi}{4} (1 + C_0) \cdot C_0 \Sigma_t \bar{l} P_{0s}. \quad (7. 7)$$

Наконец, продолжая этот процесс, получим результат

$$J = \sum_t \bar{l} P_{0s} \frac{\Sigma_t - \Sigma_p}{\Sigma_t} \cdot \frac{\varphi}{4} - \sum_t \bar{l} P_0 \frac{\Sigma_t - \Sigma_p}{\Sigma_t} \cdot \frac{\varphi}{4} \cdot C_0 \times \\ \times \sum_t \bar{l} P_{0s} (1 + C_0 (1 + C_0 (1 + C_0 (1 + C_0 \dots])); \quad (7.8a)$$

$$J = \sum_t \bar{l} P_{0s} \frac{\Sigma_t - \Sigma_p}{\Sigma_t} \cdot \frac{\varphi}{4} - \sum_t \bar{l} P_0 \frac{\Sigma_t - \Sigma_p}{\Sigma_t} \cdot \frac{\varphi}{4} \times \\ \times \sum_t \bar{l} P_{0s} \cdot \frac{C_0}{1 - C_0}. \quad (7.8b)$$

Но эта величина для  $J$  должна совпадать с величиной  $J$ , определенной из уравнения (7.5). Решение результирующего уравнения для  $P_0$  дает

$$P_0 = \frac{(1 - C_0) P_{0s}}{1 - C_0 (1 - \sum_t \bar{l} P_{0s})}. \quad (7.9)$$

Если для  $P_{0s}$  использовать выражение (4.13), то уравнение (7.9) принимает вид

$$P_0 = \frac{1}{1 + \sum_t \bar{l} (1 - C_0)^{-1}}. \quad (7.10)$$

Этот результат можно получить, заменяя поверхность блока  $S$  на  $(1 - C_0) S$ . Уравнение (7.9) было впервые получено Нордгеймом (Nordheim, 1959) при помощи некоторых более сложных рассуждений. Уравнение (7.10) было выведено Нордгеймом (Nordheim, 1959a) и Ротенштейном (Rothenstein, 1959a). Приближенный характер уравнения (7.9) возникает из того, что использование  $C_0$  для учета влияния видимых соседей «второго эшелона» ошибочно, так как оно подсчитывает нейтроны, чьи пути пролета не пересекают рассматриваемого блока.

**7.4.** Полностью отличное приближение к проблеме взаимодействия блоков, справедливое для предельного случая малых блоков, предложено Петровым (1958). В исследовании Петрова размеры блока предполагаются очень малыми по сравнению со средним свободным пробегом в замедлителе, который можно оценить методами газовой кинетики. В частности, мы можем рассматривать блоки как вкрапление в замедлитель ядер поглотителя. Тогда среда замедлителя и поглощающих блоков может рассматриваться как гомогенная, и эффекты поглощения блоками выражаются через эффективное поперечное сечение поглощения  $\Sigma_{a \text{ эфф}}$ . Если  $\Sigma_M$  — сечение рассеяния чистого замедлителя,  $\varphi$  — поток нейтронов вне резонанса, то поток при любой летаргии дается выражением

$$\varphi(u) = \frac{\Sigma_{M0} + \Sigma_m}{\Sigma_{M0} + \Sigma_{a \text{ эфф}}(u)} \varphi, \quad (7.11)$$

где  $\rho$  — объемное отношение замедлителя к поглотителю, а  $\Sigma_m$  — нерезонансное сечение рассеяния всех материалов, заключенных в блоке, для которых резонанс узок. Уравнение (7. 11) получается в результате того, что все резонансы узки по сравнению с потерями на столкновение с ядрами замедлителя. Скорость поглощения в одном блоке дается эквивалентными выражениями  $NVI\phi$  или  $V \int \Sigma_{a \text{эфф}}(u) R(u) \phi(u) du$ . Здесь  $R(u)$  — отношение истинного микроскопического сечения поглощения к сумме истинного сечения поглощения и любого сечения рассеяния, которое рассматривается как поглощение. Таким образом,

$$I = \frac{1}{N} \int \frac{(\Sigma_m + \Sigma_{M0}) \Sigma_{a \text{эфф}}(u)}{\Sigma_{M0} + \Sigma_{a \text{эфф}}(u)} R(u) du. \quad (7. 12)$$

Важно отметить, что здесь  $\Sigma_{a \text{эфф}}(u)$  — эффективное сечение поглощения при летаргии  $u$ , включающее эффекты изменения потока в блоке как по пространству, так и по летаргии. Таким образом, в изолированных блоках, когда  $\Sigma_{M0} \gg \Sigma_{a \text{эфф}}(u)$ , предельное выражение  $I = \frac{1}{N} \int \Sigma_{a \text{эфф}}(u) R(u) du$  совпадает со значением, которое мы рассчитали в предыдущих главах.

7. 5. Петров имел дело с реальным случаем чисто поглощающего резонанса в отсутствие доплеровского уширения. Кроме того, он предположил, что блок достаточно мал, так что можно пренебречь  $\Sigma_p$ , т. е. потенциальным рассеянием. Таким образом,  $R(u) = 1$  и  $\Sigma_{a \text{эфф}}(u) = N\sigma_a P_0 (N\sigma_a)$ , где  $\sigma_a$  определяется из уравнения (3. 26) с  $\frac{\Gamma_\nu}{\Gamma} = 1$ , а  $P_0$  из уравнения (4. 10в). Тогда

$$I = \frac{1}{N\bar{l}} \int_0^\infty \frac{\int f(l) (1 - e^{-N\sigma_a l}) dl}{1 + \frac{1}{\Sigma_{M0}\bar{l}} \int f(l) (1 - e^{-N\sigma_a l}) dl} \cdot \frac{\Gamma}{E_0} dx. \quad (7. 13)$$

Впервые значение  $I$  из уравнения (7. 13) было рассчитано Гуревичем и Померанчуком (1955) для изолированного блока. Этот результат можно получить, переходя к пределам  $\sigma_p \rightarrow 0$ ,  $\Gamma_\nu \rightarrow \Gamma$  в уравнении (5. 11) или эквивалентном ему уравнении (5. 21)

$$I = \sqrt{\pi} \frac{(\sigma_0 \Gamma^2)^{1/2}}{E_0} (N\bar{l})^{-1/2} \left( \frac{\bar{l}^{1/2}}{\bar{l}^{1/2}} \right). \quad (7. 14)$$

В большинстве случаев последний множитель очень близок к единице, и им можно пренебречь. Петров рассчитал отношение значений  $I$ , определенных из уравнений (7. 13) и (7. 14), как функцию  $\Sigma_{M0}\bar{l}$ ; этот результат графически показан на рис. 7. 2.

Результаты Петрова можно свести к чисто поглощающим резонансам в случае узких резонансов, если  $N\bar{l}\sigma_p \ll 1$ , т. е. если потенциальным рассеянием можно пренебречь. Единственное изменение состоит в том, что в уравнении (7. 13) нужно подставить  $R = \Gamma_\nu/\Gamma$ .

7. 6. Уравнение (7. 12) можно оценить без сведения к случаю узких или широких резонансов, если использовать приближение плоского потока и рациональное приближение Вигнера для  $P_0$ . При узких резонансах приближение плоского потока фактически не содержит приближения.  $\Sigma_{a \text{эфф}}(u)$  и  $R(u)$  даются выражениями [см. уравнение (5. 7)]

$$\Sigma_{a \text{эфф}} = \Sigma_t \frac{1 + \Sigma_p \bar{l}}{1 + \Sigma_t \bar{l}}; \quad (7. 15a)$$

$$R(u) = \frac{\sigma_a}{\sigma_t}, \quad (7. 15b)$$

так как  $\sigma_m = \sigma_p$ .

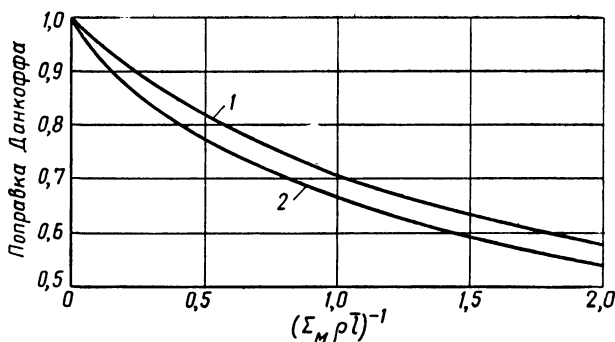


Рис. 7. 2. Общее сокращение эффективного резонансного интеграла как функция  $(\Sigma_M \bar{Q} \bar{l})^{-1}$ :

1 — приближение плоского потока; 2 — Петров (1958).

В случае широких резонансов [см. уравнение (6. 7)]

$$\Sigma_{a \text{эфф}}(u) = \frac{(\Sigma_a + \Sigma_m)(1 + \Sigma_m \bar{l})}{1 + (\Sigma_a + \Sigma_m) \bar{l}}; \quad (7. 16a)$$

$$R(u) = \frac{\sigma_a}{\sigma_a + \sigma_m}. \quad (7. 16b)$$

Подставляя уравнение (7. 15) в уравнение (7. 12), получим

$$I = \int \frac{\sigma_a (b^* \sigma_p)}{\sigma_s + \sigma_a + (b^* \sigma_p)} du; \quad b^* = b \cdot \frac{\sigma_M + \sigma_p}{\sigma_M + b \sigma_p}, \quad (7. 17a)$$

где  $\sigma_M = \Sigma_{M0}/N$  — сечение рассеяния замедлителя на поглощающий атом и  $\Sigma_m = \Sigma_p$ . Для широких резонансов используют уравнение (7. 16) вместо уравнения (7. 15), заменяя  $\sigma_a + \sigma_s$  в знаменателе подынтегрального выражения на  $\sigma_a$ , а  $\sigma_p$  — на  $\sigma_m$  всюду в уравнении (7. 17a). Оба вида уравнения (7. 17) дают при  $\sigma_p = \sigma_m = 0$  простой результат

$$\left(1 + \frac{1}{N \bar{l} \sigma_M}\right)^{-1/2} = \left(1 + \frac{1}{\Sigma_M \bar{Q} \bar{l}}\right)^{-1/2} \quad (7. 17b)$$

для поправки на взаимодействие блоков. Эта функция также показана на рис. 7. 2. Из полученных результатов ясно, что приближение плоского потока и рациональное приближение формально свели выражения для расчета резонансного интеграла при наличии взаимодействия блоков к выражениям для изолированного блока или однородного случая с некоторыми формальными изменениями (третья теорема эквивалентности). Наши результаты для случая  $\sigma_m = \sigma_p = 0$  были приведены впервые Беллом (Bell, 1959).

7. 7. Проблема, тесно связанная с эффектом взаимодействия стержней, заключается во влиянии на резонансное поглощение отверстий внутри поглощающего блока, т. е. центрального цилиндрического отверстия внутри цилиндрического поглощающего стержня. Проведено лишь немного анализов этой проблемы, хотя и были сделаны некоторые упрощающие предположения. Например, Карлвик и Першаген (Carlvik a. Pershagen, 1955) распространили идеи Данкоффа на поглощающий блок с внутренним, заполненным замедлителем, каналом объема  $V_i$ , средней хордой  $\bar{l}_i$  и поперечным сечением  $\Sigma_{mi}$ . Необходимым предположением в их расчете является то, что внутренняя и внешняя поверхности блока разделены поглотителем достаточной толщины, так что движение нейтрона без столкновения от внутреннего замедлителя к внешнему маловероятно. Таким образом, они предполагают, что толщина поглощающего слоя много больше, чем  $(N\sigma_p)^{-1}$ . Кроме того, они используют приближение узких резонансов. Общий внутренний ток  $J_1$  нейтронов, чьи последние столкновения произошли во внутреннем замедлителе, дается выражением

$$J_1 = \Sigma_{Mi} \Phi V_i P_{0i}, \quad (7. 18)$$

где  $P_{0i}$  — средняя вероятность избежать столкновений во внутреннем канале.

Общий наружный ток  $J_2$  нейтронов, чьи последние столкновения произошли в блоке, дается выражением

$$J_2 = \frac{\Sigma_p \Phi}{\Sigma_t} P_{0i} \Sigma_{Mi} V_i. \quad (7. 19)$$

Таким образом, дополнительный ток внутрь блока из-за наличия внутреннего канала имеет вид

$$J_1 - J_2 = \frac{\Sigma_t - \Sigma_p}{\Sigma_t} \Phi V_i \Sigma_i \Sigma_{Mi} P_{0i}. \quad (7. 20)$$

Сравнение уравнения (7. 20) с уравнением (7. 3) показывает, что эффект внутреннего канала может быть описан при помощи увеличения внешней поверхности блока на часть  $\zeta = \Sigma_{Mi} \bar{l}_i P_{0i}$  внутренней поверхности.

7. 8. Часто проектируются реакторы, в которых горячее (поглотитель) размещено в относительно изолированных каналах,

каждый из которых содержит несколько отдельных блоков с небольшим количеством замедлителя между ними (см., например, рис. 7.3). Коген (Cohen, 1956) предложил следующее. Если каналы сконструированы таким образом, что прямая линия не будет проходить в них без пересечения блоков, то при расчете резонансных интегралов можно использовать поверхность  $S_r$ , которая представляет собой поверхность, охватывающую канал. Нужно сказать, что при расчете  $\bar{l}$ , через которую выражается геометрическая зависимость резонансного поглощения, необходимо учитывать истинный объем поглотителя и эффективную поверхность.

