В.И. СОБОЛЕВ, В.В. ПОКОРНЫЙ, В.И. АНОСОВ

КРАТКИЙ КУРС МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

ВГУ

В.И. СОБОЛЕВ, В.В. ПОКОРНЫЙ, В.И. АНОСОВ

КРАТКИЙ КУРС МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

Часть первая

Допущено Министерством высшего
и среднего специального образования РСФСР
в качестве учебного пособия для студентов
математических специальностей университетов

ВОРОНЕЖ
ИЗДАТЕЛЬСТВО ВОРОНЕЖСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
1983

УДК 551.873

Краткий курс математического анализа. Соболев В.И., Покорный В.В., Аносов В.И. Учебное пособие. Воронеж: Изд-во ВГУ, 1983, ч. 1. 392 с.

Учебное пособие написано в соответствии с действующей программой курса «Математический анализ» для университетов (специальности 2013 – Математика и 2014 – Механика). В книге собран и обобщен необходимый для изучения курса материал с учетом современных достижений по математическому анализу. Введенные в главы примеры должны способствовать активной работе студентов с книгой и более полному усвоению ее материала.

Ил. 50.

Печатается по постановлению Редакционно-издательского совета Воронежского университета

Рецензенты:

кафедра математического анализа Ярославского университета,
д-р физ.-мат. наук, проф. В.М. Тихомиров

ИБ №766

Владимир Иванович Соболев
Виталий Владимирович Покорный
Виктор Иванович Аносов

КРАТКИЙ КУРС МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

Часть первая

Учебное пособие

Редактор Т.Н. Баскакова. Корректоры Е.В. Бессонова, И.С. Злобина

Подп. в печ. 14.02.83. ЛЕ ОГ569. Форм. бум. 30 x 84/16, Бумага типографская №1, Ротапринт. Усл. п. л. 22,8. Усл.кр.-отт. 30,0. Уч.-изд.л. 21. Тираж 1000. Заказ 469 Цена 85 коп.

Издательство Воронежского университета. Воронеж. ул. Ф. Энгельса, 8

Типография издательства ВГУ. Воронеж, ул. Пушкинская. 3

С $\frac{20203-011}{174(03)-83}$ 74-03 1702050000

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ

Предлагаемая книга представляет собой попытку создания краткого учебного пособия, соответствующего программе курса математического анализа для математико-механических специальностей университетов.

При написании книги авторы руководствовались рядом обстоятельств. Во-первых, развитие математики и расширенно сферы ее применения привело к изменению степени важности тех или иных разделов математического анализа и для математического образования, и для использования их в прикладных вопросах. Так, например, в связи с расширением использования математических методов при исследованиях явлений и процессов, определяемых большим числом параметров, для математика, выпускника университета, увеличилась необходимость владеть анализом векторных функций векторного аргумента и вместе с тем уменьшилась необходимость в оперировании тонкими признаками сходимости числовых рядов и несобственных интегралов. Во-вторых, во многих учебниках и учебных пособиях математически строгое изложение начальных разделов математического анализа часто заменяется в теории многомерных интегралов апелляцией к «очевидности по аналогии», что не может считаться удовлетворительным. В-третьих, современное развитие теоретической механики требует достаточно свободного владения интегрированием по многообразии или хотя бы по клеточном комплексам, которое отсутствует в большинстве имеющихся пособий по математическому анализу. Таким образом, нужна книга, по которой студент, начиная с простейших понятий, последовательно доходил бы в изучении математического анализа до этих, иногда достаточно сложных, теорий.

В университетских курсах математического анализа рассмотрение материала не выходит за пределы метрических пространств. Следовательно, все предельные переходы могут быть определены счетными процессами. Поэтому авторы отказались от рассмотрения фильтров или эквивалентных им понятий, и все построения в книге, для которых используются предельные переходы, осуществляются с помощью пределов последовательностей. Примеров этого может служить определение интеграла Римана.

Так как в большинстве приложение интегрального исчисления используется схема Коши–Римана построения интеграла, то, с нашей точки зрения, в краткой курс математического анализа нет необходимости приводить понятие интеграла Лебега. Изложение лебеговской теории интегрирования, вполне доступное для студентов университета, содержится в ряде учебников и учебных пособий по теории функций вещественной переменной и функциональному анализу.

Наш опыт преподавания математического анализа покапал, что многомерные теории, если с них начинается рассмотрение того или иного вопроса, студентами усваивается плохо. Поэтому в «Кратком курсе математического анализа» принято концентрическое изложение материала, когда после одномерного случая рассматривается двумерный или более простой многомерный, а затеи уже общий многомерный случай.

Длительный опыт чтения лекций по математическому анализу позволил авторам достичь большой компактности изложения ряда вопросов, причем, как надеются авторы, без ущерба для понимания излагаемого материала. Такая компактность изложении, а также то, что в «Краткий курс математического анализа» не включены вопросы комплексного анализа, дифференциальной геометрии и некоторые другие, излагаемые в соответствующих курсах, дало возможность написать достаточно краткую книгу, что при большой загруженности студентов является, с нашей точки зрения, ее достоинством.

Со многими главами, книги познакомились сотрудники кафедры математического анализа ВГУ И.С. Иохвидов, В.Ю. Сандберг и В.П. Трофимов, отдельные главы просмотрели М.А. Крейнес и П.К. Рашевский. Ими, а также рецензентами рукописи В.М. Тихомировым, Ю.Ф. Коробейником и коллективами кафедр математического анализа Ярославского университета, теории функций Белорусского университета сделав ряд ценных указаний, за которые авторы приносят искреннюю благодарность.

Прекрасно понижая, что предлагаемая книга имеет много недостатков, авторы будут признательны всем, кто своими советами будет содействовать ее улучшению.

УКАЗАТЕЛЬ ОБОЗНАЧЕНИЙ

$\forall$ — квантор всеобщности: $\forall x$ — «любой x»;

$\exists$ — квантор существования: $\exists x$ — «существует x»;

$\Rightarrow$ — импликация: «Из A следует B («если A, то B»);

$\Leftrightarrow$ — двойная импликация: «Из A следует B и обратно» («A равносильно B»);

$\neg$ — отрицание: «не A» или, например, «$A \not\Rightarrow B$, что означает: «Из A не следует B»;

$x \in A$ — x есть элемент множества A;

$A \subset B$ — A есть подмножество множества B;

$\emptyset$ — пустое множество;

$A \cup B$ — объединение множеств A и B;

$A \cap B$ — пересечение множеств A и B;

$A\ B$ — разность множеств A и B;

$A \times B$ — прямое (декартово) произведение множеств A и B;

(x, y) — упорядоченная пара элементов x и y;

$\{a, b, c, \ldots, \}$ — множество,состоящее из элементов $a, b, c, \ldots$;

$\{x \in M |\ \Phi\}$ — множество,состоящее из элементов $x \in M$, обладающих свойством Φ;

$\{x_n\}$ — множество, состоящее из элементов $x_1, x_2, \ldots$ или последовательность, членами которой являются $x_1, x_2, \ldots$;

$f :\ A \to B$ — отображение множества A в множество B;

$x \xrightarrow{f} y$ — y есть образ x при отображении f; знак f опускается, если ясно, о каком отображении идет речь;

$f(A)$ — образ множества A при отображении f;

$f^{-1}(B)$ — прообраз множества B при отображении f;

$f \circ g$ — композиция отображений f и g;

f_A — сужение отображения f на множество A;

$\mathbb{N}$ — множество всех натуральных чисел;

$\mathbb{Q}$ — множество всех рациональных чисел;

$\mathbb{R}$ — множество всех вещественных чисел;

$\mathbb{R}^n$ — n-мерное евклидово пространство, $\mathbb{R}^1 = \mathbb{R}$;

$|x|$ — модуль (длина) вектора x;

$\langle x, y\rangle$ — каноническое скалярное (внутреннее) произведение векторов x и y из $\mathbb{R}^n$;

$\|L\|$ — норма оператора (матрицы) L;

$\rho(x, y)$ — расстояние между элементами x и y метрического пространства;

$\sim$ — знак эквивалентности.

Глава I

МНОЖЕСТВА. ЧИСЛА. ОТОБРАЖЕНИЯ

При изучении явлений природы возникает необходимость подсчитывать предметы и измерять величины. Не вдаваясь в глубокий анализ понятий числа и величины, напомним лишь не очень четкое определение: величина есть то, что можно измерить, т.е. сравнить с другой величиной того же рода, принятой за единицу масштаба.

С помощью тех или иных приспособлений (приборов) измерение многих величин может быть сведено к измерению длины прямолинейных отрезков.

Если для подсчета предметов достаточно целых положительных (натуральных) чисел, то для измерения длины отрезков надо вводить дробные числа, а в случае направленных отрезков — отрицательные числа. Более того, уже в древности стало известно, что диагональ квадрата несоизмерима с его стороной, т.е. не существует рационального числа $\dfrac{p}{q}$ такого, что $\left(\dfrac{p}{q}\right)^2 = 2$, следовательно, для измерения длины отрезков недостаточно одних рациональных чисел. Необходимо, таким образом, расширенная совокупность чисел, которая должна включать рациональные числа, а также подчиняться тем же правилам арифметических действий и обладать большинством тех же важных свойств, что и рациональные числа.

Далее будет рассмотрен один из способов получения такой расширенной совокупности чисел, основанный на абстракции реального процесса измерения длины. Предварительно ознакомимся с важным для всей математики понятием множества и с простейшими действиями, которые можно совершать над множествам.

Основы теории множеств были разработана немецким математиком Г. Кантором (1845–1919).

§ 1. Множества. Простейшие операции над множествами

Множество — совокупность или собрание объектов какой-либо природы. Примерами множеств являются множества чисел, множества точек прямой или плоскости, множества линий и т.д. Каждое отдельное множество задается правилом или законом, позволяющим судить, принадлежит объект данному множеству или нет. Понятие множества — одно из первоначальных понятий, и потому определения этого понятия, т.е. сведения его к другим понятиям, более простым и ясным, не дается.

Множества обозначается прописными буквами латинского или готического алфавита: $A, B, \ldots, M, K, \ldots,$ $\mathfrak{N}, \mathfrak{M}, \ldots$ и т.д., объекты, из которых составлено множество (*элементы* множества), — малыми буквами латинского или греческого алфавита. Если множество A состоит из элементов $a, b, c, \ldots$, оно обозначается следующим образом: $A = \{a, b, c, \ldots\}$. Если a есть элемент множества A, записывают: $a \in A$, если же a не является элементом множества A, то пишут: $a \notin A$. Если объект x принадлежит множеству A и обладает свойством $\mathcal{P}$, и множество A содержит все такие объекты, записывают: $A = \{A |\ \mathcal{P}\}$. Одним из важных множеств является множество $\mathbb{N}$ всех натуральных чисел: $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$. Существует также специальное, так называемое *пустое множество*, которое не содержит ни одного элемента. Таково, например, множество всех целых положительных корней уравнения $x^2 + 1 = 0$. Понятие пустого множества помогает формулировать некоторые утверждения о множествах в более общем виде. Пустое множество обозначается символов $\emptyset$ или (иногда) O.

Множества A и B называются *равными*, если они состоят из одних и тех же элементов, т.е. если из $x \in A$ следует $x \in B$ и обратно, из $x \in B$ следует $x \in A$. В этом случае пишут $A = B$. Если каждый элемент $x \in A$ является также элементом множества B, т.е. $x \in B$, то говорят, что множество A включено в множество B или что A является *подмножеством* множества B. Говорят также, что A есть часть B. В этом случае пишут: $A \subset B$ или $B \supset A$. Включение $A \subset B$ не исключает равенства этих множеств. Если $A \subset B$, но $A \neq B$, то A называют *собственным подмножеством* или правильной частью множества B. Так, например, множество $\{2, 4, \ldots, 2n, \ldots\}$ всех четных чисел есть собственное подмножество множества $\mathbb{N}$ всех натуральных чисел.

Пустое множество является подмножеством любого множества.

Пусть дана совокупность множеств $\{A, B, C, \ldots\}$. Рассмотрим новое множество M, состоящее из тех и только тех элементов, которые входят, по крайней мере, в одно из множеств $A, B, C, \ldots$. Множество называется *объединением* множеств $A, B, C, \ldots$ и обозначается следующим образом: $M = A \cup B \cup C \cup \ldots$.

Итак, если $M = A \cup B \cup C \cup \ldots$, то каждый элемент $x \in M$ входит или в A или в B, или в C, $\ldots$, причем, если какой-либо элемент входит в несколько множеств, то в объединение этих множеств он включается только один раз. Объединение n множеств $A_1, A_2, \ldots, A_n$ обозначают $\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i$ или $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n$.

Примеры.

1. Пусть A_n — множество целых положительных чисел, кратных натуралъвонх числу n. Тогда

$$M = A_2 \cup A_3 \cup \ldots \cup A_n \cup \ldots$$

есть множество всех натуральных чисел, больших 1.

2. Предположим, что на плоскости выбрана некоторая система коорданат xOy. Пусть A — множество точек этой плоскости, лежащих над осью Ox, B —

множество точек, лежащих правее оси Oy. Тогда множество $C = A \cup B$ состоит из точек плоскости, лежащих в 1, 2 и 4-м квадрантах (рис. 1) и не лежащих на границе 3-го квадранта.

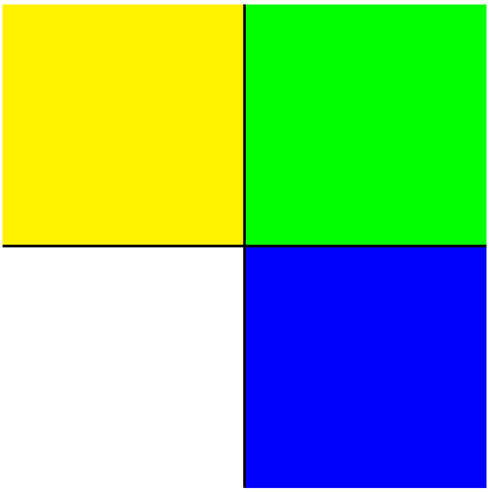

Рис. 1

Пусть снова дана совокупность множеств $A, B, C, \ldots$. Множество P, состоящее из тех и только тех элементов, которые принадлежат и множеству A, и множеству B и т.д., называется *пересечением* множеств $A, B, C, \ldots$ и обозначается $P = A \cap B \cap \ldots$.

Итак, если $P = A \cap B \cap \ldots$, то P состоит и тех элементов, которые входят в каждое из данных множеств, и только из таких элементов. Пересечение множеств $A_1, A_2, \ldots, A_n$ обозначается $\bigcap\limits_{i=1}^{n} A_i$. Если $A \cap B = \emptyset$, то говорят, что *множества A и B не пересекаются.*

Часто рассматривают совокупность $\{A_\xi\}$ множеств A_ξ, в которой множества отличаются друг от друга различными значениями индекса ξ. В этом случае объединение множеств A_ξ обозначают $\bigcup\limits_{\xi} A_\xi$, а их пересечение — $\bigcap\limits_{\xi} A_\xi$. Отметим, что множества $A_{\xi'}$ и $A_{\xi''}$, хотя и имеют различные значения индекса ξ — ξ' и ξ'', могут быть тождественными.

Примеры.

3. Если A и B — множества примера 2, то $A \cap B$ состоит из точек, лежащих внутри первого квадранта, исключая точки его границы.

4. Если A_n — множества примера 1, то $P = A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n \cap \ldots$ пусто.

5. Пусть $A = \{2, 4, 6, \ldots, 2n, \ldots\}$, $B = \{3, 6, 9, \ldots, 3n, \ldots\}$. Тогда $C = A \cap B = \{6, 12, \ldots, 6n, \ldots\}$.

Из определения объединения и пересечения множеств следует, что операции объединения и пересечения обладают свойствами коммутативности, например:

$$A \cup B \cup C = A \cup C \cup B = C \cup A \cup B = \ldots$$

и ассоциативности, например:

$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C).$$

Легко показать, что имеет место следующий закон дистрибутивности:

$$M \cap \left(\bigcup_\xi A_\xi \right) = \bigcup_\xi (M \cap A_\xi). \tag{1}$$

В самом деле, если $x \in M \cap \left(\bigcup\limits_\xi A_\xi \right)$, то $x \in M$ и $x \in \left(\bigcup\limits_\xi A_\xi \right)$. Тогда x принадлежат хотя бы одному из объединяемых множеств, например, A_{ξ_0}. Но так как, кроме того, $x \in M$, то $x \in M \cap A_{\xi_0}$, откуда следует, что $x \in \bigcup\limits_\xi (M \cap A_\xi)$. Пусть, напротив, $x \in \bigcup\limits_\xi (M \cap A_\xi)$. Тогда x входит в одно из объединяемых множеств, например, $x \in M \cap A_{\xi_0}$. Но в этом случае $x \in M$ и $x \in A_{\xi_0}$. Тогда $x \in \bigcup\limits_\xi A_\xi$, и так как, кроме того, $x \in M$, то $x \in M \cap \left(\bigcup\limits_\xi A_\xi \right)$.

Таким образом, всякий элемент, входящий в множество, стоящее в левой части равенства (1), входит и в множество, стоящее в правой части равенства (1), и обратно. Следовательно, эти множества действительно совпадают. Равенство (1) доказано.

Отметим очевидные равенства

$$A \cup A = A, \qquad A \cap A = A,$$

а также равенства

$$A \cup B = A, \quad A \cap B = B \ \text{ при } \ B \subset A.$$

Пусть даны множества A и B. Элементы множества A, не входящие в B, образуют множество, называемое *разностью* множеств A и B, которая обозначается $A \setminus B$. Если B есть подмножество множества A, то разность $A \setminus B$ называют также *дополнением* множества B до множества A и обозначают $C_B A$. Если из текста ясно, до какого множества берется дополнение, то пишут просто CB. Например, дополнением множества всех положительных четных чисел до множества $\mathbb{N}$ всех натуральных чисел будет множество всех положительных нечетных чисел.

Заметим, что закон ассоциативности при комбинировании операций объединения и вычитания, вообще говоря, не имеет места. Так, в общем случае $(A \setminus B) \cup B \neq A$. Например, если $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{3, 4, 5, 6\}$, то $A \setminus B = \{1, 2\}$, откуда $(A \setminus B) \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \neq A$. Однако если $B \subset A$, то легко проверить, что $(A \setminus B) \cup B = A$, и наоборот, если имеет место это равенство, то $B \subset A$.

Принцип двойственности. Пусть множества A_ξ являются подмножествами множества $\mathfrak{M}$. Тогда

$$C\left(\bigcap_\xi A_\xi \right) = \bigcup_\xi C A_\xi, \tag{2}$$

$$C\Big(\bigcup_{\xi} A_{\xi}\Big) = \bigcap_{\xi} CA_{\xi}, \tag{3}$$

где дополнение берется до множества $\mathfrak{M}$.

Докажем первое из этих равенств (второе доказывается аналогично).

Пусть $a \in \bigcup\limits_{\xi} CA_{\xi}$. Тогда a принадлежит, по крайней мере, одному из объединяемых множеств, например CA_{ξ_0}. Следовательно, $a \in \mathfrak{M}$ и $a \notin A_{\xi_0}$. Поэтому $a \notin \bigcap\limits_{\xi} CA_{\xi}$, и так как $x \in \mathfrak{M}$, то $x \in C\Big(\bigcap\limits_{\xi} A_{\xi}\Big)$. Таким образом, $\bigcup\limits_{\xi} CA_{\xi} \subset C\Big(\bigcap\limits_{\xi} A_{\xi}\Big)$.

Пусть, напротив, $x \in C\Big(\bigcap\limits_{\xi} A_{\xi}\Big)$. Это значит, что $b \in \mathfrak{M}$ и $b \notin \bigcap\limits_{\xi} A_{\xi}$. Отсюда следует, что b не принадлежит хотя бы одному из множеств A_{ξ}, например $A_{\xi'}$. Следовательно, $b \in CA_{\xi'}$ и поэтому $b \in \bigcup\limits_{\xi} CA_{\xi}$. Таким образом, $C\Big(\bigcap\limits_{\xi} A_{\xi}\Big) \subset \bigcup\limits_{\xi} CA_{\xi}$.

В сочетании с предыдущим утверждением это означает, что множества в обеих частях равенства (2) совпадают.

Замечание. Равенство (3) можно вывести из равенства (1), если воспользоваться очевидным равенством $C(CM) = M$, справедливым для любого множества $M \subset \mathfrak{M}$.

§ 2. Эквивалентные множества. Мощность. Счетные множества

Пусть даны два множества A и B, составленные из элементов любой природы. Если каждому элементу $a \in A$ по некоторому правилу или закону ставится в соответствие единственный, вполне определенный элемент $b \in B$, и обратно, в силу того же самого правила, каждому элементу $b \in B$ соответствует единственный элемент $a \in A$, то говорят, что между элементами множеств A и B установлено *взаимно однозначное соответствие*. Оно обозначается $A \sim B$. Если $a \in A$ и $b \in B$ — соответствующие друг другу элементы, то это соответствие обозначают $a \leftrightarrow b$.

Примеры.

1. Пусть A — полуокружность без концевых точек, O — ее центр, B — бесконечная прямая. Между множествами точек A и B можно установить взаимно однозначное соответствие. Закон соответствия ясен из чертежа (рис. 2).

2. Пусть $\mathbb{N} = \{1, 2, \dots, n, \dots\}$, $M = \{2, 4, \dots, 2n, \dots\}$. Соответствие $n \leftrightarrow 2n$, очевидно, взаимно однозначное.

Если между элементами множеств A и B можно установить взаимно однозначное соответствие, эти множества называются *эквивалентными*. Легко проверить, что: 1) $A \sim A$, 2) если $A \sim B$, то $B \sim A$, 3) если $A \sim B$, $B \sim C$, то $A \sim C$.

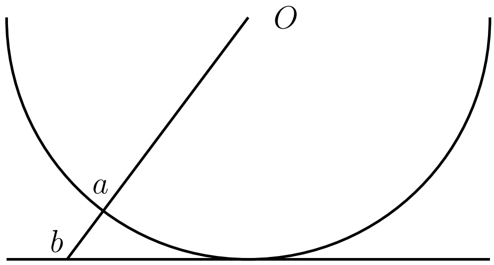

Рис. 2

Согласно примеру 2, множество всех натуральных чисел эквивалентно множеству всех четных чисел.

Рассмотрим два эквивалентных множества A и B, состоящих из конечного числа элементов. Ясно, что они содержат одно и то же число элементов. Поэтому можно считать, что число элементов конечного множества есть то общее, что имеется у всех эквивалентных друг другу конечных множеств. Из сказанного вытекает следующее определение.

Определение. *Мощностью* произвольного множества A называется то общее, что есть у всех множеств, эквивалентных данному множеству. Два множества, имеющие одинаковую мощность, называются *равномощными*.

Вернемся к примеру 2. Множества этого примера эквивалентны, и в то же время M есть собственное подмножество множества $\mathbb{N}$. Мы сталкиваемся здесь с невозможной для конечных множеств ситуацией, когда правильная часть множества имеет ту же мощность, что и все множество.

Это свойство характерно для бесконечных множеств, и, как увидим далее, в любой бесконечном множестве можно выделить правильную часть, эквивалентную всему множеству.

Рассмотрим множество A, эквивалентное множеству $\mathbb{N}$ натуральных чисел. Из определения эквивалентности множества следует, что элементам из множества A можно поставить во взаимно однозначное соответствие числа натурального ряда, т.е. что элементы множества можно занумеровать, обозначив через a_n тот элемент множества A, который поставлен в соответствие числу n. Итак,

$$A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots\} \text{ или } A = \{a_n\}.$$

Множество A эквивалентное множеству чисел натурального ряда, называется *счетным* множеством.

Докажем две теоремы и лемму о счетных множествах.

Теорема 1. *Всякое бесконечное множество M содержит счетное подмножество A, и притом такое, что $M \setminus A$ бесконечно.*

Доказательство. Возьмем два произвольных различных элемента множества M и обозначим их a_1 и b_1. Так как множество M бесконечно, то оно не исчерпывается элементами a_1 и b_1, и в нем можно взять два различных элемента a_2 и b_2, отличных от элементов a_1 и b_1. Снова множество M не исчерпывается элементами a_1, b_1, a_2, b_2 и в нем можно найти два различных элемента a_3, b_3, отличных от a_1, b_1, a_2, b_2, и т.д. до бесконечности. Мы получим, таким образом, два непересекающихся счетных подмножества $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots\}$ и $B = \{b_1, b_2, \ldots, b_n, \ldots\}$ множества M. Так как B входит в $M \setminus A$, то это последнее множество бесконечно. Теорема доказана.

ЛЕММА 1. *Всякое бесконечное подмножество счетного множества есть счетное множество.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots\}$ — счетное множество, A_0 — бесконечное подмножество множества A. Пусть a_{n_1} — элемент из A_0 с наименьшим номером, т.е. первый элемент из A_0, который встретится, если перебирать в порядке возрастания номеров элементы множества A. Обозначим элемент a_{n_1} через b_1. Пусть a_{n_2} — элемент из $A0$ с наименьшим номером, но с большим, чем n_1. Обозначим его b_2. Пусть a_{n_3} — элемент из A_0 с наименьшим номером, но большим чем n_2. Обозначим его b_3 и т.д. Ясно, что таким образом мы занумеруем элементы A_0, т.е. $A_0 = \{b_1, b_2, \ldots, b_n, \ldots\}$. Лемма доказана.

ТЕОРЕМА 2. *Объединение конечного или счетного множества конечных или счетных множеств есть снова конечное или счетное множество.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Здесь надо различать несколько случаев. Очевидно, что объединение конечного числа конечных множеств есть конечное множество. Если имеется счетное множество конечных множеств, то могут быть две возможности. Если среди элементов объединяемых множеств есть лишь конечное число отличных друг от друга элементов, то объединение этих множеств, очевидно, конечно. Если отличных друг от друга элементов в объединяемых множествах бесконечно много, то объединение будет счетным множеством. В самом деле, возьмем элементы первого из объединяемых множеств A_1 и пронумеруем их в каком—либо порядке. Пусть это будет

$$a_1, a_2, \ldots, a_{n_1}.$$

Добавим к этим элементам отличные от них элементы второго множества A_2 (если такие есть) и пронумеруем их:

$$a_1, a_2, \ldots, a_{n_1}, a_{n_1+1}, a_{n_1+2}, \ldots, a_{n_2} \text{ и т.д.}$$

Поскольку различных элементов бесконечное множество, то процесс их нумерации не может оборваться после конечного числа шагов, и так как вместе с тем все элементы объединения занумерованы, получим счетное множество

Покажем, что объединение счетного множества счетных множеств есть счетное множество.

Пусть $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$ — счетные множества, B — их объединение:

$$B = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n.$$

Положим, что $A_n = \{a_1^{(n)}, a_2^{(n)}, \ldots . a_k^{(n)}, \ldots\}$, где верхний значок указывает то множество, к которому принадлежит данный элемент. Назовем рангом элемента $a_k^{(n)}$

сумму $n+k$ его верхнего и нижнего индексов. Пронумеруем элементы $a_k^{(n)}$ в порядке возрастания ранга, а если элементы имеют равные ранги, то в порядке возрастания нижнего индекса, пропуская при этом элементы, занумерованные ранее (ведь в разных множествах A_n могут встретиться одинаковые элементы). Получим:

$$b_1 = a_1^{1)}, b_2 = a_1^{(2)}, b_3 = a_2^{(1)}, b_4 = a_1^{(3)}, \ldots,$$

если все эти элементы различны. Если $a_2^{(2)}$ совпадает, например, с $a_2^{(1)}$, то $a_2^{(2)}$ пропускаем, и тогда $b_5 = a_3^{(1)}$, $b_6 = a_1^{(4)}$, $b_7 = a_2^{(3)}$, если каждый из этих элементов отличен от уже занумерованных и т.д. Ясно, что таким образом можно пронумеровать все элементы множества B, т.е. B будет счетным множеством.

Наконец, объединение конечного числа счетных множеств есть счетное множество. Доказательство этого факта предоставляется читателю.

Теперь можно доказать важное утверждение о том, что всякое бесконечное множество равномощно некоторое своей правильной части.

Теорема 3. *Из всякого бесконечного множества можно выделить конечное или счетное подмножество так, что оставшееся множество будет эквивалентно первоначальному.*

Доказательство. Пусть M — бесконечное множество. При доказательстве теоремы мы видели, что из M можно выделить два непересекающихся счетных подмножества $A = \{a_n\}$ и $B = \{b_n\}$. Пусть

$$M_0 = M \setminus (A \cup B) = (M \setminus A) \setminus B.$$

Тогда

$$M = M_0 \cup (A \cup B), \qquad M \setminus A = M_0 \cup B.$$

Так как A и B — счетные множества, то $A \cup B$ также счетное множество, т.е. $B \sim A \cup B$. Отсюда следует, что $M \sim M \setminus A$, потому что любой элемент $x \in M$ взаимно однозначно соответствует или самому себе, если $x \in M_0$, или элементу $y \in B$, если $x \in A \cup B$ (в силу эквивалентности $A \cup B$ и B), и обратно,каждый элемент $u \in M \setminus A$ ставится в соответствие или самому себе, если $u \in M_0$, или элементу $v \in A \cup B$, если он входит в B. Теорема доказана.

Аналогичным образом рассматривается случай выделения конечного множества.

Теорема 4. *Если к бесконечному множеству прибавить конечное или счетное множество, то мощность полученного множества будет равна мощности первоначально данного множества.*

Доказательство. Пусть M — бесконечное множество, A — конечное или счетное множество. Достаточно рассмотреть случай, когда $M \cap A = \emptyset$. Выделим из M счетное подмножество B так, чтобы $M_0 = M \setminus B$ было не пусто. Тогда $M = M_0 \cup B$, $M \cup A = M_0 \cup (A \cup B)$. Так как $M_0 \sim M_0$ и $B \sim A \cup B$, то $M \sim M \cup A$. Теорема доказана.

Из теоремы 2 можно получить ряд следствий.

1. *Если элементы множества A снабжены конечным числом индексов, каждый из которых независимо от других пробегает счетное множество значений, то A — счетное множество.*

Докажем это утверждение с помощью метода индукции. Если индекс у элементов один: $A = \{a_{k_0}\}$, теорема тривиальна. Предположим, что она верна и для случая элементов с $(n-1)$ индексами. Покажем, что теорема верна для случая элементов с n индексами. Пусть $A = \{a_{k_1,k_2,\dots,k_n}\}$, где каждый индекс k_i пробегает счетное множество значений. Фиксируем какое-нибудь значение k_n^0 последнего индекса k_n. Элементы с таким фиксированным значением индекса k_n определяются $n-1$ индексом и, по предположению, образуют счетное множество. Так как различных значений последнего индекса счетное множество, то всех элементов принадлежащих A, будет счетное множество счетных множеств, т.е. счетное множество, что требовалось доказать.

2. *Множестве $\mathbb{Q}$ всех рациональных чисел счетно.*

Рассмотрим дроби вида $\dfrac{p}{q}$, где p и q целые числа. Каждая такая дробь определяется двумя индексам, p и q, пробегающими независимо друг от друга счетное множество значений. Поэтому, согласно следствию 1, дробей вида $\dfrac{p}{q}$ будет счетное множество. Среди чисел вида $\dfrac{p}{q}$ найдутся повторяющиеся, и если одинаковые числа считать один раз, то получим все рациональные числа. Рациональных чисел бесконечно много. Следовательно, множество рациональных чисел есть бесконечное подмножество счетного множества дробей вида $\dfrac{p}{q}$, т.е., по лемме 1, — счетное множество.

§ 3. Теория вещественных чисел по Дедекинду[1]

Длину прямолинейных отрезков измеряют обычно приближенно, причем степень точности измерения зависит от того, для какой цели оно производится. Измеряя отрезок приближенно, различают приближенные значения длины этого отрезка по недостатку и по избытку. Длина известна тем точнее, чей больше имеется ее приближенных значений по недостатку и по избытку.

Если отрезок соизмерим с единицей масштаба, то в процессе его измерения получают точное значение длины отрезка, выраженной дробью $\dfrac{p}{q}$. Если отрезок несоизмерим с единицей масштаба, то, производя обычное в математике абстрагирование, находят, что длина такого отрезка есть «нечто» большее всех приближенных рациональных значений его длины по недостатку и меньшее всех приближенных рациональных значений его длины по избытку. Это «нечто» есть иррациональное число.

Теория вещественных чисел Дедекинда, излагаемая далее,представляет собой логически строгую реализацию приведенных рассуждений.

---

[1] Р. Дедекинд (1831–1916) — немецкий математик.

Напомнив некоторые свойства множества всех рациональных чисел, которые предполагаются известными читателю.

1. Множество $\mathbb{Q}$ линейно упорядочено, т.е. если r_1 и r_2 — два рациональных числа, то или $r_1 < r_2$ или $r_1 = r_2$, или $r_1 > r_2$. При этом: а) если $r_1 < r_2$ и $r_2 < r_3$, то $r_1 < r_3$; б) если $r_1 < r_2$ и r — любое, то $r_1 + r < r_2 + r$; в) если $r_1 < r_2$ и $r > 0$, то $rr_1 < rr_2$.

2. Множество $\mathbb{Q}$ архимедово, т.е. если r_1 и r_2 — два положительных рациональных числа и $r_1 < r_2$, то найдется натуральное число n, такое, что $nr_1 > r_2$.

3. Множество $\mathbb{Q}$ обладает, свойством плотности: если r_1 и r_2 — два различных рациональных числа, и, например, $r_1 < r_2$, то существует третье рациональное число r_3, такое, что $r_1 < r_3 < r_2$. В качестве числа r_3 можно взять $\dfrac{r_1 + r_2}{2}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Разобьем множество $\mathbb{Q}$ всех рациональных чисел на два непустых класса (подмножества) A и B так, что

1°) $A \cup B = \mathbb{Q}$;

2°) каждое число $a \in A$ меньше каждого числа $b \in B$.

Такое разбиение множества на два класса назовем *сечением* и обозначим через (A, B).

Множество A называется *нижним классом*, множество B — *верхним классом*. Из 2° следует, что $A \cap B = \emptyset$, ибо если $r \in A$ и $r \in B$, то $r < r$, что невозможно. Далее, если $a \in A$ и $a' < a$, то $a' \in A$, и аналогично, если $b \in B$ и $b' > b$, то $b' \in B$. Ясно, что $B = \mathbb{Q} \setminus A$ и $A = \mathbb{Q} \setminus B$.

Возможны три типа сечений в множестве $\mathbb{Q}$.

I. В нижнем классе A есть наибольшее число a_0. Легко видеть, что в этой случае в верхнем классе нет наименьшего числа. В самом деле, если бы такое число b_0 существовало, то любое рациональное число r, удовлетворяющее неравенству $a_0 < r < b_0$, например $\dfrac{a_0 + b_0}{2}$, не могло бы принадлежать ни к нижнему классу (оно больше a_0 — наибольшего числа нижнего класса), ни к верхнему классу (оно меньше b_0 — наименьшего числа нижнего класса), т.е. $r \notin A \cup B = \mathbb{Q}$, что невозможно. Пример сечения первого типа:

$$A = \{a \in \mathbb{Q} |\ a \leq 2\}, \qquad B = \{b \in \mathbb{Q} |\ b > 2\}.$$

II. В верхнем классе B есть наименьшее число b_0. Тогда в нижнем классе A нет наибольшего числа, в чем убеждаемся так же, как и выше. Пример сечения второго типа:

$$A = \{a \in \mathbb{Q} |\ a < 0\}, \qquad B = \{b \in \mathbb{Q} |\ b \geq 0\}.$$

Будем говорить, что в первом случае наибольшее число нижнего класса порождает, или производит, сечение первого типа, во втором случае наименьшее число верхнего класса порождает сечение второго типа, и обратно — сечение первого иди второго типа определяет однозначно рациональное число, являющееся соответственно наибольшим в нижнем классе или наименьшим в верхнем классе. Будем называть такое число r_0 пограничным между классами A и B.

Заметим, что одно и тоже рациональное число r_0 может породить два сечения: первого типа, если

$$A = \{a \in \mathbb{Q} |\ a \le r_0\}, \qquad B = \{b \in \mathbb{Q} |\ b > r_0\},$$

и второго типа, если

$$A = \{a \in \mathbb{Q} |\ a < r_0\}, \qquad B = \{b \in \mathbb{Q} |\ b \ge r_0\}.$$

И обратно, одно и то же рациональное число может определяться двумя сечениями указанных типов. Назовем два таких сечения *эквивалентными* и, если потребуется вместо рационального числа рассматривать определяющее его сечение, будем брать из двух эквивалентных сечений то, которое окажется для наших рассуждений более удобным.

Если рациональное число r_0 порождает сечение (A, B) или определяется этим сечением, то $r_0 \sim (A, B)$. Это означает, что r_0 и (A, B) соответствуют друг другу.

III. В нижнем классе A нет наибольшего числа, а в верхнем классе B нет наименьшего числа. Пример сечения третьего типа

$$A = \{a \in \mathbb{Q} |\ a \le 0\} \cup \{a \in \mathbb{Q} |\ a^2 < 2\}, \qquad B = \{b \in \mathbb{Q} | |b > 0,\ b^2 > 2\}.$$

Докажем, например, что в нижнем классе этого сечения нет наибольшего числа. Пусть $a \in A$. Можно считать, что $a > 0$. Положим $a' = a + \dfrac{1}{n}$. Если натуральное число n возможно выбрать так, что $\left(a + \dfrac{1}{n}\right)^2 < 2$, то требуемое будет доказано, так как $a' \in A$ и $a' > a$.

Неравенство $\left(a + \dfrac{1}{n}\right)^2 < 2$ или $a^2 + 2a\,\dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{n^2} < 2$ эквивалентно неравенству $2a\,\dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{n^2} < 2 - a^2$ (заметим, что $2 - a^2 > 0$, так как $a^2 < 2$). Но $2a\,\dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{n^2} < 2a\,\dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{n}$ и если n можно выбрать так, что $2a\,\dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{n} < 2 - a^2$, то $2a\,\dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{n^2} < 2 - a^2$. Неравенство $2a\,\dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{n} < 2 - a^2$ будет, очевидно, удовлетворяться, если $\dfrac{1}{n} < \dfrac{2 - a^2}{2a + 1}$, т.е. если $n > \dfrac{2a + 1}{2 - a^2}$.

Итак,

$$\left(n > \frac{2a + 1}{2 - a^2}\right) \Leftrightarrow \left(\frac{1}{n} < \frac{2 - a^2}{2a + 1}\right) \Leftrightarrow \left(2a\frac{1}{n} + \frac{1}{n} < 2 - a^2\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(2a\,\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} < 2 - a^2\right) \Leftrightarrow \left(\left(a + \frac{1}{n}\right)^2 < 2\right).$$

Утверждение доказано.

Аналогичным образом можно доказать, что в классе B нет наименьшего числа.

Если (A, B) есть сечение третьего типа в множестве всех рациональных чисел, то не существует рационального числа, которое порождает это сечение и будет или наибольшим числом в классе A, или наименьшим числом в классе B. В этом случае вводится единственное новое число — так называемое иррациональное, которое, по определению, больше всех рациональных чисел класса A (рациональных приближений по недостатку) и меньше всех рациональных чисел класса B (рациональных приближений по избытку). Так, сечение (A, B), где $B = \{b \in \mathbb{Q} |\ b > 0,\ b^2 > 2\}$, $A = \mathbb{Q} \setminus B$ порождает иррациональное число $\sqrt{2}$.

Итак, если (A, B) — сечение третьего типа, вводим новое число $\alpha \sim (A, B)$, причем, по определению,

1°) α — единственное,
2°) $\alpha > a$ — для любого $a \in A$,
3°) $\alpha < b$ — для любого $b \in B$.

Будем говорить также, что α порождает сечение (A, B) третьего типа в множестве $\mathbb{Q}$ и что оно является пограничным числом между числами классов A и B.

Таким образом, задать иррациональное число — это значит задать сечение третьего типа в множестве всех рациональных чисел.

Совокупность всех сечений третьего типа в множестве $\mathbb{Q}$ порождает совокупность всех иррациональных чисел. Множество всех рациональных и иррациональных чисел образует множество всех вещественных чисел, которое мы будем обозначать буквой $\mathbb{R}$.

Введем упорядочение в множестве $\mathbb{R}$ вещественных чисел, т.е. укажем, как сравнивать вещественные числа по величине. При этом не будем делать различия между рациональными и иррациональными числами, проверяя, однако, для рациональных чисел совпадение новых определений с имевшимися ранее.

Пусть $\alpha \sim (A, B)$ и $\alpha' \sim (A', B')$ — два различных вещественных числа. Это значит, что $A \neq A'$ и, следовательно, $B \neq B'$. При этом возможны два случая. Во-первых, может существовать рациональное число $a/ \in A'$, не принадлежащее классу A и потому входящее в класс B (существует рациональное приближение по недостатку числа α', являющегося в то же время рациональным приближением по избытку числа α). Положим в этом случае, по определению, что $\alpha < \alpha'$.

Нетрудно проверить, что в рассматриваемой случае $A \subset A'$, причем A есть собственное подмножество множества A'. В самом деле, так как $a' \in B$, то, согласно определению сечения, все числа a класса A меньше a'. Но тогда все числа класса A меньше и всех чисел класса B', которые больше числа $a' \in A'$. Следовательно, все числа класса A входят в класс A', и так как $A \neq A'$, то строгое включение $A \subset A'$ доказано.

Вторая возможность: каждое число $a' \in A'$ входит в класс A, т.е. $A' \subset A$. Так как $A' \neq A$, то включение строгое. Поэтому найдется число $a \in A$, которое не войдет в класс A' и, следовательно, войдет в класс B'. В этом случае в отличие от предыдущего случая числа α и α' поменялись ролями, вследствие чего по определению $\alpha' < \alpha$.

Проверим, совпадает ли данное определение неравенства вещественных чисел с определением неравенства рациональных чисел, данным ранее, если оба числа $\alpha \sim (A, B)$ и $\alpha' \sim (A', B')$ — рациональные. Пусть, например, α — наименьшее число класса B, α' — наибольшее число класса A', A — правильное подмножество множества A', т.е. $\alpha < \alpha'$ по новому определению (рассмотрение других возможных комбинаций предоставляется читателю). В классе A' найдется число a', принадлежащее классу B. Поскольку α — наименьшее число класса B, то $\alpha \leq a'$. С другой стороны, $a' \leq \alpha'$, так как α' — наибольшее число класса A'. Итак $\alpha \leq a' \leq \alpha'$, т.е. $\alpha \leq \alpha'$, и так как α и α' — различные рациональные числа, то $\alpha < \alpha'$, так что оба определения неравенства рациональных чисел совпадают.

Наконец, если α — рационально и $\alpha' \sim (A', B')$ — иррационально, то α принадлежит одному из классов — A' или B', например, $\alpha \in A'$. Пусть, далее, (A, B) — сечение первого типа, определяющее число α, т.е.

$$A = \{a \in \mathbb{Q} |\ a \leq \alpha\}, \qquad B = \{b \in \mathbb{Q} |\ b > \alpha\}.$$

Так как в классе A' нет наибольшего числа, то найдется $a_0 \in A'$ большее чем α , и, следовательно, $a_0 \in B$. Поэтому $\alpha < \alpha'$. Это совпадает со сделанным при определении иррационального числа соглашением, что оно больше всех рациональных чисел нижнего класса сечения, определяющего данное иррациональное число.

Итак, для двух любых вещественных чисел α и α' $\alpha = \alpha'$ (когда $A = A'$ и $B = B'$), или $\alpha < \alpha'$, или $\alpha > \alpha'$.

Замечание. Из определения, неравенства вещественных чисел следует, что каковы бы ни были два вещественных числа α и $\beta > \alpha$, всегда найдется рациональное число r, такое, что

$$\alpha < r < \beta.$$

В связи с этим говорят, что множестве рациональных чисел $\mathbb{Q}$ лежит всюду плотно в множестве всех вещественных чисел $\mathbb{R}$.

С помощью рассуждений, аналогичных предыдущим, без труда можно проверить, что если $\alpha < \beta$ и $\beta < \gamma$, то $\alpha < \gamma$.

Как и в случае рациональных чисел, вещественные числа, большие нуля, будем называть *положительными*, меньшие нуля — *отрицательными*.

Прежде чем переходить к определению арифметических действий над вещественными числами, установим две леммы, которые понадобятся для последующих рассуждений.

Лемма 1. *Для любого рационального числе $r_0 > 0$ и любого вещественного числа $\alpha \sim (A, B)$ найдутся два рациональных числа r' и r'', такие, что $r' < \alpha < r''$ (т.е. $r' \in A$, $r'' \in B$) и $r'' - r' < r_0$.*

Доказательство следует непосредственно из архимедовости множества рациональных чисел. В самом деле, пусть a — произвольное число класса A и b — произвольное число класса B, отличное от α, если α рационально. Разность $b - a$ есть положительное рациональнее число, и потому найдется такое натуральное число n, что $n\,\dfrac{r_0}{2} > b - a$ или $a + n\,\dfrac{r_0}{2} > b$, т.е. $a + n\,\dfrac{r_0}{2}$ окажется в классе B. Пусть

n_0 — наименьшее из таких натуральных чисел и, следовательно,

$$a + (n_0 - 1)\frac{r_0}{2} \in A, \qquad a + n_0\frac{r_0}{2} \in B.$$

Положим

$$r' = a + (n_0 - 1)\frac{r_0}{2}, \qquad r'' = a + n_0\frac{r_0}{2}.$$

Тогда $r' \in A$, $r'' \in B$, т.е. $r' < \alpha < r''$ и $r'' - r' = \dfrac{r_0}{2} < r_0$.

Лемма доказана.

Определение 2. Числа r' и r'' называются *рациональными приближениями по недостатку* и *по избытку* с точностью до r_0 вещественного числа α.

Следствие *Для любого вещественного числа $\varepsilon > 0$ и любого вещественного числа α найдутся рациональные приближения числа α по недостатку и по избытку с точностью до ε.*

В самом деле, для этого достаточно взять рациональное число r_0, такое, что $0 < r_0 < \varepsilon$, рациональные приближения числа α с точностью до r_0.

Лемма 2. *Если вещественные числа α и α' таковы, что для любого рационального числа $r_0 > 0$ найдутся рациональные числа r_1 и r_2, удовлетворяющие неравенствам*

$$r_1 \le \alpha \le r_2, \qquad r_1 \le \alpha' \le r_2, \qquad r_2 - r_1 < r_0,$$

то $\alpha = \alpha'$.

Доказательство. В самом деле, пусть, например, $\alpha < \alpha'$. Б силу того, что рациональные числа лежат всюду плотно в множестве вещественных чисел, найдутся $r' \in \mathbb{Q}$, $r'' \in \mathbb{Q}$, такие, что $\alpha < r' < r'' < \alpha'$. Положим $r'' - r' = r_0$. Тогда для любых рациональных чисел r_1 и r_2, удовлетворяющих неравенству $r_1 \le \alpha < r' < r'' < \alpha' < r_2$, будем иметь $r_2 - r_1 > r'' - r' = r_0$, что противоречит условию. Следовательно, предположение, что $\alpha \ne \alpha'$, неверно. Лемма доказана.

Определим теперь сумму вещественных чисел $\alpha \sim (A, B)$ и $\alpha' \sim (A', B')$. Построим новое сечение (A'', B''), относя к классу A'' все рациональные числа, меньшие всех чисел вида $b + b'$, $b \in B$, $b' \in B'$, и к классу B'' — все остальные числа. В частности, класс A'' содержит все числа вида $a + a'$, а класс B'' — все числа вида $b + b'$. Ясно, что $A'' \cup B'' = \mathbb{Q}$, и нетрудно проверить, что любое число класса A'' меньше любого числа классе B''. Таким образом, (A'', B'') есть действительно сечение в множестве всех рациональных чисел. Число $\alpha'' \sim (A'', B'')$ назовем *суммой* вещественных чисел α и α' и запишем его, как и в случае рациональных чисел, в виде: $\alpha'' = \alpha + \alpha'$.

В силу определения, число α'' больше всех сумм рациональных приближений по недостатку чисел α и α' и меньше всех сумм рациональных приближений по избытку этих чисел.

Снова покажем, что в случае рациональных чисел α и α' новое определение суммы совпадает с уже имеющимся. Из эквивалентных сечений, определяющих числа α и α', выберем сечения первого типа, тек что α и α' будут наибольшими числами в классах A и A' соответственно. Тогда в класс $A'' = \{r \in \mathbb{Q} |\ r < b + b'\}$ войдет число $\alpha + \alpha'$ и будет, очевидно, в этом классе наибольшим. Это означает, что сечение (A'', B'') определяет число $\alpha + \alpha'$, т.е. что $\alpha + \alpha'$ есть сумма чисел α и α', по новому определению. Лемма доказана.

Можно показать, что сложение вещественных чисел обладает всеми обычными свойствами, а именно:

1) $\alpha + \alpha' = \alpha' + \alpha$,
2) $(\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma)$,
3) $\alpha + 0 = \alpha$,
4) $\alpha \leq \alpha',\ \beta \leq \beta' \ \Rightarrow\ \alpha + \beta \leq \alpha' + \beta'$.

Определим вещественное число, противоположное данному. Пусть $\alpha \sim (A, B)$; положим $A' = \{-b |\ b \in \mathbb{Q}\}$, $B' = \{-a |\ a \in \mathbb{Q}\}$. Легко проверить, что (A', B') есть сечение в множестве ıı. Число, определяемое этим сечением, назовем числом, *противоположным* α, и обозначим $-\alpha$.

Покажем, что $\alpha + (-\alpha) = 0$. По определению суммы вещественных чисел, сумма $\alpha + (-\alpha)$ порождается сечением (A'', B''), где A'' содержит все числа вида $a - b$, а B'' содержит все числа вида $b - a$, $a \in A$, $b \in B$. Пусть r_0 — произвольное положительное рациональное число. По лемме 1, найдется число $a_0 \in A$ и число $b_0 \in B$, такие, что $b_0 - a_0 < \dfrac{r_0}{2}$, следовательно, $a_0 - b_0 > -\dfrac{r_0}{2}$. Но $b_0 - a_0 \in B''$, $a_0 - b_0 \in A''$. Поэтому

$$a_0 - b_0 < \alpha + (-\alpha) < b_0 - a_0. \tag{1}$$

С другой стороны,

$$a_0 - b_0 < 0 < b_0 - a_0. \tag{2}$$

Наконец,

$$(b_0 - a_0) - (a_0 - b_0) \leq r_0. \tag{3}$$

По лемме 2, из неравенств (1), (2) и (3) следует, что $\alpha + (-\alpha) = 0$.

Положим, по определению, что $\alpha - \beta = \alpha + (-\beta)$. Можно проверить, что обычные свойстве вычитания, такие как, например,

$$(\alpha + \beta) - \beta = \alpha, \qquad \alpha + \beta - (\gamma + \delta) = (\alpha - \gamma) + (\beta - \delta)$$

и т.п., остаются верными для любых вещественных чисел.

Если $\alpha = 0$, то $-\alpha = 0$; если $\alpha > 0$, то $-\alpha < 0$; если $\alpha < 0$, то $-\alpha > 0$, что легко проверить. То из двух чисел α и $-\alpha$, которое является положительным, обозначается $|\alpha|$ и называется *абсолютной величиной* или *модулем* вещественного числа α. Очевидно, что $|\alpha| = | - \alpha|$. Без труда можно доказать, что

$$|\alpha + \beta| \leq |\alpha| + |\beta|. \tag{4}$$

Из выражения (4) следует неравенство

$$||\alpha| - |\beta|| \leq |\alpha - \beta|. \tag{5}$$

В самом деле, положим $\alpha - \beta = \gamma$ и, следовательно, $\alpha = \beta + \gamma$. По доказанному,

$$|\alpha| = |\beta + \gamma| \leq |\beta| + |\gamma| = |\beta| + |\alpha - \beta|$$

или

$$|\alpha| - |\beta| \leq |\alpha - \beta|. \tag{6}$$

Поменяв местами α и β, получим: $|\beta| - |\alpha| \leq |\alpha - \beta|$, или, что все равно,

$$-(|\alpha| - |\beta|) \leq |\alpha - \beta|. \tag{7}$$

Одно ив чисел $(|\alpha| - |\beta|)$ и $-(|\alpha| - |\beta|)$ неотрицательно и, следовательно, есть $||\alpha| - |\beta||$. Но тогда соответствующее из неравенств (6) и (7) означает, что

$$||\alpha| - |\beta|| \leq |\alpha - \beta|,$$

что требовалось доказать.

Отметим, наконец, что если $|\alpha| \leq \beta$, то это означает, что и $\alpha \leq \beta$ и $-\alpha \leq \beta$, т.е. $-\beta \leq \alpha \leq \beta$, и обратно, последняя система неравенств означает, что $|\alpha| \leq \beta$.

Перейдем к определению произведений двух вещественных чисел. Предположим сначала, что $\alpha > 0$, $\alpha' > 0$, $\alpha \sim (A, B)$, $\alpha' \sim (A', B')$. Построим новое сечение (A'', B''), включив в класс A'' все отрицательные рациональные числа, число нуль и все положительные рациональные числа, меньшие всех произведений вида bb', $b \in B$, $b' \in B'$, а класс B'' — все остальные рациональные числа. В частности, к классу A'' отнесем все произведения aa', $a \in A$, $a' \in A'$, $a > 0$, $a' > 0$; к классу B'' — все произведения bb', $b \in B$, $b' \in B'$. Легко проверить, что (A'', B'') действительно является сечением в множестве $\mathbb{Q}$. Число $\alpha'' \sim (A'', B'')$ назовем *произведением* чисел α и α' и запишем в следующем виде: $\alpha'' = \alpha\alpha'$.

Далее, положим, по определению, что для любого вещественного числа α, $\alpha \cdot 0 = 0 \cdot \alpha = 0$. Наконец, если α и α' — вещественные числа произвольных знаков, то, по определению, $\alpha\alpha' = \pm|\alpha|\,|\alpha'|$, где берется знак плюс, если оба перемножаемые числа одного знака, и знак минус — в противоположном случае.

Легко доказать, что если α и α' — положительные рациональные числа, т.е. $\alpha \sim (A, B)$, $A = \{r \in \mathbb{Q} || r \leq \alpha\}$, $B = \mathbb{Q} \setminus A$, $\alpha' \sim (A', B')$, $A' = \{r \in \mathbb{Q}|\ r \leq \alpha'\}$, $B = \mathbb{Q} \setminus A'$, то

$$A'' = \{r \in \mathbb{Q}|\ r \leq 0\} \cup \{r \in v|\ r > 0, r \leq \alpha\alpha'\},$$

$$B'' = \{r \in \mathbb{Q}|\ r > 0, r > \alpha\alpha'\},$$

так что новое определение произведения положительных рациональных чисел совпадает с уже имевшимся в множестве $\mathbb{Q}$.

Можно показать, что:
1) $\alpha\beta = \beta\alpha$,
2) $\alpha \cdot 1 = 1 \cdot \alpha = \alpha$,
3) $(\alpha\beta)\gamma = \alpha(\beta\gamma)$,
4) $\alpha(\beta + \gamma) = \alpha\beta + \alpha\gamma$,
5) если $\alpha > \beta$, $\gamma > 0$, то $\alpha\gamma > \beta\gamma$.

Доказательства этих утверждений несложны, но достаточно длинны. Их можно найти в более полных курсах математического анализа (см., например, **Г.М. Фихтенгольц.** *Курс дифференциального и интегрального исчисления*, М., 1970., т. 1).

Определим для вещественного числа $\alpha \neq 0$ обратное число α', такое, что $\alpha\alpha' = 1$. Достаточно рассмотреть случай, когда $\alpha > 0$. Пусть $\alpha \sim (A, B)$. Построим сечение (A', B'), относя к классу A все отрицательные рациональные числа, число нуль и все положительные рациональные числа вида $\dfrac{1}{b}$, где $b \in B$. К классу B' отнесем все положительные рациональные числа вида $\dfrac{1}{a}$, $a \in A$, $a > 0$. Легко проверить, что каждое число класса A' меньше каждого числа класса B'. Покажем, что $A' \cup B' = \mathbb{Q}$. Если $r \in \mathbb{Q}$ и $r \leq 0$, то $r \in A'$. Пусть $r > 0$. Тогда $\dfrac{1}{r} > 0$ и рационально, следовательно, попадает в класс A или класс B, например, $\dfrac{1}{r} = a \in A$. Тогда $r = \dfrac{1}{a}$, $a \in A$, $a > 0$, т.е. $r \in B'$, и равенство $A' \cup B' = \mathbb{Q}$ доказано.

Покажем, опираясь на леммы 1 и 2, что $\alpha\alpha' = 1$. Так как $\alpha > 0$, то в классе A имеются положительные рациональные числа. Пусть s — одно из них. Выберем также некоторое число t в классе B. Фиксируем эти числа. В силу леммы 1, для заданного рационального числа r_0 найдутся такие числа $a_1 \in A$ и $b_1 \in B$, что $b_1 - a_1 < \dfrac{1}{2} r_0 s$. Точно так же найдутся два числа — $a_2 \in A$ и $b_2 \in B$, такие, что $\dfrac{1}{a_2} - \dfrac{1}{b_2} < \dfrac{r_0}{2t}$. При этом можно считать, что $a_2 \geq s$, так как в противном случае надо было бы взять в качестве a_2 или s, или рациональное число, большее s, отчего разность $\dfrac{1}{a_2} - \dfrac{1}{b_2}$ только уменьшилась бы. Число $\dfrac{1}{b_2}$ принадлежит классу A', число $\dfrac{1}{a_2}$ — классу B'. Поэтому $a_1 \dfrac{1}{b_2} < \alpha\alpha' < b_1 \dfrac{1}{a_2}$. С другой стороны,

$$b_1 \frac{1}{a_2} - a_1 \frac{1}{b_2} = \frac{b_1}{a_2} - \frac{a_1}{a_2} + \frac{a_1}{a_2} - \frac{a_1}{b_2} =$$

$$= \frac{1}{a_2}(b_1 - a_1) + a_2 \left(\frac{1}{a_2} - \frac{1}{b_2} \right) < \frac{1}{s} \frac{1}{2} r_0 s + t \frac{r_0}{2t} = r_0.$$

Так как $\dfrac{a_1}{b_2} < 1$ и $\dfrac{b_1}{a_2} > 1$, то $\dfrac{a_1}{b_2} < 1 < \dfrac{b_1}{a_2}$. Таким образом, оба числа $\alpha\alpha'$ и 1 заключены между рациональными числами, разность которых меньше r_0, и поскольку r_0 выбран произвольно, то, по лемме 2, $\alpha\alpha' = 1$.

Теперь частное вещественных чисел α и β определяем как произведение α и $\dfrac{1}{\beta}$:

$$\frac{\alpha}{\beta} = \alpha \cdot \frac{1}{\beta}.$$

Снова можно доказать, что все свойства операции деления рациональных чисел сохраняются и при делении вещественных чисел.

Итак, множество рациональных чисел можно расширить до множества вещественных чисел без потери существенных свойств множества рациональных чисел.

Следующая теорема особенно важная. Она показывает, что множество вещественных чисел невозможно пополнить новыми числами так, как это было сделано с множеством рациональных чисел.

Теорема Дедекинда (о полноте множества вещественных чисел). *Пусть множестве $\mathbb{R}$ всех вещественных чисел разбито на два класса A и B так, что:*

1) $A \neq \emptyset$, $B \neq \emptyset$, $A \cup B = \mathbb{R}$,

2) *каждое число α класса A меньше каждого числа β класса B.*

Тогда или в классе A есть наибольшее число, или в классе B есть наименьшее число.

Доказательство. Пусть A_0 — множество рациональных чисел класса A, B_0 — множество рациональных чисел класса B. Легко видеть, что:

1) $A_0 \neq \emptyset$, $B_0 \neq \emptyset$, $A_0 \cup B_0 = \mathbb{Q}$,

2) для любых $a \in A_0$ и $b \in B_0$, $a < b$.

Следовательно, (A_0, B_0) есть сечение в множестве $\mathbb{Q}$ всех рациональных чисел, которое определяет некоторое вещественное число ξ. Это число принадлежит одному из классов A или B, например $\xi \in A$. Покажем, что ξ — наибольшее число в классе A. Если это неверно, то существует вещественное число $\eta \in A$, такое, что $\eta > \xi$. Возьмем любое рациональное число r, лежащее между ξ и η, $\xi < r < \eta$. Тогда, с одной стороны, $r \in A$, так как $r < \eta \in A$, и потому $r \in A_0$. С другой стороны, $r > \xi$, откуда следует, что $r \in B_0$. Но это невозможно, так как $A_0 \cap B_0 = \emptyset$. Следовательно, ξ — наибольшее число класса A. Теорема доказана.

В качестве примера использование метода введения вещественных чисел с помощью сечений докажем существование арифметического корня любой степени из положительного вещественного числа.

Пусть задано $\alpha > 0$. Требуется построить число $\beta > 0$ такое, чтобы $\beta^n = \beta\beta\cdots\beta = \alpha$. Отнесем к классу A все отрицательные рациональные числа, нуль и положительные рациональные числа a, такие, что $a^n < \alpha$, к классу B все остальные рациональные числа. Очевидно, (A, B) есть сечение в множестве $\mathbb{Q}$, которое определяет вещественное число β. Надо доказать, что $\beta^n = \alpha$. Возьмем произвольное рациональное число $r_0 > 0$ и какое-нибудь число $b_0 \in B$, большее 1. Выберем затем положительные числа $r' \in A$ и $r'' \in B$ так, чтобы

$$r'' - r' < \frac{r_0}{nb_0^{n-1}}, \qquad r'' < b_0.$$

Тогда $r' < \beta < r''$ и, следовательно, $(r')^n < \beta^n < (r'')^n$. Кроме того, $r' \in A$ и $r'' \in B$, то $(r')^n < \alpha < (r'')^n$. Наконец,

$$(r'')^n - (r')^n = (r'' - r')[(r'')^{n-1} + (r'')^{n-2}r' + \ldots + (r')^{n-1}] <$$

$$< (r'' - r')nb_0^{n-1} < \frac{r_0}{nb_0^{n-1}}nb_0^{n-1} = r_0.$$

Из всего этого, в силу леммы 2, следует, что $\beta^n = \alpha$.

Покажем теперь, что любой отрезок можно измерить с помощью любой единицы масштаба, поставив в соответствие отрезку вещественное число — длину этого отрезка. Покажем также, что существует отрезок, имеющий своей длиной любое, наперед заданное вещественное число. Собственно говоря, здесь будет строго обоснован метод координат на прямой линии, состоящий в установлении взаимно однозначного соответствия между точками прямой и вещественными числами.

При этом нам придется опереться на аксиому непрерывности прямой, которая в школьных учебниках явно не формулируется, но используется во многих рассуждениях и доказательствах.

Возьмем прямую, выберем на ней начало отсчета — нулевую точку (рис. 3), направление и единицу масштаба. Построим на прямой точки с абсциссами $\pm\frac{p}{q}$ (где p и q — натуральные числа), откладывая от точки 0 вправо, соответственно влево, p раз $\frac{1}{q}$-ю часть единицы масштаба:

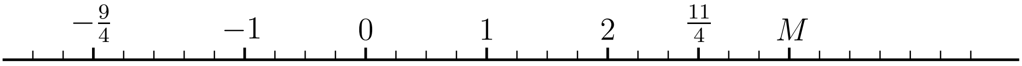

Рис. 3

Полученные точки назовем рациональными точками прямой. Пусть на прямой задав отрезок OM. Если этот отрезок соизмерим с единицей масштаба, то точка M совпадает с некоторой рациональной точкой, абсолютная величина абсциссы $\pm\frac{p}{q}$ которой будет длиной отрезка OM. Если отрезок OM несоизмерим с единицей масштаба, то все рациональные точки можно будет разделить на два класса; класс $\widetilde{A}$ точек, лежащих левее M, и класс $\widetilde{B}$ точек, лежащих правее M. Пусть A — множество абсцисс точек класса $\widetilde{A}$ и B — множество абсцисс точек класса $\widetilde{B}$. Легко проверить, что (A, B) есть сечение третьего типа в множестве $\mathbb{Q}$ всех рациональных чисел. Модуль числа α, определяемого сечением (A, B), назовем *длиной* отрезка OM.

Для установления обратного соответствия нам понадобиться *аксиома непрерывности прямой линии.*

Пусть множество всех точек прямой разбито на два класса — $\widetilde{A}$ и $\widetilde{B}$, так что каждая точка класса $\widetilde{A}$ лежит левее каждой точки класса $\widetilde{B}$. Тогда на прямой существует единственная точка M, пограничная между этими классами и являющаяся или самой правой точкой класса $\widetilde{A}$, или самой левой точкой класса $\widetilde{B}$.

Если r — рациональное число, то, как мы видели, отрезок длины $|r|$ существует. Если α — иррациональное число, определяемое сечением (A, B). Разобьем множество L точек прямой на два класса $\widetilde{A}$ и $\widetilde{B}$. К классу $\widetilde{A}$ отнесем все рациональные точки с абсциссами, принадлежащими классу A, а все точки, не являющиеся рациональными, но лежащими левее хотя бы одной рациональной точки, отнесенной к классу $\widetilde{A}$. К классу $\widetilde{B}$ отнесем все остальные точки. Легко проверить, что разбиение L на $\widetilde{A}$ и $\widetilde{B}$ удовлетворяет условиям аксиомы непрерывности прямой, а потому существует единственная точка M, пограничная между классами $\widetilde{A}$ и $\widetilde{B}$. Эту точку M поставим в соответствие числу α, считая $|\alpha|$ длиной отрезка OM.

