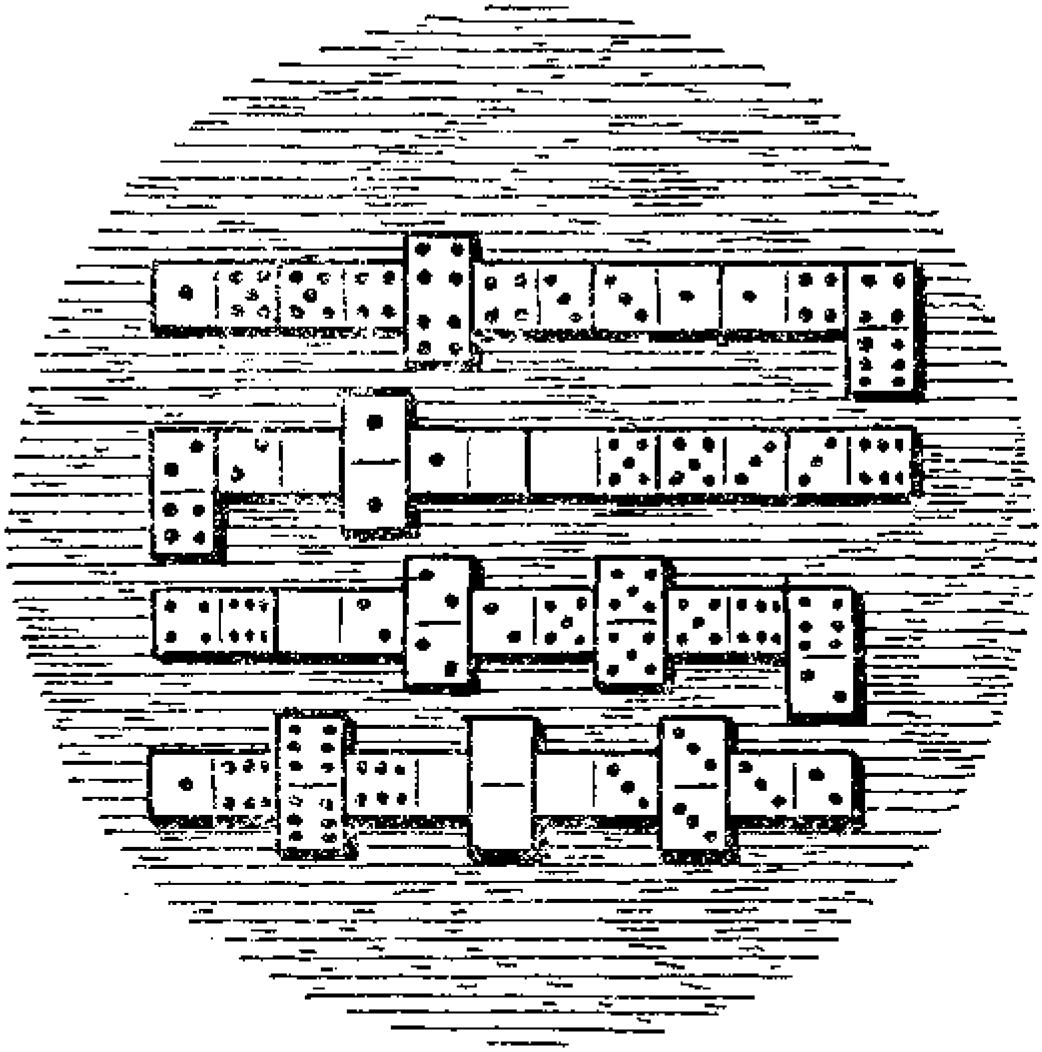
# Оглавление



536 PUZZLES AND
CURIOUS PROBLEMS

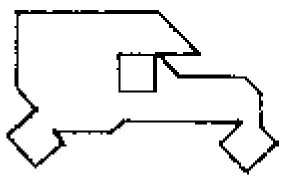
*HENRY E. DUDENEY*

Edited by Martin Gardner

CHARLES SCRIBNER'S SONS
NEW YORK 1967

Генри Э. Дьюдени

# ПЯТЬСОТ ДВАДЦАТЬ ГОЛОВОЛОМОК



Составитель и редактор американского издания М. Гарднер

Перевод с английского Ю. Н. Сударева

ИЗДАТЕЛЬСТВО «МИР»

МОСКВА

1975

51

Д92

**Дьюдени Г. Э.**

520 головоломок. Сост. и ред. амер. изд. М. Гарднер. Пер. с англ. Ю. Н. Сударева. М., «Мир», 1975.

342 с. с илл.

Генри Э. Дьюдени по праву считается классиком занимательной математики. Многие его задачи, породив обширную литературу и вызвав многочисленные подражания, вошли в ее золотой фонд.

В предлагаемой книге собрано 520 задач и головоломок Дьюдени по арифметике, алгебре, геометрии, разрезанию и составлению фигур. Читателя ждет встреча с постоянно действующими героями Дьюдени - семейством Крэкхэмов, профессором Рэкбрейном и др.

Книга доставит удовольствие всем любителям занимательной математики.

Д $\frac{20202-200}{041(01)-75}$ 200—75

51

*Редакция научно-популярной и научно-фантастической литературы*



# ПРЕДИСЛОВИЕ

По словам известного математика Андре Вейля, «в математике, так же как в музыке, литературе и большинстве других областей человеческой деятельности, термин «классический» может пониматься в чисто хронологическом смысле. Тогда он обозначает нечто, предшествующее всему, что принято называть «современным», и... может быть использован для описания и глубокой древности, и достижений прошлого года. Иногда же к этому термину прибегают для того, чтобы похвалить ту или иную работу, которая, по мнению говорящего, может иметь непреходящее значение».

К задачам Генри Эрнеста Дьюдени, вошедшим в предлагаемый вниманию читателя сборник, в равной мере применимы оба толкования Вейля. Эти задачи, или, как их предпочитал называть сам Дьюдени, головоломки, безусловно принадлежат к числу классических, если подходить к их оценке с хронологическими масштабами: более полувека отделяет нас от того времени, когда была создана самая «юная» из них. Столь же бесспорно заслуживают они и эпитета «классические», понимаемого во втором смысле. И это не просто похвала: головоломки Дьюдени прочно вошли в золотой фонд занимательной математики. Они пользуются столь широкой известностью, что подчас их создатель... остается незаслуженно забытым! Тщетно стали бы мы искать статьи о Дьюдени в биографических словарях и справочниках и лишь в «Биографическом словаре Вебстера» встретили бы упоминание о Генри Э. Дьюдени, но — увы! — не о *мистере*, а о *миссис* Дьюдени — жене прославленного мастера головоломок, некогда известной писательнице, авторе более тридцати романов. Между тем яркая и своеобразная личность Генри Э. Дьюдени не может не заинтересовать почитателей его таланта.

Генри Эрнест Дьюдени родился 10 апреля 1857 г. на юге Англии, в графстве Суссекс. Его дед был простым пастухом и большим любителем математики, которую он изучал самостоятельно, а впоследствии даже преподавал, став школьным учителем в небольшом городке Льюис, неподалеку от Лондона. Учителем был и отец Генри. Самому Дьюдени также не довелось изучать математику в колледже. Как и его дед, он был талантливым самоучкой.

Свои первые небольшие задачи Г. Дьюдени начал публиковать в различных журналах, сначала под псевдонимом «Сфинкс», а затем под собственной фамилией. На протяжении двадцати лет Г. Дьюдени вел раздел математических развлечений в популярном ежемесячнике *Strand Magazine*.

В 1907 г. вышла в свет первая, впоследствии неоднократно переиздававшаяся книга Г. Дьюдени «Кентерберийские головоломки». За ней последовали «Математические развлечения» (1917), «Лучшие головоломки со всего света» (1925) и «Современные головоломки» (1926). Посмертно (Г. Дьюдени скончался 24 апреля 1930 г.) вышли еще два сборника головоломок: «Занимательные задачи и головоломки» (1931) и «Копи головоломок» (1935).

Важную роль в жизни Г. Дьюдени сыграло дружеское соперничество с другим известным мастером головоломок — американцем Сэмом Лойдом. Дьюдени и его заокеанский коллега вели оживленную переписку и даже, по признанию самого Дьюдени, заключили неофициальное соглашение об обмене идеями. В образовавшемся «трансатлантическом тандеме» Г. Дьюдени часто исполнял роль генератора идей, тогда как Сэм Лойд был особенно силен в «беллетризации» задач и придумывании броских названий. К сожалению, Лойд никогда не ссылался на источники, в отличие от Дьюдени, неизменно называвшего тех, кто сообщил ему хотя бы идею задачи. Превосходство Дьюдени-математика признавал и сам Лойд (в архиве Дьюдени сохранились письма, в которых Лойд просит помочь ему в решении некоторых сложных головоломок).

Особого искусства Г. Дьюдени достиг в решении геометрических задач на разрезание. В частности, ему удалось разрезать квадрат на четыре части, из которых можно составить равносторонний треугольник. С докладом об этой задаче Г. Дьюдени выступал перед членами Королевского математического общества.

Дьюдени по праву пользовался репутацией блестящего знатока магических квадратов и других комбинаторных задач. Ему принадлежит статья о магических квадратах, опубликования в четырнадцатом издании «Британской энциклопедии».

Один из наиболее плодовитых авторов в своей области, создатель сотен первоклассных головоломок, Генри Дьюдени выступал и как теоретик занимательной математики, Его перу, в частности, принадлежит статья «Психологическая сторона увлечения головоломками», опубликованная в декабрьском номере журнала *Nineteenth Century Magazine* за 1926 г.

Интересы Г. Дьюдени отнюдь не исчерпывались математикой. Он хорошо играл в шахматы и еще лучше решал шахматные задачи, увлекался бильярдом и мог часами играть в крикет. Правда, его манера игры была несколько экстравагантной: используя свои познания в математике и доскональное знакомство с рельефом лужайки, на которой разыгрывались крикетные баталии, Дьюдени любил поражать воображение своих партнеров нелепыми (разумеется, лишь на первый взгляд) ударами. Впрочем, вскоре выяснилось, что шары, посланные, казалось бы, в неверном направлении, как ни странно, попадают в нужные воротца.

Жена Дьюдени, Элис, отзывалась о своем муже как о блестящем пианисте и органисте. Он глубоко изучал старинное хоровое пение и даже руководил церковным хором. Горячий поклонник Вагнера, Дьюдени самостоятельно переложил все его произведения для фортепиано.

Составление и решение головоломок было для Дьюдени не просто профессией, но и призванием, делом жизни. Если интересная идея приходила ему в голову за обедом, он мог в задумчивости рисовать геометрические фигуры прямо на скатерти. Как-то раз, просматривая газеты, Дьюдени наткнулся на шифрованное послание, в котором некий человек уговаривал юную девушку встретиться с ним тайком от родителей. Раскрыв шифр, Дьюдени поместил в той же газете на том же месте шифрованное предостережение девушке: «Не доверяйте ему. Он замышляет недоброе. Доброжелатель». Вскоре появился ответ: девушка благодарила за своевременно поданный совет.

Юмор и быстрота реакции не изменяли Дьюдени даже в затруднительных ситуациях. Так, споткнувшись во время прогулки о поводок своей собаки, которая носила странную, явно с математическим «привкусом» кличку Случай, и сломав себе руку, Дьюдени заметил: «Случай приводит к последствиям, которые нам не дано предвидеть заранее».

В предлагаемый вниманию читателя сборник включены задачи из двух книг Г. Дьюдени: «Современные головоломки» и «Занимательные задачи и головоломки». Мартин Гарднер, составитель и редактор американского издания сборника, хорошо известен нашему читателю. Он проверил и отредактировал все задачи и прокомментировал некоторые из них. (В наш сборник не вошли лишь несколько задач, главным образом лингвистического характера.) Диапазон трудности задач весьма широк: от простейших, почти наивных, до сложных. Быть может, именно в сравнении с задачами М. Гарднера читатель особенно наглядно ощутит различие между современной и классической занимательной математикой.

Следует отметить, что ответы автора зачастую облечены в замысловатую форму и не всегда исчерпывают задачу. В отдельных случаях переводчик счел необходимым снабдить решение комментарием, однако прокомментировать все ответы не представлялось возможным. Так что вдумчивый читатель, самостоятельно продолжив исследования, может отыскать лучшие решения.

Мы надеемся, что любителям математики доставит удовольствие увидеть некоторых своих давних знакомых в первозданном виде, свободными от последующих наслоений, и они смогут по достоинству оценить фантазию, смелость и трудолюбие человека, открывавшего новые пути в занимательной математике,— замечательного мастера головоломок Генри Эрнеста Дьюдени.

*Ю. Сударев*

# АРИФМЕТИЧЕСКИЕ И АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ

**1. Банковский чек.** Некий человек пришел в банк, чтобы получить деньги по чеку. Кассир, оплачивая чек, ошибся и вместо причитавшихся ему долларов выдал такое же число центов и соответственно вместо центов — долларов. Человек, не пересчитав деньги, положил их в карман, да еще уронил монетку в 5 центов, а придя домой, обнаружил, что денег у него ровно вдвое больше, чем было указано в чеке. На какую сумму был выписан чек?

**2. Доллары и центы.** Покупатель истратил в магазине половину всех наличных денег, после чего у него осталось ровно столько центов, сколько было долларов, и вдвое меньше долларов, чем было центов. Сколько денег было у покупателя до того, как он совершил первую покупку?

**3. Разменная монета.** На какую наибольшую сумму можно взять мелкой монеты, чтобы не быть в состоянии разменять доллар, полдоллара, четверть доллара, 10 центов и 5 центов?[1]

**4. Благотворительность.** Один щедрый человек каждую неделю распределял одну и ту же сумму денег поровну между теми, кто обращался к нему с просьбой о воспомоществовании. Однажды он заметил:

— Если на следующей неделе просителей будет на пять человек меньше, то каждый получит на два доллара больше.

Но, увы, по прошествии недели число просителей не уменьшилось, а возросло на четыре человека.

— Это значит,— заметил благотворитель,— что каждый получит на один доллар меньше.

Сколько получил каждый проситель в этот последний раз?

**5. В булочной.** В булочной имеются три сорта булочек. На 1 цент можно купить либо одну булочку первого сорта, либо две булочки второго сорта, либо, наконец, три булочки третьего сорта. Дети (среди которых мальчиков и девочек было поровну) получили на покупку булочек 7 центов, причем каждому ребенку отводилась из них одна и та же сумма. Сколько булочек каждого сорта купили дети, если ни одна булочка не была разрезана?

**6. Вилли-Лежебока.** Одному человеку не без труда удалось уговорить Вилли-Лежебоку взяться за работу. Вилли должен был работать в течение 30 дней, получая по 8 долларов в день при условии, что за каждый день прогула он платит штраф 10 долларов. В конце месяца выяснилось, что никто никому не должен ни цента. Это обстоятельство окончательно убедило Вилли в том, что «работа дураков любит». Можете ли вы сказать, сколько дней он работал, а сколько прогулял?

**7. Необычный клиент.** Некий человек принес в банк 1000 долларов однодолларовыми купюрами и 10 пустых мешков и, обратившись к клерку, сказал:

— Не откажите в любезности разложить эти деньги по мешкам так, чтобы любую сумму денег, которая мне понадобится, вы всегда могли бы выдать в одном или нескольких мешках, не вскрывая при этом ни одного из них.

Как нужно разложить деньги? Выдать любую требуемую сумму банк должен лишь один раз, величина ее ограничена только размером вклада. Иначе говоря, вкладчик имеет право потребовать любую сумму от 1 до 1000 долларов (число долларов должно быть целым).

**8. Игра «наоборот».** Семеро приятелей решили играть в карты по не совсем обычным правилам. Тот, кто выигрывал, должен был уплатить каждому из остальных игроков столько денег, сколько у того было в кармане. Игроки сыграли семь партий и, как это ни странно, выиграли по очереди в алфавитном порядке своих имен, начинавшихся соответственно с *A, B, C, D, E, F* и *G*.

Окончив игру, приятели обнаружили, что у каждого осталось ровно по 1 доллару 28 центов. Сколько денег было у каждого игрока перед началом игры?

**9. Два землекопа.** Эта любопытная задачка в действительности труднее, чем может показаться на первый взгляд. Абрахам, хилый старик, подрядился выкопать канаву за 2 доллара. Он нанял Бенджамина, здоровенного парня, чтобы тот ему помог. Деньги они должны были поделить в соответствии с «копательными» способностями каждого. Абрахам копает так же быстро, как Бенджамин выбрасывает грунт, а Бенджамин копает в четыре раза быстрее, чем Абрахам выбрасывает грунт.

Каким образом они должны поделить деньги? Разумеется, соотношение сил старика и молодого человека как при копке, так и при выбрасывании грунта мы принимаем одинаковым.

**10. Назовите их жен.** Некто оставил трем своим родственникам и их женам в наследство 1000 долларов. Все жены вместе получили 396 долларов. Джейн получила на 10 долларов больше Кэтрин, а Мери — на 10 долларов больше Джейн. Джон Смит получил столько же, сколько и его жена, Генри Снукс получил в полтора раза больше своей жены, а Тому Кроу досталась сумма, которая вдвое больше доли наследства его жены. Как звали жену каждого из трех мужчин?

**11. Рыночные сделки.** Фермер купил на рынке 100 голов скота на общую сумму 1000 долларов. Одна корова стоила 50 долларов, одна овца — 10 долларов и один кролик — 50 центов. Сколько денег израсходовал фермер на покупку коров, овец и кроликов в отдельности?

Эту задачу можно решить с помощью более или менее кропотливого подбора, однако существуют способы, позволяющие быстро получить решение.

**12. Семь торговок яблоками.** У семи торговок было соответственно 20, 40, 60, 80, 100, 120 и 140 яблок. Они отправились на рынок и продали все свои яблоки по одной и той же цене, получив одинаковую выручку. По какой цене торговки продали яблоки?

**13. Наследство.** Один человек оставил своим трем сыновьям и госпиталю наследство в 1320 долларов. Если бы и часть наследства, выделенная госпиталю, досталась старшему сыну, тот получил бы столько, сколько два его брата вместе. Если бы «госпитальная» часть наследства прибавилась к наследству среднего сына, то последний получил бы вдвое больше обоих своих братьев вместе. Наконец, если бы эта часть наследства добавилась младшему сыну, то тот получил бы втрое больше, чем оба его брата вместе. Сколько долларов получил каждый из сыновей и какая сумма была завещана госпиталю?

**14. Загадочное наследство.** Некто завещал распорядиться суммой денег, которая была немного меньше 1500 долларов, следующим образом. Пятеро его детей и нотариус получили такие суммы, что квадратный корень из доли старшего сына, половина доли второго сына, доля третьего сына, уменьшенная на 2 доллара, доля четвертого сына плюс 2 доллара, удвоенная доля дочери и квадрат гонорара нотариуса равнялись между собой. Все наследники и нотариус получили по целому числу долларов, причем на выплату долей наследства и гонорара нотариусу ушли все деньги. Какая сумма была оставлена в наследство?

**15. Раздел наследства.** Один человек оставил наследство в 100 долларов, которое надо было поделить между его сыновьями Альфредом и Бенджамином. Если треть доли Альфреда вычесть из четверти доли Бенджамина, то останется 11 долларов. Чему равна доля каждого сына?

**16. Новый компаньон.** Два компаньона Смаг и Вильямсон решили взять себе третьего — мистера Роджерса. Смаг вложил в дело в $1\frac{1}{2}$ раза больший капитал, чем

Вильямсон. Роджерс должен внести 2500 долларов, которые следует разделить между двумя другими компаньонами так, чтобы паи всех трех компаньонов стали после этого равны между собой. Как следует разделить сумму, внесенную Роджерсом?

**17. Карманные деньги.**

— Когда сегодня утром я пришел на вокзал,— рассказывал в своем клубе Гарольд Томпкинс,— то обнаружил, что у меня с собой мало денег. Половину их я истратил на билет и купил на 5 центов конфет, а половину того, что у меня оставалось, да еще 10 центов потратил на газету, выйдя из поезда. Затем половина оставшихся денег ушла на автобус, а 15 центов я дал нищему, который стоит у дверей клуба. Поэтому сейчас у меня осталось только 5 центов. Сколько денег я захватил с собой из дому?

**18. Раздача денег.** Девять приятелей *A, B, C, D, E, F, G, H, K,* собравшись как-то раз, чтобы вместе провести вечер, проделали следующее. Сначала *A* вручил каждому из остальных восьми человек столько денег, сколько у того было. Затем то же самое проделали *B, C* и т. д. до *K* включительно. После этого оказалось, что у всех девяти человек денег стало поровну.

Сумеете ли вы найти наименьшую сумму в центах, которая могла быть у каждого из участников вечера первоначально?

**19. Снижение цен.**

— Меня часто озадачивает,— сказал полковник Крэкхэм,— удивительная система снижения цен, с которой порой приходится сталкиваться, и я все пытаюсь понять ее закономерность. Например, два года назад один человек предлагал мне мотоцикл за 1024 доллара. Год спустя он сбавил цену до 640 долларов, немного позже он просил уже только 400 долларов, а на прошлой неделе готов был продать его всего лишь за 250 долларов. Когда он снизит цену в следующий раз, я куплю этот мотоцикл. Сколько мне придется заплатить после очередного снижения?

**20. Лошади и волы.** Торговец скотом купил некоторое количество лошадей по 344 доллара и некоторое количество волов по 265 долларов. Он обнаружил, что все лошади обошлись ему на 33 доллара дороже, чем волы. Какое наименьшее количество лошадей и волов он мог купить при этих условиях?

**21. Индюки.** Один фермер купил партию индюков, которая стоила 60 долларов. Оставив себе 15 птиц, фермер продал остальных индюков за 54 доллара. При этом он получил по 10 центов прибыли с каждой птицы. Сколько он купил индюков?

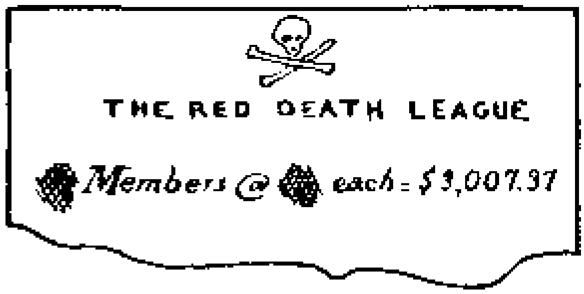
**22. Несчастный бакалейщик.** Один бакалейщик, владелец маленькой лавочки, решил отложить на черный день небольшую сумму денег — все в долларовых купюрах и в монетах по половине и по четверти доллара. Всю эту сумму он разложил по 8 мешкам, причем так, что в каждом мешке было одинаковое число бумажных долларов и монет каждого достоинства. Однажды вечером бакалейщик решил переложить все эти деньги в 7 мешков так, чтобы во всех мешках бумажных купюр и монет каждого достоинства по-прежнему было поровну. На следующий вечер он подобным же образом переложил все деньги в 6 мешков.

Затем несчастный безумец попытался переложить все в 5 мешков, но после нескольких часов упорного труда в совершенном изнеможении, так и не осуществив своего замысла, скончался, горько оплакиваемый соседями. Какова наименьшая из тех сумм, которые бакалейщик мог отложить на черный день?

**23. Утерянный цент.** Это старинная задача, которая и поныне способна многих поставить в тупик. Две торговки продавали яблоки, одна по три, а другая по две штуки на цент. На некоторое время им пришлось отлучиться. У каждой еще оставалось по 30 непроданных яблок, которые они доверили своей подруге, чтобы та продала их по 2 цента за пять штук. Если бы торговки успели продать оставшиеся яблоки сами, то выручили бы за них 25 центов, а так они смогли выручить лишь 24 цента. «Куда же,— спросите вы,— девался 1 цент? Ведь продавать по три яблока на цент и по два яблока на цент — это все равно, что на 2 цента продавать по пять яблок».

Не могли бы вы объяснить эту нехитрую загадку?

**24. Лига Красной Смерти.** Во время облавы на штаб-квартиру одной тайной организации полиция обнаружила клочок бумаги, изображенный на рисунке.




— Над этой бумажкой,— сказал сыщик,— я бьюсь уже третьи сутки. На ней указана общая сумма членских взносов за этот год: 3007 долларов 37 центов, но вот число членов (а мне известно, что их не более 500) и размер одного взноса замазаны так, что прочитать их невозможно. Сколько в Лиге Красной Смерти членов и каков размер членского взноса?

Разумеется, взнос не может содержать дробные доли цента.

**25. Трудный вопрос из области птицеводства.** Три цыпленка и одна утка проданы за ту же сумму, что и два гуся, а еще один цыпленок, две утки и три гуся проданы вместе за 25 долларов. Сколько стоит каждая птица, если цены выражаются целым числом долларов?

**26. Мальчики и девочки.** Девять мальчиков и три девочки решили разделить поровну свои карманные деньги. Каждый мальчик передал одинаковую сумму каждой девочке, а каждая из девочек отдала также одинаковую (но другую) сумму каждому мальчику. У всех детей после этого денег стало поровну. Какова та наименьшая сумма, которая могла быть первоначально у каждого из них?

**27. Сколько стоит костюм?**

— Привет, старик,— воскликнул Рассел, увидев в дверях клуба Генри Мелвилла, облаченного в новый твидовый костюм.— Тебе что, повезло в карты? Нет? Тогда чем объяснить столь роскошный вид?

— О, просто я тут как-то заскочил к портному, и этот костюм пришелся мне по душе. Вот небольшая головоломка для тебя. Пиджак стоит столько же, сколько брюки и жилет. Но пиджак и двое брюк стоили бы 175 долларов, а брюки и два жилета стоили бы 100 долларов. Сколько стоит костюм?

**28. Странное соглашение.** За завтраком профессор Рэкбрейн рассказал своим домашним о том, что накануне вечером в вагоне оказался свидетелем следующего разговора.

Один пассажир сказал другому:

— Вот мой кошелек, Ричард, дай мне такую же сумму, какую ты найдешь внутри.

Ричард сосчитал деньги в кошельке, добавил столько же из своего кармана и заметил:

— А теперь, Джон, если ты дашь мне столько денег, сколько у меня осталось, мы будем квиты.

Сделав так, как просил приятель, Джон обнаружил, что у него в кошельке 3 доллара 50 центов. У Ричарда же оказалось 3 доллара. Сколько денег было первоначально у каждого из приятелей?

**29. Манипуляции с яблоками.** Одного человека как-то спросили, сколько он платил за сотню яблок, и он ответил следующее:

— Если бы сотня яблок стоила на 4 цента больше, то на 1 доллар 20 центов я получил бы на пять яблок меньше.

Сколько стоили 100 яблок?

**30. Процветающее дело.** Один бизнесмен первоначально вложил в свое дело 2000 долларов. Каждые 3 года он увеличивал свой капитал на 50%. Какую сумму составил его капитал по истечении 18 лет?

**31. Банкир и фальшивая банкнота.** Один банкир шел по улице маленького провинциального городка, как вдруг увидел на мостовой банкноту в 5 долларов. Он поднял ее, запомнил номер и пошел домой завтракать. За завтраком жена сообщила ему, что мясник прислал счет на 5 долларов. Поскольку других денег у банкира при себе не оказалось, он отдал жене найденную банкноту, чтобы оплатить счет. Мясник отдал эту банкноту фермеру, когда покупал теленка, тот — торговцу, торговец в свою очередь дал ее прачке, а прачка, вспомнив, что задолжала банку 5 долларов, отнесла ее туда и погасила свой долг.

Банкир узнал банкноту, которой к тому времени было оплачено долгов на 25 долларов. При внимательном изучении банкнота оказалась фальшивой. Кто и сколько потерял на всех этих операциях?

**32. Их возраст.** Если квадрат возраста Тома прибавить к возрасту Мэри, то получится 62; но если квадрат возраста Мэри прибавить к возрасту Тома, то результат будет равен 176. Сколько лет Тому и Мэри?

**33. Семья миссис Вильсон.** У миссис Вильсон было трое детей: Эдгар, Джеймс и Джон. Половина ее возраста равнялась сумме возрастов всех детей. Спустя пять лет, когда родилась еще дочь Этель, возраст миссис Вильсон стал равен сумме возрастов всех ее детей. Прошло еще десять лет — появилась на свет дочь Дейзи. В момент, когда произошло это событие, Эдгару было столько же, сколько Джону и Этель вместе. Прошло еще какое-то время, и общий возраст всех детей оказался равным удвоенному возрасту миссис Вильсон, который совпадал с суммой возрастов Эдгара и Джеймса. Возраст Эдгара в свою очередь стал равен сумме возрастов двух его сестер.

Сколько лет каждому из детей миссис Вильсон было к этому моменту?

**34. Де Морган и другие.** Математик Август де Морган, умерший в 1871 г., любил говорить, что ему исполнилось $x$ лет в $x^2$ году. Джаспер Дженкинс, желая его перещеголять, сообщил мне в 1925 г., что ему было $a^2 + b^2$ лет в $a^4 + b^4$ году, что его возраст равнялся $2m$ в $2m^2$ году и, наконец, что ему исполнилось $3n$ лет в $3n^4$ году.

В каком году родились Де Морган и Дженкинс?

**35. «Простая» арифметика.** Однажды при посещении дома для душевнобольных я спросил двух пациентов, сколько им лет. Они ответили. Решив испытать их арифметические способности, я попросил сложить два названных возраста. У одного получилось при этом 44, а у другого 1280. Я сообразил, что первый вычел один возраст из другого, а второй их перемножил. Сколько лет было больным?

**36. Древняя задача.** Вот пример задачи, которую можно предлагать за завтраком. Ее сформулировал Метродор в 310 г. до н. э.

Демохар четверть своей жизни был мальчиком, одну пятую — юношей, треть — мужчиной и 13 лет прожил стариком. Сколько всего лет он прожил?[2]

**37. Возраст членов семьи.** У одной супружеской пары было трое детей: Джон, Бен и Мэри. Причем разница в возрасте у родителей была такой же, как между Джоном и Беном и между Беном и Мэри. Произведение возрастов Джона и Бена равнялось возрасту отца, а произведение возрастов Бена и Мэри — возрасту матери. Общий возраст всех членов семьи равнялся 90 годам. Сколько лет было каждому из них?

**38. Возраст Майка.** «Пэту О‟Коннору,— сказал полковник Крэкхэм,— теперь в $1\frac{1}{3}$ раза больше лет, чем было тогда, когда он построил свинарник под окном своей гостиной. Маленькому Майку, которому в ту пору, когда Пэт построил свинарник, было 3 года и 4 месяца, теперь на 2 года больше, чем половина того возраста, в котором была Бидди, жена Пэта, когда Пэт построил свой свинарник, так что, когда маленькому Майку будет столько лет, сколько было Пэту, когда тот построил свинарник, то суммарный возраст всех троих достигнет ста лет. Сколько лет маленькому Майку сейчас?»

**39. Сколько лет каждому сыну?** Отца спросили, сколько лет двум его сыновьям. Тот ответил, что удвоенный возраст старшего сына на 18 лет превышает сумму возрастов обоих сыновей, а возраст младшего на 6 лет меньше разности их возрастов. Сколько лет каждому сыну?

**40. Брат и сестра.** Когда одного мальчика спросили, сколько лет ему и его сестре, он ответил:

— Три года назад я был в 7 раз старше сестры, два года назад — в 4 раза, в прошлом году — в 3 раза, а в этом году я в $2\frac{1}{2}$ раза старше ее.

Сколько лет мальчику и его сестре?

**41. «Квадратная» семья.** У одного человека было 9 детей, причем все они родились через одинаковые промежутки времени, а сумма квадратов их возрастов равнялась квадрату его собственного возраста. Сколько полных лет было каждому из детей?

**42. В 1900 г.** Один читатель задал в 1930 г. следующий вопрос. (На первый взгляд можно подумать, что для ответа на него не хватает данных, но это не так.) Он знал человека, который умер в возрасте, составлявшем $\frac{1}{29}$ от года его рождения. Сколько лет было этому человеку в 1900 г.?

**43. Узнайте день рождения.** Один читатель сообщил нам, что к полудню 11 ноября 1928 г. он прожил в XIX в. ровно столько же, сколько и в XX. Нам, конечно, захотелось узнать дату его рождения. Может быть, вы тоже сможете это сделать? Будем считать, что он родился в полдень,

**44. Рождение Боадицеи.** Боадицея[3] умерла через 129 лет после рождения Клеопатры. Их суммарный возраст (то есть сумма продолжительностей жизни каждой) равнялся ста годам. Клеопатра умерла в 30 г. до н. э. Когда родилась Боадицея?

**45. Возраст Робинсона.**

— Сколько вам лет, Робинсон? — спросил однажды полковник Крэкхэм.

— Точно не помню,— ответил тот, — но мой брат на 2 года старше меня. Моя сестра на 4 года старше брата. Когда я родился, моей маме было 20 лет, а вчера мне сказали, что средний возраст всех четверых составляет 39 лет.

Сколько лет Робинсону?

**46. Часы из страны сновидений.** Во сне я путешествовал по стране, где происходят удивительные вещи. Один случай запомнился мне так хорошо, что я не забыл его, даже когда проснулся. Во сне я увидел часы и произнес вслух время, которое они показывали, но мой проводник поправил меня. Он сказал:

— Очевидно, вы не знаете, что у нас минутные стрелки всегда движутся в направлении, противоположном часовым. Во всем остальном наши часы в точности такие же, как и те, к каким вы привыкли.

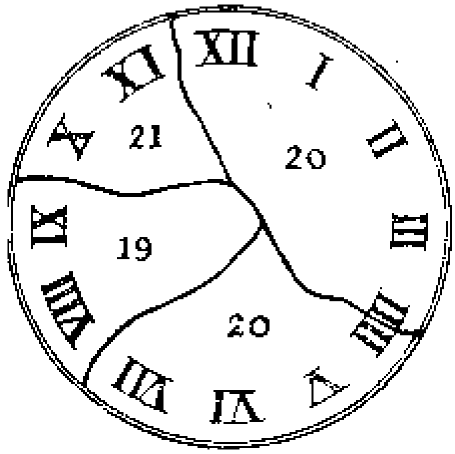
Если в тот момент, когда я смотрел на часы, обе стрелки совпали и находились между четырех- и пятичасовым делениями, а в полдень они обе показывали XII, то сколько времени было в ту минуту на обычных часах?

**47. Когда это бывает?** Когда стрелки часов располагаются таким образом, что если за расстояние принять число минутных делений после XII, то путь, пройденный одной из стрелок, равен квадрату пути, пройденному другой?

**48. Часы с неразличимыми стрелками.** У одного человека были часы, на которых совершенно невозможно было отличить часовую стрелку от минутной. Если эти часы пущены в полдень, то когда впервые нельзя будет узнать точное время?

Читатель должен помнить, что в подобных головоломках с часами существует соглашение, по которому считается, что мы в состоянии определять доли секунды. При таком допущении можно дать точный ответ.

**49. Треснувший циферблат.** Полковник Крэкхэм спросил за завтраком своих домашних, смогли бы они по памяти изобразить римские цифры, которые украшают циферблат часов. Джордж попал в ловушку, в которую многие уже попадали до него: он обозначил 4 ч цифрой IV вместо IIII.




Затем полковник Крэкхэм предложил угадать, как можно разбить циферблат на четыре части, чтобы при этом сумма цифр в каждой части равнялась 20. Чтобы пояснить, как это делается, полковник показал рисунок, на котором сумма цифр в двух частях действительно равна 20 (зато в двух остальных частях она равна соответственно 19 и 21, что делает этот пример непригодным в качестве решения).

**50. Когда начался бал?**

— На последнем балу,— сказала Дора во время завтрака,— гости подумали, что часы остановились: их стрелки находились в том же положении, что и в начале вечера. Однако оказалось, что часовая и минутная стрелки просто поменялись местами. Как вы помните, бал начался между десятью и одиннадцатью часами. Не можете ли вы назвать время более точно?

**51. Перепутанные стрелки.**

— Вчера между двумя и тремя часами,— сказал полковник Крэкхэм,— я взглянул на часы и, перепутав часовую стрелку с минутной, ошибся в определении времени. Ошибочное время было на 55 минут меньше истинного. Сколько времени было на самом деле?

**52. Равные расстояния.** Несколько дней назад профессор Рэкбрейн огорошил своих студентов следующей головоломкой: «Когда между тремя и четырьмя часами минутная стрелка находится на том же расстоянии от VIII, что и часовая от XII?»

**53. Справа и слева.** В какое время между тремя и четырьмя часами минутная стрелка находится на таком же расстоянии слева от XII, на каком часовая стрелка находится справа от XII?

**54. Под прямым углом.** Однажды за завтраком профессор Рэкбрейн задал своим юным друзьям легкий вопрос:

— Когда между пятью и шестью часами часовая и минутная стрелки будут находиться точно под прямым углом?

**55. Вестминстерские часы.** Один человек шел как-то утром по Вестминстерскому мосту между восьмью и девятью часами, если судить по башенным часам (которые часто по недоразумению называют Большим Беном, хотя так называется только большой колокол; но это между прочим). Возвращаясь между четырьмя и пятью часами, он заметил, что стрелки поменялись местами. В какое время человек шел по мосту туда и обратно?

**56. По холму.** Вилли-Лежебока взбирался вверх по холму со скоростью $1\frac{1}{2}$ км/ч, а спускался со скоростью $4\frac{1}{2}$ км/ч, так что все путешествие заняло у него ровно 6 ч. Сколько километров от подножия до вершины холма?

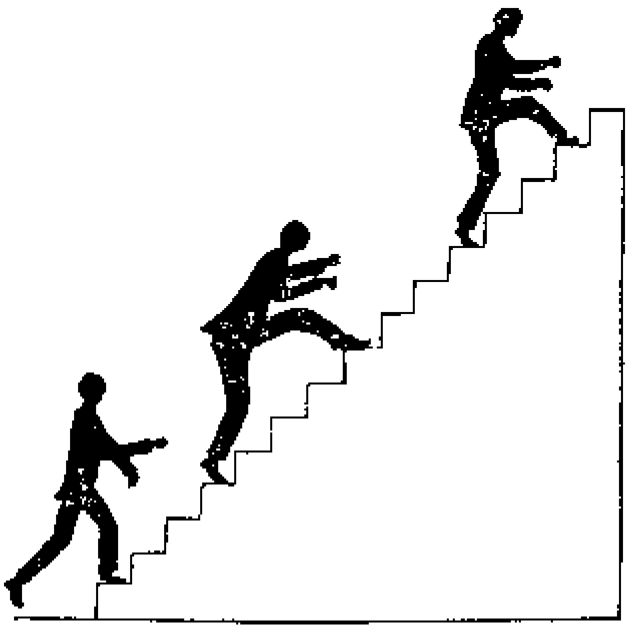
**57. Скорость автомобиля.**

— Я шел по дороге со скоростью $3\frac{1}{2}$ км/ч,— сказал мистер Пипкинс,— как вдруг мимо, едва не сбив меня с ног, промчался автомобиль[4].

— А с какой скоростью он ехал? — спросил его друг.

— Сейчас скажу. С того момента, как он промчался мимо меня, до того, как он скрылся за поворотом, я сделал 27 шагов и затем, не останавливаясь, дошел до поворота, пройдя еще 135 шагов.

— Тогда мы сможем легко определить скорость автомобиля, если считать, что ваши скорости были постоянны.



**58. Гонки по лестнице.** На рисунке схематически изображен финиш гонок по лестнице, в которых принимали участие три человека. Акворт, лидер, перепрыгивал сразу через три ступени, Барнден, второй участник гонок,— через четыре, а последний бегун, Крофт, одним махом перекрывал пять ступенек. Из рисунка ясно, что победителем оказался Акворт. Сколько ступенек в лестнице, по которой бежали участники гонок, если верхнюю площадку также считать ступенькой? Следует иметь в виду, что на рисунке показана лишь верхняя часть лестницы. Под нижней чертой могут быть еще сотни ступенек. Поскольку нас интересует только финиш, на рисунке они не изображены. Однако рисунок позволяет определить наименьшее число ступенек, которое может содержать эта лестница.

**59. Прогулка.** Один человек в полдень отправился прогуляться из Эплминстера в Бонихэм, а его приятель в два часа того же дня вышел из Бонихэма в Эплминстер. По пути они встретились. Встреча произошла в пять минут пятого, после чего приятели одновременно пришли в свои конечные пункты. Когда они закончили свой путь?

**60. Езда в ветреную погоду.** Велосипедист проезжает километр за 3 мин, если ветер дует в спину, и за 4 мин, если ехать приходится против встречного ветра. За сколько времени он проедет 1 км, если ветер утихнет? Кто-нибудь, возможно, скажет, что, поскольку среднее арифметическое 3 и 4 равно $3\frac{1}{2}$ велосипедисту потребуется $3\frac{1}{2}$ мин, однако такое решение неверно.

**61. Головоломка с гребцами.** Команда гребцов может пройти на своей лодке данное расстояние против течения за $8\frac{4}{7}$ мин. В отсутствие течения это же расстояние она проходит за время на 7 мин меньше, чем то, которое потребуется, чтобы пройти его по течению. За сколько минут команда проходит данное расстояние по течению?

**62. Эскалатор.** Находясь на одном из эскалаторов лондонского метро, я обнаружил, что, прошагав 26 ступенек, я спустился бы до платформы за 30 с. Но если бы я прошагал 34 ступеньки, весь спуск занял бы 18 с. Сколько ступенек в эскалаторе? Время измеряется от момента, когда верхняя ступенька начинает опускаться, до того момента, когда я схожу с последней ступеньки на платформу.

**63. Один велосипед на двоих.** Двум братьям нужно было отправиться в путь и прибыть в пункт назначения одновременно. У них был только один велосипед, на котором они ехали по очереди, причем тот, кто ехал, когда истекало его время, слезал с велосипеда и, оставив его у забора, шел вперед пешком, не ожидая брата, а тот, кто шел сзади, дойдя до этого места, подбирал велосипед и ехал свое время и т. д. Где им лучше всего меняться велосипедом? Если скорости движения пешехода и велосипедиста одинаковы, то решить задачу крайне легко. Следует просто разделить путь на *четное* число участков равной длины и меняться велосипедом в конце каждого такого участка, который можно определить, например, по счетчику расстояния. В этом случае каждый из братьев половину пути пройдет пешком, а половину проедет на велосипеде.

Но вот аналогичная задача, которая решается не столь просто. Андерсон и Браун должны преодолеть расстояние в 20 км и одновременно прибыть в пункт назначения. У них один велосипед на двоих. Андерсон проходит пешком лишь 4, а Браун — 5 км/ч. Зато на велосипеде Андерсон едет со скоростью 10, а Браун лишь 8 км/ч. Где им надо меняться велосипедом? Каждый из них или едет, или идет пешком, не делая в пути ни одного привала.

**64. Снова о велосипеде.** Дополним условие предыдущей задачи третьим участником, который пользуется тем же велосипедом. Предположим, что Андерсон и Браун взяли с собой человека по имени Картер. Они делают пешком соответственно по 4,5 и 3 км/ч, а на велосипеде — по 10, 8 и 12 км/ч. Как им следует пользоваться велосипедом, чтобы преодолеть за одно и то же время расстояние 20 км?

**65. Мотоцикл с коляской.** Аткинс, Болдуин и Кларк решили совершить путешествие. Их путь составит 52 км. У Аткинса есть мотоцикл с одноместной коляской. Он должен подвезти одного из своих товарищей на какое-то расстояние, высадить его, чтобы тот дальше шел пешком, вернуться назад, подобрать другого товарища, который вышел одновременно с ними, и поехать дальше так, чтобы все трое прибыли в пункт назначения в одно и то же время. Как это сделать?

Скорость мотоцикла 20 км/ч, Болдуин может идти пешком со скоростью 5, а Кларк — 4 км/ч. Разумеется, каждый старается двигаться как можно быстрее и в пути нигде не задерживается.

Задачу можно было бы усложнить введением большего числа пассажиров, а в нашем случае она настолько упрощена, что даже все расстояния выражаются целым числом километров.

**66. Связной.** Армейская колонна длиной 40 км проходит 40 км. Сколько километров проделает связной, посланный с пакетом из арьергарда в авангард и возвратившийся назад?

**67. Два поезда.** Два железнодорожных состава, один длиной 400, а другой 200 футов, движутся по параллельным путям. Когда они движутся в противоположных направлениях, то каждый проходит мимо другого за 5 с, а когда они идут в одном направлении, то более быстрый проходит мимо другого за 15 с. Один любопытный пассажир, используя эти данные, сумел определить скорость обоих поездов[5].

**68. От Пиклминстера до Квиквилля.** Два поезда *A* и *B* отправляются из Пиклминстера в Квиквилль одновременно с поездами *C* и *D*, отправляющимися из Квиквилля в Пиклминстер. Поезд *A* встречает поезд *C* за 120 миль, а поезд *D* за 140 миль от Пиклминстера. Поезд *B* встречает поезд *C* за 126 миль от Квиквилля, а поезд *D* — на полпути между Пиклминстером и Квиквиллем. Каково расстояние от Пиклминстера до Квиквилля? Все поезда идут с постоянными скоростями, не слишком отличающимися от обычных.

**69. Неисправный паровоз.** Мы отправились по железной дороге из Англчестера в Клинкертон. Но через час после того, как поезд тронулся, обнаружилась неисправность паровоза. Нам пришлось продолжать путешествие со скоростью, составлявшей $\frac{3}{4}$ первоначальной. В результате мы прибыли в Клинкертон с опозданием на 2 ч, а машинист сказал, что если бы поломка произошла на 50 миль дальше, то поезд пришел бы на 40 мин раньше.

Каково расстояние от Англчестера до Клинкертона?

**70. Головоломка с бегунами.** Два человека бегут по кругу в противоположных направлениях. Браун — лучший бегун — дал Томкинсу фору в $\frac{1}{8}$ дистанции, но переоценил свои силы: пробежав $\frac{1}{6}$ дистанции, он встретил Томкинса и понял, что его собственные шансы на успех весьма малы.

На сколько быстрее должен теперь бежать Браун, чтобы догнать соперника? Эта головоломка окажется очень простой, если вы как следует поймете ее условия.

**71. Два корабля.** Два корабля выходят из одного порта в другой, расположенный за 200 морских миль от первого, и возвращаются назад. «Мэри Джейн» идет в одном направлении со скоростью 12 миль/ч, а на обратном пути — со скоростью 8 миль/ч, затрачивая на все путешествие $41\frac{2}{3}$ ч. «Элизабет Энн» делает в обоих направлениях по 10 миль/ч, затрачивая на все путешествие 40 ч.

Мы видим, что оба корабля идут со средней скоростью 10 миль/ч. Почему же «Мэри Джейн» затрачивает на весь путь больше времени, чем «Элизабет Энн»? Как объяснить этот небольшой парадокс?

**72. Определите расстояние.** Джонс вышел из *A* в *B* и по дороге в 10 км от *A* встретил своего приятеля Кенворда, который вышел из *B* одновременно с ним. Дойдя до *B*, Джонс немедленно повернул обратно. То же сделал и Кенворд, дойдя до *A*. Приятели снова встретились, но уже в 12 км от *B*. Разумеется, каждый шел с постоянной скоростью, Каково расстояние между *A* и *B*?

Существует простое правило, с помощью которого каждый сможет найти искомое расстояние в уме за несколько секунд. Если знать, как нужно действовать, то задача решается необычайно просто.

**73. Человек и собака.**

— Прогулки с собакой,— сказал мне как-то приятель-математик,— дают мне обильную пищу для размышлений. Однажды, например, мой пес, подождав, пока я выйду на улицу, посмотрел, куда я собираюсь направиться, и, когда я пошел по дорожке, помчался по ней до конца. Затем он возвратился ко мне, снова добежал до конца дорожки и снова вернулся и так проделал 4 раза. Все это время он двигался с постоянной скоростью и, когда последний раз бежал ко мне, преодолел остаток пути в 81 м. Измерив потом расстояние от моей двери до конца дорожки, я обнаружил, что оно составляет 625 м. С какой скоростью бегал мой пес, если я шел со скоростью 4 км/ч?

**74. Собака Бакстера.** Вот интересная головоломка, дополняющая предыдущую. Андерсон покинул отель в Сан-Ремо в 9 ч и находился в пути целый час, когда Бакстер вышел вслед за ним по тому же пути. Собака Бакстера выскочила одновременно со своим хозяином и бегала все время между ним и Андерсоном до тех пор, пока Бакстер не догнал Андерсона. Скорость Андерсона составляет 2, Бакстера — 4 и собаки — 10 км/ч. Сколько километров пробежала собака к моменту, когда Бакстер догнал Андерсона?

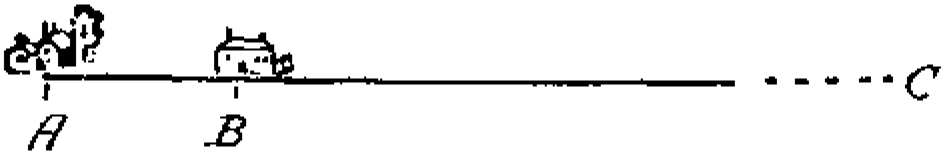
Читатель, приславший мне эту задачу, будучи человеком педантичным, счел нужным особо оговорить, что «длиной собаки и временем, затраченным на повороты, можно пренебречь». Я бы со своей стороны добавил, что в равной мере можно пренебречь кличкой собаки и днем недели.

**75. Исследование пустыни.** Девять участников экспедиции (каждый на автомашине) встречаются на восточной окраине пустыни. Они хотят исследовать ее внутренние районы, двигаясь все время на запад. Каждому автомобилю полного бака (содержащего 1 галлон бензина) хватает на 40 миль пути. Кроме того, он может взять с собой еще 9 канистр бензина по галлону каждая (но не больше). Целые канистры можно передавать с одного автомобиля на другой. На какое максимальное расстояние исследователи могут проникнуть в пустыню, не создавая складов топлива, необходимого для возвращения назад?

**76. Исследование горы.** Участник экспедиции профессор Уокинхолм получил задание со всех сторон на заданной высоте обследовать гору. Ему предстоит одному преодолеть пешком 100 миль вокруг горы. Профессор способен делать по 20 миль в день, но взять с собою продуктов он в состоянии лишь на два дня. Для удобства каждый дневной рацион упакован в запечатанную коробку. Ежедневно профессор проходил свои 20 миль и расходовал дневной рацион. За какое наименьшее время он мог обойти гору?

Эту задачу по праву можно отнести к числу наиболее захватывающих среди рассмотренных нами до сих пор головоломок. От профессора Уокинхолма потребуется немало изобретательности. Идею задачи предложил Г. Ф. Хит.

**77. Ленч в час дня.** Один читатель написал нам, что дом его друга в $A$, куда он был приглашен на ленч в час дня, расположен в 1 км от его собственного дома в $B$. В 12 ч он выехал в своем инвалидном кресле на колесах из $B$ по направлению к $C$ на прогулку. Его друг, решив присоединиться к нему и помочь добраться к назначенному часу на ленч, вышел в 12.15 из $A$ по направлению к $C$ со скоростью 5 км/ч. Друзья встретились и направились в $A$ со скоростью 4 км/ч. Прибыли туда они ровно в час дня.




Какое расстояние проехал наш читатель по направлению к *C*?

**78. Гуляющий пассажир.** Поезд движется со скоростью 60 км/ч. Пассажир из хвоста поезда идет в его начало по переходам между вагонами со скоростью 3 км/ч. С какой скоростью он движется относительно железнодорожного полотна?

Мы не собираемся в данном случае заниматься софизмами, вроде апории Зенона с летящей стрелой, или теорией относительности Эйнштейна, а говорим о движении в обычном смысле слова по отношению к железнодорожному полотну.

**79. Встречные поезда.** На станции Вюрцльтаун одна старая леди, выглянув из окна, крикнула:

— Дежурный! Сколько отсюда ехать до Мадвилля?

— Все поезда идут 5 часов в любую сторону, мэм,— ответил тот.

— А сколько поездов встретится мне по пути?

Этот нелепый вопрос озадачил дежурного, но он с готовностью ответил:

— Поезда из Вюрцльтауна в Мадвилль и из Мадвилля в Вюрцльтаун отходят в пять минут первого, пять минут второго и так далее с интервалом ровно в один час.

Старая леди заставила одного из своих соседей по купе найти ответ на ее вопрос.

Так сколько же поездов встретится ей по пути?

**80. Два чемодана.** Одному джентльмену нужно было добраться до железнодорожной станции, расположенной в 4 км от дома. Его багаж состоял из двух одинаково тяжелых чемоданов, унести которые одному было не под силу. Садовник и слуга джентльмена настаивали на том, чтобы нести багаж доверили им. Но садовник был слишком стар, а слуга — слишком слаб. Джентльмен же настаивал на том, чтобы каждый принял равное участие в переноске багажа, и ни за что не хотел отказаться от своего права нести чемоданы причитающийся ему отрезок пути.

Садовник и слуга взяли по чемодану, а джентльмен, шагая налегке, думал, как ему надлежит действовать, чтобы все трое затратили равный труд.

Так как же?

**81. Эскалатор.**

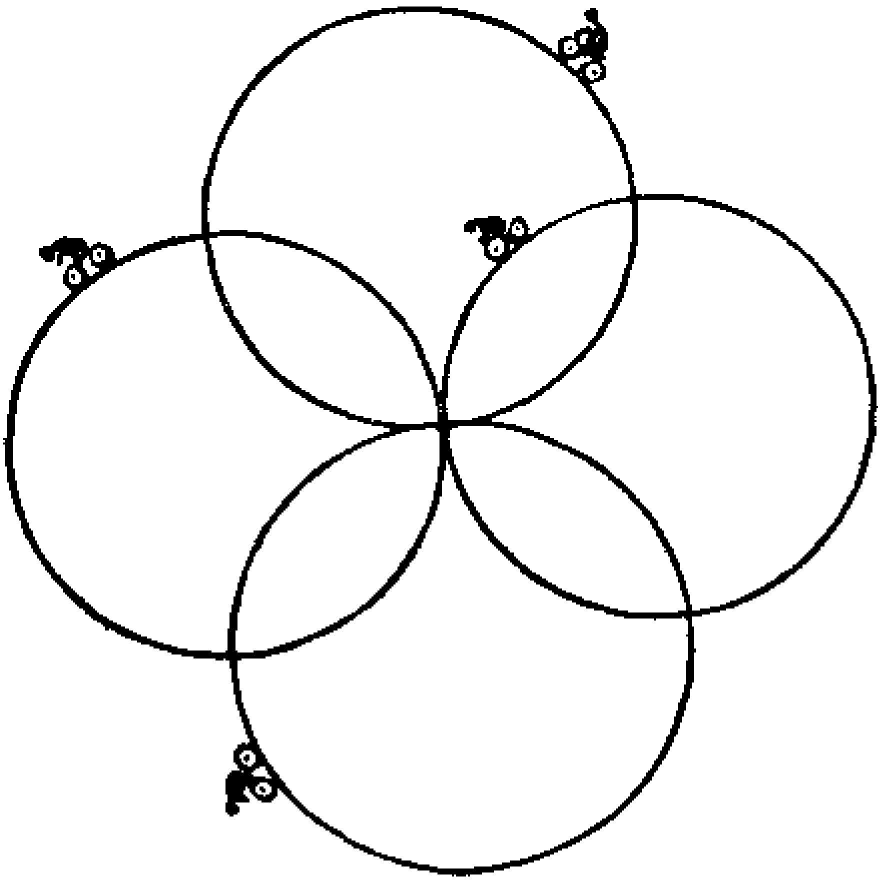
— Спускаясь вниз по эскалатору, я насчитал 50 ступенек,— сказал Уокер.

— А я насчитал 75,— возразил Тротмен,— но я спускался в три раза быстрее вас.

Если бы эскалатор остановился, то сколько ступенек можно было бы насчитать на его видимой части? Предполагается, что оба человека двигались равномерно и что скорость эскалатора постоянна.

**82. Тележка.** «Три человека,— сказал Крэкхэм,— Аткинс, Браун и Крэнби, решили отправиться в небольшое путешествие. Им предстоит путь в 40 км. Аткинс идет со скоростью 1 км/ч, Браун — со скоростью 2 км/ч, а Крэнби на своей тележке, в которую запряжен ослик, делает 8 км/ч. Какое-то время Крэнби везет Аткинса, затем высаживает его, чтобы тот оставшееся расстояние прошел пешком, затем возвращается за Брауном и везет его до конечного пункта, причем все трое прибывают туда одновременно.

Сколько длилось путешествие? Разумеется, все это время приятели двигались с постоянной скоростью».



**83. Четыре велосипедиста.** Четыре одинаковых круга изображают четыре гаревые дорожки. Четверо велосипедистов стартуют из центра в полдень. Каждый движется по своему кругу со скоростями: первый — 6 км/ч, второй — 9, третий — 12 и четвертый — 15 км/ч. Они договорились ездить до тех пор, пока все в четвертый раз не встретятся опять в центре. Длина каждой круговой дорожки равна $\frac{1}{3}$ км.

Когда произойдет встреча?

**84. Три машины.** Три машины едут по дороге в одном направлении и в некоторый момент времени располагаются относительно друг друга следующим образом. Эндрюс находится на некотором расстоянии позади Брукса, а Картер — на расстоянии, вдвое превышающем расстояние от Эндрюса до Брукса, перед Бруксом. Каждый водитель едет с постоянной скоростью, и Эндрюс нагоняет Брукса через 7 мин, а затем еще через 5 мин догоняет Картера.

Через сколько минут после Эндрюса Брукс догонит Картера?

**85. Муха и автомобили.** Длина дороги 300 км. Автомобиль $A$ стартует на одном конце дороги в полдень и движется с постоянной скоростью 50 км/ч. В то же самое время на другом конце дороги стартуют автомобиль $B$ с постоянной скоростью 100 км/ч и муха, делающая 150 км/ч. Встретив автомобиль $A$, муха поворачивает и летит навстречу $B$.

1) Когда муха встретит $B$?

2) Если бы, встретив $B$, муха повернула, полетела навстречу $A$, встретила его, снова повернула и так продолжала летать между $A$ и $B$, пока они не столкнулись бы, то когда автомобили раздавили бы муху?

**86. Лестницы метро.** Как-то, выходя из станции метро «Керли-стрит», мы столкнулись с молодым атлетом Перси Лонгмеиом. Он остановился на эскалаторе и сказал:

— Вверх по эскалатору я всегда иду. Знаете ли, лишняя тренировка никогда не помешает. Этот эскалатор самый длинный на линии — почти тысяча ступенек. Но вот что интересно — и это относится и к другому, меньшему эскалатору, по которому мне часто приходится подниматься: если, поднимаясь вверх, я шагаю через две ступеньки, то на последний шаг приходится одна ступенька; если я шагаю через три ступеньки — то две ступеньки; если через четыре — то пять; если через пять — то четыре; если через шесть — то пять и, наконец, если я шагаю через семь ступенек, то на последний шаг приходится шесть ступенек. Почему так происходит, не знаю.

Когда Перси пошел дальше вверх, перешагивая через три ступеньки сразу, мы рассмеялись и мой спутник сказал:

— Он едва ли подозревает, что если бы делал шаги в 20 ступенек, то на последний шаг ему их осталось бы 19!

Сколько ступенек в эскалаторе на станции «Керли-стрит», если верхнюю площадку считать ступенькой, а нижнюю нет?[6]

**87. Автобусная прогулка.** Джордж отправился с любимой девушкой покататься на автобусе, но, подсчитав свои ограниченные ресурсы, понял, что возвращаться назад им придется пешком.

Если скорость автобуса 9 км/ч, а наша пара пешком делает 3 км/ч, то как далеко они могут прокатиться, чтобы на всю прогулку туда и обратно затратить 8 ч?

**88. Транспортная головоломка.** Двенадцать солдат должны одновременно как можно быстрее попасть в пункт, расположенный в 20 км от их местонахождения. Для этого они остановили небольшую автомашину.

— Я еду со скоростью 20 км/ч,— сказал водитель,— но с собой могу одновременно взять только четверых. С какой скоростью вы идете пешком?

— Каждый из нас проходит 4 км/ч,— ответил один из солдат.

— Прекрасно,— воскликнул водитель,— тогда я поеду вперед с четверыми из вас, подвезу их на какое-то расстояние, затем вернусь и посажу еще четверых, подвезу их тоже и возвращусь за остальными. От вас требуется лишь одно: все время, пока вы не едете на машине, идти пешком, я позабочусь об остальном.

Солдаты отправились в путь ровно в полдень. Когда они прибудут на место?

**89. Чему равно расстояние?** «Пароход,— заметил один из наших офицеров, вернувшихся с Востока,— способен развивать по течению скорость 20 км/ч, а против течения — только 15 км/ч. Поэтому весь путь между двумя пунктами вверх по течению занимает у него на 5 ч больше времени, чем вниз по течению».

Мы все не могли удержаться от того, чтобы не попытаться определить в уме расстояние между этими двумя пунктами. Чему оно равно?

**90. Туда и обратно.** Полковник Крэкхэм утверждает, что его приятель, мистер Уилкинсон, идет от своего загородного дома до ближайшего города со скоростью 5 км/ч, а возвращаясь немного усталым, проходит тот же путь со скоростью 3 км/ч. Путешествие туда и обратно занимает у него ровно 7 ч.

Как далеко от города расположен дом мистера Уилкинсона?

**91. Встречные автомобили.** Крэкхэмы должны были сделать первую остановку в Баглминстере и провести там ночь в доме друга семьи. Этот друг в свою очередь должен был выехать из дома одновременно с ними и остановиться в Лондоне в доме Крэкхэмов. И Крэкхэмы, и друг семьи ехали по одной дороге, высматривая друг друга, и встретились в 40 км от Баглминстера. В тот же вечер Джордж придумал следующую небольшую головоломку:

— Я обнаружил, что если бы по прибытии на место каждый из наших автомобилей немедленно двинулся в обратный путь, то мы встретились бы в 48 км от Лондона.

Если Джордж прав, то чему равно расстояние от Лондона до Баглминстера?

**92. Велосипедные гонки.** Два велосипедиста участвуют в гонках по круговой дорожке. Браун делает полный круг за 6 мин, а Робинсон — за 4 мин.

Через сколько минут Робинсон обгонит Брауна?

**93. Небольшая головоломка с поездами.** Экспресс из Баслтауна в Айрончестер идет со скоростью 60 км/ч, а экспресс из Айрончестера в Баслтаун, который выходит одновременно с ним,— со скоростью 40 км/ч.

На каком расстоянии друг от друга они будут находиться за час до встречи?

Я не смог найти эти города ни на карте, ни в справочнике, поэтому мне не известно точное расстояние между ними. Примем его не превышающим 250 км.

**94. Прогулка по-ирландски.**

— Однажды мне понадобилось,— рассказывал полковник Крэкхэм,— добраться из Богули в Болифойн, где меня ожидал друг. Из транспорта была доступна лишь ветхая телега старого Пэта Доуля, которую тащила кобыла, чья трудовая жизнь уже явно затянулась.

Невыносимо медленно, но все же неуклонно мы двигались вперед.

— Послушай, Пэт,— спросил я через несколько минут после начала нашего путешествия,— есть ли у твоей машины другая скорость?

— Как не быть,— ответил извозчик,— да только она поменьше этой будет.

— Тогда придется довольствоваться такой, какая есть,— сказал я.

Пэт уверил меня, что лошадь будет идти равномерным шагом, не замедляя и не ускоряя его, до самого конца нашего пути.

— Мы едем уже двадцать минут,— заметил я, посмотрев на часы,— на сколько миль мы отъехали от Богули?

— Как раз проехали вдвое меньше, чем осталось до Пигтауна,— ответил Пэт.

Наскоро подкрепившись в Пигтауне, мы проехали еще пять миль. Я спросил Пэта:

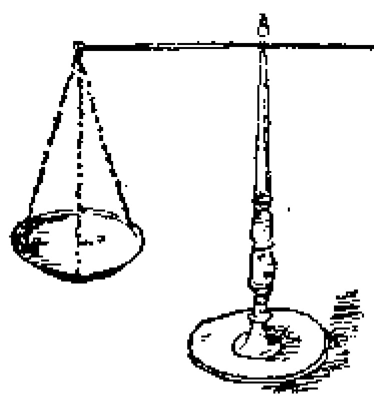
— Сколько миль осталось до Болифойна?

На этот вопрос я получил тот же самый ответ (Пэт, очевидно, мог измерять все расстояния только от Пигтауна):

— Ровно вдвое меньше, чем отсюда до Пигтауна. Прошел еще час, и наше путешествие закончилось. Каково расстояние от Богули до Болифойна?

**95. Задача о пешеходах.** Один человек, гуляя за городом, оглянулся назад и заметил приятеля, который шел в том же направлении, но на 400 м сзади него. Глядя друг на друга, приятели прошли по прямой еще по 200 м каждый. Вам кажется, что они должны были встретиться? Ничуть не бывало, между ними после этого все еще оставалось расстояние 400 м.

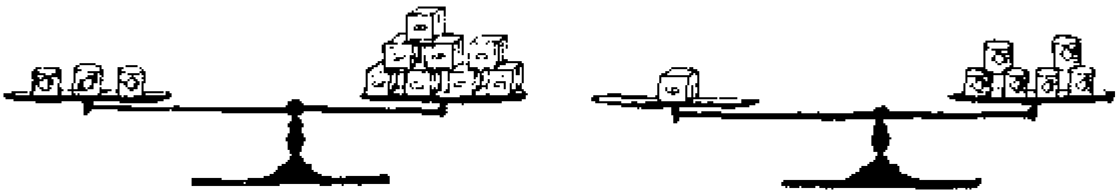
Как это могло получиться?



**96. Неверные весы.** Когда пудинг положили на одну чашку весов, то они показали на 4 г больше, чем $\frac{9}{11}$ его истинного веса. Когда же его положили на другую чашку, то весы показали на 48 г больше, чем в первом случае. Каков истинный вес пудинга?

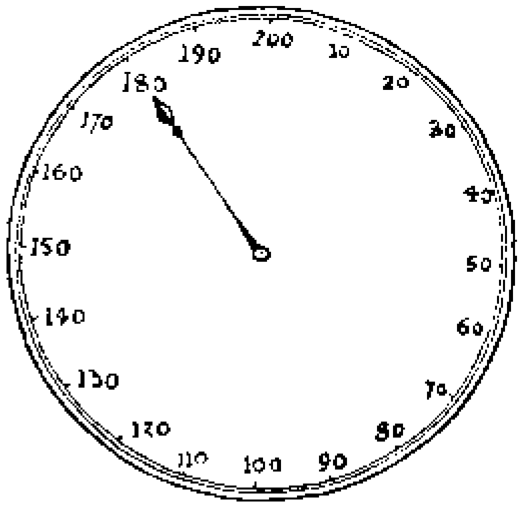
**97. Обвес.** Один лавочник, чьи моральные устои за годы войны весьма пошатнулись, дошел до того, что завел у себя в лавке неверные весы. (На рисунке можно заметить, что одно плечо их коромысла длиннее другого, хотя рисунок специально сделан так, чтобы не подсказать ответа.) При одном взвешивании на этих весах 3 банки уравновесили 8 пакетов (содержимое банок и пакетов для нас несущественно), а при другом — 1 пакет уравновесил 6 банок.

Известно, что истинный вес одной банки равен 1 кг, Сколько весят 8 пакетов?



**98. Взвешивание ребенка.**

— Прошлым летом я был свидетелем одного забавного случая на железнодорожной станции,— сказал мой приятель.— Небольшая семья стояла перед автоматическими весами, рассчитанными на 200 фунтов, безрезультатно пытаясь решить трудную задачу — взвесить ребенка. Едва родители оставляли ребенка одного на весах, он начинал реветь и спрыгивал с них, при этом отцу приходилось удерживать собаку, тоже желавшую принять участие в этой операции. Наконец, отец вместе с ребенком и Фидо взобрался на весы, а я их сфотографировал.

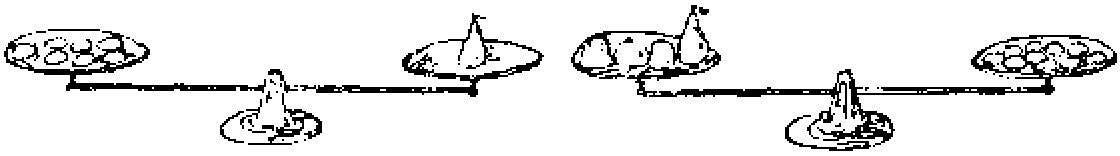



Тут приятель показал мне фотографию, с которой я срисовал только показание весов, поскольку остальное меня не интересовало (см. рисунок).

— После этого мужчина повернулся к своей жене и сказал: «Мне кажется, дорогая, что вместе с ребенком я вешу на 162 фунта больше, чем собака, а собака весит на 70% меньше, чем ребенок, Нам дома следует все хорошенько обдумать».

Мне тоже захотелось разобраться самому в этой задаче. Как вы думаете, сколько весило милое дитя?

**99. Фрукты для варенья.** Для варки варенья понадобилось взвесить свежие фрукты. Оказалось, что яблоки, груши и сливы уравновешивают друг друга, как показано на рисунке.



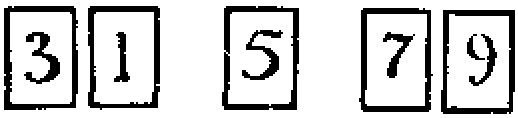
Не могли бы вы сказать, сколько слив уравновесят одну грушу? Относительные размеры плодов на рисунке изображены неверно (это сделано специально), но мы должны считать, что плоды одного вида равны по весу.

Очевидно, что 3 яблока и груша весят столько же, сколько 10 слив, и что яблоко и 6 слив уравновешивают одну грушу. Но вот сколько слив потребуется, чтобы уравновесить грушу?

**100. Взвешивание чая.** Бакалейщику потребовалось расфасовать 20 фунтов китайского чая по двухфунтовым пакетам, но у него куда-то запропастились гири. После тщетных поисков он нашел только пяти- и девятифунтовую гири.

Как может бакалейщик наиболее быстро выполнить свою работу? Скажем сразу, что произвести требуется лишь 9 взвешиваний.

**101. Особое число.** Какое число образовано из пяти последовательных цифр (идущих не обязательно по порядку) так, что число, образованное первыми двумя цифрами, умноженное на среднюю цифру, дает число, образованное последними двумя цифрами. (Например, если мы возьмем число 12 896, то 12, умноженное на 8, дает 96. Но, к несчастью, 1, 2, 6, 8, 9 не являются последовательными цифрами, так что этот пример в качестве решения не пригоден.)




**102. Пять карточек.** У меня пять карточек, на которых изображены цифры 1, 3, 5, 7 и 9. Как расположить их в ряд таким образом, чтобы произведение числа, образованного первой парой карточек, на число, образованное последней парой карточек, минус число, стоящее на средней карточке, равнялось числу, составленному из повторений одной и той же цифры? Например (см. рисунок), 31, умноженное на 79, минус 5 равно 2444; последнее число подошло бы нам, если бы вместо 2 на первом месте стояло тоже число 4.

Очевидно, должно быть два решения, поскольку обе пары карточек — две первые и две последние — расположены совершенно симметрично.

**103. Цифры и квадраты.** Какой наименьший квадрат целого числа оканчивается наиболее длинной последовательностью одинаковых цифр?

Так, если бы наиболее длинная последовательность одинаковых цифр составила пять, то нам подошло бы число 24 677 777 (разумеется, если бы оно было наименьшим квадратом, но это неверно). Нуль не считается допустимой цифрой.

**104. Две суммы.** Можете ли вы расположить цифры 1, 2, 3, 4, 5, 7, 8, 9 двумя группами по четыре цифры в каждой так, чтобы суммы чисел, составленных из цифр каждой группы, были равны между собой?

Очень просто получить ответ, заменив 9 на 6. Например, каждая из сумм двух групп чисел 1, 2, 7, 8 и 3, 4, 5, 6 равна 18. Но такая замена не допускается.

**105. Повторяющаяся четверка цифр.** Если мы умножим 64 253 на 365, то получим 23 452 345, где первые четыре цифры повторяются.

На какое наибольшее число нужно умножить 365, чтобы получить аналогичное произведение, содержащее восемь цифр, из которых первые четыре повторяются?

**106. Легкое деление.** Разделив число 8 101 265 822 784 на 8, вы убедитесь, что ответ можно получить, просто переставив 8 из начала в конец числа!

Не могли бы вы найти число, начинающееся с 7, которое можно разделить на 7 столь же простым способом?

**107. Недоразумение.** Один американский читатель попросил меня найти число, составленное из любого количества цифр, для которого деление на 2 можно выполнить, переставив последнюю цифру в начало. По-видимому, эта задача возникла у него после того, как он познакомился с неправильно сформулированной предыдущей задачей. Если бы требовалось переставить в конец первую цифру, то ответом служило бы число 315 789 473 684 210 526, а отсюда легко было бы найти решение, начинающееся с любой цифры. Но если требуется переставить цифру из конца в начало, то для делителя 2 решения нет. Однако существует решение для делителя 3. Не могли бы вы его найти?

**108. Две четверки.** Меня постоянно спрашивают о старой головоломке «Четыре четверки». Я опубликовал ее в 1899 г., но потом выяснил, что впервые она была опубликована в первом томе журнала *Knowlege* за 1881 г. С тех пор к ней обращались различные авторы. Формулируется головоломка так: «Найти все возможные числа, которые можно получить из четырех четверок (не больше и не меньше) с помощью различных арифметических знаков. Например, число 17 можно представить в виде $4 \times 4 + 4/4$, число 50 — в виде $44 + 4 + \sqrt{4}$ и т. д. Аналогичным образом можно записать все числа до 112 включительно, используя лишь знаки сложения, вычитания, умножения, деления, квадратного корня, десятичной точки[7] и знака факториала (например, можно писать 4!, что означает всего лишь $1 \times 2 \times 3 \times 4$, или 24). Число 113 уже нельзя представить в виде комбинации четырех четверок.

Необходимо выяснить, какие числа можно записать с помощью одной, двух и трех четверок. Большие трудности возникают из-за того, что некоторые числа нелегко поддаются такому представлению. Например, мне кажется, что лишь очень немногие смогут выразить 64 с помощью двух четверок. Сумеет ли это сделать читатель?

**109. Две цифры.** Напишите любое двузначное число (две различные цифры, отличные от нуля), а затем выразите его, используя те же цифры, взятые в обратном порядке (в случае необходимости разрешается использовать знаки арифметических действий). Например, число $45 = 5 \times 9$ подошло бы, если бы вместо 9 справа стояла цифра 4, а число $81 = (1 + 8)^2$

могло бы служить решением задачи, если бы справа в показателе степени не появилась цифра 2.

**110. Цифровые совпадения.** Если я перемножу две девятки и сложу 9 и 9, то получу 81 и 18 — два числа, состоящие из одинаковых цифр. Если я перемножу и сложу 2 и 47, то получу 94 и 49 — числа с одинаковыми цифрами, Если я перемножу и сложу 3 и 24, то получу 72 и 27 — два числа, состоящие из одинаковых цифр.

Можете ли вы найти два числа, перемножив и сложив которые вы получили бы два новых числа с тремя одинаковыми цифрами? Задача имеет два решения.

**111. Квадраты-палиндромы.** Вот любопытный предмет для исследований: найти квадраты целых чисел, которые можно читать как обычным образом, так и справа налево. Некоторые из них найти очень легко. Например, квадраты чисел 1, 11, 111 и 1111 равны соответственно 1, 121, 12 321 и 1 234 321. Все получившиеся числа — палиндромы, и данное правило применимо к любому числу единиц, не превосходящему 9. Однако существуют и другие случаи, которые мы могли бы назвать нерегулярными. Например, $264^2 = 69\,696$, а $2285^2 = 5\,221\,225$.

Во всех приведенных выше примерах число цифр было нечетным. Не мог бы читатель привести примеры с четным числом цифр?

**112. Разложение на множители.** На какие множители разлагается число 1 000 000 000 001? На этот вопрос легко ответить, зная кое-что о числах такого частного вида. Не менее легко указать два сомножителя, если между двумя единицами вставить не 11 нулей, а, например, 101 нуль,

Существует одно любопытное простое и красивое правило для всех подобных случаев. Не сумеете ли вы найти его?

**113. Два множителя.** Найдите два целых числа, разность между которыми минимальна, а их произведение равно 1 234 567 890.

**114. Деление на 11.** Если девять цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 записаны в случайном порядке, например 412 539 768, то какова вероятность того, что получившееся число делится на 11? То число, которое я выписал, конечно, не делится на 11, но если в нем поменять местами 1 и 8, то оно будет делиться на 11.

**115. Деление на 37.** Мне хотелось бы узнать, делится ли число 49 129 308 213 на 37, и если нет, то чему равен остаток. Как мне это сделать, не выполняя деления? Оказывается, что при умелом подходе ответ на интересующий меня вопрос можно получить за несколько секунд.

**116. Еще раз о делении на 37.** Вот интересное развитие предыдущей головоломки. Девять цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 выписаны в случайном порядке, например 412 539 768. Какова вероятность того, что получившееся число делится без остатка на 37?

**117. Задача о десяти цифрах.** Расставьте все десять цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 0 в таком порядке, чтобы получившееся число делилось на все числа от 2 до 18. Если, например, разместить цифры в последовательности 1 274 953 680, то получившееся число будет делиться на 2, 3, 4, 5 и т. д. до 16, но не разделится на 17.

**118. Тройки и семерки.** Какое наименьшее число обладает тем свойством, что оно записывается только с помощью цифр 3 и 7 и что как оно, так и сумма его цифр делятся на 3 и 7? Например, 7 733 733 делится без остатка на 3 и на 7, но сумма его цифр (33) на 3 делится, а на 7 нет, поэтому оно не может служить решением задачи.

**119. Извлечение корня.** Однажды в разговоре с профессором Саймоном Грейтхедом, человеком весьма эксцентричного склада ума, я как-то упомянул об извлечении кубического корня.

— Поразительно,— сказал профессор,— какое невежество проявляют люди в столь простом вопросе! Создается впечатление, что в извлечении корней со времен, когда единственными корнями были корни, извлекаемые с помощью лопат, вил и садового совка, мир никуда не продвинулся. Например, никто, кроме меня, до сих пор не обнаружил, что для извлечения кубического корня из какого-нибудь числа достаточно лишь найти сумму его цифр.

Извлечь кубический корень из 1 может всякий. Хотя этот пример и подкрепляет высказанное мной утверждение, он слишком тривиален, и мы его рассматривать не будем. Предположим, что требуется извлечь кубический корень из 512. Находим сумму цифр, равную 8, и ответ получен!

Я высказал предположение, что здесь мы имеем дело с исключительным случаем.

— Вовсе нет,— возразил профессор,— возьмем наугад другое число, скажем 4913. Сумма его цифр равна 17, а 17 в кубе равно 4913.

Я не осмелился возражать ученому, но попрошу читателей найти все остальные числа, у которых кубический корень совпадает с суммой цифр. Этих чисел так мало, что их буквально можно пересчитать по пальцам.

**120. Необычный пример на деление.** Вот довольно любопытная головоломка. Найдите наименьшее число, которое при последовательном делении на 45, 454, 4545 и 45 454 даст в остатке соответственно 4, 45, 454 и 4545. Быть может, найти такое число нелегко, зато, решая задачу, вы освежите свои познания в арифметике.

**121. Три различные цифры.** Профессор предложил студентам найти все числа, составленные из трех различных цифр, каждое из которых делится на квадрат суммы своих цифр. Так, в случае числа 112 сумма цифр равна 4, квадрат ее равен 16 и 112 делится на 16, но, к несчастью, 112 составлено не из трех различных цифр.

Сумеете ли вы найти все возможные решения задачи?

**122. Цифры и кубы.** Профессор Рэкбрейн попросил недавно своих молодых друзей найти все пятизначные квадраты, у которых сумма чисел, образованных двумя первыми и двумя последними цифрами, равна точному кубу. Так, если мы возьмем квадрат числа 141, равный 19 881, и прибавим 81 к 19, то получим 100 — число, не являющееся, к сожалению, точным кубом.

Сколько всего существует решений?

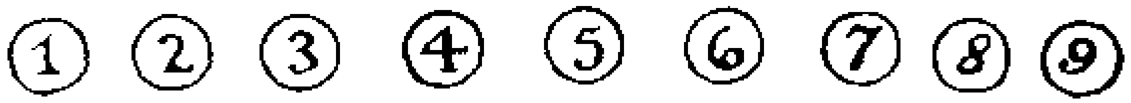
**123. В обратном порядке.** Какое девятизначное число, будучи умноженным на 123 456 789, даст произведение, у которого в девяти младших разрядах будут стоять цифры 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1 (именно в таком порядке)?

**124. Прогрессия.** «Если из девяти цифр,— сказал профессор Рэкбрейн,— вы составите три числа 147, 258, 369, то обнаружите, что любое последующее отличается от предыдущего на 111 и что, следовательно, получилась арифметическая прогрессия».

Не смогли бы вы переставить девять цифр четырьмя способами так, чтобы в каждом случае три числа образовывали арифметическую прогрессию, а среднее число оставалось бы одним и тем же?

**125. Составление целых чисел.** Может ли читатель назвать сумму всех целых чисел, составленных из четырех цифр 1, 2, 3, 4? Другими словами, требуется вычислить сумму таких чисел, как 1234, 1423, 4312 и т. д. Разумеется, можно было бы выписать подряд все такие числа и затем сложить их. Однако интереснее отыскать простое правило, с помощью которого можно найти суммы чисел, составленных из четырех различных произвольно выбранных (отличных от нуля) цифр.

**126. Суммирование чисел.** Профессор Рэкбрейн хотел бы знать, чему равна сумма всех чисел, которые можно составить из девяти цифр (0 исключен), используя каждую цифру в каждом числе один и только один раз.




**127. Цифровое квадрирование.** Возьмите девять фишек с цифрами соответственно от 1 до 9 и расположите их в ряд, как показано на рисунке. Требуется, переставив пары фишек как можно меньшее число раз, расположить их в таком порядке, чтобы цифры образовали квадрат целого числа. В качестве примера приведем следующие шесть перестановок: $\overleftrightarrow{78}$(7 и 8 меняются местами), $\overleftrightarrow{84}$, $\overleftrightarrow{46}$, $\overleftrightarrow{69}$, $\overleftrightarrow{93}$, $\overleftrightarrow{32}$. В результате получается число 139 854 276, равное квадрату числа 11 826. Однако задачу можно решить с помощью гораздо меньшего числа перестановок.

**128. Цифры и квадраты.** Одна из небольших рождественских головоломок профессора Рэкбрейна гласит следующее: чему равны наименьший и наибольший квадраты, содержащие все десять цифр от 0 до 9, причем каждую цифру — лишь по одному разу?

**129. Цифровые квадраты.** Очень хорошая головоломка состоит в том, чтобы найти число, которое вместе со своим квадратом содержало бы по одному и только одному разу каждую из девяти цифр, исключая нуль. Так, если бы квадрат числа 378 равнялся 152 694, то это число нам бы подошло. Но на самом деле его квадрат равен 142 884, что дает нам две четверки и три восьмерки, а 6, 5 и 9 отсутствуют.

Существует только два решения; их можно найти за четверть часа, если действовать правильно.

**130. Отыскание квадрата.** Даны шесть чисел: 4 784 887, 2 494 651, 8 595 087, 1 385 287, 9 042 451, 9 406 087. Известно, что три из них в сумме дают полный квадрат. Что это за числа?

Читатель, вероятно, не увидит другого пути, кроме утомительного метода проб и ошибок, и все же существует прямое решение задачи, использующее лишь простые арифметические соображения и не требующее извлечения квадратных корней.

**131. Жонглирование цифрами.** Составьте из десяти цифр три простейших арифметических выражения, используя три из четырех арифметических действий — сложения, вычитания, умножения и деления. (В записи выражений разрешается применять лишь знаки трех выбранных арифметических действий.) Поясним сказанное на примере. Рассмотрим три арифметических выражения

$$3 + 5 = 7;\ 9 - 8 = 1;\ 30 : 6 = 5.$$

Этот пример не может служить решением задачи, поскольку цифра 2 пропущена, а цифра 3 повторяется дважды.

**132. Равные дроби.** Можете ли вы составить три самые обычные дроби (скажем, что-нибудь вроде $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$или $\frac{1}{9}$), используя каждую из девяти цифр по одному и только одному разу? Дроби можно образовывать одним из следующих способов:

$$\text{либо } \frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{ef}{ghj}, \text{ либо } \frac{a}{b} = \frac{c}{de} = \frac{fg}{hj}.$$

Существует только пять решений, но пятое содержит некую «изюминку» — тонкость, которая, быть может, ускользнет от читателя.

**133. Цифры и простые числа.** Используя каждую из девяти цифр один и только один раз, составить простые числа (числа, которые не делятся без остатка ни на какое целое число, кроме 1 и самих себя), сумма которых была бы наименьшей.

---

$$\begin{array}{r} 61 \\ 283 \\ +\quad 47 \\ 59 \\ \hline 450 \end{array}$$

---

Приведем пример. Четыре простых числа содержат все девять цифр по одному и только одному разу, их сумма равна 450, однако ее можно существенно уменьшить. Это совсем простая головоломка.

---

| | | |
|---|---|---|
| 2 | 1 | 8 |
| 4 | 3 | 9 |
| 6 | 5 | 7 |

| | | |
|---|---|---|
| 2 | 7 | 3 |
| 5 | 4 | 6 |
| 8 | 1 | 9 |

| | | |
|---|---|---|
| 3 | 2 | 7 |
| 6 | 5 | 4 |
| 9 | 8 | 1 |

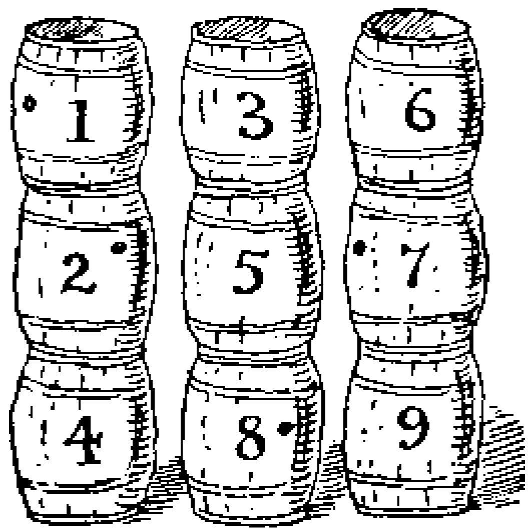
---

**134. Еще раз о цифровых квадратах.** Из девяти цифр многими различными способами можно составить квадрат таким образом, чтобы числа, стоящие в первой и второй строках, в сумме давали третью строку. Мы приводим три примера, в которых обнаруживается еще одна закономерность: разность между второй суммой (819) и первой (657) равна разности между третьей суммой (981) и второй (819). Составьте восемь квадратов (каждый из девяти цифр) так, чтобы разность между соседними суммами была постоянной. Разумеется, эта разность будет отличаться от 162.

**135. Девять цифр.** Если 32 547 891 умножить на 6, использовав каждую из девяти цифр один и только один раз, то получится произведение, равное 195 287 346 (также содержащее девять цифр по одному и только одному разу). Не могли бы вы найти другое число, обладающее тем же свойством при умножении на 6? Помните, что каждая из девяти цифр должна появиться один и только один раз как в сомножителях, так и в произведении.

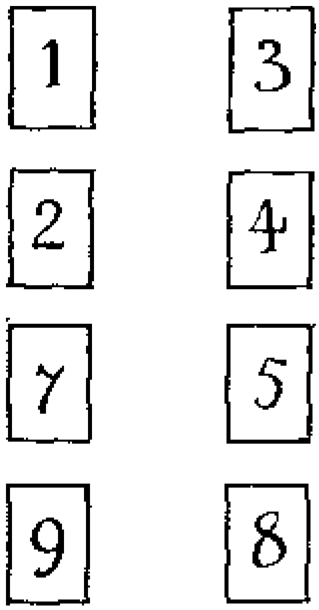
**136. Двадцать четыре.** В одной книге было написано: «Запишите число 24 с помощью трех одинаковых цифр, отличных от 8. (Существуют два решения этой задачи.)»

Там же приводились два ответа: $22 + 2 = 24$ и $3^3 - 3 = 24$. Читатели, знакомые со старой головоломкой «Четыре четверки» и с другими головоломками такого рода, могут спросить, почему существует лишь два приведенных выше решения. Может быть, вы найдете больше?




**137. Девять бочек.** Сколькими способами можно разместить девять бочек в три яруса так, чтобы числа, написанные на бочках, расположенных справа от любой из бочек или под ней, были больше числа, написанного на самой бочке? Первым правильным размещением, которое придет вам в голову, будет то, при котором в верхнем ряду стоит 123, в следующем 456 и внизу 789. На рисунке я привожу второе размещение. Сколькими способами можно разместить бочки?

**138. Восемь карт.** Полковник Крэкхэм во время завтрака положил на стол 8 перенумерованных карт (см. рисунок) и попросил своих юных друзей переложить их с помощью



возможно меньшего числа передвижений таким образом, чтобы суммы цифр, стоящих в двух столбцах, были равны. Можно ли это сделать?

**139. Два числа.** Можете ли вы найти два числа, составленные из одних единиц, которые при сложении и умножении дают одинаковый результат? Конечно, 1 и 11 очень близки к решению, но все же для решения не годятся, так как при сложении они дают 12, а при умножении — только 11.

**140. Пример на умножение.** Однажды за завтраком Крэкхэмы рассуждали о высоких материях, как вдруг Джордж попросил свою сестру Дору быстро перемножить

$$1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 \times 7 \times 8 \times 9 \times 0.$$

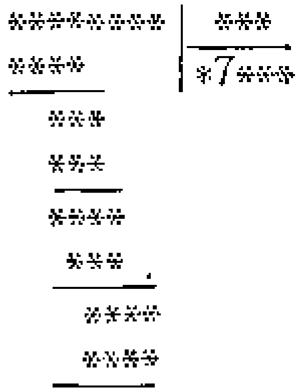
Сколько времени займет отыскание этого произведения у читателя?

**141. Интересный сомножитель.** Какое число обладает тем свойством, что если его умножить на 1, 2, 3, 4, 5 или 6, то в ответе появятся лишь те цифры, которые содержатся в записи исходного числа?

**142. Сумма кубов.** Числа 407 и 370 совпадают с суммой кубов своих цифр. Так, 4 в кубе равно 64, куб 0 равен 0, а куб 7 есть 343. Сложив 64, 0 и 343, вы получите 407. Аналогично куб числа 3 (27), прибавленный к кубу числа 7 (343), даст 370.

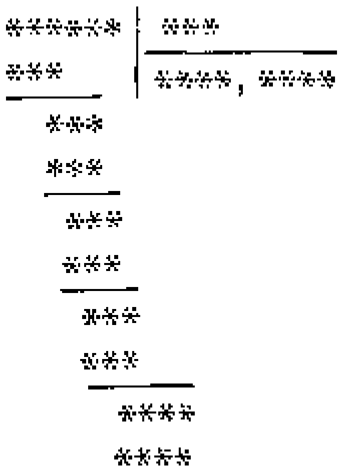
Не могли бы вы найти число, не содержащее нуля и обладающее тем же свойством? Разумеется, мы исключаем тривиальный случай числа, равного 1.

**143. Одинокая семерка.**



Эта головоломка, насколько я знаю, первый пример головоломки такого рода, в которой известна лишь одна цифра. По-видимому, она имеет единственное решение, и, как это ни странно, восстановить пропущенные цифры совсем нетрудно. Так, поскольку делитель, умноженный на 7, дает три цифры, то мы заключаем, что первая цифра делителя равна 1. Затем можно показать, что первая цифра делимого также равна 1. Поскольку две цифры делимого сносятся вниз, предпоследняя цифра частного равна 0. Наконец, первая и последняя цифры частного больше 7, поскольку в произведении с делителем они дают четыре цифры, и т. д.

**144. Совсем без цифр.**



Вот головоломка, составленная мистером А. Корриганом, в которой не известно ни одной цифры. Обратите внимание на запятую в частном. Благодаря тому что после запятой стоят четыре цифры, головоломка решается неожиданно легко.

**145. Простое умножение.** Джордж Крэкхэм однажды за завтраком предложил следующую головоломку:

```
  **********
×          2
  ----------
  **********
```

Джордж попросил поставить вместо звездочек все десять цифр в каждой строке так, чтобы при умножении получился правильный ответ. Он сказал также, что 0 не должен стоять ни в начале, ни в конце данных чисел.

Не сможет ли читатель найти ответ?

**146. Полностью без цифр.**

```
***********| ***
 ***       |--------
-----      | ********
  ***
  ***
  ----
  ****
  ****
  -----
    ***
    ***
    ----
    ****
    ****
    -----
     ****
     ****
     -----
      ****
      ****
      -----
       ****
       ****
      -----
```

Вот еще одна хорошая головоломка. Условия ее таковы:

1. Никакая цифра не встречается дважды ни в одном ряду цифр, кроме делимого.

2. Если прибавить 2 к последней цифре частного, то получится предпоследняя цифра, а если 2 прибавить к третьей справа цифре частного, то получится четвертая справа цифра. Так, например, частное могло бы оканчиваться на 9742 или на 3186.

Нам удалось найти только одно решение.

**147. Четные и нечетные.**

```
**********  | ***
OE*         |--------
------      | *******
 ****
 OO**
 -----
   ***
  EE*
  ----
    ***
   EO*
   ----
    ****
    EE**
    -----
      ***
     OO*
     ----
```

В этой головоломке с делением каждая звездочка и буква стоит вместо цифры, причем буква *O* соответствует нечетной (1, 3, 5, 7 или 9), а буква *E* — четной (2, 4, 6, 8 или 0) цифре.

Не смогли бы вы восстановить все цифры? Задача допускает шесть решений. Быть может, вы сумеете найти одно из них или даже все.

**148. Деление.**

```
**7*********  | ****7*
*******       |--------
--------      | **7**
*****7*
*******
--------
  *7****
  *7****
  -------
  *******
   ****7**
   --------
     ******
     ******
    -------
```

Не могли бы вы восстановить данный пример на деление, не стирая семерки и не заменяя их другими цифрами? Если вы попытаетесь решить задачу, считая, что все семерки заданы и других нет, то вы приметесь тем самым за явно безнадежную работу, хотя доказательство этого факта достаточно сложно. Задача решается сравнительно просто, если предположить, что любое число семерок разрешается ставить на любое место в промежуточных результатах (хотя вводить в делимое, делитель и частное другие семерки, кроме указанных в условии задачи, запрещается).

**149. Без цифр.**

```
*********  | ***          ******  | **
 ***       |------        **      |-----
-----      | ******       --      | *****
   ****                    ***
    ***                     **
    ---                     ---
     ***                     ***
     ***                     ***
     ---                     ---
     ****                     ***
     ****                     ***
     ----                     ---
```

Следует помнить, что головоломки, в которых цифры заменены звездочками, нельзя решить, если нет дополнительных условий или не указано хотя бы одной цифры. Быть может, следующая головоломка близка к идеалу, хотя в ней производятся два деления, связанные между собой тем условием, что первое частное равно второму делимому. По-видимому, эта задача имеет лишь одно решение.

**150. Действия с буквами.** Существует много общего между теми головоломками, в которых следует восстановить арифметические действия по нескольким заданным цифрам и большому количеству звездочек, и теми, где каждая цифра заменена вполне определенной буквой, причем разным буквам соответствуют разные цифры. И те и другие головоломки решаются аналогично. Вот небольшой пример задач второго типа (вряд ли его можно назвать трудным):

```
MTVVR  | PR
MVR    |-----
----   | RSR
 KKV
 KMD
 ----
   MVR
   MVR
   ---
```

Можете ли вы восстановить это деление? Каждая цифра заменена своей буквой.

**151. Арифметика букв.** Вот головоломка с вычитанием, решение которой, возможно, доставит читателю несколько приятных минут.

Пусть *AB*, умноженное на *C*, равно *DE*. Если *DE* вычесть из *FG*, то получится *HI*:

$$\begin{array}{r} FG \\ -\ DE \\ \hline HI \end{array}$$

Каждая буква обозначает вполне определенную цифру (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 или 9). Цифра 0 в записи примера не встречается.

**152. Цифры вместо букв.** Однажды утром профессор Рэкбрейн предложил своим юным друзьям следующую довольно трудную задачу. Он выписал буквы алфавита в следующем порядке:

$$ABCD \times EFGHI = ACGEFHIBD.$$

— Каждая буква,— сказал он, — обозначает свою цифру от 1 до 9 (0 исключен). Четырехзначное число, умноженное на пятизначное, дает число, содержащее все 9 цифр в указанном порядке. Можете ли вы подставить цифры вместо букв так, чтобы выполнялось написанное равенство?

**153. Тайна лавочника.** Один лавочник, желая сохранить свои счета в тайне, выбрал слово из десяти букв (все разные) вроде ЗАЧЕРКНУТЬ, где каждая буква соответствует цифре в следующем порядке: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 0. Например, в случае приведенного выше ключевого слова ЗА означает 12, ЧЕР — 345 и т, д. Если сумма

$$\begin{array}{r} +\begin{array}{r}\text{ДЕСКЧ}\\ \text{ИНВОП}\end{array} \\ \hline \text{ПДСИОН} \end{array}$$

записана в таком коде, то каким ключевым словом пользовался лавочник? Найти ответ нетрудно.

**154. «Пчелиный воск».** В неком секретном коде слово *BEESWAX*[8] обозначает число. Полиция не могла найти ключ к этому коду до тех пор, пока среди бумаг не обнаружила следующую запись:

$$\begin{array}{r} EASEBSBSX \\ BPWWKSETQ \\ \hline KPEPWEKKQ \end{array}$$

Сыщики предположили, что здесь изображена сумма, но никак не могли ее расшифровать. Затем одного из них осенила блестящая идея, что, быть может, здесь изображено не сложение, а вычитание. Догадка и в самом деле оказалась верной: подставив разные цифры вместо разных букв, сыщики разгадали код.

Какое число записывается в этом коде как *BEESWAX*?

**155. От «неверного» к «верному».**[9]

— Из двух «неверно» не сделаешь «верно»,— сказал кто-то за завтраком.

— Я в этом не уверен,— возразил полковник Крэкхэм.— Вот вам пример (каждая буква обозначает свою цифру, а все зашифрованные цифры отличны от нуля):

$$\begin{array}{r} WRONG \\ WRONG \\ \hline RIGHT \end{array}$$

Если вы подставите нужные цифры, то равенство будет выполнено. Это можно сделать несколькими способами.

**156. Умножение букв.** В этом маленьком примере на умножение пять букв соответствуют пяти различным цифрам. Каким именно? Среди цифр нет нуля.

$$\begin{array}{r} \times \begin{array}{r} SEAM \\ T \end{array} \\ \hline MEATS \end{array}$$

**157. Секретный код.** У двух конспираторов был секретный код. Иногда в их переписке попадались несложные арифметические действия, имевшие совершенно невинный вид. Однако в коде каждая из десяти цифр обозначала свою букву алфавита. Так, однажды встретилась сумма, которая, после того как вместо цифр подставили соответствующие буквы, приняла вид[10]

$$\begin{array}{r} FLY \\ FOR \\ YOUR \\ \hline LIFE \end{array}$$

Интересно было бы восстановить эту сумму, зная, что $I$ и $O$ обозначают соответственно цифры 1 и 0.

**158. Буквенно-цифровая головоломка.** Эту головоломку при верном подходе разгадать нетрудно:

$$A \times B = B,\ B \times C = AC,\ C \times D = BC,\ D \times E = CH,$$

$$E \times F = DK,\ F \times H = CJ,\ H \times J = KJ,\ J \times K = E,$$

$$K \times L = L,\ A \times L = L.$$

Каждая буква обозначает свою цифру, и, разумеется, *AC*, *BC* и т. д. — это двузначные числа. Можете ли вы определить, какой цифре соответствует каждая буква?

**159. Плата мельнику.** Вот одна очень простая головоломка, хотя я встречал людей, которые размышляли над ней по нескольку минут.

Мельник брал в уплату за помол $\frac{1}{10}$ всей муки. Сколько муки получилось из зерна крестьянина, если после уплаты мельнику у него остался один мешок?

**160. Куры и яйца.** Вот новый вариант старой задачи. Хотя она и выглядит очень сложной и запутанной, при правильном подходе ее решить чрезвычайно легко.

Если полторы курицы несут полтора яйца за полтора дня, то сколько кур плюс полкурицы, несущихся в полтора раза быстрее, снесут десяток яиц с половиной за полторы недели?

**161. Стада овец.** Четыре брата решили пересчитать своих овец. Оказалось, что у Клода на десять овец больше, чем у Дана. Если бы Клод дал четверть своих овец Бену, то у Клода и Адама вместе стало бы столько же овец, сколько у Бена и Дана вместе. Если бы затем Адам дал одну треть Бену, Бен дал бы после этого четверть своих овец Клоду, который потом отдал бы пятую часть Дану, а Бен затем поделил бы четверть своих овец поровну между Адамом, Клодом и Даном, то у каждого оказалось бы равное число овец.

Сколько овец было у каждого?

**162. Продажа яиц.** Одна женщина понесла на рынок яйца и какую-то их часть продала. На следующий день ее курочки постарались, удвоили количество оставшихся яиц, и она продала столько же, сколько и в предыдущий день. На третий день новый остаток был утроен, и женщина продала столько же яиц, сколько и в предыдущие дни. На четвертый день новый остаток учетверился, на пятый — упятерился, причем женщина ежедневно продавала одинаковое количество яиц. На исходе пятого дня все яйца были проданы.

Какое наименьшее количество яиц могла понести на рынок женщина в первый день и по скольку яиц она продавала ежедневно?

**163. Кошка и мышка.**

— В одной из этих бочек сидит мышка,— сказал пес.

— В которой? — спросила кошка.

— Да вон, в пятисотой.

— Что ты хочешь этим сказать? Ведь тут всего только пять бочек.

— Бочка, которую я имею в виду, будет пятисотой, если ты начнешь считать вперед и назад вот так.

И пес объяснил, как именно следует считать:

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| 9 | 8 | 7 | 6 | |
| | 10 | 11 | 12 | 13 |

Например, седьмая бочка совпадет с той, на которой стоит цифра 3, а двенадцатая бочка — с той, на которой стоит 4.

— Это займет много времени,— сказала кошка и начала терпеливо считать. Несколько раз она сбивалась и начинала все сначала.

— Проклятье! — воскликнул пес.— Торопись, или будет слишком поздно!

— Будь ты неладен! Опять ты меня сбил, теперь придется начинать все сначала, А тем временем мышка, слышавшая весь разговор, прогрызла дырку и улизнула в тот самый момент, когда кошка прыгнула в нужную бочку.

— Так я и знал,— сказал пес.— Твое образование я бы не решился назвать слишком блестящим. Небольшое знакомство с арифметикой не повредило бы любой кошке, равно


как не вредит оно и любой собаке. Да что я говорю! Даже некоторые змеи столь усердно занимаются этой наукой, что им приходится носить очки!

Которая же из бочек была пятисотой? Не могли бы вы найти ответ, не считая до 500?

**164. Армейское соединение.** В состав армейского соединения, насчитывающего немногим более 20 тыс. человек, входит 5 бригад. Известно, что $\frac{1}{3}$первой бригады, $\frac{2}{7}$второй, $\frac{7}{12}$третьей, $\frac{9}{13}$четвертой и $\frac{15}{22}$пятой бригады имеют равную численность.

Сколько человек в каждой бригаде?

**165. Решающий голос.** Съезд Объединенного общества странствующих попрошаек (более известного под названием Союза бродяг) собрался, чтобы решить вопрос о том, следует ли объявить забастовку, требуя сокращения рабочего дня и увеличения подаяний. Было решено, что при голосовании те члены общества, которые отдадут свои голоса в пользу забастовки, останутся стоять, а те, кто против, сядут.

— Джентльмены,— сказал председатель собрания после подсчета голосов,— я имею удовольствие сообщить, что забастовка утверждена большинством, составляющим четвертую часть оппозиции. *(Громкие возгласы одобрения.)*

— Господин председатель,— крикнули сзади,— кое-кто из нас не смог сесть.

— Почему?

— Да здесь нет стульев.

— Тогда, быть может, те, кто хотел, но не смог сесть, не откажутся поднять руки... Я вижу, вас двенадцать человек, так что забастовка отменяется большинством в один голос. *(Свистки и беспорядок в зале.)*

Сколько членов Общества попрошаек участвовало в голосовании?

**166. Три брата.** Военным властям надлежало решить вопрос, кого из трех сыновей некоего торговца следует освободить от воинской повинности.

— Я вам скажу, на что они способны,— заявил отец.— Артур и Бенджамин могут сделать за 8 дней ту же работу, на которую Артур и Чарлз затратят 9 дней, а Бенджамин и Чарлз — 10.

Поскольку ясно, что участие Чарлза лишь замедляет работу (с кем бы из братьев в паре он ни работал, времени на работу затрачивается больше, чем без него), то он и является самым слабым работником. Властям только это и нужно было узнать.

Нам же любопытно узнать и другое: за сколько дней каждый из братьев в отдельности сможет выполнить одну и ту же работу?

**167. Номер дома.** Один человек сказал, что дом его друга расположен на длинной улице (причем на той стороне, где стоит дом, дома нумеруются по порядку: 1, 2, 3 и т. д.) и что сумма номеров от начала улицы до дома друга совпадает с суммой номеров от дома друга до конца улицы. Известно также, что на стороне улицы, где расположен дом друга, домов больше 50, но меньше 500.

Каков номер дома, где живет друг рассказчика?

**168. Еще одна головоломка с номерами домов.** Браун живет на улице, на которой больше 20, но меньше 500 домов (все дома перенумерованы по порядку: 1, 2, 3 и т. д.). Браун обнаружил, что все номера от первого до его собственного включительно в сумме дают половину суммы всех номеров, от первого до последнего включительно.

Каков номер его дома?

**169. Третья головоломка с номерами домов.** На одной длинной улице Брюсселя дома перенумерованы по одну сторону четными, а по другую нечетными числами (способ нумерации, принятый во многих странах).

1. Если человек живет на нечетной стороне улицы и сумма всех номеров по одну сторону от его дома совпадает с суммой номеров по другую, то сколько домов на этой стороне улицы и каков номер его дома?

2. Если человек живет на четной стороне улицы и сумма всех номеров по одну сторону от его дома совпадает с суммой номеров по другую, то сколько домов на этой стороне улицы и каков номер его дома?

Мы предполагаем, что на каждой стороне улицы расположено больше 50 и меньше 500 домов.

**170. Исправьте ошибку.** Хильде Вильсон потребовалось умножить некоторое число на 409, но она сделала ошибку, которую часто допускают дети, начинающие изучать арифметику: первую цифру произведения на 4 она поместила не под третьей цифрой справа, как положено, а под второй. (Мы все так делали в детстве, когда в сомножителе встречался

0.) В результате этой маленькой ошибки Хильда получила число, отличающееся ни много, ни мало на 328 320 от правильного ответа.

Какое число Хильда умножала на 409?

**171. Семнадцать лошадей.**

— Я думаю, что вы знаете эту старую головоломку,— сказал Джеффрис.— Один фермер по завещанию оставил трем своим сыновьям 17 лошадей, которые нужно было разделить между ними в следующих пропорциях: старшему $\frac{1}{2}$, среднему $\frac{1}{3}$и младшему $\frac{1}{9}$. Как разделить лошадей?

— Да, по-моему, мы все ее знаем,— ответил Робинсон,— но она не имеет решения. Тот ответ, который всегда дают, ошибочен.

— Вы имеете в виду,— вступил в разговор Проджерс,— то решение, где сыновья занимают еще одну лошадь у соседа, чтобы получилось 18, а затем берут соответственно по 9, 6 и 2 лошади и возвращают занятую лошадь соседу?

— Вот именно,— сказал Робинсон,— причем каждый сын получает больше, чем ему полагалось.