Карлвик и Першаген (Carlvik a. Pershagen, 1958) предложили, подобно Когену, следующее. Для внешней поверхности канала использовать значение  $S_r$ , но дополнительно предлагается принимать во внимание эффективную внутреннюю поверхность, которая представляет собой разность  $S - S_r$ , где  $S$  — общая поверхность блоков в канале.  $S - S_r$  есть  $\zeta/F$ , где  $\zeta$ , определенное выше, характеризует вписанные объемы в канале, заполненные замедлителем.  $F$  — фактор, учитывающий ослабление среднего резонансного потока в канале. Он определяется из однорупповой диффузионной теории для резонансных нейтронов (см. параграф 7.12). Этот метод не является теоретически строгим, но, как отмечает Хеллstrand (Hellstrand, 1957), он основан на соответствующих экспериментальных значениях.

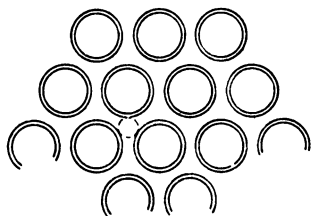


Рис. 7.3. Часть канала стержней. Штриховая окружность обозначает трубку, для которой  $\zeta$  рассчитывается.

7.9. Имеется другое приближение к проблеме канала, использующее результаты параграфа 7.6. Внутренняя часть канала (внутри охватывающей поверхности) рассматривается как гомогенная среда с общим поперечным сечением

$$\Sigma(u) = \frac{\Sigma_{a \text{ эфф}}(u) + \Sigma_{M0}}{1 + q}. \quad (7.21)$$

Здесь  $q$ , как и раньше, — объемное отношение замедлителя к поглотителю в канале. Вне резонанса  $\Sigma(u)$  имеет значение

$$\Sigma = \frac{\Sigma_m + \Sigma_{M0}}{1 + q}. \quad (7.22)$$

Следует отметить, что рассеяние поглотителем может рассматриваться в приближении либо широких, либо узких резонансов, в то время как все другие рассеиватели рассматриваются в приближении узких резонансов. Рассмотрим сначала приближение

узких резонансов. По аналогии с уравнением (5. 5) мы можем написать для эффективного резонансного интеграла поглотителя

$$NI' = \int \frac{\Sigma_m + \Sigma_{Mq}}{1 + q} (1 - P_0) \frac{\Sigma_{a \text{эфф}}}{\Sigma} R du + \int P_0 \Sigma_{a \text{эфф}} R du, \quad (7. 23)$$

где  $P_0$  — средняя вероятность избежать столкновений в объеме внутри охватывающей поверхности, а  $\Sigma_{a \text{эфф}}$  и  $R$  даются уравнением (7: 15). Если для  $P_0$  использовать рациональное приближение

$$P_0 = \frac{1}{1 + \Sigma(u) \bar{l}_c}, \quad (7. 24)$$

где  $\bar{l}_c$  — средняя длина хорды объема внутри охватывающей поверхности, то получим результат, полностью аналогичный уравнению (5. 7). Этот результат совпадает по форме с уравнением (7. 17а), в котором только  $\sigma_M$  заменяется на  $\sigma_M + (1 + q)/(N\bar{l}_c)$ .

При широких резонансах единственное изменение происходит в выражениях для  $R$  и  $\Sigma_{a \text{эфф}}$ , которые даются теперь уравнением (7. 16). Для  $I$  по-прежнему справедливо уравнение (7. 23), так как замедление в замедлителе всегда рассматривается в приближении узких резонансов. Результат для  $I$  снова совпадает по форме с уравнением (7. 17а), но только  $\sigma_M$  в нем заменяется на  $\sigma_M + (1 + q)/N\bar{l}_c$ ;  $\sigma_a + \sigma_s$  на  $\sigma_a$  и  $\sigma_p$  на  $\sigma_m$  (четвертая теорема эквивалентности).

7. 10. Перейдем теперь к оценке вклада в резонансные интегралы неразрешенных резонансов при высокой энергии. Первая проблема, которую мы рассмотрим в этом направлении, представляет собой случай бесконечного разбавления в гомогенной среде ( $\sigma_p \rightarrow \infty$ ) или подобный ему случай гетерогенного поглощения в очень малых блоках ( $b \rightarrow \infty$ ), например тонких фольгах. В обоих случаях резонансный интеграл для единственного резонанса дается формулой

$$I = \frac{\pi}{2} \sigma_0 \frac{\Gamma_\nu}{E_0} \quad (7. 25)$$

Вклад  $\Delta I^*$  в общий резонансный интеграл  $I^*$  для всех резонансов одного и того же спина и четности в небольшом энергетическом интервале  $\Delta E$  около  $E_0$  тогда есть

$$\Delta I^* = \frac{\pi}{2E_0} \langle \sigma_0 \Gamma_\nu \rangle \frac{\Delta E}{D_J}, \quad (7. 26)$$

где  $D_J$  — средний размер уровней данного спина и четности, а скобки обозначают усреднение по статистическому распределению ширин реакции. Общий вклад в резонансный интеграл для



резонансов, лежащих выше некоторой граничной энергии  $E^*$ , тогда дается выражением

$$I^* = \frac{\pi}{2D_J} \int_{E^*}^{\infty} \langle \sigma_0 \Gamma_\gamma \rangle \frac{dE}{E}. \quad (7.27)$$

Здесь было справедливо предположено, что в энергетическом интервале, где имеется значительное поглощение (обычно это первые несколько десятков киловольт),  $D_J$  остается постоянным. Мы можем записать уравнение (7.27) в несколько более явном виде, используя уравнение (3.3а) для  $\sigma_0$ . Ради удобства проведения этой процедуры используем сокращенную нейтронную ширину  $\Gamma_n^0$ , определенную выражением  $\Gamma_n E_0^{-1/2}$ . Предположим вначале, что все неразрешенные резонансы имеют одинаковые  $\Gamma_n^0$  и  $\Gamma_\gamma$ . При помощи этих подготовительных мероприятий мы можем записать уравнение (7.27) в виде

$$I^* = \frac{4\pi^2}{k^{*2}} g_J \frac{\Gamma_\gamma}{D_J} \int_1^{\infty} \frac{dy}{y^2(y+B)}, \quad (7.28)$$

где отмеченные звездочкой величины взяты при  $E^*$ ,

$$y^2 = E/E^* \text{ и } B = \Gamma_\gamma/\Gamma_n^*.$$

Интегрирование легко проводится и получается (Dresner, 1955)

$$I^* = \frac{4\pi^2}{k^{*2}} g_J \frac{\Gamma_\gamma}{D_J} \cdot \frac{B - \ln(1+B)}{B^2}. \quad (7.29)$$

Могут быть сделаны некоторые более сложные предположения относительно статистического распределения ширин реакций. В частности,  $\Gamma_n^0/\langle \Gamma_n^0 \rangle$  вместо равенства единице для всех резонансов может быть взято распределенным по закону Портера и Томаса (Porter a. Thomas, 1956; Cramer, 1956),  $\Gamma_\gamma$  по-прежнему берется постоянной (Porter a. Thomas, 1956). Легко показать, что тогда уравнение (7.29) должно быть видоизменено просто при помощи усреднения по распределению  $\Gamma_n^0$ . Оценка среднего проведена Куном и Дреснером (Kuhn a. Dresner, 1958); их результаты выражены в терминах поправки, которая используется в уравнении (7.29). Эта поправка графически показана на рис. 7.4.

7.11. Рассмотренный выше пример — один из случаев большого класса проблем, связанных с оценкой резонансных интегралов. В более простых случаях, таких, как рассмотренный выше, возможен прямой расчет  $I^*$ . Этот расчет был особенно облегчен из-за пренебрежения статистическим распределением нейтронной ширины (т. е. предположения, что  $\Gamma_n^0 = \langle \Gamma_n^0 \rangle$ ) и пренебрежения доплеровским уширением резонансных линий. При

отмеченных обстоятельствах и дополнительных предположениях ( $b \gg i$ ;  $\beta b \ll 1$ ) уравнение (5. 10) может быть проинтегрировано и дает результат

$$I^* = \pi \left( b \sigma_p \frac{4\pi}{k^{*2}} g_J \right)^{1/2} \frac{\Gamma_Y}{D_J} \cdot \frac{2}{B} (V \sqrt{1+B} - 1). \quad (7. 30)$$

В более точных расчетах доплеровским уширением и статистическими флуктуациями пренебрегать нельзя. Доплеровское уширение становится особенно важным при высокой энергии. Тогда

$$\theta = \frac{\Gamma}{\Delta} \sim \frac{\Gamma_n^0 \sqrt{E_0}}{(4TE_0/A)^{1/2}} = \Gamma_n^0 \left( \frac{A}{4T} \right)^{1/2}. \quad (7. 31)$$

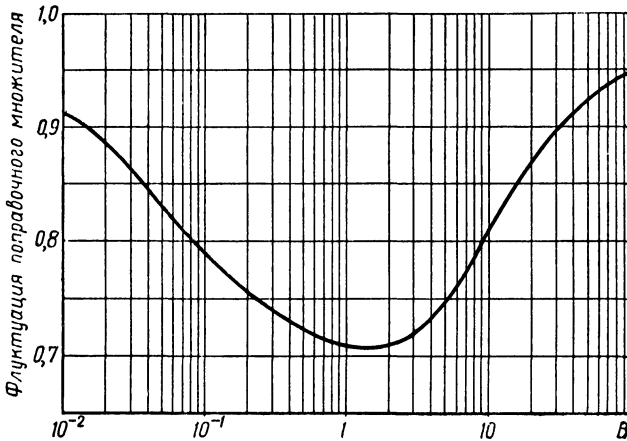


Рис. 7. 4. Поправочный множитель, применяемый в уравнении (7. 29) для расчета статистических флуктуаций в сокращенной нейтронной ширине как функция  $B$ .

Для  $U^{238}$ , например, высокоэнергетический предел  $\theta$  равен примерно 0,1 для соответствующих температур, так что доплеровское уширение резонансных линий очень важно. Если по-прежнему пренебречь статистическими флуктуациями в  $\Gamma_n^0$ , то можно легко вычислить  $dI^*/dE^*$  при различных энергиях  $E^*$  и получить  $I^*$  простым численным интегрированием. Если же флуктуации в  $\Gamma_n^0$  должны быть учтены, то нужно начинать с расчета  $dI^*/dE^*$ . Основная проблема в этом случае будет состоять в усреднении  $J(\theta, \beta)$ . Это было сделано численно Адлером и др. (Adler et al., 1958) и аналитически — Дреснером (Dresner, 1958). Как  $\theta$ , так и  $\beta$  зависят от  $\Gamma_n^0$ , но изменения, которые они производят в  $J$  при изменении  $\Gamma_n^0$ , противоположны.

В качестве дальнейшего уточнения должны быть учтены  $p$ -волновые резонансы, так как для блочных поглотителей, в кото-

рых  $s$ -волновое поглощение сильно сокращено, их вклад весьма существен (Chernick a. Verpov, 1958). Верхняя граница для их вклада может быть получена при помощи формулы для бесконечно разбавленной среды [уравнение (7. 25)]  $I^*$  вновь дается уравнением (7. 27), и снова мы можем записать его в несколько более явном виде, используя уравнение (3. 3а) для  $\sigma_0$ ; однако для  $p$ -волн энергетическая зависимость нейтронных ширин дается уже в виде  $\Gamma_n = \Gamma_n^0 E^{3/2}$ . Тогда мы получим, аналогично уравнению (7. 28),

$$I^* = \frac{4\pi^2}{k^{*2}} g_J \frac{\Gamma_\gamma}{D_J} \int_1^\infty \frac{dy}{y^3 + B} = \quad (7. 32a)$$

$$= \frac{4\pi^2}{k^{*2}} g_J \frac{\Gamma_\gamma}{D_J} \left[ \frac{1}{B^{2/3} \sqrt{3}} \left\{ \frac{\pi}{2} + \arctg \left( \frac{B^{1/3} - 2}{B^{1/3} \sqrt{3}} \right) \right\} - \right. \\ \left. - \frac{1}{6B^{2/3}} \lg \left( \frac{(B^{1/3} + 1)^2}{B^{2/3} - B^{1/3} + 1} \right) \right]. \quad (7. 32b)$$

Зависимость  $\Gamma_n$  от энергии, приведенная выше, не является абсолютно правильной, она несколько изменяется при энергиях порядка 30 кэв в тяжелых ядрах. Однако это изменение производит незначительную ошибку в  $I^*$  в практических случаях тяжелых поглотителей. Уравнение (7. 32) имеет свойство, заключающееся в том, что когда  $E^* \rightarrow 0$ , то  $I^*$  достигает конечного предела:

$$I^* = I_0 g_J \frac{\Gamma_\gamma}{D_J} \left( \frac{\Gamma_n^0}{\Gamma_\gamma} \right)^{2/3}, \quad (7. 32b)$$

где  $I_0$  постоянная величина, равная примерно  $10^7$  барн. Наконец рассмотрение табл. 3. 1 показывает, что, несмотря на относительно небольшие размеры,  $p$ -волновые резонансы иногда характеризуются значениями  $\beta < 0,1$ , так что резонансный интеграл для бесконечно разбавленной среды не всегда оценивается точно.

Выше 30 кэв вклады резонансов более высоких угловых моментов становятся важными в радиационном захвате, и медленная энергетическая зависимость может стать заметной в потенциальном рассеянии. В этом высокоэнергетическом интервале поперечное сечение поглощения обычно очень невелико и эффектами возмущения потока поглотителем можно пренебречь. Вклад в эффективный резонансный интеграл для такого энергетического интервала представляет собой тогда суммарное поперечное сечение поглощения с поправкой, если желательно, для любого изменения с энергией в  $\sigma_p$ .