Если теперь измерить длину построенного отрезка OM, то, очевидно, получим число $|\alpha|$. Отсюда следует, что закон, по которому точкам прямой ставятся в соответствие вещественные числа, тот же, что и закон, по которому вещественным числам ставится в соответствие точки прямой. А это означает, что между вещественными числами и точками прямой имеется взаимно однозначное соответствие, т.е. $L \sim \mathbb{R}$.

Важно отметить, что соответствие $M \leftrightarrow \alpha$ сохраняет порядок, т.е. если M' лежит левее M, то $\alpha' < \alpha$, и наоборот. Наконец, если длина отрезка OM равна $|\alpha|$, а длина отрезка MM' есть $|\beta|$, то длина отрезка OM' равна $|\alpha \pm \beta|$. Однако строгие доказательства этих утверждений требует введения новых геометрических аксиом, и потому опущены.

В дальнейшем широко используется понятие взаимно однозначного соответствия между множеством всех вещественных чисел и множеством всех точек прямой, часто без различия между вещественным числом и изображающей его точкой на прямой, которая называется также числовой осью или числовой прямой. При этом на точки числовой прямой переносится терминология и обозначения, принятые для вещественных чисел. Например, говоря, что точка x лежит левее точки y, записываем: $x < y$, отождествляя точку с ее абсциссой на оси.

Наконец, отметим, что всюду в дальнейшем под словом число понимается вещественное число.

§ 4. Линейные точечные множества

Рассмотрим множества вещественных чисел, или, что все равно, множества точек прямой линии. Такие множества называют также *линейными точечными множествами.* Наиболее часто из этих множеств встречаются следующие.

1. *Отрезок* или *замкнутый интервал* $[a, b]$ — множество вещественных чисел x, удовлетворяющих неравенству $a \le x \le b$.

2. *Открытый интервал*, чаще называемый просто *интервалом* — множество точек x прямой, лежащих строго между a и b, т. е. таких, что $a < x < b$. Интервал обозначается (a, b) или $]a, b[$.

3. Полуоткрытые интервалы или, короче полуинтервалы $[a, b)$ и $(a, b]$ (или $[a, b[$ и $]a, b]$), состоящие из точек x, удовлетворяющих соответственно неравенствам $a \le x < b$ и $a < x \le b$.

Открытые, замкнутые и полуоткрытые интервалы называются *промежутками.* Число a является *левым концом* промежутка, число b — *правым концом.* Вещественное число $l = b - a$ есть *длина* промежутка $[a, b]$. В число промежутков включаются также *бесконечные* и *полубесконечные* промежутки:

$$(a, \infty) = \{x \in \mathbb{R} |\ x > a\},$$

$$[a, \infty) = \{x \in \mathbb{R} |\ x \ge a\},$$

$$(-\infty, \infty) = \mathbb{R}.$$

Читатель сам легко даст определение полубесконечных промежутков $(-\infty, b]$ и $(-\infty, b)$.

Большинство множеств вещественных чисел, рассматриваемых далее, представляют собой объединение конечного или счетного множества промежутков и отдельных точек (отдельную точку иногда удобно рассматривать как замкнутый промежуток нулевой длины).

Множество M называется *ограниченным сверху*, если существует число b, такое, что $x \leq b$ для любого $x \in M$ или, что все равно, $M \subset (-\infty, b]$. Число b есть *верхняя граница* множества M. Ясно, что у ограниченного сверху множества M существует бесконечно много верхних границ, так как если b — верхняя граница множества M, то любое число $b' > b$ является верхней границей этого множества.

Наименьшая среди верхних границ ограниченного сверху множества называется *точной верхней границей* или *верхней гранью* множества M и обозначается $\sup M$ или $\sup\limits_{x \in M} x$ (sup — первые буквы латинского слова supremum — верхний). Итак, если $\beta = \sup M$, то:

1) $x \leq \beta$ для любого $x \in M$ (так как β — верхняя граница множества M);

2) для любого $\varepsilon > 0$ найдется $x' \in M$, такое, что $x' > \beta - \varepsilon$ (ибо $\beta - \varepsilon$ уже не будет верхней границей множества M).

Ясно, что если b — какая—либо верхняя граница множества M, то $\beta = \sup M \leq b$, откуда следует, что $\sup M$ определяется однозначно.

Примеры.

1. Любое конечное множество $M = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ ограничено сверху любым числом, большим всех чисел $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Точная верхняя граница этого множества есть наибольшее из чисел $x_1, x_2, \ldots, x_n$: $\max\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$.

2. Множество

$$M = \{1, 3, 5, \ldots, 2n+1, \ldots\}$$

не ограничено сверху.

3. Множество $M = [-1, 1]$ ограничено сверху и $\sup M = 1$.

4. Множестве $(-\infty, 0)$ ограничено сверху и $\sup M = 0$.

В примерах 1 и 3 $\sup M \in M$, в примере 4 $\sup M \notin M$.

Множество M называется *ограниченным снизу*, если существует такое число a, что $x \geq a$ для любого $x \in M$, иными словами, если $M \subset [a, \infty)$. У ограниченного снизу мужества M бесконечно много нижних границ. Наименьшая граница называется *точной нижней границей* или *нижней гранью* и обозначается $\inf M$ (от латинского слова infimum — нижний).

Если $\alpha = \inf M$, то:

1) $x \geq \alpha$ для $x \in M$,

2) для любого $\varepsilon > 0$ существует $x' \in M$, такое, что $x' < \alpha + \varepsilon$.

Если множество M ограничено и сверху и снизу, то оно называется *ограниченным.* В этом случае существует отрезок $[a, b]$, такой, что $M \subset [a, b]$.

Возникает вопрос: всякое ли ограниченное сверху множество чисел имеет точную верхние границу? Если оставаться в области рациональных чисел, то не всякое. Например, множество положительных рациональных чисел, квадрат которых меньше 2, ограничено сверху, но не имеет в $\mathbb{Q}$ точной верхней границы, так как в сечении $(A, B) \sim \sqrt{2}$ ни в классе A нет наибольшего числа, ни в классе B нет наименьшего числа. В множестве $\mathbb{R}$ всех вещественных чисел всякое ограниченное сверху множество имеет точную верхнюю границу, что устанавливается следующей теоремой.

Теорема 1. *Всякое непустое ограниченное сверху (снизу) множество вещественных чисел имеет точную верхнюю (нижнюю) границу.*

Доказательство. Пусть $M \subset \mathbb{R}$ ограничено сверху. Если в множестве M есть наибольшее число, то оно, очевидно, и будет точной верхней границей. Предположим, что наибольшего числа в множестве M нет. Построим сечение (A, B) в множестве $\mathbb{R}$ относя к классу B все верхние границы множества M, к классу A — все остальные числа. В частности, к классу A отнесем все числа множества M.

Ясно, что $A \cup B = \mathbb{R}$. Проверим, что любое число класса A меньше любого числа класса B.

Пусть $a \in A$ и $b \in B$ — любые. Так как a не является верхней границей множества M, то найдется $x' \in M$, такое, что $x' > a$. В то же время b — верхняя граница множества M, поэтому $x' \leq b$ и, следовательно, $a < b$. Итак, действительно, (A, B) сечение в множестве всех вещественных чисел, и, согласно теореме Дедекинда, или в классе A есть наибольшее число α, или в классе B есть наименьшее число β. Покажем, что первая возможность исключается. В самом деле, если α — наибольшее число нижнего класса A, то для любого $x \in M$ имеем $x \leq \alpha$. Но это означает, что α — верхняя граница множества M, которая должна принадлежать классу B, что невозможно. Итак, в классе B есть наименьшее число β, т.е. существует наименьшая из верхних границ. Теорема доказана.

Если множество M не ограничено сверху, то, по определению, полагаем, что $\sup\, M = +\infty$, если множество M не ограничено снизу, то $\inf\, M = -\infty$.

Укажем некоторые почти очевидные свойства точных верхних и нижних границ.

1°. Если M и N — два множества вещественных чисел, такие, что для любых $x \in M$ и $y \in N$ выполняется неравенство $x \leq y$, то $\sup\, M \leq \inf\, N$. В самом деле, множеств M ограничено сверху любым числом $y \in N$. Поэтому $\beta = \sup\, M$ существует, и $\beta \leq y$. Это неравенство, в свою очередь, означает, что β есть нижняя граница множества N, к поэтому $\alpha = \inf\, N \geq \beta$, что и требовалось доказать.

2°. Если множество $M = \{x\}$ ограничено снизу, то множество $M_1 = \{-x | \, x \in M\}$ ограничено сверху и $\inf\, M = -\sup\, M_1$, т.е. $\inf\limits_{x \in M} x = -\sup\limits_{x \in M} (-x)$.

Ограниченность сверху множества M_1 очевидна. Пусть $\beta = \sup\, M_1$. Тогда $-x \leq \beta$ и, следовательно, $x \geq -\beta$ для любого $x \in M$, т.е. $-\beta$ есть нижняя граница множества M. Если γ другая нижняя граница множества M, то $-\gamma$ есть верхняя граница множества M_1, и потому $-\gamma \geq \beta$ или $\gamma \leq -\beta$. Таким образом, $(-\beta)$ — точная нижняя граница множества M, что требовалось доказать.

3°. $\sup\limits_{x \in M} (x + a) = \sup\limits_{x \in M} x + a$, $a \in \mathbb{R}$.

4°. Если $a > 0$, то $\sup\limits_{x \in M} (ax) = a \sup\limits_{x \in M} x$.

5°. Если $M = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} M_n$ и $a_n = \sup M_n$, то $\sup M = \sup\limits_n a_n$.

Эти утверждения предлагаем доказать читателю.

Следующее утверждение весьма часто используется в различных построениях математического анализа.

Теорема 2 (лемма Кантора о стягивающейся системе отрезков). *Пусть $\{[a_n, b_n]\}$ — система отрезков, каждый из которых содержится внутри предыдущего, т. е. $[a_{n+1}, b_{n+1}] \subset [a_n, b_n]$, и длина которых с увеличением номера делается меньше любого наперед заданного положительного числа. Тогда существует единственная точка, принадлежащая всем этим отрезкам.*

Доказательство. Рассмотрим множество $\{a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots\}$ левых концов отрезков $[a_n, b_n]$. Это множество ограничено сверху, например числом b_1. Положим $\alpha = \sup\limits_n a_n$. Аналогично $\beta = \inf\limits_n b_n$, причем, согласно свойству 1° точных границ, $\alpha \leq \beta$. Покажем, что $\alpha = \beta$. Если $\alpha < \beta$, то любого n имеем: $a_n \leq \alpha < \beta \leq b_n$, т.е.

$$b_n - a_n \geq \beta - \alpha > 0. \tag{1}$$

С другой стороны, по условию, длина отрезков становится сколь угодно малой для достаточно больших n и потому найдется номер n_0, такой, что

$$b_{n_0} - a_{n_0} < \beta - \alpha. \tag{2}$$

Неравенства (1) и (2) противоречат друг другу, следовательно, предположение, что $\alpha < \beta$, неверно, и $\alpha = \beta$. Допустим, что существует точка γ, отличная от α, такая, что $a_n \leq \gamma \leq b_n$ для всех n, например, $\gamma < \alpha$. Как и выше, убеждаемся, что, с одной стороны, $b_n - a_n > \alpha - \gamma$ для всех n, с другой — найдется n_0, для которого $b_{n_0} - a_{n_0} < \alpha - \gamma$. Снова приходим к противоречию, следовательно, $\gamma = \alpha$. Теорема доказана.

Заметим, что две только что доказанные теоремы и теорема Дедекинда эквивалентны в ток смысле, что, считая одну из них доказанной, можно вывести из нее две остальные. (Рекомендуем читателю в качестве упражнения проделать это.) Поэтому часто говорят, что каждая из трех упомянутых теорем выражает свойство полноты множества вещественных чисел. Более того, процесс пополнения множества рациональных чисел вещественными числами можно осуществлять с помощью понятий любой из этих трех теорем.

Рассмотри всевозможные множества рациональных чисел, ограниченные сверху тоже рациональным числом. У некоторых из этих множеств существует рациональная точная верхняя граница. У других — нет. Во втором случае мы вводим единственное новое число, иррациональное, которое, по определению, больше всех чисел данного множества и меньше всех рациональных верхних границ этого множества. Совокупность всех рациональных и всех таким образом веденных иррациональных чисел составляет совокупность всех вещественных чисел. Эту совокупность упорядочиваем, определяем арифметические действия над ее числами, доказываем, что множество рациональных чисел плотно в множестве вещественных чисел. Затем необходимо показать, что в построенной таким образом совокупности всех вещественных чисел всякое ограниченное сверху множество вещественных чисел имеет точную верхнюю границу. С помощью этого утверждения доказываем теорему Дедекинда.

Рассмотрим стягивающиеся системы отрезков с рациональными концами. Очевидно, что не всегда существует рациональное число, принадлежащее всем отрезкам (двух таких чисел существовать не может). Если такого числа нет, вводим единственное новое число, иррациональное, которое, по определению, принадлежит всем отрезкам. Совокупность всех рациональных и всех введенных таким образом иррациональных чисел образует совокупность чисел. Упорядочиваем эту совокупность, определяем арифметические операции, а затем доказываем, что для множества всех вещественных чисел верна лемма Кантора. В гл. II мы еще вернемся к этому вопросу.

Докажем еще одну теорему.

Теорема 3 (теорема Кантора о несчетности континуума). *Множество точек отрезка* $[0,1]$ *несчетно.*

Доказательство. Предположим противное, т.е. что множество точек отрезка $[0,1]$ счетно. Тогда все точки этого отрезка можно занумеровать:

$$[0,1]=\{x_1,x_2,\ldots,x_n,\ldots\}.$$

Возьмем какой-либо отрезок $[a_,b_1]$, включенный в $[0,1]$, длины менее $\dfrac{1}{2}$ и не содержащий точки x_1. Такой отрезок, очевидно, существует. Фиксируем отрезок $[a_1,b_1]$ и выберем на нем отрезок $[a_2,b_2]$ длины менее $\dfrac{1}{2^2}$ и не содержащий точки x_2. Такой отрезок, также существует, фиксируем его, выбираем на нем отрезок $[a_3,b_3]$ длины меньшей $\dfrac{1}{2^3}$ не содержащей точки x_3 и т.д. Получим совокупность отрезков $\{[a_n,b_n]\}$, каждый из которых вложен в предыдущий и длина которых с увеличением номера становится меньше любого, наперед заданного положительного числа. По лемме Кантора, существует точка x_0, принадлежащая всем отрезкам $[a_n,b_n]$. С одной стороны, точка $x_0\in[0,1]$, так как все отрезки $[a_n,b_n]$ включены в $[0,1]$. С другой стороны, $x_0\neq x_n$ для любого n, так как $x_0\in[a_n,b_n]$, а $x_n\notin[a_n,b_n]$, откуда следует, что $x_0\notin\{x_1,x_2,\ldots,x_n,\ldots\}=[0,1]$. Мы пришли к противоречию, следовательно, все точки отрезка $[0,1]$ нельзя занумеровать. Теорема доказана.

Определение. Множество, эквивалентное множеству точек отрезка $[0,1]$, называется *множеством мощности континуума* (латинское слово continuum означает «непрерывный»).

Так как с помощью формул

$$y=a+(b-a)x,\qquad y=\frac{y-a}{b-a}$$

устанавливается взаимно однозначное соответствие между отрезками $[0,1]$ и $[a,b]$, то любой отрезок $[a,b]$ имеет мощность континуума. Интервал (a,b) путем добавления к нему двух точек a и b превращаем в отрезок $[a,b]$. Так как добавление двух точек не меняет мощности бесконечного множества, то всякий интервал имеет мощность континуума. Наконец, с помощью формул $y = \operatorname{tg} x$ и $x = \operatorname{arctg} y$ получаем взаимно однозначное соответствие между интервалом $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ и всей числовой прямой $(-\infty, \infty)$, откуда следует, что мощность множества всех вещественных чисел есть континуум.

§ 5. Отображения, функции

При изучении физических явлений, технических процессов сначала устанавливаются закономерности качественного характера, а затем количественные соотношения между величинами, характеризующими явление. Например, при изучении свойств газа сначала устанавливают, что газ при нагревании расширяется, а потом выясняют, насколько возрастает давление газа в замкнутом объеме, если его температура увеличивается на t градусов. Установление связей между переменными величинами, нахождение функциональных зависимостей и их исследование является одной из важнейших задач математики.

В процессе исторического развития понятие функции подвергалось изменению и расширению. В XVII в., в период возникновения математического анализа, в работах Р. Декарта и П. Ферма, И. Ньютона и Г. Лейбница понятие функции носило в основном геометрический характер и функциональная зависимость означала связь между изменяющимися отрезками. В XVIII в., например, в работах Л. Эйлера, под функцией понималась в основном аналитическая формула, связывающая две или более величины, принимающие численное значение. В сочинениях Н.И. Лобачевского и Л. Дирихле (XIX в.) функция определялась как связь между численнозначными переменными величинами, независимо от характера задания этой связи. И, наконец, в XX в. математики стали рассматривать функцию не только числовых, но и более сложных аргументов.

Пусть даны два множества X и Y элементов какой-либо природы.

Определение. *Отображением* f множества X в множество Y или *функцией* f, определенной на X со значениями, содержащимися в множестве Y, называется правило или закон, по которому каждому элементу x из X ставится в соответствие один или много элементов y из Y. Если каждому элементу $x \in X$ ставится в соответствие лишь один элемент $y \in Y$, то отображение (функция) называется *однозначным* (*однозначной*).

В дальнейшем будем рассматривать почти исключительно однозначные функции.

Множество X называется *областью задания*, или *областью определения*, или *областью существования* отображения, множество Y — *областью значений* отображения.

Если X — область определения функции f, а Y — область ее значений, то пишут

$$f:\ X \to Y \quad \text{или} \quad X \xrightarrow{f} Y.$$

Используется также обозначения

$$x \mapsto f(x), \quad \text{или} \quad x \overset{f}{\mapsto} y, \quad \text{или} \quad y = f(x).$$

если $y \in Y$ есть тот элемент, который в силу правила f ставится в соответствие элементу $x \in X$.

Закон соответствия между x и y, определяющий функцию f, может быть задай математической формулой, словесной формулировкой, геометрически или еще каким-либо способом.

ПРИМЕРЫ.

1. Пусть $X = [0, 1]$, $Y = (-\infty, \infty)$ и $f(x) = x + \sqrt{1 - x^2}$. Здесь функция задана с помощью математической формулы.

2. Пусть X — множество всех вещественных чисел, $Y = [0, 1]$ и отображение $f: X \to Y$ задается так:

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \text{ рационально,} \\ 0, & \text{если } x \text{ иррационально.} \end{cases}$$

Это так называемая *функция Дирихле*. Отображение этого примера задано с помощью словесного правила.

3. $X = [0, 2\pi]$, $Y = [-1, 1]$ и $f(x)$ — длина отрезка AB со знаком плюс, если отрезок лежит над осью Ox, и со знаком минус, если он лежит под этой осью, т.е. $f(x) = \sin x$. Это пример геометрического задания функции показан на рис. 4.

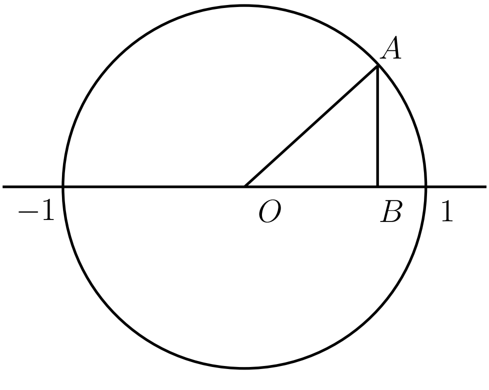

Рис. 4

4. Имеется таблица, например, десятичных логарифмов, в которой указан ряд значений x и соответствующие им значения y, а также дано правило, позволяющее вычислить значения y для некоторых значения x, не входящих в таблицу. Это табличное задание функции. Область определения так заданной функции — все те значения x, для которых с помощью таблицы могут быть вычислены $f(x)$.

5. Пусть X — множество всевозможных треугольников на плоскости. Если каждому треугольнику $x \in X$ поставить в соответствие число y, выражающее площадь этого треугольника, в некоторой единице масштаба, получим функцию $y = f(x)$, определенную на X со значениями в $Y = \mathbb{R}$.

6. Обозначим через $E(x)$ целую часть неотрицательного числа x, так что, например, $E(2,2) = 2$, $E(0) = 0$. $E(x)$ будет функцией, определенной на $[0, \infty)$ со значениями в множестве $\mathbb{N}$ натуральных чисел. Таким образом, здесь $X = [0, \infty)$, $Y = \ltimes$.

Пусть $f: X \to Y$. Элемент $y = f(x) \in Y$ называется *образом* элемента x или *значением* отображения f на элементе x, а элемент x — *аргументом* или *независимой переменной*. Если A — подмножество области определения X функции f, то множество $\{y = f(x) |\ x \in A\}$, состоящее из всех значений $f(x)$, когда x пробегает множество A, называется *образом* множества A и обозначается $f(A)$. Если $f(X) = Y$, то говорят, что f отображает X *на* Y или что отображение $f: X \to Y$ *сюръективно*. В этом случае каждый элемент $y \in Y$ представляет собой образ, по крайней мере, одного элемента $x \in X$. Отображение $f: X \to Y$ называется *инъективным*, если разные элементы $x_1, x_2 \in X$ имеют различные образы $f(x_1)$ и $f(x_2)$, т.е. если из $x_1 \neq x_2$ следует $f(x_1) \neq f(x_2)$. В этом случае f отображает X на $f(X)$ взаимно однозначно. Отображение $f: X \to Y$, которое является одновременно и сюръективным и инъективным, называется *биективным*. Ясно, что в этом случае $X \sim Y$.

Примеры.

7. Отображение $x \to E(x)$ полуоси $[0, \infty)$ на множество $\mathbb{N}$ натуральных чисел сюръективно, но не инъективно, так как при различных значениях аргумента значения отображения могут совпадать. Например, $E(2,7) = E(2,5)$.

8. Отображение $y = \dfrac{x}{x+1}$ множества неотрицательных вещественных чисел в себя инъективно, но не сюръективно, так как $0 \leq y < 1$ для любых $x \geq 0$.

9. Отображение $y = 2x + 3$ числовой оси $(-\infty, \infty)$ на себя инъективно, так как при $x_1 \neq x_2$, очевидно, $y_1 = 2x_1 + 3 \neq 2x_1 + 3 = y_2$ и для любого $y_0 \in (-\infty, \infty)$ существует $x_0 \in (-\infty, \infty)$, такое, что $2x_0 + 3$.

Пусть $f: X \to Y$ и $y \in Y$. Элемент $x \in X$, такой, что $f(x) = y$, называется *прообразом* элемента y, а совокупность всех прообразов элемента y называется *полным прообразом* этого элемента и обозначается $f^{-1}(y)$. Не исключено, что $f^{-1}(y) = \emptyset$ для некоторых $y \in Y$.

Если отображение $f: X \to Y$ инъективно, то полный прообраз $f^{-1}(y)$ любого элемента $y \in f(X)$ состоит из одного элемента. В этом случае определено однозначное отображение множества $f(X)$ на X, которое обратно к $f: X \to f(X)$ и относит каждому $y \in f(X)$ его единственный прообраз $x \in X$. Отображение, обратное отображению f, обозначается f^{-1}. Итак, если полный прообраз $f^{-1}(y)$ любого элемента $y \in f(X)$ состоит лишь из одного элемента, то существует однозначное отображение $f^{-1}: f(X) \to X$, *обратное* отображению $f: X \to Y$.

Если f и f^{-1} — взаимно обратные отображения, то (сг. ниже)

$$f^{-1}[f(x)] = x \qquad \text{для любого} \quad x \in X,$$

$$f[f^{-1}(y)] = y \qquad \text{для любого} \quad y \in f(X).$$

Если по каким-либо причинам отображение f, заданное на множестве X со значениями в Y, рассматривать лишь на некотором фиксированном подмножестве $A \subset X$, т.е. иметь дело с отображением $f: A \to Y$, оно называется *сужением* отображения f на множество A и обозначается f_A или $f\big|_A$. Отображение f в этом случае является *расширением* или *продолжением* на X отображения f_A.

Примеры.

10. Рассмотрим отображение $f(x) = \sin x$, определенное для всех вещественных: чисел. Имеем $f^{-1}(0) = \{0, \pm\pi, \ldots, \pm n\pi, \ldots\}$, т.е. полный прообраз 0 есть счетное множество чисел, кратных π. Если рассматривать сужение этого отображения на множество $A = \left[-\frac{\pi}{1}, \frac{\pi}{2}\right]$, то для любого $y \in (-\infty, \infty)$ полный прообраз $f_A^{-1}(y)$ будет или пустым множеством, если $|y| > 1$, или одной точкой, если $|y| \leq 1$. Следовательно, на $[-1, 1]$ будет существовать однозначное отображение $f^{-1}(y) = \arcsin y$, обратное отображению $y = \sin x$ отрезка в числовую ось.

Пусть даны отображения $f: X \to Y$ и $g: Y \to Z$. Если любому $x \in X$ поставить в соответствие элемент $z = g(y)$, где $y = f(x)$, получим новое отображение $h: X \to Z$, определяемое формулой

$$h(x) = g[f(x)]. \tag{1}$$

Это отображение называется *сложным отображением* или *композицией* отображений f и g и обозначается $g \circ f$. Таким образом, равенство (1) может быть записано в виде

$$h(x) = (g \circ f)(x). \tag{2}$$

В композиции $g \circ f$ отображение f называется *внутренним*, а g — *внешним*.

Введем понятие графика отображения $f: X \to Y$. Рассмотрим множество упорядоченных пар (x, y), в котором первый элемент пары принадлежит множеству X, а второй — множеству Y. Совокупность всех таких пар, где x и y пробегают независимо друг от друга множества X и Y, называется *прямым* или *декартовым произведением* множеств X и Y и обозначается $X \times Y$. При этом множители X и Y не обязательно должны быть различными. Пусть, например, $X = Y = \mathbb{R}$ — множеству вещественных чисел. Тогда прямое произведение $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, которое обозначается также $\mathbb{R}^2$, есть множество упорядоченных пар вещественных чисел (x, y). Если пару чисел (x, y) отождествить с точкой плоскости, на которой выбрана система координат xOy, то $\mathbb{R}^2$ будет плоскостью. В этом смысле плоскость есть декартово произведение двух прямых.

Число множителей прямого произведения может быть больше двух. Так, трехмерное пространство можно рассматривать как декартово произведение трех прямых, с чем связано его обозначение символом $\setminus^3$. В то же время трехмерное пространство можно рассматривать и как декартово произведение плоскости на прямую:

$$\mathbb{R}^3 = \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}.$$

Предположим, что даны два множества X и Y и отображение f, определенное на подмножестве $A \subset X$ со значениями в Y. Подмножество декартова произведения $X \times Y$, состоящее из пар $(x, f(x))$, где x пробегает A, называется *графиком* отображения f и обозначается $\operatorname{Gr} f$. Итак,

$$\operatorname{Gr} f = \{(x, f(x)) |\ x \in A\}.$$

В случае, когда $X = Y = \mathbb{R}$, а f достаточно «хорошая» функция, $\operatorname{Gr} f$ представляет собой кривую. Например, если $f(x) = x^2$, то $\operatorname{Gr} f$ есть парабола, если $f(x) = x + 1$, то $\operatorname{Gr} f$ — прямая линия (рис. 5). Однако $\operatorname{Gr} f$ может быть множеством, которое нельзя наглядно изобразить. Таков, например, график функции Дирихле:

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \text{ рационально}, \\ 0, & \text{если } x \text{ иррационально}. \end{cases}$$

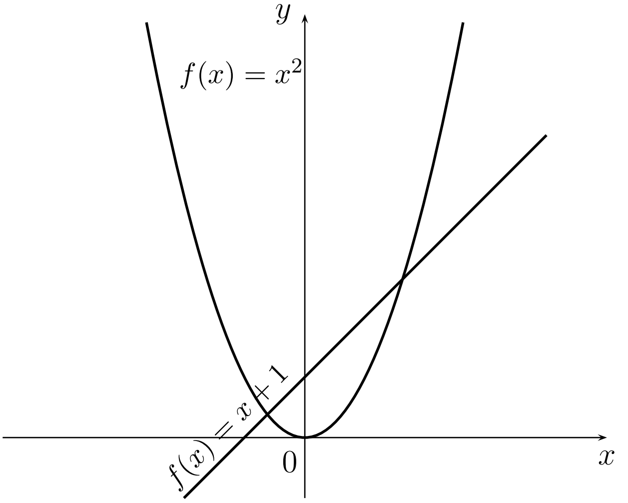

Рис. 5

Если и аргументами, и значениями отображения f являются вещественные числа, такое отображение называется *вещественной функцией вещественной переменной* или *скалярной функцией скалярного аргумента*. Таковы функции $f(x) = \sin x$, $f(x) = \sqrt{1 + x^2}$ и т. д.

Пусть $f: A \to \mathbb{R}$, где $A \subset \mathbb{R}$, — вещественная функция вещественной переменной. Эта функция называется *возрастающей* на A, если из $x_1, x_2 \in A$, $x_1 < x_2$ следует $f(x_1) < f(x_2)$. Если при $x_1 < x_2$ имеем $f(x_1) > f(x_2)$, функция f называется *убывающей* на A. Если при $x_1 < x_2$, $f(x_1) \le f(x_2)$ функция f называется *неубывающей*, если $f(x_1) \ge f(x_2)$, функция называется *невозрастающей*. И неубывающие и невозрастающие Функция — *монотонные*, а возрастающие и убывающие — *строго монотонные*.

Пусть область определения скалярной функции скалярного аргумента симметрична относительно начала координат, т.е. вместе с числом x содержит число $(-x)$. Если $f(x) = f(-x)$, функция f называется *четной*, если же $f(x) = -f(x)$, то функция f называется *нечетной*.

ПРИМЕРЫ.

11. Функция $f(x) = \dfrac{x}{1+x}$ возрастает на $(0, \infty)$, а функция $g(x) = \dfrac{1}{1+x}$ убывает на этом множестве.

12. Функция $\varphi(x) = \sqrt{1-x^2}$ четная на $[-1,1]$, а функция $\psi(x) = \sin x$ нечетная на всей числовой прямой.

Пусть областью определения фикции f является вся числовая прямая. Если существует такое число ω, что $f(x+\omega) = f(x)$, функция f будет *периодической* с периодом ω. Ясно, что задание периодической функции на любом отрезке числовой оса, длина которого равна периоду, определяет функцию на всей числовой прямой. Примером периодических функция с периодом ω могут служить $\sin\dfrac{2\pi x}{\omega}$, $\cos\dfrac{2\pi x}{\omega}$.

Вещественная функция вещественного аргумента, определенная на множестве $X \subset \mathbb{R}$, называется *ограниченной сверху* (*снизу*) на этом множестве, если ограничено сверху (снизу) множество значений этой Функции на X, т.е. существует такое число M (m), что $f(x) \le M$ $(f(x) \ge m)$ для всех $x \in X$. В этом случае точная верхняя (нижняя) граница множества значений функции f называется *точной верхней* (*нижней*) *границей функции* на множестве X и обозначается $\sup\limits_X f(X)$ $(\inf\limits_X f(x))$. Если функция не ограничена сверху (снизу) на X, то пишут $\sup\limits_X f(X) = +\infty$ $(\inf\limits_X f(X) = -\infty)$. Функция, ограниченная и сверху и снизу на множестве X, называется просто *ограниченной* на этом множестве. Ясно, что $f(x)$ ограничена на X тогда и только тогда, когда существует число $K > 0$, такое, что $|f(x)| \le K$ для всех $x \in X$.

Пусть даны две вещественные функции $f(t)$ и $g(t)$, определенные на одном и том же отрезке $T \subset \mathbb{R}$. Если каждому значению $t \in T$ поставить в соответствие упорядоченную пару вещественных чисел $x = f(t)$ и $y = g(t)$, то, рассматривая эти числа как координаты некоторой точки $M(x,y)$ на плоскости xOy, получим однозначное отображение Φ множества $T \subset \mathbb{R}$ в плоскость xOy. Это отображение называется *плоской кривой.* Аналогичным образом три функции $f : T \to \mathbb{R}$, $g : T \to \mathbb{R}$, $h : T \to \mathbb{R}$ порождают отображение Φ множества T в трехмерное пространство $xyzO$, называемое *пространственной кривой.*

Глава II

ТЕОРИЯ ПРЕДЕЛОВ

Понятие предела, наряду с понятием функции, лежит в основе математического анализа.

§ 1. Предел последовательности

Отображение $f:\ \mathbb{N} \to M$ множества натуральных чисел $\mathbb{N}$ в некоторое множество M называется *последовательностью* в M или *последовательностью элементов множества M*.

Если обозначить число (элемент) $f(n)$ через x_n, то последовательность записывают в виде $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ или $\{x_n\}$.

Элементы $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ называются *членами последовательности*, $x_n = f(n)$ — *общим членом* последовательности. Если $n' < n$, то говорят, что *член $x_{n'}$ последовательности предшествует члену x_n* или что *x_n следует за $x_{n'}$*. $>$

Не следует отождествлять последовательность $\{x_n\}$ с множеством A, элементами которого являются члены последовательности, так как если в последовательности $\{x_n\}$ есть члены с разными номерами, равные друг другу (отображение f не инъективно), то в множестве A этим членам соответствует один единственный элемент, все члены последовательности $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ могут быть даже равны друг другу: $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = \ldots$. Такая последовательность $x, x, \ldots, x, \ldots$ называется *стационарной.*

Примеры.

1.

$$x_1, \quad x_2 = 2, \quad x_3 = 3, \ \ldots, \ x_n = n, \ \ldots$$

— последовательность всех натуральных чисел.

2.

$$x_1 = \sin t, \quad x_2 = \sin 2t, \quad x_3 = \sin 3t, \ \ldots, \ x_k = \sin kt, \ \ldots \qquad (-\infty < t < \infty).$$

Члены этой последовательности являются вещественные функции вещественного аргумента.

3. Пусть $C(r)$ — окружность на плоскости $x0y$ с центром в начале координат и радиусом r (рис. 6). Если $f(n) = C(n)$, то получим последовательность $C(1), C(2), \ldots, C(n), \ldots$, элементами которой являются окружности, т. е. геометрические фигуры.

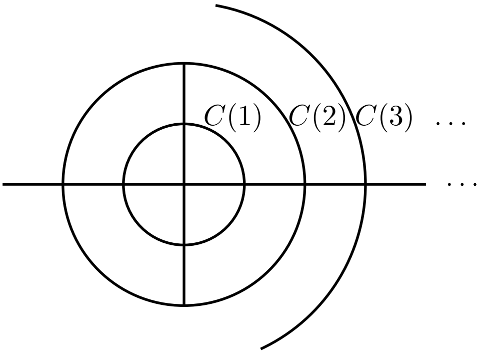

Рис. 6

4. Пусть $x_n = \dfrac{1+(-1)^n}{n}$. Тогда последовательность имеет следующий вид:

$$x_1 = \frac{2}{1},\ \ x_2 = 0,\ \ x_3 = \frac{2}{3},\ \ x_4 = 0,\ \ldots,\ x_{2k-1} = \frac{2}{2k-1},\ \ x_{2k} = 0,\ \ldots$$

Ее элементами являются вещественные числа. Заметим, что все члены последовательности с четными номерами равны друг другу.

в дальнейшем чаще всего будем иметь дело с числовыми и функциональными последовательностями, членами которых являются соответственно числа или функции, а в этой главе только с числовыми.

Определение 1. Число a называется *пределом числовой последовательности* $\{x_n\}$, если для любого числа $\varepsilon > 0$ найдется такой номер n_0, что $|x_n - a| < \varepsilon$ при $n \geq n_0$.

Если a — предел последовательности $\{x_n\}$, то его записывают в виде $a = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$ или $\lim x_n = a$. Говорят, что в этом случае *последовательность* $\{x_n\}$ *сходится к числу* a, т.е. $x_n \to a$ при $n \to \infty$ или $x_n \to a$.

В дальнейшем, говоря в этой главе о последовательности, слово «числовая» будем опускать.

Как видно из определения, если $a = \lim x_n$, то каково бы ни было число $\varepsilon > 0$, начиная о некоторого номера, вообще зависящего от ε, все члены последовательности отличаются от a на величину, меньшую, чей ε, каким бы малым ни было это число.

Записав неравенство $|x_n - a| < \varepsilon$ при $n \geq n_0$ в виде $a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon$ и вспомнив геометрическое изображение чисел, убеждаемся, что равенство $\lim x_n = a$ эквивалентно условию: в интервал $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ попадают все члены рассматриваемой последовательности начиная с номера n_0. Ясно, что этот номер зависит от числа ε и, вообще говоря, тем больше, чем меньше число ε.

Определение 2. Последовательность, имеющая пределом нуль, называется *бесконечно малой последовательностью* (*б.м. последовательностью*).

Таким образом, если $\{x_n\}$ есть б.м. последовательность, то для $\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ n_0$, такое, что при $n \geq n_0$ $|x_n| < \varepsilon$.

Ясно, что если $\{x_n\}$ — б.м. последовательность и $\{y_n\}$ — другая последовательность, такая, что начиная с некоторого номера $|y_n| \leq |x_n|$, то $\{y_n\}$ также б.м. последовательность.

Пусть $x_n \to a$. Положим $x_n - a = \alpha_n$. Тогда для $\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ n_0$ такой, что при $n \geq n_0$

$$|\alpha_n| = |x_n - a| < \varepsilon.$$

Таким образом, $\{\alpha_n\}$ — б.м. последовательность. Обратно, если $x_n = a + \alpha_n$, где $\{\alpha_n\}$ — б.м. последовательность. то $x_n \to a$.

Примеры.

5. Пусть $a \neq 0$ — произвольное фиксированное число. Тогда

$$\lim_{n\to 0} \frac{a}{n} = 0.$$

Надо показать, что для любого числа $\varepsilon > 0$ найдется такой номер n_0, что при $n \geq n_0$

$$\left|\frac{a}{n} - 0\right| = \frac{|a|}{n} < \varepsilon. \tag{1}$$

Решив неравенство (1), получим:

$$\frac{|a|}{n} < \varepsilon \ \Leftrightarrow\ \frac{n}{|a|} < \frac{1}{\varepsilon} \ \Leftrightarrow\ n > \frac{|a|}{\varepsilon}.$$

Поэтому, если взять $n_0 = E\left(\frac{|a|}{\varepsilon}\right) + 1$, то $n \geq n_0$ будет означать, что $n > \frac{|a|}{\varepsilon}$, откуда следует, что $\frac{|a|}{n} < \varepsilon$, т.е. неравенство (1) и равенство $\lim \frac{a}{n} = 0$ доказаны.

Согласно определению 2, $\left\{\frac{a}{n}\right\}$ есть б.м. последовательность. Так как $\frac{|a|}{n^k} \leq \frac{|a|}{n}$ при любом целом положительном k, то $\lim \frac{a}{n^k} = 0$ при $\forall\ k \geq 1$.

В качестве упражнения рекомендуем доказать, что при фиксированном k

$$\lim \frac{a}{\sqrt[k]{n}} = 0.$$

6. Для любого $a > 0$ $\lim \sqrt[n]{a} = 1$. Для $a = 1$ утверждение тривиально.

Пусть $a < 1$. Тогда $\sqrt[n]{a} < 1$, т.е. $\sqrt[n]{a} = \frac{1}{1 + h_n}$, где $h_n > 0$. Отсюда

$$a = \frac{1}{(1 + h_n)n} = \frac{1}{1 + nh_n + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2} + \ldots + h_n^n} < \frac{1}{1 + nh_n}.$$

Поэтому $1 + nh_n < \dfrac{1}{a}$, и тогда $h_n < \dfrac{\frac{1}{a} - 1}{n}$. Согласно доказанному, $\left\{\dfrac{\frac{1}{a} - 1}{n}\right\}$ — б.м. последовательность, а значит и $\{h_n\}$ — б.м. последовательность. Но

$$|\sqrt[n]{a} - 1| = \left|\frac{1}{1 + h_n} - 1\right| = \frac{h_n}{1 + h_n} < h_n.$$

Поэтому $\alpha_n = \sqrt[n]{a} - 1$ — б.м. последовательность и $\lim\ \sqrt[n]{a} = 1$.

Если $a > 1$, то, положив $\sqrt[n]{a} = 1 + h_n$, с помощью аналогичных рассуждений получим, что $0 < h_n < \dfrac{a - 1}{n}$, откуда следует, что $\lim\ \sqrt[n]{a} = 1$.

7. Покажем, что $\lim\ \sqrt[n]{n} = 1$. Возьмем $\sqrt[n]{n} = 1 + h_n$. Для $n \geq 2$, очевидно, $h_n > 0$. С помощью формулы бинома Ньютона получим:

$$n = (1 + h_n)^n > \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} h_n^2,$$

откуда

$$0 < h_n < \sqrt{\frac{2}{n-1}}.$$

Покажем, что $h_n \to 0$ при $n \to \infty$. Пусть задано число $\varepsilon > 0$. Решив неравенство $\sqrt{\dfrac{2}{n-1}} < \varepsilon$, найдем:

$$\sqrt{\frac{2}{n-1}} < \varepsilon \;\Leftrightarrow\; \frac{2}{n-1} < \varepsilon^2 \;\Leftrightarrow\; n > \frac{2}{\varepsilon^2} + 1.$$

Положив $n_0 = \left[\left(\dfrac{2}{\varepsilon^2} + 1\right)\right] + 1$, получим: $|h_n| = h_n < \varepsilon$ при $n \geq n_0$, т. е. $h_n \to 0$. Равенство $\lim\ \sqrt[n]{n} = 1$ доказано.

8. Рассмотрим последовательность

$$\{q, q^2, \ldots, q^n, \ldots\},$$

где q — произвольное вещественное число.

Если $q = 0$ или $q = 1$, получим стационарную последовательность

$$\{0, 0, \ldots, 0, \ldots\}$$

и

$$\{1, 1, \ldots, 1, \ldots\}.$$

Так как в случае стационарной последовательности $\{x_n\}$, где $x_n = a$, $n = 1, 2, 3, \ldots$, для любого числа $\varepsilon > 0$

$$|x_n - a| = |a - a| < \varepsilon$$

при всех n, то стационарная последовательность, сходится и имеет предел, равный членам этой последовательности. Таким образом, $\lim\ q^n = q$, если $q = 0$ или $q = 1$.

Пусть $q = -1$. Тогда последовательность $\{q^n\}$ принимает вид $\{-1, 1, -1, 1, \ldots, (-1)^n, \ldots\}$. Эта последовательность не имеет предела. В самом деле, возьмем любое число a и любое положительное число $\varepsilon < \frac{1}{2}$, например, $\varepsilon = \frac{1}{3}$. Если предположить, что $(-1)^n \to a$, то в соответствии с определением предела должен существовать номер n_0, такой, что $|(-1)^n - a| < \frac{1}{3}$ при $n \geq n_0$. В частности, $|(-1)^{2n_0} - a| < \frac{1}{3}$ и $|(-1)^{2n_0+1} - a| < \frac{1}{3}$, откуда

$$|(-1)^{2n_0} - (-1)^{2n_0+1}| = [(-1)^{2n_0} - a] + [a - (-1)^{2n_0+1}| \leq$$

$$\leq |(-1)^{2n_0} - a| + |a - (-1)^{2n_0+1}| < \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3},$$

что невозможно, так как $|(-1)^{2n_0} - (-1)^{2n_0+1}| = 2$. Таким образом, последовательность $\{(-1)^n\}$ не имеет предела.

Пусть $|q| < 1$. Тогда $q = \frac{1}{1+h}$, где $h > 0$, откуда

$$|q|^n = \frac{1}{(1+h)^n} = \frac{1}{1 + nh + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2} + \ldots + h^n} < \frac{1}{nh} \to 0$$

при $n \to \infty$. Поэтому $|q^n - 0 = |q|^n \to 0$, т.е. $\lim\ q^n = 0$ при $|q| < 1$.

Предположим, наконец, что $|q| > 1$. Тогда $|q| = 1 + h$, где $h > 0$ и $|q|^n = (1+h)^n > nh$. Каково бы ни было число l, найдется номер n_0, такой, что $nh > 2|l|$ при $n \geq n_0$. Для этого достаточно взять $n_0 = E\left(\frac{2|l|}{h}\right) + 1$. Но тогда для всех $n \geq n_0$

$$|q^n - l| \geq |\,|q|^n - |l|\,| \geq |q|^n - |l| > nh - |l| > |l|,$$

т.е. $|q^n - l| \not\to 0$, каково бы ни было число l, а это значит, что последовательность $\{q^n\}$ при $|q| > 1$ не имеет предела.

9. Пусть r'_n — рациональное приближение по недостатку с точностью до $\frac{1}{19^n}$ иррационального числа α. Покажем, что $r'_n \to \alpha$.

В самом деле, если задано число $\varepsilon > 0$, выберем n_0 так, чтобы $\frac{1}{10^{n_0}} < \varepsilon$. Это возможно, так как, согласно примеру 4. $\lim\ \frac{1}{10^n} = 0$. С другой стороны, $r'_n < \alpha < r'_n + \frac{1}{10^n}$ и, следовательно,

$$|r'_n - \alpha| = \alpha - r'_n = \frac{1}{10^n},$$

т. е. при $n \geq n_0$

$$|r'_n - \alpha| < \varepsilon$$

и равенство $\lim\ r'_n = \alpha$ доказано. к Аналогично доказывается, что $\lim\ r''_n = \alpha$, где r''_n — рациональные приближения числа α по избытку с точностью до $\frac{1}{10^n}$.

10. Предлагаем читателю доказать, что если $|q| < 1$ и $s_n = a + aq + \ldots + aq^n$, то

$$\lim\ s_n = \frac{a}{1-q}.$$

Теперь дадим понятие о других теориях вещественных чисел.

Мы вводили иррациональные числа с помощью сечений. Их можно ввести и по-другому, назвав иррациональным числом бесконечную непериодическую десятичную дробь. Покажем, как иррациональному числу, введенному с помощью сечений, поставить в соответствие бесконечную десятичную дробь.

Пусть α_0 и $\alpha_0 + 1$ — рациональные приближения числа α с точностью до единицы,

$$\alpha_0, \alpha_1 < \alpha < \alpha_0, \beta_1, \qquad \beta_1 = \alpha_1 + \frac{1}{10}$$

— рациональные приближения числа α с точностью до $\dfrac{1}{10}$,

$$\alpha_0, \alpha_1\alpha_2 < \alpha < \alpha_0, \alpha_1\beta_2, \qquad \beta_2 = \alpha_2 + 1$$

— рациональные приближения числа α с точностью до $\dfrac{1}{10^2}, \ldots,$

$$\alpha_0, \alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_{n-1}\alpha_n < \alpha < \alpha_0, \alpha_1\beta_2 \ldots \alpha_{n-1}\beta_n, \qquad \beta_n = \alpha_n + 1$$

— рациональные приближения числа α с точностью до $\dfrac{1}{10^n}$ и т.д.

Продолжая неограниченно процесс построения таких десятичных дробей, получим выражение

$$\alpha_0, \alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_n \ldots \alpha_{n+p} \ldots,$$

которое называется *бесконечной десятичной дробью* и ставится в соответствие числу α. Так как на каждом шаге десятичные знаки $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n, \ldots$ определяются однозначно, то и вся дробь определена однозначно.

Дробь $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n, \ldots$ непериодическая. Если бы она имена вид $\alpha_0, \alpha_1 \ldots \alpha_k$ $\alpha_{k+1} \ldots \alpha_{k+l}\alpha_{k+1} \ldots$, где $\alpha_1\alpha_2\alpha_n$ цифры до периода и $\alpha_{k+1} \ldots \alpha_{k+l}$ — период, то рациональные приближения по недостатку r'_n, где $n = k + ml$, $m \geq 1$, можно было бы записать в виде

$$r'_n = \alpha_0 + \frac{\alpha_1}{10} + \ldots = \frac{\alpha_k}{10^k} + \left(\frac{\alpha_{k+1}}{10^{k+1}} + \ldots + \frac{\alpha_{k+l}}{10^{k+l}}\right) + \ldots +$$

$$+ \left(\frac{\alpha_{k+1}}{10^{k+(m-1)l+1}} + \ldots + \frac{\alpha_{k+l}}{1 - 10^{km+l}}\right) =$$

$$= a + b\sum_{a=0}^{m-1} \frac{1}{10^{sl}} = a + b\frac{1 - \frac{1}{10^{m-1}}}{1 - \frac{1}{10^l}}.$$

Здесь $a = \alpha_0 + \dfrac{\alpha_1}{10} + \ldots + \dfrac{\alpha_k}{10^k}$ и $b = \dfrac{1}{10^k}\left(\dfrac{\alpha_{k+1}}{10} + \ldots + \dfrac{\alpha_{k+l}}{10^l}\right)$ — рациональные числа.

Дроби $\dfrac{1}{10^{(m-1)l}}$ стремятся к нулю при $n \to \infty$, поэтому $r'_n \to a + b\dfrac{1}{1-\frac{1}{10^l}}$. С другой стороны, $r'_n \to \alpha$. Следовательно, $\alpha = a + b\dfrac{1}{1-\frac{1}{10^l}}$ — рациональное число, что противоречит предположению об иррациональности α.

Итак, каждому иррациональному числу поставлена в соответствие бесконечная непериодическая десятичная дробь. Предлагаем читатели показать, что если задана произвольная бесконечная непериодическая десятичная дробь, то ей можно поставить в соответствие единственное иррациональное число, и притом так, что если этому числу только что указанным способом поставить в соответствие бесконечную десятичную дробь то получится исходная дробь.

Таким образом, если представить иррациональные числа в виде бесконечных непериодических десятичных дробей, образуется то же самое множество всех вещественных чисел, что и при использовании теории сечений Дедекинда. Теория построения множества всех вещественных чисел с помощью бесконечных десятичных дробей принадлежит К. Вейерштрассу[2]

Наконец, существует третья теория введения иррациональных чисел, принадлежащая Г. Кантору, который рассматривал иррациональные числа как пределы некоторых так называемых «сходящихся в себе», последовательностей рациональных чисел, не сходящихся ни к какому рациональному пределу. Метод Кантора допускает широкие обобщения (см. пополнение метрических пространств в гл. X).

Можно доказать, что теории Дедекинда, Вейерштрасса и Кантора эквивалентны, поскольку с их помощью получаем одно и то же множество всех вещественных чисел.

Примеры 1–6 доказывают, что, во-первых, не всякая последовательность имеет предел, и, во-вторых, что если последовательность $\{x_n\}$ сходится к пределу, то ее члены могут приближаться к пределу по-раэному. В примерах 1 и 2 при $a > 1$ члены последовательности больше своего предела, в примере 2 при $a < 1$ — меньше предела. Члены последовательности $\left\{\left(-\dfrac{1}{2}\right)^n\right\}$ делаются попеременно то больше, то меньше предела этой последовательности, но все они отличаются от предела. В последовательности $\left\{\dfrac{1-(-1)^n}{n}\right\}$, сходящейся к нулю, все члены с четными номерами равны нулю, т.е. пределу последовательности.

Наконец, заметим, что если последовательность $\{x_n\}$ не имеет своим пределом число a, то это значит, что существует число $\varepsilon_0 > 0$, такое, что для любого n найдется $n' > n$, такое, что $|x_{n'} - a| \geq \varepsilon_0$. Если утверждение «$\lim\ x_n = a$» записать с помощью символов математической логики, а именно:

$$(\forall\ \varepsilon > 0)\ (\exists\ n_0)\ |\ (\forall\ n \geq n_0):\ |x_n - a| < \varepsilon,$$

то отрицание этого утверждения «$x_n \not\to a$» получается в результате замены кванторов всеобщности на кванторы существования, квантора существования на кван-

---

[2] К. Вейерштрасс (1815–1897) — немецкий математик.

тор всеобщности и неравенства на обратное, т.е.:

$$(\exists\ \varepsilon_0 > 0)\ (\forall\ n_0)\ |\ (\exists\ n \geq n_0):\ |x_n - a| \geq \varepsilon_0.$$

Следующие леммы описывают два важных свойства предела последовательности.

Лемма 1. *Последовательность $\{x_n\}$ может сходиться не более чем к одному пределу.*

Доказательство. Предположим, что $x_n \to a$ и $x_n \to b$, причем $a \neq b$, например $b > a$. Так как $\lim\ x_n = a$, то найдется номер n_1, такой, что при $n \geq n_1$

$$|x_n - a| < \frac{b-a}{3}.$$

Так как $\lim\ x_n = b$, то найдется номер n_2, такой, что при $n \geq n_2$

$$|x_n - b| < \frac{b-a}{3}.$$

Пусть $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$, т.е. n_0 — наибольшее из двух чисел n_1 и n_2. Тогда для $n \geq n_0$ имеем:

$$b - a \equiv b - x_n + x_n - a \leq |x_n - b| + |x_n - a| < \frac{b-a}{3} + \frac{b-a}{3} = \frac{2(b-a)}{3},$$

что невозможно. Таким образом, предположение, что $a \neq b$, неверно. Лемма доказана.

Пусть дана последовательность $\{x_n\}$, т.е. отображение $f:\ \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ и счетное подмножество $A \subset \mathbb{N}$. Сужение f_A отображения f на A, т.е. отображение $f:\ A \to \mathbb{R}$ называется *подпоследовательностью* последовательности $\{x_n\}$. Подмножество A нумеруется так, как это сделано в лемме 1 § 2 главы I, и потому подпоследовательность последовательности можно записать в виде

$$\{x_{n_1},\ x_{n_2},\ \ldots,\ x_{n_k},\ \ldots\}.$$

Если теперь натуральному числу k поставить в соответствие x_{n_k}, то получится отображение $g:\ \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, порождающее $\{x_{n_k}\}$. Поэтому подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$ последовательности $\{x_n\}$ есть также последовательность.

Беря различные счетные подмножества $A \subset \mathbb{N}$, получим разные подпоследовательности $\{x_{n_i}\}$ исходной последовательности $\{x_n\}$.

Лемма 2. *Если последовательность $\{x_n\}$ сходится к пределу a, то любая ее подпоследовательность $\{x_{n_i}\}$ сходится к тому же пределу.*

Доказательство. Пусть задано $\varepsilon > 0$. В силу определения предела найдется натуральное число n_0, такое, что $|x_n - a| < \varepsilon$ при $n \geq n_0$. Очевидно, что это неравенство будет выполняться, в частности, для всех членов x_{n_i} подпоследовательности с номерами, удовлетворяющими неравенству $n_i \geq n_0$ или, что вое равно, неравенству $i \geq i_0$, где i_0 — наименьший из индексов i, при которых $n_i \geq n_0$. Но это означает, что $\{x_{n_i}\}$, рассматриваемая как последовательность, сходится к a.

В качестве примера использования определении несуществования предела («отрицательного» определения) докажем следующую лемму.

Лемма 3. *Если последовательность* $\{x_n\}$ *такова, что из любой ее подпоследовательности* $\{x_{n_i}\}$ *можно выделить подпоследовательность* $\{x_{n_{i_j}}\}$, *сходящуюся к фиксированному числу* a, *то* $x_n \to a$.

Доказательство. Пусть $x_n \not\to a$. Тогда

$$(\exists\ \varepsilon_0 > 0)\ (\forall\ k)\ |\ (\exists\ n_k \geq n_0):\ |x_{n_k} - a| \geq \varepsilon_0.$$

Последнее неравенство означает, что подпоследовательность $\{x_{n_1}, x_{n_2}, \ldots, x_{n_k}, \ldots\}$ не сходится к a и не содержит ни одной подпоследовательности, сходящейся к a, так как все ее члены отстоят от a не меньше, чем на ε_0. Это противоречит условию леммы, следовательно, утверждение $x_n \to a$ доказано.

Для доказательства ряда утверждений применяется следующая лемма.

Лемма 4. *Если для всех достаточно больших* n

$$x_n \leq y_n \leq z_n \tag{2}$$

и $x_n \to a$, $z_n \to a$, *то и* $y_n \to a$.

Доказательство. Пусть задано $\varepsilon > 0$. Найдется номер n_1, такой, что при $n \geq n_1$

$$|x_n - a| < \varepsilon,$$

или, что все равно, при $n \geq n_1$

$$a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon. \tag{3}$$

Точно так же найдется номер n_2, такой, что при $n \geq n_2$

$$a - \varepsilon < z_n < a + \varepsilon. \tag{4}$$

Пусть $n_0 \geq \max(n_1, n_2)$. Можно считать n_0 настолько большим, что заполняется условие (2). При $n \geq n_0$ выполняются оба неравенства (3) и (4), и поэтому

$$a - \varepsilon < x_n \leq y_n \leq z_n < a + \varepsilon,$$

т.е. при $n \geq n_0$

$$|y_n - a| < \varepsilon.$$

Лемма доказана.

Будем говорить, что последовательность $\{y_k\}$, $y_k = g(k)$, получена из последовательности $\{x_n\}$, $x_n = f(n)$, перестановкой ее членов, если существует биективное отображение $h:\ \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, такое, что $g = f \circ h$. Иными словами, последовательность $\{y_k\}$ получена из последовательности $\{x_n\}$ путем перестановки членов, если каждый член последовательности $\{y_k\}$ совпадает с некоторым x_n и притом только с одним, и каждый x_p совпадает с некоторым y_q и также только с одним. В этом случае говорят также, что *последовательность* $\{y_k\}$ *получена из последовательности* $\{x_n\}$ *изменением нумерации членов последовательности.*

Лемма 5. *Если последовательность $\{x_n\}$ имеет предел, то любая последовательность $\{y_m\}$ полученная изменением нумерации членов последовательности $\{x_n\}$, имеет тот же предел.*

Доказательство. Рассмотрим, например, случай когда последовательность сходится к числу A. Возьмем произвольную последовательность $\{y_m\}$, полученную из $\{x_n\}$ изменением нумерации членов, обозначим через k_n номер члена x_n в последовательности $\{y_m\}$, так что $x_n = y_{k_n}$, и через l_m — номер члена y_m в последовательности $\{x_n\}$. Пусть задано произвольное число $\varepsilon > 0$ и номер $n_0 = n_0(\varepsilon)$, такой, что $|x_n - A| < \varepsilon$ при $n \geq n_0$. Тогда при $m \geq m_0 = \max\ (k_1, \ldots, k_{n_0})$ для соответствующих l_m будет выполнено неравенство $l_m \geq n_0$ и, следовательно, $|y_m - A| = |x_{l_m} - A| < \varepsilon$. Таким образом, при всех $m \geq m_0$ имеем $|y_m - A| < \varepsilon$, т.е. $A = \lim\ y_m$.

§ 2. Основные теоремы о пределах последовательностей

Теорема 1. *Если $\lim\ x_n = a$, то для любого числа $b < a$ найдется номер n_1, такой, что $x_n > b$ при $n \geq n_1$ и для любого $c > a$ найдется номер n_2, такой, что $x_n < c$ при $n \geq n_2$.*

Доказательство. Положим $\varepsilon_1 = \dfrac{a-b}{2}$. Так как $x_n \to a$, то найдется номер n_1, такой, что $|x_n - a| < \dfrac{a-b}{2}$ при $n \geq n_1$, откуда $x_n > a - \dfrac{a-b}{2} = \dfrac{a+b}{2} > b$ при $n \geq n_1$.

Аналогично доказывается второе утверждение.

Следствие. *Если последовательность $\{x_n\}$ сходится и $x_n \geq b$ при всех достаточно больших n, то и $\lim\ x_n \geq b$.*

В самой деле, если предположить, что $\lim\ x_n < b$, то, согласно предыдущей теореме, $x_n < b$ начиная с некоторого номера n_0, что противоречит условию.

Заметим, что если $x_n > b$ для всех n и $\lim\ x_n$ существует, то можно лишь утверждать, что $\lim\ x_n \geq b$, и заменить в этом неравенстве знак $\geq$ на знак $>$ нельзя. Например, $x_n = \dfrac{1}{n} > 0$, в то время как $\lim\ x_n = 0$.

Пусть даны две последовательности $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$. *Суммой* этих последовательностей будет последовательность $\{x_n + y_n\}$: $\{x_n\} + \{y_n\} = \{x_n + y_n\}$. Аналогично определяется *произведение* двух последовательностей:

$$\{x_n\} \cdot \{y_n\} = \{x_n \cdot y_n\}.$$

Пусть, наконец, даны две последовательности $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$, причем $y_n \neq 0$ для $n = 1, 2, \ldots$. Тогда последовательность $\left\{\dfrac{x_n}{y_n}\right\}$ будет *частным* данных последовательностей.

Ясно, что определение суммы и произведения последовательностей распространяется на любое конечное число слагаемых или множителей.

Последовательность $\{x_n\}$ называется *ограниченной*, если совокупность всех ее членов есть ограниченное числовое множество, т.е., если существует такое число M, что $|x_n| \leq M$ для всех $n = 1, 2, \ldots$.

Теорема 2. *Если последовательность $\{x_n\}$ сходится, то она ограничена.*

Доказательство. Пусть $\lim\ x_n = a$. Возьмем $\varepsilon = 1$. Найдется номер n_0, такой, что $|x_n - a| < 1$ при $n \geq n_0$, откуда при $n \geq n_0$

$$|x_n| \leq |(x_n - a) + a| \leq |x_n - a| + |a| < 1 + |a| = K.$$

Рассмотрим, далее, n_0 чисел $|x_1|, |x_2|, \ldots, |x_{n_0-1}, K$. Пусть

$$M = \max\ (|x_1|, |x_2|, \ldots, |x_{n_0-1}|, K).$$

Ясно, что $|x_n| \leq M$ для всех n. Теорема доказана.

Теорема 3. *Сумма или произведение любого конечного числа сходящихся последовательностей есть сходящаяся последовательность, и предел, суммы или произведения таких последовательностей равен соответственно сумме или произведению пределов последовательностей. В символах*

$$\lim\ (x_n + y_n + \ldots + z_n) = \lim\ x_n + \lim\ y_n + \ldots + \lim\ z_n,$$

$$\lim\ (x_n \cdot y_n \cdot \ldots \cdot z_n) = \lim\ x_n \cdot \lim\ y_n \cdot \ldots \cdot \lim\ z_n.$$

Доказательство. Рассмотрим случай произведения. Пусть $x_n \to a$, $y_n \to b$, $b \neq 0$ и задано $\varepsilon > 0$.

По теореме 2, найдет6я такое число M, что $|x_n| \leq M$ для всех n. Выберем номер n_1 так, чтобы $|x_n - a| < \dfrac{\varepsilon}{2|b|}$ при $n \geq n_1$. Точно так также можно выбрать n_2 так, чтобы $|y_n - b| < \dfrac{\varepsilon}{2M}$ при $n \geq n_2$. Пусть $n_0 = \max\ (n_1, n_2)$. Для $n \geq n_0$ будут выполняться оба предыдущие неравенства, и при $n \geq n_0$ получим:

$$|x_n y_n - ab| = |x_n y_n - bx_n + bx_n - ab| \leq |x_n|\, |y_n - b| +$$

$$+ |b|\, |x_n - a| < M \cdot \frac{\varepsilon}{2M} + \frac{\varepsilon}{2|b|} \cdot |b| = \varepsilon.$$

Это неравенство означает, что

$$\lim\ (x_n y_n) = ab = \lim\ x_n \cdot \lim\ y_n.$$

Случай, когда $b = 0$, предлагаем рассмотреть читателю.

Переход к любому конечному числу сомножителей осуществляется методом математической индукции.

Доказательство равенства

$$\lim\ (x_n + y_n + \ldots + z_n) = \lim\ x_n + \lim\ y_n + \ldots + \lim\ z_n$$

предоставляется читателю.

Следствие. *Пусть* $\{x_n\}$ *— сходящаяся последовательность и* $\{y_n\}$ *— стационарная последовательность* $\{b, b, \ldots, b, \ldots\}$*. Так как* $\lim\ b = b$*, то, согласно теореме 3,*

$$\lim\ (x_n + b) = \lim\ x_n + b,$$

$$\lim\ (bx_n) = b\ \lim\ x_n.$$

Этими равенствами приходится часто пользоваться.

Теорема 4. *Предел, частного двух сходящихся последовательностей, если предел делителя не равен нулю, есть сходящаяся последовательность. При этом* $\lim\ \dfrac{x_n}{y_n} = \dfrac{\lim\ x_n}{\lim\ y_n}$.