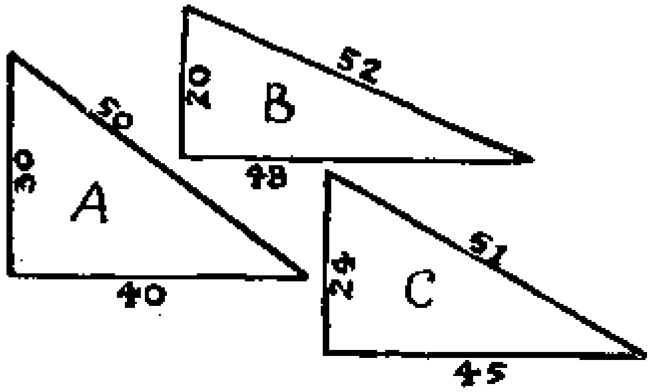
— Стоп! — воскликнул Бенсон.— Вы не правы. Ведь если бы каждый сын получил больше, чем ему причиталось, то всего лошадей стало бы больше 17, но 9, 6 и 2 дают в сумме ровно 17.

— На первый взгляд это действительно кажется странным,— заметил Робинсон,— но все дело в том, что если бы каждый сын получил положенную ему долю наследства, то всего им досталось бы меньше 17 лошадей. Фактически еще осталась бы нетронутая часть. Задача и в самом деле не имеет решения.

— А вот здесь-то вы все и ошибаетесь,— заметил Джеффрис.— Условия завещания можно выполнить совершенно точно, не покалечив ни одной лошади.

К общему изумлению, он показал, как это сделать. Как поделить лошадей в строгом соответствии с завещанием?

**172. Равные периметры.** Рациональные прямоугольные треугольники занимали воображение людей еще во времена Пифагора, задолго до нашей эры. Каждому школьнику известно, что стороны таких треугольников, выраженные обычно в целых числах, обладают тем свойством, что квадрат гипотенузы равен сумме квадратов катетов. Так, на рисунке




в случае *A* квадрат 30 (900) плюс квадрат 40 (1600) равен квадрату 50 (2500); то же верно и в случаях *B*, *C*. Легко проверить, что у данных трех треугольников одинаковые периметры. Сумма длин всех сторон равна в каждом случае 120.

Можете ли вы найти 6 рациональных прямоугольных треугольников с одинаковым (наименьшим из возможных) периметром? Эта задача не столь трудна, как головоломка «Четыре принца» из моей книги «Кентерберийские головоломки»[11], где требовалось найти четыре таких треугольника равной площади.

**173. Потомство коровы.** «Допустим,— сказал мой приятель фермер Ходж,— что моя корова в двухлетнем возрасте даст в приплод телку. Допустим также, что она будет приносить по телке каждый год и что каждая из телок, достигнув двухлетнего возраста, последует примеру матери и будет ежегодно приносить по телке и т. д. Скажи-ка теперь, каково будет потомство этой коровы через 25 лет?»

Из пояснений Ходжа явствовало, что время он отсчитывал со дня рождения самой первой коровы и что за все 25 лет у него не будет ни своей говядины, ни своей телятины.

**174. Сумма, равная произведению.**

— Подумать только,— сказал мне один человек,— существуют два числа, сумма которых равна их произведению; то есть получится одно и то же, сложите ли вы их или перемножите между собой. Это 2 и 2, так как их сумма и произведение равны 4.

Далее он допустил грубую ошибку, сказав:

— Я обнаружил, что это единственные два числа, обладающие таким свойством.

Я попросил его написать любое число, сколь угодно большое, и сказал, что немедленно укажу другое число так, чтобы их сумма и произведение совпадали. Ему понравилось 987 654 321, и я быстро написал второе число.

Какое именно?

Оказывается, для любого наперед заданного числа существует другое число, вместе с которым оно обладает указанной особенностью. Если читателю об этом не известно, то, быть может, данная задача его заинтересует и он сам попытается найти соответствующую закономерность.

**175. Квадраты и кубы.** Можете ли вы найти два числа, разность квадратов которых представляет собой куб, а разность кубов — квадрат? Каковы два наименьших числа, обладающих этим свойством?

**176. Интересный куб.** Чему равна (в метрах) длина ребра куба, у которого:

1) полная поверхность и объем выражаются одним и тем же числом;

2) полная поверхность равна квадрату объема;

3) квадрат полной поверхности равен объему?

**177. «Общий делитель».** Вот одна головоломка, которую часто задают мне читатели (разумеется, конкретные числа в ней приводятся разные). Корреспондент одной провинциальной газеты сообщил, что многие учителя подорвали свое здоровье в тщетных попытках ее решить! Наверное, он немного преувеличил, потому что вопрос на самом деле простой, правда, если догадаться, с какой стороны к нему подойти.

Он заключается в следующем. Найти число, при делении на которое три числа 480 608, 508 811 и 723 217 давали бы один и тот же остаток.

**178. Странное умножение.** Меня часто просили объяснить следующий факт, который, несомненно, заинтересует многих читателей, не знавших о нем ранее. Если некто правильно выполняет сложение, но не умеет ни умножать, ни делить на числа, большие 2, то, оказывается, он сможет получить произведение любых двух чисел следующим странным способом. Предположим, например, что требуется умножить 97 на 23. Составляем 2 столбца чисел:

| | |
|---|---|
| 97 | 23 |
| 48 | (46) |
| 24 | (92) |
| 12 | (184) |
| 6 | (368) |
| 3 | 736 |
| 1 | 1472 |
| | 2231 |

Мы последовательно делим на 2 числа первого столбца, отбрасывая остаток, пока не получим 1, а числа второго столбца столько же раз умножаем на 2. Если вычеркнуть те произведения, которые стоят против четных чисел левого столбца (мы заключили их в скобки), и сложить оставшиеся, то получится правильный ответ: 2231.

Почему?

**179. Забракованная пушка.** Эту нехитрую головоломку из области артиллерийской техники вы, вероятно, решите не задумываясь. Она настолько проста, что понять ее может даже ребенок. Никаких сведений из области артиллерии для решения головоломки не требуется. Тем не менее кое-кому из моих читателей придется поразмыслить над ней минут пять.

Один изобретатель предложил новое большое орудие комитету, в задачу которого входило рассмотрение подобных вопросов. Изобретатель заявил, что, зарядив пушку один раз, можно сделать из нее 60 выстрелов со скоростью 1 выстрел в минуту. Провели испытания и обнаружили, что пушка делает 60 выстрелов в час. Однако изобретение было отклонено «ввиду несоответствия техническим данным, указанным в заявке».

— Какая нелепость! — возмутился изобретатель.— Вы же видели, что скорострельность пушки была именно такой, как я обещал.

— Ничего подобного,— возразили эксперты,— скорострельность была иной.

Не могли бы вы объяснить, в чем таинственная причина разногласий? Кто был прав, изобретатель или эксперты?

**180. Двадцать вопросов.** Я вспомнил одну старую игру, в которую часто играл еще в юности. Кто-нибудь загадывает что-нибудь определенное, например Большей Бен, молоток на парадной двери, бой часов в соседней комнате, верхнюю пуговицу на пиджаке приятеля или трубку мистера Болдуина. Вы должны установить, что было загадано, задав не более 20 вопросов, на каждый из которых можно отвечать лишь «да» или «нет».

Задавать вопросы следует осмотрительно, так как, спросив, например: «Это животное, растение или минерал?», вы можете получить неудовлетворительный ответ «да» и тем самым затратите один вопрос впустую. Опытный игрок в «20 вопросов» ошибается редко; мне известны чрезвычайно трудные случаи, когда решение все же удавалось найти именно при таком условии.

Недавно мне предложили один новый вариант этой игры, в котором требуется некоторая изобретательность, причем разные люди могут подойти к решению по-разному. Состоит игра в следующем. Я задумываю шестизначное число. Можно ли угадать его, задав лишь 20 вопросов, на которые я отвечу только «да» или «нет»? После двадцатого вопроса вы должны назвать это число.

**181. Карточный фокус.** Возьмите обычную колоду карт (всех валетов, дам и королей на этот раз будем считать десятками). Взглянув на верхнюю карту (пусть, к примеру, это будет семерка), положите ее на стол вверх рубашкой, после чего, продолжая считать вслух по порядку: «Восемь, девять, десять...» — и т. д. до 12, вы выкладываете поверх нее другие карты из колоды. Поскольку нижняя карта — семерка, на столе образуется стопка из 6 карт.

Взгляните еще раз на верхнюю карту оставшейся части колоды (пусть, например, это будет «бывшая королева» — теперь десятка), положите ее на стол вверх рубашкой и, продолжая считать по порядку до 12, выкладывайте при каждом счете на стол по одной карте из колоды. На Этот раз в стопке окажется 3 карты (10, 11, 12). Действуйте так до тех пор, пока вы не исчерпаете всю колоду. Если в конце раскладки карт в колоде для полной стопки (до счета 12) окажется недостаточно, отложите недостроенную стопку в сторону.

Сообщите теперь мне, сколько у вас получилось стопок и сколько карт вы отложили в сторону, и я тотчас же сообщу вам сумму значений нижних карт во всех стопках. Для этого я просто умножу на 13 число стопок, уменьшенное на 4, и прибавлю число отложенных в сторону карт. Например, если окажется 6 стопок и 5 лишних карт, то 13, умноженное на 2 (6 минус 4), плюс 5 равно 31, сумме нижних карт.

Почему так получается?

**182. Драчливые дети.** Один человек женился на вдове, и у каждого из них были дети от первого брака. Через 10 лет разыгралась битва, в которой приняли участие все дети (к тому времени их стало 12). Мать прибежала к отцу с криком:

— Иди скорее! Твои и мои дети бьют наших детей!

У каждого теперь было по 9 собственных детей.

Сколько детей родилось за эти 10 лет?

**183. Дележ яблок.** Пока Крэкхэмы заправляли свой автомобиль в одной живописной деревушке, 8 детей, направлявшихся в школу, остановились и стали наблюдать за ними. В корзине у детей было 32 яблока, которые они собирались продать. Тетушка Гертруда по доброте душевной купила все яблоки и сказала, что дети могут разделить их между собой.

Дора спросила у каждого, как его зовут, и вечером того же дня сказала (правда, кое-что усложнив): «Энн получила 1 яблоко, Мэри 2, Джейн 3 и Кэт 4. Нед Смит получил столько же яблок, сколько и его сестра, Том Браун получил яблок в 2 раза больше своей сестры, Бил Джонс — в 3 раза больше своей сестры и Джек Робинсон — в 4 раза больше своей сестры».

Ну-ка, кто из вас сумеет назвать фамилию каждой девочки?

**184. Покупая резинку.** Вот головоломка, которая по виду весьма напоминает некоторые старые головоломки, но требует совершенно иного подхода. Автор ее не известен.

Четыре матери (каждая со своей дочерью) пошли в магазин купить резинку. Каждая мать купила в 2 раза больше метров резинки, чем ее дочь, и каждая из них купила столько метров, сколько центов она платила за метр. Миссис Джонс истратила на 76 центов больше, чем миссис Уайт; Нора купила на 3 метра меньше резинки, чем миссис Браун; Глэдис купила на 2 метра больше резинки, чем Хильда, которая истратила на 48 центов меньше, чем миссис Смит.

Как зовут мать Мэри?

**185. Квадраты и треугольные числа.** Какое третье по величине число (наименьшее число считается первым) является одновременно и треугольным числом[12], и квадратом? Разумеется, первые два числа, обладающие указанным свойством,— это 1 и 36. Чему равно следующее число?

**186. Точные квадраты.** Найдите четыре числа, сумма каждой пары которых и сумма которых представляли бы собой точные квадраты.

**187. Элементарная арифметика.** Вот один вопрос, похожий на те, что были так популярны в Венеции (да и не только в ней) в середине XVI в. Своим появлением они во многом были обязаны Николе Фонтана, больше известному под именем Тарталья (заика).

Если бы четверть от двадцати равнялась четырем, то чему равнялась бы треть от десяти?

**188. Перестановка цифр.** Если мы хотим умножить 571 428 на 5 и разделить на 4, то для этого нам нужно лишь переставить 5 из начала в конец: число 714 285 дает верный ответ.

Не сумели бы вы найти число, которое можно было бы умножить на 4 и разделить затем на 5 столь же просто: переставив первую цифру в конец?

Разумеется, если бы разрешалось переставлять цифру из конца в начало, то 714 285 подошло бы и на этот раз. Однако цифру следует переставлять именно из начала в конец.

**189. Странное сложение.** Однажды во время завтрака полковник Крэкхэм попросил юных членов своей семьи написать 5 нечетных цифр, которые в сумме давали бы 14. Сделать это смог лишь один из них.

**190. Шесть простых вопросов.**

1) Вычтите четыре тысячи одиннадцать сотен с половиной из двенадцати тысяч двенадцати сотен двенадцати.

2) Добавьте 3 к 182 так, чтобы результат получился меньше 20.

3) Какие 2 числа в произведении дают 7?

4) Какие 3 цифры при умножении на 5 дают 6?

5) Если бы четырежды пять равнялось 33, то чему равнялась бы четверть от 20?

6) Найдите дробь, у которой числитель был бы меньше знаменателя и это свойство сохранялось бы при перевертывании дроби.

**191. Три пастуха.** Когда Крэкхэмы подъезжали к одному большому городу, им пришлось остановиться, потому что по дороге двигалось стадо овец, за ним — стадо быков, а следом пастухи гнали табун лошадей. Крэкхэмы поняли, что в городе сегодня базарный день. Джордж, воспользовавшись случаем, придумал следующую головоломку.

Три пастуха, гнавших свои стада, встретились на большой дороге. Джек и говорит. Джиму:

— Если я дам тебе 6 свиней за одну лошадь, то в твоем стаде будет вдвое больше голов, чем в моем.

А Дан заметил Джеку:

— Если я дам тебе 14 овец за одну лошадь, то у тебя в стаде будет втрое больше голов, чем у меня.

Джим в свою очередь сказал Дану:

— А если я дам тебе 4 коровы за лошадь, то твое стадо станет в 6 раз больше моего.

Сделки не состоялись, но не могли бы вы все же сказать, сколько голов скота было в трех стадах?

**192. Пропорциональное представительство.** Когда Крэкхэмы остановились в Манглтоне- на-Блисе, то застали жителей этого городка взбудораженными в связи с местными выборами. Выборы проходили по принципу пропорционального представительства. Каждому избирателю давался бюллетень с 10 именами кандидатов. Избиратель должен был поставить N 1 против кандидата, за которого отдавал свой первый голос, N 2 против того, за которого он отдавал второй голос, и т. д. до десятого включительно.

Избиратели должны были ставить «галочку» против N 1, против других номеров «галочки» можно было ставить или нет по желанию. Джордж предложил остальным членам семьи узнать, сколькими различными способами может избиратель расставить «галочки» в своем бюллетене.

**193. Вопрос относительно кубов.** Профессор Рэкбрейн однажды утром заметил, что кубы последовательных чисел, начиная с 1, могут в сумме давать полный квадрат. Так, сумма кубов 1, 2, 3 (то есть 1 + 8 + 27) равна 36, или $6^2$. Профессор утверждал, что если брать последовательные числа, начиная не с 1, то наименьшими числами, сумма кубов которых равна квадрату некоторого числа, будут 23, 24 и 25 ($23^3 + 24^3 + 25^3 = 204^2$). Профессор Рэкбрейн предложил найти два наименьших набора последовательных чисел, начинающихся не с 1 и состоящих более чем из трех чисел, сумма кубов которых также равна квадрату некоторого натурального числа.

**194. Два куба.** «Не могли бы вы найти,— спросил профессор Рэкбрейн,— два последовательных куба, разность между которыми была бы полным квадратом? Например, $3^3 = 27$, а $2^3 = 8$, но их разность (19) не является полным квадратом».

Каково наименьшее возможное решение?

**195. Разность кубов.** Число 1 234 567 можно представить в виде разности квадратов, стоит только выписать два числа, 617 284 и 617 283 (половина данного числа плюс $\frac{1}{2}$ и минус $\frac{1}{2}$ соответственно), и взять разность их квадратов[13]. Найти же два куба, разность которых равнялась бы 1 234 567, несколько труднее.

**196. Составные квадраты.** Можете ли вы найти два трехзначных квадрата (без нулей), которые, будучи выписанными подряд, образуют шестизначное число, в свою очередь представляющее собой квадрат? Например, из 324 и 900 ($18^2$ и $30^2$) получается 324 900 ($570^2$), но число 900 содержит два нуля, что запрещено условием.

Задача имеет лишь одно решение.

**197. Квадраты в арифметической прогрессии.** Как-то утром профессор Рэкбрейн предложил своим молодым друзьям найти три целых числа, образующих арифметическую прогрессию, при этом сумма любых двух из этих трех чисел должна представлять собой квадрат.

**198. Дополнение до квадрата.** «Какое число,— спросил полковник Крэкхэм,— обладает тем свойством, что если его прибавить к числам 100 и 164 в отдельности, то каждый раз получатся точные квадраты?»

**199. Каре.** «Один офицер построил своих солдат в каре,— сказала Дора Крэкхэм,— при этом 30 человек у него оказались лишними. Тогда он решил увеличить сторону квадрата на одного человека, но в этом случае ему 50 человек не хватило.

Сколько солдат было у офицера?»

**200. Квадраты и кубы.** Найдите два различных числа, сумма квадратов которых была бы кубом, а сумма кубов — квадратом.

**201. Молоко и сливки.** Профессор Рэкбрейн, отведав за завтраком сливок, задал следующий вопрос:

— Честный молочник обнаружил, что в молоке, которое дает его корова, содержится 5% сливок и 95% снятого молока.

Сколько снятого молока он должен добавить в каждый литр цельного молока, чтобы снизить содержание сливок до 4%?

**202. Орехи для обезьян.** Один человек принес к вольере с обезьянами мешок орехов. Оказалось, что если бы он поделил эти орехи поровну между 11 обезьянами в первой клетке, то остался бы лишний орех, если бы он поделил их между 13 обезьянами во второй клетке, то осталось бы 8 орехов и, наконец, если бы он поделил их между 17 обезьянами в последней клетке, то осталось бы 3 ореха.

Выяснилось также, что если бы он поделил орехи поровну между 41 обезьяной во всех трех клетках или между обезьянами в любых двух клетках, то в любом из этих случаев оставался бы излишек орехов.

Какое наименьшее число орехов могло быть в мешке?

**203. Дележ яблок.** Однажды утром Дора Крэкхэм спросила у брата:

— Если у трех мальчиков есть 169 яблок, которые они должны разделить между собой в отношении 1 : 2, 1 : 3 и 1 : 4, то сколько яблок достанется каждому из них?

**204. Колка дров.** Однажды за завтраком полковник Крэкхэм сказал, что двое знакомых ему рабочих могут за день напилить 5 кубометров дров. Наколоть же пиленых дров они могут за день 8 кубометров. Полковнику хотелось бы знать, сколько кубометров дров нужно напилить рабочим, чтобы за остаток дня успеть их наколоть.

**205. Пакеты с орехами.** Джордж Крэкхэм положил за завтраком на стол 5 бумажных пакетов. Когда его спросили, что в них такое, он ответил:

— Я положил в эти пять пакетов сто орехов. В первом и втором пакетах 52 ореха, во втором и третьем — 43, в третьем и четвертом — 34; в четвертом и пятом — 30. Сколько орехов в каждом пакете?

**206. Распределение орехов.** Тетушка Марта купила орехов. Томми она дала один орех и четверть оставшихся, и Бесси получила один орех и четверть оставшихся, Боб тоже получил один орех и четверть оставшихся, и, наконец, Джесси получила один орех и четверть оставшихся. Оказалось, что мальчики получили на 100 орехов больше, чем девочки.

Сколько орехов тетушка Марта оставила себе?

**207. Юные разбойники.** Три юных «разбойника с большой дороги», возвращаясь из кино, встретили торговку с яблоками. Том схватил половину всех яблок, но 10 бросил обратно в корзину. Бен взял треть оставшихся, но вернул назад 2 яблока, которые ему не понравились. Джим взял половину оставшихся яблок, но кинул назад одно червивое. У торговки в корзине осталось только 12 яблок.

Сколько яблок было у торговки до налета?

**208. Бисквиты.** Один торговец упаковал свои бисквиты (все одинакового качества) в коробки по 16, 17, 23, 39 и 40 фунтов соответственно и не желал продавать их иначе, как целыми коробками. Покупатель попросил его отпустить 100 фунтов бисквитов.

Не могли бы вы выполнить этот заказ? Если нет, то насколько близко сможете вы подобраться к цифре 100? Разумеется, у торговца достаточно коробок каждого веса.

**209. Трое рабочих.**

— Мы с Билом,— сказал Кейзи,— можем выполнить для вас эту работу за 10 дней, а если вместо Била будет Алек, то мы справимся и за 9 дней.

— А еще лучше,— сказал Алек,— дайте мне в помощь Била, и мы сделаем вашу работу за 8 дней.

Сколько времени потребуется каждому рабочему для того, чтобы выполнить эту работу в одиночку?

**210. Работая в одиночку.** Альфред и Бил вместе могут выполнить некоторую работу за 24 дня. Если Альфред может сделать только $\frac{2}{3}$ того, что делает Бил, то за сколько дней каждый из них выполнит ту же работу в одиночку?

**211. «Бумеранг».** Я называю «бумерангом» один из самых древних видов арифметических головоломок. Кого-нибудь просят загадать число и после ряда вычислений сказать результат. Услышав результат, тот, кто задавал вопрос, немедленно сообщает задуманное число. Существуют согни различных вариантов этой головоломки.

Самый старый из зафиксированных письменно примеров этой головоломки встречается, по-видимому, в «Арифметике» Никомаха, который умер около 120 г. Он просит вас задумать любое целое число от 1 до 100 и затем разделить его последовательно на 3, 5 и 7, сообщая каждый раз остаток. Получив эти сведения, он немедленно отгадывает задуманное вами число.

Не смог бы читатель придумать простой способ, позволяющий в уме совершить этот подвиг? Если нет, то, может быть, ему будет интересно узнать, как это делал древний математик.

**212. Пчелы Лонгфелло.** Когда Лонгфелло был профессором новых языков в Гарвардском колледже, он часто развлекался, задавая своим студентам более или менее простые арифметические головоломки. Вот одна из них.

Если $\frac{1}{5}$ пчелиного роя полетела на цветы ладамбы, $\frac{1}{3}$ — на цветы слэндбары, утроенная разность между этими числами полетела на дерево, а одна пчела продолжала летать между ароматными кетаки и малати, то сколько всего было пчел?

**213. Лилавати.** Вот небольшая задачка, заимствованная из «Лилавати» (1150 г.) Бхаскары[14].

«Прекрасная дева с лучистым взором назвала мне число. Если это число умножить на 3, прибавить $\frac{3}{4}$ произведения, разделить на 7, уменьшить на уз частного, умножить на себя, уменьшить на 52, извлечь квадратный корень, прибавить 8, разделить на 10, то получится 2».

При правильном подходе решить эту задачу, как и многие другие старинные головоломки, невероятно легко.

**214. Задача печатника.** Некий печатник получил годовой заказ на 10 000 афиш в месяц. Разумеется, в январе на афише должно было стоять слово «ЯНВАРЬ», а в феврале —

«ФЕВРАЛЬ» и т. д. Таким образом, необходимо было напечатать 10 000 афиш с надписью «ЯНВАРЬ», 10 000 афиш с надписью «ФЕВРАЛЬ», 10 000 афиш с надписью «МАРТ» и т. д. Литеры, которыми набирались названия месяцев, отливались по особому заказу и стоили дорого, поэтому печатнику хотелось купить их как можно меньше, чтобы часть литер, использованных при наборе одного месяца, можно было бы использовать и при наборе других месяцев, а запаса хватило бы на все месяцы года.

Сколько различных литер он должен купить? Разумеется, все слова печатаются прописными буквами, как и показано выше.

**215. Пчелиный рой.** Вот пример изящной формы, в которую уже упоминавшийся выше Бхаскара облек небольшую головоломку.

«Квадратный корень из половины общего количества пчел в рое вылетел на куст жасмина; $\frac{8}{9}$ всего роя осталось на месте; одна пчелка летает вокруг своего возлюбленного, жужжащего внутри лотоса, куда он залетел ночью, привлеченный ароматом этого цветка, который ныне стал его темницей. Скажи мне число пчел в рое».

**216. Слепота у летучих мышей.** Один натуралист, пытаясь мистифицировать полковника Крэкхэма, сообщил ему, что изучал вопрос о слепоте у летучих мышей.

— Я обнаружил,— сказал он,— что закоренелая привычка летучих мышей спать днем в темных углах и вылетать только по ночам привела к распространению у них слепоты, хотя некоторые особи хорошо видели обоими или одним глазом. Две из исследуемых мною мышей видели правым глазом, три — левым, четыре не видели левым и пять не видели правым глазом.

Могли бы вы подсчитать наименьшее число летучих мышей, которых пришлось осмотреть натуралисту, чтобы получить такие результаты?

**217. Зверинец.** В бродячем зверинце было два каприза природы: четырехногая птица и шестиногий теленок. Одного посетителя спросили, сколько всего там показывали птиц и животных, на что он ответил:

— Всего 36 голов и 100 ног. Остальное вы можете узнать сами.

Сколько же там было птиц и зверей?

**218. Угон овец.** Грабители угнали $\frac{1}{3}$ стада овец и $\frac{1}{3}$ овцы. Другая шайка угнала $\frac{1}{4}$ оставшихся овец и $\frac{1}{4}$ овцы. Затем третья шайка грабителей угнала $\frac{1}{5}$ остатка и еще $\frac{3}{5}$ овцы, после чего в стаде осталось 409 овец.

Сколько овец было в стаде первоначально?

**219. Дележ овец.** Некий австралийский фермер, умирая, оставил своих овец трем сыновьям. Альфред должен получить на 20% больше, чем Джон, и на 25% больше, чем Чарлз. Доля Джона составляет 3600 овец.

Сколько овец получит Чарлз? Возможно, что читателю удастся решить задачу за несколько секунд.

**220. Арифметика в такси.** Водитель такси не отличался вежливостью, и возмущенный мистер Уилкинс попросил его назвать свой номер.

— Вы хотите узнать мой номер? — сказал водитель.— Что же, пожалуйста. Если вы разделите его на 2, 3, 4, 5 или 6, то получите в остатке 1, а на 11 он разделится без остатка. Скажу еще, что из всех водителей, которые могли бы сказать о своем номере то же самое, мой номер самый маленький.

Какой номер был у водителя?

**221. Аренда.** «Как-то я обсуждал со своим другом вопрос об аренде,— сказал полковник Крэкхэм,— и он сообщил мне, что его земля сдана в аренду на 99 лет. Я спросил друга, сколько лет из этого срока уже истекло, надеясь получить прямой ответ. Но он сказал мне, что $\frac{2}{3}$ прошедшего времени равны $\frac{4}{5}$ оставшегося срока и что ответ я должен найти сам».

**222. Походная колонна.** Воинское подразделение двигалось походной колонной, в которой число шеренг превышало число солдат в шеренге на 5. Когда показался неприятель, произошло перестроение в 5 шеренг, при этом число солдат в каждой шеренге увеличилось на 845 человек.

Сколько человек было в подразделении?

**223. Год 1927.** Можно ли найти числа *p* и *q*, если $p^q - q^p = 1927$? Вот поясняющий пример для случая 1844 г. При $p = 3$ и $q = 7$ мы имеем

$$3^7 - 7^3 = 1844.$$

Сумеете ли вы записать число 1927 аналогичным образом?

**224. Ящики со снарядами.** Снаряды для шестидюймовых гаубиц были упакованы в ящики по 15, 18 и 20 штук.

— Почему у вас разные ящики? — спросил я офицера на складе.

— Видите ли,— ответил он,— это позволяет нам доставлять на батарею нужное количество снарядов, не открывая ящиков.

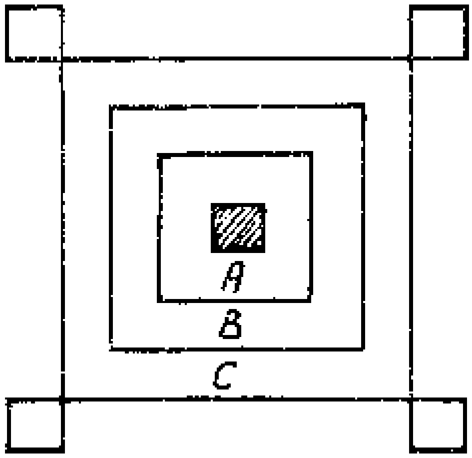
Действительно, эта система работала безотказно, когда требовалось большое количество снарядов, но оказывалась негодной, если требовалось доставить, например, 5, 10, 25 или 61 снаряд.

Какое наибольшее число снарядов нельзя доставить на батарею целыми ящиками, вмещающими по 15, 18 и 20 снарядов? Оно не слишком велико.

**225. Фруктовый сад.** Садовник решил разбить новый фруктовый сад. Он посадил молодые деревья рядами таким образом, что получился квадрат. При этом у него осталось 146 лишних саженцев. Но чтобы увеличить квадрат, добавив лишний ряд, садовнику пришлось купить еще 31 дерево. Сколько деревьев стало в саду по окончании работы?

**226. Кубики и квадраты.** Вот одна интересная, хотя и не простая головоломка, автора которой установить не удалось.

У троих детей было по совершенно одинаковой коробке с кубиками. Первая девочка составила изо всех своих кубиков квадратную рамку, отмеченную на рисунке буквой *А*.




Вторая девочка составила квадрат побольше — *B*. У третьей девочки получился еще больший квадрат — *C*, но при этом осталось 4 кубика, которые она разместила по углам, как показано на рисунке. Каждая девочка использовала все свои кубики.

Какое наименьшее число кубиков могло содержаться в каждой коробке? Не следует думать, будто на рисунке соблюдены истинные пропорции между размерами квадратов.

**227. Найдите треугольник.** Стороны и высота некоторого треугольника выражаются четырьмя последовательными целыми числами. Чему равна площадь этого треугольника?

**228. Корова, коза и гусь.** Некий фермер выяснил, что его корова и коза съедают на лужайке траву за 45 дней, корова и гусь — за 60 дней, а коза и гусь — за 90 дней. Если он выпустит одновременно на поле корову, козу и гуся, то за сколько дней они съедят на лужайке всю траву?

Сэр Исаак Ньютон в свое время показал, как следует решать головоломки, в которых трава на лугах не прекращает расти. Однако в нашей головоломке ради большей простоты мы примем, что из-за неблагоприятных погодных условий трава расти перестала.

**229. Головоломка с почтовыми марками.** Одного юнца, собиравшего марки, спросили, сколько марок в его альбоме, на что он ответил:

— Если число марок разделить на 2, то в остатке получится 1; если разделить на 3, то в остатке получится 2; если разделить на 4, то в остатке получится 3; если разделить на 5, то в остатке получится 4; если разделить на 6, то в остатке получится 5; если разделить на 7, то в остатке получится 6; если разделить на 8, то в остатке получится 7; если разделить на 9, то в остатке получится 8; если разделить на 10, то в остатке получится 9. Всего в альбоме меньше 3000 марок.

Сколько марок было в альбоме?

**230. Устный счет.** Дабы испытать способности своих учеников к устному счету, Рэкбрейн попросил их как-то утром сделать следующее:

— Найдите два целых числа (каждое меньше 10), сумма квадратов которых плюс их произведение давали бы полный квадрат.

Ответ скоро был найден.

**231. Охота на дроздов.**

Двадцать дроздов и четырежды два

Мокло под серым дождем,

Мой выстрел сразил седьмую их часть,

А сколько осталось потом?

**232. Шесть нулей.**

| *A* | *B* | *C* |
|---|---|---|
| 111 | 111 | 100 |
| 333 | 333 | 000 |
| 555 | 500 | 005 |
| 777 | 077 | 007 |
| 999 | 090 | 999 |
| 2775 | 1111 | 1111 |

Выполнив сложение в колонке *A*, вы получите сумму, равную 2775. Замените шесть цифр в этой колонке нулями так, чтобы сумма стала равна 1111. (В случае *B* пять цифр заменено нулями, а в случае *C* — девять, поэтому эти два случая нельзя считать решением задачи.)

**233. Умножение дат.** В 1928 г. были четыре даты, обладающие замечательным свойством: при записи их обычным образом произведение числа на месяц дает год. Вот эти даты: 28/1 — 28, 14/2 — 28, 7/4 — 28 и 4/7 — 28.

Сколько раз в нашем веке (с 1901 по 2000 г. включительно) встречается такое свойство? Может быть, вы попытаетесь найти год нашего столетия, в котором число таких дат максимально? Существует лишь один такой год.

**234. Сокращенные действия.** Время от времени появляются различные, подчас довольно хитроумные приемы, облегчающие устный счет. Вот один такой прием, который заинтересует тех, кто с ним не знаком.

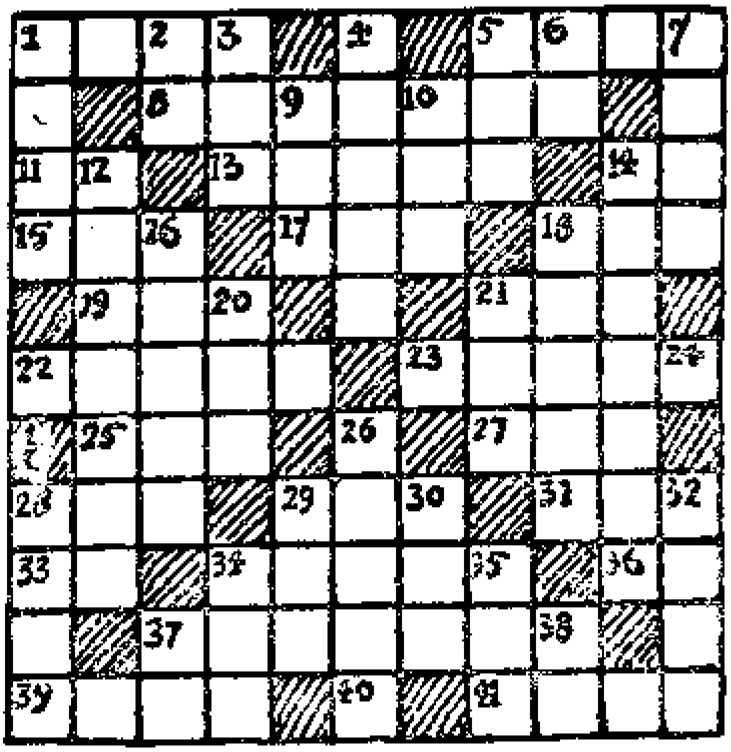
Можете ли вы перемножить в уме 993 и 879? Любопытно, что если мы имеем два двузначных числа, содержащих одинаковое количество десятков, и при этом сумма цифр их младших разрядов равна 10, то такие числа всегда можно перемножить в уме следующим образом. Допустим, нам надо умножить 97 на 93. Умножьте 7 на 3 и запишите результат, затем прибавьте 1 к 9 и умножьте на другую девятку, $9 \times 10 = 90$. Итак, $97 \times 23 = 9021$.

Это правило оказывается очень полезным при возведении в квадрат чисел, оканчивающихся на 5, как, например, $85^2 = 7225$. Имеется также простое правило умножения двух дробей, целые части которых совпадают, а дробные части в сумме дают единицу. Возьмем, например, $7\frac{1}{4} \times 7\frac{3}{4} = 56\frac{3}{16}$. Перемножив дробные части, получим $\frac{3}{16}$; прибавим 1 к 7 и, умножив результат на другую семерку, получим $7 \times 8 = 56$.

**235. Еще один любопытный пример на умножение.** Вот еще одна из головоломок профессора Рэкбрейна.

Какое число, будучи умноженным на 18, 27, 36, 45, 54, 63, 72, 81 или 99, дает произведение, у которого первая и последняя цифры совпадают с соответствующими цифрами множителя, а будучи умноженным на 90, дает произведение, у которого последние две цифры совпадают с цифрами множителей?

**236. Числовой кроссворд.** На рисунке вы видите числовой кроссворд. Он похож на обычный кроссворд, но с той разницей, что в клеточки вместо букв вписываются цифры. При этом должны выполняться следующие условия.



*По горизонтали:* 1. Точный квадрат. 4. Точный квадрат. 5. Точный квадрат. 8. Число, сумма цифр которого равна 35. 11. Квадратный корень из числа, стоящего под номером 39 по горизонтали. 13. Точный квадрат. 14. Точный квадрат. 15. Квадрат числа, стоящего под номером 36 по горизонтали. 17. Квадрат половины числа, стоящего под номером 11 по горизонтали. 18. Число с тремя одинаковыми цифрами. 19. Произведение числа, стоящего под номером 4 по горизонтали, и числа, стоящего под номером 33 по горизонтали. 21. Точный квадрат. 22. Число, стоящее под номером 5 по горизонтали, умноженное на 5. 23. Число, все цифры которого одинаковы, за исключением цифры, стоящей в середине. 25. Квадрат числа, стоящего под номером 2 по вертикали. 27. См. 20 по вертикали. 28. Четвертая степень. 29. Сумма чисел, стоящих под номерами 18 и 31 по горизонтали. 31. Треугольное число. 33. Число, на единицу большее учетверенного числа, стоящего под номером 36 по горизонтали. 34. Число, сумма всех цифр которого равна 18, а три средние цифры — тройки. 36. Нечетное число. 37. Число, все цифры которого, за исключением одной, четные, а их сумма равна 29. 39. Четвертая степень. 40. Куб. 41. Удвоенный квадрат.

*По вертикали:* 1. Число, читаемое одинаково в обе стороны. 2. Квадратный корень из числа, стоящего под номером 28 по горизонтали. 3. Сумма чисел, стоящих под номерами 17 и 21 по горизонтали. 4. Число, сумма цифр которого равна 19. 5. Число, сумма цифр которого равна 26. 6. Сумма чисел, стоящих под номерами 14 и 33 по горизонтали. 7. Точный куб. 9. Точный куб. 10. Точный квадрат. 12. Число, сумма цифр которого равна 30. 14. Число, все цифры которого одинаковы. 16. Число, сумма цифр которого равна числу, стоящему под номером 2 по вертикали. 18. Число, все цифры которого одинаковы, за исключением первой, равной 1. 20. Сумма чисел, стоящих под номерами 17 и 27 по горизонтали. 21. Число, кратное 19. 22. Точный квадрат. 24. Точный квадрат. 26. Квадрат числа, стоящего под номером 18 по горизонтали. 28. Четвертая степень числа, стоящего под номером 4 по горизонтали. 29. Удвоенное число, стоящее под номером 15 по горизонтали. 30. Треугольное число. 32. Число, оканчивающееся на 8, сумма цифр которого равна 20. 34. Число, стоящее под номером 21 по горизонтали, умноженное на 6. 35. Точный куб. 37. Точный квадрат. 38. Точный куб.

**237. Подсчет потерь.** Один английский офицер рассказывал, что он входил в состав отряда, насчитывавшего первоначально 1000 человек. Во время одной из операций отряд понес тяжелые потери, а оставшиеся в живых попали в плен и их отправили в лагерь для военнопленных.

В первый день пути удалось бежать $\frac{1}{6}$ всех оставшихся в живых членов отряда, на второй день бежала $\frac{1}{8}$ оставшихся и один человек умер, на третий день бежала $\frac{1}{4}$ всех оставшихся. Остальных пленных по прибытии в лагерь разделили на 4 равные группы.

Сколько человек погибло во время операции?

**238. Пизанская башня.**

— Во время путешествия по Италии вместе с одним американцем мне довелось взобраться на самый верх Пизанской башни.

— Не слишком прямо, а? — спросил мой спутник.— Надо сказать, у нас в Штатах умеют строить попрямее. Если бы какой-нибудь из наших небоскребов так накренился, архитектору не поздоровилось бы.

Я заметил, что мы стоим на высоте 179 футов над землей, и тут мой спутник задал мне следующий вопрос:

— Если отсюда бросить вниз упругий мячик, который при каждом подскоке будет подниматься на $\frac{1}{10}$ той высоты, с которой упал, то какое расстояние он пройдет к тому моменту, когда остановится?

Эта задачка показалась мне очень любопытной.

**239. Заказ на ограду.** Один человек заказал ограду, общая длина которой составляла 297 м. Ограда должна была состоять из 16 секций, каждая из которых содержала бы целое число метров. Причем 8 секций должны иметь максимальную длину, а остальные — быть на 1, 2 или 3 м короче.

Как следует выполнить этот заказ? Допустим, что 8 секций максимальной длины содержат по 15 м, тогда остальные секции имеют длину 14, 13 или 12 м; естественно, брать секции каждого из этих размеров не обязательно.

**240. Геометрическая прогрессия.** Профессор Рэкбрейн предложил однажды утром своим друзьям найти не менее трех целых чисел, которые образуют геометрическую прогрессию, начинающуюся с 1, и сумма которых должна быть точным квадратом. (Например, 1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 = 63. Однако последнему числу, чтобы стать квадратом, не хватает единицы. Мне известны только два решения в целых числах; оба их найти совсем не трудно.)

**241. Мостовая.** Два квадратных участка мостовой нужно выложить квадратными плитами размером 1 м$^2$. Всего для этого потребуется 2120 плит, сторона же одного участка на 12 м больше стороны другого.

Каковы размеры каждого участка?

**242. Колонки!** Жители Мадбёри решили окружить украшающий их городок памятник изящными колонками. Выяснилось, что если колонки ставить через 10 см, то не хватит 150 колонок, если же их ставить через 30 см, то 70 колонок останется.

Сколько было колонок?

**243. Обезьяна и груз.** Вот одна забавная задачка, которая представляет собой симбиоз нескольких головоломок, в том числе головоломок Льюиса Кэролла «Обезьяна и груз» и Сэма Лойда «Сколько лет Мэри?» Хорошенько подумав, вы ее безусловно решите.

Через блок перекинута веревка, на одном конце которой висит обезьяна, а на другом груз. Длина обоих концов веревки одинакова, и система находится в равновесии. Каждый фут веревки весит 4 унции. Возраст обезьяны вместе с возрастом ее матери составляет 4 года. Обезьяна весит столько фунтов[15], сколько лет ее матери. Мать обезьяны вдвое старше, чем была обезьяна, когда ее мать была вдвое моложе, и чем будет обезьяна, когда она станет в три раза старше, чем была ее мать, когда та была втрое старше обезьяны. Вес веревки с грузом в полтора раза больше разницы между весом груза и еще таким весом и весом обезьяны.

Чему равна длина веревки?

**244. Досадные поломки.** По случаю праздника многие жители городка собрались провести день на лоне природы. С этой целью они наняли все имевшиеся в наличии фургоны, причем в каждом фургоне должно было ехать одинаковое количество народа. На полпути 10 фургонов сломалось, так что каждому оставшемуся фургону пришлось взять по одному лишнему человеку. Когда все решили отправиться домой, к несчастью, оказалось, что еще 15 фургонов вышли из строя. Поэтому каждый фургон взял на три человека больше, чем было при отъезде утром.

Сколько человек приняло участие в этом массовом гулянье?

**245. Пэт Мерфи.** Много лет назад произошел такой случай. Участники одной экспедиции попали в лапы кровожадных дикарей. Их вождь, получив богатые подарки, наконец смягчился и разрешил пленникам уйти, но при условии, что половина из них будет выпорота. В состав экспедиции входило 5 англичан и 5 туземцев-носильщиков. Англичане решили избежать порки, встав в круг таким образом, как показано на рисунке, и поручив Пэту Мерфи (N 1)


назвать число, отсчет до которого использовался бы в качестве считалочки. Тот, на кого выпадало названное число, выходил из круга и отправлялся на экзекуцию, а счет продолжался с этого места снова и до тех пор, пока названное число не выпадало на следующего человека, и т. д.

Если бы Пэт правильно запомнил число и начал счет с того, кого нужно, то замысел белых удался бы на славу. Но бедный Пэт перепутал число и не с того человека начал счет. В результате все англичане оказались выпоротыми, а носильщики нет.

Не могли бы вы указать:

1) число, которое назвал бедняга Пэт, и человека, с которого начинался счет;

2) число, которое следовало назвать, и человека, с которого следовало начинать счет?

В каждом случае нужно найти минимальное число.

**246. Чайная смесь.** Бакалейщик купил два сорта чая: один по 32 цента за фунт, другой, лучшего качества, по 40 центов за фунт. Он решил смешать сорта и составленную смесь продать по 43 цента за фунт, чтобы получить тем самым 25% чистой прибыли.

Сколько фунтов каждого сорта пойдет на приготовление 100 фунтов смеси?

**247. Сколько весит рыба?** Крэкхэмы задумали остановиться во время своего путешествия в каком-нибудь месте, где есть хорошая рыбная ловля, поскольку дядя Джейбз был заядлым рыболовом и они хотели доставить ему удовольствие. Они выбрали очаровательное местечко и, воспользовавшись случаем, устроили там пикник. Когда дядя принес великолепную форель, разгорелась дискуссия о том, сколько она может весить. Полковник представил все в виде головоломки, сказав:

— Допустим, что хвост весит 9 унций, голова весит столько же, сколько хвост вместе с половиной туловища, а туловище — столько же, сколько голова и хвост.

Скажите-ка теперь, если все это верно, сколько весит рыба?

**248. Кошки и мышки.** Однажды утром за столом профессора Рэкбрейна оживленно обсуждался вопрос об уничтожении грызунов, когда внезапно профессор сказал:

— Если некоторое количество кошек съели в общей сложности 999 919 мышек, причем все кошки съели по одинаковому числу мышек, то сколько всего было кошек?

Кто-то высказал предположение о том, что, быть может, одна кошка съела всех мышек, но Рэкбрейн возразил, что он сказал «кошек». Тогда кто-то другой дерзнул предположить, что каждая кошка съела одну мышь, на что профессор заметил, что он сказал «мышек». Он добавил также, дабы помочь присутствующим, что каждая кошка съела больше мышек, чем было кошек.

Какой же ответ будет верным?

**249. Шкафчик для яиц.** У одного человека имеется шкафчик, где он хранит коллекцию птичьих яиц. В этом шкафчике 12 выдвижных ящиков, и все они (за исключением верхнего, где хранится каталог) разделены на ячейки деревянными перегородками, каждая из которых тянется во всю длину или ширину соответствующего ящика. В каждом последующем ящике число ячеек больше, чем в предыдущем. У нижнего ящика (N 12) число ячеек в 12 раз больше числа перегородок, у ящика N 11 число ячеек в 11 раз больше числа перегородок и т. д.

Как разделены ящики (сколько ячеек и перегородок в каждом ящике)? В каждом случае укажите наименьшее возможное число ячеек и перегородок.

**250. Железная цепь.** На поле брани нашли два куска железной цепи. Как она туда попала и для каких целей служила, не известно, да этого нам и не нужно знать. Цепь была составлена из круглых звеньев (все одинакового размера), сделанных из железного прута толщиной $\frac{1}{2}$ см. Один кусок цепи был длиной 36 см, а другой — 22 см.

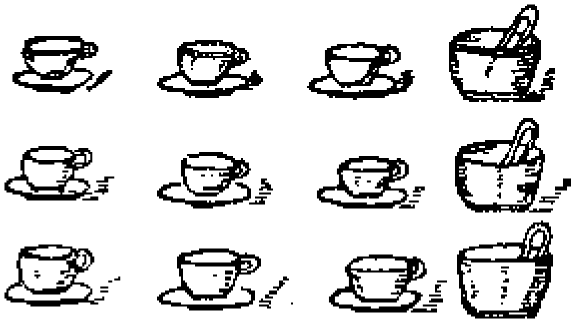
Если принять, что один кусок содержал на 6 звеньев больше другого, то сколько звеньев было в каждом куске?

**251. Угадай монетку.** «Знаешь ли ты этот фокус? — спросила Дора своего брата.— Положи десятицентовую монетку в один карман, а пятицентовую в другой. Теперь умножь число центов в правом кармане на 3, а в левом на 2; сложи то, что получилось, и скажи, четный или нечетный у тебя получился результат».

Брат ответил, что результат четный, и она сразу же сказала, что десятицентовая монетка лежит в правом, а пятицентовая в левом кармане. Так повторялось несколько раз. В какой бы карман брат ни положил монетку, Дора всегда угадывала правильно.

Как ей это удавалось?

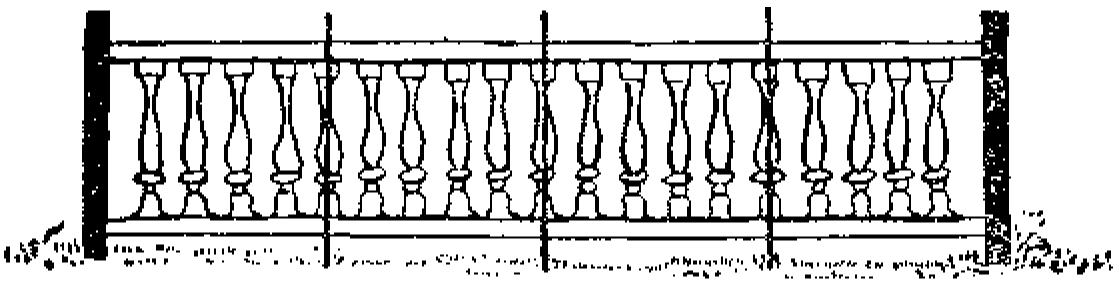
**252. Три сахарницы.** В трех сахарницах лежит по одинаковому количеству кусков сахару, а чашки пусты. Если в каждую чашку положить $\frac{1}{12}$ содержимого



каждой сахарницы, то в каждой сахарнице окажется на 12 кусков больше, чем в каждой чашке.

Сколько кусков первоначально было в каждой сахарнице?

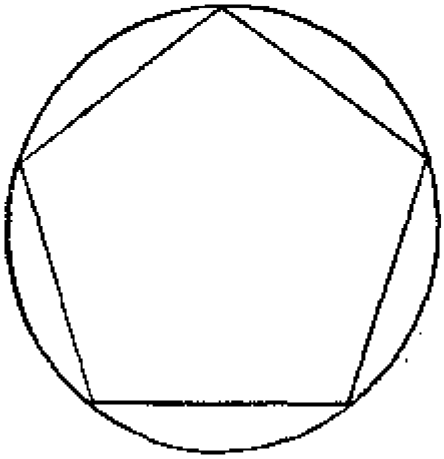
**253. Садовая ограда.** Садовая ограда, похожая на ту, что изображена на рисунке, имела в каждой секции (между двумя вертикальными стойками) одинаковое число колонок, а каждая вертикальная стойка (за исключением двух крайних) делила одну из колонок пополам. Рассеянно пересчитав из конца в конец все колонки и считая две половинки за одну колонку, мы обнаружили, что всего колонок было 1223.



Мы заметили также, что число секций было на 5 больше удвоенного количества целых колонок в каждой секции. Сколько колонок было в каждой секции?

# ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ

**254. Построение пятиугольника.** «Я собираюсь сшить одеяло из кусочков материи, имеющих форму пятиугольника,— сказала одна леди.— Как мне лучше вырезать из картона правильный пятиугольник со стороной 10 см? Разумеется, я могу начертить окружность и затем с помощью циркуля отметить на ней 5 равноотстоящих точек. Но если

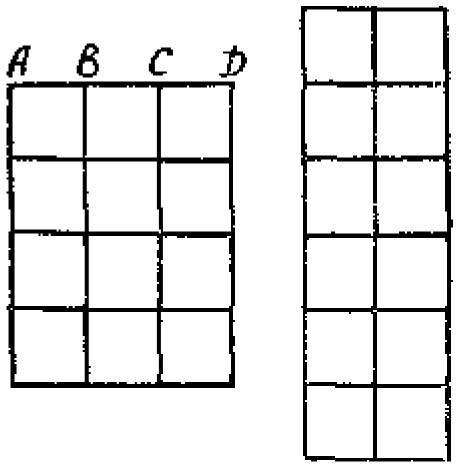


мне не известен точный размер окружности, у моего пятиугольника стороны всегда будут получаться либо немного больше, либо немного меньше 10 см».

Не могли бы вы подсказать леди простой и надежный способ, с помощью которого можно было бы построить нужный пятиугольник с первого раза?

**255. С помощью одного циркуля.** Можете ли вы построить 4 вершины квадрата с помощью лишь одного циркуля? У вас имеется только лист бумаги и циркуль. Прибегать к разного рода трюкам, вроде складывания бумаги, не разрешается.

**256. Прямые и квадраты.** Вот один простой вопрос. Чему равно наименьшее число прямых линий, с помощью которых можно построить ровно 100 квадратов? На помещенном здесь рисунке слева с помощью девяти прямых построено 20 квадратов (12 со стороной, равной *AB*, 6 со стороной, равной *AC*,



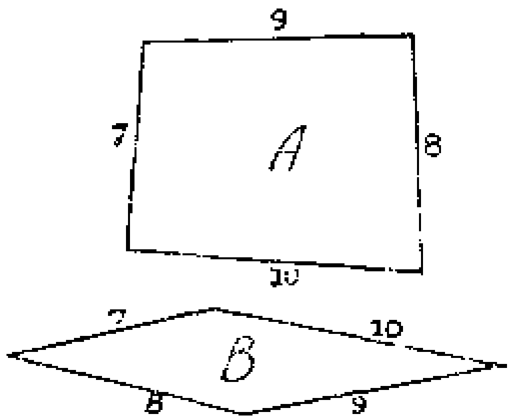

и 2 со стороной, равной *AD*). На том же рисунке справа прямых на одну больше, а число квадратов возросло до 17. Таким образом, важно не то, сколько всего прямых, а то, как они проведены. Помните, что требуется получить ровно 100 квадратов (не больше и не меньше).

**257. Сад мистера Гриндла.** Однажды за чашкой чая мистер Гриндл сказал:

— Мой сосед был так щедр, что пожертвовал для моего сада столько своей земли, сколько я смог огородить с помощью четырех прямых заборов длиной 70, 80, 90 и 100 м соответственно.

— Какую же наибольшую площадь ты смог огородить? — спросил мистера Гриндла приятель.

Быть может, читатель сумеет правильно ответить на этот вопрос. Дело в том, что площадь треугольника с тремя известными сторонами определяется однозначно, но в случае четырехугольника все обстоит совершенно иначе. Так, вполне очевидно, что площадь четырехугольника *A* больше площади четырехугольника *B*, хотя стороны в обоих случаях одинаковы.

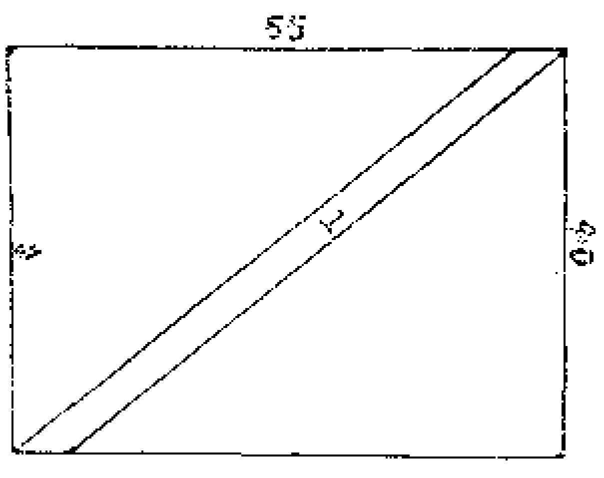



**258. Садовая ограда.** Вот одна старая часто встречающаяся головоломка. Многим она кажется трудной, но на самом деле решить ее проще, чем представляется на первый взгляд.

У одного человека был прямоугольный сад со сторонами 55 и 40 м, и ему захотелось проложить в нем по диагонали дорожку шириной в 1 м, как показано на рисунке.

Чему равна площадь дорожки?

Обычно приводятся такие размеры сада, при которых получается лишь приближенный ответ. Однако я специально подобрал размеры, чтобы ответ был точный. Для большей наглядности ширина дорожки на рисунке изображена без соблюдения масштаба.

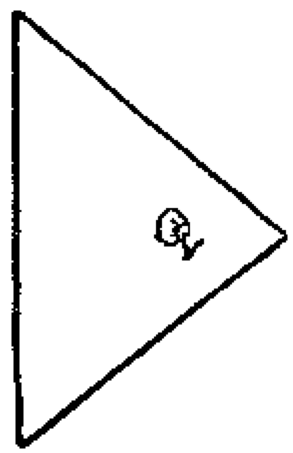


**259. Садовая клумба.** Вот очень простая маленькая головоломка.

У одного человека был треугольный газон, стороны которого пропорциональны сторонам треугольника, изображенного на рисунке. Человеку захотелось разбить на газоне предельно большую прямоугольную клумбу, на задев дерева.

Как ему следует поступить?

Эта головоломка поможет нам освоить простое правило, которое в некоторых случаях оказывается весьма полезным. Например, его с успехом можно приложить к задаче, в которой столяру требуется, не захватив сучка, вырезать из треугольной доски наибольшую прямоугольную крышку для стола.

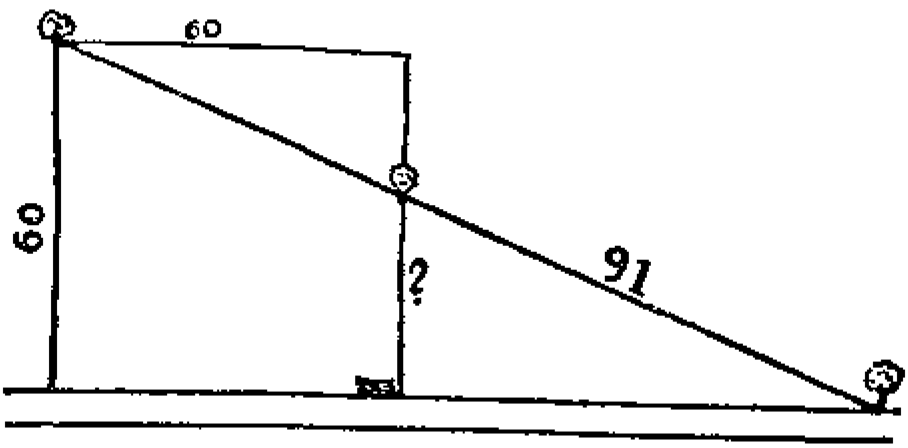


**260. Землемерная задача.** В каждом деле есть свои маленькие хитрости, а в науке о числах их бесконечное множество. Почти в каждой профессии имеются полезные приемы, позволяющие быстро находить нужные ответы и очень


помогающие тем, кто с ними знаком. Приведем пример. Один человек купил небольшое поле, карта которого в масштабе 1 : 10000, попавшая мне в руки, изображена на рисунке. Я попросил своего знакомого землемера сказать мне, какова площадь поля, однако землемер ответил, что этого нельзя сделать без дополнительных измерений — знать длину лишь одной из сторон недостаточно. Каково же было его удивление, когда я через несколько минут сообщил, чему равна площадь поля, располагая длиной только одной его стороны, равной 70 м.

Не могли бы вы сказать, как это можно сделать?

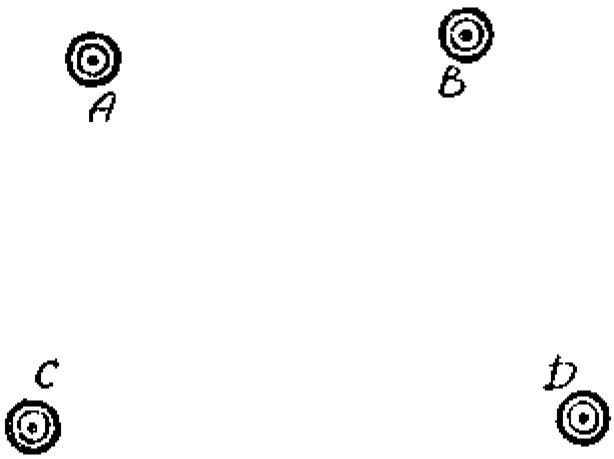
**261. Изгородь.** Вот задача, которая трудна в общем случае, однако в том виде, в каком я ее здесь привожу, решение ее не составит труда для искушенного человека.




Некто имел квадратное поле 60 на 60 м и, кроме того, владел примыкавшей к шоссе землей (см. рисунок). По каким-то соображениям ему пришлось соединить изгородью три дерева, причем длина участка изгороди от среднего дерева до дерева на шоссе оказалась равной 91 м.

Чему равно (в целых метрах) точное расстояние от среднего дерева до калитки на шоссе?

**262. Четыре шашки.** Вот одна необычная головоломка, которая, я надеюсь, заинтересует моих читателей.




Четыре шашки стоят на клетках какой-то шахматной доски (не обязательно 8x8) точно в том положении, как это изображено на рисунке. Клетки доски нарисованы симпатическими чернилами, поэтому они не видны.

Сколько квадратов содержит доска и как их восстановить? Известно, что каждая из шашек стоит в середине своего квадрата, что шашки расположены по одной на каждой стороне доски и что все углы доски свободны.

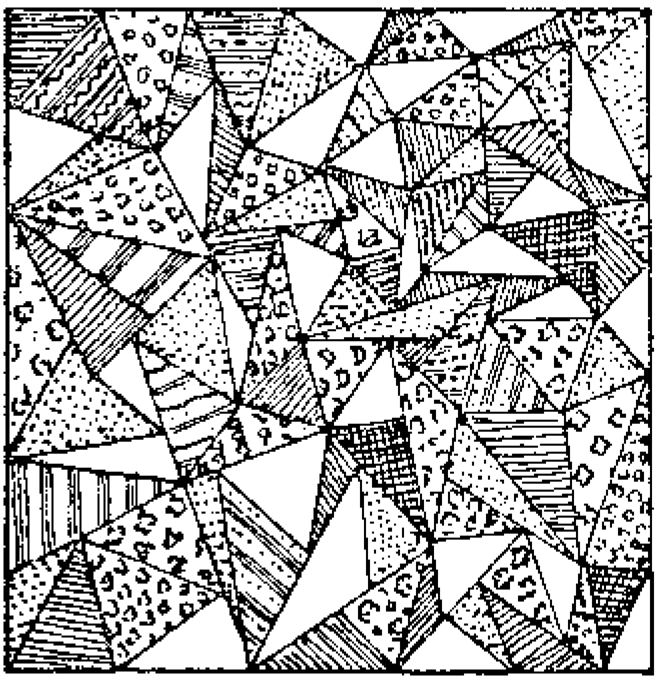
Эта головоломка действительно трудна до тех пор, пока вы не угадаете метод решения; после этого получить ответ будет невероятно легко.

**263. Военная головоломка.** Офицер приказал солдатам построиться в 12 шеренг по 11 человек в каждой таким образом, чтобы самому встать в точке, равноотстоящей от каждой шеренги.

— Но нас всего 120 человек, сэр,— сказал один из солдат.

Возможно ли было выполнить приказ офицера?

**264. Спрятанная звезда.** На приведенном здесь рисунке вы видите скатерть, сшитую из шелковых лоскутов. Ее сшила вся семья в подарок одному из своих членов ко дню его рождения. Один из даривших сшил свою часть в виде совершенно симметричной звезды, точно подошедшей к остальной части скатерти. Но от треугольных лоскутков так рябит в глазах, что обнаружить эту спрятанную звезду не так-то просто.

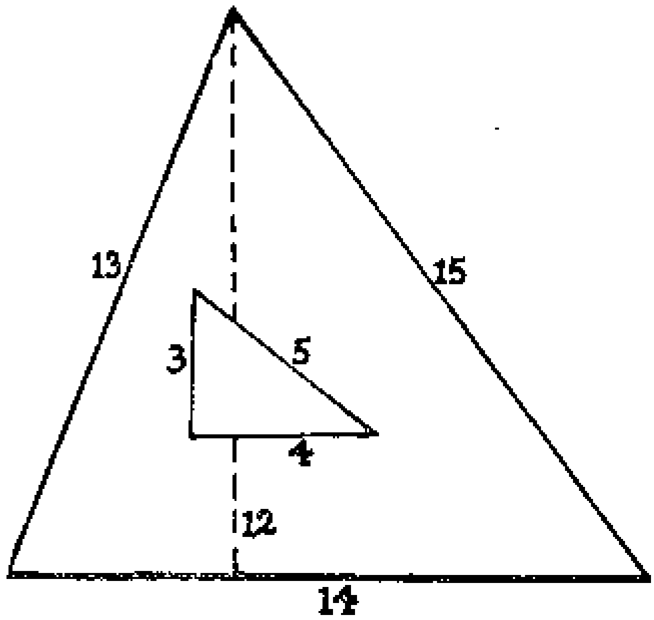


Не могли бы вы найти звезду и, выдернув нужные нитки, отделить ее от остальной части скатерти?

**265. Сад.** Четыре стороны сада равны 20, 16, 12 и 10 м, а его площадь при таких размерах максимальна.

Чему она равна?

**266. Головоломка с треугольником.** В ответе к головоломке 227 мы говорили, что «существует бесконечно много рациональных треугольников, стороны которых выражаются последовательными целыми числами, как, например, 3, 4 и 5 или 13, 14 и 15». На помещенном здесь рисунке изображены эти два треугольника. В первом случае площадь (6) равна половине 3x4; во втором случае высота равна 12, а площадь (84) половине 12x14.

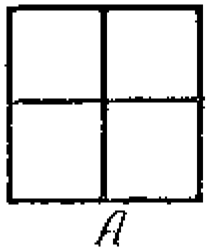


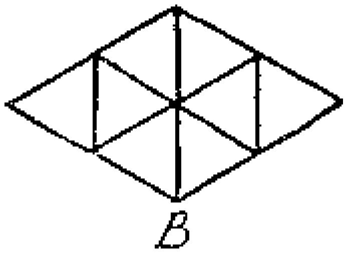

Было бы интересно найти треугольник со сторонами, выражающимися тремя наименьшими последовательными целыми числами, площадь которого делилась бы на 20 без остатка.

**267. Окно темницы.** Сэр Хьюг де Фортибус призвал к себе своего главного строителя и, показав на окно в башне, сказал:

— Мне кажется, что стороны вон того квадратного окна имеют по футу, а стороны просветов между прутьями в нем — по полфута (см. на рисунке случай *A*). Я хочу прорубить еще одно окно чуть повыше тоже с четырьмя сторонами тоже по футу каждая, но разделить его прутьями на восемь просветов, у которых все стороны тоже были бы равны.

Мастер не смог этого сделать, и тогда сэр Хьюг начертил окно сам (случай *B*), при этом он добавил:




— Я ведь не говорил тебе, чтобы новое окно непременно было квадратным, каждому как божий день ясно, что квадратным в данном случае оно не может быть.

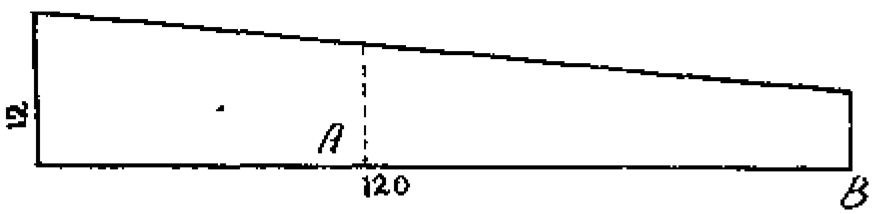
Однако в условиях сэра Хьюга кое-что подразумеваемое явно не оговаривается, так что, следуя букве его распоряжения, можно сделать требуемое окно квадратным.

Каким образом?

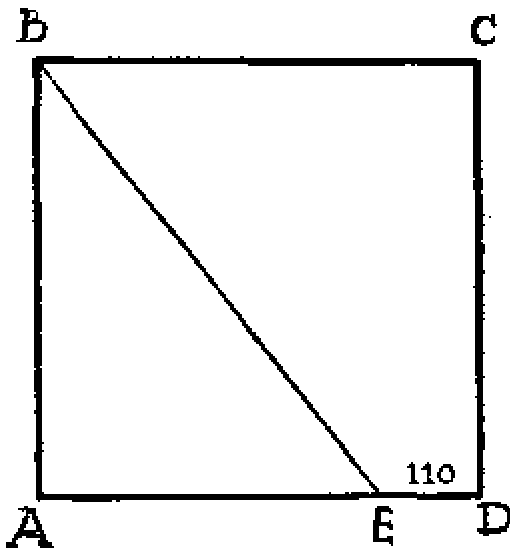
**268. Квадратное окно.** Однажды за чашкой чая полковник Крэкхэм рассказал, что у одного человека было квадратное окно площадью 1 м$^2$, которое пропускало слишком много света. Владелец окна загородил половину его, но при этом у него снова осталось квадратное окно в метр шириной и метр высотой.

Как это могло получиться?

**269. Как разделить доску?** У столяра имеется доска длиной 120 см, ширина одного ее конца 6 см, а другого 12 см. На каком расстоянии от *B* следует произвести разрез *A*, чтобы разделить доску на два куска равной площади?




**270. Головоломка с бегунами.** *ABCD* —квадратное поле площадью в 19,36 га. *BE* — прямая дорожка, а *E* отстоит от *D* на 110 м. Во время соревнований Адамс бежал по прямой от *A* к *D*, а Браун начинал бег в *B*, добегал до *E* и далее устремлялся к *D*. Каждый бежал с постоянной скоростью, и когда Браун достиг *E*, он увидел Адамса на 30 м впереди себя.




Кто выиграл соревнование и с каким преимуществом?

**271. Три скатерти.** Однажды за завтраком миссис Крэкхэм объявила во всеуслышание, что подруга подарила ей три восхитительные скатерти, все они квадратные со стороной 144 см. Миссис Крэкхэм попросила присутствующих назвать максимальные размеры квадратного стола, который можно покрыть всеми тремя скатертями одновременно. Скатерти можно класть на стол как угодно, лишь бы вся его поверхность оказалась покрытой. Ответ требовалось дать с точностью до сантиметра.

**272. Головоломка художника.** Один художник решил приобрести холст для миниатюры, площадь которой должна составлять 72 см$^2$. Чтобы натянуть миниатюру на подрамник, сверху и снизу должны быть полосы чистого холста шириной 4 см, а по бокам 2 см.

Каковы наименьшие размеры необходимого холста?

**273. В саду.** Однажды за чашкой чая полковник Крэкхэм сказал:

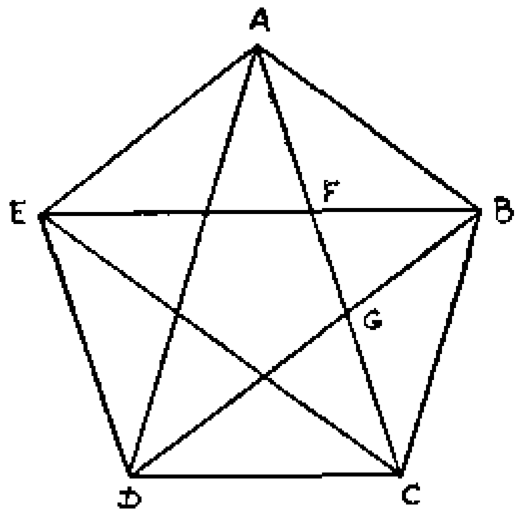
— Мой приятель Томпкинс любит озадачивать нас неожиданными головоломками при всяком удобном случае, но они не слишком глубоки. Как-то мы гуляли с ним по саду, как вдруг, указав на прямоугольную клумбу, он заметил:

— Если бы я сделал ее на 2 м шире и на 3 м длиннее, то она стала бы на 64 м$^2$ больше; но если бы я сделал ее на 3 м шире и на 2 м длиннее, то она увеличилась бы на 68 м$^2$.

Чему равны длина и ширина клумбы?

**274. Перепись треугольников.** Однажды профессор Рэкбрейн предложил мне головоломку, которая очень заинтересовала его гостей.

Нарисуйте пятиугольник и соедините все его вершины между собой, как показано на рисунке. Сколько в полученной фигуре содержится треугольников?




Чтобы пояснить задачу, укажем 6 таких треугольников: *AFB*, *AGB*, *ACB*, *BFG*, *BFC* и *BGC*. Ответ нетрудно получить, применив определенный метод; в противном случае вы рискуете потерять часть треугольников или сосчитать некоторые из них дважды.

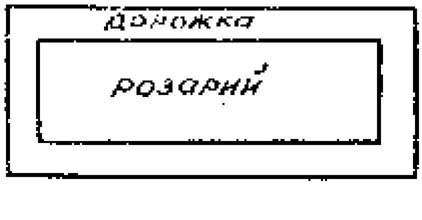
**275. Головоломка с загоном.** Ответы к хорошо известным головоломкам, которые даются в старых книгах, часто бывают совершенно неверными. Тем не менее создается впечатление, что никто и никогда не замечает этих ошибок. Вот один пример подобного рода.

У фермера был загон, имевший ограду длиной в 50 жердей, в котором помещалось только 100 овец. Допустим, фермер захотел расширить загон настолько, чтобы в нем поместилось вдвое большее число овец.

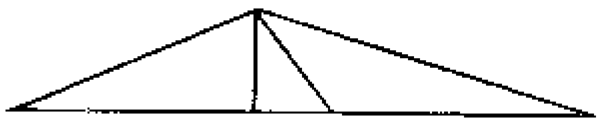
Сколько фермеру потребуется дополнительных жердей?

**276. Розарий.** Однажды, попивая чай, профессор Рэкбрейн сказал:

— У моего приятеля есть сад прямоугольной формы, половину которого он хочет занять под розарий, окружив его гравиевой дорожкой постоянной ширины. Не могли бы вы найти общее правило, которое в равной степени было бы применимо к любому саду прямоугольной формы независимо от соотношения между его сторонами? Все измерения следует производить в самом саду. Единственным инструментом служит веревка, длина которой должна быть не меньше длины сада.




**277. Исправьте ошибку.** Математика — наука точная, но и первоклассные математики, как и все простые смертные, порой допускают ошибки. Заглянув в ценную работу Питера Барлоу «Теория чисел», мы вдруг встречаем следующую задачу:

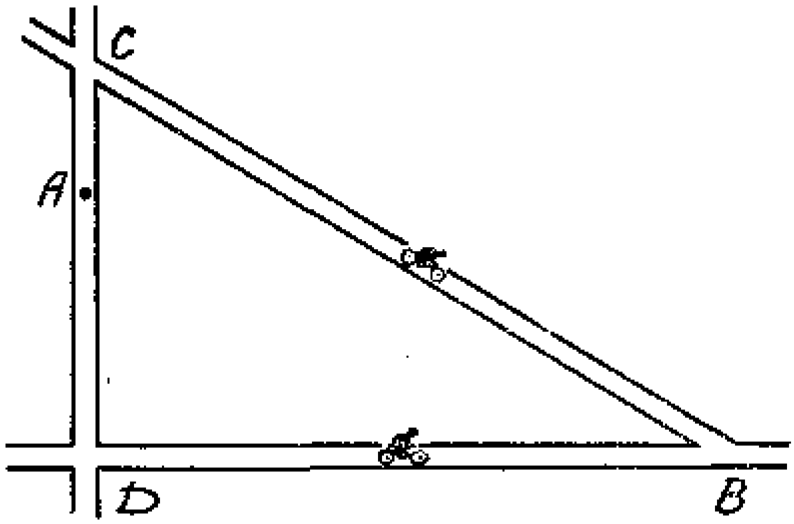


«Найдите треугольник, у которого все стороны, а также высота и медиана, проведенные из вершины на основание, выражались бы рациональными числами».

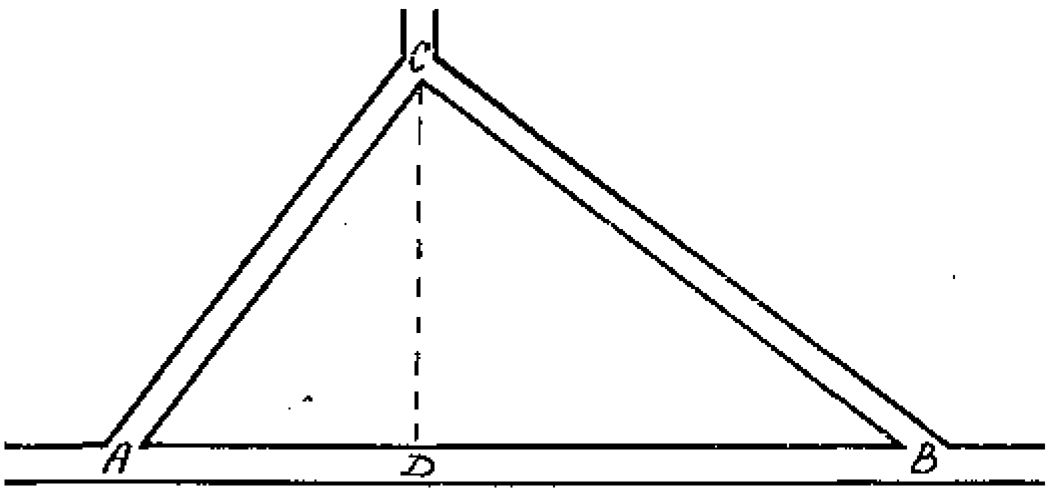
В качестве ответа приводится треугольник со сторонами 480, 299, 209, что не только не верно, но и совершенно непонятно.

Быть может, читателю захочется найти правильнее решение, если мы скажем, что все пять измеряемых величин выражаются целыми числами, каждое из которых меньше ста. Такой треугольник, очевидно, не должен быть прямоугольным.

**278. Мотоциклисты.** Два мотоциклиста решили попасть из пункта $A$ в пункт $B$. Один из них решил проехать 6 км до $D$, а затем еще 15 км прямо до $B$. Второй мотоциклист решил отправиться в $B$ через $C$. К великому своему удивлению, проверив пройденное расстояние по спидометрам, мотоциклисты обнаружили, что в обоих случаях оно оказалось одинаковым. А смогли бы они быстро ответить на простой вопрос: чему равно расстояние от $A$ до $C$?




Зная, как следует действовать, можно моментально получить ответ. Сумеет ли сделать это читатель?

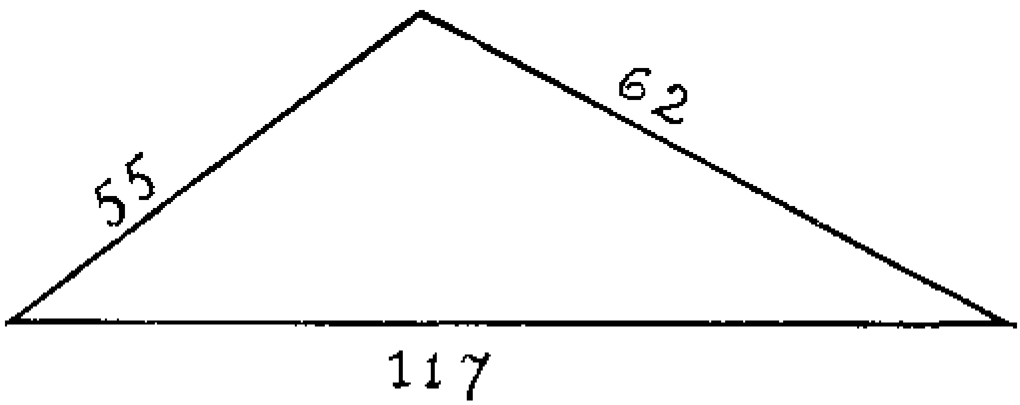



**279. Снова мотоциклисты.** Вот еще один случай, происшедший с мотоциклистами, о которых говорилось в предыдущей головоломке. На участке карты (см. рисунок) показаны три дороги, образующие прямоугольный треугольник. Когда у мотоциклистов спросили, каково расстояние между *A* и *B*, один из них ответил, что, после того как он проехал от *A* до *B*, а оттуда к *C* и назад к *A*, на спидометре было 60 км. Второй мотоциклист добавил, что ему случайно известно о том, что *C* расположено в 12 км от дороги, соединяющей *A* с *B*, то есть от точки *D* (штриховая линия на рисунке). Тогда спросивший, проделав в уме очень простую выкладку, сказал:

— Все понятно, от *A* до *B*...

А не смог бы читатель столь же быстро определить это расстояние?

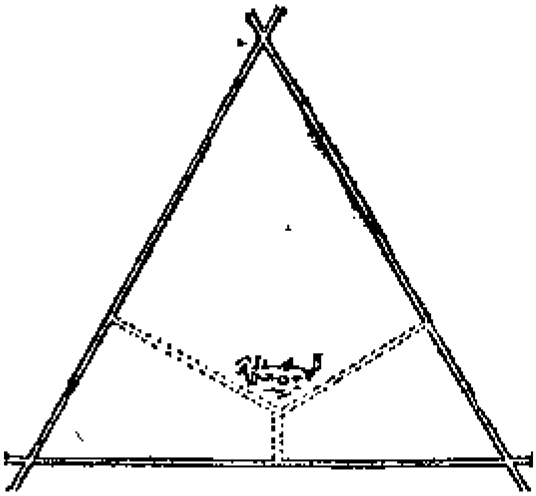
**280. Стоимость сада.** Однажды профессор Рэкбрейн поведал своим ученикам о том, что его соседу предложили садовый участок. Участок имеет форму треугольника, размеры которого указаны на рисунке.




Сколько соседу придется заплатить за него, если один квадратный метр стоит 10 долларов?

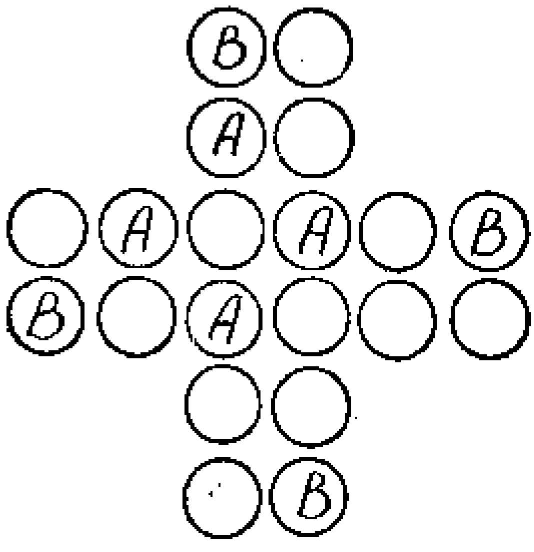
**281. Выбор места.** Один человек купил земельный участок, расположенный между тремя прямыми дорогами, которые образуют равносторонний треугольник. Ему захотелось построить дом таким образом, чтобы с каждой из дорог к нему вели три прямые подъездные аллеи, На рисунке изображен один из возможных вариантов.

Где следует построить дом, чтобы по возможности уменьшить расход на прокладку аллей?



**282. Крест из фишек.** Расположите 20 фишек в форме креста, как показано на рисунке. Сколько вы насчитаете различных случаев, когда четыре фишки сами по себе образуют правильный квадрат?

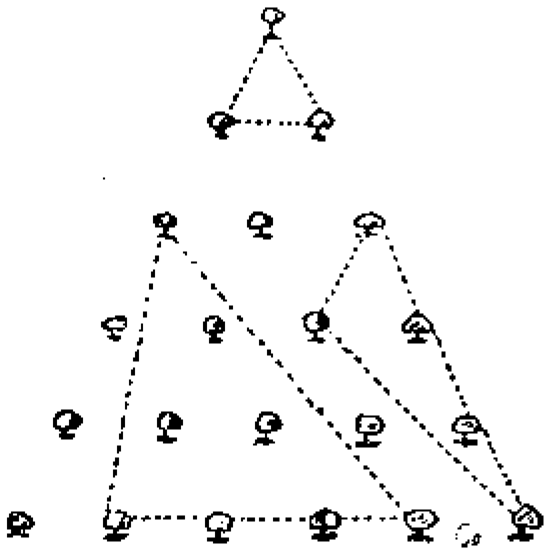
Например, квадраты образуют фишки, составляющие концы креста, фишки, расположенные в центре, а также фишки, которые отмечены буквами *A* и *B*.




Какие 6 фишек следует убрать, чтобы никакая четверка оставшихся фишек не располагалась в вершинах какого-нибудь квадрата?

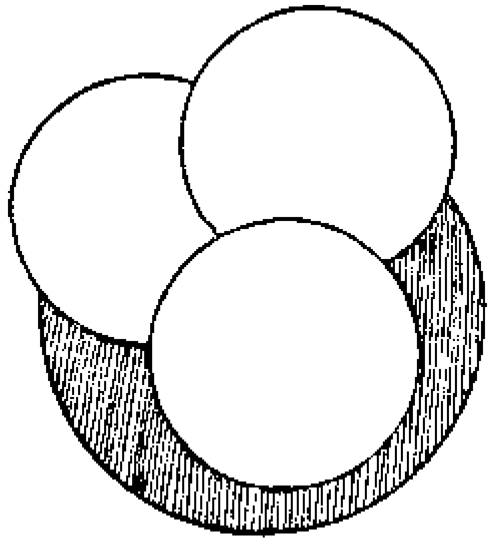
**283. Треугольные посадки.** У одного человека было 21 дерево. Деревья были посажены в форме треугольника (см. рисунок).

Если владелец деревьев захочет огородить какой-нибудь треугольный участок своей земли с деревьями по углам, то сколькими способами он сможет это сделать?



Пунктирные линии показывают три возможных способа. А сколько их всего?

**284. Круг и диски.** Как-то на ярмарке мы увидели человека, который сидел за столом, покрытым клеенкой с большим красным кругом в центре. Человек предлагал публике закрыть круг пятью тонкими дисками, которые лежали рядом, обещая тому, кто сумеет это сделать, ценный приз. Все диски были одинакового размера, разумеется, меньшего, чем красный круг (на рисунке для наглядности изображены только три диска).



Человек утверждал, что справиться с заданием очень легко, и сам, играючи, покрывал круг дисками. Те же, кто пытался сделать это после него, неизменно терпели неудачу. Я забыл вам сказать об одном существенном условии: раз положив диск, его нельзя было больше сдвигать, иначе справиться с заданием удалось бы довольно просто. Предположим, что диаметр красного круга равен 6 дм. Каким должен быть наименьший диаметр (скажем, с точностью до $\frac{1}{2}$дм) пяти дисков, чтобы с их помощью можно было бы закрыть круг?

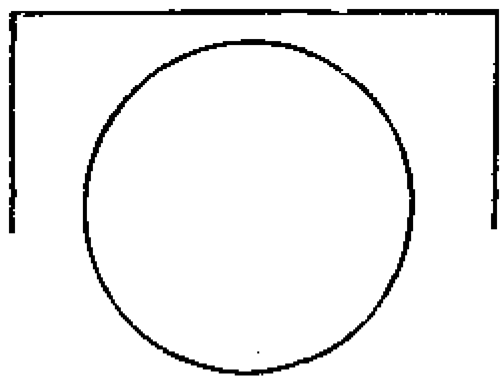
**285. Три изгороди.** Однажды за чашкой чая полковник Крэкхэм сказал:

— У одного человека было круглое поле, и он захотел разделить его на 4 равные части тремя изгородями равной длины. Как это можно сделать?

— А для чего ему нужны были заборы одинаковой длины? — спросила Дора.

— Сведений об этом не сохранилось,— ответил полковник.— Нам не известно также ни того, зачем он делил поле на 4 части, ни того, деревянными или железными были изгороди, ни того, пастбище или пашню представляло собой поле. Я не могу даже назвать имя этого человека, не то что сказать, каков цвет его волос. Можно показать, что для решения головоломки все эти сведения не существенны.

**286. Квадратура круга.** Задача о квадратуре круга сводится к отысканию отношения диаметра к длине окружности. Его нельзя найти с абсолютной, но можно определить с достаточной точностью, чтобы использовать для практических целей.



Точно так же в евклидовой геометрии нельзя построить отрезок прямой, равный длине заданной окружности. Конечно, можно получить достаточно точный результат, поставив на ребро монету и аккуратно прокатив ее по прямой на листе бумаги, но прокатить подобным образом сад круглой формы не так-то просто.

На рисунке изображена ломаная линия, длина которой очень близка к длине изображенной окружности. Горизонтальное звено этой ломаной равно половине длины окружности. Не могли бы вы найти ее с помощью простого метода, в котором использовались бы только карандаш, циркуль и линейка?

**287. Автомобиль и круг.** Автомобиль едет по кругу. Его колеса, расположенные с внешней стороны круга, движутся вдвое быстрее колес, расположенных с внутренней стороны.

Чему равна длина окружности, которую проходят внешние колеса, если расстояние между колесами на обеих осях 1,5 м?

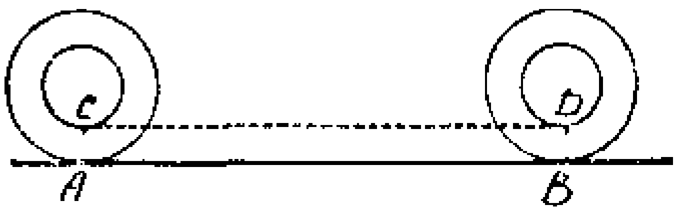
**288. Точильный круг.** Три человека купили точильный круг диаметром 20 см. Сколько должен сточить каждый из компаньонов, чтобы круг был разделен поровну, если исключить

4 см диаметра, которые пошли на отверстие? Практическая ценность каждой доли не учитывается, речь идет лишь о равном дележе общей массы круга.

**289. Автомобильные колеса.** «Видите ли, сэр,— сказал продавец автомобилей,— переднее колесо автомобиля, который вы покупаете, каждые 360 футов делает на 4 оборота больше заднего; но если бы вы уменьшили длину окружности каждого колеса на 3 фута, то переднее колесо на таком же расстоянии делало бы на целых 6 оборотов больше заднего».

Почему покупателю не захотелось, чтобы разность числа оборотов возрастала, нас не касается. Головоломка состоит в том, чтобы найти длину окружности каждого колеса. Это очень легко сделать.

**290. Недоразумение с колесом.** Вот одно любопытное недоразумение, которое многих крайне озадачивает. Колесо делает полный оборот, пройдя расстояние от *A* до *B*. Очевидно, что отрезок *AB* равен именно длине окружности колеса. Хотя для произвольного диаметра мы не сможем точно определить эту длину[16], тем не менее мы сумеем найти для нее приближенное значение с достаточной степенью точности. Так, если у нас колесо диаметром 28 см, мы можем умножить диаметр на 22, разделить на 7 и получим искомую длину — 88 см. Это, конечно, слишком грубое приближение, но если мы умножим его на 355 и разделим на 113, то получим 87,9646, что уже лучше, а умножив на 3,1416, мы получим 87,9648 — еще лучшее приближение. Но это между прочим.



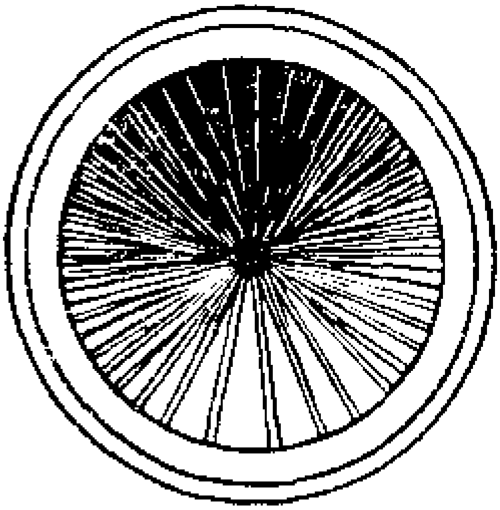

Теперь заметим, что внутренний круг (ступица) тоже делает полный оборот вдоль воображаемой пунктирной линии *CD*, а так как *CD* равно *AB*, длины меньшей и большей окружностей равны! Разумеется, даже младенцу с первого взгляда ясно, что это не верно. И все же, где именно допущена ошибка?

Попытайтесь ее найти. Не может быть и тени сомнения в том, что ступица за один полный оборот проходит расстояние от *C* до *D*. Тогда почему же *CD* не равно длине ее окружности?

**291. Знаменитый парадокс.** Есть такой вопрос, который задают постоянно, но на который я никогда не слышал удовлетворительного или достаточно убедительного для неискушенного человека ответа. Он состоит в следующем: «Движется ли на ходу верхняя часть велосипедного колеса быстрее нижней?»

Люди, не привыкшие к точному мышлению, неизменно встречают такой вопрос смехом и отвечают: «Разумеется, нет!» Они считают подобный вопрос совершенно нелепым и не достойным даже того, чтобы всерьез над ним призадуматься. «Колесо,—говорят они,— это твердое тело, вращающееся вокруг центральной оси, и если одна из его частей стала бы двигаться быстрее другой, то оно разлетелось бы вдребезги».

Тогда вы обращаете внимание .вашего скептика на проезжающий мимо экипаж и просите его заметить, что спицы в нижней части колеса ясно видны, их даже можно пересчитать; а вот в верхней части они движутся так быстро, что становятся неразличимыми. Движущееся колесо выглядит примерно так, как оно изображено на рисунке. Наш друг вынужден признать очевидное, но поскольку он не может дать объяснение тому, что видит, и не хочет отказываться от своей прежней точки зрения, то, вероятно, ответит: «Ну, возможно, это обман зрения».



Итак, повторяем вопрос: «Движется ли верхняя часть колеса быстрее нижней?»

**292. Еще один парадокс с колесом.** Два велосипедиста остановились на железнодорожном мосту где-то в Сассексе, когда мимо них проходил поезд.

— Этот поезд идет из Лондона в Брайтон,— сказал Хендерсон.

— Большая его часть,— заметил Бэнкс, — а остальная — движется по направлению к Лондону.

— О чем это, скажи на милость, ты говоришь?

— Я говорю, что если поезд идет из Лондона в Брайтон, то часть этого поезда все время движется в противоположном направлении — из Брайтона в Лондон.

— И ты всерьез утверждаешь, что, когда я еду из Кройдона в Истбурн, то часть моего велосипеда несется назад в Кройдон?

— Не горячись, старина,— сказал спокойно Бэнкс.— Я ничего не говорил о велосипедах. Мое утверждение касалось только железнодорожных поездов.

Хендерсон решил, что это просто шутка и речь идет о дыме или паре, но его приятель заметил, что сильный ветер может быть и в направлении движения поезда. Тогда он высказал предположение, что имелись в виду мысли пассажиров, но проверить этого не удалось и, кроме того, вряд ли их можно было назвать частью поезда! Наконец Хендерсон сдался.

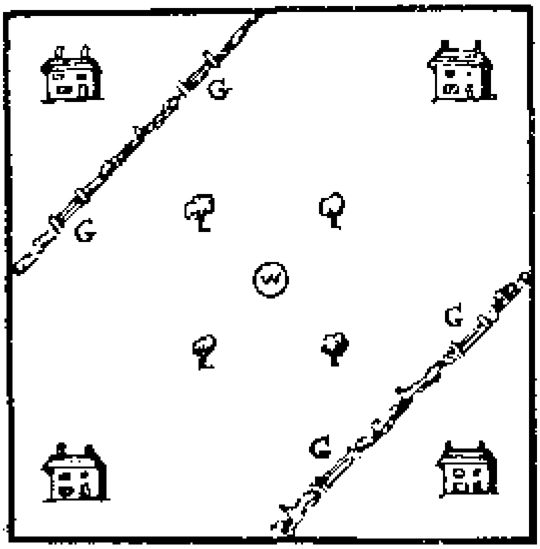
Не смог бы читатель объяснить этот любопытный парадокс?

**293. Механический парадокс.** Знаменитый механический парадокс, придуманный Джеймсом Фергюсоном[17] где-то около 1751 г., следовало бы знать каждому. Он предложил его скептику-часовщику в момент спора.

— Предположим,— сказал Фергюсон,— что я сделаю одно колесо толщиной в три других и на всех их нарежу зубцы. Затем я свободно надену три колеса на одну ось и помещу толстое колесо так, чтобы оно приводило их в движение и его зубцы входили в зубцы трех тонких колес. Если я поверну толстое колесо, то как повернутся тонкие колеса?

Часовщик ответил, что, очевидно, три колеса повернутся в противоположном направлении. Тогда Фергюсон смастерил простой механизм, который под силу сделать каждому, и показал, что при вращении толстого колеса в любом направлении одно из тонких колес вращается *в том же самом направлении*, другое — *в противоположном*, а третье *остается неподвижным*. Хотя часовщик и взял механизм домой, он так и не смог найти объяснение этому странному парадоксу.

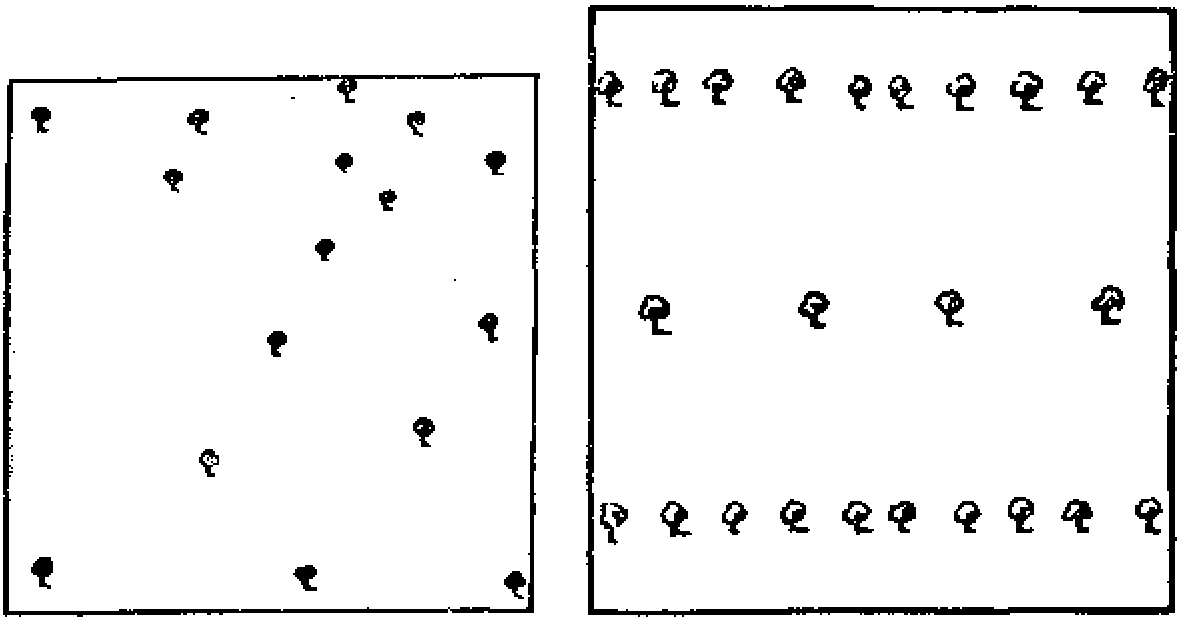
**294. Четыре домовладельца.** Вы видите на рисунке квадратный участок земли с четырьмя домами, четырьмя деревьями, колодцем ($W$) в центре, а также изгородями с четырьмя калитками ($G$).




Можете ли вы разделить этот участок так, чтобы каждому домовладельцу досталось поровну земли, по одному дереву, по одной калитке, по куску изгороди равной длины и по свободному проходу к колодцу, который не пересекал бы участок соседа?

**295. Пять заборов.** У одного человека было большое квадратное огороженное поле, на котором росло 16 дубов (см. рисунок). Владелец из каких-то эксцентричных соображений пожелал поставить на нем 5 прямых заборов таким образом, чтобы каждое дерево оказалось на отдельном участке.

Как он сможет это сделать? Возьмите карандаш и перечеркните поле пятью прямыми так, чтобы каждое дерево было отделено от всех остальных.

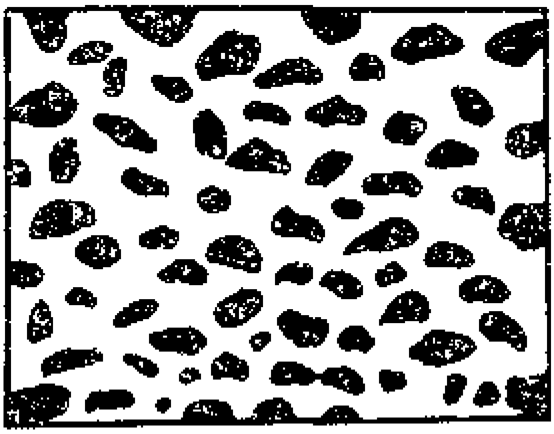


**296. Сыновья фермера.** У одного фермера был квадратный участок земли, на котором росли 24 дерева. В своем завещании он пожелал, чтобы каждый из его восьми сыновей получил одинаковое количество земли и равное число деревьев.

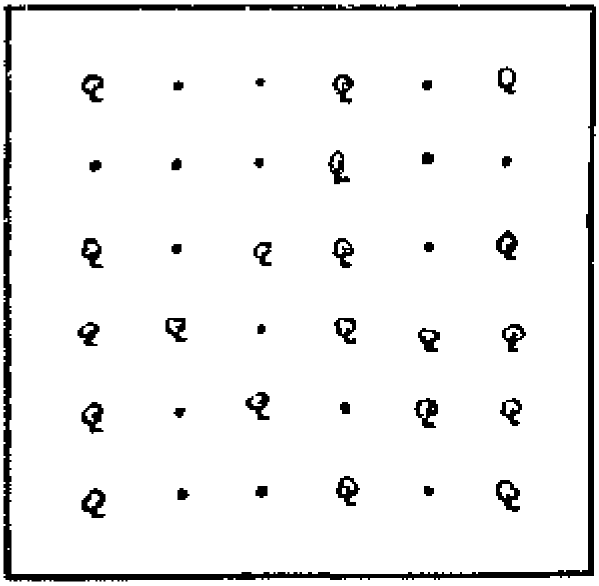
Как наипростейшим образом разделить землю?

**297. Минуя мины.** Перед нами небольшой заминированный участок моря. Крейсер, благополучно минуя мины, прошел его с юга на север двумя прямыми курсами.

Проведите от нижнего края до любой точки на карте прямую линию, а затем от этой точки до верхнего края карты еще одну прямую, проложив путь между минами.

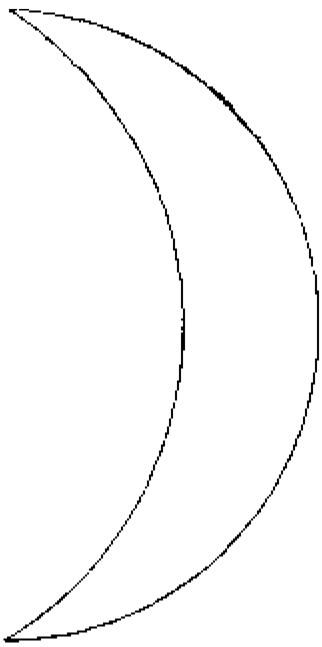


**298. Шесть прямых заборов.** У одного человека была небольшая плантация, состоявшая из 36 деревьев, посаженных в виде квадрата. Часть из них засохла (на рисунке засохшие деревья изображены точками) и должна быть спилена.



Как можно поставить 6 прямых заборов, чтобы каждое из оставшихся 20 деревьев оказалось отгороженным от остальных? Кстати говоря, подобным образом можно было бы разгородить шестью прямыми заборами 22 дерева, если бы они были расположены поудобнее, но нам приходится иметь дело с деревьями, посаженными регулярным образом, и в этом вся разница.

Возьмите карандаш и подумайте, сумеете ли вы провести 6 прямых так, чтобы каждое дерево оказалось отгороженным от остальных.

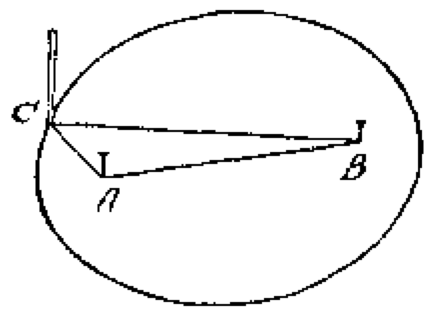


**299. Разрезание полумесяца.** На какое максимальное число частей можно разрезать пятью прямыми разрезами полумесяц? Куски полумесяца нельзя ни складывать стопкой, ни передвигать.

**300. Начертите прямую.** Если нам нужно провести окружность, мы пользуемся циркулем. Однако, если мы хотим провести прямую, нам требуется линейка или какой-нибудь другой предмет с прямолинейным краем. Иными словами, чтобы начертить прямую, мы ищем другую прямую, что эквивалентно тому, как если бы мы использовали монетку, блюдце или другой круглый предмет при проведении окружности. Представьте теперь, что у вас под рукой нет ни прямолинейных предметов, ни даже куска нитки. Не могли бы. вы придумать простой инструмент, который позволял бы проводить прямые линии подобно тому, как проводятся циркулем окружности?

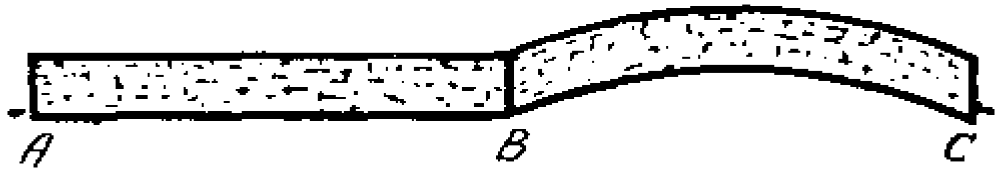
Этот вопрос интересен сам по себе, но не имеет практической ценности. Мы по-прежнему будем пользоваться прямолинейным краем.

**301. Начертите эллипс.** Я думаю, что многие читатели знакомы со способом построения эллипса, о котором сейчас пойдет речь. Он весьма полезен, если вы хотите сделать рамку для портрета или разбить овальную клумбу. Вы вбиваете два гвоздя или две булавки (а если делаете клумбу — два колышка) и надеваете на них кольцо из нитки или веревки, как показано на рисунке (булавки прикреплены в точках *A* и *B*, а кончик карандаша *C* натягивает петлю из нитки). Если, не ослабляя нитки, вы обведете карандашом вокруг булавок, возвратив его в исходное положение, то кончик карандаша начертит правильный овал.




Некоторые считают, что этот метод не слишком удачен, поскольку начертить эллипс нужного размера удается после нескольких попыток. Однако это заблуждение, и небольшая головоломка состоит в том, чтобы выяснить, чему должны равняться расстояние между булавками и длина нити, чтобы получился эллипс, ну скажем, 12 см в длину и 8 см в ширину.

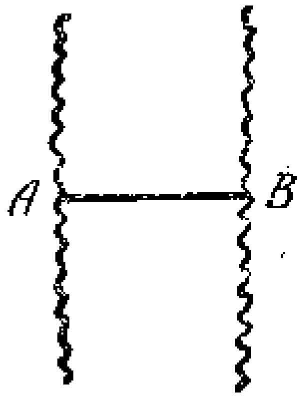
Не сумеете ли вы найти соответствующее простое правило, позволяющее строить эллипс заранее заданных размеров?



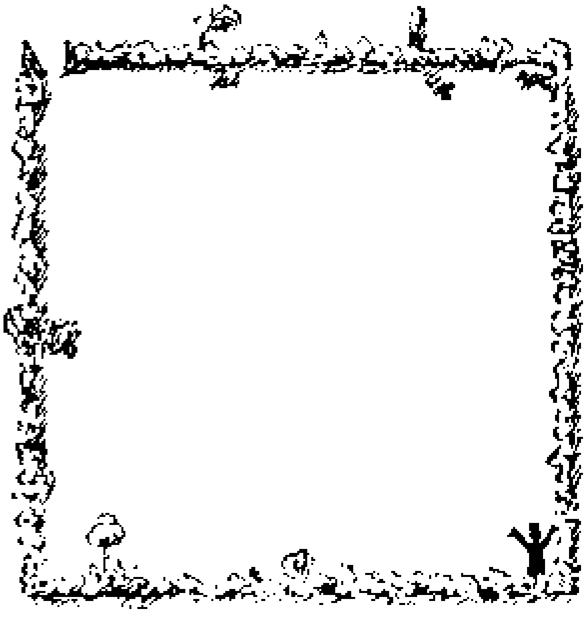

**302. Задача каменщика.** Некий владелец поместья договорился о строительстве каменной стены. Обнаружилось, что она частично шла по ровному месту, а частично по холму, как показано на рисунке, откуда видно, что расстояние от *A* до *B* совпадает с расстоянием от *B* до *C*. Подрядчик требовал, чтобы за ту часть стены, которая шла по холму, ему заплатили больше, чем за ту, что проходила по ровному месту, поскольку (так он во всяком случае считал) материалов на нее пошло больше. А заказчик, напротив, считал, что за эту часть стены следует заплатить меньше. Дискуссия была столь оживленной, что дело едва не дошло до суда.

Кто же из них был прав?

**303. Ширина реки.** Путник подошел к реке в точке $A$ и захотел измерить расстояние до точки $B$. Как ему проще всего узнать ширину реки, не переплывая ее?