7. 12. Последний эффект, который необходимо рассмотреть, состоит во взаимодействии между резонансами. Если имеется значительный эффект взаимодействия, то энергетическая зависимость потока на высокоэнергетической стороне второго резонанса не имеет своего асимптотического вида  $1/E$ , но обнаруживает

наличие изменений Плачека, производимых поглощением соседнего, первого резонанса, находящегося при более высокой энергии. Частичное изменение в поглощении вторым резонансом благодаря изменениям, производимым первым резонансом, будет порядка  $1 - p_1$ , где  $p_1$  — вероятность избежать захвата для первого резонанса. Таким образом, общее изменение в вероятности избежать резонансного захвата благодаря эффекту взаимодействия будет порядка  $(1 - p_1)(1 - p_2)$ . Таким образом, ожидается, что в практических случаях, где для большинства резонансов  $1 - p_i \ll 1$ , этот эффект будет очень малым. Ауэрбах и Шимамото рассмотрели данную проблему при помощи метода Монте-Карло для четырех  $H_2O-U$  решеток (Sampson a. Chernick, 1957). Их результаты, приведенные в табл. 7.1, показывают малость эффекта взаимодействия резонансов. Эта проблема была также впервые изучена теоретически Корнгольдом и Чермером (Corngold a. Schermer, 1959).

Таблица 7.1

Сравнение значений  $p$ , полученных Ауэрбахом и Шимамото с учетом и без учета взаимодействия между резонансами

Диаметр стержня, см	Объемное отношение $H_2O/U$	С учетом взаимодействия	Без учета взаимодействия
1,5	1 : 1	0,7829	0,7743
0,625	1 : 1	0,7469	0,7393
1,5	4 : 1	0,9321	0,9218
0,625	4 : 1	0,9044	0,9002

Другой тип эффекта взаимодействия резонансов из-за кумулятивного поглощения во всех резонансах блока был рассмотрен Кристи, Вейнбергом и Вигнером (Cristy, Weinberg a. Wigner, 1944). Эти авторы отметили, что если поглощение в блоке велико, то предположение о пространственной однородности потока между резонансами будет неверно. В частности, можно ожидать, что этот внerezонансный поток обнаружит спад внутри блока и в его окрестности.

Пространственное изменение эпитеплового потока рассчитывается Кристи и др. при помощи методов, в точности подобных методам расчета теплового использования. Эпитепловые нейтроны рассматриваются в одной группе, описываемой односкоростной диффузионной теорией. В замедлителе постоянные резонансной группы определяются аналогично постоянным быстрой группы в обычной двухгрупповой теории, за исключением того, что ширина латаргии  $u_r$  группы не равна общему интервалу от энергии деления до тепловой энергии. В поглотителе для суммарного сечения

поглощения выбирается резонансный интеграл уравнения (7. 1); при делении на  $u_r$  получается групповое сечение поглощения на ядро поглотителя. Остальные групповые постоянные для поглотителя получают, как в двухгрупповой теории, пренебрегая наличием резонансов. Коэффициент резонансного использования поглотителя  $f_R$  рассчитывается тем же способом, что и коэффициент теплового использования  $f$ . Вероятность избежать резонансного захвата тогда дается соотношением  $p = 1 - f_R$ , так как нейтроны, замедленные за резонансную группу, в действительности рассматриваются в этой одnogрупповой модели как поглощенные в замедлителе.

Использование резонансного интеграла [уравнение (7. 1)] для определения группового сечения поглощения в поглотителе в действительности приводит к недооценке резонансного использования, так как оно применяется к поверхностному члену, для которого коэффициент ослабления потока больше, чем для объемного члена. Однако этот недостаток несуществен, так как для небольших блоков коэффициент ослабления потока одинаков как для поверхностного, так и для объемного членов, а для больших блоков поверхностный член относительно мал.

Выбор величины  $u_r$  в некоторой степени произволен, и возможны изменения ее значения (Weinberg a. Wigner, 1958; Fillimore, 1956).

---

## Глава VIII

### СРАВНЕНИЕ ТЕОРИИ И ЭКСПЕРИМЕНТА

8. 1. В этой заключительной главе мы исследуем справедливость изложенных выше теорий при помощи сравнения их с экспериментом. Начнем наше изучение с рассмотрения активационных измерений Хеллстранда (Hellstrand, 1957). Эти измерения были проделаны на шведском тяжеловодном реакторе, в котором образцы из урана или окиси урана с кадмиевым покрытием облучались в центральном канале реактора. Прибор, регистрирующий поток, представлял собой тонкую золотую фольгу, размещенную на более толстой золотой основе. Обе фольги покрыты кадмием, расположены вблизи образца и ориентированы таким образом, что тонкая фольга обращена наружу. Активность регистратора потока создавалась, таким образом, за счет входящего потока. Активности урана, получающиеся в результате облучения, оценивались в барнах с использованием тонких урановых фольг для нормировки, предполагающей значение бесконечно разбавленного резонансного интеграла, равного 280 барн (Macklin a. Romegance, 1955a, в).

Хеллstrand приводит значение ошибки  $\pm 2\%$ , не включая возможных ошибок нормализации, т. е. ошибок, возникающих из-за принятия значения 280 барн.

Экспериментальные значения  $I$  для урана и окиси урана есть

$$I_U = 2,81 + 24,7 (S/M)^{1/2}; \quad 0,07 \leq S/M \leq 0,53, \quad (8. 1a)$$

$$I_{UO_2} = 4,15 + 26,6 (S/M)^{1/2}; \quad 0,08 \leq S/M \leq 0,70, \quad (8. 1b)$$

где  $I$  измеряется в барнах, а  $S/M$  — в квадратных сантиметрах на грамм. Эти значения содержат вклады только резонансных захватов нейтронов. Вклад от захватов надкадмиевых нейтронов в части  $1/v$  поперечного сечения поглощения вычитается из экспериментальных данных.

8. 2. Используя уравнение (8. 1), мы можем проверить первую теорему эквивалентности, которая приравнивает резонансные интегралы различных блоков поглотителя с одинаковыми значе-

ниями  $b\sigma_p$ , но содержащих различные количества нерезонансного разбавителя.

В табл. 8. 1 приводятся результаты такой проверки. Значения  $S/M$  выбираются таким образом, чтобы они совпадали с теми значениями, которые используются в измерениях Хеллстранда.

Таблица 8. 1

Проверка первой теоремы эквивалентности  
(с использованием данных Хеллстранда по урану и  $UO_2$ )

$b\sigma_p$ , барн	$b_U$	$(S/M)_U$ , см <sup>2</sup> /е	$I_U$ , барн	$b_{UO_2}$	$(S/M)_{UO_2}$ , см <sup>2</sup> /е	$I_{UO_2}$ , барн
26,9	2,5	0,164	12,8	1,46	0,075	11,5
32,3	3	0,218	14,3	1,76	0,124	13,5
43,0	4	0,327	16,9	2,35	0,220	16,6
53,8	5	0,435	19,1	2,93	0,316	19,1
64,5	6	0,544	21,0	3,52	0,412	21,2
75,3	7	0,653	22,8	4,12	0,508	23,1
86,0	8	0,762	24,4	4,70	0,604	24,8

Для урана принимается значение  $\sigma_p = 10,75$  барн (Seth, 1956), а для окиси урана поперечное сечение потенциального рассеяния предполагается равным 3,8 барн на атом окиси урана (Hughes а. Schwartz, 1958).

Для  $b \geq 4$  данные достаточно хорошо подтверждают справедливость теоремы эквивалентности: для  $b \leq 4$  резонансный интеграл окиси урана слегка меньше, чем резонансный интеграл металла. Этот эффект, однако, возникает благодаря ослаблению внрезонансного потока в стержнях из окиси урана, которое значительно больше, чем ослабление в металлических стержнях для тех же самых значений  $b\sigma_p$ . Следовательно, мы не рассматриваем это небольшое расхождение для малых  $b\sigma_p$ .

8. 3. Что касается геометрической зависимости эффективного резонансного интеграла, то по всему интервалу, где проводились эксперименты, не использовались прямо ни зависимость  $\sqrt{b}$ , ни  $\sqrt{b-1}$ , хотя обе эти величины дают приемлемо приближенное представление (как можно видеть из табл. 8. 2 и 8. 3).

На сравнительно большом интервале по  $b$ , и особенно при больших  $b$ , оба закона дают примерно одинаковые результаты, хотя закон  $\sqrt{b}$  дает несколько лучшее значение. Важно отметить, что законы  $\sqrt{b}$  и  $\sqrt{b-1}$  применяются соответственно при широких и узких резонансах только в отсутствие доплеровского уширения.

8. 4. Уравнение (8. 1) дает асимптотические значения,  $I/\sqrt{b}$ , равные 8, 2 и 10,7 барн для урана и  $UO_2$  соответственно. В соответствии с уравнением (5. 10) вклад в эти предельные величины от узкого резонанса в отсутствие доплеровского уширения дается

Таблица 8.2

**Геометрическая зависимость резонансного интеграла урана  
(с использованием данных Хеллстранда)**

<i>b</i>	<i>S/M, см²/г</i>	<i>I<sub>U</sub>, барн</i>	<i>I<sub>U</sub>/√<i>b</i>, барн</i>	<i>I<sub>U</sub>/√<i>b</i>-1, барн</i>
2	0,109	11,0	7,80	11,0
3	0,218	14,3	8,28	10,1
4	0,327	16,9	8,46	9,77
5	0,436	19,1	8,55	9,56
6	0,544	21,0	8,59	9,41
7	0,653	22,8	8,61	9,30
8	0,762	24,4	8,62	9,21

Таблица 8.3

**Геометрическая зависимость резонансного интеграла UO<sub>2</sub>  
(с использованием данных Хеллстранда)**

<i>b</i>	<i>S/M, см²/г</i>	<i>I<sub>UO<sub>2</sub></sub>, барн</i>	<i>I<sub>UO<sub>2</sub></sub>/√<i>b</i>, барн</i>	<i>I<sub>UO<sub>2</sub></sub>/√<i>b</i>-1, барн</i>
1,5	0,081	11,8	9,65	16,7
2	0,164	14,9	10,6	14,9
3	0,328	19,4	11,2	13,7
4	0,491	22,8	11,4	13,2
5	0,655	25,7	11,5	12,9
6	0,819	28,2	11,5	12,6

выражением  $\frac{1}{2} \pi \sigma_p (\Gamma_\gamma / E_0) \beta^{-1/2}$ ; в соответствии с уравнением (6. 50) вклад широкого резонанса дается тем же самым выражением, умноженным на  $(\Gamma / \Gamma_\gamma)^{1/2}$ . Для большинства широких резонансов в уране  $\Gamma_\gamma / \Gamma$  близко к единице. Таким образом, приближенно

$$\lim_{b \rightarrow \infty} \frac{I}{\sqrt{b}} = \sum_{\text{рез}} \frac{\pi}{2} \sigma_p \frac{\Gamma_\gamma}{E_0} \beta^{-1/2}. \quad (8. 2)$$

Уравнение (8. 2) справедливо, только если доплеровское уширение резонансных линий несущественно. Кроме того, оно дает результаты, заниженные примерно на 10%, так как основано на рациональном приближении для вероятности избежать столкновений  $P_0$ . Правая часть уравнения (8. 2) представляет собой эффективный резонансный интеграл бесконечной однородной массы чистого поглотителя в приближении узких резонансов. Эта величина может быть получена из расчетов Дреснера (Dresner, 1956), эффективного резонансного интеграла однородных сред урана (или тория) и замедлителя в приближении узких резонансов. Эти результаты приведены в табл. 8. 4. Расчеты, приведшие к этим результатам, не включают ни эффектов интерференции потенциального и резонансного рассеяний, ни эффектов статистических флуктуа-



Расчеты Дреснера эффективного резонансного интеграла,  
барн, гомогенных сред урана

$T, ^\circ K$	$\sigma_p, \text{барн}$	Вклад разрешенных резонансов	Вклад неразрешенных резонансов	Общий интеграл
0	20	7,9	1,7	9,6
	200	24	4,8	28,8
	2000	74	1,1	85
300	20	8,1	3,0	11,1
	80	17	6,6	23,6
	200	27	9,4	36,4
	2000	86	12	98

ций в  $\Gamma_n$ , влияющих на вклад неразрешенных резонансов. Кроме того, предполагалось, что для неразрешенных резонансов  $\Gamma_n \gg \Gamma_v$  но это, как было оценено, приводит к ошибке меньше +10%. Графическая экстраполяция дает значения для правой части уравнения (8. 2), равные 8,0 и 10,6 барн соответственно для урана и  $UO_2$  при  $T = 300^\circ K$ , и 7,4 и 9,4 барн при  $T = 0^\circ K$ . Эти значения находятся в хорошем согласии с результатами, полученными из уравнения (8. 1). Однако результаты, полученные из уравнения (8. 1) для  $\lim_{b \rightarrow \infty} I/\sqrt{b}$ , не являются однозначными. Например,

Хеллstrand привел другую полуэмпирическую формулу, которая соответствует его данным, но имеет другой асимптотический предел по сравнению с уравнением (8. 1). Он выбрал следующий вид интеграла:

$$I = A \left[ \frac{1}{F} + (\sqrt{b} - 1) \right], \quad (8. 3)$$

где  $A$  — постоянная, определяемая из эксперимента, а  $F$  — функция, определяемая из односкоростной диффузионной теории, как обсуждается в последней главе, и равная отношению поверхностного потока к среднему внерезонансному потоку внутри стержня.

Разумное объяснение уравнения (8. 3) состоит в том, что мы сначала разделяем объемный и поверхностный члены в резонансном интеграле, а затем вводим в первый из них поправку для любого ослабления потока. Поправка к поверхностному члену, конечно, не нужна, так как регистраторы потока размещены на поверхности стержней. Из уравнения (8. 3) следует, что  $\lim_{b \rightarrow \infty} I/\sqrt{b} = A$ , так как  $F = 1$  в пределе очень малых стержней. Согласно Хеллstrandу,  $A$  равно 7,8 и 10,5 барн соответственно для урана и  $UO_2$ . Таким образом, хотя сравнение и не приводит

к противоречию, но можно получить только очень грубое согласие теории и эксперимента.