Доказательство. Пусть $x_n \to a$, $y_n \to b$. Рассмотрим разность $\dfrac{x_n}{y_n} - \dfrac{a}{b}$. Имеем

$$\left|\frac{x_n}{y_n} - \frac{a}{b}\right| = \frac{|x_n b - a y_n|}{|y_n| b}. \tag{1}$$

Так как $|y_n| \to |b| > 0$, то, по теореме 1, найдется номер n_1, такой, что $|y_n| > \dfrac{|b|}{2}$, т.е. $\dfrac{1}{|y_n|} < \dfrac{2}{|b|}$ при $n \geq n_1$. Следовательно,

$$\left|\frac{x_n}{y_n} - \frac{a}{b}\right| < \frac{2}{|b|^2}\,|x_n b - a y_n|. \tag{2}$$

Но $x_n b \to ab$, $a y_n \to ab$ и согласно теореме 3, $x_n b - a y_n \to ab - ab \to 0$. Поэтому для заданного числа $\varepsilon > 0$ найдется номер n_2, такой, что при $n \geq n_2$

$$|x_n b - a y_n| < \frac{\varepsilon |b|^2}{2}. \tag{3}$$

Пусть $n_0 = \max\ (n_1, n_2)$. При $n \geq n_0$ справедливы оба неравенства (2) и (3), из которых следует, что при $n \geq n_0$

$$\left|\frac{x_n}{y_n} - \frac{a}{b}\right| < \varepsilon.$$

Теорема доказана.

Теорема 3 в применении к б.м. последовательности приводит к следующему утверждению.

Теорема 5. *Сумма и произведение любого конечного числа б.м. последовательностей есть б.м. последовательность.*

Теорема 4 к б.м. последовательности неприменима. Примеры показывают, что частное двух б.м. последовательностей (если, конечно, деление последовательностей возможно) может быть, и б.м. последовательностью и последовательностью, имеющей конечный предел, и последовательностью, не имеющей предела.

ПРИМЕРЫ.

1. Пусть $x_n = \dfrac{1}{n^2}$, $y_n = \dfrac{1}{n}$. Очевидно, что

$$\frac{x_n}{y_n} = \frac{1}{n} \to 0.$$

2. Пусть $x_n = \dfrac{1}{n}$, $y_n = \dfrac{n-1}{n^2+1}$. В этом случае

$$0 \leq y_n = \frac{n-1}{n^2+1} < \frac{n-1}{n^2} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2} \to 0 - 0 = 0$$

и

$$\frac{x_n}{y_n} = \frac{n^2+1}{n^2-n} = 1 + \frac{n+1}{n^2-n} = 1 + \frac{n+1}{n(n-1)} =$$
$$= 1 - \frac{1}{n} + \frac{2}{n-1} \to 1 - 0 + 0 = 1.$$

3. Пусть $x_n = \dfrac{1}{n}$, $y_n = \frac{1}{n \cdot 2^n}$. Тогда $\dfrac{x_n}{y_n} = 2^n$, и, как показано в примере 4 (см. § 1, гл. II), $\left\{\dfrac{x_n}{y_n}\right\}$ не имеет предела.

Наконец, отметим, что если $x_n \to a$, то $|x_n| \to |a|$.

Введем новое понятие. Последовательность $\{z_n\}$ будем называть *бесконечно большой последовательностью* (коротко *б.б. последовательностью*), если для любого вещественного числа A найдется номер n_0, такой, что при $n \geq n_0$

$$|z_n| \geq A.$$

Если $\{z_n\}$ — б.б. последовательность и $z_n > 0$ ($z_n < 0$) начиная с некоторого номера, то условимся писать $\lim\ z_n = +\infty$ (соответственно $\lim\ z_n = -\infty$). Подчеркнем, что запись $\lim\ z_n = +\infty$ (или $\lim\ z_n = -\infty$) не означает, что последовательность $\{z_n\}$ имеет предел по определению 1. Это лишь условная запись того факта, что $\{z_n\}$ есть бесконечно большая последовательность, члены которой начиная с некоторого номера являются положительными (соответственно отрицательными) числами.

Впрочем, далее мы увидим, что, дав другое, эквивалентное приведенному выше определение предела и пополнив множество $\mathbb{R}$ всех вещественных чисел двумя «несобственными» числами $+\infty$ и $-\infty$, можно включить б.б. последовательности в число последовательностей, имеющих предел.

Для обозначения того, что $\{z_n\}$ есть последовательность, такая, что $|z_n| \to +\infty$, будем употреблять обозначение $\lim\ z_n = \infty$ или $z_n \to \infty$.

ТЕОРЕМА 6. *Если $\{x_n\}$ — б.м. последовательность и $x_n \neq 0$, $n = 1, 2, \ldots$, то $\left\{\dfrac{1}{x_n}\right\}$ — б.б. последовательность, и если $\{x_n\}$ — б.б. последовательность и $x_n \neq 0$, то $\left\{\dfrac{1}{x_n}\right\}$ — б.м. последовательность.*

Доказательство. Докажем первое утверждение теоремы (второе доказывается аналогично). Пусть A — произвольное положительное число. Положим $\varepsilon = \dfrac{1}{A}$. Так как $\{x_n\}$ — б.м. последовательность, то найдется номер n_0, такой, что $|x_n| < \dfrac{1}{A}$ при $n \geq n_0$. Но тогда для таких номеров имеем $\left|\dfrac{1}{xn}\right| > A$, а это значит, что $\left\{\dfrac{1}{x_n}\right\}$ — б.б. последовательность.

Примеры.

4. $\left\{\dfrac{n-1}{n^2+1}\right\}$ — б.м. последовательность, $\left\{\dfrac{n^2+1}{n-1}\right\}$ — б.б. последовательность (здесь надо рассматривать члены последовательности, начиная со второго).

5. 2^n — б.б. последовательность, $\left\{\dfrac{1}{2^n}\right\}$ — б.м. последовательность.

Докажем еще одну теорему.

Теорема 7. *Если* $\{x_n\}$ — *б.м. последовательность и* $\{y_n\}$ — *ограниченная последовательность (имеющая или не имеющая предел безразлично), то* $\{x_n \cdot y_n\}$ — *б.м. последовательность.*

Доказательство. Так как $\{y_n\}$ — ограниченная последовательность, то существует число $M > 0$, такое, что $|y_n| \leq M$ для всех $n = 1, 2, \ldots$. Пусть задано $\varepsilon > 0$. Так как $x_n \to 0$, то найдется номер n_0, такой, что $|x_n| < \dfrac{\varepsilon}{M}$ при $n \geq n_0$. Но тогда

$$|x_n \cdot y_n| = |x_n| \cdot |y_n| < \frac{\varepsilon}{M} \cdot M = \varepsilon$$

при $n \geq n_0$, а это означает, что $x_n y_n \to 0$.

§ 3. Предельные точки линейных точечных множеств. Признаки существования пределов последовательностей

Рассматривая последовательность $\{x_n\}$ иногда оказывается возможным или по формуле общего члена или по изменению величины x_n при изменении номера n определить, сходится ли последовательность $\{x_n\}$ и к какому пределу. Например, если $x_n = \dfrac{n^2+n}{n^2+2}$, то, преобразовав это равенство к виду $x_n = \dfrac{1+\frac{1}{n}}{1+\frac{2}{n}}$ и заметив, что $\dfrac{1}{n}$ и $\dfrac{2}{n}$ стремятся к нулю при неограниченном возрастании n, можно считать, что $x_n \to 1$. Разумеется, такое предположение надо затем строго обосновать. Однако во многих случаях, особенно при теоретических построениях, важно иметь общие критерии, с помощью которых можно было бы судить, имеет ли данная последовательность предел. Приведем два таких критерия.

Последовательность $\{x_n\}$ называется *монотонно возрастающей*, если $x_n < x_{n+1}$ для любого $n = 1, 2, \ldots$. Если при всех n имеем $x_n \leq x_{n+1}$, то последовательность $\{x_n\}$ называется *неубывающей.* Иногда такую монотонно возрастающую последовательность называют *строго монотонно возрастающей*, а последовательность, для которой $x_n \leq x_{n+1}$ при всех n, — *монотонно возрастающей.*

Лемма. *Если* $\lim\ x_n = +\infty$*, то в последовательности* $\{x_n\}$ *можно изменить нумерацию членов таким образом, что полученная после этого последовательность* $\{y_m\}$ *будет неубывающей и* $\lim\ y_m = +\infty$*.*

Доказательство. В силу леммы 5 (см. § 1 гл. II), достаточно установить возможность такой перенумерации $\{x_n\}$, что полученная после нее последовательность $\{y_m\}$ будет неубывающей. Заметим, что $\forall\ a$ неравенству $x_n \leq a$ может удовлетворять лишь конечное число членов последовательности $\{x_n\}$, а, значит, и на каждом полуинтервале $(k, k{+}1]$ их не более конечного числа. Рассмотрим те члены последовательности $\{y_n\}$ (если они есть), для которых $x_n \leq 1$. Пусть число таких членов равно k_1. Расположив эти члены в порядке неубывания значений x_n и последовательно занумеруем их в этом порядке, обозначив через $y_1, y_1, \ldots, y_{k_1}$. Затем рассмотрим члены последовательности $\{x_n\}$, для которых $1 < x_n \leq 2$ (если такие члены в последовательности имеются) и пусть их число равно k_2. Расположив эти члены в порядке неубывания значений x_n, продолжим начатую нумерацию, обозначил их последовательно через $y_{k_1}, y_{k_1+1}, \ldots, y_{k_1+k_2}$. Затем проделаем то же самое с членами исходной последовательности, для которых выполнено неравенство $2 < x_n \leq 3$ и т.д. В результате приходим к монотонно неубывающей последовательности $\{y_m\}$, полученной из $\{x_n\}$ изменением нумерации ее членов. Лемма доказана.

Замечание. Согласно указанной лемме, последовательность $\{x_n\}$, для которой $x_n \to +\infty$, без ограничения общности можно считать неубывающей, а $\dfrac{1}{x_n}$ — невотрастающей.

Последовательность $\{x_n\}$ называется *ограниченной сверху*, если существует такое число M, что $x_n \leq M$ при всех $n = 1, 2, \ldots$, иными словами, если совокупность всех членов последовательности есть ограниченное сверху числовое множество.

Теорема 1 (критерий существования предела монотонной последовательности). *Если последовательность* $\{x_n\}$ *не убывает и ограничена сверху, то она имеет предел.*

Доказательство. Пусть $\beta = \sup\limits_n\ x_n$, т.е. β есть точная верхняя граница числового множества, составленного из всех членов последовательности. Согласно определению точной верхней границы. имеем:

1) $x_n \leq \beta$ для $n = 1, 2, \ldots$.

2) Для любого $\varepsilon > 0$ найдется член последовательности x_{n_0}, такой, что $x_{n_0} > \beta - \varepsilon$.

Так как последовательность $\{x_n\}$ неубывающая, то тем более $x_n - \beta - \varepsilon$ при $n \geq n_0$.

Таким образом, при $n \geq n_0$

$$\beta - \varepsilon < x_n \leq \beta < \beta + \varepsilon$$

или

$$-\varepsilon < x_n - \beta < \varepsilon,$$

т.е.

$$|x_n - \beta| < \varepsilon.$$

Но это означает, что $x_n \to \beta$. Теорема доказана.

Предлагаем читателю дать определение невозрастающей последовательности и доказать следующую теорему.

Теорема 2. *Всякая невозрастающая ограниченная снизу последовательность имеет предел.*

В качестве примера применения теоремы 1 докажем существование предела последовательности $\left\{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n\right\}$.

При $n \geq 2$ имеем:

$$\begin{gathered}
x_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1 + \frac{n}{1}\cdot\frac{1}{n} + \frac{(n(n-1)}{1\cdot 2}\cdot\Bigl(\frac{1}{n}\Bigr)^2 + \ldots + \\
+\frac{n(n-1)\cdots[n-(k-1)]}{1\cdot 2\cdots k}\left(\frac{1}{n}\right)^k + \ldots + \left(\frac{1}{n}\right)^n = \\
= 1 + 1 + \frac{1}{2!}\frac{n}{n}\frac{n-1}{n} + \ldots + \frac{1}{k!}\frac{n}{n}\frac{n-1}{n}\cdots\frac{n-(k-1)}{n} + \ldots + \\
+\frac{1}{n!}\frac{n}{n}\frac{n-1}{n}\frac{n-2}{n}\cdots\frac{n-(n-1)}{n} = \\
= 2 + \tfrac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right) + \ldots + \frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n}\right) + \ldots + \\
+\frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{n-1}{n}\right).
\end{gathered} \tag{1}$$

Если заменить n на $n+1$, то общий член $\dfrac{1}{k!}\left(1-\dfrac{1}{n}\right)\left(1-\dfrac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\dfrac{k-1}{n}\right)$ суммы, стоящей в правой части равенства (1) увеличится, так как дроби $\dfrac{1}{n}, \dfrac{2}{n}, \ldots, \dfrac{k-1}{n}$ уменьшаются и множители $\left(1-\dfrac{1}{n}\right), \left(1-\dfrac{2}{n}\right), \ldots, \left(1-\dfrac{k-1}{n}\right)$ возрастут.

Кроме того, при переходе от n к $n+1$ число членов суммы увеличится, и так как все члены положительны, то к сумме добавится положительное слагаемое. Поэтому $x_{n+1} > x_n$, т.е. последовательность $\left\{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n\right\}$ монотонно возрастает.

Далее, выражения, стоящие в скобках $\left(1-\dfrac{1}{n}\right), \left(1-\dfrac{2}{n}\right), \ldots, \left(1-\dfrac{k-1}{n}\right)$, меньше единицы. Поэтому

$$x_n < 2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{1}{k!} + \ldots + \frac{1}{n!}. \tag{2}$$

Если теперь в произведении $k!$ все множители, большие 2, заменить на 2, то при $k \geq 3$ получим, что $\dfrac{1}{k!} < \dfrac{1}{2^{k-1}}$, и, следовательно,

$$x_n < 1 + \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{2^{n-1}}\right) =$$

$$1 + \frac{1 - \frac{1}{2^n}}{1 - \frac{1}{2}} < 1 + \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 3.$$

Итак, последовательность $\left\{\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n\right\}$ монотонно возрастает и ограничена сверху, поэтому, согласно теореме 1, имеет предел. Этот предел обозначается буквой e:

$$e = \lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

Из формулы (1) видно, что $x_n > 2$ для любого n, значит, $e = \sup\limits_n x_n > 2$. С другой стороны, $x_n < 3$ при всех n. Поэтому $e = \sup\limits_n x_n 3$. Далее будет показано, как можно вычислить число e с любой степенью точности. В результате вычисления с точностью до пятого десятичного знака получим:

$$e = 2,61828$$

Число e служит основанием системы логарифмов, называемых натуральными. Подробнее о числе e и натуральных логарифмах будет сказано в следующей главе.

Второй критерий существования предела, так называемый критерий Коши, можно доказывать по-разному. Приведем доказательство, опирающееся на понятие предельной точки множества.

Определение 1. *Окрестностью* точки $a \in \mathbb{R}$ называется любой интервал (α, β), содержащий эту точку.

В частности, интервал $(a - \delta, a + \delta)$, где $\delta > 0$, называется δ-окрестностью точки a и обозначается обычно $U_\delta(a)$.

Подчеркнем, что точка a лежит строго внутри каждой своей окрестности.

Определение 2. Точка $a \in \mathbb{R}$ называется *предельной точкой* множества $M \subseteq \mathbb{R}$?, если любая окрестность точки a содержит точки множества M, отличные от точки a.

Точка $b \in M$, не являющаяся предельной для M, называется *изолированной точкой* этого множества.

Множество M может иметь одну предельную точку, или много предельных точек, или не иметь предельных точек. Предельная точка множества может как принадлежать, так и не принадлежать этому множеству.

Примеры.

1. Пусть $\{x_n\}$ — числовая последовательность, сходящаяся к точке a и содержащая бесконечно много различных членов. Тогда a есть предельная точка множества M, элементами которого являются члены последовательности.

Рассмотрим подпоследовательность $\{x_{n_i}\}$, состоящую из попарно различных точек последовательности $\{x_n\}$. По условию, такая подпоследовательность существует. По лемме 3 (см,§ 1 данной главы), $x_{n_i} \to a$. Поэтому если (α, β) — любая окрестность точки a и $\delta = \min\,(a-\alpha, \beta - a)$, то найдется номер n_0, такой, что $|x_{n_i} - a| < \delta$ при $n_i \geq n_0$, т. е.

$$x_{n_i} \in (a-\delta, a+\delta) \subset (\alpha, \beta) \quad \text{при} \quad n_i \geq n_0.$$

Это означает, что произвольно выбранная окрестность (α, β) точки a содержит не одну, а бесконечно иного различных членов последовательности, а так как хотя бы один из них отличен от a, то a — предельная точка множества M.

2. $M = (0,1)$. Тогда каждая точка отрезка $[0,1]$ является предельной для интервала $(0,1)$.

В самом деле, если $a \in [0,1]$ и (α, β) — любая окрестность точки a, то $(\alpha, \beta) \cap (0,1)$ есть промежуток, содержащий точку a и не сводящийся к этой точке, т.е.

$$(\alpha, \beta) \cap \{(0,1) \setminus a\} \neq \emptyset,$$

а это означает, что a — предельная точка для $(0,1)$.

3. Пусть $M = \mathbb{N}$ — множество всех натуральных чисел, M не имеет предельных точек. В самой деле, пусть a — любая точка числовой оси $\mathbb{R}$. Если $a = n$ (натуральному числу), то, положив $\varepsilon = \dfrac{1}{2}$, получим окрестность $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ точки a, которая не содержит ни одной точки множества $\mathbb{N}$, отличной от точки a.

Если a не совпадает ни с одним натуральным числом, примем за ε половину расстояния от a до ближайшего натурального числа. В этом случае $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ не содержит вообще ни одной точки множества. Итак, в обоих случаях найдется такое число $\varepsilon > 0$, что $(a-\varepsilon, a+\varepsilon) \cap (\mathbb{N} \setminus a) = \emptyset$, а это означает, что a не является предельной точкой для множества M.

4. Пусть M — конечное множество точек, множество предельных точек этого множества пусто. Доказательство предоставляется читателю.

Пользуясь понятием окрестности точки, можно придать другую форму определению предела. Так как неравенство $|x_n - a| < \varepsilon$ или эквивалентное ему двойное неравенство $a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon$ означаем, что точка x_n лежит внутри ε-окрестности точки a, то определение предела можно переформулировать следующим образом.

Определение 3. Число a называется *пределом последовательности* $\{x_n\}$, если для любого ε найдется номер n_0, такой, что $n \geq n_0 \ \Rightarrow\ x_n \in U_\varepsilon(a)$.

Покажем теперь, как последовательность, сходящуюся к $+\infty$ или $-\infty$, можно включить в число последовательностей, имеющих предел. Дополним формально множество $\mathbb{R}$ всех вещественных чисел двумя несобственными «числами» $+\infty$ и $-\infty$. Будем считать, что $-\infty$ меньше всех чисел $x \in \mathbb{R}$, $-\infty < +\infty$, а $+\infty$ —

больше всех чисел $x \in \mathbb{R}$. Числовую прямую $\mathbb{R}$, дополненную числами $-\infty$ и $+\infty$, обозначим $\widetilde{\mathbb{R}}$ и введем следующие правила действий о несобственными числами:

1) $-\infty \pm a = -\infty$, $+\infty \pm a = +\infty$, $a \in \mathbb{R}$;

2) $(-\infty) + (-\infty) = -\infty$; $(+\infty) + (+\infty) = +\infty$;

3) $(+\infty) \cdot a = +\infty$, $(-\infty) \cdot a = -\infty$, если $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$; $(+\infty) \cdot a = -\infty$, $(-\infty) \cdot a = +\infty$, если $a \in \mathbb{R}$, $a < 0$;

4) $(\pm\infty) \cdot 0 = 0$;

5) $(+\infty) \cdot (+\infty) = +\infty$, $(-\infty) \cdot (-\infty) = +\infty$, $(+\infty) \cdot (-\infty) = -\infty$;

6) $\dfrac{a}{\pm\infty} = 0$.

Кроме того, сложение и умножение в расширенной числовой области $\widetilde{\mathbb{R}}$ будем считать коммутативными, а операции $(+\infty) - (+\infty)$, $(-\infty) - (-\infty)$, $(+\infty) + (-\infty)$, $\dfrac{\pm\infty}{\pm\infty}$, $\dfrac{a}{0}$, $a \in \mathbb{R}$ — лишенными смысла. Наконец, назовем δ-окрестностью «точки» $+\infty$ множество $U_\delta(+\infty)$ всех чисел $x \in \mathbb{R}$ таких, что $x > \delta$, и δ-окрестностью «точки» $-\infty$ — множество $U_\delta(-\infty) = \{x \in \mathbb{R} : \ x < \delta\}$. Знак числа может быть любой.

Теперь равенство $\lim\ x_n = +\infty$ можно определить так: для любого $\delta \in \mathbb{R}$ найдется номер n_0 такой, что при $n \geq n_0$ $x_n \in U_\delta(+\infty)$.

Это определение формально не отличается от определения конечного предела последовательности.

Можно такие сказать, что точка $+\infty$ является предельной для $\mathbb{N}$. Читатель легко докажет это, воспользовавшись понятием окрестностей бесконечных точек.

В примерах 1 и 2 показано, что если a — предельная точка множества M, то произвольная окрестность точки a содержит бесконечно много точек множества M. Так бывает всегда.

Теорема 3. *Если a предельная точка множества M, то любая окрестность точки a содержит бесконечно много точек множества M.*

Доказательство. Возьмем произвольную окрестность (α, β) точки a и последовательность $\{\varepsilon_n\}$, монотонно стремящуюся к нулю. Рассмотрим окрестность $(a-\delta_1, a+\delta_2)$ этой точки, где число $\delta_1 < \min\ (\varepsilon_1, a-\alpha, \beta-a)$ и в остальном выбрано произвольно. В этой окрестности есть хотя бы одна точка x_1, отличная от точки a множества M. Пусть $\delta_2 < \min\ (\varepsilon_2, |a - x_1|)$. Снова в окрестности $(a - \delta_2, a + \delta_2)$ точки a существует точка $x_2 \in M$, $x_2 \neq a$, отличная от x_1 (рис. 7).

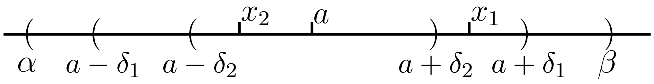

Рис. 7

Положим $\delta_3 < \min\ (\varepsilon_3, |a - x_2|)$ и найдем точку $x_3 \in M$, такую, что $x_3 \in (a - \delta_3, a + \delta_3)$, $x_3 \neq a$ и т.д. Так как все точки $x_1, x_2, x_3, \ldots$ лежат в окрестности (α, β), теорема доказана. Одновременно из множества M нами выделена последовательность, сходящаяся к точке a.

Как уже говорилось, предел последовательности, содержащей бесконечно много различных по величие членов, есть предельная точка для множества членов данной последовательности. Полное обращение этого утверждения неверно. Например, последовательность

$$x_n = \frac{2n + (-1)^n n}{n+1}, \qquad n = 1, 2, 3, \ldots,$$

не имеет предела (ее члены при возрастании n приближаются попеременно то к 1, то к 3), но имеет предельные точки $a = 1$ и $b = 3$, в чем легко убедиться. К этим предельным точкам сходятся подпоследовательности

$$x_{2m+1} = \frac{2m+1}{2m+2} \quad \text{и} \quad x_{2m} = \frac{6m}{2m+1}, \qquad m = 1, 2, , 3, \ldots,$$

выделенные из последовательности. Из доказательства теоремы 3 видно, что если a — предельная точка множества M, то из M всегда можно выделить последовательность, сходящуюся к a, так что рассмотренный пример есть частный случай общей ситуации.

Определение 4. Множество $M \subset \mathbb{R}$ называется *замкнутым*, если оно содержит все свои предельные точки. Например $[0, 1]$ — замкнутое множество.

Определение 5. Множество M называется *открытым*, если каждая точка $x \in M$ входит в это множество вместе с некоторой окрестностью, т.е. если для $\forall\ x \in M\ \exists\ \delta_x > 0$ такое, что $(x - \delta_x, x + \delta_x) \subset M$. Например, $(0, 1)$ — открытое множество.

Легко привести примеры множеств, которые не являются ни замкнутыми, ни открытыми. Таковы, например, полуинтервалы $[a, b)$ и $(a, b]$. В самом деле, в первом из этих множеств предельная точка b не принадлежит полуинтервалу $[a, b)$, а точка a не имеет окрестности (α, β), целиком входящей в полуинтервал $(a, b]$.

Вместе с тем в $\mathbb{R}$ есть два множества, которые являются одновременно открытыми и замкнутыми. Эта вся числовая ось $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$ и пустое множество $\emptyset$. То, что $(-\infty, +\infty)$ и открыто и замкнуто, без труда докажет читатель, а пустое множество будем считать по определению открыто-замкнутым.

Теорема 4. *Пусть $F \subset \mathbb{R}$ — ограниченное замкнутое множество, $\alpha = \inf\ F$, $\beta = \sup\ F$. Тогда $\alpha \in F$ и $\beta \in F$.*

Доказательство. Рассмотрим, например, случай точной верхней границы. Если $\beta \notin F$, то, так как F содержит все свои предельные точки, β не будет предельной точкой для F. Поэтому найдется число $\delta_0 > 0$, такое, что $(\beta - \delta_0, \beta + \delta_0)$ не содержит ни одной точки множества F. С другой стороны, так как $\beta = \sup\ F$, то, по определению точной верхней границы, найдется точка $x' \in F$ такая, что $x' > \beta - \delta_0$ и $x' \leq \beta$, т.е. $x' \in (\beta - \delta_0, \beta + \delta_0)$. Получилось противоречие. Следовательно, $\beta \in F$.

Следующая теорема часто применяется при различных построениях в математическом анализе и других математических дисциплинах.

Теорема 5. (теорема Больцано[3] и Вейерштрасса). *Всякое бесконечное ограниченное множество имеет хотя бы одну предельную точку.*

Доказательство. Пусть M — ограниченное бесконечное множество, $\alpha = \inf\ F$, $\beta = \sup\ F$. Тогда $M \subset [\alpha, \beta]$. Разделим отрезок $[\alpha, \beta]$ пополам. По крайней мере, в одной из этих половин (а может быть и в обеих) содержится бесконечно много точек множества M. Обозначим ту половину отрезка $[\alpha, \beta]$, где точек бесконечно много (а если в обеих, то любую из них), через $[\alpha_1, \beta_1]$. Разделим отрезок $[\alpha_1, \beta_1]$ пополам. Снова, по крайней мере, в одной из его половин будет содержаться бесконечно много точек множества M. Обозначим такую половину через $[\alpha_2, \beta_2]$. Разделим ее снова пополам и т. д. Получим последовательность отрезков $\{[\alpha_n, \beta_n]\}$, каждый из которых содержится внутри предыдущего и последовательность длин которых $\dfrac{\beta - \alpha}{2^n}$ стремятся к нулю. Кроме того, учтем, что каждый отрезок $[\alpha_n, \beta_n]$ в силу его выбора содержит бесконечно много точек множества M.

По лемме Кантора, существует точка a, являющаяся общим пределом последовательности концов этих отрезков:

$$a = \sup\ \alpha_n = \inf\ \beta_n.$$

Возьмем произвольную δ-окрестность $(a - \delta, a + \delta)$ точки a. Тогда, найдется номер n_0, такой, что $\alpha_{n_0} > a - \delta$, $\beta_{n_0} < a + \delta$. Следовательно, $[\alpha_{n_0}, \beta_{n_0}] \subset (a - \delta, a + \delta)$. Так как отрезок $[\alpha_{n_0}, \beta_{n_0}]$ содержит точки множества M (и даже бесконечно много таких точек), то в любой окрестности точки a содержатся точки этого множества, отличные от самой точки a. Поэтому a — предельная точка множества M. Теорема доказана.

Следствие. *Из всякой ограниченной последовательности можно выделить сходящуюся подпоследовательность.*

Доказательство. Если множество M членов последовательности $\{x_n\}$ конечно, то последовательность содержит бесконечно много одинаковых членов и из нее можно выделить стационарную подпоследовательность. В этом случае утверждение доказано. Если M бесконечное множество, то оно ограничено, так как ограничена последовательность и, согласно теореме Больцано–Вейерштрасса, имеет хотя бы одну предельную точку a. Но тогда из M можно выделить подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$, сходящуюся к a. Справедливость утверждения снова доказана.

Теорема 6 (критерий Коши[4] существования предела последовательности). *Для того, чтобы последовательность $\{x_n\}$ имела конечный предел, необходимо и достаточно, чтобы для любого $\varepsilon > 0$ существовал номер n_0, такой, что при $n, m \geq n_0$*

$$|x_n - x_m| < \varepsilon. \tag{K}$$

---

[3] Б. Больцано (1781–1848) — чешский математик.

[4] О. Коши (1789–1857) — французский математик.

Необходимость. Пусть $x_n \to a$. В силу определения предела, для любого $\varepsilon > 0$ найдется номер n_0, такой, что при $n \geq n_0$

$$|x_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Но тогда при $m \geq n_0$

$$|x_m - a| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Из этих неравенств следует, что при $n, m \geq n_0$

$$|x_n - x_m| < \varepsilon$$

Необходимость доказана.

Достаточность. Пусть условие (К) Коши выполнено. Докажем сначала, что последовательность $\{x_n\}$ ограничена. Положим $\varepsilon = \dfrac{1}{2}$. Тогда найдется номер n_0, такой, что

$$|x_n - x_m| < \frac{1}{2} \quad \text{при} \quad n, m \geq n_0.$$

В частности,

$$|x_n - x_{n_0}| < \frac{1}{2}.$$

Отсюда следует, что при $n \geq n_0$

$$|x_n| \leq |x_n - x_{n_0}| + |x_{n_0}| < \frac{1}{2} + |x_{n_0}| = L.$$

Пусть L — наибольшее из чисел $|x_1|, |x_2|, \ldots, |x_{n_0 - 1}|, L_0$, т.е.

$$L = \max\,(|x_1|, |x_2|, \ldots, |x_{n_0-1}|, L_0).$$

Ясно, что $|x_n| \leq L$ при всех n. Ограниченность последовательности доказана.

Согласно следствию теоремы Больцано–Вейерштрасса, из $\{x_n\}$ можно выделить подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$, сходящуюся к некоторому пределу a. Покажем, что вся последовательность $\{x_n\}$ сходится к этому пределу.

Поскольку $x_{n_k} \to a$, для заданного $\varepsilon > 0$ найдется номер n', такой, что при $n_k \geq n'$

$$|x_{n_k} - a| < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{3}$$

С другой стороны, в силу условия Коши, найдется номер n'', такой, что при $n, m \geq n''$

$$|x_n - x_m| < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{4}$$

Пусть $n_0 = \max\,(n', n'')$. При $n, n_k \geq n_0$ выполняются оба неравенства — (3) и (4), поэтому

$$|x_n - a| \leq |x - x_{n_k}| + |x_{n_k} - a| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

и так как число ε было задано произвольно, то $\lim\ x_n = a$, что и требовалось доказать.

Для изучения сходимости конкретных последовательностей критерий Коши применяется редко. Если удалось показать, что $|x_n - x_m| \to 0$ при $n, m \to \infty$, то обычно ясно, к какому числу a приближается x_n при неограниченном увеличении номера n, и надо сразу доказывать, что $|x_n - a| \to 0$. Однако при решении теоретическая вопросов критерий Коши бывает часто полезен.

Покажем с помощью критерия Коши, что уравнение

$$x = a \sin x + b \tag{5}$$

при $|a| < 1$ и любом b имеет решение.

Возьмем произвольное число x_0. Если $x_0 = a \sin x_0 + b$, то решение найдено и дальше делать нечего. Пусть x_0 не является решением уравнения (5). Положим

$$\begin{aligned} &x_1 = a \sin x_0 + b, \\ &x_2 = a \sin x_1 + b, \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ &x_n = a \sin x_{n-1} + b \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{aligned}$$

Если для какого-то n $x_n = x_{n-1}$, то решение найдено. Поэтому будем считать, что $x_n \neq x_{n-1}$ для всех n. Покажем, что последовательность $\{x_n\}$ удовлетворяет условиям Коши. Для этого сначала заметим, что

$$|x_2 - x_1| = |a| \cdot |\sin x_1 - \sin x_0| = 2|a| \left| \sin \frac{x_1 - x_0}{2} \right| \left| \cos \frac{x_1 + x_0}{2} \right|.$$

Как увидим далее (см. пример 2 и замечание в § 4 данной главы), для любых вещественных x

$$|\sin x| \leq |x|.$$

Так как всегда $|\cos x| \leq 1$, то

$$|x_2 - x_1| \leq 2|a| \frac{x_1 - x_0}{2} = |a|\,|x_1 - x_0|. \tag{6}$$

Аналогично

$$|x_3 - x_2| \leq |a| \cdot |x_2 - x_1|.$$

и, следовательно, с учетом неравенства (6)

$$|x_3 - x_2| \leq |a|^2 |x_1 - x_0|. \tag{7}$$

Точно так же получим:

$$|x_4 - x_3| \leq |a|^3 |x_1 - x_0| \tag{8}$$

и т. д. Используя принцип математической индукции, найдем, что

$$|x_{n+1} - x_n| \leq |a|^n |x_1 - x_0|. \tag{9}$$

Пусть теперь $n > m$. В этом случае

$$\begin{aligned} &|x_n - x_m| = \\ &= |(x_n - x_{n-1}) + (x_{n-1} - x_{n-2}) + \ldots + (x_{m+2} - x_{m+1}) + (x_{m+1} - x_m)| \leq \\ &\leq |x_n - x_{n-1}| + |x_{n-1} - x_{n_2}| + \ldots + |x_{m+1} - x_m| \leq \\ &\leq (|a|^{n-1} + |a|^{n-2} + \ldots + |a|^m)|x_1 - x_0| = \\ &= \frac{|a|^m - |a|^n}{1 - |a|}|x_1 - x_0| < \frac{|a|^m}{1 - |a|}|x_1 - x_0|. \end{aligned} \tag{10}$$

Так как $|a| < 1$, то $|a|^m \to 0$ при $m \to \infty$, и, следовательно, для любого $\varepsilon > 0$ найдется номер n_0, такой, что при $m \geq n_0$

$$|a|^m < \frac{(1 - |a|)\varepsilon}{|x_1 - x_0|}. \tag{11}$$

Так как $n > m \geq n_0$, то при таких значениях n и m из (10) и (11) получим

$$|x_n - x_m| < \varepsilon,$$

т. е. последовательность $\{x_n\}$ удовлетворяет условию Коши.

В силу теоремы 6, последовательность $\{x_n\}$ имеет предел ξ. Покажем, что ξ — решение уравнения (5). В самом деле,

$$|\xi - (a \sin \xi + b)| = |(\xi - x_n) + [x_n - (a \sin x_n + b)] + [(a \sin x_n + b) - (a \sin \xi + b)] \leq$$

$$\leq |\xi - x_n| + |x_n - (a \sin x_n + b)| + ||a \sin x_n - \sin \xi)|.$$

Как и выше, $|a(\sin x_n - \sin \xi)| \leq |a|\,|x_n - \xi|$. Заметим, что $a \sin x_n + b = x_{n+1}$, получим

$$|\xi - (a \sin \xi + b)| \leq (|a| + 1)|\xi - x_n| + |x_{n+1} - x_n| \to 0.$$

Поэтому для любого $\varepsilon > 0$ найдется номер n_0, такой, что при $n \geq n_0$

$$|\xi - (a \sin \xi + b)| < \varepsilon.$$

Так как число ε произвольное, а слева в этом неравенстве стоит фиксированное число, то неравенство возможно лишь при $\xi = a \sin \xi + b$.

Существование решения уравнения (3) доказано.

Можно показать, что это решение единственно.

§ 4. Предел вещественной функции вещественного переменного

Предел числовой последовательности является частным случаем более общего понятия — предела функции. Это понятие, как и понятие предела последовательности — одно из важнейших в математическом анализе.

Определение 1. Пусть на множестве $X \subset \mathbb{R}$, имеющем предельную точку a, задана функция f. Число b называется *пределом функции f при x, стремящемся к a*, в символах $b = \lim\limits_{x \to a} f(x)$, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется число $\delta > 0$, такое, что для любого $x \in X \setminus a$, удовлетворяющего неравенству $|x - a| < \delta$, будем иметь $|fx) - b| < \varepsilon$.

Так как неравенства $|x-a| < \delta$ и $|f(x)-b| < \varepsilon$ означают, что $x \in U_\delta(a)$ и $f(x) \in U_\varepsilon(b)$, где $U_\delta(a)$ и $U_\varepsilon(b)$ — окрестности точек a и b, то предыдущее определение предела функции может быть переформулировано следующим образом.

Определение 1$'$. Пусть на множестве $X \subset \mathbb{R}$, имеющем предельную точку a, задана функция. Число b называется *пределом функции f при $x \to a$*, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется чисто $\delta > 0$, такое, что из $x \in U_\delta(a) \cap (X \setminus a)$ следует $f(x) \in U_\varepsilon(b)$.

В этом определении a и b могут быть и бесконечными несобственными числами.

Для бесконечных пределов и для пределов при x, стремящихся к $+\infty$ или $-\infty$, используются обозначения

$$\lim_{x \to a} f(x) = -\infty, \qquad \lim_{x \to +\infty} f(x) = b, \qquad \lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$$

и т.п.

Если не пользоваться понятием окрестности бесконечных точек, то, например, запись $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = b$ означает следующее: для любого $\varepsilon > 0$ найдется число $\delta > 0$, такое, чти всякий раз, когда $x \in X$ и $x > \delta$, будем иметь $|f(x) - b| < \varepsilon$.

Тот факт, что число b есть предел функции $f(x)$ при $x \to a$ в случае конечных a и b, грубо говоря, означает, что при x, достаточно близких к a, значение функции $f(x)$ будет сколь угодно мало отличаться от b. Это позволяет в ряде случаев предположить, чему будет равен $\lim\limits_{x \to a} f(x)$. Разумеется, предположение о значении $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ надо подтвердить строгим доказательством.

Примеры.

1. Пусть $f(x) = x^3$, $-2 < x < 2$ и необходимо найти $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$. Ясно, что по мере приближения x к 2 функция $f(x)$ приближается к 8. Докажем это.

Поскольку $|x| < 2$ во всем интервале изменения независимой переменной, то

$$|f(x) - 8| = |x^3 - 8| = |x - 2|\,|x^2 + x + 4| \le |x - 2|\,(|x|^2 + 2|x| + 8) \le$$

$$\le |x - 2|(4 + 2 \cdot 2 + 4) = 12|x - 2|.$$

Если задано произвольное число $\varepsilon > 0$, то, взяв $\delta = \dfrac{\varepsilon}{12}$, найдем, что при $|x-2| < \dfrac{\varepsilon}{12}$

$$|x^3 - 8| < 12 \cdot \frac{\varepsilon}{12} = \varepsilon.$$

Равенство $\lim\limits_{x \to 2} x^3 = 8$ доказано.

2. Пусть $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$ для любых $x \neq 0$. Требуется найти $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x}$. Чертеж (рис. 8) показывает, что чем меньше угол x, тем меньше хорда ABD и дуга ACD отличаются друг от друга, т.е. отношение

$$\frac{ABD}{ACD} = \frac{2AB}{2AC} = \frac{\sin x}{x}$$

приближается к 1, когда x приближается к нулю. Поэтому естественно ожидать, что

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1,$$

но так как геометрическая интуиция иногда бывает ошибочной, это равенство нуждаемся в строгом обосновании.

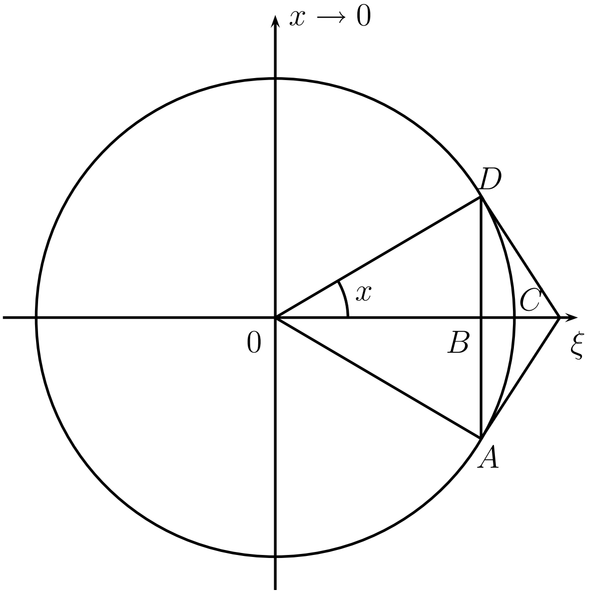

Рис. 8

Имеем

$$ABD < ACD < AED$$

или

$$2\sin x < 2x < 2\operatorname{tg} x.$$

Рассмотрим сначала положительные значения x, мало отличающиеся от нуля (во всяком случае, меньшие, чем $\dfrac{\pi}{2}$). Тогда $\sin x > 0$ и предыдущую систему неравенств можно преобразовать к виду

$$1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x}$$

или

$$\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1.$$

Умножим все члены этой системы неравенств на -1. Получим:

$$-1 < -\frac{\sin x}{x} < -\cos x,$$

откуда, прибавив ко всей частям неравенств по единице, будем иметь:

$$0 < 1 - \frac{\sin x}{x} < 1 - \cos x$$

или

$$\left|1 - \frac{\sin x}{x}\right| < 1 - \cos x = 2\sin^2\frac{x}{2}. \tag{1}$$

Но для рассматриваемых нами значений x верно неравенство $\sin^2\frac{x}{2} < \sin\frac{x}{2} < \frac{x}{2}$, тогда из неравенства (1) получим

$$\left|1 - \frac{\sin x}{x}\right| < 2 \cdot \frac{x}{2} = x.$$

Теперь ясно, что заданного числа $\varepsilon > 0$, которое можно считать меньшим, чем $\frac{\pi}{2}$, взять $\delta = \varepsilon$, то при $0 < x < \delta$

$$\left|\frac{\sin x}{x} - 1\right| < \varepsilon. \tag{2}$$

Если $x < 0$, то, в силу нечетности функции $\sin x$,

$$\frac{\sin x}{x} == \frac{\sin(-|x|)}{-|x|} == \frac{-\sin|x|}{-|x|} = \frac{\sin|x|}{|x|}.$$

Следовательно, при $|x| < \varepsilon$ по-прежнему

$$\left|\frac{\sin x}{x} - 1\right| < \varepsilon.$$

Итак, для любых x, удовлетворяющих неравенству $0 < |x| < \varepsilon$,

$$\left|\frac{\sin x}{x} - 1\right| < \varepsilon$$

т.е.

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

Замечание. Как было установлено, если $0 < |x| < \frac{3}{2} < \frac{\pi}{2}$, то $0 < \left|\frac{\sin x}{x}\right| < 1$. Но если $|x| \geq \frac{3}{2}$, то, так как $|\sin x| \leq 1$ для всех x, снова $\frac{|\sin x|}{|x|} < 1$. Таким образом, для всех значений $x \neq 0$

$$0 < \left|\frac{\sin x}{x}\right| < 1.$$

3. Рассмотрим функцию

$$f(x) = (-1)^{E\left(\frac{1}{x}\right)}$$

с областью определения $(0,1)$. Покажем, что не существует $\lim\limits_{x\to 0}(-1)^{E\left(\frac{1}{x}\right)}$. В самом деле, если бы этот предел существовал и равнялся некоторому числу b, то для $\varepsilon_0 = \dfrac{1}{2}$ нашлось бы число $\delta_0 > 0$, такое, что

$$\left|(-1)^{E\left(\frac{1}{x}\right)} - b\right| < \frac{1}{2} \quad \text{при} \quad |x| < \delta_0.$$

Тогда для любых двух точек x' и x'', удовлетворяющих неравенствам $|x'| < \delta_0$ и $|x''| < \delta_0$ имели бы

$$\left|(-1)^{E\left(\frac{1}{x'}\right)} - (-1)^{E\left(\frac{1}{x''}\right)}\right| \le \left|(-1)^{E\left(\frac{1}{x'}\right)} - b\right| + \left|b - (-1)^{E\left(\frac{1}{x''}\right)}\right| < \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1. \quad (3)$$

Возьмем натуральное число n, так, чтобы $\dfrac{1}{n} < \delta_0$, и пусть $x' = \dfrac{1}{2n}$, $x'' = \dfrac{1}{2n+1}$. Тогда $|x'| < \delta_0$, $|x''| < \delta_0$, в то время как

$$\left|(-1)^{E\left(\frac{1}{x'}\right)} - (-1)^{E\left(\frac{1}{x''}\right)}\right| = \left|(-1)^{E(2n)} - (-1)^{E(2n+1)}\right| = \left|(-1)^{2n} - (-1)^{2n+1}\right| = 2. \quad (4)$$

Соотношения (3) и (4) противоречат друг другу, следовательно, $\lim\limits_{x\to 0}(-1)^{E\left(\frac{1}{x}\right)}$ не существует. Это объясняется следующим образом: когда x приближается к нулю, $\dfrac{1}{x}$ бесчисленное число раз принимает как четные, так и нечетные значения, так что $(-1)^{E\left(\frac{1}{x}\right)}$ бесчисленное число раз делается равный то $+1$, то -1 и значения $(-1)^{E\left(\frac{1}{x}\right)}$ не приближаются ни к какому определенному числу.

4. Пусть $f(x) = \dfrac{x}{x+1}$, $x > 0$. Если значение x очень велико, то x и $x+1$ мало отличаются друг от друга, и естественно ожидать, что

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{x+1} = 1.$$

Докажем это. Имеем

$$\left|\frac{x}{x+1} - 1\right| = \left|\frac{x - x + 1}{x+1}\right| = \frac{1}{1+x}.$$

Пусть число $\varepsilon > 0$ — любое. Можно считать, что $\varepsilon < 1$. В силу (5), неравенство $\left|\dfrac{x}{x+1} - 1\right| < \varepsilon$ сводится к неравенству $\dfrac{1}{x+1} < \varepsilon$, которое будет удовлетвориться, если $1 < \varepsilon(x+1)$, т.е. если $x > \dfrac{1-\varepsilon}{\varepsilon}$. Поэтому при $\delta = \dfrac{1-\varepsilon}{\varepsilon}$ будем иметь $\left|\dfrac{x}{x+1} - 1\right| < \varepsilon$, если $x > \delta$. Таким образом, равенство $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{x+1} = 1$ доказано.

5. Пусть $f(x) = \operatorname{tg} x$, $0 \le x < \dfrac{\pi}{2}$. Имеем

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \operatorname{tg} x = +\infty.$$

6. Пусть $f(x) = \dfrac{1}{1-x}$, $0 < x < 1$. Тогда $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = +\infty$. Читатель без труда докажет эти утверждения.

Теперь поясним, почему предел последовательности является частным случаем предела функции. Рассмотрим функцию $f(n)$, областью определения которой является множество $\mathbb{N}$ натуральных чисел. Это множество имеет предельную точку $+\infty$, и поэтому имеет смысл понятие предела $\lim\limits_{n\to\infty} f(n)$. Если $b = \lim\limits_{n\to\infty} f(n)$, то, согласно определению 1 данного параграфа для любого $\varepsilon > 0$ найдется $A > 0$, такое, что

$$|f(n) - b| < \varepsilon \quad \text{при} \quad n > A. \tag{6}$$

Если обозначить $f(n)$ через a_n и положить $n_0 E(A) + 1$, то неравенство (6) примет вид

$$|a_n - b| < \varepsilon \quad \text{при} \quad n > n_0.$$

Это и есть определение предела последовательности.

Принципиальное значение для дальнейших рассуждений имеет то обстоятельство, что понятие предела функции может быть сведено к понятию предела последовательности.

Теорема 1. *Для того, чтобы число b было пределом функции $f(x)$ при $x \to a$, необходимо и достаточно, чтобы для любой последовательности $\{x_n\} \subset X \setminus a$ и сходящейся к a, последовательность $\{f(x_n)\}$ сходилась к b.*

Докажем теорему для случая конечного b.

Необходимость. Пусть существует $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$. Для $\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ \delta > 0$ такое, что $|f(x) - b| < \varepsilon$ при $x \in (X \setminus a) \cap (a\delta, a + \delta)$. Возьмем любую последовательность $\{x_n\} \subset X \setminus a$ и сходящуюся к a. Так как $x_n \to a$, то для данного $\delta > 0$ найдется n_0, такое, что $|x_n - a| < \delta$ при $n \geq n_0$. Но тогда $|f(x_n) - b| < \varepsilon$ при $n \geq n_0$, т.е. $f(x_n) \to b$, и необходимость доказана.

Достаточность. Пусть из того, что $x_n \to a$, $x_n \in X \setminus a$ следует $f(x_n) \to b$. Предположим, что b не является пределом функции $f(X)$ по определению 1. Тогда найдется $\varepsilon_0 > 0$, такое, что при любых $\delta > 0$ будет существовать $x_\delta \in X \setminus a$, для которых $|f(x_\delta) - b| > \varepsilon_0$, хотя $|x_\delta - a| < \delta$. Положим $\delta = \dfrac{1}{n}$ и обозначим соответствующее значения x_δ аргумента через x_n. Имеем $|x_n - a| < \dfrac{1}{n}$, т.е. $x_n \to a$, в то время как $|f(x_n) - b| > \varepsilon_0$, т.е. $f(x_n) \not\to b$. Это противоречит условию, следовательно, предположение, что b, не есть предел $f(x)$ при $x \to a$, неверно,и достаточность доказана.

В качестве примера применения теоремы 1 докажем, что

$$\lim_{x\to 0} (1 + x)^{\frac{1}{x}} = e.$$

Пусть $x_n \to 0$. Можно считать, что $|x_n| < 1$. Предположим сначала, что $x_n > 0$. Обозначим через m_n целую часть $\dfrac{1}{x_n}$ так, что

$$m_n \leq \frac{1}{x_n} < m_n + 1. \tag{7}$$

Таким образом,

$$\frac{1}{m_n+1} < x_n \leq \frac{1}{x_n}. \tag{8}$$

Из неравенств (7) и (8) следует, что

$$\left(1+\frac{1}{m_n+1}\right)^{m_n} < (1+x_n)^{\frac{1}{x_n}} < \left(1+\frac{1}{m_n}\right)^{m_n+1}. \tag{9}$$

(Что такое a^x при $a > 1$ для любых вещественных чисел x и то, что $a^{x_1} < a^{x_2}$, если $x_1 < x_2$, будет строго установлено далее).

Неравенства (9) можно переписать в следующем виде:

$$\frac{1}{1+\frac{1}{m_n+1}}\left(1+\frac{1}{m_n+1}\right)^{m_n+1} < (1+x_n)^{\frac{1}{x_n}} < \left(1+\frac{1}{m_n}\right)\left(1+\frac{1}{m_n}\right)^{m_n}. \tag{10}$$

Известно, что любая подпоследовательность сходящейся последовательности сходится и притом к тому же пределу, что и вся последовательность. Поэтому из равенства $\lim\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n = e$ следует, что $\left(1+\dfrac{1}{m_n}\right)^{m_n}$ и $\left(1+\dfrac{1}{m_n+1}\right)^{m_n+1}$ стремятся к e при $n \to \infty$. Далее, $\left(1+\dfrac{1}{m_n}\right) \to 1$, $\left(1+\dfrac{1}{m_n+1}\right)^{m_n+1} \to 1$. Поэтому из неравенства (10) и леммы 4 (см. § 1) следует, что $(1+x_n)^{\frac{1}{x_n}} \to e$.

Если $x_n \to 0$ и $x_n < 0$, то положим $x_n + 1 = \dfrac{1}{x'_n - 1}$, т.е. $x'_n = -\dfrac{x_n}{1+x_n}$ и $x_n = -\dfrac{x'_n}{1+x'_n}$. Так как $x'_n > 0$ и $x'_n \to 0$, то, согласно доказанному, $(1+x'_n)^{\frac{1}{x'_n}} \to e$. Но

$$(1+x_n)^{\frac{1}{x_n}} = \left(\frac{1}{1+x'_n}\right)^{-\frac{1+x'_n}{x'_n}} = (1+x'_n)^{\frac{1+x'_n}{x'_n}} = (1+x'_n)^{\frac{1}{x'_n}+1} = (1+x'_n)^{\frac{1}{x'_n}}(1+x'_n).$$

Поэтому снова

$$(1+x_n)^{\frac{1}{x_n}} \to e \cdot 1 = e.$$

Предположим, наконец, что $x_n \to 0$, принимая как положительные, так и отрицательные значения, причем те и другие — бесконечное число раз. (Если положительных или отрицательных значений x_n конечное число, т.е. все x_n начиная с некоторого номера имеют один знак, то этот случай уже рассмотрен.)

Пусть $\{y_k\}$ — подпоследовательность, состоящая из положительных членов последовательности $\{x_n\}$, и $\{z_m\}$ — подпоследовательность из отрицательных членов этой последовательности. Тогда $y_k \to 0$, $y_k > 0$, следовательно, $(1+y_k)^{\frac{1}{y_k}} \to e$, и для любого $\varepsilon > 0$ найдется номер k_0, такой, что при $k \geq k_0$

$$|(1+y_k)^{\frac{1}{y_k}} - e| < \varepsilon.$$

Аналогичным образом найдется номер m_0, такой, что при $m \geq m_0$

$$|(1+z_m)^{\frac{1}{z_m}} - e| < \varepsilon.$$

Пусть $n_0 = k_0 + m_0$ и $n \geq n_0$. Если для такого n число $x_n > 0$, то $x_n = y_k$ и $k \geq k_0$, откуда

$$|(1+x_n)^{\frac{1}{x_n}} - e| = |(1+y_k)^{\frac{1}{y_k}} - e| < \varepsilon.$$

Если $x_n < 0$, то $x_n = z_m$, причем $m \geq m_0$, и снова

$$|(1+x_n)^{\frac{1}{x_n}} - e| = |(1+z_m)^{\frac{1}{z_m}} - e| < \varepsilon.$$

Но это означает, что

$$(1+x_n)^{\frac{1}{x_n}} \to e.$$

Итак, для любой последовательности $\{x_n\}$, сходящейся к нулю, $(1+x_n)^{\frac{1}{x_n}} \to e$. Согласно теореме 1, отсюда следует, что $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}$ существует и равен e.

Число e встречается как в теоретической математике, так и в ее приложениях. Приведен два примера.

Примеры.

7. Сберкассы, принимая вклады от населения, начисляют на внесенные деньги проценты. Если $\alpha = \dfrac{p\%}{100}$ — процентная такса и начисление процентов производится через год после внесения вклада, то это значит, что через год a рублей превратятся в $a_1 = a + \alpha a = (1+\alpha)a$ рублей, через два года — в $a_2 = (1+\alpha)a_1 = (1+\alpha)^2 a$ рублей, по истечении k лет — в $a_k = (1+\alpha)^k a$ рублей.

Если начисление процентов производится не один, а n раз в год, то по из течении $\dfrac{1}{n}$ года вклад превращается в $\left(1+\dfrac{\alpha}{n}\right)a$ рублей, через год — в $\left(1+\dfrac{\alpha}{n}\right)^n a$ рублей, через k лет — в $\left(1+\dfrac{\alpha}{n}\right)^{kn} \alpha$ рублей. Если уменьшаясь промежуток времени $\dfrac{1}{n}$, через который начисляются проценты, то в пределе при $n \to \infty$ получим, что проценты начисляются непрерывно, и через k лет вклад a станет следующий:

$$a \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{\alpha}{n}\right)^{kn} = a \lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{\alpha}{n}\right)^{\frac{n}{\alpha}}\right]^{k\alpha} = ae^{k\alpha}.$$

Здесь использовано равенство $\lim\limits_{x\to a}[f(x)]^\beta = [\lim\limits_{x\to a} f(x)]^\beta$, которое будет доказано далее.

8. Согласно законам ядерной физики, в процессе радиоактивного распада количество атомов, распадающихся в единицу времени, например в 1 секунду, пропорционально количеству всех атомов распадающегося вещества, имеющегося на данный момент времени. Коэффициент пропорциональности различен для разных веществ и характеризует скорость распада.

Пусть в данный момент имеется N_0 атомов радиоактивного вещества. По истечении 1 секунды их уже будет $N_1 = N_0 - kN_0 = (1-k)N_0$, где k — коэффициент распада. Однако этот подсчет слишком грубый, так как в течение 1 секунды количество распадающегося вещества не бывает постоянным, а все время уменьшается. Более точный результат можно получить, если разделить секунду на n частей и подсчитать число оставшихся атомов через каждые $\frac{1}{n}$ секунды. В результате подсчета получим:

$$N_{\frac{1}{n}} = \left(1 - \frac{k}{n}\right)N_0, \quad N_{\frac{2}{n}} = \left(1 - \frac{k}{n}\right)N_{\frac{1}{n}} = \left(1 - \frac{k}{n}\right)^2 N_0, \quad \dots,$$

$$N_{\frac{n-1}{n}} = \left(1 - \frac{k}{n}\right)^{n-1} N_0, \quad N_1 = \left(1 - \frac{k}{n}\right)^n N_0.$$

Подсчет будет тем более точным, чем больше n, и в пределе при $n \to \infty$ получится точное значение числа атомов, оставшихся после 1 секунды распада:

$$N_1 = \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{k}{n}\right)^n N_0 = N_0 \lim_{n\to\infty} \left[\left(1 - \frac{k}{n}\right)^{-\frac{n}{k}}\right]^{-k} = N_0 e^{-k}.$$

Легко подсчитать, что после t секунд остается

$$N_t = N_0 e^{-kt}$$

атомов.

Теоремой 1 удобно пользоваться для доказательства того, что не существует $\lim\limits_{x\to a} f(x)$. Покажем, например, что $f(x) = \sin\frac{1}{x}$ не стремится ни к какому пределу при $x \to 0$. Для этого надо найти, по крайней мере, две последовательности $\{x'_n\}$ и $\{x''_n\}$, сходящиеся к нулю, но такие, что $\{f(x'_n)\}$ и $\{f(x_n)''\}$ сходятся к различным пределам. Такие последовательности легко построить. Положим, $x'_n = \frac{1}{n\pi}$. Тогда $f(x'_n) = \sin n\pi = 0$ для любого n, и, следовательно, $\lim\limits_{n\to\infty} f(x'_n) = 0$. Пусть $x''_n = \frac{1}{(4n+1)\frac{\pi}{2}}$. В этом случае

$$f(x''_n) = \sin\left[(4n+1)\frac{\pi}{2}\right] = \sin\frac{\pi}{2} = 1,$$

т.е. $\lim\limits_{n\to\infty} f(x''_n) = 1$. Итак, для двух последовательностей аргументов, сходящихся к нулю, последовательности значений функций имеют разные пределы, что было бы невозможно, если бы $\lim\limits_{n\to\inf} f(x)$ существовал.

С помощью теоремы 1 и соответствующих теорем о пределах последовательностей доказывается следующая теорема.

Теорема 2. *Пусть существуют* $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ *и* $\lim\limits_{x\to a} g(x)$. *Тогда существую пределы при* $x \to a$ *суммы и произведения этих функций, а если* $\lim\limits_{x\to a} g(x) \neq 0$, *то существует и предел частного* $\frac{f(x)}{g(x)}$. *При этом*

$$\lim_{x\to a} [f(x) + g(x)] = \lim_{x\to a} f(x) + \lim_{x\to a} g(x),$$

$$\lim_{x\to a} [f(x) \cdot g(x)] = \lim_{x\to a} f(x) \cdot \lim_{x\to a} g(x),$$

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)}.$$

Если $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b > 0$ *(*$b < 0$*), то* $\exists\delta > 0$ *такое, что*

$$f(x) > \frac{b}{2} > 0 \quad \left(< \frac{b}{2} < 0 \right) \quad \textit{для всех} \quad x \in (a-\delta, a+\delta) \cap (X \setminus a).$$

Впрочем, эту теорему легко доказать непосредственно, исходя из определения 1 предела функции. Рекомендуем проделать это.

Введем понятие об односторонних пределах фикции. Для этого, нам понадобятся понятие односторонней, и двусторонней предельных точек множества.

Определение 2. Точка $a \in \mathbb{R}$ называется *двусторонней предельной точкой* множества $X \subset \mathbb{R}$, если для любого $\delta > 0$

$$(a-\delta, a) \cap X \neq \emptyset \quad \text{и} \quad (a, a+\delta) \cap X \neq \emptyset,$$

т.е. если в любой окрестности точки a есть точки множества X, лежащие как слева, так и справа от точки a.

Точка a называется *левосторонней предельной точкой* множества X, если $(a-\delta, a) \cap X \neq \emptyset$ для любого $\delta > 0$. Аналогично определяется *правосторонняя предельная точка.*

Из приведенных определений следует, что двусторонняя предельная точка является одновременно лево- и правосторонней, верно и обратное. Однако могут быть односторонние предельные точки, не являющиеся двусторонними. Такова, например, точка $a = 0$ для множества $X = \left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots\right\}$.

Определение 3. Пусть a — левосторонняя предельная точка множества X. Число b называется *пределом слева функции* $f: X \to \mathbb{R}$ *при* $x \to a$, если $\forall\, \varepsilon > 0$ $\exists\, \delta > 0$, такое, что при $|x-a| < \delta$, $x < a$ $\;|f(x) - b| < \varepsilon$. В этой случае используют обозначения

$$b = \lim_{x\to a-0} f(x) \quad \text{или} \quad b = f(a-0).$$

Аналогично определяется *предел справа функции* $f: X \to \mathbb{R}$ в правосторонней предельной точке множества X. Такой предел обозначается $b = \lim\limits_{x\to a+0} f(x)$ или $f(a+0)$.

Читатель легко сформулирует определение символов

$$\lim_{x\to a+0} f(x) = \infty, \quad \lim_{x\to a-0} f(x) = \infty \quad \text{и др.}$$

Примеры.

9. Пусть $X = (0, 2)$ и $f(x) = E(x)$. Тогда $f(1-0) = 0$, $f(1+0) = 1$.

В самой деле, если $0 < x < 1$, то $f(x) = 0$, и, следовательно, для любого $\varepsilon > 0$

$$|f(x) - 0| = |0 - 0 \; < \varepsilon \quad \text{при} \quad x < 1,\ |x-0| = x < 1.$$

Если же $1 < x < 2$, то $f(x) = 1$, и поэтому

$$|f(x) - 1| = |1 - 1| < \varepsilon \quad \text{при} \quad x > 1,\ |x - 1| < 1.$$

10. Этот пример более сложный. Пусть

$$X = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty) \quad \text{или} \quad f(x) = \frac{1}{1 + 2^{\frac{1}{x}}}.$$

Предположим, что $x > 0$. Имеем $f(x) = \dfrac{1}{1 + 2^{\frac{1}{x}}} < \dfrac{1}{2^{\frac{1}{x}}}$. Если задано число $\varepsilon > 0$, которое можно считать меньше 1, то неравенство $\dfrac{1}{2^{\frac{1}{x}}} < \varepsilon$ равносильно неравенству $2^{\frac{1}{x}} > \dfrac{1}{\varepsilon}$, или $\dfrac{1}{x}\log 2 > \log\left(\dfrac{1}{\varepsilon}\right)$, или $x < \dfrac{\log 2}{\log\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)}$.

Таким образом, если положить $\delta = \dfrac{\log 2}{\log\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)}$, то при $|x - 0| = x < \delta$ будем иметь $|f(x) - 0| = f(x) < \varepsilon$, а это означает, что $\lim\limits_{x \to +0} \dfrac{1}{1 + 2^{\frac{1}{x}}} = 0$.

Пусть теперь $x < 0$, т.е. $x = -|x|$. Тогда

$$f(x) = \frac{1}{1 + 2^{\frac{1}{x}}} = \frac{1}{1 + 2^{\frac{1}{-|x|}}} = \frac{2^{\frac{1}{|x|}}}{2^{\frac{1}{|x|}} + 1}.$$

Отсюда

$$|f(x) - 1| = 1 - \frac{2^{\frac{1}{|x|}}}{2^{\frac{1}{|x|}}} = \frac{1}{2^{\frac{1}{|x|}}} < \frac{1}{2^{\frac{1}{|x|}}}.$$

В этом случае, как и раньше,

$$|f(x) - 1| < \varepsilon \quad \text{если} \quad x < 0,\ |x| < \frac{\log 2}{\log\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)}.$$

Следовательно,

$$\lim_{x \to -0} \frac{1}{1 + 2^{\frac{1}{x}}} = 1.$$

Лемма. *Пусть $f : X \to \mathbb{R}$, a — двусторонняя предельная точка множества X. Для того, чтобы существовал $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$ необходимо и достаточно, чтобы существовали $\lim\limits_{x \to a-0} f(x)$, $\lim\limits_{x \to a+0} f(x)$ и выполнялось равенство*

$$\lim_{x \to a-0} f(x) = \lim_{x \to a+0} f(x) = b.$$

Необходимость. Если существует $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$, то для $\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \delta > 0$, такое, что $|f(x) - b| < \varepsilon$ всякий раз, когда $x \in X \setminus a$ и $|x - a| < \delta$. Но тогда тем более $|f(x) - b| < \varepsilon$, если $x \in X$, $x > a$, $|x - a| < \delta$, т.е. $b = \lim\limits_{x \to a+0} f(x)$. Аналогичным образом убеждаемся, что $b = \lim\limits_{x \to a-0} f(x)$.