**304. Пэт и его свинья.** Вы видите на рисунке квадратное поле размером 100 ×100 м. Пэт и свинья, которую он хочет поймать, находятся в противоположных углах на расстоянии 100 м друг от друга. Свинья бежит прямо к калитке в левом верхнем углу. Так как Пэт бегает вдвое быстрее свиньи, то вы, вероятно, решите, что он первым успеет добежать до калитки, чтобы закрыть ее. Но надо знать Пэта: он все время бежит прямо на свинью, описывая при этом кривую линию.



Успеет убежать свинья или Пэт схватит ее? А если схватит, то какое расстояние она пробежит к тому времени?

**305. Лестница.** Однажды, только зашел разговор о лестнице, которая требовалась для каких-то домашних нужд, как профессор Рэкбрейн внезапно прервал дискуссию, предложив ее участникам маленькую головоломку:

— Лестница стоит вертикально у высокой стены дома. Кто-то оттаскивает ее за нижний конец на 4 м от стены. Оказывается, что верхний конец лестницы опустился на $\frac{1}{5}$ её длины.

Чему равна длина лестницы?

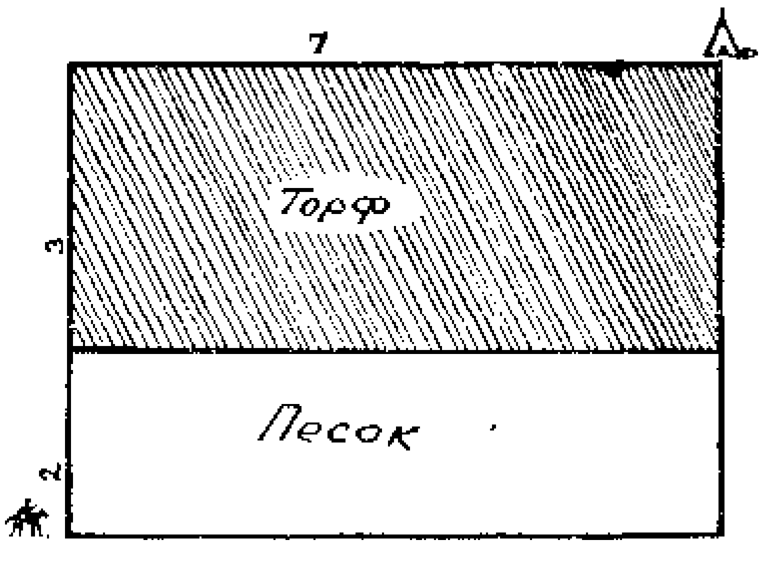
**306. Громоотвод.** Порывом сильного ветра сломало шест громоотвода, так что его верхушка ударилась о землю на расстоянии 20 м от основания шеста. Шест починили, но он вновь сломался под порывом ветра на 5 м ниже, чем раньше, и ударился верхушкой о землю на расстоянии 30 м от основания.

Какова высота шеста? В обоих случаях сломанная часть шеста не отрывалась полностью от остальной его части.

**307. Веревка.** Веревка спускается с потолка, касаясь пола. Если, сохраняя веревку в натянутом состоянии, коснуться ею стены, конец веревки окажется на расстоянии 3 см от пола. Расстояние же от свободно свисающей веревки до стены 48 см.

Какова длина веревки?

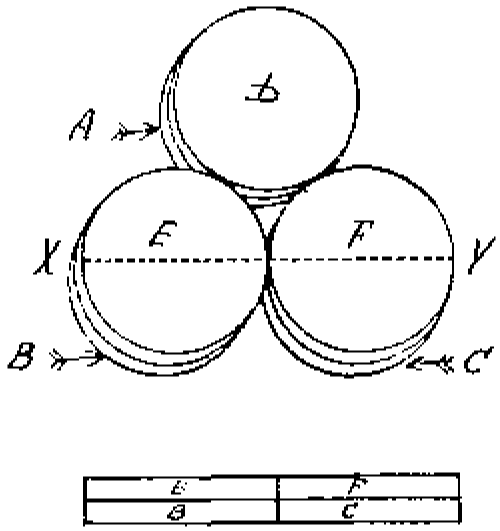
**308. Гонец.** Гонец (см. рисунок) как можно скорее должен доставить депешу в место, отмеченное палаткой. Расстояния указаны. Известно, что по мягкому торфу (заштрихованная часть) гонец скачет в два раза быстрее, чем по песку.




Не могли бы вы указать гонцу правильный путь? Это как раз одна из тех практических задач, с которыми постоянно сталкиваются в армейской обстановке. От того, какой путь выберет гонец, может зависеть очень многое.

Как бы вы поступили на его месте? Разумеется, торфяник и участок с песчаным грунтом везде имеют одинаковую ширину, так что в этой головоломке нет подвоха.

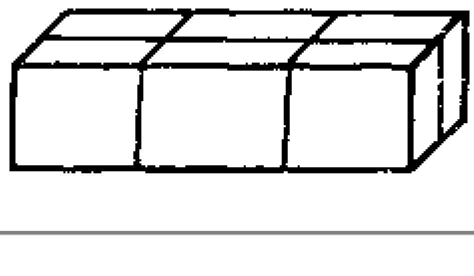
**309. Шесть подводных лодок.** Читатели, быть может, помнят головоломку, в которой требовалось расположить 5 одинаковых монет так, чтобы каждая касалась всех остальных. Один читатель предположил, что то же можно сделать и с шестью монетами, если мы расположим их так, как показано на рисунке, то есть с *A*, *B* и *C* в форме треугольника и с *D*, *E* и *F* поверх *A*, *B* и *C*. Он считал, что если рассечь монеты по линии *XY* (см. нижнюю часть рисунка), то *E* и *C*, а также *B* и *F* сойдутся в «математической точке» и, следовательно, коснутся друг друга. Но он не прав, так как если *E* касается *C*, то они тем самым образуют барьер между *B* и *F*. Если же *B* касается *F*, то *E* не может коснуться *C*.




Думаю, что это небольшое заблуждение заинтересует многих читателей. Когда мы говорим, что несколько предметов соединяются друг с другом в некоторой точке (как спицы колеса), то всего лишь три из них могут касаться друг друга (каждый каждого), находясь в одной плоскости.

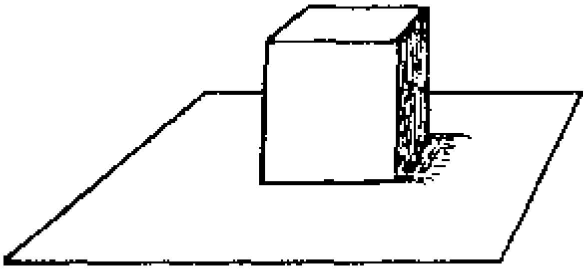
Это навело меня на мысль предложить следующую «задачу о касании». Если 5 подводных лодок затонуло в один день в одном и том же месте, где до них затонула еще одна лодка, как они могут лечь на дно, чтобы каждая из шести лодок касалась всех остальных? Дабы упростить задачу, мы вместо лодок возьмем 6 спичек и расположим их так, чтобы каждая спичка касалась всех остальных. Спички нельзя ни сгибать, ни ломать.

**310. Короткая веревка.** Одна леди оказалась в затруднительном положении: ей хотелось отправить посылку сыну, а веревки у нее было всего 3 м 60 см, если не считать узлов! Веревка должна один раз охватывать посылку вдоль и два раза поперек (см. рисунок).



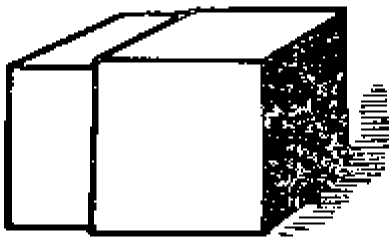
Какую наибольшую посылку в форме прямоугольного параллелепипеда она сможет отправить при таких условиях?

**311. Гранитный пьедестал.** При сооружении квадратного фундамента и кубического пьедестала для памятника были использованы гранитные кубические блоки размером 1 ×1 м. На пьедестал пошло ровно столько блоков, сколько и на квадратный фундамент, в центре которого он стоял, причем все блоки использовались целиком, нераспиленными.

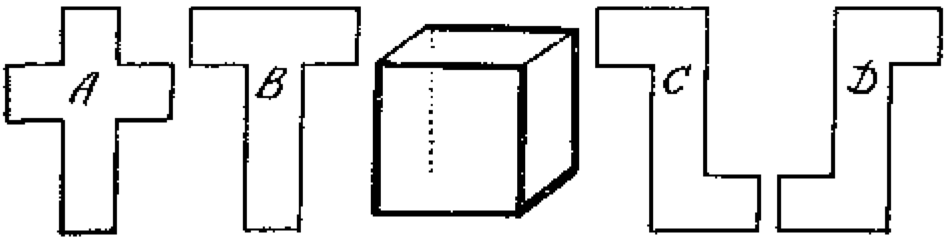


Взгляните на рисунок и попытайтесь определить общее число использованных блоков. Фундамент имеет толщину в один блок.

**312. Парадокс с кубом.** У меня было два сплошных свинцовых куба, причем один из них чуть-чуть больше другого (см. рисунок). В одном кубе я проделал дырку таким образом, чтобы второй куб мог в нее пройти. Взвесив затем оба куба, я обнаружил, что больший куб все еще тяжелее меньшего! Как это могло получиться?



**313. Картонная коробка.** Читатель, наверное, замечал, что есть много задач и вопросов, ответ на которые, казалось бы, должен быть известен уже многим поколениям до нас, но которые, однако, никогда, по-видимому, даже и не рассматривались. Вот один пример такой задачи, пришедший мне на ум.



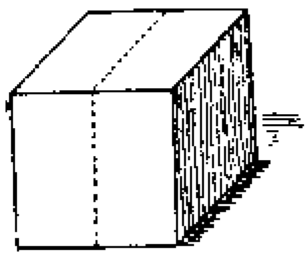

Допустим, у меня имеется закрытая картонная коробка в форме куба. Разрезав ее бритвой вдоль 7 из 12 ребер (их обязательно должно быть 7), я сумею развернуть коробку на плоскость, причем развертка может принять разные формы. Так, если я проведу бритвой вдоль ребер, показанных на рисунке жирной линией, и по невидимому ребру, обозначенному пунктиром, то получу развертку *A*. Разрезав коробку иначе, можно получить развертку *B* или *C*. Нетрудно заметить, что развертка *D* есть просто перевернутая развертка *C*, поэтому такие две развертки мы считаем тождественными.

Сколько всего различных разверток можно получить таким образом?

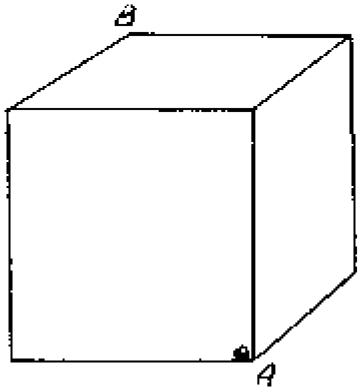
**314. Венский крендель.** На рисунке изображен фигурный венский крендель. Узел, похожий на свернутые свиные хвостики, служит только украшением. Этот крендель обречен на то, что его либо разрежут, либо разломят; но вот интересно, на сколько частей?

Допустим, перед вами на столе лежит этот крендель. На какое максимальное число частей вы. сможете его разрезать одним прямым взмахом ножа? В каком направлении следует провести этот разрез?

**315. Разрежьте сыр.** Вот один простой вопрос, на который можно получить правильный ответ, подумав всего лишь несколько секунд. У меня есть кусок сыра в форме куба. Как мне следует провести один прямой разрез ножом, чтобы две новые грани оказались правильными шестиугольниками?



Разумеется, если мы разрежем сыр в направлении пунктирной линии на рисунке, то получим два квадрата. Попробуйте получить шестиугольники.




**316. Путешествие мухи.** Муха, отправляясь из точки $A$, может обойти четыре стороны основания куба за 4 мин. За какое время она доберется из $A$ в противоположную вершину $B$?

**317. Головоломка с баком.** Площадь дна бака равна 6 м$^2$, глубина воды в нем 75 см.

1. На сколько поднимется уровень воды, если в бак поместить куб с ребром 1 м?

2. На сколько еще поднимется уровень воды, если рядом с первым поместить второй такой же куб?

**318. Головоломка с нугой.** Кусок нуги имеет в длину 16 см, в ширину 8 и в толщину $7\frac{1}{2}$ см.

Какое наибольшее число кусков размером $5 \times 3 \times 2\frac{1}{2}$ см можно из него вырезать?

**319. Задача с пасхальными яйцами.** Однажды профессор Рэкбрейн спросил:

— Если у меня имеется одно пасхальное яйцо длиной ровно 3 дюйма и три других яйца, содержимое которых вместе равно содержимому большего яйца, то какова длина каждого из трех меньших яиц?

**320. Головоломка с подставкой.** Один эксцентричный человек попросил мастера выточить из деревянного бруса размером $30 \times 10 \times 10$ см подставку. При этом рассчитываться он предпочел за каждый удаленный кубический сантиметр дерева. Сообразительный мастер взвесил брус и обнаружил, что тот весит 3 кг. После того как подставка была готова, он ее тоже взвесил и нашел, что она весит 2 кг. Поскольку в первоначальном брусе было 3 дм$^3$ и он потерял $\frac{1}{3}$своего веса, то мастер потребовал, чтобы ему заплатили за 1 дм$^3$. Но джентльмен возражал, считая, что сердцевина бруса могла быть тяжелее или легче наружной части.

Какие доводы приводил изобретательный мастер, пытаясь убедить заказчика, что он снял ровно 1 дм$^3$ дерева, не больше и не меньше?

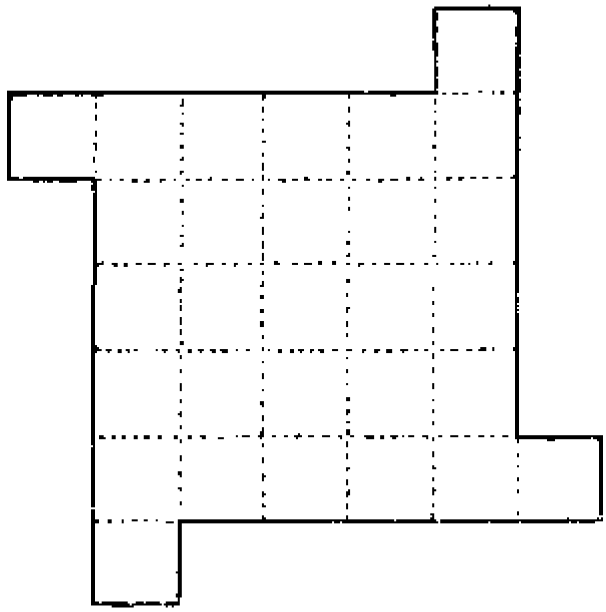
**321. Белка на дереве.** Белка взбирается на ствол дерева по спирали, поднимаясь за один виток на 2 м.

Сколько метров она преодолеет, добравшись до вершины, если высота дерева равна 8 м, а окружность 1,5 м?

**322. Упаковка сигарет.** Сигареты рассылаются фабрикой по 160 штук в коробке. Они уложены в 8 рядов по 20 штук в каждом и целиком заполняют коробку.

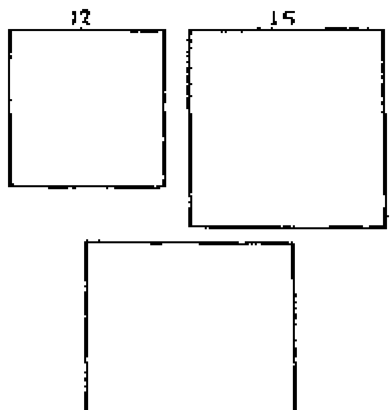
Можно ли при ином способе упаковки поместить в ту же коробку больше 160 сигарет? Если можно, то какое наибольшее число сигарет удастся добавить?

На первый взгляд нелепо рассчитывать, что в целиком заполненную коробку можно добавить лишние сигареты, но после минутного размышления вы могли бы найти ключ к этому парадоксу.

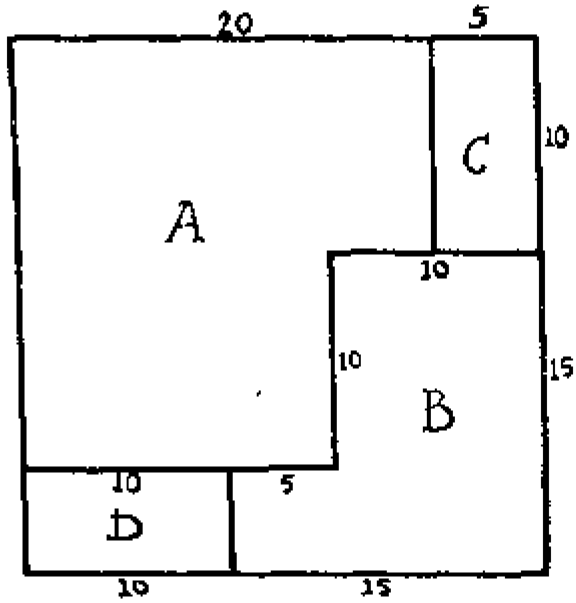


**323. Еще одна головоломка с разрезанием.** Разрежьте изображенную здесь фигуру на 4 части так, чтобы они подходили друг к другу, образуя квадрат.

**324. Квадратная крышка стола.** У одного человека было три квадратных куска ценной древесины со сторонами 12, 15 и 16 см соответственно. Ему захотелось разрезать их на минимальное число кусков, из которых можно было бы сложить крышку маленького столика размером 25 ×25 см.



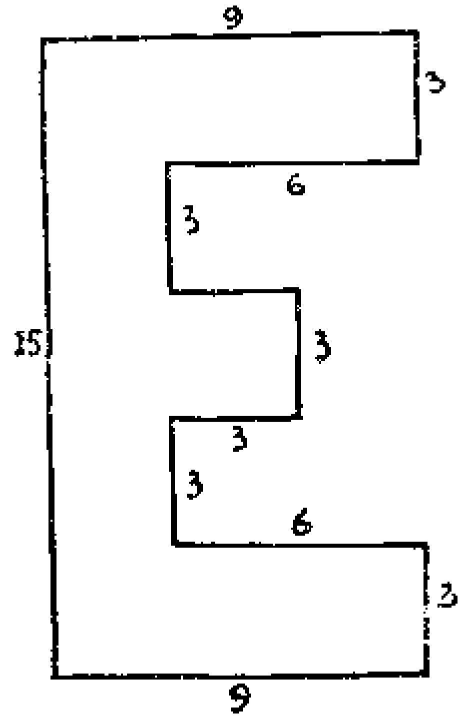
Как ему следовало поступить? Мне легко удалось найти несколько простых решений с шестью кусками, но я потерпел неудачу с пятью. Быть может, в последнем случае решение вообще отсутствует. Думаю, что моих читателей заинтересует этот вопрос.



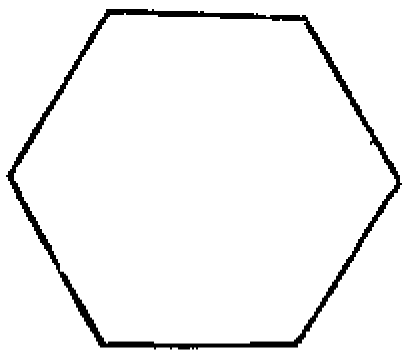

**325. Фанерные квадраты.** У одного человека было два квадратных куска дорогой фанеры, каждый размером $25 \times 25$ см. Один кусок он разрезал, как показано на рисунке, на четыре части, из которых можно составить два квадрата, один $20 \times 20$ см, а другой $15 \times 15$ см. Приставьте просто *C* к *A*, а *D* к *B*. Как ему следует разрезать второй кусок фанеры на четыре части, чтобы из них можно было составить два других квадрата со сторонами в целое число сантиметров, но не в 20 и 15, как раньше?

**326. Разрежьте букву .** Можно ли разрезать букву *E* на пять частей так, чтобы из них можно было составить квадрат?

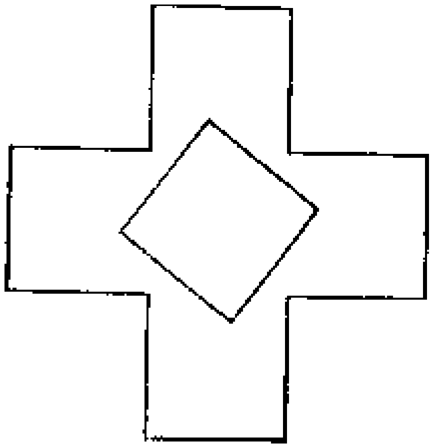
На рисунке все размеры приведены в сантиметрах, чтобы не было сомнений относительно истинных пропорций данной буквы. В нашем случае части не разрешается перевертывать оборотной стороной вверх.



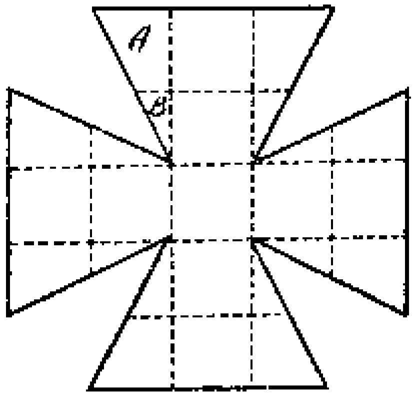

После того как вы решите эту задачу, подумайте, нельзя ли обойтись четырьмя кусками, если разрешить переворачивать части на другую сторону.



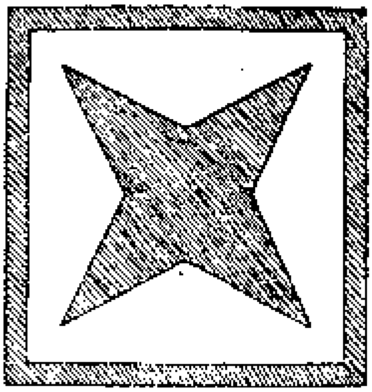
**327. Из шестиугольника — квадрат.** Можно ли разрезать правильный шестиугольник так, чтобы из полученных частей удалось составить квадрат?



**328. Испорченный крест.** Перед вами симметричный греческий крест, некоторого вырезан квадратный кусок, в точности равный одному из концов креста. Задача состоит в том, чтобы оставшуюся часть разрезать на четыре куска, из которых можно составить квадрат. Это приятная, хотя и удивительно простая, головоломка на разрезание.

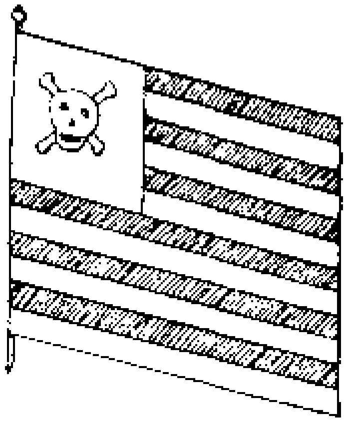



**329. Мальтийский крест.** Огромное количество головоломок связано с греческим, или георгиевским, крестом, составленным из пяти одинаковых квадратов. Однако не менее интересно познакомиться и с мальтийским, или викторианским, крестом. Разрежьте такой крест, показанный на рисунке, на 7 частей так, чтобы из них можно было составить квадрат. Разумеется, это следует сделать без каких-либо потерь материала. Чтобы читатель не сомневался в точности пропорций, введены пунктирные линии. Поскольку из частей *A* и *B* можно составить один маленький квадратик, очевидно, что площадь креста равна 17 таким квадратикам.



**330. Звезда и мальтийский крест.** Можете ли вы разрезать изображенную здесь четырехконечную звезду на 4 части и расположить их внутри рамки таким образом, чтобы получился правильный мальтийский крест?

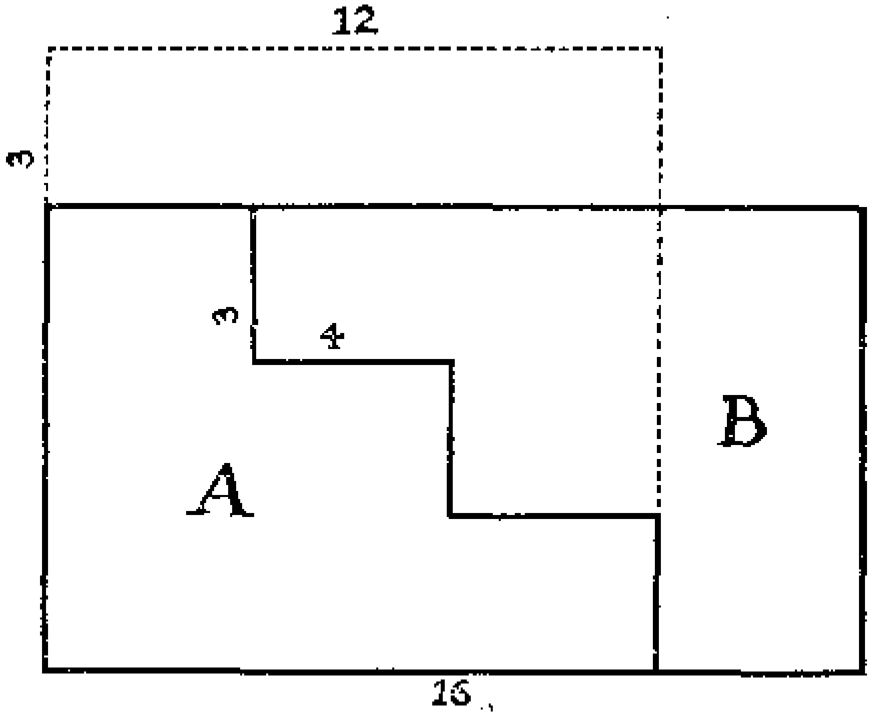
**331. Пиратский флаг.** Перед вами флаг, захваченный в схватке с пиратами где-то в южных морях. Двенадцать полос символизируют 12 членов пиратской шайки, если появляется новый или гибнет старый ее член, добавляется или убирается одна полоса.



Как следует разрезать флаг на возможно меньшее число частей, чтобы, вновь сложив их вместе, получить флаг всего лишь с 10 полосами? При этом следует помнить, что пираты ни за что не поступятся и самым малым кусочком ткани и считают, что флаг непременно должен сохранить свою продолговатую форму.

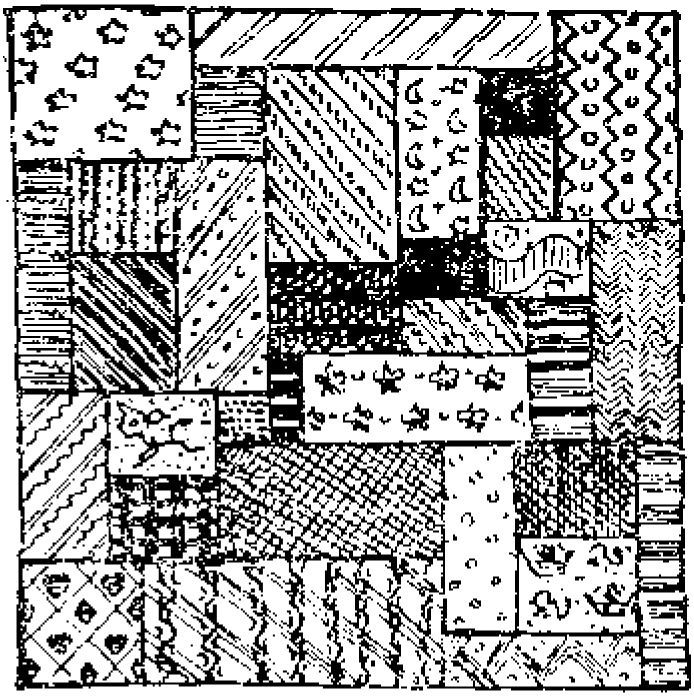
**332. Задача плотника.** Это широко известная головоломка, которая часто встречается в старых книгах.

Корабельному плотнику надо было заделать квадратную дыру размером 12 $\times$12 см, а единственный, оказавшийся у него под рукой кусок доски имел 9 см в ширину и 16 см в длину. Как следует разрезать этот кусок на две части, чтобы ими можно было точно закрыть дыру? Ответ основан на методе, который я назвал бы «методом лестницы» (см. рисунок). Если передвинуть кусок *B* на одну ступеньку влево, то вместе с *A* он образует квадрат 12 $\times$ 12.

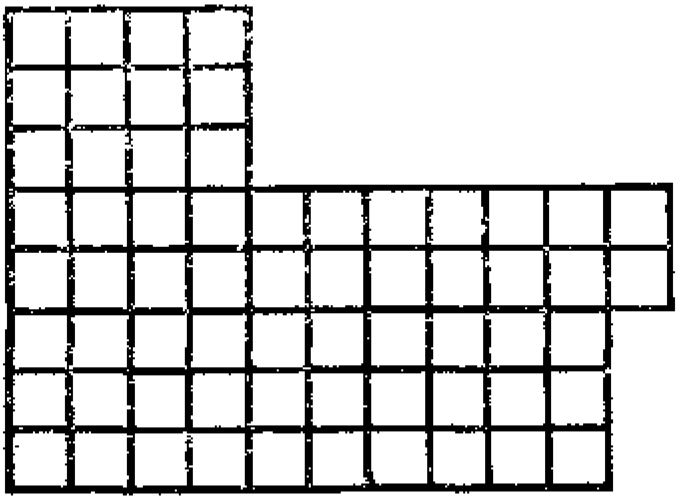



Все это просто и очевидно. Но, насколько я знаю, никто не пытался рассмотреть эту задачу в общем виде. В результате широко распространилось мнение, будто данный метод применим к любому прямоугольнику с разумным соотношением сторон. Однако дело обстоит иначе, и я попытался выявить грубые ошибки в некоторых опубликованных головоломках, показав, что в действительности они не имеют решения. Предлагаю читателям рассмотреть прямоугольник с другим соотношением сторон и попытаться выяснить, в каких случаях можно прибегать к методу лестницы.

**333. Лоскутное одеяло.** Перед вами лоскутное одеяло, которое две юные леди сшили с благотворительными целями. Когда они начали сшивать два куска, изготовленные каждой из них в отдельности, в один, то оказалось, что форма и размеры этих кусков в точности совпадают. Интересно выяснить, где именно соединены куски одеяла.

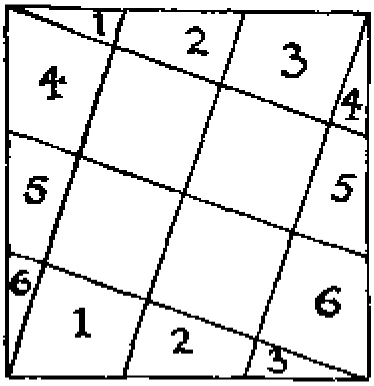


Сумеете ли вы распороть одеяло по шву на две части одинаковой формы и одних размеров? Быть может, вам это покажется делом нескольких минут, но... посмотрим!

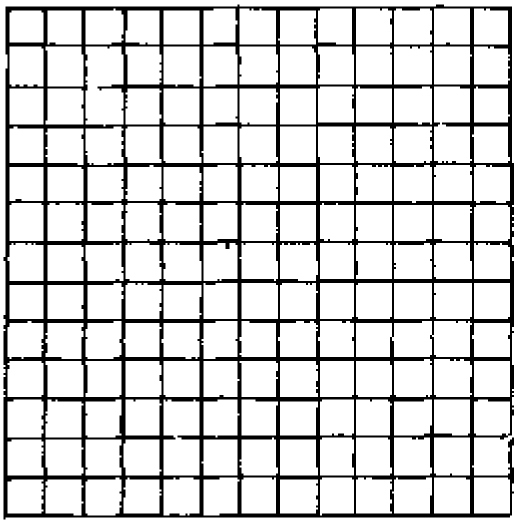


**334. Импровизированная шахматная доска.** Несколько английских солдат в короткий час отдыха решили поиграть в шашки. Монетки и камешки служили им шашками, а импровизированную доску они сделали из куска линолеума, изображенного на рисунке, на котором было как раз нужное число квадратов. Сначала было решено разрезать кусок на части и, замазав положенные квадраты, составить из них шахматную доску. Однако кто-то вовремя подсказал, как можно разрезать доску лишь на две части, чтобы из них получился квадрат 8 $\times$8, Не знаете ли и вы, как это сделать?

**335. Мостовая.** Глядя на мостовую или паркет, читатель, должно быть, нередко замечал, что некоторые их квадратные участки иногда покрывают квадратными плитками, при этом какие-то плитки приходится делить на части. На нашем рисунке показан один такой квадратный участок, покрытый 10 квадратными плитками. Поскольку число 10 не является квадратом, некоторое количество плиток пришлось разрезать. Таких плиток в нашем случае 6. Можно заметить, что кусочки *1* и *1* получились из одной плитки, *2* и *2* — из другой и т. д.

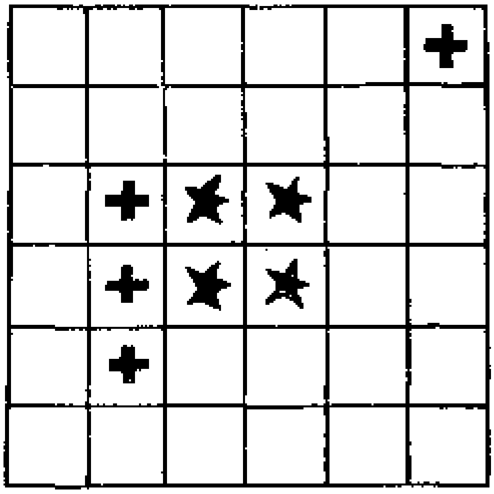



Если бы вам понадобилось покрыть квадратный участок 29 одинаковыми квадратными плитками, то как бы вы это сделали? Какое наименьшее число плиток вам надо было бы разделить надвое?

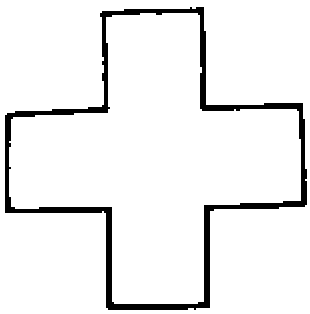


**336. Квадрат квадратов.** Если условием предусмотрено, что разрезы следует проводить только по линиям, то на какое наименьшее число квадратов можно разрезать квадрат, изображенный на нашем рисунке? Наибольшее число, разумеется, равно 169 — числу отдельных клеточек. Однако нас интересует именно наименьшее число. Мы могли бы отрезать по полоске с двух сторон, оставив квадраты 12 ×12, и разрезать эти полоски в свою очередь на 25 маленьких квадратиков, которых всего окажется 26 штук. Конечно, 26 — это не 169, но все еще существенно больше наименьшего возможного решения.

**337. Звездочки и крестики.** Для решения этой головоломки требуется определенная изобретательность, так как подвох заключается в угловом расположении одного из крестиков.

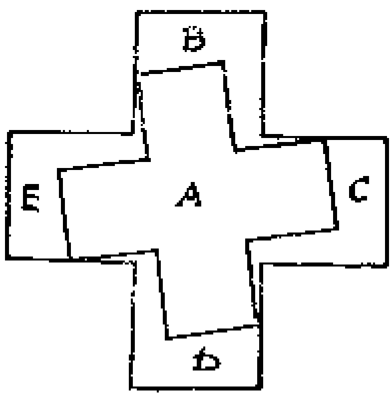


Головоломка заключается в том, чтобы разрезать данный квадрат вдоль линий на 4 части так, чтобы все части были одинакового размера и одной формы и чтобы каждая из частей содержала по звездочке и по крестику.

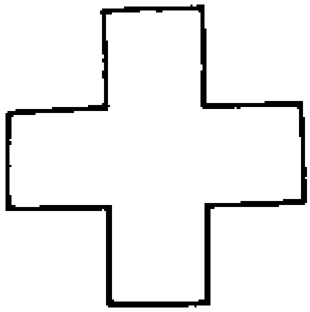


**338. Квадрат и крест.** Разрежьте симметричный греческий крест на 5 частей таким образом, чтобы одна из частей представляла собой симметричный греческий крест меньшего размера, а из остальных частей можно было сложить квадрат.

**339. Три греческих креста из одного.** На помещенном здесь рисунке вы видите изящное решение задачи, в которой требуется вырезать из большего симметричного греческого креста два одинаковых греческих креста меньшего размера. Часть *A* вырезается целиком, и сложить аналогичный крест из оставшихся 4 частей не составляет труда.

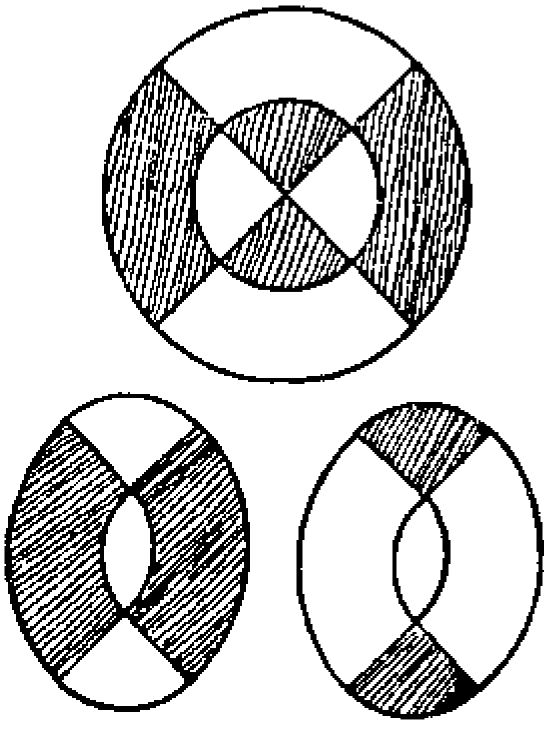


Однако вот вопрос потруднее: каким образом из одного греческого креста получить три. креста той же формы, но меньших размеров, разрезав большой крест на возможно меньшее число частей? Заметим, что эту задачу можно решить, использовав всего 13 частей. Я полагаю, что многие читатели, поднаторевшие в геометрии, будут рады поломать над этой задачей голову. Разумеется, все три креста должны быть одинаковых размеров.

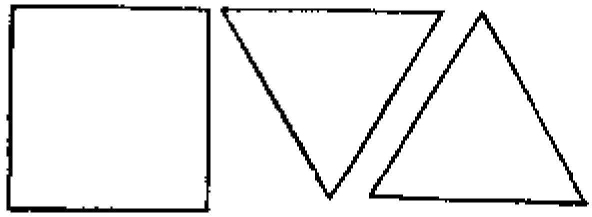


**340. Как составить квадрат?** Вот одна изящная, но простая головоломка на разрезание. Разрежьте изображенную здесь фигуру на 4 части одинаковых размеров и формы, из которых можно было бы составить квадрат.

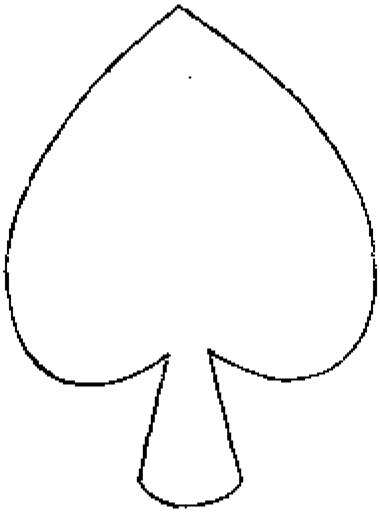
**341. Крышка стола и табуреты.** Многие знакомы со старой головоломкой, где требуется распилить крышку круглого стола на части, из которых можно было бы составить два овальных табурета с отверстием для руки в каждом. Старое решение содержит 8 частей. В решении Сэма Лойда крышку достаточно распилить лишь на 4 части.



Сумеете ли вы разрезать круг на 4 части, из которых можно было бы получить две овальные крышки табуретов (по 2 части на каждую) с отверстиями для руки?

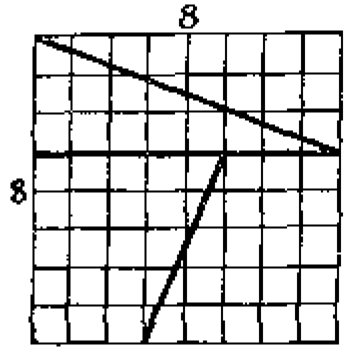


**342. Треугольник и квадрат.** Можете ли вы разрезать каждый из изображенных здесь равносторонних треугольников на 3 части так, чтобы из полученных 6 частей удалось составить квадрат?



**343. Измените масть.** Разрежьте изображенный здесь символ масти пик на 3 части так, чтобы из них можно было составить символ червовой масти. Разумеется, для этого следует использовать весь материал, так как в противном случае достаточно было бы лишь отрезать нижнюю часть.

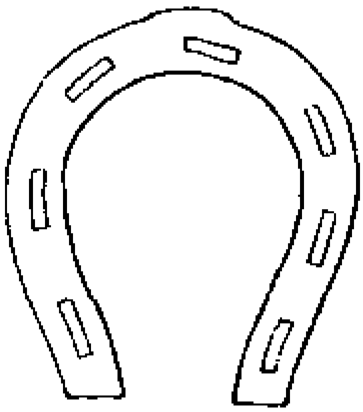
**344. Исчезнувшая клеточка.** Вы видите здесь похожий на шахматную доску квадрат, который разделен на 4 части.




Можете ли вы расположить эти части таким образом, чтобы новая фигура содержала на одну клетку меньше, то есть 63 клетки?

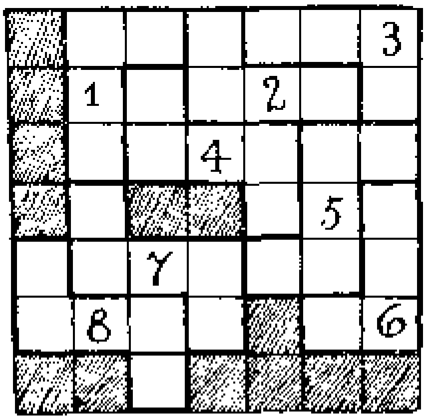
Подумайте хорошенько, может ли количество хлеба или сыра в куске уменьшиться лишь из-за того, что, разрезав этот кусок, мы иначе расположим его части?

**345. Головоломка с подковой.** Вот одна нехитрая головоломка, решить которую, однако, не так-то просто.



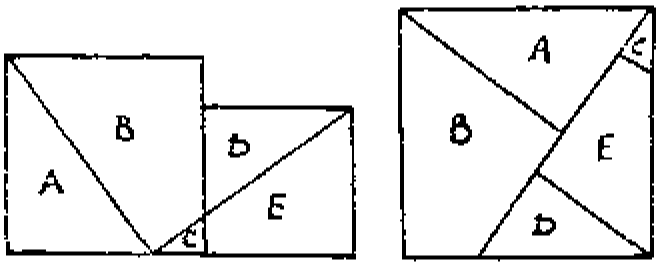
Вырежьте из бумаги подкову, изображенную на нашем рисунке. Не могли бы вы, взмахнув два раза прямыми ножницами, разрезать ее на 7 частей, в каждой из которых содержалась бы дырка для гвоздя? После первого разреза можно даже передвигать куски и складывать их один на другой. Однако сгибать или складывать бумагу каким-либо другим способом не разрешается.

**346. Квадратная крышка для стола.** Из квадратного листа бумаги или картона, разделенного на квадраты 7 $\times$7, вырежьте 8 кусков и удалите те куски, которые на рисунке заштрихованы.




Представьте себе, что столяру из этих 8 кусков фанеры необходимо изготовить квадратную крышку для небольшого стола 6 $\times$6 и что он по глупости разрезал кусок *8* на 3 части.

Как можно составить нужный квадрат, не разрезая ни одного из 8 кусков?

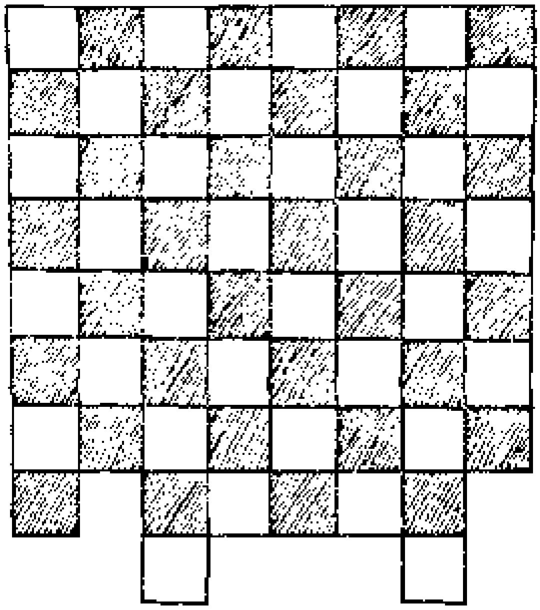



**347. Два квадрата в одном.** Два квадрата произвольных размеров можно разрезать на 5 частей, как показано на рисунке, и составить из них квадрат больших размеров. В этом случае приходится разрезать меньший из двух квадратов. Однако не могли бы вы указать простой способ, позволяющий вовсе не разрезать меньший квадрат?

**348. Задача краснодеревщика.** У краснодеревщика был кусок шахматной доски 7 $\times$7, сделанный из превосходной фанеры, который он хотел разрезать на 6 частей так, чтобы из них можно было составить 3 новых квадрата (все разных размеров).

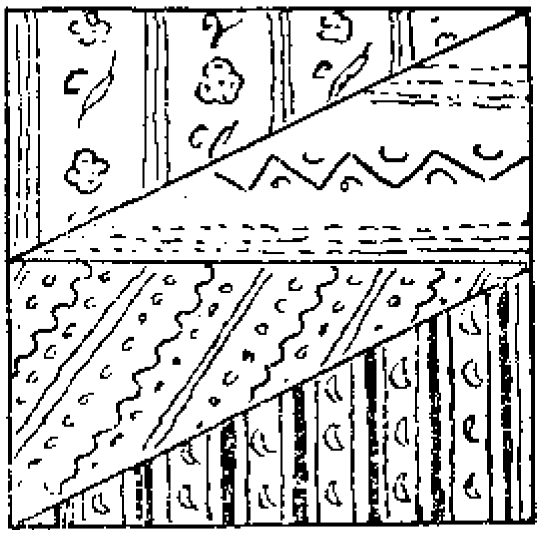
Как ему следовало поступить, не теряя при этом материала и проводя разрезы строго вдоль линий?

**349. Импровизированная шахматная доска.** Хорошие головоломки на разрезание фигуры лишь на две части встречаются нечасто. Однако вот одна из таких головоломок, которая, как мне кажется, привлечет внимание читателей.



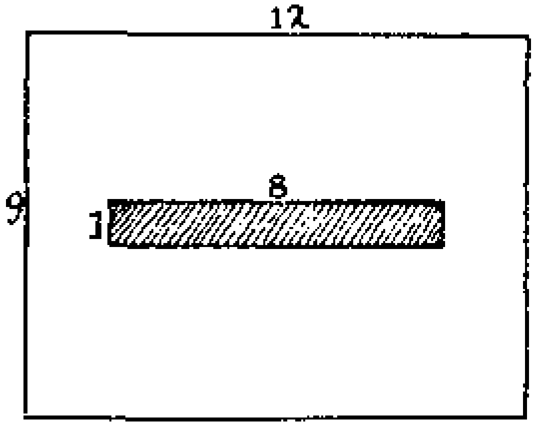
Разрежьте изображенный здесь кусок клетчатого линолеума на две части, из которых можно было бы составить правильную шахматную доску, не перекрашивая клетки. Разумеется, проще всего было бы отрезать два выступающих белых квадратика, но при этом частей получилось бы три, а не две, как требует условие.

**350. Лоскутная подушка.** У некой леди было 20 кусочков шелка одинаковой треугольной формы и одного размера. Она обнаружила, что из четырех таких кусочков можно сшить квадрат (см. рисунок).



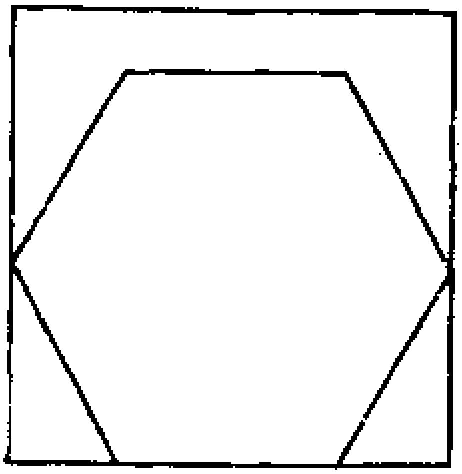
Как ей следует сшить между собой все эти 20 кусочков, чтобы получилась верхняя часть квадратной диванной подушки? При этом не должно оставаться никаких отходов материала, равно как не следует оставлять по краям припуск на швы.

**351. Испорченный ковер.** У одной леди был дорогой персидский ковер размером $12 \times 9$ м, который сильно пострадал от пожара. Поэтому ей пришлось вырезать в середине ковра дыру размером 8 ×1 м (см. рисунок), а затем оставшуюся часть разрезать на два куска, из которых она сшила квадратный ковер размером 10 ×10 м.

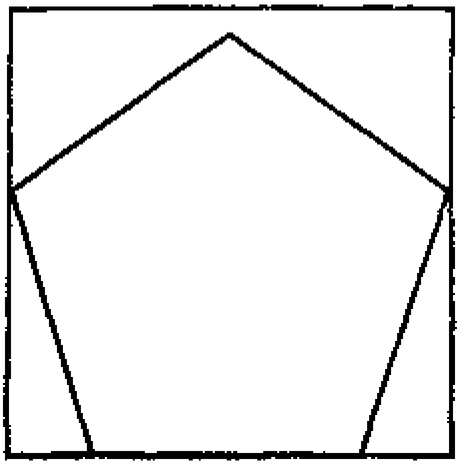



Как ей это удалось сделать? Разумеется, припуски на швы оставлять не следует.

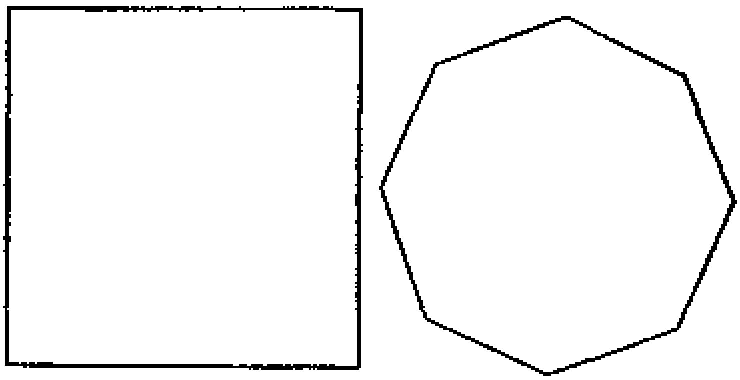
**352. Как сложить шестиугольник?** Головоломки, в которых требуется что-либо сложить из бумаги, одновременно и интересны и поучительны. Я имею в виду не всевозможные коробочки, кораблики и лягушки, сложенные из бумаги, поскольку это скорее игрушки, чем головоломки, а решение некоторых геометрических задач, так сказать, «голыми руками».



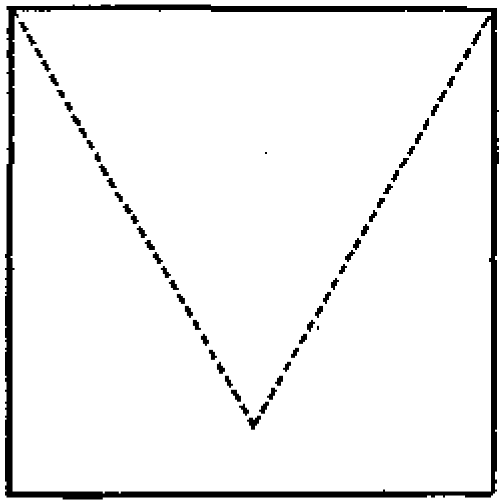
Приведу один сравнительно простой пример. Допустим, что у вас есть квадратный лист бумаги. Как его следует согнуть, чтобы сгибы очертили правильный шестиугольник (см. рисунок)? Разумеется, вы не должны прибегать ни к карандашу, ни к линейке, ни к другим подобным инструментам. Шестиугольник может располагаться внутри квадрата произвольно.



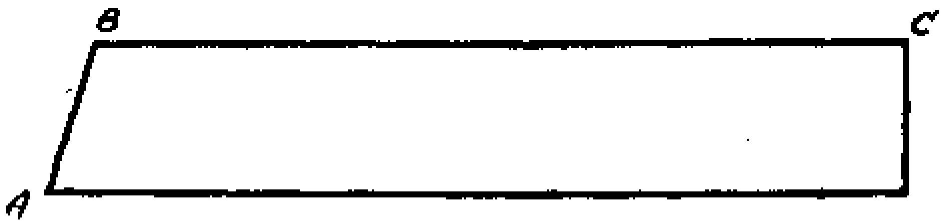
**353. Как сложить пятиугольник?** Вот еще одна головоломка на складывание, значительно более трудная, чем предыдущая задача с шестиугольником. Если у вас имеется квадратный лист бумаги, то как следует его согнуть, чтобы сгибы образовали правильный пятиугольник (см. рисунок)? Сделать это вы должны «голыми руками», не прибегая к измерениям и инструментам.



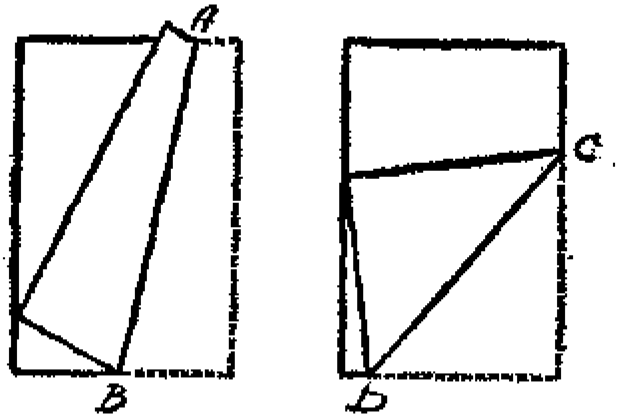
**354. Как сложить восьмиугольник?** Сумеете ли вы из квадратного листа бумаги вырезать правильный восьмиугольник (см. рисунок) с помощью одних только ножниц, не пользуясь циркулем и линейкой? Разрешается лишь сложить предварительно лист бумаги, чтобы затем разрезать по сгибам.



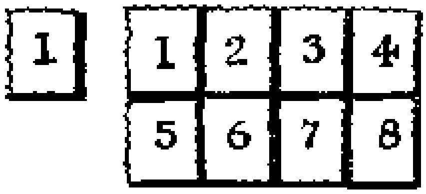
**355. Квадрат и треугольник.** Возьмите квадратный лист бумаги и сложите его таким образом, чтобы получился наибольший из возможных равносторонний треугольник. Треугольник на рисунке, у которого все стороны равны стороне квадрата, не будет наибольшим. Разумеется, при этом производить измерения и пользоваться какими-либо инструментами не следует.




**356. Пятиугольник из полоски.** Изображенную на рисунке полоску бумаги произвольной длины (скажем, длина ее более чем в 4 раза превышает ширину) сложите в правильный пятиугольник так, чтобы все ее части лежали внутри заданной фигуры. Единственное условие состоит в том, что угол *ABC* должен совпадать с внутренним углом правильного пятиугольника.



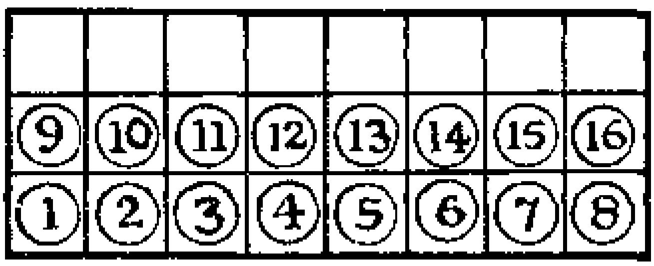
**357. Задача о кратчайшем сгибе.** Перегните страницу так, чтобы нижний внешний угол коснулся внутреннего края, а сгиб оказался бы наикратчайшим из возможных. Это, пожалуй, наиболее простой вопрос, какой только можно задать, однако многие читатели призадумаются, где именно нужно перегнуть страницу. Здесь показаны два примера сгибов такого рода. Вы видите, что сгиб *AB* больше сгиба *CD*, но последний не самый короткий из возможных.




**358. Почтовые марки.** Если у вас имеется блок из восьми почтовых марок 4 ×2 (см. рисунок), то очень интересно найти различные способы сложить все марки так, чтобы они оказались под первой. Скажу сразу же, что всего существует 40 таких способов, когда первая марка обращена лицевой стороной кверху, а остальные располагаются под ней. Марки *5, 2, 7* к *4* всегда будут лежать лицевой стороной вниз, но вы можете добиться того, чтобы любая марка, кроме *6*, лежала непосредственно под *1*, хотя существует только по два способа расположить так марки *7* и *8*. Пользуясь одним небольшим открытым мной законом, я пришел к убеждению, что марки можно сложить в порядке *1, 5, 6, 4, 8, 7, 3, 2* и *1, 3, 7, 5, 6, 8, 4, 2* с первой маркой, расположенной лицевой стороной кверху; однако мне пришлось поломать голову, прежде чем удалось осуществить это на практике.

Сумеет ли читатель сложить марки таким образом, не разрывая, конечно, перфорации? Попробуйте это сделать с листком бумаги, на котором марки отмечены сгибами, а номера для удобства поставлены с обеих сторон. Это очень интересная задача. Не откладывайте ее в сторону, считая неразрешимой!

**359. Упрощенный солитер.** Вот один упрощенный вариант старинной игры солитер, который поможет во многих случаях приятно провести досуг.

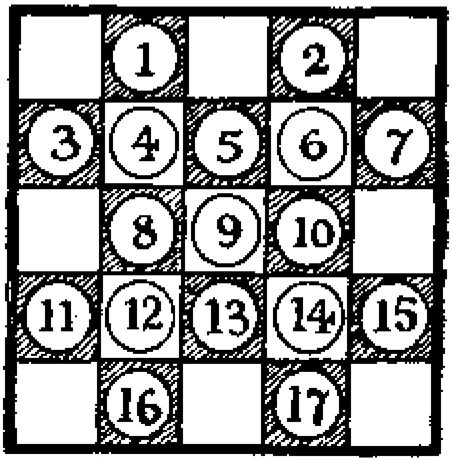



Нарисуйте на листе бумаги или картона простую диаграмму и разместите на ней 16 пронумерованных фишек так, как показано на рисунке. Одна фишка может перепрыгивать через другую на свободный квадрат, расположенный сразу за этой последней, причем та, через которую перепрыгнули, удаляется. Однако перепрыгивать по диагонали запрещено.

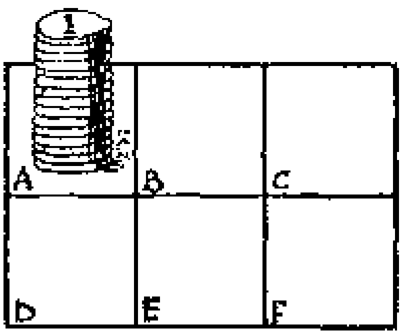
Задача заключается в том, чтобы, последовательно совершая «прыжки», удалить все фишки, кроме одной.

Вот решение в восемь ходов: *5—13, (6—14, 6—5), 16—15, (3—11, 3—6), 2—10, (8—7, 8—16, 8—3), (1—9, 1— 2, 1—8), (4—12, 4—1)*. Приведенная запись означает, что фишка *5* перепрыгивает через фишку *13* и фишку *13* снимают с доски; фишка *6* перепрыгивает через фишку *14*, после чего фишку *14* снимают с доски, и т. д. Прыжки в скобках рассматриваются как один ход, поскольку они совершаются подряд одной и той же фишкой. Легко заметить, что последний прыжок совершает фишка *4*.

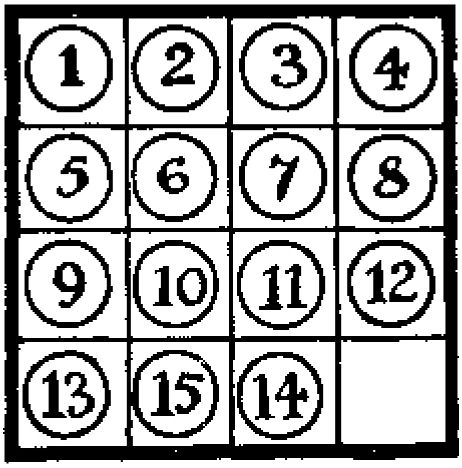
Постарайтесь теперь найти решение в семь ходов, при котором последний прыжок совершит фишка *1*.




**360. Еще одна головоломка с прыжками.** Начертите доску и разместите на ней 17 фишек, как показано на рисунке. Головоломка состоит в том, чтобы удалить все фишки, кроме одной, совершая ряд таких же прыжков, как и в упрощенном солитере. Одна фишка может перепрыгнуть через другую на ближайший квадрат, если он свободен, причем фишка, через которую перепрыгнули, с доски снимается. Нетрудно видеть, что первый прыжок обязана совершить фишка под номером *9*, и сделать это можно восемью различными способами[18]. Последовательная серия прыжков, совершаемых одной фишкой, рассматривается как один ход. Требуется убрать 16 фишек за четыре хода таким образом, чтобы фишка *9* осталась в своей первоначальной позиции в центральном квадрате. Каждый ход состоит только из прыжков.




**361. Перемещение фишек.** Разделите лист бумаги на 6 квадратов и поместите в квадрат *A* (см. рисунок) стопку из 15 фишек с номерами *1, 2, 3,* ..., 15, идущими сверху вниз. Головоломка состоит в том, чтобы переместить всю стопку за возможно меньшее число ходов в квадрат *F*. Перемещать можно по одной фишке за ход в любой квадрат, но больший номер нельзя класть на меньший. Так, если вы поместите фишку *1* в квадрат *B*, а фишку *2* в квадрат *C*,то затем можно положить фишку *1* поверх фишки *2*, но не фишку *2* поверх фишки *1*.

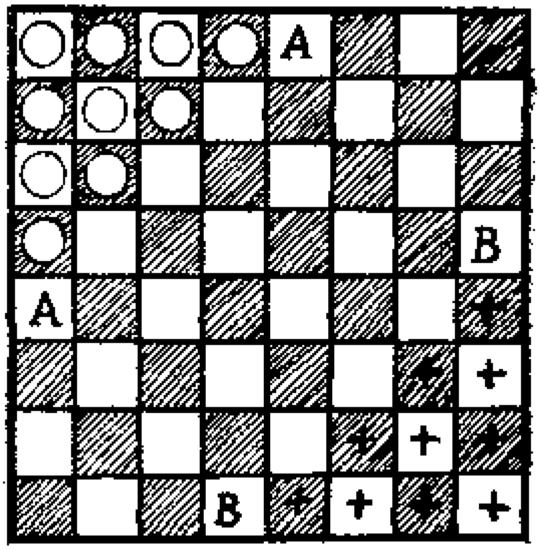



**362. Игра в 15.** На рисунке перед вами знаменитая головоломка — игра в 15 Сэма Лойда, в которой требовалось, передвигая фишки в коробке, расположить 14 и 15 в правильном порядке.

Можно ли, передвигая фишки, составить из них правильный магический квадрат, у которого сумма чисел, стоящих в любом столбце, строке и на любой из двух диагоналей, равнялась бы 30?

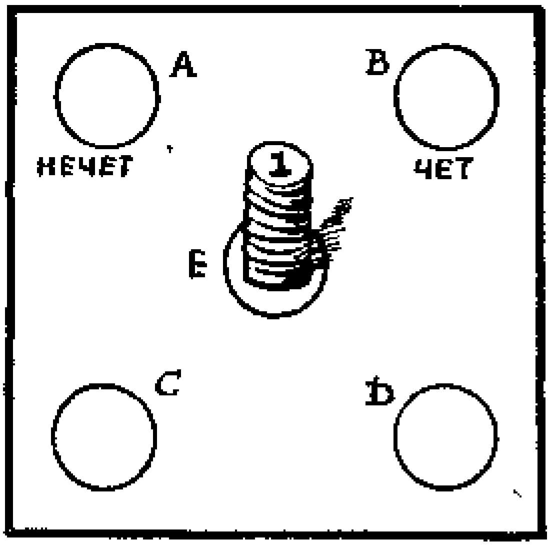
Вместо квадратных удобнее использовать перенумерованные круглые фишки. Чему равно наименьшее число ходов?

**363. Как перестроить фишки?** Расставьте 10 фишек в углу шахматной доски и переместите их в противоположный угол, как показано крестиками на рисунке. Фишке разрешается перепрыгивать по горизонтали или вертикали через другую фишку на ближайший квадрат, если он свободен. Прыжки по диагонали запрещены. Фишки с доски не снимаются. Передвигать фишки на пустые соседние клетки тоже запрещается — фишки должны только прыгать.




Чтобы не тратить попусту ваше время, скажу сразу же, что можно доказать неразрешимость этой головоломки. Однако, если добавить две фишки, головоломка станет разрешимой. Если в исходной позиции вы поместите две новые фишки, например на клетки *A, A*, то в конце они должны оказаться в клетках *B, B*.

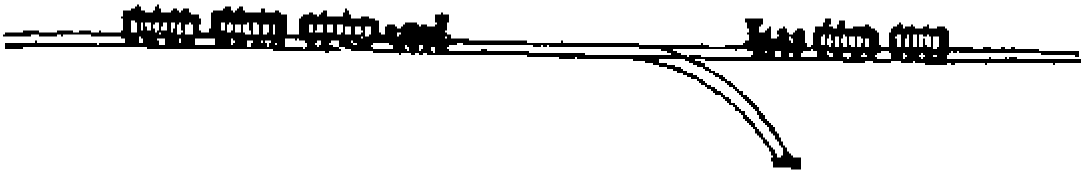
Куда следует поместить две новые фишки?



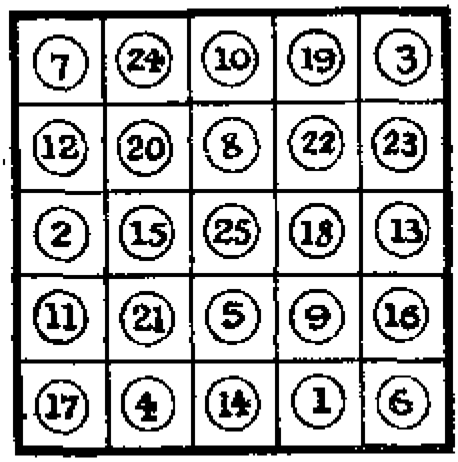

**364. Четные и нечетные фишки.** Поместите стопку из восьми фишек в центральный круг, как показано на рисунке, таким образом, чтобы сверху вниз номера шли по порядку от 1 до 8. Требуется переместить фишки *1, 3, 5, 7* в круг с надписью НЕЧЕТ, а *2, 4, 6, 8* — в круг с надписью ЧЕТ. За один раз разрешается перемещать из круга в круг лишь одну фишку, причем больший номер нельзя класть на меньший, запрещается также помещать номера разной четности одновременно в один и тот же круг. Так, например, вы можете положить фишку *1* на фишку *3*, *3* — на *7*, *2* — на *6* или *2* — на *4*, но нельзя класть фишку *1* на *2*, *4* — на *7*, поскольку при этом четные номера окажутся в одном круге с нечетными.

Чему равно наименьшее число ходов?

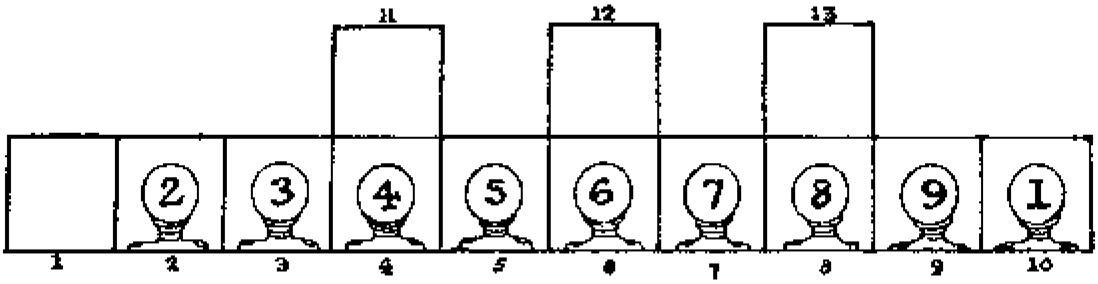
**365. Железнодорожная стрелка.** Каким образом два поезда смогут разминуться с помощью изображенной здесь стрелки и продолжать движение дальше вперед паровозами? Небольшой боковой тупик достаточен лишь для того, чтобы принять либо паровоз, либо один вагон одновременно. Никаких трюков с канатами и перелетами не допускается. Каждое изменение направления, совершаемое одним паровозом, считается за один ход. Чему равно наименьшее число ходов?



Для более удобного решения нарисуйте на листе бумаги железнодорожные пути и положите на них гривенник и три двухкопеечные монеты (вверх гербами), изображающие левый поезд, и гривенник с двумя двухкопеечными монетами (вниз гербами), изображающими правый поезд.



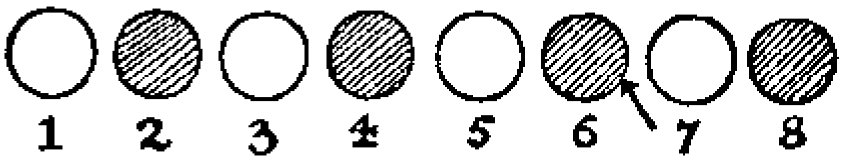

**366. Как упорядочить фишки?** Расставьте фишки внутри квадрата так, как показано на рисунке. Головоломка состоит в том, чтобы расположить их по порядку (в первой строке фишки *1, 2, 3, 4, 5*, во второй — *6, 7, 8, 9, 10* и т. д.), беря по фишке в каждую руку и меняя их местами. Например, вы можете взять фишки *7* и *1* и расположить их в порядке *1* и *7*. Поменяв затем местами фишки *24* и *2*, вы расположите в правильном порядке первые две фишки. Задача заключается в том, чтобы выстроить фишки по порядку за наименьшее число ходов.




**367. Девять человек в окопе.** Представьте себе, что на рисунке изображены 9 человек в одном окопе. Сержант под номером 1 хочет оказаться на другом конце окопа (в точке *1*), но чтобы при этом все остальные солдаты остались на своих местах. Окоп слишком узок, и двоим в нем не разойтись, а перебираться по чужим спинам — занятие довольно опасное. Однако с помощью трех ниш (каждая на одного человека) добиться желаемого совсем нетрудно.

Как это можно сделать за наименьшее число ходов? Человек за один ход может передвигаться на любое доступное расстояние.

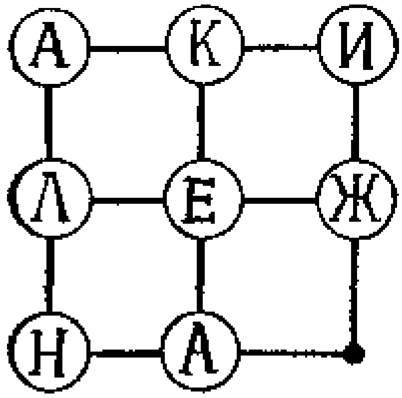
**368. Черное и белое.** Однажды за чашкой чая профессор Рэкбрейн показал своим друзьям следующую старую головоломку.




Расположите 4 белые и 4 черные фишки в ряд через одну, как показано на рисунке. Головоломка состоит в том, чтобы переставить две соприкасающиеся фишки в один из концов, затем переставить две другие соприкасающиеся фишки на освободившееся место и т. д. до тех пор, пока через 4 хода все фишки не образуют прямую без пробелов, в которой сначала идут 4 черные, а за ними 4 белые фишки. Помните, что перемещать можно только соприкасающиеся фишки.

— Теперь,— сказал Рэкбрейн,— поскольку вы научились играть в эту игру, попробуйте другой вариант. Условия остаются теми же, но, передвигая две соприкасающиеся фишки, вы должны менять их местами. Так, если вы переносите фишки *5, 6* в конец, то должны расположить их в порядке *6, 5*. Сколько потребуется ходов теперь?

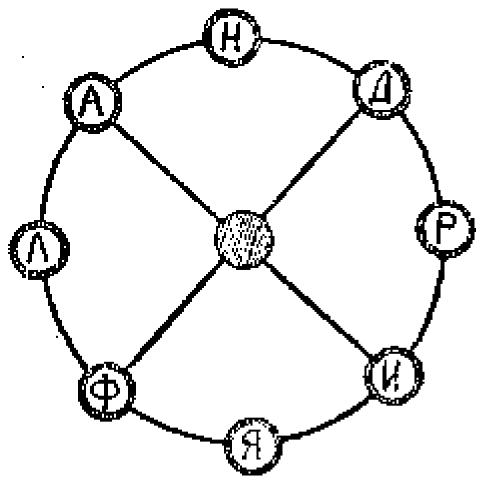
**369. Анжелика.** Проведите 3 прямые вертикально и 3 горизонтально таким образом, чтобы они образовали квадрат (см. рисунок), и поместите в точки пересечения восемь фишек с буквами.




Головоломка состоит в том, чтобы, передвигая фишки вдоль прямых на свободные места, составить из них слово АНЖЕЛИКА:

| | | |
|---|---|---|
| А | Н | Ж |
| Е | Л | И |
| К | А | . |

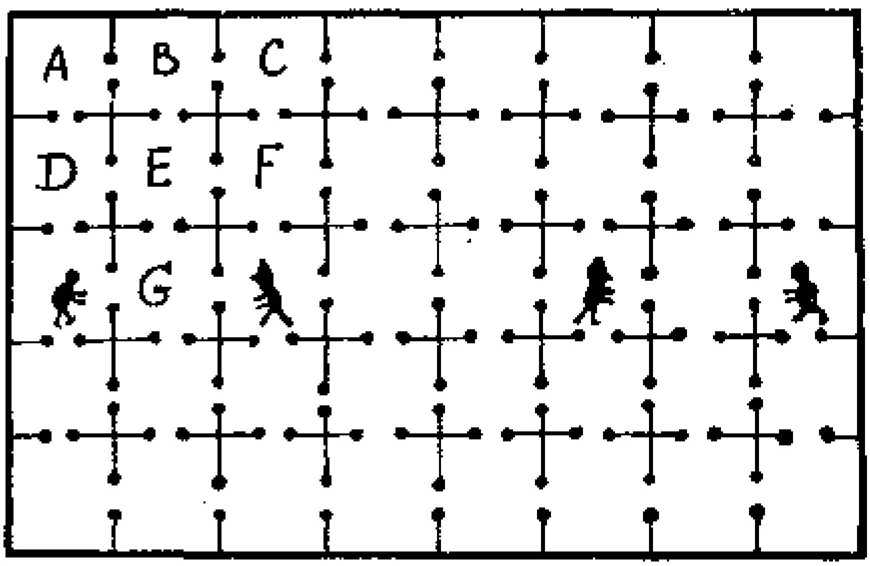
Попытайтесь сделать это за наименьшее число ходов. Записывать ходы очень просто. Для этого надо только выписывать по очереди те буквы, которые вы передвигаете, например АЕЛН и т. д.



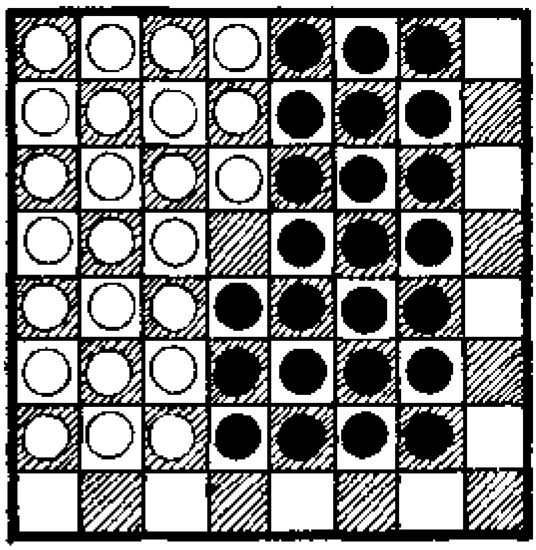

**370. Фландрское колесо.** Разместите на колесе 8 фишек с буквами, как показано на рисунке. Затем передвигайте их по одной вдоль линий от кружка к кружку, пока у вас не получится слово ФЛАНДРИЯ, расположенное, как и теперь, по ободу колеса, но только буква Ф должна оказаться в верхнем кружке на месте буквы Н. Разумеется, две фишки не могут одновременно находиться в одном кружке.

Найдите решение с наименьшим числом ходов.

**371. Погоня.** Начертите на листе бумаги поле, которое изображено на нашем рисунке, и воспользуйтесь фишками, представляющими двух охранников (люди в высоких шапках) и двух узников. Вначале разместите фишки так, как показано на рисунке. Первый игрок передвигает каждого охранника через дверь из одной камеры в любую соседнюю. Затем второй игрок передвигает каждого узника через дверь в любую соседнюю камеру и т. д. до тех пор, пока каждый охранник не схватит своего узника. Если какой-либо охранник хватает узника, то он вместе со своей жертвой выбывает из игры, а другая пара продолжает игру.

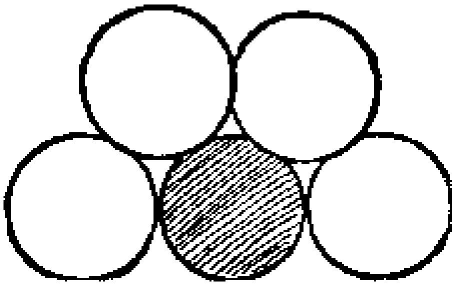



Например, охранник может пойти в камеру $F$ (для простоты мы рассмотрим лишь одну пару охранник — узник), затем узник перейдет в камеру $D$, охранник — в камеру $E$, узник — в камеру $A$, охранник — в камеру $B$, узник — в камеру $D$ и т. д. Может показаться, что погоня охранника за узником безнадежно затянется, но, проявив немного смекалки, вы сумеете настичь беглеца.

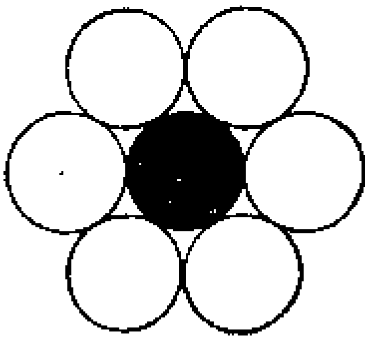


**372. Кадриль кузнечиков.** Поменяйте местами белые шашки с черными за возможно меньшее число ходов. Нельзя ходить по диагонали или «есть» шашки противника. Белые шашки могут ходить только вправо или вверх, а черные — только влево или вниз, но они могут перепрыгивать через шашки другого цвета, как при обычной игре в шашки. Решить задачу очень легко, если вам удастся нащупать метод решения.

**373. Четыре монеты.** Возьмите 4 одинаковые монеты и расположите их на столе без помощи другой монеты или других вспомогательных средств таким образом, чтобы пятую монету можно было точно подогнать к четырем данным, не сдвигая последних (на рисунке заштрихованный кружок изображает пятую монету).



Положившись лишь на собственный глазомер, вы, вероятнее всего, потерпите неудачу. В то же время условие можно выполнить с абсолютной точностью. Но как?



**374. Шесть монет.** Положите 6 одинаковых монет на стол, а затем разместите их, как показано на рисунке белыми кружками, так, чтобы, опустив седьмую монету (черный кружок) в центр, вы привели бы ее тем самым в соприкосновение со всеми шестью монетами. Задание требуется выполнить совершенно точно, а не «на глазок». Приподнимать какую-либо монету со стола (иначе вообще не получилось бы никакой головоломки) или совершать какие-либо измерения не разрешается. В вашем распоряжении только шесть монет.

# КОМБИНАТОРНЫЕ И ТОПОЛОГИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ

**375. Неправильный магический квадрат.** На помещенном здесь рисунке изображен правильный магический квадрат, составленный из чисел от 1 до 16 включительно. Сумма чисел, стоящих в любой строке, в любом столбце и на любой из двух больших диагоналей, равна 34. Предположим теперь, что вам запрещено использовать числа 2 и 15, но вместо этого вы можете повторить любые два числа, уже использованные ранее.

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1 | 14 | 7 | 12 |
| 15 | 4 | 9 | 6 |
| 10 | 5 | 16 | 3 |
| 8 | 11 | 2 | 13 |

Как следует расположить числа, чтобы в новом квадрате их суммы во всех строках, столбцах и на диагоналях по-прежнему равнялись 34? Успех зависит от того, какими числами вы замените 2 и 15.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 17 | 24 | 1 | 8 | 15 |
| 23 | 5 | 7 | 14 | 16 |
| 4 | 6 | 13 | 20 | 22 |
| 10 | 12 | 19 | 21 | 3 |
| 11 | 18 | 25 | 2 | 9 |

**376. Недоразумение с магическим квадратом.** Перед вами магический квадрат пятого порядка. Я обнаружил, что подавляющее большинство людей, не знакомых глубоко с теорией магических квадратов, убеждены, будто в квадратах пятого порядка в центре непременно должно стоять число 13. Один читатель, на протяжении многих лет забавлявшийся этим квадратом, был просто поражен, когда узнал от меня, что в центре такого квадрата может стоять любое число от 1 до 25.

Докажите, что это действительно так. Попытайтесь, например, составить магический квадрат пятого порядка, в центре которого стояла бы 1.

| | | |
|---|---|---|
| 4 | 3 | 2 |
| 7 | 1 | 9 |
| 6 | 5 | 8 |

**377. Разностные квадраты.** Можете ли вы расположить 9 цифр в виде квадрата таким образом, чтобы в любой строке, в любом столбце и на каждой из больших диагоналей разности между суммой двух цифр и третьей цифрой совпадали между собой? На нашем рисунке приведен квадрат, в котором все строки и столбцы удовлетворяют требуемому условию — разность в них равна 3 (например, 4 + 2 - 3, 1 + 9 - 7, 6 + 5 - 8 и т. д.), а вот диагонали «подкачали», поскольку разности 8 - (4 + 1) и 6 - (1 + 2) получены запрещенным способом: не из одной цифры должна вычитаться сумма двух остальных, а из суммы двух — одна.

Сколько всего существует решений?

---

| | | |
|---|---|---|
| 27 | 20 | 25 |
| 22 | 24 | 26 |
| 23 | 28 | 21 |

---

**378. Так ли просто?** Перед вами простой магический квадрат, у которого суммы чисел, стоящих в любой строке, в любом столбце и на главных диагоналях, равны 72. Головоломка состоит в том, чтобы превратить его в мультипликативный магический квадрат, у которого *произведения* чисел, стоящих в любой строке, в любом столбце или на любой из больших диагоналей, совпадали бы между собой. Не разрешается ни менять числа местами, ни прибавлять к ним что-либо, ни вообще пользоваться какими-либо арифметическими знаками! Можно лишь передвигать цифры внутри одной клетки. Так, вместо 27 разрешается брать 72.

Если вам удастся подобрать «ключ» к решению, то задача окажется необычайно простой. В противном случае решить головоломку почти невозможно.

**379. Фокус с магическим квадратом.** Этот фокус был весьма разрекламирован в США много лет назад.

---

| | | |
|---|---|---|
| | | |
| | 5 | |
| | | |

---

Заполните пустые квадраты (см. рисунок) цифрами (в каждом случае различными, чтобы никакие две клетки не содержали одинаковой цифры) так, чтобы сумма чисел, стоящих как можно в большем числе столбцов, строк и на диагоналях, равнялась 15. За разгадку «секрета» фокуса был назначен большой приз, но получить правильное решение не удалось никому.

Может быть, читатель разгадает, в чем здесь дело?

---

| | | |
|---|---|---|
| 1234 | 1234 | 1234 |
| 1234 | 1234 | 1234 |
| 1234 | 1234 | 1234 |

---

**380. Магический квадрат из четырех цифр.** Поскольку данный квадрат составлен из одного и того же числа 1234, естественно, что суммы чисел, стоящих во всех строках, столбцах и на диагоналях, равны между собой. Суть головоломки в том, чтобы составить и разместить 9 различных четырехзначных чисел (составленных из тех же самых четырех цифр) так, чтобы они тоже образовывали правильный магический квадрат. Помните, что все вместе числа должны содержать по девять экземпляров каждой из цифр 1, 2, 3, 4 и что это должны быть настоящие четырехзначные числа без каких-либо дробей; никакие трюки здесь не допускаются.

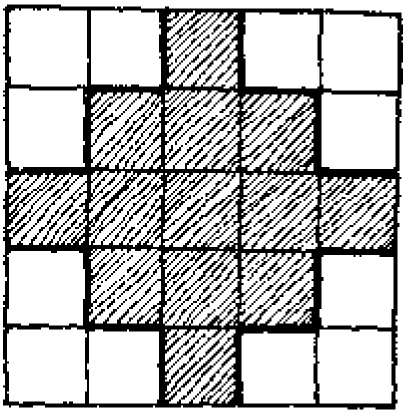
---

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | | | | |
| | 20 | 55 | 30 | 57 | 28 | 71 | 26 | |
| | 14 | 31 | 50 | 29 | 60 | 35 | 68 | |
| | 58 | 46 | 38 | 45 | 40 | 36 | 24 | |
| | 65 | 33 | 43 | 41 | 39 | 49 | 17 | |
| | 64 | 48 | 42 | 37 | 44 | 34 | 18 | |
| | 10 | 47 | 32 | 53 | 22 | 51 | 72 | |
| | 56 | 27 | 52 | 25 | 54 | 11 | 62 | |
| | | | | | | | | |

---

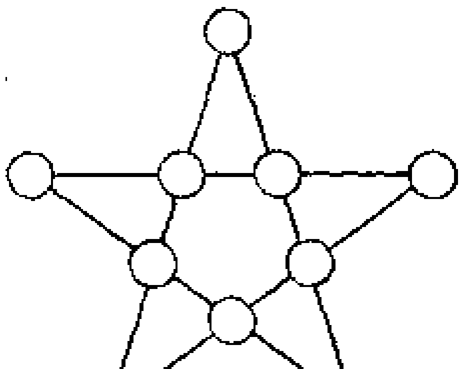
**381. Прогрессирующие квадраты.** Перед вами магический квадрат, постоянная которого, то есть сумма чисел в каждой строке, в каждом столбце и на каждой из двух диагоналей, равна 287. Если мы удалим числа, расположенные по краям, то останется другой магический квадрат, постоянная которого равна 205. Если мы опять удалим крайние числа, то получится квадрат с постоянной 123. Заполните теперь пустые клетки числами от 1 до 83 включительно так, чтобы получился магический квадрат с постоянной 369 на любой из 20 его прямых.

**382. Условный магический квадрат.** Хотя относительно простого построения магических квадратов добавить нечего, а по самому предмету существует весьма обширная, правда, разрозненная, литература, небольшие вариации с некоторыми новыми условиями всегда вызывают интерес. Вот один нетрудный пример.



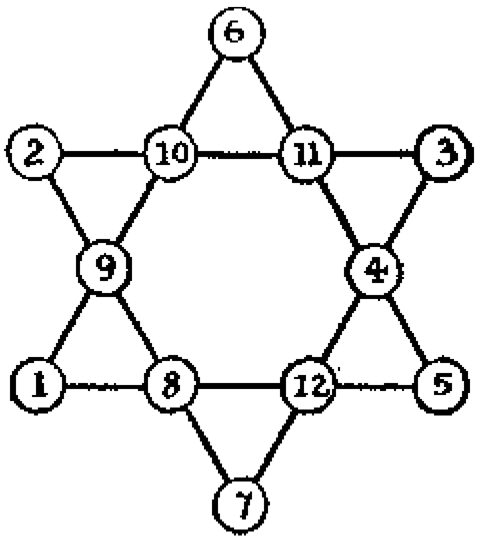
Можно ли построить магический квадрат, у которого суммы чисел, стоящих в любой строке, в любом столбце и на каждой из двух больших диагоналей, были бы одинаковы, из чисел от 1 до 25 включительно, если размещать в заштрихованных клетках только нечетные числа, а в остальных четные? Существует достаточно много решений этой задачи. Не смогли бы вы найти хотя бы одно из них?

**383. Пятиконечная звезда.** Головоломки со звездами обладают своеобразной притягательной силой. Я приведу пример такой головоломки с простой пятиконечной звездой.



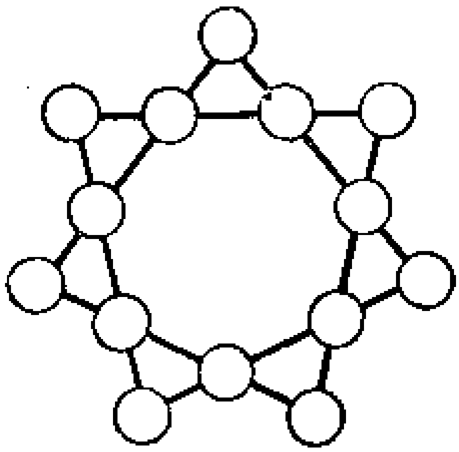
В каждый кружок изображенной здесь пятиконечной звезды требуется поместить различные числа таким образом, чтобы сумма любых четырех чисел, стоящих на одной прямой, равнялась 24. Решения с десятью последовательными числами не существует, однако вы можете использовать любые целые числа, какие пожелаете.

**384. Шестиконечная звезда.** В предыдущей задаче мы рассмотрели случай с пятиконечной звездой. Оказывается, с шестиконечной звездой дело обстоит еще интересней. В этом случае (см. рисунок) мы всегда можем использовать 12 последовательных чисел, от 1 до 12, а сумма четырех чисел на каждой прямой всегда окажется равной 26. Сумма чисел, стоящих в шести вершинах, может равняться любому числу от 24 до 54 включительно, кроме 28 и 50. В нашем примере эта сумма равна 24. Если вместо каждого из чисел вы подставите разность между ним и 13, то получите другое решение, дополнительное к данному, с суммой вершин, равной 54 (78 минус 24). Две дополнительные суммы в совокупности всегда дают 78.



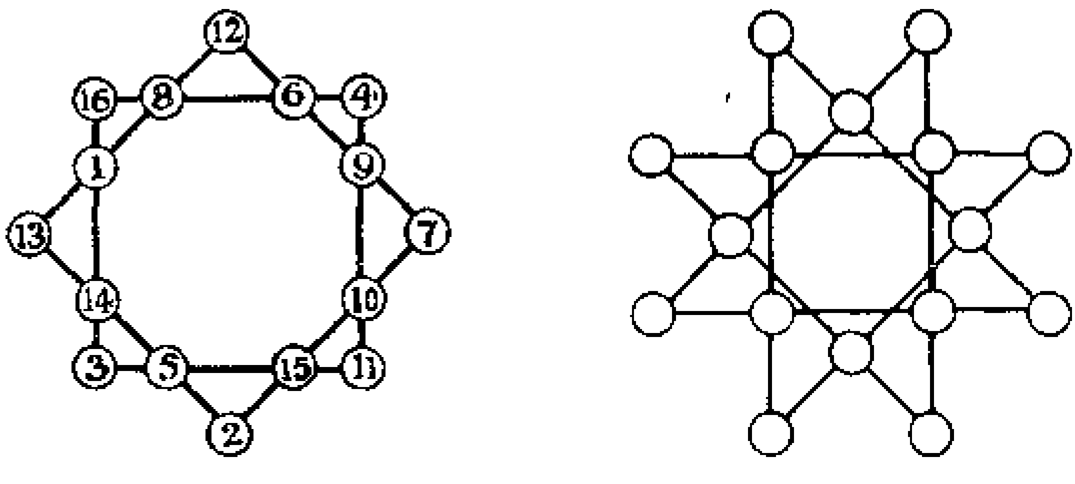

Я приведу общее число различных решений и укажу на некоторые любопытные законы, которым подчиняется эта задача, но ее решение предоставлю читателю. Существует 6 и только 6 размещений, при которых сумма чисел на каждой прямой и во всех вершинах равна 26. Можете ли вы найти одно из них или даже все?

**385. Семиконечная звезда.** Мы уже познакомились вкратце с пяти- и шестиконечными звездами. Случай с семиконечной звездой особенно интересен. Все, что от вас требуется, это разместить в кружочках числа от 1 до 14 так, чтобы в любых четырех кружочках, лежащих на одной прямой, они в сумме давали 30.



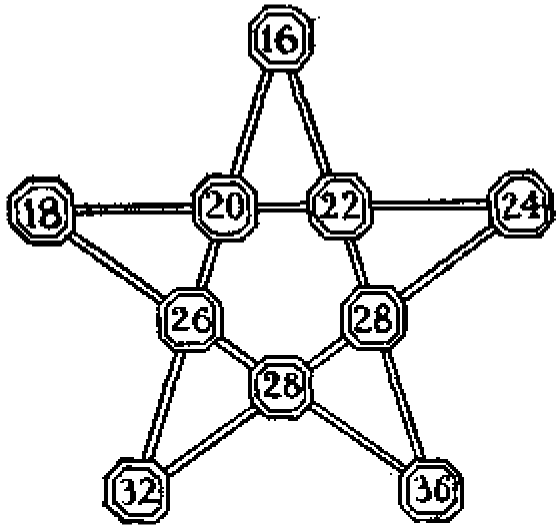
Если вы нарисуете диаграмму, подобную изображенной на нашем рисунке, и воспользуетесь перенумерованными фишками, то вам будет трудно не подпасть под очарование этой головоломки. Возможно, однако, что никто из читателей не натолкнется на простой способ ее решения и решение будет найдено лишь благодаря терпению и удаче. И все же, как и в подавляющем большинстве головоломок, уже встречавшихся на наших страницах, вы увидите, что и в данном случае решение подчиняется некоторому закону (если сумеете найти этот закон).

**386. Две восьмиконечные звезды.** Головоломки с пяти-, шести- и семиконечными звездами приводят нас к восьмиконечной звезде. Эту звезду можно образовать двумя различными способами (см. рисунок); здесь приводится и решение для первого варианта. Числа от 1 до 16 расположены таким образом, что сумма четырех из них вдоль каждой прямой равна 34. Если вместо каждого числа вы подставите разность между ним и 17, то получите дополнительное решение.



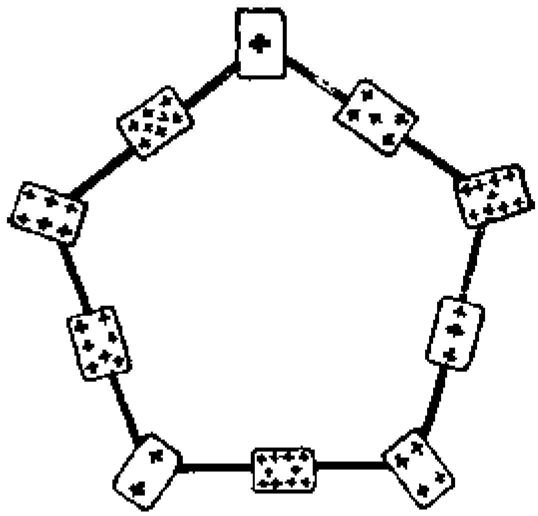

Если читатель попытается найти какое-нибудь решение для другой звезды, то, даже зная решение, приведенное выше, он убедится, что этот орешек расколоть не так-то просто. Однако я представлю вам головоломку в легкой и занимательной форме. Оказывается, что любое решение для первой звезды можно автоматически преобразовать в решение для второй, если правильно взяться за дело. Каждая прямая из четырех чисел в одном случае появится и в другом, изменится лишь порядок чисел. Располагая этими сведениями, вам нетрудно будет найти решение и для второй звезды.

**387. Гарнизоны фортов.** Перед вами на рисунке изображена система фортификационных сооружений. Всего имеется 10 связанных между собой фортов, цифры обозначают численность размещенных в них небольших гарнизонов. Командующий решил передислоцировать гарнизоны таким образом, чтобы вдоль каждой из пяти прямых размещалось по 100 человек.

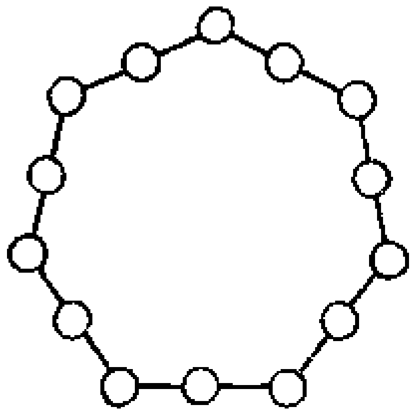



Не могли бы вы указать, как это следует сделать?

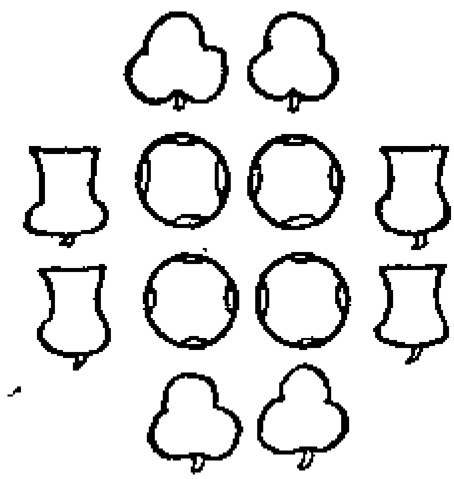
Гарнизоны должны передислоцироваться целиком, не будучи разбитыми на части. Эта головоломка с фишками весьма занимательна и не очень трудна.



**388. Карточный пятиугольник.** Набросайте на большом листе бумаги пятиугольник. Затем положите все карты одной масти, исключив валета, даму и короля, так, чтобы суммы очков трех карт, лежащих на любой стороне пятиугольника, равнялись между собой[19]. Можно заметить, что приведенное на рисунке размещение карт не удовлетворяет нашему условию. Однако после того, как вы найдете соответствующее правило, карты можно будет раскладывать, не задумываясь. Решений здесь существует очень мало.

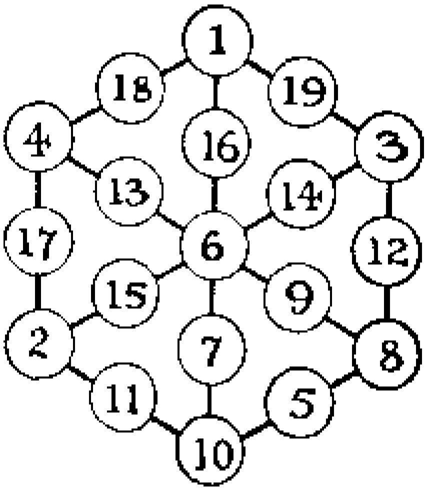


**389. Головоломка с семиугольником.** Разместите в кружках числа от 1 до 14 (см. рисунок) так, чтобы три числа на каждой из сторон в сумме давали 19.

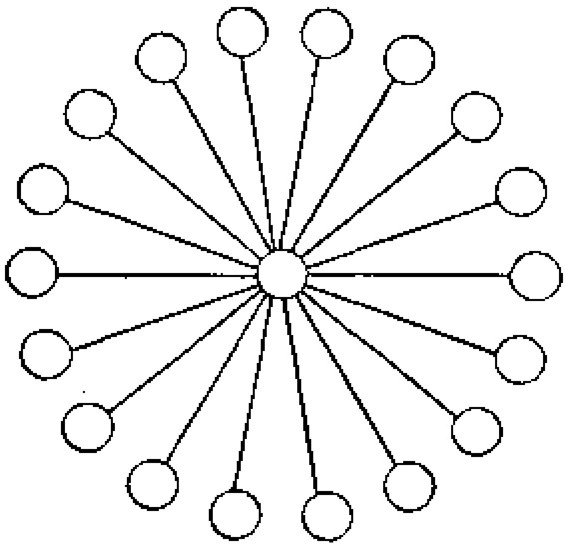


**390. Розы, трилистники и чертополох.** Разместите числа от 1 до 12 (по одному числу в каждой картинке) таким образом, чтобы совпали семь их сумм: вдоль каждого из двух центральных столбцов, вдоль каждой из двух центральных строк, по всем четырем розам, по всем четырем трилистникам, по всему чертополоху.

**391. Магический шестиугольник.** На помещенном здесь рисунке показано, как можно разместить числа от 1 до 19, чтобы суммы трех чисел вдоль каждой из 12 прямых равнялись 23. Шесть прямых совпадают, конечно, с шестью сторонами шестиугольника, а шесть остальных проходят через центр.




Можно ли иначе расставить числа, чтобы сумма по любому из 12 направлений по-прежнему составляла 23? Существует только одно такое размещение чисел.



**392. Головоломка с колесом.** Разместите числа от 1 до 19 в 19 кружках (см. рисунок) так, чтобы сумма любых трех чисел на одной прямой равнялась 30. Сделать это нетрудно.

**393. У ручья.** Существует общее мнение, что головоломки, в которых требуется отмерить некоторое количество жидкости, можно решить только путем ряда проб, однако в подобного рода случаях можно найти общие формулы для решений. Воспользовавшись как-то преимуществами неожиданного досуга, я рассмотрел этот вопрос более внимательно. В результате обнаружились весьма интересные вещи. Рассмотрим, например, простейший случай, когда некий человек приходит к ручью только с двумя сосудами и хочет отмерить нужное количество воды. Если мы имеем дело, скажем, с бочкой вина, то у нас могут возникнуть разного рода сложности, связанные с тем, пуста ли бочка или полна, известны ли нам ее вместимость и содержимое или нет, допускается ли потеря вина или нет и можно ли переливать вино обратно в бочку. В случае у ручья все эти сложности исчезают. Может быть, задача упростилась настолько, что говорить о ней как о головоломке вообще не имеет смысла? Давайте посмотрим.

Человек приходит к ручью с двумя сосудами вместимостью соответственно 15 и 16 л. Каким образом он может отмерить ровно 8 л воды за наименьшее число операций? Наполняя сосуд, опустошая его или переливая воду из одного сосуда в другой, мы совершаем одну операцию.

Эта головоломка нетрудна, однако мне кажется, что читатель найдет ее весьма занимательной и поучительной. Вряд ли стоит добавлять, что никаких уловок, вроде отметок на сосудах и наклонов последних, не допускается.

**394. Затруднительное положение.** Давайте теперь сделаем следующий шаг и рассмотрим случай, когда некоторое количество жидкости пропадает, хотя запас жидкости на этот раз ограничен сверху заданной величиной.


Американские органы по контролю над спиртными напитками[20] обнаружили полную бочку пива и собрались было уже опрокинуть ее на землю, когда владелец бочки, указав на два кувшина, попросил оставить ему немного пива, чтобы немедленно распить его со своими домашними. Один кувшин вмещал 7, а другой 5 кварт. Полицейский был шутником и, полагая, что это невозможно, разрешил хозяину оставить по одной кварте пива в каждом кувшине, если тот сумеет точно отмерить это количество пива, не выливая ничего обратно в бочку.

Как это можно сделать за наименьшее число операций, не делая пометок на кувшине и не прибегая ни к каким другим уловкам? Напомним, что американская пивная бочка содержит ровно 120 кварт.

**395. Снова затруднительное положение.** Попытайтесь решить предыдущую головоломку при условии, что пиво можно переливать обратно в бочку.

**396. Бочонок вина.** У одного человека был бочонок вина вместимостью 10 л и кувшин. Однажды он наполнил из бочонка полный кувшин вина, а бочонок долил водой. Когда вода полностью смешалась с вином, он еще раз налил полный кувшин и снова долил бочонок водой. После этого вина и воды в бочонке оказалось поровну.

Какова вместимость кувшина?

**397. Измерение воды.** Служанку послали к роднику с двумя сосудами вместимостью 7 и 11 пинт. Ей нужно принести назад ровно 2 пинты воды.

Чему равно наименьшее число операций в этом случае? Под «операцией» мы понимаем либо наполнение сосуда, либо его опорожнение, либо переливание воды из одного сосуда в другой.

**398. Винная смесь.** Один сосуд наполнен вином на $\frac{1}{3}$, а другой сосуд равной вместимости — на $\frac{1}{4}$. Каждый из этих сосудов долили водой и все их содержимое смешали в кувшине. Половину получившейся смеси снова вылили в один из двух сосудов.

В каком соотношении там оказались после этого вино и вода?

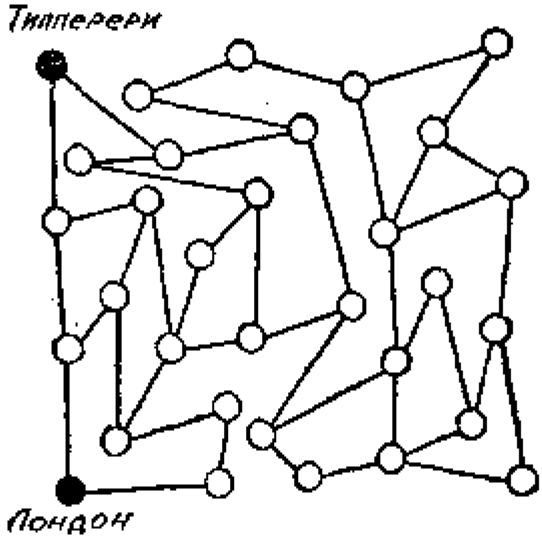
**399. Украденный бальзам.** Три вора украли у одного джентльмена вазу с 24 унциями бальзама. Спешно унося ноги, они встретили в лесу продавца стеклянной посуды, у которого и приобрели три сосуда. Найдя укромное местечко, воры решили разделить добычу, но тут обнаружили, что вместимость их сосудов 5, 11 и 13 унций.

Как им разделить между собой бальзам поровну?

**400. Доставка молока.** Однажды утром молочник вез в свою лавку два 80-литровых бидона с молоком, как вдруг ему повстречались две женщины, умолявшие тут же продать им по 2 л молока. У миссис Грин был кувшин вместимостью 5 л, а у миссис Браун 4-литровый кувшин, в то время как у молочника вообще нечем было отмерять молоко.

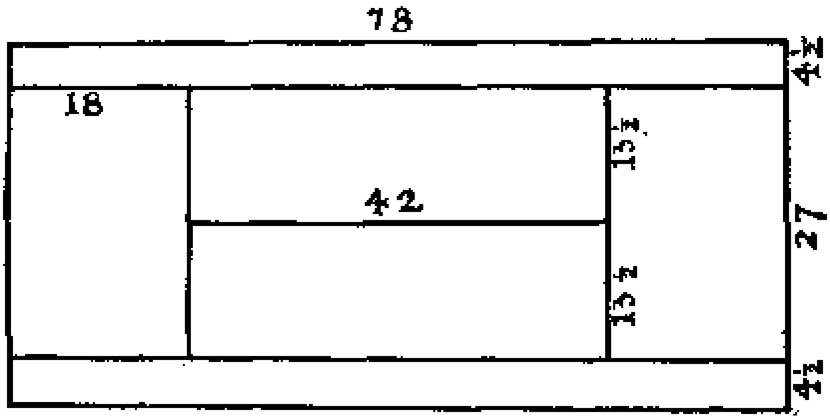
Как же молочник умудрился налить точно по 2 л молока в каждый кувшин? Вторая порция доставила ему наибольшие трудности. Однако он успешно справился с задачей всего за 9 операций. (Под «операцией» мы понимаем переливание либо из бидона в кувшин, либо из одного кувшина в другой, либо, наконец, из кувшина назад в бидон.)

Каким же образом действовал молочник?




**401. Путь до Типперери.** Популярный бард уверяет нас, что «путь далек до Типперери». Взгляните на прилагаемую карту и скажите, сумеете ли вы найти наилучший путь туда. Отрезки прямых изображают переходы от города до города. Из Лондона в Типперери следует добраться за четное число переходов. Сделать это за 3, 5, 7, 9 или 11 переходов не составляет труда, но все это нечетные числа. Дело в том, что при нечетном числе переходов опускается один очень важный морской переход. Если вам удастся добиться цели и вы доберетесь до места за четное число переходов, то это произойдет потому, что вы пересечете Ирландское море. Какой отрезок пути проходит по Ирландскому морю?

**402. Разметка теннисного корта.** Линии нашего теннисного корта почти стерлись и нуждаются в обновлении. Мое приспособление для разметки таково, что, начиная и кончая линию где угодно, мне нельзя ее прервать, чтобы не смазать. Поэтому некоторые участки приходится проходить дважды.