8. 5. Более радикальная проверка теории проводится при помощи расчетов эффективного резонансного интеграла для урановых стержней в интервале размеров, охваченном экспериментами Хеллстранда. Выполнены три таких расчета (Adler, Hipman а. Nordheim, 1958; Dresner, 19586; Chernick а. Vernon, 1958).

В расчетах Адлера, Хинмана и Нордгейма вклады разрешенных резонансов рассчитывались при помощи приближения узких резонансов или приближения поглотителя бесконечной массы, в зависимости от того, больше или меньше практическая ширина резонанса  $\Delta$ , чем максимальная потеря энергии на столкновение с атомом поглотителя. (Практическая ширина здесь рассчитывалась с учетом доплеровского уширения формы линии.) На этой основе резонансы при энергиях 6,68; 21,0; 36,8; 66,3; 102,8 и 190 эв изучались в приближении поглотителя бесконечной массы, а все другие — в приближении узких резонансов.

При узких резонансах для  $I$  использовалось уравнение (5. 6). Используя таблицы  $J(\theta, \beta)$  и  $L(N\bar{I}\sigma_p, \theta, \beta)$ , построенные Адлером и Нордгеймом (Adler а. Nordheim, 1958), интегрирование можно провести точно. При широких резонансах в чистом металлическом уране, которые изучались в приближении поглотителя бесконечной массы, для  $I$  использовалось уравнение 6. 4, но с дополнительным предположением, что рассеянием на уране можно пренебречь. Таким образом, уравнение (6. 4) в действительности становится уравнением (6. 47а), где  $P$  заменено на  $P_0$ . Используя таблицы функции  $L'(\theta, N\sigma_0\bar{I}) = \lim L(N\bar{I}\sigma_p, \theta, \beta)$ , также построенные Адлером и Нордгеймом, можно вновь провести интегрирование точно. Кроме того, эти же ученые рассчитали (при помощи метода последовательных генераций) эффект ранее пренебрегавшегося многократного рассеяния, при этом они всегда предполагают поток в блоке пространственно плоским. Они нашли эффект многократного рассеяния очень слабым, как можно заключить из табл. (6. 2). Наконец, для широких резонансов в  $UO_2$  для  $I$  используется уравнение (6. 4), причем рассеянием на уране вновь пренебрегается. Тогда  $P$  заменяется на  $P_0$  и интегрирование вновь проводится в терминах функций  $J$  и  $L$ . Неразрешенные резонансы исследовались в приближении узких резонансов и проводился соответствующий расчет статистических флуктуаций в нейтронных ширинах. Рассчитывался также небольшой вклад  $p$ -волновых нейтронов (нейтронов с орбитальным квантовым числом  $l$ ). В табл. 8. 5 и 8. 6 сравниваются результаты Адлера и др. при  $T=300^\circ K$  для урана и  $UO_2$  и экспериментальные значения Хеллстранда). Согласие теории с экспериментом — очень хорошее для урана и хорошее для  $UO_2$ .

8. 6. Расчеты Дреснера аналогичны расчетам Адлера и др. Использовались те же самые основы, чтобы решить, какое прибли-

Таблица 8.5

Сравнение расчетов Адлера и др. с данными Хеллстранда для урана

Радиус, см	$b$	$S/M$ , см <sup>2</sup> /г	$I_{\text{расч}}$ , барн	$I_{\text{эксп}}$ , барн
0,422	3,31	0,251	15,2	15,21
0,845	2,16	0,125	11,4	11,26
1,69	1,58	0,0626	8,7	8,72
3,38	1,29	0,0313	7,0	7,21

Таблица 8.6

Сравнение расчетов Адлера и др. с данными Хеллстранда для  $\text{UO}_2$ 

Радиус, см	$b$	$S/M$ , см <sup>2</sup> /г	$I_{\text{расч}}$ , барн	$I_{\text{эксп}}$ , барн
1	2,19	0,196	16,2	16,06
2	1,60	0,098	13,2	12,56
4	1,30	0,049	11,2	10,18

жение — узких резонансов или поглотителя бесконечной массы — применять к каждому резонансу; те же самые резонансы, что и в расчетах Адлера и др., исследовались в приближении поглотителя бесконечной массы. Для приближения узких резонансов использовалось уравнение (5. 7) и применялись соответствующие поправки из табл. 5. 1 при использовании рационального приближения для  $P_0$ . Эффект Доплера вводился через функцию  $J(\theta, \beta)$ . Для широких резонансов применялась формула, основанная на каноническом виде для  $P$ , несколько отличная от уравнения (6. 6), но обеспечивающая значительную точность.

Использовалась также соответствующая поправка, аналогичная поправке в табл. 6. 2. В этих разрешенных резонансах, исследуемых при помощи приближения узких резонансов, эффекты интерференционного рассеяния оценивались при помощи уравнения (3. 53), и оказалось, что они очень малы. Вклад неразрешенных резонансов рассчитывался в приближении узких резонансов, пренебрегающем эффектами интерференционного рассеяния, но учитывающем эффект Доплера и эффект статистических флуктуаций в нейтронной ширине.

Дреснер рассчитал  $I$  для двух урановых стержней. Результаты, приведенные в табл. 8. 7, показывают превосходное согласие с экспериментом.

Расчеты Черника и Вернона в принципе аналогичны выше описанным, но обычно несколько менее точны. Критерии использования приближения узких резонансов или поглотителя бесконечной массы для разрешенных резонансов определялись, как и выше. Неразрешенные резонансы исследовались в приближении

Сравнение расчетов Дреснера с данными Хеллстранда для урана

Радиус, см	$b$	$S/M$ , см <sup>2</sup> /г	$I_{расч}$ , барн	$I_{эксп}$ , барн
0,139	8	0,762	24,8	24,4
0,325	4	0,326	16,2	16,9

узких резонансов, и была сделана грубая поправка для статистических флуктуаций в  $\Gamma_n$ . Расчеты проводились для естественной формы линии и затем вводились поправки на эффект Допплера, найденные из расчетов Дреснера для однородных систем. Тщательное сравнение этих расчетов с экспериментальными данными показывает их недостаточное совпадение.

Из предыдущих результатов оказывается, что данные Хеллстранда отвечают всем требованиям, налагаемым теорией. Кроме того, согласие наиболее точных расчетов с экспериментом подтверждает теорию. Однако не следует переоценивать это совпадение результатов, так как ошибки значительно сокращаются благодаря изучению резонансной проблемы в приближениях либо узких, либо широких резонансов. Подтверждение первой теоремы эквивалентности, установленное при помощи сравнения с экспериментами Хеллстранда, является, конечно, наиболее важной общей проверкой теории и эксперимента.

8. 7. В табл. 8. 8 обобщены все определения резонансных интегралов, сделанные Хеллстрандом в его работе. Необходимо

Таблица 8. 8

Обзор экспериментальных данных по определению эффективного резонансного интеграла в уране

Резонансный интеграл, барн	Метод	Приближенный интеграл экспериментов, см <sup>2</sup> /г	Источник
2,81+24,7 (S/M) <sup>1/2</sup>	Активационный	0,07—0,53	Hellstrand (1957)
8 5/F + 27,4 (S/M)	»	0,05—0,15	Creutz et al. (1955)
8,4/F + 28,0 (S/M)	»	0,02—0,15	Risser et al. (1951)
3,85+21,5 (S/M) <sup>1/2</sup>	»	0,04—4,5	Егизаров и др. (1955)
0,1+33,5 (S/M) <sup>1/4</sup>	»	0,14; 0,20	Scher (1957)
9,6+31,9 (S/M)	Реакторный осциллятор	0,15—0,40	Eriksen et al. (1955)
4,3+45 (S/M)	Анализ решетки	~0,1	Anthoni et al. (1957)
5,0+35 (S/M)	То же	~0,1	Mummery (1955)
5,3+41 (S/M)	То же	~0,1	Persson et al. (1956)
4,6+94 (S/M)	Коэффициент опасности	0,1—0,35	Davis (1957)
-204 (S/M) <sup>2</sup> + +204 (S/M) <sup>3</sup>			
7,6+24 (S/M)	Анализ решетки	~0,1	Kouts a. Sher (1956)

перенормировать многие данные из-за измененных значений различных более или менее фундаментальных поперечных сечений.

Хеллстранд основывал свои расчеты на следующих выбранных значениях. Для  $U^{238}$  бесконечно разбавленный интеграл выбирался равным 280 барн, а тепловое сечение — 2,75 барн. Для  $Ip^{115}$  бесконечно разбавленный интеграл выбирался равным 3200 барн, тепловое сечение — 197 барн. Хеллстранд также следовал условию исключения части  $1/v$  в поглощении при счете резонансного интеграла; мы будем придерживаться этого условия на практике.

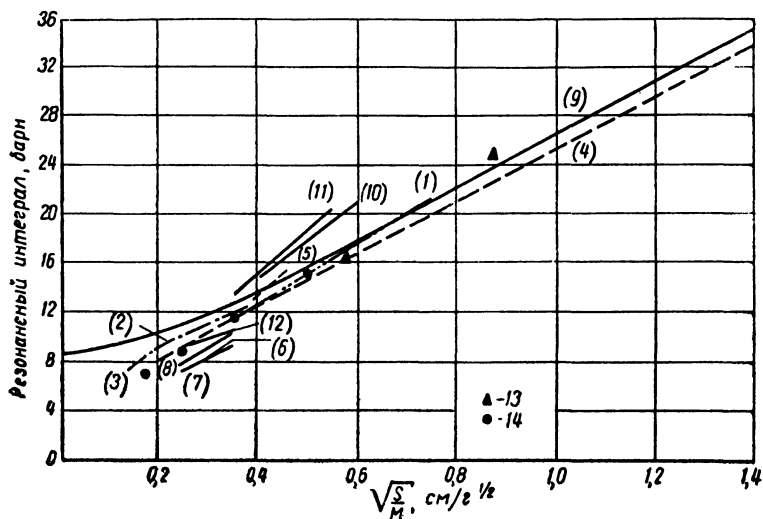


Рис. 8. 1. Эффективный резонансный интеграл блоков из  $U^{238}$  как функция  $\sqrt{S/M}$ , Эксперимент:

1 — Хеллстранда; 2 — Круца и др.; 3 — Риссера и др.; 4 — Егназарова и др.; 5 — Шера; 6 — Антони и др.; 7 — Маммери; 8 — Перссона и др.; 9 — гомогенные данные Маклина и Померанса; 10 — Эриксона и др.; 11 — Дэвиса; 12 — Коутца и Шера; 13 — расчеты Дреснера; 14 — расчеты Адлера и др.

Как видно из табл. 8. 8, различные эксперименты проводятся в различных интервалах  $S/M$ . Соответствующие уравнения, особенно линейные по  $S/M$ , часто неприменимы вне того интервала, для которого они выводились.

Следовательно, на рис. 8. 1, где графически показаны все результаты табл. 8. 8, каждая кривая справедлива только на том интервале, на котором справедливо соответствующее уравнение. На этом рисунке также показана кривая, полученная из данных по гомогенным системам (Macklin a. Pomergance, 1955a). Эта кривая построена на основании второй теоремы эквивалентности, т. е. выбора величин  $S/M$ , соответствующих значениям  $b = \sigma_p/\sigma_{pa}$ . Приводятся также расчеты из табл. 8. 5 и 8. 7. Прежде чем вывести некоторое заключение о согласии эксперимента и теории,

необходимо определить, какую точность можно получить в результате каждого эксперимента.

8. 8. Прежде всего резонансные интегралы, полученные из анализа критических или экспоненциальных экспериментов на решетке, оказываются соответственно ниже, чем резонансные интегралы, полученные другими методами. Не существует удовлетворительного объяснения этому отличию, хотя предполагалось, что оно возникает из-за слишком ограниченного применения формулы четырех сомножителей (Spinrad, 1956; Sher a. Kouts, 1956). В то время как такая формулировка условия критичности достаточна для сравнения экспериментов, установленные значения различных параметров уравнения четырех сомножителей не являются теми значениями, которые должны быть получены в прямых измерениях. Это происходит из-за того, что четыре сомножителя не полностью независимы и их значения в действительности неодинаковы для различных методов, используемых для их определения. Например, если коэффициент теплового использования  $f$  определяется при помощи установления потока прохождения голыми поглотителями, подчиняющимися закону  $1/v$ , то экспериментальное значение вероятности избежать резонансного захвата  $p$ , по-видимому, относится только к избытку эпитеплового сечения над экстраполированным по закону  $1/v$  тепловым сечением. Поглощение этим последним сечением тогда, конечно, включается в  $f$ . С другой стороны, если поток прохождения получается, например, при помощи метода кадмиевой разности, тогда  $p$  должно содержать надкадмиевую часть  $1/v$  поперечного сечения, а  $f$  не должно содержать. Кроме того, в первом случае (фольги, поглощающие по закону  $1/v$ ),  $\eta$  должна учесть вклады от эпитепловых делений в  $U^{235}$ , а  $p$  не должно включать этих вкладов (так как интеграл деления  $U^{235}$  не имеет фактически избытка над экстраполированным тепловым сечением).

В другом случае (надкадмиевый индикатор потока) эффекты надкадмиевых делений должны быть включены в  $p$  и совсем не должны учитываться в  $\eta$ . Если в  $p$  включены эффекты резонансных делений, то наблюдается значительное сокращение резонансного интеграла по сравнению с активационными измерениями. Это можно доказать следующим образом.

Эффектами выедания потока в резонансах  $U^{235}$  можно пренебречь, так как  $\sigma_0 \approx 10^2 \div 10^3$  и  $\sigma_p = 10,75 \cdot 140$  барн. Таким образом,  $\beta \approx 1,5 - 15$ . Если  $I'$  означает резонансный интеграл  $U^{235}$ , а  $\eta'$  — соответствующий средний выход надтепловых нейтронов, то скорость надтепловых захватов нейтронов на ядро  $U^{238}$  увеличивается примерно на  $-(\eta' - 1) I' / 140$  барн. Выбирая  $I' \approx 300$  и  $\eta' \approx 1,5$  барн, получим вклад около 1 барн.