Достаточность. Пусть $f(a+0) = f(a-0) = b$. Для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta_1 > 0$, такое, что

$$|f(x) - b| < \varepsilon, \quad \text{если} \quad x \in X \cap (a - \delta_1, a). \tag{11}$$

Аналогично найдется $\delta_2 > 0$, такое, что

$$|f(x) - b| < \varepsilon, \quad \text{если} \quad x \in X \cap (a, a + \delta_2). \tag{12}$$

Пусть $\delta = \min\,(\delta_1, \delta_2)$, $x \neq a$ и $|x - a| < \delta$. Если $x \in (a - \delta, a)$, то в силу (11)

$$|f(x) - b| < \varepsilon.$$

Если $x \in (a, a+\delta)$, то это же неравенство выполняется в силу (12). Следовательно, для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta > 0$, такое, что $|f(x) - b| < \varepsilon$ при $x \in (X \setminus a) \cap (a - \delta, a + \delta)$, т.е.

$$b = \lim_{x \to a}\, f(x).$$

Следствие. *Для того чтобы число b было пределом $f(x)$ при $x \to a$, необходимо и достаточно, чтобы для любой последовательности $\{x'_n\}$, сходящейся к а справа, $f(x'_n) \to b$ и для любой последовательности $\{x''_n\}$, сходящейся к а слева, $f(x''_n) \to b$.*

Теорема 3 (о существовании односторонних пределов у монотонной функции). *Пусть $f:\ X \to \mathbb{R}$, а двусторонняя предельная точка множества X. Если функция f монотонна и ограничена на X, то $f(a{+}0)$ и $f(a{-}0)$ существуют и конечны.*

Доказательство. Предположим, например, что f монотонно возрастает на X, и докажем, что $f(a+0)$ существует.

Пусть $m = \inf\ f(x)$. Рассмотрим значения f на множестве $(a, \infty) \cap X = X_1$. Эти значения ограничена в совокупности тем же числом m снизу. Пусть $\alpha = \inf\limits_{X_1}\ f(x)$. Для любого $\varepsilon > 0$ найдется $x' \in (a, \infty) \cap X$, такое, что $\alpha \leq f(x') < \alpha + \varepsilon$. Обозначим $x' - a$ через δ. Если $x \in X$, $x - a < \delta$, то $x < x'$, и так как f возрастающая функция, то $f(x) \leq f(x')$. Следовательно,

$$\alpha \leq f(x) < \alpha + \varepsilon.$$

Итак, для $\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ \delta > 0$, такое, что из $x \in X$, $x > a$, $x - a < \delta$ следует $|f(x) - \alpha| < \varepsilon$, а это означает, что $\alpha = \lim\limits_{x \to a+0}\ f(x)$. Аналогично доказывается существование $\lim\limits_{x \to a-0}\ f(x)$.

Следствие. *Если функция $f:\ (a, b) \in \mathbb{R}$ монотонна и ограничена на (a, b), то существуют пределы*

$$\lim_{x \to a}\ f(x) \quad \text{и} \quad \lim_{x \to b}\ f(x).$$

Это непосредственно вытекает из теоремы 3.

Рекомендуем читателю исследовать случаи, когда a — правая (левая) предельная точка множества X и когда монотонная функция $f: X \to \mathbb{R}$ неограничена на $(-\infty, a) \cap X$ (соответственно на $X \cap (a, \infty)$).

Теорема 4 (критерий Коши существования предела функции). *Для того чтобы функция $f: X \to \mathbb{R}$ имела предел в точке a, являющейся предельной для множества X, необходимо и достаточно, чтобы $\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ \delta > 0$, такое, что*

$$\text{для любых}\quad x', x'' \in (X \setminus a) \cap (a-\delta, a+\delta) \qquad |f(x') - f(x'')| < \varepsilon. \tag{K}$$

Необходимость. Пусть существует $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$. Тогда для $\forall\ \varepsilon > 0$ существует число $\delta > 0$, такое, что

$$|f(x') - b| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{при} \quad x' \in (X \setminus a) \cap (a-\delta, a+\delta).$$

Точно так же

$$|f(x'') - b| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{при} \quad x'' \in (X \setminus a) \cap (a-\delta, a+\delta).$$

Поэтому

$$|f(x') - f(x'')| \le |f(x') - b| + |f(x'') - b| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

для

$$x', x'' \in (X \setminus a) \cap (a-\delta, a+\delta).$$

Необходимость условия (K) Коши доказана.

Достаточность. Предположим, что условие (K) выполнено. Возьмем произвольную последовательность $\{x_n\} \in X \setminus a$, такую, что $x_n \to a$. По заданному $\varepsilon > 0$, в силу условия (K), найдем $\delta > 0$, такое, что при $|x' - a| < \delta$, $|x'' - a| < \delta$, $x', x'' \in (X \setminus a) \cap (a-\delta, a+\delta)$

$$|f(x') - f(x'')| < \varepsilon. \tag{13}$$

Так как $x_n \to a$, то для данного δ существует n_0, такое, что $|x_n - a| < \delta$, когда $n \ge n_0$. Но тогда, в силу (13), полагая $x' = x_n$ и $x'' = x_m$, получим:

$$|f(x_n) - f(x_m)| < \varepsilon \quad \text{при} \quad n, m \ge n_0$$

и, по достаточной части критерия Коши существования предела последовательности, $\{f(x_n)\}$ сходится к некоторому пределу b.

Пусть $\{x'_n\}$ — другая последовательность, сходящаяся к a. Как и выше, убеждаемся, что $f(x'_n)$ сходится к некоторому пределу b'. Покажем, что $b' = b$.

Рассмотрим последовательность

$$x_1, x'_1, x_2, x'_2, \ldots, x_n, x'_n, \ldots$$

Она также сходится к a и, по доказанному, последовательность

$$f(x_1), f(x'_1), f(x_2), f(x'_2), \ldots, f(x_n), f(x'_n), \ldots \tag{14}$$

имеет некоторый предел b_0. Но тогда обе подпоследовательности $\{f(x_n)\}$ и $\{f(x'_n)\}$ последовательности (14) сходятся к тому же пределу b_0, к так как $f(x_n) \to b$, $f(x'_n) \to b'$, то $b = b' = b_0$.

Итак, для любой последовательности $\{x_b\} \subset X \setminus a$, сходящейся к a, последовательность $\{f(x_n)\}$ сходится к одному и тому же пределу b. Согласно теореме 1, это означает, что $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ существует и равен b и т.д.

Введем понятие бесконечно малой функции. Функция $f(x)$, определенная на множестве X, имеющем предельную точку a называется *бесконечно малой* (*б.м.*) *при* $x \to a$, если $\lim\limits_{x \to a} f(x) = 0$. Так, определенные на $(-\infty, \infty)$ функции $\sin x$, x^α, $\alpha > 0$, будут бесконечно малыми при $x \to 0$, а функция $\dfrac{x-1}{x^2+1}$ будет б.м. при $x \to 1$. Подчеркнем, что функция является бесконечно малой всегда по отношению к данной предельной точке области задания функции; если в другой предельной точке b, $\lim\limits_{x \to b} f(x) = b \neq 0$, то та же самая функция $f(x)$ на том же самом множестве X не будет б.м. при $x \to b$. Например, $f(x) = \sin x$ будет б.м. при $x \to 0$, $x \to \pi$, $x \to -\pi$, но не будет б.м. при $x \to \dfrac{\pi}{2}$. В этом отличие б.м. функции от б.м. последовательности: если $\{x_n\}$ сходится к нулю, то ни к какому другому пределу сходиться уже не может.

Так же как и для последовательностей, функция $f(x) - b$, если $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$, является б.м. при $x \to a$, и обратно, если функция $f(x) - b$ б.м. при $x \to a$, то $b = \lim\limits_{x \to a} f(x)$. Линейная комбинация и произведение функций, б.м. при $x \to a$, будут функциями, б.м. при $x \to a$; произведение функции, б.м. при ?, на функцию, ограниченную в окрестности точки a, есть функция, б.м. при $x \to a$.

Пусть на множестве X, имеющем предельную точку a, заданы функции $f(x)$ и $g(x)$, б.м. при $x \to a$. Если $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = b \neq 0$, то говорят, что $f(x)$ и $g(x)$ являются *б.м. одного порядка при* $x \to a$, если же $b = 0$, то функцию $f(x)$ называют *б.м. высшего порядка при* $x \to a$ *по сравнению с функцией* $g(x)$. Так, функции $f(x) = \sin x$ и $g(x) = \operatorname{tg} x$ при $x \to 0$ являются б.м. одного порядка при $x \to 0$, а функция $\psi(x) = \sin x - \operatorname{tg} x$ есть б.м. высшего порядка по сравнению с x^2. В самом деле,

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x - \operatorname{tg} x}{x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{1}{\cos x} \cdot \frac{\cos x - 1}{x} = \lim_{x \to 0} \left(\frac{-2\sin^2 \frac{x}{2}}{x} \right) = 0.$$

Наконец, если $b = 1$, то функции $f(x)$ и $g(x)$ называются *эквивалентными б.м. при* $x \to 0$. Возможен случай, когда для функций $f(x)$ и $g(x)$, б.м. при $x \to a$, предел $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ не существует. Такие б.м. при $x \to a$ функции называются *несравнимыми*. Например, несравнимы функции $fx) = \sin x$ и $g(x) = x \sin \dfrac{1}{x}$, б.м. при $x \to 0$.

Нетрудно доказать следующие утверждения.

1. Если функции $f(x)$ и $g(x)$ б.м. эквивалентные при $x \to a$, то их разность есть б.м. высшего порядка при $x \to a$ по сравнению как с $f(x)$, так и $g(x)$.

2. Если $f(x) - g(x)$ при $x \to a$ есть б.м. функция высшего порядка по сравнению с $f(x)$ и $g(x)$, то $f(x)$ и $g(x)$ — б. м. функции эквивалентные при $x \to a$.

3. Если $f(x) \pm g(x) \pm \ldots \pm h(x)$ есть сумма б.м. разного порядка при $x \to a$, то эта сумма эквивалентна б.м. слагаемому низшего порядка.

Рекомендуем читателю доказать последние три утверждения.

Наконец, если б.м. при $x \to a$ функции $f(x)$ и $g(x)$ таковы, что $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{[g(x)]^k} = b \neq 0$, то говорят, что $f(x)$ есть *б.м. функции порядка k по сравнению с $g(x)$ при $x \to a$*, а $b[g(x)]^k$ — *главная часть* $f(x)$ по сравнению с $g(x)$.

Функция $f(x)$, определенная на множестве X, которое имеет предельную точку a, называется *бесконечно большой (б.б.) при $x \to a$*, если $\lim\limits_{x\to a} = \infty$. Ясно, что если функция $f(x)$ б.м. при $x \to a$, то функция $\dfrac{1}{f(x)}$ есть б.б. при $x \to a$, и если $f(x)$ — б.б. при $x \to 0$, то $\dfrac{1}{f(x)}$ — б.м. при $x \to a$. Для функций, б.б. при $x \to 0$, так же как и для б.м. функций, можно ввести б.б. функции разных порядков, эквивалентные б.б. функции, и доказать утверждения, аналогичные приведенным выше для б.м. функций.

§ 5. Верхний и нижний пределы последовательности

Важным обобщением понятия предела последовательности являются ее верхний и нижний пределы.

Определение 1. Число μ называется *верхним пределом последовательности* $\{x_n\}$, если для любого ε существует бесконечно много членов последовательности, не меньших $\mu - \varepsilon$, и не более конечного числа членов последовательности, больших $\mu + \varepsilon$.

Верхний предел последовательности обозначается $\overline{\lim}\ x_n$.

Определение 2. Число λ называется *нижним пределом последовательности* $\{x_n\}$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует бесконечно много членов последовательности, меньших $\lambda + \varepsilon$ и не более конечного числа членов последовательности, меньших $\lambda - \varepsilon$.

Нижний предел последовательности обозначается $\underline{\lim}\ x_n$.

Примеры.

1. Пусть $x_n = \dfrac{1}{n}[n + (-1)^n(n-1)]$, так что $x_n = 2 - \dfrac{1}{n}$ для четных n и $x_n = \dfrac{1}{n}$ для нечетных n. Легко видеть, что $\overline{\lim}\ x_n = 2$ и $\underline{\lim}\ x_n = 0$.

2. Пусть $\{r_n\}$ — последовательность всех правильных рациональных дробей, занумерованных каким-либо способом. Покажем, что $\overline{\lim}\ r_n = 1$.

Так как членов последовательности $\{r_n\}$, больших единицы, не существует, то достаточно показать, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется бесконечно много правильных рациональных дробей, больших $1 - \varepsilon$. Допустим, что это не так, т.е. что или нет правильных рациональных дробей, больших $1-\varepsilon$, или таких дробей конечное число. Пусть r_{n_0} — наибольшая из таких дробей или $r_{n_0} = 1-\varepsilon$, если правильных рациональных дробей, больших $1-\varepsilon$, нет. Так как $r_{n_0} < 1$ и множество рациональных чисел плотно в множестве $\mathbb{R}$ вещественных чисел, то найдется рациональная дробь r_m, такая, что $r_{n_0} < r_m < 1$. Но это противоречит определению числа r_{n_0}. Следовательно, существует бесконечно иного членов r_n последовательности, таких, что $r_n > 1 - \varepsilon$. Равенство $\overline{\lim}\ r_n = 1$ доказано.

Аналогично доказывается, что $\underline{\lim}\ r_n = 0$.

Если последовательность $\{x_n\}$ не ограничена сверху, то $\overline{\lim}\ x_n = +\infty$, если последовательность $\{x_n\}$ не ограничена снизу, то $\underline{\lim}\ x_n = -\infty$.

Без труда доказывается следующая лемма.

Лемма 1. *Для того чтобы последовательность $\{x_n\}$ имела предел, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось равенство*

$$\underline{\lim}\ x_n = \overline{\lim}\ x_n.$$

Примеры 1 и 2 показывают, что верхний и нижний пределы существуют и у несходящихся последовательностей. Более того, справедлива следующая теорема.

Теорема 1. *Всякая последовательность $\{x_n\}$ имеет конечные или бесконечные верхний и нижний пределы.*

Установим существование верхнего предела у произвольной последовательности $\{x_n\}$ (доказательство существования нижнего предела предоставляем читателю).

Если последовательность не ограничена сверху, то, как уже было сказано, она имеет верхний предел, равный $+\infty$.

Предположим, что последовательность $\{x_n\}$ ограничена сверху, например, числом β. Если для любого $\alpha < \beta$ правее α есть лишь конечное число членов рассматриваемой последовательности, то в любую окрестность $(-\infty, \alpha)$ точки $-\infty$ попадут все члены x_n последовательности начиная с некоторого номера, т.е. $x_n \to -\infty$. Но когда и $\overline{\lim}\ x_n = -\infty$, и в этом случае теорема доказана.

Предположим, что найдется число $\alpha < \beta$, такое, что отрезок $[\alpha, \beta]$ будет содержать бесконечное множество M точек рассматриваемой последовательности. По теореме Больцано–Вейерштрасса, множество M имеет хотя бы одну предельную точку. Пусть M' — множество предельных точек множества M. Ясно, что $M' \subset [\alpha, \beta]$, т.е. ограничено, и, следовательно, существует $\sup\ M' = \mu$. Покажем, что $\mu = \overline{\lim}\ x_n$.

Пусть задано произвольное число $\varepsilon > 0$. Если $\mu + \varepsilon \geq \beta$, то правее $\mu + \varepsilon$ вообще нет точек последовательности. Если $\mu + \varepsilon < \beta$, то на отрезке $[\mu + \varepsilon, \beta]$ может лежать лишь конечное число точек x_n последовательности, так как иначе на этом отрезке будет существовать хотя бы одна предельная точка множества M, что противоречит определению числа μ. С другой стороны, так как $\mu = \sup\ M'$, то найдется точка $\gamma \in M'$,, такая, что $\mu - \varepsilon < \gamma$. Но тогда в окрестности $(\mu - \varepsilon, \mu + \varepsilon)$ точки γ, т.е. правее $\mu - \varepsilon$, будет лежать бесконечно много точек последовательности $\{x_n\}$. Таким образом, $\mu = \overline{\lim}\ x_n$. Существование конечного верхнего предела у произвольной ограниченной сверху последовательности доказано.

Замечание. В процессе доказательства теоремы 1 установлено, что точная верхняя граница множества предельных точек любой ограниченной сверху последовательности является верхним пределом этой последовательности. Так как верхний предел есть, очевидно, предельная точка последовательности, то у всякой ограниченной сверху последовательности есть самая правая предельная точка. В связи с этим иногда дают следующее определение верхнего предела последовательности.

Определение $1'$. *Верхним пределом последовательности* называется самая правая предельная точка этой последовательности.

Аналогично определяется нижний предел последовательности.

Иногда верхний и нижний пределы последовательности определяются по-другому, а именно:

$$\overline{\lim}\ x_n = \inf_n \{\sup\ (x_n, x_{n+1}, \ldots, x_{n+p}, \ldots)\}.$$

Это равенство надо понимать так: сначала для фиксированного n берется точная верхняя граница y_n множества

$$A_n\{x_n, x_{n+1}, \ldots\},$$

(эта точная верхняя граница может быть и бесконечной), а затем точная нижняя граница множества

$$B = \{y_1, y_2, \ldots, y_n, \ldots\}.$$

Аналогично определяется нижний предел

$$\underline{\lim}\ x_n = \sup_n \{\inf\ (x_n, x_{n+1}, \ldots, x_{n+p}, \ldots)\}.$$

Докажем эквивалентность определений 1 и $1'$. Пусть $\mu = \overline{\lim}$ по определению $1'$. Это значит, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется номер n_0, такой, что все члены последовательности $\{x_n\}$ для $n \geq n_0$ будут удовлетворять неравенству

$$x_n < \mu + \varepsilon.$$

Но тогда при $n \geq n_0$

$$y_n = \sup_n\ (x_n, x_{n+1}, \ldots) \leq \mu + \varepsilon,$$

и тем более

$$\mu' = \inf_n\ y_n = \inf_n\ \{\sup\ (x_n, x_{n+1}, \ldots)\} \leq \mu + \varepsilon.$$

Так как $\varepsilon > 0$ произвольно, то в пределе при $\varepsilon \to 0$ из предыдущего неравенства следует:

$$\mu' = \inf_n\ \{\sup\ (x_n, x_{n+1}, \ldots)\} \leq \mu. \tag{1}$$

С другой стороны, по определению точной нижней границы, для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое n', что

$$y_{n'} = \sup\,(x_{n'}, x_{n'+1}, \ldots) < \mu' + \varepsilon,$$

следовательно, при $n \geq n'$

$$x_n < \mu' + \varepsilon.$$

Таким образом, все члены последовательности начиная с некоторого номера не превосходят $\mu' + \varepsilon$. Но тогда и точная верхняя граница предельных точек последовательности, в том числе самая правая, не превосходит этого числа, т.е.

$$\mu \leq \mu' + \varepsilon.$$

В силу произвольности ε из этого неравенства следует

$$\mu \leq \mu' \tag{2}$$

Из (1) и (2) вытекает, что $\mu = \mu'$.

В рассмотренном случае последовательность $\{x_n\}$ содержит бесконечно много элементов, различных по величине. Если же $\{x_n\}$ распадается на конечное число стационарных последовательностей, доказательство равенства $\mu = \mu'$ предоставляли читателю.

§ 6. Понятие о компактном множестве

Определение 1. Множество M числовой прямой называется *компактным*, если из любого бесконечного подмножества множества M можно выделить последовательность, сходящуюся к некоторой точке множества M.

Определение 1′. Множество M числовой прямой называется *компактным*, если из любого открытого покрытия множества M можно выделить конечное покрытие.

Докажем важную лемму, которая часто используется при изучении различных вопросов математического анализа и других разделов математика.

Пусть дано множество $M \subset \mathbb{R}$ и совокупность S открытых множеств числовой прямой. Говорят, что S образует *открытое покрытие* множества M, если для любой точка $x \in M$ найдется открытое множество $G \in S$ такое, что $x \in G$. Если совокупность S состоит из конечного числа множеств, покрытие называется *конечным.*

Если S есть покрытие M, то всякое подмножество S_0 множества S, которое также является покрытием M, называется *подпокрытием* покрытия.

Лемма Гейне–Бореля. *Из всякого открытого покрытия S ограниченного и замкнутого множества $F \subset \mathbb{R}$ можно выделить конечное подпокрытие S_0.*

Доказательство. Предположим, что $F = [a, b]$ и S — произвольное открытое покрытие этого отрезка. Допустим, что лемма неверна и из покрытия S нельзя выделить конечного подпокрытия отрезка $[a, b]$. Разделим отрезок $[a, b]$ пополам. Тогда, по крайней мере, одну из этих половин (а может быть, и обе) нельзя покрыть никакой конечной подсистемой системы S. Пусть $[a_1, b_1]$ — такая половина, а если их две, то любая из них. Разделим отрезок $[a_2, b_2]$ пополам. Снова, по крайней мере, одну из его половин нельзя покрыть конечным числом открытых множеств совокупности S. Пусть $[a_2, b_2]$ такая половина. Разделим отрезок $[a_2, b_2]$ пополам и т.д. Получим последовательность $\{[a_n, b_n]\}$ отрезков, каждый из которых содержит последующий, и длина их стремится к нулю. Па лемме Кантора, существует точка $x_0 \in [a, b]$, принадлежащая всем отрезкам $[a_n, b_n]$. Так как $x_0 \in [a, b]$, то найдется открытое множество $G_0 \in S$, такое, что $x_0 \in G_0$, и так как G_0 открыто, то $(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subset G_0$ при достаточно малом $\delta > 0$. Пусть n выбрано так, что $|a_n - x_0| < \delta$ и $b - x_n < \delta$, т.е. $[a_n, b_n] \subset (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$. Тогда, с одной стороны, отрезок $[a_n, b_n]$ покрыт единственным множеством $G_0 \in S$, а с другой, согласно построению, отрезок $[a_n, b_n]$ нельзя покрыть никаким конечным числом открытых множеств системы S. Мы пришли к противоречию, следовательно, для отрезка $[a, b]$ лемма доказана.

Пусть теперь F — произвольное ограниченное замкнутое множество и S — открытое покрытие F. Так как F ограничено, то найдется отрезок $[a, b]$, содержащий множество F. Присоединим к системе S множество cF. Это множество открыто. В самом деле, если $y \in cF$, т.е. $y \in F$, то y не может быть предельной точкой множества F)F замкнуто!). Поэтому найдется интервал $(y - \delta, y + \delta)$, такой, что $(y - \delta, y + \delta) \cap F = \emptyset$ и, следовательно, $(y - \delta, y + \delta) \subset cF$.

Далее, $\widetilde{S} = S \cup cF$ образует открытое покрытие $[a, b]$, так как если $x \in F$, то $x \in G$ для некоторого $G \in S$, а если $x \in [a, b]$, но $x \notin F$, то $x \in cF$.

Согласно доказанному, из системы $\widetilde{S} = S \cup cF$ можно выделить конечное подпокрытие $\widetilde{S}_0$ отрезка $[a, b]$ и тем более множества F. Выбросим из $\widetilde{S}_0$ множество cF, если оно в это покрытие входит, получим конечную подсистему S_0, выделенную из S покрывающую F.

Лемма Гейне–Бореля перестает быть верной, если множество M неограниченно. Так, например, из покрытия замкнутого множества $\mathbb{N}$ всех натуральных чисел интервалами $\left(n - \dfrac{1}{3}, n + \dfrac{1}{3}\right)$, $n = 1, 2, 3, \ldots$, нельзя выделить никакого конечного подпокрытия множества $\mathbb{N}$. Точно так же нельзя выделить никакого подпокрытия из покрытия незамкнутого ограниченного множества $\left\{\dfrac{1}{n}\right\}$ интервалами $\left(\dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{2n(n+1)}, \dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{2n(n+1)}\right)$, $n = 1, 2, 3, \ldots$.

Согласно лемме Гейне–Бореля, из любого открытого покрытия ограниченного замкнутого множества можно выделить конечное подпокрытие. Однако ни в формулировке леммы, ни в ее доказательстве не указывается, как из данного покрытия S выделить конечное подпокрытие S_0. Это пример чисто «существовательного» доказательства математического утверждения. Такие теоремы существования с неконструктивными доказательствам встречаются в разных разделах математики и, несмотря на их неконструктивность, играют важную роль в решении многих теоретических и прикладник вопросов.

Приведенный метод доказательства леммы Гейне–Бореля такой же, как метод доказательства теоремы Больцано–Вейерштрасса (см. § 3 данной главе). Это не случайно. Оба утверждений являются выражением одного а того же свойства линейных точечных множеств — так называемой компактности.

Теорема Больцано–Вейерштрасса утверждает, что ограниченное и замкнутое множество числовой прямой компактно по определение 1, лемма Гейне–Бореля — по определению $1'$.

Можно доказать, что оба определения эквивалентны. В гл. X для множеств более общих, чей линейные точечные множества, будет показано, что из определения 1 следует определение $1'$.

Глава III

НЕПРЕРЫВНЫЕ ФУНКЦИИ

Многие физические процессы протекают плавно, без скачков. Такие процессы описываются с помощью функций, называемых непрерывными.

§ 1. Определения, примеры, простейшие теоремы

Определение 1. Пусть $f: X \to \mathbb{R}$, где $X \subset \mathbb{R}$. Функция f называется *непрерывной в точке* x_0 множества X, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta > 0$, такое, что всякий раз, когда $x \in X$ и $|x - x_0| < \delta$, $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

Можно также сказать, что функция $f: X \to \mathbb{R}$ называется *непрерывной в точке* x_0, если для любой окрестности $U_\varepsilon(f(x_0))$ точки $f(x_0)$ найдется окрестность $U_\delta(x_0)$ точки x_0, такая, что

$$f:\ U_\delta(x_0) \cap X \to U_\varepsilon(f(x_0)).$$

Функция f, непрерывная в каждой точке множества X, называется *непрерывной на этой множестве.*

Если функция f не является непрерывной в точке x_0, то x_0 называется *точкой разрыва* этой функции.

Примеры.

1. Пусть $X = [a, b]$ и $f(x) = x^n$, где n — фиксированное натуральное число. Если x_0 — произвольная точка отрезка $[a, b]$, то

$$|f(x) - f(x_0)| = |x^n - x_0^n| = |x - x_0|\,|x^{n-1} + x^{n-2}x_0 + \ldots + xx_0^{n-2} + x_0^{n-2}| \leq$$

$$\leq |x - x_0|(|x|^{n-1} + |x|^{n-2}|x_0| + \ldots + |x|\,|x_0|^{n-2} + |x_0|^{n-2}).$$

Пусть $\beta\ \max\,(|a|, |b|)$. Тогда $|x| \leq \beta$, $|x_0| \leq \beta$, в силу чего

$$|f(x) - f(x_0)| \leq |x - x_0| n\beta^{n-1}.$$

Поэтому если задано число $\varepsilon > 0$, то, положив $\delta = \dfrac{\varepsilon}{n\beta^{n-1}}$, будем иметь при $|x - x_0| < \delta$

$$|f(x) - f(x_0)| < \frac{\varepsilon}{n\beta^{n-1}} \cdot n\beta^{n-1} = \varepsilon.$$

Таким образом, непрерывность функции $f(x) = x^n$ в произвольной точке $x_0 \in [a, b]$, а следовательно, на всем отрезке доказана.

Нетрудно установить, что в этом доказательстве ничего не изменится, если отрезок $[a, b]$ заменить произвольным ограниченным множеством X. В этом случае в качестве β надо взять $\sup\limits_{x\in X} |x|$. Так как, взяв достаточно большой отрезок $[a, b]$, можно заключить в него любую точку x_0, то отображение $x \xrightarrow{f} x^n$ непрерывно на всей числовой прямой $(-\infty, \infty)$.

2. Рассмотрим функцию $f(x) = \sin x$, $0 \leq x \leq 2\pi$. Пусть x_0 — произвольная точка $[0, 2\pi]$. Оценим сверху разность $|sinx - \sin x_0|$:

$$|sinx - \sin x_0| = 2\left|\sin\frac{x-x_0}{2}\right|\left|\cos\frac{x+x_0}{2}\right| \leq 2\left|\sin\frac{x-x_0}{2}\right| \leq |x - x_0|.$$

Поэтому при заданном числе $\varepsilon > 0$, выбрав $\delta - \varepsilon$, получим $|\sin x - \sin x_0| < \varepsilon$ при $|x - x_0| < \delta$. Это и означает непрерывность функции $f(x) = \sin x$ в произвольной точке отрезка $[0, 2\pi]$, т.е. на всем отрезке.

3. Пусть $X = \mathbb{R}$, $f(x) = x - E(x)$. Докажем, что функция f непрерывна в каждой нецелочисленной точке числовой прямой. Предположим, что $x_0 \in (n, n+1)$ и $\eta = \min\,(x_0 - n, (n+1) - x_0)$.. Если $|x - x_0| < \eta$, то $|f(x) - f(x_0)| = |x - x_0|$, так как $E(x) = E(x_0) = n$ (рис. 9).

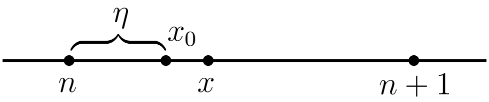

Рис. 9

Следовательно, для заданного числа $\varepsilon > 0$, взяв $\delta == \min\,(\eta, \varepsilon)$, получим при $|x - x_0| < \delta$:

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon,$$

т.е. функция $f(x)$ непрерывна в точке x_0.

В целочисленных точках функция $f(x) = x - E(x)$ не является непрерывной. В самом деле, пусть, например, $x_0 = n$ и $\varepsilon_0 = \dfrac{1}{2}$. Каково бы ни было число $\delta > 0$, в точке $x_0 = n - h$, где $h < \min\,\left(\delta, \dfrac{1}{2}\right)$,

$$f(x) = (n - h) - E(n - h) = n - h - (n - 1),$$

и поэтому

$$f(x) - f(x_0) = f(x) - f(n) - (n - h) - (n - 1) = 1 - h > \frac{1}{2} = \varepsilon_0$$

хотя $|x - x_0| < \delta$.

Итак, существует число $\varepsilon_0 > 0$, такое, что при любом $\delta > 0$ найдется $x' \in \mathbb{R}$, $|x' - x_0| < \delta$, для которого $|f(x) - f(x_0)| \geq \varepsilon_0$. Это означает, что функция не является непрерывной в точке $x_0 = n$.

4. Пусть

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{q}, & \text{если} \quad x = \dfrac{p}{q} \in \mathbb{Q}, \\ 0, & \text{если} \quad x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Покажем, что функция f непрерывна в каждой иррациональной точке и разрывна в каждой рациональной точке.

Пусть x_0 — иррациональная точка и $\varepsilon > 0$. Рассмотрим все дроби со знаменателями $2, 3, \ldots, k$, попавшие в отрезок $[n, n+1]$, содержащий точку x_0, где $k \in \mathbb{N}$ выбрано так, что $\dfrac{1}{k} < \varepsilon$. Таких дробей конечное число. Обозначим их $r_1, r_2, \ldots, r_m$; пусть $\delta = \min\limits_{i=1,2,\ldots,m} \{||x_0 - r_i|\}$, $\delta \le x_0 - n$, $\delta \le (n+1) - x_0$. Покажем, что если $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, то $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$. В самом деле, если x — иррациональная точка, то $|f(x) - f(x_0)| = |0 - 0| = 0 < \varepsilon$. Предположим, что x — рациональная точка $\dfrac{p}{q}$. Так как все дроби со знаменателем, меньшим или равным k, отстоят от x_0 на расстоянии, большем или равном δ, то $q > k$. Поэтому

$$|f(x) - f(x_0)| = \left| \frac{1}{q} - 0 \right| = \frac{1}{q} < \frac{1}{k} < \varepsilon,$$

и непрерывность $f(x)$ в точке x_0 доказана.

Пусть теперь $x_0 = \dfrac{p}{q}$ — рациональная точка. В любой окрестности $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ есть иррациональные точки, и если $\varepsilon_0 < \dfrac{1}{q}$, то для, иррациональной точки $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ будем иметь

$$|f(x) - f(x_0| = \left| 0 - \frac{1}{q} \right| = \frac{1}{q} > \varepsilon_0,$$

что означает разрывность функции f в точке x_0.

5. Пусть

$$X = [a, b] \cup [c, d], \qquad a < b < c < d,$$

и

$$f(x) = \begin{cases} c_1 & \text{на} \;\; [a, b], \\ c_2 & \text{на} \;\; [c, d], \end{cases}$$

где $c_1 \ne c_2$. Покажем. что эта функция непрерывна на X.

Обозначим через ρ разность $c - b$, т.е. расстояние между точками b и c. Если задано число $\varepsilon > 0$, положим $\delta = \dfrac{1}{2}$. Тогда, если $x, x_0 \in X$ и $|x - x_0| < \delta$, точки x и x_0 принадлежат одному и тому же из двух отрезков $[a, b]$ и $[c, d]$, например $[a, b]$ (рис. 10).

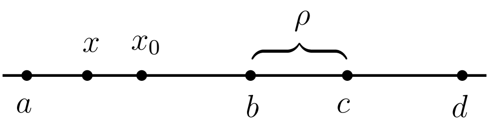

Рис. 10

Но тогда

$$|f(x) - f(x_0)| = |c_1 - c_1| = 0 < \varepsilon.$$

Таким образом, непрерывность функции f доказана.

6. Пусть $X \subset \mathbb{R}$, x_0 — изолированная точка множества X. Докажем, что любая функция $f: X \to \mathbb{R}$ непрерывна в точке x_0.

Так как x_0 не является предельной точкой для множества X, то найдется $\delta > 0$, такое, что $(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap X = \{x_0\}$. Поэтому, каково бы ни было $\varepsilon > 0$, из $x \in X$ и $|x - x_0| < \delta$ следует, что $x = x_0$. Поэтому $|f(x) - f(x_0)| = |f(x_0) - f(x_0)| = 0$, что означает непрерывность функции f в точке x_0.

Если $f: X \to \mathbb{R}$ и x_0 — предельная точка множества X, принадлежащая этому множеству, то, согласно определению предела функции (см. определение 1 в § 4 Гл. II), функция непрерывна в точке x_0 тогда и только тогда, когда

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0).$$

С другой стороны, как только что установлено, если x_0 — изолированная точка множества X, то любая функция f непрерывна в этой точке. Отсюда и из теорем о пределах функции (гл. II, § 4) непосредственно вытекают следующие утверждения.

1. Если функции $f: X \to \mathbb{R}$ и $g: X \to \mathbb{R}$ непрерывны в точке $x_0 \in X$ (на множестве X), то линейная комбинация и произведение $\alpha f + \beta g$, $f \cdot g$ непрерывны в этой точке (на этом множестве). Если $g(x_0) \neq 0$, то и частное $\dfrac{f}{g}$ также непрерывно з этой точке (на множестве).

2. Если функция $f: X \to \mathbb{R}$ непрерывна в точке $x_0 \in X$ и $f(x_0) = c > 0$, то существует окрестность $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ этой точки, такая, что $f(x) > \dfrac{c}{2}$ для любого $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap X$. Аналогично, если $f(x_0) = d < 0$, то $(\exists\ \delta > 0)$, $\forall\ x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap X$ будем иметь $f(x) < \dfrac{d}{2}$.

3. Если функция $f: X \to Y \subset \mathbb{R}$ непрерывна в точке x_0 и функция $g: Y \to \mathbb{R}$ непрерывна в точке $y_0 = f(x_0)$, то сложная функция $h = g \circ f$ непрерывна в точке x_0.

Определение предела функции через посредство предела последовательности приводит к следующему определению непрерывности.

Определение 1′ (Гейне). Пусть $f: X \to \mathbb{R}$ и $x_0 \in X$ — предельная точка множества X. Если для любой последовательности $\{x_n\} \subset X$ сходящейся к $f(x_0)$

$$f(x_n) \to f(x_0)$$

функция f называется *непрерывной в точке* x_0.

Эквивалентность определений 1 и 1′ следует непосредственно из теоремы 1 (гл. II, § 2).

Введем величины $\Delta x_n = x_n - x_0$ и

$$\Delta y_n = f(x_n) - f(x_0) = f(x_0 + \Delta x_n) - f(x_0),$$

которые назовем *приращениями аргумента* и *функции*. Тогда определение $1'$ кратко можно сформулировать следующим образом: для любой бесконечно малой последовательности $\{\Delta x_n\}$ приращений аргумента последовательность $\{\Delta y_n\}$ приращений функции также будет бесконечно малой.

Введем еще одно понятие, с помощью которого можно дать необходимое и достаточное условие непрерывности функции.

Пусть $f(x)$ — ограниченная функция, заданная на множестве X и Δ — промежуток, такой, что $\Delta \cap X \neq \emptyset$. Неотрицательное число $\omega(f, \Delta) = \beta_\Delta - \alpha_\Delta$, где $\beta_\Delta = \sup\limits_{x \in \Delta \cap X} f(x)$ и $\alpha_\Delta = \inf\limits_{x \in \Delta \cap X} f(x)$, называется *колебанием функция на множестве* Δ.

Пусть Δ_n — произвольная последовательность промежутков, $\Delta_n = [a_n, b_n]$, $\Delta_n \supset \Delta_{n+1}$, $\Delta_n \cap X \neq \emptyset$, $n = 1, 2, 3, \ldots$ и $a_n \to x_0$, $b_n \to x_0$, $x_0 \in X$. Так как с уменьшением промежутка Δ_n числа β_{Δ_n} могут лишь убывать, а числа α_{Δ_n} — лишь возрастать, то $\{\omega(f, \Delta_n)$ есть невозрастающая последовательность неотрицательных чисел и поэтому имеет предел $\omega(f, x_0)$. Этот предел называемой *колебанием функции в точке* x_0. Легко показать, что $\omega(f, x_0)$ не зависит от выбора $\{\Delta_n\}$.

Лемма. *Для того чтобы функция $f : X \to \mathbb{R}$ была непрерывной в точке $x_0 \in X$, необходимо и достаточно, чтобы $\omega(f, x_0) = 0$.*

Необходимость. Пусть функция f непрерывна в точке x_0. Тогда $\forall\ \varepsilon > 0$, $\exists\ \delta > 0$: $x \in U_\delta(x_0) \cap X \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$. Возьмем любую последовательность $\{\Delta_n\}$, $\Delta_n \supset \Delta_{n+1}$, $\Delta_n \cap X \neq \emptyset$, где промежутки Δ_n стягиваются указанным способом к точке x_0. В этом случае найдется n_0, такое, что при $n \geq n_0$ имеем $\Delta_n \subset U_\delta(x_0)$. Следовательно,

$$\forall\ x \in \Delta_n \cap X \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon,$$

т.е.

$$\forall\ x \in \Delta_n \cap X \Rightarrow f(x_0) - \varepsilon < f(x) M f(x_0) + \varepsilon.$$

Но тогда

$$\beta_{\Delta_n} = \sup_{x \in \Delta_n \cap X} f(x) \leq f(x_0) + \varepsilon, \qquad \alpha_{\Delta_n} = \inf_{x \in \Delta_n \cap X} f(x) \geq f(x_0) - \varepsilon,$$

откуда

$$\omega(f, \Delta_n) = \beta_{\Delta_n} - \alpha_{\Delta_n} \leq 2\varepsilon. \tag{1}$$

Так как $\varepsilon > 0$ произвольно, то неравенство (1) означает что

$$\lim\ \omega(f, \Delta_n) = \omega(f, x_0) = 0.$$

Достаточность. Пусть $\omega(f, x_0) = 0$. Возьмем последовательность отрезков $\Delta_n = \left[x_0 - \dfrac{1}{n}, x_0 + \dfrac{1}{n}\right]$. Для любого $\varepsilon > 0$ найдется n_0, такое, что $\omega(f, \Delta_n) < \varepsilon$ при $n \geq n_0$, т.е. $\beta_{\Delta_n} - \alpha_{\Delta_n} \leq \varepsilon$ при $n \geq n_0$. Так как для любого $x \in X$, такого, что $|x - x_0| < \dfrac{1}{n}$, имеем $\alpha_{\Delta_n} \leq f(x) \leq \beta_{\Delta_n}$, и поскольку также $\alpha_{\Delta_n} \leq f(x_0) \leq \beta_{\Delta_n}$, то для этих значений x

$$|f(x) - f(x_0)| \leq \beta_{\Delta_n} - \alpha_{\Delta_n} < \varepsilon, \qquad n \geq n_0.$$

Таким образом, $f(x) \in U_\varepsilon(f(x_0))$ при $x \in U_{\frac{1}{n}}(x_0)) \cap X$, $n \geq n_0$, т.е. функция f непрерывна в точке x_0.

§ 2. Односторонняя непрерывность и полунепрерывность. Точки разрыва

Аналогично тому, как было введено понятие пределов функции слева и справа, вводится понятие непрерывности функции в точке слева и справа.

Определение 1. Пусть $f: A \to \mathbb{R}$ и x_0 — точка множества A, отличная от $\inf\ A$. Если для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta > 0$, такое, что

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

при $x \in A$ и $x_0 - \delta < x < x_0$, функция f называется *непрерывной слева в точке* x_0.

Сравнение этого определения с определением 3 (см. § 4 гл. II) показывает, что если x_0 — левосторонняя предельная точка множества A, то функция f непрерывна слева в этой точке тогда и только тогда, когда $f(x_0) = f(x_0 - 0)$.

Аналогично определяется непрерывность справа $f(x)$ в точке x_0 и устанавливается равенство $f(x_0) = f(x_0 + 0)$.

Когда ранее мы рассматривали функцию $f(x)$, непрерывную на отрезке $[a, b]$, то, по существу, предполагали, что эта функция непрерывна справа в точке a и непрерывна слева в точке b.

Примеры.

1. Функции $f(x) = E(x)$ и $g(x) = x - E(x)$ непрерывны справа в каждой точке числовой оси. Функция $h(x) = n$ для $n - 1 < x \leq n$, т.е. равная $E(x)$ для целых значений x и $E(x) + 1$ для нецелых значений x, непрерывна слева на $(-\infty, \infty)$.

Ясно, что функция $f: A \to \mathbb{R}$ непрерывна в двусторонней предельной точке множества A тогда и только тогда, когда она непрерывна слева и справа в этой точке.

Как уже отмечалось, алгебраические операции над функциями, непрерывными в данной точке, не выводят их за пределы класса функций, непрерывных, в этой точке. Можно указать еще две операции над конечным числом непрерывных функций, в результате которых снова образуются непрерывные функции:

$$\sup\ \big(f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x), \ldots\big) \quad \text{и} \quad \inf\ \big(f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x), \ldots\big).$$

Взятие точной верхней (соответственно нижней) границы значений функции производится в каждой точке множества X (рис. 11).

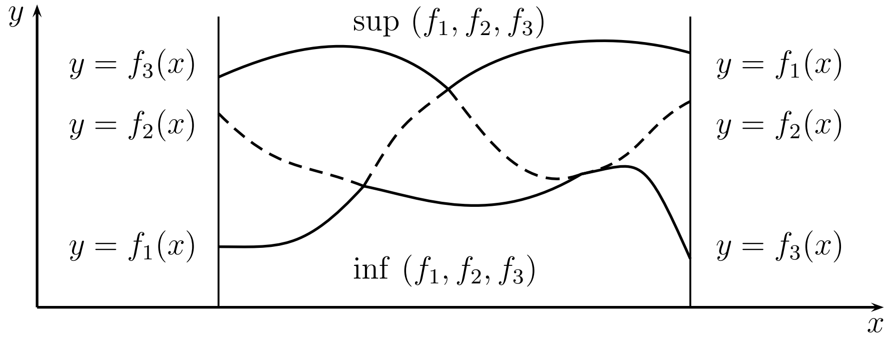

Рис. 11

Если эти операции производится над счетным множеством функций, то они обозначаются

$$\sup_n \{f_n(x)\} \quad \text{и} \quad \inf_n \{f_n(x)\}.$$

Докажем непрерывность функции $\varphi(x) = \sup\ (f_1(x), f_2(x))$.

Если $f_1(x_0) = f_2(x_0) = c$ и, следовательно, $\varphi(x_0) = c$, то для заданного $\varepsilon > 0$ существует число $\delta > 0$, такое, что

$$c - \varepsilon < f_1(x) < c + \varepsilon, \qquad c - \varepsilon < f_2(x) < c + \varepsilon$$

при $x \in X$, $|x - x_0| < \delta$. Но тогда

$$c - \varepsilon < \sup\ (f_1(x), f_2(x)) < c + \varepsilon$$

или

$$c - \varepsilon < \varphi(x) < c + \varepsilon$$

при $x \in X$, $|x - x_|| < \delta$, т.е. функция $\varphi(x)$ непрерывна в точке x_0.

Если $f_1(x_0) \neq f_2(x_0)$, например $f_1(x_0) > f_2(x_0)$, то, положив $f_1(x_0) - f_2(x_0) = c > 0$ найдем $\delta > 0$, такое, что

$$f_1(x) - f(2(x) > \frac{\varepsilon}{2} > 0,$$

т.е. $f_1(x) > f(2(x)$ для всех $x \in X$, $|x - x_0| < \delta$. Поэтому для таких x функция

$$\varphi(x) = \sup\ (f_1(x), f_2(x)) = f_1(x)$$

и, следовательно, непрерывна.

Однако поточечные supremum и infimum счетного множества функций, непрерывных на X, могут и не быть непрерывными. Пусть, например, $f_n(x) = x^n$, $0 \leq x \leq 1$. Легко видеть, что здесь

$$\inf_n \{f_n(x)\} = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad 0 \leq x < 1, \\ 1, & \text{если} \quad x = 1, \end{cases}$$

уже разрывная функция.

Требование непрерывности можно заменить более слабым условием, и тогда переход к поточечному supremum'у (infimum'у) у счетного множества функций не будет выводить их из класса функций, удовлетворяющих этому условию. Таким условием является полунепрерывность сверху (снизу) функции.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Функция $f: X \to \mathbb{R}$ называется *полунепрерывной сверху* (*снизу*) в точке $x_0 \in X$, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta > 0$, такое, что

$$f(x) < f(x_0) + \varepsilon \quad \text{при} \quad |x - x_0| < \delta$$

$$(\text{cоотеветственно} \quad f(x) > f(x_0) + \varepsilon \quad \text{при} \quad |x - x_0| < \delta).$$

Таким образом, если функция f, полунепрерывна сверху (снизу) в точке x_0, то ее значение в точках x достаточно близких к x_0, должны мало отклоняться от $f(x_0)$ в сторону увеличения — «вверх» («вниз»), в то время как «вниз» («вверх») эти значения могут уходить сколь угодно далеко.

Функция $f: X \to \mathbb{R}$, полунепрерывная сверху (снизу) в каждой точке множества X, называется *полунепрерывной сверху* (*снизу*) на X.

ПРИМЕРЫ.

2. Функция

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad x = 1, \\ 0, & \text{если} \quad x \in [0, 1), \end{cases}$$

полунепрерывна сверху на $[0, 1]$, а функция $g(x) = x - E(x)$ полунепрерывна снизу на всей числовой оси.

Докажем полунепрерывность снизу функции $g(x)$ в целых точках. Пусть $x = n$ и задано $\varepsilon > 0$. Так как $g(n) = 0$ и $g(x) \geq 0$, для всех x, то при любом x

$$g(x) \geq 0 - \varepsilon = g(n) - \varepsilon,$$

так что в качество δ можно взять любое положительное число.

Из определений непрерывности и полунепрерывности следует, что функция $f: X \to \mathbb{R}$, непрерывная в точке $x \in X$, полунепрерывна в этой точке сверху и снизу. Верно и обратное утверждение. Читатель также без труда докажет, что если функций f и g полунепрерывны сверху (снизу) на множестве X, то линейная комбинация этих функций

$$\alpha f + \beta g, \qquad \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \quad \alpha > 0, \ \beta > 0$$

тоже полунепрерывна сверху (снизу) на X. Однако произведение и частное полунепрерывных функций могут и не быть полунепрерывными.

ЛЕММА. *Пусть функции $f_n: X \to \mathbb{R}$, $n = 1, 2, \ldots$ полунепрерывны сверху (снизу) в точке $x_0 \in X$ и*

$$g(x) = \inf_n \{f_n(x)\} \qquad (h(x) = \sup_n \{f_n(x)\}).$$

Тогда функция $g(x)$ полунепрерывна сверху (функция $h(x)$ полунепрерывна снизу) в этой точке.

Доказательство. Для заданного числа $\varepsilon > 0$, в силу определения точной нижней границы, найдется номер n_0, такой, что

$$f_{n_0}(x_0) < g(x_0) + \frac{\varepsilon}{2}. \tag{1}$$

С другой стороны, так как функция f_{n_0} полунепрерывна в x_0 сверху, существует число $\delta > 0$, такое, что

$$f_{n_0}(x) < f_{n_0}(x_0) + \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{при} \quad |x - x_0| < \delta.$$

Но тогда тем более

$$g(x) = \inf_n \{f_n(x)\} < f_{n_0}(x_0) + \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{при} \quad |x - x_0| < \delta. \tag{2}$$

Из неравенств (1) и (2) следует, что

$$g(x) < g(x_0) + \varepsilon \quad \text{при} \quad |x - x_0| < \delta.$$

Лемма доказана.

Мы называли точкой разрыва функции такую точку из области определения $f(x)$, в которой эта функция не является непрерывной. Понятие точки разрыва часто расширяют, называя точкой разрыва функции $f(x)$ предельную точку x_0 области определения X этой функции, принадлежащую или не принадлежащую X, в которой предел или равен бесконечности $(\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \infty)$, или не существует. Если x_0 — двусторонняя предельная точка, то это может означать, что оба предела $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)$ и $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)$ существуют, но не равны между собой.

Если функция $f(x)$ в предельной точке x_0 не определена, но $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = b$ существует или когда $x_0 \in X$ и этот предел не равен $f(x_0)$, то, положив $f(x_0) = b$, получим функцию $f(x)$, определенную и непрерывную в точке x_0. В этом случае точка x_0 называется *устранимой точкой разрыва* функции $f(x)$.

Примеры.

3. Пусть

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x} & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Изменив значение функции при $x = 0$ и положив $f(0) = 1$, получим функцию, непрерывную на всей числовой оси.

4. Положим $f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}$ для $x \in X = (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$. Так как $\lim\limits_{x\to 0} e^{-\frac{1}{x^2}} = 0$, то доопределив функцию при $x = 0$ равенством $f(0) = 0$, получим функцию, определенную и непрерывную на всем пространстве $\mathbb{R}$.

Точка x_0, являющаяся предельной для области X определения функции $f(x)$, называется *точкой разрыва первого рода* этой Функции, если пределы $f(x_0 + 0)$ и $f(x_0 - 0)$ существуют и не равны между собой или при $x_0 \in X$, по крайней мере, один из них не совпадает $f(x_0)$.

5. Пусть $f(x) = x - E(x)$, $-\infty < x < \infty$. Каждая целая точка n является точкой разрыва первого рода, так как

$$f(n-0) = 1 \neq f(n+0) = 0 = f(n).$$

Если хотя бы один из пределов — $f(x_0+0)$ или $f(x_0-0)$ не существует или равен бесконечности, то точка x_0 называется *точкой разрыва второго рода.*

6. Пусть $f(x) = e^{\frac{1}{x}}$, $x \neq 0$. Точка $x = 0$ есть точка разрыва второго рода, так как $f(+0) = +\infty$.

7. Пусть $f(x) = \sin\frac{1}{x}$, $x \neq 0$. Точка $x = 0$ есть точка разрыва второго рода, так как $f(+0)$ и $f(-0)$ не существуют.

Теорема. *Функция $f(x)$ определенная и монотонная на $[a,b]$, может иметь на этом отрезке лишь точки разрыва первого рода и множество точек разрыва не более чем счетно.*

Доказательство. Предположим, например, что функция $f(x)$ возрастает на $[a,b]$ и $x_0 \in (a,b)$ — точка разрыва этой функции. Так как $f(a) \leq f(x) \leq f(b)$, то $f(x)$ ограничена на $[a,b]$. Но тогда, по теореме 3 (§ 4, гл. II), существуют и конечны $f(x_0+0)$ и $f(x_0-0)$. Следовательно, x_0 есть точка разрыва первого рода.

Пусть $x_{\alpha_1}, x_{\alpha_2}, \ldots, x_{\alpha_k}$ — точки разрыва функции $f(x)$ (среди них могут быть и концы отрезка). Введем еще $x^-_{\alpha_i}$ и $x^+_{\alpha_i}$, такие, что

$$a \leq x^-_{\alpha_1} \leq x_{\alpha_1} < x^-_{\alpha_2} < x_{\alpha_2} < x^+_{\alpha_2} \ldots < x^-_{\alpha_k} < x_{\alpha_k} < x^+_{\alpha_k} = b$$

(если $x_{\alpha_1} = a$, то и $x^-_{\alpha_1} = a$ или если $x^+_{\alpha_k} = b$, то и $x^+_{\alpha_k} = b$). Ясно, что сумма приращений функции f на отрезках $[x^-_{\alpha_i}, x^{]}_{\alpha_i}$ не превзойдет приращения функции $f(x)$ на всем отрезке:

$$\sum_{i=1}^{k}[f(x^+_{\alpha_i}) - f(x^-_{\alpha_i})] \leq f(b) - f(a).$$

Устремив $x^-_{\alpha_i}$ и $x^+_{\alpha_i}$ к x_{α_i} и перейдя к пределу в полученном неравенстве, приходим для любого конечного числа точек разрыва функции $f(x)$ к неравенству

$$\sum_{i=1}^{k}\omega(f, x_{\alpha_i}) \leq f(b) - f(a). \tag{3}$$

Рассмотрим точки разрыва, колебания в которых больше 1. Из неравенства (3) следует, что таких точек конечное число. Занумеруем их $x_1, x_2, \ldots, x_{k_1}$. Возьмем теперь те точки разрыва, колебание функции в которых меньше или равно 1, но больше 1/2. Их снова конечное число, и их можно перенумеровать: $x_{k_1+1}, x_{k_1+2}, \ldots, x_{k_2}$.

Продолжая процесс нумерации, после конечного числа шагов можно исчерпать все точки разрыва, и тогда их будет конечное число. Однако процесс нумерации может продолжаться и неограниченно; в таком случае все точки разрыва занумеруются в последовательность, и их будет счетное множество.

§ 3. Основные свойства непрерывных функций

Установим ряд свойств, которыми обладают непрерывные функции. Если обратиться к графикам таких функций, которые представляют собой непрерывные кривые, то почти все доказываемые далее теоремы становятся геометрически очевидными. Однако, как мы увидим в дальнейшем, непрерывные функции могут обладать и неожиданными, с точки зрения наглядной очевидности, свойствами. Поэтому мы приводим строгое, аналитическое доказательство следующих теорем.

Теорема 1. (Вейерштрасса). *Пусть $X \subset \setminus$ — ограниченное и замкнутое множество и функция $f:\ X \to \mathbb{R}$ — непрерывна на ?. Тогда X — также ограниченное и замкнутое множество.*

Доказательство. Предположим, что $Y = f(X)$ не ограничено, например, сверху. Тогда для любого n найдется число $y_n \in Y$, такое, что $y_n > n$. В каждом полном прообразе $f^{-1}(y_n)$ выберем по точке x_n. Последовательность $\{x_n\} \subset X$ ограничена и потому содержит сходящуюся подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$, $x_{n_k} \to x_0$. Так как X — замкнутое множество, то $x_0 \in X$. Но тогда в силу непрерывности f на X, в частности, в точке x_0, имеем $f(x_{n_k}) \to f(x_0)$. С другой стороны, по построению $f(x_{n_k}) > n_k$ т.е. $f(x_{n_k}) \to \infty$. Получили противоречие, следовательно, предположение, что не ограничено сверху, неверно.

Так же доказывается, что множество $f(X)$ ограничено снизу.

Пусть теперь y_0 — предельная точка множества $f(X)$ и $\{y_n\} \subset Y$ — последовательность, сходящаяся к y_0. Снова в каждом прообразе $f^{-1}(y_n)$ выберем по точке x_n и из последовательности $\{x_n\}$ выделим подпоследовательность $\{x_{n_i}\}$, сходящуюся к $x_0 \in X$. Тогда, во-первых, в силу непрерывности в точке x_0, имеем $f(x_{n_i}) \to f(x_0)$, во-вторых, по построению, $f(x_{n_i}) = y_{n_i} \to y_0$. Следовательно, $y_0 = f(x_0) \in Y$. Теорема полностью доказана.

Следствие *В том случае, когда X есть отрезок $[a, b]$ числовой прямой, получаем классические теоремы Вейерштрасса: если функция $f(x)$ непрерывна на $[a, b]$, то она:*

1) *ограничена на этом отрезке;*

2) *достигает на этом отрезке своих точных нижней и верхней границ, т.е. если $\alpha = \inf\limits_{[a,b]} f(x)$, $\beta = \sup\limits_{[a,b]} f(x)$, то существуют точки c и $d \in [a, b]$, такие, что $f(c) = \alpha$, $f(d) = \beta$.*

Первое утверждение не требует пояснения, а чтобы убедиться в справедливости второго, достаточно заметить, что если Y — замкнутое множество, то $\alpha = \inf\ Y \in Y$ и $\beta = sup\ Y \in Y$.

Если опустить хотя бы одно из трех условий теоремы 1, то она перестает быть верной, как показывают следующие контрпримеры.

1. $X = (0, 1)$, $f(x) = \dfrac{1}{x}$.Эта функция непрерывна на X, но не является ограниченной на нем. Причина — незамкнутость множества X.

2. $X = (0, \infty)$, $f(x) = x$. Функция f непрерывна, но не ограничена на множестве X, являющемся неограниченным.

3. $X = [0, 1]$, $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$. Множество X ограничено и замкнуто, но отображение $f : \ X \to \mathbb{R}$ не является ограниченным потому, что имеет точку разрыва $x = 0$, принадлежащую множеству X.

4. $X = [0, 2]$, $f(x) = x - E(x)$. Функция f ограничена на X, но не достигает на нем $\sup\limits_{[a,b]} f(x) = 1$, так как разрывна на $[0, 2]$.

Теорема 2. (Коши). *Пусть функция $f(x)$ задана на отрезке $[a, b]$, непрерывна на ней и принимает на концах отрезка значения разных знаков. Тогда внутри отрезка найдется точка x_0, в которой функция f обращается в нуль.*

Доказательство. Пусть $f(a) < 0$, $f(b) > 0$. Рассмотрим множество $M = \{x \in [a, b] : \ f(x) < 0$. Множество M не пусто, ограничено сверху, например, точкой b, и, следовательно, существует $x_0 = \sup \ M$. Покажем, что $f(x_0) = 0$.

Если предположить, что $f(x_0) = \alpha < 0$, то $x_0 < b$. Полагая $\varepsilon = -\dfrac{\alpha}{2}$, в силу непрерывности $f(x)$ найдем число $\delta > 0$, такое, что $(x_0, x_0 + \delta) \subset (a, b)$ и $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ для любого $x \in [a, b] \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$. Следовательно, $f(x) < \dfrac{\alpha}{2} < 0$ для всех таких x. Но это невозможно, так как тогда $(x_0, x_0 + \delta) \subset M$, и мы имели бы $x_0 + \delta \leq x_0$. Аналогично убеждаемся, что предположение $f(x_0) = \alpha > 0$ также приводит к противоречию. Теорема доказана.

Следствие (теорема о промежуточном значении). *Пусть функция $f : \ [a, b] \to \mathbb{R}$ непрерывна на $[a, b]$, $\alpha = \inf\limits_{[a,b]} f(x)$, $\beta = \sup\limits_{[a,b]} f(x)$, γ любое число, удовлетворяющее неравенству $\alpha < \gamma < \beta$. Тогда на $[a, b]$ существует точка x_0, такая, что $f(x_0) = \gamma$.*

Доказательство. Согласно следствию теоремы 1, на $[a, b]$ существуют точки c и d, такие, что $f(c) = \alpha$ и $f(d) = \beta$. Пусть, например, $\alpha < c$. На отрезке $[d, c] \subset [a, b]$ рассмотрим функцию $\varphi(x) = f(x) - \gamma$. Эта функция непрерывна на $[d, c]$, $\varphi(d) < 0$, $\varphi(c) > 0$. По теореме Коши найдется точка $x_0 \in [d, c]$, такая, что $\varphi(x_0) = 0$, т.е. $f(x_0) = \gamma$, что требовалось доказать.

Доказанное следствие можно сформулировать и так: *пусть функция $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ и непрерывна на $[a, b]$, $\alpha = \inf\limits_{[a,b]} f(x)$, $\beta = \sup\limits_{[a,b]} f(x)$. Тогда f отображает $[a, b]$ на отрезок $[\alpha, \beta]$.*

Теорема о промежуточном значении справедлива и для функций, непрерывных и ограниченных на интервале или полуинтервале. Доказательство этого предоставляем читателю.

Легко привести контрпример, показывающий, что в предыдущей теореме (и следствии) условие непрерывности не может быть опущено.

Теорема 3 (о существовании к непрерывности отображения, обратного к монотонному непрерывному отображению). *Пусть функция $f : \ [a, b] \to \mathbb{R}$ на отрез-*

ке $[a,b]$ непрерывна и строго монотонна, например, возрастает. Если $f(a)=c$, $f(b)=d$, то на $[c,d]$ определено и непрерывно отображение f^{-1}, обратное отображению f.

Прежде всего, замечаем, что $c=\inf\limits_{[a,b]} f(x)$, $d=\sup\limits_{[a,b]} f(x)$, вследствие чего, согласно теореме о промежуточном значении, для каждого $y\in[c,d]$ прообраз $f^{-1}(y)$ не пуст. В силу монотонности f этот прообраз не может содержать более одной точки, ибо если $x_1,x_2\in f^{-1}(y)$ и, например, $x_1<x_2$, то $f(x_1)<f(x_2)$, что противоречит равенству $f(X_1)=f(x_2)=y$. Таким образом, отображение $f:\ [a,b]\to[c,d]$ биективно и, следовательно, на $[c,d]$ определено отображение f^{-1}, обратное f. Очевидно, что f^{-1} возрастает.

Докажем непрерывность f^{-1} на $[c,d]$. Пусть $y_n\in(c,d)$, $x_0=f^{-1}(y_0)\in(a,b)$ и задано $\varepsilon>0$. Можно считать ε настолько малым, что $(x_0-\varepsilon,x_0+\varepsilon)\subset(a,b)$. Положим $y_1=f(x_0-\varepsilon)$, $y_2=f(x_0+\varepsilon)$ и пусть $\delta=\min\,(y_0-y_1,y_2-y_0)$. В силу монотонности f^{-1} имеем, что если $y_0-\delta<y<y_0+\delta$, то

$$x_0-\varepsilon=f^{-1}(y_1)\le f^{-1}(y_2-\delta)<f^{-1}(y)<f^{-1}(y_0+\delta)\le f^{-1}(y_2)=x_0+\varepsilon,$$

т.е.

$$f^{-1}(y_0)-\varepsilon<f^{-1}(y)<f^{-1}(y_0)+\varepsilon,$$

что означает непрерывность f^{-1} в точке y_0.

Пусть теперь $y_0=c$, $f^{-1}(y_0)=a$ и задано число $\varepsilon>0$. Можно считать, что $a+\varepsilon<b$. Положим $y_2=f(a+\varepsilon)$. Снова, если $c<y<c+\delta$, то $f^{-1}(c)<f^{-1}(y)<f^{-1}(c+\delta)=a+\varepsilon=f(^{-1}(c)+\varepsilon$. Непрерывность f^{-1} справа в точке c доказана. Так же доказывается непрерывность f^{-1} в точке d слева.

Усилением понятия непрерывности функции является понятие равномерной непрерывности.

По определению, функция $f:\ X\to\mathbb{R}$ непрерывна в точке $x_0\in X$, если

$$(\forall\ \varepsilon>0)\ (\exists\ \delta>0):\ \{x\in X,\ |x-x_0|<\delta\Rightarrow|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon\}.$$

В общем случае число δ зависит от ε и от x_0. Например, если $f(x)=\dfrac{1}{x}$, $0<x<1$, то функция f непрерывна на $(0,1)$. В то же время, так как $|f(x)-f(x_0)|=\left|\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x_0}\right|=\dfrac{|x-x_0|}{xx_0}$, мы видим, что величина $|f(x)-f(x_0)|$ зависит не только от модуля разности $|x-x_0|$, но и от положения точек x и x_0 на $(0,1)$, становясь при одном и том же $|x-x_0|$ тем больше, чем ближе x и x_0 к нулю. Если, например, считать, что $x>\dfrac{1}{2}x_0$ и, следовательно,

$$|f(x)-f(x_0)|<2\frac{|x-x_0|}{x_0^2},$$

то, решив неравенство

$$2\frac{\delta}{x_0^2}<\varepsilon,$$

получим для δ оценку $\delta < \frac{1}{2}\varepsilon x_0^2$, в которую, помимо ε, явно входит x_0.

С другой стороны, если $f(x) = x^2$, то

$$|f(x) - f(x_0)| = |x^2 - x_0^2| = |x - x_0|(x + x_0) < 2|x - x_0|$$

и для любого $\varepsilon > 0$ при $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$

$$|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

при любом положении точек x и x_0 на $(0, 1)$.

С учетом рассмотренных примеров естественно ввести следующее определение.

Определение. Функция $f: \ X \to \mathbb{R}$ называется *равномерно непрерывной* на множестве X, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется число $\delta > 0$, зависящее только от ε, такое, что из $x', x'' \in X$ и $|x' - x''| < \delta$ следует

$$|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$$

независимо от положений точек x' и x'' на множестве X.