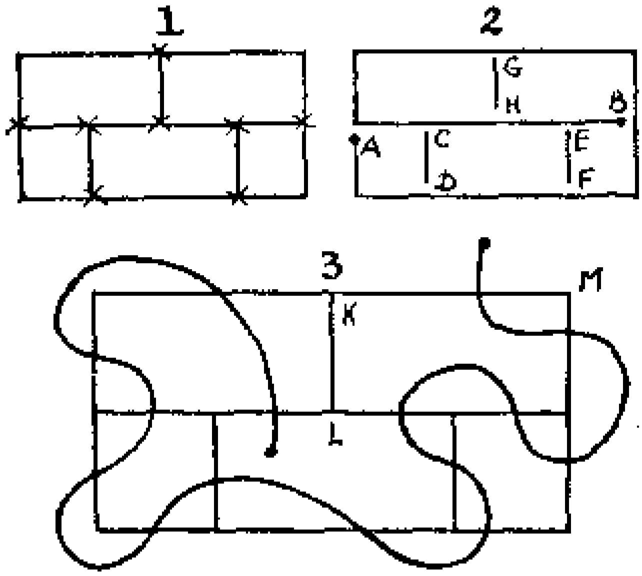



С какого места мне следует начать и по какому пути двигаться, чтобы, не прерывая линии, полностью разметить корт и дважды пройти как можно меньшие участки? Размеры корта приведены на рисунке. Какой же путь будет наилучшим?

**403. Пересекая отрезки.** На протяжении многих лет меня нередко спрашивают, разрешима ли следующая головоломка.

Требуется тремя непрерывными линиями, не отрывая карандаша от бумаги и не проходя по одному и тому же участку дважды, начертить сеть линий, изображенную на рисунке *1* (крестики, разумеется, чертить не нужно).

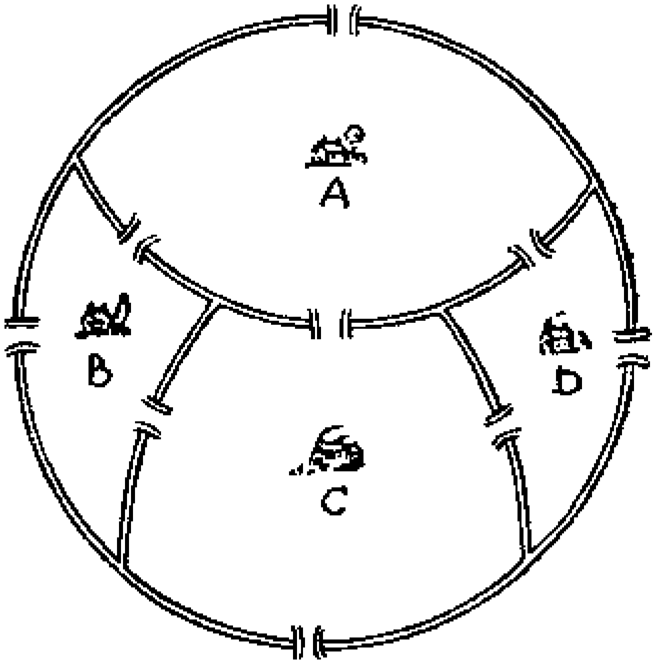
Существует общее мнение, что этого сделать нельзя. Я обозначил крестиками «нечетные узлы», а общее правило для таких задач гласит, что минимальное число непрерывных линий должно равняться половине числа нечетных узлов, то есть точек, из которых можно двигаться по нечетному числу направлений. В нашем случае имеется 8 узлов, из которых можно двигаться по трем (нечетное число) направлениям, и, следовательно, требуется *четыре* линии. Однако эту головоломку можно решить с помощью одного трюка, истолковав условия буквально. Сначала вы складываете бумагу и жирным карандашом рисуете *CD* и *EF* (см. рисунок *2*) одним росчерком. Затем вторым росчерком вы проводите линию от *A* до *B* и третьим — линию *GH*.



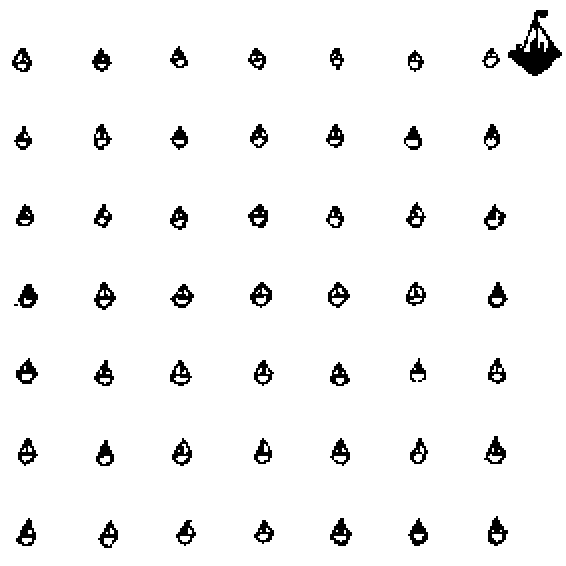

За последние несколько лет эта головоломка обрела новую форму. Вам дают ту же сеть линий и предлагают, начав с любого места, обойти ее, побывав на каждом отрезке один и только один раз и нигде не пересекая своего пути. На рисунке *3* показано, что именно имеется в виду. Там изображена одна из попыток решить головоломку. Эта попытка неудачна, поскольку отрезок *KL* остался нетронутым. Мы могли бы пересечь его вместо *KM*, но от этого положение ничуть не улучшилось бы.

Возможно ли решить головоломку вообще? Многие из моих корреспондентов сообщают, что, хотя они и пришли к «благочестивому заключению» о неразрешимости головоломки тем не менее им остается неясным, каким образом можно *доказать* ее неразрешимость, а это уже совсем другой вопрос.

**404. Девять мостов.** На рисунке изображена схема района со сложной системой ирригационных сооружений. Линиями обозначены каналы, окружающие 4 острова *A*, *B*, *C* и *D*. На каждом из островов стоит дом. Через каналы перекинуты 9 мостов Когда бы Томпкинс ни выходил из дома, собираясь навестить своего приятеля Джонсона, он всегда следует одному и тому же эксцентрическому правилу — прежде чем добраться до места назначения, он непременно проходит по каждому из мостов только один раз.

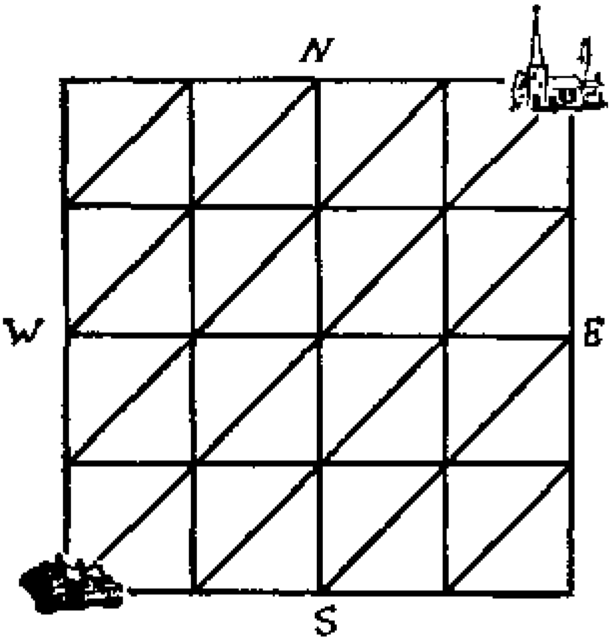



Сколько различных маршрутов может при этом выбрать Томпкинс? Его собственным домом можно считать любой.

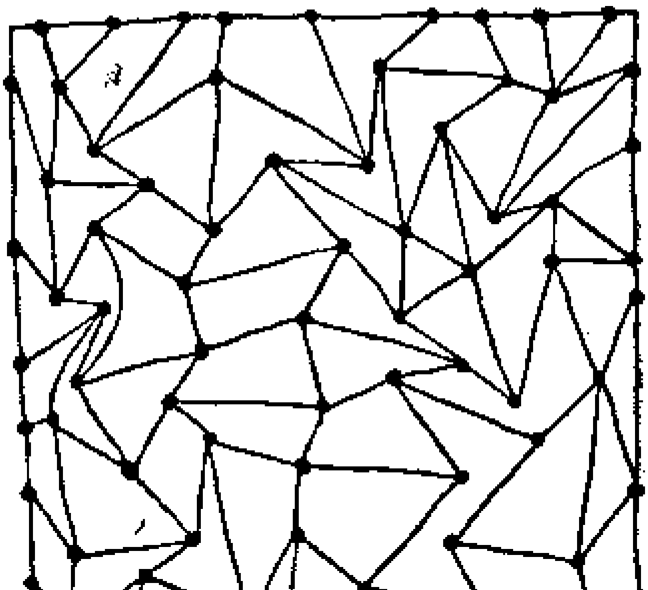


**405. Нападение на рыболовные суда.** На промысел в море вышли 49 рыболовных судов. Представьте себе, что на них напал вражеский корабль. Каким образом он смог бы их протаранить и потопить, следуя 12 прямыми курсами, если весь маневр начинается и заканчивается в одной точке?

**406. Пути в церковь.** Человек, живущий в доме, который изображен в левом нижнем углу рисунка, хочет узнать, какое наибольшее число путей ведет от его дома к церкви. Все дорожки на рисунке обозначены прямыми линиями. Человек всегда идет либо на север, либо на восток, либо на северо-восток, с каждым шагом приближаясь к церкви.



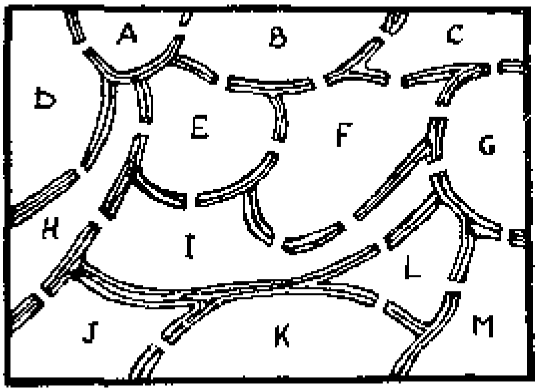

Подсчитайте общее число различных путей, которыми он может добраться до церкви.



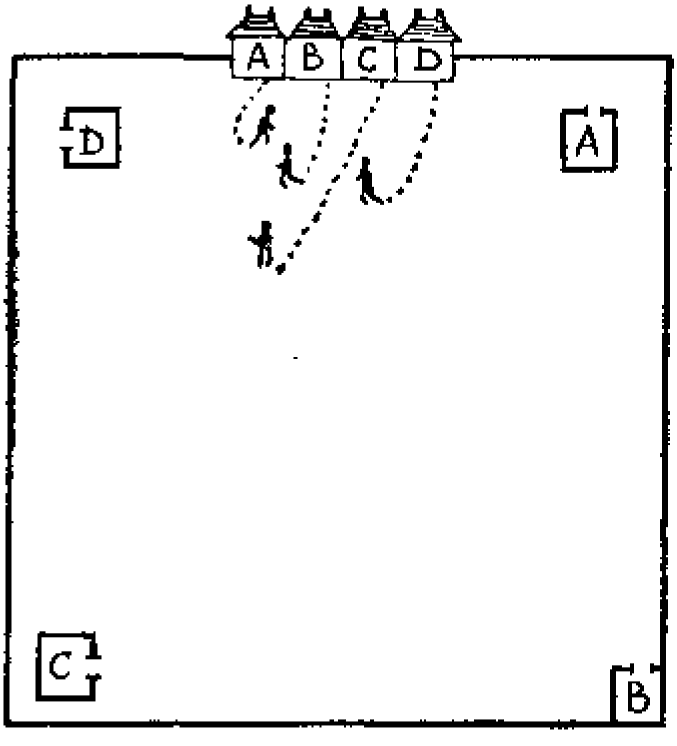
**407. Противолодочная сеть.** На рисунке изображен участок длинной противолодочной сети. Головоломка состоит в том, чтобы, сделав наименьшее число разрезов снизу вверх, разделить сеть на две части, освободив тем самым проход для подводной лодки.

Где именно следует перерезать сеть, если разрезать узлы запрещается? Помните также, что разрезы следует производить от нижней границы сети до верхней.

**408. Двадцать два моста.** Вы видите здесь схему района с развитой системой ирригационных сооружений, на которой указаны многочисленные каналы и мосты. Человек выходит с одного из участков, обозначенных буквами, чтобы навестить приятеля, живущего на другом участке. Желая при этом совершить моцион, он проходит по каждому мосту один и только один раз.

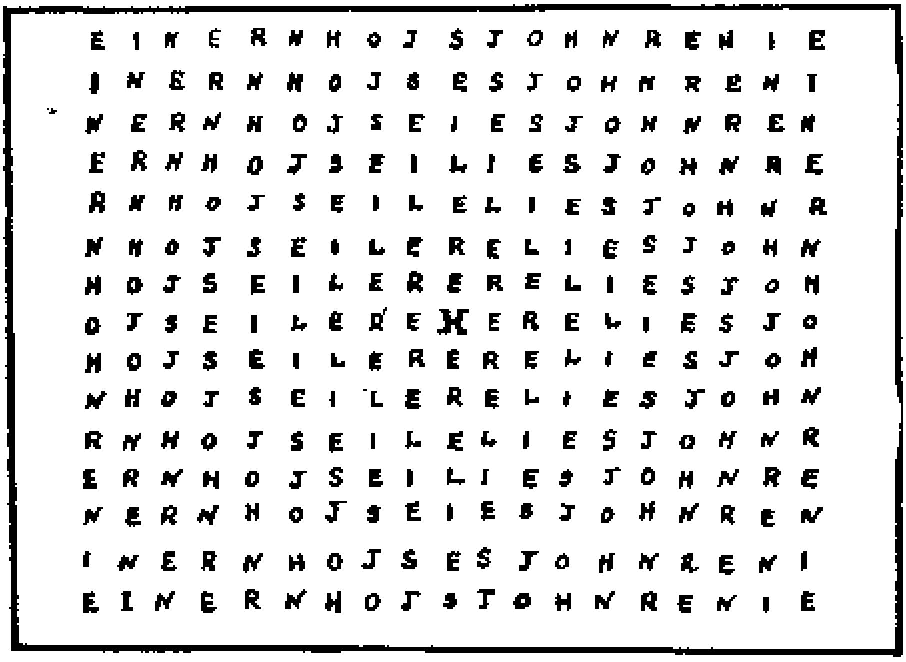



Головоломка состоит в том, чтобы выяснить, на каких участках расположены дома приятелей. Она покажется вам чрезвычайно простой, если вы подумаете над ней несколько минут. Разумеется, не следует выходить за пределы схемы.



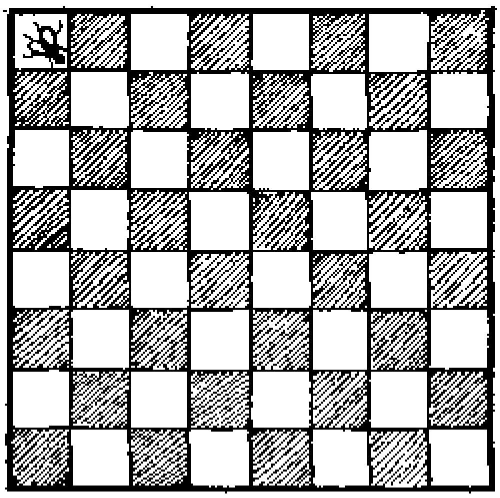

**409. Следы на снегу.** Четыре школьника, живущих соответственно в домах *A*, *B*, *C* и *D*, посещают разные школы. Однажды утром после бушевавшей всю ночь метели особенно хорошо было видно, что следы четырех мальчиков нигде не пересекают друг друга и не выходят за пределы квадрата. Возьмите карандаш и продолжите их пути так, чтобы мальчик *A* попал в школу *A*, мальчик *B* — в школу *B* и т. д. и чтобы эти пути не пересекались.

**410. Могильная плита.** Одна из могильных плит на кладбище, прилегающем к церкви Святой Марии в Монмаусе, выглядит так, как показано на нашем рисунке.



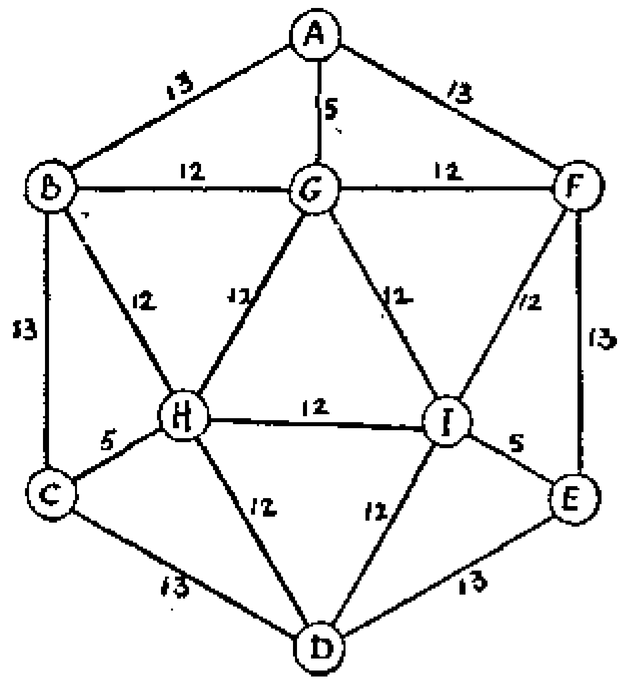

Сколько существует различных способов, с помощью которых можно прочитать надпись: HERE LIES JOHN RENIE[21], начиная с центральной буквы H и переходя на каждом шаге от одной буквы к соседней?

**411. Путь мухи.** Муха села на левый верхний квадрат шахматной доски, а затем проползла по всем белым квадратам. При этом она ни разу не заползла на черный квадрат и не прошла по одному и тому же пересечению (где пересекаются вертикальная и горизонтальная линии) более одного раза.



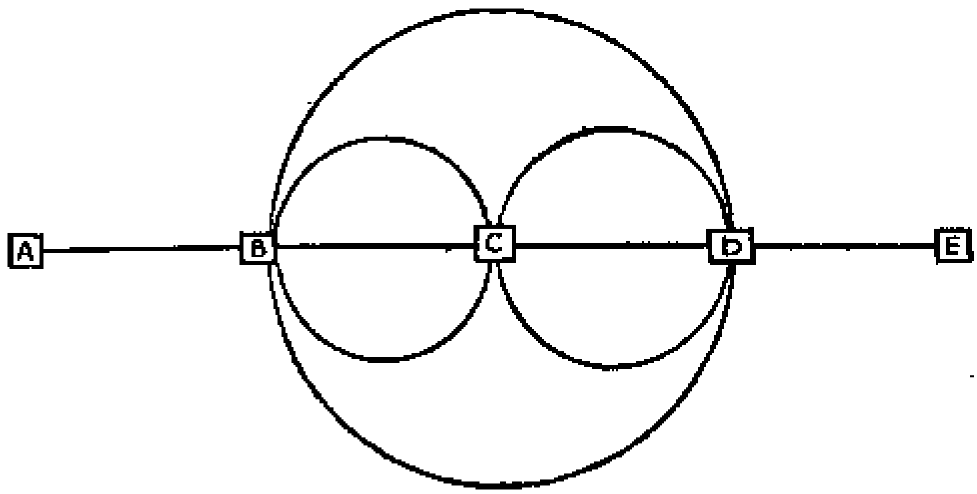
Не могли бы вы начертить путь мухи? Его можно проделать, двигаясь 17 прямыми курсами.

**412. Дорожная инспекция.** Отправляясь из города *A*, инспектор должен проверить состояние всех дорог между населенными пунктами, обозначенными на схеме буквами. Длина каждой из этих дорог равна 13, 12 и 5 км, как показано на схеме.




Каким наикратчайшим путем следует двигаться инспектору, если он может закончить путь в любой заранее выбранной точке?

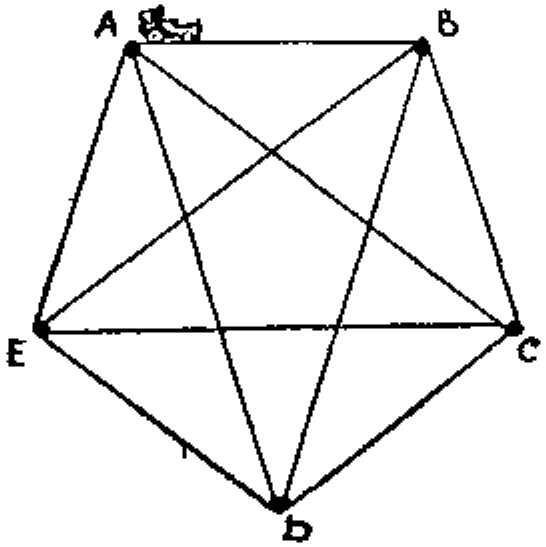
**413. Железнодорожные маршруты.** На рисунке показана упрощенная схема железнодорожных путей. Мы хотим узнать, сколькими различными путями можно проехать от *A* до *E*, не проезжая дважды по одному и тому же участку при любом маршруте.




Вопрос очень прост. Однако ответить на него практически невозможно, пока вы не придумаете некий метод, позволяющий записывать все маршруты. Дело в том, что существует слишком много маршрутов, от короткого *ABDE*, содержащего одну большую дугу, до длинного *ABCDBCDBCDE*, включающего каждый участок нашей системы и допускающего разнообразные вариации.

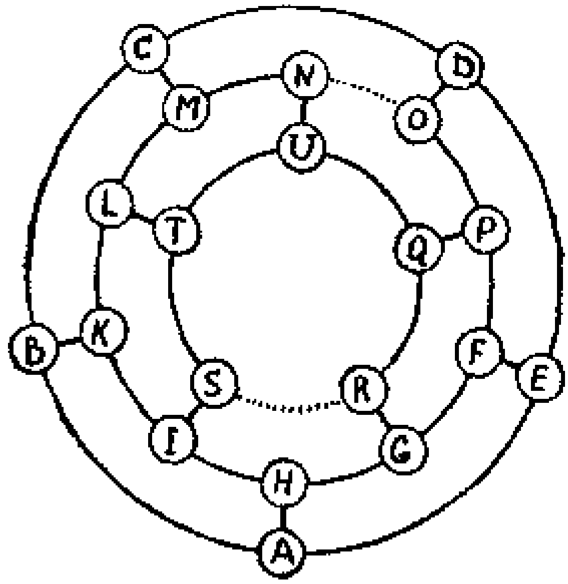
Сколько всего существует различных маршрутов?

**414. Путь автомобиля.** Автомобилист отправляется из города *A* и хочет проехать по каждой из дорог, показанных на рисунке, один и только один раз.




Сколько существует различных маршрутов, на которых он может остановить свой выбор? Тут есть над чем поломать голову, пока вы не изобретете какой-нибудь остроумный метод. Каждый маршрут должен закончиться в городе А, из которого вы стартовали, и ехать вы должны из одного города в другой прямо, не сворачивая на перекрестках дорог.

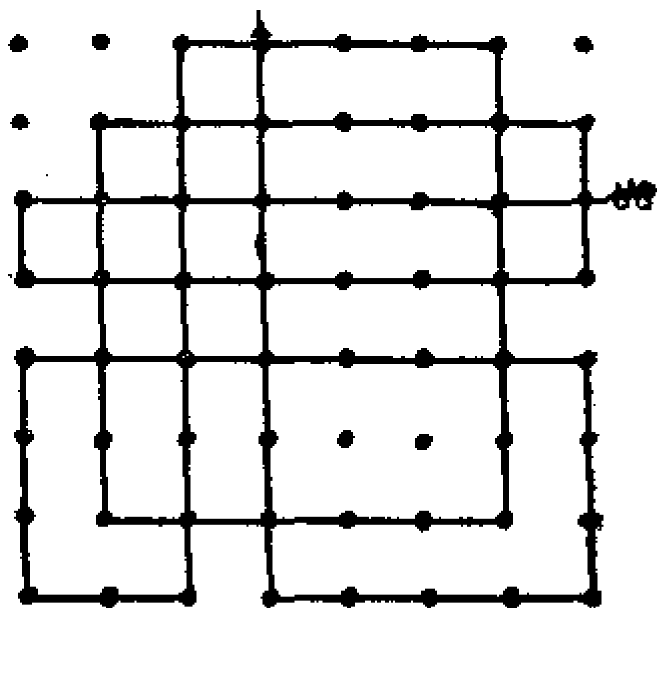
**415. Путешествие миссис Симпер.** На рисунке изображена упрощенная схема маршрута, по которому моя приятельница миссис Симпер собирается путешествовать следующей осенью. Можно заметить, что на схеме представлено 20 городов, соединенных между собой железнодорожными линиями. Миссис Симпер живет в городе *A* и хочет посетить все остальные города только по одному разу, возвратившись в конце домой.




Читателю, наверное, будет небезынтересно узнать, что миссис Симпер может выбрать любой из 60 маршрутов, если считать разными маршруты, отличающиеся лишь направлением. Между *N* и *O*, а также между *R* и *S* дорога проходит через тоннель, но, как истая леди, миссис Симпер категорически против езды по тоннелям. Ей хотелось бы также отложить свой визит в *D* на возможно более поздний срок, чтобы иметь удовольствие встретиться со своей старой приятельницей, живущей в этом городе.

Головоломка состоит в том, чтобы при данных обстоятельствах указать миссис Симпер наилучший маршрут.

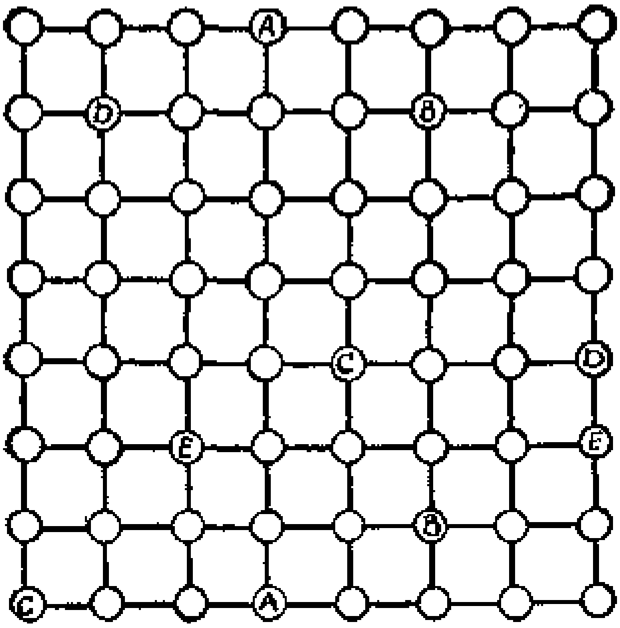
**416. Шестнадцать прямолинейных участков.** Один торговый агент отправился на своем автомобиле из точки, указанной на рисунке, решив проделать путь 76 км, который состоит из 16 прямолинейных участков, ни разу не проехав при этом по одному и тому же участку дважды. Точки обозначают населенные пункты, расположенные через 1 км друг от друга, линии — избранный нашим агентом маршрут. Агент выполнил задуманное, но при этом 6 населенных пунктов остались в стороне от его пути.



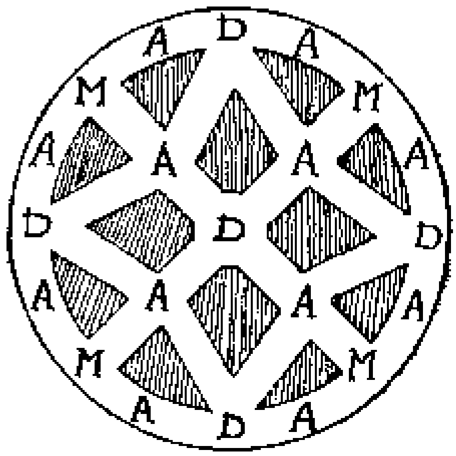
Не могли бы вы указать лучший маршрут, при котором, проделав путь 76 км, состоящий из 16 прямых участков, агент посетил бы все пункты, кроме трех?

**417. Составьте маршруты.** На рисунке изображена схема (весьма упрощенная, разумеется) некоторого района. Кружочками обозначены населенные пункты, а прямыми — соединяющие их дороги.

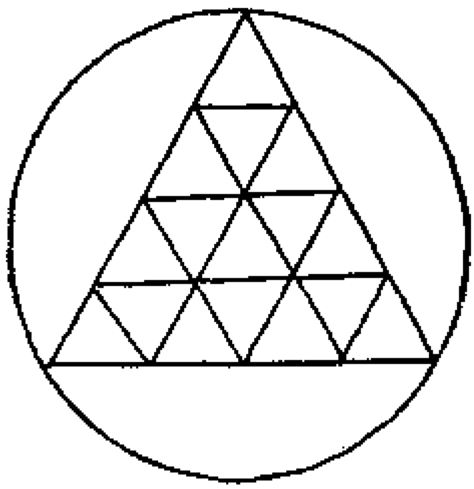
Не могли бы вы указать, каким образом 5 автомобилистов могут проехать соответственно из *A* в *A*, из *B* в *B*, из *C* в *C*, из *D* в *D* и из *E* в *E* таким образом, чтобы их пути не содержали общих участков и даже не пересекались между собой?




Возьмите карандаш и нарисуйте 5 искомых маршрутов; при этом вам, вероятно, придется немного поломать голову. Разумеется, не важно, в каком из двух городов, обозначенных одинаковыми буквами, начинается, а в каком заканчивается данный маршрут, так как нас интересует лишь вопрос, по каким дорогам он пролегает. Обратите внимание, что если вы отправитесь из *A* в *A*, следуя по вертикали вниз, то загородите дорогу всем остальным автомобилям, кроме идущего из *B* в *B*, поскольку, конечно, все автомобили обязаны двигаться лишь по тем дорогам, которые изображены на схеме.



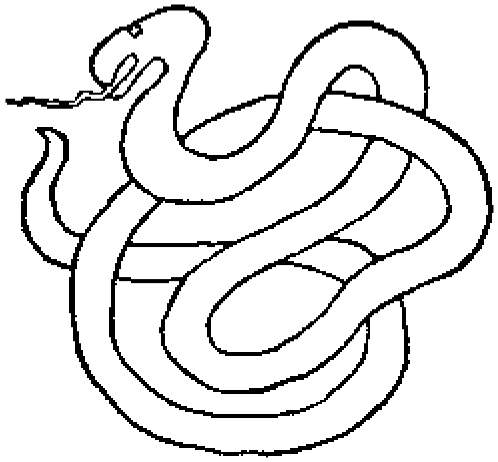

**418. Мадам.** Сколькими различными способами можно прочитать на нашем рисунке слово MADAM? Вы можете двигаться, как вам заблагорассудится,— вверх и вниз, вперед и назад по любой из открытых дорожек. Однако каждая следующая буква должна находиться рядом с предыдущей. Перескакивать через букву запрещается.



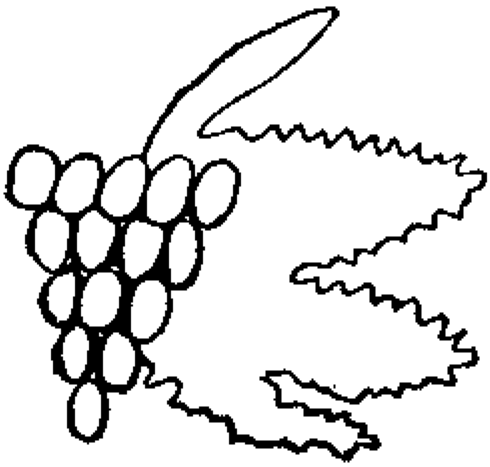
**419. Треугольники в круге.** Вот одна небольшая головоломка, которая потребует от вас терпения и решимости довести дело до конца. Вам предлагается нарисовать круг и треугольники, изображенные на рисунке, с помощью наименьшего числа росчерков[22] карандаша. При этом разрешается дважды проходить по одной и той же линии, а также в любом месте начинать и заканчивать рисунок.

**420. Сиамская змея.** Условия этой головоломки чрезвычайно просты.

Нарисуйте возможно больший «кусок змеи» (см. рисунок) одной непрерывной линией. Начинайте и кончайте, где хотите, следите лишь за тем, чтобы карандаш не отрывался от бумаги и не проходил дважды по одной и той же линии.

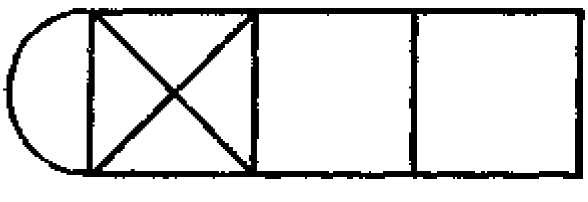


Возможно, какой-нибудь искушенный читатель захочет обойти наши условия, сказав, что один раз он проводит карандаш по данному месту, чертя линию в полширины, а второй раз еще в полширины; но ему следует напомнить, что линия ширины не имеет.

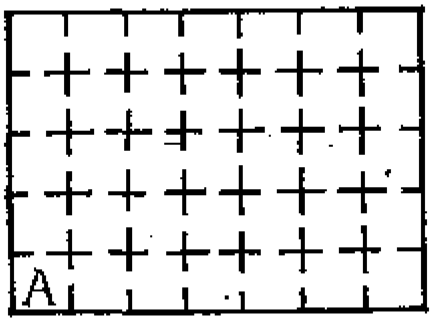


**421. Виноградная гроздь.** Перед вами довольно грубое изображение виноградной грозди. Головоломка состоит в том, чтобы повторить этот рисунок, не отрывая карандаша от бумаги и не проходя по одному и тому же участку дважды. Возможно, вам придется сделать ряд проб, прежде чем вы натолкнетесь на идею общего метода.

**422. «Классики».** Мы часто видим, как дети играют в древнюю и повсюду популярную игру «классики». При одной из разновидностей этой игры на земле рисуется изображенная здесь фигура. Мы хотим узнать, можно ли ее нарисовать с помощью одной непрерывной линии. Оказывается, что это возможно.

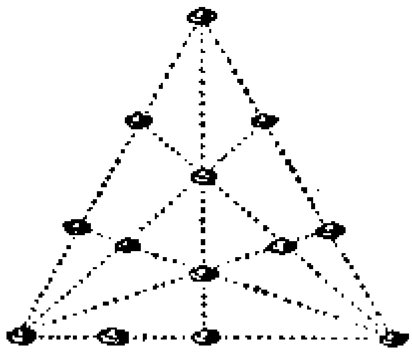


Сумеет ли читатель нарисовать такую фигуру, не отрывая карандаша от бумаги и не проходя дважды по одной и той же линии? Кривая линия обычно не используется в игре, но мы ее добавили, чтобы сделать головоломку интереснее.




**423. Коварная головоломка.** Один неразборчивый в средствах делец предложил 100 долларов за правильное решение следующей головоломки. Узник, приговоренный к пожизненному заключению, обратился к королю с просьбой о помиловании. Не желая оказать ему эту милость, но и не ответив отказом, король предложил помиловать узника, если тот, отправляясь из камеры $A$, побывает в каждой камере тюрьмы и возвратится опять в $A$, не заходя дважды ни в одну из камер. Сам делец либо не располагал решением головоломки, либо намеревался выйти из положения с помощью какого-нибудь трюка.

Какой наилучший ответ мог бы предложить читатель, чтобы выполнить условия головоломки как можно точнее?



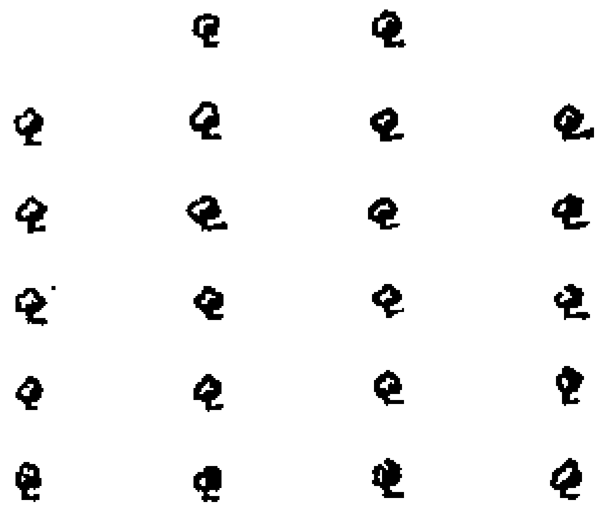
**424. Посадка деревьев.** Один человек посадил 13 деревьев так, как показано на рисунке. В результате у него получилось 8 рядов, по 4 дерева в каждом. Однако ему не нравилось, как посажено второе дерево в горизонтальном ряду. Свои чувства по этому поводу он сформулировал довольно туманно, сказав, что «оно отлынивает там от работы и вообще ведет себя как изрядный лентяй». Второе дерево в горизонтальном ряду действительно было «из ряда вон выходящим», поскольку его единственное назначение состояло в том, чтобы заполнить второй ряд. Поэтому человек решил пересадить деревья получше и через некоторое время обнаружил, что сможет посадить их в 9 рядов, по 4 дерева в каждом.

Может ли читатель показать, как это делается?

**425. Двадцать монет.** Если 16 одинаковых монет расположить в виде квадрата, то в каждой строке, в каждом столбце и на каждой из двух больших диагоналей будет находиться одинаковое число монет.

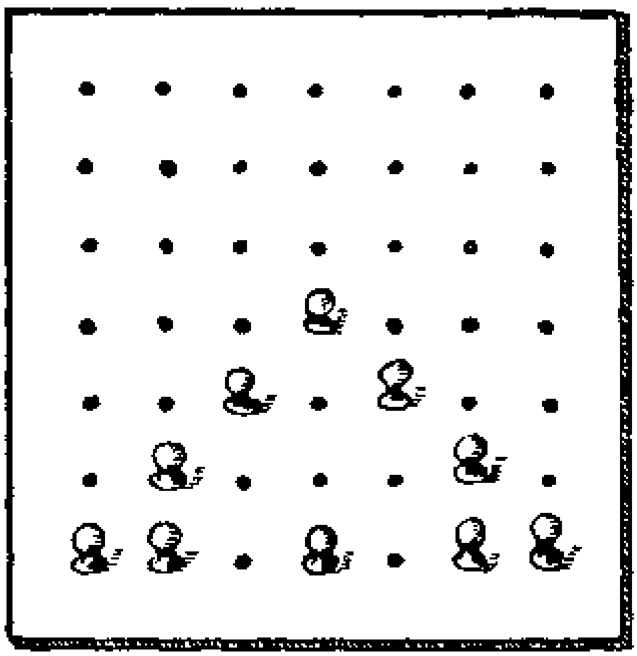
Нельзя ли сделать то же самое с 20 монетами?

**426. Пересадка деревьев.** У одного человека была плантация из 22 деревьев, посаженных так, как показано на рисунке.



Каким образом ему следовало пересадить 6 из них, чтобы они образовали 20 рядов по 4 дерева в каждом?

**427. Головоломка с колышками.** На рисунке изображена квадратная доска из красного дерева с 49 отверстиями. В 10 отверстий вставлено 10 колышков.

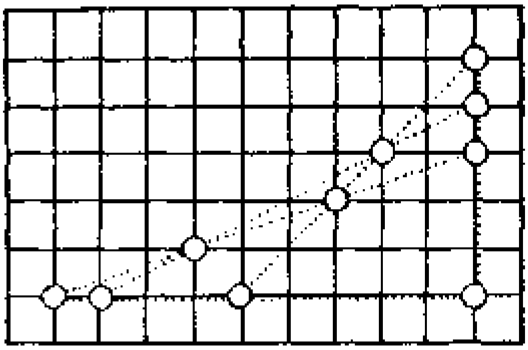


Головоломка состоит в том, чтобы переставить 10 колышков в другие отверстия так, чтобы всего получилось 5 рядов колышков по 4 колышка в каждом.

Какие 3 колышка следует переместить и куда?

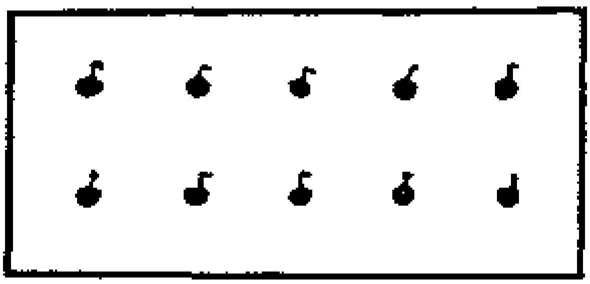
**428. Пять прямых с четырьмя фишками.** На рисунке показано, как можно расположить 10 фишек в точках пересечения сплошных линий, чтобы они при этом оказались лежащими на 5 прямых (отмеченных пунктиром) по 4 фишки на каждой.

Можете ли вы найти второе решение?



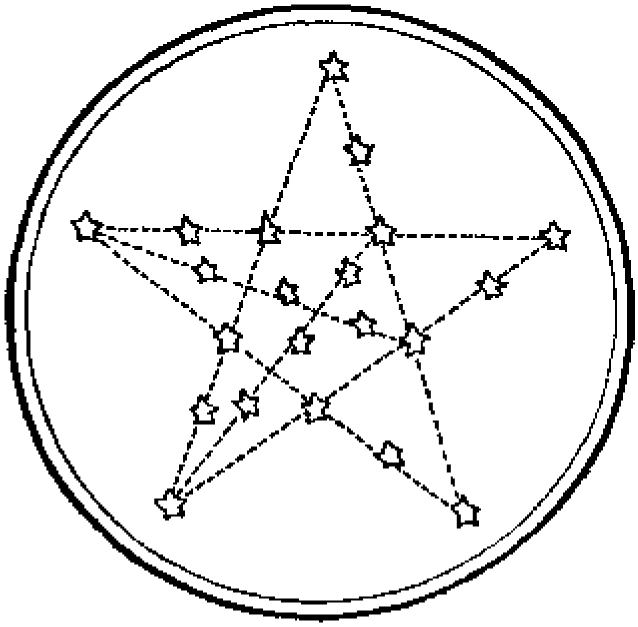
Разумеется, решение, которое можно получить из данного при отражении, не считается отличным от исходного. Требуется найти совершенно новую схему расстановки фишек и, разумеется, не увеличивать размеры «клетчатого участка».

**429. Порядок боевых кораблей.** Боевые корабли встали на якорь, как показано на рисунке. Головоломка состоит в том, чтобы передвинуть 4 корабля на новые позиции (оставив остальные там, где они стоят) так, чтобы все 10 кораблей образовали 5 прямых по 4 корабля на каждой.



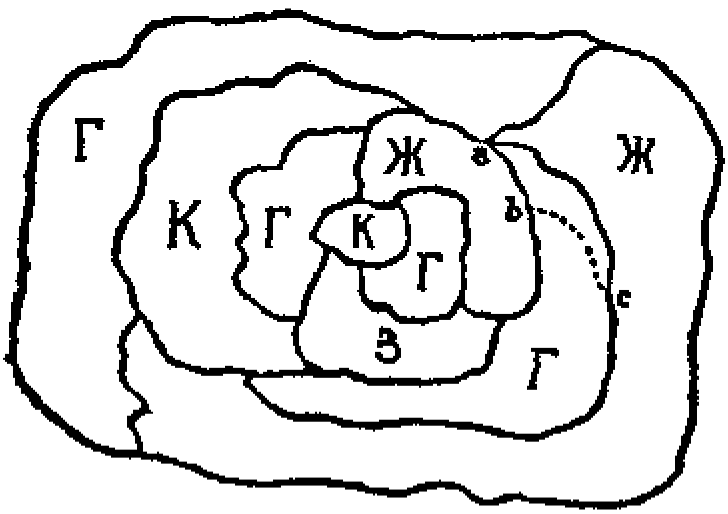
Как должен поступить адмирал?

**430. Головоломка с созвездием.** Группу звезд, изображенную на рисунке, очень трудно обнаружить в самую ясную ночь по той простой причине, что она... невидима. 21 звезда этого созвездия образует 7 прямых по 5 звезд на каждой.



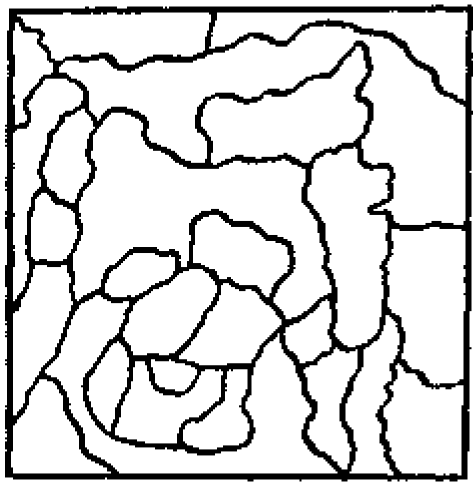
Не могли бы вы изменить расположение звезд так, чтобы они образовали 11 прямых по 5 звезд на каждой? Существует много решений этой головоломки. Попытайтесь найти симметричное.

**431. Проблема четырех красок.** Проблема четырех красок формулируется очень просто. Нужно доказать, что для раскраски любой карты достаточно не более четырех красок, если все сопредельные страны должны быть выкрашены в разные цвета. Страны, у которых общий участок границы состоит из одной точки (как у голубых *Г* и желтых *Ж* в точке *a*), не считаются сопредельными[23]. Если бы граница вместо *ca* проходила по участку *cb*, то две желтые страны *Ж* оказались бы сопредельными, но тогда мы могли бы перекрасить, например, внешнюю желтую страну *Ж* в зеленый цвет, и все оказалось бы снова в порядке: желтая страна *Ж* на нашей карте могла бы с успехом быть и зеленой *З*.




Я приведу в сжатой форме мое собственное доказательство, которое некоторые математики считают вполне приемлемым. Однако кое-кто полагает, что в нем имеются «пробелы». Доказательство дается в такой форме, которую может понять каждый. Однако следует помнить, что одно дело быть убежденным в чем-то, и совсем другое — дать этому строгое доказательство.

**432. Раскрашивание карты.** Однажды утром полковник Крэкхэм попросил своего юного сына раскрасить все 26 районов карты, изображенной на рисунке, так, чтобы любые два прилегающих друг к другу района имели разные цвета. Молодой человек с минуту смотрел на карту, а затем сказал:



— В моем ящике не хватит одной краски.

Оказалось, что он прав. Сколько у него было красок? Пользоваться черной и белой красками ему не разрешалось.

**433. Подаренные картины.** У богатого коллекционера было 10 ценных картин. Ему захотелось сделать одному музею подарок, но коллекционер никак не мог сообразить, сколькими вариантами подарка он располагает: ведь подарить можно любую одну картину, любые две, любые три картины и т. д., можно даже подарить все десять картин.

Читатель, быть может, думает, что для ответа на этот вопрос потребуется долгий и утомительный подсчет; однако я приведу одно небольшое правило, позволяющее дать ответ во всех подобных случаях безо всяких трудностей и неблагодарной работы.

**434. Выборы в парламент.** Сколько существует разных способов, которыми можно избрать 615 членов парламента если имеются всего четыре партии: консерваторов, либералов, социалистическая партия и партия независимых? Мандаты могут распределяться, например, так: консерваторы — 310, либералы — 152, социалисты — 150, независимые — 3. Возможны и другие варианты: консерваторы — 0, либералы — 0, социалисты — 0, независимые — 615 или консерваторы — 205, либералы — 205, социалисты — 205, независимые — 0 и т. д. Кандидатов от каждой партии мы не различаем, поскольку для нас важно только общее количество кандидатов.

**435. Скамья магистрата.** Один мой приятель из Сингапура попросил меня некоторое время назад решить следующую задачу. На скамье одного магистрата (где именно, неизвестно) занимают места два англичанина, два шотландца, два уэльсца, один француз, один итальянец, один испанец и один американец. Англичане не хотят сидеть рядом, шотландцы не хотят сидеть рядом и уэльсцы тоже не желают сидеть рядом друг с другом.

Сколькими различными способами могут разместиться на скамье эти 10 человек так, чтобы никакие два человека одной и той же национальности не сидели рядом?

**436. Переправа.** Шесть родственников должны переправиться через реку в небольшой лодке, вмещающей одновременно только двоих. Мистер Вебстер, руководивший переправой, поссорился со своим тестем и сыном, кроме того, как ни прискорбно, но я должен заметить, что миссис Вебстер не разговаривает со своими матерью и невесткой. Отношения между ними столь натянуты, что не безопасно позволить враждующим сторонам вместе переправляться или вместе оставаться на одном и том же берегу реки. Кроме того, дабы предотвратить дальнейшие разногласия, ни одного мужчину нельзя оставлять с двумя женщинами или двух мужчин с тремя женщинами.

Как почтенному семейству перебраться на противоположный берег за возможно меньшее число рейсов? Никаких уловок вроде использования веревки или переправы на другой берег вплавь не допускается.

**437. Миссионеры и каннибалы.** Существует один необычный рассказ о трех миссионерах и трех каннибалах, которые должны были переправиться через реку в небольшой лодке, вмещающей одновременно только двух человек. Будучи наслышаны о вкусах каннибалов, миссионеры не могли позволить себе роскошь остаться на каком-нибудь берегу реки в меньшинстве. Только один из миссионеров и один из каннибалов умели грести.

Каким образом им удалось переправиться?

**438. Бегство через реку.** Во время бегства турецких войск при Трейсе небольшой отряд оказался на берегу широкой и глубокой реки. Здесь обнаружили лодку, в которой катались два мальчика. Лодка была такой маленькой, что могла выдержать только двоих детей или одного взрослого.

Каким образом офицер сумел переправиться вместе со своими 357 солдатами через реку, вернув в конце переправы лодку мальчикам? Сколько раз пришлось лодке проплыть от берега до берега?

**439. Соревнования по гольфу[24].** Меня попросили составить таблицу соревнований по американскому гольфу. Условия соревнований таковы:

1. Каждый игрок играет с каждым из остальных игроков один и только один раз.

2. Число дорожек в два раза меньше числа игроков, и каждый игрок играет дважды на каждой дорожке, кроме одной, на которой он играет только один раз.

3. Все игроки играют одновременно в каждом туре, а в последнем туре каждый игрок играет на соответствующей дорожке впервые.

Я составил таблицы для разного числа игроков вплоть до 26. Однако такая задача слишком трудна для данной книги, за исключением простого случая с шестью игроками.

| Дорожки | Туры 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| 1-я | | | | | |
| 2-я | | | | | |
| 3-я | | | | | |

Может ли читатель, обозначив игроков *A*, *B*, *C*, *D*, *E* и *F* и объединив их всевозможными способами в пары (*AB*, *CD*, *EF*, *AF*, *BD*, *CE* и т. д.), заполнить приведенную здесь небольшую таблицу для случая с шестью игроками?

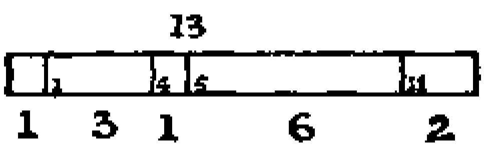
**440. Футбольные результаты.** В конце футбольного сезона один читатель сообщил мне, что, возвращаясь из Глазго после матча между Шотландией и Англией, он обратил внимание на следующую таблицу, помещенную в газете:

| | Сыграно | Победы | Поражения | Ничьи | Голы: забито | Голы: пропущено | Очки |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Шотландия . . | 3 | 3 | 0 | 0 | 7 | 1 | 6 |
| Англия . . . . | 3 | 1 | 1 | 1 | 2 | 3 | 3 |
| Уэльс . . . . . | 3 | 1 | 1 | 1 | 3 | 3 | 3 |
| Ирландия . . . | 3 | 0 | 3 | 0 | 1 | 6 | 0 |

Поскольку он уже знал, что Шотландия выиграла у Англии со счетом 3 : 0, ему пришла в голову идея найти счет в остальных пяти матчах из этой таблицы. Он успешно справился со своей задачей.

Не могли бы и вы определить, сколько голов забила и пропустила в свои ворота каждая из команд в каждом матче?

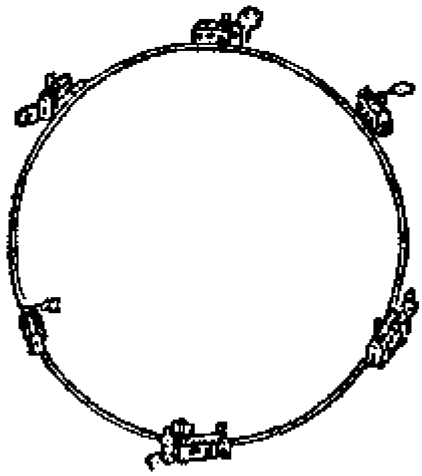
**441. Сломанная линейка.** Вот интересная головоломка, которая напоминает (хотя в действительности существенно отличается) одну из классических задач Баше о гире, разрезанной на куски, с помощью которых удается определить вес любого груза величиной от 1 фунта до полного веса всех кусков. В нашем случае у одного человека есть линейка, у которой обломился конец, так что ее длина стала равной 33 см. Большинство делений на линейке стерлось, так что разобрать можно только 8 из них. Тем не менее с помощью линейки можно измерить любое целое число сантиметров от 1 до 33.



Где расположены сохранившиеся деления?

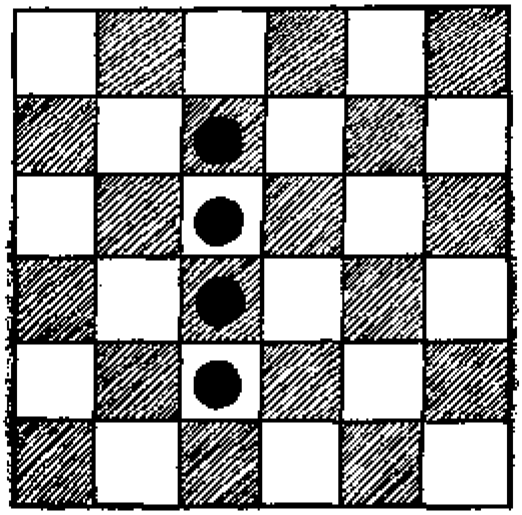
Для примера я привел на рисунке линейку длиной 13 см с четырьмя делениями. Если мне нужно отмерить 4 см, то я отмеряю 1 и 3 см; если 8 см, то 6 и 2 см; если 10 см, то 3, 1 и 6 см и т. д. Разумеется, нужное измерение следует сделать, приложив линейку один раз; в противном случае мы могли бы получить любое число сантиметров, последовательно отмеряя до 1 см, что лишило бы головоломку всякого смысла.

**442. Шесть коттеджей.** Дорога длиной 27 км окружает заброшенный и безлюдный участок. Вдоль нее расположены 6 коттеджей (см. рисунок) таким образом, что одни из них находятся от других на расстоянии 1, 2, 3 и т. д. до 26 км включительно. Например, Браун может быть в 1 км от Стиггинса, Джонс — в 2 км от Роджерса, Вильсон — в 3 км от Джонса и т. д. Разумеется, ходить друг к другу обитатели домов могут как по часовой стрелке, так и против нее.

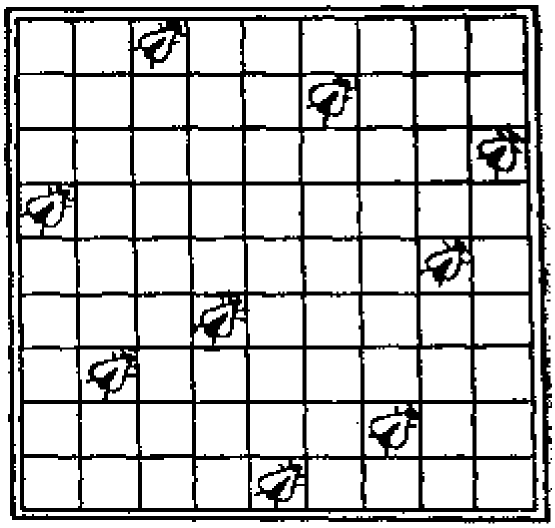


Не могли бы вы расположить коттеджи на таких расстояниях один от другого, чтобы удовлетворить условиям задачи? Рисунок умышленно сделан так, чтобы он не мог служить «подсказкой».

**443. Четыре фишки вдоль прямой.** Перед вами доска из 36 квадратов, на которой 4 фишки расположены вдоль одной прямой таким образом, что любой квадрат доски оказался на одной горизонтали, вертикали или диагонали по крайней мере с одной из фишек. Иначе говоря, если рассматривать наши фишки как шахматных ферзей, то каждый квадрат доски находится под ударом по крайней мере одного ферзя. Головоломка состоит в том, чтобы выяснить, сколькими способами можно расставить 4 фишки вдоль прямой так, чтобы каждый квадрат оказался на одной линии с какой-то из фишек.



Две позиции считаются различными, если наборы из 4 квадратов, занятых фишками, по крайней мере частично не совпадают. Так, в приведенном примере все фишки можно передвинуть вправо на соседний столбец или же расположить их на любой из двух центральных строк. Мы нашли, таким образом, 4 различных решения, о которых можно сказать, что они получаются друг из друга при поворотах и отражениях. Помните, что фишки все время должны располагаться вдоль некоторой прямой. Эта головоломка не слишком трудна и в то же время достаточно занимательна.



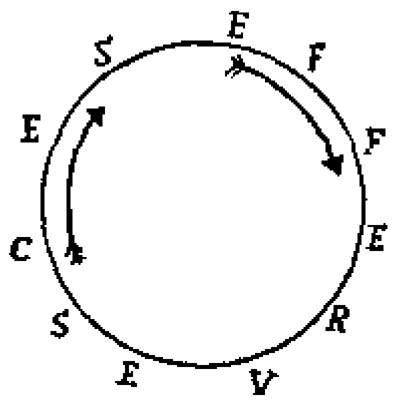
**444. Мухи на оконном стекле.** Перед вами окно, застекленное с помощью 81 стеклянного квадратика. На нем сидят 9 мух, причем ни одна муха не находится с другой на одной и той же прямой по вертикали, горизонтали или диагонали. Шесть из них совсем сонные и сидят не двигаясь, зато каждая из 3 остальных переползает на соседний квадрат. И все же после такого перемещения ни одна муха по-прежнему не находится на одной прямой с какой-либо из остальных.

Какие 3 мухи переползли и на какие квадраты (свободные в настоящий момент)?

**445. За ленчем.** Клерки фирмы «Пилкинс энд Попинджей» решили, что они каждый день будут садиться по трое за один и тот же стол до тех пор, пока какие-либо 3 человека не будут вынуждены сесть за этот стол вторично. Такое же число клерков фирмы «Рэдсон, Робсон энд Росс» решили проделать то же самое, но только не по 3, а по 4 человека. Когда они начали осуществлять свой план, то обнаружилось, что клерки второй фирмы могут продолжать пересаживаться ровно втрое дольше, чем их соседи.

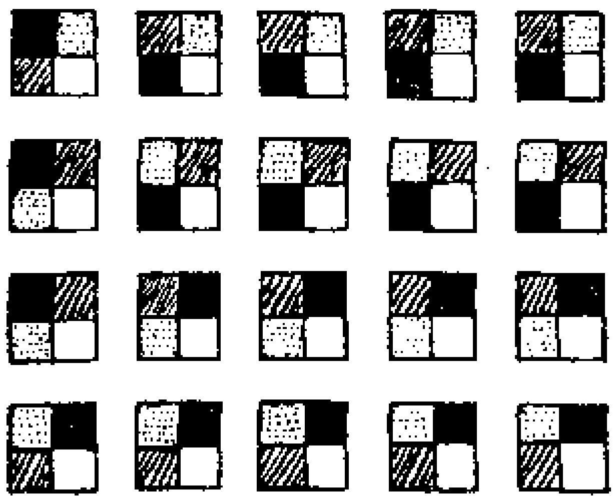
Какое наименьшее число клерков могло служить в каждой из двух фирм?

**446. «Кипучая» головоломка.** Сколькими способами буквы слова EFFERVESCES[25] можно разместить вдоль прямой так, чтобы два E не оказались рядом? Разумеется, мы не различаем между собой одинаковые буквы вроде FF, так как, переставляя их между собой, мы не получим нового размещения.




Когда читатель это выяснит, он может попытаться найти ответ при тех же самых условиях в случае, когда буквы расположены по кругу (см. рисунок). Разумеется, нас интересует порядок букв, а не их место на окружности; кроме того, читать всегда следует по часовой стрелке, как показано на рисунке.

**447. Квадрат из плиток.** Имеется 20 плиток, окрашенных в одни и те же 4 цвета (взаимное расположение цветов показано на рисунке разной штриховкой).



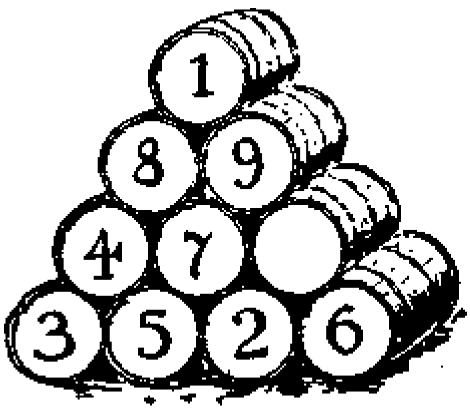
Головоломка состоит в том, чтобы, выбрав 16 плиток, составить из них квадрат. Четвертушки одного цвета должны примыкать друг к другу: белые к белым, черные к черным и т. д. Нетрудно вырезать квадраты из бумаги или картона и покрасить их в любые цвета, точно соблюдая при этом их взаимное расположение, указанное на рисунке.

**448. Головоломка с тридцатью шестью буквами.** Если вы попытаетесь заполнить изображенный здесь квадрат повторяющимися буквами *A, B, C, D, E, F* так, чтобы ни одно *A* не находилось на одной горизонтали, вертикали или диагонали с другим *A*, ни одно *B* — с другим *B*, ни одно *C* — с другим *C* и т. д., то обнаружите, что сделать это невозможно.

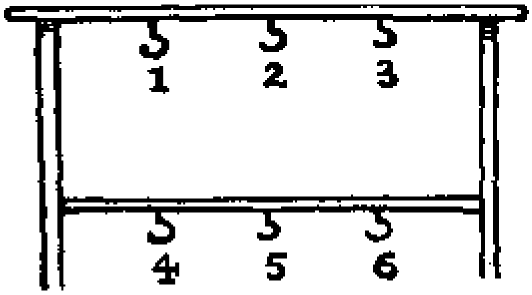
| A | B | C | D | E | F |
|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | |
| | | | | | |
| | | | | | |
| | | | | | |
| | | | | | |

Головоломка состоит в том, чтобы заполнить максимально возможное количество клеток. Вероятно, читатель оставит незаполненными больше клеток, чем нужно.

**449. Десять бочек.** У купца было 10 бочек сахарного песку, из которых он сложил пирамиду, как показано на рисунке. На каждой из бочек, кроме одной, был проставлен свой номер. Оказалось, что купец случайно разместил бочки так, что сумма номеров вдоль каждого ряда равнялась 16.



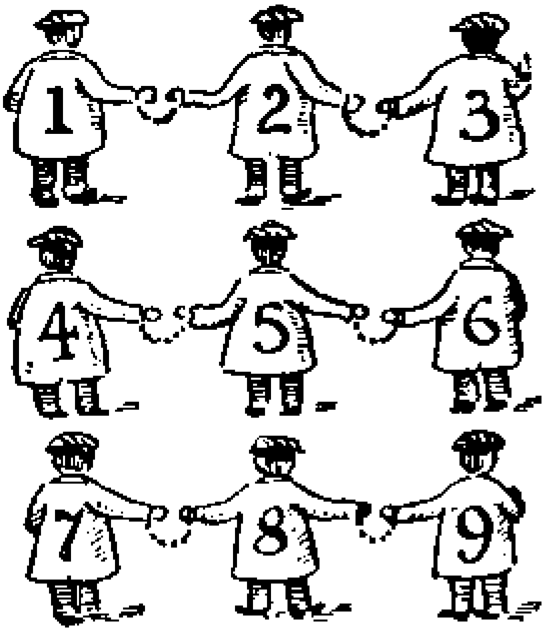

Не могли бы вы переставить бочки таким образом, чтобы сумма номеров вдоль каждого ряда равнялась наименьшему возможному числу? Разумеется, центральная бочка (на рисунке ею случайно оказалась бочка под номером 7) в счете не участвует.




**450. Сигнальные огни.** Два шпиона на противоположных берегах реки придумали способ ночной сигнализации с помощью рамки (вроде той, что изображена на рисунке) и трех ламп. Каждая из ламп могла светиться белым, красным или зеленым светом. Шпионы разработали код, в котором каждый сигнал что-то означал. Вы, разумеется, понимаете, что одна лампа, на какой крючок ее ни повесь, будет иметь только одно значение. Две лампы, подвешенные на верхние крючки *1* и *2*, неотличимы от двух ламп, подвешенных на крючки *4* и *5*. Две красные лампы на крючках *1* и *5* можно отличить от ламп на крючках *1* и *6*, а две лампы на крючках *1* и *2* отличаются от двух ламп на крючках *1* и *3*.

Учитывая все это многообразие положений ламп на крючках и цвета сигналов, ответьте, сколько можно послать различных сигналов?

**451. Скованные узники.** Жили-были когда-то 9 очень опасных узников, за которыми приходилось внимательно наблюдать. Каждый будний день их выводили на работу, сковав между собой, как показано на рисунке, который, кстати сказать, сделал один из охранников. Никакие два человека не бывали скованы между собой дважды в течение одной и той же недели. На рисунке показано, как узников выводят на работу по понедельникам.




Не могли бы вы разбить узников на тройки в оставшиеся пять рабочих дней недели?

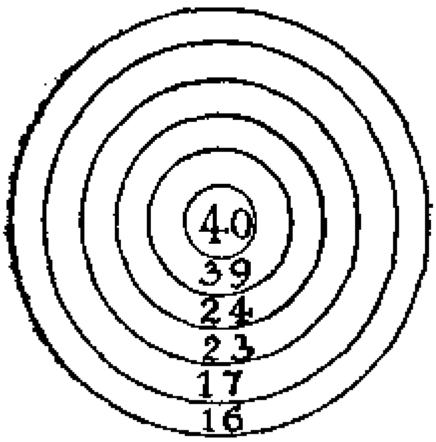
Можно заметить, что номер *1* не может быть вновь скован с номером *2* (справа или слева), номер *2* — с номером *3*, но, разумеется, можно сковать номер *1* с номером *3*.

Следовательно, наша головоломка весьма отличается от старой головоломки с 15 школьницами. Тот, кто потратит драгоценные часы досуга на поиски решения этой увлекательной головоломки, будет с лихвой вознагражден за свои усилия.

**452. Посадка в машину.** Когда семья полковника Крэкхэма садилась в машину, чтобы отправиться в путь, Дора спросила, сколькими способами они могли бы рассесться. Путников было шесть человек, мест — тоже шесть (одно рядом с водителем, два спиной к водителю и два на заднем сиденье по ходу машины), причем никакие два лица одного пола не должны были сидеть рядом.

Поскольку водить машину умели только сам полковник, дядя Джейбз и Джордж, то потребовалось всего лишь немножко поразмыслить.

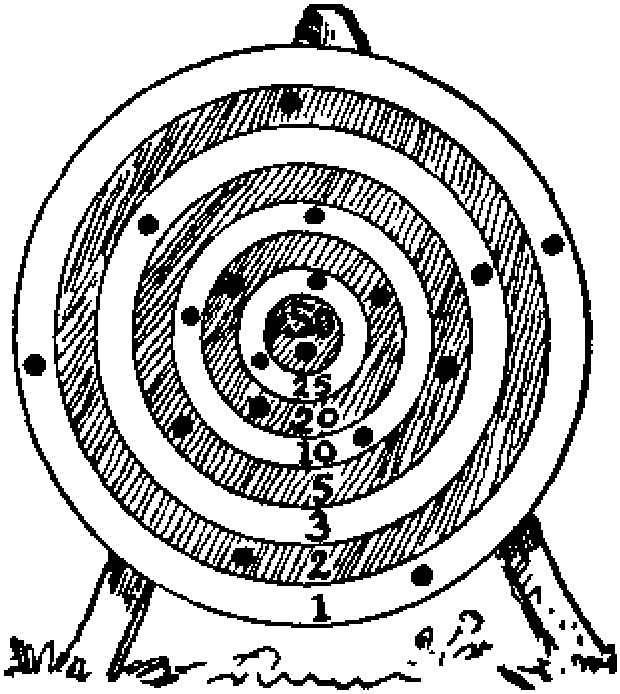
Быть может, читатель сам захочет найти то решение, которое все семейство Крэкхэмов признало к концу дня правильным?




**453. Соревнование по стрельбе из лука.** Три стрелка из лука, у каждого из которых имеется по 6 стрел, поражают мишень, изображенную на рисунке. Попадание в «яблочко» оценивается в 40 очков, а в каждое следующее от центра кольцо соответственно — в 39, 24, 23, 17 и 16 очков. Результаты оказались такими: мисс Дора Талбот — 120 очков, Реджи Уотсон — 110 очков, миссис Финч — 100 очков. Каждая стрела попала в цель, но в «яблочко» попала только одна стрела.

Не могли бы вы, исходя из этих сведений, определить, куда именно попали стрелы каждого из участников?

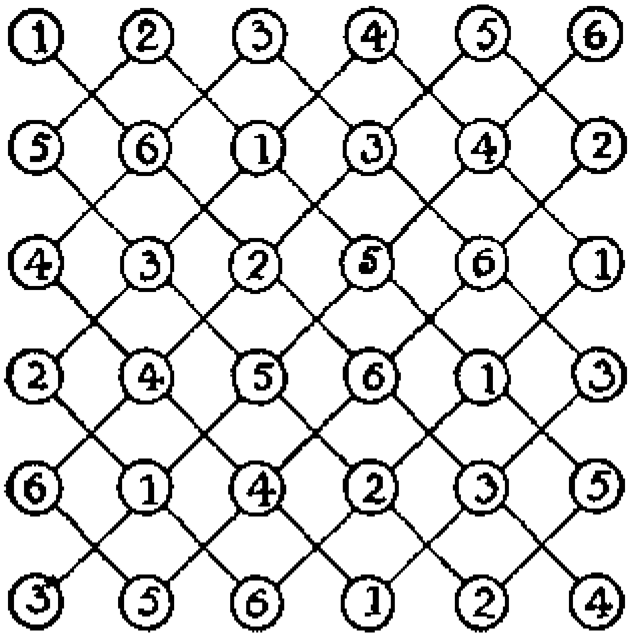
**454. Стрельба по мишени.** Однажды к вечеру полковник Крэкхэм посетил Слокомбский клуб токсофилов, где он откопал следующую небольшую задачку.




Три спортсмена выпустили по 6 стрел в мишень. Их результаты показаны на рисунке, где видно, что все стрелы попали в цель. Попадание в «яблочко» оценивается в 50 очков, попадание в ближайшее к «яблочку» кольцо — в 25 очков, а попадания в следующие по порядку кольца — в 20, 10, 5, 3, 2 и 1 очко. По пробоинам видно, что одна стрела поразила «яблочко», две попали в 25, три — в 20, три — в 10, три — в 1, а каждое из остальных колец было поражено двумя стрелами. В результате все три спортсмена набрали одинаковое число очков.

На следующее утро полковник спросил своих домашних, куда попали стрелы каждого из участников. Много ли времени потребуется читателю, чтобы дать правильный ответ?

**455. Сакраменто — край богатый.** Семья Крэкхэмов уютно устроилась в «Голубом борове» в Подлбери. Здесь им посчастливилось встретить еще одного постояльца, который явно бился над решением какой-то головоломки. Полковник вступил с ним в беседу и выяснил, что головоломка называется «Сакраменто — край богатый».



— Вам, должно быть, известно,— сказал незнакомец,— выражение «Сакраменто — край богатый, золото гребут лопатой». Так вот, на одном участке земли размечено 36 кругов, в каждом из кругов стоит мешок, содержащий столько долларов, сколько указано на схеме. Разрешается брать любое число мешков, лишь бы не проходить дважды по одной и той же прямой.

Какую наибольшую сумму можно собрать?

**456. Семеро детей.** Четыре мальчика и три девочки садятся случайным образом в один ряд.

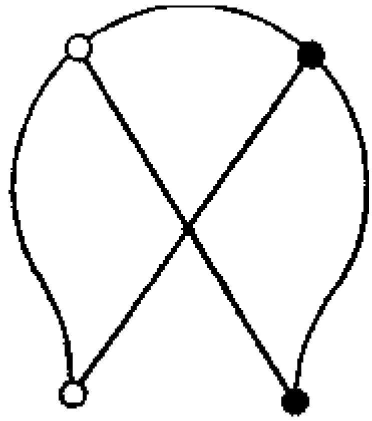
Какова вероятность того, что два ребенка на концах ряда окажутся девочками?

# ИГРОВЫЕ ГОЛОВОЛОМКИ

**457. Крестики-нолики.** В эту старинную игру умеет играть каждый ребенок. Квадрат расчерчивают на 9 клеточек. Каждый игрок по очереди ставит в свободную клеточку свой знак (крестик или нолик), стараясь выстроить три своих знака по одной прямой. Тот, кто сумеет добиться этого, выигрывает. Если играют два хороших игрока, то каждая партия у них неизменно должна оканчиваться вничью, поскольку никто из них не сможет выиграть (если только его соперник не допустит случайный промах).

| | | |
|---|---|---|
| X | O | O |
| X | X | O |
| O | | X |

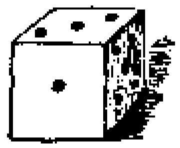
Можете ли вы доказать это утверждение? Можете ли вы быть уверены, что не проиграете встречу с самым лучшим игроком?



**458. Игра в подкову.** Вот небольшая игра под стать крестикам-ноликам. В нее играют двое. У одного игрока имеются две белые фишки, у другого — две черные. Играя по очереди, каждый из игроков ставит фишку на свободный кружок (см. рисунок), где она и остается. Когда все фишки расставлены, игроки могут их только передвигать вдоль линий от точки к точке, а проигрывает тот из них, чьим фишкам некуда ходить. На нашем рисунке играющий черными только что поставил свою фишку вниз. Теперь играющий белыми передвигает свою нижнюю фишку в центр и выигрывает. Черным следовало бы поставить свою вторую фишку в центр и добиться тем самым победы.

Какой из игроков должен победить в этой игре?

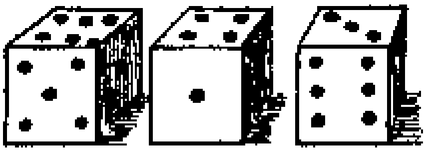
**459. Перевертывание кости.** Для этой игры нужна одна игральная кость. Первый игрок называет любое число от 1 до 6, а второй бросает кость. Затем они по очереди перевертывают кость в любую сторону, но не больше, чем на четверть полного оборота за один раз. К числу очков, названному первым игроком, прибавляется число очков, выпавших на верхней грани после бросания кости и каждого ее поворота. Выигрывает тот из игроков, которому удается при очередном повороте достичь суммы 25 очков или вынудить противника при следующем повороте превзойти 25 очков.



Приведу примерную партию. Игрок *A* называет 6, а игрок *B*, подбросив кость, получает 3 очка (как на рисунке), после чего сумма очков становится равной 9. Затем *A* повертывает кость вверх гранью с 1 очком, сумма становится равной 10 очкам, игрок *B* повертывает кость вверх гранью с 3 очками (сумма равна 13 очкам). Игрок *A* повертывает кость вверх гранью с 6 очками (сумма очков 19). Игрок *B* повертывает кость с 3 очками (сумма очков 22). Игрок *A* повертывает кость вверх гранью с 1 очком (сумма очков 23). Наконец, игрок В переворачивает кость вверх гранью с 2 очками, достигает суммы 25 очков и выигрывает.

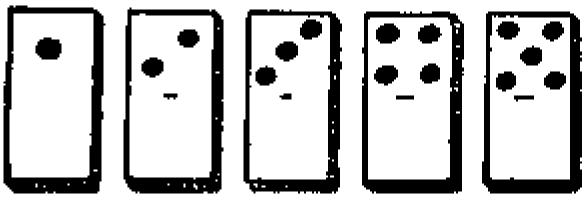
Какое число должен назвать *A*, чтобы выиграть с наибольшими шансами? Помните, что числа на противоположных гранях кости всегда дают в сумме 7, то есть расположены парами 1—6, 2—5, 3—4.

**460. Три кости.** Мэйсон и Джексон играли в кости. У них было три кости, и выигрывал тот игрок, у которого сумма выпавших очков равнялась одному из двух чисел, названных им перед началом игры. Мэйсон назвал 7 и 13, и один из его удачных бросков показан на рисунке.



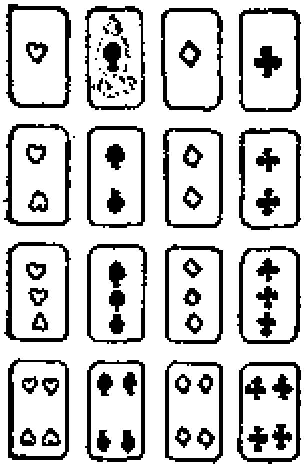
Каковы шансы Мэйсона на выигрыш при очередном бросании? Какие два числа должен назвать Джексон, чтобы шансы игроков на успех сравнялись?

**461. Игра в 37.** Вот красивая игра-головоломка, которая проста и в то же время чрезвычайно увлекательна. Большинству из вас может показаться, что у обоих игроков равные шансы на выигрыш и кто победит — дело случая. Однако в этой игре есть одна тонкость, зная которую, можно выигрывать с уверенностью.



Положите на стол пять костяшек домино, у которых число очков равно соответственно 1, 2, 3, 4, 5 (см. рисунок). Двое игроков играют по очереди. Первый игрок кладет монету на произвольную костяшку, например на 5, что дает ему 5 очков; затем второй игрок перекладывает монету, скажем, на 3 и, прибавив 3 к 5, получает при этом 8 очков; затем первый игрок кладет монету на 1 и получает сумму очков, равную 9, и т. д. Тот игрок, который наберет 37 или принудит своего противника превзойти эту сумму, выигрывает. Помните, что при каждом ходе вы обязаны класть монету на другую костяшку.

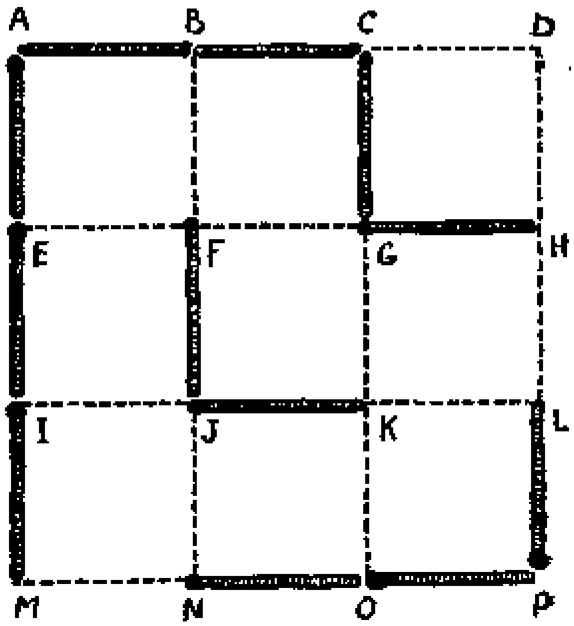
**462. Игра в 22.** Разложите 16 карт, как показано на рисунке. Двое игроков по очереди переворачивают по одной карте, прибавляя ее значение к общей сумме очков. Выигрывает тот, кому удастся набрать 22 или вынудить соперника превзойти эту сумму. Например, игрок *A* переворачивает четверку, игрок *B* переворачивает тройку (набрав 7 очков), игрок *A* переворачивает четверку (набрав 11 очков), игрок В переворачивает двойку (счет становится равным 13 очкам). Затем игрок *A* переворачивает туза (14 очков), игрок *B* — тройку (17 очков). При любом ходе игрока *A* игрок *B* на следующем ходу набирает 22 очка и выигрывает.



Другой вариант. Предположим, что партия развивалась следующим образом: 3—1, 1—2, 3—3, 1—2, 1—4, счет стал 21, и второй игрок снова должен выиграть, поскольку не осталось ни одной карты с 1 очком и первый игрок на следующем ходу вынужден превзойти сумму 22 очка.

Кто из игроков может всегда выиграть и как он должен при этом действовать?

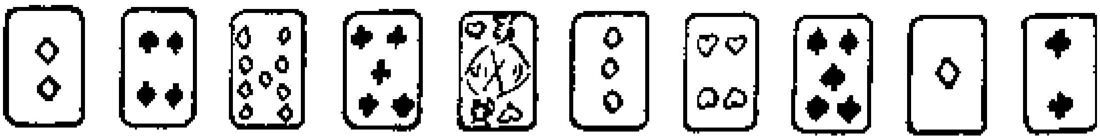
**463. Игра в девять квадратов.** Начертите простую диаграмму, изображенную на рисунке, и возьмите коробок спичек. Длина стороны большого квадрата равна трем спичкам. Игра состоит в том, чтобы, выкладывая поочередно по одной спичке, окружить большее число малых квадратиков, чем окружит ваш противник. Замкнув маленький квадратик, вы не только получаете одно очко, но и ходите снова вне очереди[26]. Здесь изображена одна из партий. Я и мой противник выложили по шесть спичек, а поскольку начинал я, то теперь моя очередь ходить.




Какой ход будет для меня наилучшим? Если я пойду на *FG*, то мой противник пойдет на *BF* и выиграет очко. Далее, поскольку он получает право внеочередного хода, то он пойдет на *EF*, а затем на *IJ* и на *GK*. Если теперь он пойдет на *CD*, то мне не останется ничего лучшего, как пойти на *DH* (получив при этом одно очко); но, поскольку я должен буду снова ходить вне очереди, все остальные квадратики достанутся моему противнику. В результате я проиграю с «разгромным» счетом 8 : 1.

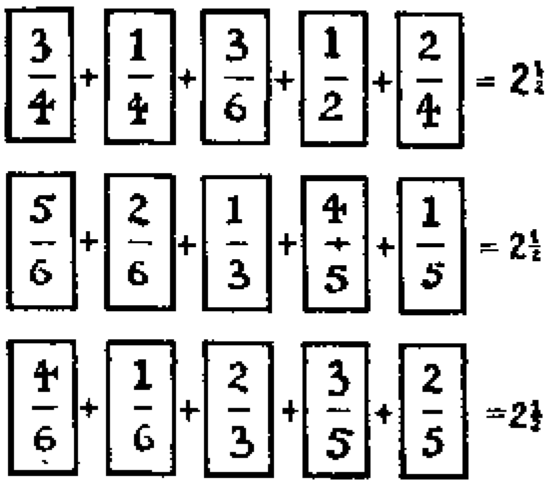
Как я должен пойти вместо «рокового» хода на *FG*? Во многих партиях игры в 9 квадратов есть над чем подумать. Ни одна из партий не может закончиться вничью.

**464. Десять карт.** Разложите десять игральных карт, как показано на рисунке. Играют двое. Первый игрок может перевернуть любую карту. Затем второй игрок может перевернуть две соседние карты или одну карту и т. д. Выигрывает тот из игроков, который перевернет последнюю карту.



Помните, что вначале первый игрок должен перевернуть одну карту, а затем каждый из игроков перевертывает либо одну, либо две соседние карты.

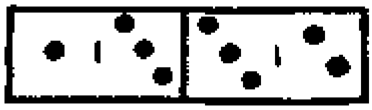
## ГОЛОВОЛОМКИ С ДОМИНО



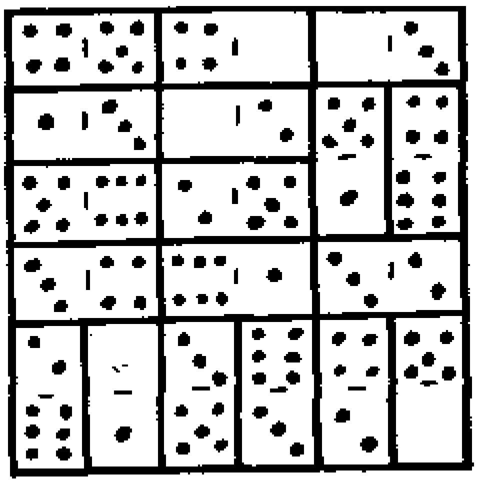

**465. Дроби из домино.** Возьмите обычный набор домино и удалите из него все дубли и пустышки. Затем рассматривайте оставшиеся 15 костяшек как дроби. На рисунке костяшки расположены таким образом, что сумма всех дробей в каждом ряду равна $2\frac{1}{2}$. Однако все мои дроби правильные. Вам же разрешается использовать столько неправильных дробей (вроде $\frac{4}{3}$, $\frac{5}{2}$, $\frac{6}{1}$, сколько вы пожелаете, лишь бы сумма в каждом ряду равнялась 10.

**466. Головоломка с домино.** Вы видите, что изображенные здесь две костяшки домино расположены таким образом, что, объединяя между собой группы очков, непосредственно прилегающие друг к другу, я могу получить все числа от 1 до 9 включительно. Так, 1, 2 и 3 можно взять «в готовом виде», 1 и 3 в сумме дают 4; 3 и 2 дают 5; 3 и 3 дают 6; 1, 3 и 3 дают

7; 3, 3 и 2 дают 8; а 1, 3, 3 и 2 дают 9. Не разрешается составлять 3 из 1 и 2 или 5 из первой 3 и 2, поскольку эти числа не прилегают друг к другу непосредственно.

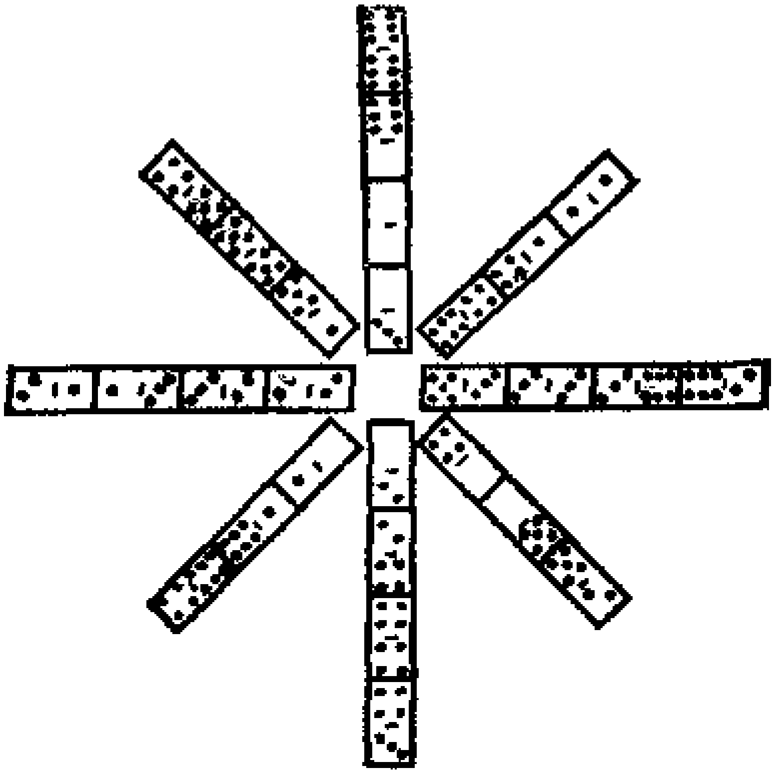


Попытайтесь теперь расположить 4 костяшки домино так, чтобы аналогичным образом получить любое число от 1 до 23 включительно. Костяшки не обязаны располагаться 1 к 1, 2 к 2 и т. д., как во время игры.

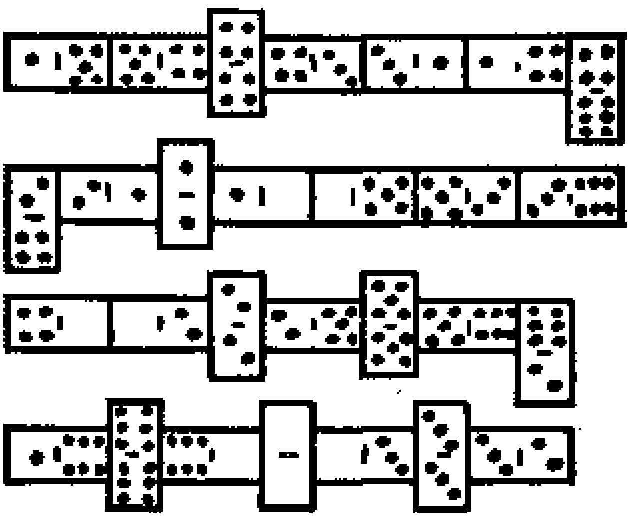


**467. Квадрат из домино.** Выберите любые 18 костяшек домино из обычного комплекта и расположите их в виде квадрата, как вам заблагорассудится, лишь бы никакое число не повторялось дважды ни в одной из строк, ни в одном из столбцов. Пример, приведенный на рисунке, неудачен, так как, хотя ни одно число не повторяется дважды ни в одном из столбцов, три строки нарушают это условие. В первой строке расположены две четверки и две пустышки, в третьей строке — две пятерки и две шестерки, а в четвертой строке — две тройки.

Не могли бы вы составить квадрат, полностью удовлетворяющий нашим условиям? Пустышка рассматривается как число.

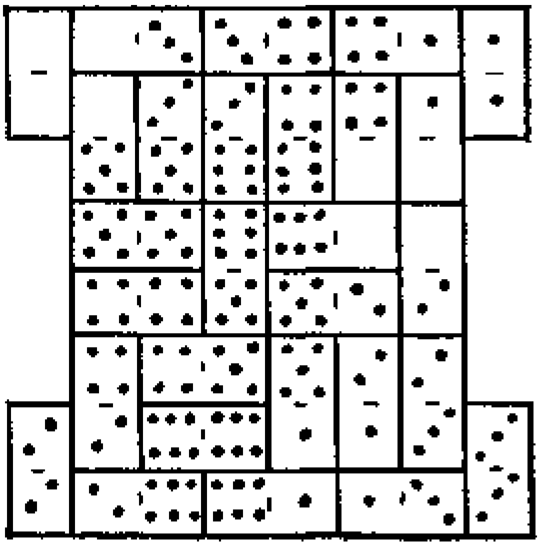


**468. Звезда из домино.** Расположите 28 костяшек так, как показано на рисунке, чтобы они образовали звезду с лучами из трех и четырех костяшек поочередно. Каждый луч должен содержать 21 очко (в нашем примере только один луч содержит столько очков), а в центре должны быть расположены числа 1, 2, 3, 4, 5, 6 и две пустышки (как в нашем примере) в любом порядке. В каждом луче костяшки должны прикладываться друг к другу по обычному правилу: 6 к 6, пустышка к пустышке и т. д.



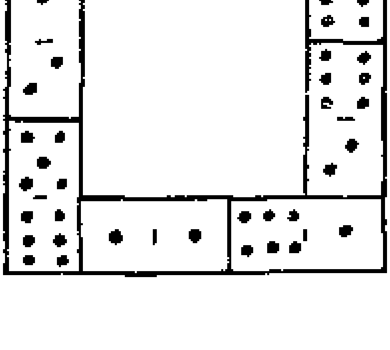
**469. Группы костяшек.** Известно ли кому-нибудь из моих читателей, что если выложить все 28 костяшек домино в одну линию согласно обычному правилу (6 к 6, 2 к 2, пустышка к пустышке и т. д.), то числа на концах всегда совпадут между собой, так что на самом деле костяшки можно расположить по кругу? Очень старый трюк заключается в том, что, спрятав одну из костяшек (но не берите дубль), вы просите кого-нибудь расположить остальные костяшки в линию, а сами отворачиваетесь. Зрителей поражает, когда вы, не глядя на то, что получилось, называете числа, стоящие на концах. Эти числа совпадают с теми, что стоят на вашей убранной костяшке, поскольку все костяшки образуют круг. Если мы расположим костяшки так, как показано на рисунке, а затем разорвем цепочку на четыре куска, по 7 костяшек в каждом, то можно обнаружить, что сумма очков в первой группе равна 49, во второй 34, в третьей 46 и в четвертой 39.

Мне хотелось бы составить из костяшек 4 группы так, чтобы суммы очков в каждой из групп были равны между собой. Можете ли вы это сделать?



**470. Кадрили.** Вот одна старая французская головоломка, которая, как мне кажется, заинтересует читателей. Требуется расположить полный комплект из 28 костяшек домино в виде фигуры, изображенной на рисунке, причем все числа должны образовать серию квадратов. Так, в верхних двух строках мы видим квадрат из пустышек, квадрат из троек, квадрат из четверок и квадрат из единиц; в третьей и четвертой строках стоят квадраты из пятерок, шестерок и пустышек и т. д. Это и в самом деле решение данной головоломки, как ее обычно формулируют. Однако я прошу найти такое расположение, которое не содержало бы пустышек на внешней границе. В нашем примере на границе можно найти все числа от пустышки до шестерки включительно.

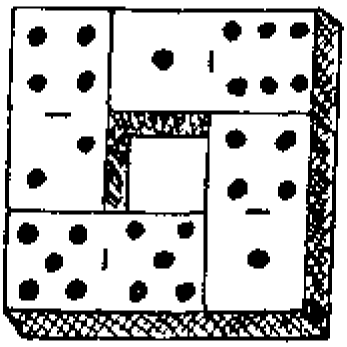
Можете ли вы найти такое расположение костяшек, при котором все пустышки окажутся внутри?



**471. Рамки из домино.** Возьмите обычный комплект домино из 28 костяшек и положите обратно в коробку дубль 3, дубль 4, дубль 5 и дубль 6, поскольку они нам не понадобятся. Теперь сложите из оставшихся костяшек 3 квадратные рамки, как показано на рисунке, чтобы суммы очков вдоль каждой из сторон были равны между собой. В приведенном примере эти суммы равны 15. Если это одна из трех рамок, то суммы сторон остальных двух рамок также должны равняться 15. Однако вы можете взять любое число, какое пожелаете; кроме того, нетрудно заметить, что костяшки разрешается складывать не обязательно 6 к 6, 5 к 5 и т. д., как во время игры.

**472. Полые квадраты из домино.** Каждая игра порождает свои маленькие головоломки. Возьмем, например, следующую головоломку, обязанную своим появлением всем известной игре в домино.

Из 28 костяшек требуется составить 7 полых квадратов, подобных изображенному на рисунке, так, чтобы в любом квадрате суммы очков вдоль каждой из сторон равнялись между собой. У всех 7 квадратов общие суммы очков не обязаны, разумеется, совпадать, и, кроме того, квадрат, приведенный на нашем рисунке, не обязан входить в ваше множество из 7 квадратов.



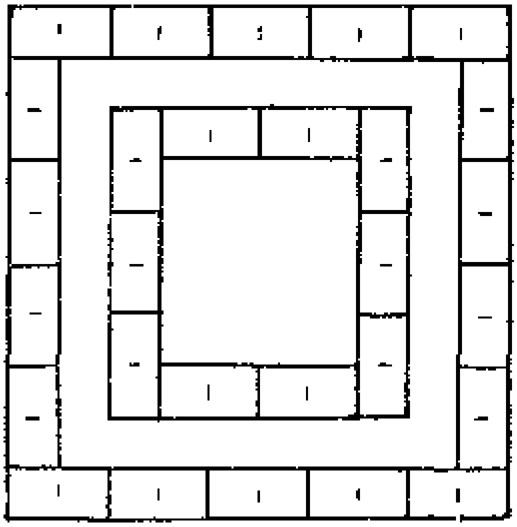
Читатель, вероятно, легко сумеет составить 6 квадратов разными способами, однако трудности возникнут, когда вы попытаетесь сложить из оставшихся четырех костяшек седьмой квадрат.

**473. Последовательности костяшек.** У одного мальчика был полный комплект домино вплоть до дубля 9, и он бился над тем, чтобы расположить костяшки в одну линию обычным способом — 6 к 6, 3 к 3, пустышка к пустышке и т. д. Но отец сказал ему:

— Ты пытаешься сделать невозможное; однако если ты разрешишь мне убрать четыре костяшки, то тебе удастся добиться своей цели, а те костяшки, которые я возьму, будут содержать наименьшее число очков, возможное при данных обстоятельствах.

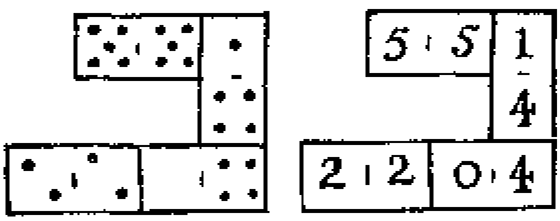
Какие костяшки выбрал отец? Помните, что обычный комплект домино заканчивается дублем 6, однако мы рассматриваем комплект, расширенный вплоть до дубля 9.

**474. Квадраты из домино.** Составьте из 28 костяшек домино 2 квадрата, как показано на рисунке, чтобы суммы очков вдоль каждой из 8 сторон совпали.

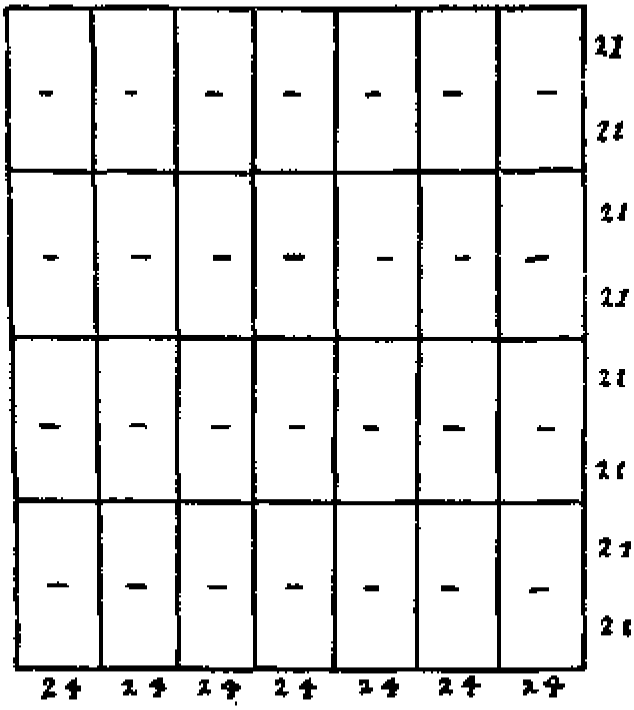


Значение сумм должно быть таким, чтобы головоломка оказалась разрешимой; кроме того, было бы интересно найти пределы, в которых может меняться это значение. Разумеется, мы не обязаны прикладывать костяшки друг к другу согласно обычному правилу — 6 к 6, пустышка к пустышке и т. д.

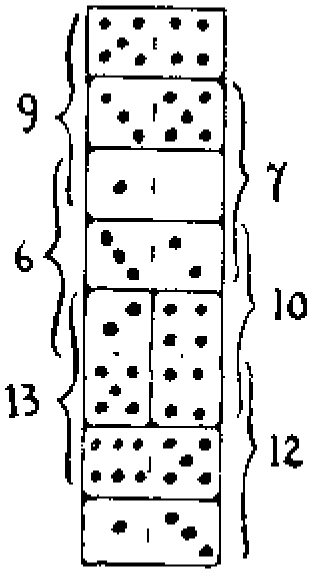
**475. Умножение домино.** Четыре костяшки домино можно расположить таким образом, чтобы получилось умножение столбиком, если очки рассматривать как цифры. Головоломка состоит в том, чтобы из 28 костяшек составить 7 таких «столбиков».




Оказывается, сравнительно легко составить 6 столбиков, но с оставшимися четырьмя костяшками ничего не удается сделать. Однако головоломка имеет решение, а его поиски доставят вам удовольствие. Пустышку не разрешается помещать слева ни в произведении, ни в множимом.




**476. Прямоугольник из домино.** Вот одна, как мне кажется, довольно занимательная головоломка с домино. Расположите 28 костяшек, как показано на рисунке, где очки не указаны, чтобы при этом сумма очков в каждом столбце равнялась 24, а в каждой строке — 21. Костяшки не обязательно прикладывать 6 к 6, 4 к 4 и т. д.

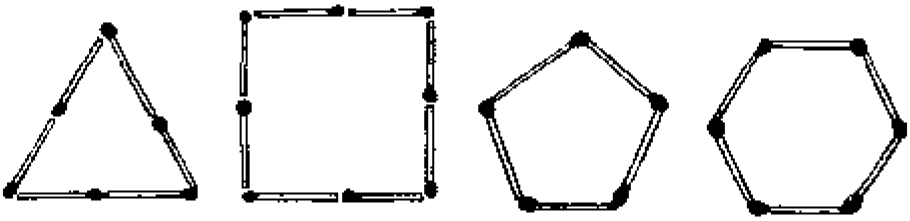



**477. Столбик из домино.** Расположите 28 костяшек домино в столбик, как показано на рисунке, таким образом, чтобы три произвольных идущих подряд множества очков давали слева и справа одинаковую сумму. Так, в нашем примере три верхних множества дают сумму 9 на обеих сторонах, сумма следующих трех равна 7 на обеих сторонах и т. д. Однако это всего лишь пример одного из участков подходящего столбика, и вы, если захотите, можете начать все заново.

**478. Выстраивание домино.** Однажды кто-то напомнил профессору Рэкбрейну о том, что он обещал сказать, сколькими способами можно расположить 28 костяшек домино в одну линию в соответствии с обычным правилом игры, если расположения слева направо и справа налево считать различными. Через некоторое время он сообщил, что таких способов 7 959 229 931 520, и добавил, что эта задача очень сложна.

Затем профессор предложил присутствующим решить аналогичную задачу для 15 костяшек (которые остаются после удаления всех костяшек с пятью или шестью очками), причем две цепочки домино, получающиеся из одной и той же цепочки при «чтении» ее один раз слева направо, а другой справа налево, считаются различными. Разумеется, и в этом случае костяшки следует располагать по обычным правилам: 1 к 1, 6 к 6 и т. д.

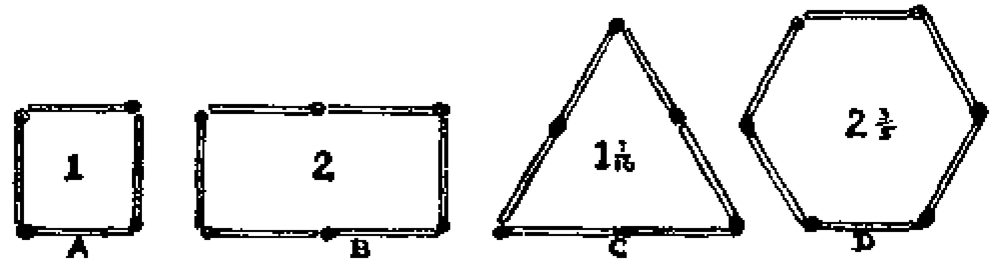
# ГОЛОВОЛОМКИ СО СПИЧКАМИ



**479. Головоломка со спичками.** Взяв коробок спичек, я обнаружил, что могу составить из них любую пару правильных многоугольников, изображенных на нашем рисунке, причем на это каждый раз уходят все спички. Так, если бы у меня было 11 спичек, я мог бы из них составить, как показано, либо треугольник и пятиугольник, либо пятиугольник и шестиугольник, либо квадрат и треугольник (израсходовав на треугольник только 3 спички); но из 11 спичек нельзя составить ни треугольник с шестиугольником, ни квадрат с пятиугольником, ни квадрат с шестиугольником. Разумеется, на каждую сторону фигуры должно пойти одинаковое количество спичек.

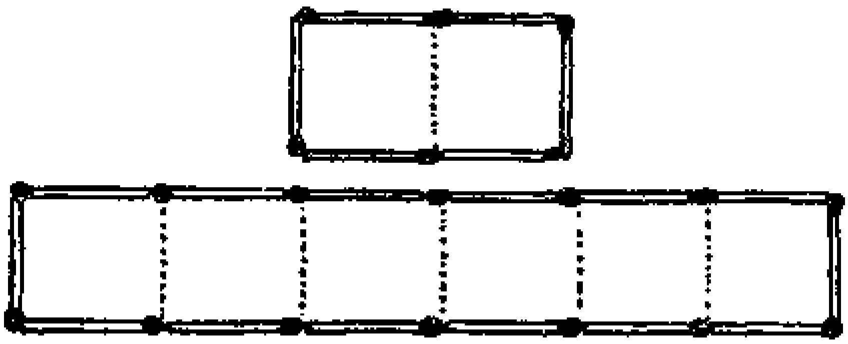
Какое наименьшее число спичек может быть у меня в коробке?

**480. Овцы и изгороди.** Вот еще одна небольшая головоломка, для решения которой могут пригодиться спички. Некий фермер утверждает, что с помощью четырех жердей он может огородить квадратный участок, достаточный как раз для одной овцы. Если это и в самом деле так, то какое минимальное число жердей пойдет на загородку для десяти овец? Все зависит от формы вашей изгороди. По-другому расположить четыре спички (или жерди) вы можете только в виде ромба, и, чем более вытянутым будет этот ромб, тем меньшую площадь он будет огораживать, пока наконец после совмещения сторон огороженная площадь не обратится в нуль.

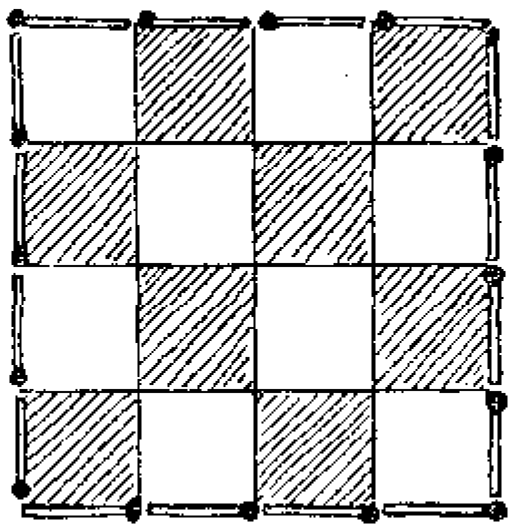



Если вы расположите шесть спичек, как в случае *B*, то огородите при этом участок для двух овец. Но если вы расположите их, как в случае *C*, то соответствующий участок подойдет только для одной овцы, поскольку $\frac{1}{10}$ овцы можно получить лишь в виде баранины. Если же вы расположите их, как в случае *D*, то снова в полученную загородку сможете поместить только двух овец (максимальное число в случае шести жердей).

Сколько жердей требуется для 10 овец?

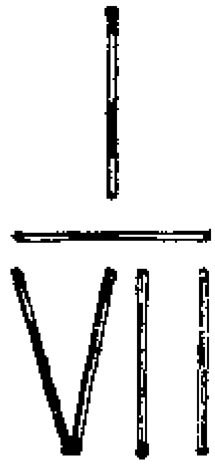


**481. Двадцать спичек.** На помещенном здесь рисунке показано, как можно из 20 спичек, разделенных на две группы (по 14 и 6 спичек соответственно), составить ограды для двух участков, из которых первый имеет ровно в 3 раза большую площадь, чем второй. Разделите теперь 20 спичек на две группы по 13 и 7 штук соответственно и снова огородите с их помощью два участка, у которых площадь первого была бы ровно в 3 раза больше площади второго.



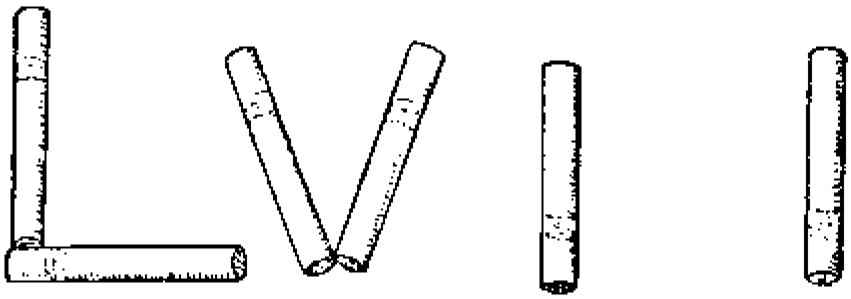
**482. Еще одна головоломка со спичками.** Шестнадцать квадратов шахматной доски окружены 16 спичками. Требуется положить *нечетное* число спичек внутрь получившегося большого квадрата так, чтобы окружить 4 группы по 4 квадрата в каждой. Совершенно очевидно, как это можно сделать с помощью 8, 10 или 12 спичек, но эти числа *четные*.