Обычно эффекты резонансных делений должны быть включены в резонансный интеграл, так как большинство экспериментаторов старается оценить надтепловые эффекты в их тепловых потоках прохождения. Коутц и др., например, используют фольги из дис-

прозья, кадмиевое отношение которого в решетке примерно 100 по сравнению с величинами (подчиняющимися закону  $1/v$ ) 25 или 30 в большинстве водных решеток. Коген применял метод кадмиевой разности, и имеются его измерения тонкой структуры, которые Перссон использовал в своем анализе.

8. 9. Перейдем теперь от измерений на решетке к измерениям, основанным на технике изменения реактивности, и рассмотрим вначале работы Дэвиса (Davis, 1957). Эти работы выполнены при помощи метода коэффициента опасности на хэнфордском исследовательском реакторе; полученные результаты, однако, сильно страдают из-за неопределенности в нормировке. Дэвисом (Davis, 1957а) в разное время были выбраны две различные нормировки: одна основывается на старой стандартной формуле Манхаттенского проекта для определенных размеров стержней (Shapiro, 1955), другая вытекает из приближенного определения вероятности избежать резонансного захвата, полученного на хэнфордском исследовательском реакторе. Кривая на рис. 8. 1 основана на первой нормировке; вторая нормировка меньше первой на множитель порядка 0,75. Сокращение данных Дэвиса на величину 0,8 приводит кривую Дэвиса к согласию с кривой Хеллстранда. Таким образом, между двумя методами нет различия, и действительно, сходство форм кривых показывает, что активационные измерения дают хорошие результаты.

Другое измерение, основанное на методе реактивности, проведено Эриксоном и др. (Eriksen et al., 1955) на реакторном осцилляторе. Кривая Эриксона всюду выше, чем активационные измерения, хотя изменение нормировки примерно на —15% приводит ее к очень хорошему согласию с работой Хеллстранда. Одним из источников, определяющих перенормировку работ Эриксона, является экстраполяция в ней индиевой фольги к нулевой толщине.

В работе Гринфилда, Кунтца и Джаретта (Greenfield, Koontz a. Jarrett, 1957), которая может быть согласована с теоретической кривой Уилкинса (Wilkins, 1946), отмечается, что соответствующая кривая значительно круче вблизи нулевой толщины, чем квадратичная парабола, используемая Эриксоном и др. Использование кривой Уилкинса, чтобы подогнать к ней результаты Эриксона и др. для четырех тончайших фольг, увеличивает нулевую толщину примерно на 10% и означает сокращение на 10% резонансного интеграла.

Другая возможная поправка к данным Эриксона возникает из-за влияния кадмиевой втулки, в которой помещались образцы, на резонансное поглощение в индии. Надкадмиевый резонансный интеграл индия будет несколько уменьшаться (из-за ограниченного кадмиевого пропускания выше 0,4 эв) по сравнению с величиной 3200 барн, рассчитанной Хеллстрандом. Величина этого сокращения может быть получена из работы Кунстадтера (Kunstadter, 1950). Для кадмиевых толщин между 20 и 100 мк сокращение составляет примерно 0,35% на 1 мк. Таким образом,

для 50-микронного кадмия сокращение резонансного интеграла индия достигает примерно 20%.

В статье Эриксона не указывается кадмиевая толщина, но 20-микронный кадмий будет производить 7%-ное сокращение в резонансном интеграле индия.

Последняя поправка (около 1 барн) к эксперименту Эриксона вводится для учета резонансного деления; она применяется послеотмеченного выше сокращения в нормировке. Для 30-микронного кадмия эти поправки приводят кривую Эриксона в хорошее соответствие с результатами Хеллстранда. Осталось сказать еще только, что расхождение кривой Эриксона с кривыми, полученными из активационного метода, не заключает в себе противоречий между этими экспериментами.

8. 10. Активационные измерения обычно находятся в хорошем согласии друг с другом, хотя и имеются некоторые расхождения. Рассмотрим измерения, сделанные Егиазаровым и др. (1955). Эти авторы активировали образцы в кадмиевом контейнере и нормировали результаты при помощи измерения вероятности избежать резонансного захвата используемой решетки. Они измеряли кадмиевое отношение  $U^{238}$  в блоках решетки и рассчитывали отношение производящихся быстрых нейтронов к захватам тепловых нейтронов в  $U^{238}$ , т. е.

$$1 - p = (CdR - 1)^{-1} \frac{\sigma_a^{28}}{\sigma_f \eta \epsilon}, \quad (8.4)$$

где  $\sigma_f$ ,  $\eta$  и  $\epsilon$  относятся к естественному урану, а  $\sigma_a^{28}$  — к доле  $U^{238}$ . В этом уравнении  $\eta$  должно включать эффекты резонансного деления в  $U^{235}$  и будет несколько уменьшено по сравнению с величиной  $\eta = 1,34$ , используемой Егиазаровым и др. Сокращение до 1,30 вызывает 3%-ное увеличение в результатах Егиазарова и др. и приводит их к хорошему согласию с кривой Хеллстранда.

Хорошее согласие, однако, достигается и без этой перенормировки. Наконец Егиазаров и др. сами привели значение ошибки, равной  $\pm 5\%$  при счете резонансного интеграла, хотя и не указали источника этой ошибки.

Измерения Шера (Sher, 1957) оказываются завышенными по сравнению с данными Хеллстранда, тем не менее между ними нет противоречий.

Измерения Шера проводились при помощи метода активации в двух легководных решетках, и поэтому необходимы поправки к эффекту Данкоффа. Дополнительно к систематическим ошибкам, вносимым из-за поправок на взаимную экранировку, в результаты входят, кроме того, большие статистические ошибки, вносимые расхождением данных Шера с другими активационными экспериментами.

Среди остальных экспериментов результаты Круца и др. (Creutz et al., 1955) и Риссера и др. (Risser et al., 1951) полностью



совпадают, хотя это и случайно. Оригинальный и подробный доклад Круца и др., тем не менее, не дает оснований для оценки ошибки.

Вигнер (Wigner, 1956) при анализе работы Круца и др. оценивает ее результаты, как имеющие точность в лучшем случае около 10%. При этом необходимо рассматривать согласие с работой Хеллстранда внутри пределов экспериментальной неопределенности.

Эксперимент Риссера испытывает неопределенность в нормировке из-за использования индиевых надтепловых регистраторов потока внутри кадмиевого контейнера. Риссер и др. нормировали свои данные к величине резонансного интеграла толстой экранированной урановой фольги, полученной Юзом и Гольдштейном (Hughes a. Goldstein, 1946). Из-за того, что имеется два ряда экспериментов, использующих различные толщины кадмия (ни в одной статье не определяется точно толщина кадмия) нормировка кривой 3 на рис. 8. 1 неопределенна. Даже если обе толщины одинаковы, резонансный интеграл 3200 *барн* слишком завышен; 20-микронному кадмию, например, соответствует 7%-ное сокращение.

В эксперименте Хеллстранда ни один из эффектов, отмеченных выше, не наблюдался. Например, регистраторы Хеллстранда были золотыми, а не индиевыми, и, следовательно, их активность не зависит от толщины кадмиевой втулки, окружающей образец. К тому же, так как измерения были активационного типа, то резонансные деления остаются неопределенными, и оказывается, что измерения Хеллстранда точны в пределах 2%-ной ошибки, которую он определил для своих экспериментов.

Теоретические расчеты (см. рис. 8. 1) поразительно точно совпадают с данными Хеллстранда. Однако не следует переоценивать этого хорошего согласия, так как частично оно обязано случайному сокращению ошибок из-за исследования резонансов урана в одном из двух экстремальных приближений. Тем не менее, очевидно, что для урана теория и эксперимент находятся в хорошем согласии. Особенно удовлетворительным является согласие эквивалентных гомогенных резонансных интегралов (кривая 9) с гетерогенными резонансными интегралами.

8. 11. Другим важным материалом, на котором были проведены измерения резонансного поглощения, является  $\text{Th}^{232}$ . Начнем с рассмотрения данных Дейтона и Петтуса (Dayton a. Pettus, 1958) по торию и  $\text{ThO}_2$ , полученных при помощи метода сравнения реактивности на бассейновом реакторе Пенсильванского университета. Регистратором реактивности был тонкий образец из бора. Согласно Дейтону и Петтусу,

$$I_{\text{Th}} = -0,6 + 24,1\sqrt{S/M}; 0,1 \leq S/M \leq 1,3; \quad (8. 5a)$$

$$I_{\text{ThO}_2} = -3,6 + 37,6\sqrt{S/M}; 0,2 \leq S/M \leq 1,5 \quad (8. 5b)$$

(после вычитания части поглощения, подчиняющегося закону  $1/v$ ). В табл. 8. 9 сравниваются данные с результатами, полученными

Таблица 8.9

Проверка первой теоремы эквивалентности с использованием данных Дейтона и Петтуса по торю и  $\text{ThO}_2$

$b\sigma_p$ , барн	$b_{\text{Th}}$	$(S/M)_{\text{Th}}$ , см <sup>2</sup> /г	$I_{\text{Th}}$ , барн	$b_{\text{ThO}_2}$	$(S/M)_{\text{ThO}_2}$ , см <sup>2</sup> /г	$I_{\text{ThO}_2}$ , барн
36	3	0,249	11,4	1,84	0,15	10,9
48	4	0,374	14,1	2,45	0,259	15,5
60	5	0,499	16,4	3,06	0,369	19,2
72	6	0,623	18,4	3,67	0,478	22,4
84	7	0,748	20,2	4,29	0,588	25,2
96	8	0,872	21,9	4,90	0,697	27,8
108	9	0,997	23,5	5,51	0,807	30,1
120	10	1,122	24,9	6,12	0,916	32,3

при помощи первой теоремы эквивалентности. Данные заметно отличаются. Более того, расхождение максимально для больших  $b$ , где теоретически теоремы эквивалентности должны давать лучшие результаты.

В табл. 8. 10 и 8. 11 даны анализы геометрической зависимости резонансных интегралов тория и  $\text{ThO}_2$ .

Таблица 8.10

Геометрическая зависимость резонансного интеграла тория (с использованием данных Дейтона и Петтуса)

$b$	$S/M$ , см <sup>2</sup> /г	$I_{\text{Th}}$ , барн	$I_{\text{Th}}/\sqrt{b}$ , барн	$I_{\text{Th}}/\sqrt{b-1}$ , барн
3	0,249	11,4	6,60	8,08
4	0,374	14,1	7,07	8,16
5	0,499	16,4	7,34	8,21
6	0,623	18,4	7,52	8,24
7	0,748	20,2	7,65	8,26
8	0,872	21,9	7,75	8,28
9	0,997	23,5	7,82	8,29
10	1,122	24,9	7,88	8,31

Таблица 8.11

Геометрическая зависимость резонансного интеграла  $\text{ThO}_2$  (с использованием данных Дейтона и Петтуса)

$b$	$S/M$ , см <sup>2</sup> /г	$I_{\text{ThO}_2}$ , барн	$I_{\text{ThO}_2}/\sqrt{b}$ , барн	$I_{\text{ThO}_2}/\sqrt{b-1}$ , барн
2	0,179	12,3	8,68	12,3
3	0,358	18,9	10,9	13,3
4	0,536	23,9	12,0	13,8
5	0,715	28,2	12,6	14,1
6	0,894	31,9	13,0	14,3
7	1,073	35,3	13,3	14,4

Вновь ни закон  $\sqrt{b}$ , ни  $\sqrt{b-1}$  непосредственно не применимы. Однако оба они достаточно точно описывают геометрическую зависимость при экстраполяции на коротких интервалах, причем закон  $\sqrt{b-1}$  дает несколько лучшие результаты.  $\lim_{b \rightarrow \infty} I/\sqrt{b}$  вновь можно получить из расчетов гомогенных сред тория, проведенных Дреснером точно таким же способом, который дается в табл. 8. 4 (его результаты см. в табл. 8. 12).

Таблица 8. 12

Расчеты Дреснера эффективного резонансного интеграла гомогенных сред тория, *барн*

$T, ^\circ\text{K}$	$\sigma_p$	Вклад разрешенных резонансов	Вклад неразрешенных резонансов	Общий интеграл
0	20	3,7	2,2	5,9
	200	12	6,3	18,3
	2000	33	14	47
300	20	4,0	4,0	8,0
	80	8,9	8,6	17,5
	200	15	12	27
	2000	42	20	62

Графическая экстраполяция результатов дает для правой части уравнения (8. 2) значение 6,0 и 7,7 *барн* при  $T = 300^\circ\text{K}$  и 4,7 и 5,9 *барн* при  $T = 0^\circ\text{K}$  (соответственно для тория и  $\text{ThO}_2$ ).

Для металлического тория имеется некоторое согласие с результатами табл. 8. 10, однако оно не такое хорошее, как для металлического урана; для  $\text{ThO}_2$  имеется серьезное расхождение результатов. Оказывается, что резонансный интеграл как для металлического тория, так и для  $\text{ThO}_2$  возрастает слишком быстро с уменьшением размеров блока, причем для  $\text{ThO}_2$  — особенно быстро. Это заключение подтверждается также и результатами табл. 8. 9.

В табл. 8. 13 приведен обзор расчетов, проделанных Адлером и др. (Adler et al., 1958) для металлических стержней из тория при помощи ранее описанных методов.

Таблица 8. 13

Сравнение расчетов Адлера и др. с данными Дейтона и Петтуса для тория

Радиус, см	$b$	$S/M, \text{см}^2/\text{г}$	$I_{\text{расч}}, \text{барн}$	$I_{\text{эксп}}, \text{барн}$
0,57	3,45	0,305	11,22	12,6
1,14	2,23	0,153	8,72	8,75
2,28	1,61	0,0763	7,27	6,0
4,56	1,31	0,0381	6,18	—

В табл. 8. 14 даны расчеты, проведенные Дреснером (Dresner, 1958в) для двух ториевых стержней при помощи его же метода, описанного выше.