Теорема 4 (Кантора). *Функция $f(x)$, непрерывная на ограниченном замкнутом множестве $X \subset \mathbb{R}$, равномерно непрерывна на этом множестве.*

Доказательство. Допустим, что теорема неверна. Это значит, что найдется число $\varepsilon_0 > 0$, такое, что для любого $\delta > 0$ существуют точки $x'_\delta, x''_\delta \in X$, для которых

$$f(x'_\delta) - f(x''_\delta)| > \varepsilon_0,$$

хотя $|x'_\delta - x''_\delta| < \delta$. Положим $\delta = \frac{1}{n}$ и соответствующие точки x'_δ и x''_δ обозначим x'_n и x''_n. Тогда

$$x'_n, x''_n \in X, \qquad |x'_n - x''_n| < \frac{1}{n}$$

и

$$|f(x'_n) - f(x''_n)| > \varepsilon_0.$$

Последовательность $\{x'_n\} \subset X$ и потому ограничена. По следствию теоремы Больцано–Вейерштрасса, из $\{x'_n\}$ можно выделить сходящуюся подпоследовательность $\{x'_{n_k}\}$. Так как множество X замкнуто, то $x_0 = \lim \ x'_{n_k} \in X$. Из неравенства

$$|x'_{n_k} - x''_{n_k}| < \frac{1}{n_k}$$

следует, что подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$ также сходится к x_0.

По предположению, функция f непрерывна на X, в частности, в точке x_0. Поэтому

$$f(x'_{n_k}) \to f(x_0) \quad \text{и} \quad f(x''_{n_k}) \to f(x_0).$$

Но тогда для данного числа ε_0 найдется k_0, такое, что при $k \geq k_0$

$$|f(x'_{n_k}) - f(x_0)| < \frac{\varepsilon_0}{2}, \qquad |f(x''_{n_k}) - f(x_0)| < \frac{\varepsilon_0}{2},$$

и, следовательно,

$$|f(x'_{n_k}) - f(x''_{n_k})| < \varepsilon_0.$$

С другой стороны, по построению точек x'_{n_k} и x''_{n_k} для всех n_k имеем

$$|f(x'_{n_k}) - f(x''_{n_k})| \geq \varepsilon_0,$$

что является, противоречием. Теорема доказана.

Понятие равномерной непрерывности и теорема Кантора будут использоваться в дальнейшем.

§ 4. Непрерывность элементарных функций

Докажем непрерывность на естественных областях определения часто встречающихся функций, которые обычно называются элементарными.

Рациональные функции

$$R(x) = \frac{a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n}{b_0x^m + b_1x^{m-1} + \ldots + b_{m-1}x + b_m}$$

непрерывны при всех значениях аргумента x, при которых они определены. В часности, целая рациональная функция, т.е. многочлен

$$P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n$$

для всех значений аргумента x.

Это утверждение следует непосредственно из доказанной в примере 1 § 1 данной главы непрерывности функций $f(x) = x^n$ и теоремы о непрерывности суммы, произведения и частного.

Функции $f(x) = \sin x$ и $f(x) = \cos x$ непрерывны на $[0, 2\pi]$ и, следовательно, в силу периодичности, при всех значениях x.

Для $f(x) = \sin x$ это утверждение доказано, для $f(x) = \cos x$ оно доказывается аналогичным образом.

Функции $f(x) = \operatorname{tg} x$, $f(x) = \operatorname{ctg} x$, $f(x) = \sec x$ и $f(x) = \operatorname{cosec} x$ непрерывны всюду, кроне тех значений x, которых знаменатель обращается в нуль.

Прежде чем доказать непрерывность функций a^x, необходимо дать ее определение для любых значений $x \in \mathbb{R}$.

Пусть $a > 0$.Как было показано в § 3 гл. I, для любого целого положительного числа n определено число $\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$. Если $r = \dfrac{p}{q}$ — любое положительное рациональное число, то $a^{\frac{p}{q}} = \left(a^{\frac{1}{q}}\right)^p$. Будем считать, что известны следующие свойства степеней с рациональными показателями:

1°) если $a > 1$, то $a^r > 1$ при любых $r > 0$;

2°) если $a > 1$, то $a^{r_1} > a^{r_2}$ при $r_1 > r_2 > 0$;

3°) $a^{r_1} \cdot a^{r_2} = a^{r_1+r_2}$, $r_1, r_2 > 0$.

Наконец, если положить, по определению, $a^0 = 1$ и $a^r = \dfrac{1}{a^{|r|}}$ для $r < 0$, то свойства 2° и 3° будут справедливыми для любых рациональных чисел r и $a^r < 1$ при $a > 1$, $r < 0$.

Таким образом, функция $f(x) = a^x$ определена на множестве $\mathbb{Q}$ всех рациональных чисел и известен ряд свойств этой функции.

Покажем, что функция a^x непрерывна на множестве $\mathbb{Q}$. Прежде всего, напомним (см. пример 6 в § 1 гл. II), что $\lim\ a^{\frac{1}{n}} = 1$. Пусть $\{r_n\}$ — последовательность рациональных чисел, сходящихся к нулю; положим для определенности, что $a > 1$. По заданному числу $\varepsilon > 0$ выберем сначала m_0 так, чтобы $0 < a^{\frac{1}{m_0}} - 1 < \varepsilon$ и затем так, чтобы $|r_n| < \dfrac{1}{m_0}$ при $n \geq m_0$. Тогда, если $r_n > 0$,

$$0 < a^{r_n} - 1 < a^{\frac{1}{m_0}} - 1 < \varepsilon \quad \text{при} \quad n \geq m_0,$$

если $r_n < 0$, то $r_n = -|r_n|$ и

$$0 < 1 - a^{r_n} = 1 - \frac{1}{a^{|r_n|}} = \frac{a^{|r_n|} - 1}{a^{|r_n|}} < a^{|r_n|} - 1 < a^{\frac{1}{m_0}} - 1 < \varepsilon.$$

Таким образом,

$$(\forall\ \varepsilon > 0)\ (\exists\ n_0):\ \{n \geq n_0 \Rightarrow |a^{r_n} - 1| < \varepsilon\}.$$

Непрерывность функции a^x в точке $x = 0$ доказана.

Пусть теперь $r_n \to r_0$. Имеем

$$|a^{r_n} - a^{r_0}| = a^{r_0}|a^{r_n - r_0} - 1| \to 0$$

при $n \to \infty$, так как $r_n - r_0 \to 0$.

Таким образом, $\lim\limits_n\ a^{r_n} = a^{r_0}$, и, следовательно, функция a^x непрерывна в произвольной точке $r_0 \in \mathbb{Q}$.

Мы предположили, что $a > 1$. Случай $a = 1$ тривиален. Если же $a < 1$, то $a = \dfrac{1}{b}$, где $b > 1$. Следовательно,

$$\lim_n\ a^{r_n} = \lim_n\ \frac{1}{b^{r_n}} = \frac{1}{\lim\limits_n\ b^{r_n}} = \frac{1}{b^{r_0}} = a^{r_0}.$$

Непрерывность функции a^x на $\mathbb{Q}$ доказана.

Пусть $a > 1$, x — произвольное вещественное число. Рассмотрим последовательности $\{r'_n\}$ и $\{r''_n\}$ рациональных чисел, такие, что $r'_n \uparrow x$ и $r''_n \downarrow x$ (символы $r'_n \uparrow x$ и $r''_n \downarrow x$ означают, что r'_n стремится к x, возрастая, а r''_n — убывая)ю

Тогда последовательность $\{a^{r'_n}\}$ монотонно возрастает и ограничена сверху, например, числом $a^{r''_1}$. Следовательно, существует $\lim\limits_n\ a^{r'_n} = b'$. Аналогично существует $\lim\limits_n\ a^{r''_n} = b''$. Далее, $a^{r''_n} - a^{r'_n} = a^{r'_n}(a^{r''_n - r'_n} - 1) \to b' \cdot 0 = 0$, т.е. $b' = b'' = b$.

Нетрудно видеть, что b не зависит от выбора монотонной последовательности рациональных чисел, сходящейся к x. В самом деле, если, например, $\{\widetilde{r}'_n\}$ — другая последовательность, такая, что $\widetilde{r}'_n \uparrow x$, то, как и выше, $\lim\limits_n a^{\widetilde{r}'_n} = \widetilde{b}' = b'' = b$.

Предположим, что $\{r_n\}$ — произволная последовательность рациональных чисел, сходящаяся к x. Из любой ее подпоследовательности $\{r_{n_i}\}$ можно выделить подпоследовательность $\{r_{n_{i_j}}\}$, такую, что или $r_{n_{i_j}} \uparrow x$, или $r_{n_{i_j}} \downarrow x$. По уже доказанному, $a^{r_{n_{i_j}}} \to b$. Но тогда, в силу леммы 3 (§ 1, гл. II) это означает, что $a^{r_n} \to b$. Положим, по определению, $a^x = b$. Тем самым мы определили функцию a^x для всех вещественных значений x.

Способ, который был применен для определения функции a^x при всех вещественных значениях x, исходя из задания этой функции на множестве $\mathbb{Q}$, называется *доопределением функции с плотного подмножества на все множество по непрерывности.* Этот способ расширения области определения функции часто используется в различных разделах математики.

Предельным переходом из равенств и неравенств, описывающих свойства a^x для рациональных значений показателя, можно получить эти же свойства для всех $x \in \mathbb{R}$. Например, если $r_n \to x$. $\rho_n \to y$, $r_n, \rho_n \in \mathbb{Q}$, $n = 1, 2, \ldots$, то $r_n + \rho_n \to x + y$ и равенство

$$a^{r_n} \cdot a^{\rho_n} = a^{r_n + \rho_n}$$

в пределе дает

$$a^x \cdot a^y = a^{x+y}.$$

Точно так же, если $x < y$, $x, y \in \mathbb{R}$ $(a > 1)$, то, взяв два рациональные числа r и ρ, такие, что $x < r < \rho < y$, а затем две последовательности $\{r_n\}, \{\rho_n\} \subset \mathbb{Q}$,

$$r_n < r, \quad r_n \downarrow x, \qquad \rho_n > \rho, \quad \rho_n \uparrow y,$$

из неравенств

$$a^{r_n} < a^r < a^\rho < a^{\rho_n}$$

путем перехода к пределу получаем:

$$a^x \le a^r < a^\rho \le a^y,$$

т.е. монотонность a^x на $\mathbb{R}$.

Так как свойства a^x на $\mathbb{R}$ те же, что и свойства a^x на $\mathbb{Q}$, то непрерывность функции a^x в любой точке $x \in \mathbb{R}$ доказывается так же, как ее непрерывность в рациональной точке. При этом вместо последовательности $\{r_n\}$ рациональных чисел следует рассмотреть произвольную вещественную последовательность $\{x_n\}$, сходящуюся к x.

Отметим, наконец, что при $a > 1$, $a^x \to \infty$, когда $x \to \infty$ и $a^x \to 0$, когда $x \to -\infty$. В самом деле, так как $\{a^n\}$ — б.б. последовательность, то для $\forall\ M > 0$ $\exists\ n_0$, такое, что $a^{n_0} > M$. В силу монотонности функции a^x отсюда следует, что $a^x > a^{n_0} > M$ при $x > n_0$. Равенство $\lim\limits_{x\to\infty} a^x = \infty$ доказано. Второе утверждение следует из того, что если $x < 0$, то $a^x = \dfrac{1}{a^{|x|}}$. Таким образом, когда x пробегает всю числовую ось $(-\infty, \infty)$, значение функции a^x пробегает положительную полуось.

Из теоремы 3 (см, § 2 давкой главы) и уже установленной непрерывности показательной к тригонометрических функций вытекает следующее.

А. Так как функция $y = a^x$, $a > 1$, монотонна и непрерывна на любом конечном отрезке $[a, b]$ и отображает его в некоторый отрезок $[c, d] \subset (0, \infty)$, то на любом конечном отрезке положительной полуоси определена монотонная и непрерывная функция $x = \log_a y$, обратная функции $y = a^x$.

Если в качестве основания выбрано число e, то система логарифмов с таким основанием называется *натуральной системой логарифмов.* Натуральный логарифм числа α обозначается $\ln \alpha$. Связь между натуральными и десятичными логарифмами дает формула

$$\ln \alpha = \frac{1}{M} \log \alpha,$$

которая получался логарифмированием по десятичному основанию равенства $\alpha = 10^{\log \alpha} = e^{\ln \alpha}$.

Число $M = \log 3$ называется *модулем перехода.*

Б. Функция $y = \sin x$ монотонна и непрерывна на $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ и имеет областью значений отрезок $[-1, 1]$. Следовательно, на $[-1, 1]$ определена, монотонна и непрерывна обратная функция $x = \arcsin y$.

В. Функция $y = \operatorname{tg} x$ при любом $n > 0$ монотонна и непрерывна на отрезке $\left[-\frac{\pi}{2} + \frac{1}{n}, \frac{\pi}{2} - \frac{1}{n}\right]$. Обратная функция $x = \operatorname{arctg} y$ определена, монотонна и непрерывна на любом отрезке $[a, b]$, т.е. на всей оси $(-\infty, \infty)$.

Непрерывность показательной и логарифмической функций позволяет установить три важных равенства:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\log_a(1+x)}{x} = \log_a e; \tag{1}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a; \tag{2}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{(1+x)^\alpha - 1}{x} = \alpha. \tag{3}$$

Используя непрерывность логарифмической функции в точке e, имеем:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\log_a(1+x)}{x} = \lim_{x\to 0} \left\{\log_a[(1+x)^{\frac{1}{x}}]\right\} = \log_a \left\{\lim_{x\to 0} (1+x)^{\frac{1}{x}}\right\} = \log_a e.$$

В частности, $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$. Положив $a^x - 1 = y$, $a^x = 1 + y$, $x = \frac{1}{\ln a} \ln(1+y)$, найдем:

$$\lim_{x\to 0} \frac{a^x - 1}{x} = \lim_{y\to 0} \frac{y \ln a}{\ln(1+y)} = \ln a \lim_{y\to 0} \frac{y}{\ln(1+y)} = \ln a.$$

Взяв $\alpha \ln(1+x) = y$, получим

$$\lim_{x\to 0} \frac{(1+x) - 1}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{e^{\ln(1+x)^\alpha} - 1}{x} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{e^{\alpha \ln(1+x)} - 1}{\alpha \ln(1+x)} \cdot \frac{\alpha \ln(1+x)}{x} = \alpha \lim_{y\to 0} \frac{e^y - 1}{y} \cdot \lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = \alpha.$$

§ 5. Параметрическое задание функций. Кривые на плоскости

Иногда бывает трудно выразить в явном виде функциональную зависимость между переменными величинами, входящими в ту или иную задачу. Пусть, например, окружность радиуса R с отмеченной на ней точкой A катится без скольжения по оси Ox. Точка A описывает при этом некоторую кривую на плоскости xOy (строгое определение кривой на плоскости будет дано далее). Ясно, что координаты x и y точек этой кривой связаны функциональной зависимостью, однако выразить эту зависимость в виде формулы довольно трудно. В то же время легко получить выражения для x и y как функции некоторой третьей переменной t.

Предположим с этой целью, что в начальный момент движения точка A находится в начале координат и окружность катится по оси абсцисс в положительном направлении.

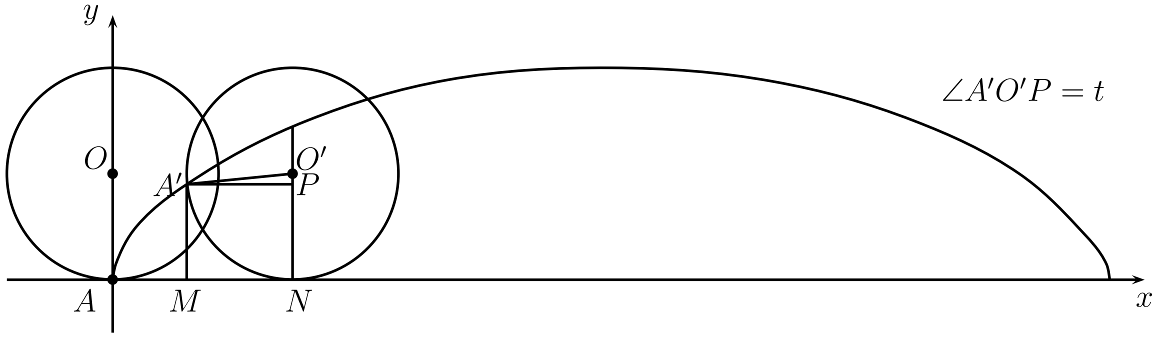

Рис. 12

Если t — угол, на которой повернулась окружность, и точка $A(0,0)$ переместилась при этом в положение $A'(x,y)$, то

$$x = AM = AN - A'P, \qquad y = A'M = O'N - OP.$$

Но $A'P = R\sin t$, и так как качение происходит баз скольжения, то $AN = A\breve{}N = Rt$.

Следовательно,

$$x = Rt - R\sin t = R(t - \sin t). \tag{1}$$

Аналогичный образом находим, что

$$y = R(1 - cost). \tag{2}$$

Итак, требуемые выражения для x и y получены.

Нетрудно проверить, что x — монотонно возрастающая функция от t. В самой деле, пусть $t_2 > t_1$. Без ограничения общности можно считать, что $t_2 - t_1 < \frac{\pi}{2}$. Тогда

$$x(t_2) - x(t_1) = R\{(t_2 - t_1) - (\sin t_2 - \sin t_1)\} =$$

$$= R\left\{(t_2 - t_1) - 2\sin\frac{t_2 - t_1}{2}\,\cos\frac{t_2 + t_1}{2}\right\} >$$

$$> R(\left\{(t_2 - t_1) - 2\frac{t_2 - t_1}{2}\cdot 1\right\} = 0.$$

Так как, кроме того, x зависит от t непрерывно, то обратная функция $t = g(x)$. Но тогда, в силу равенства (2), $y = f(x)$, однако выразить явной формулой эту функциональную зависимость не удается.

Можно из равенства (2) для $t \in [0, \pi]$ выразить t как функцию от y, а именно:

$$t = \arccos\left(1 - \frac{y}{R}\right), \qquad 0 \le y \le 2R.$$

Тогда для этого отрезка, на котором изменяется y, получам:

$$x = R\left[\arccos\frac{R - y}{R} - \frac{1}{R}\sqrt{2Ry - y^2}\right]. \tag{3}$$

Формула (3) менее удобна для изучения зависимости между x и y, чем две формулы — (1) и (2). Например, из видно, что при возрастании t от 0 до $+\infty$ абсцисса x также все время возрастает, а ордината y есть периодическая функция от t с периодом 2π. Так как значениям $t = 0$ и $t = 2\pi$ соответствуют значения $x = 0$ и $x = 2\pi R$, то ясно, что y есть периодическая функция от x с периодом $2\pi R$. Установление этого факта с помощью формула (3) потребовало бы более сложных рассуждений.

Рассмотренный нами пример, подводит к следующему определению.

Определение 1. Пусть на некотором множестве T значений переменной t заданы функции

$$x = \varphi(t), \qquad y = \psi(t). \tag{4}$$

Если одно из этих функций, например, $\varphi(t)$, биективно отображает T на некоторое множество $X = \{x = \varphi(t) |\ t \in T\}$ и, следовательно, существует обратная функция

$$\varphi^{-1} :\ X \to T,$$

то

$$y = \psi[\varphi^{-1}(x)] = f(x) \tag{5}$$

есть функция от x, определенная на множестве X. В этом случае равенства (4) называются *параметрическим заданием функции* y, а переменная t — *параметром.*

Второй пример параметрического задания функции дает система

$$x = a\cos t, \quad y = b\sin t, \qquad 0 \le t \le \pi. \tag{6}$$

В этой случае легко исключить параметр t, т.е. перейти к явному заданию y как функции от x:

$$y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}, \qquad -a \leq x \leq a.$$

Уравнения (6) определены ив только для $t \in [0, \pi]$. Они имеют смысл для всех значений t из отрезка $[0, 2\pi]$ и даже для любых вещественных значений t. Однако если их рассматривать на отрезке $[0, 2\pi]$, то исключение параметра t не приводит к однозначным функциям $y = f(x)$ или $x = g(y)$, а позволяет найти лишь так называемую *неявную* (см. гл. XII) *функциональную зависимость между x и y*:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \tag{7}$$

из которой y получается как двузначная функция от x:

$$y = \pm\frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}, \qquad -a \leq x \leq a.$$

Еще одним примером того же рода являются уравнения

$$x = \frac{t}{1+t^3}, \quad y = \frac{t^2}{1+t^3}, \qquad t \neq -1. \tag{8}$$

Исключение t из уравнений (8) приводит снова к неявкой функциональной зависимости между x и y:

$$x^3 + y^3 - xy = 0, \tag{9}$$

ни одну из переменных которой нельзя выразить как однозначную функцию второй во всей области значений переменных x и y, получающихся из уравнения (8).

Вместе с тем уравнения (7) и (9) во всей области допустимых значений переменных x и y имеют однозначное геометрическое истолкование. В первом случае множество точек $M(x, y)$ на плоскости, координаты которых удовлетворяют уравнению (7) или определяются по системе (6), образует *эллипс*, во втором — так называемый *декартов лист* (рис. 13).

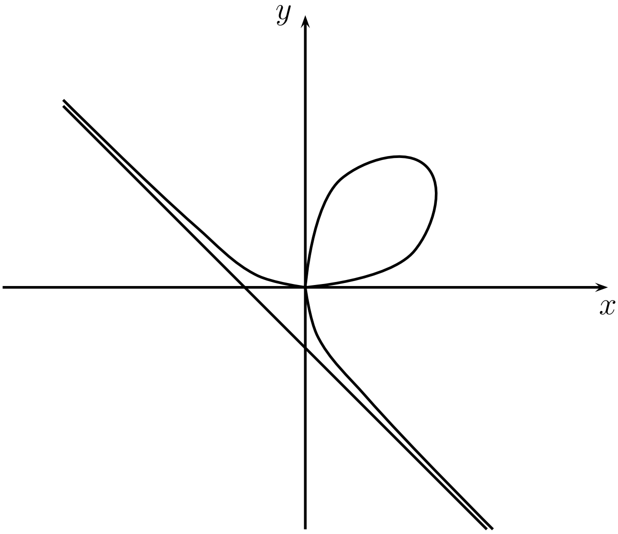

Рис. 13

Рассмотренные примеры подводят к следующему определению.

Определение 2. Отображение

$$x = \varphi(t), \qquad y = \psi(t) \tag{10}$$

отрезка $\alpha \leq t \leq \beta$ в плоскость xOy, где $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ — непрерывные на отрезке $[\alpha, \beta]$ функции, называется *непрерывной кривой* на этой плоскости. Так, уравнения (1) и (2) определяют *циклоиду.*

Согласно определению (2), циклоида, эллипс и декартов лист являются непрерывными кривыми[5] на плоскости.

Равенства (10) называются *параметрическим заданием кривой.*

Пусть задано отображение

$$x = g(s), \qquad y = h(s) \tag{11}$$

отрезка $\gamma \leq s \leq \delta$ в плоскость xOy. Если существует строго монотонное и непрерывное отображение $\tau(s)$ отрезка $[\gamma, \delta]$ на отрезок $[\alpha, \beta]$, такое, что $\tau(\gamma) = \alpha$, $\tau(\delta) = \beta$ или $\tau(\gamma) = \beta$, $\tau(\delta) = \alpha$ и

$$\varphi[\tau(s)] = g(s), \qquad \psi[\tau(s)] = h(s), \tag{12}$$

то кривые, определяемые равенствами (10) и (11), считаются тождественными, а равенства (10) и (11) задают различные параметризации одной и той же кривой.

Пример.

Пусть кривая Γ_1 задана уравнениями

$$x = e^{2t}, \quad y = e^{3t}, \qquad \alpha \leq t \leq \beta,$$

а кривая Γ_2 — уравнениями

$$x = s^2, \quad y = s^3, \qquad \gamma \leq s \leq \delta.$$

Отображение $t = \ln s$ при условии $\gamma = e^{\alpha}$ и $\delta = e^{\beta}$ показывает, что имеются два параметрических задания одной и той же кривой, т.е. $\Gamma_1 \equiv \Gamma_2$.

Рассматривая кривые, заданные параметрически, следует выбирать ту параметризацию, которая для данного случая наиболее удобна.

Частным случаем параметрического задания является задание кривой в виде

$$x = t, \quad y = f(t), \qquad a \leq t \leq b,$$

или

$$y = f(x), \qquad a \leq x \leq b.$$

Таким образом, непрерывная кривая, заданная явным уравнением, — это график непрерывной функции $f(x)$. J Пусть кривая Γ задана уравнениями

---

[5] В дальнейшем вместо слов «непрерывная кривая» будет часто употребляться одно слово — «кривая».

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t), \qquad \alpha \le t \le \beta. \tag{13}$$

Точка $A(\varphi(\alpha), \psi(\alpha))$ называется *началом кривой*, точка $B(\varphi(\beta), \psi(\beta))$ — *концом кривой* Г. Если $A = B$, кривая Г называется *замкнутой*.

Отображение отрезка $[\alpha, \beta]$ в плоскость xOy, осуществляемое с помощью формуя (13), может оказаться не взаимно однозначным, и найдутся точки $t_1, t_2 \in [\alpha, \beta]$, $t_1 \ne t_2$, такие, что

$$\varphi(t_1) = \varphi(t_2) \quad \psi(t_1) = \psi(t_2), \quad t_1 \ne \alpha, \beta \quad \text{или} \quad t_2 \ne \alpha, \beta.$$

Точка $M(\varphi(t_1)\psi(t_1))$ кривой Г называемся в этом случае *точкой самопересечения* или *кратной* точкой кривой Г. Кривая, не имеющая точек самопересечения, называется *простой*. Так, циклоида и эллипс — простые кривые, причем вторая за них замкнутая. Декартов лист имеет самопересечение в точке $(0, 0)$, соответствующей следующим значениям параметра t: $t = 0$ и $t = \pm\infty$.

Другой пример кривой с самопересечением — «четырехлепестковая роза» (рис. 14):

$$\begin{aligned} x &= a\cos 2\varphi \cdot \cos\varphi \\ y &= a\cos 2\varphi \cdot \sin\varphi, \end{aligned} \qquad 0 \le \varphi \le 2\pi.$$

Здесь $(0, 0)$ — кратная точка, соответствующая следующим значениям параметра:

$$\varphi_1 = \frac{\pi}{4}, \quad \varphi_2 = \frac{3\pi}{4}, \quad \varphi_3 = \frac{5\pi}{4}, \quad \varphi_4 = \frac{7\pi}{4}.$$

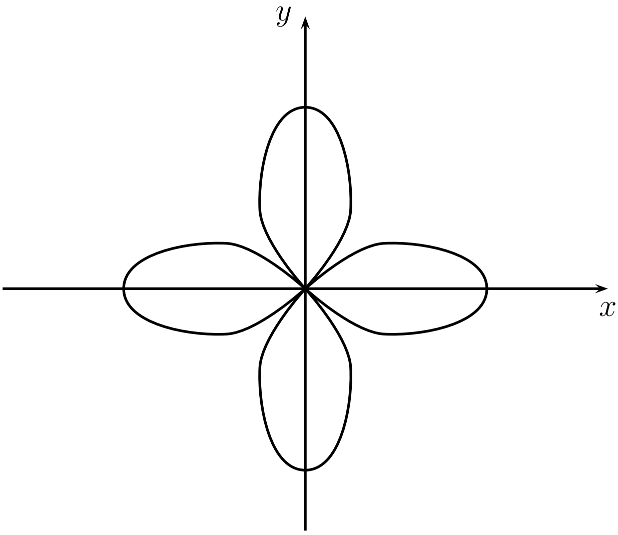

Рис. 14

Рассмотрим кривую Г, заданную параметрическими уравнениями

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t), \qquad \alpha \le t \le \beta.$$

При изменами параметра t от значения α до значения β точка $M(t) = M(\varphi(t), \psi(t))$ кривой перемещается вдоль Г от точки $A = A(\varphi(\alpha), \psi(\alpha))$ до точка $B = B(\varphi(\beta), \psi(\beta))$. Тем самым на кривой Г определяется порядок следования точек $M(t)$, соответствующий порядку следования точек t на отрезке $[\alpha, \beta]$, называемый *ориентацией кривой* Γ. Ясно, что две различные параметризации кривой, такие, что $\tau(s)$ всюду на $[\gamma, \delta]$ возрастает, определяют на ней одну а ту же ориентацию.

Пусть теперь дано отображение

$$t = \chi(\xi), \qquad \lambda \leq \xi \leq \mu,$$

отрезка $[\lambda, \mu]$ на отрезок $[\alpha, \beta]$, такое, что $\chi(\mu) = \alpha$, $\chi(\lambda) = \beta$ и $\chi(\xi)$ монотонно убывает вдоль $[\lambda, \mu]$. Тогда параметризация

$$x = x(\xi) = \varphi[\chi(\xi)], \quad y = y(\xi) = \psi[\chi(\xi)], \qquad \lambda \leq \xi \leq \mu, \tag{14}$$

определяет на плоскости ту же кривую Γ, но с противоположной ориентацией, так как порядок следования точек на кривой Γ, порождаемый уравнениями (14), будет обратным по отношению к порядку следования, порождаемом уравнениями (10). Если кривую Γ с выбранной ориентацией обозначить Γ_+, то кривая с противоположной ориентацией будет обозначаться Γ_-. Как множества точек плоскости xOy, кривые Γ_+ и Γ_-, совпадают. Кривая с выбранной на ней ориентацией называется *ориентированной кривой.*

Глава IV

ПРОИЗВОДНЫЕ И ДИФФЕРЕНЦИАЛЫ ФУНКЦИЙ ОДНОЙ НЕЗАВИСИМОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

Необходимость численного анализа различных сложных процессов, например, неравномерного движения частей механизмов и машин или распространения тепла в неоднородной среде привела к возникновению в математике понятий производной и дифференциала функции. Эти математические понятия позволили сравнивать изменения, или прираращения, соизменяющихся величин. Стало возможным оценивать длину пути в зависимости от промежутка времени, за который этот путь пройден, отношение приращения температуры вдоль стержни к длине участка стержня и т.д., т.о. в общем случае оценивать разность $f(x_2)-f(x_1)$, эависящую от величины $x_2 - x_1$, причем, как правило, от ее малых значений.

§ 1. Определение производной и дифференциала

Пусть функция $y = f(x)$ определена в открытом промежутке X, $x \in X$ — внутренняя точка этого промежутка а величина $h \geq 0$ такова, что точка $x + h$ принадлежит X. Тогда при переходе от значения аргумента x к новому значению $x + h$, функция изменится на величину

$$\Delta y = \Delta f(x) = f(x+h) - f(x),$$

которая называется приращением функции $f(x)$, соответствующим приращению h независимого переменного. Приращение независимого переменного обозначается также Δx.

Определение 1. Функция f называется *дифференцируемой в точке* $x_0 \in X$, если существует линейная однородная функция $l_{x_0}(h)$ такая, что для всех $h \in \mathbb{R}$, для которых $x_0 + h \in X$, имеем

$$f(x_0 + h) - f(x_0) = l_{x_0}(h) + \omega(x_0, h),$$

где $\dfrac{\omega(x_0, h)}{h} \to 0$ при $h \to 0$.

Линейная функция $l_{x_0}(h)$ называется *дифференциалом* данной функции f в точке x_0 и обозначается dy или $df(x_0)^6$, а $\omega(x_0, h)$ — остатком приращения функции. При $h = 0$ также $\omega(x_0, h) = 0$.

Линейная функция $l_{x_0}(h)$ определена при любых $h \in \mathbb{R}$. Если h таково, что $f(x_0 + h) - f(x_0)$ имеет смысл, то согласно определению 1, дифференциал $l_{x_0}(h)$ (если он отличен от нуля, при $h \to 0$) является главной с точностью до малых высшего порядка по сравнению с h, частью приращения $\Gamma f(x)$ функции $f(x)$.

Так как линейная однородней функция $l_{x_0}(h)$ на $\mathbb{R}$ однозначно определяется постоянной A, так что $l_{x_0}(h) = Ah$ (и обратно — однозначно определяет такую постоянную), то определение 1 можно переформулировать следующим образом.

Определение 1′. Функция f называется *дифференцируемой в точке* $x_0 \in X$, если существует постоянная A, вообще говоря, зависящая от x_0, такая, что для всех h, для которых $x_0 + h \in X$,

$$f(x_0 + h) - f(x_0) = Ah + \omega(x_0, h), \tag{1}$$

где $\dfrac{\omega(x_0, h)}{h} \to 0$ при $h \to 0$.

Пусть, как и ранее, $f : X \to \mathbb{R}$ и $x \in X$.

Определение 2. Предел отношения приращения Δy функции к вызвавшему его приращению Δx независимой переменной при стремлении h к нулю, т.е.

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h},$$

при условии, что этот предел конечен, называется *производной функции* $y = f(x)$ *в точке* x_0.

При фиксированном значении x производная является числом; при изменении x производная в общем случае меняется и, таким образом, предоставляет собой новую функцию от x, которую обозначают y', или $f'(x)$, или $Df(x)$.

Теорема 1. *Для того чтобы функция* $f : X \to \setminus$ *была дифференцируема в точке* $x_0 \in X$ *необходимо и достаточно, чтобы она имела в этой точке производную.*

Необходимость. Пусть соотношение (1) выполнено при любых h, таких, что $x_0 + h \in X$. Тогда

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = A + \frac{\omega(x_0, h)}{h}.$$

Перейдя к пределу при $h \to 0$, получим:

$$A = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = f'(x_0).$$

Достаточность. Пусть в точке x_0 существует производная

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

---

[6] Дифференциал функции f в точке x_0 правильнее было бы обозначить $df(x_0, h)$; так он и будет обозначаться нами для функций многих переменных. Для функций одной переменной сохраняем установившееся в учебной литературе обозначение $df(x_0)$.

и
$$\alpha(h) = \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} - f'(x_0).$$
Из определения предела функции следует, что $\alpha(h) \to 0$ при $h \to 0$. Тогда $f(x_0 + h) - f(x_0) = f'(x_0)h + h\alpha(h)$. Соотношение (1) доказано.

Попутно мы доказали, что для дифференцируемой функции $A = f'(x_0)$, $\omega(h) = h\alpha(h)$, где $\alpha(h) \to 0$ при $h \to 0$. Следовательно, дифференциал $df(x_0)$ функции имеет вид
$$df(x_0) = f'(x_0)h,$$
и равенство (1) может быть записано следующим образом
$$f(x_0+h) - f(x_0) = f'(x_0)h + h\alpha(h). \tag{2}$$

Следствие. *Функция, дифференцируемая в точке x_0, непрерывна в этой точке.*

Действительно, согласно равенству (2), имеем:
$$|f(x_0+h) - f(x_0)| \leq (|f'(x_0)| + |\alpha(h)|)|h|.$$
Так как $\alpha(h) \to 0$ при $h \to 0$, то для достаточно малых h можно считать, что $|\alpha(h)| \leq 1$. Поэтому если задано число $\varepsilon > 0$. то, взяв $\delta = \dfrac{\varepsilon}{|f'(x_0)| + 1}$, будем иметь $|f(x_0+h) - f(x_0)| < \varepsilon$ при $|h| < \delta$. Непрерывность $f(x)$ в точке x_0 доказана.

Обратное утверждение: из непрерывности функции в точке следует ее дифференцируемость в этой точке — неверно. Рассмотрим функцию $f(x) = |x|$. Она всюду непрерывна, однако при $x_0 = 0$
$$\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = \frac{|h|}{h} = \begin{cases} 1, & h > 0, \\ -1, & h < 0, \end{cases}$$
и так как отношение $\dfrac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$ не имеет предела при $h \to 0$ произвольным способом, то в точке $x_0 = 0$ производная функции $f(x) = |x|$ не существует. В точках, отличных от нуля, эта функция имеет производную:
$$f'(x) = 1 \quad \text{при} \quad x > 0 \quad \text{и} \quad f'(x) = -1 \quad \text{при} \quad x < 0.$$

Если, зафиксировав $x \in X$, ввести в рассмотрение функцию
$$g_x(h) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h},$$
определенную при всех $h \neq 0$, таких, что $x + h \in X$, то, согласно определению 2, производная $f'(x)$ есть предел этой функции при $h \to 0$. По теореме 1 (§ 4, гл. II), для того чтобы функция $f : X \to \mathbb{R}$ имела в точке $x \in X$ производную, необходимо и достаточно, чтобы для любой последовательности $\{h_n\}$, сходящейся к нулю и такой, что $x + h_n \in X$, $h_n \neq 0$, $n = 1, 2, 3, \ldots$ последовательность
$$\left\{\frac{f(x+h_n) - f(x)}{h_n}\right\} \tag{1}$$

сходилась к некоторому пределу. Как видно из доказательства теоремы 4 (§ 4, гл. II), этот предел будет один и тот же для всех таких последовательностей, и потому

$$f'(x) = \lim_{n} \frac{f(x+h_n) - f(x)}{h_n}.$$

Определение 3. Функция $f(x)$, определенная на X и дифференцируемая в каждой точке этого промежутка, называется *дифференцируемой на промежутке* X.

Поскольку дифференцируемость функций эквивалентна существованию у этой функции производной, операцию нахождения производной называют *дифференцированием функции.* Найдя производную $f'(x)$ функции $f(x)$, тем самым находят и дифференциал $df(x)$ этой функции, так как из доказательства теоремы 1 видно, что $df(x) = f'(x)h$. Раздел математического анализа, в котором изучается операция дифференцирования функций и свойства производных, называется *дифференциальным исчислением.*

Примеры нахождения производной.

1. Пусть $y = f(x) = \text{const}$. Тогда $\Delta y = f(x+h) - f(x) = c - c = 0$ для всех x и h. Поэтому

$$y' = (c)' = 0.$$

2. Пусть $y = x^n$, где n — натуральное число. Эта функция определена для любого действительного значения x, и, следовательно, при любом x и h

$$\Delta y = (x+h)^n - x^n = nx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}x^{n-2}h^2 + \ldots + h^n.$$

Отсюда $dy = nx^{n-1}h$. По теореме 1, $y' = (x^n)' = nx^{n-1}$.

3. Пусть $y = a^x$, $a > 0$, $a \neq 1$. Функция определена для всех действительных x и в каждой точке области определения имеет производную.

Действительно, при любых вещественных x и $h \neq 0$

$$\frac{\Delta y}{h} = \frac{a^{x+h} - a^x}{h} = a^x\,\frac{a^h - 1}{h}. \tag{1}$$

Используя формулу (2) из § 4 гл. III, получим:

$$y' = a^x \lim_{h\to 0} \frac{a^h - 1}{h} = a^x \ln a.$$

В частном случае, если $y = e^x$, то

$$y' = e^x.$$

4. Пусть $y = \log_a x$, $a > 0$, $a \neq 1$. Функция определена в интервале $(0, \infty)$ и в каждой точке этого интервала имеет производную, которая вычисляется по формуле

$$y' = \frac{1}{x}\log_a e.$$

В самом деле, при любом $x > 0$ и любом $h \neq 0$, таком, что $x + h > 0$, имеем:

$$\frac{\Delta y}{h} = \frac{\log_a(x+h) - \log_a x}{h} = \frac{1}{x}\,\frac{\log_a\left(1 + \dfrac{h}{x}\right)}{h}.$$

Отсюда по формуле (1) из § 4, гл. III найдем:

$$y' = \frac{1}{x}\lim_{h\to 0}\frac{\log_a\left(1 + \dfrac{h}{x}\right)}{h} = \frac{1}{x}\log_a e.$$

В частности, при $a = e$

$$y' = (\ln x)' = \frac{1}{x}.$$

5. Докажем, что в каждой точке области определения тригонометрические функции $\sin x$, $\cos x$ имеют производные, причем

$$(\sin x)' = \cos x, \qquad (\cos x)' = -\sin x.(1)$$

Пусть $y = \sin x$. Тогда для любых вещественных x и h, $h \neq 0$,

$$\frac{\Delta y}{h} = \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} = \frac{\sin\dfrac{h}{2}}{\dfrac{h}{2}}\cos\left(x + \frac{h}{2}\right).$$

В силу непрерывности функции $\cos x$ и с учетом равенства $\lim\limits_{\alpha\to 0}\dfrac{\sin\alpha}{\alpha} = 1$ (см. § 4, гл. II) получим:

$$y' = \lim_{h\to 0}\frac{\Delta y}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\sin\dfrac{h}{2}}{\dfrac{h}{2}}\cos\left(x + \frac{h}{2}\right) = \cos x.$$

Аналогично устанавливается справедливость формулы $(\cos x)' = -\sin x$.

§ 2. Простейшие теоремы о производных.
Техника дифференцирования

Докажем теоремы о производных суммы, произведения и частного функций и установим правила, при помощи которых находят эти производные. Наконец, рассмотрим вопрос о дифференцировании сложных и обратных функций. Всюду далее X — открытый промежуток.

Теорема 1 *Пусть функции $u = u(x)$ и $v = v(x)$ определены на X и имеют производные в точке $x_0 \in X$. Тогда в этой точке функции $cu(x)$, $u(x) \pm v(x)$,*

$u(x)v(x)$, $u(x)/v(x)$ (последняя при условии $v(x_0) \neq 0$) также имеют производные, причем:

$$\text{(I)} \qquad [cu(x)]'_{x=x_0} = cu'(x_0);$$

$$\text{(II)} \qquad [u(x) \pm v(x)]'_{x=x_0} = u'(x_0) \pm v'(x_0);$$

$$\text{(III)} \qquad [u(x)v(x)]'_{x=x_0} = u'(x_0)v(x_0) + u(x_0)v'(x_0);$$

$$\text{(IV)} \qquad \left[\frac{u(x)}{v(x)}\right]'_{x=x_0} = \frac{u'(x_0)v(x_0) - u(x_0)v'(x_0)}{[v(x_0)]^2}.$$

Доказательство.

I. Поскольку функция $u(x)$ дифференцируема в точке x_0, то для любого h, такого, что $x_0 + h \in X$,

$$u(x_0 + h) - u(x_0) = u'(x_0)h + \omega(h).$$

Но тогда при любом $c = \text{const}$

$$cu(x_0 + h) - cu(x_0) = cu'(x_0)h + c\omega(h).$$

Так как $c\omega(h)$ так же, как и $\omega(h)$ есть бесконечно малая величина по сравнению с h при $h \to 0$, то по теореме 1, функция $cu(c)$ имеет в точке x_0 производную и $[cu(x)]'_{x=x_0} = cu'(x_0)$. Таким образом, постоянный множитель может быть вынесен за знак производной.

II. Доказать дифференцируемость суммы двух фикций и вывести формулу производной суммы предлагаем читателю.

III. При $x_0 + h \in X$ имеем:

$$u(x_0+h)v(x_0+h)-u(x_0)v(x_0) = [u(x_0+h)-u(x_0)]v(x_0+h)+[v(x_0+h)-v(x_0)]u(x_0).$$

Применив формулу (2) из § 1 данной главы к каждой квадратной скобке в правой части последнего равенства, получим:

$$u(x_0 + h)v(x_0 + h) - u(x_0)v(x_0) = [u'(x_0 + h) \cdot h + h\alpha_1(h)]v(x_0 + h)+$$
$$+[v'(x_0) \cdot h + h\alpha_2(h)]u(x_0) = [u'(x_0)v(x_0 + h) + v'(x_0)u(x_0)]h+$$
$$+h[\alpha_1(h)v(x_0 + h) + \alpha_2(h)u(x_0)].$$

Тогда

$$\frac{u(x_0 + h)v(x_0 + h) - u(x_0)v(x_0)}{h} = u'(x_0)v(x_0 + h) + v'(x_0)u(x_0)+$$
$$+\alpha_1(h)v(x_0 + h) + \alpha_2(h)u(x_0).$$

Так как при $h \to 0$, в силу следствия из теоремы 1, $v(x_0+h) \to v(x_0)$, то

$$\lim_{h\to 0} \frac{u(x_0+h)v(x_0+h)-u(x_0)v(x_0)}{h} = u'(x_0)v(x_0)+u(x_0)v'(x_0)+$$

$$\lim_{h\to 0} \alpha_1(h)v(x_0+h)+\lim_{h\to 0} \alpha_2(h)u(x_0) = u'(x_0)v(x_0)+u(x_0)v'(x_0).$$

Правило III доказано.

IV. Применив обозначения, которые использовались в п. III, получим

$$\frac{1}{x(x_0)+h} - \frac{1}{v(x_0)} = -\frac{v(x_0+h)-v(x_0)}{v(x_0+h)v(x_0)} = -\frac{v'(x_0)h+h\alpha_1(h)}{v(x_0+h)v(x_0)},$$

так что

$$\lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left[\frac{1}{x(x_0)+h} - \frac{1}{v(x_0)}\right] = -\lim_{h\to 0} \frac{v'(x_0)+\alpha(h)}{v(x_0+h)v(x_0)} =$$

$$= -v(x_0)\lim_{h\to 0} \frac{1}{v(x_0+h)v(x_0)} - \lim_{h\to 0} \frac{\alpha(h)}{v(x_0+h)v(x_0)} = -\frac{v'(x_0}{[v(x_0)]^2}.$$

Это означает, что функция $\frac{1}{v(x)}$ имеет производную и $\left[\frac{1}{v(x)}\right]'_{x=x_0} = -\frac{v'(x_0)}{[v(x_0)]^2}$. Но тогда, по правилу III, произведение функций $u(x)$ и $\frac{1}{v(x)}$ имеет производную в точке x_0 и

$$\left[\frac{u(x)}{v(x)}\right]'_{x=x_0} = u'(x_0)\cdot\frac{1}{v(x_0)} - u(x_0)\frac{v'(x_0)}{[v(x_0)]^2} = \frac{u'(x_0)v(x_0)-u(x_0)v'(x_0)}{[v(x_0)]^2}.$$

Теорема доказана.

Примеры.

1. Если $y = \operatorname{tg} x$, $x \neq \frac{\pi}{2}(2n+1)$, то пользуясь правилом IV, получим:

$$y' = (\operatorname{tg} x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = [(\sin x)'\cos x - (\cos x)'\sin x]\cdot\frac{1}{cos^2 x} =$$

$$= \frac{sin^2 x+\cos^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}. \qquad (1)$$

2. Если $y = \operatorname{ctg} x$, $x \neq k\pi$, то аналогично предыдущему найдем:

$$y' = (\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}. \qquad (1)$$

Замечание. Теорема 1 необратима. Так, например, функции $u(x) = |x|$ и $v(x) = -|x|$ не имеют производных в точке $x = 0$, в то время как функции $u(x) + v(x) = 0$ и $u(x)v(x) = -x^2$ дифференцируемы в этой точке.

Теорема 2 (о производной сложной функции). *Пусть функция $f(x)$ определена на интервале X, $f(x) \in Y$, и дифференцируема в точке $x_0 \in X$. Пусть, далее, функция $g(y)$ определена на интервале Y и дифференцируема в* *точке* $y_0 = f(x_0)$. *Тогда сложная функция* $\varphi(x) = g[f(x)]$ *дифференцируема в точке* x_0 *и*

$$\varphi'(x_0) = g'[f(x_0)]f'(x_0).$$

Доказательство. Выберем число h так, чтобы $x_0 + h \in X$ и $y_0 + k = f(x_0 + h) \in Y$. Последнее требование выполнимо, так как функция $f(x)$, в силу дифференцируемости в точке x_0, непрерывна в этой точке, следовательно, $k \to 0$ при $h \to 0$ и $y_0 + k \in Y$ при достаточно малом h.

Имеем

$$\varphi(x_0 + h) - \varphi(x_0) = g(y_0 + k) - g(y_0) = g'(y_0)k + k\beta(k) =$$

$$= g'(y_0)[f'(x_0)h + \alpha(h)h] + [f'(x_0)h + \alpha(h)h]\beta(k) =$$

$$= g'(y_0)f'(x_0)h + h[g'(y_0)\alpha(h) + f'(x_0)\beta(k) + \alpha(h)\beta(k)].$$

Здесь $\alpha(h) \to 0$ при $h \to 0$ и $\beta(k) \to 0$ при $k \to 0$. Далее,

$$\frac{\varphi(x_0 + h) - \varphi(x_0)}{h} = g'[f(x_0)]f'(x_0) + \Omega,$$

где

$$\Omega = g'(y_0)\alpha(h) + f'(x_))\beta(k) + h\alpha(h)\beta(k).$$

Так как при $h \to 0$ и $k \to 0$, то ясно, что $\Omega \to 0$ при $h \to 0$, а это означает, что функция $\varphi(x)$ дифференцируема в точке x_0 и

$$\varphi'(x_0) = g'[f(x_0)]f'(x_0).$$

Теорема доказана.

Примеры.

3. Найдем производную функции $y = x^\mu$, $x > 0$. Согласно свойствам логарифма,

$$y = x^\mu = (e^{\ln x})^\mu = e^{\mu \ln x}.$$

Применив правило дифференцирований сложной функции, найдем:

$$y' = e^{\mu \ln x} \cdot \mu \cdot \frac{1}{x} = x^\mu \cdot \frac{\mu}{x} = \mu x^{\mu-1}.^7$$

Теорема 3 (о дифференцируемости обратной функции). *Пусть непрерывная функция* $f : X \to Y$, *где* X *и* Y *— открытые промежутки, имеет непрерывную обратную функцию* $g : Y \to X$. *Если в точке* $x_0 \in X$ *функция* $f(x)$ *имеет отличную от нуля производную* $f'(x_0)$ *и* $y_0 = f(x_0)$, *то производная* $g'(y_0)$ *существует и*

$$g'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

Доказательство. Пусть, как и при доказательстве предыдущей теоремы, число h выбрано так, что $x_0 + h \in C$ и $y_0 + k = f(x_0 + h) \in Y$. Тогда

$$k = f(x_0 + h) - f(x_0) = f'(x_0)h + h\alpha(h), \tag{1}$$

---

[7] Можно доказать, что эта формула верна для всех x, для которых x^μ и $x^{\mu-1}$ имеют смысл. Рекомендуем читателю сделать это.

где $\alpha(h) \to 0$ при $h \to 0$. Будем считать h настолько малым, $f'(x_0) + \alpha(h) \neq 0$. Тогда из (1) получим:

$$\frac{h}{k} = \frac{1}{f'(x_0) + \alpha(h)}$$

или

$$\frac{g(y_0 + k) - g(y_0)}{k} = \frac{1}{f'(x_0) + \alpha(h)}. \tag{2}$$

Пусть $k \to 0$; тогда, в силу непрерывности обратной функции, и $h \to 0$, и правая часть равенства (2) стремится к $\frac{1}{f'(x_0)}$. Но тогда и левая часть этого равенства стремится к этому же пределу, т.е. существует

$$g'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

Производные обратных тригонометрических функций.

Пусть $y = \arcsin x$, $|x| < 1$, $|y| < \frac{\pi}{2}$. Эта функция является обратной по отношению к функции $x = \sin y$, которая удовлетворяет всем условиям теоремы 3. Используя теорему 3, получим

$$y' = (\arcsin x)' = \frac{1}{x'} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

(перед радикалом взят знак плюс, так как если $|y| < \frac{\pi}{2}$, то $\cos y > 0$).

Аналогично при $-\infty < x < \infty$, $|y| < \frac{\pi}{2}$, функции $y = \operatorname{arctg} x$ и $x = tgy$ взаимно обратны и для них выполняются условия теоремы 3. Поэтому

$$y' = (\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{x'} = \frac{1}{(tgy)'} = \cos^2 y = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 y} = \frac{1}{1 + x^2}. \tag{1}$$

Рассуждая таким же образом, получаем формулы

$$y' = (\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}, \quad |x| < 1;$$

$$y' = (\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1 + x^2}, \qquad -\infty < x < \infty.$$

Объединив предыдущие результаты, получаем следующий свод правил и формул дифференцирования.

Правила дифференцирования

$$[cu(x)]' = cu'(x); \tag{3}$$

$$[u(x) + v(x)]' = u'(x) + v'(x); \tag{4}$$

$$[u(x)v(x)]' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x); \tag{5}$$

$$\left[\frac{u(x)}{v(x)}\right]' = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{[v(x)]^2}; \tag{6}$$

$$\{g[f(x)]\}' = g'[f(x)]f'(x); \tag{7}$$

$$[f^{-1}(y)]' = \frac{1}{f'(x)}, \qquad f'(x) \neq 0. \tag{8}$$

Формулы для производных элементарных функций

$$(c)' = 0, \qquad c - \mathrm{const}; \tag{9}$$

$$(x^{\mu})' = \mu x^{\mu-1}, \qquad x > 0,\text{[8]} \tag{10}$$

$$(a^x)' = a^x \ln a; \tag{11}$$

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x} \log_q e; \tag{12}$$

$$(\sin x)' = \cos x; \tag{13}$$

$$(\cos x)' = -\sin x; \tag{14}$$

$$(\operatorname{tg} x) = \frac{1}{\cos^2 x}; \tag{15}$$

$$(\operatorname{ctg} x)' - \frac{1}{\sin^2 x}; \tag{16}$$

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}; \tag{17}$$

$$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}; \tag{18}$$

$$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}; \tag{19}$$

$$(\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}; \tag{20}$$

§ 3. Геометрический смысл производной. Касательная к кривой. Механический смысл производной

Пусть на плоскости заданы две кривые L и L_1, определяемые соответственно уравнениями $y = f(x)$ и $y = f_1(x)$, где функции $f(x)$ и $f_1(x)$ заданы и непрерывны на открытом промежутке X. Пусть $x_0 \in X$ и $f(x_0) = f_1(x_0) = y_0$.

Определение. Кривые L и L_1 *касаются в точке* x_0, если

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f_1(x)}{x - x_0} = 0. \tag{1}$$

В частности, прямая, которая определяется уравнением вида $f_1(x) = f(x_0) + k(x - x_0)$, удовлетворяющая условию (1), называемся *касательной к кривой* L *в*

---

[8] См. сноску на с. 114

точке $(x_0, f(x_0))$. (В настоящем пункте дается определение касательной, не параллельной оси Oy. Вопрос об определении касательной, параллельной оси Oy, будет рассмотрен в § 4 данной главы).

Следующая теорема устанавливает тесную связь между существованием производной функции $f(x)$ в точке x_0 и касательной к кривой L в точке $(x_0, f(x_0))$.

Теорема. *Для того, чтобы прямая* $y = f(x_)) + k(x - x_0)$ *была касательной к кривой* L *в точке* $(x_0, f(x_0))$, *необходимо и достаточно, чтобы в точке* x_0 *функция* $f(x)$ *имела производную и* $f'(x_0) = k$.

Необходимость. Пусть прямая $y = f(x_)) + k(x - x_0)$ является касательной к кривой L в точке x_0. Тогда, по определению

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0) - k(x - x_0)}{x - x_0} = 0.$$

Если $x - x_0 = h$, $x = x_0 + h$, то

$$\lim_{h\to 0} \left[\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - k\right] = 0,$$

откуда следует, что существует

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = k,$$

т.е. $f'(x_0)$ и $f'(x_0) = k$.

Достаточность. Пусть в точке $x_0 \in X$ существует производная $f'(x_0)$. Определим прямую L_1 уравнением

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

В этом случае

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0)}{x - x_0} =$$
$$= \lim_{x\to x_0} \left[\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - f'(x_0)\right] = 0,$$

т.е. выполнено условие (1), и прямая L_1 касается кривой L в точке $(x_0, f(x_0))$.

Доказанная теорема приводит к следующему выводу: значение производной $f'(x_0)$ в точке x_0 равно угловому коэффициенту касательной к кривой L в точке $(x_0, f(x_0))$, т.е. тангенсу угла, образованного касательной к кривой L в точке $(x_0, f(x_0))$ с положительным направлением оси Ox.

Теорема дает возможность получить определение касательной к кривой L в точке $(x_0, f(x_0))$. Пусть $x_0, x_1 \in X$ и $x_1 = x_0 + h$. Рассмотрим прямую, эаданную уравнением $y = f(x_0) + k(h)(x - x_0)$, где $k(h) = \dfrac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$. Очевидно (рис. 15), что эта прямая проходит через точки A и B кривой L, причем угловой коэффициент этой прямой

$$k(h) = \operatorname{tg}\varphi = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

При фиксированном значении x_0 и $h \to 0$ точка B двигается по кривой L, приближаясь к точке A, а секущая AB поворачивается вокруг точки A. Если функция $f(x)$ дифференцируема в точке x_0, то при $h \to 0$

$$\operatorname{tg}\varphi = k(h) \to f'(x_0) = \operatorname{tg}\alpha,$$

т.е. секущая AB стремится к некоторому предельному положению, которым является касательная к кривой L в точке $(x_0, f(x_0))$. Поэтому можно сказать, что касательная к кривой есть предельное положение секущий AB, проходящей через точки $A(x_0, f(x_0))$ и $B(x_0 + h, f(x_0 + h))$ при $h \to 0$.

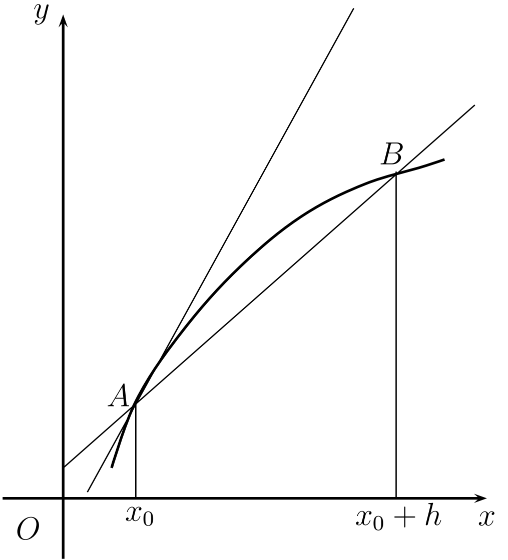

Рис. 15

Исторически именно задачи о построении касательных к кривым наряду с задачами о нахождении скорости неравномерного движения (см. далее) привели к понятию производной. При этом и касательная, и скорость рассматривались как понятия, не требующие определений, и с помощью их вводились дифференциалы (Лейбниц[9]) и производные функций (Ньютон[10]).

Обратимся к определению скорости неравномерного движения. Рассмотрим движение материальной точки вдоль прямой линии. Заметим, что полученные выводи верны и для более общего характера движения.

Пусть t — время, отсчитываемое от некоторого начального момента, s — путь, пройденный движущейся точкой за время t (от начального момента). Тогда, очевидно, s является некоторой функцией времени t: $s = s(t)$, которая определяет движение точки. Соотношение

$$s = s(t), \qquad t \geq 0, \tag{2}$$

называется законом движения. Так, например, закон равноускоренного (равнозамедленного) движения точки вдоль прямой может быть записан в виде:

$$s = s_0 + v_0 t + \frac{at^2}{2}, \tag{3}$$

---

[9] Г. Лейбниц (1646–1716) — немецкий философ, математик и физик.

[10] И. Ньютон (1643–1727) — английский физик, механик, астроном и математик.

где s_0, v_0 и a — некоторые постоянные.

Пусть задай закон движения (1) материальной точки. Рассмотрим вопрос об определений и вычислении ее скорости в данный момент времени t. Наряду с моментом времени t рассмотрим другой момент времени $t+\Delta t$. Очевидно, что перемещение Δs точки за время Δt можно выразить следующим образом:

$$\Delta s = s(t+\Delta t) - s(t),$$

причем перемещение совпадает в рассматриваемом случае с траекторией движения точки и направлено в сторону ее движения. Напомним, что если движение равномерно, то скоростью движения называется путь, проходимый в единицу времени, т.е. отношение пути к времени. Поэтому средней скоростью точки на промежутке изменения времени от t до $t+\Delta t$ естественно назвать выражение

$$v_{\text{ср}} = \frac{s(t+\Delta t) - s(t)}{\Delta t}.$$

Очевидно, что $v_{\text{ср}}$ является переменной величиной и изменяется в зависимости от изменения величины Δt, причем чем меньше Δt, тем лучше $v_{\text{ср}}$ характеризует движение в момент t. Поэтому за скорость v движущейся точки в момент времени t принимается предел средней скорости $v_{\text{ср}}$ при $\Delta t \to 0$:

$$v(t) = \lim_{\Delta t \to 0} v_{\text{ср}} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{s(t+\Delta t) - s(t)}{\Delta t}. \tag{4}$$

Таким образом, формула (3) дает нам определение скорости движущейся точка, а также указывает способ ее нахождения. Используя принятые обозначения, получаем следующий результат: если задан закон движения точки $s(t)$, то

$$v(t) = s'(t), \tag{5}$$

т.е. скорость точки в заданной момент времени t есть производная от пути по времени.

Примеры.

Найдем скорость равноускоренного равнозамедленного) движения точки вдоль прямой в произвольный момент времени. Используя закон движения (3) и применив правило и формулы дифференцирования, найдем:

$$v(t) = s'(t) = v_0 + at.$$

§ 4. Односторонние и бесконечные производные

Расширим понятие производной. Пусть функция $f(x)$ определена на промежутке X и $x_0 \in X$. Конечные пределы

$$f'_-(x_0) = \lim_{h\to 0, h<0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}, \qquad f'_+(x_0) = \lim_{h\to 0, h>0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$$

называются *односторонними производными* соответственно *производной слева* и *производной справа* функции $f(x)$ в точке x_0.

Введение этих новых понятий обусловлено следующими соображениями.

1. Если функция $f(x)$ определена в замкнутом промежутке $[a, b]$ и x_0 — граничная точка этого промежутка, то вопрос о двусторонней производной (см. определение 1 из § 1 гл. IV) в этой точке теряет смысл.

2. Как уже указывалось, существуют функции, которые в отдельных точках (внутренних для промежутка X) не имеют производной $f'(x)$ по определению 1 (см. § 1 гл. IV). Изучение односторонних производных $f'_-(x_0)$ и $f'_+(x_0)$ иногда дает возможность делать выводы о поведения Функции в окрестности такой точки.

Теорема 1. *Для того чтобы в точке $x_0 \in (a, b)$ существовала производная $f'(x_0)$, необходимо и достаточно, чтобы существовали односторонние производные и выполнялось равенство*

$$f'_-(x_0) = f'_+(x_0). \tag{1}$$

Эта теорема является перефразировкой соответствующей леммы о существовании предела у функции (см. § 4 гл. II).

Легко привести пример непрерывной функции, которая в бесконечном числе точек области определения не имеет производной, но имеет в этих точках односторонние производные.

Примеры.

1. Пусть $f(x) = E(x)\sin\pi x$. Эта функция, как легко показать, непрерывна на всей числовой прямой. Предположим, что x_0 не является целым числом. Покажем, что $f(x)$ имеет производную в каждой такой точке x_0. Пусть $E(x_0) = k$. Возьмем h настолько малым, что $E(x_0 + h) = E(x_0)$. Тогда

$$f(x_0 + h) - f(x_0) = E(x_0 + h)\sin\pi(x_0 + h) - E(x_0)\sin\pi x_0 =$$

$$= k[\sin\pi(x_0 + h) - \sin\pi x_0]$$

и

$$f'(x_0) = k\lim_{h\to 0}\frac{\sin\pi(x_0 + h) - \sin\pi x_0}{h} = k\pi\cos\pi x_0.$$

Если $x_0 = k$, то, взяв $h > 0$ так, чтобы $E(x_0 + h) = k$, получим

$$f(x_0 + h) - f(x_0) = E(x_0)[\sin\pi(x_0 + h) - \sin\pi x_0] =$$

$$= k[\sin\pi(k + h) - \sin\pi k] = kcosk\pi\sin\pi h = (-1)^k k\sin\pi h.$$

Тогда

$$f'_+(x_0) = (-1)^k k\lim_{h\to 0,\ h>0}\frac{\sin\pi h}{h} = (-1)^k k\pi.$$

Вычислив аналогичным образом $f'_-(k)$, получим:

$$f'_-(k) = (-1)^k(k - 1)\pi.$$

Таким образом, рассматриваемая функция не имеет производной ни в одной целочисленной точке $x_0 = k$.

2. Покажем, что непрерывная функция

$$f(x) = \begin{cases} x\sin\dfrac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$$

не имеет в точке $x_0 = 0$ односторонних производных. Действительно, пусть $h \lesseqgtr 0$. Тогда

$$f(x_0 + h) - f(x_0) = f(h) - f(0) = h\sin\frac{1}{h},$$

и $\dfrac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = \sin\dfrac{1}{h}$ не имеет предела при $h \to 0$.

При существовании у функции $y = f(x)$ в точке x_0 неравных односторонних производных нельзя говорить о существовании определенной касательной графику функции $y = f(x)$ в точке $(x_0, f(x_0))$. Однако, проведя рассуждения, аналогичные рассуждениям в примере 1, можно построить прямые, заданные уравнениями

$$y = f(x_0) + f'_+(x_0)(x - x_0), \tag{1}$$

$$y = f(x_0) + f'_-(x_0)(x - x_0), \tag{2}$$

которые называются односторонними касательными (рис. 16).