Быть может, читателю понадобится всего лишь несколько минут для того, чтобы найти 4 различных решения (решения, переходящие друг в друга при поворотах и отражениях, не считаются различными) с нечетным числом спичек. Разумеется, не разрешается класть две спички на одну и ту же сторону.



**483. Хитроумная головоломка со спичками.** Положите 6 спичек, как показано на рисунке, и затем передвиньте одну из них, не касаясь остальных, так, чтобы получилась арифметическая дробь, равная 1. Спичку, изображающую горизонтальную черту дроби, трогать нельзя.

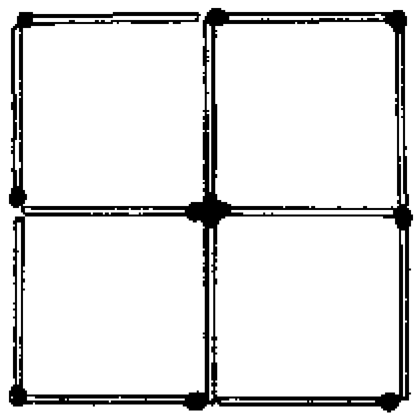
**484. Нуль из пятидесяти семи.** После предыдущей головоломки данная покажется совсем простой.



На нашем рисунке вы видите 6 сигарет (спички тоже вполне подойдут), которые расположены таким образом, что изображают число 57. Головоломка состоит в том, чтобы, переместив две из них и не сдвигая остальных, получить 0. Помните, что вы можете передвинуть только две сигареты. Существуют два совершенно различных решения.

Можете ли вы найти одно из них или даже оба?

**485. Пять квадратов.** Вот еще одна несложная головоломка со спичками, которая озадачит очень многих читателей, хотя они и рассмеются, узнав ответ.

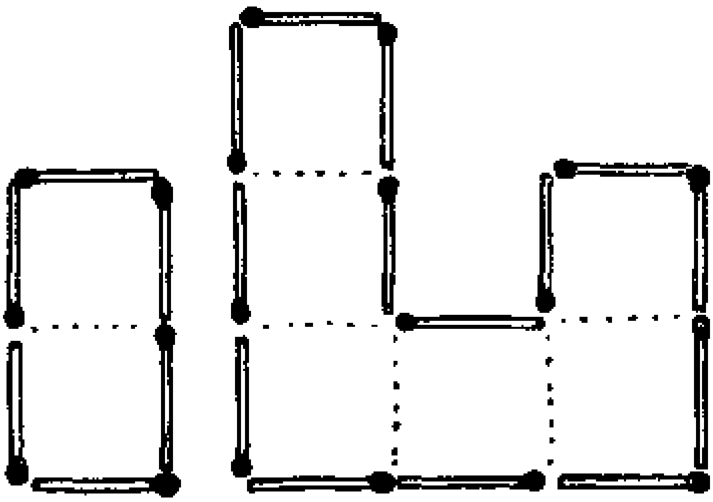


Вы видите на рисунке, как из 12 спичек составлены 4 квадрата. Можете ли вы расположить те же 12 спичек (все спички должны лежать плашмя на столе) так, чтобы они ограничивали 5 квадратов?

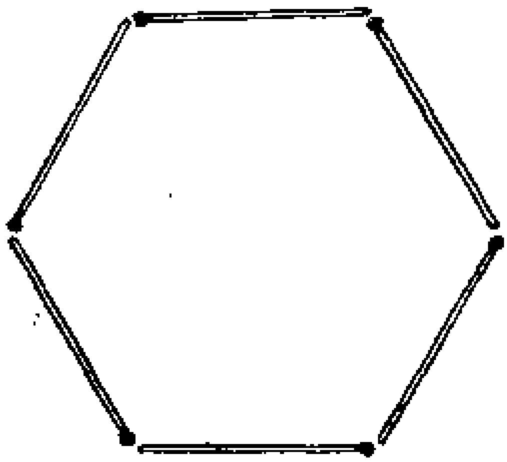
Каждый квадрат должен быть «пуст», в противном случае квадраты, изображенные на рисунке, могли бы служить решением, поскольку в качестве пятого мы могли бы взять большой квадрат. Не разрешается ни укладывать две спички одна на другую, ни оставлять свободные концы.

**486. Фокус со спичками.** Как-то, приоткрыв спичечный коробок, я показал своим друзьям, что в нем только около дюжины спичек. Открыл я его так, что не было видно ни одной головки — все головки находились в закрытом конце коробка. Затем, закрыв коробок на глазах у всех, я сказал, что встряхну его, а потом открою снова, при этом одна спичка перевернется так, что станет видна ее головка. Так я и поступил, а зрители сразу же проверили, что все спички целы. Как мне удалось это сделать?

**487. В три раза больше.** Выложите на стол 20 спичек, как показано на рисунке. Можно заметить, что 2 группы из 6 и 14 спичек ограничивают 2 фигуры, площадь одной из которых ровно в 3 раза больше площади другой.

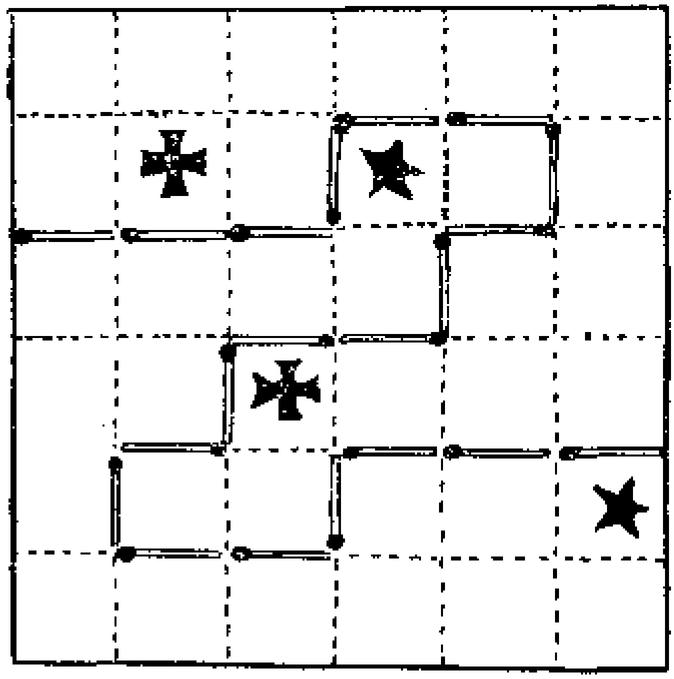


Теперь возьмите одну спичку в большой группе, переложите ее в меньшую и с помощью 7 и 13 спичек ограничьте снова 2 фигуры, из которых площадь одной была бы ровно в 3 раза больше площади другой. Двенадцать спичек должны остаться на своих местах, а кроме того, нельзя дублировать спички и оставлять свободные концы. Пунктиром отмечены соответствующие площади.



**488. Фигура с шестью сторонами.** Вы видите на рисунке правильный шестиугольник, составленный из 6 спичек. Можете ли вы, добавив 3 спички, изобразить с помощью 9 полученных спичек другую правильную фигуру с шестью сторонами? Не разрешается укладывать 2 спички одна на другую и оставлять свободные концы.

**489. Двадцать шесть спичек.** Набросайте диаграмму, подобную изображенной на нашем рисунке, где сторона каждого маленького квадрата имеет длину в одну спичку, и поместите звездочки и крестики на указанные места.



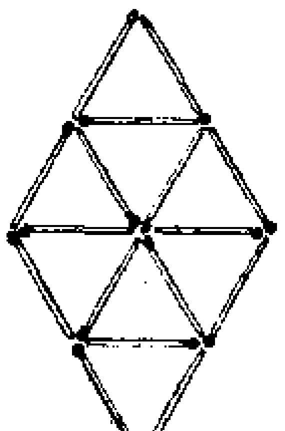
Требуется разместить 26 спичек вдоль линий таким образом, чтобы они разделяли весь чертеж на две части одинаковых размеров и одной формы, причем в одной из них должны находиться две звездочки, а в другой — два крестика.

В приведенном примере обе части, как и требуется, имеют одинаковые размеры и одну форму и в каждой из них содержатся либо две звездочки, либо два крестика, но, к сожалению, здесь использовано только 20 спичек. Следовательно, это не решение.

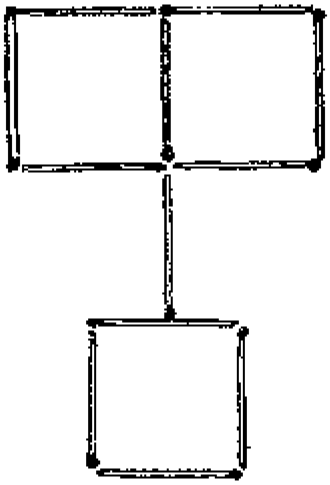
Можете ли вы сделать то же самое с 26 спичками?

**490. Три спички.** Можете ли вы расположить 3 спички на столе и на них поместить коробок так, чтобы головки спичек не касались ни стола, ни друг друга, ни коробка?

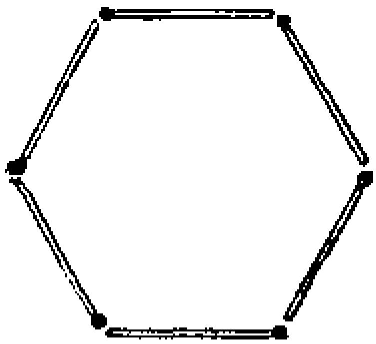
**491. Равносторонние треугольники.** Вот несложная головоломка для юных читателей.



Расположите 16 спичек, как показано на рисунке, чтобы они образовали 8 равносторонних треугольников. Теперь уберите 4 спички так, чтобы при этом осталось только 4 равных треугольника. Не должно оставаться ни лишних спичек, ни свободных концов.



**492. Квадраты из спичек.** Положите на стол 12 спичек, как показано на рисунке. Требуется переложить 6 из них так, чтобы получилось 5 квадратов. Разумеется, 6 других спичек должны остаться на месте, не разрешается дублировать спички или оставлять свободные концы.



**493. Шестиугольник — в ромбы.** Вот еще одна головоломка со спичками для юных читателей. Составьте шестиугольник из 6 спичек, как показано на рисунке. Сумеете ли вы теперь, передвинув всего 2 спички и добавив еще 1, получить 2 ромба?

**494. Странная арифметика.** Сможете ли вы показать с помощью спичек, как от 5 следует отнять $\frac{7}{10}$, чтобы остаток оказался в точности равен 4?

**495. Сосчитайте спички.** Один приятель пишет, что он купил маленький коробок коротких спичек, каждая длиной дюйм. Он обнаружил, что может расположить их в виде треугольника, площадь которого содержит столько квадратных дюймов, сколько всего имеется спичек. Затем он использовал 6 спичек, и оказалось, что из оставшихся можно было составить новый треугольник, у которого площадь содержала столько квадратных дюймов, сколько оставалось спичек. А использовав еще 6 спичек, он снова сумел сделать то же самое.

Сколько спичек было у него в коробке первоначально? Это число меньше 40.

# РАЗНЫЕ ГОЛОВОЛОМКИ

**496. Головоломка с картами.** Возьмите из колоды 13 карт бубновой масти и, положив пятерку сверху, а короля снизу, сложите их стопкой в следующем порядке: пятерка, валет, десятка, туз, семерка, восьмерка, четверка, двойка, дама, шестерка, девятка, тройка, король. Теперь выкладывайте их в ряд по следующему правилу. Называйте карты в правильном порядке[27]. Слово «туз» состоит из трех букв, поэтому вы переложите последовательно три верхние карты нашей стопки вниз, а четвертую карту выложите на стол. Слово «два» содержит три буквы, поэтому переложите три карты сверху вниз, а четвертую положите справа от первой выложенной на стол. Поступайте и далее таким же образом. Например, слово «валет» состоит из пяти букв, поэтому, переложив последовательно пять карт сверху вниз, шестую карту положите на стол справа от остальных. Дойдя до конца, вы обнаружите, что ваши карты расположены в правильном порядке.

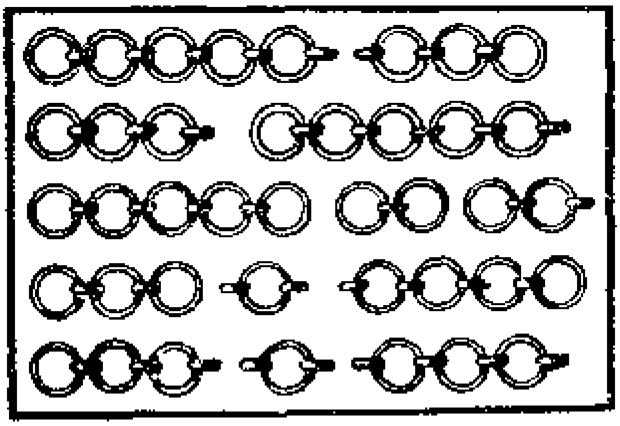
Сможете ли вы проделать то же самое с целой колодой карт так, чтобы сначала шли бубны, за ними черви, потом пики и, наконец, трефы?

**497. Тасование карт.** Элементарный метод тасования карт состоит в том, что, взяв колоду рубашками вверх в левую руку, вы перекладываете по одной карте в правую руку; при этом каждая следующая карта кладется поверх предыдущей: вторая поверх первой, четвертая поверх третьей и т. д. до тех пор, пока вы не переложите все карты. Если вы проделаете эту процедуру неоднократно с любым четным числом карт, то убедитесь, что после некоторого числа повторных тасований карты расположатся в первоначальном порядке. Если карт 2, 4, 8, 16, 32, 64, то, чтобы карты расположились в первоначальном порядке, необходимо произвести 2, 3, 4, 5, 6, 7 тасований соответственно.

Сколько раз нужно перетасовать колоду в случае 14 карт?

**498. Головоломка с цепочкой.** У одного человека было 13 кусков золотой цепочки, содержащих 80 звеньев. Отделить одно звено стоит 1 цент, а присоединить новое — 2 цента.

Какова наименьшая сумма, необходимая для того, чтобы составить из этих кусков замкнутую цепочку?

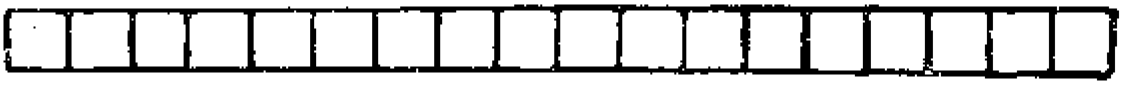


Новая цепочка обойдется ему в 36 центов. Как следует поступить наивыгоднейшим образом?

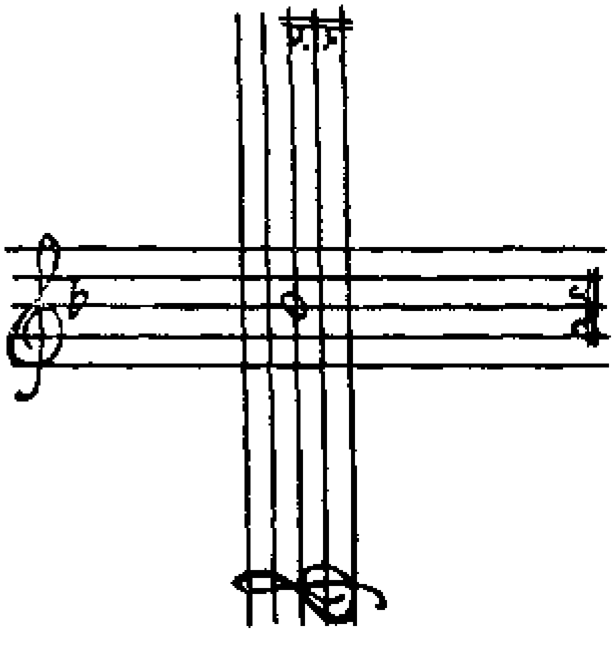
Помните, что большие и маленькие звенья должны чередоваться.

**499. «Простое» сложение.** Можете ли вы показать, что четыре плюс шесть равно одиннадцати?

**500. Календарная головоломка.** При наших нынешних календарных правилах первый день столетия никогда не сможет прийтись на воскресенье, среду или пятницу. Попытайтесь объяснить эту тайну наипростейшим образом.



**501. Путешествие мухи.** У меня была полоска бумаги, разделенная на квадраты на каждой из сторон, как показано на рисунке. Я склеил два ее конца так, чтобы получилось кольцо, и бросил его на стол. Позднее я заметил, что на кольцо уселась муха, которая проползла вдоль него через все квадраты на обеих сторонах, вернувшись в ту же точку, откуда она начала движение, и *ни разу не перейдя при этом через край бумаги*! Ее путь все время пролегал через центры квадратов. Как это могло случиться?



**502. Музыкальная загадка.** Перед вами одна старая музыкальная загадка, уже много лет хорошо известная в Германии.

**503. Удивительное родство.**

А н д ж е л и н а. Вы говорите, что мистер Томкинс ваш дядя?

Э д в и н. Да, и я его дядя!

А н д ж е л и н а. Тогда вы, конечно, приходитесь племянниками друг другу! Забавно, не правда ли?

Не сумеете ли вы совсем просто объяснить, как могло так случиться, если при этом не происходило кровосмешений и не нарушались законы о браке?

**504. Эпитафия (1538 г.).**

Две бабушки с двумя внучками,

Два мужа и две их жены.

Два отца с двумя дочками,

Два брата и две их сестры,

Две матери с двумя сыновьями,

Две девы с двумя матерями,

Всего же лишь шесть человек

Закончили здесь свои дни.

Прохожий, сдержи удивленье

И помни, что кровосмешеньем

Или незаконным рожденьем

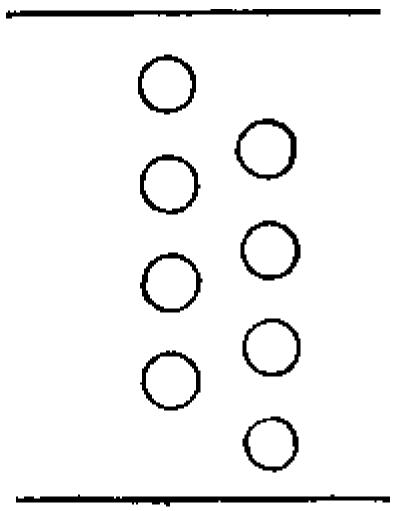
Ничуть не грешили они.

Как это могло случиться?

**505. Фамилия инженера.** Три бизнесмена — Смит, Робинсон и Джонс — живут в районе Лидс — Шеффилд. В том же районе живут и три железнодорожника, носящие те же имена. Бизнесмен Робинсон и кондуктор живут в Шеффилде, бизнесмен Джонс и кочегар живут в Лидсе, а бизнесмен Смит и железнодорожный инженер живут на полпути между Лидсом и Шеффилдом. Однофамилец кондуктора зарабатывает 10 000 долларов в год, а инженер зарабатывает *ровно* в 3 раза меньше бизнесмена, живущего от него ближе всех. Наконец, железнодорожник Смит обыгрывает кочегара в бильярд.

Как фамилия инженера?

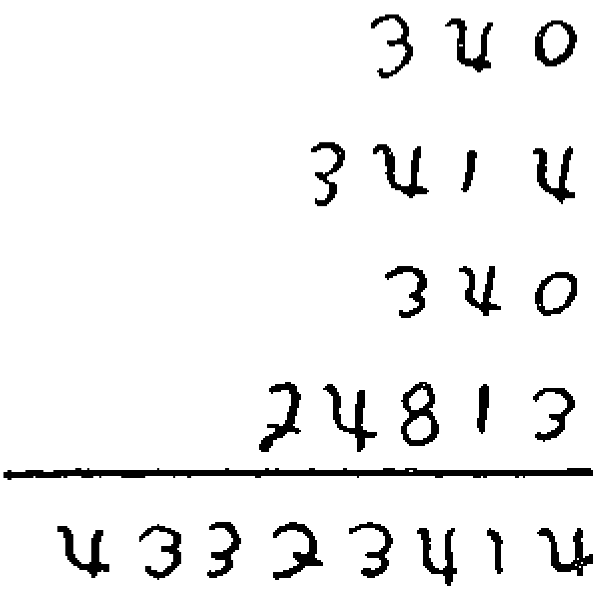
**506. Переправа через ручей.** На рисунке изображены камни, с помощью которых можно переправиться через ручей. Головоломка состоит в том, чтобы, начав с нижнего берега и выйдя дважды на верхний берег (ступая на него), вернуться один раз на нижний берег. Но вам следует быть внимательными и ступить на каждый камень одинаковое число раз. За какое наименьшее число шагов вы можете это сделать?



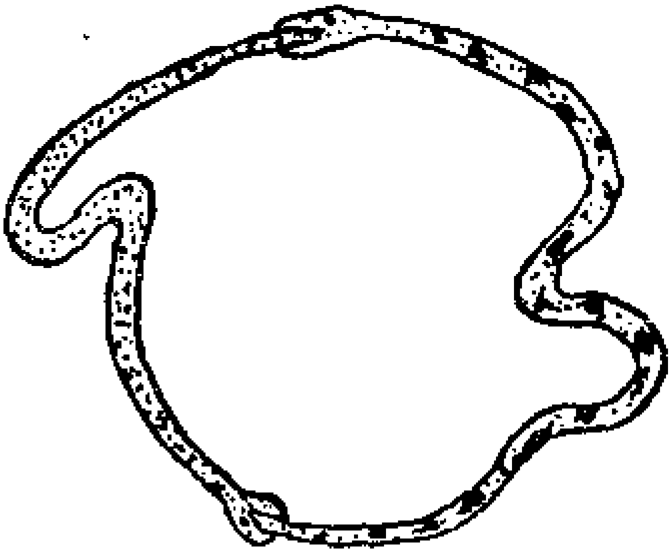
«Шагая» по рисунку двумя пальцами, вы убедитесь, сколь просто данное задание. И все же я более чем уверен, что первый раз вы сделаете много лишних шагов.

**507. Неудобное время.** За завтраком полковник Крэкхэм сказал:

— Когда я сообщил однажды утром одному человеку, что должен успеть на поезд 1:50, он удивил меня, заметив, что это очень неудобное время отправления для любого поезда. Я попросил его объяснить, почему он так думает. Не могли бы вы угадать ответ?




**508. Криптографическое сложение.** Можете ли вы проверить правильность сложения на рисунке?



**509. Две змеи.** Представьте себе, что две змеи начинают непрерывно заглатывать друг друга, захватив одна у другой хвост (см. рисунок) так, что кольцо, образованное змеями, становится все меньше и меньше. Что произойдет в конце концов?

**510. Два парадокса.** Ребенок может задать вопрос, который повергнет в глубокое раздумье искушенного философа, а мы часто встречаемся с парадоксами, требующими небольшого размышления, прежде чем удастся объяснить их простыми словами. Вот два примера.

Вообразите человека, идущего на Северный полюс. Отметки на компасе, как всем известно, имеют вид

N

W E

S

Он достигает полюса и, пройдя через него, должен обернуться назад, чтобы посмотреть на север. Теперь у него по левую руку находится восток, а по правую запад, и, следовательно, отметки на компасе имеют вид

N

E W

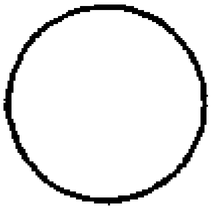
S

что нелепо.

Как можно объяснить этот парадокс?

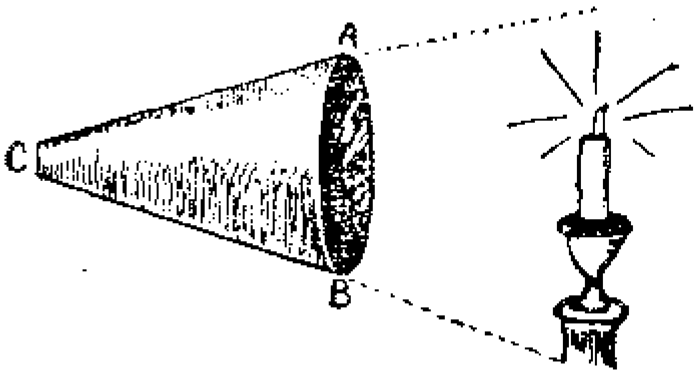
Мы стоим с ребенком перед большим зеркалом, которое отражает нас целиком.

— Почему так происходит,— спрашивает смышленый юнец,— что когда я гляжусь в зеркало, то правая и левая стороны меняются местами, а верх и низ — нет? Если зеркало меняет стороны в горизонтальном направлении, то почему же оно не меняет их в вертикальном? Почему я не вижу себя стоящим на голове?



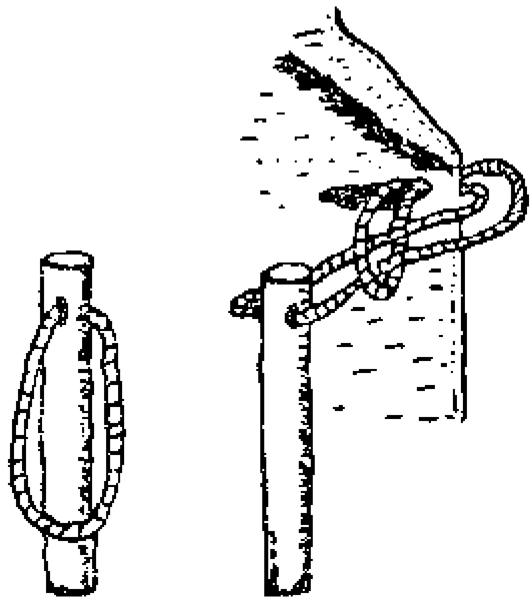
**511. Монета и дырка.** На рисунке схематически изображена (в увеличенном виде) монета достоинством 1 коп. У нас есть небольшой листок плотной бумаги, в котором проделана круглая дыра размером как раз в эту монету. (Ее можно проделать, обведя ободок монеты острой бритвой.) Какую наибольшую монету я могу просунуть сквозь эту дырку, не разорвав бумаги?

**512. Головоломка с високосным годом.** В феврале 1928 г. было 5 сред. Конечно, в этом нет ничего особенно примечательного, однако было бы интересно найти ближайший гол, предшествовавший 1928 г., и ближайший год, следующий за 1928 г., у которых в феврале было бы по 5 сред.

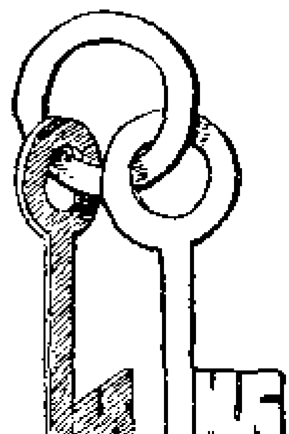



**513. Задуйте свечу.** Однажды туманным утром за завтраком у полковника Крэкхэма зажгли свечу. Когда туман рассеялся, полковник свернул из листа бумаги похожую на мегафон воронку и предложил своим юным друзьям задуть с ее помощью свечу. Как они ни старались, ничего у них не выходило до тех пор, пока он не объяснил им, в чем дело. Разумеется, вы должны дуть через меньший конец (см. рисунок).

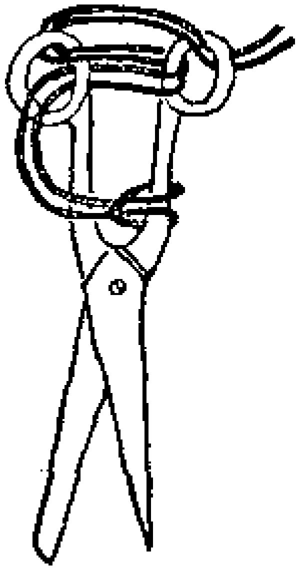
**514. Освободите палочку.** Вот одна головоломка, которая приведет в сильное замешательство ваших друзей, хотя она не так широко известна, как того заслуживает, Я полагаю, что ее придумал Сэм Лойд, выдающийся американский знаток шахмат и головоломок. Во всяком случае, он первый показал ее нам более четверти века назад.



У нас имеется веревочная петля, продетая сквозь один из концов палочки, как показано на рисунке, однако слишком короткая для того, чтобы ее можно было перекинуть через противоположный конец. Головоломка состоит в том, чтобы подвесить палочку к петле пиджака (см. рисунок), а затем снова освободить.



**515. Ключи и кольцо.** Однажды полковник Крэкхэм сделал из толстого картона кольцо с двумя ключами, как показано на рисунке, нигде ничего не разорвав и не склеив. Быть может, это озадачит читателя больше, чем Джорджа, который проворно вырезал такие же ключи с кольцом.



**516. Запутанные ножницы.** Вот одна старая головоломка, которую многие читатели, забывшие, как надевается веревка, будут рады увидеть вновь. Если вы начнете с нижней петли (см. рисунок), то сумеете легко надеть веревку так, как нужно. Головоломка, разумеется, состоит в том, чтобы, дав кому-нибудь подержать свободные концы, освободить ножницы. Чтобы вам было легче манипулировать, возьмите веревку подлиннее. Мы посоветовали бы также взять ножницы побольше, а веревку потолще, чтобы она лучше скользила.

**517. Психологические тесты.** В наше время повсюду в школах ученикам предлагают «психологические тесты». Вот один из них.

Английский офицер, вернувшийся после боксерского восстания из Китая, заснул в церкви во время службы. Ему приснилось, что к нему приближается палач, дабы отрубить голову, и в тот самый момент, как сабля опускалась на шею несчастного офицера, его жена, желая разбудить заснувшего, слегка дотронулась до его шеи веером. Потрясение было столь велико, что офицер тут же упал замертво. В этой истории что-то неладно.

Что же именно?

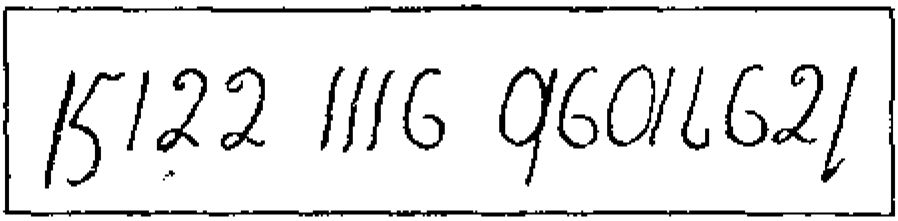
Еще один хороший вопрос для школьника, знакомого с математикой, звучит так.

Если бы мы продавали яблоки кубическими сантиметрами, то как бы мы смогли узнать, сколько кубических сантиметров содержится, скажем, в дюжине дюжин яблок?

**518. На вершине горы.** Профессор Рэкбрейн рассказал за завтраком, что когда он был в Италии, то участвовал в восхождении на вершину горы, где его внимание обратили на то обстоятельство, что кружка вмещает на вершине горы жидкости меньше, чем у подножия.

— Не могли бы вы сказать,— спросил профессор,— что это была за гора с таким странным свойством?

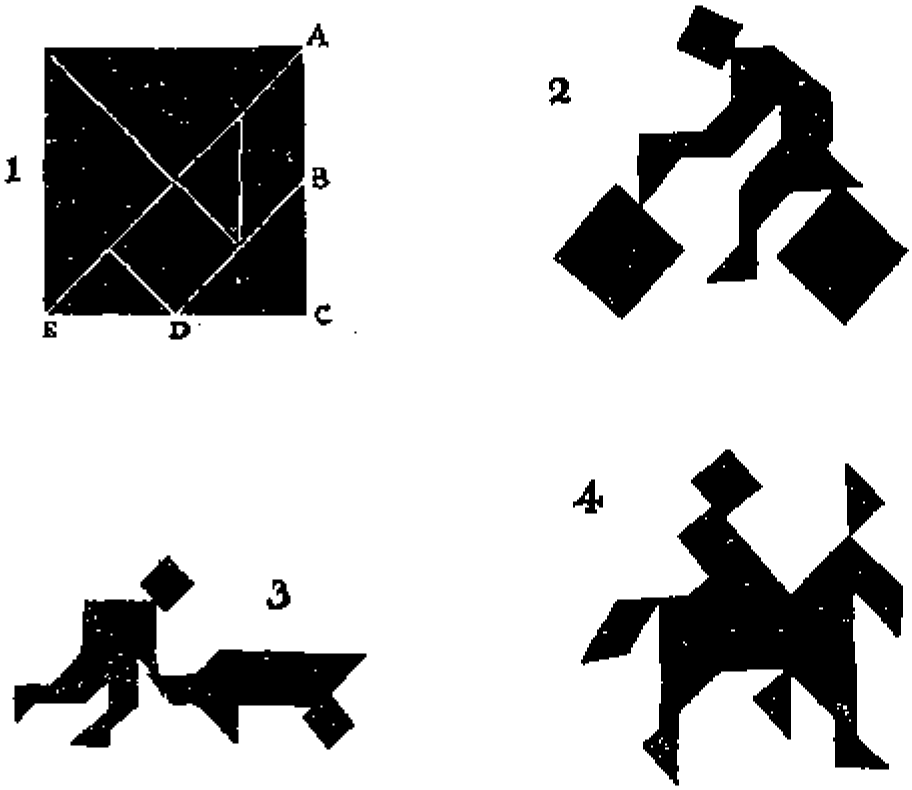
**519. Арифметика Купидона.** Однажды утром Дора Крэкхэм показала присутствующим листок бумаги с мешаниной цифр и знаков на нем, изображенный на рисунке. Она утверждала, что невеста одного из молодых математиков преподнесла такой листок своему суженому, когда была в игривом настроении.



— Что я должен с ним сделать? — спросил Джордж.

— Просто отгадай, что на нем написано,— ответила Дора.— Если на него посмотреть должным образом, то расшифровать надпись будет нетрудно.

**520. Танграмы.** Читателям, быть может, будет приятно получить коллекцию поразительно реалистичных фигур и картинок, которые представляют собой комбинации из удивительных кусочков — танграмов. Вы видите квадрат, разрезанный на 7 кусков. Если вы отметите точку *B* посредине между *A* и *C* на стороне произвольного квадрата, а *D* посредине между *C* и *E* на прилежащей стороне, то направление разрезов станет очевидным. В случаях, приведенных на помещенных здесь рисунках, использовано два полных комплекта по 7 кусочков в каждом.

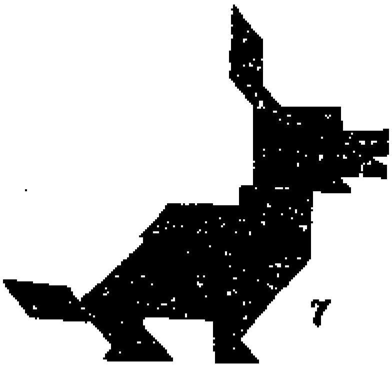



В случае *2* изображен велосипедист, *3* представляет собой человека, толкающего тачку, *4* — мальчика на ослике, *5* — машину, *6* — дом, *7* — собаку, *8* — лошадь, *9* — британского льва.

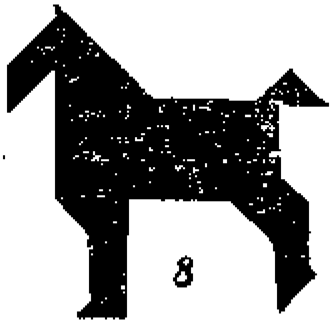
5

6

7



8



9

---

Как нетрудно заметить, возможности таких двух комплектов безграничны, и с их помощью удается с успехом изобразить много интересных предметов.

# ОТВЕТЫ

1. Чек был выписан на сумму 31 доллар 63 цента. Человек получил 63 доллара 31 цент. После утери пятицентовой монетки осталось 63 доллара 26 центов, что в два раза превышает сумму, указанную в чеке.

2. Когда человек вошел в магазин, у него было с собой 99 долларов 98 центов.

3. Наибольшая сумма равна 1 доллару 19 центам и составлена из одной монеты в полдоллара, одной монеты в четверть доллара, четырех монет по 10 центов и четырех монет по 1 центу.

4. Сначала просителей было 20 человек и каждый получил по 6 долларов. Пятнадцать человек (на 5 человек меньше) получили бы по 8 долларов каждый. Но их стало 24 (возросло на четыре человека), и каждый получил только по 5 долларов. Сумма еженедельного пожертвования составляет, таким образом, 120 долларов.

5. Группа детей состояла из трех мальчиков и трех девочек. Каждый ребенок получил по две булочки третьего сорта и по одной булочке второго сорта, общая стоимость всех булочек и составляет 7 центов.

6. Вилли-Лежебока проработал $16\frac{2}{3}$ дня и прогулял $13\frac{1}{3}$ дня. Сумма, которую он получил за проработанное время (из расчета 8 долларов в день), точно совпадает с той суммой, которую он выплатил за прогулы (из расчета 10 долларов в день).

7. Десять мешков должны содержать соответственно 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256 и 489 однодолларовых купюр. Первые девять чисел составляют геометрическую прогрессию. Если сумму этой прогрессии вычесть из 1000, то получится содержимое десятого мешка.

8. У игроков *A, B, C, D, E, F* и *G* перед началом игры было соответственно 4 доллара 49 центов, 2 доллара 25 центов, 1 доллар 13 центов, 57 центов, 29 центов, 15 центов и 8 центов. Ответ можно получить, двигаясь от конца задачи к началу, однако более простой способ таков: $7 + 1 = 8$; $2 \times 7 + 1 = 15$; $4 \times 7 + 1 = 29$ и т. д. (первые сомножители представляют собой последовательные степени двойки, то есть числа 2, 4, 8, 16, 32 и 64).

9. Абрахам (*А*) должен получить треть всей суммы, а Бенджамин (*Б*) — две трети. Пусть, например, *Б* может выкопать канаву за 2 ч и выбросить весь грунт за 4 ч. Тогда *А* выкапывает канаву за 4 ч и выбрасывает весь грунт за 8 ч. Следовательно, при рытье канавы их силы относятся, как 2 к 4, а при выбрасывании грунта — как 4 к 8 (то есть отношение сил остается неизменным). При этом *А* может выкопать канаву за то же время, за которое *Б* может выбросить весь грунт (4 ч), а *Б* может выкопать канаву за четвертую часть того времени, которое *А* тратит на выбрасывание грунта. Любые другие конкретные числа, удовлетворяющие условиям задачи, приведут к двум аналогичным отношениям сил обоих землекопов. Следовательно, Абрахаму причитается треть всей суммы, а Бенджамину — в два раза больше, то есть две трети.

10. Кэтрин, Джейн и Мери получили соответственно 122, 132 и 142 доллара, что как раз вместе и составляет общую сумму их доли наследства 396 долларов. По условию задачи Джон Смит получает столько же, сколько и его жена Кэтрин (122 доллара), Генри Снукс — в полтора раза больше своей жены Джейн (198 долларов), а Том Кроу — в два раза больше своей жены Мери (284 доллара), поэтому общая сумма наследства равна 1000 долларов. Следовательно, имена жен указаны верно.

11. Фермер купил 19 коров за 950 долларов, 1 овцу за 10 долларов и 80 кроликов за 40 долларов, что составляет в совокупности 100 голов общей стоимостью в 1000 долларов. Арифметически задачу нетрудно решить с помощью метода средних: средняя стоимость одной головы скота та же, что и стоимость одной овцы.

Алгебраически задачу можно решить следующим образом. Поскольку $x + y + z = 100$, то $\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}z = 50$.

$$
\begin{array}{rlcr}
 & 50x + 10y + \frac{1}{2}z & = & 1000 \\
- & \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}z & = & 50 \\
\hline
 & 49\frac{1}{2} + 9\frac{1}{2}y & = & 950
\end{array}
$$

(цены даются в долларах), или $99x + 19y = 1900$. Итак, задача сводится к решению неопределенного уравнения. Единственный[28] набор $x$ и $y$, удовлетворяющий этому уравнению, имеет вид $x = 19$, $y = 1$. Чтобы общее число голов равнялось 100, $z$ должно быть равно 80.

12. Все семь торговок продавали яблоки по 1 центу за 7 штук: в тех случаях, когда оставшихся яблок оказывалось менее семи, их придавали по 3 цента за штуку. Таким образом, каждая торговка выручила по 20 центов. Не оспаривая ни в коей мере остроумия этой задачи, я всегда считал ее решение неудовлетворительным из-за его неопределенности, даже если допустить, что при таком эксцентричном способе торговли можно в полном смысле слова говорить о единой «цене» на яблоки. С тем же успехом мы могли бы считать, что торговки продают яблоки по одной цене, но с разными скидками; продают яблоки разных сортов по разным ценам; продают по одной цене за корзину, продают на вес, в то время как яблоки имеют разную величину, сбавляют цену с менее свежих яблок и т. д.

В общем случае можно сказать, что п торговок, у которых имеется соответственно $na + (n - 1)$, $n(a + b) + (n - 2)$, $n(a + 2b) + (n - 3)$, ..., $n[a + b(n - 1)]$ яблок, могут продавать их кучками по $n$ штук на 1 цент, а оставшиеся яблоки — по $b$ центов за штуку, причем каждая из торговок получит выручку в $a + b(n - 1)$ центов. В случае нашей задачи $a = 2$, $b = 3$, $n = 7$.

13. Старший сын получил в наследство 55 долларов, средний — 275, младший — 385 и госпиталю была завещана сумма 605 долларов, что вместе составляет 1320 долларов.

14. В наследство оставлено 1464 доллара (немного меньше чем 1500). Доли каждого из пяти детей равны соответственно 1296, 72, 38, 34 и 18 долларам. Гонорар нотариуса составляет 6 долларов.

15. Доли Альфреда и Бенджамина равны соответственно 24 и 76 долларам. Действительно, если 8 (одна треть от 24) вычесть из 19 (одна четверть от 76), то останется 11.

16. Сумма 2500 долларов, которую внес в дело Роджерс, очевидно, составляет третью часть всего капитала, который, таким образом, до его вступления в долю равнялся 7500 долларам. Следовательно, пай Смага составлял 4500 долларов (в $1\frac{1}{2}$ раза больше, чем пай Вильямсона), а пай Вильямсона — 3000 долларов. Поскольку их паи должны стать одинаковыми, Смаг получит из взноса Роджерса 2000 долларов, а Вильямсон — 500 долларов.

17. У Томкинса, когда он вышел из дому, было с собой 2 доллара 10 центов.

18. Наименьшая сумма (в центах), которая могла быть у одного из участников вечера, должна на единицу превышать число участников. Суммы, принадлежащие остальным участникам, можно найти последовательным удвоением и вычитанием 1. Следовательно, мы получим 10, 19, 37, 73, 145, 289, 577, 1153 и 2305 центов. Пусть тот, у кого больше всего денег, начинает первым. Тогда в конце у каждого участника останется по $2^9$ (512) центов, то есть по 5 долларов 12 центов.

19. Продавец при каждом снижении сбавлял цену на $\frac{3}{8}$стоимости мотоцикла. Следовательно, при очередном снижении он предложит цену 156 долларов 25 центов.

20. Задача сводится к решению неопределенного уравнения $344x = 265y + 33$. Методы решения таких уравнений известны достаточно хорошо, поэтому мы не будем на них останавливаться. Решив уравнение, найдем, что $x = 252$ и $y = 327$. Итак, если торговец купит 252 лошади по 344 доллара и 327 волов по 265 долларов, то лошади обойдутся ему на 33 доллара дороже, чем волы.

21. Было куплено 75 индюков по 80 центов за штуку на общую сумму 60 долларов. Оставив себе 15 птиц, фермер продал оставшихся 60 индюков по 90 центов за штуку, всего на сумму 54 доллара, как и требовалось. Таким образом, он получил по 10 центов прибыли с каждой из перепроданных 60 птиц.

22. Бакалейщик отложил на черный день 168 бумажных долларов, 168 монет по полдоллара и 168 монет по четверти доллара на общую сумму 294 доллара. В каждом из шести мешков должно быть по 28 денежных знаков каждого типа; в каждом из семи мешков — по 24 и в каждом из восьми мешков — по 21 денежному знаку каждого типа.

23. Объяснение простое. Каждый способ продажи приведет к одинаковым результатам лишь в том случае, если число яблок, проданных по три штуки на цент, будет относиться к числу яблок, проданных по две штуки на цент, как 3 к 2.

Так, например, если бы у первой торговки осталось 36 яблок, а у второй 24, то выручка составила бы 24 цента вне зависимости от того, продали бы они эти яблоки сами или это сделала бы их подруга. Однако если они отдадут подруге по равному числу яблок, то потеря в выручке составит 1 цент на каждые 60 штук. Таким образом, если бы они оставили подруге по 60 штук, то потеряли бы на этом 2 цента. Если бы они дали ей 180 штук (по 90 каждая), то потери составили бы 3 цента и т. д.

Утрата одного цента в нашем случае происходит по той причине, что торговка, продававшая по три яблока на цент, выигрывает 2 цента, а та, которая продавала по два яблока на цент, теряет 3 цента.

Возможно, самым справедливым было бы поделить выручку в 24 цента, дав первой торговке $9\frac{1}{2}$ цента, а второй $14\frac{1}{2}$ цента, то есть так, чтобы каждая потеряла по $\frac{1}{2}$цента на всей операции.

24. Общая сумма взносов, выраженная в центах, равна 300 737. Это число представимо в виде произведения двух простых сомножителей: 311 и 967. Поскольку нам известно, что в Лиге Красной Смерти не более 500 членов, то число членов равно 311, а взнос составляет 967 центов, или 9 долларов 67 центов.

Других решений быть не может.

25. Цыпленок стоит 2 доллара, утка 4 и гусь 5 долларов.

26. У каждого мальчика вначале было 12 центов, и он дал по 1 центу каждой девочке. У каждой девочки было 36 центов, из которых она дала по 3 цента каждому мальчику. После этого у всех детей стало по 18 центов.

27. Костюм Мелвилла стоил 150 долларов, причем пиджак стоил 75, брюки 50 и жилет 25 долларов.

28. У Ричарда было 4 доллара, а у Джона — 2 доллара 50 центов.

29. Сотня яблок стоила 96 центов.

30. По истечении 18 лет капитал равнялся 22 781 доллару 25 центам.

31. Поскольку одна и та же фальшивая банкнота участвовала во всех операциях, то все они оказались недействительными. Следовательно, каждый остался по отношению к своему должнику в том же положении, что и до того момента, как банкир нашел банкноту. Кроме того, мясник еще должен фермеру 5 долларов за теленка[29].

32. Тому 7 лет, а Мэри 13 лет.

33. Миссис Вильсон 39 лет, Эдгару — 21, Джеймсу — 18, Джону — 18, Этель — 12, Дейзи 9 лет. Ясно, что Джеймс и Джон — одногодки.

34. Де Морган родился в 1806 г. Когда ему было 43 года, то текущий год равнялся квадрату его возраста — 1849. Дженкинс родился в 1860 г. Ему было $5^2 + 6^2$ (61) лет в $5^4 + 6^4$ (1921) году. В $2 \times 31^2$ (1922) году ему исполнилось $2 \times 31$ (62) года. И, наконец, его возраст был равен $3 \times 5$ (15) годам в $3 \times 5^4$ (1875) году.

35. Больным было соответственно 64 и 20 лет.

36. Демохар прожил 60 лет.

37. Отцу и матери было по 36 лет, а трое детей были шестилетними близнецами. Суммарный возраст равен как раз 90 годам, и все остальные условия задачи также выполнены.

38. Майку сейчас $1\frac{16}{21}$, Пэту $29\frac{16}{21}$, и Бидди $24\frac{20}{21}$ года. Когда Пэт под окном своей гостиной построил свинарник ($7\frac{9}{21}$ года назад), Майку было $3\frac{7}{21}$, Пэту $22\frac{6}{21}$ и Бидди $17\frac{11}{21}$ года. Через $11\frac{11}{21}$ года Майку будет $22\frac{6}{21}$ (столько, сколько было Пэту, когда он построил свинарник). Пэту будет $41\frac{5}{21}$ и Бидди $36\frac{10}{21}$ года, что в сумме составит 100 лет.

39. 30 и 12 лет.

40. Мальчику 10, а сестре 4 года.

41. Детям было соответственно 2, 5, 8, 11, 14, 17, 20, 23, 26 лет, а отцу 48 лет.

42. Человек родился в 1856 г. и умер в 1920 г., достигнув возраста 64 лет. Пусть $x$ — возраст в момент смерти. Тогда $29x$ — дата рождения. Дата рождения плюс возраст составят дату смерти: $29x + x = 30x$. Далее, из условия задачи ясно, что человек был жив в 1900 г. и умер к 1930 г. Поэтому смерть произошла между этими датами, а поскольку дата равна $30x$:, то она делится на 30. Следовательно, этой датой может быть только 1920 г., что при делении на 30 дает 64. Итак, в 1900 г. человеку было 44 года.

43. Читатель родился в полдень 19 февраля 1873 г. и к полудню 11 ноября 1928 г. прожил по 10 176$\frac{1}{2}$ дня в каждом веке. Разумеется, XIX в. закончился в полночь 31 декабря 1900 г., который не был високосным, а 11 ноября 1928 г. читателю исполнилось 55 лет и (приблизительно) 9 месяцев.

44. Между рождением Клеопатры и смертью Боадицеи прошло 129 лет, но, поскольку их суммарный возраст равнялся всего лишь 100 годам, был период времени в 29 лет, когда ни одной из них не было на свете (то есть период между смертью Клеопатры и рождением Боадицеи). Следовательно, Боадицея родилась через 29 лет после смерти Клеопатры, последовавшей в 30 г. до н. э., а именно в 1 г. н. э.

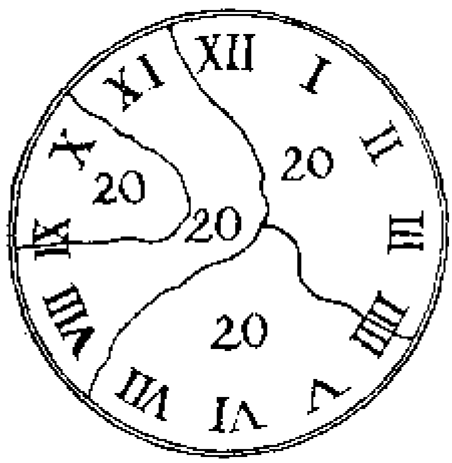
45. Робинсону 32 года, его брату — 34, сестре — 38, а матери 52 года.

46. Если бы это были обыкновенные часы, то они показывали бы 4 ч 23$\frac{1}{13}$ мин. Но поскольку минутная стрелка двигалась в направлении, противоположном часовой, то истинное время составляло 4 ч 36$\frac{12}{13}$ мин. Чтобы получить истинное время, надо из 60 вычесть то количество минут, которое показывают часы.

47. Это бывает в 9 ч 6$\frac{3}{4}$ мин, когда часовая стрелка проходит путь в 45$\frac{9}{16}$ (6$\frac{3}{4}$ в квадрате) минутного деления (после XII). Если бы мы допустили дроби, меньшие одной минуты, то нашлось бы еще одно решение, а именно: 12 ч 5 с ($\frac{1}{12}$ мин).

48. Впервые это произойдет в 12 ч 5$\frac{5}{143}$ мин, что можно будет неправильно истолковать (из-за идентичности стрелок) как 1 ч $\frac{60}{143}$мин.

49. Если циферблат треснет так, как показано на рисунке, то сумма цифр в каждой из четырех частей будет равна 20. Искушенный читатель сразу заметит, что поскольку три десятки (римская цифра X имеется ввиду и в числах IX и XI) соседствуют друг с другом, то две из них должны быть объединены в одной части. Это можно сделать двумя способами.




[В первом издании своих занимательных задач Дьюдени дал воистину дьявольское решение этой головоломки: IX надо было рассматривать вверх ногами и истолковывать как XI[30]. (Именно так и делается на исходном рисунке.) Позже автор привел решение, показанное здесь. Существует еще двенадцать решений. Читателю предлагается самому отыскать их.

Предполагается, что римские цифры неподвижно прикреплены к ободку циферблата. Трещина может пересекать цифру, как показано на рисунке, но не может окружить какую-либо цифру, отделив ее от ободка.— М. Г.]

50. Вечер начался в 10 ч 59$\frac{83}{143}$ мин, а когда гости посмотрели на стрелки, поменявшиеся местами, те показывали 11 ч 54$\frac{138}{143}$ мин.

51. Истинное время равнялось 2 ч $5\frac{5}{11}$ мин.

52. В 3 ч $23\frac{1}{13}$ мин.

53. В 3 ч $41\frac{7}{13}$ мин.

54. Для того чтобы угол между стрелками был прямым, минутная стрелка должна быть точно на 15 мин впереди или сзади часовой. Каждое из этих положений встретится за 12 ч 11 раз, то есть через каждые 1 ч $5\frac{5}{11}$ мин. Если восемь таких промежутков времени пройдет после 9 ч, то часы будут показывать 5 ч $43\frac{7}{11}$ мин. С другой стороны, если после 3 ч пройдет два таких промежутка, то мы получим 5 ч $43\frac{7}{11}$ мин. Это и есть те два момента времени, которые требовалось найти в задаче, причем второй момент наступит, разумеется, раньше первого.

55. В 8 ч $23\frac{71}{143}$ мин и в 4 ч $41\frac{137}{143}$ мин. В головоломках с часами мы исходим из предположения, что на часах можно определить дробные доли минуты.

56. До вершины холма $6\frac{3}{4}$ км. Вверх Вилли-Лежебока взбирался $4\frac{1}{2}$ ч, а вниз спустился за $1\frac{1}{2}$ ч.

57. Поскольку человек проходит 27 шагов за то время, за которое автомобиль проезжает расстояние в 162 шага, ясно, что автомобиль движется в 6 раз быстрее человека. Человек движется со скоростью $3\frac{1}{2}$ км/ч; следовательно, скорость автомобиля 21 км/ч.

58. Если бы каждый бегун, достигнув верхней площадки лестницы, сделал целое число полных шагов и неукороченный последний шаг, то наименьшим возможным числом ступенек было бы, конечно, 60 ($3 \times 4 \times 5$). Но из исходного рисунка видно, что у А, шагающего через 3 ступеньки, последний шаг будет длиной лишь в одну ступеньку. Б, перепрыгивающий через 4 ступеньки, на последнем шаге преодолеет всего лишь 3 ступеньки. И К, перепрыгивающему по 5 ступенек, на последнем шаге останется перескочить только через 4 ступеньки. Следовательно, нам надо найти наименьшее число, которое при делении на 3 дает в остатке 1, при делении на 4 дает 3 и при делении на 5 дает остаток, равный 4. Это число равно 19. Таким образом, лестница содержит 19 ступенек, из которых только 4 не изображены на рисунке.

59. Надо заметить (и в этом ключ к решению), что человек из Б. проходит 7 км за то же время, за которое человек из Э. проходит 5 км. Пусть, к примеру, расстояние между городами 24 км, тогда они встретились на расстоянии 14 км от Э. Человек из Э. двигался со скоростью $3\frac{3}{7}$ км/ч, а человек из Б.— со скоростью $4\frac{4}{5}$ км/ч. Оба закончили свой путь в 7 час. вечера.

60. Велосипедист проедет один километр за $3\frac{3}{7}$ мин, или со скоростью $\frac{7}{24}$км/мин. Ветер изменяет его скорость на $\frac{1}{24}$км/мин. Следовательно, по ветру он движется со скоростью $\frac{8}{24}$км/мин, а против ветра — со скоростью $\frac{6}{24}$км/мин, так что 1 км он проезжает за 3 и за 4 мин соответственно, как и утверждалось.

61. За $3\frac{9}{17}$ мин. Команда в стоячей воде проходит $\frac{1}{5}$всего расстояния в минуту, а течение — $\frac{1}{12}$всего расстояния в минуту. Разность и сумма этих дробей равны соответственно $\frac{7}{60}$и $\frac{17}{60}$. Следовательно, путь против течения займет $\frac{60}{7}$(или $8\frac{4}{7}$) мин, а по течению $\frac{60}{17}$(или $3\frac{9}{17}$) мин.

62. Если я прошагаю 26 ступенек; то мне потребуется на спуск 30 с, а если 34, то — 18 с. Умножая 30 на 34 и 26 на 18, мы получим 1020 и 468, разность между этими числами равна 552. Разделив ее на разность между 30 и 18 (то есть на 12), мы получаем в ответе 46, число ступенек на эскалаторе, который движется со скоростью 1 ступенька за $1\frac{1}{2}$ с. Скорость, с которой я двигаюсь по эскалатору, роли не играет, поскольку ступенька, с которой я схожу, достигает платформы в один и тот же момент вне зависимости от того, что я делал до этого.

63. Пусть Андерсон проедет $11\frac{1}{9}$ км, бросит велосипед и оставшуюся часть пути пройдет пешком. Браун будет идти пешком до тех пор, пока не подберет велосипед, а затем проедет на нем оставшуюся часть пути. При этом он прибудет в пункт назначения одновременно с Андерсоном, и весь путь займет у них 3 ч 20 мин.

Можно также разделить 20 км на 9 участков по $2\frac{2}{9}$ км каждый, причем Андерсон должен будет ехать первым. В этом случае Андерсон проедет каждый из своих 5 участков за $\frac{2}{9}$ч и пройдет пешком каждый из оставшихся 4 участков за $\frac{5}{9}$ч, затратив на весь путь $3\frac{1}{3}$ ч. Браун проедет каждый из своих 4 участков за $\frac{5}{18}$ч и пройдет пешком каждый из оставшихся 5 участков за $\frac{4}{9}$ч, затратив на весь путь также $3\frac{1}{3}$ ч. Расстояния, которые проедут Андерсон и Браун соответственно, относятся друг к другу как 5 к 4, а расстояния, которые они пройдут пешком, как 4 к 5.

64. Андерсон проезжает $7\frac{11}{27}$, Браун $1\frac{13}{27}$, а Картер $11\frac{3}{27}$ км, что в сумме составляет 20 км. Они могут ехать в любом порядке, но при этом каждый должен воспользоваться велосипедом только один раз, а второй ездок должен идти пешком и до и после езды. Путешествие займет у каждого $3\frac{8}{9}$ ч, и, следовательно, все прибудут в пункт назначения одновременно.

65. Аткинс везет Кларка 40 км и высаживает, чтобы оставшиеся 12 км тот прошел пешком. Затем он возвращается назад, в 16 км от старта подбирает Болдуина и везет его до конца пути. Все трое тратят на дорогу 5 ч. Другое решение состоит в том, что Аткинс сначала 36 км везет Болдуина и возвращается за Кларком, прошедшим к этому времени 12 км. Мотоцикл в обоих случаях проехал по 100 км, в том числе 24 км без пассажиров.

66. Проделанное связным расстояние равно квадратному корню из удвоенного квадрата 40, прибавленному к 40, что составляет $96{,}568$ км, или приблизительно $96\frac{1}{2}$ км.

67. Относительная скорость встречных поездов составляет 600 футов в 5 с, или $81\frac{9}{11}$ миль/ч. Когда поезда движутся в одном направлении, то их относительная скорость составляет 600 футов в 15 с, или $27\frac{3}{11}$ миль/ч. Отсюда мы получаем, что скорость более быстрого поезда равна $54\frac{6}{11}$ миль/ч, а скорость более медленного — $27\frac{3}{11}$ миль/ч.

68. Существуют два расстояния, удовлетворяющих условию задачи,— 210 и 144 мили. Последней случай исключен, так как в условии сказано, что поезда движутся со скоростями, «не слишком отличающимися от обычных». (Если бы мы приняли расстояние в 144 мили, то А прошел бы 140 миль за то же время, за которое $B$ и $D$ прошли бы 4 мили. Так что если бы последние шли со скоростью 2 миль/ч, то первый делал бы 70 миль/ч — скорость, которую, конечно, нельзя назвать «не слишком отличающейся от обычных»!) Если расстояние равно 210 милям, то окажется, что скорости $B$ и $D$ в два раза меньше скорости $A$, а скорость $C$ составляет $\frac{3}{4}$скорости $A$, что выглядит вполне разумным.

69. Расстояние от Англчестера до Клинкертона составляет 200 миль. Поезд прошел 50 миль со скоростью 50 миль/ч и 150 миль со скоростью 30 миль/ч. Если бы поломка произошла на 50 миль дальше, то поезд прошел бы 100 миль со скоростью 50 миль/ч и 100 миль со скоростью 30 миль/ч.

70. Когда Браун оставил позади всего лишь $\frac{1}{6}$, или $\frac{4}{24}$, всей дистанции, Томкинс уже прошел $\frac{5}{6}$минус $\frac{1}{8}$, или $\frac{17}{24}$, всей дистанции. Следовательно, скорость Томкинса в $\frac{17}{4}$раза больше скорости Брауна. Брауну осталось пробежать $\frac{5}{6}$, а Томкинсу — только $\frac{1}{6}$всей дистанции. Следовательно, Браун, чтобы прибежать хотя бы одновременно, должен развить скорость, в 5 раз превышающую скорость Томкинса, то есть в 5 раз большую $\frac{17}{4}$, или бежать в $\frac{85}{4}$раза быстрее, чем он бежал первоначально. Однако вопрос ставился не «во сколько раз», а «на сколько», а «в $\frac{85}{4}$раза быстрее» — это все равно, что быстрее на $\frac{81}{4}$первоначальной скорости Брауна. Правильным ответом, следовательно, будет: на $20\frac{1}{4}$ первоначальной скорости быстрее, хотя похоже на то, что такая рекомендация практически неосуществима.

71. Утверждение о равенстве средних скоростей ошибочно. В действительности средние скорости кораблей не равны. Первый корабль проходит милю за $\frac{1}{12}$ч в одном направлении и за $\frac{1}{8}$ч в обратном. Полусумма этих дробей равна $\frac{5}{48}$. Следовательно, средняя скорость, с которой первый корабль проходит 400 миль, равна 1 миле за $\frac{5}{48}$ч. Средняя скорость второго корабля составляет 1 милю за $\frac{1}{10}$ч.

72. Расстояние между двумя пунктами равно 18 км. Точки встречи отстоят от $A$ и $B$ на 10 и 12 км соответственно. Умножьте 10 (первое расстояние) на 3 и вычтите второе расстояние — 12. Что может быть проще? Испробуйте другие расстояния до точек встречи (следя за тем, чтобы первое расстояние составляло более $\frac{2}{3}$второго) и вы обнаружите, что это правило действует с неизменным успехом.

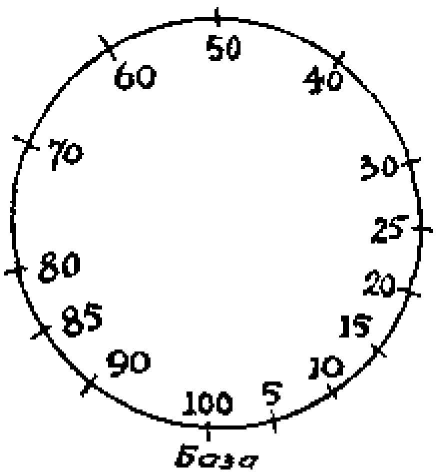
73. Собака бежала со скоростью 16 км/ч. Ключом к решению задачи служат следующие рассуждения. Расстояние, которое человеку осталось пройти рядом с собакой, составляло 81 м, или $3^4$ (пес возвращался 4 раза), а длина дорожки равнялась 625 м, или $5^4$. Поэтому разность скоростей (выраженных в км/ч) человека и собаки (то есть 12) и сумма их скоростей (20) должны находиться в отношении $3 : 5$.

74. Вполне очевидно, что Бакстер догонит Андерсона через один час, поскольку к этому времени они пройдут по 4 км в одном направлении. Далее, скорость собаки составляет 10 км/ч; следовательно, за этот час она пробежит 10 км! Когда эту головоломку предложили одному французскому профессору математики, тот воскликнул: «Mon Dieu, quelle srerie!»,[31] совершенно не заметив, как просто она решается.

75. Девять исследователей $A$, $B$, $C$, $D$, $E$, $F$, $G$, $H$, $J$ проезжают 40 миль, затратив на это по полному баку горючего. Затем $A$ передает по 1 галлону остальным восьми участникам и поворачивает назад, причем у него остается 1 галлон на обратную дорогу. Остальные восемь участников едут еще 40 миль, затем $B$ передает по 1 галлону семи другим исследователям. Двух галлонов ему как раз хватает на обратный путь. Семеро исследователей проезжают еще 40 миль, затем $C$ передает остальным шести по 1 галлону и возвращается домой, затратив на обратный путь 3 галлона. Шестеро исследователей проезжают еще 40 миль, после чего $D$ передает каждому по 1 галлону и возвращается назад. Пятеро оставшихся проезжают еще 40 миль, затем $E$ дает каждому по 1 галлону и возвращается назад. Теперь уже четверо исследователей продвигаются еще на 40 миль в глубь пустыни, $F$ раздает каждому по 1 галлону и возвращается назад. $G$, $H$, $J$ преодолевают еще 40 миль, $G$ дает каждому по 1 галлону и едет назад. $H$ и $J$ проезжают еще 40 миль, $H$ отдает 1 галлон $J$ и возвращается. Наконец, последний путешественник $J$ проезжает еще 40 миль, располагая 9 галлонами на обратный путь. Таким образом, $J$ достигает пункта, расположенного в 360 милях от начального. Это наибольшее расстояние, которое можно проехать по прямой при заданных условиях.

76. Уокинхолм складывает 5 рационов на 90-мильной отметке (см. рисунок) и возвращается на базу (5 дней). Затем он оставляет 1 рацион на отметке 85 миль и возвращается к отметке 90 миль (1 день). Один рацион профессор оставляет на отметке 80 миль и возвращается снова к отметке 90 миль (1 день). Переносит 1 рацион на отметку 80 миль, возвращается к отметке 85 миль, подбирает оставшийся там 1 рацион и переносит его на отметку 80 миль (1 день). «Забрасывает» 1 рацион на отметку 70 миль и возвращается к отметке 80 миль (1 день), затем возвращается на базу (1 день). Таким образом, на отметках 70 и 90 миль остается по 1 рациону. Уокинхолм переносит 1 рацион на отметку 5 миль и возвращается на базу (1 день). Если ему нужно пройти 20 миль, то он может это сделать, дойдя до отметки 10 миль и вернувшись на базу. Переносит 4 рациона на отметку 10 миль и возвращается на базу (4 дня). Оставляет 1 рацион на отметке 10 миль и возвращается к отметке 5 миль, подбирает оставленный там 1 рацион и переносит его к отметке 10 миль (1 день). Переносит 2 рациона на отметку 20 миль и возвращается к отметке 10 миль (2 дня). Переносит 1 рацион к отметке 25 миль и возвращается к отметке 20 миль (1 день). Оставляет 1 рацион на отметке 30 миль, возвращается к отметке 25 миль, забирает оставленный там 1 рацион и переносит его на отметку 30 миль (1 день). Идет к отметке 70 миль (2 дня). Идет на базу ($1\frac{1}{2}$ дня). Всего $23\frac{1}{2}$ дня.

---

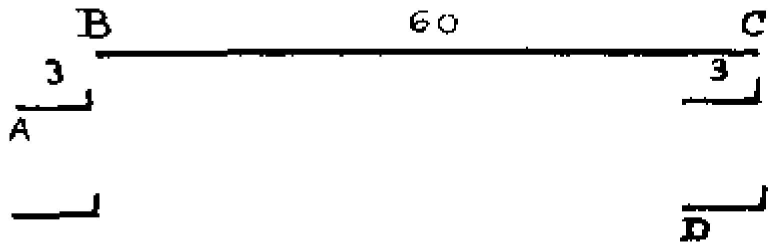


Предпринимались попытки уменьшить это время, но все они были основаны на трюках, так или иначе запрещенных. Например, Уокинхолма «вынуждали» оставлять не целый суточный рацион, а лишь его часть, совершать марш-бросок или съедать суточный рацион перед уходом с очередной отметки, чтобы он мог нести еще два суточных рациона и т. п. В последнем случае Уокинхолм на самом деле нес бы три рациона: один в желудке и два за плечами!

Если бы маршрут профессора пролегал по пустыне, то кратчайшее время равнялось бы 86 дням, а поступать следовало бы так.

Сложить 42 рациона в 10 милях от базы, вернуться на базу (42 дня). Отнести 1 рацион на отметку 15 миль, вернуться к первому складу в 10 милях от базы (1 день). Оставить 20 рационов в 20 милях от базы и вернуться к складу, расположенному в 10 милях от базы (20 дней). Отнести 1 рацион на расстояние 20 миль от базы и вернуться в точку, отстоящую на 15 миль от базы, взять ранее оставленный там 1 рацион и перенести его к отметке 20 миль (1 день). Перенести 10 рационов в точку, отстоящую на 30 миль от базы, и вернуться к отметке 20 миль (10 дней). Отнести 1 рацион к отметке 35 миль и вернуться к отметке 30 миль (1 день). Отнести 4 рациона на отметку 40 миль и вернуться к отметке 30 миль (4 дня). Отнести 1 рацион к отметке 40 миль и вернуться к отметке 35 миль. Взять там 1 рацион и перенести его к отметке 40 миль (1 день). Отнести 2 рациона в точку, отстоящую на 50 миль от базы, и вернуться к отметке 40 миль (2 дня). Отнести 1 рацион к отметке 55 миль и вернуться к отметке 50 миль (1 день). Перенести 1 рацион к отметке 60 миль и вернуться к отметке 55 миль. Взять там 1 рацион и перенести его на отметку 60 миль (1 день). Совершить оттуда переход до конечного пункта маршрута (2 дня). Всего — 86 дней.

77. Если человек, выйдя из $A$, пройдет $1\frac{2}{3}$ км со скоростью 5 км/ч, то на это он затратит 20 мин. Обратный путь со скоростью 4 км/ч займет у приятелей 25 мин. Таким образом, человек догонит приятеля-инвалида в 12.35. Последний к тому времени проедет $\frac{2}{3}$ км за 35 мин со скоростью $1\frac{1}{7}$ км/ч.




78. Предположим, что поезд идет в течение часа и имеет невероятную длину 3 км. Тогда (см. рисунок) за это время он пройдет от $B$ до $C$ 60 км, а пассажир переместится от $A$ до $C$, или на 63 км. С другой стороны, если бы пассажир шел от паровоза в хвост поезда, то поезд успел бы пройти расстояние от $B$ до $C$ (снова 60 км), в то время как пассажир переместился бы лишь на расстояние от $B$ до $C$, то есть на 57 км. Следовательно,в первом случае скорость пассажира относительно железнодорожного полотна составляет 63, а во втором — 57 км/ч[32].

79. Поскольку поезд идет 5 ч, разделим путь на 5 равных интервалов. Когда леди выезжает из Вюрцльтауна, 4 встречных поезда уже находятся в пути, а пятый лишь отправляется со станции. Каждый из этих 5 поездов она встретит. Когда леди проедет $\frac{1}{5}$ пути, из Мадвилля отправится новый встречный поезд, когда она проедет $\frac{2}{5}$ пути — еще один, $\frac{3}{5}$ — еще один, $\frac{4}{5}$ — еще один и, наконец, когда она прибудет в Мадвилль, оттуда как раз будет отправляться очередной, пятый, поезд. Если мы примем, как и следует сделать, что она не встречает «по пути» ни этот последний поезд, ни тот, который прибыл в Вюрцльтаун, когда ее поезд отправлялся оттуда, то по дороге из Вюрцльтауна в Мадвилль леди повстречает 9 поездов.

80. Слуга должен нести чемодан $1\frac{1}{3}$ км и передать его джентльмену, который донесет чемодан до станции. Садовник должен нести другой чемодан $2\frac{2}{3}$ км, а потом отдать его слуге, который и донесет чемодан до

станции. Таким образом, каждый из них пронесет один чемодан $2\frac{2}{3}$ км — иначе говоря, труд, который затратят на переноску багажа джентльмен, слуга и садовник, будет одинаковым.

81. Пусть $n$ — число ступенек эскалатора; время, которое требуется, чтобы одна ступенька исчезла внизу, примем за единицу.

Тротмен проходит 75 ступенек за $n$ - 75 единиц времени, или со скоростью 3 ступеньки за ($n$ - 75)/25 единиц, времени. Следовательно, Уокер проходит 1 ступеньку за ($n$ - 75)/25 единиц времени. Но он же проходит и 50 ступенек за $n$ - 50 единиц времени, или 1 ступеньку за ($n$ - 50)/50 единиц времени. Следовательно, $(n - 50)/50 = (n - 75)/25$, откуда $n = 100$.

82. Путешествие длилось $10\frac{5}{41}$ ч. Аткинс прошел пешком $5\frac{35}{41}$ км; Браун — $13\frac{27}{41}$ км, а ослик, принадлежавший Крэнби, пробежал в общей сложности $80\frac{40}{41}$ км. Надеюсь, ослику после такого подвига дали хорошенько отдохнуть.

83. Велосипедисты $A$, $B$, $C$, $D$ могут проехать один километр соответственно за $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{9}$, $\frac{1}{12}$и $\frac{1}{16}$ч. Следовательно, они совершают полный круг за $\frac{1}{18}$, $\frac{1}{27}$, $\frac{1}{36}$и $\frac{1}{45}$ч и, таким образом, в первый раз встречаются через $\frac{1}{9}$ч (или, что то же, через $6\frac{2}{3}$ мин). Четыре раза по $6\frac{2}{3}$ мин составит $26\frac{2}{3}$ мин. Поэтому четвертая встреча всех четырех велосипедистов произойдет в 12 ч 26 мин 40 с.

84. Брукс догонит Картера через $6\frac{2}{3}$ мин.

85. 1) Муха встретит $B$ в 1 ч 48 мин.

2) Определять расстояние, которое пролетит муха, не нужно. Это слишком трудная задача. Зато можно просто найти время, когда бы могли столкнуться автомобили,— 2 ч. На самом деле муха пролетает (в километрах):

$$\frac{270}{1} + \frac{270}{10} + \frac{270}{100} + \ldots \text{ до бесконечности;}$$

сумма этой бесконечно убывающей геометрической прогрессии равна 300 км.

86. Наименьшее общее кратное чисел 2, 3, 4, 5, 6 и 7 равно 420. Вычитая из него 1, получаем 419 — возможное число ступенек. Кроме того, условиям задачи будут удовлетворять числа, полученные последовательным прибавлением чисел, кратных 420, к 419. Следовательно, число ступенек в эскалаторе может быть равно 419, 839, 1259, 1679 и т. д. Поскольку интересующий нас эскалатор содержит меньше 1000 ступенек и на линии есть еще один эскалатор с меньшим числом ступенек, обладающий теми же свойствами, что и первый, то эскалатор на «Керли-стрит» содержит 839 ступенек.

87. Молодые люди едут втрое быстрее, чем идут пешком; следовательно, $\frac{3}{4}$всего времени им необходимо затратить на обратный путь и только V4 ехать на автобусе. Таким образом, они будут ехать в течение 2 ч, покрыв расстояние в 18 км, и идти пешком 6 ч. Возвратятся они ровно через 8 ч после отъезда.

88. Водитель должен провезти четверых солдат 12 км и высадить их в 8 км от пункта назначения. Затем он должен вернуться на 8 км и подобрать еще четверых солдат (из восьми), которые к тому времени там окажутся, провезти их 12 км и высадить в 4 км от пункта назначения. Вернувшись затем на 8 км за остальными солдатами, которые к тому времени успеют пройти 8 км от исходного пункта, везти их 12 км до конца. Все солдаты прибудут на место назначения одновременно, причем автомобиль пройдет 52 км за $2\frac{3}{5}$ ч. Следовательно, солдаты прибудут на место в 2 ч 36 мин.

89. Расстояние между пунктами составляет 300 км.

90. Расстояние равно $13\frac{1}{8}$ км; так что в город мистер Уилкинсон идет $2\frac{5}{8}$ ч, а возвращается $4\frac{3}{8}$ ч, затратив на путь в общей сложности 7 ч.

91. Расстояние от Лондона до Баглминстера составляет 72 км.

92. Робинсон догонит Брауна через 12 мин после старта.

93. Для решения задачи не требуется алгебраических выкладок, не нужно знать и расстояние между городами. Отправим оба поезда от места встречи, где бы она ни произошла, обратно с теми же скоростями. Тогда за час первый поезд пройдет 60 км, а второй 40 км. Поэтому расстояние между поездами за час до встречи равно 60 + 40, или 100 км.

94. Через 20 мин после начала путешествия Пэт сообщил, что пройдена половина того расстояния, которое оставалось до Пигтауна. Следовательно, путь от Богули до Пигтауна занимает 1 ч.

Отъехав от Пигтауна на 5 миль, Пэт и полковник Крэкхэм оказались вдвое ближе к Болифойну, чем к Пигтауну. Еще через час они достигли Болифойна. Следовательно, путь от Пигтауна до Болифойна занимает 3 ч. Поскольку 5 миль попутчики проехали за 2 ч, то за 4 ч они проезжали 10 миль. Следовательно, искомое расстояние 10 миль.

95. Второй человек, увидев, что его приятель повернулся и идет ему навстречу, стал пятиться и прошел таким образом 200 м. Конечно, его поведение было весьма эксцентрично, но он поступил именно так, и это единственный ответ на вопрос задачи. В результате приятели смогли, глядя друг на друга, двигаться по прямой в одном направлении.

96. Если бы весы были неверными из-за различного веса их чашек, то истинный вес пудинга составлял бы 154 г; первое показание весов дало бы 130, а второе 178 г. Половина суммы показаний весов (среднее арифметическое) равна 154. Но из рисунка к условию задачи видно, что чашки весят поровну и что ошибка проистекает из-за разницы в длине плеч коромысла[33]. Следовательно, показания весов равнялись 121 и 169 г, а истинный вес составляет 143 г. Извлекая квадратный корень из произведения показаний весов, мы получим 143 (среднее геометрическое). Длины плеч весов относятся как 11 к 13.

Если мы обозначим через x истинный вес, то для разобранных случаев получим соответственно следующие уравнения:

$$\frac{\left(\frac{9}{11}x+4\right)+\left(\frac{9}{11}x+52\right)}{2}=x,\text{ откуда } x=154,$$

$$\sqrt{\left(\frac{9}{11}x+4\right)\cdot\left(\frac{9}{11}x+52\right)}=x,\text{ откуда } x=143.$$

97. Поскольку одна банка весит 1 кг, то, глядя на левую часть рисунка, мы видим, что 8 пакетов уравновешивают 3 кг и, следовательно, один пакет уравновешивает $\frac{3}{8}$кг. Во втором случае один пакет уравновешивает 6 кг. Умножив $\frac{3}{8}$на 6, мы получим $\frac{9}{4}$. Извлекая затем квадратный корень из $\frac{9}{4}$, получаем $\frac{3}{2}$, или $1\frac{1}{2}$ кг. Это и есть истинный вес одного пакета. Значит, восемь пакетов весят 12 кг.

98. Важно отметить, что отец, ребенок и собака вместе весили 180 фунтов, как это показано на рисунке. Далее, разность между 180 и 162 равна 18, что совпадает с удвоенным весом собаки. Значит, собака весит 9, а ребенок 30 фунтов, так как, если из 30 фунтов вычесть 70% этого веса, получится ровно 9.

99. На первых весах мы видим, что яблоко и 6 слив равны по весу груше, поэтому на вторых весах можно, не нарушая равновесия, заменить грушу на яблоко и 6 слив. Затем можно убрать по 6 слив с каждой чашки и обнаружить, что 4 яблока весят столько же, сколько и 4 сливы. Следовательно, одно яблоко равно по весу одной сливе. Заменяя на первых весах яблоко сливой, мы получаем, что одна груша равна по весу 7 сливам. Как пишут в старых учебниках: ч. т. д.

100. 1. Положив на разные чашки гири в 5 и 9 фунтов, отвесить 4 фунта. 2. С помощью 4 фунтов отвесить еще 4 фунта. 3. Отвесить в третий раз 4 фунта. 4. Отвесить в четвертый раз 4 фунта, причем остаток будет также равен 4 фунтам. 5.—9. Поделить с помощью весов каждую порцию в 4 фунта на две равные части.

102. Решениями будут числа 39 157 и 57 139. В каждом случае произведение чисел 39 и 57 минус 1 равно 2222.

103. Если квадрат целого числа оканчивается повторяющимися цифрами, то этими цифрами могут быть лишь 4, как в случае $144 = 12^2$. Но число таких повторяющихся цифр не может превосходить трех; следовательно, ответом служит число $1444 = 38^2$.

104. Расположив цифры следующим образом:

$$\begin{array}{r} 173 \\ +\;\;\;4 \\ \hline 177 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 85 \\ +\;92 \\ \hline 177 \end{array}$$

мы увидим, что обе суммы равны.

105. Умножив 273 863 на 365, получим 99 959 995. Заметим, что любое восьмизначное число, у которого первые четыре цифры повторяются, делится без остатка на 73 (и на 137). Кроме того, если такое число оканчивается на 5 или 0, то оно делится также и на 365 (или на 50 005). Зная эти факты, можно сразу же выписать ответ.

106. Разделим 7 101 449 275 362 318 840 579 на 7 «уголком», как нас учили в школе. При делении 7 на 7 получим 1, следующая цифра 1 даст в частном 0, затем снова 1 и т. д., пока мы не дойдем до конца. Сверив частное с делимым, мы увидим, что оно действительно получается при переносе первой семерки делимого в конец. Частное, получающееся при перестановке в конец первой цифры делимого, можно найти для любого делителя и любой цифры.

Очень интересно исследовать задачу в общем виде.

Выбрав делитель равным 2, получим число 2-10-52-6-31 578-94-736-8-4-.

Далее цикл замыкается. Черточки стоят в тех местах, где при делении на 2 нет остатка. Заметьте, что непосредственно за черточкой следуют цифры 1, 5, 6, 3, 9, 7, 8, 4, 2. Следовательно, если необходимо, чтобы число начиналось с 8, то я возьму 842 105 и т. д., отправляясь от цифры 8, стоящей после черточки. Если имеется полный цикл, как в этом случае, а также в случае делителей, равных 3, 6 и 11, то количество цифр искомого числа равно делителю, умноженному на 10 минус 2. Если вы возьмете в качестве делителя 4, то получите пять отдельных циклов. Так, 4-10 256- даст вам числа, начинающиеся с 4 или 1; 20-512-8- — с 2, 5 или 8; 717 948- с 7; 3076-92 — с 3 или 9; 615 384- даст числа, начинающиеся с 6.

Для некоторых делителей, например для 5 и 9, хотя они и порождают несколько отдельных циклов, требуется такое же количество цифр, как если бы они порождали один полный цикл. Наш делитель 7 порождает три цикла: один, показанный выше и дающий числа, у которых первой цифрой служат 7, 1 или 4; второй — для чисел, начинающихся с 5, 8 или 2; третий — с 6, 9 или 3.

107. Мы можем разделить 857 142 на 3, просто перенеся 2 из конца в начало, либо разделить 428 571, перенеся 1.

108. Вот как можно выразить число 64 с помощью двух четверок и арифметических знаков:

$$\sqrt{\left(\sqrt{\sqrt{4}}\right)^{4!}} = \sqrt{\left(\sqrt{2}\right)^{24}} = \sqrt{2^{12}} = \sqrt{4096} = 64.$$

[Интерес к задаче «Четыре четверки» с момента ее опубликования периодически оживлялся. Об относительно недавней дискуссии, посвященной этой задаче, я писал в январском номере журнала *Scientific American* за 1964 г. (см. также заметку в разделе ответов в следующем номере того же журнала). Таблицу, в которой с помощью четырех четверок выражены все числа от 1 до 100, можно найти в книгах: L. Harwood Clarke «Fun With Figures» (N. Y., 1954, pp. 51—53) и Angela Dunn «Mathematical Baffers» (N. Y., 1964, pp. 5—8).

Число 64 легко выразить как с помощью четырех четверок: $(4 + 4) \times (4 + 4)$, так и с помощью трех четверок: $4 \times 4 \times 4$. М. Бикнел и В. Е. Хоггат в журнале *Recreational Mathematics Magazine* (**14**, 1964) указывают 64 способа, которыми можно выразить 64 с помощью четырех четверок.

Кнут в журнале *Mathematics Magazine* (**37**, 1964, pp. 308—310) показал, как представить 64, используя только одну четверку и три рода символов: знак квадратного корня, знак факториала и скобки. Чтобы выразить таким образом число 64, требуется 57 знаков квадратного корня, 9 знаков факториала и 18 скобок. С помощью вычислительной машины удалось выяснить, что все положительные целые числа, не превосходящие 208, можно выразить аналогичным образом. Кнут высказывает предположение, что этот метод применим ко всем целым положительным числам.

Дьюдени частично прав в своем утверждении относительно 113. Насколько мне известно, никто не сумел представить это число без использования весьма нестандартных символов или чрезвычайно сложных процедур, вроде той, которую предложил Кнут.— *М. Г.*]

109. Какие символы считать допустимыми — дело вкуса, но я бы лично предпочел обойтись без всяких log.

Вот несколько решений:

$$25 = 5^2,$$

$$36 = 6 \times 3!,$$

$$64 = \sqrt{4^6}, \text{ или } \left(\sqrt{4}\right)^6.$$

110. Если мы умножим 497 на 2, то получим 994. Если же мы сложим эти два числа, то получим 499. Цифры в обоих случаях одни и те же. Аналогичный результат справедлив для 263 и 2. Мы получим соответственно 526 и 265.

[Г. Линдгрен указывает, что, вводя девятки после первой цифры, можно получить два ответа при любом желаемом числе цифр: 4997 + 2 = 4999; 499 × 2 = 9994; 2963 + 2 = 2965; 2963 × 2 = 5926; аналогично для 49 997+(или ×)2; 29 963+(или ×)2 и т. д.— *М. Г.*]

111. Квадрат числа 836, равный 698 896, содержит четное число цифр, причем его можно читать как обычным способом слева направо, так и справа налево. Среди всех квадратов, содержащих данное четное число цифр, палиндромический квадрат наименьший.

112. Если число нулей, заключенных между двумя единицами, равно любому числу, кратному 3, плюс 2, то два сомножителя всегда можно выписать немедленно с помощью следующего любопытного правила: 1001 = 11 × 91; 1 000 001 = 101 × 9901; 1 000 000 001 = 1001 × 999 001; 1 000 000 000 001 = 10 001 × 99 990 001. В последнем случае мы получаем требуемый ответ, а 10 001 = 73 × 137. Кратность вхождения 3 в 11 равна 3 (11 = 3 × 3 + 2). Следовательно, в каждый сомножитель мы вставляем по три нуля и добавляем лишнюю девятку.

Если бы наше число, как я предположил, содержало 101 нуль, то наибольшее число, на которое можно умножить 3, чтобы произведение не превосходило 101, равнялось бы 33 и сомножители содержали бы 33 нуля и 34 девятки и имели бы вид, указанный выше. Если бы количество нулей в нашем числе было четным, то вы смогли бы найти два сомножителя следующим образом: 1001 = 11 × 91; 100 001 = 11 × 9091; 10 000 001 = 11 × 909 091 и т.д.

113. Число 1 234 567 890 разлагается на множители следующим образом: 2 × 3 × 3 × 5 × 3607 × 3803. Если 3607 мы умножим на 10, а 3803 на 9, то получим два составных множителя: 36 070 и 34 227, дающих в произведении 1 234 567 890 и обладающих наименьшей разностью.

114. Для того чтобы число делилось на 11, нужно, чтобы либо четыре чередующиеся цифры в сумме давали 17, а остальные пять — 28, либо, наоборот, четыре цифры давали в сумме 28, а пять — 17. Так, в приведенном примере (482 539 761) цифры 4, 2, 3, 7, 1 дают в сумме 17, а 8, 5, 9, 6 дают 28. Далее, четыре цифры могут в сумме дать 17 девятью различными способами, а пять цифр могут дать 17 двумя способами. Всего получается 11 способов. В каждом из этих 11 случаев четыре цифры можно переставить 24, а пять цифр — 120 способами, что дает 2880 вариантов. Всего благоприятных исходов получается 2880 × 11 = 31680. Поскольку девять цифр можно переставить 362 880 способами, то мы получаем 115 против 11 за то, что наугад взятое число не будет делиться на 11[34].

115. Запишем под нашим числом справа налево числа 1, 10, 11, как показано ниже:

| | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 4 | 9 | 1 | 2 | 9 | 3 | 0 | 8 | 2 | 1 | 3 |
| 10 | 1 | 11 | 10 | 1 | 11 | 10 | 1 | 11 | 10 | 1 |

Умножим теперь числа 1 и 10, стоящие внизу, на числа, записанные над ними, и сложим полученные произведения; затем проделаем то же самое с числами 11 и вычтем из первой суммы вторую. В результате получим: $13 + 08 + 29 + 49 = 99$; $11 \times (2 + 3 + 1) = 66$. Разность равна 33 и совпадает как раз с остатком от деления нашего числа на 37.

Вот ключ к решению задачи. Если мы поделим 1, 10, 100, 1000 и т. д. на 37, то будем последовательно получать остатки: 1, 10, 26 и снова 1, 10, 26 и т. д. Удобнее вычесть 37 из 26 и сказать, что остаток равен минус 11. Если вы примените данный метод к числу 49 629 708 213, то получите, что первая сумма равна 99, а вторая сумма равна 165. Разность равна минус 66. Прибавьте 37 и вы получите минус 29. Но, поскольку ответ отрицательный, прибавьте еще раз 37, и вы получите верный ответ, равный 8. Теперь вы можете применить аналогичный метод и к другим простым делителям. В случае 7 и 13 это сделать легко. В первом из них вы пишите 1, 3, 2 (1, 3, 2), 1, 3, 2 и т. д. справа налево, причем числа в скобках берете со знаком минус. Во втором случае надо записать 1 (3. 4, 1), 3, 4, 1 (3, 4, 1) и т. д.

116. Обозначим наше число через $ABCABCABC$. Если суммы цифр, обозначенных буквами $A$, $B$ и $C$, равны соответственно:

| A | B | C |
|---|---|---|
| 18 | 19 | 8 |
| 15 | 15 | 15 |
| 12 | 11 | 22 |
| 19 | 8 | 18 |
| 22 | 12 | 11 |
| 8 | 18 | 19 |
| 11 | 22 | 12 |

то в первых трех случаях $11A - 10B = C$, в следующих двух $11A - 10B - C = 111(3 \times 37)$. И наконец, в последних двух случаях $10B + C - 11A = 111$. Если имеет место один из этих случаев, то независимо от конкретного значения соответствующих цифр наше число делится на 37. Вот пример первого случая:

| A | B | C | A | B | C | A | B | C |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 9 | 8 | 4 | 7 | 6 | 3 | 2 | 5 | 1 |

где сумма $A$-цифр равна 18, $B$-цифр равна 19 и $C$-цифр равна 8.

Нетрудно видеть, что первые три случая могут встречаться в 22, вторые два — в 10 и последние два — в 10 вариантах, то есть всего в 42 вариантах. Но в каждом варианте число перестановок цифр $A$ равно 6, цифр $B$ равно 6 и цифр $C$ тоже равно 6. Общее число перестановок будет $6 \times 6 \times 6 = 216$. Умножив число вариантов на число перестановок, мы получаем 9072 благоприятных (число делится на 37) исходов. Поскольку число перестановок девяти цифр равно 362 880, то вероятность благоприятного исхода равна 9072/362880, или $\frac{1}{40}$. Можно сказать иначе: имеется 39 шансов против 1 за то, что число не разделится на 37.

117. Существуют четыре решения: 2 438 195 760, 3 785 942 160, 4 753 869 120, 4 876 391 520. Последняя цифра обязана быть нулем. При любом размещении цифр с четной цифрой перед нулем число делится на 2, 3, 4, 5, 6, 9, 10, 12, 15 и 18. Остается рассмотреть только 7, 11, 13, 16 и 17. (Делимость на 8 и 14 следует из делимости на 16 и 7.) Для делимости на 11 цифры, стоящие на четных местах, должны в сумме давать 28, а на нечетных — 17, или наоборот. Для того чтобы наше число делилось на $7 \times 11 \times 13 = 1001$, число, образованное первой тройкой цифр, и число, образованное последней тройкой (мы отбрасываем нуль), в сумме должны давать число, образованное средней тройкой цифр. (Отметим, что третий из приведенных случаев есть на самом деле: 474 --1386 - 912, где 1 перенесена вперед и прибавлена к 4.) Однако самое лучшее, что мы можем сделать, это умножить наименьшее общее кратное (н. о. к.) наших делителей (12 252 240) на самое маленькое

число (82), при котором произведение (1 004 683 680) будет содержать 10 цифр, а затем прибавлять н. о. к. до тех пор, пока все цифры не станут различными.

Умножив н. о. к. на 199, получим первое решение, умножив на 309 — второе, на 388 — третье и на 398 — четвертое решение. Выкладки можно существенно сократить, перескакивая через группы чисел, в которых цифры очевидным образом повторяются. Все ответы можно получить с помощью арифмометра за каких-нибудь двадцать минут.

118. Наименьшим возможным числом будет 3 333 377 733. Оно делится на 3 и на 7, и тем же свойством обладает сумма его цифр (42). Число должно содержать по крайней мере 3 семерки и 7 троек, причем семерки следует перенести как можно дальше вправо.

119. Искомыми числами являются 5832, 17 576 и 19 683. Сумма цифр каждого из них, равная соответственно 18, 26 и 27, совпадает с соответствующим кубическим корнем.

120. Наименьшее число, удовлетворяющее всем условиям, равно 35 641 667 749. Другие числа получаются прибавлением к данному любого целого, кратного числу 46 895 573 610.

121. Искомыми числами будут 162, 243, 324, 392, 405, 512, 605, 648, 810 и 972. Этим, по-видимому, исчерпываются все возможные случаи.

122. Существуют три решения: 56 169 ($237^2$), где $56 + 69 = 125$ ($5^3$); 63 001 ($251^2$), где $63 + 01 = 64$ ($4^3$) и 23 104 ($152^2$), где $23 + 04 = 27$ ($3^3$).

123. Произведение чисел 989 010 989 и 123 456 789 равно 122 100 120 987 654 321, что и требовалось найти.

124. Ответ профессора гласил:

| | | |
|---|---|---|
| 297 | 564 | 831 |
| 291 | 564 | 837 |
| 237 | 564 | 891 |
| 231 | 564 | 897 |

где разность прогрессии равна соответственно 267, 273, 327 и 333. Он указал на то, что для каждой из шести перестановок средних трех цифр можно найти соответствующее решение.

[В. Тебо в книге «Parmi les Nombres Curieux» показал, что существует 760 таких прогрессий. Кроме 456 и его перестановок, среднее число может быть любой перестановкой следующих групп из трех цифр: 258, 267, 348 и 357.— *М. Г.*]

125. Если вы умножите 6666 на сумму четырех заданных цифр, то получите правильный ответ. Поскольку 1, 2, 3, 4 в сумме дают 10, то, умножая 6666 на 10, получаем ответ 66 660. Если мы будем искать сумму всех выборок по четыре различные цифры, то получим 16 798 320, или $6666 \times 2520$.

126. Эту задачу можно решить несколькими способами. Ответ, разумеется, одинаковый во всех случаях, равен 201 599 999 798 400. Сумма девяти цифр равна 45 и

$$45 \times 81 = 1814400.$$

Записав далее

---

$$\begin{array}{l} 18144 \\ \ \ 18144 \\ \ \ \ \ 18144 \\ \ \ \ \ \ \ 18144 \end{array}$$

девять раз, сложив и приписав в конце 00, получим ответ.

127. С помощью четырех перестановок $\overleftrightarrow{73}$, $\overleftrightarrow{34}$, $\overleftrightarrow{48}$, $\overleftrightarrow{25}$ мы получим число 157 326 849, равное квадрату числа 12 543. Однако правильное решение — $\overleftrightarrow{15}$, $\overleftrightarrow{84}$, $\overleftrightarrow{46}$ — даст число 523 814 769, равное квадрату числа 22 887. При этом совершается всего три перестановки.

128. Наименьший квадрат равен 1 026 753 849 ($32\,043^2$); наибольший — 9 814 072 356 ($99\,066^2$).

129. Задача имеет только два решения: числа 567 ($567^2 = 321\,489$) и 854 ($854^2 = 729\,316$). При поиске решения следует рассматривать лишь такие трехзначные числа, сумма цифр которых равна 9, 18 и 27 или 8, 17 и 26. Наименьшее трехзначное число, квадрат которого шестизначен, равно 317.

130. Суммы цифр данных шести чисел соответственно равны

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 46 | 31 | 42 | 34 | 25 | 34 |
| 1 | 4 | 6 | 7 | 7 | 7 |

Складывая цифры сумм (если потребуется — не один, а несколько раз), мы получим в результате однозначные числа, стоящие во втором ряду. Назовем эти однозначные числа цифровыми корнями исходных чисел. Цифровые корни можно объединить в группы из трех чисел восьмью различными способами

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 146 | 147 | 167 | 177 | 467 | 477 | 677 | 777 |
| 2 | 3 | 5 | 6 | 8 | 9 | 2 | 3 |

(Внизу выписаны цифровые корни.) Как показано в моей книге «Математические развлечения», цифровой корень квадрата должен равняться 1, 4, 7 или 9. Поэтому искомые числа должны иметь цифровые корни 4, 7, 7. Две семерки можно выбрать тремя способами. Но если бы пятое число содержалось среди искомых, то их сумма оканчивалась бы на 189 или на 389, что невозможно для квадрата, ибо в нем перед 89 должно стоять четное число или 0. Следовательно, ответ имеет вид

$$2\,494\,651 + 1\,385\,287 + 9\,406\,087 = 12\,286\,025.$$

В правой части стоит число, равное квадрату 3645.

Чтобы подчеркнуть ценность этого нового метода, я позволю себе процитировать профессора Роуза Бола:

«Данное приложение целиком обязано своим появлением мистеру Дьюдени. Свойства цифр мало известны математикам, и мы надеемся, что его пример поможет привлечь внимание к этому методу... При решении некоторого класса арифметических задач метод цифрового корня оказывается чрезвычайно полезным».

131. $7 + 1 = 8$; $9 - 6 = 3$; $4 \times 5 = 20$.

132. Приведем пять решений задачи:

$$\frac{2}{4} = \frac{3}{6} = \frac{79}{158}; \quad \frac{3}{6} = \frac{7}{14} = \frac{29}{58}; \quad \frac{3}{6} = \frac{9}{18} = \frac{27}{54};$$

$$\frac{2}{6} = \frac{3}{9} = \frac{58}{174}; \quad \frac{.2}{1} = \frac{.6}{3} = \frac{97}{485}\text{35}$$

133. Цифры 4, 6 и 8 должны стоять во втором разряде, поскольку никакое простое число не может оканчиваться на эти цифры. Цифры 2 и 5 могут появиться в разряде единиц только в том случае, если простое число однозначно, то есть если нет других цифр. После этого решение без особого труда доводится до конца:

$$
\begin{array}{r}
47 \\
61 \\
89 \\
+\quad 2 \\
3 \\
5 \\
\hline
207
\end{array}
$$

134. В каждом из следующих восьми примеров девять цифр используются по одному разу, а разность между соседними суммами равна 9.

$$
\begin{array}{r} 243 \\ +675 \\ \hline 918 \end{array}
\quad
\begin{array}{r} 341 \\ +586 \\ \hline 927 \end{array}
\quad
\begin{array}{r} 154 \\ +782 \\ \hline 936 \end{array}
\quad
\begin{array}{r} 317 \\ +628 \\ \hline 945 \end{array}
\quad
\begin{array}{r} 216 \\ +738 \\ \hline 954 \end{array}
\quad
\begin{array}{r} 215 \\ +748 \\ \hline 963 \end{array}
\quad
\begin{array}{r} 318 \\ +654 \\ \hline 972 \end{array}
\quad
\begin{array}{r} 235 \\ +746 \\ \hline 981 \end{array}
$$

135. Число 94 857 312 при умножении на 6 дает 569 143 872, причем все девять цифр в каждом случае используются один и только один раз.

[Известны еще два решения: 89 745 321 $\times$6 = 538 471 926 и 98 745 231 $\times$6 = 592 471 386.— М. Г.]

136. Нетрудно представить число 24 с помощью трех четверок, пятерок, восьмерок или девяток:

$$(4 + 4 - 4)!,$$

$$\left(5 - \frac{5}{5}\right)!,$$

$$\left(\sqrt{9} + \frac{9}{9}\right)!$$

Число 24 можно изобразить и с помощью трех единиц, шестерок и семерок. Действительно,

$$\left(\frac{6}{.6} - 6\right)! = 24,$$

$$\left(7 - \left[\sqrt{\frac{7}{.7}}\right]\right)! = 24,$$

$$\left(1 + \left[\sqrt{\frac{1}{.1}}\right]\right)! = 2436$$

137. Бочки можно разместить 42 различными способами. Положение бочек 1 и 9 всегда остается неизменным. Условимся сначала помещать бочку 2 так, чтобы она оказывалась под бочкой 1. Тогда, если бочка 3 расположится под бочкой 2, то мы получим пять вариантов размещения бочек. Если же бочка 3 расположится справа от бочки 1, то в пяти вариантах под бочкой 2 оказывается бочка 4, в пяти — бочка 5, в четырех — бочка 6 и в двух — бочка 7. Всего получается 21 вариант. Но бочку 2 не обязательно ставить под бочку 1. С тем же успехом ее можно расположить справа от бочки 1. При этом мы получим еще 21 вариант. Эта партия размещений при внимательном рассмотрении оказывается не новой: все варианты переходят в один из первых вариантов при зеркальном отражении и при переворачивании «с головы на ноги». В центре всегда располагаются бочки 4, 5 или 6.

138. Необходимо лишь поменять местами 8 и 9, перевернув предварительно девятку так, чтобы она превратилась в шестерку. Тогда сумма чисел в каждом столбце станет равной 18.

139. Два числа, составленные из одних лишь единиц и дающие одинаковый результат при сложении и умножении,— это 1,1 и 11. Их сумма и произведение равны 12,1.

140. Вопрос Джорджа не застал Дору врасплох. Она немедленно дала верный ответ: 0.

141. Искомое число равно 142 857. Оно совпадает с периодически повторяющейся последовательностью цифр, стоящих в дробной части числа $\frac{1}{7}$, записанного в десятичной форме.

142. Искомое число равно 153. Кубы чисел 1, 5 и 3 равны соответственно 1, 125 и 27, а их сумма 153.

[Автор не заметил четвертого числа: 371. Если не считать 1, то 407, 370, 153 и 371 — единственные четыре числа, совпадающие с суммой кубов своих цифр. Относительно более общей задачи отыскания чисел, совпадающих с суммой *n*-ных степеней своих цифр, смотри книгу Joseph S. Madachy «Mathematics on Vacations» (N. Y., 1966, pp. 163—165).— *М. Г.*]

143. Вот как выглядит подробная запись деления:

```
 12128316 |124
-         |-----
 1116     |97809
 ----
   968
  -
   868
   ---
   1003
  -
    992
    ---
    01116
   -
     1116
     ----
        0
```

[Когда Дьюдени впервые опубликовал эту головоломку, один читатель прислал ему доказательство единственности решения, однако оно слишком длинно, чтобы его здесь можно было привести.— *М. Г.*]

144. Полностью восстановленный пример выглядит так:

```
 631938   |625
-         |--------
 625      |10111008
 ---
  0693
 -
   625
   ---
   0688
  -
    625
    ---
    0630
   -
     625
     ---
     05000
    -
      5000
      ----
         0
```

Три нуля внизу показывают, что последнее четырехзначное число делится как на 625, так и на 1000. Следовательно, оно разлагается в произведение следующих множителей: 5, 5, 5, 2, 2, 2, *x*, где *x* — число, которое меньше 10. У трехзначного делителя по крайней мере один из составляющих его множителей должен равняться 5. Следовательно, последняя цифра делителя равна 5 или 0. Вычитание из единственного нуля незадолго до конца показывает, что она равна 5. Отсюда мы сразу получаем последнее число: 5000. Делитель не содержит 2 (иначе он не оканчивался бы на 5); следовательно, последняя цифра частного должна равняться 8 ($2 \times 2 \times 2$), делитель равен 625, а $x$ представляет собой четвертую пятерку. Остальное делается совсем просто.

145. Ответ:

$$\begin{array}{r} 4539281706 \\ \times \qquad\qquad 2 \\ \hline 9078563412 \end{array}$$

Если первое число разбить на пары (45, 39 и т. д.), то их можно переставлять в любом порядке, лишь бы пара 06 не стояла в начале, а пара 45 — в конце.

146. Довольно легко обнаружить, что делитель должен равняться 312, а в частном не может содержаться девятка, поскольку делитель, умноженный на 9, даст повторяющиеся цифры. Таким образ.ом, известно, что частное содержит все цифры от 1 до 8 по одному разу. Остальное уже сравнительно легко сделать. Мы обнаружим, что имеется четыре возможных случая и что только в одном из них отсутствует повторение цифр, а именно:

$$10114626600 \;\Big|\; \frac{312}{32418675}$$

[Возможно и другое решение:

$$10174126840 \;\Big|\; \frac{3101}{3289764} \quad .\text{– } \textbf{\textit{М. Г.}}\Big]$$

147. Приводим ответ:

$$764\ 752\ 206 : 249 = 3\ 071\ 294,$$

$$767\ 242\ 206 : 249 = 3\ 081\ 294,$$

$$999\ 916\ 785 : 245 = 4\ 081\ 293,$$

$$997\ 466\ 785 : 245 = 4\ 071\ 293,$$

$$764\ 160\ 912 : 248 = 3\ 081\ 294,$$

$$761\ 680\ 912 : 248 = 3\ 071\ 294.$$

Если читатель проделает указанные действия, то обнаружит, что все условия головоломки выполнены.

148. Разделив 4 971 636 104 на 124 972, мы получим 39 782. Читатель может сам произвести деление и убедиться, что все условия выполнены. Если мы разрешим ввести дополнительные семерки в делимое, то ответ будет иметь вид

$$7\ 471\ 076\ 104 : 124\ 972 = 59\ 782.$$

[Возможны еще три решения:

$$2\ 472\ 196\ 104 : 124\ 972 = 19\ 782,$$

$$2\ 472\ 110\ 694 : 124\ 974 = 19\ 781,$$

$$4\ 971\ 590\ 694 : 124\ 974 = 39\ 781,$$ – *М. Г.*]

149. Первый пример на деление имеет вид

$$100\ 007\ 892 : 333 = 300\ 324,$$

а второй

$$300\ 324 : 29 = 10\ 356.$$

150. Ответ имеет вид

```
 19775 |35
-175   |565
 ----
  227
 -210
  ----
   175
  -175
   ----
     0
```

Ясно, что $R$ не может быть равным 1; следовательно, оно должно равняться 5 или 6 для того, чтобы во второй строке появилось $R$. Далее, цифра $D$ должна быть нулем, чтобы в пятой строке получилось $V$ . Точно так же как $M$ должно быть 1, 2, 3 или 4, если $R$ равно 5, но может быть и 5, если $R$ равно 6. Цифра $S$ должна быть четным числом, если $R$ равно 5, чтобы $D$ равнялось 0, а если $R$ равно 6, то 5 должно равняться 5. Выяснив все эти факты, мы уже легко получим ответ с помощью небольшого числа проб.

151.

```
    17
 ×   4
 ------
    68
   93
  -68
  ---
   25
```

152. $6543 \times 98\ 271 = 642\ 987\ 153$.

153. Единственное слово (а не бессмысленный набор букв), удовлетворяющее заданным условиям,— это ПОДСВЕЧНИК. Сумма расшифровывается следующим образом:

$$\begin{array}{r} 36407 \\ +\ 98521 \\ \hline 134928 \end{array}$$

154. Ключ к коду имеет вид

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 0 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| A | T | Q | B | K | X | S | W | E | P |

откуда мы получаем

$$\begin{array}{r} 917947476 \\ -\,408857923 \\ \hline 509089553 \end{array}$$

а *BEESWAX* означает число 4 997 816.

155.

$$\begin{array}{r} 25938 \\ +\,25938 \\ \hline 51876 \end{array}$$

156.

$$\begin{array}{r} 4973 \\ \times\quad 8 \\ \hline 39784 \end{array}$$

157.

$$\begin{array}{r} 598 \\ 507 \\ +\quad 8047 \\ \hline 9152 \end{array}$$

158. Очевидно, что $A$ равно 1, а $B$ и $C$ обозначают либо 6 и 2, либо 3 и 5. Из третьего уравнения видно, что они равны 3 и 5, поскольку $D$ должно равняться 7. Буква $E$ равна 8, так как в произведении $D \times E$ появляется $C = 5$. Остальное закончить совсем легко, и мы получаем следующий ответ:

$$\boldsymbol{A} = 1,\ \boldsymbol{B} = 3,\ \boldsymbol{C} = 5,\ \boldsymbol{D} = 7,\ \boldsymbol{E} = 8,$$

$$\boldsymbol{F} = 9,\ \boldsymbol{H} = 6,\ \boldsymbol{J} = 4,\ \boldsymbol{K} = 2,\ \boldsymbol{L} = 0.$$

159. Из зерна крестьянина должно было получиться $1\frac{1}{9}$ мешка муки, что после уплаты $\frac{1}{10}$всей муки как раз и даст ровно один мешок.