Таблица 8. 14

Сравнение расчетов Дреснера с данными Дейтона и Петтуса для тория

Радиус, см	$b$	$S/M$ , см <sup>2</sup> /г	$I_{\text{расч}}$ , барн	$I_{\text{эксп}}$ , барн
0,465	4	0,374	11,5	14,1
0,200	8	0,872	17,2	21,9

Для стержней больших размеров, используемых в работе Адлера и др., согласие вполне удовлетворительное, хотя скорость возрастания экспериментальной величины  $I$  с уменьшением размеров стержней больше, чем соответствующая скорость для теоретического  $I$ . Для стержней меньших размеров, рассмотренных Дреснером, согласие не совсем удовлетворительное.

В табл. 8. 15 приведены суммарные сведения по всем экспериментальным значениям резонансного интеграла для тория. Эти

Таблица 8. 15

Обзор экспериментальных данных по определению эффективного резонансного интеграла тория

Резонансный интеграл, барн	Метод	Приближенный интервал экспериментов, см <sup>2</sup> /г	Источник
$-0,6+24,1 (S/M)^{1/2}$	Коэффициент опасности То же	0,1—1,3	Dayton a. Pettus (1958)
$6,11+30,6 (S/M) - 26,6 (S/M)^2$		0,1—0,3	Davis (1957)
$2,24+17,13 (S/M)^{1/2}$	Активационный Коэффициент опасности	0,4	Sher (1957)
$0,4+21,1 (S/M)^{1/2}$		0,1—0,8	Pettus (1959)

результаты графически показаны на рис. 8. 2 вместе с теоретическими точками, взятыми из табл. 8. 13 и 8. 14. На этом же рисунке нанесены также некоторые точки, измеренные для гомогенных ториевых сред (Masklin a. Romerance, 1955) и соответствующие значениям  $S/M$ , определенным из второй теоремы эквивалентности, показана и кривая. Точки, соответствующие значениям  $S/M \approx 0,3 \text{ см}^2/\text{г}$  и  $S/M \approx 1,0 \text{ см}^2/\text{г}$ , являются, вероятно, слишком завышенными. Это происходит из-за того, что в образец вводятся определенные конструкционные материалы, которые увеличивают  $\sigma_p$  на неизвестную величину (Masklin a. Romerance, 1955a). Точка

при  $S/M = 0$  была получена, однако, в различных экспериментах и не страдает от этого недостатка. Кроме того, существуют две точки, взятые при более высоком  $\sigma_p$ , для которых ожидается небольшая ошибка из-за наличия окружающей структуры. Вместе с точкой при  $S/M = 0$  эти точки дают кривую 4.

Эксперимент Шера основывался на рассмотрении единственного стержня, и зависимость  $S/M$  вводилась через зависимость  $I$  от шага решетки, даваемой значениями Данкоффа. Эта процедура довольно груба; кроме того, статистическая ошибка в работе

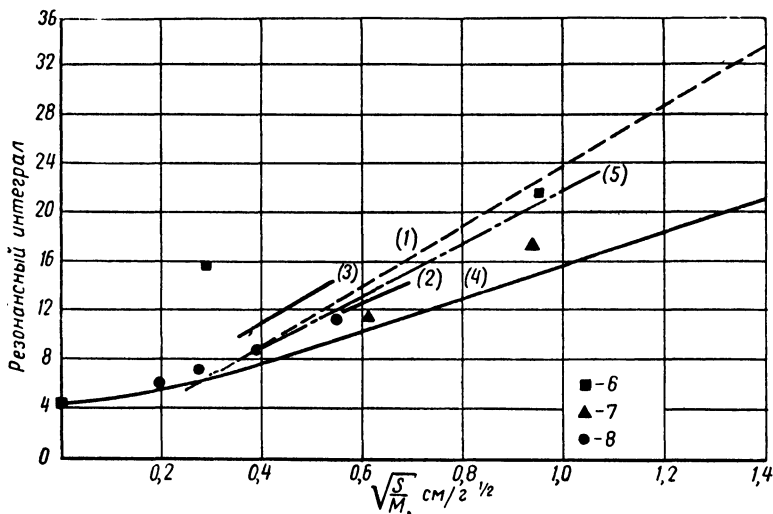


Рис. 8. 2. Эффективный резонансный интеграл блоков из  $\text{Th}^{232}$  как функция  $\sqrt{S/M}$ . Эксперимент:

1 — Дейтона и Петтуса; 2 — Шера; 3 — Дэвиса; 4 и 6 — однородные данные Маклина и Померанса; 5 — Петтуса; 7 — расчеты Дреснера; 8 — расчеты Адлера и др.

Шера порядка 10%. Результаты Дэвиса (Davis, 1957) для тория были нормированы к его результатам для урана. Сокращение на величину 0,8, требуемое для того, чтобы привести результаты Дэвиса для урана в соответствие с результатами Хеллстранда, также приводит результаты Дэвиса для тория к очень хорошему согласию с теорией. Эксперимент Петтуса на тории дает сравнительно хорошее согласие с экспериментами Дейтона и Петтуса. Петтус также измерил эффективный резонансный интеграл для  $\text{ThO}_2$ ; резонансный интеграл, который он дает для  $\text{ThO}_2$ , имеет значительно меньший наклон, чем резонансный интеграл для  $\text{ThO}_2$  Дейтона и Петтуса. Однако вновь его данные не согласуются с первой теоремой эквивалентности. Вероятно, расчетные точки на рис. 8. 2 являются наиболее достоверными оценками резонансного интеграла тория, дающими точность порядка 10%. Заслу-

живает внимания согласие их с сопоставимыми гомогенными данными (которые, однако, сами являются довольно грубыми).

8. 12. Наряду с измерениями резонансного поглощения на сплошных стержнях, пластинах и сферах, которые были рассмотрены в предыдущих частях этой главы, имеются некоторые, достаточно хорошие данные Хеллстранда (Hellstrand, 1957) по цилиндрическим кольцам, заполненным в центре замедлителем и каналам, состоящим из нескольких стержней. В табл. 8. 16 приводится сравнение теории и эксперимента для цилиндрического кольца урана. Теоретические выражения рассчитывают, используя уравнение (8. 1а), с величиной  $S$ , равной внешней поверхности вместе с частью внутренней поверхности, определенной формулой Карлвика и Першагена (7. 7). Согласие теории и эксперимента очень хорошее.

Таблица 8. 16

Сравнение теории и эксперимента для цилиндрического уранового кольца, заполненного в центре замедлителем ( $D_{\text{внеш}} = 29$  мм)

Значение $I_{\text{эфф}}$	$D_{\text{внутр}} = 21$ мм		$D_{\text{внутр}} = 15$ мм	$D_{\text{внутр}} = 9,8$ мм
	H <sub>2</sub> O	D <sub>2</sub> O	H <sub>2</sub> O	H <sub>2</sub> O
Экспериментальное, <i>барн</i>	15,38	13,48	11,74	10,44
Теоретическое (Carlvik а. Pershagen, 1958), <i>барн</i>	15,17	13,63	12,07	10,60

В табл. 8. 17 сравнивается теория и эксперимент для каналов, содержащих стержни из UO<sub>2</sub>, описанных Хеллстрандом. Приводятся два теоретических значения для каналов, заполненных

Таблица 8. 17

Сравнение теории и эксперимента для каналов, содержащих стержни из UO<sub>2</sub> (все величины — в барнах)

Замедлитель	Эксперимент или теория	7 стержней в канале	19 стержней в канале	27 стержней в канале
H <sub>2</sub> O	Эксперимент	15,6±0,5	13,8±0,3	14,9±0,3
	Теория	15,5 14,4±0,3	14,1 13,3±0,3	14,6 15,0±0,3
D <sub>2</sub> O	Эксперимент	14,5±0,3	12,8±0,3	12,5±0,3
	Теория	14,2 12,5±0,3	12,5 12,0±0,3	12,7 12,45±0,3
Воздух	Эксперимент	13,8±0,3	12,1±0,3	11,8±0,3
	Теория	13,7	11,8	12,0

замедлителем; верхнее рассчитывается при помощи метода Карлвика и Першагена (см. параграф 7. 8), а нижнее — с использованием третьей и четвертой теории эквивалентности, описанных в параграфах 7. 6 и 7. 9. Неопределенность в теоретических значениях возникает из-за неопределенности потенциального рассеяния урана, включенного в  $\sigma_m$ . Нижний предел соответствует включению его полностью, т. е. принимается  $\sigma_p = \sigma_m$ , верхний предел — его полному исключению, т. е.  $\sigma_m$  равно потенциальному рассеянию кислорода.

Для каналов, заполненных воздухом, теоретическое значение дается Карлвиком и Першагеном. Согласие их теории (верхние значения) с экспериментами на канале, заполненном замедлителем, является в какой-то мере тавтологическим, так как их метод основан на экспериментальных значениях. Для каналов, заполненных воздухом, метод Карлвика и Першагена сводится к использованию некоторой растянутой граничной поверхности, причем заранее предполагается, что такое использование справедливо. Таким образом, согласие теории и эксперимента очень важно. Для каналов, заполненных замедлителем, нижние теоретические значения, полученные при помощи введения эквивалентного сплошного стержня, хорошо согласуются с экспериментом для 27 стержней в канале. Для 19 стержней теоретические значения несколько завышены, а для семи стержней, наоборот, занижены примерно на 10—15%.

Последняя группа экспериментов, которые мы сравним с теорией, посвящена исследованию температурного коэффициента резонансных интегралов. В табл. 8. 18 приведены возможные данные для  $U^{238}$ , где необходимо внести поправку на исключение части поглощения, подчиняющегося закону  $1/v$ . Температурный коэффициент определяется как логарифмическая производная эффективного резонансного интеграла, т. е.  $\frac{1}{I} \frac{dI}{dT}$ . Измерения Бломберга и др. (Blomberg et al., 1958), проводились при помощи активационной техники Хеллстранда (Hellstrand, 1957), измерения Дэвиса (Davis, 1955) — при помощи метода коэффициента опасности, о котором говорилось выше; измерения Рудебака (Rodeback, 1956) основывались на методе активации, аналогичном эксперименту Риссера. Измерения Егиазарова и др. (1955) проводились при помощи того же активационного метода, который уже был описан выше.

В измерениях Адашевича и др. (1955) температурная зависимость была получена как из анализа экспоненциального эксперимента, так и прямым измерением в той же решетке. Некоторые детали эксперимента Адашевича известны. Измерения Смолла (Small, 1959) проводились без кадмия в реакторном осцилляторе DIMPLE, а работы Пирса (Pearce, 1959) при помощи активации под кадмием на GLEEP. Активационные измерения (первые четыре раздела в табл. 8. 18) дают несколько меньшие значения,

Экспериментальные определения среднего температурного коэффициента для резонансного поглощения в уране

$S/M$ ; $\text{см}^2/\text{г}$	Средний температурный коэффициент, $\times 10^{-4}/^\circ\text{C}$	Температурный интервал, $^\circ\text{C}$	Источник
0,0535 0,214 0,535 2,14	$1,6 \pm 0,1$ $2,1 \pm 0,15$ $2,3 \pm 0,2$ $2,5 \pm 0,2$	0—435	Егиазаров и др. (1955)
0,117	$0,9 \pm 0,2$	20—700	Rodeback (1956)
0,0755 0,172 0,266	$0,90 \pm 0,07$ $1,39 \pm 0,11$ $1,48 \pm 0,07$	20—600	Blomberg et al.* (1958)
0,0842	$1,0 \pm 0,2$	20—300	Pearce (1959)
0,0622	$1,8 \pm 0,14$	30—500	Davis (1957)
1,100 0,147 0,165 0,169 0,376 0,399	$2,24 \pm 0,14$ $2,17 \pm 0,22$ $2,41 \pm 0,26$ $2,20 \pm 0,22$ $2,93 \pm 0,58$ $3,59 \pm 0,36$	20—270	Small (1959)
0,0604	$2,3 \pm 0,5$	10—80	Адашевич и др. (1955)

\* Бломберг и др. также дают значения температурного коэффициента стержней из  $\text{UO}_2$ ; сравнение этих данных при помощи первой теоремы эквивалентности обнаруживает значительное расхождение с данными по урану. Круз и др. (Creutz et al., 1955) приводят значения температурного коэффициента для сфер из  $\text{UO}_2$ ; однако их данные очень неточны.

чем измерения методом реакторного осциллятора (следующие два раздела). Расхождения, наблюдаемые в таблице, непонятны.

Адлер и др. (Adler et al., 1958) рассчитали температурный коэффициент для четырех стержней (см. табл. 8.5) и нашли значение его (в порядке возрастания радиуса), равным соответственно 1,49; 1,23; 1,23 и 1,33 ( $\times 10^{-4}/^\circ\text{C}$ ) в интервале температур 0—300 $^\circ\text{C}$ . Кроме того, Адлер и др. обнаружили, что температурный коэффициент очень чувствителен к используемому приближению (узких или широких резонансов). Дреснер рассчитал температурный коэффициент бесконечной гомогенной массы металлического



урана в приближении узких резонансов и после введения поправки для части поглощения, подчиняющегося закону  $1/\nu$ , получил значение  $1,2 \cdot 10^{-4}/^\circ\text{C}$ . Его метод был описан в связи с табл. 8. 4, и из-за плохой обработки наиболее высоких резонансов не может рассчитывать на точность выше 20%.