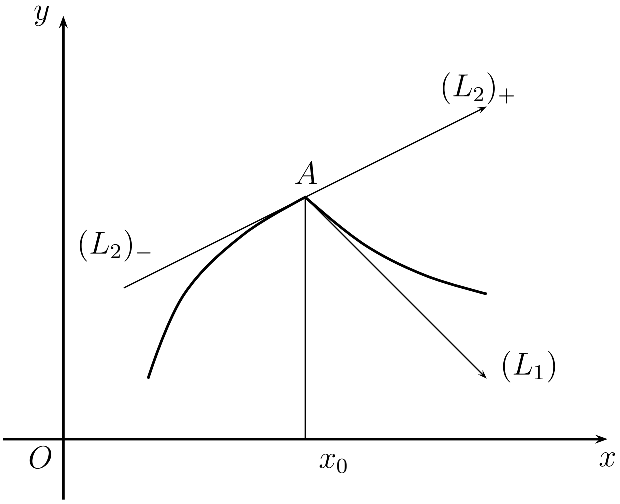

Рис. 16

Легко проверить, что если $f(x)$ имеет правую (левую) производную в точке x_0, то она непрерывна справа (слева) в этой точке.

В дальнейшем иногда будем рассматривать функции, дифференцируемые на замкнутом отрезке $[a, b]$. Это функции, которые имеют во всех внутренних точках обычную (двустороннюю) производную, правую производную в точке $x = a$ и левую производную в точке $x = b$. Если функция дифференцируема на $[a, b]$, то она, согласно сказанному, непрерывна на этом отрезке.

Введем, наконец, понятие о бесконечных производных. Если функция $f(x)$ определена в открытом промежутке X, $x_0, x_0+h \in X$ и

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = +\infty \quad \text{или} \quad -\infty,$$

то говорят, что $f(x)$ *в точке* x_0 *имеет бесконечную производную.* Аналогично определяются бесконечные односторонние производные. Если непрерывная функция имеет в некоторой точке бесконечную производную (или бесконечные односторонние производные), то график функции имеет в этой точке касательную, параллельную оси Oy (рис. 17) или две таких касательные (рис. 18).

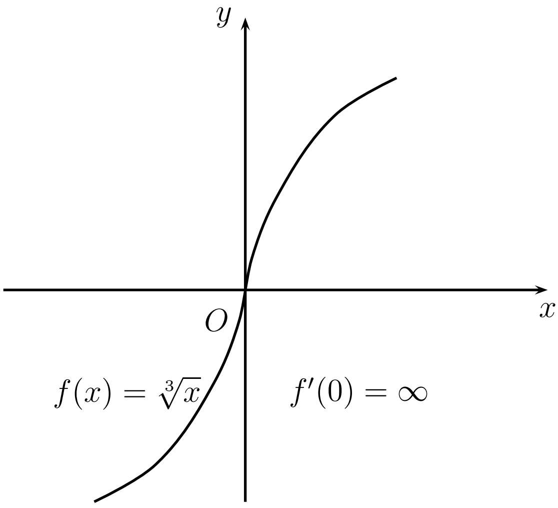

Рис. 17

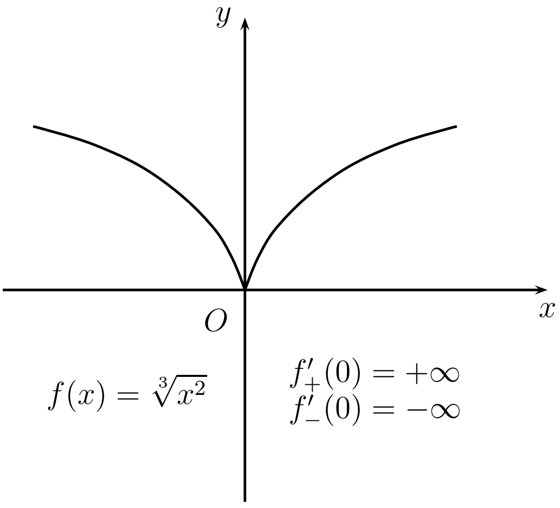

Рис. 18

В дальнейшем, если производная функции в некоторой точке бесконечна, это будет оговариваться особо и под словом «производная» будет пониматься конечная производная.

§ 5. Некоторые свойства дифференциала

Напомним, что *дифференциалом функции* $f:\ X \to \diagdown$ в точке открытого промежутка X называется линейная функция Ah, такая, что если $x, x+h \in X$, то

$$f(x+h) - f(x) = Ah + \omega(h), \tag{1}$$

где $\dfrac{\omega(h)}{h} \to 0$ при $h \to 0$. Далее, так как $A = f'(x)$, то дифференциал функции принимает вид

$$df(x) = f'(x)\,dx.$$

Произвольное приращение h независимой переменной x назовем *дифференциалом этой независимой переменной* и обозначим dx. Тогда для дифференциала функции получим выражение

$$dy = df(x) = f'(x)\,dx, \tag{2}$$

откуда

$$f'(x) = \frac{dy}{dx}. \tag{3}$$

Таким образов, производная функции есть отношение дифференциала функции к дифференциалу независимой переменной.

Равенство (3) часто служит обозначением производной. Например,

$$y = \sin x, \qquad \frac{dy}{dx} = \cos x. \tag{1}$$

Так как при громоздком аналитическом выражении для функции $f(x)$ запись $\frac{df(x)}{dx}$ неудобна, пишут $\frac{d}{dx}[f(x)]$. Например:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\right) = \frac{x}{\sqrt{(x^2+1)^3}}$$

или

$$\frac{d}{dx}[f(x)+g(x)] = \frac{df(x)}{dx} + \frac{dg(x)}{dx}.$$

Таким образом, для обозначения производной имеется три выражения

$$f'(x), \quad Df(x) \quad \text{и} \quad \frac{df(x)}{dx}.$$

Напомним еще раз, что если функция $f:\ X \to \mathbb{R}$ дифференцируема в точке $x \in X$, то приращение функции Δy в этой точке может быть разложено в сумму двух слагаемых:

$$\Delta y = dy + \omega(dx),$$

первое из которых линейно зависит от dx и, следовательно, при $f'(x) \neq 0$ и $dx \to 0$ того же порядка малости по сравнению с dx.

Равенство (2) показывает, что соотношения производных можно превратить в соотношения дифференциалов путем умножения их на dx. Так в результате умножения равенства

$$[f(x)\,g(x)]' = f'(x)\,g(x) + f(x)\,g'(x)$$

на dx, получаем:

$$d[f(x)\,g(x)] = g(x)\,df(x) + f(x)\,dg(x).$$

Точно так же выражения для производных элементарных функций после их умножения на dx становятся формулами для дифференциалов. Например, из $(a^x)' = a^x \ln a$ находим:

$$d(a^x) = a^x \ln a\,dx,$$

и аналогичным образом

$$d(\operatorname{arctg} x) = \frac{dx}{1+x^2}.$$

Выясним геометрический смысл дифференциала функции $f(x)$ в точке x_0. Пусть функция $f(x)$ дифференцируема в точке x_0. Тогда,по теореме 1 (см. § 4 данной главы), в этой точке существует конечная производная, а следовательно, и определенная касательная T в точке $(x_0, f(x_0))$ к графику функций $f(x)$ (рис. 19), причем $\operatorname{tg} \alpha = f'(x_0)$. Очевидно, что

$$DC = AD \operatorname{tg} \alpha = f'(x_0)h = dy.$$

Таким образом, дифференциал функции $f(x)$ в точке x_0 представляет собой приращение ординаты касательной при переходе из точки x_0 в точку x_0+h. Величина BC, по определению дифференциала, при $h \to 0$ представляет собой бесконечно малую величину более высокого порядка по сравнению с h.

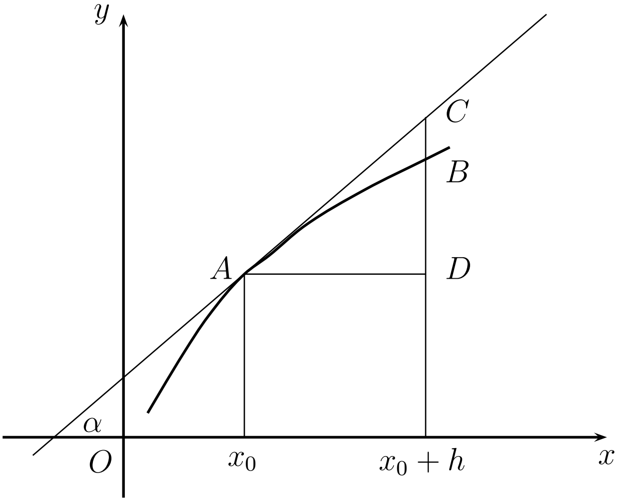

Рис. 19

Установим следующее важное свойство дифференциала функции.

Пусть функция $y = f(x)$ определена в промежутке (a, b) изменения независимой переменной x и дифференцируема в точке x_0 этого промежутка. Тогда дифференциал dy функции имеет вид

$$dy = f'(x_)) \, \Delta x \quad \text{или} \quad dy = f'(x_0) \, dx,$$

так как дифференциал dx независимой переменной то же самое, что и приращение Δx этой переменной. Предположим теперь, что x не является независимой переменной, а есть функция некоторой другой переменной. Как в этом случае записать выражение для дифференциала dy функции: $dy = f'(x_0) \, \Delta x$ или $dy = f'(x_0) \, dx$? Ведь теперь Δx и dx — разные величины.

Теорема (об инвариантности формы дифференциала). *Пусть функция* $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ *дифференцируема в точке* $x_0 \in (a, b)$. *Пусть, далее,* $x = \varphi(t)$, $\alpha < t < \beta$, $\varphi(t) \in (a, b)$ *для* $t \in (\alpha, \beta)$ *и функция* $\varphi(t)$ *дифференцируема в точке* $t_0 \in (\alpha, \beta)$, *такой, что* $\varphi(t_0) = x_0$. *Тогда* $dy = f'(x_0) \, dx$, *т.е. выражение для* *дифференциала функции $f(x)$, не зависит от того, является ли x независимой переменной или функцией некоторой другой переменной.*

Доказательство. В силу условий и по теореме о дифференцировании сложной функции, $y = f[\varphi(t)] = g(t)$ есть дифференцируемая в точке t_0 функции t. Тогда $dy = g'(t_0)\,dt$. Так как $g'(t_0) = f'[\varphi(t_0)]\varphi'(t_0)$, то

$$dy = f'[\varphi(t_0)]\varphi'(t_0)\,dt.$$

Но $\varphi(t_0) = x_0$, $\varphi'(t_0)\,dt = dx$. В этом случае предыдущее равенство принимает вид

$$dy = f'(x_0)\,dx.$$

Часто инвариантность формы дифференциала записывают в виде равенства

$$dy = y'_x\,dx = y'_t\,dt,$$

предполагая при этом, что все условия теоремы выполнены.

§ 6. Основные теоремы дифференциального исчисления

Теоремы дифференциального исчисления, приведенные в этом параграфе, являются наиболее важными и находят многочисленные приложения при решении различных теоретических и прикладных задач математического анализа.

Теорема 1 (Ферма). *Пусть функция $f(x)$ определена в некотором промежутке X и во внутренней точке x_0 этого промежутка принимает наибольшее (наименьшее) значение. Если в этой точке существует производная $f'(x_0)$, то она необходимо обращается в нуль.*

Доказательство. При любом h, таком, что $x_0 + h \in X$ имеем;

$$f(x_0 + h) \leq f(x_0).$$

Поэтому

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \leq 0 \quad \text{при} \quad h > 0 \tag{1}$$

и

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \geq 0 \quad \text{при} \quad h < 0. \tag{2}$$

Если существует $f'(x_0)$, то, в силу неравенств (1) и (2),

$$f'(x_0) = f'_+(x_0) = \lim_{h\to 0, h>0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \leq 0 \tag{3}$$

и

$$f'(x_0) = f'_+(x_0) = \lim_{h\to 0, h<0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \geq 0. \tag{4}$$

Из равенств (3) и (4) следует, что $f'(x_0) = 0$. Теорема доказана.

Теорема Ферма имеет простое геометрическое истолкование: если дифференцируемая функция во внутренней точке x_0 области определения достигает своего наибольшего или наименьшего значения, то в точке $(x_0, f(x_0))$ касательная к кривой, заданной уравнением $y = f(x)$, параллельна оси Ox.

Если функция $f(x)$ достигает своего наибольшего или наименьшего значения в граничной точке области определения, то в этой случае, вообще говоря, теорема Ферма оказывается неприменимой. Например, функция $y = x^3$, рассматриваемая на промежутке $[-1, 1]$, достигает своих наибольшего и наименьшего значений соответственно в точках $x = +1$ и $x = -1$. Очевидно, что в этих точках производные (односторонние) данной функции отличны от нуля.

Теорема 2 (Ролля). *Пусть функция $f(x)$ определена и непрерывна в замкнутом промежутке $[a, b]$ и имеет производную $f'(x)$, по крайней мере, в открытом промежутке (a, b). Если $f(a) = f(b)$, то существует точка c, $a < c < b$, такая, что $f'(c) = 0$.*

Доказательство. Пусть $m = \inf\limits_{x\in[a,b]} f(x)$ и $M = \sup\limits_{x\in[a,b]} f(x)$. По теореме Вейерштрасса, существуют точки $x_1, x_2 \in [a, b]$, такие, что $m = f(x_1)$ и $M = f(x_2)$. В случае, когда $m = M$, утверждение теоремы очевидно, так как тогда $f(x) = \text{const}$ и $f'(x) = 0$ для любой точки x. Если $m < M$, то, по крайней мере, одна из точек — x_1 или x_2 — отлична от граничных точек a и b, так как $f(a) = f(b)$, а $f(x_1) < f(x_2)$. Следовательно, одна из точек x_1, x_2 или обе одновременно являются внутренними точками промежутка $[a, b]$. Но тогда, по теореме Ферма, то крайней мере, в одной из них, производная обращается в нуль. Теорема доказана.

Теорема Ролля может иметь несколько иную формулировку.

Будем называть *нулем* функции точку, в которой эта функция обращается в нуль.

Теорема 2$'$ (Ролля). *Если функция $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ непрерывна на $[a, b]$ и дифференцируема внутри (a, b), то между двумя нулями функции лежит, по крайней мере, один нуль производной.*

Предлагаем читателю доказать эквивалентность обеих формулировок.

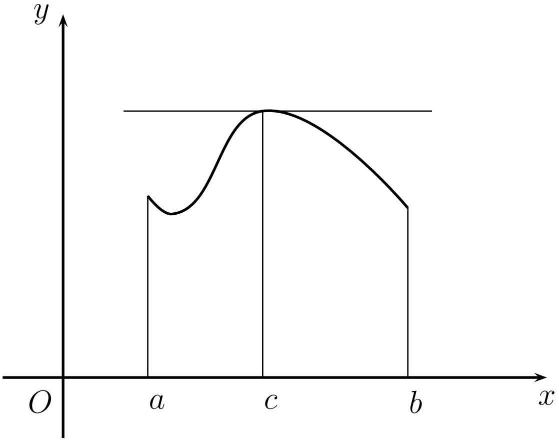

Рис. 20

Геометрическая интерпретация теоремы Ролля достаточно очевидна. Она состоят в том, что между двумя точками кривой $y = f(x)$ с равными ординатами всегда найдется, по крайней мэре, одна точка, в которой касательная к кривой параллельна оси Ox (рис. 20).

Отбрасывание хотя бы одного из условий теоремы Рояля влечет, в общем случае, нарушение справедливости заключения теоремы.

Соответствующие примера предоставляем привести читателям.

Теорема 3 (Лагранжа). *Пусть функция $f(x)$ определена и непрерывна в замкнутом промежутке $[a, b]$ и имеет производную $f'(x)$ в открыток промежутке (a, b). Тогда существует, по крайней мере, одна точка c, $a < c < b$, такая, что*

$$f(b) - f(a) = (b - a)f'(c). \tag{5}$$

Доказательство.

Введем в рассмотрение вспомогательную функцию

$$F(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a).$$

Легко убедиться, что она удовлетворяет всем условиям теоремы Ролля. Следовательно, существует, по крайней мере, одна точка c, $a < c < b$, такая, что $F'(c) = 0$, т.е.

$$f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0,$$

откуда

$$f(b) - f(a) = b - a)f'(c).$$

Теорема доказана.

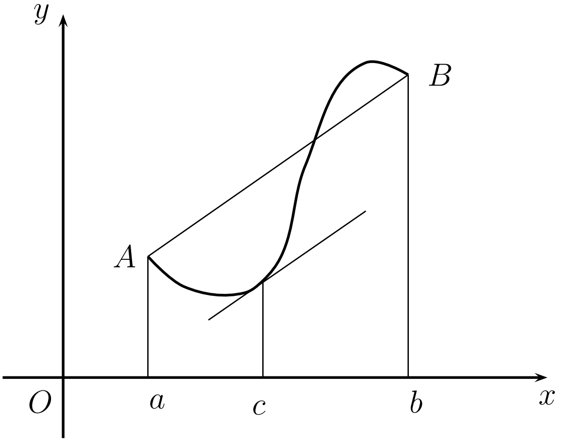

Рис. 21

Доказанную теорему называют *теоремой о среднем значении*, а формулу (5) — *формулой Лагранжа* или *формулой конечных приращений*. Очевидно, что теорема Ролля является частным случаем теоремы Лагранжа: заключение теоремы Ролля непосредственно следует из формулы (1) при выполнении условия $f(a) = f(b)$.

Поскольку отношение $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$ представляет собой угловой коэффициент хорды AB графика функции $y = f(x)$, легко установить геометрический смысл и теоремы Лагранжа. Он заключается в следующем: на дуге $\smile{AB}$ кривой с уравнением $y = f(x)$, $a \le x \le b$, существует точка $C(c, f(c))$ (по крайней мере, одна), в которой касательная параллельна хорде AB (рис. 21).

Формула конечных приращений (5) имеет многочисленные приложения. В качестве примеров приведем следующие.

1. Если функция $f(x)$ непрерывна на $[a, b]$, дифференцируема внутри $[a, b]$ и $f'(x) = 0$, $x \in (a, b)$, то $f(x) = \text{const}$.

В самом деле, для любого $x_0 \in (a, b]$ имеем, по теореме Лагранжа:

$$f(x_0) - f(a) = (x_0 - a)f'(\xi), \tag{6}$$

где $a < \xi < x_0$. Но по предположению, $f'(\xi) = 0$. Следовательно, $f(x_0) = f(a)$, и так как x_0 — произвольная точка из $(a, b]$, то $f(x) \equiv f(a)$ на $[a, b]$.

2. Используя формулу конечных приращений (5), легко получить достаточный признак равномерной непрерывности функции $f(x)$.

Пусть функция $f(x)$ определена на промежутке X (конечном или бесконечном, открытом или замкнутом). Если функция на промежутке X имеет ограниченную производную $f'(x)$, $|f'(x)| \le K$ для всех $x \in X$, то она равномерно непрерывна на промежутке X.

Действительно, пусть число $\varepsilon > 0$ произвольно и $\delta = \dfrac{\varepsilon}{K}$. Тогда для любых точек x_1 и x_2 из промежутка X, таких, что $|x_1 - x_2| < \delta$, по формуле конечных приращений (5) имеем (точка c расположена между x_1 и x_2):

$$|f(x_1) - f(x_2)| = |f'(c)|\,|x_1 - x_2| < K\delta = \varepsilon.$$

Равномерная непрерывность функции $f(x)$ доказана.

Запишем формулу конечных приращений в другом виде, в котором она часто используется.

Пусть функция $f(x)$ на промежутке $[a, b]$ удовлетворяет условиям теоремы Лагранжа, x_0 — произвольная точка этого промежутка. Если число h таково, что $x_0 + h \in [a, b]$, то, применив теорему Лагранжа к функции $f(x)$, рассматриваемой лишь на промежутке $[x_0, x_0 + h] \subset [a, b]$, получим:

$$f(x_0 + h) - f(x_0) = hf'(\xi), \tag{7}$$

где число ξ заключено между величинами x_0 и $x_0 + h$, т.е. получается из x_0 прибавлением к нему части h. Поэтому $\xi = x_0 + \theta h$, $0 < \theta < 1$ (рис. 22).

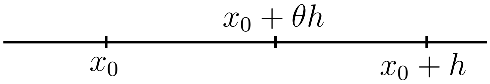

Рис. 22

Тогда формулу (7) можно записать в виде

$$\Delta y = f(x_0 + h) - f(x_0) = hf'(x_0 + \theta h), \qquad 0 < \theta < 1. \tag{8}$$

Формула (8) находит широкое применение при рассмотрении теоретических вопросов математического анализа; неудобство этой формулы заключается в том, что в нее входит неизвестная величина θ, явное выражение которой может быть установлено лишь в некоторых частных случаях. Однако то, что $0 < \theta < 1$, позволяет получать с помощью формулы (8) важные заключения.

В качестве примера применения формулы (8) докажем следующее утверждение.

Пусть функция $f(x)$ определена и непрерывна на $[a, b]$ и $x_0 \in [a, b]$. Предположим, что $f(x)$ имеет производную $f'(x)$ в промежутке $(x_0, x_0 + h)$ для некоторого $h > 0$, $x_0 + h \in [a, b]$. Если существуем предел $\lim\limits_{x \to x_0 + 0} f'(x)$, то существует $f'_+(x_0)$, причем

$$f'_+(x_0) = \lim_{x \to x_0 + 0} f'(x).$$

Действительно, по формуле (8)

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = f'(x_0 + \theta h).$$

Перейдя в этом равенстве к пределу при $h \to 0$, $h > 0$, получим требуемый результат.

Аналогичное утверждение можно провести и для левосторонней производной.

Следующая теорема является обобщением теоремы Лагранжа.

Теорема 4 (Коши). *Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны на промежутке $[a, b]$ и, по крайней мере, в интервале (a, b) имеют производные $f'(x)$ и $g'(x)$, причем $g'(x) \neq 0$ для любого $x \in (a, b)$. Тогда*

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)},$$

где c — некоторая точка интервала (a, b).

Доказательство. Заметив, прежде всего, что $g(a) \neq g(b)$, так как в противном случае, согласно теореме Ролля, найдется точка $c \in (a, b)$, такая, что $g'(c) = 0$, что по условию исключается. Рассмотрим вспомогательную функцию

$$F(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}\,[g(x) - g(a)].$$

Нетрудно убедиться, что функция $F(x)$ удовлетворяет всем условиям теоремы Ролля. Поэтому найдется точка $c \in (a, b)$, такая, что

$$F'(c) = 0.$$

Но
$$F'(c) = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}\, g'(c),$$
следовательно,
$$f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}\, g'(c) = 0.$$
Теорема доказана.

Теорема Лагранжа вытекает из теоремы Коши при $g(x) = x$.

В заключение докажем одну замечательную теорему о свойствах производной.

Теорема 5 (Дарбу). *Пусть $f(x)$ дифференцируема в каждой точке отрезка $[a, b]$. Тогда $f'(x)$ принимает все значения между $f'(a)$ и $f'(b)$.*

Доказательство. Пусть, например, $f'(a) > f'(b)$ и γ — число, лежащее между $f'(a)$ и $f'(b)$. Рассмотрим новую функцию $\varphi(x) = f(x) - \gamma x$. Эта функция дифференцируема, следовательно, непрерывна на отрезке $[a, b]$ и, по теореме Вейерштрасса, достигает в некоторой точке $\xi \in [a, b]$ наибольшего значения. Покажем, что $\xi \neq a$ и $\xi \neq b$. В самом деле, $\varphi'(b) = f'(b) - \gamma < 0$. Поэтому
$$\frac{\varphi(b - h) - \varphi(b)}{-h} = \varphi'(b) + \beta(h) < 0$$
при достаточно малых h, так как $\beta(h) \to 0$ при $h \to 0$. Таким образом, при всех достаточна малых h
$$\varphi(b - h) > \varphi(b).$$
Аналогичным образом при всех достаточно малых h
$$\varphi(a + h) > \varphi(a).$$

Следовательно, $\gamma \in (a, b)$ и, по теореме Ферма,
$$\varphi'(\xi) = f'(\xi) - \gamma = 0$$
т.е. $f(\xi) = \gamma$.

Теорема Дарбу напоминает теорему Коши о промежуточном значении функции, непрерывной на отрезке, однако между ними имеется принципиальное отличие: в теореме Дарбу непрерывность производной не предполагается.

Глава V

ПРОИЗВОДНЫЕ И ДИФФЕРЕНЦИАЛЫ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ ФУНКЦИИ ОДНОЙ НЕЗАВИСИМОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

§ 1. Производные высших порядков функций одной независимой переменной

Пусть функция $y = f(x)$ определена и имеет конечную производную $y' = f'(x)$ в некоторой окрестности U точки x_0.

Определение 1. Производная от производной в точке ?, т.е.

$$\lim_{h\to 0} \frac{f'(x_0+h) - f'(x_0)}{h}, \qquad x_0 + h \in U, \tag{1}$$

если этот предел существует и конечен, называется *второй производной*, или *производной второго порядка* функции $y = f(x)$ в точке x_0.

Вторая производная функции $y = f(x)$ в точке x_0 обозначается символами

$$y''(x_0), \quad f''(x_0), \quad , \frac{d^2y}{dx^2}, \quad D^2 f(x_0).$$

Производную порядка n функции $y = f(x)$ в точке $x_0 \in U$ можно определить по индукции. Пусть в окрестности U точки x_0 определена а конечна производная $(n-1)$-го порядка $f^{(n-1)}(x)$. Тогда первая производная от функции $f^{(n-1)}(x)$ в точке x_0 называется *производной n-го порядка* от функции $y = f(x)$ в этой точке и обозначается символами

$$y^{(n)}(x_0), \quad f^{(n)}(x_0), \quad \frac{d^ny}{dx^n}, \quad D^n f(x_)),$$

т.е.

$$y^{(n)}(x_0) = (y^{(n-1)})'_{x=x_0} = \lim_{h\to 0} \frac{f^{(n-1)}(x_0+h) - f^{(n-1)}(x_0)}{h}. \tag{2}$$

Непосредственно из определения производных высшего порядка следует, что их вычисление производится по правилам и формулам вычисления производных первого порядка.

Примеры.

1. Степенная функция

$$y = (1+x)^{\mu}, \qquad x > -1,$$

где μ — любое вещественное число, имеет производную любого порядка, причем

$$y^{(n)} = \mu(\mu-1)\cdots(\mu-n+1)(1+x)^{\mu-n}. \tag{3}$$

Действительно, при $n = 1$ формула (3) очевидна. Пусть формула (3) верна для $n = k$. Тогда, по определению производной $(k+1)$-го порядка,

$$y^{(k+1)} = (y^{(k)})' = [\mu(\mu-1)\cdots(\mu-k+1)(1+x)^{\mu-k}]' =$$

$$= \mu(\mu-1)\cdots(\mu-k+1)[(1+x)^{\mu-k}]' = \mu(\mu-1)\cdots(\mu-k)(1+x)^{\mu-(k+1)},$$

и справедливость формулы (3) устанавливается с помощью метода математической индукции.

2. Пусть $y = \ln(1+x)$, $x > -1$. Тогда

$$y^{(n)} = [\ln(1+x)]^{(n)} = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(1+x)^n}. \tag{4}$$

В самом деле, так как

$$y' = [\ln(1+x)]' = (1+x)^{-1},$$

то, по определению производной n-го порядка и формуле (3), в которой $\mu = -1$, получим:

$$y^{(n)} = (y')^{(n-1)} = [(1+x)^{-1}]^{(n-1)} = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(1+x)^n}.$$

3. Показательная функция

$$y = a^x, \qquad a > 0, \quad a \neq 1,$$

всюду в области определения имеет производную любого порядка

$$y^{(n)} = a^x(\ln a)^n. \tag{5}$$

Справедливость формулы (5) подтверждается методом математической индукции. В частности,

$$(e^x)^{(n)} = e^x. \tag{6}$$

С помощью метода математической индукции нетрудно установить и более общую формулу:

$$(e^{\alpha x})^{(n)} = \alpha^n e^{\alpha x}. \tag{7}$$

4. Тем же путем, что и в предыдущих примерах можно получить формулы

$$(\sin x)^{(n)} = \sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right), \tag{8}$$

$$(\cos x)^{(n)} = \cos\left(x + n\frac{\pi}{2}\right). \tag{9}$$

Следующая теорема, являющаяся естественным обобщением теоремы 1 из § 2 гл. IV, облегчает в ряде случаев нахождение производных высшего порядка.

Теорема *Если функции $u(x)$ и $v(x)$ определены на промежутке X и имеют в нем производные до n-го порядка включительно, то функции $cu(x)$ ($c = \text{const}$), $u(x) + v(x)$, $u(x)v(x)$ также имеют n-производную, причем*

$$(cu)^{(n)} = cu^{(n)}, \tag{10}$$

$$(u+v)^{(n)} = u^{(n)} + v^{(n)}, \tag{11}$$

$$(uv)^{(n)} = \sum_{i=0}^{n} C_n^i u^{(n-i)} v^{(i)}. \tag{12}$$

Доказательство. Существование производных $(cu)^{(n)}$, $(u+v)^{(n)}$ и справедливость формул (10) и (11) легко проверяется с помощью метода математической индукции. Остановимся более подробно на доказательстве формулы (12) (формулы Лейбница).

Имеем

$$(u(x)v(x))' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x),$$
$$(u(x)v(x))'' = (u'(x)v(x) + u(x)v'(x))' =$$
$$= u''(x)v(x) + 2u'(x)v'(x) + u(x)v''(x).$$

Аналогичным образом

$$(u)x)v(x))''' = u'''(x)v(x) + 3u''(x)v(x) + 3u'(x)v''(x) + v'''(x)$$

или

$$(u(x)v(x))''' = C_3^0 u'''(x)v(x) + C_3^1 u''(x)v'(x) + C_3^2 u'(x)v''(x) + C_3^3 u(x)v'''(x).$$

Итак, мы получили формулу (12) для случая $n = 3$. Для произвольного числе n формула (12) доказывается методом математической индукции.

§ 2. Дифференциалы высших порядков функций одной независимой переменной

Пусть функция $f: X \to \mathbb{R}$ дифференцируема в некоторой окрестности $U(x_0)$ точки x_0. В этом случае дифференциал этой функции

$$df(x) = f'(x)h$$

есть функция двух независимых переменных $x \in U(x_0)$ и $h \in \mathbb{R}$. Обозначим этот дифференциал при фиксированном h через $\varphi_h(x)$, так что

$$\varphi_h(x) = f'(x)h.$$

Если $\varphi_h(x)$, как функция от x дифференцируема в точке x_0, то дифференциал $d\varphi_h(x_0) = \varphi'_h(x_0)h$ этой функции при $h_1 = h$ называется *дифференциалов второго порядка* функции $f(x)$ в точке x_0 и обозначается $d^2f(x_0)$. Так как

$$\varphi'_h(x_0) = f''(x_0)h,$$

то

$$d^2f(x_0) = f''(x_0)h^2,$$

откуда вытекает следующее определение.

Определение. Если функция $f : X \to \mathbb{R}$ дифференцируема в некоторой окрестности $U(x_0)$ точки $x_0 \in X$, то дифференциал в точке x_0 от дифференциала $df(x)$, рассматриваемого как функция от x, называется *дифференциалом второго порядка*, или *вторым дифференциалом* функции $f(x)$ в точке x_0 и обозначается $d^2f(x_0)$. Для второго дифференциала имеет место формула

$$d^2f(x_0) = f''(x_0)h^2, \tag{1}$$

или

$$d^2f(x_0) = f''(x_0)\,dx^2 \tag{1'}$$

(в формуле (1′) dx^2 означает $(dx)^2$; дифференциал функции $f(x)^2$ всегда обозначается через $d(x^2)$).

Дифференциал порядка n функции $f(x)$ в точке $x_0 \in X$ определяем по индукции. Пусть в окрестности $U(x_0)$ точки $x_0 \in X$ определен дифференциал порядка $n-1$ функции $f(x)$, тогда дифференциал порядка n функции $f(x)$ в точке $x_0 \in X$ есть

$$d^ny = d(d^{n-1}y) = d(f^{(n-1)}(x)dx^{n-1})_{x=x_0} = f^{(n)}(x_0)\,dx^n. \tag{2}$$

Из соотношения (2), в частности, следует:

$$f^{(n)}(x_0) = \frac{d^ny}{dx^n},$$

т.е. производная n-го порядка функции $f(x)$ в точке x_0 есть отношение дифференциала n-го порядка функции $f(x)$ в точке x_0 к n-й степени приращения независимого переменного. Выражение $\dfrac{d^ny}{dx^n}$ используется также как символ, обозначающий производную n-го порядка функции.

Рассмотрим вопрос об инвариантности формы дифференциалов высших порядков. Пусть функция $f(x)$ определена в некоторой окрестности точки x_0 и дифференцируема нужное число раз в этой окрестности. Если x не является независимом переменной, а, в свою очередь, представляет функцию новой переменной

$$x = \varphi(t),$$

где функция $\varphi(t)$ определена в некоторой окрестности точки t_0 ($\varphi(t_0) = x_0$) и дифференцируема достаточное число раз в этой окрестности, то, как было показано ранее (см.. § 5 гл. IV), выражение $dy = f'(x_0)\,dx$ инвариантно относительно замены переменной $x = \varphi(t)$, т.е. оно не изменится, если положить $x = \varphi(t)$ и считать в нем $dx = \varphi'(t)\,dt$.

Дифференциалы второго порядка, а значит, всех последующих порядков свойством инвариантности формы не обладают. В самом деле, полагая $f[\varphi(t)] = g(t)$ при $n = 2$, имеем:

$$d^2y = d^2f[\varphi(t)] = d^2g(t) = g''(t)\,dt^2.$$

По правилу дифференцирования сложной функции,

$$g''(t) = (g'(t))' = (f'[\varphi(t)]\varphi'(t))' =$$
$$= f''[\varphi(t)][\varphi'(t)]^2 + f'[\varphi(t)]\varphi''(t),$$

поэтому

$$\begin{gathered} d^2y = \{f''[\varphi(t)][\varphi'(t)]^2 + f'[\varphi(t)\varphi''(t)\}dt^2 = \\ = f''[\varphi(t)][\varphi'(t)]^2 + f'[\varphi(t)\varphi''(t)\,dt^2 = f''(x)\,dx^2 + f'(x)\,d^2x. \end{gathered} \tag{3}$$

Таким образом, равенство $d^2y = f''(x)\,dx^2$, а тем более равенство (2) для $n > 2$ при произвольной замене переменной $x = \varphi(t)$ не сохраняется. Однако при линейной замене переменной $x = a + bt$, $a, b = \mathrm{const}$, получаем: $dx = b\,dt$, $d^2x = 0$, и второе слагаемое в формуле (3) обращается в нуль, в результате чего

$$d^2y = f''(x)\,dx^2.$$

Аналогичное равенство сохраняется и при $n > 2$, так что относительно линейной замены переменной формула (2) инвариантна.

§ 3. Формула Тейлора[11]

Пусть дан многочлен $P_n(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n$. Предположим, что о какой-либо целью, например для исследования его поведения в окрестности точка x_0, целесообразно представить $P_n(x)$ в виде многочлена по степеням разности $x - x_0$:

$$P_n(x) = c_0 + c_1(x - x_0) + c_2(x - x_0)^2 + c_{n-1}(x - x_0)^{n-1} + c_n(x - x_0)^n. \tag{1}$$

Для нахождения коэффициентов $c_0, c_1, c_2, \ldots, c_n$ поступим следующим образом. Положив в (1) $x = x_0$, подучим $c_0 = P_n(x_0)$. Продифференцируем равенство (1) по x:

$$P_n'(x) = c_1 + 2c_2(x - x_0) + \ldots + nc_n(x - x_0)^{n-1}, \tag{2}$$

Взяв в (2) $x = x_0$ найдем $c_1 = P_n'(x_0)$. Продифференцируем равенство (2) по x:

$$P_n''(x) = 2 \cdot 1\ + 3 \cdot 2\,c_3(x - x_0) + \ldots + n(n-1)c_n(x - x_0)^{n-2}.? \tag{3}$$

Положим в (3) $x = x_0$, тогда $c_2 = \dfrac{1}{2!}P_n''(x_0)$.

---

[11] Б. Тейлор (1685–1731) — английский математик и философ.

Аналогичным образом получаем: $c_3 = \dfrac{1}{3!}P_n'''(x_0)$, …, $c_n = \dfrac{1}{n!}P_n^{(n)}(x_0)$. Следовательно,

$$P_n(x) = P_n(x_0) + P_n'(x_0)(x - x_0) + \frac{P_n''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots + \frac{P_n^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n. \quad (4)$$

Формула (4) называется *формулой Тейлора*, а многочлен

$$P_n(x_0) + P_n'(x_0)(x - x_0) + \frac{P_n''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots + \frac{P_n^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n.$$

— *многочленом Тейлора* для $P_n(x)$.

Если вместо многочлена $P_n(x)$ взять произвольную функцию, дифференцируемую n раз в окрестности точки x_0, можно записать многочлен Тейлора

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n.$$

этой функции, но равенство (4), если $f(x)$ не является многочленом степени $k \leq n$, не имеет, места. Однако, если через $R_n(x, x_0)$ обозначить разность

$$f(x) - \left[f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n\right],$$

то

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} + R_n(x, x_0). \quad (5)$$

Равенство (5) называется *формулой Тейлора* для $f(x)$, а $R_n(x, x_0)$ — *остаточным членом*, или *остатком формулы Тейлора.*

Для того чтобы о помощью равенства (5) можно было получить приближенное представление функции многочленами (а это одно из главных приложения формулы Тейлора), мы должны уметь оценивать остаточный член $R_n(x, x_0)$, по крайней мере для значений x, близких к x_0. Такую оценку дают следующие две теоремы.

ТЕОРЕМА 1 (ПЕАНО[12]). *Пусть $f(x)$ есть n раз дифференцируемая в точке x_0 функция. Тогда $R_n(x, x_0) = o(|x - x_0|^n)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из условия теоремы следует, что функция $f(x)$ $(n-1)$ раз дифференцируема в некоторой окрестности $U(x_0)$ точки x_0. Поэтому остаток $R_n(x, x_0)$ также $(n-1)$ раз дифференцируем в этой окрестности, и тогда, дифференцируя равенство (5) k раз, найдем, что для $x \in U(x_0)$

$$R_n^{(k)}(x, x_0) = f^{(k)}(x) - f^{(k)}(x_0) - f^{(k+1)}(x_0)(x - x_0) - \ldots - \frac{f^{(n)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^{n-k},$$

$$k = 0, 1, 2, \ldots, (n-1).$$

---

[12] Д. Пеано (1852–1932) — итальянский математик.

Отсюда следует, что $R_n^{(k)}(x_0,x_0)=0$, $k=0,1,2,\ldots,n-1$. Более того, $R^{(n)}(x_0,x_0)=0$. В самом деле,

$$R_n^{(k)}(x_0,x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{R_n^{(n-1)}(x,x_0)-R_n^{(n-1)}(x_0,x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{R_n^{(n-1)}(x,x_0)}{x-x_0}=$$

$$=\lim_{x\to x_0}\frac{f^{(n-1)}(x)-f^{(n-1)}(x_0)-f^{(n)}(x_0)(x-x_0)}{x-x_0}=f^{(n)}(x_0)-f^{(n)}(x_0)=0.$$

Применив последовательно теорему Лагранжа, получим, считая для определенности, что ?:

$$\frac{R_n^{(n)}(x,x_0)}{(x-x_0)^n}=\frac{R_n(x,x_0)-R_n(x_0,x_0)}{x-x_0}\cdot\frac{1}{(x-x_0)^{n-1}}=R_n'(\xi_1,x_0)\cdot\frac{1}{(x-x_0)^{n-1}}=$$

$$=\frac{R_n'(\xi_1,x_0)-R_n'(x_0,x_0)}{\xi_1-x_0}\cdot\frac{1}{(x-x_0)^{n-1}}=R_n''(\xi_2,x_0)\cdot\frac{\xi_1-x_0}{(x-x_0)^{n-1}}=$$

$$=\frac{R_n''(\xi_2,x_0)-F_n''(x_0,x_0)}{\xi_2-x_0}\cdot\frac{((\xi_1-x_0)(\xi_2-x_0)}{(x-x_0)^{n-1}}=\ldots=$$

$$=R_n^{(n-1)}(\xi_{n-1},x_0)\,\frac{(\xi_1-x_0)(\xi_2-x_0)\cdots(\xi_{n-2}-x_0)}{(x-x_0)^{n-1}}=$$

$$=\frac{R_n^{(n-1)}(\xi_{n-1},x_0)-R_n^{(n-1)}(x_0,x_0)}{\xi_{n-1}-x_0}\,\frac{(\xi_1-x_0)(\xi_2-x_0)\cdots(\xi_{n-1}-x_0)}{(x-x_0)^{n-1}}.$$

Здесь$x_0<\xi_{n-1}<\xi_{n-2}<\ldots<\xi_1<x$, и потому для $k=1,2,\ldots,n-1$

$$0<\frac{\xi_k-x_0}{x-x_0}<1,$$

откуда

$$0<\frac{(\xi_1-x_0)(\xi_2-x_0)\cdots(\xi_{n-1}-x_0)}{(x-x_0)^{n-1}}<1.$$

Следовательно,

$$\left|\frac{R_n(x,x_0)}{(x-x_0)^n}\right|<\left|\frac{R_n^{(n-1)}(\xi_{n-1},x_0)-R_n^{(n-1)}(x_0,x_0)}{\xi_{n-1}-x_0}\right|,$$

в так как при $x\to x_0$ также $\xi_{n-1}\to x_0$, то

$$\lim_{x\to x_0}\frac{R_n^{(n-1)}(\xi_{n-1},x_0)-R_n^{(n-1)}(x_0,x_0)}{\xi_{n-1}-x_0}=R_n^{(n)}(x_0,x_0)=0,$$

откуда

$$\lim_{x\to x_0}\frac{R_n(x,x_0)}{(x-x_0)^n}=0,$$

что требовалось доказать.

Теорема 1 дает общее представление о характере малости остаточного члена формулы Тейлора и не всегда удобна для приложений. При несколько более сильных предположениях о характере дифференцируемости $f(x)$ можно получить более удобные формулы для $R_n(x, x_0)$.

Теорема 2 (Шлемильха и Роша[13]). *Пусть функция $f(x)$ дифференцируема $n+1$ раз в некоторой окрестности $U(x_0)$ точки x_0. Тогда для любого $x \in U(x)$ и любого $p > 0$ найдется точка ξ, лежащая между x и x_0, такая, что*

$$R_n(x, x_0) = \frac{(x - x_0)^p}{n!p}\,(x - \xi)^{n-p+1} f^{(n+1)}(\xi).$$

Доказательство. Фиксируем число $p > 0$. Так как остаточный член $R_n(x, x_0)$ обращаемся в нуль при $x = x_0$, будем считать, что он имеет вид

$$r_n(x, x_0) = (x - x_0)^p Q_n(x, x_0).$$

Тогда формула Тейлора примет следующий вид:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + (x - x_0)^p Q_n(x, x_0). \tag{6}$$

Для значений t, лежащих между x и x_0 введем в рассмотрение функцию

$$\begin{gathered}\varphi(t) = f(x) - f(t) - f'(t)(x - t) - \frac{f''(x_0)}{2!}(x - t)^2 - \frac{f'''(x_0)}{3!}(x - t)^3 - \\ - \ldots - \frac{f^{n-1)}(x_0)}{(n-1)!}(x - t)^{n-1} - \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - t)^n - (x - t)^p Q_n(x, x_0),\end{gathered} \tag{7}$$

которая получается, если заменять в правой части равенства (6) постоянную x_0 переменной величиной t и взять разность правой и левой частей этого равенства. Заметим, что хотя вообще $Q_n(x, x_0)$ зависит от x_0, мы не заменяем x_0 переменной t под знаком Q_n, так что в правой части равенства (7) $Q_n(x, x_0)$ от t не зависит.

В силу определения функции $\varphi(t)$ и в силу равенства (6) $\varphi(x_0) = 0$. Кроме того, непосредственно видно, что $\varphi(x) = 0$. Наконец, функция $\varphi(t)$ дифференцируема для t, лежащих между x и x_0, так как, по предположению, $f(x)$ дифференцируема $(n+1)$ раз.

Таким образом, функция $\varphi(t)$ удовлетворяет всем условиям теоремы Ролля, и, следовательно, существует точка ξ, лежащая между x и x_0, такая, что $\varphi'(\xi) = 0$. Но

$$\begin{gathered}\varphi'(t) = -\sum_{k=0}^{n} \left\{ \frac{f^{(k+1)}(t)}{k!}(x - t)^k - \frac{f^{(k)}(t)}{k!}k(x - t)^{k-1} \right\} + p(x - t)^{p-1} Q_n(x, x_0) = \\ = \left\{ \Big[f'(t) - 0 \Big] + \left[\frac{f''(t)}{1!}(x - t) - f'(t) \right] + \left[\frac{f'''(t)}{2!}(x - t)^2 - \frac{f''(t)}{1!}(x - t) \right] + \ldots + \right. \\ \left. + \left[\frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x - t)^n - \frac{f^{(n)}(t)}{(n-1)!}(x - t)^{n-1} \right] \right\} + p(x - t)^{p-1} Q_n(x, x_0).\end{gathered}$$

---

[13] О. Шлёмильх (1823–1901) — немецкий математик, Э. Рош (1820–1883) — французский математик.

Поэтому

$$\varphi'(t) = -\frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n + p(x-t)^{p-1}Q_n(x,x_0).$$

Положив в этом равенстве $t=\xi$, подучим:

$$0 = -\frac{f^{(n+1)}(\xi)(x-\xi)^n}{n!} + p(x-\xi)^{p-1}Q_n(x,x_0),$$

откуда

$$Q_n(x,x_0) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!p}(x-\xi)^{n-p+1}.$$

Следовательно,

$$R_n(x,x_0) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!p}(x-x_0)^p(x-\xi)^{n-p+1},$$

что требовалось доказать.

Следствия.

1. Положим $p=n+1$. Тогда

$$R_n(x,x_0) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}.$$

Это *форма Лагранжа остаточного члена формулы Тейлора.*

2. Положив $p=1$, получим:

$$R_n(x,x_0) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!}(x-x_0)(x-\xi)^n,$$

или, если заменять ξ через $x_0+\theta(x-x_0)$,

$$R_n(x,x_0) = \frac{f^{(n+1)}[x_0+\theta(x-x_0)]}{n!}(1-\theta)^n(x-x_0)^{n+1}.$$

Это *форма Коши остаточного члена.*

Частый случай формулы Тейлора, когда $x_0=0$, называют часто *формулой Маклорена*[14]. Таким образом, формула Маклорена для произвольной Функции имеет следующий вид:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k + R_n(x),$$

где

$$R_n(x) = o(|x|^n)$$

— *форма Пеано,*

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}x^{n+1}, \qquad ,\xi=\theta x, \quad 0<\theta<1,$$

---

[14] К. Маклорен (1698–1746) — шотландский математик.

— *форма Лагранжа,*

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!}(1-\theta)^n x^{n+1}, \qquad ,\xi = \theta x, \quad 0 < \theta < 1,$$

— *форма Коши.*

Примеры.

1. Пусть $f(x) = e^x$. Эта функция дифференцируема любое число раз в окрестности любой точки и $f^{(n)}(x) = e^x$, в частности $f^{(n)}(0) = 1$ для $n = 1, 2, \ldots$. Применив формулу Маклорена с остаточным членом в форме Лагранжа, получим:

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \frac{e^{\theta x}}{(n+1)!}.$$

Для любого фиксированного n

$$\left|\frac{e^{\theta x}}{(n+1)!}\right| \le e^{\theta|x|}\,\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Нетрудно видеть, что $\lim \dfrac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} = 0$. В самом деле, пусть n_0 — наименьшее натуральное число, такое, что $|x| < n_0$, т.е. $\dfrac{|x|}{n_0} = q < 1$.. Но тогда для любого $n \ge n_0$ имеем:

$$\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} = \frac{|x|}{1}\cdot\frac{|x|}{2}\cdots\frac{|x|}{n_0-1}\cdot\frac{|x|}{n_0}\cdots\frac{|x|}{(n+1)} \le$$
$$\le \frac{|x|^{n_0-1}}{(n_0-1)!}\cdot q^{n-n_0+2} = \frac{|x|^{n_0-1}}{(n_0-1)!}\cdot\frac{q^n}{q^{n_0-2}} \to 0,$$

так как $q < 1$. Поэтому, взяв n достаточно большим, остаток $R_n(x)$ можно сделать сколь угодно малым, следовательно, функция e^x сколь угодно точно аппроксимируется многочленом

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!}$$

на данном фиксированном промежутке.

2. Пусть $f(x) = \sin x$. Функция $\sin x$ дифференцируема любое число раз в окрестности любой точки. Так как

$$(\sin x)^{(n)} = \sin\left(x + n\,\frac{\pi}{2}\right), \qquad (\sin x)^{(n)}\Big|_{x=0} = \begin{cases} 0, & \text{если } \ n = 2m, \\ (-1)^m, & \text{если } \ n = 2m+1, \end{cases}$$

то, по формуле Маклорена, получим:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots + (-1)^m\frac{x^{2m+1}}{(2m+1)!} = R_{2m+1}(x), \tag{8}$$

где

$$R_{2m+1}(x) = (-1)^m \sin\theta x\,\frac{x^{2m+2}}{(2m+2)!}.$$

Как и в предыдущем примере, убеждаемся, что $R_{2m+1}(x) \to 0$ при $m \to \infty$ для любого фиксированного x.

Из формулы (6) при $m = 1$ получим известную приближенную формулу

$$\sin x \approx x - \frac{x^3}{6}.$$

3. Так же, как в примере 2, находим:

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots + (-1)^m \frac{x^{2m}}{(2m)!} + R_{2m}(x),$$

где

$$R_{2m}(x) = (-1)^{m+1} \cos\left(\theta x + \frac{\pi}{2}\right) \frac{x^{2m+1}}{(2m+1)!}$$

и $R_{2m}(x) \to 0$ при $m \to \infty$.

4. Если $f(x) = \ln(1+x)$, то при $x > -1$ функция $f(x)$ дифференцируема любое число раз:

$$f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(1+x)^n}, \qquad f^{(n)}(0) = (-1)^{n-1}(n-1)!.$$

Поэтому, согласно формуле Маклорена

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + R_n(x).$$

где

$$R_n(x) = (-1)^n \frac{x^{n+1}}{(1+\theta x)^{n+1}(n+1)},$$

если воспользоваться формой Лагранжа, или

$$R_n(x) = (-1)^n \frac{x^{n+1}}{(1+\theta x)^{n+1}(n+1)},$$

если использовать форму Коши. Можно показать, что если $|x| < 1$, то $R_n(x) \to 0$ при $n \to \infty$.

5. Рассмотрим функцию $f(x) = (1+x)^\mu$. Так как при $x > -1$ функция $f(x)$ дифференцируема любое число раз и

$$f^{(n)}(x) = \mu(\mu-1)\cdots[\mu-(n-1)]\,(1+x)^{\mu-n},$$

то, по формуле Маклорена, получаем

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{v}{k!}\, x^k + R_n(x), \tag{9}$$

где $R_n(x) \to 0$ при $n \to \infty$, если $|x| < 1$. Мы получили формулу, из которой как частный случай при $\mu = m \in \mathbb{N}$ вытекает известная из школьного курса математики формула бинома Ньютона. Следует заметить, что приписываемая Ньютону формула

$$(a+b)^m = \sum_{k=0}^{m} C_m^n a^{m-k} b^k$$

была известна задолго до него, и Ньютон нашел именно формулу (9), правда, не вдаваясь в строгое доказательство стремления $R_n(x)$ к нулю при $n \to \infty$ для x по модулю меньших, чем единица.

§ 4. Правило Лопиталя

Согласно одной из теорем теории пределов, если существуют пределы $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$ и $\lim\limits_{x\to a} g(x) = B$, то при $B \neq 0$ существует предел отношения $\dfrac{f(x)}{g(x)}$, причем

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{B}.$$

Возникаем вопрос, как обобщить эту теорему в случае, когда $B = 0$. Однозначный ответ может быть получен, если $A \neq 0$. В этом случае отношение $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ при стремлении x к предельному значению a является бесконечно большой величиной, т.е.

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \infty.$$

Совершенно иначе решается вопрос, если

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = 0. \tag{1}$$

В этом случае, как показывают следующие примеры, предел отношения $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ при $x \to a$ существенным образом зависит от характера стремления функций $f(x)$ и $g(x)$ к своим предельным нулевым значениям. Например,

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1, \qquad \lim_{x\to 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a, \qquad \lim_{x\to 0} \frac{\sin x - \operatorname{tg} x}{x} = 0$$

и т.д.

Предугадать значения предела отношения $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ при условии (1) по виду функций $f(x)$ и $g(x)$ бывает затруднительно. Аналогичные затруднения возникают при отыскании предела отношения $\dfrac{f(x)}{g(x)}$, когда

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = \infty.$$

Если $f(x)$ и $g(x)$ — дифференцируемые функции в окрестности предельной точки $x = a$, то нахождение предела отношения можно свести во многих случаях к вычислению более простого предела отношения производных.

Неопределенность вида $\dfrac{0}{0}$.

Теорема 1 (правило Лопиталя). *Пусть $f(x)$ и $\varphi(x)$ определены и непрерывны в $(a, b]$, $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} \varphi(x) = 0$ и пусть в интервале (a, b) существуют производные $f'(x)$ и $\varphi'(x)$, причем $\varphi'(x) \neq 0$ при $x \in (a, b)$. Тогда, если существует предел*

$$\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)},$$

то существует и предел

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{\varphi(x)},$$

причем

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)}. \tag{3}$$

Доказательство. Доопределим функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ в точке $x = a$, положив

$$f(a) = \varphi(a) = 0. \tag{4}$$

Предположения (4) не ограничивают общности и не влияют ни на предположения, ни на утверждение теоремы. При выполнении условий (4) функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ будут непрерывны на промежутке $[a, b]$. Так как $\varphi'(x) \neq 0$, то найдется такое $h > 0$, что на интервале $(a, a+h)$, $\varphi'(x) \neq 0$. Пусть $x \in (a, a+h)$. Применив теорему Коши к функциям $f(x)$ и $\varphi(x)$, рассматриваемым на промежутке $[a, x]$, получим:

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{f(x) - f(a)}{\varphi(x) - \varphi(a)} = \frac{f'(c)}{\varphi'(c)}, \tag{5}$$

где $a < c < x$. При $x \to a$, очевидно, и $c \to a$. Поэтому переходя в соотношениях (5) к пределу при $x \to a$, убеждаемся в существовании предела отношения $\dfrac{f(x)}{\varphi(x)}$ и в выполнении равенства

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)}.$$

Теорема доказана.

Замечание. Мы рассмотрели случай, когда a — предельная точка справа и соответственно этому равенство (3) есть равенство между пределами функций справа. Если a — предельная точка слева или двусторонняя предельная, доказательство теоремы 1 аналогично предыдущему, только во второй случае надо доказать совпадение пределов отношения функций и отношения производных как слева, так и справа.

Непосредственным обобщением теоремы 1 является следующая теорема.

Теорема 2. *Пусть функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ определены в промежутке $(a, b]$ и имеют в нем непрерывные производные до $(n-1)$-го порядка включительно, причем $\lim\limits_{x\to a} f^{(k)}(x) = 0$, $\lim_{x\to a} \varphi^{(k)}(x) = 0$, $k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$. Пусть в интервале (a, b) существуют производные n-го порядка $f^{(n)}(x)$*[15] *и $\varphi^{(n)}(x) \neq 0$. Тогда если существует предел*

$$\lim_{x\to a} \frac{f^{(n)}(x)}{\varphi^{(n)}(x)},$$

---

[15] За производную нулевого порядка принимается сама функция.

то существует и предел

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{\varphi(x)},$$

причем

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f^{(n)}(x)}{\varphi^{(n)}(x)}.$$

Доказательство. При $n=1$ теорема 2 совпадает с теоремой 1. Пусть $n>1$. Допустим, что теорема верна для натурального числа $k=n-1$. Рассмотрим функции

$$f_1(x)=f^{(n-1)}(x),\qquad \varphi_1(x)=\varphi^{(n-1)}(x).$$

Для этих функций выполнены все условия теоремы 1 в, в силу этой теоремы, из существования предела

$$\lim_{x\to a}\frac{f_1'(x)}{\varphi_1'(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f^{(n)}(x)}{\varphi^{(n)}(x)}$$

следует существование предела

$$\lim_{x\to a}\frac{f_1(x)}{\varphi_1(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f^{(n-1)}(x)}{\varphi^{(n-1)}(x)}$$

и выполнение равенства

$$\lim_{x\to a}\frac{f^{(n-1)}(x)}{\varphi^{(n-1)}(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f^{(n)}(x)}{\varphi^{(n)}(x)}. \tag{6}$$

Но, по предположению, из существования предела

$$\lim_{x\to a}\frac{f^{(n-1)}(x)}{\varphi^{(n-1)}(x)}$$

следует существование предела отношения $\dfrac{f(x)}{\varphi(x)}$ при $x\to a$ и выполняется равенство

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f^{(n-1)}(x)}{\varphi^{(n-1)}(x)}. \tag{7}$$

Сравнение соотношений (6) к (7) приводит к нужному результату.

В теоремах 1 и 2 был рассмотрен случай, когда x стремится к конечному предельному значению a. Обратимся к случаю, когда $a=\pm\infty$. Докажем следующую теорему.

Теорема 3. *Пусть функции* $f(x)$ *и* $\varphi(x)$ *определены и непрерывны на полупрямой* $c\le x<+\infty$, $c\ne 0$ *и* $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\varphi(x)=0$. *Пусть для всех* $x\in[c,+\infty)$ *существуют производные* $f'(x)$ *и* $\varphi'(x)\ne 0$. *Тогда*

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{f'(x)}{\varphi'(x)},$$

если предел в правой части равенства существует.

Доказательство. Так как $x \to +\infty$, то можно считать, что $c > 0$. Введем в рассмотрение функции

$$F(x) = f\left(\frac{1}{x}\right), \qquad \Phi(x) = \varphi\left(\frac{1}{x}\right).$$

Очевидно, что функции $F(x)$ и $\Phi(x)$ определены и непрерывны на промежутке $\left(0, \frac{1}{c}\right]$. Положив $\frac{1}{x} = z$, найдем

$$\lim_{x \to +0} F(x) = \lim_{x \to +0} f\left(\frac{1}{x}\right) = \lim_{z \to +\infty} f(x) = 0,$$

аналогичным образом

$$\lim_{x \to +0} \Phi(x) = 0.$$

Кроме того, на промежутке $\left(0, \frac{1}{c}\right]$ существуют производные

$$F'(x) = -f'\left(\frac{1}{x}\right)x^{-2}, \qquad \Phi'(x) = -\varphi'\left(\frac{1}{x}\right)x^{-2}, \tag{8}$$

причем $\Phi'(x) \neq 0$ при всех $x \in \left(0, \frac{1}{c}\right]$.

В силу условия теоремы и соотношений (8) предел

$$\lim_{x \to +0} \frac{F(x)}{\Phi(x)} = \lim_{x \to +0} \frac{-f'\left(\frac{1}{x}\right)x^{-2}}{-\varphi'\left(\frac{1}{x}\right)x^{-2}} = \lim_{x \to +0} \frac{f'\left(\frac{1}{x}\right)}{\varphi'\left(\frac{1}{x}\right)} = \lim_{z \to +\infty} \frac{f'(z)}{\varphi'(z)}$$

существует, и поэтому, на основании теоремы 1, условия которой для функций $F'(x)$ и $\Phi'(x)$ выполнены, существует предел отношения $\frac{F(x)}{\Phi(x)}$ при $x \to +0$ и

$$\lim_{x \to +0} \frac{F(x)}{\Phi(x)} = \lim_{x \to +0} \frac{F'(x)}{\Phi'(x)} = \lim_{z \to +\infty} \frac{f'(z)}{\varphi'(z)}. \tag{9}$$

В свою очередь,

$$\lim_{x \to +0} \frac{F(x)}{\Phi(x)} = \lim_{x \to +0} \frac{f\left(\frac{1}{x}\right)}{\varphi\left(\frac{1}{x}\right)} = \lim_{z \to +\infty} \frac{f(z)}{\varphi(z)}. \tag{10}$$

Сравнивая равенства (9) и (10), получаем:

$$\lim_{z \to +\infty} \frac{f(z)}{\varphi(z)} = \lim_{z \to +\infty} \frac{f'(z)}{\varphi'(z)}.$$

что требовалось доказать.

Неопределенность вида $\dfrac{\infty}{\infty}$.

Обратимся к вопросу о существовании и вычислении предела отношения $\dfrac{f(x)}{\varphi(x)}$ в случае, когда при стремлении x к своему предельному значению функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ неограниченно возрастают. Этот вопрос решается с помощью следующей теоремы.

Теорема 4 $\left(\text{правило Лопиталя для неопределенности вида } \dfrac{\infty}{\infty}\right)$. *Пусть функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ определены всюду в некоторой окрестности $U(a)$ точки a, за исключением самой этой точки, и*

$$\lim_{x\to a} f(x) = +\infty, \qquad \lim_{x\to a} \varphi(x) = +\infty.$$

Пусть, далее, функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ дифференцируемы в $U(a)\setminus a$, причем функция $\varphi'(x)$ не обращается в нуль. Тогда, если существует предел

$$\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)} = l,$$

то существует и предел $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{\varphi(x)}$, который также равен l.

Доказательство. Предположим, что l — конечное число. Для любого $\varepsilon > 0$, которое можно считать меньшим единицы, найдется $\delta_0 > 0$, $U_{\delta_0}(a) \subset U(a)$, такое, что при $0 < |x - a| < \delta_0$

$$\left|\frac{f'(x_0)}{\varphi'(x_0)} - l\right| < \varepsilon \quad \text{или} \quad -\varepsilon < \frac{f'(x_0)}{\varphi'(x_0)} - l < \varepsilon.$$

Но тогда при $0 < |x_0 - a| < \delta_0$

$$\frac{f'(x_0)}{\varphi'(x_0)} - l = \theta_1\varepsilon \quad \text{или} \quad \frac{f'(x_0)}{\varphi'(x_0)} = l + \theta_1\varepsilon, \tag{11}$$

где $-1 \le \theta_1 \le 1$. Зафиксируем такое $\bar{x}_0$; пусть $\bar{x}_0 < a$ и x_0 — произвольное число, удовлетворяющее условию $\bar{x}_0 < x_0 < a$. В этом случае, по теореме Коши,

$$\frac{f(x) - f(\bar{x}_0)}{\varphi(x) - \varphi(\bar{x}_0)} = \frac{f'(\xi)}{\varphi'(\xi)}, \qquad \bar{x}_0 < \xi = x_0 < x.$$

Можно считать x настолько близким к a, что функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ не равны нулю, а $\dfrac{f(x_0)}{f(x)}$ и $\dfrac{\varphi(x_0)}{\varphi(x)}$ меньше единицы. Тогда предыдущее равенство примет следующий вид:

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)}\,\frac{1 - \dfrac{f(x_0)}{f(x)}}{1 - \dfrac{\varphi(x_0)}{\varphi(x)}} = \frac{f'(\xi)}{\varphi'(\xi)},$$

откуда

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{f'(\xi)}{\varphi'(\xi)}\,\frac{1-\dfrac{\varphi(x_0)}{\varphi(x)}}{1-\dfrac{f(x_0)}{f(x)}}. \tag{12}$$

При $x \to a$ функции $\dfrac{\varphi(x_0)}{\varphi(x)}$ и $\dfrac{f(x_0)}{f(x)}$ стремятся к нулю. Поэтому для заданного $\varepsilon > 0$ найдется число δ, $\delta < \delta_0$, такое, что при $|x-a| < \delta$

$$\frac{1-\dfrac{\varphi(x_0)}{\varphi(x)}}{1-\dfrac{f(x_0)}{f(x)}} = 1+\theta_2\varepsilon, \qquad -1 \le \theta_2 \le 1. \tag{13}$$

Из формул (11), (12), (13) находим, что при $|x-a| < \delta$ и $x < a$

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)} - (l+\theta_1\varepsilon)(1+\theta_2\varepsilon) = l + \varepsilon(\theta_1+\theta_2 l+\theta_1\theta_2 l) < b + c\varepsilon,$$

где c — константа, не превышающая $l+2$. Так как число $\varepsilon > 0$ произвольно, то последнее неравенство означает, что

$$\lim_{x\to a-0} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = l.$$

Аналогичным образом подучим:

$$\lim_{x\to a+0} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = l,$$

и теорема для случая конечного l доказана.

Предположим, что $l = +\infty$. Для любого числа $A > 0$ найдется $\delta_0 > 0$, такое, что при $|x-a| < \delta_0$, $x_0 \ne a$, будем иметь $\dfrac{f'(x_0)}{\varphi'(x_0)} > A$. Пусть снова зафиксировано число x_0; предположим, что $x_0 < a$ и число $x \in (x_0, a)$ — любое. Для заданного $\varepsilon > 0$ найдется $\delta > 0$, $\delta < \delta_0$, такое, что при $|x-a| < \delta$

$$frac1 - \frac{\varphi(x_0)}{\varphi(x)}1 - \frac{f(x_0)}{f(x)} = 1+\theta\varepsilon, \qquad -1 < \theta < 1.$$

При этом без ограничения общности можно считать $\varepsilon < \dfrac{1}{2}$, следовательно, $\dfrac{1}{2} < 1+\theta < \dfrac{3}{2}$. Но тогда

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{f'(\xi)}{\varphi'(\xi)} \cdot frac1 - \frac{\varphi(x_0)}{\varphi(x)}1 - \frac{f(x_0)}{f(x)} > A(1=\theta_2) > \frac{1}{2}A.$$

Так как число $A > 0$ произвольно, то последнее неравенство показывает, что

$$\lim_{x\to a-0} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = +\infty.$$

Аналогично находим:

$$\lim_{x\to a+0}\frac{f(x)}{\varphi(x)}=+\infty.$$

Предлагаем читателю рассмотреть случай, когда

$$\lim_{x\to a} f(x)=-\infty,\quad \lim_{x\to a},\varphi(x)=-\infty,\quad \lim_{x\to a} f(x)=+\infty,\quad \lim_{x\to a}\varphi(x)=-\infty,$$

а также случай, когда $a=\pm\infty$.