160. Ответ задачи: полкурицы плюс полкурицы, то есть одна курица. Если полторы курицы несут полтора яйца за полтора дня, то одна курица несет по одному яйцу за полтора дня. Курица, которая несется лучше в полтора раза, несет полтора яйца за полтора дня, или по яйцу а день. Поэтому она снесет $10\frac{1}{2}$ яиц (десяток яиц с половиной) за $10\frac{1}{2}$ дня (полторы недели).

161. У Адама было 60 овец, у Бена 50, у Клода 40 и у Дана 30. После всех перераспределений у каждого оказалось по 45 овец.

162. Наименьшее возможное количество яиц равно 103, а женщина ежедневно продавала по 60 штук. Любые кратные этих чисел можно использовать в качестве ответа на вопрос задачи. Например, женщина могла привезти 206 яиц и продавать по 120 штук или привезти 309 яиц и продавать по 180. Поскольку требовалось найти наименьшее число, то ответ единствен.

163. Нужно просто разделить данное число на 8. Если оно разделится нацело, без остатка, то мышка — во второй бочке. Если остаток будет равен 1, 2, 3, 4 или 5, то номер бочки совпадет с этим остатком. Если остаток получится .больше 5, то его нужно вычесть из 10. Полученная разность равна номеру бочки. Число 500 при делении на 8 дает в остатке 4, так что на искомой бочке изображена цифра 4.

164. Пять бригад насчитывают соответственно по 5670, 6615, 3240, 2730 и 2772 человека. После приведения всех дробей к общему знаменателю (12 012) числители станут равны соответственно 4004, 3432, 7007, 8316 и 8190. Комбинируя все различные делители, содержащиеся в этих числах, мы получаем 7 567 560, что при делении на каждое из чисел даст соответственно 1890, 2205, 1080, 910 и 924. Поскольку в условии говорится, что соединение насчитывает «немногим более 20 тыс. человек», мы умножаем полученные числа на 3, что и дает правильную общую численность в 21 027 человек.

165. Всего голосовавших было 207. Сперва 115 избирателей проголосовало «за» и 92 «против», причем большинство составило 23 голоса, что как раз и равно одной четверти от 92. Но когда 12 человек, для которых не нашлось стульев, присоединились к оппозиции, оказалось, что «за» подано 103, а «против» — 104 голоса. Так что победили противники забастовки большинством в один голос.

166. Артур может выполнить всю работу за $14\frac{34}{49}$) Бенджамин — за $17\frac{23}{41}$ и Чарлз — за $23\frac{7}{31}$ дня.

167. Сумма номеров тех домов, которые расположены по одну сторону от данного, совпадет с суммой номеров по другую сторону от него в следующих случаях: 1) если номер данного дома равен 1 и других домов вообще нет; 2) если номер равен 6 и всего имеется 8 домов; 3) если номер равен 35, а всего домов 49; 4) если номер дома 204, а всего домов 288; 5) если номер дома 1189, а всего домов 1681 и т. д. Однако нам известно, что число домов больше 50 и меньше 500; следовательно, искомый номер равен 204.

Решив уравнение $(x^2 + x)/2 = y^2$ в целых числах, получим ответы:

| Число домов $x$ | Номер дома $y$ |
|---|---|
| 1 | 1 |
| 8 | 6 |
| 49 | 35 |
| 288 | 204 |
| 1681 | 1189 |

и т. д.

168. Номер дома Брауна 84, а всего на улице 119 домов. Сумма чисел от 1 до 84 равна 3570, а сумма чисел от 1 до 119 составит 7140, что, как и требовалось, ровно в 2 раза больше.

Выпишем последовательные решения (в целых числах) уравнения $2x^2 - 1 = y^2$:

| $x$ | $y$ |
|---|---|
| 1 | 1 |
| 5 | 7 |
| 29 | 41 |
| 169 | 239 |
| 985 | 1393 |

и т. д. Тогда целая часть[37] $x/2$ даст нам номер дома, а целая часть $y/2$ — общее число домов. Так (опуская тривиальный случай 0—0), мы получаем 2—3, 14—20, 84—119, 492—696 и т.д.

169. На нечетной стороне улицы номер дома равен 239, а всего на ней расположено 169 домов. На четной стороне улицы номер дома равен 408, а всего на ней расположено 288 домов.

В первом случае мы ищем решение в целых числах уравнения $2x^2 - 1 = y^2$. Получаем следующие ответы:

| Число домов $x$ | Номер дома $y$ |
|---|---|
| 1 | 1 |
| 5 | 7 |

| | |
|---|---|
| 29 | 41 |
| 169 | 239 |
| 985 | 1393 |

и т. д.

Во втором случае мы ищем решение в целых числах уравнения $2(x^2 + x) = y^2$. Получаем следующее:

| Число домов $x$ | Номер дома $y$ |
|---|---|
| 1 | 2 |
| 8 | 12 |
| 49 | 70 |
| 288 | 408 |
| 1681 | 2378 |

и т. д.

Эти два случая, равно как и предыдущие две головоломки, похожи друг на друга и используют хорошо известное уравнение Пелля.

170. Ошибка Хильды состояла в том, что заданное число она умножила не на 409, а на 49. Разделив величину от полученной погрешности на разность этих чисел, получим требуемое число 912.

171. Семнадцать лошадей требовалось поделить в *пропорциях*: $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{9}$. Это не означает, что сыновья должны получить такие доли от числа 17. Пропорции можно записать также в виде $\frac{9}{18}$, $\frac{6}{18}$и $\frac{2}{18}$. так что сыновья получат соответственно по 9, 6 и 2 лошади каждый и завещание будет строго соблюдено. Следовательно, нелепый старый метод, о котором упомянул Проджерс, случайно приводит к правильному решению.

Один читатель прислал мне следующее хитроумное решение:

$$\begin{array}{lcl}
\frac{1}{2}, \text{ то есть 2 и 1 сверх того} & = & 3 \\
\frac{1}{3}, \text{ то есть 3 и 1 сверх того} & = & 4 \\
\frac{1}{9}, \text{ то есть 9 и 1 сверх того} & = & 10 \\
 & & \overline{17}.
\end{array}$$

172. Перечислим шесть прямоугольных треугольников, имеющих одинаковый, наименьший из возможных (720), периметр: 180, 240, 300; 120, 288, 312; 144, 270, 306; 72, 320, 328; 45, 336, 339; 80, 315, 325.

173. Запишем следующую последовательность чисел, впервые исследованную Леонардо Фибоначчи (родился в 1175 г.), который практически ввел в европейский обиход привычные нам арабские цифры:

$$0,\ 1,\ 1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 8,\ 13,\ 21,\ 34,\ \ldots,\ 46368.$$

Каждое последующее число равно сумме двух предыдущих. Сумма всех чисел, от первого до данного на 1 меньше числа, идущего через один после данного. Если удвоить любой член последовательности и прибавить к нему предыдущий, то получится член, который следует через один после данного. Далее, в первый год приплод будет составлять 0 телок, во второй 1, на третий 1, на четвертый 2 и т. д. При этом как раз и получатся члены данной последовательности. Двадцать пятый член равен 46 386, и если мы сложим все 25 членов, то получим правильный ответ 121 392. Но на самом деле нет необходимости выполнять это сложение. Найдя, двадцать четвертый и двадцать пятый члены, мы просто скажем, что 46 368, умноженное на 2, плюс 28 657 равно 121 393, и вычтем затем 1.

174. Взяв любое число, а потом другое, равное 1 плюс дробь, у которой в числителе стоит 1, а в знаменателе число, на 1 меньшее данного, мы получим пару чисел, дающих в сумме и в произведении одно и то

же. Вот несколько примеров: 3 и $1\frac{1}{2}$, 4 и $1\frac{1}{3}$, 5 и $1\frac{1}{4}$ и т. д. Следовательно, получив 987 654 321, я немедленно написал $1\frac{1}{987\ 654\ 320}$. Сумма и произведение равны в этом случае $987\ 654\ 322\frac{1}{987\ 654\ 320}$.

Пару 2 и 2 рассматривают как исключение потому, что знаменатель в этом случае равен 1, а второе число тоже оказывается целым $1\frac{1}{1} = 2$. Но можно заметить, что и этот случай подчиняется общему правилу. Число может оказаться как целым, так и дробным, а в условии не говорится, что мы должны найти обязательно целое число, поскольку тогда единственным решением действительно был бы случай 2 и 2. Разумеется, допускаются и десятичные дроби, как, например, 6 и 1,2; 11 и 1,1; 26 и 1,04.

Итак, соответствующее число, парное к $n$, имеет вид

$$\frac{n}{n-1} = (n+1) + \frac{1}{n-1}.$$

175. Наименьшее возможное решение имеет вид

$$10^2 - 6^2 = 100 - 36 = 64 = 4^3,$$

$$10^3 - 6^3 = 1000 - 216 = 784 = 28^2.$$

176. 1) 6 м; 2) приблизительно 1,57 м; 3) $\frac{1}{36}$м.

177. При делении данных чисел на искомое получаются одинаковые остатки. Следовательно, если мы вычтем, как показано ниже, одно число из другого, то разность разделится на искомое число без остатка.

$$\begin{array}{r} 508\ 811 \\ -\ 480\ 608 \\ \hline 28\ 203 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 723\ 217 \\ -\ 508\ 811 \\ \hline 214\ 406 \end{array}$$

Простые делители числа 28 203 равны 3, 7, 17, 79, а 214 406 — 2, 23, 59, 79. Единственный общий делитель двух разностей равен 79. Следовательно, искомое число равно 79, а общий остаток — 51. Просто, не правда ли?

178. Запишем подряд остатки от деления чисел, стоящих в первом столбце, на 2. Получится 1000011, или, если записать в обратном порядке, 1100001. Но последнее число равно 97 в двоичной системе счисления, то есть $1 + 2^5 + 2^6$. Сложив числа, стоящие во втором столбце против остатков, равных 1, мы получим $23 \times 1 + 23 \times 2^5 + 23 \times 2^6 = 2231$. Теперь уже ясно, почему получается верный ответ: просто мы действуем в двоичной системе.

179. Правы были эксперты. Пушка делает 60 выстрелов за 59 минут, если она действительно стреляет со скоростью 1 выстрел в минуту. Время отсчитывается с момента первого выстрела, так что второй выстрел будет произведен по истечении первой минуты, третий — по истечении второй и т. д. Можно провести аналогию. Допустим, что на прямой мы отметили 60 точек на равных расстояниях друг от друга. Тогда между первой и последней точкой будет расположено 59, а не 60 отрезков.

180. Существуют разные способы решения этой головоломки, но простейший из них состоит, как я полагаю, в следующем. Допустим, что шестизначное число равно 843 712.

1) Делится ли оно без остатка на 2? Да.

2) Делится ли частное без остатка на 2? Да.

3) Делится ли новое частное без остатка на 2? Да.

Двадцать ваших вопросов должны быть все одинаковыми. Запишите справа налево вместо каждого «да» 0, а вместо каждого «нет» 1. Задав 20-й вопрос, вы получите 11001101111111000000. Это не что иное, как наше число 843 712, записанное в двоичной системе. Поскольку справа стоит 6 нулей, то первая справа единица означает $2^6$, следующая $2^7$ и т. д. Сложив все степени двойки от 6-й до 15-й и прибавив к ним $2^{18}$ и $2^{19}$, вы получите число 843 712 в десятичной записи.

Если число не слишком велико, например равно 100 000, то достаточно было бы задать 17 вопросов, знай вы только, что частное равно 0. Три последних вопроса добавят лишних 3 нуля в старших разрядах вашего двоичного числа. Во избежание недоразумений лучше с самого начала считать, что 0 делится на 2 без остатка, а частное равно 0.

181. В каждой стопке число карт должно равняться 13 минус достоинство самой нижней из них. Следовательно, 13, умноженное на число стопок, минус сумма нижних карт и плюс число оставшихся карт должно равняться общему числу карт в колоде, то есть 52. Значит, сумма нижних карт равна 13, умноженному на число стопок, минус 52 и плюс число оставшихся карт. Но это то же самое, что 13, умноженное на число стопок без 4, плюс число оставшихся карт. Читатель с алгебраическими наклонностями легко сможет выразить все это на языке привычных символов.

182. У каждого из родителей было по 3 ребенка от первого брака, и.6 детей родилось от второго брака.

183. Нед Смит и его сестра Джейн получили по 3 яблока. Том и Кэт Брауны получили соответственно 8 и 4 яблока, Бил и Энн Джонсы — 3 и 1 яблоко, а Джэку и Мэри Робинсонам досталось 8 и 2 яблока. Всего было роздано 32 яблока.

184. Мать Мэри звали миссис Джонс. Покупки и затраты распределились следующим образом.

Среди дочерей:

Хильда купила 4 м за 16 центов,

Глэдис купила 6 м за 36 центов,

Нора купила 9 м за 81 цент,

Мэри купила 10 м за 1 доллар.

Среди матерей:

Миссис Смит купила 8 м за 64 цента,

миссис Браун купила 12 м за 1,44 доллара,

миссис Уайт купила 18 м за 3,24 доллара,

миссис Джонс купила 20 м за 4 доллара.

185. Чтобы найти число, представляющее собой одновременно и квадрат, и треугольное число, надо решить уравнение Пелля: $8x^2 + 1 = y^2$ Последовательные значения для $x$ равны 1, 6, 35 и т. д., а для $y$ равны 3, 17, 99 и т. д. Ответом служит число 1225 ($35^2$), обладающее требуемыми свойствами.

188. Разумеется, можно найти несколько решений данной задачи, но, по-видимому, наименьшими числами будут:

$$a = 10\,430,\ b = 3970,\ c = 2114,\ d = 386,$$

$$a + b = 10\,430 + 3970 = 14\,400 = 120^2,$$

$$a + c = 10\,430 + 2114 = 12\,544 = 112^2,$$

$$a + d = 10\,430 + 386 = 10\,816 = 104^2,$$

$$b + c = 3970 + 2114 = 6084 = 78^2,$$

$$b + d = 3970 + 386 = 4356 = 66^2,$$

$$c + d = 2114 + 386 = 2500 = 50^2,$$

$$a + b + c + d = 10\ 430 + 3970 + 2114 + 386 = 16\ 900 = 130^2.$$

При отыскании общего решения используется тот факт, что любое простое число вида $4m + 1$ представляет собой сумму квадратов. Быть может, читателю захочется найти это решение.

187. Ответом служит число $2\frac{2}{3}$. Чтобы найти его, требуется составить пропорцию: $5 : 4 = 3\frac{1}{3} : 2\frac{2}{3}$.

188. Ответ имеет вид

$$2\ 173\ 913\ 043\ 478\ 260\ 869\ 565.$$

Данное число можно умножить на 4 и разделить затем на 5, просто перенеся 2 из начала в конец.

189. Следующие четыре числа, составленные из пяти нечетных цифр, в сумме дают 14: 11, 1, 1, 1.

190. 1) $8\ 111\frac{1}{3}$; 2) $18\frac{2}{3}$; 3) 7 и 1; 4) $1\frac{1}{5}$; 5) $8\frac{1}{4}$: 6) $\frac{6}{9}$.

191. У Джека было 11 голов скота, у Джима — 7 и у Дана — 21, то есть всего 39 голов скота.

192. «Галочки» можно расставить 9 864 100 способами.

193. Кубы всех чисел от 14 до 25 включительно (всего 12) в сумме дают $97\ 344 = 312^2$. Следующим за наименьшим ответом будут пять кубов 25, 26, 27, 28 и 29, сумма которых равна $315^2$.

194. $7^3 = 343$, $8^3 = 512$, $512 - 343 = 169 = 13^2$.

195. $642^3 = 264\ 609\ 288$; $641^3 = 263\ 374\ 721$ и разность между кубами равна 1 234 567.

196. Ответом служит число 225 625 (квадраты чисел 15 и 25, выписанные подряд один за другим), равное квадрату 475.

197. Ответ: 482, 3362, 6242. Разность этой прогрессии равна 2880. Первое и второе числа в сумме дают $62^2$, первое и третье — $82^2$, а второе и третье — $98^2$.

198. Если прибавить 125 к 100 и 125 к 164, то получатся числа $225 = 15^2$ и $289 = 17^2$.

199. У офицера было 1975 солдат. Когда он образовал каре $44 \times 44$, то у него осталось 39 лишних солдат, а когда он попытался образовать каре $45 \times 45$, ему не хватило 50 человек.

200. Вообще мы можем взять числа вида $625m^6$ и $2 \times 625m^6$. Так, если мы возьмем $m = 1$, то получим $625^2 + 1250^2 = 125^3$ и $625^3 + 1250^3 = 46\ 875^2$.

201. Молочник должен добавить $\frac{1}{4}$л снятого молока.

202. Наименьшее число орехов равно 2179. Лучше всего сначала иметь дело только с первыми двумя случаями и выяснить, что 34 (или 34 плюс любое кратное 143) удовлетворяет условию для 11 и 13 обезьян. Затем следует найти наименьшее число такого вида, удовлетворяющее условию для 17 обезьян.

203. Число яблок у первого мальчика относится к числу яблок у второго мальчика и к числу яблок у третьего соответственно как $6 : 4$ и $6 : 3$. Сумма чисел 6, 4, 3 равна 13. Следовательно, мальчики получат $\frac{6}{13}$, $\frac{4}{13}$ и $\frac{3}{13}$, или 78, 52 и 39 яблок.

204. Двое работников должны напилить $3\frac{1}{13}$ м$^3$ дров.

205. В пяти пакетах содержится 27, 25, 18, 16, 14 орехов. Содержимое каждого пакета можно найти, вычитая из 100 общую сумму орехов в тех парах пакетов, куда не входит данный пакет.Так, в третьем пакете содержится 100 - (52 + 30) = 18 орехов.

206. Первоначально было 1021 орех. Томми получил 256, Бесси 192, Боб 144 и Джесси 108 орехов. Всего девочки получили 300, а мальчики 400 орехов. Тетушка Марта оставила себе 321 орех.

207. У торговки было 40 яблок. Том оставил ей 30, Боб 22 и Джим 12 яблок.

208. Нужно выдать покупателю четыре коробки по 17 и две по 16 фунтов, что и составит в точности 100 фунтов.

209. Алек может выполнить работу за $14\frac{34}{49}$ дня, Бил — за $17\frac{23}{41}$ дня и Кейзи — за $23\frac{7}{31}$ дня.

210. За шестьдесят и сорок дней.

211. Получив остаток от деления на 3, умножьте его на 70, остаток от деления на 5 умножьте на 21 и остаток от деления на 7 — на 15. Сложите результаты, и вы получите либо задуманное число, либо число, отличающееся от задуманного на целое кратное 105. Так, если было задумано 79, то 1, умноженное на 70, плюс 4, умноженное на 21, плюс 2, умноженное на 15, даст 184. Вычтите 105, и вы получите 79 — задуманное число.

212. Всего было 15 пчел.

213. Дева назвала число 28. Трюк состоит в том, чтобы проделать весь процесс вычислений в обратную сторону: умножить 2 на 10, вычесть 8, возвести результат в квадрат и т. д. При этом, например, надо помнить, что увеличить произведение на $\frac{3}{4}$означает взять от него $\frac{7}{4}$. Обратное действие состоит в том, что берется $\frac{4}{7}$.

214. Печатник должен купить 22 литеры: А, Б, В, Г, Д, Е, И, Й, К, Л, М, Н, О, П, Р, С, Т, У, Ф, Ь, Ю, Я.

215. В рое было 72 пчелы.

216. Наименьшее число мышей равно 7, причем возможны три случая:

1) 2 хорошо видят, 1 слепа только на правый глаз и 4 полностью слепы;

2) 1 хорошо видит, 1 слепа только на левый глаз, 2 слепы только на правый и 3 полностью слепы;

3) 2 слепы только на левый глаз, 3 только на правый и 2 полностью слепы.

217. Поскольку в зверинце содержалось два чудовища (четырехногая птица и шестиногий теленок), всего в нем было 12 зверей и 24 птицы.

218. В стаде было 1025 овец. Легко понять, что ни одна овца не была покалечена.

219. Доля Чарлза составляет 3456 овец. Вероятно, кое-кто из читателей вначале нашел долю Альфреда, а затем вычел из нее 25%, но такое решение, разумеется, неверно.

220. Номер такси 121.

221. Истекло 54 года арендного срока.

222. Всего в подразделении было 4550 человек. Сначала солдаты шли колонной в 70 шеренг по 65 человек в каждой; затем они перестроились в 5 шеренг по 910 солдат в каждой.

223. Год 1927:

$$2^{11} - 11^2 = 1927.$$

224. Офицер на складе должен выдавать требуемое число снарядов ящиками по 18 снарядов до тех пор, пока не останется число снарядов, кратное 5. Если число снарядов не равно 5, 10 или 25, то остальные снаряды нужно выдавать ящиками по 15 и 20 снарядов. Наибольшее число снарядов, для которого система оказывается негодной, равно 72 плюс 25, то есть 97. Если число снарядов на складе больше, например равно 133, причем 108 снарядов упакованы в 6 ящиков по 18 снарядов в каждом, то офицер должен выдать лишь 1 ящик с 18 снарядами, а оставшиеся 115 снарядов переложить в 1 ящик, вмещающий 15 снарядов, и 5 ящиков, содержащих по 20 снарядов каждый. Если на складе имеется 97 снарядов, то, лишь выдав 72 снаряда, офицер получит остаток, кратный 5, то есть 25 снарядов.

225. Сначала было 7890 саженцев, из которых получился квадрат $88 \times 88$, и осталось лишних 146 деревьев. Купив еще 31 дерево, садовник смог увеличить квадрат до $89 \times 89$, а деревьев в саду стало 7921.

226. Наименьшее число кубиков в коробке 1344. Строя рамку вокруг пустого квадрата $34 \times 34$, первая девочка составила квадрат $50 \times 50$, вторая — квадрат $62 \times 62$ и третья — квадрат $72 \times 72$ с четырьмя лишними кубиками по углам.

227. Стороны треугольника равны 13, 14 и 15, причем основание равно 14, высота 12 и площадь 84. Существует бесконечно много рациональных треугольников, стороны которых выражаются последовательными целыми числами, как, например, 3, 4 и 5 или 13, 14 и 15, но только в одном из них высота удовлетворяет нашим условиям.

Треугольниками, у которых стороны выражаются тремя последовательными целыми числами, а площадь — целым числом, являются следующие:

$$\begin{array}{rrrl} 3 & 4 & 5 & \\ 13 & 14 & 15 & \\ 51 & 52 & 53 & \\ 193 & 194 & 195 & \\ 723 & 724 & 725 & \text{и т. д.} \end{array}$$

Их можно найти очень просто:

$$52 = 4 \times 14 - 4,$$

$$194 = 4 \times 52 - 14,$$

$$724 = 4 \times 194 - 52,$$

или в общем виде $U_n = 4U_{n-1} - U_{n-2}$. Существует и другой способ построения треугольников. Найдите $x$ такое, чтобы $3(x^2 - 1)$ было точным квадратом. Ему будет соответствовать треугольник со сторонами $2x$, $2x + 1$, $2x - 1$.

228. Так как корова и коза в день съедают $\frac{1}{45}$, корова и гусь $\frac{1}{60}$ и коза с гусем $\frac{1}{90}$ всей травы в день, мы легко находим, что корова съедает $\frac{5}{360}$, коза $\frac{3}{360}$ и гусь $\frac{1}{360}$ всей травы в день. Следовательно, все вместе они съедают в день $\frac{9}{360}$ (или $\frac{1}{40}$) всей травы, так что, поскольку прироста травы не будет, всю траву они съедят за 40 дней.

229. Всего в альбоме было 2519 марок.

230. Существуют два решения, не превосходящие десяти: 3 и 5, 7 и 8.

Общее решение получается следующим образом. Обозначив числа через $a$ и $b$, получим

$$a^2 + b^2 + ab = \square = (a - mb)^2 = a^2 - 2amb + b^2m^2.$$

Следовательно,

$$b + a = -2am + bm^2,$$

откуда

$$b = \frac{a(2m + 1)}{m^2 - 1},$$

где $m$ может быть любым целым числом, большим 1, и $a$ выбирается так, чтобы число $b$ было целым. В общем виде

$$a = m^2 - 1,$$

$$b = 2m + 1.$$

231. Четырежды 2 плюс 20 равно 28. Четыре дрозда ($\frac{1}{7}$ часть) были подстрелены; вот они-то и остались, потому что остальные дрозды улетели.

232.

$$\begin{array}{r} 100 \\ 330 \\ + \quad 505 \\ 077 \\ 099 \\ \hline 1111 \end{array}$$

233. В XX веке существует 215 дат с указанным свойством, если включать случаи вроде $\frac{25}{4}$ - 00. Наиболее «плодовитым» в этом отношении оказался 1924 г., в котором было 7 таких дат: 24/1 - 24, 12/2 - 24, 2/12 - 24, 8/3 - 24, 3/8 - 24, 6/4 - 24, 4/6 - 24. Чтобы решить задачу, нужно лишь отыскать года, содержащие как можно большее число делителей.

234. Чтобы умножить 993 на 879, нужно действовать так. Вычесть 7 из 879 и прибавить к 993. При этом получаются два числа, 872 и 1000, произведение которых равно 872 000. 993 - 872 = 121. Если 121 умножить на 7, то получится 847. Сложив эти два результата, мы найдем верный ответ: 872 847[38].

235. Искомое число равно 987 654 321, что при умножении на 18 дает 17 777 777 778 с 1 и 8 соответственно в начале и в конце. То же справедливо и для других сомножителей, за исключением 90, когда мы получаем 88 888 888 890 с 90 на конце.

[Автор не заметил таких чисел, как 1001, 10 101 и 100 101, составленных из 0 и 1, с 1 на концах и не содержащих двух идущих подряд 1, каждое из которых также является решением задачи.— *М. Г.*]

236. Основная трудность заключается в том, чтобы правильно начать, и здесь можно предложить следующий метод. Из номеров по горизонтали наиболее обещающим выглядит номер 18. Тремя одинаковыми цифрами могут быть 111, 222, 333 и т. д. Номер 26 по вертикали равен квадрату номера 18 по горизонтали. Следовательно, номер 18 по горизонтали равен либо 111, либо 222, поскольку квадраты чисел 333, 444 и т. д. содержат более пяти цифр. Из номера 34 по горизонтали мы узнаем, что средняя цифра номера 26 по вертикали равна 3, отсюда число, стоящее под номером 26 по вертикали, есть квадрат числа 111, или 12 321.

| | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0 | 2 | 4 | | 9 | | 8 | 6 | 4 | 9 |
| 3 | | 5 | 4 | 3 | 1 | 4 | 9 | 9 | | 2 |
| 3 | 6 | | 5 | 4 | 2 | 8 | 9 | | 1 | 6 |
| 1 | 6 | 9 | | 3 | 2 | 4 | | 1 | 1 | 1 |
| | 4 | 7 | 7 | | 5 | | 1 | 2 | 1 | |
| 4 | 3 | 2 | 4 | 5 | | 1 | 1 | 2 | 1 | 1 |
| | 6 | 2 | 5 | | 1 | | 4 | 2 | 1 | |
| 6 | 2 | 5 | | 3 | 2 | 1 | | 2 | 1 | 0 |
| 5 | 3 | | 7 | 3 | 3 | 3 | 2 | | 1 | 3 |
| 6 | | 4 | 2 | 8 | 2 | 6 | 1 | 6 | | 9 |
| 1 | 2 | 9 | 6 | | 1 | | 6 | 4 | 9 | 8 |

---

Теперь мы знаем номер 18 по горизонтали, что позволяет найти номера 14 по вертикали и по горизонтали. Затем мы находим номер 7 по вертикали. Это четырехзначный куб, оканчивающийся на 61, что полностью его определяет. Далее рассмотрим номер 31 по горизонтали. Это треугольное число, то есть число, полученное суммированием 1, 2, 3, 4, 5 и т. д. Но 210 — единственное треугольное число, у которого средняя цифра 1. Отсюда мы получаем номера 31 по горизонтали, 18 по вертикали, 21 по вертикали и 23 по горизонтали. Затем мы можем найти номер 29 по горизонтали, что даст нам число, стоящее под номером 30 по вертикали. Из номера 29 по вертикали мы можем получить первые две цифры номера 15 по горизонтали и затем полностью определить номер 15 по горизонтали и номер 29 по вертикали. Остальные числа найти не сложно.

237. Во время боевых действий было убито 472 человека. Производя расчеты, читатель обнаружит, что в каждой из четырех лагерных групп было по 72 человека.

Общее решение можно получить из неопределенного уравнения

$$\frac{35x - 48}{768} = \text{Целое число},$$

где $x$ равно числу оставшихся в живых. Решая его обычным образом, мы получаем $x = 528$. Следовательно, число убитых равно 472 (1000 - 528).

238. Мячик пройдет расстояние в $218\frac{7}{9}$ фута.

239. Изготовлено 8 секций по 20 м, 1 секция длиной 18 м и 7 секций по 17 м. Таким образом, всего получилось 16 секций общей длиной 297 м, что и требовалось заказчику.

240.

$$1 + 3 + 9 + 27 + 81 = 121 = 11^2$$

и

$$1 + 7 + 49 + 343 = 400 = 20^2.$$

241. Сторона одного участка составляет 38 м (1444 плиты), сторона другого — 26 м (676 плит).

242. Всего было 180 колонок, а длина всей линии, окружающей памятник, составляла 33 м. Если ставить колонки через 10 см, тогда не хватит 150 колонок, а если ставить их через 30 см, то будет достаточно 110 и еще 70 колонок останется.

243. Сначала мы находим возраст обезьяны ($1\frac{1}{2}$ года) и возраст ее матери ($2\frac{1}{2}$ года). Следовательно, обезьяна весит $2\frac{1}{2}$ фунта и столько же весит груз. Затем мы находим, что вес веревки составляет $1\frac{1}{4}$ фунта, или 20 унций, а поскольку каждый фут весит 4 унции, то длина веревки равна 5 футам.

244. Всего было 900 человек. Первоначально выехало 100 фургонов по 9 человек в каждом. После того как сломалось 10 фургонов, в оставшихся оказалось по 10 человек («по одному лишнему человеку»). Когда при отправке домой сломалось еще 15 фургонов, в каждом из 75 оставшихся фургонов ехало по 12 человек («на три человека больше, чем было во время отъезда утром»).

245. Пэт сказал: «Какое число ни назови, все едино, а раз тут десять человек да еще я сам, то назову-ка я одиннадцать и начну счет с себя». Разумеется, первым отправился на порку он сам. Следовательно, если начинать с номера 1, то наименьшим числом, роковым для англичан, будет 11. На самом деле Пэту следовало назвать 29 и начинать счет с номера 9. Тогда экзекуции подверглись бы все носильщики. Эти два числа минимальны.

246. Бакалейщик должен смешать 70 фунтов чая по 32 цента и 30 фунтов чая по 40 центов за фунт.

247. Рыба весит 72 унции, или $4\frac{1}{2}$ фунта. Хвост весит 9 унций, туловище 36 и голова 27 унций.

248. Ясно, что 999 919 не может быть простым числом и что, поскольку нужно найти единственное решение, оно должно разлагаться в произведение двух простых сомножителей. Этими сомножителями будут 991 и 1009. Нам известно, что каждая кошка поймала больше мышек, чем было кошек. Значит, всего была 991 кошка, и каждая из них поймала по 1009 мышек.

249. Пусть номер ящика равен $n$. Тогда в нем будет $2n-1$ перегородок в одном направлении и $2n-3$ в другом, что даст $4n^2-4n$ ячеек и $4n-4$ перегородок. Так, в двенадцатом ящике имеются 23 и 21 перегородок (всего 44) и 528 ячеек. Это правило годится для всех ящиков, кроме второго, где может быть любое количество перегородок в одном направлении и одна перегородка в другом. Так что 1 и 1 подойдут (единственная перегородка не годится, поскольку такое «перегораживание» было бы нелепостью). Таким образом, всего получается 262 перегородки и 2284 ячейки (а не 264 и 2288).

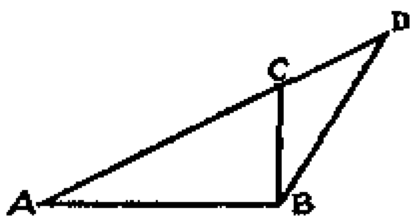
250. Если внутренний диаметр звена умножить на число звеньев и прибавить удвоенную толщину железного прута, то получится длина цепи. Каждое звено, присоединенное к цепи, теряет в своей длине удвоенную толщину прута. Внутренний диаметр равен $2\frac{1}{3}$ см. Если мы умножим его на 9 и прибавим 1, то получим ровно 22 см, а если мы умножим его на 15 и прибавим 1, то как раз и получится 36 см. Следовательно, два куска цепи содержат соответственно по 9 и 15 звеньев.

251. Если брат отвечал Доре «чет», то десятицентовая монета находилась в правом кармане, а пятицентовая в левом. Если же он говорил «нечет», то пятицентовая монета лежала в правом, а десятицентовая в левом кармане.

252. Первоначально в каждой сахарнице было по 36 кусков, а после того, как в каждую чашку положили по 2 ($\frac{1}{18}$) куска, в чашках стало по 6, а в сахарницах — по 18 кусков. Разность как раз и равна 12.

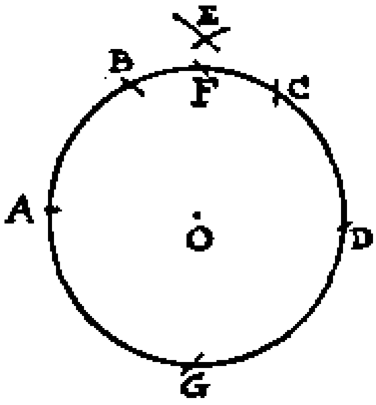
253. Всего 51 секция, в каждой секции по 23 целые колонки. Итого получалось 1173 целые колонки и 50 пар половинок, что составляло в совокупности 1223 колонки, как и требовалось по условию задачи.

---



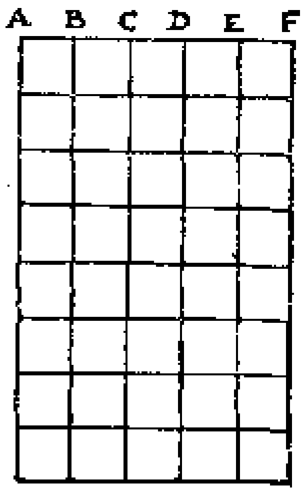

---

254. Пусть длина $AB$ 10 см. Из точки $B$ восставим к $AB$ перпендикуляр $BC$, равный половине $AB$. Соединим точки $A$ и $C$ отрезком прямой и продолжим его за точку $C$ так, чтобы $CD = CB$. Проведем отрезок $BD$. Это и есть искомый радиус окружности. Если начертить эту окружность и вписать в нее правильный пятиугольник, то стороны последнего будут точно равны 10 см.




255. Чтобы отметить вершины квадрата с помощью одного циркуля, сначала рисуют круг. Затем, зафиксировав раствор циркуля и начав с любой произвольно взятой на окружности точки $A$, отмечают точки $B$, $C$ и $D$. Из точек $A$ и $D$ как из центров раствором $AC$ описывают две дуги, пересекающиеся в точке $E$. Расстояние $EO$ равно стороне искомого квадрата. Следовательно, если мы сделаем из $A$ засечки $F$ и $G$ радиусом $OE$, то $A$, $F$, $D$, $G$ и будут искомыми вершинами квадрата.

256. Если провести 15 прямых так, как показано на рисунке, получится ровно 100 квадратов. У сорока из них сторона равна $AB$, у двадцати — $AC$, у восемнадцати — $AD$, у десяти — $AE$ и у четырех — AF. С помощью 15 прямых можно образовать даже 112 квадратов, но от нас требовалось точно 100. С помощью 14 прямых вам не удастся построить более 91 квадрата.



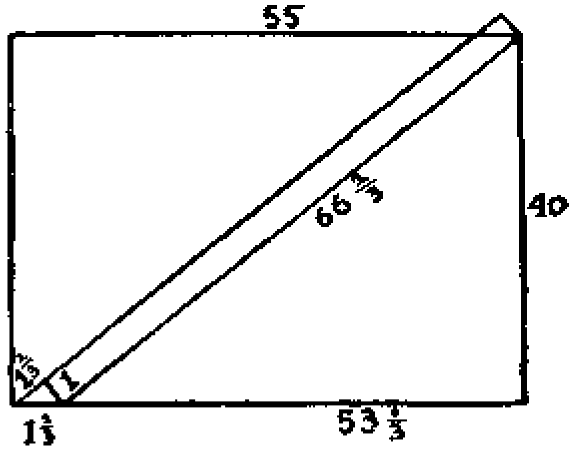

В общем случае с помощью $n$ прямых можно образовать $(n - 3)(n - 1)(n + 1)/24$ квадратов, если $n$ нечетно, и $(n - 2)n(n - 1)/24$ квадратов, если $n$ четно.

Если мы имеем $m$ прямых, перпендикулярных другим $n$ прямым, причем $m$ меньше $n$, то число квадратов равно

$$\frac{m(m-1)(3n-m-1)}{6}.$$

257. Правило заключается в следующем. Если четыре стороны образуют арифметическую прогрессию, то наибольшая площадь равна квадратному корню из произведения всех сторон. Квадратный корень из $70 \times 80 \times 90 \times 100$ равен 7099 м$^2$. Это и есть верный ответ.

258. Площадь дорожки равна точно $66\frac{2}{3}$ м$^2$, что станет совершенно очевидным, если вы представите себе маленький треугольный кусок, отрезанный снизу и перенесенный в правый верхний угол (см. рисунок).

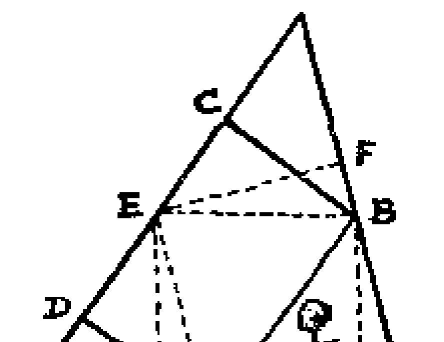



Докажем наше утверждение. Площадь всего сада равна $55 \times 40 = 2200$ м$^2$. Но $(53\frac{1}{3} \times 40) + 66\frac{2}{3}$ также равно 2200. Кроме того, сумма чисел $\left(53\frac{1}{3}\right)^2$ и $40^2$ должна равняться $\left(66\frac{2}{3}\right)^2$, что и выполняется в действительности.

Общее решение таково. Обозначим ширину прямоугольника через $B$, длину через $L$, ширину дорожки через $C$ и длину дорожки через $x$. Тогда

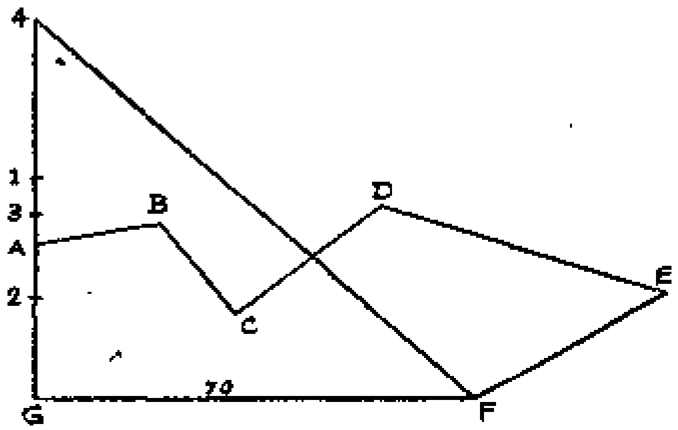
$$x = \frac{\pm B\sqrt{(B^2 - C^2)(B^2 + L^2) + C^2L^2 - BCL}}{B^2 - C^2}.$$

В нашем случае $x = 66\frac{2}{3}$; следовательно, основание прямоугольного треугольника с гипотенузой $66\frac{2}{3}$ м и катетом, равным 40 м, составляет $53\frac{1}{3}$ м.

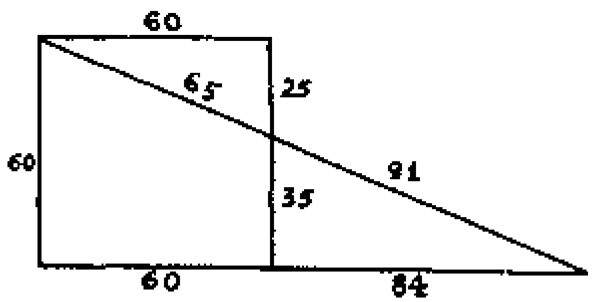



259. Разделим стороны треугольника точками $A$, $B$ и $E$ пополам. Если провести $AB$ и опустить перпендикуляры $DA$ и $CB$, то $ABCD$ будет наибольшим возможным прямоугольником, а его площадь составит

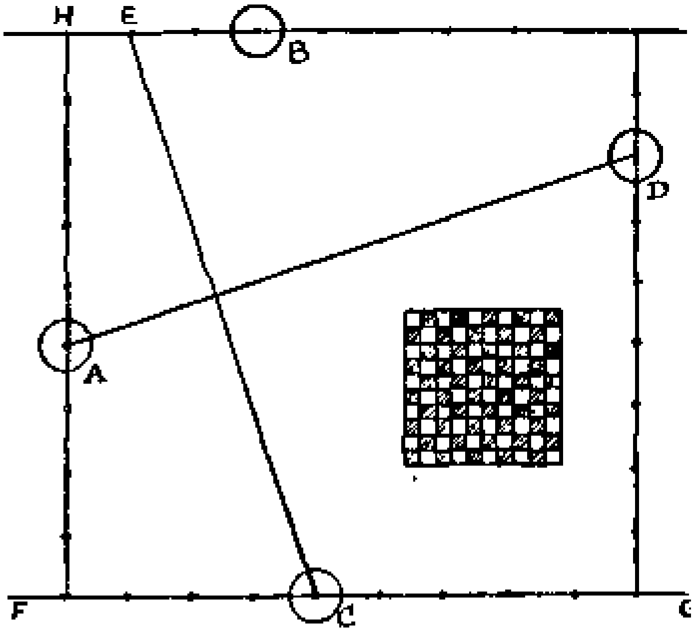
половину площади треугольника. Два других решения *FEAG* и *KEBH* подошли бы нам (у обоих та же самая площадь), если бы они не захватывали дерево. Это правило можно приложить к любому остроугольному треугольнику, а в случае прямоугольного треугольника получатся только два решения.




260. Многоугольник с произвольным числом сторон можно свести к равновеликому треугольнику, а поскольку угол $AGF$ оказался прямым, то сделать это очень легко. Продолжим отрезок $GA$. Приложим линейку к точкам $A$ и $C$, параллельно перенесем ее вверх до точки $B$ и отметим точку 1. Затем соединим отрезком прямой точки 1 и $D$ и параллельно перенесем его вверх до точки $C$, отметив точку 2. Теперь приложим линейку к точкам 2 и $E$, параллельно перенесем ее до точки $D$ и отметим точку 3. Далее соединим линейкой точки 3 и $F$, параллельно перенесем ее до $E$, отметив точку 4. Если теперь мы соединим прямой точки 4 и $F$ то получим треугольник $G4F$, площадь которого равна площади нашего неправильного поля. Поскольку на карте $GF$ равно 7 см (70 м), то отрезок $G4$ равен 6 см (60 м) и площадь поля равна $\frac{1}{2}(70 \times 60)$, или 2100 м$^2$. Этот простой и ценный способ определения площади многоугольников следовало бы знать каждому, но, увы, пока это остается лишь благим пожеланием.



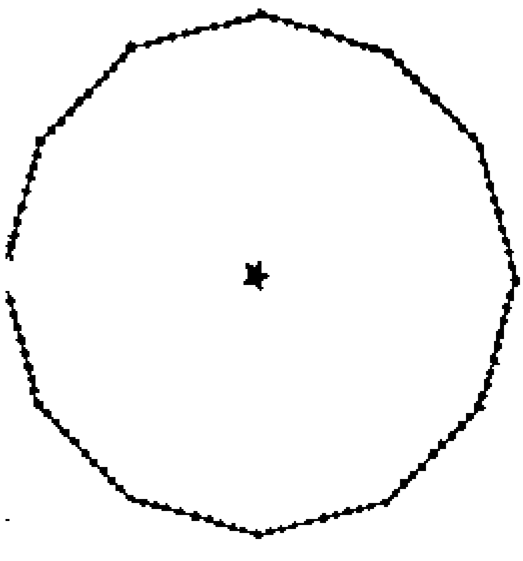

261. Все размеры приведены на рисунке. Обычно для того, чтобы найти решение, приходится решать биквадратное уравнение, но поскольку в условии задачи сказано, что ответ должен быть «в целых метрах», то можно заметить, что число $91^2$ представимо в виде суммы квадратов единственным образом: $91^2 = 84^2 + 35^2$. Зная это, определить все размеры очень легко. Искомое расстояние равно 35 м.

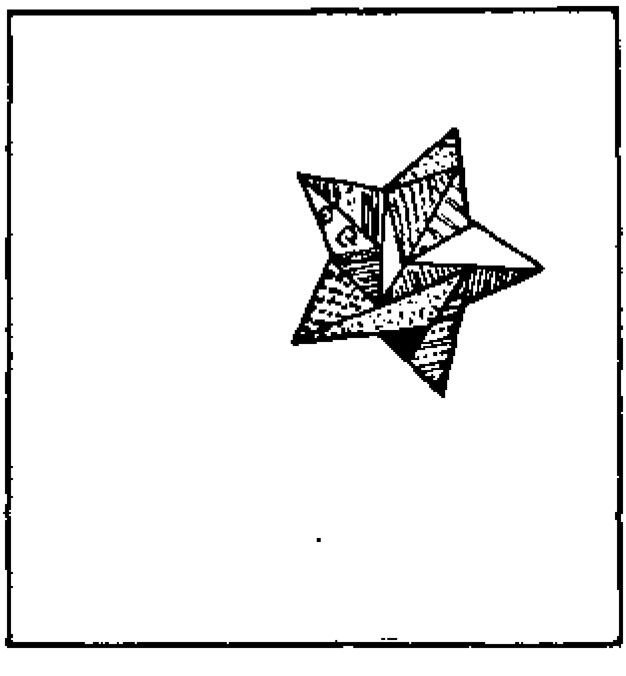



262. Соединим прямой точки $A$ и $D$ (см. рисунок) и построим отрезок $CE$, перпендикулярный и равный отрезку $AD$. Тогда точка $E$ совпадет с центром одного из квадратов. Проведем прямую $EB$ и продолжим ее в обе стороны. Проведем также через $C$ прямую $FG$ параллельно $EB$, а через $A$ и $D$ — перпендикуляры к $EB$ и $FG$. Поскольку H есть центр углового квадрата, то, приняв отрезок $HE$ за единицу длины, мы обнаружим, что доска имеет размеры $10 \times 10$.

Если бы не были даны размеры шашек, то мы могли бы разбить доску на более мелкие квадраты. Но поскольку размеры шашек видны из рисунка, дальнейшее разбиение доски невозможно: в более мелких квадратах наши шашки просто не уместятся. Так как расстояние между центрами квадратов равно стороне квадрата, мы легко можем восстановить всю доску, что и показано на рисунке.

263. На рисунке слева показано чрезвычайно простое решение данной головоломки. Звездочка в центре — это офицер, а точки — солдаты.





264. На рисунке справа изображена симметричная звезда в том самом положении, которое она занимает на скатерти. Все другие лоскутки для большей ясности не показаны. Удивительно, как трудно обнаружить звезду до тех пор, пока вам ее однажды не покажут. После эго решение становится совершенно очевидным.

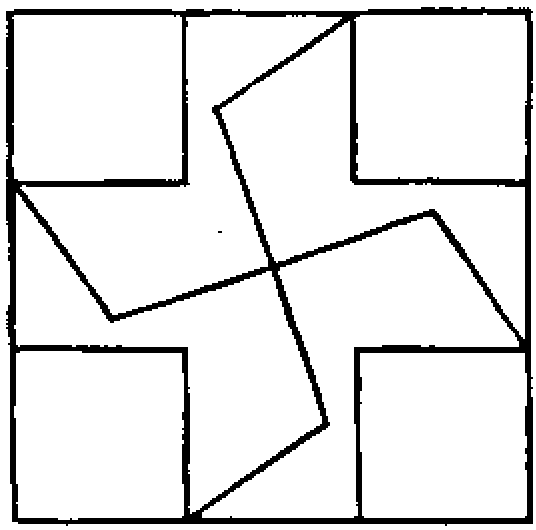
265. Данную трапецию можно вписать в окружность. Полусумма $x$ сторон равна 29. Вычитая из этого числа по очереди все стороны, мы получим 9, 13, 17, 19. Произведение этих чисел равно 37 791. Квадратный корень из полученного числа равен 194,4, что и совпадает с размером искомой площади.

266. Продолжив приведенную ниже таблицу, вы сможете получить сколько угодно рациональных треугольников нужного вида.

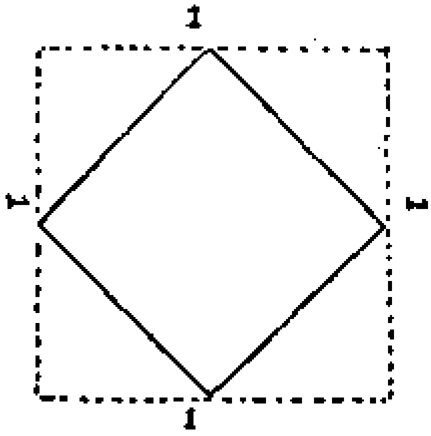
| P | Q | Высота | Площадь |
|---|---|---|---|
| 2 | 4 | 3 | 6 |
| 8 | 14 | 12 | 84 |
| 30 | 52 | 45 | 1170 |
| 112 | 194 | 168 | 16 296 |
| 418 | 724 | 627 | 226 974 |
| 1560 | 2702 | 2340 | 3 161 340 |

Числа в таблице удовлетворяют соотношению $3P^2 + 4 = Q^2$. Каждое следующее значение $P$ (начиная с третьего сверху) можно найти, умножив текущее значение $P$ на 4, после чего следует вычесть из полученного произведения предыдущее значение $P$. Аналогично вычисляются и значения $Q$ (начиная с четвертого сверху). Высота треугольника равна $P/2$, площадь — произведению высоты на $Q/2$. Длина средней из трех сторон всегда оказывается равной $Q$. В последней строке таблицы приведено наименьшее значение площади, делящееся на 20. Стороны треугольника в этом случае равны 2701, 2702, 2703, его высота 2340.

267. На приведенном здесь рисунке показано, как можно разделить окно на восемь просветов, «у которых все стороны тоже были бы равны». Каждый отрезок прута имеет равную длину.

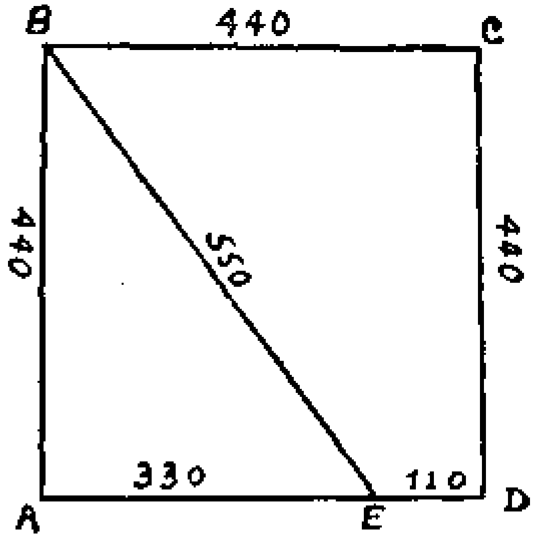


Подразумевалось (хотя явно и не оговаривалось), что площади всех просветов должны быть равными, а в нашем случае площадь каждого из четырех неправильных просветов на $\frac{1}{4}$ больше площади квадратного просвета и ни форма, ни число сторон у них не совпадают. И все же это решение точно удовлетворяет поставленным условиям. Если бы из каждой головоломки пришлось удалить все, что допускает неоднозначное толкование, то она оказалась бы перегруженной всевозможными условиями. Лучше оставить кое-что недоговоренным (разумеется, если речь идет не об олимпиадных задачах).

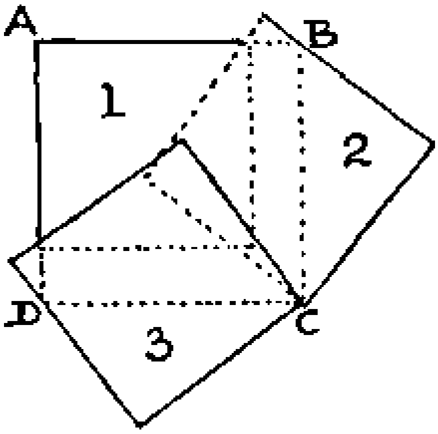



268. На рисунке пунктиром изображено первоначальное окно размером 1 м$^2$. После того как владелец загородил четыре угла, у него осталось квадратное окно вдвое меньшей площади, но в метр шириной и метр высотой.

269. Доску следует разрезать на расстоянии от В, равном $60\sqrt{10}$ - 120 = 79,732...




270. Каждая сторона поля равна 440 м, $BAE$ — прямоугольный треугольник. Следовательно, $AE$ = 330 м, $BE$ = 550 м. Если Браун пробегает 550 м за то же время, за которое Адамс пробегает 360 м (330 + 30), то Браун может пробежать оставшиеся 100 м за то время, за которое Адамс пробежит лишь 72 м. Но 30 + 72 = 102 м, так что Браун выигрывает, опередив соперника на 8 м.

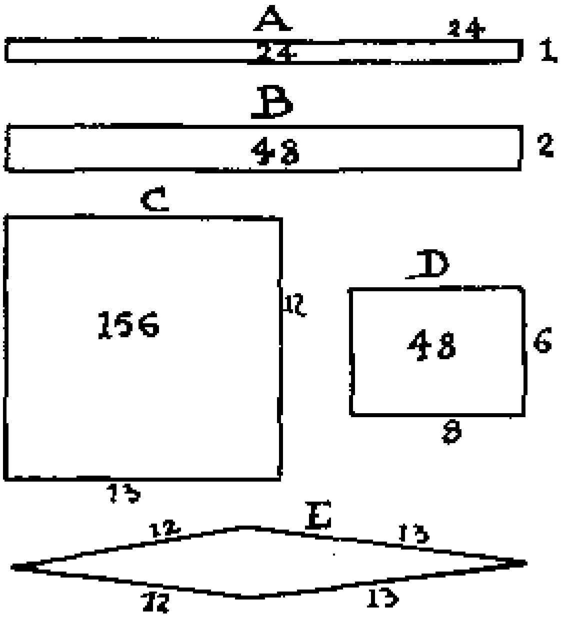



271. Три скатерти размером 144 ×144 см покроют стол размером 183 ×183 см, если их положить так, как показано на рисунке. Квадрат $ABCD$ — крышка стола, а квадраты 1, 2 и 3 — скатерти. Части второй и третьей скатертей, разумеется, свесятся со стола.

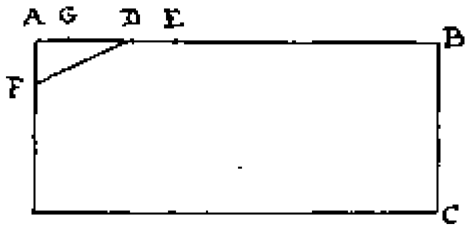
272. Холст должен быть размером 10 ×20 см, ширина миниатюры составит 6 см, а высота 12 см. Нетрудно проверить, что излишки при этом окажутся такими, как требуется по условию задачи.

273. Клумба имела в длину 14 м, а в ширину 10 м.

274. Задачу можно решать по-разному. Ответ всегда будет равен 35.

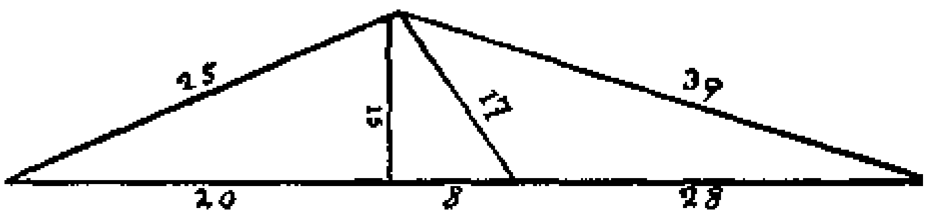



275. Старый ответ состоит в том, что если вы расположите жерди, как показано на рисунке в случае $A$, то, добавив на концах по две жерди, как в случае $B$, вы получите удвоенную площадь. Надо заметить, что, во-первых, в условии нет указаний относительно формы загона. Во-вторых, если бы даже требовалось, чтобы первоначальный загон имел размеры 24 ×1, ответ все равно был бы неверен, поскольку, если вы расположите жерди, как в случае $C$, то площадь увеличится с 24 «квадратных жердей» до 156, и загон вместит 650 овец, причем число жердей останется прежним. Более того, вы можете удвоить площадь, как в случае $D$, оставив всего 28 жердей. Если же потребуется использовать все жерди и увеличить площадь ровно вдвое, то можно поступить так, как показано в случае $E$.




276. Отложим отрезок $AD$, равный четверти отрезка $AB$ (см. рисунок), и отмерим расстояния $DE$ и $AF$, каждое из которых составляет $\frac{1}{4}$ расстояния между точками $B$ и $C$. Если точка $G$ отстоит от $E$ на то же расстояние, что и точка $D$ от точки $F$, то длина отрезка $AD$ как раз и будет равна искомой ширине дорожки. Например, если сад имеет размеры $12 \times 5$ м, то ширина дорожки равна 1 м. Хотя ответ и не всегда выражается целым числом, тем не менее измерения будут верными в любом случае.

277. Правильность приведенного здесь рисунка можно легко проверить, поскольку сумма $15^2 + 20^2 = 25^2$, сумма $15^2 + 36^2 = 39^2$ и, наконец, $15^2 + 8^2 = 17^2$, Кроме того, $20 + 8 = 28$. Если бы разрешалось брать прямоугольный треугольник, то маленький треугольник слева со сторонами 15, 25, 20 сам мог бы служить решением, так как высота, опущенная на основание (25), равна 12, а медиана $12\frac{1}{2}$.



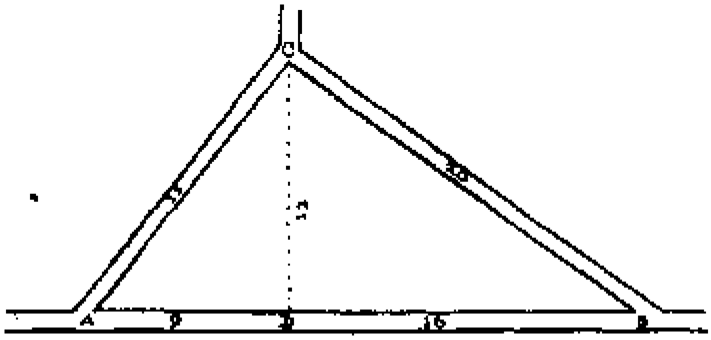

Быть может, наши читатели, пожелав испытать собственные силы, захотят найти общее решение данной задачи?

[Существует и другое решение: тупоугольный треугольник с основанием 66, сторонами 41 и 85 и высотой 40. Медиана этого треугольника равна 58. В этом случае высота опускается на продолжение основания, образуя новый, прямоугольный треугольник с основанием 9 и сторонами 40 и 41.— *М. Г.*]

278. Известны лишь расстояния 15 и 6 км. Все, что нужно сделать,— это разделить 15 на 6 и прибавить 2, при этом получится $4\frac{1}{2}$. Разделив затем 15 на $4\frac{1}{2}$) получите $3\frac{1}{3}$ км. Это и будет искомым расстоянием между двумя пунктами.

Приведенный способ применим во всех случаях, когда пути образуют прямоугольный треугольник. Простые алгебраические выкладки покажут, откуда взялась константа 2.

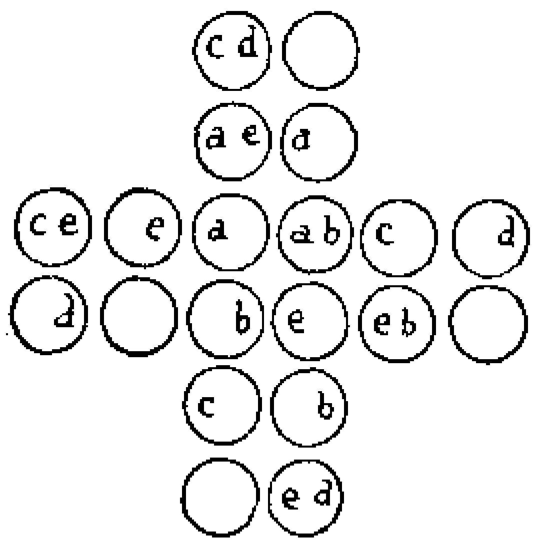
Проверить справедливость нашего решения можно следующим образом. Стороны треугольника равны 15, $9\frac{1}{3}$ (6 плюс $3\frac{1}{3}$) и $17\frac{2}{3}$ км (для того чтобы независимо от маршрута расстояние равнялось 21 км). Чтобы избавиться от дробей, умножим все числа на 3 и получим 45, 28 и 53. Если $45^2$ (2025) плюс $28^2$ (784) равно $53^2$ (2809), то все верно, а это равенство можно легко проверить.



279. На рисунке показаны все расстояния. Спросившему нужно было всего лишь возвести в квадрат 60 км, проделанные первым мотоциклистом (3600), и разделить результат на удвоенную сумму этих 60 и 12 км, составляющих расстояние от дороги $AB$ до $C$, то есть на 144. Проделав выкладки в уме, он, конечно, заметил, что результат можно получить, разделив 300 на 12, и поэтому сразу же нашел верный ответ — 25 км. Я не показываю здесь, как можно определить, если потребуется, остальные расстояния; сделать это совсем нетрудно.

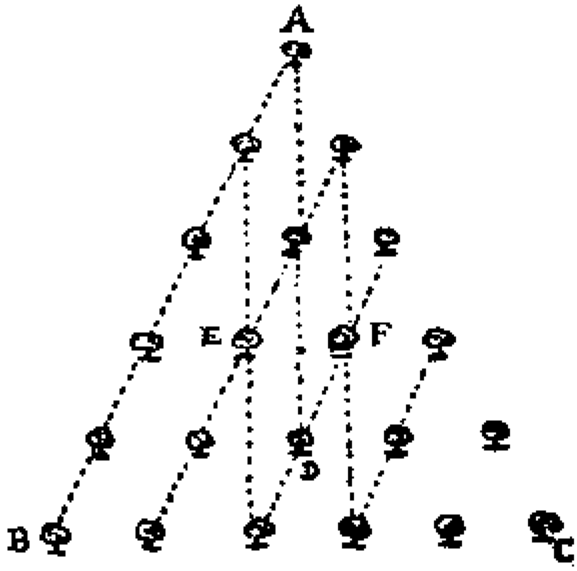
280. При тех размерах, которые приведены на приложенном к задаче рисунке, никакого треугольника построить вообще нельзя, так как сумма двух меньших сторон не будет превосходить третьей стороны. Очевидно, профессор хотел проверить сообразительность своих учеников.

281. Это снова была шутка. Владелец участка может строить дом, где пожелает, поскольку сумма перпендикуляров, опущенных из любой внутренней точки равностороннего треугольника на стороны, равна высоте данного треугольника.

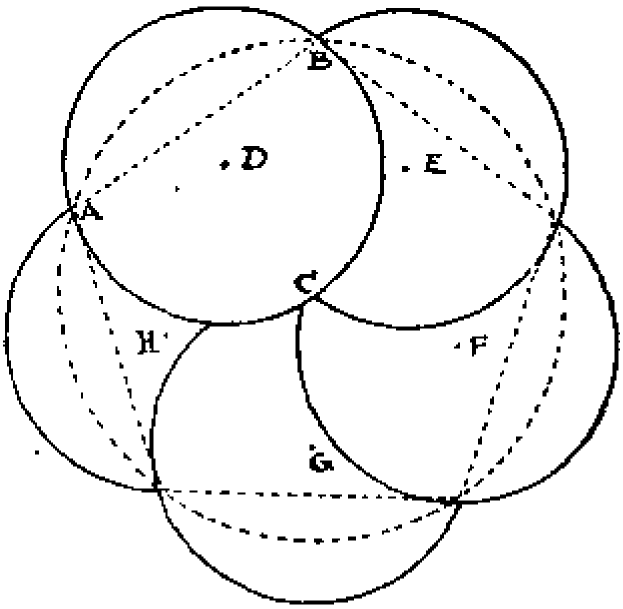



282. Всего таких квадратов 19. Из них 9 того же размера, что и квадрат, отметенный буквами $a$, 4 того же размера, что и квадрат, отмеченный буквами $b$, 4 размера $c$ и 2 размера $d$. Если убрать 6 фишек, отмеченных буквой $e$, то из оставшихся фишек нельзя будет образовать ни одного квадрата.

[На самом деле квадратов 21. Не сумеет ли читатель найти два квадрата, пропущенные Дьюдени? Ответ на вторую часть задачи остается тем не менее верным.— *М. Г.*]



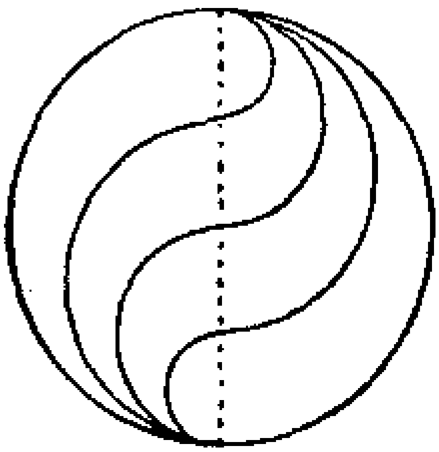

283. Число способов, с помощью которых из 21 дерева можно выбрать 3, равно $\frac{21}{1}\times\frac{20}{2}\times\frac{19}{3}$, или 1330. Треугольник можно образовать из любых трех деревьев, не лежащих на одной прямой. Три дерева на пунктирной прямой $AB$ можно выбрать 20 способами, на следующей параллельной прямой с пятью деревьями — десятью способами, на следующей — четырьмя и на следующей — одним способом, что в совокупности составляет 35 способов. Аналогично прямая $BC$ вместе с параллельными даст 35 способов и прямая $AC$ с параллельными — тоже 35 способов. Далее, прямая $AD$ вместе с прямыми, ей параллельными, даст 3 способа, а прямые $BF$ и $CE$ со своими параллельными — по 3 способа каждая. Следовательно, 3 дерева, лежащие на одной прямой, можно выбрать 35 + 35 + 35 + 3 + 3 + 3 = 114 различными способами. Значит, 1330 - 114 = 1216 и есть искомое число способов, с помощью которых можно огородить треугольный участок.




284. На рисунке пунктиром показаны окружность, ограничивающая красный круг, и вписанный в нее правильный пятиугольник. Общий центр окружности и пятиугольника обозначен буквой $C$. Найдем точку $D$, равноотстоящую от $A$, $B$ и $C$, и радиусом $AD$ проведем окружность $ABC$. Пять дисков такого размера полностью покроют круг, если их центры поместить в точки $D$, $E$, $F$, $G$ и $H$. Если диаметр большого круга равен 6 дм, то диаметры дисков немного меньше 4 дм (диаметры дисков равны 4 дм «с точностью до $\frac{1}{2}$дм»).

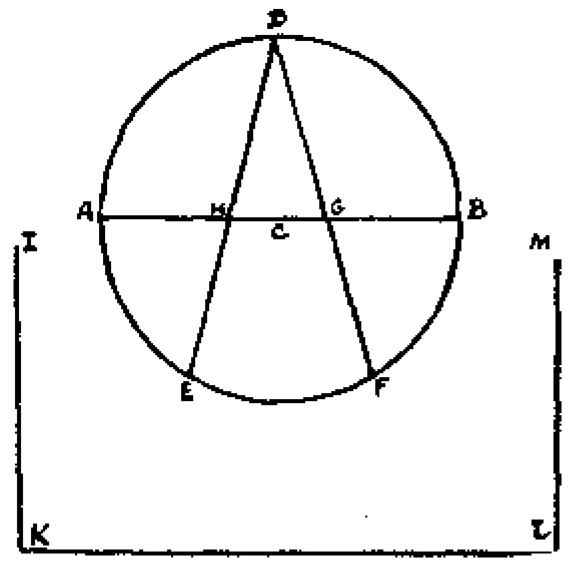
Если у вас нет никаких тайных отметок на круге, то потребуется немного внимания и тренированности, чтобы класть диски на нужные места, не сдвигая их потом.

Следует добавить, что большой круг можно покрыть, если отношение диаметров превышает 0,6094185, и невозможно, если оно меньше 0,6094180. В нашем случае, когда все диски проходят через центр, отношение равно 0,6180340.



285. Чтобы разделить круглое поле тремя изгородями равной длины на 4 равные части, первоначально следует разделить на 4 части диаметр круга, а затем по обе его стороны описать полуокружности, как показано на рисунке. Изогнутые линии изобразят тогда искомые изгороди.

286. Если построить прямоугольник, у которого одна сторона равна диаметру круга, а другая в 3 раза больше, то его диагональ будет довольно близка к ответу. Практически ее отношение к диаметру будет равно $\sqrt{10}$, или 3,1622... Мы рекомендуем следующий метод.



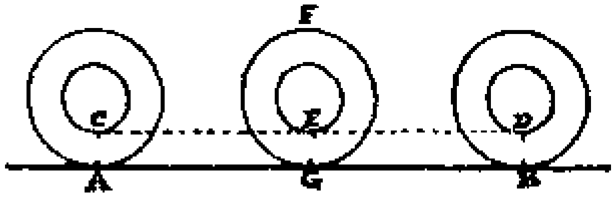

Проведем диаметр $AB$. Разделим точкой $D$ полуокружность пополам. Радиусом $AC$ из точек $A$ к $B$ сделаем засечки $E$ и $F$ и проведем прямые $DE$ и $DF$. Отрезок $DG$ плюс отрезок $GH$ дадут $\frac{1}{4}$ длины окружности $IK$ с относительной погрешностью 0,005. Ломаная $IKLM$ и будет искомой.

Существует другой метод, дающий относительную погрешность 0,017, но он сложнее.

287. Поскольку внешние колеса движутся вдвое быстрее внутренних, то длина окружности, которую они описывают, в 2 раза больше длины внутренней окружности. Следовательно, диаметр одного круга больше диаметра другого в 2 раза. Так как расстояние между колесами равно 1,5 м, то диаметр большего круга равен 6 м. Умножив 6 м на 3,1416 (обычное приближенное значение числа $\pi$), мы получим 18,85 м — длину окружности большего круга.

288. Первый компаньон должен пользоваться точильным кругом до тех пор, пока радиус круга не уменьшится на 1,754 см. Второй должен уменьшить радиус еще на 2,246 см, оставив третьему 4 см и отверстие. Это очень хорошее приближение.

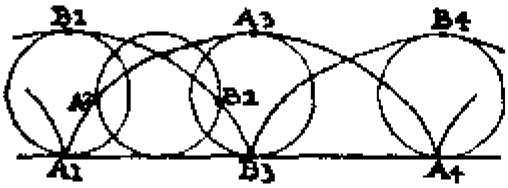
289. Окружности переднего и заднего колес равны соответственно 15 и 18 футам Таким образом, каждые 360 футов переднее колесо делает 24 оборота, а заднее — 20 и разность составляет 4 оборота. Если длину окружности уменьшить на 3 фута, то 12 в 360 уложится 30 раз, а 15 уложится 24 раза и разность составит 6 оборотов




290. Диаметр внутреннего круга в два раза меньше наружного, следовательно, и его окружность вдвое меньше. Если бы он просто прокатился вдоль воображаемой линии $CD$, то ему на это потребовалось бы два оборота: после первого точка $D$ заняла бы положение $E$. Но точка $B$ тогда попала бы в $F$, а не в $G$, что абсурдно. Дело в том, что внутренний круг делает один оборот, но он катится по линии $CD$ как за счет собственного вращения, так и за счет переноса. Точка $A$ попадает в $B$ лишь благодаря обороту всего колеса, но если вы представите себе точку в центре колеса (у точки нет длины окружности), то она проходит то же расстояние за счет того, что я называю переносом. Траектория точки $A$ представляет собой обычную циклоиду, а точка $C$ по дороге в $D$ описывает трохоиду.

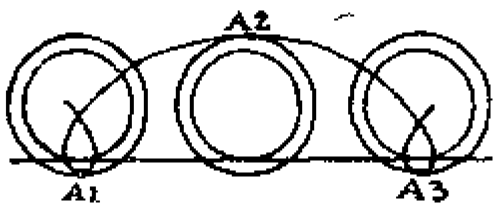

Мы видели, что если колесо делает один полный оборот, при котором $A$ попадает в $B$, то расстояние $AB$ равно длине окружности, хотя и не можем выразить его точно. Далее, точка $A$ движется по кривой, показанной на рисунке, которая, как я уже говорил, называется простой циклоидой. Если диаметр колеса равен 28 см, то мы в состоянии точно вычислить длину этой кривой. Любопытно, что, не умея точно выразить длину прямолинейного отрезка $AB$, мы тем не менее можем найти точную длину кривой! Чему она равна? Я дам ответ немедленно. Длина циклоиды в 4 раза больше длины диаметра. Следовательно, $4 \times 28$ равно искомой длине — 112 см. Кроме того, площадь фигуры, ограниченной этой кривой и отрезком $AB$, ровно в 3 раза больше площади круга. Следовательно, площадь каждой из замкнутых фигур, находящихся по обе стороны круга, равна площади круга.

291. Разумеется, каждая часть колеса вращается вокруг оси с постоянной скоростью, и, следовательно, в случае *неподвижной* оси, как, например, у точильного круга, ответ будет отрицательным. Однако в случае *движущегося* велосипеда не вызывает сомнений тот факт, что верхняя часть колеса движется *относительно* земли быстрее нижней. Если бы дело обстояло иначе, то велосипедист оставался бы на месте, подобно точильному кругу.

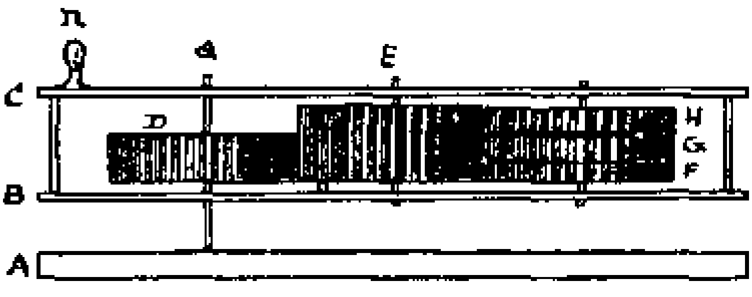



Взгляните на рисунок, где изображены четыре положения колеса, которые оно занимает за время полного оборота от $A_1$ до $A_4$. Я уже упоминал об одной кривой, называемой простой циклоидой, которую описывает точка на ободе колеса. Здесь показаны две такие кривые, описываемые точками $A_1$ и $B_1$. Обратите внимание, что за пол-оборота $A_1$ пройдет до $A_3$, а $B_1$ — до $B_3$ равные расстояния. Но ни одна точка не движется все время с постоянной скоростью. Это можно сразу же заметить, если мы рассмотрим четверть оборота, когда $A_1$ займет всего лишь положение $A_2$, а $B_1$ доберется уже до $B_2$. Мы видим, таким образом, что точка обода движется относительно земли медленней, когда она находится внизу, и быстрее, когда она расположена сверху.

А вот простой практический способ убедить наших недоверчивых друзей, не прибегая к помощи рисунка. Проведите на листе бумаги прямую линию и положите монету так, чтобы год ее выпуска находился на этой прямой. Теперь прокатите монету вдоль прямой на очень маленькое расстояние вправо и влево. При этом станет вполне очевидно, что год выпуска едва оторвется от прямой, а верхняя часть цифры, указывающей достоинство монеты, пройдет значительное расстояние. Это вполне убедительно показывает, что верхняя часть колеса (то есть часть, которая в данный момент находится сверху) движется быстрее нижней.



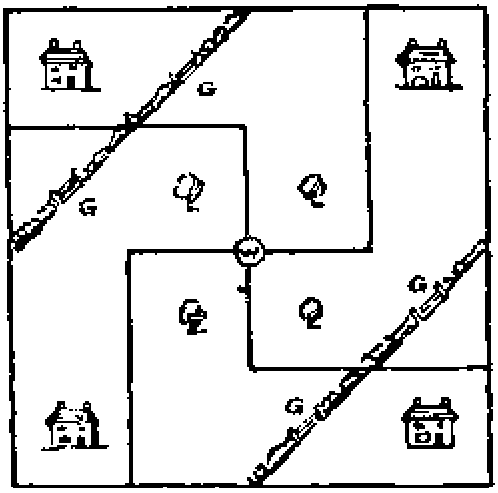

292. Я уже говорил о том, что если вы отметите точку на ободе велосипедного колеса, то она опишет в пространстве кривую, называемую простой циклоидой. Если же вы отметите точку на реборде колеса локомотива или железнодорожного вагона, то она опишет трохоиду, кривую, заканчивающуюся петлями. На рисунке я изобразил колесо с ребордой ниже уровня рельсов в трех положениях: начало, пол-оборота и полный оборот. Точка $A_1$ переходит в $A_2$ и $A_3$. Поскольку предполагается, что поезд движется слева направо, проведите карандашом вдоль кривой в этом направлении. Вы обнаружите, что в нижней части петли карандаш в самом деле движется справа налево. Дело в том, что «в любой заданный момент» некоторые точки внизу петли движутся в направлении, противоположном поезду. Поскольку таких точек на окружности реборды бесконечно много, при движении поезда они описывают бесконечно много подобных петель. Фактически некоторые точки реборды постоянно движутся в направлении, противоположном поезду.

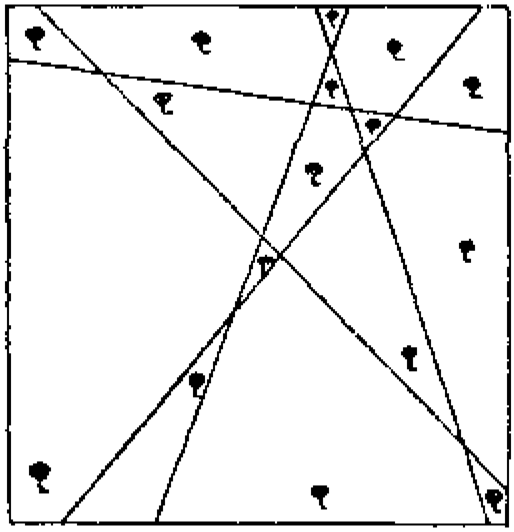



293. Механизм, изображенный на рисунке, состоит из двух деревянных дощечек $B$ и $C$, соединенных по углам так, что они образуют рамку. Рамка с помощью ручки $n$ вращается вокруг оси $a$, которая проходит сквозь рамку и жестко закреплена на доске или столе $A$. Внутри рамки на ось жестко насажено зубчатое колесо $D$. При

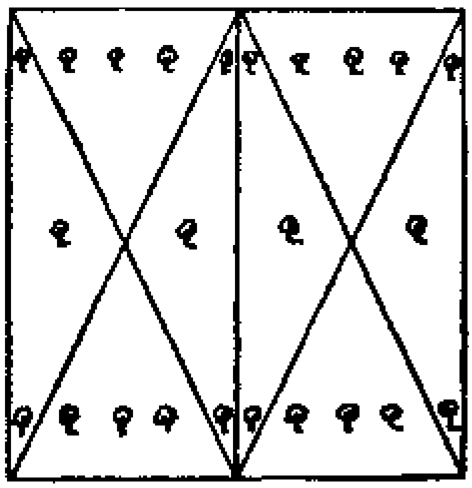
вращении рамки оно поворачивает толстое колесо $E$, которое, подобно остальным трем колесам $F$, $G$ и $H$, свободно сидит на своей оси. Тонкие колеса $F$, $G$ и $H$ приводятся в движение толстым колесом $E$ таким образом, что при вращении рамки $H$ вращается в ту же сторону, что и $E$, $G$ — в противоположную, а $F$ остается неподвижным. Секрет заключается в том, что, хотя все колеса могут быть одинакового диаметра и $D$, $E$ и $F$ могут ($D$ и $F$ *обязаны*) иметь одинаковое число зубцов, у $G$, однако, зубцов должно быть по крайней мере на один меньше, а у $H$ по крайней мере на один больше, чем у $D$.

294. Простейшее, хотя и не единственное, решение показано на рисунке слева.

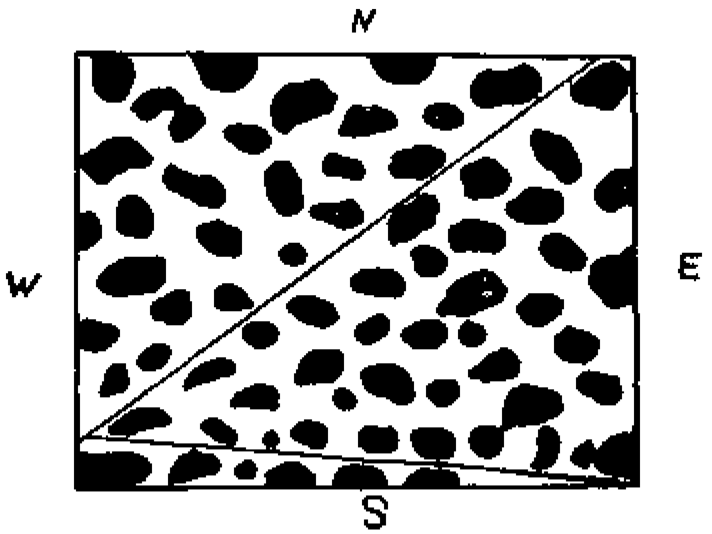


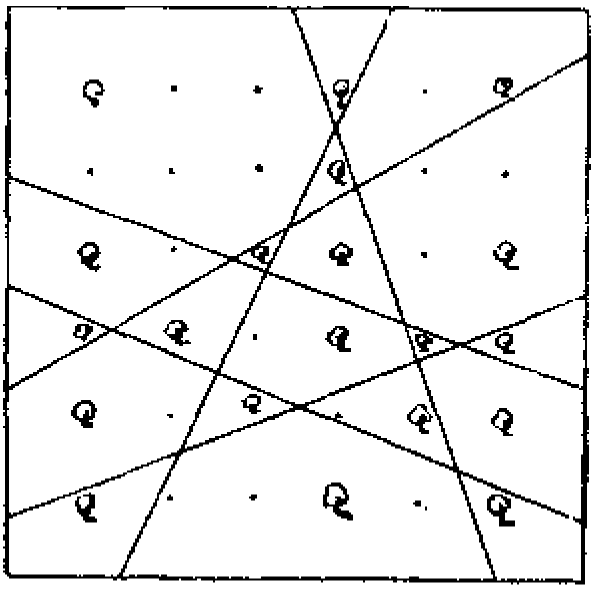
295. Решение ясно из рисунка справа.



296. Простое решение показано на рисунке. Земля разделена на 8 равных частей, каждая из которых содержит по три дерева.

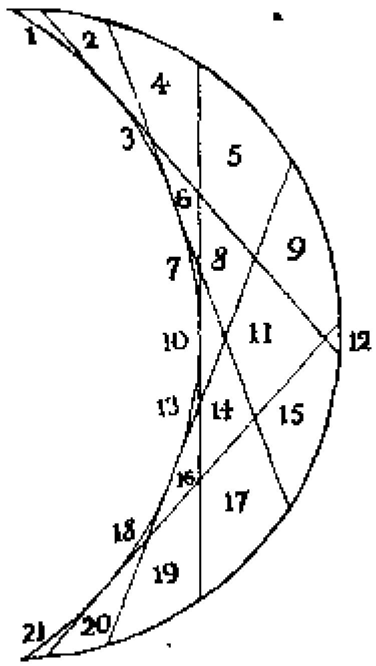



297. На рисунке изображен проход сквозь минное поле, составленный из двух прямолинейных участков.

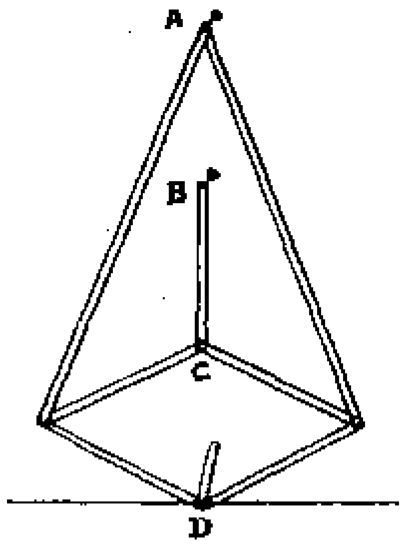


298. Шесть прямых заборов поставлены так, что каждое дерево отгорожено от остальных. Мы утверждали, что подобным же образом с помощью шести заборов можно было бы отгородить 22 дерева, если бы они были расположены «поудобней». Мы могли бы добавить, что в таком случае каждая прямая должна пересекать все остальные, причем никакие две точки пересечения не будут совпадать. Однако, поскольку в нашей головоломке участвует только 20 деревьев, эти условия уже не являются необходимыми, и четыре забора пересекают только по четыре (а не по пять) других.

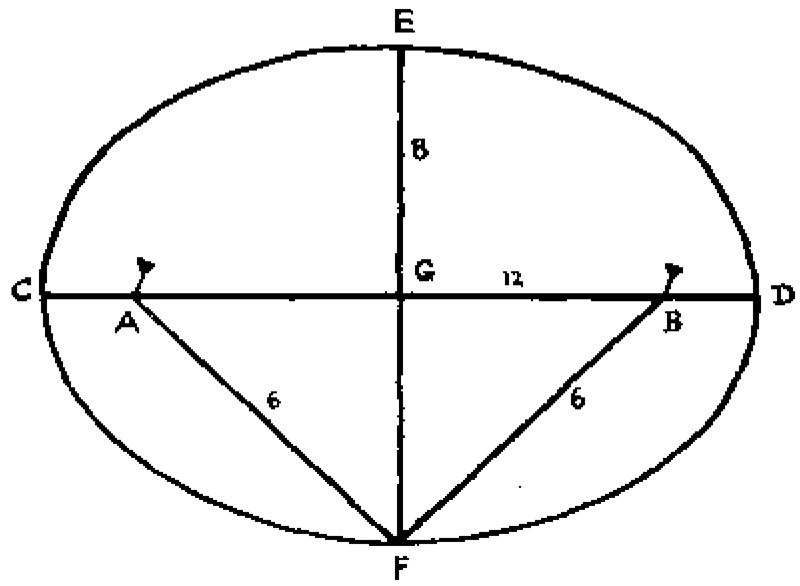
299. На рисунке показаны пять разрезов, которые делят полумесяц на 21 часть.



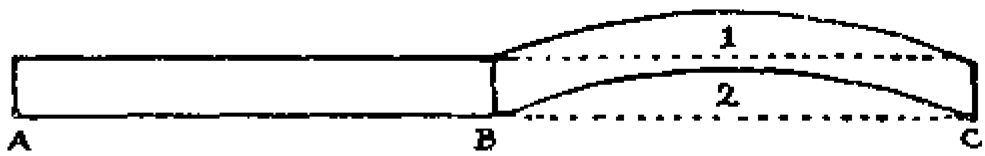

Если число разрезов равно $n$, то с их помощью круг можно разрезать на $(n^2 + n)/2 + 1$, а полумесяц на $(n^2 + 3n)/2 + 1$ частей.



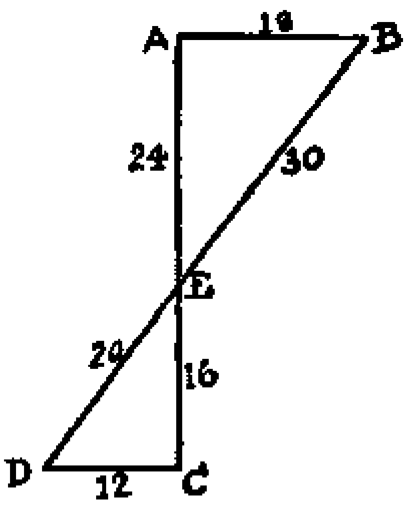

300. Возьмите полоски из толстого картона (не обязательно с прямолинейными краями) и соедините их между собой, использовав в качестве шарнира кнопки. Две длинные полоски должны иметь, равную длину (от центра одной кнопки до центра другой), а длины четырех нижних полосок, образующих ромб, должны быть равны между собой. Гвоздики или иголки прикрепляют «инструмент» к столу в точках $A$ и $B$, причем расстояния от $A$ до $B$ и от $B$ до $C$ равны между собой. Если все будет сделано аккуратно и точно, карандаш, помещенный в $D$, начертит прямую линию.




301. Проведите два перпендикулярных отрезка $CD$ и $EF$ (длина $CD$ равна 12 см, длина $EF$ — 8 см), пересекающихся друг с другом посередине. Найдите такие точки $A$ и $B$, чтобы $AF$ и $FB$ равнялись половине $CD$, то есть 6 см, и поместите ваши булавки в $A$ и $B$, взяв веревочную петлю равной $ABFA$. Пусть $CA = x$. Тогда, если карандаш находится в $F$, длина веревки равна $12 + (12 - 2x) = 24 - 2x$, а если он находится в $C$, длина веревки равна тоже $2(12 - x) = 24 - 2x$, что и доказывает правильность нашего решения[39].




302. Одного взгляда на помещенный здесь рисунок достаточно, чтобы заметить, что если я отрежу часть *1* и помещу ее на место части *2*, то получится прямой отрезок стены $BC$, отмеченный пунктиром и в точности равный участку $AB$. Следовательно, не правы были оба спорщика, и цена обоих участков должна быть одинаковой. Конечно, читатель сразу заметит, что это справедливо лишь при некоторых ограничениях, но мы имеем в виду именно ту стену, какая нарисована, и в том случае, когда эти ограничения выполнены.



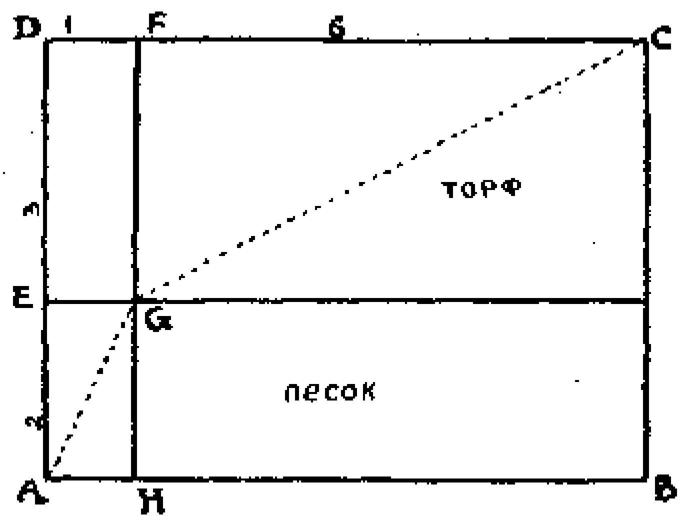
303. Отмерьте любое удобное расстояние вдоль берега от $A$ до $C$, скажем 40 м. Затем отмерьте любое расстояние в перпендикулярном направлении до точки $D$, скажем 12 м. Теперь сделайте засечку $E$ в направлении $AB$. Вы сможете измерить расстояние от $A$ до $B$, которое в нашем случае равно 24 м, и от $E$ до $C$, что даст 16 м. Далее, $AB : DC = AE : EC$, откуда ясно, что ширина реки $AB$ равна 18 м.

304. Свинья пробежит $66\frac{2}{3}$ м и будет схвачена, а Пэт пробежит $133\frac{1}{3}$ м. Кривую[40], которую опишет при этом Пэт, можно измерить точно. Ее длина равна $an^2/(n^2 - 1)$, где скорость свиньи принята за 1, Пэт бежит в $n$ раз быстрее и $a$ — первоначальное расстояние между Пэтом и свиньей.

305. Расстояние от верхнего конца до земли составляет $\frac{4}{5}$длины всей лестницы. Умножьте расстояние от стены (4 м) на знаменатель этой дроби (5), и вы получите 20. Теперь вычтите квадрат числителя дроби $\frac{4}{5}$из квадрата ее знаменателя. При этом получится $9 = 3^2$. Наконец, разделите 20 на 3, и вы получите ответ: $6\frac{2}{3}$ м.

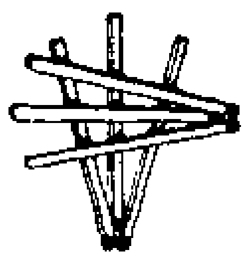
306. Высота шеста над землей составляла 50 м. В первом случае он сломался в 29 м, а во втором случае в 34 м от верхушки.

307. Длина свободно висящей веревки равна 3 м $85\frac{1}{2}$ см.




308. Разумеется, прямая $AC$ не является наибыстрейшим путем. Быстрее будет доехать от $A$ до $E$ и далее прямо до $C$. Путь, требующий наименьшей затраты времени, показан на рисунке пунктирной линией от $A$ до $G$ (ровно 1 км от $E$) и затем прямо до $C$.

Необходимо, чтобы синус угла $FGC$ был в два раза больше синуса угла $AGH$, В первом случае синус равен $6/\sqrt{6^2 + 3^2} = 6\sqrt{45} = 2/\sqrt{5}$. Во втором случае синус равен $1/\sqrt{1^2 + 2^2} = 1/\sqrt{5}$, то есть ровно в два раза меньше.



309. Как видно из рисунка, головоломка невероятно проста, если знаешь, как к ней подступиться! И все же у меня нет ни малейшего сомнения, что для многих читателей она оказалась крепким орешком. Можно заметить, что каждая спичка, несомненно, касается всех остальных.

[Можно увеличить число спичек до семи, и головоломка остается все еще разрешимой.— *М. Г.*]

310. У посылки максимальных размеров суммарная длина веревки, идущей в длину, должна быть равна суммарной длине веревки, идущей в ширину (и суммарной длине веревки, идущей в высоту). Если это известно или читатель самостоятельно разобрался и понял, в чем дело, то остальное рассчитать очень просто. Действительно, мы знаем, что веревка 2 раза проходит в длину, А в ширину и 6 раз в высоту. Следовательно, разделив 1 м 20 см соответственно на 2, 4 и 6, мы получим 60, 30 и 20 см, а это и будет искомыми длиной, шириной и высотой посылки максимального размера.

Следующее общее решение принадлежит Александеру Фрейзеру. Пусть веревка $a$ раз проходит вдоль ребра длиной $x$, $b$ раз вдоль ребра длиной $y$ и $c$ раз вдоль ребра длиной $z$, и пусть длина всей веревки равна $m$.

Тогда $ax + by + cz = m$. Найдем максимум $xyz$.

Прежде всего найдем максимум площади $xy$.

Положим $ax + by = n$, $x = (n - by)/a$, $xy = (n/a)y - (b/a)y^2$, $dxy/dy = n/a - (2b/a)y = 0$, тогда

$$y = \frac{n}{2b} \quad \text{или} \quad by = \frac{n}{2}.$$

Следовательно, $ax$ также равно $n/2$, $ax = by$. Аналогично $ax = by = cz = m/3$, откуда

$$x = \frac{m}{3a},\ y = \frac{m}{3b},\ z = \frac{m}{3c},\ xyz = \frac{m^3}{27abc}.$$

В нашем случае $a = 2$, $b = 4$, $c = 6$, $m = 360$. Таким образом, $x = 60$, $y = 30$, $z = 20$:

$$xyz = 36000.$$

311. Куб любого квадрата сам является квадратом. Например,

$$1^3 = 1 = 1^2,$$

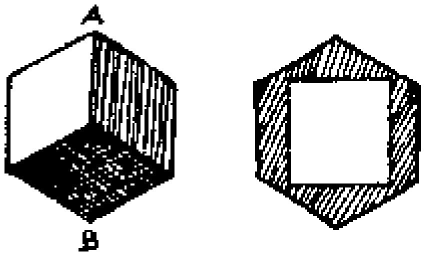
$$4^3 = 64 = 8^2,$$

$$9^3 = 729 = 27^2,$$

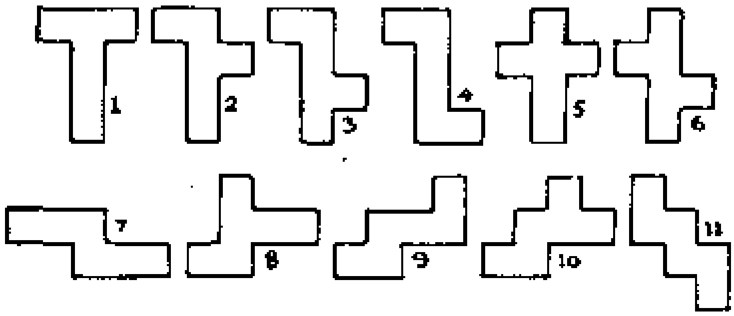
$$16^3 = 4096 = 64^2$$

и т. д.

Нам было сказано, чтобы мы взглянули на рисунок. Если бы на возведение пьедестала израсходовали лишь один блок, то он целиком покрыл бы фундамент, а на рисунке видно, что это не так. Если бы в пьедестале и фундаменте содержалось по 64 блока, то сторона первого равнялась бы 4 м, а сторона квадрата 8 м. Достаточно беглого взгляда для того, чтобы отвергнуть и это предположение. Но предположение о пьедестале и фундаменте, состоящих из 729 блоков каждый, вполне согласуется с иллюстрацией, так как в этом случае сторона пьедестала (9 м) в три раза меньше стороны квадрата (27 м). Во всех остальных случаях фундамент оказался бы намного шире пьедестала, что противоречило бы иллюстрации.



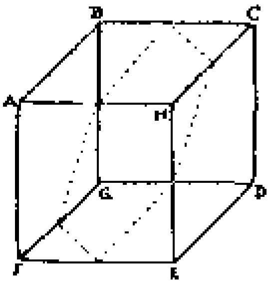

312. Любопытный факт состоит в том, что куб может пройти сквозь другой куб с меньшим ребром. Допустим, мы расположили куб таким образом, что его диагональ *AB* оказалась перпендикулярной плоскости, на которой он стоит (см. рисунок слева). Тогда его проекцией будет правильный шестиугольник. На рисунке справа показана дырка, сквозь которую.может пройти куб с тем же ребром, что и у исходного. Однако легко заметить, что дырку можно немного увеличить так, чтобы сквозь нее прошел куб с большим ребром. Следовательно, я проделал дырку не в большем, как мог поспешно решить читатель, а в меньшем кубе! Поэтому больший куб, вполне очевидно, оказался тяжелее. Этого не могло бы произойти, если бы дырка была проделана в большем кубе.

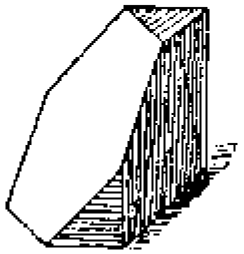


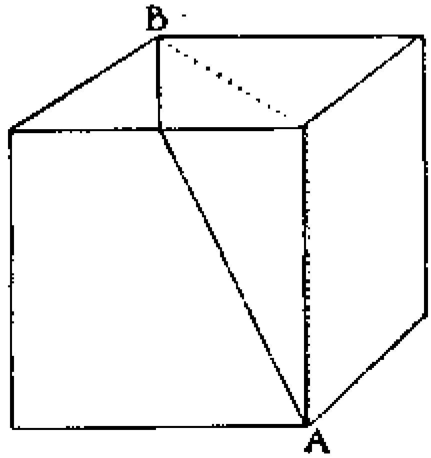

313. Всего имеется 11 различных разверток, если не различать между собой две развертки, полученные одна из другой путем переворачивания. Если же наружная сторона коробки, например, голубая, а внутренняя белая и требуется уложить развертки белой стороной вверх, то это можно сделать 20 различными способами, поскольку тогда к каждой развертке, кроме случаев *1* и *5*, добавится еще по одной зеркально-симметричной развертке, которая теперь уже будет отличаться от нее.

314. Крендель можно разрезать на 10 частей одним прямым разрезом вдоль линии, показанной на рисунке.

315. Отметьте середины ребер *BC*, *CH*, *HE*, *EF*, *FG* и *GB*. Затем, начиная сверху, проведите разрез вдоль плоскости, обозначенной пунктирной линией на рисунке слева. Тогда каждая из двух новых поверхностей окажется правильным шестиугольником, а правый кусок будет выглядеть примерно так, как он изображен рядом.

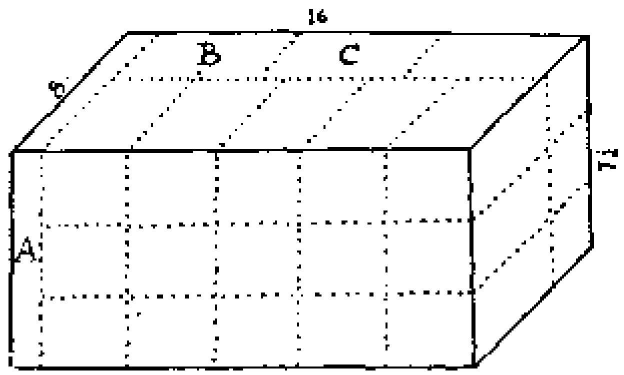





316. Умная муха избрала бы путь, отмеченный на рисунке справа сплошной линией, на его преодоление уйдет 2,236 мин. Путь, отмеченный пунктирной линией, длиннее, и на него уйдет больше времени.

317. Вода поднимется сначала на 15 см, а затем еще на 22,5 см.

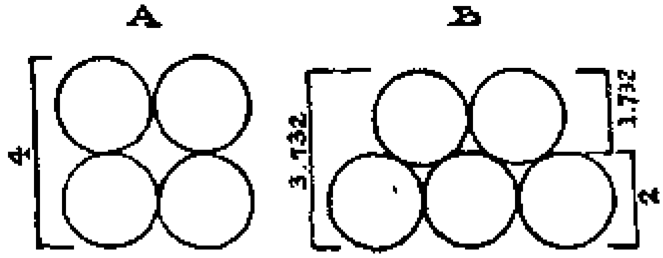



318. Сначала отрежьте с краю кусок $A$ толщиной 1 см. Оставшуюся часть можно затем разрезать, как показано на рисунке, на 24 части требуемого размера $5 \times 3 \times 2\frac{1}{2}$ см. Не видны только четыре куска: два под $B$ и два под $C$.

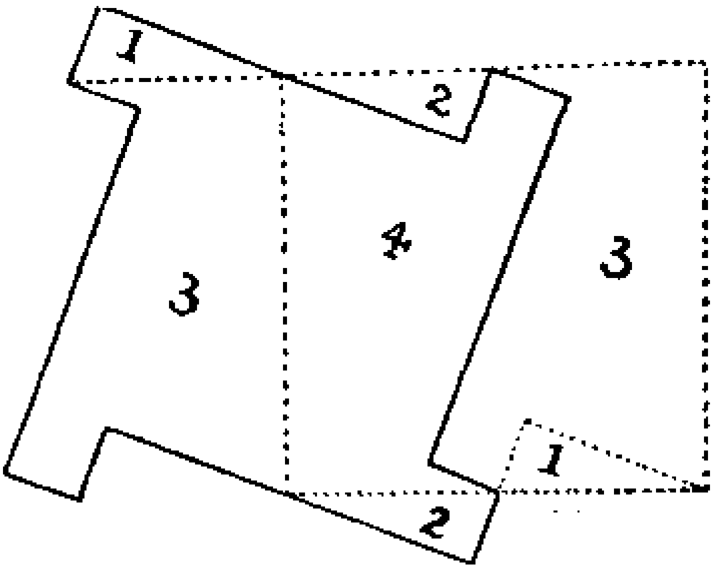
319. Объемы подобных тел относятся, как кубы длин соответственных линейных элементов. Простейший ответ состоит в том, что длины трех яиц равны соответственно $1\frac{1}{2}$, 2 и $2\frac{1}{2}$ дюйма. Кубы этих трех чисел равны $2\frac{7}{8}$, 8 и $\frac{125}{8}$, а их сумма составляет точно 27, или $3^3$. Следующий простейший ответ есть $2\frac{2}{3}$, 2 и $\frac{1}{3}$дюйма. Но вообще-то ответов существует бесконечно много.

320. Мастер сделал ящик с внутренними размерами $30 \times 10 \times 10$ см и в него поместил подставку. Затем он наполнил ящик чистым сухим песком, как следует утряс его и выровнял верхнюю часть. Потом он вынул подставку, встряхнул оставшийся песок, выровнял его и обнаружил, что его поверхность находится ровно в 20 см от верхнего края ящика. Отсюда стало ясно, что подставка содержала 2 дм$^3$ древесины и что был снят 1 дм$^3$.

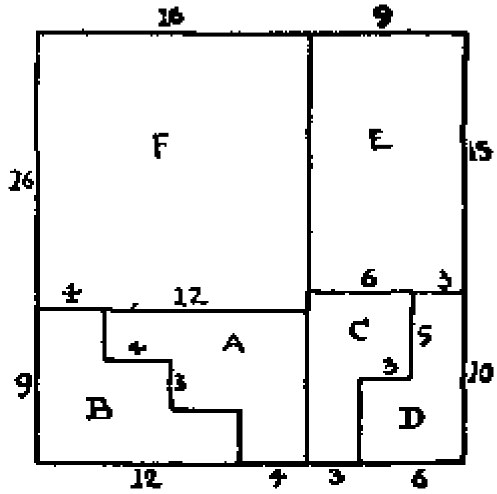
321. Поднимаясь на 2 м по стволу, белка совершает путь длиной 2,5 м. Следовательно, взобравшись на дерево высотой 8 м, она пройдет путь длиной 10 м.



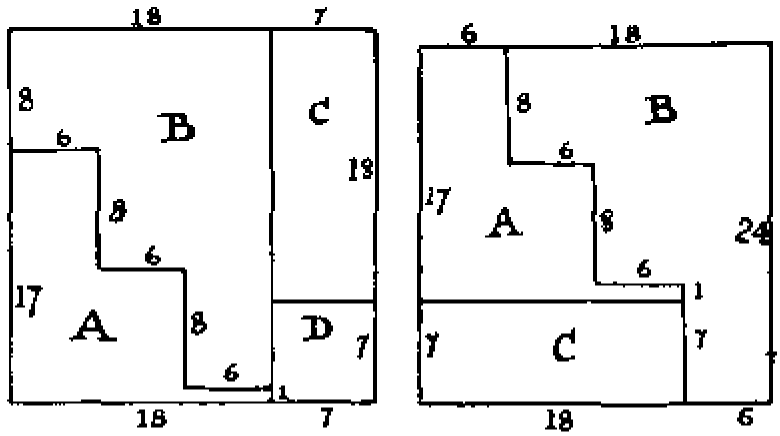

322. Пусть диаметр сигареты равен 2 единицам, и пусть 8 рядов по 20 сигарет в каждом (см. случай $A$) целиком заполняют коробку. Внутренняя длина коробки в таком случае равна 40, а глубина 16 единицам. Теперь если мы поместим 20 сигарет в нижнем ряду и если вместо 20 в следующем ряду мы положим 19 штук, как показано в случае $B$, то сэкономим на этом $0{,}268$ (точнее, $2-\sqrt{3}$) высоты. Этот второй ряд и каждый дополнительный ряд из 20 или 19 (по очереди) сигарет увеличивают высоту на $1{,}732$. Следовательно, мы получим девять рядов общей высотой $2 + 8 \times 1{,}732 = 15{,}856$ единицы, что меньше нашей глубины, составляющей 16 единиц. Таким образом, мы увеличим число сигарет на 20 (благодаря дополнительному ряду) и уменьшим его на 4 (1 штука в каждом ряду из 19), что даст чистый прирост 16 сигарет.