Таблица 8.19

Экспериментальные данные по определению среднего температурного коэффициента резонансного поглощения в тории

$S/M, \text{ см}^2/\text{г}$	Средний температурный коэффициент, $\times 10^{-4}/^\circ\text{C}$	Температурный интервал, $^\circ\text{C}$	Источник
0,189	$2,7 \pm 0,4$	20—800	Rodeback (1956)
0,100	$3,3 \pm 0,3$	30—500	Davis (1957c)
0,148; 0,284	2,7	20—1100	Pettus (1959)
0,253	$3,9 \pm 0,3$	20—270	Small (1959)
0,276	$3,9 \pm 0,3$		
0,653	$2,6 \pm 0,5$		
0,136	$3,8 \pm 0,2$	20—300	Pearce (1959)

Наконец Бломберг и Далстрем (Blomberg a. Dahlström, 1958) рассчитали температурный коэффициент для стержней и каналов стержней из металлического урана так же, как и из окиси урана. Для стержней из металлического урана они получили результаты, которые находятся в хорошем согласии с результатами Адлера и др. (Adler et al., 1958). Все эти расчеты грубо совпадают с измерениями.

Дэвис, Родебак, Пирс и Смолл исследовали также и торий; их результаты приведены в табл. 8. 19. Кроме того, некоторые довольно грубые измерения были представлены Петтусом (Pettus, 1959).

Известен единственный расчет Дреснера, проведенный им таким же способом, что и расчет для урана. С учетом поправки на часть поглощения, подчиняющегося закону  $1/\nu$ , его рассчитанный температурный коэффициент для тория равен  $2,5 \cdot 10^{-4}/^\circ\text{C}$ ; таким образом, теория и эксперимент согласуются.

В письме от 17 июня 1960 г. Е. Хеллстранд указал автору, что значения температурного коэффициента, первоначально представленные Бломбергом, Хеллстрандом и Хернером (Blomberg et al., 1958) были ошибочны (см. табл. 8. 18). В своем письме Хеллстранд приводит также новые значения, недавно полученные теми же тремя авторами. Эти значения могут быть очень точно описаны выражением

$$I = I_0 [1 + \alpha (\sqrt{T} - \sqrt{T_0})],$$

где  $T_0 = 293^\circ \text{K}$ ,  $I_0$  — соответствующий резонансный интеграл (исключая часть  $1/\nu$ ) и  $T$  — действительная температура,  $^\circ\text{K}$ . Два значения  $\alpha$  были приведены для стержней из металлического урана: для стержней диаметром 28 мм  $\alpha = (0,55 \pm 0,04) \cdot 10^{-2}$ , а для стержней диаметром 8 мм  $\alpha = (0,64 \pm 0,04) \cdot 10^{-2}$ . Согласно этим трем авторам, первое значение  $\alpha$  соответствует температурному коэффициенту на линейном интервале температур порядка  $1,35 \cdot 10^{-4}/^\circ \text{C}$ . Кроме того, были приведены три значения  $\alpha$  для стержней из окиси урана диаметром 28,17 и 8 мм. Эти значения имеют вид соответственно  $(0,65 \pm 0,04) \cdot 10^{-2}$ ,  $(0,69 \pm 0,04) \cdot 10^{-2}$  и  $(0,82 \pm 0,05) \cdot 10^{-2}$ . Очень интересно, что эти значения точно удовлетворяют первой теореме эквивалентности.

---

## ЛИТЕРАТУРА

- Adler F. T. and Nordheim L. W. GA-377 (June 2, 1958).
- Adler F. T., Hinman G. W. and Nordheim L. W. Proc. 2nd Geneva Conf. 16, 142 (1958) (см. на русском языке: Адлер Ф. и др. В кн.: «Труды Второй международной конференции по мирному использованию атомной энергии. Женева, 1958. Избранные доклады иностранных ученых, т. 2. Нейтронная физика», доклад № 1988. М., Атомиздат, 1959).
- Aduyasevich V. P., Frank I. M., Kozinets O. I., Shapiro F. L., Shtranikh I. V. and Tolstov K. D. Acad. Sci. Conf. (1955) [см. на русском языке: Адашевич В. П. и др. В сб.: «Сессия АН СССР по мирному использованию атомной энергии, 1—5 июля 1955 г. (заседание отд. физ.-мат. наук)». М., Изд-во АН СССР, 1955].
- Anderson H. L., Fermi E. and Szilard L. Phys. Rev., 56, 284 (1939).
- Anthony J. P., Bacher P., Lheureux L., Moreau J. and Schmitt A. P. CEA-670, Saclay (in French) (1957).
- Bailly Du Bois B., Raievski V., Tretiakoff O., Breton D. and Lheureux L. CEA-187, Saclay (in French) (1956).
- Bakshi P. M. BNL-4381 (Sept. 1959).
- Bell G. I. Nucl. Sci. Engng, 5, 138 (1959).
- Bethe H. A. Rev. Mod. Phys., 9, 69 (1937).
- Bethe H. A. and Placzek G. Phys. Rev., 51, 450 (1937).
- Blomberg P., Hellstrand E. and Horner S. Proc. 2nd Geneva Conf., A/Conf/P/150. (Preliminary version) (1958).
- Blässer G. Thesis, Heidelberg University, 1958. See also Nukleonik, 1, 6 (1959).
- Born M. Optik, Springer, Berlin, 1933. (см. на русском языке: Борн М. Оптика. М., Гостехиздат, 1937).
- Burgov N. A. Acad. Sci. Conf. (1955). [см. на русском языке: Бургов Н. А. В сб.: «Сессия АН СССР по мирному использованию атомной энергии, 1—5 июля 1955 г. (заседание отд. физ.-мат. наук)». М., Изд-во АН СССР, 1955].
- Carlvik I. and Pershagen B. AB Atomenergi, Sweden, Report AEFI-49 (in Swedish) (1955) See also Hellstrand (1957).
- Carlvik I. and Pershagen B. (1958) AEFI-58 (in Swedish). See also Hellstrand (1957).
- Case K. M., Placzek G. and De Hoffmann F. Introduction to the Theory of Neutron Diffusion, U. S. Government Printing Office, Wash., D. C. (June 1953).
- Chernick J. Proc. Ist Geneva Conf., 5, 215 (1955).
- Chernick J. Addison—Wesley Handbook of Nucl. Engng, Chap. 4 (1957).
- Chernick J. Brookhaven Conf. (1956).
- Chernick J. and Vernon R. Nucl. Sci. Engng, 4, 649 (1958).
- Christy R. F., Weinberg A. M. and Wigner E. P. CP-2062 (1944).
- Clendenin W. W. Nucl. Sci. Engng, 5, 1 (1959).
- Cohen E. R. (1956) quoted in NAA-SR-1535 (1956).
- Corngold N. Proc. Phys. Soc., A70, 793 (1957a).
- Corngold N. Nucl. Energy, 4, 293 (1957b).

- Corngold N. and Schermer R. Trans. Amer. Nucl. Soc. 2, No. 1, Abstract 11—4, June 15 (1959).
- Cramer H. Mathematical Methods of Statistics, Princeton Univ. Press, Princeton, 1956.
- Creutz E., Jupnik H., Snyder T. and Wigner E. P. (1955a). J. Appl. Phys., **26**, 257 (1955a).
- Creutz E., Jupnik H., Snyder T. and Wigner E. P. J. Appl. Phys., **26**, 271 (1955b).
- Creutz E., Jupnik H. and Wigner E. P. J. Appl. Phys., **26**, 276 (1955c).
- Crocker V. S. Proc. 1st Geneva Conf. **5**, 102 (1955) (см. на русском языке: Кроккер. В кн.: «Материалы Международной конференции по мирному использованию атомной энергии», т. 5, доклад P/472 М., Госэнергоиздат, 1958).
- Dancoff S. M. and Ginsburg M. CP-1589 (April 1, 1944).
- Dancoff S. M. and Ginsburg M. (1944a) CP-2157 (Oct. 21, 1944).
- Davey W. G. AERE-RP/R-1842 (1955).
- Davis M. V. J. Appl. Phys., **28**, 250 (1957a).
- Davis M. V. (1957b) Paper 1—7 at Second Winter Meeting of Am. Nucl. Soc. (1957b).
- Davis M. V. J. Appl. Phys., **28**, 714 (1957c).
- Davis M. V. HW-44281 (July 12, 1956).
- Davis M. V. HW-37766 (August 18, 1955).
- Davison B. Neutron Transport Theory, Oxford University Press, London, 1957 (см. на русском языке: Дэвисон. Теория переноса нейтронов. М., Атомиздат, 1960).
- Dayton I. E. and Pettus W. G. Nucl. Sci. Engng, **3**, 286 (1958).
- Dresner L. J. Nucl. Energy, **2**, 118 (1955).
- Dresner L. Nucl. Sci. Engng, **1**, 68 (1956a).
- Dresner L. Nucl. Sci. Engng, **1**, 501 (1956b).
- Dresner L. ORNL-2594 (Oct. 6, 1958).
- Dresner L. Thesis, Princeton University, 1958b. See also ORNL-2659 (Feb. 19, 1959).
- Dresner L. Thorium—U<sup>233</sup> Symposium, BNL-483 (C26) (Jan. 9, 1958c).
- Egiazarov V. B., Dikarev V. S. and Madeev V. G. Acad. Sci. Conf. (1955) [см. на русском языке: Егиазаров В. Б. и др. В сб.: «Сессия АН СССР по мирному использованию атомной энергии, 1—5 июля 1955 г. (заседание отд. физ.-мат. наук)». М., Изд-во АН СССР, 1955].
- Erginsou C. J. Nucl. Energy, **8**, 21 (1959a).
- Erginsou C. J. Nucl. Energy, **10**, 1 (1959b).
- Eriksen V. O., Meier R. W. and Schmidt P. Proc. 1st Geneva Conf. **5** 105 (1955) (см. на русском языке: Эриксен и др. В кн.: «Материалы, Международной конференции по мирному использованию атомной энергии», т. 5, доклад P/883. М., Госэнергоиздат, 1958).
- Fillmore F. L. Nucl. Sci. Engng, **1**, 355 (1956).
- Fursov V. S. Acad. Sci. Conf. (1955). [см. на русском языке: Фурсов В. С. В сб.: «Сессия АН СССР по мирному использованию атомной энергии, 1—5 июля 1955 г. (заседание отд. физ.-мат. наук)». М., Изд-во АН СССР, 1955].
- Gordeev I. V., Orlov V. V. and Sedelnikov T. Kh. J. Nucl. Energy, **8**, 162 (1958) [см. на русском языке: Гордеев И. В. и др. «Атомная энергия», **8**, 162 (1958)].
- Greenfield M. A., Koontz R. L. and Jarrett A. A. Nucl. Sci. Engng, **2**, 246 (1957).
- Groshev L. V., Kozinets O. I., Lazareva L. E., Tolstov K. D., Feinberg E. L., Frank I. H., Shapiro F. L. and Stranikh I. V. Acad. Sci. Conf. (1955) [см. на русском языке: Грошев Л. В. и др. В сб.: «Сессия АН СССР по мирному использованию атомной энергии, 1—5 июля 1955 г. (заседание отд. физ.-мат. наук)». М., Изд-во АН СССР, 1955].
- Gurevich I. I. and Potemanchouk I. Y. Proc. 1st Geneva Conf., **5**, 466 (1955) (см. на русском языке: Гуревич И. И. и Померанчук И. Я. В кн.: «Материалы Международной конференции по мирному

- использованию атомной энергии», т. 5, доклад P/649. М., Госэнергоиздат, 1958).
- Hasegawa K. ORNL-2705 (June 18, 1959). See also Trans. Amer. Nucl. Soc. 2, No. 1, Abstract 11-1 (June 15, 1959).
- Hellstrand E. J. Appl. Phys., 28, 1493 (1957).
- Hughes D. J. and Egglar E. CP-3093 (July 13, 1945).
- Hughes D. J. and Goldstein N. CP-3580 (Aug. 10, 1946).
- Hughes D. J. and Schwartz R. R. Neutron Cross Sections, BNL-325, 2nd Ed. (July 1, 1958).
- Hurwitz H., Jr. KAPL-706 (Nov. 1951). See also AECD-3645, Vol. 1, Mar. 1955, p. 371.
- Klein D., Smith G. G., Baer W., Kranz A. Z. and De Juren J. Brookhaven Conf. (1956).
- Klimentov V. B. and Griazev V. M. J. Nucl. Energy, 9, 20 (1959) [см. на русском языке: Климентов В. Б. и Грязев В. М. «Атомная энергия», 7, 519 (1959)].
- Kouts H. and Sher R. Brookhaven Conf. (1956).
- Kuhn E. and Dresner L. J. Nucl. Energy, 7, 69 (1958).
- Kunstadter J. W. Phys. Rev., 78, 484 (1950).
- Lamb N. Phys. Rev., 55, 190 (1939).
- Macklin R. and Pomerance H. Proc. Ist Geneva Conf. 5, 96 (1955a) (см. на русском языке: Мэкклини и Померанс. В кн.: «Материалы Международной конференции по мирному использованию атомной энергии», т. 5, доклад P/833. М., Госэнергоиздат, 1958).
- Macklin R. and Pomerance H. J. Nucl. Energy, 2, 243 (1955b).
- Marchuk G. I. and Mikhailus F. F. J. Nucl. Energy, 9, 267 (1959) [см. на русском языке: Марчук Г. И. и Михайлус Ф. Ф. «Атомная энергия», 4, 520 (1958)].
- Melkonian E., Havens W. W., Jr., and Rainwater J. Phys. Rev., 92, 702 (1953).
- Memmert G. Nukleonik, 1, 2 (1958).
- Mitchell A. C. G., Brown L. J., Pruett J. R. and Nering E. D. CP-1676 (1944).
- Monk A. T., Wheeler J. A., Keuffel J. W., Snyder T. M. and Way K. AEC-C66, decl. 1954.
- Morton K. W. Proc. 2nd Geneva Conf., 16, 187 (1958) (см. на русском языке: Мортон К. В кн.: «Труды Второй международной конференции по мирному использованию атомной энергии. Женева, 1958. Избранные доклады иностранных ученых, т. 2. Нейтронная физика», доклад № 19. М., Атомиздат, 1959).
- Muehlhaue C. O., Radkowsky A. and Untermyer S. ANL-4323 (July 5, 1949).
- Mutmer P. W. Proc. Ist Geneva Conf. 5, 282 (1956) (см. на русском языке: Моммери. В кн.: «Материалы Международной конференции по мирному использованию атомной энергии», т. 5, доклад P/429. М., Госэнергоиздат, 1958).
- Mutmer P. W. Brookhaven Conf. (1956).
- Neumann H. Brookhaven Conf. (1956).
- Niemuth W. E. Brookhaven Conf. (1956).
- Nordheim L. W. GAMD-638 (Jan. 6, 1959).
- Nordheim L. W. and Sampson J. B. Trans. Amer. Nucl. Soc. 2, No. 1, Abstract 11-5 (June 15, 1959).
- Oldekor W. Nukleonik, Band 1, Heft 1. (1958).
- Orlov V. V. J. Nucl. Energy, 9, 281 (1959) [см. на русском языке: Орлов В. В. «Атомная энергия», 4, 531 (1958)].
- Pearce R. M. AERE-R/R-2806 (1959).
- Persson R., Blomsjo E., Bustraan M. and Meier R. J. Nucl. Energy, 3, 188 (1956).
- Petrov G. V. J. Nucl. Energy, 6, 251 (1958) [см. на русском языке: Петров Ю. В. «Атомная энергия», 4 (1957)].
- Pettus W. G. BAW-TM-203 (April 27, 1959).