Замечание. Если однократное применение теорема 4 не облегчает вычисления предела, а функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ дифференцируемы достаточное число раз в окрестности точки a и производные $\varphi'(x)$ не обращаются s нуль, то, как и в случае неопределенности вида $\frac{0}{0}$, предел отношения первых производных можно заменить пределом отношения вторых производных и т. д., пока не получится легко вычисляемый предел. Однако следует иметь в виду, что правило Лопитавя не всегда применимо, хотя функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ дифференцируемы любое число раз, как показывает следующий пример:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-\sin^2 x}{x^2+\sin^2 x}=\lim_{x\to\infty}\frac{2x-\sin 2x}{2x+\sin 2x}\neq\lim_{x\to\infty}\frac{2-2\cos 2x}{2+2\cos 2x}.$$

В этом примере два первых предела существуют и равны 1, а последний предел не существует.

Проанализировать пример раскрытия неопределенности $\frac{0}{0}$, т.е. найти предел,

$$\lim_{x\to a}\frac{x^3\sin\frac{1}{x}}{x^2}$$

предлагаем читателю.

Последующие два примера содержат сравнение порядков роста степенной, показательной в логарифмической функций и часто используются в раsличных разделах математического анализа.

Примеры.

Рассмотрим при $x>0$ функции x^α, a^x и $\log_a x$, где $a>1$ и $\alpha>0$. Все эти функции неограниченно возрастают при $x\to\infty$, однако характер их роста различен.

1. Рассмотрим отношение $\frac{x^\alpha}{a^x}$. Пусть число $\alpha=n$. Тогда

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^n}{a^x}=\lim_{x\to\infty}\frac{nx^{n-1}}{a^x\ln a}=\ldots=\lim_{x\to\infty}\frac{n!}{a^x(\ln a)^n}=0.$$

Если число α не целое, обозначим через k наименьшее целое число, не превосходящее α, т.е. $k\le\alpha<k+1$ (k может быть и нулем). Так как без ограничения общности можно считать, что $x>1$, то $0<x^\alpha<x^{n+1}$, и потому

$$0<\frac{x^\alpha}{a^x}<\frac{x^{k+1}}{a^x}.$$

При $x \to \infty$ правая часть этого неравенства стремится к нулю, а следовательно, стремится к нулю и средняя часть неравенства. Таким образом, при любых $\alpha > 0$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^\alpha}{a^x} = 0.$$

Это равенство означает, что a^x при $x \to \infty$ растет быстрее любой положительной степени x.

2. Рассмотрим теперь отношение $\dfrac{x^\alpha}{\log_a x}$. Имеем

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^\alpha}{\log_a x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\alpha x^{\alpha-1}}{\dfrac{1}{x}\log_a e} = \frac{\alpha}{\log_a e} \lim_{x\to\infty} x^\alpha = \infty.$$

Это значит, что $\log_a x$ при $x \to \infty$ растет медленнее любой положительной степени x.

ДРУГИЕ ВИДЫ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТЕЙ.

Наряду с неопределенностями видов $\dfrac{0}{0}$ и $\dfrac{\infty}{\infty}$ существуют неопределенности и других видов. Это пределы выражений

$$f(x)h(x), \quad f(x)-g(x), \quad [g(x)]^{f(x)}, \quad [\varphi(x)]^{f(x)} \quad \text{и} \quad [\psi(x)]^{f(x)}$$

где

$$f(x) \to \infty, \quad g(x) \to \infty, \quad h(x) \to 0, \quad \psi(x) \to 1$$

при $x \to a$. Такие неопределенности сводятся к неопределенностям видов $\dfrac{0}{0}$ и $\dfrac{\infty}{\infty}$. Так, с помощью равенства

$$f(x)h(x) = \frac{h(x)}{\dfrac{1}{f(x)}}$$

неопределенность вида $0 \cdot \infty$ преобразуется в неопределенность вида $\dfrac{0}{0}$. Далее,

$$f(x) - g(x) = f(x)g(x)\left[\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{f(x)}\right],$$

и мы получаем только что рассмотренную неопределенность вида $0 \cdot \infty$. Наконец, неопределенности видов ∞^0, 0^0 и 1^∞ сводятся к ранее рассмотренным с помощью логарифмирования. Например, положив $\Phi(x) = [\varphi(x)]^{h(x)}$ и $\ln\Phi(x) = h(x)\ln\varphi(x)$, получаем неопределенность вида $0\cdot\infty$, и если существует $\lim\limits_{x\to a} \ln\Phi(x) = \alpha$, то, в силу непрерывности показательной функции, существует и $\lim\limits_{x\to a} t(x) = \lim\limits_{x\to a} \varphi(x)^{h(x)} = e^\alpha$.

ПРИМЕРЫ.

3. Вычислим $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} (\operatorname{tg} x)^{\cos x}$. Имеем:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \ln(\operatorname{tg} x)^{\cos x} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \cos x(\ln\sin x - \ln\cos x) =$$

$$= -\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \cos x \,\ln\cos x = -\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\ln\cos x}{\dfrac{1}{\cos x}} =$$

$$= -\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\dfrac{1}{\cos x}(-\sin x)}{-\dfrac{1}{\cos^2 x}\,(-\sin x)} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \cos x = 0.$$

Следовательно,

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} (\operatorname{tg} x)^{\cos x} = e^0 = 1.$$

Глава VI

ПРИЛОЖЕНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ИСЧИСЛЕНИЯ К ИССЛЕДОВАНИЮ ФУНКЦИЙ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

§ 1. Монотонные функции

Напомним, что функция $y = f(x)$, определенная на промежутке X и принимающая вещественные значения, называется *неубывающей* (*невозрастающей*) на этой промежутке, если при любых $x_1, x_2 \in X$, таких, что $x_1 < x_2$

$$f(x_1) \leq f(x_2) \qquad (f(x_1) \geq f(x_2)).$$

Если при $x_1 < x_2$ имеется строгое неравенство

$$f(x_1) < f(x_2) \qquad (f(x_1) > f(x_2)),$$

то функция $f(x)$ называется *возрастающей* (*убывающей*) на промежутке X.

Функция $f(x)$ называется *монотонной на промежутке* X, если она является неубывающей (невозрастающей) на этом промежутке и *строго монотонной*, если она возрастающая (убывающая) на нем.

Монотонные функции обладают рядом замечательных свойств. Таковы существование односторонних пределов, однозначных обратных функций у строго монотонных и непрерывных и т.д. Поэтому важно установить простые признаки, позволяющие находить промежутки, в которых исследуемая функция является монотонной. Используя понятие производной, нетрудно доказать следующие признаки монотонности.

Теорема 1. *Для того чтобы функция $f: X \to \mathbb{R}$, имеющая производную в каждой точке промежутка X, была неубывающей (невозрастающей), необходимо и достаточно, чтобы в каждой точке $x \in X$ выполнялось неравенство*

$$f'(x) \geq 0 \qquad (f'(x) \leq 0). \tag{1}$$

Необходимость. Если функция $f(x)$ не убывает (не возрастает) на промежутке X, то для любых x и $h > 0$, $x, x + h \in X$, имеем:

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} \geq 0 \qquad (\leq 0).$$

Следовательно,

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \geq 0 \qquad (\leq 0).$$

Достаточность. Пусть условие (1) выполнено в каждой точке $x \in X$. Если x_1 и x_2 — произвольные точки промежутка X, $x_1 < x_2$, то, по теореме Лагранжа,

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1), \qquad x_1 < c < x_2, \tag{2}$$

откуда, в силу условия (1),

$$f(x_2) \geq f(x_1) \qquad (f(x_2) \leq f(x_1)).$$

Замечание. Если в каждой точке промежутка X существует производная $f'(x)$ и

$$f'(x) > 0 \qquad (f'(x) < 0), \tag{3}$$

то функция $f(x)$ возрастает (убывает) на промежутке X, что непосредственно следует из соотношения (3) и условия (3).

Условие (3) — достаточный признак возрастания (убывания) функции $f(x)$ на промежутке X. Это условие, однако, не является необходимым: из того, что функция $f(x)$ возрастает (убывает), вообще на следует, что $f'(x) > 0$ $(f'(x) < 0)$ для всех точек промежутка X. Простейшим примером, подтверждающим этот факт, служит функция $f(x) = x^3$, которая возрастает на числовой прямой $X = (-\infty, \infty)$, но производная $f'(x) = 3x^2$ обращается в нуль при $x = 0$. Легко, однако, сформулировать необходимый и достаточный признак возрастания (убывания) функции $f(x)$ на промежутке X.

Теорема 2. *Для того чтобы функция $f(x)$, имеющая производную в каждой точке промежутка X, была возрастающей (убывающей), необходимо к достаточно выполнение условий:*

1) $f'(x) \geq 0$ *(≤ 0) для всех $x \in X$,*

2) $f'(x)$ *не обращается тождественно в нуль ни в каком промежутке, являющемся частью X.*

Необходимость 1) непосредственно следует из теоремы 1. Если же предположить, что функция $f'(x) \equiv 0$ на каком-то отрезке $[x', x''] \subset X$, принадлежащем X, то на этом отрезке $f(x)$ будет постоянной, что противоречит условию теоремы, и, таким образом, необходимость 2) доказана.

Достаточность. Если выполнены условия 1) и 2), то, по теореме 1, функция $f(x)$ является, по крайней мере, неубывающей (невозрастающей), т.е. для любых $x_1, x_2 \in X$, $x_1 < x_2$,

$$f(x_1) \leq f(x_2) \qquad (f(x_1) \geq f(x_2)). \tag{4}$$

Если бы в неравенствах (4) для некоторых x_1, x_2, $x_1 < x_2$, был знак равенства, то на промежутке $[x_1, x_2]$ функция $f(x)$ была бы постоянной, а производная $f'(x) \neq 0$. Но это противоречит условию 2), и поэтому в выражениях (4) не может стоять знак равенства ни при каких значениях $x_1, x_2 \in X$.

Примеры.

1. Исследуем на возрастание и убывание функции

$$f(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x \quad \text{и} \quad g(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x+1}.$$

Так как в силу строгой монотонности логарифмической функции функции $f(x)$ и $g(x)$ возрастают тогда в только тогда, когда возрастают $\ln[f(x)]$ и $\ln[g(x)]$, то заменим их функциями $\varphi(x)$ и $\psi(x)$:

$$\varphi(x) = \ln f(x) = x \ln\left(+ \frac{1}{x}\right) = x[\ln(x+1) - \ln x],$$

$$\psi(x) = \ln g(x) = (x+1)[\ln(x+1) - \ln x].$$

Тогда

$$\varphi'(x) = \ln(x+1) - \ln x + x\left[\frac{1}{x+1} - \ln 1x\right].$$

По формуле Лагранжа,

$$\ln(x+1) - \ln x = \frac{1}{x+\xi}, \qquad 0 < \xi < 1.$$

Следовательно, для любого $x > 0$

$$\varphi'(x) = \frac{1}{x+\xi} - \frac{1}{x+1} > 0,$$

и $\varphi(x)$, а вместе с ней и $f(x)$ возрастает на $(0, \infty)$.

Аналогичным образом для всех $x > 0$

$$\psi'(x) = \frac{1}{x+\xi} - \frac{1}{x} < 0,$$

следовательно, $\psi(x)$, а вместе с ней и $g(x)$ убывает на $(0, \infty)$.

Монотонность функции $f(x)$ и связь монотонности с ее дифференциальными свойствами широко используются при доказательстве различного рода функциональных неравенств.

Примеры.

2. Покажем, что при $x > 0$

$$\ln(1+x) < x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}. \tag{5}$$

Действительно, пусть

$$f(x) = \ln(1+x) - \left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}\right).$$

Тогда $f(0) = 0$ и при $x > 0$

$$f'(x) = \frac{1}{1+x} - (1 - x + x^2) = -\frac{x^3}{1+x} < 0,$$

откуда, по замечанию к теореме 1, следует, что $f(x) < 0$.

Помимо функций, возрастающих и убывающих на промежутке, бывают функции, возрастающие и убывающие в точке.

Пусть функция $f(x)$ определена на конечном промежутке X.

Определение. Функция $f(x)$ называется *возрастающей* (*убывающей*) *в точке* $x_0 \in X$, если существует такое число $\delta > 0$, что для всех h, $|h| < \delta$, для которых $x_0 + h \in X$, выполняется неравенство

$$[f(x_0+h) - f(x)]h\ 0 \qquad (< 0).$$

Другими словами, функция $f(x)$ возрастает (убывает) в точке, если при достаточно малых приращениях аргумента его знак совпадает со знаком приращений функции $f(x)$ в точке x_0 (или оказывается противоположным ему).

Следующая теорема устанавливает достаточный признак возрастания (убывания) функции $f(x)$ в точке.

Теорема 3. *Пусть функция $f(x)$ имеет производную $f'(x_0)$ в точке x_0. Если $f'(x_0) > 0$ ($f'(x_0) < 0$), то функция $f(x)$ возрастает (убывает) в точке x_0.*

Если x_0 — граничная точка области определения функция $f(x)$, то утверждение теоремы сохраняет силу при замене $f'(x_0)$ на $f'_+(x_0)$ или $f'_-(x_0)$.

Доказательство. Ограничимся случаем $f'(x_0) > 0$. По определению производной,

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\Delta y}{h}.$$

В силу свойства предела (см. теорему 2 из § 4, гл. II), найдется число $\delta > 0$, такое, что при $|h| < \delta$ выполняется неравенство $\dfrac{\Delta y}{h} > 0$. Теорема доказана.

Если функция $f(x)$ возрастает (убывает) в каждой точке некоторого конечного или бесконечного интервала, то она возрастает (убывает) на этом интервале, следует, однако, ответить, что возрастание (убывание) функции в точке в общем случае не приводит к возрастанию (убыванию) функции ни в какой интервале, окружающей эту точку.

Примеры.

3. Пусть

$$f(x) = \begin{cases} x + x^2 \sin \dfrac{2}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Поскольку

$$f'(0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h + h^2 \sin \dfrac{2}{h}}{h} = 1,$$

то функция $f(x)$, по теореме 3, возрастает в точке $x_0 = 0$. Однако нетрудно показать, что функция $f(x)$ не является возрастающей ни в каком интервале $(-\delta, \delta)$, окружающем эту точку, где число $\delta > 0$ произвольно мало.

В самом деле, допустим противное, т.е. что при некотором числе $\delta > 0$ в интервале $(-\delta, \delta)$ функция $f(x)$ монотонно возрастает. Выберем натуральное число n, настолько большим, чтобы выполнялось неравенство

$$\frac{4}{(4n-1)\pi} < \delta.$$

Тогда точки $x_1 = \dfrac{4}{(4n-1)\pi}$, $x_2 = \dfrac{1}{n\pi}$ лежат в интервале $(-\delta, \delta)$ и $x_1 > x_2$. Но

$$f(x_1) = \frac{4}{(4n-1)\pi} + \frac{16}{(4n-1)^2\pi^2} \sin \frac{4n-1}{2}\pi =$$

$$= \frac{4}{(4n-1)\pi} + \frac{16}{(4n-1)^2\pi^2}$$

$$f(x_2) = \frac{1}{n\pi} + \frac{1}{n^2\pi^2} \sin 2n\pi = \frac{1}{n\pi}$$

и, следовательно,

$$f(x_1) - f(x_2) = \frac{4}{(4n-1)\pi} + \frac{16}{(4n-1)^2\pi^2} - \frac{1}{n\pi} = \frac{-16n + 4n\pi - \pi}{n\pi^2(4n-1)^2},$$

т.е. $f(x_1) < f(x_2)$. Получали противоречие.

§ 2. Экстремумы функций одной переменной

При изучении функций бывает важно знать, при каких значениях аргумента функция принимает наибольшие и наименьшие значения как во всей области определения, так и в окрестности отдельных точек. Применение методов дифференциального исчисления часто помогает ответить на эти вопросы.

Пусть $f(x)$ — функции, определенная на промежутке X.

Определение. Внутренняя точка $x_0 \in X$ называется точкой *локального*[16] *максимума* (*строгого локального максимума*) функции $f(x)$, если существует такая окрестность $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, что для всех $x \neq x_0$ из этой окрестности выполняется неравенство

$$f(x) \le f(x_0) \qquad (f(x) < f(x_0)).$$

Если для указанных условиях имеет место неравенство

$$f(x) \ge f(x_0) \qquad (f(x) > f(x_0)),$$

то точка x_0 называется *точкой локального минимума* (*строгого локального минимума*) функции $f(x)$. Точки максимума и минимума называются *точками экстремума* функции $f(x)$, а значения функции в этих точках — *экстремумами функции.*

---

[16] В дальнейшем слово «локальный» будем опускать.

Необходимый признак экстремума. *Если точка x_0 является точкой экстремума функции $f(x)$ и в этой точке существует производная $f'(x_0)$, то*

$$f'(x_0) = 0.^{17} \tag{1}$$

Доказательство. Пусть, например, точка x_0 является точкой максимума функции $f(x)$. Тогда в некоторой окрестности $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ выполняется условие

$$f(x) \leq f(x_0).$$

Следовательно, по теореме Ферма, условия которой выполнены,

$$f'x_0) = 0. \tag{2}$$

Условие (1) является необходимым условием экстремума, но не достаточным. Простейшим примером, подтверждающим это, служит функция $f(x) = x^3$, производная которой в точке $x = 0$ обращается в нуль, но в этой точке функция не имеет экстремума (она возрастает в этой точке). Однако если функция имеет производную на промежутке X, точки максимума или минимума следует искать среди нулей производной, т.е. среди корней уравнения

$$f'(x) = 0.$$

Значения x, удовлетворяющие уравнению (2), называются *стационарными точками* функции $f(x)$. Как видно из предыдущего, каждая точка экстремума дифференцируемой функции $f(x)$ — стационарная точка, но не каждая стационарная точка функции $f(x)$ в общем случае — точка экстремума.

Другие точки локального экстремума могут быть в тех точках, в которых производил не существует.

В следующей теореме содержатся достаточные признаки, при выполнении которых стационарная точка или точка несуществования производной является точкой локального экстремума функции.

Теорема 1. *Пусть функция $f(x)$ непрерывна на промежутке X и дифференцируема в каждой внутренней точке этого промежутка, за исключением, может быть, внутренней точки x_0. Если при переходе через точку x_0 знак производной $f'(x)$ изменяется, т.е. существует число $\delta > 0$, такое, что $f'(x_0 - h) > 0$, а $f(x + h) < 0$, или, наоборот, при $0 < h < \delta$, то x_0 является точкой экстремума функция $f(x)$. Если же при переходе через точку x_0 знак производной $f'(x)$ сохраняется, то экстремума в этой точке нет.*

Доказательство. Предположим, для определенности, что знак производной $f'(x)$ при переходе через точку x_0 изменяется с плюса на минус. По теореме Лагранжа, для любого

$$x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \qquad f(x) = f(x_0) = (x - x_0)f'(\xi),$$

---

[17] Геометрически это означает, что касательная к кривой $y = f(x)$ в точке x_0 параллельна оси Ox.

где ξ — точка, лежащая между x и x_0. Но, в силу сделанных предположений, $(x-x_0)f'(\xi) < 0$ для всех $x \in (x_0-\delta, x_0+\delta)$. Следовательно, $f(x) < f(x_0)$ для всех таких x, и в точке x_0 имеется максимум.

Если функция $f'(x)$ имеет один и тот же знак и в $(x_0-\delta, x_0$ и в $(x_0, x_0+\delta)$, то знак разности $f(x)-f(x_0)$ изменяется с изменением знака $x-x_0$, и экстремума в точке x_0 нет.

Примеры.

1. Пусть

$$f(x) = \frac{x^2-3x+2}{x^2+3x+2}.$$

При $x > 0$ эта функция непрерывна, имеет непрерывную производную

$$f'(x) = \frac{6(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})}{(x^2+3x+2)^2}$$

с одним корнем $x = \sqrt{2}$. При переходе через этот корень знак производной изменяется с минуса на плюс. Следовательно, точка $x = \sqrt{2}$ есть точка локального минимума рассматриваемой функции.

В теореме, которая доказывается далее, устанавливаются достаточные признаки экстремума функции или его отсутствия в стационарной точке по свойствам производных высшего порядка. Проверка условий этой теоремы иногда проще, чем теоремы 1.

Теорема 2. *Пусть функция $f(x)$ определена в промежутке X и в точке $x_0 \in X$ имеет производные до n-го порядка включительно, причем*

$$f'(x_0) = f''(x_0) = \ldots = f^{(n-1)}(x_0) = 0, \qquad f^{(n)}(x_0) \neq 0. \tag{3}$$

Тогда:
1) если n — четное число, то x_0 — точка экстремума функция $f(x)$;
2) если n — нечетное число, то x_0 не является точкой экстремума.

Доказательство. Пусть для определенности

$$f^{(n)}(x_0) > 0. \tag{4}$$

По формуле Тейлора с остаточным членом в форме Пеано,

$$f(x) = f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\ldots+\frac{f^{(n-1)}(x_0)}{(n-1)!}(x-x_0)^{n-1}+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+o(|x-x_0|^n).$$

Тогда, в силу условия (3), получим:

$$f(x)-f(x_0) = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + o(|x-x_0|^n). \tag{5}$$

Из формулы (5) следует, что при всех x, достаточно близких к x_0

$$\operatorname{sign}[f(x)-f(x_0)] = \operatorname{sign}\left[\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n\right] = \operatorname{sign}(x-x_0)^n. \tag{6}$$

Поэтому если $n = 2k$, то для всех всех x, достаточно близких к x_0, $x \neq x_0$,

$$f(x) - f(x_0) > 0$$

и точка x_0 есть точка минимума функции $f(x)$. Если $n = 2k + 1$, то из формулы (6) следует, что в любой достаточно малой окрестности $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ точки x_0 разность $f(x) - f(x_0)$ знака не сохраняет и точка x_0 не является точкой экстремума функции $f(x)$.

Примеры.

2. Рассмотрим функцию

$$\varphi(t) = t^\alpha - \alpha t + \alpha - 1, \qquad t > 0, \quad \alpha < 1.$$

Эта функция дифференцируема любое число раз на интервале $(0, \infty)$ и

$$\varphi'(t) = \alpha t^{\alpha-1}, \qquad \varphi''(t) = \alpha(\alpha - 1)t^{\alpha-2}.$$

Так как уравнение $\varphi'(t) = 0$ имеет единственный корень $t_0 = 1$, причем $\varphi''(t_0) = \varphi''(1) = \alpha(\alpha - 1) < 0$, то функция $\varphi(t)$ имеет единственный максимум: $\varphi(1) = 0$. Поэтому $\varphi(t) \leq 0$ для всех положительных t.

Положим $\alpha = \dfrac{1}{p}$, и пусть $1 - \alpha = \dfrac{1}{q}$. Тогда $p > 1$, $q > 1$ и $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$. Пусть $t = \dfrac{x^p}{y^q}$, $x, y > 0$. В этом случае неравенство $\varphi(t) \leq 0$ принимает вид

$$xy^{-\frac{q}{p}} \leq \frac{1}{p}\frac{x^p}{y^q} + \frac{1}{q}.$$

Умножив обе части неравенства на y^q, получим:

$$xy^{q-\frac{q}{p}} \leq \frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q}.$$

Но $q - \dfrac{q}{p} = q\left(1 - \dfrac{1}{p}\right) = q \cdot \dfrac{1}{q} = 1$, поэтому

$$xy \leq \frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q}. \tag{7}$$

Пусть даны произвольные вещественные числа

$$a_1, a_2, \ldots, a_n \quad \text{и} \quad b_1, b_2, \ldots, b_n.$$

Положим

$$x = \frac{|a_i|}{\left(\sum\limits_{i=1}^n |a_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}} \quad \text{и} \quad y = \frac{|b_i|}{\left(\sum\limits_{i=1}^n |b_i|^q\right)^{\frac{1}{q}}}.$$

Подставив эти значения в (7), найдем:

$$\frac{|a_i b_i|}{\left(\sum\limits_{i=1}^n |a_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum\limits_{i=1}^n |b_i|^q\right)^{\frac{1}{q}}} \leq \frac{|a_i|^p}{p\sum\limits_{i=1}^n |a_i|^p} + \frac{|b_i|^q}{q\sum\limits_{i=1}^n |b_i|^q}.$$

Просуммируем полученное неравенство по i от 1 до n. Тогда

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{|a_i b_i|}{\left(\sum\limits_{i=1}^{n} |a_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum\limits_{i=1}^{n} |b_i|^q\right)^{\frac{1}{q}}} \le \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} |a_i|^p}{p \sum\limits_{i=1}^{n} |a_i|^p} + \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} |b_i|^q}{q \sum\limits_{i=1}^{n} |b_i|^q} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1,$$

откуда

$$\sum_{i=1}^{n} |a_i b_i| \le \left(\sum_{i=1}^{n} |a_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^{n} |b_i|^q\right)^{\frac{1}{q}}.$$

Мы получили так называемое *неравенство Гёльдера*[18]. Если $p = 2$, то также $q = 2$ и неравенство Гёльдера принимает вид

$$\sum_{i=1}^{n} |a_i b_i| \le \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |a_i|^2} \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |b_i|^2}.$$

Это неравенство называется неравенством *Буняковского—Шварца*[19]. Неравенство, найденное В.Я. Буняковским, было позже установлено немецким математиком Г. Шварцем (1843–1921).

3. Пусть имеются однородные среды I и II (рис. 23), разделенные плоскостью, в которых распространяется свет, величина скорости света в первой среде — v_1, во второй — v_2. Учитывая, что в однородной среде свет распространяется прямолинейно, необходимо определить, по какому пути должен идти свет, чтобы за кратчайшее время попасть из точки A среды I в точку B среды II.

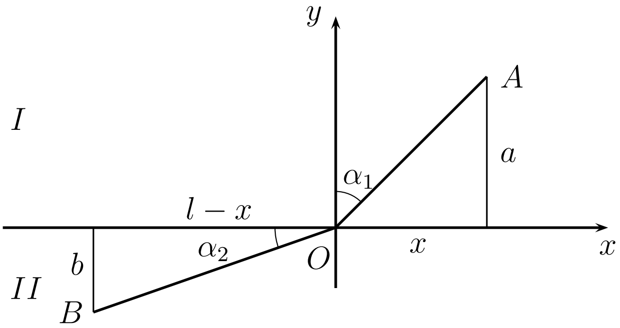

Рис. 23

Время распространения света

$$t = \frac{OA}{v_1} + \frac{OB}{v_2} = \frac{\sqrt{x^2 + a^2}}{v_1} + \frac{\sqrt{(b - x)^2 + b^2}}{v_2} = f(x).$$

Так как

$$f'(x) = \frac{1}{v_1} \frac{x}{\sqrt{x^2 + a^2}} - \frac{1}{v_2} \frac{b - x}{\sqrt{(b - x)^2 + b^2}}$$

и

$$f''(x) = \frac{1}{v_1} \frac{a^2}{(x^2 + a^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{1}{v_2} \frac{b^2}{[(b - x)^2 + b^2]^{\frac{3}{2}}} > 0,$$

---

[18] О. Гёльдер — немецкий математик (1859–1937).

[19] В.Я. Буняковский — русский математик (1804–1889).

то время будет минимальным, если

$$\frac{1}{v_1}\frac{x}{\sqrt{x^2+a^2}} = \frac{1}{v_2}\frac{b-x}{\sqrt{(b-x)^2+b^2}}$$

или

$$\frac{\sin\alpha_1}{\sin\alpha_2} = \frac{v_1}{v_2}.$$

Мы подучили закон преломления света.

4. Из квадратного куска жести, вырезая по углам небольшие квадратики и загибая образовавшиеся прямоугольные участки делают ящик. Нужно установить, какой должна быть длина стороны вырезаемого квадратика, при которой объем ящика будет наибольшим.

Пусть a — сторона квадрата, x — сторона вырезаемого квадратика. Тогда объем ящика $v = (a-2x)^2x$. Этот объем будет экстремальным, если

$$\frac{dv}{dx} = (a-2x)^2 - 4(a-2x)x = 0,$$

откуда $x_1 = \frac{a}{2}$, $x_2 = \frac{a}{6}$. При $x = \frac{a}{2}$ объем будет минимальным, при $x = \frac{a}{6}$ — максимальным, что ясно из геометрических соображений, а также из равенств

$$\left.\frac{d^2v}{dx^2}\right|_{x=\frac{a}{2}} = 4a > 0, \qquad \left.\frac{d^2v}{dx^2}\right|_{x=\frac{a}{6}} = -4a < 0.$$

5. Рассмотрим задачу, поставленную еще Кеплером: вписать в данный шар цилиндр максимального объема.

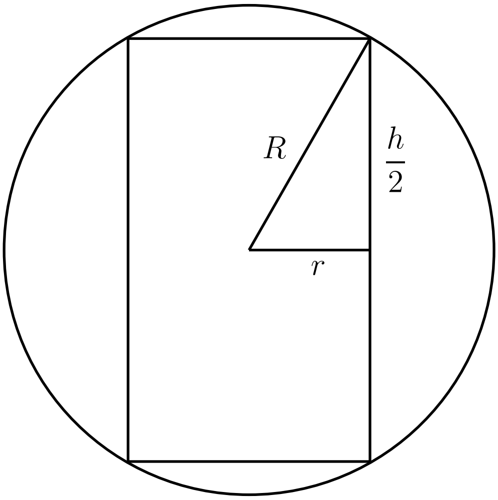

Рис. 24

Пусть R — радиус шара, r — радиус основания, h — высота цилиндра (рис. 24). Так как $r^2 + \left(\frac{h}{2}\right)^2 = R^2$, то объем цилиндра $2\pi r^2\sqrt{R^2-r^2}$. Поскольку постоянные множители не влияют на экстремальность объема, дело идет о нахождении максимума функции $f(r) = r^2\sqrt{R^2 - r^2}$ или, в силу монотонности степенной функции, максимума

$$\varphi(r) = R^2r^4 - r^6.$$

Имеем

$$\varphi'(r) = 4R^2r^3 - 6r^5, \qquad \varphi''(r) = 12R^2r^2 - 30r^4.$$

Из уравнения $\varphi'(r) = 0$ получаем $r^2 = \frac{2}{3}R^2$, и, следовательно, $\varphi''\left(\sqrt{\frac{2}{3}}R\right) = -\frac{49}{9}R^4$. Таким образом, при $r = \sqrt{\frac{2}{3}}R$ цилиндр имеет максиальный объем, равный $\frac{2}{3\sqrt{3}}\pi R^3$.

С помощью теорем 1 и 2 для достаточно гладких, т.е. имеющих необходимое число производных, функций полностью решается вопрос о существовании или несуществовании экстремума в стационарной точке, если эта точка изолированная, т.е. такая, что в ее окрестности не содержится других стационарных точек. Если стационарная точка не изолированная, то данные теоремы не всегда помогают решить указанный вопрос. Рассмотрим примеры.

ПРИМЕРЫ.

6. Пусть

$$f(x) = \begin{cases} x^4\left(2 + \sin\dfrac{1}{x}\right), & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases} \tag{8}$$

Так как

$$f'(0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{h\to 0} x^3\left(2 + \sin\frac{1}{x}\right) = 0,$$

то

$$f'(x) = \begin{cases} x^2\left[4x\left(2 + \sin\dfrac{1}{x}\right) - \cos\dfrac{1}{x}\right], & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Точка $x_0 = 0$ является стационарной топкой функции $f(x)$. Покажем, что в любом интервале $(0, \delta)$, $\delta > 0$ имеются стационарные точки функции $f(x)$.

Пусть $k > 1$ и $\frac{1}{2\pi k} < \delta$. Тогда точки $x_1 = \frac{1}{2\pi k}$, $x_2 = \frac{2}{(1 + 4k)\pi}$ лежат в интервале $(0, \delta)$ и

$$f'(x_1) = x_1^2\left[4x_1\left(2 + \sin\frac{1}{x_1}\right) - \cos\frac{1}{x_1}\right] = x_1^2\left[\frac{4}{k\pi} - 1\right] < 0,$$

$$f'(x_2) = x_2^2\left[4x_2\left(2 + \sin\frac{1}{x_2}\right) - \cos\frac{1}{x_2}\right] = x_2^2\,\frac{24}{(1 + 4k)\pi} > 0.$$

Поэтому, по теореме Дарбу, между точками x_1 и x_2 найдется точка x_0', в которой $f'(x_0') = 0$.

Таким образом, точка x_0 не является изолированной стационарной точкой функции $f(x)$, и теорема 1 неприменима. В этом примере нельзя воспользоваться и теоремой 2, так как $f''(x_0) = 0$, а третья производная этой функции, как нетрудно показать, не существует. Однако по виду функции (8) нетрудно установить, что в любой окрестности $(-\delta, \delta)$, $\delta > 0$, точки x_0

$$f(x) \geq f(0),$$

и, следовательно, точка $x_0 = 0$ является точкой минимума.

7. Пусть

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \dfrac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases} \tag{9}$$

Точка x_0 является стационарной точкой функции (9), так как

$$f'(0) = \lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to 0} \, x \sin \frac{1}{x} = 0.$$

В точках, отличных от нуля, функция (9) имеет производную

$$f'(x) = 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}.$$

Как и в примере 1, можно установить, что x_0 является неизолированной стационарной точкой функции $f(x)$, и теорема 1 неприменима. Очевидно, что функция $f(x)$ не имеет в точке $x_0 = 0$ второй производной, и, следовательно, теорема 2 также не дает возможности судить о характере стационарной точки $x_0 = 0$. Однако ясно, что в любой окрестности точки $x_0 = 0$ функция $f(x)$ бесконечно много раз изменяет свой знак, и поэтому $x_0 = 0$ не является точкой экстремума.

Итак, чтобы определить локальные экстремумы функции $f(x)$, непрерывной на промежутке X, надо найти все стационарные точки этой функции, а также вое точки, в которых производная не существует или бесконечна, и установить, происходит ли изменение знака производной при переходе через эти точки. Если в стационарной точке вторая производная отлична от нуля, то надо исследовать знак производной в этой точке.

Теоремы 1 и 2 дают возможность находить лишь локальные экстремумы. На промежутке X, где функция определена, может существовать несколько локальных экстремумов и даже их бесконечное множество. Некоторые локальные максимумы $f(x)$ могут быть меньше локальных минимумов этой функции (рис. 25). Примером аналитически заданной функции, у которой существуют локальные максимума, меньшие чем локальные минимумы, является

$$f(x) = \frac{1}{2}x + \cos x.$$

Максимум функции в точке $x = \dfrac{\pi}{6}$ меньше ее минимума в точке $x = \dfrac{5\pi}{6}$.

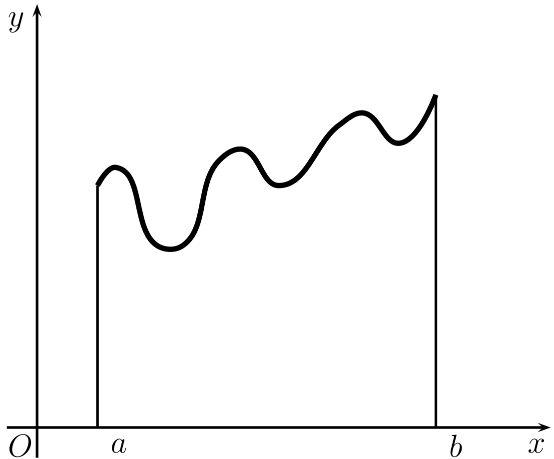

Рис. 25

Если необходимо найти глобальные максимумы и минимумы, т.е. наибольшее и наименьшее значения непрерывной функции $f(x)$ на промежутке X, то в случае, когда X не является отрезком, такие максимумы и минимумы могут не существовать. Если $X = [a, b]$ и требуется определить, например, наибольшее значение $f(x)$ на $[a, b]$, то надо взять локальные максимумы $f(x_1), f(x_2), \ldots$ и значения $f(x)$ на концах отрезка, а затем из чисел $f(a), f(b), f(x_1), f(x_2), \ldots$ выбрать наибольшее. При конечном числе локальных максимумов этот выбор сделать легко, в противном случае такой выбор может стать весьма затруднительным. Если функция не является непрерывной на отрезке X, но его можно разбить на конечное число промежутков, на которых $f(x)$ непрерывна, то сначала надо отыскать глобальные максимумы на каждом частичном промежутке, а затеи выбрать из них наибольший.

Заметим, что если функция разрывна в точке x_0 несуществования или бесконечности производной, то в этой точке может не быть локального экстремума, даже если производная при переходе через точку x_0 изменяет знак. Например, точка x_0 является такой точкой для функции

$$f(x) = \begin{cases} x, & 0 \le x \le 1, \\ 3 - x, & 1 < x \le 2. \end{cases}$$

§ 3. Выпуклые функции

Функция $f(x)$, определенная и непрерывная на промежутке X, называется *выпуклой* на этом промежутке, если для любых x_1 и x_2 из X и $0 \le \alpha \le 1$ выполняется неравенство

$$f[(1 - \alpha)x_1 + \alpha x_2] \le (1 - \alpha)f(x_1) + \alpha f(x_2). \tag{1}$$

Выпуклая функция называется *строго выпуклой*, если неравенство (1) строгое для всех различных пар точек x_1 и x_2 из X и $\alpha \in (0, 1)$.

Функция $f(x)$, определенная и непрерывная на промежутке X, называтся *вогнутой* (*строго вогнутой*), если функция $-f(x)$ выпукла (строго выпукла). Очевидно, что для вогнутой функции выполняется неравенство

$$f[(1-\alpha)x_1+\alpha x_2] \geq (1-\alpha)f(x_1)+\alpha f(x_2), \tag{2}$$

верное для всех $0 \leq \alpha \leq 1$ и любых $x_1, x_2 \in X$.

Геометрически ясно (рис. 26), что в случае выпуклой функции все точки любой дуги AB ее графика лежат под соответствующей хордой или на ней.

Из неравенства (1) легко выводится следующее неравенство:

$$\begin{gathered} f\left(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^{n}\alpha_i f(x_i) \\ x_1, x_2, \ldots, x_n \in X, \quad 0 \leq \alpha_i \leq 1, \quad i=1,2,\ldots,n, \qquad \sum_{i=1}^{n}\alpha_i = 1, \end{gathered} \tag{3}$$

называемое *неравенством Иенсена.*

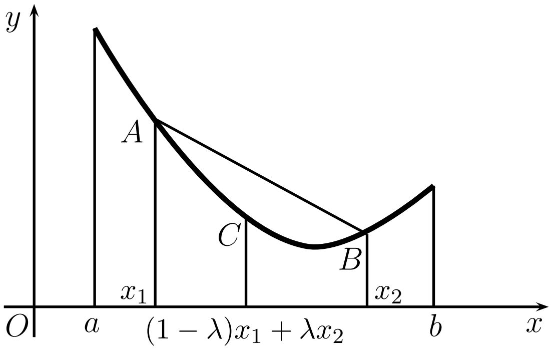

Рис. 26

Для $n=2$ неравенство Иенсена есть определение выпуклой функции. Пусть оно верно для k точек $x_1, x_2, \ldots, x_k$. Если даны $k+1$ точки $x_1, x_2, \ldots, x_k, x_{k+1}$, то положим, что

$$x'_i = x_i, \quad \alpha'_i = \alpha_i, \qquad (i=1,2,\ldots,k-1,$$

$$x'_k = \frac{\alpha_k x_k}{\alpha_k+\alpha_{k+1}} + \frac{\alpha_{k+1}x_{k+1}}{\alpha_k+\alpha_{k+1}}, \qquad \alpha'_k = \alpha_k+\alpha_{k+1}.$$

По-прежнему

$$x'_i \in X, \quad \alpha'_i \geq 0, \qquad i=1,2,\ldots,k, \qquad \sum_{i=1}^{k}\alpha'_i = 1,$$

и поэтому

$$f\left(\sum_{i=1}^{n}\alpha'_i x'_i\right) \leq \sum_{i=1}^{n}\alpha'_i f(x'_i). \tag{4}$$

Но

$$\sum_{i=1}^{k}\alpha'_i x'_i = \sum_{i=1}^{k+1}\alpha_i x_i$$

и

$$\alpha'_k f(x+k') \leq \alpha_k f(x_k) + \alpha_{k+1} f(x_{k+1}).$$

Подставив эти выражения в (4), получим неравенство Иенсена (3).

Легко проверяемый признак выпуклости содержит следующая теорема.

Теорема 1. *Для того чтобы функция $f(x)$, дважды дифференцируемая на интервале (a,b), была выпуклой на этом интервале, необходимо и достаточно, чтобы $f''(x) \geq 0$ для всех $x \in (a,b)$.*

Необходимость. Предположим, что функция $f(x)$ выпукла на (a,b). Для любого $x \in (a,b)$ и любого h, такого, что $x \pm h \in (a,b)$, положим $x_1 = x+h$, $x_2 = x-h$, $\alpha = \dfrac{1}{2}$. Тогда равенство (1) примет вид

$$f(x+h) + f(x-h) - 2f(x) \geq 0. \tag{5}$$

Но

$$\begin{aligned} f(x+h) + f(x-h) - 2f(x) &= [f(x+h) - f(x)] - [f(x) - f(x-h)] = \\ &= f'(x+\theta_1 h)h - -f'(x-\theta_2 h)h] = \\ &= h[f'(x+\theta_1 h) - f(x)] + h[f'(x) - f'(x-\theta_2 h)] = \\ &= h^2 \left\{ \frac{f'(x+\theta_1 h) - f(x)}{h} + \frac{f'(x) - f'(x-\theta_2 h)}{h} \right\}. \end{aligned}$$

Если предположить, что $f''(x) < 0$, то при достаточно малом h оба слагаемые, стоящие в квадратных скобках, будут отрицательны, следовательно,

$$f(x+h) + f(x-h) - 2f(x) < 0,$$

что, согласно (5), невозможно.

Достаточность. Предположим, что $f''(x) \geq 0$ всюду на (a,b). Пусть x_1 и x_2 — произвольные точки этого отрезка, $0 \leq \alpha \leq 1$ и $x = (1-\alpha)x_1 + \alpha x_2$.

По формуле Тейлора,

$$f(x_1) = f(x) + (x_1 - x)f'(x) + \frac{1}{2}(x_1 - x)^2 f''(\xi_1), \tag{6}$$

где ξ_1 лежит между x_1 и x. Аналогично

$$f(x_2) = f(x) + (x_2 - x)f'(x) + \frac{1}{2}(x_2 - x)^2 f''(\xi_2), \tag{7}$$

где ξ_2 лежит между x_2 и x. Умножив равенство (6) на $(1-\alpha)$, а равенство (7) на α и затеи сложив их, получим:

$$(1-\alpha)f(x_1) + \alpha f(x_2) = f(x) + \frac{1}{2}[(1-\alpha)(x_1 - x)^2 f''(\xi_1) + \alpha(x_2 - x)^2 f''(\xi_2)], \tag{8}$$

так как $(1-\alpha)(x_1 - x) + \alpha(x_2 - x) = x - x = 0$.

Второе слагаемое, стоящее в квадратных скобках в правой части равенства (8), неотрицательно. Поэтому

$$(1-\alpha)f(x_1)+\alpha f(x_2)=f(x)=f[(1-\alpha)x_1+\alpha x_2],$$

что требовалось доказать.

Мы определили выпуклую функцию исходя из взаимного расположения участков кривой, являющейся графиком функции, и хорд, стягивающих эти участки. Следующая теорема показывает, как расположен график дважды дифференцируемой функции по отношению к касательный к этому графику.

Теорема 2. *Пусть функция $f(x)$ — дважды дифференцируемая на (a,b). Для выпуклости $f(x)$ в этом интервале необходимо, а в случае непрерывности $f''(x)$ и достаточно, чтобы график $f(x)$ всеми точками лежал не ниже касательной к кривой $y=f(x)$, проведенной в точке $(x_0,f(x_0))$ при любом значении $x_0\in(a,b)$* (рис. 27).

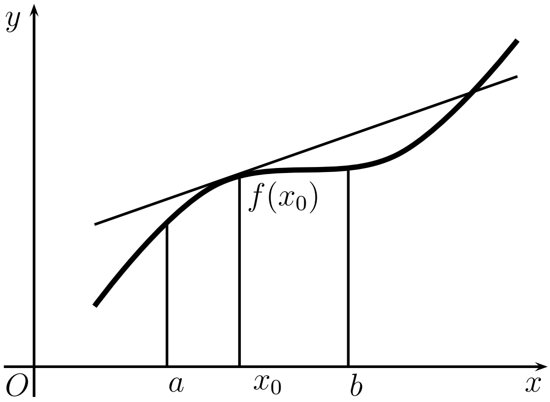

Рис. 27

Необходимость. Уравнение касательной к кривой $y=f(x)$ в точке $(x_0,f(x_0))$ имеет вид

$$y=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0).$$

Поэтому для разности η ординат кривой к касательной, имеющих одну и ту же абсциссу, получим:

$$\eta=f(x)-f(x_0)-f'(x_0)(x-x_0).$$

По формуле Тейлора, правую часть этого равенства можно заменить выражением $\frac{1}{2}f''(\xi)(x-x_0)^2$, где ξ лежит между x_0 и x. Тогда

$$\eta=\frac{1}{2}f''(\xi)(x-x_0)^2.$$

Ясно, что если функция $f(x)$ выпукла на (a,b), а следовательно, $f''(\xi)\geq 0$ для любого $\xi\in(a,b)$, то $\eta\geq 0$, и необходимость доказана.

Достаточность. Предположи, что $f''(x_0)<0$ в некоторой точке $x_0\in(a,b)$. В силу непрерывности второй производной $f''(x)<0$ в некоторой окрестности $(x_0-\delta,x_0+\delta)$ точки x_0. Для разности η ординат кривой $y=f(x)$ и касательной $y=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$ в точке $x\in(x_0-\delta,x_0+\delta)$ будем иметь:

$$\eta=\frac{1}{2}f''(\xi)(x-x_0)^2<0, \qquad (9)$$

так как точка ξ лежит между x и x_0 и, следовательно, попадает в окрестность $(x_0-\delta, x_0+\delta)$. Но неравенство (9) противоречит предположению о расположении графика $y=f(x)$ над карательной. Таким образок, достаточность также доказана.

Теоремы 1 и 2 характеризуют случай нестрогой выпуклости. Предлагаем читателю проследить, как изменяются формулировки и доказательства этих теорем для случая строгой выпуклости, а также нестрогой и строгой вогнутости.

Пусть функция $f(x)$ определена и непрерывна на промежутке X.

Определение. Точка $x_0 \in X$ называется *точкой перегиба* функции $f(x)$, если существует такое число $\delta > 0$, что в интервале $(x_0-\delta, x_0)$ функция $f(x)$ выпукла (вогнута), а в интервале $(x_0, x_0+\delta)$ — вогнута (выпукла).

Легко привести условия, характеризующие точки перегиба.

Теорема 3. *Пусть x_0 — точка перегиба функции $f(x)$. Если в точке x_0 существует непрерывная вторая производная $f''(x_0)$, то необходимо, чтобы $f''(x_0) = 0$.*

Доказательство. Допустил противное, т.е. что в точке x_0, являющейся точкой перегиба, $f''(x_0) \neq 0$. Будем считать для определенности, что

$$f''(x_0) > 0. \tag{10}$$

По формуле Тейлора с остаточным членом в форме Пеано,

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x-x_0)^2 + o((x-x_0)^2).$$

Разность между ординатами кривой и касательной о одинаковыми абсциссами есть

$$\eta = \frac{f''(x_0)}{2}(x-x_0)^2 + o((x-x_0)^2). \tag{11}$$

Знак величины η для x, достаточно близких к x_0, зависит лишь от знака первого слагаемото правой части формулы (11). Поэтому существует окрестность $(x_0-\delta, x_0+\delta)$ точки x_0, такая, что для любого $x \in (x_0-\delta, x_0+\delta)$

$$\operatorname{sign}\eta = \operatorname{sign}\left\{\frac{f''(x_0)}{2}(x-x_0)^2\right\}.$$

Следовательно, в силу условия (10), $\eta > 0$ для всех $x \in (x_0-\delta, x_0+\delta)$, и, по теореме 1, функция $f(x)$ выпукла в интервале $(x_0-\delta, x_0+\delta)$, что противоречит условию. Теорема доказана.

Равенство $f''(x_0)$, будучи необходимым условием точки перегиба, не является достаточным. Например, функция $y = x^4$ имеет в точке $x_0 = 0$ вторую производную, равную нулю. Однако эта функция выпукла на $(-\infty, \infty)$.

Легко сформулировать необходимые и достаточные условия, характеризующие точку перегиба функции.

Теорема 4. *Пусть функция $f(x)$ определена и имеет непрерывную вторую производную $f''(x)$ в некоторой окрестности точки x_0. Для того чтобы точка x_0 была точкой перегиба функций $f(x)$, необходимо и достаточно, чтобы:*

1°) $f''(x_0) = 0$;

2°) $f''(x)$ *изменяла знак при переходе через точку* x_0, *т.е. нашлось бы число* $\delta > 0$, *такое, что* $f''(x) > 0$ *(*< 0*) при* $x \in (x_0 - \delta, x_0)$ *и* $f''(x) < 0$ *(*> 0*) при* $x \in (x_0, x_0 + \delta)$.

Доказательство теоремы 4 очевидно.

Покажем, как находить локальные экстремумы и точки перегиба функции с помощью формулы Тейлора.

Предположим, что функция $f(x)$ дифференцируема в интервале (a, b) необходимое число раз, и допустим, что в точке $x_0 \in (a, b)$

$$f'(x_0) = f''(x_0) = \ldots = f^{(k-1)}(x_0) = 0, \qquad k > 1,$$

но $f^{(k)}(x_0) \neq 0$. Используя формулу Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа, получим:

$$f(x_0 + h) = f(x_0) = \frac{h^k}{k!} f^{(k)}(x_0 + \theta h), \qquad 0 < \theta < 1. \tag{12}$$

Пусть k — четное число ($k = 2n$). Тогда первый множитель в правой части равенства (12) положителен при всех допустимых h. В силу дифференцируемости, а значат, и непрерывности $f^{(k)}(x)$, второй множитель этого равенства при всех h, достаточно малых по модулю, имеет знак, совпадающий со знаком $f^{(k)}(x_0)$. Поэтому

$$f(x_0 + h) = f(x_0) > 0, \quad \text{если} \quad f^{(k)}(x_0) > 0, \tag{13}$$

и $f(x)$ имеет в точке x_0 минимум:

$$f(x_0 + h) = f(x_0) < 0, \quad \text{если} \quad f^{(k)}(x_0) < 0,$$

и $f(x)$ имеет в точке x_0 максимум.

Перегиба в точке x_0 нет.

Пусть теперь k — нечетное число ($k = 2n + 1$). Производная $f^{(k)}(x_0 + \theta h)$ при всех h, достаточно малых по модулю, по-прежнему сохраняет знак, совпадающий со знаком $f^{(k)}(x_0)$, но второй множитель при замене h на $(-h)$ изменяет знак. Экстремума в точке x_0 нет.

В то же время в этом случае $f''(x_0) = 0$, и разложение в окрестности точки $f''(x)$ по формуле Тейлора, дает

$$f''(x_0 + h) - f''(x_0) = \frac{h^{2n+1}}{(2n + 1)!} f^{(2n+1)}(x_0 + \theta h),$$

откуда следует, что при переходе через точку x_0 вторая производная $f''(x)$ меняет знак, следовательно, x_0 — точка перегиба функции $f(x)$.

§ 4. Бесконечные ветви и асимптоты кривых. Построение графиков функций

Пусть кривая L определена уравнением $y = f(x)$, где функция $f(x)$ задана на некотором множестве X, и Y — множество значений этой функции.

Определение 1. Кривая L имеет *бесконечные ветви*, если, по крайней мере, одно из множеств X или Y — неограничено.

Рассмотрим функцию

$$\rho(x) = \sqrt{x^2 + [f(x)]^2}, \qquad x \in X.$$

Для того чтобы кривая L имела бесконечные ветви, необходимо и достаточно, чтобы функция $\rho(x)$ на множестве X была неограниченной.

Пусть функция $f(x)$ определена в промежутке X, за исключением, может быть, точки x_0 этого промежутка, являющейся предельной для множества X.

Определение 2. Прямая $x = x_0$ называется *вертикальной асимптотой* кривой L, заданной уравнением $y = f(x)$, если $f(x) \to \infty$ при $x \to x_0$.

В том случае, когда $f(x)$ определена в точке x_0, абсцисса x точек вертикальной асимптоты является точкой разрыва с бесконечным скачком функции $f(x)$.

Предположим, что функция $f(x)$ задана на неограниченном промежутке X.

Определение 3. Прямая $y = kx + b$ называется *наклонной асимптотой* кривой L с уравнением $y = f(x)$, если $f(x) - (kx + b) \to 0$ при $x \to \infty$.

Легко найти угловой коэффициент k и начальную ординату b наклонной асимптоты.

По определению наклонной асимптоты

$$\lim_{x\to\infty} [f(x) - (kx + b)] = \lim_{x\to\infty} x\left[\frac{f(x)}{x} - k - \frac{b}{x}\right] = 0.$$

Это равенство возможно, лишь если $\lim\limits_{x\to\infty} \left[\dfrac{f(x)}{x} - k - \dfrac{b}{x}\right] = 0$, откуда $k = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{x}$. Подставив найденное значение k в равенство

$$\lim_{x\to\infty} [f(x) - kx - b] = 0,$$

получим:

$$b = \lim_{x\to\infty} [f(x) - kx].$$

Взаимное расположение кривой и асимптоты характеризуется тем, что при $\rho(x) \to \infty$, т.е. при удалении вдоль бесконечной ветви кривой, расстояние $d(M)$ от точки $M(x, f(x))$ на кривой до асимптоты стремится к нулю. В самом деле, если кривая имеет вертикальную асимптоту $x = x_0$, то $d = |x - x_0|$ и стремится к нуля при $x \to x_0$. Если есть наклонная асимптота $y = kx+b$, то $d = |[f(x)-(kx+b)]\cos\alpha|$, где α — угол между асимптотой и положительным направлением оси Ox, и также стремится к нулю при $x \to \infty$ (рис. 28).

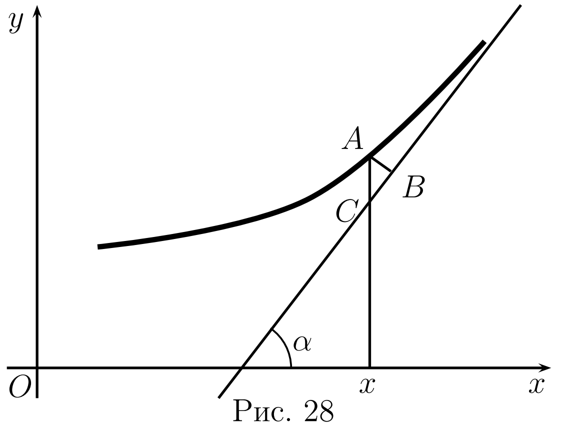

Рис. 28

Изложенные способы нахождения экстремумов функций, промежутков возрастания, убывания, выпуклости, вогнутости, асимптот и т. д. поэволяют провести достаточно полное исследование функции $f(x)$ и построить график L этой функции.

Приведем схему такого исследования.

Пусть функция $f(x)$ задана на множестве X. Допустим, что $f(x)$ непрерывна и имеет конечные производные $f'(x)$, $f''(x)$ на X за исключением отдельных точек, в которых эти условия не выполняются. Методами дифференциального исчисления легко установить ряд характерных точек кривой L, которые дают возможность судить о ее форме.

Для построения графика функции $f(x)$ поступают следующий образом.

1. Определяют точки пересечения кривой L с осями координат.

2. Исследуют функцию $f(x)$ на непрерывность.

3. Изучают поведение функции при стремлении независимого переменного к точкам разрыва и граничный точкам области определения (включая точки $x = \pm\infty$ в случае, когда X — неограниченное множество). Это позволяет найти интервалы знакопостоянства функции и построить асимптоты для кривой L (если они существуют).

4. Исследуют общий характер поведения кривой L: наличие осей и центров симметрии, периодичность.

5. Находят стационарные точки функция $f(x)$ и точки, в которых производная $f'(x)$ не существует или бесконечна.

6. Находят точки экстремума и значения функции в них.

7. Определяют интервалы монотонности функции.

8. Определяют точки перегиба кривой L, и выделяют промежутки, на которых кривая L, выпукла или вогнута.

Перечисленных операций во многих случаях вполне достаточно для построения графика функции $y = f(x)$. Для, большей точности на отдельных промежутках области определения полезно провести «точечные» построения, вычислив значения функции для ряда значений аргумента.

Глава VII

НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

§ 1. Постановка проблемы, определения

В приложениях математики важное значение имеют задачи, решение которых требует введения операции, обратной дифференцированию. Приведем простейшие примеры таких задач: 1) исходя из закона изменения скорости $v(t)$ прямолинейного движения, определить путь $s(t)$, пройденный к моменту времени t движущейся точкой; 2) зная закон изменения силы электрического тока в некотором сечении проводника, найти количество электричества, протекшего через это сечение за время t.

Эти две задачи являются частными случаями следующей общей проблемы.

Пусть A — множество всех дифференцируемых на промежутке X функций, B — множество всех определенных на X функций, каждая из которых является производной некоторой функции $F \in A$, D — операция дифференцирования. Тогда, если $f \in B$ — производная функции $F \in A$, то

$$DF = f. \tag{1}$$

В связи с равенством (1) могут быть поставлены следующие задачи: а) по известной функции $F \in A$ определить соответствующую ей Функцию $f \in B$ так, чтобы $DF = f$; б) по заданной функции $f \in B$ найти все такие функции $F \in A$, для которых $DF = f$.

Задача а), как известно, решается однозначно о помощью операции дифференцирования функции F. Задача б), очевидно, является обратной по отношению к задаче а) и решается при помощи операции, называемой интегрированием функций.

Определение. Дифференцируемая на промежутке X функция $F(x)$ называется *первообразной* функции $f(x)$, если

$$DF = f$$

или

$$dF(x) = f(x)\,dx. \tag{1'}$$

Легко видеть, что вместе с функцией $F(x)$ каждая функция вида $F(x) + C$, где C — некоторая константа, также является первообразной функции $f(x)$, так как

$$D(F + C) = DF + DC = DF = f.$$

Пусть F и Φ — две какие-нибудь первообразные функции f, т.е. $DF = f$ и $D\Phi = f$. Рассмотрим новую функцию Ψ, положив $\Psi = \Phi - F$. Очевидно, что $\Psi \in A$ и $D\Psi = D\Phi - DF = f - f = 0$, откуда следует, что $\Psi = C = \text{const}$ на X, т.е.

$$\Phi(x) = F(x) + C.$$

Таким образом, если $F(x)$ — какая-нибудь первообразная функции $f(x)$ на X, то все функции вида $F(x) + C$, где C может быть любой константой, и только такие функции являются первообразными функции $f(x)$.

Из сказанного следует, что операция нахождения первообразной позволяет решить задачу б) и является неоднозначной. Условимся называть две функции множества A эквивалентными, если разность между ними является постоянной на функцией. Распределим все элементы множества A на классы, отнеся к классу, содержащему функция $F(x)$, все функции из A, эквивалентные $F(x)$, т.е. все функций вида $F(x) + C$, $-\infty < C < \infty$. Тогда выражение $F(x) + C$ можно будет трактовать, с одной стороны, как обозначение всего класса, содержащего $F(x)$, с другой — как обозначение произвольного представителя этого класса. Выражение $F(x) + C$, являющееся общим выражением первообразной функции $f(x)$, называется *неопределенным интегралом* от функции $f(x)$ и обозначается

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C. \tag{2}$$

В этом равенстве $f(x)$ называется *подынтегральной функцией*, а $f(x)\,dx$ — *подынтегральным выражением.*

Операцию отыскания неопределенного интеграла для функции $f(x)$ называют *интегрированием* этой функции. Слово «неопределенный» отражает произвольность постоянной C. Каждому конкретному выбору константы C соответствует конкретная первообразная функции $f(x)$.

Ясно, что нахождение пути, пройденного прямолинейно движущейся точкой, по известной скорости движения требует отыскания конкретной первообразной.

Отметим, наконец, что операция дифференцирования и обратная ей операция интегрирования устанавливают взаимнооднозначное (биективное) соответствие между множеством B и множеством классов эквивалентных элементов A. Связь между операциями дифференцирования и интегрирования, отмеченную формулами (1) и (2), можно выразить также равенством

$$D^{-1}f = \int f(x)\,dx = F(x) + C. \tag{3}$$

§ 2. Свойства неопределенного интеграла. Таблица простейших интегралов

Отметим прежде всего следующие свойства неопределенного интеграла:

1.

$$d\int f(x)\,dx = f(x)\,dx, \tag{1}$$

2.

$$\int d[F(x)] = \int F'(x)\,dx = F(x) + C. \tag{2}$$

Эти свойства выражают взаимную обратность операций дифференцирования и интегрирования и вытекают из определения неопределенного интеграла.

В следующих двух свойствах равенство между неопределенными интегралами понимается как равенство между ранее указанными классами элементов множества A, т.е. между функциями с точностью до постоянного слагаемого.

3. Если $f \in B$ и λ — произвольная константа, то

$$\int \lambda f(x)\,dx = \lambda \int f(x)\,dx. \tag{3}$$

Это равенство выражает *свойство однородности* неопределенного интеграла. Согласно этому свойству, постоянный множитель можно выносить из-под знака интеграла (и вносить под знак интеграла). Доказательство равенства (3) вытекает из легко проверяемого совпадения производных обеих частей этого равенства, откуда следует совпадение функций, стоящих в правой и левой частях (3) со точностью до постоянного слагаемого.

4. Если $f \in B$, $\varphi \in B$, то $f + \varphi \in B$ и

$$\int [f(x) + \varphi(x)]\,dx = \int f(x)\,dx + \int \varphi(x)\,dx. \tag{4}$$

Проверка этого свойства, проводимая аналогично проверке свойства 3, предоставляется читателю.

Свойство, выраженное равенством (4), называется *свойством аддитивности* операции интегрирования. Свойства 3 и 4 называются *правилами интегрирования.* Они могут быть объединены в одно *свойство линейности* операции интегрирования, выражаемое равенством

$$\int [\lambda f(x) + \mu\varphi(x)]\,dx = \lambda \int f(x)\,dx + \mu \int \varphi(x)\,dx, \tag{5}$$

где λ и μ — произвольные константы.

Обращение формул для производных элементарных функций (§ 2, гл. IV) позволяет получить следующую таблицу интегралов простейших элементарных: функций:

$$\int 0\,dx = C, \tag{6}$$

$$\int x^\alpha\,dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C \qquad (\alpha \neq -1), \tag{7}$$

$$\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C, \tag{8}$$

$$\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a} + C \qquad (a > 0,\ a \neq 1), \tag{9}$$

$$\int e^x\,dx = e^x + C, \tag{10}$$

$$\int \sin x\,dx = -\cos x + C, \tag{11}$$

$$\int \cos x\,dx = \sin x + C, \tag{12}$$

$$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C, \tag{13}$$

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C, \tag{14}$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C, \tag{15}$$

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x + C. \tag{16}$$

По поводу формулы (8) заменив, что при $x > 0$, $|x| = x$ и $\dfrac{dx}{x} = d\ln|x| = d\ln x$, а при $x < 0$, $-x = |x|$

$$\frac{d(-x)}{-x} = \frac{dx}{x} = \frac{d|x|}{|x|} = d\ln|x|,$$

откуда следует ее справедливость.

Формулы (6)–(16) с учетом свойства линейности операции интегрирования дают возможность вычислять неопределенные интегралы от некоторых линейных комбинаций элементарных функций, т.е. выражать такой интеграл в виде конечной комбинации элементарных функций, например: $\int (x + 3\sin x)\,dx = \dfrac{x^2}{2} - 3\cos x + C$.

Используя формулу (7) и равенство (5), можно найти значение неопределенного интеграла от произвольного многочлена.

Заметим, что при записи результата интегрирования принято объединять все произвольные постоянные слагаемые, заменяя их сумму одной константой.