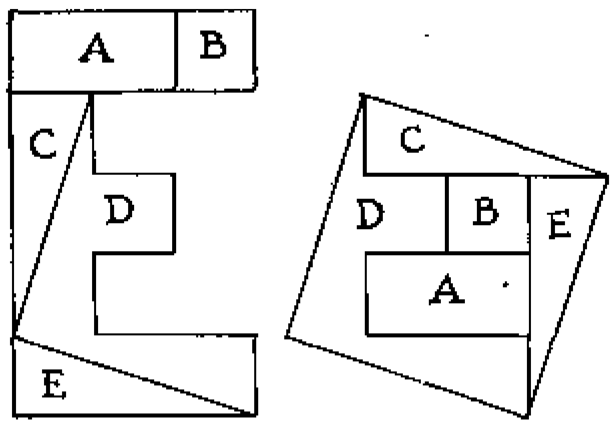

323. Сделайте разрезы, как показано на рисунке, и поместите полученные части на места, указанные пунктиром. Приведенное решение не единственно.



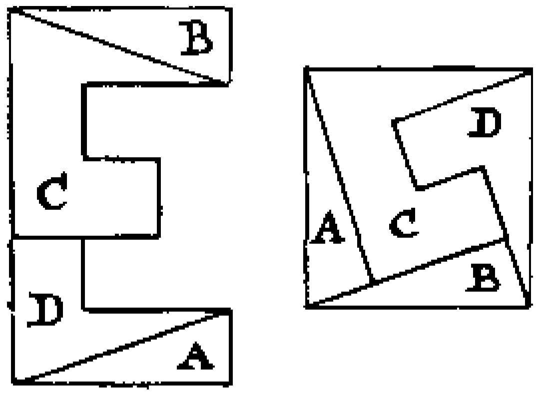

324. На рисунке показано простейшее и, я думаю, наиболее изящное решение, связанное с разрезанием крышки стола на шесть частей. Сдвинув часть *A* вдоль *B* на одну ступеньку вверх, вы получите часть крышки стола размером 12 ×12 см. Сдвинув часть *C* вверх вдоль *D* и соединив с *E*, вы получите квадрат 15 ×15 см. Квадрат 16 ×16 см не разрезается.



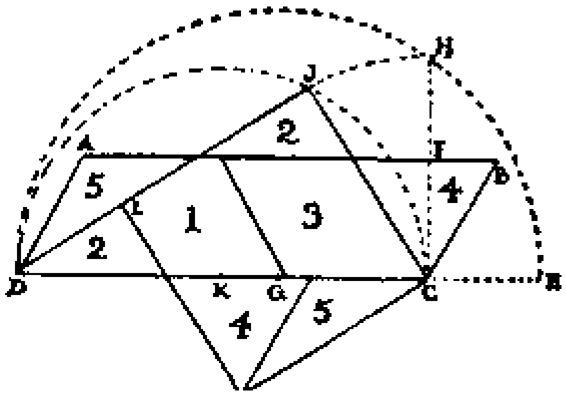

325. Стороны новых квадратов должны быть равными 24 и 7 см. Сделайте разрезы, как показано на рисунке слева. Из «деталей» *A*, *B* и *C* можно составить новый квадрат (см. правую часть рисунка). Квадрат *D* вырезается целиком.



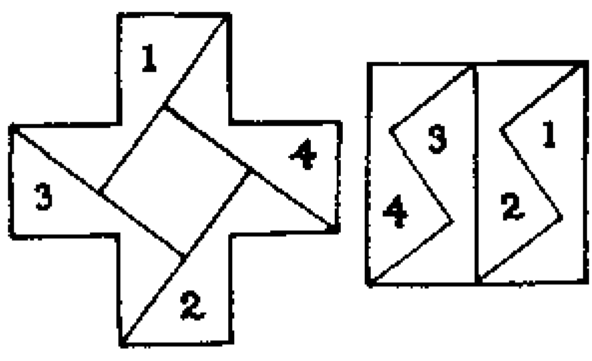
326. Здесь вы видите, как следует разрезать букву $E$ на пять частей, чтобы из них можно было составить квадрат, при условии, что части нельзя переворачивать.



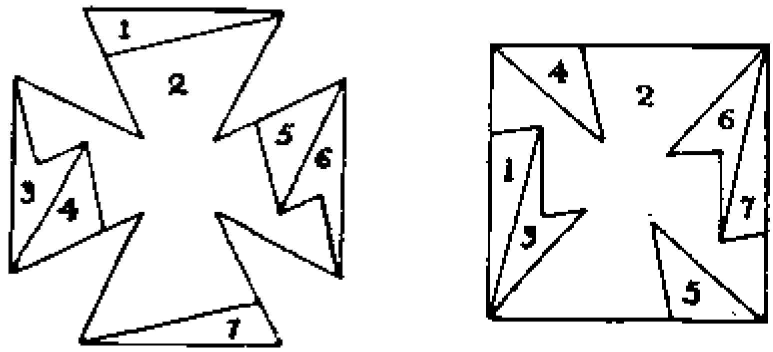

При условии, что части можно переворачивать, $E$ достаточно разрезать на четыре части.




327. Разрежьте шестиугольник пополам и сложите половинки так, чтобы получилась фигура $ABCD$. Продолжите прямую $DC$ до точки $E$ так, чтобы отрезок $CE$ был равен высоте $CF$. Затем, поставив одну ножку циркуля в $G$, опишите полуокружность $DHE$ и проведите прямую $CH$ перпендикулярно $DE$. Теперь CH является средним пропорциональным между $DC$ и $CE$ и, следовательно, равно стороне искомого квадрата. Из $C$ опишите дугу $HJ$, а из $K$ — полуокружность $DJC$. Проведите $CJ$ и $DJ$. Отложите отрезок $JL$, равный $JC$, и достройте квадрат. Остальное не требует объяснений.

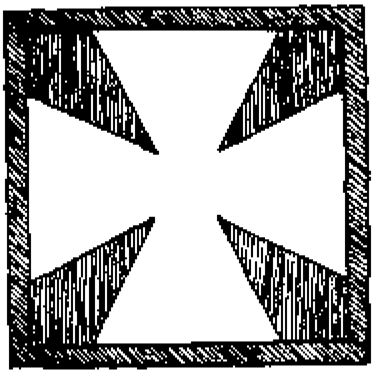


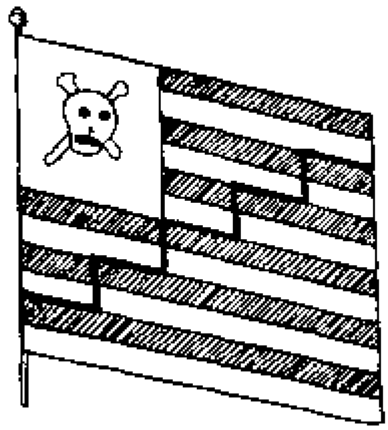
328. На помещенном здесь рисунке показано, как следует разрезать испорченный крест на четыре части, из которых можно составить квадрат. Надо просто продолжить каждую сторону квадратного отверстия до соответствующего угла, и все готово!



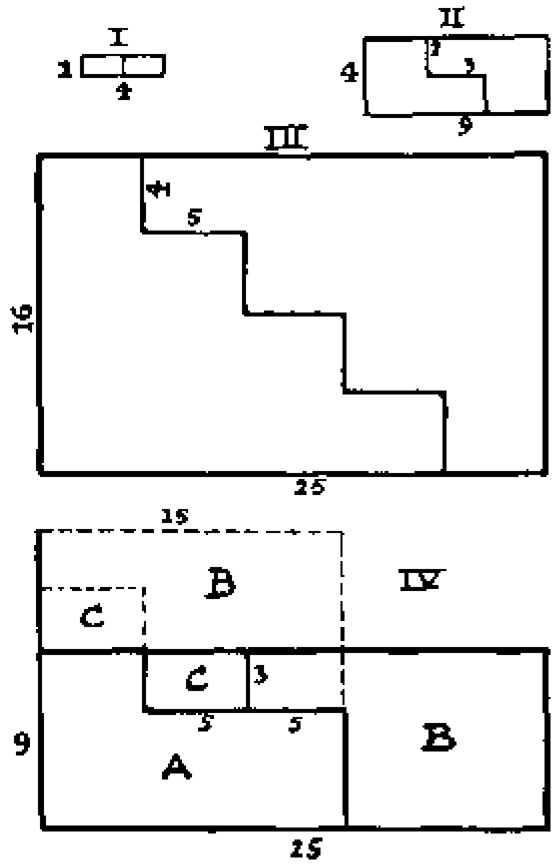

329. Из рисунка ясно, как следует разрезать крест на 7 частей, чтобы из них получился квадрат.

330. Разрежьте звезду по центру на 4 части, которые поместите по углам рамки. Просвет образует правильный мальтийский крест (см. рисунок).





331. На рисунке жирной ступенчатой линией показано, как следует разрезать флаг всего лишь на две части, чтобы, передвинув нижнюю часть на одну ступеньку вверх, получить флаг с десятью полосами.



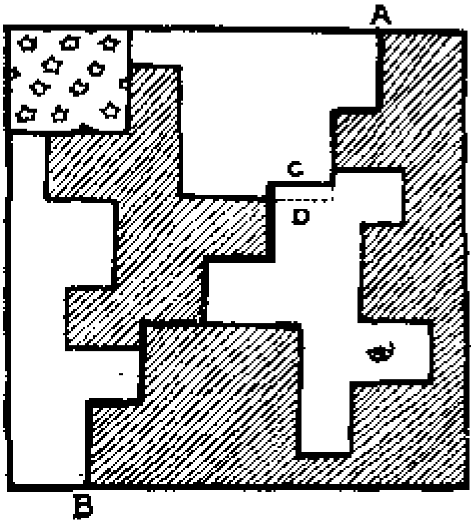

332. Прямоугольную доску можно разрезать методом лестницы на две части, из которых получится квадрат в том случае, если длины ее сторон совпадают с квадратами двух последовательных целых чисел. Так, в приведенной ниже таблице стороны соответственно равны $1^2$ (или 1) и $2^2$ (4), или $2^2$ (4) и $3^2$ (9), или $3^2$ (9) и $4^2$ (или 16) и т. д. Таблицу можно продолжать неограниченно.

| Стороны | Число ступенек | Сторона квадрата |
|---|---|---|
| $1 \times 4$ | 1 | 2 |
| $4 \times 9$ | 1 | 2 |
| $9 \times 16$ | 1 | 2 |
| $16 \times 25$ | 1 | 2 |
| $25 \times 36$ | 1 | 2 |

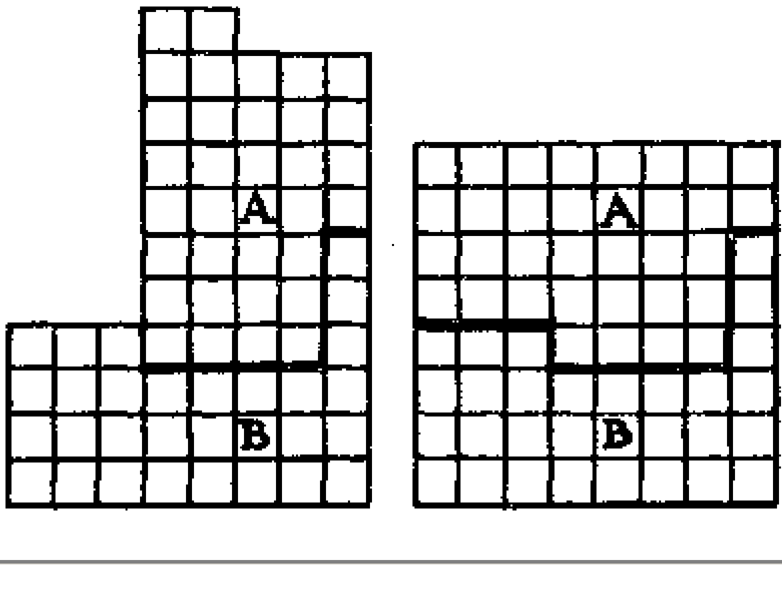
На приведенном здесь рисунке случай *I* является простейшим — размер доски $1 \times 4$; в случае *II* доска имеет размер $4 \times 9$ и в случае *III* — $16 \times 25$. Можно заметить, что число ступенек увеличивается по определенному закону, а их размеры легко найти с помощью таблицы. Например, для доски $16 \times 25$, поскольку сторона квадрата равна 20, ступенька имеет высоту $20 - 16 = 4$ и ширину $25 - 20 = 5$.

Так как стороны выражаются квадратами, а произведение двух квадратов в свою очередь представляет собою квадрат, то площадь прямоугольника также выражается квадратом. Но отсюда вовсе не следует, что, например, доска размером $9 \times 25$ окажется подходящей, потому что ее площадь равна площади квадрата со стороной 15. На нашем рисунке в случае *IV* показан наилучший вариант для такой доски, но при этом доску приходится резать на три, а не на две части, как требуется. Это происходит потому, что ни число 9 не является кратным приросту высоты (6), ни число 25 — кратным убыванию длины (10). Следовательно, нужных ступенек здесь быть не может.

Конечно, подойдет любое кратное сторонам. Так, решение для случая $8 \times 18$ аналогично решению для случая $4 \times 9$ и содержит две ступеньки, при этом все размеры просто удваиваются. Доска $4 \times 6\frac{1}{4}$ также подойдет нам, поскольку отношение ее сторон совпадает с отношением сторон у доски 16 ×25. Высота ступеньки будет равна 1, а ширина $1\frac{1}{4}$. В первом случае мы произвели сокращение, как у дроби, а во втором умножили все на 4, чтобы избавиться от дробей. Далее мы заметим, что и 4 ×9, и 16 ×25 являются квадратами последовательных целых чисел; следовательно, решение существует.

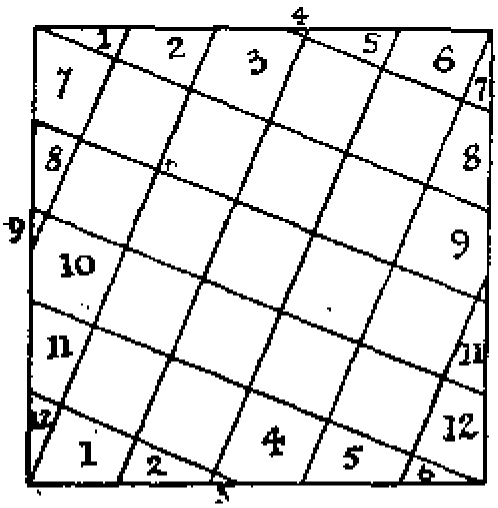


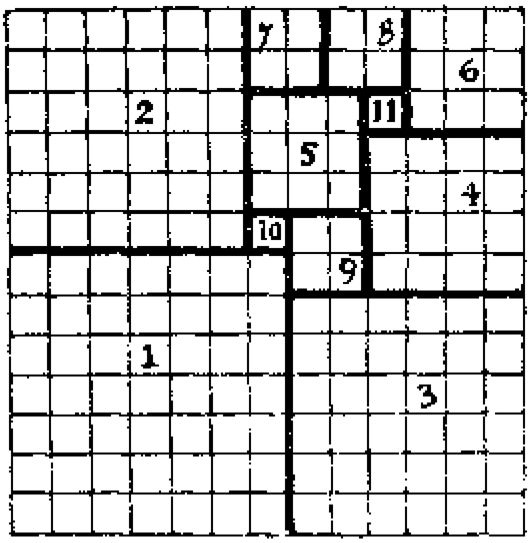

333. Несмотря на предупреждение, читатель мог предположить, что решением головоломки служит жирная зигзагообразная линия на нашем рисунке. Однако это не так, поскольку получившиеся части не совпадают по форме и размерам. Разрез следовало бы вести не по участку *C*, а по пунктирной линии *D*, но там отсутствует шов. На самом деле следует вырезать часть, которая заштрихована. Лоскут в левом верхнем углу показан для ориентации на исходном рисунке.




334. На рисунке показано, как следует разрезать линолеум на две части *A* и *B*, чтобы составить из них квадратную доску.

335. На рисунке слева показано, как можно покрыть квадрат 29 квадратными плитками, сохранив при этом 17 из них в целости и разрезав остальные 12 надвое. Части одной плитки обозначены одинаковыми цифрами.

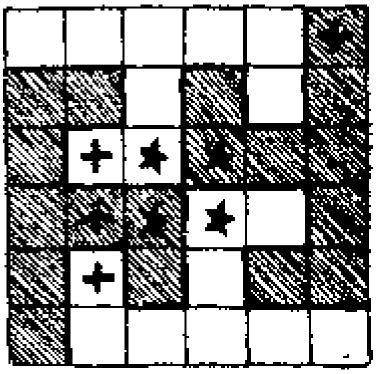




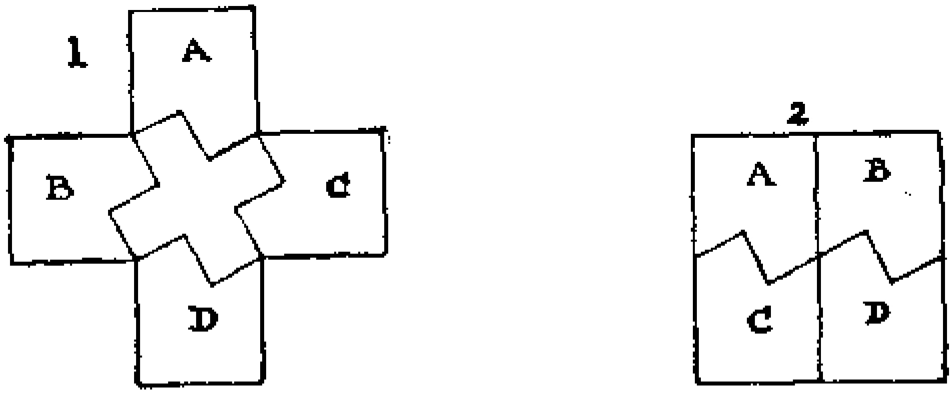

336. По-видимому, существует лишь одно решение этой головоломки, которое представлено на рисунке справа. Наименьшее число частей равно 11; они должны иметь указанные размеры. Три наибольшие части не могут располагаться иначе, а группу из восьми квадратов можно «отразить».

[По поводу общей задачи, так и не решенной до сих пор, о делении квадратного куска решетки любого размера вдоль ее линий на минимальное число меньших квадратов, см. гл. 15 книги М. Гарднера «Математические новеллы» (М., изд-во «Мир», 1974).

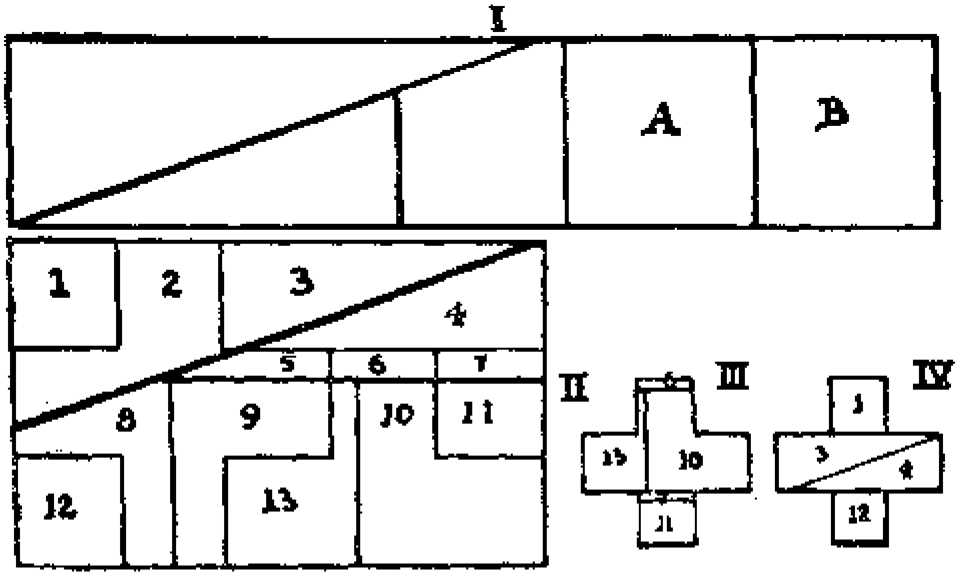
Насколько мне известно, соответствующая задача для треугольной решетки еще не рассматривалась. — *М. Г.*]



337. На рисунке показано, как разрезать квадрат на 4 части одинакового размера и одной формы так, чтобы в каждой из частей содержалось по звездочке и по крестику,

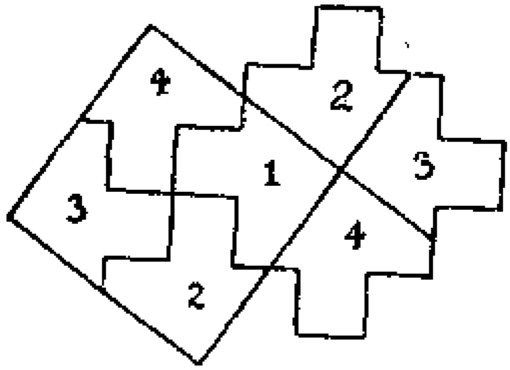



338. Если вырезать греческий крест меньших размеров (см. случай *1*), то из четырех частей *A*, *B*, *C* и *D* можно сложить квадрат, показанный в случае *2*.

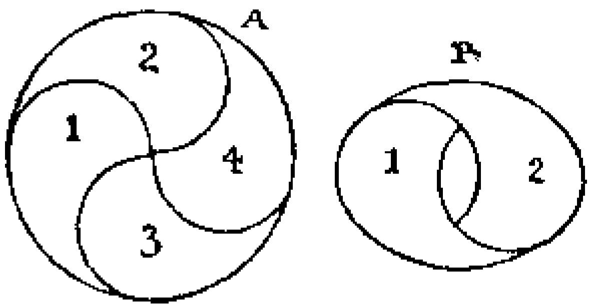



339. Отрежьте верхнюю и нижнюю части креста и поместите их в положения *A* и *B* (случай *I*), а оставшуюся большую часть разрежьте на 3 части так, чтобы из полученных 5 частей сложить прямоугольник, изображенный в случае *II*. Можно сказать, что этот прямоугольник составлен из 15 квадратов — по 5 квадратов на каждый новый крест. Остальные разрезы провести нетрудно. Из частей *2, 5, 8, 9* с очевидностью получается один крест; из частей *13, 6, 10, 7* и *11* — второй (случай *III*), а из *1, 3, 4, 12* получается третий крест (случай *IV*). Площадь каждого конца малого креста составляет $\frac{1}{3}$ площади любого конца большого креста.

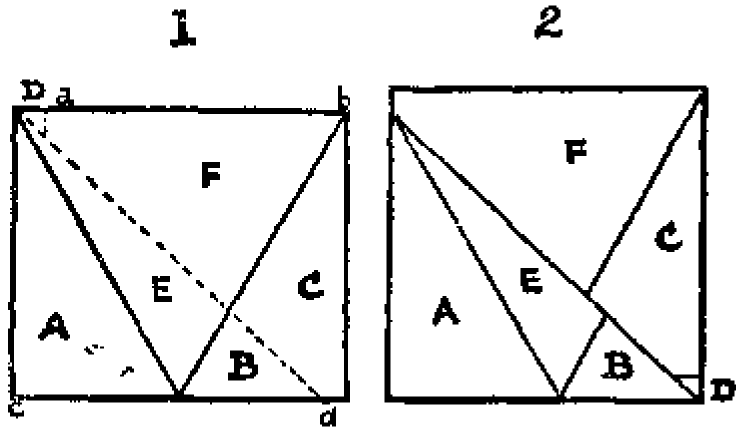
(Число частей можно понизить до 12.— *М. Г.*]




340. Как следует разрезать данную фигуру на 4 части, чтобы из них получился квадрат, показано на рисунке.

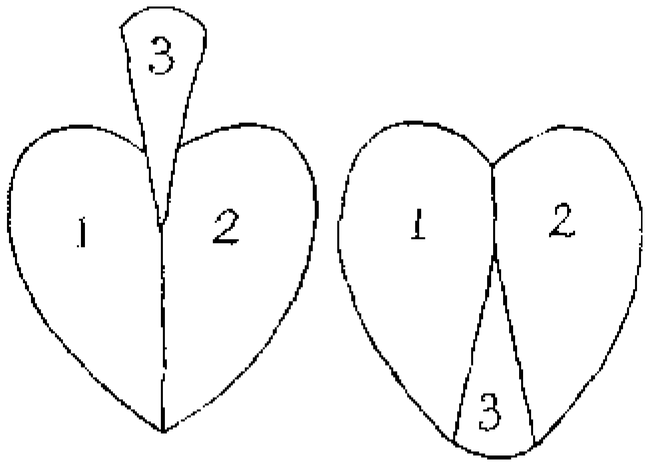



341. В случае *A* изображен круг, разделенный на 4 части, образующие «великую Монаду», а в случае *B* показано, как из двух таких частей можно составить один табурет (второй табурет получается аналогично из частей *3* и *4*). Правда, отверстия для руки располагаются поперек, а не вдоль овалов, тем не менее все условия задачи выполнены.

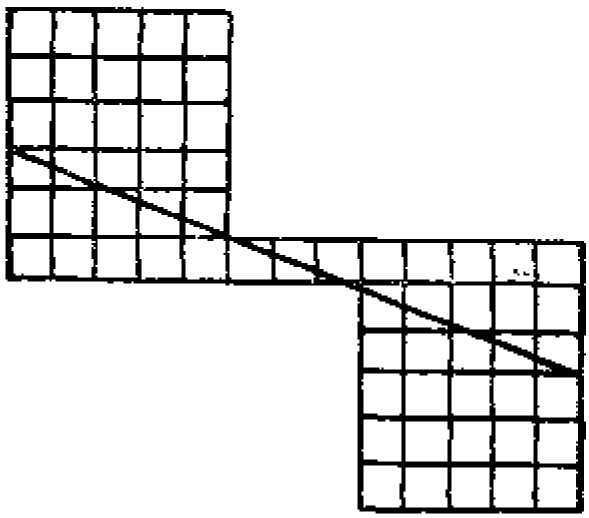


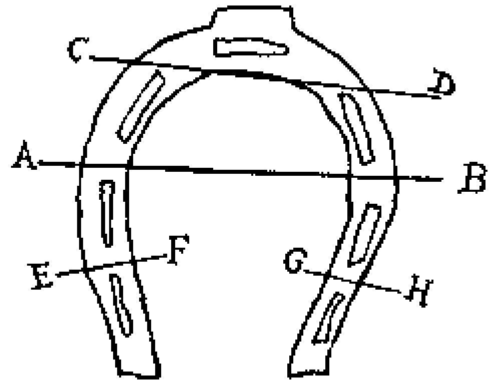

342. Разрежьте один из треугольников пополам и сложите части вместе, как показано в случае *1*. Затем проведите разрез вдоль пунктирных линий так, чтобы и *ab*, и *cd* равнялись стороне искомого квадрата. Затем сложите полученные части вместе, как показано в случае *2*, сдвинув *F* и *C* влево вверх и переместив маленький кусочек *D* из одного угла в другой.

[Существует решение данной задачи, содержащее только 5 частей.— *М. Г.*]



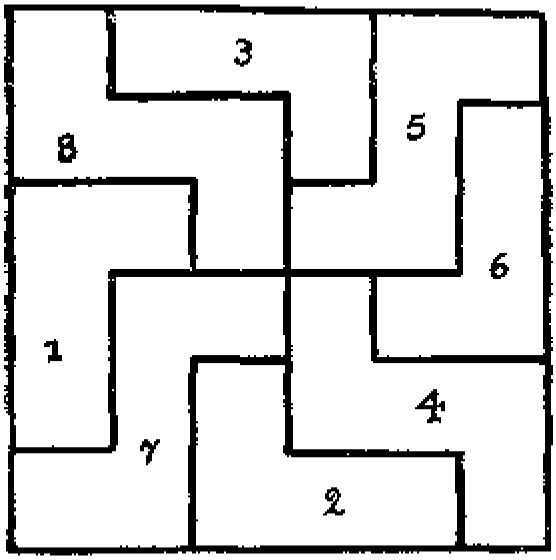

343. На рисунке показано, как можно разрезать символ масти пик на три части, чтобы получить символ червовой масти.



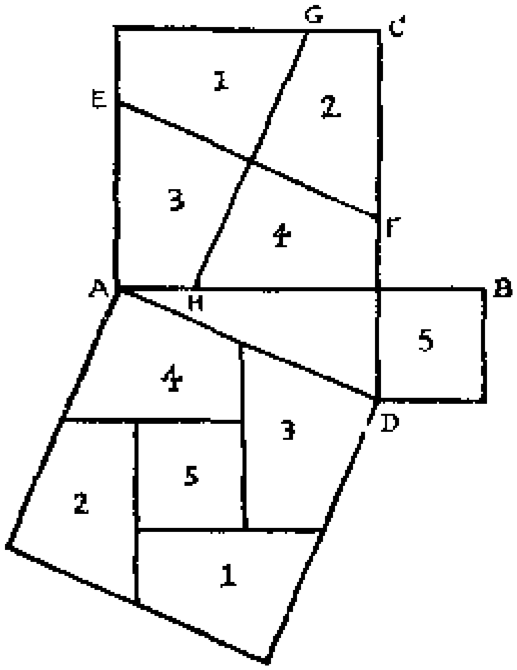



344. Вы видите на рисунке, как следует расположить 4 части, чтобы одна клетка исчезла (на первый взгляд). Объяснение этого феномена состоит в том, что края частей, расположенные вдоль жирной линии, не совпадают по направлению. Если вы расположите внешние края данной фигуры точно под прямым углом, то некоторые части перекроются и площадь перекрытой поверхности окажется равной площади одной клетки. Вот в чем и состоит простое объяснение нашего парадокса.

345. Прежде всего проведите разрез *AB*. Затем сложите полученные три части вместе так, чтобы при следующем взмахе ножниц вы могли провести одновременно разрезы *CD*, *EF* и *GH* (см. рисунок справа).

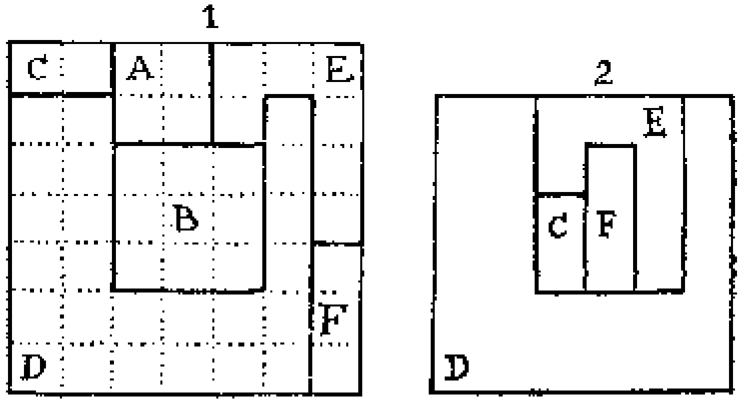



346. Восемь кусков фанеры можно расположить симметрично, чтобы они образовали квадрат таким образом, как показано на рисунке.



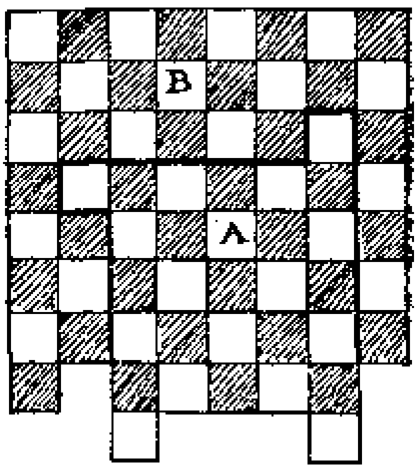

347. Сложите два квадрата вместе таким образом, чтобы линии *AB* и *CD* были прямыми. Затем найдите центр большего квадрата и проведите через него прямую *EF*, параллельную *AD*. Если вы теперь проведете через тот же центр перпендикулярно *EF* прямую *GH*, то больший квадрат разобьется на 4 части, из которых вместе с меньшим квадратом можно будет составить новый квадрат.

[Это решение было впервые найдено английским математиком-любителем Генри Перигейлом, который опубликовал его в 1873 г. Оно представляет собой одно из лучших доказательств теоремы Пифагора с помощью разрезания. См. гл. 38 книги М. Гарднера «Математические головоломки и развлечения» (М., изд-во «Мир», 1971).— *М. Г.*].

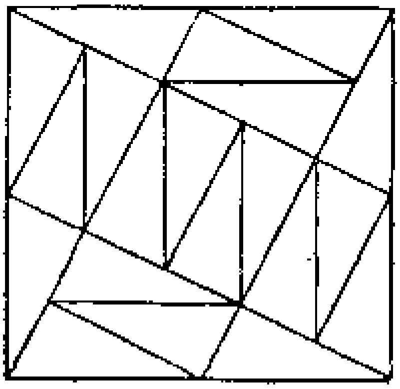



348. На рисунке показано, как можно разрезать фанеру. Квадраты $A$ и $B$ вырезаются целиком *(1)*, а из четырех частей $C$, $D$, $E$ и $F$ можно составить третий квадрат *(2)*.

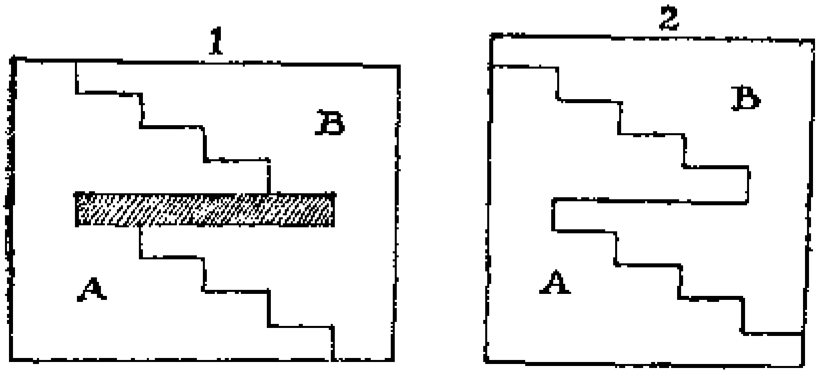
[Существуют решения данной задачи, в которых участвует только пять частей. Не сможет ли читатель отыскать решение из пяти частей, при котором общая длина разрезов составляет 16 единиц? — *М. Г.*]



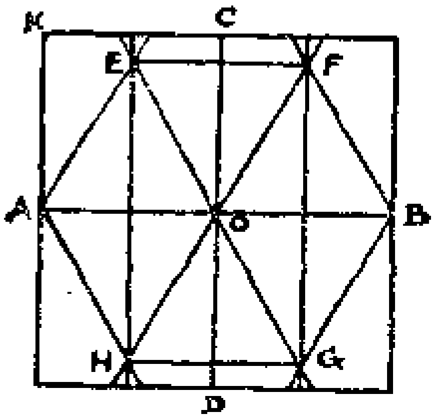

349. Вырежьте кусок $A$ и, повернув его на четверть оборота по часовой стрелке, соедините с куском $B$. При этом получится правильная шахматная доска.



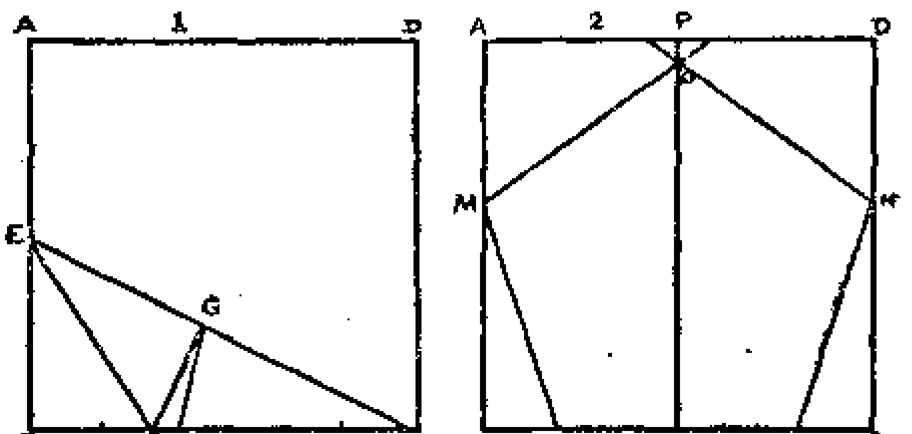
350. На рисунке показано, как составить квадрат из 20 кусочков.



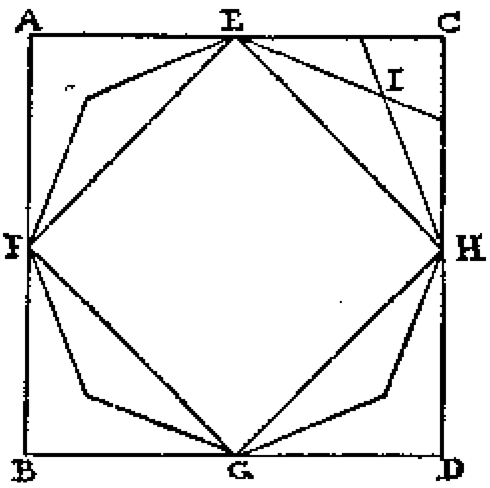

351. Если ковер разрезать на две части, как показано в случае *1*, и сшить куски вместе таким образом, как изображено в случае 2, то получится квадрат. Ширина ступеньки равна 2, а высота 1 м.



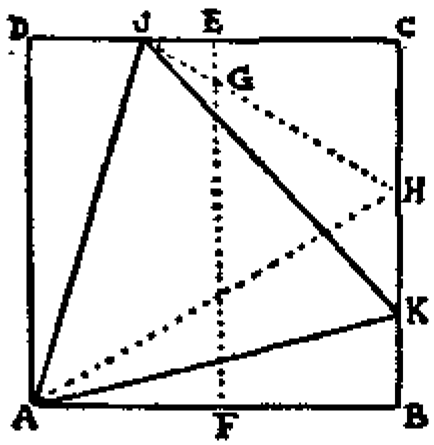

352. Согнув листок по серединам противоположных сторон, получим прямые $AOB$ и $COD$. Произведем также сгибы $EH$ и $FG$, делящие $AO$ и $OB$ пополам. Перевернем $AK$ так, чтобы $K$ попала на прямую $EH$ в точке $E$, а затем произведем сгибы через $AE$ и $EOG$. Аналогично найдем точку $H$ и согнем бумагу вдоль $AH$ и $HOF$. Произведя сгибы $BF$, $BG$, $EF$ и $HG$, получим искомый правильный шестиугольник $EFBGHAE$.



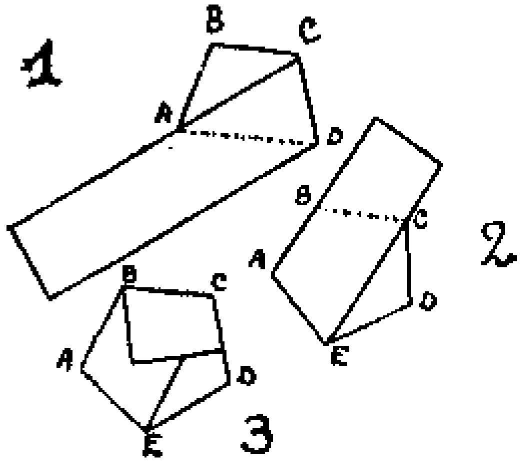
353. Сложив *AB* вдвое, найдите середину *E*. Согните бумагу вдоль *EC*. Совместите *EB* с *EC* и согните так, чтобы получить *EF* и *FG*. Сделайте так, чтобы отрезок *CH* стал равным отрезку *CG*. Найдите *K* — середину отрезка *BH* и отложите отрезок *CL*, равный *BK*. Отрезок KL — сторона правильного пятиугольника. Затем отложите (см. правую часть рисунка) отрезки *KM* и *LN*, равные *KL*, так, чтобы *M* и *N* соответственно лежали на *BA* и *CD*. Согнув бумагу вдоль *PQ*, отложите *MO* и *NO*, равные *KM* и *LN*. Многоугольник *KMONL* и есть искомый пятиугольник.



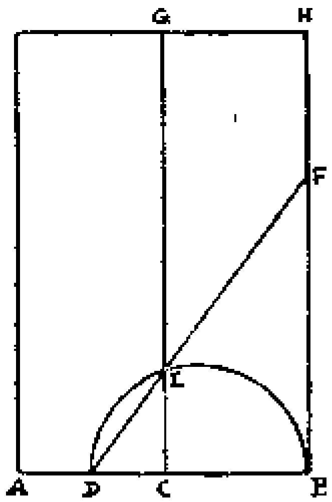

354. Соединив между собой края *AB* и *CD*, вы можете отметить сгибами средние точки *E* и *G*. Аналогичным образом вы можете найти точки *F* и *H*, а затем согнуть квадрат *EHGF*. Далее совместите *CH* с *EH* и *EC* с *EH*, при этом вы получите точку пересечения *1*. Сделайте то же самое с оставшимися тремя углами — сгибы очертят правильный восьмиугольник, который затем можно будет вырезать с помощью ножниц.




355. Сложите квадрат пополам вдоль *FE*. Загните сторону *AB* так, чтобы точка *B* легла на *FE*, и вы получите точки *G* и *H*, через которые можно провести сгиб *HGJ*. Оставляя точки *B* и *G* по-прежнему совмещенными, отогните *AB* назад на *AH*, и вы получите прямую *AK*. Теперь вы можете сложить треугольник *AJK* — наибольший равносторонний треугольник из всех возможных.




356. Отогнув угол $A$, найдите точку $C$, которая делала бы отрезок $BC$ равным отрезку $AB$, и перегните полоску, как показано в случае *1*. Вы получите точку $D$. Далее согните полоску так, как показано в случае *2*, чтобы ее край прошел вдоль $AB$. Вы получите точку $E$. Продолжая действовать аналогичным образом (случай *3*), вы уложите всю полоску в форме пятиугольника. Это, как мы уже говорили, просто, но вместе с тем интересно и поучительно.




357. Разбейте $AB$ пополам точкой $C$ и проведите прямую $CG$ параллельно $BH$. Затем найдите точку $D$ (середину $AC$) и опишите полуокружность $DB$, пересекающую $CG$ в точке $E$. Прямая $DEF$ даст положение наикратчайшего сгиба.

358. Перенумеруйте марки, как было показано на исходном рисунке, то есть *1, 2, 3, 4* в первой и *5, 6, 7, 8* во второй строке. Чтобы сложить их в порядке *1, 5, 6, 4, 8, 7, 3, 2* (сверху видна только первая марка), начните следующим образом. Повернув все марки лицом вниз

| | | | |
|---|---|---|---|
| 5 | 6 | 7 | 8 |
| 1 | 2 | 3 | 4 |

согните полоску так, чтобы марка *7* пришлась на марку *6*. Положите *4* на *8* и введите их обе между *7* и *6* так, чтобы эти четыре марки расположились в порядке *7, 8, 4, 6*. Теперь поместите *5* и *1* под *6*, и все готово.

Добиться, чтобы марки расположились в последовательности *1, 3, 7, 5, 6, 8, 4, 2*, труднее, и ее можно легко проглядеть, если кто-нибудь не убежден, что в силу некоторого закона и такое расположение возможно.

Сначала согните блок так, чтобы были видны только марки *5, 6, 7, 8*, лежащие лицевой стороной кверху. Положите *5* на *6*. Теперь между марками *1* и *5* вы можете поместить марки *7* и *8* так, чтобы марка *7* оказалась поверх марки *5*, а марка *5*, обернувшись кругом, оказалась под маркой *6*, и нужный порядок получен.

359. Действуя следующим образом, вы за семь ходов удалите все фишки, кроме *1*, которая и сделает последний прыжок: *2—10, 4—12, 6—5, 3—6, 7—15, (8—16, 8—7, 8—14, 8—3), (1—9, 1—2, 1—11, 1—8, 1—13, 1—4).*

360. «Девятка» последовательно перепрыгивает через *13, 14, 6, 4, 3, 1, 2, 7, 15, 17, 16, 11.* Затем *12* перепрыгивает через *8, 10* — через *5* и *12*, а *9* — через *10*.

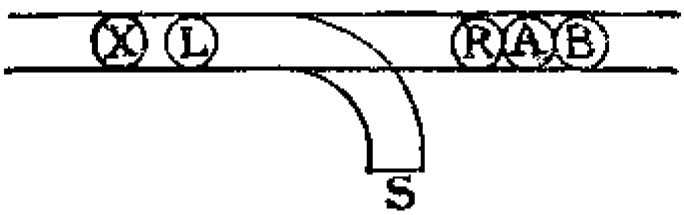
361. Составьте за 9 ходов стопку из пяти фишек (от *1* до *5*) в квадрате *B*. За 7 ходов постройте стопку из четырех фишек (от *6* до *9*) в квадрате *C*. Образуйте стопку из трех фишек (от *10* до *12*) в *D* за 5 ходов. Поместите в *E* стопку из двух фишек (*13* и *14*) за 3 хода. Переместите одну фишку (*15*) в *F* за 1 ход. Переместите *13* и *14* в *F* за 3 хода, *10* и *12* в *F* за 5, с *6* по *9* за 7 и с *1* по *5* за 9 ходов. Всего получится 49 ходов.

362. Передвигайте фишки в следующем порядке: *12, 8, 4, 3, 2, 6, 10, 9, 13, 15, 14, 12, 8, 4, 7, 10, 9, 14, 12. 8, 4, 7, 10, 9, 6, 2, 3, 10, 9, 6, 5, 1, 2, 3, 6, 5, 3, 2, 1, 13, 14, 3, 2, 1, 13, 14, 3, 12, 15, 3* — всего 50 ходов.

[Если фишки *14* и *15* расположены сначала в правильном порядке, то магический квадрат можно получить за 37 ходов: *15, 14, 10, 6, 7, 3, 2, 7, 6, 11, 3, 2, 7, 6, 11, 10, 14, 3, 2, 11, 10, 9, 5, 1, 6, 10, 9, 5, 1, 6, 10, 9, 5, 2, 12, 15, 3.— М. Г.*]

363. Одну дополнительную фишку следует поместить в четвертом квадрате второго (сверху) ряда, а другую — во втором квадрате четвертого ряда. Головоломка оказывается столь просто разрешимой, что не требуется даже перечислять необходимые ходы.

364. Наименьшее число ходов 24. Действовать нужно следующим образом. (Необходимо всего лишь указать буквами, из какого“ круга в какой перемещается фишка. За один раз можно перемещать лишь одну фишку.) Итак, *E* в *A*, *E* в *B*, *E* в *C*, *E* в *D*, *B* в *D*, *E* в *B*, *C* в *B*, *A* в *B*, *E* в *C*, *E* в *A*, *B* в *A*, *C* в *E*, *B* в *C*, *A* в *C*, *B* в *A*, *C* в *B*, *C* в *A*, *B* в *A*, *E* в *C*, *E* в *B*, *C* в *B*, *D* в *E*, *D* в *B*, *E* в *B* — всего 24 хода.




365. Нарисуйте схему путей, как показано на рисунке, возьмите 5 фишек, обозначенных *X*, *L*, *R*, *A* и *B*. Паровозы — это *L* и *R*, два вагона справа — *A* и *B*. Три вагона слева разделять не следует, поэтому мы обозначим их *X*. Тупик обозначен через *S*. Далее действуйте следующим образом: *R* налево, *R* в *S*, *XL* направо, *R* налево, *XLA* налево, *L* загоняет *A* в *S*, *L* налево, *XL* направо, *R* к *A*, *RA* налево, *XLB* налево, *L* направляет *B* в *S*, *L* налево, *LX* направо, *RA* к *B*, *RAB* прямо. Всего получилось 14 ходов, поскольку в первом и третьем ходах (*R* налево и *XL* направо) не происходит изменения направления. За меньшее число ходов задачу решить нельзя.

366. Меняйте пары местами следующим образом: *(1—7, 7—20, 20—16, 16—11, 11—2, 2—24), (3—10, 10—23, 23—14, 14—18, 18—5), (14—19, 19—9, 9—22), (6—12, 12—15, 15—13, 13—25), (17—21)*. Теперь все фишки правильно размещены за 19 ходов. Внутри скобок заключены полные циклы. Выпишите числа в исходном порядке, а под ними числа в правильном порядке так:

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 7 | 24 | 10 | 19 | 3 | 12 | 20 | 8 | 22 | и т. д. |
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | и т. д. |

Структура циклов становится теперь очевидной: 1 в нижней строке меняется местами с 7 над ней, 7 — с 20 и т. д. до тех пор, пока мы не дойдем до 24 под 1.

367. Пусть солдаты двигаются в следующем порядке: 2—*1,* 3—*2,* 4—*3,* 5—*11,* 6—*4,* 7—*5,* 8—*6,* 9—*7,* 1—*13,* 9—*10,* 8—*9,* 1—*12,* 7—*13,* 6—*8,* 5—*7,* 1—*11,* 4—*12,* 3—*6,* 2—*5,* 1—*1,* 2—*2,* 3—*3,* 4—*4,* 5—*5,* 6—*6,* 7—*7,* 8—*8,* 9—*9*; тогда сержант окажется на нужном месте за 28 ходов.

Первое число — это номер солдата, а второе — номер его новой позиции, причем позиции в траншее перенумерованы от 1 до 10, а ниши от 11 до 13.

368. В первом случае передвигайте пары в следующем порядке: поместите *6* и *7* перед *1*, затем *3* и *4*, *7* и *1* и *4* и *8* на свободные места. При этом получится следующее расположение фишек: *6, 4, 8, 2, 7, 1, 5, 3*.

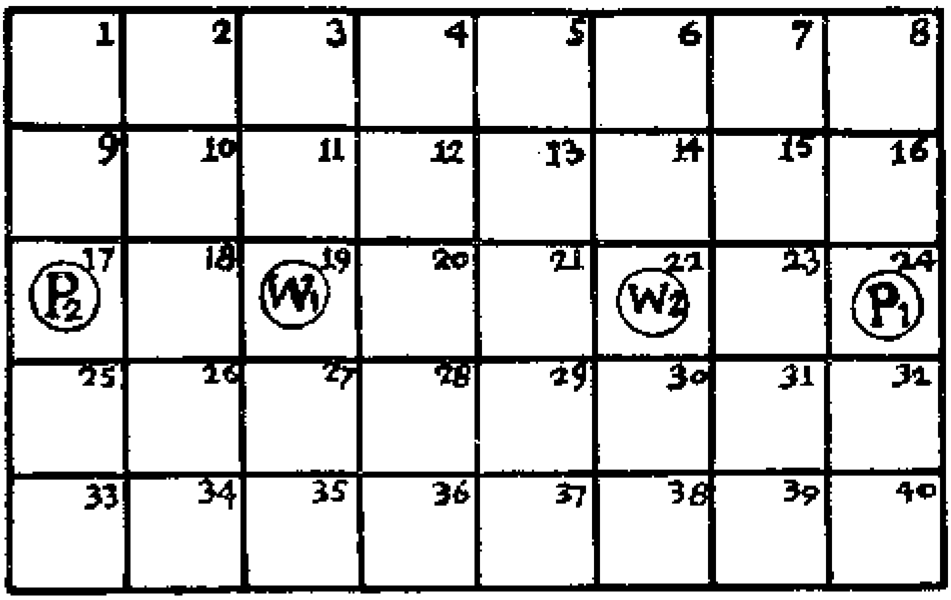
Во втором случае передвиньте фишки *3, 4* и расположите их в обратном порядке (*4, 3*) перед фишкой *1*. Затем переместите, одновременно изменив порядок фишек на обратный, пары *6, 7* (после перестановки *7, 6*), *6, 5* (после перестановки *5, 6*), *3, 1* (после перестановки *1, 3*) и *6, 8* (после перестановки *8, 6*). Фишки выстроятся в последовательности *4, 8, 6, 2, 7, 1, 3, 5* всего за 5 ходов.

369. Хотя первоначально обе буквы *А* находятся в нужном положении, головоломку можно решить, только сдвинув их со своего места. Обозначим букву *А* в нижнем ряду прописной, а в верхнем углу строчной буквой. Тогда решение в 36 ходов будет таким: АНЛЕЖ АНЖКИ АНЖКИ АНЖКЛ ЕаАНЖ ИЛКИЛ аЕКаЛИ.

[Решение Дьюдени не минимально. Не сможет ли читатель решить головоломку за 30 ходов? — *М. Г.*]

370. Передвигайте фишки в следующем порядке: АНДАФ ЛНДАФ ДНЛДИ ЯДЛНА ФИЯРИ ЯЛНАЛ — всего 30 ходов.

[Количество ходов удается сократить до наименьшего возможного числа — 28. Читатели могут заметить, что задача изоморфна некоторой головоломке с квадратом и восемью фишками, похожей на предыдущую. С общей теорией головоломок с квадратом и фишками можно познакомиться в гл. 2 книги М. Гарднера «Математические головоломки и развлечения» (М., изд-во «Мир», 1971). — *М. Г.*]




371. Охранник $W_1$, не может схватить узника $P_2$, а охранник $W_2$ — узника $P_1$. В примере, который мы привели, погоня действительно может продолжаться бесконечно долго, поскольку на самом деле каждый охранник должен охотиться не за «своим», а за «чужим» узником. В этом случае, как говорят о шахматах, можно «реализовать преимущество». Между $W_1$ и $P_2$ расположен всего один (нечетное число) квадрат, в то время как между $W_1$ и $P_1$ (а также между $W_2$ и $P_2$) имеются четыре (четное число) квадрата. Во втором случае у охранников имеется преимущество, и они могут выиграть. Приведем образец игры. Ходы охранников записываются в «числителе», а узников — в «знаменателе»:

$$\frac{19-20\ \ 22-14}{17-18\ \ 24-23},\ \frac{20-21\ \ 14-13}{18-26\ \ 23-31},\ \frac{21-22\ \ 13-12}{26-26\ \ 31-32},\ \frac{22-23\ \ 12-20}{27-26\ \ 32-40},$$

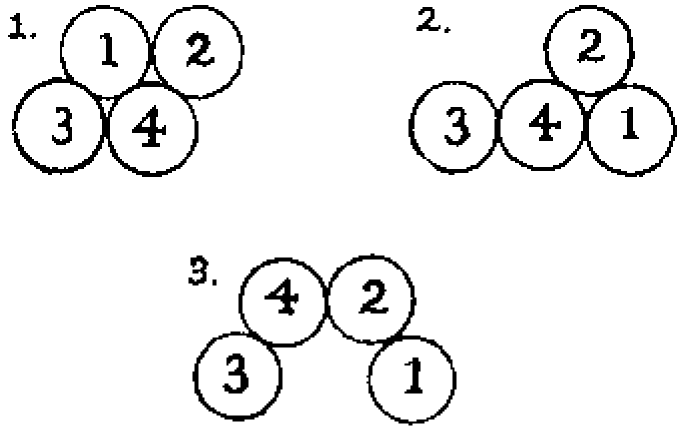
$$\frac{23-31\ \ 20-19}{40-32\ \ 26-34},\ \frac{31-32 \text{ схватил, } 19-27\ \ 27-26}{34-33\ \ 33-25},\ \frac{26-25}{}. \text{ Узник пойман.}$$

Узникам невозможно уйти от преследования, если каждый охранник преследует того из них, кого нужно.

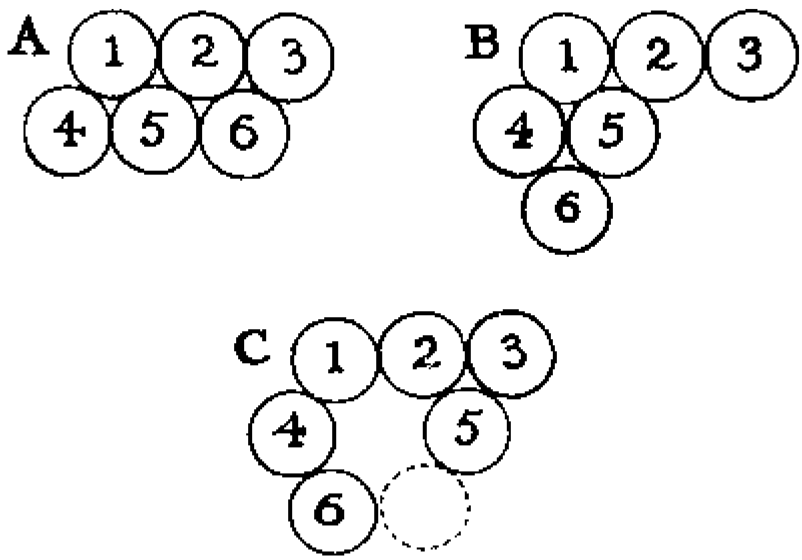
372. В средней вертикали, содержащей 3 белые и 3 черные шашки, их можно поменять местами за 15 ходов. Перенумеруйте 7 клеток сверху вниз цифрами от 1 до 7. Шашкой, стоящей на клетке *3*, пойдите на клетку *4*, шашкой *5* — на клетку *3*, *6* — на *5*, *4* — на *6*, *2* — на *4*, *1* — на *2*, *3* — на *1*, *5* — на *3*, *7* — на *5*, *6* — на *7*, *4* — на *6*, *2* — на *4*, *3* — на *2*, *5* — на *3*, *4* — на *5*. Шесть из этих ходов представляют собой просто сдвиги, а 9 остальных — прыжки.

Имеется семь горизонталей, содержащих по 3 белые и по 3 черные шашки (если исключить центральную вертикаль). В каждой из них можно аналогичным образом поменять местами белые и черные шашки, а поскольку в процессе манипуляций с центральной вертикалью в центре каждой из горизонталей образуется в определенный момент необходимое для этого «окошко», то ясно, что все шашки можно поменять местами за $8 \times 15 = 120$ ходов.

373. Сначала положите 4 монеты вместе, как показано в случае *1*, затем перенесите номер *1* на новое место (см. случай *2*) и, наконец, осторожно выньте номер *4* и положите его сверху на номера *2* и *3*. Тогда ваши монеты займут положение *3* и пятую монету можно будет точно подогнать к ним.




Одного взгляда на рисунок достаточно, чтобы понять, как трудно измерить на глаз расстояние между монетами *1* и *3*. Почти наверняка каждый положит их слишком близко друг к другу.




374. Сначала разместите монеты так, как показано в случае *A*. Затем осторожно сместите монету *6* в положение, которое изображено в случае *B*. Далее сделайте так, чтобы монета *5* соприкоснулась с монетами *2* и *3* (*C*). Теперь нужно переместить монету *3* в положение, указанное в случае *C* пунктиром.

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1 | 10 | 9 | 14 |
| 13 | 10 | 5 | 6 |
| 8 | 3 | 16 | 7 |
| 12 | 11 | 4 | 7 |

375. Взяв вместо чисел 2 и 15 числа 7 и 10, можно составить квадрат, показанный на рисунке. Практически магический квадрат пы составите из любых 16 чисел, если их удастся расположить таким образом, чтобы были равны между собой как все разности между двумя соседними числами по горизонтали, так и все разности между двумя соседними числами по вертикали. В нашем случае эти разности равны 3 и 2:

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1 | 4 | 7 | 10 |
| 3 | 6 | 9 | 12 |
| 5 | 8 | 11 | 14 |
| 7 | 10 | 13 | 16 |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 9 | 11 | 18 | 5 | 22 |
| 3 | 25 | 7 | 14 | 16 |
| 12 | 19 | 1 | 23 | 10 |
| 21 | 8 | 15 | 17 | 4 |
| 20 | 2 | 24 | 6 | 13 |

376. Если вы сделаете 9 квадратов, совпадающих с квадратом, изображенным на нашем рисунке, то, составив из них больший квадрат, обнаружите на нем магические квадраты пятого порядка с любым числом в центре. Этот квадрат называется назикским квадратом (названным так покойным мистером Фростом в честь Назика — места в Индии, где он жил) и является единственным правильным квадратом с таким свойством.

377. По-видимому, существует всего три приведенных здесь решения. В каждом случае разность равна 5.

| | | |
|---|---|---|
| 2 | 1 | 4 |
| 3 | 5 | 7 |
| 6 | 9 | 8 |

| | | |
|---|---|---|
| 8 | 1 | 4 |
| 3 | 5 | 7 |
| 6 | 9 | 2 |

| | | |
|---|---|---|
| 2 | 1 | 6 |
| 3 | 5 | 7 |
| 4 | 9 | 8 |

| | | |
|---|---|---|
| $2^7$ | $2^0$ | $2^5$ |
| $2^2$ | $2^4$ | $2^6$ |
| $2^3$ | $2^8$ | $2^1$ |

| | | |
|---|---|---|
| 128 | 1 | 32 |
| 4 | 16 | 64 |
| 8 | 256 | 2 |

378. Для решения головоломки необходимо лишь сдвинуть вверх правую цифру в каждой клетке, чтобы получить степени 2. Раскрыв чти степени, вы обнаружите, что полученный квадрат удовлетворяет нужному условию с произведением 4096. Разумеется, всякий человек, знакомый с арифметикой, знает, что $2^0$ равно 1.

| | | |
|---|---|---|
| $7\frac{1}{2}$ | 5 | $2\frac{1}{2}$ |
| 0 | 5 | 10 |
| $7\frac{1}{2}$ | 5 | $2\frac{1}{2}$ |

| | | |
|---|---|---|
| $\frac{(8\times 8)-8}{8}+\frac{8}{8+8}$ | $1+1+1+1+1$ | $\frac{6+6}{6}+\frac{6}{6+6}$ |
| $3-3$ | $5$ | $\frac{(7\times 7)+7+7+7}{7}$ |
| $\frac{(4\times 4)+4+4+4}{4}+\frac{4}{4+4}$ | $\frac{9+9+9+9+9}{9}$ | $2+\frac{2}{2+2}$ |

379. Хотя требовалось, чтобы цифры в каждой клетке были различными, это вовсе не значило, что различными должны быть *числа*. В меньшем квадрате каждая из сумм чисел на десяти прямых равна 15, поскольку в дополнение к строкам, столбцам и большим диагоналям две малые диагонали тоже дают сумму 15. Это максимально возможное число прямых. Нам осталось лишь выразить каждое число с помощью своей в каждом случае повторяющейся цифры, используя знаки арифметических действий. На большем квадрате

показано, как это можно сделать. Все условия головоломки будут, таким образом, удовлетворены с максимальным числом направлений, равным десяти.

[Клеточки с 4, 8 и 7 излишне сложны. Возможно более простое решение:

$$4 + 4 - \frac{4}{4 + 4} = 7\frac{1}{2},$$

$$7 + \frac{7 + 7 + 7}{7} = 10.$$

$$8 - \frac{8}{8 + 8} = 7\frac{1}{2}.\text{- } \textit{\textbf{М. Г.}}].$$

---

| | | |
|---|---|---|
| 2243 | 1341 | 3142 |
| 3141 | 2242 | 1343 |
| 1342 | 3143 | 2241 |

---

380. Объяснение содержится в самом решении (см. рисунок). Суммы чисел, стоящих в строках, столбцах и на двух диагоналях, равны 6726, а каждая из цифр 1, 2, 3, 4 использована ровно девять раз.

381. Начав с правого верхнего угла, а затем двигаясь вниз «вокруг квадрата», заполните клетки числами в следующем порядке: 13, 81, 78, 6, 75, 8, 15, 16, 77, 70, 19, 79, 21, 9, 23, 2, 69, 66, 67, 74, 7, 76, 4, 1, 5, 80, 59, 73, 61, 3, 63, 12. Очевидно, противоположные числа на границе должны в любом случае давать в сумме 82, но их правильного расположения добиться не так-то легко. Разумеется, существуют и другие решения.

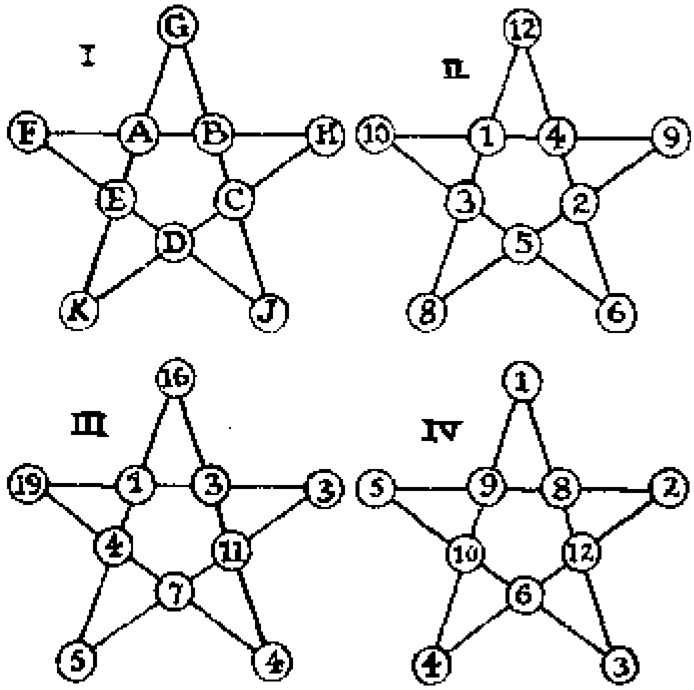
---

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 18 | 22 | 1 | 10 | 14 |
| 24 | 3 | 7 | 11 | 20 |
| 5 | 9 | 13 | 17 | 21 |
| 6 | 15 | 19 | 23 | 2 |
| 12 | 16 | 25 | 4 | 8 |

---

382. На рисунке приведено одно решение с нечетными и четными числами.

---

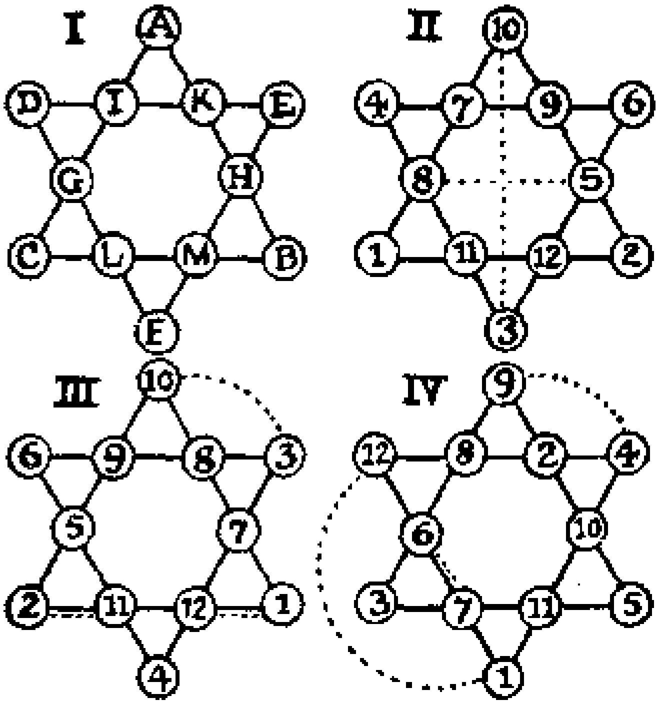



383. Назовем $ABCDE$ «пятиугольником», а $F$, $G$, $H$, $J$, $K$ «вершинами» ($I$). Запишем в пятиугольнике числа 1, 2, 3, 4, 5, как показано на рисунке II (мы начинаем с 1 и движемся по часовой стрелке, перескакивая каждый раз через один кружок). Чтобы заполнить звезду с суммой 24, воспользуйтесь следующим простым правилом. Найти $H$ можно, вычитая сумму $B$ и $C$ из половины данной постоянной (24) и прибавляя $E$. Другими словами, надо 6 вычесть из 15, при этом получится искомое значение $H$, равное 9. Затем можно вписать в кружок $F$ число 10 (чтобы сумма оказалась равной 24), вписать 6 в $J$, 12 в $G$ и 8 в $K$. Решение получено.

Вы можете вписать в пятиугольник любые 6 чисел в любом порядке и с произвольной постоянной суммирования. В каждом случае вы получите с помощью указанного правила единственно возможное решение для данных пятиугольника и постоянной. Однако в этом решении могут встретиться повторяющиеся или даже отрицательные числа. Допустим, например, что я задал пятиугольник 1, 3, 11, 7, 4 и постоянную 26 (см. рисунок *III*). Тогда видно, что 3 повторяется, а добавочное число 4 отрицательно и практически его приходится вычитать, а не прибавлять. Вы можете также заметить, что если бы в случае *II* мы заполнили пятиугольник теми же числами, но в другом порядке, то получили бы при этом повторяющиеся числа.

Ограничимся случаем десяти различных положительных целых чисел. Тогда 24 будет наименьшей возможной постоянной. Решение с любой большей постоянной можно получить из данного. Так, если мы хотим взять постоянную, равную 26, то достаточно добавить в вершины по 1. Если мы хотим взять постоянную 28, то в каждую вершину следует добавить по 2 или по 1 во все кружки. Для нечетных постоянных решений не существует, если мы не допускаем дроби. Каждое решение можно «вывернуть наизнанку». Так, рисунок IV — модификация рисунка *II*. Аналогично четыре числа в $G$, $K$, $D$, $J$ можно всегда изменить, если нет повторений, например вместо чисел 12, 8, 5, 6 на рисунке *II* подставить числа 13, 7, 6, 5. Наконец, в любом решении постоянная равна $\frac{2}{5}$ суммы всех десяти чисел. Поэтому если задано множество чисел, то мы можем определить постоянную, а по заданной постоянной найти сумму всех нужных чисел.

384. За недостатком места я не смогу здесь привести полное решение этой интересной задачи, но укажу читателю основные моменты.




---

1. При любом решении сумма чисел в треугольнике *ABC* (см. рисунок *I*) должна совпадать с суммой чисел в треугольнике *DEF*. Эта сумма может равняться любому числу от 12 до 27 включительно, кроме 14 и 25. Нам нужно получить решения лишь для случаев 12, 13, 15, 16, 17, 18 и 19, поскольку дополнительные решения 27, 26, 24, 23, 22, 21 и 20 можно получить из них, заменяя каждое число на разность между ним и 13.

2. Каждое решение составлено из трех независимых ромбов *AGHF*, *DKBL* и *EMCI*, сумма чисел в каждом из которых должна равняться 26.

3. Суммы чисел в противоположных внешних треугольниках равны между собой. Так, сумма чисел в треугольнике *AIK* равна сумме чисел в треугольнике *LMF*.

4. Если разность между 26 и суммой чисел в треугольнике *ABC* прибавить к любому числу, стоящему в вершине, скажем *A*, то получится сумма двух чисел, находящихся в соответствующих положениях *L* и *M*. Так (см. рисунок *II*), 10 + 13 = 11 + 12 и 6 + 13 = 8 + 11.

5. Существует 6 пар, дающих в сумме 13, а именно 12 + 1, 11 + 2, 10 + 3, 9 + 4, 8 + 5, 7 + 6, и среди вершин может оказаться 1 или 2 такие пары, но никогда не окажется 3. Относительное расположение этих пар определяет тип решения. У регулярного типа, как на рисунке *II*, *A* и *F*, а также *G* и *H* (что показано пунктирными линиями) в сумме всегда дают 13 (при более подробном доказательстве этот класс необходимо было бы разбить на 2 подкласса и рассматривать каждый из них в отдельности). На рисунках *III* и *IV* приведены примеры двух нерегулярных типов.

Всего существует 37 решений (или 74, если мы будем считать и дополнительные решения, упомянутые в п. 1), из которых 32 будут регулярными и 5 нерегулярными.

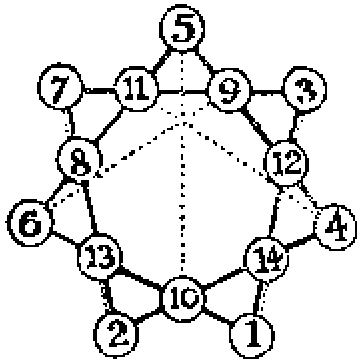
У 6 из 37 решений сумма вершин равна 26, а именно:

| | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 10 | 6 | 2 | 3 | 1 | 4 | 7 | 9 | 5 | 12 | 11 | 8 |
| 9 | 7 | 1 | 4 | 3 | 2 | 6 | 11 | 5 | 10 | 12 | 8 |
| 5 | 4 | 6 | 8 | 2 | 1 | 9 | 12 | 3 | 11 | 7 | 10 |
| 5 | 2 | 7 | 8 | 1 | 3 | 11 | 10 | 4 | 12 | 6 | 9 |
| 10 | 3 | 1 | 4 | 2 | 6 | 9 | 8 | 7 | 12 | 11 | 5 |
| 8 | 5 | 3 | 1 | 2 | 7 | 10 | 4 | 11 | 9 | 12 | 6 |

Первое решение представлено на рисунке *II*, а предпоследнее — на рисунке *III*, так что, обратившись к рисунку, вы поймете, как следует располагать эти числа на звезде. Читателю следует все приведенные выше решения изобразить на звезде и помнить, что вместо 6 вместе с дополнительными получится 12 решений. Первые четыре решения будут регулярного, а последние два — нерегулярного типа. Если читатель попытается найти все 37 (или 74) решений данной головоломки, то ему будет полезно знать, что существует соответственно 3, 6, 2, 4, 7, 6, 9 (всего 37) решений с суммой вершин, равной 24, 26, 30, 32, 34, 36, 38.

[Для шестиконечной звезды существует 80 решений.— *М. Г.*]

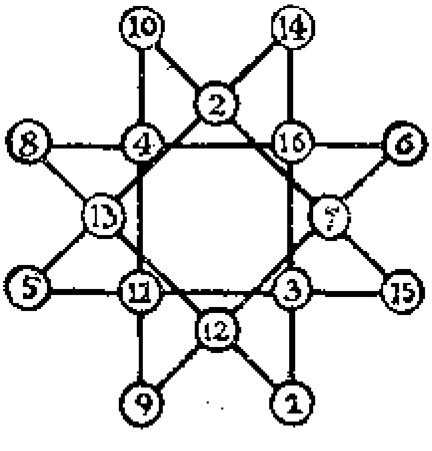
385. Поместите 5 в верхний кружок. Затем расположите четыре числа (7, 11, 9, 3) на горизонтальной линии так, чтобы сумма внешних чисел равнялась 10, а внутренних 20 и чтобы разность между двумя внешними числами в два раза превышала разность между двумя внутренними числами. Затем поместите числа, дополняющие их до 15, в соответствующие кружочки, как показано пунктирными линиями. Остальные четыре числа (13, 2, 14, 1) расставить уже легко. Из этого основного размещения мы можем получить три остальных: первое — поменяйте местами 13 с 1, а 14 с 2; второе и третье — подставьте в полученных двух размещениях вместо каждого числа разность между ним и 15 (например, 10 вместо 5, 8 вместо 7, 4 вместо 11 и т. д.). Следуя этим правилам, читатель может сам построить вторую группу из четырех решений.




Общее решение слишком длинно, чтобы приводить его здесь полностью, однако существует всего 56 различных размещений (вместе с дополнительными). Я разбиваю их на три класса. В класс I включаются все случаи, подобные приведенным выше, где пары в положениях 7—8, 13—2, 3—12, 14—1 в сумме дают 15, а всего таких случаев 20. В класс II включаются случаи, в которых пары в положениях 7—2, 8—13, 3—1, 12—14 в сумме дают 15; таких случаев снова 20. В класс III входят все случаи, в которых пары в положениях 7—8, 13—2, 3—1, 12—4 в сумме дают 15; таких случаев 16. Всего получается 56 случаев.

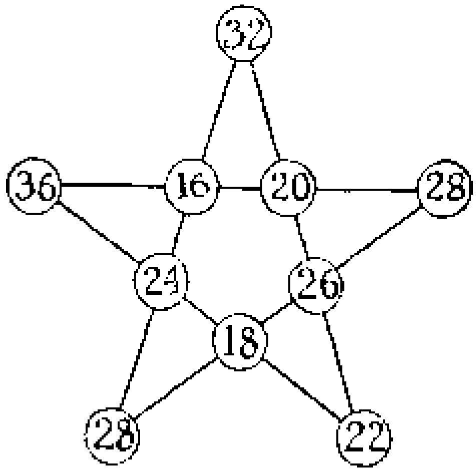
[Для семиконечной звезды существует 72 решения.— *М. Г.*]

386. На рисунке приведено искомое решение. Сумма четырех чисел вдоль любой прямой равна 34. Если решение для одной звезды известно, то его можно без труда преобразовать в решение для второй звезды, отметив, как перемещаются числа в приведенных двух решениях.



Мне не удалось подсчитать общее количество решений для звезд данного порядка. Это, как мне кажется, весьма трудная задача. Быть может, читатели попытают в ней счастья.

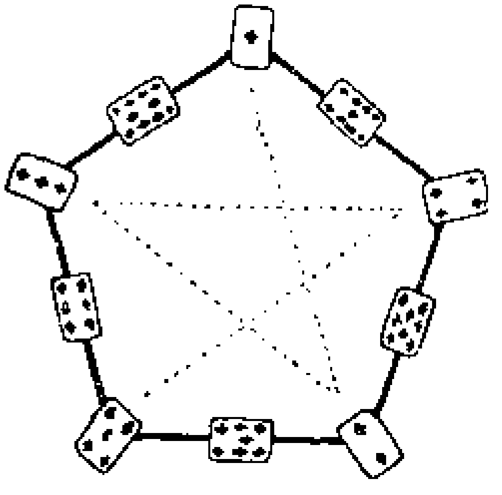
[Для случая восьмиконечной звезды известно 112 различных решений.— *М. Г.*]

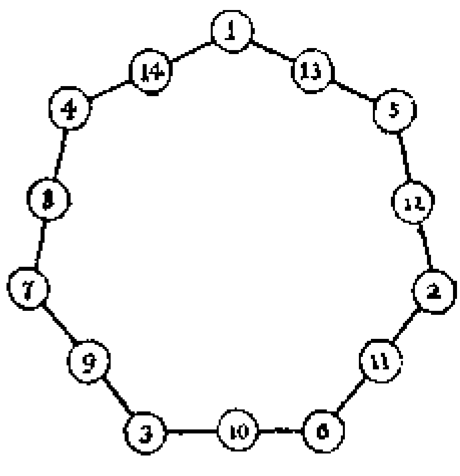



387. На рисунке показан один из способов размещения гарнизонов, при котором общее число солдат вдоль каждой из пяти линий равно 100.

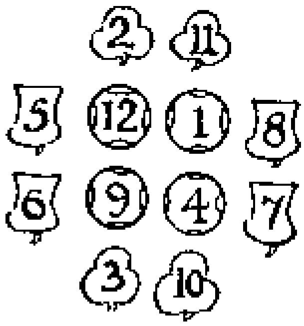
388. Положите карты 1, 2, 3, 4, 5 в последовательности, показанной пунктирными линиями, то есть каждую следующую карту помещайте через один угол, двигаясь по часовой стрелке, а затем разместите в противоположном направлении карты 6, 7, 8, 9, 10, позаботясь о том, чтобы 6 было расположено с нужной стороны от 5. Сумма очков на каждой стороне равна 14. Если вы теперь разместите карты 6, 7, 8, 9, 10 первым способом, а карты 1, 2, 3, 4, 5 вторым, то получите другое решение — с суммой, равной 19. Теперь проделайте то же самое о двумя множествами чисел 1, 3, 5, 7, 9 и 2, 4, 6, 8, 10, и вы получите еще два решения с суммами соответственно 16 и 17.

Всего существует 6 решений, из которых 2 последних являются особыми. Выпишите в том же порядке 1, 4, 7, 10, 13 и 6, 9, 12, 15, 18; выпишите также 8, 11, 14, 17, 20 и 3, 6, 9, 12, 15. Затем вычтите 10 из каждого числа, большего 10.

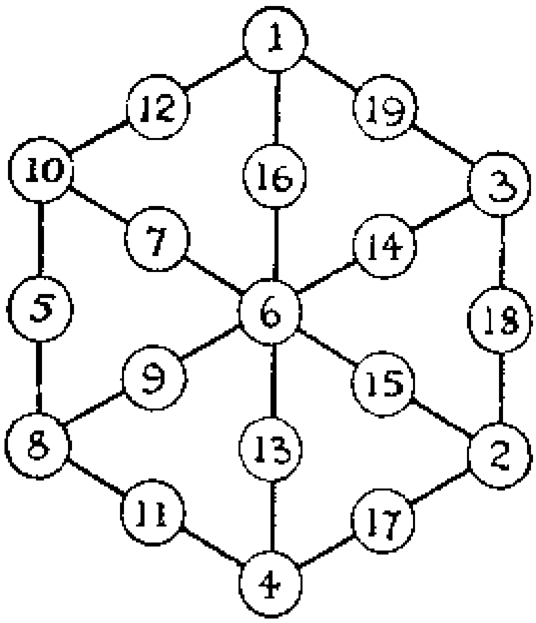




389. Решение вы видите на рисунке справа. Начав с верхнего кружка и двигаясь по часовой стрелке, вписывайте числа от 1 до 7 через одну вершину. Затем, начав сразу над 7 и двигаясь в противоположном направлении, заполните свободные места числами от 8 до 14. Если же вы сначала впишите числа 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, а затем 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, то получите другое решение с суммой 22 вместо 19. Если в приведенных решениях заменить каждое число разностью между ним и 15, то получатся два дополнительных решения с суммами, равными соответственно 26 и 23 (разность между 45 и 19, 45 и 22).




390. Ясно, что все указанные суммы должны равняться 26. Одно из многочисленных решений приведено на рисунке.




391. На рисунке приведен единственно правильный ответ.

392. Для решения головоломки необходимо лишь поместить число 10 в центр, а остальные числа вписать по порядку по окружности: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 19, 18, 17, 16, 15, 14, 13, 12, 11.

393.

A B

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 15 л | 16 л | 15 л | 16 л | 15 л | 16 л | 15 л | 16 л |
| 0 | 16* | 15 | 5* | 15* | 0 | 0 | 11 |
| 15 | 1* | 0 | 5 | 0 | 15 | 15 | 11 |

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 1 | 5 | 0 | 15 | 15 | 10* | 16 |
| 1 | 0 | 5 | 16 | 14* | 16 | 10 | 0 |
| 1 | 16 | 15 | 6* | 14 | 0 | 0 | 10 |
| 15 | 2* | 0 | 6 | 0 | 14 | 15 | 10 |
| 0 | 2 | 6 | 0 | 15 | 14 | 9* | 16 |
| 2 | 0 | 6 | 16 | 13* | 16 | 9 | 0 |
| 2 | 16 | 15 | 7* | 13 | 0 | 0 | 9 |
| 15 | 3* | 0 | 7 | 0 | 13 | 15 | 9 |
| 0 | 3 | 7 | 0 | 15 | 13 | 8* | 16 |
| 3 | 0 | 7 | 16 | 12* | 16 | | |
| 3 | 16 | 15 | 8* | 12 | 0 | | |
| 15 | 4* | 0 | 8 | 0 | 12 | | |
| 0 | 4 | 8 | 0 | 15 | 12 | | |
| 4 | 0 | 8 | 16 | 11* | 16 | | |
| 4 | 16 | | | 11 | 0 | | |

Каждая строка в столбце означает операцию. Так, в случае $A$ мы сначала наполняем сосуд в 16 л, затем переливаем 15 л в другой сосуд, оставив 1 л; затем, опорожнив сосуд емкостью 15 л, переливаем в него 1 л из 16-литрового сосуда и т. д.

Звездочки показывают, как можно последовательно отмерить 1, 2, 3, 4 л и т. д. Можно поступить иначе — так, как показано в случае $B$: сначала наполнить 15-литровый сосуд, а затем последовательно отмерять 14, 13, 12, 11 л и т. д. Продолжив «стратегию» $A$, мы получим схему переливаний $B$ в обратном порядке. Отсюда видно, что для того, чтобы отмерить от 1 до 7 л, мы должны воспользоваться способом $A$, а от 8 до 14 л — способом $B$. При способе $A$ мы можем отмерить 8 л за 30 операций, а при способе $B$ — лишь за 28, что и будет правильным ответом.

Удивительно, что с помощью любых двух взаимно простых мер (то есть не имеющих общих делителей, как, например, 15 и 16) мы можем отмерить любое целое число литров от 1 до наибольшей меры. С помощью емкостей 4 и 6 л (каждое делится на 2) мы можем отмерить только 2, 4 и 6 л. С 3- и 9-литровым сосудами мы можем отмерить только 3, 6 и 9 л. В нашей таблице отмериваемые объемы идут в правильной последовательности. Однако если мы возьмем сосуды в 9 и 16 л и применим способ $A$, то получим 6, 14, 5, 12, 3 л и т. д. с циклической разностью 7 (16—9—7). Другими словами, прибавляя 7 к 14 и вычитая 16, мы получим 5, а прибавляя 7 к 12 и вычитая 16, получим 3 и т. д.

[Относительно одного хорошего метода решения подобных головоломок с помощью изометрической бумаги см. мою заметку в журнале *Scientific American*, September 1963, а дальнейшее обсуждение этого метода — в книге Т. Н. О"Beirne «Puzzles and Paradoxes» (Oxford University Press, 1965).— *М. Г.*]

394. Наполнив и опорожнив 7-квартовый сосуд 14 раз, вы выльете 98 кварт и оставите в бочке 22 кварты, совершив 28 операций. (На то, чтобы наполнить и опорожнить сосуд, уходят 2 операции.) Наполните 7-квартовый сосуд, затем из него наполните 5-квартовый сосуд (в 7-квартовом остаются 2 кварты). Опорожните сосуд емкостью в 5 кварт, перелейте в него оставшиеся 2 кварты из 7-квартового сосуда. Снова наполните 7-квартовый сосуд и дополните из него 5-квартовый (в 7-квартовом останутся 4 кварты). Опорожните 5-квартовый сосуд и перелейте в него 4 кварты из 7-квартового сосуда. Еще раз наполните 7-квартовый сосуд и долейте из него 5-квартовый (в 7-квартовом сосуде останется 6 кварт). Опорожните 5-квартовый сосуд. Наполните его из 7-квартового сосуда (в котором останется 1 кварта). Опорожните 5-квартовый сосуд. Перелейте оставшуюся 1 кварту из бочки в 5-квартовый сосуд. На все переливания уйдет еще 14 операций. Так что всего придется совершить 42 операции. Или же вы можете вылить из бочки 104 кварты за 32 операции (12 раз по 7 и 4 раза по 5 — самый быстрый способ), а с оставшимися 16 квартами справиться за 10 операций.

395. Наполните сосуды емкостью 7 и 5 кварт. Вылейте 108 кварт из бочки, опорожните 5-квартовый сосуд в бочку, а затем наполните его из 7-квартового сосуда. Перелейте содержимое 5-квартового сосуда в бочку. Отлейте 2 кварты из большего сосуда в меньший. Наполните 7-квартовый сосуд из бочки, а затем из него 5-квартовый сосуд. Перелейте содержимое 5-квартового сосуда в бочку. Перелейте 4 кварты из большего сосуда в меньший. Наполните больший сосуд из бочки и отлейте из него 5 кварт в меньший сосуд. Вылейте на землю содержимое 5-квартового сосуда и наполните его из бочки. Выплесните па землю только что налитые 5 кварт и перелейте 1 кварту из бочки в 5-квартовый сосуд. Задание, таким образом, выполнено за наименьшее число операций, равное 17.

396. Вместимость кувшина должна быть чуть меньше 3 л. Точнее говоря, она равна 2,93 л.

397. Две пинты воды можно отмерить за 14 операций, если сосуды над чертой пусты, а каждая строка соответствует одной операции.

| 7 л | 11 л |
|---|---|
| 7 | 0 |
| 0 | 7 |
| 7 | 7 |
| 3 | 11 |
| 3 | 0 |
| 0 | 3 |
| 7 | 3 |
| 0 | 10 |
| 7 | 10 |
| 6 | 11 |
| 6 | 0 |
| 0 | 6 |
| 7 | 6 |
| 2 | 11 |

Содержимое сосудов, указанное после каждой операции, не требует пояснений.

398. Смесь содержит $\frac{7}{24}$ вина и $\frac{17}{24}$ воды.

399. Вот одно из нескольких решений:

| Емкость сосудов в унциях | 24 | 13 | 11 | 5 |
|---|---|---|---|---|
| Содержимого в сосуде: | | | | |
| до переливания | 24 | 0 | 0 | 0 |
| после 1-го переливания | 0 | 8 | 11 | 5 |
| после 2-го переливания | 16 | 8 | 0 | 0 |
| после 3-го переливания | 16 | 0 | 8 | 0 |
| после 4-го переливания | 3 | 13 | 8 | 0 |
| после 5-го переливания | 3 | 8 | 8 | 5 |
| Итого | 8 | 8 | 8 | 0 |

[Найдено лучшее решение, содержащее только 5 операций:

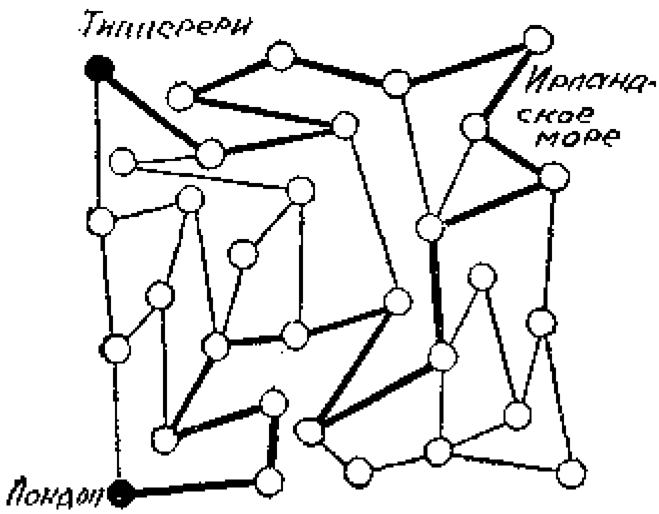
| | | | |
|---|---|---|---|
| 8 | 0 | 11 | 5 |
| 8 | 11 | 0 | 5 |
| 8 | 13 | 3 | 0 |
| 8 | 8 | 3 | 5 |
| 8 | 8 | 8 | 0 — *М. Г.*] |

400. Простейшим решением задачи будет следующее (вверху указана емкость сосудов, ниже — первоначальное количество содержимого, а в каждой следующей строке — количество содержимого после очередной операции):

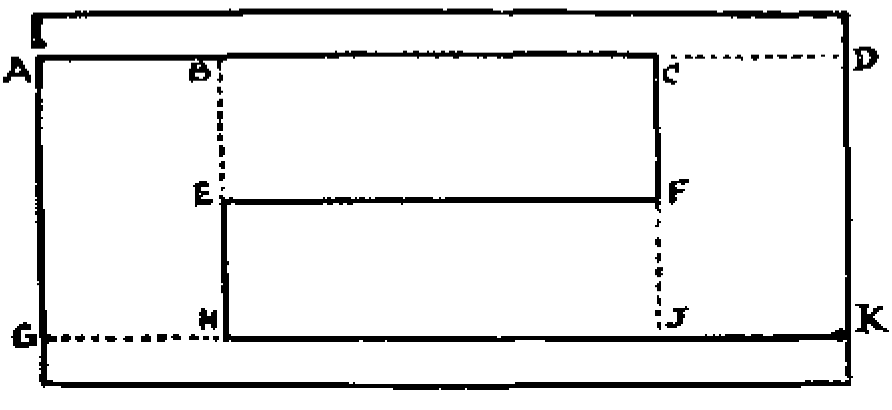
| 80 л | 80 л | 5 л | 4 л |
|---|---|---|---|
| 80 | 80 | 0 | 0 |
| 75 | 80 | 5 | 0 |
| 75 | 80 | 1 | 4 |

| | | | |
|---|---|---|---|
| 79 | 80 | 1 | 0 |
| 79 | 80 | 0 | 1 |
| 74 | 80 | 5 | 1 |
| 74 | 80 | 2 | 4 |
| 78 | 80 | 2 | 0 |
| 78 | 76 | 2 | 4 |
| 80 | 76 | 2 | 2 |

Так, мы сначала наполняем 5-литровый кувшин из одного бидона, затем 4-литровый кувшин из 5-литрового, затем выливаем содержимое 4-литрового обратно в бидон и т. д. Все это можно проделать очень легко. Обратите внимание на остроумие последних двух операций: мы наполняем 4-литровый кувшин из второго бидона, а затем доверху доливаем первый бидон.

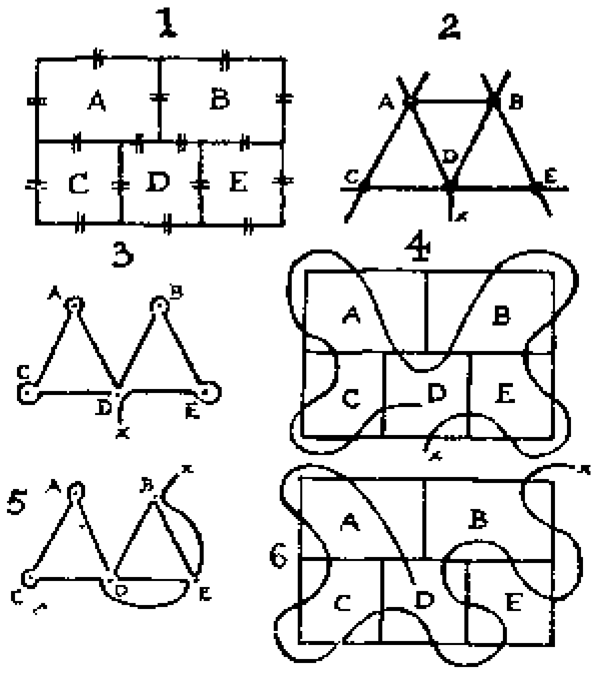



401. Жирная линия на рисунке показывает путь из Лондона в Типперери, совершаемый за 18 переходов. Чтобы добраться до места назначения за четное число переходов, совершенно необходимо включить в маршрут переход, отмеченный словами Ирландское море.



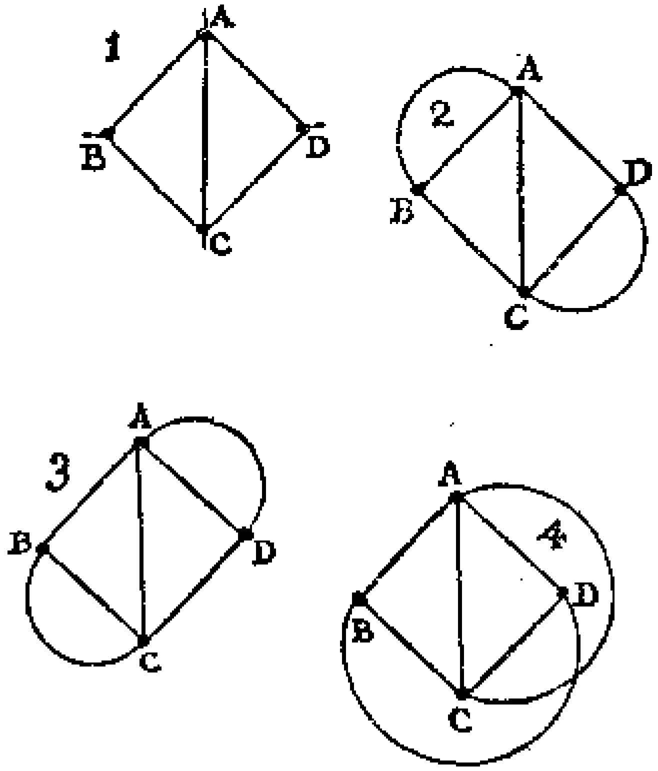

402. Десять точек, отмеченных на рисунке буквами, представляют собой «нечетные узлы», то есть точки, из которых вы можете идти по нечетному числу (три) направлений. Следовательно, нам известно, что всего потребуется 5 линий (половина 10). Пунктирные линии показывают 4 кратчайших расстояния между узлами. Обратите внимание, что вам нельзя использовать один узел дважды; в противном случае решение можно было бы удушить, обозначив пунктиром *EH* и *CF* вместо *CD* и *GH*. Зафиксировав наши 4 кратчайших расстояния, мы можем начертить все остальное с помощью одной непрерывной линии от *A* до *K*, как показано на рисунке. Добравшись до *D*, вы должны пройти к *C* и обратно к *D*, от *G* к *H* и обратно и т. д. Или же вы можете

подождать до того момента, когда доберетесь до $C$, а затем пройти до $D$ и обратно и т. д. Таким образом, вы пройдете дважды только пунктирные линии, что и даст минимально возможное расстояние, которое приходится проходить дважды.

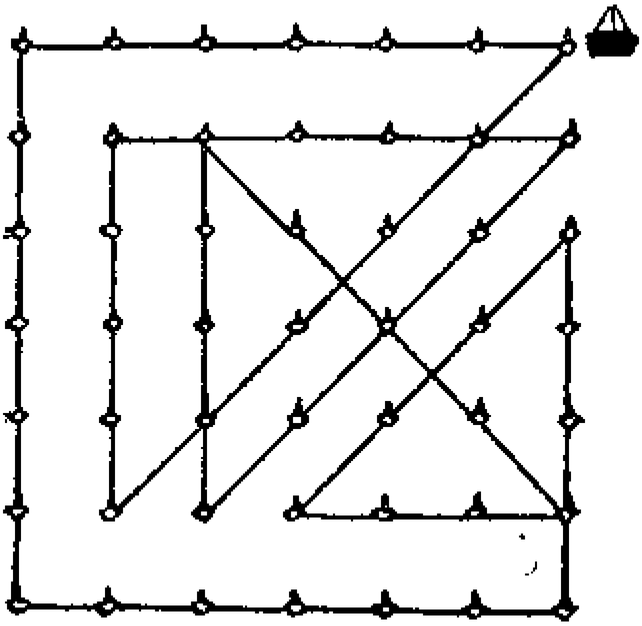



403. Допустим, что мы пересекаем отрезки по мостам, изображенным в случае *1* маленькими параллельными линиями. Далее я преобразую диаграмму, сведя области $A$, $B$, $C$, $D$, $E$ просто к точкам и изобразив мосты, связывающие данные точки, прямыми, или путями,— случай *2*. При этом никакого изменения условий не произошло, поскольку в каждом случае имеется 16 мостов (путей) и они связывают $A$, $B$, $C$, $D$, $E$ совершенно одинаковым образом. Можно заметить, что наружу выходят 9 мостов, или путей. Очевидно, мы можем попарно соединять данные пути, заботясь лишь о том, чтобы они не пересекали друг друга. Простейший способ показан в случае *3*. Выйдя из $A$, $B$, $C$ или $E$, мы немедленно возвращаемся в ту же точку по соседнему мосту, оставив одну точку $x$ обязательно вовне. В случае *2* имеются 4 нечетных узла $A$, $B$, $D$ и $x$ (если мы решили входы и выходы сделать такими, как в случае *3*); поэтому, как я уже объяснял, нам потребуется 2 росчерка (половина 4), чтобы пройти по всем путям, откуда и следует неразрешимость нашей задачи.

Теперь давайте удалим отрезок $AB$. Тогда $A$ и $B$ станут четными узлами, а нам придется начинать и заканчивать наш маршрут в нечетных узлах $D$ и $x$. Двигайтесь вдоль линии, показанной в случае *3*, и вы увидите, что это можно сделать, выбросив путь от $A$ до $B$. Эту схему читатель легко преобразует в случай *4*, сказав себе: «Идем из $x$ в $D$, из $D$ в $E$, из $E$ наружу и возвращаемся в $E$» и т. д. Маршрут можно изменить, соединив внешние мосты по-другому: принять за $x$ внешний мост, идущий в $A$ или $B$ вместо $D$, и выбросить любой из путей $AB$, $AD$, $BD$, $xA$, $xB$ или $xD$. В случае *5* путь из $x$ идет в $B$. Мы по-прежнему выбросили $AB$, но должны теперь начинать и заканчивать движение в $D$ и $x$. Преобразовав эту диаграмму (см. случай *6*), можно заметить, что получился тот же самый чертеж, который я приводил, формулируя задачу. Теперь читатель может начертить столько маршрутов, сколько пожелает, но при этом всегда придется удалять один из путей (мостов). На примере нашей головоломки хорошо видно, как некоторая изобретательность (вроде той, что была проявлена при преобразовании диаграмм) помогает нащупать правильный подход.




404. Преобразуйте карту следующим образом. Сведите острова $A$, $B$, $C$ и $D$ просто к точкам, а мосты превратите в линии, как это сделано в случае *1*. Условия задачи от этого не меняются. Если вы соедините $A$ и $B$, а также $C$ и $D$ линиями, которые будут проходить вне четырехугольника $ABCD$, то получите случай *2*; если же вы подобным образом соедините $A$ и $D$, а также $B$ и $C$, то получите случай *3*; если же вы соедините $A$ с $C$, а $B$ с $D$, то получите случай *4*. В каждом из этих случаев $B$ и $D$ представляют собой «нечетные узлы» (точки, из которых можно выйти по нечетному числу путей, а именно по трем путям), так что при любом маршруте вы должны начинать и заканчивать свой путь в B или D для того, чтобы пройти один и только один раз вдоль каждой линии. Следовательно, Томпкинс обязан жить в $B$ или $D$. Для определенности мы положим, что он живет в $B$, и поместим Джонсона в $D$. Всего существует 44 маршрута в случае 2, 44 в случае 3 и 44 в случае 4, что составляет всего 132 маршрута, если мы не различаем маршруты с противоположным направлением обхода. Возьмем, например, случай 2 и обозначим внешние кривые линии через $O$. Тогда, если вы начнете движение по $BOAB$, $BOAC$, $BAOB$ или $BAC$, каждый из этих вариантов даст по 6 различных маршрутов. Если вы начнете движение по $BOAD$, $BAD$, $BCOD$, $BCA$ или $BCD$, то получите по 4 маршрута. В случае 3 $BOCA$, $BOCB$, $BCA$ или $BCOB$ дадут по 6 маршрутов, а $BOCD$, $BAOD$, $BAC$, $BAD$ или $BCD$ — по 4 маршрута каждый. Аналогичным образом обстоит дело и в случае *4*.



405. На рисунке показано, каким образом военный корабль может потопить 49 судов за 12 прямых курсов, закончив движение в той же точке, откуда начал. Двигайтесь вдоль каждой прямой до того места, где он меняет направление.

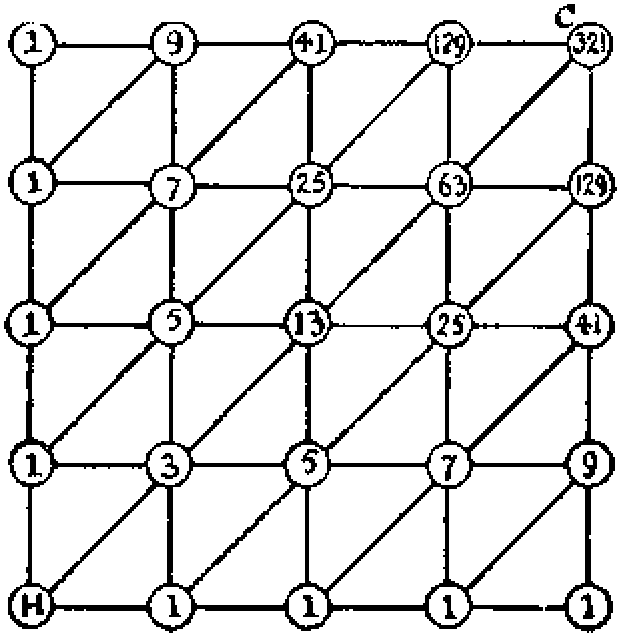
[Доказано, что можно соединить все точки, расположенные в виде квадрата $n \times n$, непрерывным путем, состоящим из $2n-2$ отрезков прямой, для всех $n > 2$. Случай $n = 3$ представляет собой хорошо известную головоломку, которую большинству решить не удается, поскольку те, кто решает, не всегда догадываются продолжить отрезки за пределы квадрата. $5 \times 5$ — это наименьший квадрат, в котором линия из $2n - 2$ отрезков может не выходить за его пределы.

Можно построить замкнутый путь (у такого пути концы совпадают, как в приведенной выше головоломке) из $2n - 2$ отрезков для всех квадратов со стороной, большей 3. Квадрат $7 \times 7$ представляет собой наименьший квадрат с нечетной стороной, для которого существует замкнутый путь из $2n - 2$ отрезков, не выходящий за пределы данного квадрата. (Наименьший квадрат с четной стороной, для которого можно нарисовать подобный путь, равен $6 \times 6$.)

Приведенное здесь Дьюдени решение имеется в книге Сэма Лойда «Cyclopedia of Puzzles» как решение одной из его головоломок. Лойд говорит, что он впервые опубликовал эту головоломку в 1908 г., и отзывается о данном решении как об «удивительно трудном трюке». Позаимствовал ли Лойд свою головоломку у Дьюдени или наоборот, еще не установлено.

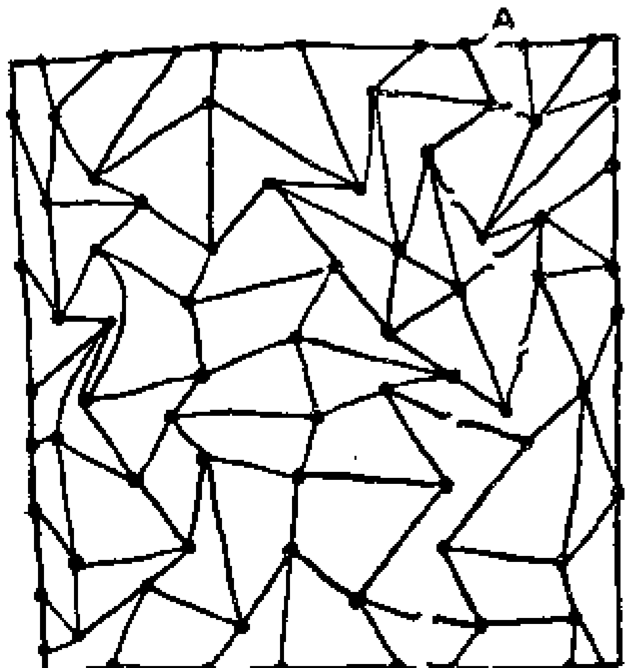
Обратите внимание на то, что это решение для случая $7 \times 7$ является одновременно решением задачи о замкнутом «пути ферзя» на шахматной доске $7 \times 7$ за $2n-2$ ходов. Замкнутый путь ферзя за $2n-2$ ходов возможен также на любой доске со сторонами, большими 7. Замкнутый путь ферзя за 14 ходов на обычной доске $8 \times 8$ был впервые найден Сэмом Лойдом, который считал эту задачу одной из лучших своих головоломок.

Число $2n - 2$ является необходимым также для любой квадратной доски. — *М. Г.*]

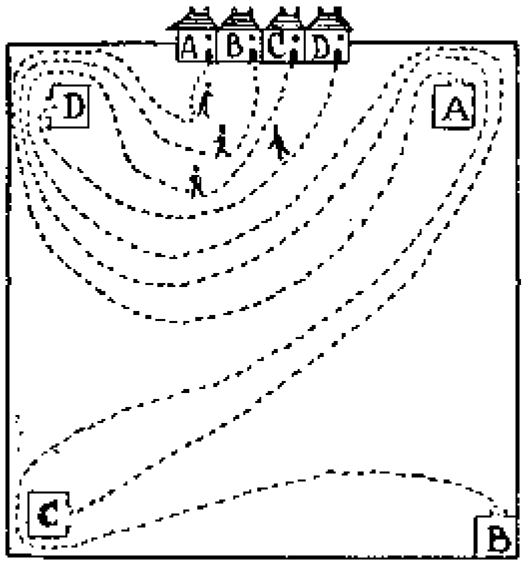



406. Из дома *H* до любой из точек, расположенных к северу или к востоку от него, можно добраться лишь одним путем. Поэтому я в этих точках поставил цифру *1*. Теперь возьмем второй столбец и заметим, что существуют 3 пути, ведущие во вторую снизу точку, 5 — в следующую, 7 — в следующую за ней и т. д., причем при переходе в очередную расположенную выше точку число путей увеличивается на 2. То же самое применимо и ко второй снизу строке. Выпишем везде соответствующие цифры. Далее, до центральной точки можно добраться 13 путями, поскольку мы можем к ней подойти или из точки снизу (5 путей), или из точки слева (5 путей), или из точки слева внизу по диагонали (3 пути), что в сумме и даст 13 путей. Таким образом, все, что нам осталось сделать,- это выписывать по очереди в каждой точке сумму трех чисел, расположенных в ближайших точках, из которых можно непосредственно попасть в данную. Отсюда мы и получим, что общее число путей, ведущих из *H* в *C*, равно 321.