- Pettus W. G. and Dayton I. E. Nucl. Sci. Engng, 4, 522 (1958).  
 Placzek G. Phys. Rev., 69, 423 (1946).  
 Porter C. E. and Thomas R. G. Phys. Rev., 104, 483 (1956).  
 Posener D. W. Aust. J. Phys., 12, 184 (1959).  
 Richtmyer R. D. Brookhaven Conf. (1956).  
 Risser J. R., Arfken G. B., Jr., Cuykendall T. R., Stephenson R. J. and Caldwell D. P. ORNL-958 (Mar. 20, 1951).  
 Rodeback G. W. NAA-SR-1641 (Sept. 1, 1956).  
 Roe G. M. KAPL-1241 (Oct. 15, 1954).  
 Rose M. E., Miranker W., Leak P., Rosenthal L. and Hendrikson J. K. WAPD-SR-506 (1954).  
 Rosen J. L. Thesis, Columbia University. See also CU-185 (May 6, 1959).  
 Rothenstein W. Trans. Amer. Nucl. Soc. 2, No. 1, Abstract 11—2 (June 15, 1959).  
 Rothenstein W. BNL-563 (T-151) (June, 1959a).  
 St. John D. S. Brookhaven Conf. (1956).  
 Sampson J. B. Brookhaven Conf. (1956).  
 Sampson J. B. and Chernick J. Progress in Nuclear Energy Series I — Physics and Mathematics, Vol. 2, Ch. 6, Pergamon Press, London — New York, 1957.  
 Seth K. K. ORNL-2309 (Nov. 1, 1956).  
 Shapiro M. M. AECD-3645, Ch. 1—5 (March 1955).  
 Sher R. and Kouts H. Brookhaven Conf. (1956).  
 Sher R. BNL-455, April 1, 1957. See also 3rd Annual Meeting of the Am. Nucl. Soc. (June 10, 1957). Abstract 22—2, and Phelps J. P. and Sher R. Nucl. Sci. Engng, 2, 676 (1957). The values of the resonance integrals of uranium and thorium used in this book were obtained from Dr. Sher after reanalysis of his experiments in a letter to the author dated March 7, 1958.  
 Small V. G. AERE-R/R-2774 (April, 1959).  
 Soodak H., Adler F. and Greuling E. AECD-3645 Ch. 1—3 (March 1955).  
 Spinney K. T. Brookhaven Conf. (1956). See also J. Nucl. Energy, 6, 53 (1957).  
 Spinrad B. (1956). Brookhaven Conf. (1956).  
 Spinrad B., Chernick J. and Corngold N. Proc. 2nd Geneva Conf., 16, 191 (1958) (см. на русском языке: Спиррад Б. и др. В кн.: «Труды Второй международной конференции по мирному использованию атомной энергии. Женева, 1958. Избранные доклады иностранных ученых, т. 2. Нейтронная физика», доклад № 1847. М., Атомиздат, 1959).  
 Sprivak P. E., Erozoilimsky B. G., Lavrenchik V. I. and Dogofeyev G. E. Proc. Ist Geneva Conf. 5, 91 (1955) (см. на русском языке: Спирвак П. Е. и др. В кн.: «Материалы Международной конференции по мирному использованию атомной энергии», т. 5, доклад P/659. М., Госэнергоиздат, 1958).  
 Stein S. Brookhaven Conf. (1956).  
 Stuart G. W. Nucl. Sci. Engng, 2, 617 (1957).  
 Takahashi H. Nucl. Sci. Engng, 5, 237 (1959).  
 Thie J. A. Nucl. Sci. Engng, 5, 75 (1959).  
 Turner L. A. Rev. Mod. Phys., 12, 1 (1940).  
 Untermeyer S. ANL-4350 (Oct. 10, 1949).  
 Untermeyer S. and Egglar E. ANL-4596 (March 14, 1951).  
 Van Der Held E. F. M. Proc. Ist Geneva Conf., 5, 107 (1955) (см. на русском языке: Ван дер Хельд. В кн.: «Материалы Международной конференции по мирному использованию атомной энергии», т. 5, доклад P/948. М., Госэнергоиздат, 1958).  
 Voigt W. S. B. Bayer Akad. Wiss., p. 603 (1912).  
 Weinberg A. M. and Wigner E. P. Brookhaven Conf. (1956).  
 Weinberg A. M. and Wigner E. P. The Physical Theory of Neutron Chain Reactors, University of Chicago Press, Chicago, 1958.  
 Wigner E. P., Creutz E., Jupnik H. and Snyder T. J. Appl. Phys., 26, 260 (1955).  
 Wigner E. P. Brookhaven Conf. (1956)  
 Wilkins J. E., Jr. CP-3581 (1946).

## ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

- Альbedo *см. также* Вероятность избежать столкновений 64—66, 82—92  
 $\alpha$ -определение 13  
 Бесконечно разбавленный резонансный интеграл *см.* Эффективный резонансный интеграл, случай бесконечно разбавленной среды  
 Вероятность избежать столкновений 65—67 *см. также* Альbedo кривые 77  
     для взаимодействующих блоков 96, 97  
     в приближении плоского потока 81  
     рациональное приближение Вигнера 67  
 Взаимности теорема 65  
 Вейнберг  
     приближение Вейнберга—Вигнера *см.* Вероятность избежать резонансного захвата  
 Вейнберга—Вигнера—Корнгольда уравнение 27  
 Вигнер  
     приближение *см.* Вероятность избежать резонансного захвата  
     рациональное приближение *см.* Вероятность избежать столкновений  
     Вейнберга—Вигнера приближение *см.* Вероятность избежать резонансного захвата  
     Вейнберга—Вигнера—Корнгольда уравнение *см.* Вейнберг  
 Вероятность избежать резонансного захвата *см. также* Эффективный резонансный интеграл; Резонансное поглощение  
     определение 18, 21  
     точное решение 22, 23  
     для узких резонансов 25—27  
     для медленно меняющихся поперечных сечений 19, 21—23  
     в приближении Гертцеля—Грейлинга 21—23, 29—31  
     в приближении Гурвитца 21—25  
         в водороде 17  
         в смесях 23—26  
         в приближении Вейнберга—Вигнера 30, 31  
         в приближении Вигнера 21, 25, 26, 28, 31  
         вариационные принципы *см.* Корнгольд  
 Геометрическая зависимость резонансного поглощения *см.* Эффективный резонансный интеграл, геометрическая зависимость  
 Гертцеля—Грейлинга приближение *см.* Вероятность избежать резонансного захвата,  
 определение 13  
 Гурвитц  
     приближение *см.* Вероятность избежать резонансного захвата  
 ВКБ-метод 19—21  
 Данкоффа эффект *см. также* Эффект взаимодействия блоков  
 Дебая твердое тело 39  
 Допплера  
     уширение формы линии 32, 43  
     функция уширения  $f(\theta, \beta)$  54  
          $J(\theta, \beta)$  44—47  
          $J(\theta, \beta, i)$  52—54  
          $L(N\bar{I}\sigma_p, \theta, \beta)$  73  
          $L'(\theta, N\sigma_0\bar{I})$  112  
     эффект Д. в гетерогенной среде 73, 80, 112—114  
     эффект Д. в гомогенной среде 38—52  
     ширина 41  
 Замедления плотность  
     определение 16  
     для постоянных поперечных сечений 18  
     для медленно меняющихся поперечных сечений 19  
     в водороде 17, 18  
 Замедление нейтронов, гл. II  
     потеря энергии 13  
     в отсутствие поглощения 14—17

- Интерференционное рассеяние *см.*  
 Поперечное сечение  $J(\theta, \beta)$  *см.*  
 Допплера функция уширения  
 $J(\theta, \beta)$
- Корнгольд, вариационный принцип 31  
 Вейнберга—Вигнера—Корнгольда  
 уравнение *см.* Вейнберг
- Летаргия, определение 13  
 Максвелла распределение 39—41  
 Поперечное сечение  
 интерференционного рассеяния 43  
 макроскопическое определение 14  
 потенциального рассеяния 32, 34  
 резонанс 33—35
- Потока ослабление *см.* Резонансного  
 потока ослабление
- Плачка функция  
 и Вейнберга—Вигнера—Корн-  
 голда уравнение 27  
 кривые П. 16  
 определение 16, 27
- Потенциальное рассеяние *см.* Попе-  
 речное сечение
- $p$ -волновые нейтроны 104, 105
- Приближение поглотителя бесконе-  
 чной массы *см.* Эффективный резонанс-  
 ный интеграл для поглотителя  
 бесконечной массы
- Рациональное приближение *см.* Веро-  
 ятность избежать столкновений
- Резонанс  
 поперечное сечение *см.* Попереч-  
 ное сечение  
 ослабление потока 107  
 параметры
- Резонансы  
 эффект взаимодействия между Р.  
 105, 106  
 неразрешенные *см.* Эффективный резонанс-  
 ный интеграл, оценка вкла-  
 да неразрешенных резонансов
- Резонансное поглощение *см. также*  
 Эффективный резонансный  
 интеграл; Вероятность избе-  
 жать резонансного захвата  
 исторический обзор, гл. I  
 в каналах 100—102, 124, 125  
 в полых стержнях 100, 124, 125  
 в гомогенной среде, гл. II, III  
 в изолированных блоках, гл. V, VI  
 температурный коэффициент  
 125—127
- Резонансный интеграл *см.* Эффектив-  
 ный резонансный интеграл
- $s$ -волновые нейтроны  
 взаимодействие 12  
 нейтронные ширины 34
- Ток 64, 85, 86
- Температурный коэффициент *см.* Ре-  
 зонансное поглощение, темпера-  
 турный коэффициент
- Узкие резонансы *см.* Эффективный резонанс-  
 ный интеграл для узких резонансов;  
 Вероятность избежать резонансного захвата для узких резонансов
- Широкие резонансы *см.* Эффективный резонанс-  
 ный интеграл для широких резонансов
- Хорды длина, средняя 67
- Центра масс координатная система 12  
 13, 41
- Четвертая теорема эквивалентности  
 Петрова поправка 97—99
- Эффективный резонансный интеграл  
*см. также* Резонансное поглоще-  
 ние; Вероятность избежать резонанс-  
 ного захвата  
 определение 32, 33, 69, 70, 79  
 влияние приближения плоского  
 потока и рационального прибли-  
 жения на значения Э. р. и. для  
 поглотителя бесконечной массы  
 81—92  
 влияние рационального прибли-  
 жения на Э. р. и. для узких резонансов  
 72—78  
 оценка вклада неразрешенных резонансов  
 102—105  
 геометрическая зависимость 71,  
 72, 81, 109, 120  
 значение бесконечно разбавлен-  
 ного Э. р. и. 38, 103, 104  
 гомогенной среды, гл. III  
 в гомогенных смесях тория 121, 122  
 урана 111, 115  
 для поглотителя бесконечной  
 массы 56, гл. VI  
 для узких резонансов 32—53, гл. V  
 для широких резонансов *см.* Эф-  
 фективный резонансный интеграл  
 в случае поглотителя беско-  
 нечной массы ториевых блоков  
 блоков из окиси тория 120—122  
 урановых блоков 109, 113  
 блоков из окиси урана 109
- Эйнштейна твердое тело 39
- $\epsilon$ , определение 13
- Эквивалентности теорема  
 первая 70, 71  
 вторая 71, 115, 122  
 третья 100, 125  
 четвертая 102, 125
- Эффект взаимодействия блоков, гл. VII  
 и третья теорема эквивалентности  
*см.* Третья теорема эквивалентности,  
 поправка Данкоффа—Гинз-  
 бурга 93 в каналах *см.* Резонансное  
 поглощение в каналах



*Л. Дреснер*

**Резонансное поглощение в ядерных  
реакторах**

Редактор *А. Ф. Алябьев*

Переплет художника *Н. Т. Дворникова*

Техн. редактор *Е. И. Мазель*

Корректор *Т. А. Галахова*

---

Сдано в набор 23/XI 1961 г. Подписано

в печ. 24/II 1962 г. Бумага 60×92/16.

Физич. печ. л. 8,5. Уч.-изд. л. 8,65

Заказ изд. 771. Тираж 3500 экз.

Цена 71 коп. Заказ тип. 798

Госатомиздат. Москва, В-180,  
Старомонетный пер., 26.

---

Тип. № 6 УПП Ленсовнархоза,  
Ленинград, ул. Моисеенко, 10