407. На рисунке показано, как лучше всего разрезать сеть. Нетрудно видеть, что 8 разрезов от *A* до *B* делят сеть на 2 части.

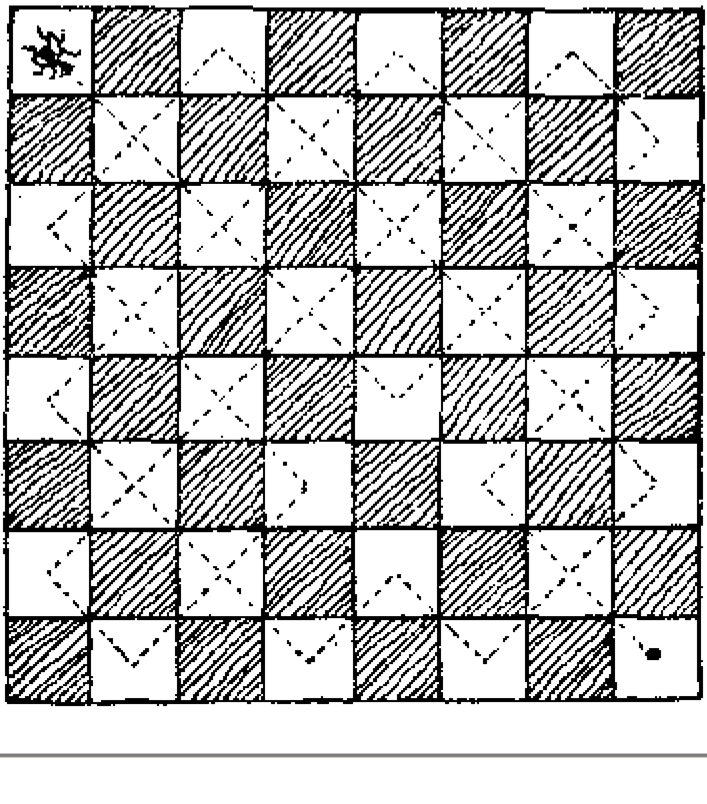


408. Можно заметить, что каждый участок соединен с остальными четным числом мостов (2, 4 или 6); исключение составляют участки $C$ и $L$, в которые ведут по 3 моста (нечетное число). Следовательно, чтобы пройти по каждому мосту один и только один раз, необходимо начинать и заканчивать маршрут в $C$ и $L$, где как раз и расположены дома наших двух приятелей. Так, отправляясь из $C$, мы можем двигаться по следующему маршруту: $C$, $G$, $F$, $C$, $B$, $A$, $D$, $H$, $E$, $I$, $H$, $J$, $K$, $L$, $M$, $G$, $I$, $F$, $B$, $E$, $F$, $I$, $L$.




409. Решение ясно из рисунка.

410. Фразу HERE LIES JOHN RENIE можно прочитать 45 760 способами (или, если разрешается перемещаться от одной буквы к следующей и по диагонали, 91 520 способами), поскольку, добравшись до углового I, мы обязаны сместиться назад по диагонали к ближайшему E. За недостатком места здесь не приводятся детали решения. Единственная дополнительная информация о камне заключается в окончании фразы: «...который умер 31 мая 1832 г. в возрасте 32 лет».



411. На рисунке показан путь, удовлетворяющий всем заданным условиям.

412. Наикратчайший путь в *ABCHCDEIEFGBHDIHGIFAG*. Таким образом, инспектор проделает путь в 211 км, проехав по двум коротким дорогам *CH* и *EI* дважды.

413. Существует 2501 маршрут от *B* до *D*, а именно:

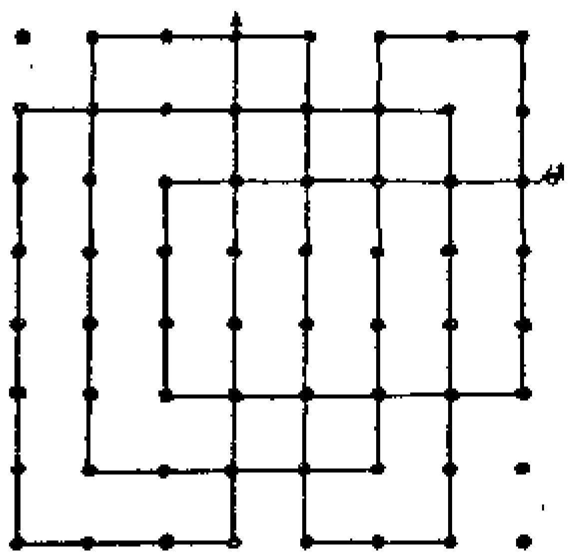
| Количество участков | Число маршрутов | Число вариаций | |
|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 2 | 2 |
| 2 | 1 | 9 | 9 |
| 3 | 2 | 12 | 24 |
| 4 | 5 | 18 | 90 |
| 5 | 4 | 72 | 288 |
| 6 | 14 | 36 | 504 |
| 8 | 22 | 72 | 1584 |
| | | | 2501 |

Достаточно рассмотреть маршруты от *B* до *D*. Маршрут, состоящий из 1 участка, ведет прямо в *D*. Маршрут из 2 участков есть *CD*. Маршрутами из 3 участков будут *CBD* и *DCD*. Пятью маршрутами из 4 участков являются *DBCD*, *DCBD*, *CBCD*, *CDCD* и *CDBD*. У каждого из этих маршрутов есть вариации, связанные с выбором конкретных участков, и число таких вариаций одинаково для любого маршрута, содержащего данное количество участков. Маршрутов с семью участками не существует.

414. Число различных путей равно 264. Эта головоломка довольно трудна, но недостаток места не позволяет мне показать наилучший метод подсчета всех маршрутов.

415. Существует 60 маршрутов, следуя по которым миссис Симпер могла бы посетить каждый город по одному и только по одному разу, закончив путь в *H*, если считать различными маршруты, отличающиеся только направлением. Однако если леди должна избежать тоннелей между *N* и *O*, а также между *S* и *R*, то можно обнаружить, что число различных маршрутов сокращается до 8.

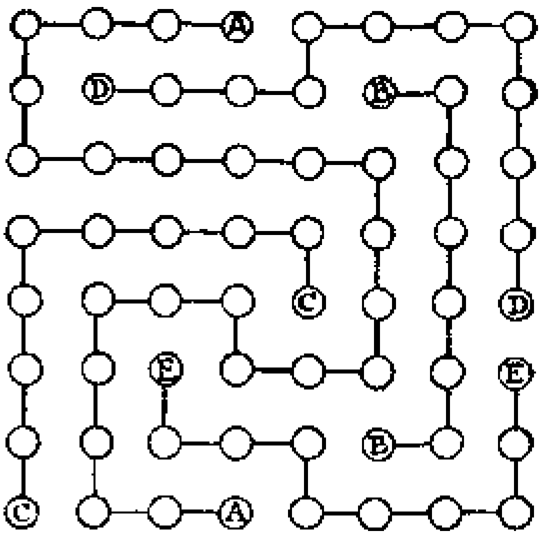
Если это заинтересует читателя, то он может попытаться самостоятельно определить все 8 маршрутов. Поступив таким образом, он обнаружит, что маршрутом, удовлетворяющим всем условиям, то есть не включающим в себя два тоннеля и задерживающим визит в *D* как можно дольше, окажется маршрут *HISTLKBCMNU QRGFPODEAH*. Он, несомненно, и будет наилучшим маршрутом.



416. На рисунке показан маршрут длиной 76 км, состоящий из 16 прямолинейных участков и не охватывающий только 3 города. Эта головоломка не простая, ее решение можно найти только после большого числа проб и ошибок.

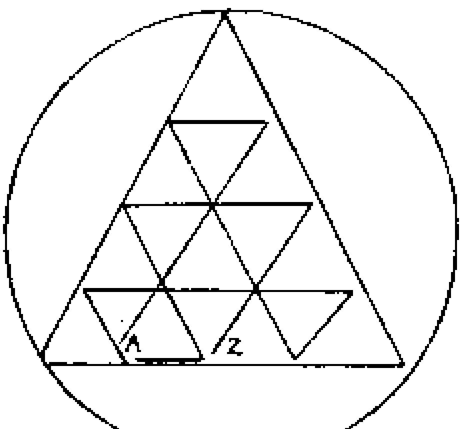
[Милли улучшил решение, найдя 76-километровый путь, состоящий из 16 отрезков и не захватывающий только *один* город. По-видимому, это наилучшее возможное решение. Читатель может попытаться его найти.— *М. Г.*]

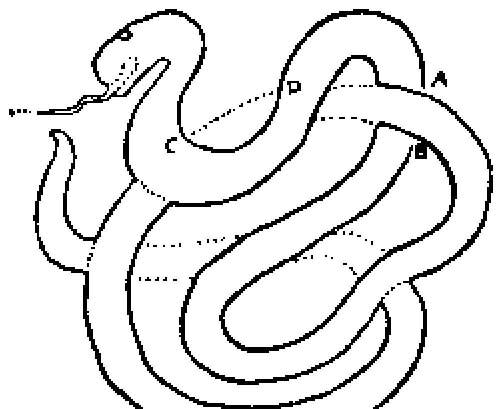
417. На рисунке, где для большей ясности опущены неиспользованные дороги, показаны маршруты всех 5 автомобилей. Все маршруты не имеют общих участков и не пересекаются. Хотя точного правила для решения головоломок такого рода указать нельзя, тем не менее, внимательно подумав, мы обычно можем справиться со встретившимися здесь трудностями. Например, уже было показано, что если соединить $A$ с $A$ по вертикали, то $C$, $D$ и $E$ окажутся отрезанными друг от друга. Вскоре выясняется, что путь из $A$ должен обойти слева верхнее $D$, а затем пройти справа от $C$. Таким образом, становится очевидным путь из $D$ в $D$ и из $B$ в $B$. Остальное закончить уже легко.



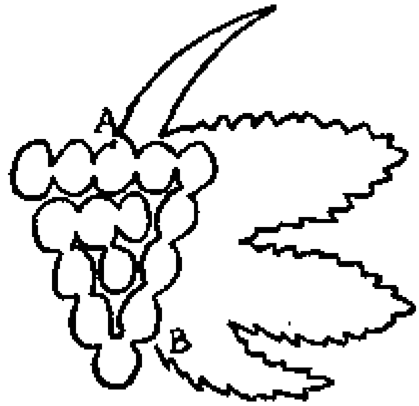

418. При любом способе первой буквой должна быть $M$, а поскольку у нас всего четыре буквы $M$, то мы можем начинать только из четырех точек. Можно показать, что при фиксированном начальном $M$ существует 20 различных способов; следовательно, всего имеется 80 способов.

419. Эту головоломку можно решить с помощью поразительно малого числа росчерков, а именно 14, начиная из $A$ и заканчивая в $Z$. На рисунке, помещенном слева, сознательно оставлены пробелы, чтобы сделать яснее путь карандаша.

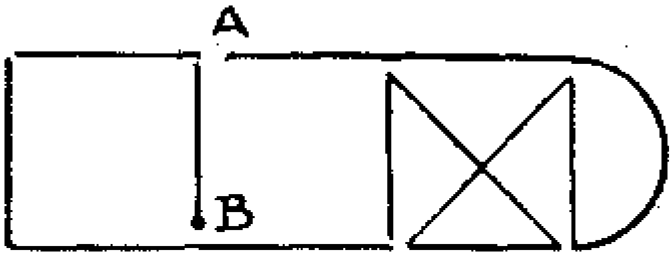


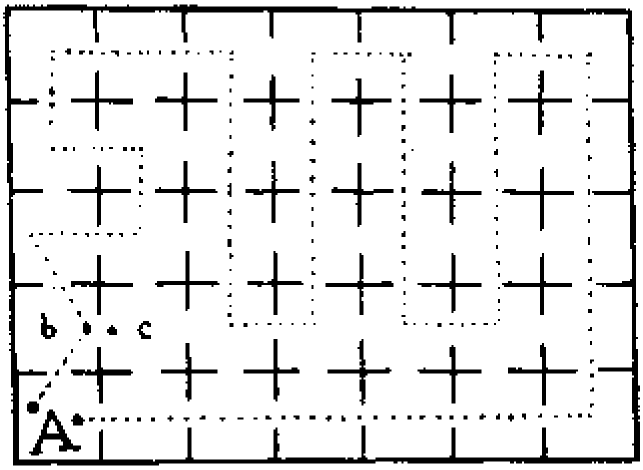
420. Нарисовать змею менее чем 13 линиями невозможно. Поэтому необходимо найти самую длинную из этих линий. На нашем рисунке мы начинаем в $A$, а кончаем в $B$ или наоборот. Пунктиром обозначены пропущенные линии. Чтобы найти решение, требуется немного подумать. Так, непрерывная линия из $D$ в $C$ длиннее пунктирной, следовательно, мы выбираем первую. Точно так же мы увеличим длину линии, если нарисуем язык вместо рта, но при этом кончик языка, изображенный в виде отрезка прямой, мы обязаны отбросить.



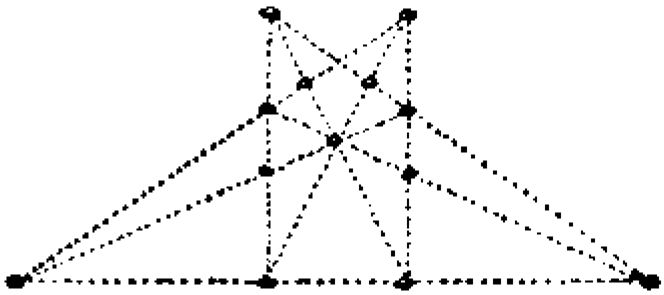

421. Существуют разные варианты решения; один из них показан на рисунке. Однако совершенно необходимо, чтобы вы начинали в $A$, а кончали в $B$ или наоборот. В любой другой точке сходятся две или четыре (четное число) линии, а в $A$ и $B$ — три (нечетное число). Следовательно, начало и конец пути должны совпадать с $A$ и $B$.




422. Головоломку решить можно, но при этом необходимо начинать рисунок в точке $A$, а кончать его в $B$ или наоборот. В противном случае начертить требуемую фигуру одной непрерывной линией нельзя.

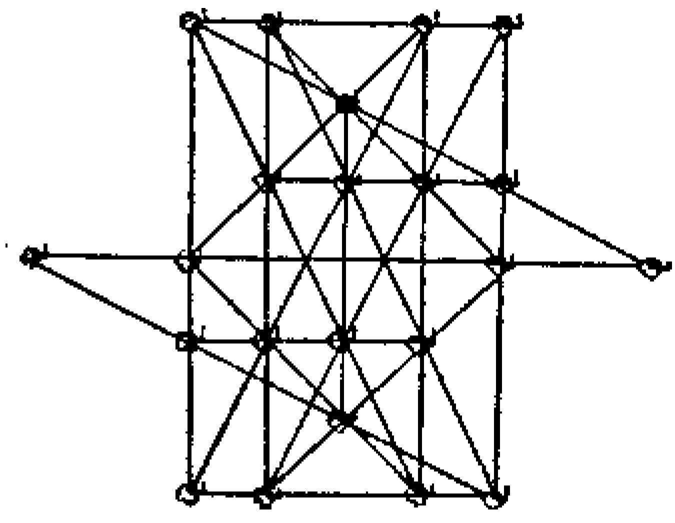



423. Из рисунка видно, что путь узника полностью удовлетворяет заданным условиям, пока узник не попадает в $b$. Дойдя до этой точки, узнику следовало бы поставить одну ногу в точку $c$, находящуюся в соседней камере, и сказать: «Поскольку одна нога находится в $c$, то я, несомненно, вошел в эту камеру и все же, убрав ногу назад, я не вошел тем самым в $b$ во второй раз по той простой причине, что ее и не покидал с тех пор, как вошел туда в первый раз!»

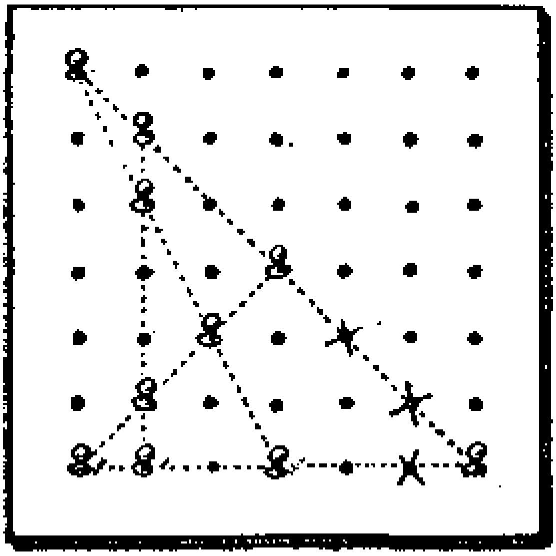


424. На рисунке показан изящный способ посадки деревьев в 9 рядов по 4 дерева в каждом.

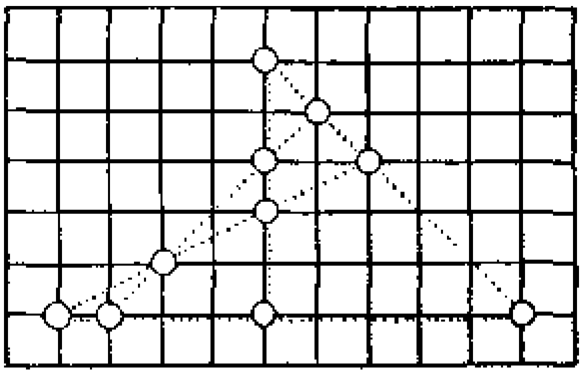
425. Расположите 16 монет в виде квадрата $4 \times 4$. Затем положите по одной монете сверху на первую монету первой строки, на третью монету второй, на четвертую — третьей и на вторую — четвертой строки.



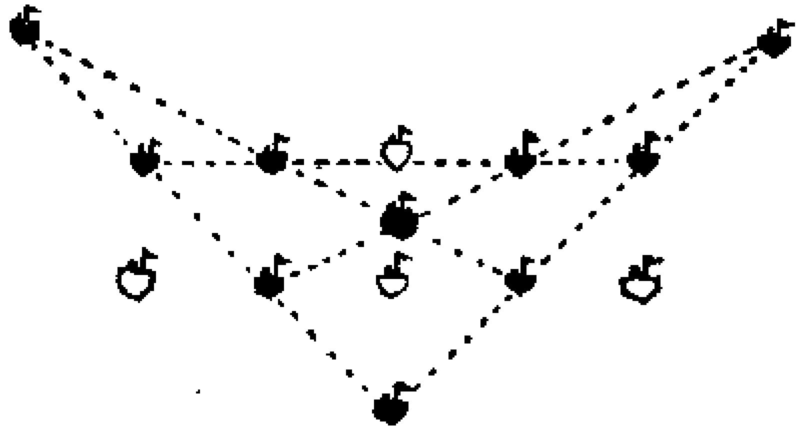
426. На рисунке показано, как следует пересадить 6 деревьев, чтобы получилось 20 рядов по 4 дерева в каждом.



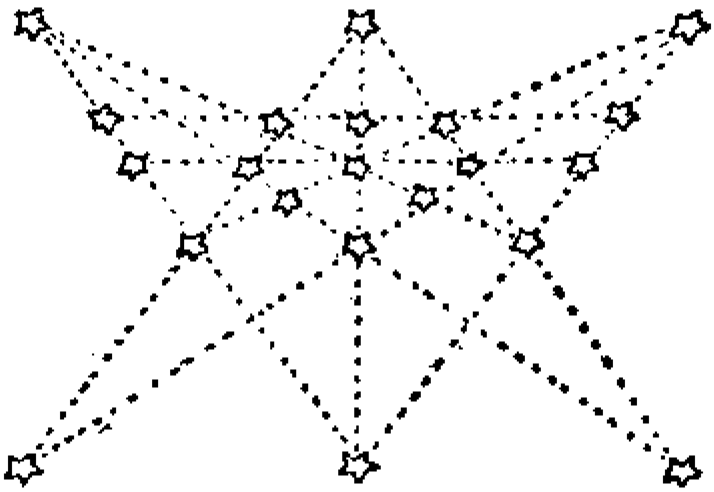
427. На рисунке показано, как следует расположить колышки. Три колышка из дырок, отмеченных крестиками, надо поместить в левый верхний угол. После этого 10 колышков образуют 5 рядов по 4 колышка в каждом. Если вы отразите диаграмму в зеркале, то получите единственное решение, отличное от данного.



428. Решение показано на рисунке. Десять фишек образуют 5 прямых по 4 фишки на каждой.

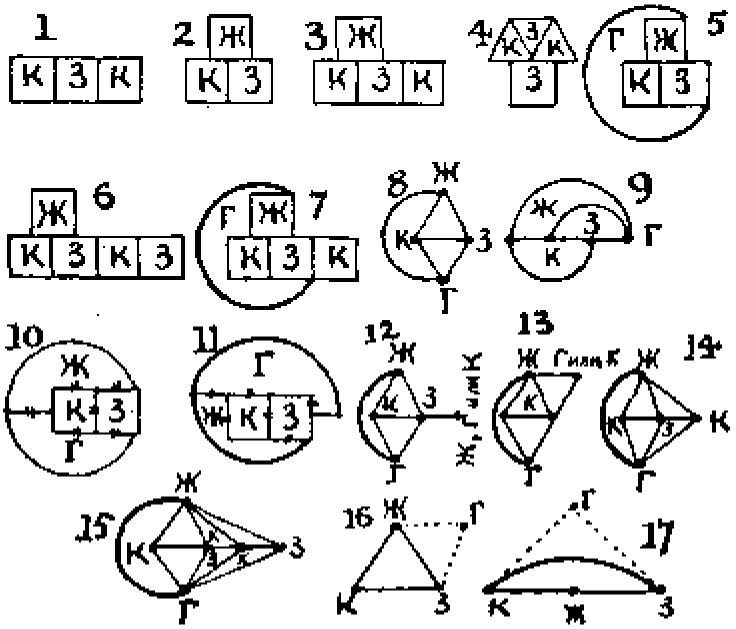


429. На рисунке видно, что корабли образуют 5 прямых по 4 корабля на каждой, а белые призрачные корабли указывают позиции, с которых 4 из них были перемещены.



430. На рисунке представлено симметричное решение, при котором 21 звезда образует 11 прямых по 5 звезд на каждой прямой.

431. Очевидно, что для двух и большего числа прилегающих стран необходимы по крайней мере две краски (случай *1*). Если три страны попарно прилегают друг к другу, то необходимы три краски (случай *2*). Для четырех стран требуются три краски, если четвертая (*Ж*) страна прилегает к двум другим, уже прилегающим друг к другу (случай *3*). (Поскольку возможен вариант, когда, как в случае *4*, краска *3* прилегает к двум не прилегающим друг к другу странам, и в силу этого можно обойтись двумя красками.) Четыре же краски понадобятся и в случае, когда четвертая страна прилегает к каждой из трех прилегающих друг к другу стран (случай *5*).



Для пяти прилегающих стран потребуются 3 краски, если одна страна прилегает к двум прилегающим друг к другу странам (случай *6*). Четыре краски потребуются, если пятая страна прилегает к каждой из трех прилегающих друг к другу стран (случай *7*). Однако 5 красок потребовались бы в случае, если бы пятая страна прилегала к четырем прилегающим друг к другу странам. Если такая карта возможна, то теорема не верна.

Рассмотрим сначала четыре страны, прилегающие друг к другу. Мы произведем небольшое преобразование, приняв, что любые две прилегающие друг к другу страны связаны между собой мостом. Мост может иметь любую длину, а страны можно свести просто к точкам, не влияя на условия[41]. В случаях *8* и *9* я изобразил четыре страны (точки), соединенные между собой мостами (линиями). Относительное расположение этих точек совершенно несущественно, и выясняется, что в каждом возможном случае к одной из стран (точек) нельзя подобраться снаружи.

Это легко доказать. Если 3 точки связаны между собой прямыми, то эти точки должны либо образовывать треугольник, либо лежать на одной прямой. Предположим сначала, что они образуют треугольник *ЖКЗ*, как в случае *16*. Тогда четвертая страна (*Г*) должна лежать либо внутри треугольника, либо вне его. Если она лежит внутри, то очевидно, что она окружена. Поместим ее снаружи и соединим с *Ж* и *З*, как показано на рисунке; тогда *Г* нельзя соединить с *К*, не окружив при этом *Ж* или *З*. Пусть *Г* прилегает к *Ж* или *К*; тогда *Г* нельзя соединить с *З*, не окружив либо *Ж*, либо *К*. Пусть *Г* прилегает к *К* и *З*; тогда *Г* нельзя соединить с *Ж*, не окружив либо *Ж*, либо *З*.

Рассмотрим теперь второй вариант, когда *КЖЗ* лежат на прямой (случай *17*). Если *Г* лежит внутри, то она окружена. Поместим *Г* снаружи и соединим, как показано, с *К* и *З*; тогда *Г* нельзя соединить с *Ж*, не окружив при этом либо *К*, либо *З*. Пусть *Г* прилегает к *К* и *Ж*; тогда *Г* нельзя соединить с *З*, не окружив *К* или *Ж*. Пусть *Г* прилегает к *Ж* и *З*; тогда *Г* нельзя соединить с *К*, не окружив *Ж* или *З*.

Таким образом, мы разобрали все возможные случаи и нашли, что если три страны прилегают друг к другу, то четвертая страна не может прилегать ко всем трем так, чтобы при этом ни одна из стран не оказалась окруженной.

Случай *10* — это случай *8* до преобразования, а случай *11* — то же самое, что и случай *9*. Можно заметить, что до *К* нельзя добраться снаружи. Следовательно, нельзя нарисовать четыре страны таким образом, чтобы пятая страна прилегала к каждой из них; поэтому пятая страна может иметь тот же цвет, что и *К*. А если нельзя нарисовать пять прилегающих друг к другу стран, то это и подавно невозможно сделать с большим числом стран.

Теперь ясно, что при каждом очередном добавлении новой страны нее страны, нарисованные ранее, должны прилегать друг к другу, чтобы предотвратить повторное использование какой-нибудь краски. При этом условии мы можем нарисовать страны, однако одна из них окажется окруженной. Далее, мы можем нарисовать пятую страну прилегающей только к одной стране (как в случае *12*), к двум (как в случае *13*) или к трем странам (как в случае *14*). В одном случае новой страной может быть *Ж*, *Г* или *К*, во втором — *Г* или *К* и в третьем случае — только *К*. Возьмем последний случай *14* и «предпочтем», или повторим, *К*. Но при этом мы вынуждены окружить *3*. Рисуя шестую страну, самое лучшее, что мы можем сделать (пытаясь прийти в противоречие с теоремой), это «предпочесть» *3* (как в случае *15*), а в результате оказывается окруженной *К*. И так далее до бесконечности. Мы вынуждены окружать какую-нибудь краску на каждом шаге и тем самым делать ее пригодной к употреблению на следующем шаге. Но если вы не можете построить карту, для которой потребовалось бы пять красок, то такой карты и не существует. Следовательно, необходимое число красок никогда не превысит четырех, и теорема доказана.

[Дьюдени правильно показывает, что не более четырех областей можно нарисовать таким образом, чтобы каждая из них имела общий участок границы со всеми другими областями, но ему не удается доказать, что четырех красок будет достаточно для всех карт. Верно, что если любые четыре области на карте рассматривать изолированно, то для любой пятой области не потребуется пятой краски. Но ведь нужно доказать, что на любой карте с большим числом областей эти различные множества из пяти областей не вступят в конфликт друг с другом так, что потребуется пять красок[42].

Возникающую здесь трудность лучше всего можно заметить, если начать и в самом деле строить сложную карту, используя метод, предложенный Дьюдени. Если каждая новая область рисуется таким образом, чтобы она прилегала к трем другим областям, то соответствующая краска выбирается автоматически, и карту из четырех красок можно продолжить до бесконечности. Но если добавляются многие другие области, прилегающие только к одной, двум или вообще ни к одной из предыдущих областей, то выбор красок для этих областей становится произвольным. По мере того как карта увеличивается в размерах и становится все более запутанной, ее создатель неожиданно обнаруживает, что ему требуется пятая краска. Однако, вернувшись назад и изменив цвета предыдущих областей, можно, по-видимому, всегда исправить ошибку и обойтись четырьмя красками. Но в самом ли деле это возможно всегда? Вот что осталось недоказанным. Относительно дискуссии по этой проблеме и ссылок на недавние работы см. гл. 43, посвященную проблеме четырех красок, в моей книге «Математические головоломки и развлечения» (М., изд-во «Мир», 1971).— *М. Г.*]

432. Две! Требуются четыре цвета. Если у мальчика в ящике имеется лишь три краски (красная, голубая и желтая), то он может получить оранжевый, зеленый и фиолетовый цвета, смешивая их между собой. Но он не может получить четыре цвета менее, чем из трех красок. Следовательно, у него в ящике две краски («не хватает одной краски»). «Цветом» считается красный, оранжевый, желтый, зеленый, голубой или фиолетовый. Различные оттенки, вроде голубовато-зеленого или желто-зеленого, не допускаются.

433. Умножьте 2 столько раз на себя, сколько всего картин, и вычтите 1. Так, 2 в десятой степени равно 1024. Вычитая 1, мы получаем 1023 — правильный ответ. Предположим, что у нас только три картины. Тогда одну из них можно выбрать тремя способами, две — тоже тремя способами и три — одним, что в сумме дает 7 способов. Но 7 как раз и равняется $2^3 - 1$[43].

434. Всего имеется 39 147 416 разных способов. Прибавьте 3 к числу членов (что даст 618) и вычтите 1 из числа партий (что даст 3). Тогда ответом будет число способов, которыми можно выбрать 3 предмета из 618, то есть

$$\frac{618 \times 617 \times 616}{1 \times 2 \times 3} = 39\ 147\ 416 \text{ способов.}$$

Общее решение таково. Пусть $p$ — число партий, а $m$ — число членов парламента. Число способов равно числу сочетаний из $m + p - 1$ объектов по $p - 1$.

435. Если нет никаких ограничений, то 10 человек могут разместиться на прямой $10! = 3\ 628\ 800$ способами. Сколько из этих перестановок запрещено? Будем рассматривать двух человек одной национальности, заключенных в скобки, как единое целое.

1. Тогда (Ан, Аи) (Ш, Ш) (У, У) Ф Ит Ис Ам можно переставить $7! \times 2^3 = 40\ 320$ способами. Помните, что два Ан могут меняться местами внутри скобок, где бы последние ни расположились, и то же самое верно для Ш и У. Отсюда и появляется $2^3$.

2. Однако мы можем рассмотреть (Ан, Ан) (Ш, Ш) У У Ф Ит Ис Ам, где два У не объединены скобками, а «свободны». Это даст нам $8! \times 2^2$ вариантов, но мы должны исключить отсюда результат пункта 1, чтобы не сосчитать некоторые перестановки дважды. Получаем 120 960.

3. Поступим аналогичным образом с двумя «свободными» Ш. Получим 120 960.

4. Поступим так же с двумя «свободными» Ан. Получим 120 960.

5. Но мы можем рассмотреть (Ан, Ан) Ш Ш У У Ф Ит Ис Ам, где и Ш, и У «свободны». Это даст нам $9! \times 2$ случаев, из которых мы должны вычесть результаты пунктов 1, 2 и 3 по очевидным теперь причинам. Получим 443 520.

6. Когда в скобки заключены только Ш, вычтем результаты пунктов 1, 2 и 4. Получим 443 520.

7. Когда в скобках оставлены только У, вычтем результаты пунктов 1, 3 и 4. Получим 443 520.

Сложим результаты семи пунктов и получим при этом 1 733 760. Теперь из самого первого результата вычтем полученное число, что даст нам верный ответ, равный 1 895 040 способам.

436. Головоломку можно решить за 9 переправ следующим образом:

1) мистер и миссис Вебстер переправляются вместе;

2) миссис Вебстер возвращается;

3) переправляются мать и невестка;

4) возвращается мистер Вебстер;

5) переправляются тесть и сын;

6) возвращается невестка;

7) переправляются мистер Вебстер с невесткой;

8) возвращается мистер Вебстер;

9) мистер и миссис Вебстер переправляются вместе.

437. Обозначим трех миссионеров через М м м, а трех каннибалов через К к к; прописными буквами обозначены миссионер и каннибал, умеющие грести. Тогда переправляются К к; К возвращается на лодке; переправляются К к; К возвращается; переправляются М м; возвращаются М к; переправляются М К; возвращаются М к; переправляются М м; возвращается К; переправляются К к; К возвращается; переправляются К к; при этом все переправляются через реку, не нарушая заданных условий.

[Задачи о переправах через реку этого и предыдущего типа решаются с помощью простого метода из теории графов. См. гл. 35 книги М. Гарднера «Математические досуги» (М., изд-во «Мир», 1972).— *М. Г.*]

438. Двое детей гребут к другому берегу. Один из них вылезает, а другой возвращается назад. Один солдат переправляется, вылезает, а мальчик возвращается назад. Таким образом, чтобы переправить на другой берег одного взрослого, лодка должна 4 раза проплыть от берега до берега. Поэтому ей пришлось сделать $4 \times 358 = 1432$ рейса, чтобы переправить офицера и 357 солдат, причем лодка в конце концов снова оказалась у детей.

439. Можно составить следующую таблицу:

| Дорожки | Туры 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| 1-я | BC | BF | EF | CE | AD |
| 2-я | FA | CD | CA | DF | BE |
| 3-я | DE | EA | DB | AB | CF |

440. Из таблицы можно сразу определить, что Англия победила Ирландию и сыграла вничью с Уэльсом. Поскольку А сыграла в этих матчах с общим счетом 2 : 0, то она должна была победить со счетом 2 : 0, а вничью сыграть со счетом 0 : 0. Таким образом, нам все известно про А и остается только определить результаты трех матчей: У с И, Ш с И и Ш с У. Шотландия пропустила только 1 гол от У или И. И забила только 1 гол в ворота У или Ш. Допустим, что в ворота Ш. Тогда У не забил ни одного гола в ворота Ш. Но У всего забил 3 гола; следовательно, все они были забиты в ворота И. Получается, что в ворота И было забито 6 голов: 2 — А, 3 — У (если принять, что И забила гол в ворота Ш) и оставшийся гол — Ш. Но поскольку мы приняли, что И забила 1 гол в ворота Ш, матч между этими командами должен был закончиться вничью. Однако из таблицы видно, что в этом матче выиграла Ш и, следовательно, И не могла забить гол в ворота Ш. Таким образом, гол в ворота Ш забил У. А поскольку У всего забил 3 гола, то остальные 2 были забиты в ворота И, которая свой единственный гол забила в ворота У. Окончательно мы получаем, что Ш выиграла у У со счетом 2 : 1, у И со счетом 2 : 0, а У выиграл у И со счетом 2 : 1.

441. Пусть 8 делений разбивают 33-сантиметровую линейку на 9 частей длиной 1, 3, 1, 9, 2, 7, 2, 6, 2 см. Тогда с их помощью можно измерить любое целое число сантиметров от 1 до 33 см. Разумеется, сами деления находятся на расстояниях 1, 4, 5, 14, 16, 23, 25 и 31 см от одного из концов линейки. Другим решением будет 1, 1, 1, 1, 6. 6, 6, 6, 5 см.

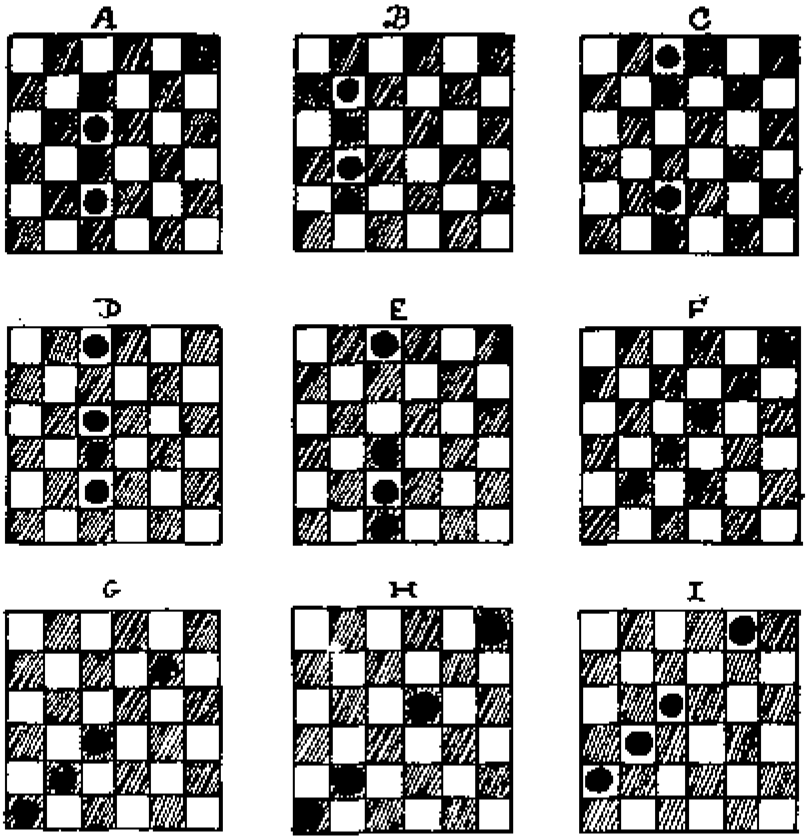
Эта головоломка имеет по крайней мере 16 решений. Я нашел правило, с помощью которого можно определять минимальное число делений для линеек любой длины и выписывать некоторые решения, однако общий закон, которому подчиняются все решения, еще не найден.

[Хотя общего правила не найдено до сих пор, все же с того момента, как Дьюдени поставил эту задачу, отмечен существенный прогресс. Обнаружено, что восьми делений достаточно также и для линейки в 36 см.— *М. Г.*]

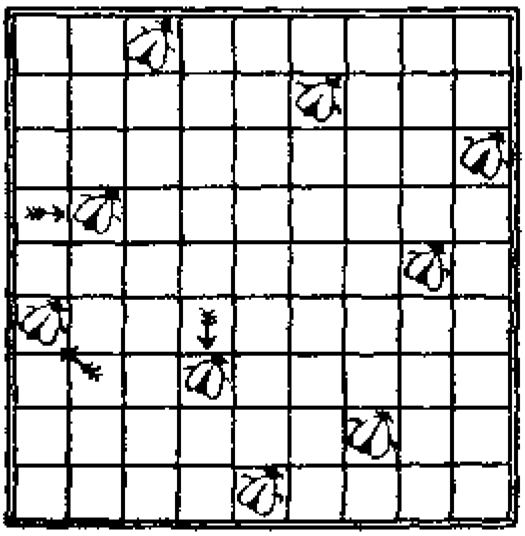
442. Если расположить коттеджи по кругу через промежутки 1, 1, 4, 4, 3, 14 км, то для любого целого числа километров от 1 до 26 включительно найдутся два коттеджа, отстоящие друг от друга на такое расстояние.

[Эта задача, очевидно, представляет собой разновидность предыдущей. Как и ранее, Дьюдени мог бы увеличить длину «линейки» (в нашем случае — дороги), не меняя остальных условий задачи. Оказывается, что 6 коттеджей можно расположить на круглой дороге в 31 км таким образом, чтобы любое целое расстояние от 1 до 30 км совпадало с расстоянием по кругу между некоторой парой домов. Нетрудно заметить, что для п домов максимальнее число различных способов измерения расстояний между ними равно $n(n - 1)$. Для $n = 6$ мы получаем 30; следовательно, в этом случае можно расположить 6 домов на дороге в 31 км так, чтобы ни одно из расстояний между парами домов не повторялось. Точно так же оптимальные решения можно получить и в случае $n = 1, 2, 3, 4$ или 5. См. решение задачи E176 Михаелем Гольдбергом, приведенное в журнале *American Mathematical Monthly*, September 1966, p. 786.— *М. Г.*]

443. Существует 9 основных решений, представленных на рисунке. Решение *A* — это то самое решение, которое давалось при формулировке задачи. Из данных 9 решений *D*, *E* и *J* порождают по 8 решений каждое с помощью поворотов и отражений, как объяснялось ранее, а остальные дают только по 4 решения каждое. Следовательно, всего существует 48 различных решений данной головоломки.



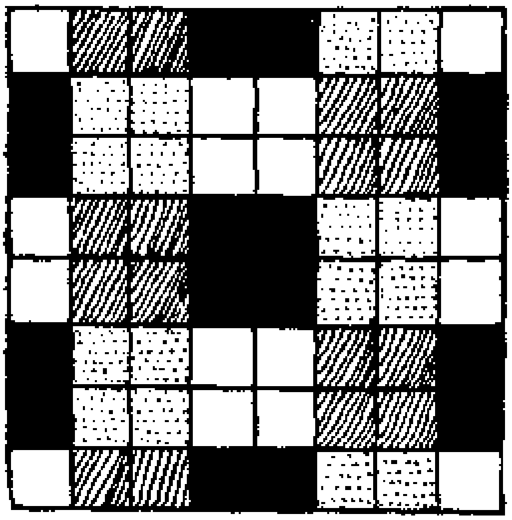
Читателю, быть может, будет небезынтересно узнать, что на шахматной доске 8 Х8 пять фишек можно расположить вдоль прямой при тех же самых условиях четырьмя основными способами, порождающими 20 различных решений.



444. Три мухи переменили позицию, как показано стрелками на рисунке, и при этом никакие две мухи не оказались на одной прямой.

445. Если бы у Пилкинса было 11 клерков, а у Рэдсона 12, то они могли бы сесть за стол 165 и 495 способами соответственно, что как раз и являлось бы решением задачи. Однако нам известно, что у той и другой фирмы клерков было поровну. Следовательно, ответом будет 15 клерков, садившихся по трое в течение 455 дней, и 15 клерков, садившихся по четыре в течение 1365 дней.

446. В первом случае существует 88 200 способов. Есть один простой метод, с помощью которого можно получить ответ, но объяснение его потребовало бы слишком много места. Во втором случае ответ уменьшается до 6300 способов.



447. Удалите первую плитку в каждом горизонтальном ряду. Тогда из оставшихся 16 плиток можно сложить квадрат, показанный на рисунке, в точном соответствии с заданными условиями.

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| A | B | C | D | E | F |
| D | F | E | B | A | C |
| E | C | | | D | B |
| B | D | | | C | E |
| C | | B | E | | D |
| | E | D | C | B | |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| A | B | C | D | E | F |
| D | E | A | F | B | C |
| F | C | | | D | A |
| B | D | | | C | E |
| C | A | E | B | F | D |
| E | F | D | C | A | B |

448. Если вы попытались, как это часто делают, сначала расставить по местам все 6 экземпляров одной буквы, затем все 6 экземпляров другой и т. д., то обнаружите, что, расположив по 6 экземпляров каждой из четырех букв, можно еще разместить только по 2 экземпляра оставшихся двух букв, так что получится диаграмма, изображенная слева. Секрет заключается в том, чтобы заполнить клетки 6 экземплярами каждой из первых двух букв и пятью экземплярами каждой из остальных четырех букв; при этом получится вторая диаграмма, изображенная справа, только с четырьмя свободными клеточками.

449. Расположите 10 бочек следующими двумя способами, и сумма номеров вдоль каждой из сторон даст 13 — наименьшее возможное число:

```
   0          0
  8 6        7 8
 4 9 5      5 9 3
1 7 3 5    1 6 4 2
```

Меняя положение номеров (но не сами номера) на каждой из сторон, мы получим по 8 решений в каждом случае, если не будем различать решения, получающиеся друг из друга поворотами и отражениями.

450. С тремя красными, белыми или зелеными лампами мы можем получить по 15 различных комбинаций (45). С одной красной и двумя белыми мы также можем получить 15 комбинаций, и при каждой из них имеется еще по 3 комбинации порядка цветов; всего 45 комбинаций. То же самое получится с одной красной и двумя зелеными, одной белой и двумя красными, одной белой и двумя зелеными, одной зеленой и двумя белыми, одной зеленой и двумя красными лампами (270). С одной красной, одной белой и одной зеленой лампами мы можем получить 6 раз по 15 комбинаций (90). С двумя красными, двумя белыми или двумя зелеными мы можем получить по 7 комбинаций (21). С одной красной и одной белой, или одной красной и одной зеленой, или одной белой и одной зеленой лампами мы можем получить по 14 комбинаций (42). С помощью только одной лампы мы можем послать всего по 1 сигналу (3). Теперь сложите числа в скобках, и вы получите ответ — 471 сигнал.

451. В следующем решении каждый узник скован с каждым из остальных один и только один раз.

1 — 2 — 3 2 — 6 — 8 6 — 1 — 7 1 — 4 — 8 7 — 2 — 9 4 — 3 — 1 4 — 5 — 6

5 — 9 — 1 9 — 4 — 2 2 — 5 — 7 3 — 6 — 4 5 — 8 — 2 7 — 8 — 9 3 — 7 — 4

8 — 3 — 5 6 — 9 — 3 8 — 1 — 5 9 — 7 — 6

Если читателю хочется найти трудную головоломку, над решением которой он мог бы биться в течение целой зимы, то пусть он попытается разбить аналогичным образом на тройки 21 узника в каждый из 15 дней так, чтобы ни одна пара не оказалась скованной дважды.

В случае, если он придет к выводу, что этого сделать нельзя, мы добавим, что у нас есть одно решение. Но это трудный орешек.

452. При данных условиях существует 144 различных способа.

453. Миссис Финч получила 4 по 17 и 2 по 16, а всего 100 очков; Реджи Уотсон выбил 2 по 23 и 4 по 16, а всего 110; мисс Дора Талбот получила один раз 40 и 5 по 16 очков, а всего 120 очков. Она могла выбить свои 120 очков различными способами, если бы в условии не было сказано, что чья-то стрела поразила «яблочко», а это могла быть только ее стрела.

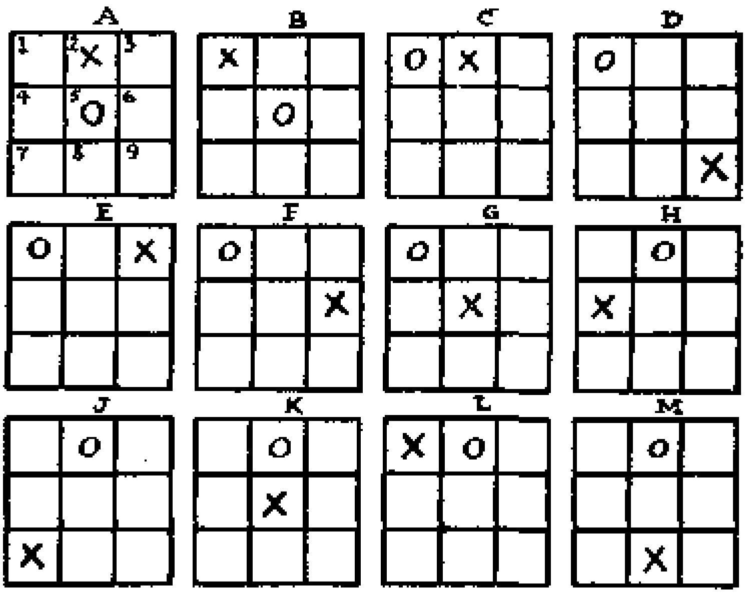
454. Общее число очков равно 213, так что каждый спортсмен выбил по 71 очку, а это можно сделать следующим образом: первый выбил 50, 10, 5, 3, 2 и 1, второй — 25, 20, 20, 3, 2 и 1 и третий — 25, 20, 10, 10, 5 и 1 очко.

455. Подавляющее большинство людей, пытавшихся решить головоломку «Сакраменто — край богатый», когда она впервые появилась в лондонской газете *Daily News*, смогли собрать только 45 долларов.

Правильный ответ равен 47 долларам в 10 мешках, расположенных на внешних кругах следующим образом: *4, 5, 6* в первом ряду, *5* во втором, *4* в третьем, *3* в четвертом, *5* в пятом и *5, 6, 4* в нижнем ряду. Если вы возьмете 5 мешков по 6 долларов, то всего сможете собрать 9 мешков с общей суммой 46 долларов.

456. Дети могут сесть 5040 различными способами, из них в 720 случаях на обоих концах окажутся девочки. Следовательно, искомая вероятность равна $\frac{720}{5040}$, или $\frac{1}{7}$. Это, разумеется, можно выразить по-другому, сказав, что есть 1 шанс против 6 за то, что на концах окажутся девочки.

457. Перенумеруем клеточки, как показано на рисунке. Случай *A*: мистер Нолик (первый игрок) может начать игру тремя путями: с центра *5*, либо с любого угла — *1, 3, 7* или *9*, либо с любой стороны — *2, 4, 6, 8*. Разберем эти начала по очереди. Если мистер Нолик начнет с центра, то у мистера Крестика есть выбор пойти в угол или на сторону. Если он пойдет на сторону, например в клеточку *2* (случай *A*), то Нолик пойдет последовательно на *1* и *4* (или на *1* и *7*) и выиграет. Поэтому Крестик должен сделать ход в угол, как в случае *B*, при этом Нолик сможет добиться всего лишь ничьей. Если Нолик сделает первый ход в угол, скажем в *1*, то Крестик может ответить ему пятью способами — случаи *C, D, E, F* и *G* (поскольку *4* есть то же самое, что и *2; 7* — то же, что и *3; 8* — то же, что и *6*). Если он выберет случай *C*, то Нолик выигрывает, сделав ход на *5* и *4*; если *D*, то Нолик выигрывает на *7* и *3*; если *E*, то Нолик выигрывает на *9* и *7*; если *F*, то Нолик выигрывает на *5* и *3*. Поэтому Крестик вынужден пойти в центр, как в случае *G*; при этом игра закончится вничью. Если Нолик начнет со стороны, скажем с клеточки *2*, как в случаях *H, J, K, L и M*, а Крестик сыграет, как в случае *H*, то Нолик выиграет, сделав ходы на *5* и *1*; а если Крестик выберет случай *J*, то Нолик выиграет на *1* и *5*. Следовательно, Крестик, чтобы добиться ничьей, должен пойти, как в случаях *K*, *L* или *M*.




Я показал, таким образом, как Нолик может добиться победы в семи случаях, когда Крестик делает плохой ход, но здесь слишком мало места для того, чтобы доказать, что и в случаях *B, G, K, L* и *M* получается ничья. Однако читатель сам легко сможет разобрать эти случаи и убедиться, что ни один из игроков не сумеет выиграть, если только его противник не допустит промаха. Разумеется, каждый из игроков сможет при желании и проиграть. Например, если в случае *L* Нолик сделает глупый второй ход на *3*, то Крестик сумеет выиграть, сходив на *7* и *9*. Или если Нолик сыграет на *8*, то Крестик выигрывает, сходив на *5* и *7*.

Теперь, если мне придется играть с самым лучшим игроком, я знаю, что самое большее, чего я могу добиться (исключая промахи моего противника), это сыграть вничью. Если первый игрок Нолик — это я, то мне можно смело начинать игру с любой клеточки. Если же я второй игрок — Крестик, то мне надо сделать ход в угол, когда Нолик пойдет в центр, и в центр — в любом другом случае. При этом я избегаю лишних сложностей и всегда могу добиться ничьей. Факт остается фактом, эта небольшая игра интересна для детей и даже для тех взрослых, которые никогда ее не анализировали: однако два специалиста, играя в такую игру, потратят попусту время. Для них она не игра, а всего лишь головоломка, которую они полностью решили.

458. Как и в крестиках-ноликах,каждая игра должна заканчиваться вничью. Никто из игроков не сможет добиться победы, если только его противник не сделает плохого хода.

459. Первому игроку лучше всего назвать 2 или 3, поскольку в этом случае только один исход при подбрасывании кости приведет его к поражению.Если он назовет 1, то неблагоприятным будет выпадение 3 или 6. Если он назовет 2, то неблагоприятным будет только выпадение 5. Если он назовет 3, — то неблагоприятным будет только 4. Если он назовет 4, то неблагоприятным будет 3 или 4. Если он назовет 5, то неблагоприятным будет 2 или 3. Если он назовет 6, то неблагоприятным исходом при бросании кости будет 1 или 5. Здесь невозможно дать полный анализ этой игры, но я скажу только, что если вы наберете 5, 6, 9, 10, 14, 15, 18, 19 или 23 очка при любом положении кости, то обязательно проиграете. Если вы наберете 7 или 16 при любом положении кости, то выиграете. Шансы на успех при другом числе очков зависят от того, как лежит кость.

460. Шансы на выигрыш у Мэйсона — один из шести. Если бы Джексон назвал числа 8 и 14, то его шансы на успех сравнялись бы с шансами Мэйсона.

461. Первый игрок (*A*) всегда может выиграть, но для этого он должен начинать с 4. Во время игры нужно последовательно набирать такие суммы очков: 4, 11, 17, 24, 30, 37. Ниже приводятся три партии. В первой из них второй игрок (*B*) оттягивает насколько возможно свое поражение. Во второй игре он не дает *A* набрать ни 17, ни 30, но последнему удается набрать 24 и 37. В третьей игре *B* не дает *A* набрать ни 11, ни 24, но последний набирает 17, 30 и 37. Обратите внимание на важные ходы 3 и 5.

A B A B A B

| | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 4 | 1 | (*a*) | | 4 | 1 | | | 4 | | 1 |
| | 3 | 1 | (*b*) | | 3 | 1 | | | 3 | | 4 |
| (11) | 2 | 1 | | (11) | 2 | 3 | (*d*) | (17) | 5 | | 1 |
| (17) | 5 | 1 | (*c*) | | 5 | 1 | | | 3 | | 4 |
| | 3 | 2 | | (24) | 4 | 3 | (*e*) | (30) | 5 | (*f*) | 1 |
| (24) | 1 | 2 | | | 5 | 1 | | | 3 | | 1 |
| (30) | 4 | 1 | | (37) | 4 | | | (37) | 2 | | |
| | 3 | 2 | | | | | | | | | |
| (37) | 1 | | | | | | | | | | |

(*a*) В противном случае *A* следующим ходом наберет 11 очков. (*b*) *B* не может помешать *A* набрать 11 или 17 очков на следующем ходе. (*c*) Снова для того, чтобы не дать *A* немедленно набрать 24 очка. (*d*) Чтобы не дать *A* набрать 17 очков, но при этом *A* удается набрать 24. (*e*) *B* мешает *A* набрать 30 очков, но не может помешать ему набрать 37. (*f*) Таким образом, *A* всегда может набрать 24 (как в предыдущей игре) или 30 очков (как в данной), причем в любом случае ему удается набрать 37 очков.

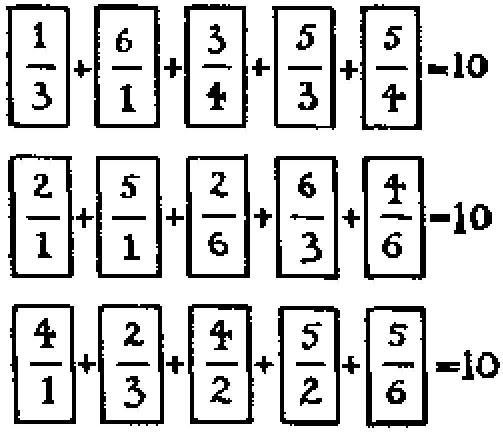
462. Если не учитывать нехватку карт, то серия очков, ведущая к победе, имеет вид 7, 12, 17, 22. Если вы сумеете набрать 17 и оставить при этом по крайней мере по одной 5-очковой паре обоих видов (4—1, 3—2), то вы должны выиграть. Если вы сумеете набрать 12 и оставить по две 5-очковые пары обоих видов, то вы должны выиграть. Если вы сумеете набрать 7 и оставить по три 5-очковые пары обоих видов, то вы должны выиграть. Так, если первый игрок пойдет 3 или 4, вы пойдете на 4 или 3 и наберете 7. Теперь уже ничто не сможет помешать второму игроку набрать 12, 17 и 22. На первый ход с 2 можно всегда ответить 3 или 2. Так, например, 2—3, 2—3, 2—3, 2—3 (20), и, поскольку не осталось 2, второй игрок выигрывает. Если ход игры был 2—3, 1—3, 3—2, 3—2 (19), то второй игрок выигрывает. Если 2—3, 3—4 (12) или 2—3, 4—3 (12), то снова выигрывает второй игрок. Исследование защиты 2—2 я оставляю читателю. Самым лучшим вторым ходом первого игрока будет 1.

Первый игрок сможет всегда выиграть только в случае, если он пойдет с 1. Вот примерные партии: 1—1, 4—1, 4—1, 4(16) — выигрывает; 1—3, 1—2, 4—1, 4—1, 4 (21) — выигрывает; 1—4, 2 (7) — выигрывает; 1—2, 4 (7) — выигрывает.

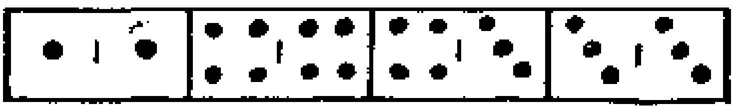
463. Мне следует пойти на *MN*. Мой противник может пойти на *HL*, тогда я отвечу ходом на *CD*. (Если бы он пошел на *CD*, то я ответил бы *HL*, и позиции оказались бы одинаковыми.) Самое лучшее, что он может теперь сделать, это пойти на *DH* (выиграв одно очко), но, поскольку он вынужден снова ходить, я выигрываю оставшиеся восемь квадратов.

464. Первый игрок всегда может выиграть. Он должен перевернуть третью карту от любого конца, при этом получится расположение: 00.0000000. Далее, чтобы ни делал второй игрок, первый может всегда получить либо 000.000, либо 00.00.0.0, либо 0.00.000 (порядок групп не играет роли). В первом случае, что бы ни делал второй игрок с одним из триплетов, первый игрок повторяет то же самое на другом триплете до тех пор, пока не перевернет последнюю карту. Во втором случае первый игрок повторяет аналогичным образом действия своего противника и выигрывает. В третьем случае, что бы ни делал второй игрок, первый всегда может добиться расположения 0.0, или 0.0.0.0, или 00.00 и, очевидно, выигрывает.

[Первый игрок может также выиграть, перевернув сначала вторую или четвертую карту от любого конца.— *М. Г.*]

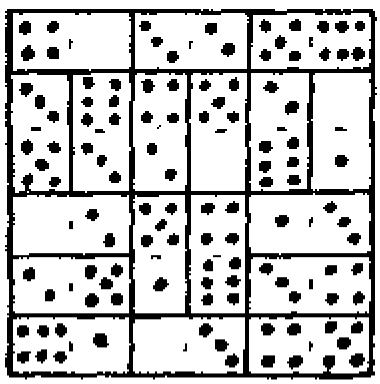


465. На рисунке показано, как следует расположить костяшки, домино, чтобы сумма в каждой из строк равнялась 10. Приведите все дроби к общему знаменателю 60. Тогда сумма всех числителей должна равняться 1800, или по 600 в каждой строке, чтобы получилось 10. Выбор и расположение костяшек требуют небольшого размышления и изобретательности.

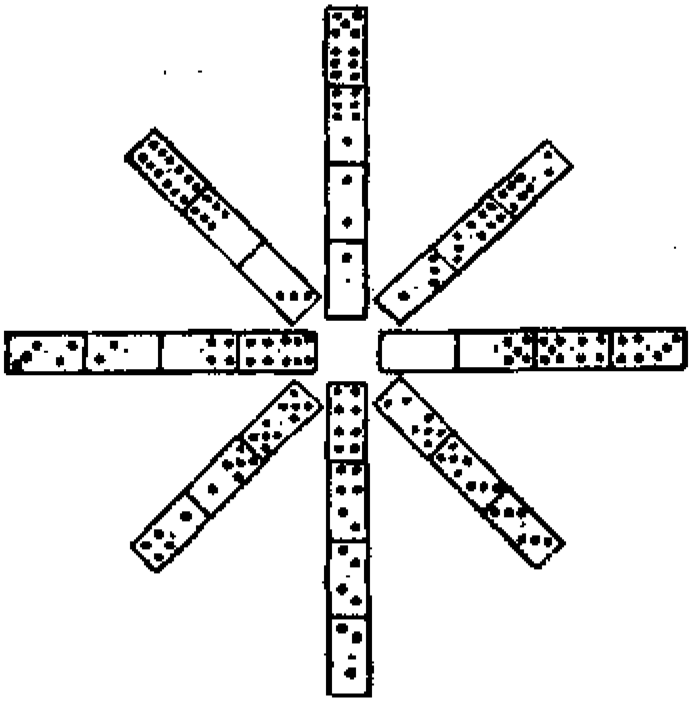


466. Четыре костяшки, изображенные на рисунке, удовлетворяют нашим условиям. Можно обнаружить, что, суммируя группы очков, непосредственно прилегающие друг к другу, удается получить любое число от 1 до 23 включительно.

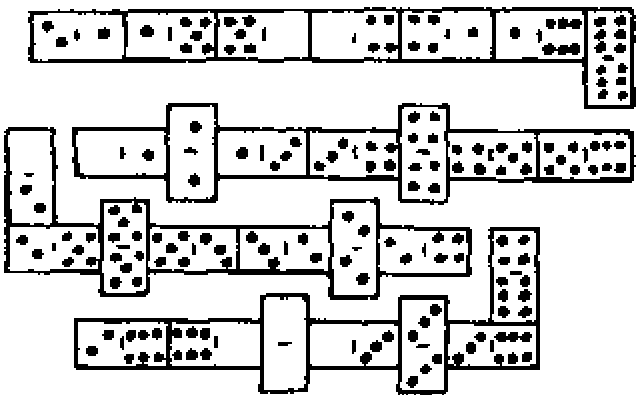
[Решение Дьюдени было улучшено. Цепочка из четырех костяшек 1—3, 6—6, 6—2, 3—2 позволяет получить все числа от 1 до 29. Кроме того, оказывается, с помощью трех костяшек 1—1, 4—4, 4—3 можно получить любое число от 1 до 17.— *М. Г.*]



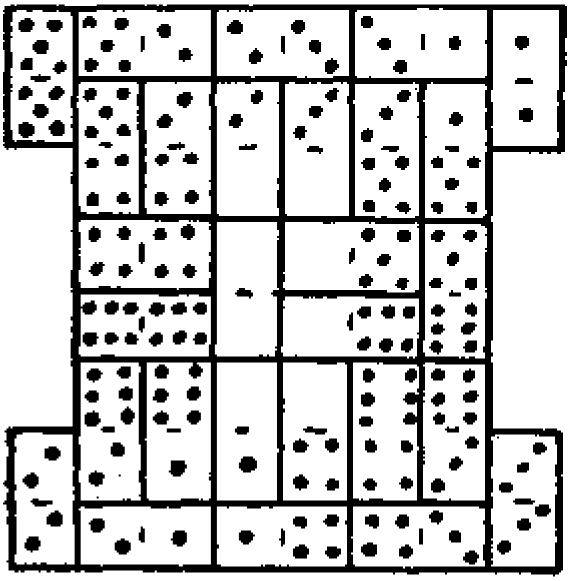
467. Приведенный рисунок не требует пояснений. Восемнадцать костяшек образуют квадрат, и ни в одной из строк или столбцов одно и то же число ие повторяется дважды. Разумеется, существуют и другие решения.



468. На нашем рисунке приведено правильное решение. Костяшки приложены друг к другу согласно обычному правилу, сумма очков в каждом луче равна 21, а в центре расположены числа 1, 2, 3, 4, 5, 6 и две пустышки.

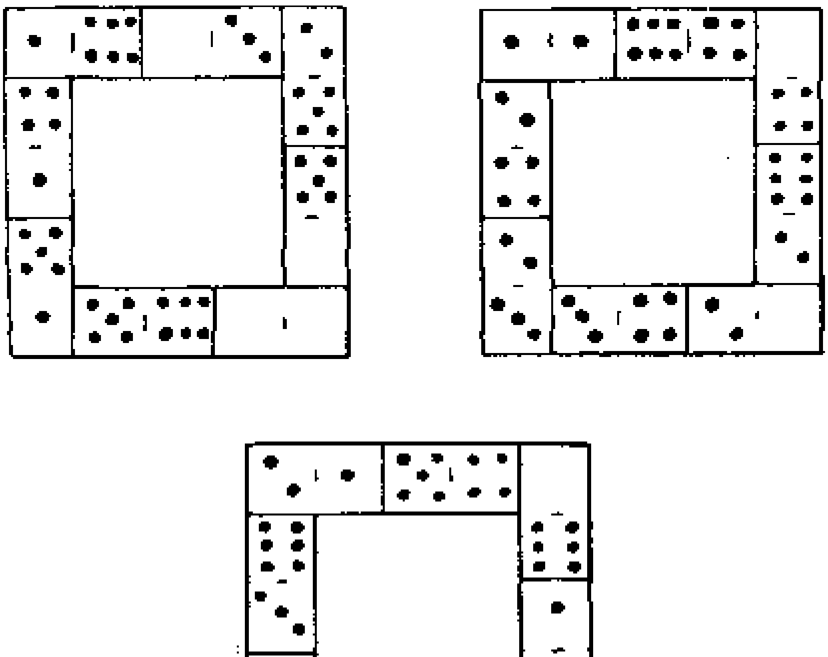


469. На рисунке показано одно из решений. Цепочка костяшек разорвана на 4 части по 7 штук, а сумма очков в каждой части равна 22.



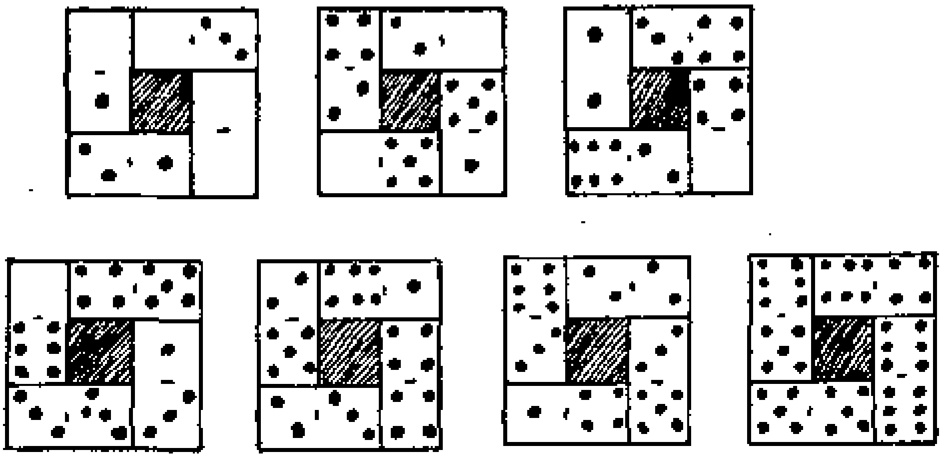
470. На рисунке показано правильное решение: два квадрата, составленные из пустышек, находятся внутри. Если бы в приведенном ранее примере не все числа находились на границе, то нужно было бы просто поменять местами отсутствующее число и пустышки. Так что в этом случае не было бы никакой головоломки. Однако, поскольку все числа присутствовали на границе, таким простым маневром обойтись не удалось.

[Относительно задач такого типа, известных под названием кадрилей, см. E. Lucus, *Rtecrteations Mathematiques*, **2**, 52-63, и работу Wade E., Philpott «Quadrilles» в журнале *Recreational Mathematics Magazine*, N 14, January — February 1964, pp. 5-11.— *М. Г.*]



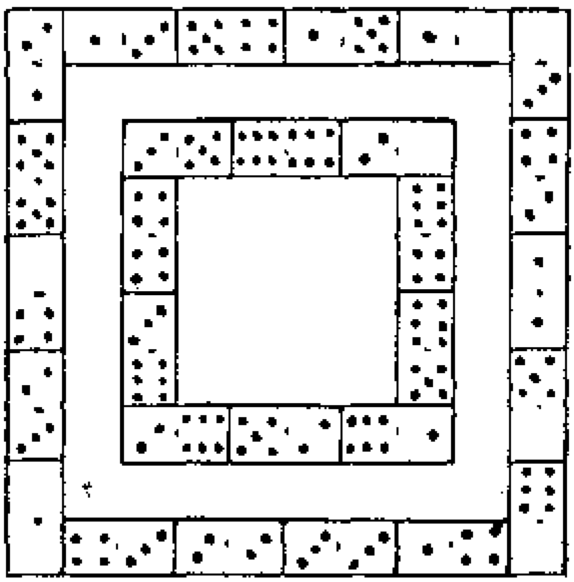
471. Решение приведено на рисунке. Сумма всех очков равна 132. Одна треть ее равна 44. Разделите сначала все костяшки на три кучки, по 44 очка в каждой. Затем если мы попытаемся взять сумму очков вдоль стороны, равной 12, то, поскольку 4 раза по 12 на 4 превышает 44, мы должны добиться в каждом случае того,

чтобы сумма очков, стоящих по четырем углам, в каждой рамке равнялась 4. Остальное получается после ряда проб, причем можно менять местами костяшки из разных кучек, содержащие равное число очков.

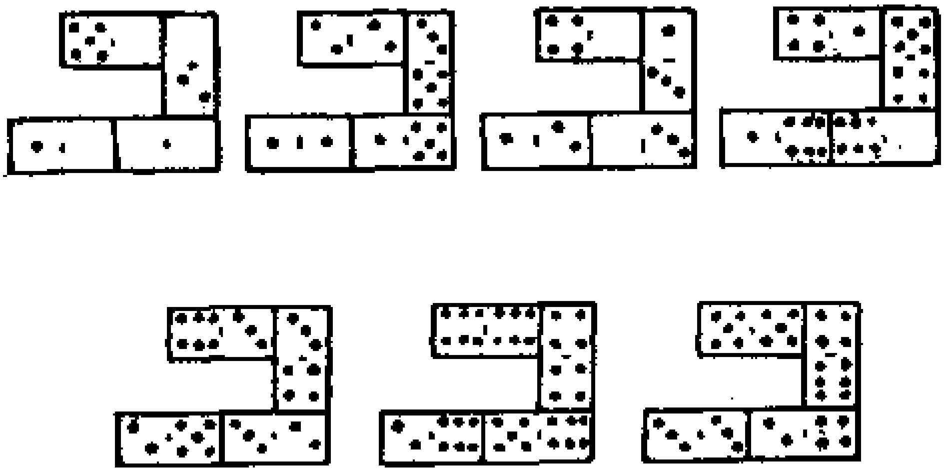


472. На рисунке показано, как можно сложить из 28 костяшек 7 полых квадратов, чтобы при этом суммы очков вдоль каждой из сторон в любом квадрате равнялись между собой. При составлении квадратов вам полезно иметь в виду следующее маленькое правило. Если сумма очков равна, скажем, 7 (как в первом примере), а вы хотите, чтобы их сумма вдоль каждой из сторон равнялась 3, то $4 \times 3 - 7$ дает нам 5 — сумму очков в четырех углах. Это совершенно необходимо. Так, в последнем примере $4 \times 16 = 64 - 43$ говорит нам о том, что сумма очков, стоящих по углам, должна равняться 21: так оно и есть в действительности.

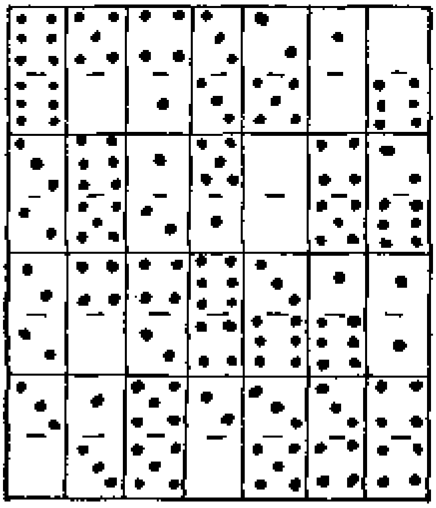
473. Если мы уберем из комплекта четыре костяшки 7—6, 5—4, 3—2, 1—0, то из оставшихся костяшек можно будет составить правильную последовательность. Подойдут также любые другие комбинации этих чисел; мы могли бы, например, убрать 7—0, 6—1, 5—2 и 4—3. Общее правило состоит в том, что из комплекта домино, заканчивающегося дублем нечетного числа, мы должны убрать костяшки, которые содержат в совокупности все числа от пустышки до числа, на две единицы меньшего самого большого числа в нашем наборе.



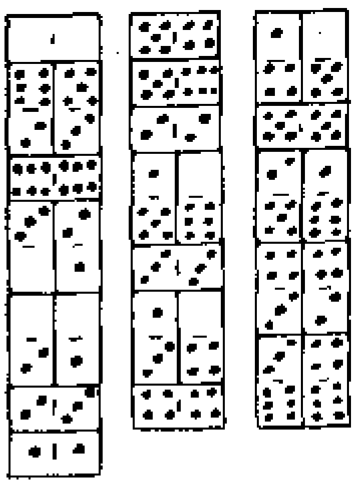
474. На рисунке показано, как можно составить из 28 костяшек два квадрата, у которых сумма очков вдоль любой из сторон равна 22. Если сумма равна 22, то сумма углов должна равняться 8; если 23, то 16; если 24, то 24; если 25, то 32; если 26, то 40. Сумма не может быть меньше 22 или больше 26.



475. На рисунке показано, как можно составить 7 столбиков из 28 костяшек.



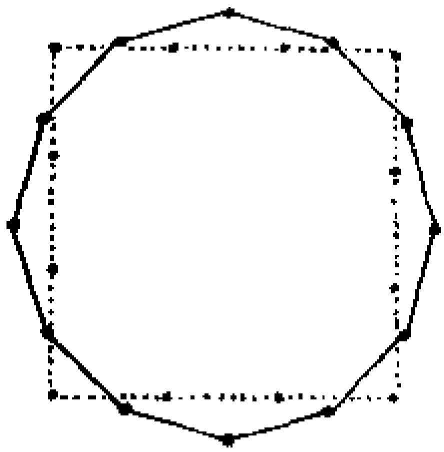
476. На рисунке показано, как можно составить из 28 костяшек прямоугольник, у которого сумма очков в каждом столбце равна 24, а в каждой строке 21.



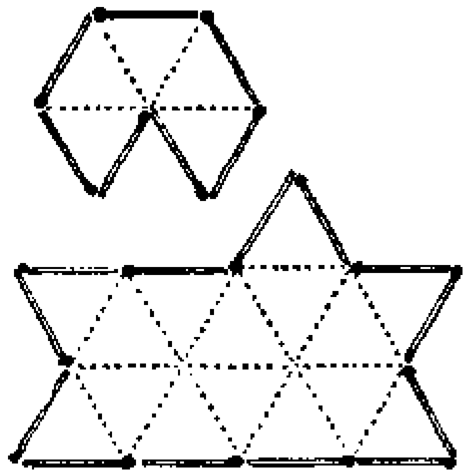
477. Расположите второй столбик (на нашем рисунке) под первым, а третий под вторым (мы разделили один столбик на три части для удобства печати), и вы получите искомое решение.

478. Существует 126 760 различных способов, которыми можно расположить 15 костяшек в одну линию, если различать два направления.

479. Наименьшее возможное число равно 36 спичкам. Мы можем составить треугольник и квадрат из 12 и 24 спичек, треугольник и пятиугольник — из 6 и 30 спичек, треугольник и шестиугольник — из 6 и 30 спичек, квадрат и пятиугольник — из 16 и 20 спичек, квадрат и шестиугольник — из 12 и 24 спичек, а пятиугольник и шестиугольник — из 30 и 6 спичек. Эти пары чисел можно варьировать во всех случаях, за исключением четвертого и последнего. Общее число спичек не может быть меньше 36. Для треугольника и шестиугольника нужно взять число спичек, делящееся на 3; на квадрат и шестиугольник идет четное число спичек. Следовательно, искомое число должно находиться среди чисел, делящихся на 6, таких, как 12, 18, 24, 30, 36. но меньше чем из 36 спичек нельзя сложить пятиугольник и шестиугольник.

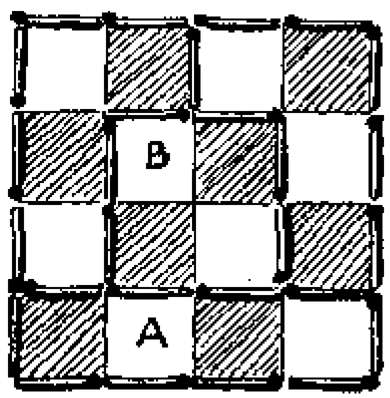


480. Если загородка имеет вид прямоугольника, то его площадь будет тем больше, чем ближе он к квадрату. Но самая большая площадь получается, когда жерди расположены в виде правильного многоугольника, а если это можно сделать несколькими способами, то максимальной будет площадь у того многоугольника, стороны которого состоят всего из одной жерди. Так, в приведенном ранее примере площадь шестиугольника была больше площади треугольника. Изображенный на рисунке правильный двенадцатиугольник ограничивает наибольшую (в случае 12 жердей) площадь, достаточную для примерно $11\frac{1}{5}$ овцы. Одиннадцатью жердями можно огородить участок, достаточный только для примерно $9\frac{9}{25}$ овцы. Следовательно, для 10 овец необходимо взять 12 жердей. Если вы расположите эти жерди в виде квадрата, как показано пунктиром, то огородите участок только для 9 овец.

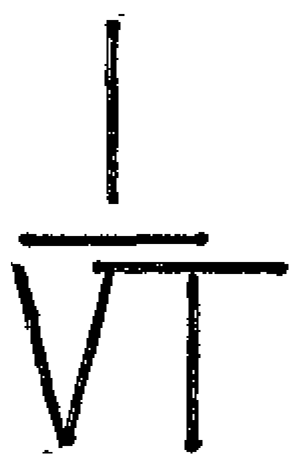


481. На рисунке показано, как 13 и 7 спичками можно огородить два участка, причем площадь одного из них в 3 раза больше второго, поскольку меньший содержит ровно 5 маленьких треугольников, а больший 15.

Есть и другие решения.

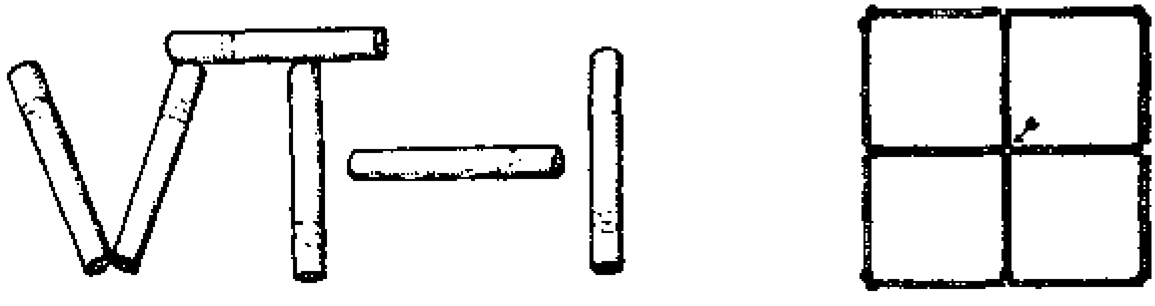



482. На рисунке показано одно из четырех решений данной головоломки с 11 (нечетным числом) спичками. Если вы сначала окружите какой-нибудь внешний ряд вроде $A$, то затем сможете окружить в любом случае квадрат $B$ и завершить решение, затратив всего 11 спичек.

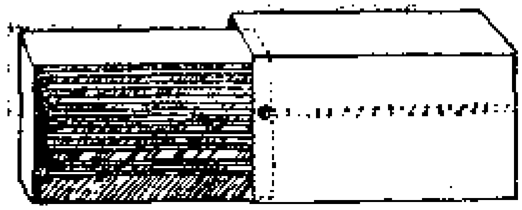


483. Следует передвинуть вторую I в VII так, чтобы получился знак квадратного корня. Корень квадратный из 1 равен, разумеется, 1, следовательно, и вся получившаяся дробь равна 1.

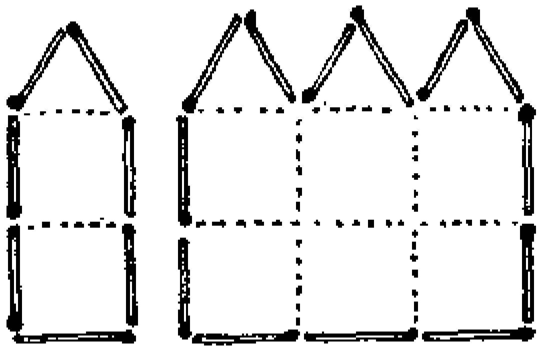
484. Передвиньте две сигареты, образующие букву *L*, и поместите их так, как показано на рисунке. Мы имеем корень квадратный из 1 минус 1 (то есть 1—1), что равно, очевидно, 0. Во втором случае мы можем сдвинуть те же сигареты, поместив одну из них рядом с V, а другую рядом со второй I так, чтобы получилось слово NIL (ничто).



485. Расположите 12 спичек, как показано на рисунке справа; они и ограничат 5 квадратов. Конечно, один из них (отмеченный стрелкой) очень мал, но в условии не было ограничений на размеры квадратов.

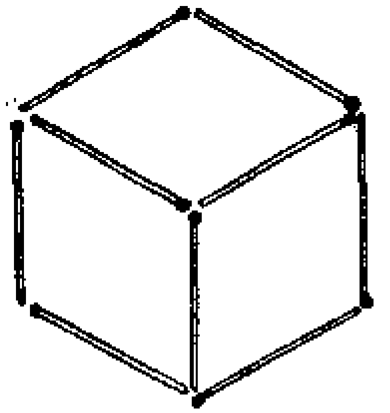


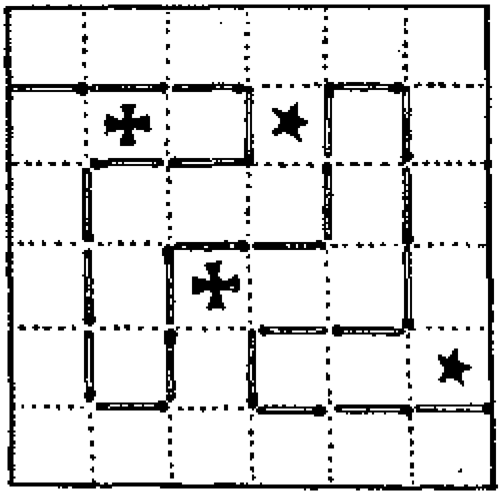
486. Вы должны спрятать одну спичку внутри коробка, как показано на рисунке пунктирной линией, причем ее головка должна только-только зайти за край внутренней части коробка. Закрывая коробок, вы проталкиваете эту спичку вперед ногтем большого пальца (что можно, потренировавшись, делать незаметно), и она падает на свое место. Разумеется, ни одна из первоначально показанных спичек не перевернется, поскольку это невозможно, но никто никогда не пересчитывает спички.



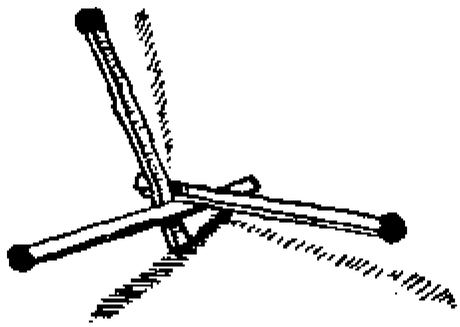
487. На рисунке показано, как можно ограничить две фигуры 7 и 13 спичками соответственно, чтобы при этом площадь одной из них была ровно в 3 раза больше площади другой. Пунктирные линии показывают, что одна фигура составлена из 2 квадратов и равностороннего треугольника, а другая — из 6 таких же квадратов и 3 треугольников. Двенадцать горизонтальных и вертикальных спичек остались на месте.

488. На рисунке приведен простой ответ. От нас не требовалось, чтобы фигура была плоской или чтобы она была образована 9 спичками. Мы изобразили (в перспективе) куб (правильную фигуру с шестью сторонами).

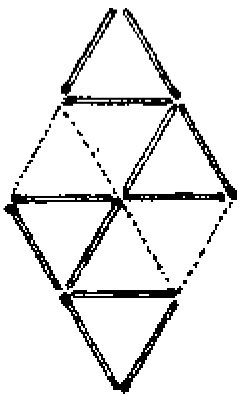




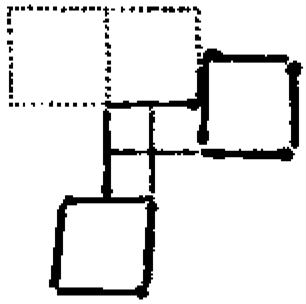
489. На рисунке показано, как расположить 26 спичек так, чтобы они разделили чертеж на две части одинаковых размеров и одной формы, из которых одна содержит две звездочки, а другая — два крестика.



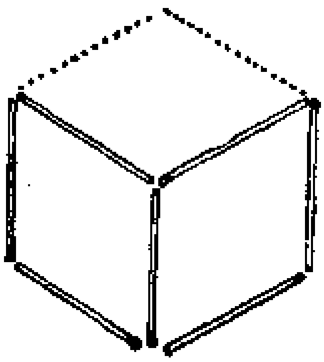
490. Расположите 3 спички, как показано па рисунке, и в центре поставьте торцом коробок.



491. Уберите 4 спички, показанные пунктиром на рисунке, и останутся 4 равных треугольника.



492. На рисунке пунктирными линиями обозначены 6 передвинутых спичек, тонкими — места, куда их надо поместить, а толстыми — 6 неподвижных спичек.



493. На рисунке пунктиром показано первоначальное положение двух передвинутых спичек.

494. Расположите 10 спичек так — FIVE[44]. Уберите 7 спичек, образующих F и E ($\frac{7}{10}$ общего числа спичек), и у вас останется IV (четыре).

495. В коробке было 36 спичек, из которых мой друг мог составить треугольник (17, 10, 9) площадью 36 квадратных дюймов. После того как 6 спичек было использовано, оставшиеся 30 образовали треугольник (13, 12, 5) площадью 30 квадратных дюймов, а использовав еще 6 спичек, он смог из оставшихся 24 составить треугольник (10, 8, 6) площадью 24 квадратных дюйма.

496. Расположите карты вверх рубашкой в следующем порядке (тройка пик поверх колоды, червовая десятка снизу): тройка пик, тройка треф, червовая пятерка, бубновый туз, бубновая десятка, десятка пик, король треф, бубновая двойка, король пик, червовый валет, пятерка треф, бубновая тройка, бубновый валет, червовая шестерка, трефовый валет, четверка пик, восьмерка пик, дама бубен, четверка бубен, червовая дама, червовая семерка, трефовая десятка, пиковый валет, бубновая пятерка, трефовый туз, пиковая пятерка, бубновый король, трефовая семерка, трефовая восьмерка, бубновая шестерка, червовая восьмерка, червовый туз, червовый король, трефовая четверка, семерка бубен, девятка пик, двойка червей, пиковая дама, пиковый туз, пиковая шестерка, червовая тройка, бубновая восьмерка, червовая девятка, двойка треф, дама треф, пиковая двойка, шестерка треф, девятка треф, девятка бубен, червовая четверка, пиковая семерка, червовая десятка.

[Все подобные головоломки решаются просто, надо только, начиная с последней выложенной карты, проделать все действия в обратном порядке, получив в конце нужную стопку карт.— *М. Г.*]

497. Для того чтобы перетасовать 14 карт описанным выше способом и получить при этом исходный порядок карт, требуется 14 тасований, хотя в случае 16 карт их требуется только 5. Мы не можем углубляться здесь в природу этого явления, но читателю, быть может, будет небезынтересно провести самостоятельное исследование данного вопроса.

[Относительно математической теории такого тасования см. W. W. Rouse Ball «Mathematical Recreations and Essays» (N. Y., 1960, pp. 310-311). Это тасование иногда называют «тасованием Монжа», по имени знаменитого французского математика XVIII в. Гаспара Монжа, который впервые его придумал. — *М. Г.*]

498. Для того чтобы освободить одно звено и присоединить его снова, требуется 3 цента. Если бы мы освободили по одному звену на конце каждого из 13 кусков, то это обошлось бы нам в 39 центов, так что выгодней было бы купить новую цепочку. Если бы один из кусков содержал 12 звеньев и мы освободили бы все эти звенья, чтобы с их помощью соединить оставшиеся 12 кусков, то это обошлось бы в 36 центов. Если бы у нас было 2 куска, содержащих вместе 11 звеньев, то мы могли бы освободить эти звенья и с их помощью соединить оставшиеся 11 кусков, что обошлась бы нам в 33 цента.

Самое лучшее, что мы можем сделать, это освободить все 10 звеньев в трех кусках и с их помощью соединить оставшиеся 10 кусков, затратив 30 центов. В качестве таких кусков можно взять 1 кусок из 4 звеньев и 2 куска по 3 звена. Так, если мы включим в число 3 кусок из 3 звеньев и 1 кусок из 4 звеньев, расположенные в среднем ряду, то получим всего 5 больших и 5 маленьких звеньев.

Если бы мы сумели найти 4 куска, содержащие всего 9 звеньев, то сэкономили бы на этом еще 3 цента, но это сделать невозможно так же, как невозможно найти 5 кусков, содержащих 8 звеньев, и т. д. Следовательно, стоимость ремонта составит 30 центов.

499. Прибавьте IV, перевернутое «вверх ногами», к VI, и вы получите XI.

500. Каждый год, делящийся на 4, является високосным, *за исключением* тех лет, которые делятся на 100; из этих последних високосными будут *только те*, которые делятся на 400, а остальные *не являются* високосными. Обычно это обстоятельство упускают из виду. Так, 1800 г. не был високосным, не был им и 1900 г.; однако 2000, 2400, 2800 гг. и т. д. будут високосными. Первым днем нашего века был вторник 1 января 1901 г.

В нашем веке всего 25 високосных лет, поскольку 2000 г. високосный. Следовательно, он содержит 36 525 ($365 \times 100 + 25$) дней, или 5217 недель и 6 дней; поэтому 1 января 2001 г. наступит на 6 дней позднее вторника, то есть придется на понедельник. Век, начинающийся 1 января 2001 г., будет содержать только 24 високосных года, поскольку 2100 г. невисокосный, и 1 января 2101 г. наступит на 5 дней позднее понедельника, то есть в субботу, поскольку в этом веке будет 5217 недель и только 5 лишних дней. Теперь нам удобно представить результаты в виде таблицы:

1 января 1901 г. — Вторник

1 января 2001 г. — Понедельник. На 6 дней позже (2000 г. високосный)

1 января 2101 г. — Суббота. На 5 дней позже

1 января 2201 г. — Четверг. На 5 дней позже

1 января 2301 г. — Вторник. На 5 дней позже

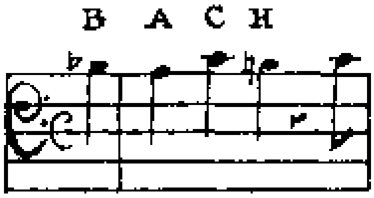
1 января 2401 г. — Понедельник. На 6 дней позже (2400 г. високосный)

Таким образом, мы видим, что первые дни последовательных веков циклически повторяются в порядке: вторник, понедельник, суббота, четверг; поэтому они никогда не придутся на воскресенье, среду или пятницу.

501. Прежде чем склеивать концы полоски, поверните один из них на пол-оборота так, чтобы кольцо оказалось перекрученным. Тогда муха сможет проползти через все квадраты, не перейдя через край бумаги, поскольку, как это ни странно, у полученного кусочка бумаги будет только одна сторона и один край!

[Дьюдени описывает то, что теперь хорошо известно как лист Мёбиуса — один из самых курьезных объектов топологии (см. М. Гарднер, Математические головоломки и развлечения, гл. 7, М., изд-во «Мир», 1971).— *М. Г.*]

502. Несомненно, правильным решением этой головоломки является BACH (Бах). Если вы начнете поворачивать крест, то получите последовательно B-бемоль (ключ соль), A (теноровый ключ), C (альтовый ключ) и B натуральное (ключ соль). По немецкой терминологии B-бемоль называется «B», а B натуральное «H», что и дает BACH.




Это напоминает мне органную фугу К. П. Эмануеля Баха, основанную на его фамилии и начинающуюся так, как показано на рисунке.

503. Если каждый из двух мужчин женится на матери другого и от каждого из браков родится по сыну, то каждый из этих сыновей будет приходиться другому одновременно и дядей, и племянником. Это простейший ответ.

[Возможны еще два ответа: 1) каждая из двух женщин выходит замуж за отца другой; 2) мужчина женится на матери некой женщины, а эта женщина выходит замуж за отца этого мужчины.— *М. Г.*]

504. Если у каждой из двух вдов есть по сыну и если каждая из них выходит замуж за сына другой, причем они рожают от этих браков по дочери, то в результате получаются“те самые родственные связи, которые указаны в эпитафии.

505. Ясно, что кондуктора не могут звать Смитом, поскольку мистер Смит — ближайший к инженеру бизнесмен и его доход, следовательно, точно делится на 3, а 10 000 на 3 не делится. Точно так же кочегара не могут звать Смитом, раз Смит обыгрывает его в бильярд. Следовательно, Смитом зовут инженера, а поскольку нас только он и интересует, то для нас совершенно неважно, зовут ли кондуктора Джонсом, а кочегара Робинсоном или наоборот.

[Это одна из наиболее популярных головоломок Дьюдени. Она стала прототипом десятков других логических задач, называемых иногда головоломками типа Смит — Джонс — Робинсон в честь первоначальной задачи Дьюдени.— *М. Г.*]

506. Пронумеруйте в правильном порядке камни от 1 до 8. Затем действуйте следующим образом: *1*, берег, *1, 2, 3, (2), 3, 4, 5, (4), 5, 6, 7, (6), 7, 8*, берег, (*8*), берег. В скобки взяты шаги в обратном направлении. Можно заметить, что, вернувшись на берег после первого шага, а затем все время делая 3 шага вперед и 1 назад, мы выполним задание за 19 шагов.

507. Приятель полковника сказал, что 1 : 50 неудобное время отправления для поезда потому, что если вы на него сядете, то это будет 1 : 50 (1 к 50)[45].

508. Если вы перевернете страницу вверх ногами, то обнаружите, что 1 (one), 9 (nine), 1 (one) и 8 (eight) дают правильную сумму 19 (nineteen).

509. Мы не можем с уверенностью сказать, какую часть змеи должна проглотить соперница, чтобы ее можно было считать погибшей. Однако мы можем утверждать, чего заведомо не произойдет: змеи не будут заглатывать друг друга до тех пор, пока обе не исчезнут! Но где в действительности оборвется «процесс заглатывания», сказать трудно.

510. Если бы W и E были фиксированными точками и W, как и в действительности, располагалось бы слева, когда мы движемся к N, то, пройдя Северный полюс, мы обнаружили бы W справа, как и утверждалось. Однако W и E не фиксированные точки, а направления на глобусе; поэтому когда вы смотрите на N, то W означает направление налево, а E — направо.

При отражении в зеркале вы не «переворачиваетесь», поскольку то, что кажется правой рукой, является левой, а то, что выглядит левой, является правой рукой. Отражение, так сказать, посылает обратно то, что находится против него в каждой точке.

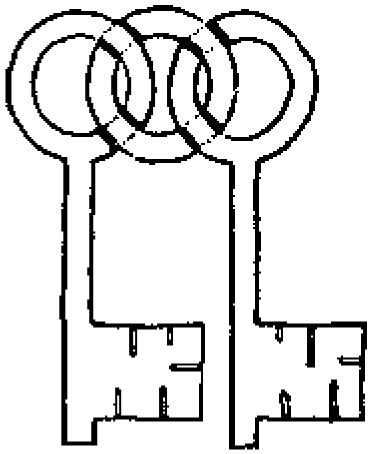
[Если читатель не понял кратких объяснений Дьюдени, относящихся к парадоксу с зеркалом, то он может прочитать гл. I книги М. Гарднера «Этот правый левый мир» (М., изд-во «Мир», 1967), где этот парадокс разбирается значительно подробнее.— *М. Г.*]


511. Как это ни странно, сквозь такую дырку можно просунуть двадцатикопеечную монету, не порвав бумаги. Это самая большая монета, с которой можно проделать подобный трюк. Сначала сложите бумагу, как показано на рисунке, а потом опустите монету ребром на сгиб. Затем, держа бумагу в точках $A$ и $B$, сдвиньте руки вверху, и монета проскочит сквозь дырку.

512. С 1752 г., когда в Англии был принят новый стиль. первым годом с пятью средами в феврале оказался 1764 г. Затем такими годами были 1792 и 1804. Прибавляя по 28, мы получим далее 1832, 1860, 1888 гг. Потом мы вынуждены совершить прыжок к 1928, 1956, 1984 и 2012 гг. Ответом, следовательно, будет 1888 и 1956 гг. Обычно такое происходит через каждые 28 лет, за исключением тех случаев, когда 1800 и 1900 гг. (которые не являются високосными) попадали в соответствующий промежуток. Поскольку 2000 г. будет високосным, год, следующий после 1984 г. и имеющий указанное свойство, наступит, как и полагается, через 28 лет — это будет 2012 г.

513. Трюк состоит в том, что воронку нужно опускать до тех пор, пока пунктирная линия $CA$ (см. исходный рисунок) не пересечет пламя свечи. Любая попытка задуть свечу, располагая пламя по центру отверстия, обречена на неудачу.

514. Протащите сквозь веревочную петлю петлю пиджака вместе с частью борта так, чтобы петля пиджака добралась до противоположного конца палочки, а затем проденьте палочку в петлю пиджака и затяните веревочную петлю. Чтобы освободить палочку, нужно все действия проделать в обратном порядке, хотя выполнить это гораздо труднее. Если вы украдкой прицепите петлю с палочкой к пиджаку вашего приятеля, то ему придется изрядно поломать голову, прежде чем он сумеет отцепить палочку, не разрезая петли.



515. Сначала вырежьте одним куском ключи и кольцо, как показано на рисунке. Теперь надрежьте картон в полтолщины вдоль восьми маленьких черных линий и аналогичным образом надрежьте картон с противоположной стороны вдоль пунктирных линий. Затем просуньте перочинный нож под каждый из четырех маленьких квадратов, образованных этими линиями, и три куска отделятся друг от друга так. что ключи окажутся свободно висящими на кольце.

516. Пропустите через ножницы побольше веревки так, чтобы они оказались как можно ближе к руке держащего свободные концы. Затем протащите нижнюю петлю обратно вдоль двойной веревки. Вы должны внимательно следить, чтобы петля точно двигалась вдоль двойной веревки, пока она не выйдет из ножниц. Затем пропустите ее вокруг концов ножниц и протащите назад вдоль двойной веревки. Если вы будете действовать аккуратно, то веревка отделится от ножниц. Однако важно не допускать перекручиваний и узлов, иначе вы безнадежно запутаетесь. Все же после небольшой практики этому можно легко научиться.

517. В истории с офицером, поскольку он так никогда и не проснулся, никто не мог знать, какой он видел сон; поэтому вся история представляет собой чистый вымысел.

Ответ на второй вопрос таков: надо опустить яблоки в воду и подсчитать их объем, отметив, насколько поднялась вода в сосуде.

518. Поверхность воды, как и всякой другой жидкости, всегда имеет сферическую форму, а чем некоторая сфера больше, тем она менее выпукла. Сферическая поверхность воды должна, следовательно, меньше выступать над краем сосуда (а значит, и меньше ее должно вмещаться в этот сосуд) на вершине горы, чем у подножия. Это в равной мере справедливо для любой горы.

519. Молодому математику нужно было просто перевернуть листок и посмотреть его на свет или поднести к зеркалу; при этом он немедленно понял бы, что послание его невесты гласило: «Kiss me, dearest» («Поцелуй меня, дорогой»).

---

[1] *В США находятся в обращении следующие мелкие монеты: полдоллара, четверть доллара, 10 центов, 5 центов и 1 цент.— Прим. перев.*

[2] *Метродор (330-278/277 г. до н. э.) — древнегреческий философ, ученик и друг Эпикура.— Прим. перев.*

[3] *Боадицея — британская королева времен императора Нерона. Ее муж, король Празутагус, владел небольшим королевством, расположенным на территории нынешнего графства Норфолк и подчиненным Риму. После его смерти римляне захватили территорию королевства. Народ во главе с Боадицеей поднялся против завоевателей. Вначале восставшим удалось разгромить римлян, но затем они потерпели поражение от римского полководца Светония Паулинуса, и Боадицея приняла яд.— Прим. перев.*

[4] *Пусть читателя не удивляет ничтожная скорость «промчавшегося» автомобиля — головоломка создавалась в начале века. В этом смысле стоит вспомнить случай с известным американским физиком-экспериментатором Робертом Вудом, который в те же времена «носился» по городу на своем паровом автомобиле со скоростью 20 миль в час, чем вызвал поток протестов в местной газете и требование ограничить скорость автомобилей в черте города до 6 миль в час (см. В. Сибрук, Роберт Вуд, М., Физматгиз, 1960, стр. 99).— Прим. перев.*

[5] *В 1 английской миле (1609,315 м) содержится 5280 футов.— Прим. перев.*

[6] *Автор исходит из молчаливого предположения, что эскалаторы неподвижны.— Прим. перев.*

[7] *В странах английского языка вместо привычной для нас десятичной запятой применяется десятичная точка. Причем, если целая часть числа равна нулю, то этот нуль иногда опускается, например, пишут не 0,5 а .5.— Прим. перев.*

[8] *Beeswax (англ.) — пчелиный воск.*

[9] *Wrong (англ.) — неверно; Right (англ.) — верно.*

[10] *Fly for your life (англ.) — если тебе дорога жизнь, спасайся.*

[11] *H. E. Dudney, The Canterbury Puzzles, London, 1907.*

[12] *Треугольными называются числа, равные сумме первых n чисел натурального ряда. Название связано с тем, что если изобразить каждую единицу кружочком, те треугольное число можно изобразить в виде треугольника, составленного из таких кружочков (в первой строке стоит один кружочек, во второй два, в третьей — три и т. д.).— Прим. перев.*

[13] $\left(\frac{a}{2}+\frac{1}{2}\right)^2-\left(\frac{a}{2}-\frac{1}{2}\right)^2\equiv a$.*— Прим. перев.*

[14] *Вводная часть (арифметика) трактата «Венец астрономического учения» выдающегося индийского математика XII в. Бхаскары.— Прим. перев.*

[15] *В одном фунте содержится 16 унций.— Прим. перев.*

[16] *Точнее говоря, не сможем выразить ее рационально через диаметр.— Прим. перев.*

[17] *Дж. Фергюсон — шотландский астроном-самоучка XVIII в.*

[18] *В данном случае разрешается прыгать и по диагонали.— Прим. перев.*

[19] *Туз соответствует одному очку.— Прим. перев.*

[20] *По-видимому, задача относится ко времени действия в США «сухого закона».— Прим. перев.*

[21] *Здесь лежит Джон Рени (англ.).*

[22] *Под росчерком здесь понимается одно непрерывное движение карандаша в заданном направлении. Если вы рисуете ломаную линию, то на каждый отрезок этой ломаной тратится по одному росчерку. Всю окружность также можно нарисовать за один росчерк.— Прим. перев.*

[23] *Это соглашение оправдано следующими доводами. Если мы можем определять границы между странами только по цвету, то в случае, когда общий участок границы двух стран не сводится к одной точке, эти страны обязаны иметь разные цвета, иначе мы не сможем найти границу между ними. Если же границы двух стран соприкасаются*

*только в одной точке, мы спокойно можем покрасить эти страны одной и той же краской; при этом путаницы с границами не возникнет.— Прим. перев.*

[24] *Гольф — спортивная игра с мячом. На участке, выделенном для игры, размечаются 9 или 18 дорожек длиной от 145 до 470 м и шириной 30-40 м. В конце каждой дорожки делается лунка диаметром 11 см и глубиной 10 см, обозначаемая флажком. Мяч из литой резины имеет 14 см в окружности. Задача игроков — ударами специальной биты (клэба) прогнать мяч поочередно по всем дорожкам и загнать его в лунки. Выигрывают участники, сделавшие это наименьшим числом ударов.— Прим. перев.*

[25] *Пузырьки воздуха, образующиеся при кипении (англ.).— Прим. перев.*

[26] *Если у вас есть возможность замкнуть какой-нибудь квадратик, но вы считаете это нецелесообразным, вы имеете право этого не делать, однако, замкнув квадратик, вы обязаны ходить.— Прим. перев.*

[27] *Правильным,считается следующий порядок: туз, двойка, тройка, четверка, пятерка, шестерка, семерка, восьмерка, девятка, десятка, валет, дама, король.— Прим. перев.*

[28] *В целых числах.— Прим. перев.*

[29] *Вряд ли можно согласиться с подобным решением. После того как фермер продал теленка мяснику, все пять участников (банкир, мясник, фермер, торговец и прачка) оказались в одинаковом положении, а именно: каждый из них должен кому-то 5 долларов, и ему должны точно такую же сумму, так что общий баланс равен нулю. Обращение по кругу фальшивой банкноты фактически эквивалентно тому, как если бы все пять участников собрались вместе и договорились считать долги взаимно погашенными. В этом смысле ее действие ничем не отличается от действия настоящей банкноты.— Прим. перев.*

[30] *Здесь М. Гарднер не совсем прав, поскольку Дьюдени рассматривает IX как совокупность двух цифр: I и X.— Прим. перев.*

[31] *«Мой бог, что за ряд!» (фр.).*

[32] *Ответ следует непосредственно из теоремы о сложении скоростей в механике, а решение автора представляет собой лишь объяснение данной теоремы для рассматриваемого конкретного случая.— Прим. перев.*

[33] *Согласиться с этим утверждением автора можно лишь с большой натяжкой. Действительно, на рисунке весы находятся, по-видимому, в равновесии при неравных (правое длиннее) плечах коромысла, а это как раз и означает, что чашки имеют различный вес! В пользу авторского толкования говорит то, что чашки выглядят одинаково, а «значит», и весят поровну. Но тогда нужно считать, что весы изображены не в положении равновесия, а проходят точку равновесия. Через мгновенье правая чашка начнет опускаться. Пожалуй, вместо апелляции к рисунку следовало бы просто разобрать два приведенных автором случая.- Прим. перев.*

[34] *Можно сказать иначе: вероятность того, что наугад взятое число делится на 11, равна* $\frac{11}{128}$.*— Прим. перев.*

*35 См. примечание на стр. 38.*

*36 Здесь [a] означает целую часть числа a, то есть наибольшее целое число, не превосходящее a. См. также примечание на стр. 38.— Прим. перев.*

[37] *Целой частью числа называется наибольшее целое число, не превосходящее данное.— Прим. перев.*

[38]

$$(a-c)(b+c) = ab + ca - cb - c^2, \text{ или}$$

$$ab = (a-c)(b-c) + c[b - (a-c)].$$

*Выбрав a = 879, b = 993 и c = 7, мы и получим правило, по которому действует автор.— Прим. перев.*

[39] *Строго говоря, это еще не доказательство, но его можно легко получить, пользуясь свойствами эллипса. Булавки должны располагаться в фокусах эллипса A к B. CD представляет собой большую, а EF — малую оси эллипса; обозначим их соответственно через 2a и 2b, а фокусное расстояние AB через 2c. Тогда из треугольника AGF получим AF =* $\sqrt{c^2+b^2}$. *Но в силу свойств эллипса* $\sqrt{c^2+b^2}$ *= a, то есть AF =* $\frac{1}{2}$*CD, что и требовалось.— Прим. перев.*

[40] *Эта кривая называется линией погони.— Прим. перев.*

[41] *См. решение задачи 403.— Прим. перев.*

[42] *Можно сказать, что Дьюдени доказал локальную, а не глобальную теорему.— Прим. перев.*

[43] *Из n предметов m можно выбрать* $C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}$ *способами. Общая сумма способов равна* $1 + C_n^1 + C_n^2 + \ldots + C_n^n = (1+1)^n = 2^n$. *Сюда вошел и «способ», при котором мы вообще ничего не выбираем (не дарим ни одной картины). Исключив его, мы и получим* $2^n - 1$.*— Прим. перев.*

[44] *Five (англ.) — пять.*

[45] *Имеются в виду шансы сесть на поезд.— Прим. перев.*