§ 3. Основные метода интегрирования

Метод замены переменной. Правило дифференцирования сложной функции $\Phi \circ \Psi(x) = \Phi[\Psi(x)]$, согласно которому $d\Phi[\Psi(x)] = \Phi'[\Psi(x)]\, d\Psi(x)$, позволяет находить интегралы от функций, не вошедших в таблицу простейших неопределенных интегралов (6)–(16). В самом деле, предположим, что подынтегральное выражение допускает представление в виде

$$f(x)\, dx = \Phi'[\Psi(x)]\, d\Psi(x) = d\{\Phi[\Psi(x)]\}, \tag{1}$$

где Φ и Ψ — некоторые вспомогательные функции. Тогда, согласно определению интеграла,

$$\int f(x)\, dx = \Phi[\Psi(x)] + C. \tag{2}$$

Обозначив внутреннюю функцию в выражении сложной функции через t, т.е. положив $t = \Psi(x)$, равенство (i) можно переписать следующим образом:

$$f(x)\, dx = \Phi'(t)\, dt. \tag{3}$$

В этом случае равенство (2) примет вид

$$\int f(x)\, dx = \int \Phi'(t)\, dt = \Phi(t) + C = \Phi[\Psi(x)] + C. \tag{4}$$

Замену $t = \Psi(x)$ можно рассматривать как переход к новой независимой переменной, поэтому метод интегрирования, в котором используется такой переход, называется *методом замены переменной.*

Приведем несколько примеров вычисления неопределенных интегралов с использованием метода замены переменной.

Примеры.

1. В интеграле $\int \cos(ax+b)\, dx$, $-\infty < x < \infty$, положим $ax + b = t$, следовательно, $dx = \dfrac{dt}{a}$. Тогда

$$\int \cos(ax+b)\, dx = \frac{1}{a}\int \cos t\, dt = \frac{1}{a}\sin t + C = \frac{1}{a}\sin(ax+b) + C.$$

2. Рассмотрим $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} = \int \frac{dx}{x^2\sqrt{1-\dfrac{1}{x^2}}}$, $|x| > 1$. Если $x = \dfrac{1}{t}$, и, значит, $\dfrac{dx}{x^2} = -dt$, то

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} = -\int \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = -\arcsin t + C = -\arcsin\frac{1}{x} + C.$$

Замену переменной под знаком неопределенного интеграла часто проводят иначе. Вместо того, чтобы некоторую функцию от x принимать за новую переменную t, рассматривают x как дифференцируемую функцию новой переменной z, $x = \varphi(z)$, и тогда формула замены переменной принимает следующий вид:

$$\int f(x)\, dx = \int f[\varphi(z)]\varphi'(z)\, dz. \tag{5}$$

При этом предполагается, что z из равенства $x = \varphi(z)$ можно выразить как функцию от x, чтобы после вычисления интеграла в правой части равенства (5) вернуться к переменной x.

Удачный выбор функции $\varphi(z)$ может упростить вычисление интеграла.

Примеры.

3. Для вычисления интеграла $\int \sqrt{1-x^2}\,dx$, $|x| \le 1$, примем $x = \sin z$. Тогда $dx = \cos z\,dz$, и

$$\int \sqrt{1-x^2}\,dx = \int \sqrt{1-\sin^2 z}\cos z\,dz = \int cos^2 z\,dz =$$

$$= \int \frac{1+\cos 2z}{2}\,dz = \frac{1}{2}\int dz + \frac{1}{2}\int \cos 2z\,dz.$$

В выражении для последнего интеграла положим $2z = t$, $dz = \dfrac{dt}{2}$. В этом случае

$$\int \sqrt{1-x^2}\,dx = \frac{1}{2}z + \frac{1}{4}\int \cos t\,dt = \frac{1}{2}z + \frac{1}{4}\sin t + C = \frac{1}{2}z + \frac{1}{4}\sin 2z + C.$$

?

Если $x = \sin z$, то $z = \arcsin x$, поэтому

$$\int \sqrt{1-x^2}\,dx = \frac{1}{2}\arcsin x + \frac{1}{4}\sin(2\arcsin x) + C = \frac{1}{2}\arcsin x + +\frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2} + C.$$

?

Замечание. В последующих примерах не будем указывать промежуток X изменения аргумента, принимая за X ту область, в которой подынтегральная функция имеет смысл, а если необходимо, то и дифференцируема.

Метод интегрирования по частям. Возьмем равенство

$$d(u\cdot v) = u\,dv + v\,du,$$

в котором $u, v \in A$. Проинтегрировав обе части этого равенства, получим:

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du. \tag{6}$$

Это равенство называется *формулой интегрирования по частям.* При его применении подынтегральное выражение $f(x)\,dx$ в интеграле представляют в виде $u\,dv$, где u и v — некоторые функции множества A, подбираемые таким образом, чтобы интеграл от $v\,du$ оказался для вычисления проще, чем интеграл от $u\,dv$. Иногда формулу интегрирования по частям приходится применять и для вычисления интеграла, стоящего в правой части равенства (6), т.е. многократно.

Примеры.

4. В интеграле $\int x^2 e^x\,dx$, положив $x^2 = u$, $e^x\,dx = dv$, по формуле интегрирования по частям получим:

$$\int x^2 e^x\,dx = x^2 e^x - \int x e^x\,dx.$$

Снова применим интегрирование по частям, в результате чего найдем:

$$\int x^2 e^x\,dx = x^2 e^x - 2\left(xe^x - \int e^x\,dx\right) = x^2 e^x - 2xe^x + 2e^x + C.$$

Применяя метод интегрирования по частям, приходится по dv восстанавливать v, которое определяется с точностью до постоянного слагаемого. Это постоянное слагаемое можно считать равным нулю. В самом деле, если $v = v_0 + C$, то

$$u(v_0 + C) - \int (v_0 + C)\,du = uv_0 + Cu - \int v_0\,dx - C\int C\,dx =$$

$$= uv_0 + Cu - \int v_0\,du - c(u + C_1) = uv_0 - \int v_0\,du.$$

Мы отбросила CC_1 потому, что $\int v_0\,du$ уже содержит постоянное слагаемое.

§ 4. Интегрирование рациональных функций

Способы интегрирования, рассмотренные в § 2 и 3 гл. VII, применимы к довольно обширному классу функций. Однако существуют простые комбинации элементарных функций, например $\dfrac{x}{e^x}$, $\dfrac{1}{\ln x}$, $\dfrac{x^n}{\sin x}$ $(n \neq 0)$ и др., первообразные которых не могут быть выражены в виде конечной комбинации элементарных функций. Это обстоятельство требует более подробного рассмотрения таких классов функций, интегралы от которых могут быть выражены через элементарные функции. Простейшим и весьма важным классом таких функций являются рациональные функции, т.е. функции, которые могут быть представлены в виде отношения двух многочленов с вещественными коэффициентами.

Приведем без докаэательств некоторые факты из алгебры[20]. Пусть

$$R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} \tag{1}$$

— рациональная функция. В дальнейшем можно предполагать без ограничения общности, что многочлены $P(x)$ и $Q(x)$ не имеют общих множителей (дробь несократима).

Если степень многочлена $P(x)$ ниже степени многочлена $Q(x)$, рациональная функция называется *правильной рациональной дробью* (короче — *правильной дробью*). Легко проверить, что сумма и произведение правильных дробей являются правильными дробями.

---

[20] Подробное изложение приводимых фактов содержится, например, в книге А.Г. Куроша: «Курс высшей алгебры». М., 1968.

Если степень многочлена $P(x)$ в представлении (1) не ниже степени многочлена $Q(x)$, рациональная функция $R(x)$ представляет собой *неправильную дробь*. Для каждой неправильной дроби существует представление в виде

$$R(x) = P_0(x) + \frac{P_1(x)}{Q(x)},$$

где $P_0(x)$ — некоторый многочлен, а дробь $\dfrac{P_1(x)}{Q(x)}$ — правильная. Так как

$$\int R(x)\,dx = \int P_0(x)\,dx + \int \frac{P_1(x)}{Q(x)}\,dx,$$

а интеграл от многочлена $P_0(x)$ легко вычислить, задача интегрирования рациональной функции $R(x)$ сводятся к иитегрированию правильной дроби $\dfrac{P_1(x)}{Q(x)}$. Поэтому, не ограничивая общности, предположим, что исходная рациональная функция $R(x)$ является правильной дробью.

Среди правильных дробей весьма важную роль играют так называемые *простые дроби*, т.е. рациональные функции вида

$$\frac{A}{x-\alpha}, \tag{I}$$

$$\frac{A}{(x-\alpha)^k} \qquad (k > 1), \tag{II}$$

$$\frac{Bx+C}{x^2+px+q} \qquad (p^2-4q<0), \tag{III}$$

$$\frac{Bx+C}{(x^2+px+q)^l} \qquad (p^2-4q<0,\ l>1). \tag{IV}$$

Как известно из алгебры, каждый многочлен с вещественными коэффициентами может быть разложен на множители вида $x-\alpha$, соответствующие вещественным корням многочлена $Q(x)$, и вида x^2+px+q, (где $p^2-4q<0$) — соответствующие комплексным корням многочлена. Учитывая возможную кратность корней, знаменатель $Q(x)$ дроби $R(x)$ можно представить в форме

$$Q(x) = b_0(x-\alpha_1)^{k_1}\cdots(x^2+p_1x+q_1)^{l_1}\cdots\ , \tag{2}$$

где $k_1 \geq 1, \ldots, l_1 \geq 1, \ldots$.

Такому представлению $Q(x)$ соответствует разложение $R(x)$ на простые дроби вида

$$\begin{aligned} R(x) &= \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_1^1}{x-\alpha_1} + \frac{A_2^1}{(x-\alpha_1)^2} + \ldots + \frac{A_{k_1}^1}{(x-\alpha_1)^{k_1}} + \\ &+ \frac{A_1^2}{x-\alpha_2} + \frac{A_2^2}{(x-\alpha_2)^2} + \ldots + \frac{A_{k_2}^2}{(x-\alpha_2)^{k_2}} + \ldots + \\ &+ \frac{B_1^1x+C_1^1}{x^2+p_1x+q_1} + \frac{B_2^1x+C_2^1}{(x^2+p_1x+q_1)^2} + \ldots + \frac{B_{l_1}^1x+C_{l_1}^1}{(x^2+p_1x+q_1)^{l_1}} + \\ &+ \frac{B_1^2x+C_1^2}{x^2+p_2x+q_2} + \frac{B_2^2x+C_2^2}{(x^2+p_2x+q_2)^2} + \ldots + \frac{B_{l_2}^2x+C_{l_2}^2}{(x^2+p_2x+q_2)^{l_2}} + \ldots\ . \end{aligned} \tag{3}$$

В равенстве (3) каждому множителю $(x-\alpha_\nu)^{k_\nu}$ разложения $Q(x)$ соответствует группа простых дробей

$$\frac{A_1^\nu}{x-\alpha_\nu}+\frac{A_2^\nu}{(x-\alpha_\nu)^2}+\ldots+\frac{A_{k_\nu}^\nu}{(x-\alpha_\nu)^{k_\nu}}$$

видов (I) и (II), а каждому множителю $x^2+p_\mu x+q_\mu$ разложения $Q(x)$ — груша простых дробей

$$\frac{B_1^\mu x+C_1^\mu}{x^2+p_\mu x+q_\mu}+\frac{B_2^\mu x+C_2^\mu}{(x^2+p_\mu x+q_\mu)^2}+\ldots+\frac{B_{l_\mu}^\mu x+C_{l_\mu}^\mu}{(x^2+p_\mu x+q_\mu)^{l_\mu}}$$

видов (III) и(IV). Коэффициенты этого разложения определяются единственным образом.

Для практического отыскания коэффициентов разложения (3), если известно представление (3) многочлена $Q(x)$, используется так называемый *метод неопределенных коэффициентов*. Правая часть разложения (3) выписывается в общем виде с буквенными, неизвестными («неопределенными») коэффициентами. Затем дроби в правой части равенства (3) приводятся к общему знаменателю. В результате получается правильная дробь со знаменателем $Q(x)$ и некоторым многочленом в числителе, коэффициенты которого линейно выражаются через неопределенные коэффициенты разложения (3).

Так как знаменатель в обеих частях получившегося равенства один и тот же, а именно $Q(x)$, то равны числители, что, в свою очередь, означает равенство коэффициентов при одинаковых степенях x у многочленов, стоящих в числителе. Приравнивая коэффициенты, стоящие при одинаковых степенях x этих многочленов, получаем систему уравнений, линейную относительно неизвестных коэффициентов. Эта система, как показывается в алгебре, однозначно разрешима.

Примеры.

1. Проведем разложение правильной дроби на простые методом неопределенных коэффициентов. Положим

$$\frac{3x+2}{(x-1)^2(x^2+1)}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{(x-1)^2}+\frac{Cx+D}{x^2+1}.$$

Отсюда

$$3x+2=A(x-1)(x^2+1)+B(x^2+1)+(Cx+D)(x-1)^2.$$

Приравняв коэффициенты при одинаковых степенях x, получим

$$\begin{gathered}A+C=0,\\ -A+B-2C+D=0,\\ A+C-2D=3,\\ -A+B+D=2.\end{gathered}$$

Решив эту систему, найдем: $A=-1$, $B=\dfrac{5}{2}$, $C=1$, $D=-\dfrac{3}{2}$, и, следовательно,

$$\frac{3x+2}{(x-1)^2(x^2+1)}=-\frac{1}{x-1}+\frac{5}{2(x-1)^2}+\frac{2x-3}{2(x^2+1)}.$$

В соответствии с изложенным интегрирование правильной дроби сводится к интегрированию простых дробей видов (I), (II), (III), (IV). Интегралы от простых дробей (I) и (II) являются табличными —

$$\int \frac{A}{x-\alpha}\,dx = A\ln(x-\alpha)+C$$

и

$$\int \frac{A}{(x-\alpha)^k}\,dx = -\frac{A}{k-1}\,\frac{1}{(x-\alpha)^{k-1}}+C \qquad (k>1),$$

соответственно.

Для вычисления интеграла от дроби (III) преобразуем вначале трехчлен x^2+px+q к виду $\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+q-\frac{p^2}{4}$ и положим $x+\frac{p}{1}2=t$, $q-\frac{p^2}{4}=a^2$. Тогда

$$\int \frac{Ax+B}{x^2+px+q}\,dx = \frac{A}{2}\int\frac{2t\,dt}{t^2+a^2}+\left(B-\frac{Ap}{2}\right)\int\frac{dt}{t^2+a^2}\,dt =$$

$$=\frac{A}{2}\ln(t^2+a^2)+\frac{1}{a}\left(B-\frac{Ap}{2}\right)\operatorname{arctg}\frac{t}{a}+C=\frac{A}{2}\ln(x^2+px+q)+\frac{2B-Ap}{2a}\operatorname{arctg}\frac{2x+p}{2a}+C.$$

Наконец, для начисления интеграла от дроби (IV) воспользуемся предыдущими обозначениями и преобразуем его к виду

$$\int\frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^l}\,dx=\int\frac{A}{2}\int\frac{2t\,dt}{(t^2+a^2)^l}+\,dt+\left(B-\frac{Ap}{2}\right)\int\frac{dt}{(t^2+a^2)^l}\,dt=$$

$$=\frac{A}{2(1-l)}\cdot\frac{1}{(t^2+a^2)^{l-1}}+\left(B-\frac{Ap}{2}\right)\int\frac{dt}{(t^2+a^2)^l}\,dt.$$

Представив теперь интеграл

$$I_l=\int\frac{dt}{(t^2+a^2)^l}\,dx?$$

в форме

$$I_l=\frac{1}{a^2}\int\frac{(t^2+a^2)-t^2}{(t^2+a^2)^l}\,dt=\frac{1}{a^2}\,I_{l-1}--\frac{1}{2a^2}\int\frac{t\cdot 2t}{(t^2+a^2)^l}\,dt$$

и применив к интегралу $\int\frac{t\cdot 2t}{(t^2+a^2)^l}\,dx$ правило интегрирования по частям, получим равенство

$$I_l=\frac{1}{a^2}\,I_{l-1}-\frac{1}{2a^2}\left[\frac{1}{1-l}\cdot\frac{1}{(t^2+a^2)^{l-1}}-\frac{1}{l-1}\,I_{l-1}\right].$$

Из этого равенства следует так называемая рекуррентная формула:

$$I_l=\frac{1}{2a^2(l-1)}\cdot\frac{1}{(t^2+a^2)^{l-1}}+\frac{2l-3}{2a^2(l-1)}\,I_{l-1},$$

позволяющая последовательно определять выражения интегралов I_l для $l = 1, 2, 3, \ldots$, и вместе с тем находить выражение интеграла от дроби (IV).

В качестве примера применения только что изложенного метода рекомендуем читателю вычислить интеграл $\displaystyle\int \frac{x+1}{(x^2+x+1)^2}\,dx$.

Замечание. Отметим, что интегралы от видов (I) и (III) выражаются через трансцендентные функции (логарифмы и арктангенс), а интеграл от дроби вида (II) с точностью до постоянного слагаемого — дробью того же вида со знаменателем, показатель степени которого на единицу меньше показателя степени знаменателя интегрируемой дроби. Отметим также, чти в выражении интеграла от дроби (IV) содержится как рациональная, так и трансцендентная часть. При этом рациональная часть представляет собой сумму простых дробей (IV) и (III) со знаменателям, отличающимися лишь показателями степеней от знаменателя интегрируемой дроби.

Итак, мы установила, что каждая рациональная функция интегрируема в конечном виде, т.е. интегралы от нее выражаются через конечные комбинации элементарных функций.

Русский математик М.В. Остроградский предложил метод интегрирования рациональной функции, позволяющий определять рациональную часть результата, используя только алгебраические операции и дифференцирование. С помощью этого метода интегрирование произвольной правильной рациональной функции сводится к интегрированию правильной рациональной дроби, знаменатель которой не имеет кратных корней, т.е. к отысканию трансдендентной части интеграла. Обратимся к краткому изложению метода Остроградского. Как и ранее, будем считать, что знаменатель $Q(x)$ правильной дроби $R(x)$ представлен в виде

$$Q(x) = (x-\alpha_1)^{k_1}\cdots(x^2+p_1x+q_1)^{l_1}\cdots\ . \tag{4}$$

Положим

$$Q_1(x) = (x-\alpha_1)^{k_1-1}\cdots(x^2+p_1x+q_1)^{l_1-1}\cdots\ ,$$
$$Q_2(x) = (x-\alpha_1)\cdots(x^2+p_1x+q_1)\cdots\ .$$

Очевидно, что

$$Q(x) = Q_1(x)Q_2(x).$$

Из алгебры известно, что многочлен $Q_1(x)$ является общим наибольшим делителем многочленов $Q(x)$ и $Q'(x)$ и поэтому может быть найден, например, методом алгоритма Евклида, без знания корней многочлена $Q(x)$, т.е. разложения (4).

Из равенства (5) следует, что, найдя многочлен $Q_1(x)$, мы сможем определить многочлен $Q_2(x)$ делением $Q(x)$ на $Q_1(x)$.

Если теперь при интегрировании простых дробей в разложении (3) выделить выражения интегралов от дробей (II) и рациональные части выражений интегралов от дробей (IV), а дроби (I) и (III) разложения (3), а также дроби (III), получающиеся при интегрировании дробей (IV), объединить под общий знаком интеграла, то получим равенство

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)}\,dx = \frac{P_1(x)}{Q_1(x)} + \int \frac{P_2(x)}{Q_2(x)}\,dx, \tag{6}$$

называемое *формулой Остроградского*, в котором $\dfrac{P_1(x)}{Q_1(x)}$ и $\dfrac{P_2(x)}{Q_2(x)}$ — правильные дроби.

Для отыскания многочленов $P_1(x)$ и $P_2(x)$ можно воспользоваться методом неопределенных коэффициентов, записав в равенстве (6) эти многочлены с неопределенными буквенными коэффициентами, а затем продифференцировав обе части, равенства и сравнив коэффициенты при одинаковых степенях x у многочленов числителей обеих частей равенства.

Примеры.

2.

$$\int \frac{x^4-4x^3-7x^2+2x}{(x^3+x+1)^2}\,dx = -\frac{x^2-2x-2}{x^3+x+1}+C,$$

причем трансцендентная часть интеграла равна нулю. Рекомеидуем читателю провести вычисление этого интеграла по приведеной схеме.

Хотя изложенные методы интегрирования рациональных функций всегда приводят к цели (если решена алгебраическая задача разложения знаменателя дроби на множители), однако иногда проще вычислить интеграл с помощью искусственного приема.

Примеры.

3.

$$\int \frac{x(x^2+1)^3}{(x^4+2x^2+2)^2}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{(t+1)^3\,dt}{(t^2+2t+2)^2} = \frac{1}{4}\int (t+1)^2\,\frac{(2t+2)\,dt}{(t^2+2t+2)^2} =$$

$$= -\frac{1}{4}\,(t+1)^2\cdot\frac{1}{t^2+2t+2}+\frac{1}{4}\int\frac{(2t+2)\,dt}{t^2+2t+2} =$$

$$-\frac{(t+1)^2}{4(t^2+2t+2)}+\frac{1}{4}\ln(t^2+2t+2)+C = \frac{(x^2+1)^2}{4(x^4+2x^2+2)}+\frac{1}{4}\ln(x^4+2x^2+2)+C.$$

4.

$$\int \frac{x^4+1}{x^6+1}\,dx = \int \frac{x^4+x^2+1-x^2}{x^6+1}\,dx = \int\frac{dx}{x^2+1}+\int\frac{x^2\,dx}{x^6+1} =$$

$$= \operatorname{arctg} x + \frac{1}{2}\int\frac{3x^2\,dx}{(x^3)^2+1} = \operatorname{arctg} x+\frac{1}{3}\,\operatorname{arctg} x^3+C.$$

5.

$$\int \frac{5x^3+3x-1}{(x^3+3x+1)^3}\,dx = \int \frac{6x(x^2-1)-(x^3+3x+1)}{(x^3+3x+1)^3}\,dx =$$

$$= \int 2x\,\frac{3x^2+3}{(x^3+3x+1)^3}\,dx - \int\frac{dx}{(x^3+3x+1)^3} =$$

$$= -\frac{x}{(x^3+3x+1)^2}+\int\frac{dx}{(x^3+3x+1)^2}-\int\frac{dx}{(x^3+3x+1)^2} =$$

$$= -\frac{x}{(x^3+3x+1)^2}+C.$$

§ 5. Интегрирование некоторых выражений, содержащих радикалы от рациональных функций

Прежде чем говорить об интегрировании других классов функций, рассмотрим рациональные функции двух переменных.

Функции вида

$$P(x, y) = A_0(x)y^n + A_1(x)y^{n-1} + \ldots + A_{n-1}(x)y + A_n(x),$$

где каждая из функций

$$A_k(x) = a_0^{(k)}x^{n_k} + a_1^{(k)}x^{n_k-1} + \ldots + a_{n_k-1}^{(k)}x + a_{n_k}^{(k)} \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots, n),$$

является многочленом относительно x, называется *многочленом относительно переменных* x и y. Многочлен относительно x и y определен, очевидно, при всех значениях этих переменных. Если в выражении $P(x, y)$ перегруппировать члены, то его можно представить в форме

$$P(x, y) = B_0(y)x^m + B_1(y)x^{m-1} + \ldots + B_{m-1}(y)x + B_m(y),$$

где $B_0(y), B_1(y), \ldots, B_m(y)$ — многочлены, а также в виде суммы конечного числа членов вида $a_l^{(k)}x^l y^k$.

Функция двух переменных

$$R(x, y) = \frac{P(x, y)}{Q(x, y)}$$

являющаяся отношением многочленов $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ называется *рациональной функцией переменных* x и y. Эта функция, очевидно, определена при всех значениях переменных x и y, исключая, может быть, такие пары значений (x, y), при которых $Q(x, y)$. Заменив в $R(x, y)$ переменные x и y произвольными рациональными функциями вспомогательной переменной t: $x = x(t)$, $y = y(t)$, получим некоторую рациональную функцию $R_1(t) = R[x(t), y(t)]$.

Обратился теперь к интегрированию выражений вида

$$R(x, y)\,dx, \tag{1}$$

в которых $y = y(x)$ — некоторая специального вида функция, содержащая радикалы от рациональных функций переменной x. В рассматриваемых нами случаях окажется возможной такая замена переменной $x = x(t)$, в результате применения которой $R(x, y)\,dx$ преобразуется в выражение $R_1(t)\,dt$, где $R_1(t)$ — рациональная функция переменной t. Такая замена переменной называется *рационализацией* выражения (1). Поскольку подынтегральное выражение, полученное после рационализации интеграла $\displaystyle\int R(x, y)\,dx$, может быть проинтегрировано, проинтегрированным окажется и выражение (1). Это выражение есть функция от t, в то время как исходное выражение было $\Phi(x)$. Чтобы вернуться к переменной x, в выражение $R_1()\,dt$ и в результат интегрирования необходимо подставить значение $t = T(x)$, полученное обращением функции $x = x(t)$. Возможность такого обращения очевидна в каждой рассматриваемом случае.

Интегрирование заражений

$$R\left(x,\, \sqrt[n]{\frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}}\right) dx \qquad (\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0).$$

Рационализация в этой случае достигается при помощи подстановки

$$\frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta} = t^n,$$

в результате которой находим:

$$x = \frac{\delta t^n - \beta}{\alpha - \gamma t^n}, \qquad dx = \frac{n(\beta\gamma - \alpha\delta)t^{n-1}}{(\alpha - \gamma t^n)^2}\,dt.$$

Тогда

$$\int R\left(x,\, \sqrt[n]{\frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}}\right) dx = \int R\left(\frac{\delta t^n - \beta}{\alpha - \gamma t^n}, t\right) \frac{n(\beta\gamma - \alpha\delta)t^{n-1}}{(\alpha - \gamma t^n)^2}\,dt = \int R_1(t)\,dt,$$

где $R_1(t)$ — рациональная функция переменной t.

Примеры.

1. Вычислить интеграл

$$\int \frac{1 - \sqrt{x+1}}{1 + \sqrt[3]{x+1}}\,dx = \int \frac{1 - (\sqrt[6]{x+1})^3}{1 + +(\sqrt[6]{x+1})^2}\,dx.$$

Произведя подстановку $x + 1 = t^6$, получим:

$$\int \frac{1 - \sqrt{x+1}}{1 + \sqrt[3]{x+1}}\,dx = \int \frac{1 - t^3}{1 + t^2} \cdot 6t^5\,dt =$$

$$= 6\int (-t^6 + t^4 + t^3 - t^2 - t + 1)\,dt + 6\int \frac{t-1}{t^2+1}\,dt =$$

$$= -\frac{6}{7}t^7 + \frac{6}{5}t^5 \frac{3}{2}t^4 - 2t^3 - 3t^2 + 6t + 3\ln(t^2+1) - 6\operatorname{arctg} t + C.$$

Интегрирование биномиальных дифференциалов. *Биномиальным дифференциалом* называется выражение вида $x^\alpha(ax^\beta + b)^\gamma\,dx$, где a и b — произвольные вещественные числа, отличные от нуля; α, β, γ —рационально числа, Интеграл от биномиального дифференциала

$$\int x^\alpha(ax^\beta + b)^\gamma\,dx$$

с помощью соответствующих подстановок может быть приведен к интегралу от рациональной функции только в следующих трех случаях:

1) γ — целое число,

2) $\dfrac{\alpha+1}{\beta}$ — целое число,

3) $\dfrac{\alpha+1}{\beta}+\gamma$ — целое число.

Во всех остальных случаях, как показано П.Л. Чебышевым, рационализация интеграла от биномиального дифференциала невозможна.

В первом случае в результате подстановки $x=t^\nu$, где ν — общее наименьшее кратное знаменателей чисел α и β, получаем интеграл от рациональной функции. Действительно, в этом случае

$$x^\alpha(ax^\beta+b)^\gamma\,dx=\nu t^{\nu\alpha+\nu-1}(at^{\nu\beta}+b)^\gamma\,dt,$$

где все показатели $\nu\alpha+\nu-1$, $\nu\beta$ и γ — целые числа, и, следовательно, $\nu t^{\nu\alpha+\nu-1}$ $(at^{\nu\beta}+b)^\gamma$ — рациональная функция.

Во втором случае делаем сначала замену $x=t^{\frac{1}{\beta}}$ и находим, что

$$x^\alpha(ax^\beta+b)^\gamma\,dx=\frac{1}{\beta}\,t^{\frac{\alpha+1}{\beta}-1}(at+b)^\gamma\,dt.$$

Затем, положив $at+b=z$, т.е. $t=\dfrac{z-b}{a}$, получаем:

$$x^\alpha(ax^\beta+b)^\gamma\,dx=\frac{1}{a^{\frac{\alpha+1}{\beta}-1}}\,z^\gamma(z-b)^{\frac{\alpha+1}{\beta}-1}\,dz,$$

т.е. приходам к первому случаю, поскольку $\dfrac{\alpha+1}{\beta}$ так же, как $\dfrac{\alpha+1}{\beta}-1$ есть целое число.

Наконец, в третьем случае, представив выражение $x^\alpha(ax^\beta+b)^\gamma$ в виде

$$x^\alpha(ax^\beta+b)^\gamma=x^{\alpha+\beta\gamma}(a+bx^{-\beta})^\gamma=x^{\alpha'}(vx^{\beta'}+a),$$

находим, что

$$\frac{\alpha'+1}{\beta'}=\frac{\alpha+\beta\gamma)+1}{-\beta}=-\left(\frac{\alpha+1}{\beta}+\gamma\right)$$

— целое число, т.е. пришли ко второму случаю.

Примеры.

2. Рассмотрим интеграл

$$\int\sqrt{x}\,\sqrt[4]{1-\frac{1}{\sqrt{x}}}\,dx.$$

Здесь $\alpha=\dfrac{1}{2}$ $\beta=-\dfrac{3}{2}$, $\gamma=\dfrac{1}{4}$. Поскольку

$$\frac{\alpha+1}{\beta}=\frac{\dfrac{1}{2}+1}{-\dfrac{3}{2}}=-1,$$

то мы имеем второй случай интегрируемости, вычисления, которые рекомендуем провести читателю, дают

$$\int \sqrt{x}\,\sqrt[4]{1-\frac{1}{\sqrt{x}}}\,dx = -\frac{2}{3}x\sqrt{x}\,\sqrt[4]{1-\frac{1}{\sqrt{x^3}}}+\frac{1}{4}\ln x+\frac{1}{6}\ln\left|1+\sqrt[4]{1-\frac{1}{\sqrt{x^3}}}\right|+$$

$$+\frac{1}{3}\operatorname{arctg}\sqrt[4]{1-\frac{1}{\sqrt{x^3}}}+C.$$

Интегрирование выражения $R(x,\sqrt{ax^2+bx+c})\,dx$. Подстановки Эйлера. С помощью, замен переменной, известных под названием подстановок Эйлера, интеграл $\int R(x,\sqrt{ax^2+bx+c})\,dx$ всегда может быть рационализирован. Рассмотрим три приема интегрирования выражения $R(x,\sqrt{ax^2+bx+c})\,dx$.

1. $a>0$. Положим $\sqrt{ax^2+bx+c}=\pm\sqrt{a}x+t$, где знак перед корнем может бить выбран произвольно. Из этого уравнения, взяв, например, знак плюс, находим:

$$x=\frac{t^2-b}{b-\sqrt{a}\cdot t},\qquad dx=\frac{2(bt-\sqrt{a}\cdot c-\sqrt{a}\,t^2)}{(b-\sqrt{a}\cdot t)^2}\,dt,$$

$$\sqrt{ax^2+bx+c}=\sqrt{a}\,\frac{t^2-c}{b-\sqrt{a}\cdot t}+t=\frac{bt-\sqrt{a}\,t^2-\sqrt{a}\,c}{b-\sqrt{a}\cdot t}.$$

Следовательно,

$$\int R(x,\sqrt{ax^2+bx+c})\,dx=$$

$$=\int R\left(\frac{t^2-c}{b-\sqrt{a}\cdot t},\frac{bt-\sqrt{a}\,t^2-\sqrt{a}\,c}{b-\sqrt{a}\cdot t}\right)\frac{2(bt-\sqrt{a}\,c-\sqrt{a}\,t^2}{(b-\sqrt{a}\cdot t)^2}\,dt=\int R_1(t)\,dt,$$

где $R_1(t)$ — рациональная функция от t.

2. $c>0$. Положив $\sqrt{ax^2+bx+c}=\pm\sqrt{c}+xt$, как и в первом случае, получаем интеграл от рациональной функции.

3. $a<0$ и $c<0$. Если при этом корни трехчлена ax^2+bx+c комплексные, т.е. парабола $y-ax^2+bx+c$ не пересекает оси Ox и, следовательно, расположена по одну сторону от нее, то из неравенств $a<0$, $c<0$ следует, что парабола $y=ax^2+bx+c$ лежит целиком под осью Ox. Но тогда выражение $\sqrt{ax^2+bx+c}$ является мнимым для всех значений x. Такой случай мы здесь не рассматриваем. Поэтому будем считать, что корни x_1 и x_2 вещественны и различны (при $x_1=x_2$ выражение $R(x,\sqrt{ax^2+bx+c})$ рационально, и этот случай рассмотрен).

Положим

$$\sqrt{ax^2+bx+c}=\sqrt{a(x-x_1)(x-x_2)}=t(x-x_1).$$

Отсюда

$$x=\frac{ax_2-x_1t^2}{a-t^2},\qquad \sqrt{ax^2+bx+c}=\frac{a(x_2-x_1)t}{a-t^2},\qquad dx=\frac{2a(x_2-x_1)t}{(a-t^2)^2}\,dt.$$

Подставив эти значения x, $\sqrt{ax^2+bx+c}$ и dx в интеграл $\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})\,dx$, получим интеграл $\int R_1(t)\,dt$ от рациональной функции $R_1(t)$. .

Примеры.

3. Применив первую или третью подстановку Эйлера, найдем:

$$\int \frac{dx}{(1+x)\sqrt{1-x-x^2}} = \ln\left|\frac{3+x-2\sqrt{1-x-x^2}}{1+x}\right| + C.$$

Интегрирование выражений $R(\sin x, \cos x)\,dx$**.** В этом случае рационализация достигается подстановкой $t = \operatorname{tg}\dfrac{x}{2}$ или $x = 2\operatorname{arctg} t$. В самом деле,

$$\sin x = 2\sin\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{x}{2} = \frac{2\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}}{\sec^2\dfrac{x}{2}} = \frac{2t}{1+t^2},$$

аналогичным образом

$$\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \qquad x = 2\operatorname{arctg} t, \qquad dx = \frac{2\,dt}{1+t^2}.$$

Отсюда

$$\int R(\sin x, \cos x)\,dx = \int R\left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\frac{2\,dt}{1+t^2} = \int R_1(t)\,dt,$$

где $R_1(t)$ — рациональная функция переменной t.

Примеры.

4.

$$\int \frac{dx}{a+b\sin x+c\cos x} = \frac{2}{\sqrt{a^2-b^2-c^2}}\operatorname{arctg}\frac{(a-c)t+b}{\sqrt{a^2-b^2-c^2}} + C.$$

Вычисления опускаем.

Указанная подстановка приводит часто к интегралам от громоздких выражений. Поэтому в отдельных случаях предпочтительнее другие подстановки. Пусть, например, функция $R(u, v)$ нечетна по первому аргументу, т.е. $R(-u, v) = -R(u, v)$. Тогда функция $R_1(u, v) = \dfrac{R(u, v)}{u}$ является четной относительно аргумента u и поэтому может быть представлена в виде $R_1(u, v) = R_2(u^2, v)$, где $R_2(w, v)$ — рациональная функция переменных w, v. (Рекомендуем читателю доказать это.) Применив подстановку $t = \cos x$, достигаем рационализации интеграла, так как

$$\int R(\sin x, \cos x)\,dx = \int R_2(\sin^2 x, \cos x)\sin x\,dx =$$

$$= -\int R_2(1-\cos^2 x, \cos x)\,d\cos x = \int R_3(t)\,dt,$$

где $R_3(t)$ — рациональная функция переменной t.

Примеры.

5.
$$\int \frac{dx}{(2+\cos x)\sin x} = \frac{1}{6}\ln\frac{(1-\cos x)(2+\cos x)^2}{(1+\cos x)^2} + C.$$
Вычисления опускаем.

Если функция $R(u,v)$ нечетна по второму аргументу, т.е. $R(u,-v) = -R(u,v)$, рационализирующей оказывается подстановка $t = \sin x$.

Если функция $R(u,v)$ не меняет своего значения при одновременной замене знаков аргументов, т.е. $R(-u,-v) = R(u,v)$, то рационализация может быть достигнута подстановкой $\operatorname{tg} x = t$. В самом деле, представив $R(u,v)$ в виде $R\left(\frac{u}{v}, v\right) = R_1\left(\frac{u}{v}, v\right)$ и заметив, что функция $R_1(w,v)$ четная относительно v, получим представление $R(u,v) = R_2\left(\frac{u}{v}, v^2\right)$, из которого следует:
$$\int R(\sin x,\cos x)\,dx = \int R_2\left(\operatorname{tg} x, \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 x}\right)dx = \int R_2(t, \frac{1}{1+t^2}\Big)\,dt.$$

В общей случае представление произвольной рациональной функции $R(u,v)$ в виде
$$R(u,v) = \frac{1}{2}[R(u,v)-R(-u,v)]+\frac{1}{2}[R(-u,v)-R(-u,-v)]+\frac{1}{2}[R(-u,-v)+R(u,v)] =$$
$$= R_1(u,v)+R_2(u,v)+R_3(u,v),$$
где
$$R_1(u,v) = \frac{1}{2}[R(u,v)-R(-u,v)],$$
$$R_2(u,v) = \frac{1}{2}[R(-u,v)-R(-u,-v)],$$
$$R_3(u,v) = \frac{1}{2}[R(-u,-v)+R(u,v)],$$
показывает, что с помощью последних трех подстановок также всегда можно осуществить рационализацию $\int R(\sin x,\cos x)\,dx$, так как функция $R_1(u,v)$ нечетна по первому аргументу, функция $R_2(u,v)$ нечетна но второму аргументу, а функция $R_3(u,v)$ не меняет своего значения при одновремеиной замене знаков обоих аргументов.

Интегрирование выражений $\sin^p x\cos^q x\,dx$. Ограничимся случаем, когда p и q — рациональные числа. Произведя подстановку $t = \sin^2 x$, $dt = 2\sin x\cos x\,dx$, получим равенство
$$\int \sin^p x\cos^q x\,dx = \frac{1}{2}\int t^{\frac{p-1}{2}}(1-t)^{\frac{q-1}{2}}\,dt,$$

т.е. интеграл от биномиального дифференциала, который может быть выражен через элементарные функции, если 1) $\frac{q-1}{2}$ $\left(\text{или } \frac{p-1}{2}\right)$ есть целое число и 2) если $\frac{p+q}{2}$ есть целое число.

В случае целых p и q применением метода интегрирования по частям можно получить рекуррентные формулы (формулы приведения), повышающие или понижающие степень косинуса:

$$\int \sin^p x \cos^q x \, dx = \frac{\cos^{q-1} x \sin^{p+1} x}{p+q} + \frac{q-1}{p+q} \int \sin^p x \cos^{q-2} x \, dx,$$

$$\int \sin^p x \cos^q x \, dx = -\frac{\cos^{q+1} x \sin^{p+1} x}{q+1} + \frac{p+q+2}{q+1} \int \sin^p x \cos^{q+2} x \, dx,$$

и аналогичные формулы для синуса.

Интегрирование выражений $e^{\alpha x} P(x)\, dx$**,** $Q(x) \cos \beta x \, dx$**,** $Q(x) \sin \beta x \, dx$, где $P(x)$ и $Q(x)$ — многочлены, может быть произведено повторным применением метода интегрирования по частям. Например,

$$\int e^{\alpha x} P(x)\, dx = \frac{1}{\alpha} e^{\alpha x} P(x) - \frac{1}{\alpha} \int e^{\alpha x} P'(x)\, dx.$$

Примевив к интегралу $\int e^{\alpha x} P'(x)\, dx?$ вторично формулу интегрирования по частям, получим:

$$\int e^{\alpha x} P(x)\, dx = \frac{1}{\alpha} e^{\alpha x} P(x) - \frac{1}{\alpha^2} e^{\alpha x} P'(x) + \frac{1}{\alpha^2} \int e^{\alpha x} P''(x)\, dx$$

и т.д.

Так как после каждого интегрирования по частям степень многочлена под знаком интеграла понижается на единицу, очевидно, что после конечного числа шагов получим табличной интеграл от $e^{\alpha x}\, dx$, т.е. равенство $\int e^{\alpha x} P(x)\, dx = e^{\alpha x} Q(x) + C$, где $Q(x)$ — многочлен такой же степени, как и $P(x)$.

Аналогичным образом вычисляются интегралы вида

$$\int P(x) \sin \alpha x \, dx, \qquad \int Q(x) \cos \beta x \, dx.$$

Часто встречающиеся интегралы $\int e^{\alpha x} \cos \beta x \, dx$ и $\int e^{\alpha x} \sin \beta x \, dx$ вычисляются двухкратным интегрированием по частям. Так,

$$\int e^{\alpha x} \sin \beta x \, dx = e^{\alpha x} \left(-\frac{\cos \beta x}{\beta} \right) + \frac{\alpha}{\beta} \int e^{\alpha x} \cos \beta x \, dx =$$

$$= -\frac{e^{\alpha x} \cos \beta x}{\beta} + \frac{\alpha}{\beta} \left(\frac{e^{\alpha x} \sin \beta x}{\beta} - \frac{\alpha}{\beta} \int e^{\alpha x} \sin \beta x \, dx \right),$$

откуда

$$\left(1+\frac{\alpha^2}{\beta^2}\right)\int e^{\alpha x}\sin\beta x\,dx = -\frac{-\beta e^{\alpha x}\cos\beta x+\alpha e^{\alpha x}\sin\beta x}{\beta^2}+C,$$

и, следовательно,

$$\int e^{\alpha x}\sin\beta x\,dx = \frac{e^{\alpha x}(\alpha\sin\beta x-\beta\cos\beta x)}{\alpha^2+\beta^2}+C.$$

Аналогичная формула получается для $\displaystyle\int e^{\alpha x}\cos\beta x\,dx$.

Понятие об эллиптических интегралах. В связанных с приложениями задачах нередко встречаются интегралы от выражений $R(x, \sqrt{P(x)})\,dx$, где $R(x,y)$ — рациональная функция переменных x и y, а $P(x)$ — многочлен степени $k \geq 3$. Можно показать, что в общем случае интегралы от таких выражений не могут быть представлены в виде конечной суперпозиции элементарных функций и определяют некоторые новые классы трансцендентных функций. Так, в частности, важное значение имеют интегралы

$$\int\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}},\qquad \int\frac{x^2\,dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}},$$

$$\int\frac{dx}{(1+hx^2)\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}},$$

называемые *эллиптическими интегралами*, соответственно первого, второго и третьего рода, для которых имеются подробные таблицы значений. К эллиптическим интегралам приводит, например, задача о вычислении длины дуги эллипса и гиперболы, несколько подробнее об этом будет сказано далее.

Рассмотрим в качестве примера применение неопределенного интеграла при описании движения тела переменной массы, величина которой изменяется со временем. Таким телом является, например, ракета. Предположим, что из ракеты с большой скоростью выбрасываются газы, являющиеся продуктами сгорания ее топлива. По третьему закону Ньютона, выбрасываемые газы, в свою очередь, воздействуют на ракету с равной, но противоположно направленной силой. Обозначим через f равнодействующую внешних сил (земное притяжение, сопротивление среды и пр.), действующих на ракету. Если $m(t)$ — масса ракеты и $v(t)$ — ее скорость, то приращение количества движения ракеты за время Δt будет следующим:

$$(m+\Delta m)(v+\Delta v)-mv = +\Delta\mu\widetilde{v}_t,$$

где $\Delta\mu$ — количество газа, образовавшегося за время Δt; $\widetilde{v}_t$ — средняя скорость истечения газа. Согласно второму закону Ньютона, приращение количества движения равно ?Δt. Учитывая, что в силу закона сохранения массы, $\Delta m + \Delta\mu = 0$, получив равенство

$$m\Delta v + v\Delta m + \Delta m\Delta v - \widetilde{v}_t\Delta m = f\Delta t.$$

Разделив обе части этого равенства на Δt и устремив Δt к нулю, получим в пределе (считая, что $\dfrac{dm}{dt}$ и $\dfrac{dv}{dt}$ существуют и конечны):

$$m\frac{dv}{dt} + (v - \widetilde{v}_t)\frac{dm}{dt} = f,$$

где $\widetilde{v}_t > 0$ — скорость истечения газа в момент времени t.

Это уравнение было получено впервые русским механиком И.В. Мещерским и носит его имя.

Рассмотрим движение ракеты при отсутствии внешних сил, приняв его прямолинейным. Тогда скорости v и $\widetilde{v}_t$ можно считать скалярными величинами. В этом случае уравнение Мещерского примет следующий вид:

$$m\frac{dv}{dt} + (v - \widetilde{v}_t)\frac{dm}{dt} = 0$$

или, в дифференциалах,

$$m\,dv + (v - \widetilde{v}_t)\,dm = 0.$$

Сделаем еще одно допущение: предположим, что разность $v - \widetilde{v}_t = v_0$, являющаяся скоростью истечения газа относительно ракеты, не изменяется. Тогда получим равенство

$$\frac{dv_0}{dm} = -\sqrt{\frac{v - \widetilde{v}_t}{m}},$$

проинтегрировав которое, найдем:

$$v = -(v - \widetilde{v}_t)\ln m + C.$$

Полагая, что в момент времени $t = 0$ скорость $v = 0$, получим: $c = (v - v_0)\ln m_0$, где m_0 — начальная масса ракеты, и, следовательно,

$$v = (v - \widetilde{v}_t)\ln\frac{m_0}{m},$$

или

$$\frac{m_0}{m} = e^{\dfrac{v}{v - \widetilde{v}_t}}.$$

Это *формула Циолковского*, характеризующая движение ракеты.

Глава VIII

ОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ (РИМАНА[21])

Одна из задач, с которой постоянно сталкиваются физики, астрономы, геодезисты, инженеры и другие представители естествознания и техники, состоит в определении площади плоской фигуры. Не вдаваясь в строгое определение площади плоской фигуры (такое определение будет дано далее), покажем, как нахождение ее площади естественно приводит к необходимости рассматривать некоторые последовательности чисел, пределами которых и будет определенный интеграл.

§ 1. Задачи, приводящие к понятию определенного интеграла

1. Пусть на отрезке $[a, b]$ задана неотрицательная непрерывная функция $f(x)$ и $aAbB$ — плоская фигура, ограниченная отрезком $[a, b]$ оси Ox, кривой AB и прямыми $x = a$ и $x = b$ (рис. 29).

Назовем такую фигуру криволинейной трапецией.

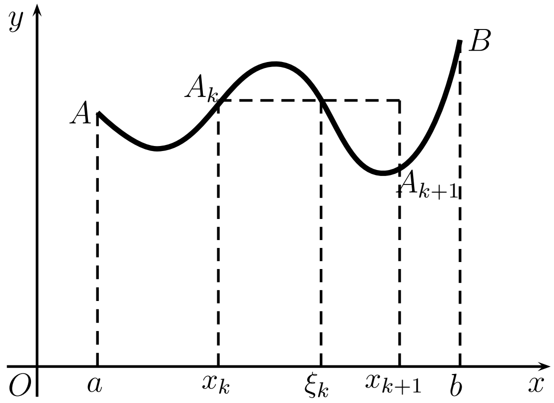

Рис. 29

Для нахождения площади $aAbB$ поступим следующим образом: системой отрезков прямых, параллельных оси Oy, разобьем $aAbB$ на криволинейные трапеции («элементарные части»). Обозначим через $x_0, x_1, \ldots, x_k, x_{k+1}, \ldots, x_{m-1}, x_m$ перенумерованные в направлении от a к b, соответствующие абсциссы этих отрезков. Таким образом,

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_k < x_{k+1} < \ldots x_{m-1} < x_m = b.$$

---

[21] Б. Риман (1826–1866) — немецкий математик.

В силу непрерывности функции $f(x)$ значения $f(x)$ на каждом из отрезков $[x_k, x_{k+1}]$ разбиения $[a, b]$ при достаточной малости длины отрезков мало отличаются друг от друга. Поэтому приближенно, с погрешностью тем меньшей, чем меньше длина отрезка разбиения $[a, b]$, можно считать, что $f(x)$ на каждом отрезке $[x_k, x_{k+1}]$ принимает постоянное значение, равное значение $f(x)$ в некоторой точке $\xi_k \in [x_k, x_{k+1}]$. Геометрически это означает, что вместо элементарной криволинейной трапеции мы рассматриваем прямоугольник с основанием $[x_k, x_{k+1}]$ и высотой, равной $f(\xi_k)$. Площадь элементарной криволинейной трапеции $x_k A_k A_{k+1} x_{k+1}$ приближенно выразим произведением $f(\xi_k)(x_{k+1} - x_k)$ или, положив $\Delta x_k = x_{k+1} - x_k$, произведением $f(\xi_k)\Delta x_k$. Приближенное значение площади всей криволинейной трапеции будет равно сумме приближенных значений составляющих ее элементарных частей:

$$\sigma = \sum_{k=0}^{m-1} f(\xi_k)\Delta x_k. \tag{1}$$

Погрешность найденного выражения тек меньше, чек меньше размеры элементарных частей разбиения. За истинное значение величины площади криволинейной трапеции целесообразно принимать предел суммы (1) при неограниченной увеличении числа элементарных частей разбиения $[a, b]$ и стремления к нуле наибольшей длины этих частей. Положив $\lambda = \max\limits_k \{\Delta x_k\}$, приходим к пределу

$$\lim_{\lambda \to 0} \sum_{k=0}^{m-1} f(\xi_k)\Delta x_k,$$

который и представляет собой определенный интеграл.

Заметим, что из стремления λ к нулю вытекает неограниченное возрастание числа элементарных частей разбиения $[a, b]$.

2. Обратимся к рассмотренной в § 1 гл. VII задаче о восстановлении пути движущейся материальной точки за промежуток времени $[t_0, t_0 + T]$ по известной скорости $v(t)$ движения точки на этом промежутке. Предположив, что в течение небольших промежутков времени скорость движения $v(t)$ изменяется мало, разобьем промежуток $[t_0, t_0 + T]$ на достаточно большое число настолько малых частей, чтобы на протяжении каждой из них скорость могла быть принята постоянной (с допустимой погрешностью), равной значению скорости в произвольно взятой точке этой части.

Пусть $t_1, t_2, \ldots, t_k, t_{k+1}, \ldots, t_{m-1}$ — последовательные кочки деления (рис. 30):

$$t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_k < t_{k+1} < \ldots < t_{m-1} < t_m = t_0 + T$$

и τ_k — произвольная точка промежутка $[t_k, t_{k+1}]$. Тогда путь, пройденный материальной точкой за промежуток времени $[t_k, t_{k+1}]$ приближенно окажется равным $v(\tau_k)(t_{k+1} - t_k)$ или, при $t_{k+1} - t_k = \Delta t_k$, равным $v(\tau_k)\Delta t_k$. За все время T материальная точка пройдет путь, приближенно выраженный суммой

$$\sum_{k=0}^{m-1} v(\tau_k)\Delta t_k. \tag{1'}$$

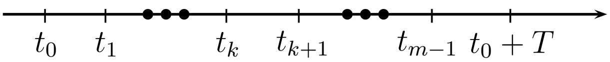

Рис. 30

Полученное приближенное значение пути тем ближе к истинному, чем меньше погрешность при замене переменной величины скорости на постоянную на каждом элементарном участке Δt_k. Поэтому значение пути является пределом суммы (1′) при стремлении к нулю наибольшего из чисел Δt_k или, если $\lambda = \max\limits_k \{\Delta t_k\}$, — пределом

$$\lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=0}^{m-1} v(\tau_k)\Delta t_k.$$

Можно рассмотреть широкий круг различных задач из геометрии, физики и других областей естествознания и техники, решение которых приводит к нахождению предела суммы вида (1). Некоторые из них будут приведены в гл. IX.

В связи с изложенным ясно, что задача отыскания пределов сумм вида (1) и изучения их свойств важна для различных приложений, и поэтому естественно обратиться к этой задаче в общей постановке.

§ 2. Интегрируемые функции, определенный интеграл

Назовем *разбиением* T отрезка $[a, b]$ упорядоченную систему точек $x_0, x_1, \ldots, x_m$ этого отрезка, занумерованных в направлении от a к b, т.е. такую, что

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_k < x_{k+1} < \ldots < x_{m-1} < x_m = b.$$

Эта система точек определяет отрезки $[x_0, x_1], [x_1, x_2], \ldots, [x_k, x_{k+1}], \ldots, [x_{m-1}, x_m]$, называемые *частичными отрезками* разбиения T. Разбиение T' называется *измельчением* разбиения T, если каждая точка разбиения T содержится среди точек разбиения T'. Наконец, разбиение $T_1 \cup T_2$, определяемое точками, входящими в каждое из разбиений T_1 и T_2, называется *объединением* этих разбиений. Ясно, что объединение T разбиений T_1 и T_2 является измельчением каждого из них.

Пусть $\lambda = \lambda(T) = \max\limits_k \Delta x_k$. Последовательность разбиений $\{T_n\}$ отрезка $[a, b]$ назовем *неограниченно измельчающейся*, если $\lambda_n = \lambda(T_n) \to 0$ при $n \to \infty$.

Пусть $f:\ [a, b] \to \mathbb{R}$ и T — некоторое разбиение $[a, b]$. На каждом частичном отрезке $[x_k, x_{k+1}]$ разбиения фиксируем произвольную точку ξ_k и составим сумму

$$s(f, T, \xi) = \sum_{k=0}^{m-1} f(\xi_k)\Delta x_k, \tag{1}$$

где $\Delta x_k = x_{k+1} - x_k$. Значение этой сумма для заданной функции $f(x)$, очевидно, зависит от выбранного разбиения T и положения точек $\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_{m-1}$ на частичных отрезках разбиения. Сумма (1) называется *интегральной суммой* для $f(x)$, соответствующей разбиению T и точкам $\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_{m-1}$.

Определение. Если для любой неограниченно измельчающейся последовательности разбиений $\{T_n\}$ отрезка $[a,b]$ и при любом выборе точек $\xi_k^{(n)}$ на отрезках $[x_k^{(n)}, x_{k+1}^{(n)}]$ разбиения T_n последовательность интегральных сумм, соответствующих этим разбиениям, имеет конечный предел, значение которого не зависит ни от характера каждого разбиения (на равные или неравные частичные отрезки), ни от выбора точки $\xi_k^{(n)}$ на частичном отрезке $[x_k^{(n)}, x_{k+1}^{(n)}]$, то функция $f(x)$ называется *интегрируемой на отрезке* $[a,b]$, а указанный предел — определенным интегралом от функции $f(x)$ по отрезку $[a,b]$ и обозначается через

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx.^{22}$$

Таким образом,

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \lim_{\lambda_n \to 0} \sum_{k=0}^{m_n-1} f(\xi_k^{(n)})\Delta x_k^{(n)}.$$

В этом обозначении определенного интеграла $f(x)$ называется *подынтегральной функцией*, произведение $f(x)\,dx$ — *подынтегральным выражением*, а числа a и b — соответственно *нижним* и *верхним пределами интегрирования.*

Подсчитаем значение определенного интеграла от функции $f(x) = c = \mathrm{const}$ на $[a,b]$. Для любого разбиения отрезка $[a,b]$

$$s(f,T,\xi) = \sum_{k=0}^{m-1} f(\xi_k)\Delta x_k = \sum_{k=0}^{m-1} c\Delta x_k = c(b-a).$$

Поэтому предел этой суммы для любой неограниченно измельчающейся последовательности разбиений также равен $c(b-a)$.

Итак, $\int\limits_a^b c\,dx = c(b-a)$, что при $c > 0$ вполне согласуется с геометрическим смыслом интеграла.

Из определения вытекает следующее необходимое условие интегрируемости функции.

Теорема. *Для того чтобы функция $f(x)$ была интегрируемой на промежутке $[a,b]$, необходимо, чтобы она была ограниченной на этом промежутке.*

Доказательство. Предположим, что функция $f(x)$ неограничена на $[a,b]$. Тогда какую бы неограниченно измельчающуюся последовательность разбиений T_n отрезка $[a,b]$ мы ни взяли, при каждом фиксированном n, по крайней мере на

---

[22] Заметим, что если последовательность интегральных сумм имеет предел для любой последовательности $\{T_n\}$ разбиений указагного вида, то легко показать, что значения предела будет одинаковым для всех последовательностей разбиений.

одном частичном отрезке, например, на $[x_{k_0^{(n)}}, x_{k_0^{(n)}+1}]$, функция $f(x)$ будет неограниченной. Интегральную сумму $s(f, T, \xi^{(n)})$ представим в виде

$$s(f, T, \xi^{(n)}) = \sum_{k \neq k_0^{(n)}} f(\xi_k^{(n)})\Delta x_k^{(n)} + f(\xi_{k_0^{(n)}}^{(n)})\Delta x_{k_0^{(n)}}^{(n)}.$$

Выбрав каким-либо образом и зафиксировав точки $\xi_k^{(n)}$, $k \neq k_0$, возьмем затем $\xi_{k_0^{(n)}}^{(n)}$, так, чтобы

$$|f(\xi_{k_0^{(n)}}^{(n)}\Delta x_{k_0^{(n)}}^{(n)}| > \left| \sum_{k \neq k_0^{(n)}} f(\xi_k^{(n)})\Delta x_{k^{(n)}}^{(n)} \right| + n.$$

Это всегда можно сделать в силу неограниченности $f(x)$ на $[x_{k_0^{(n)}}, x_{k_0^{(n)}+1}]$. Но тогда $|s(f, T_n, \xi^{(n)})| > n$, т.е. $s(f, T_n, \xi^{(n)}) \to \infty$, что противоречит интегрируемости $f(x)$ на $[a, b]$. Теорема доказана.

В дальнейшем, если не оговорено противное, будем предполагать функции ограниченными.

Легко показать, что установленное в теореме необходимое условие интегрируемости не является достаточным. Для этого рассмотрим на $[a, b]$ функцию Дирихле, определяемую равенством

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad x \quad \text{рациональная точка}, \\ 0, & \text{если} \quad x \quad \text{иррациональная точка}. \end{cases}$$

Как известно, множество рациональные точек и множество иррациональных точек на промежутке $[a, b]$ плотны, т.е. для любого разбиения $[a, b]$ на каждом частичном отрезке имеются как рациональные, так и иррациональные точки. Если для каждого разбиения T_n образовать две интегральные суммы — s'_n и s''_n, в одной из которых (например, s'_n) выбрать в качестве $\xi_k^{(n)}$ на отрезке $[x_k^{(n)}, x_{k+1}^{(n)}]$ рациональную точку, а в другой (s''_n) — иррациональную точку, то получим:

$$s'_n = \sum_{k=0}^{m_n-1} 1 \cdot \Delta x_k^{(n)} = b - a,$$

$$s''_n = \sum_{k=0}^{m_n-1} 0 \cdot \Delta x_k^{(n)} = 0.$$

Ясно, что $\lim\limits_{\lambda_n \to 0} s'_n = b - a$, $\lim\limits_{\lambda_n \to 0} s''_n = 0$, т.е. значения пределов интегральных сумм зависят от выбора точек $\xi_k^{(n)}$ на частичных отрезках, что означает неинтегрируемость функции Дирихле, ограниченной на $[a, b]$.

В связи с этим примером важное значение приобретает вопрос о достаточных условиях интегрируемости функции. Для решения этого вопроса введем в рассмотрение так называемые суммы Дарбу.

§ 3. Верхние и нижние суммы Дарбу[23] и их свойства. Признак Дарбу существования интеграла

Пусть $f(x)$ — ограниченная на $[a,b]$ функция и $T = \{x_0, x_1, \ldots, x_k, x_{k+1}, \ldots, x_{n-1}, x_n\}$ — некоторое фиксированное разбиение отрезка $[a,b]$. Множество значений $f(x)$ на частичном отрезке $[x_k, x_{k+1}]$ разбиения T является ограниченным, поэтому существуют числа

$$m_k = \inf_{[x_k, x_{k+1}]} f(x),$$

$$M_k = \sup_{[x_k, x_{k+1}]} f(x).$$

Ясно, что при произвольном значении $\xi_k \in [x_k, x_{k+1}]$

$$m_k \le f(\xi_k) \le M_k. \tag{1}$$

Положим

$$\underline{s}(f,T) = \sum_{k=0}^{m-1} m_k \Delta x_k = \sum_T m_k \Delta x_k,$$

$$\overline{s}(f,T) = \sum_{k=0}^{m-1} M_k \Delta x_k = \sum_T M_k \Delta x_k.$$

Определенные этими равенствами величины $\underline{s}(f,T)$ и $\overline{s}(f,T)$ называются соответственно *нижней* и *верхней суммами Дарбу* для функции $f(x)$, отвечающими разбиению T промежутка $[a,b]$. Из неравенства (1) следует, что для любой интегральной суммы $s(f,T,\xi)$, соответствующей разбиению T, выполняется неравенство

$$\underline{s}(f,T) \le s(f,T,\xi) \le \overline{s}(f,T). \tag{2}$$

Из определения величин m_k и M_k вытекает, что всевозможные интегральные суммы $s(f,T,\xi)$, соответствующие фиксированному разбиению T, обладают следующим свойством.

Свойство 1.

$$\begin{aligned} \underline{s}(f,T) &= \inf_{\xi_k} \{s(f,T,\xi_0,\xi_1,\ldots,\xi_{n-1})\}, \\ \overline{s}(f,T) &= \sup_{\xi_k} \{s(f,T,\xi_0,\xi_1,\ldots,\xi_{n-1})\}. \end{aligned} \tag{3}$$

Пусть теперь T — некоторое разбиение и T^* — какое-нибудь измельчение разбиения T. Тогда выполняется следующее свойство.

Свойство 2.

$$\underline{s}(f,T^*) \ge \underline{s}(f,T), \qquad \overline{s}(f,T^*) \le \overline{s}(f,T), \tag{4}$$

т.е. при измельчении разбиения нижняя сумма не уменьшается, а верхняя сумма не увеличивается.

---

[23] Ж. Дарбу (1842–1917) — французский математик.

Докажем неравенство (4), например, для верхних сумм (для нижних сумм доказательство аналогично). При этом достаточно ограничиться случаем, когда T^* получается из T добавлением лишь одной точки, потому что произвольное измельчение T^* можно рассматривать как получающееся из T в результате нескольких последовательных измельчений, состоящих в добавлении лишь одной новой точки деления.

Итак, пусть T^* получается из T добавлением точки $\overline{x}_j$ на промежутке $[x_j, x_{j+1}]$. Тогда в суммах $\overline{s}(f, T)$ и $\overline{s}(f, T^*)$ совпадают все слагаемые, соответствующие промежуткам $[x_k, x_{k+1}]$, для которых $k \neq j$ и только слагаемому $M_j(x_{j+1} - x_j)$ суммы $\overline{s}(f, T)$ будут соответствовать в сумме $\overline{s}(f, T^*)$ два слагаемых $M'_j(\overline{x}_j - x_j)$ и $M''_j(x_{j+1} - \overline{x}_j)$, где $M'_j = \sup\limits_{[x_j, \overline{x}_j]} f(x)$, $M''_j = \sup\limits_{[\overline{x}_j, x_{j+1}]} f(x)$.

Так как

$$M'_j \leq M_j, \qquad M''_j \leq M_j$$

то

$$M_j(x_{j+1} - x_j) = M_j(\overline{x}_j - x_j) + M_j(x_{j+1} - \overline{x}_j) \geq M_j(\overline{x}_j - x_j) + M''_j(x_{j+1} - \overline{x}_j),$$

откуда следует справедливость неравенства (4) для верхних сумм.

Пусть T' и T'' — два произвольных разбиения $[a, b]$. Тогда выполняется следующее свойство.

Свойство 3.

$$\underline{s}(f, T') \leq \overline{s}(f, T''), \tag{5}$$

т.е. любая нижняя сумма не превосходит каждой верхней суммы.

Для доказательства этого факта введем в рассмотрение вспомогательное разбиение $T^* = T' \cup T''$, являющееся измельчением каждого из разбиений T' и T''. Тогда, в силу (2) и (4),

$$\underline{s}(f, T') \leq \underline{s}(f, T^*) \leq \overline{s}(f, T^*) \leq \overline{s}(f, T''),$$

что приводит к неравенству (5).

Пусть T_0 — некоторое, фиксированное разбиение. Тогда для любого разбиения T, в силу (5),

$$\begin{gathered} \underline{s}(f, T) \leq \overline{s}(f, T_0), \\ \overline{s}(f, T) \geq \underline{s}(f, T_0). \end{gathered} \tag{6}$$

Из неравенств (6) следует, что множество всех нижних сумм, отвечающих всевозможным разбиениям отрезка $[a, b]$, ограничено сверху, а множество всех верхних сумм, соответствующих всевозможным разбиениям отрезка $[a, b]$, ограничено снизу. Положим

$$\overline{I} = \inf_T \{\overline{s}(f, T)\}, \qquad \underline{I} = \sup_T \{\underline{s}(f, T)\}. \tag{7}$$

Числа $\overline{I}$ и $\underline{I}$, определяемые равенствами (7), называются соответственно *верхним* и *нижним интегралами Дарбу*.

Так как любая нижняя сумма $\underline{s}(f,T')$ не превосходит каждой верхней суммы $\overline{s}(f,T)$, то очевидно, что $\sup\limits_{T'}\ \underline{s}(f,T') \le \inf\limits_{T}\{\overline{s}(f,T)$, т.е., $\underline{I} \le \overline{I}$. Таким образом,

$$\underline{s}(f,T') \le \underline{I} \le \overline{I} \le \overline{s}(f,T') \tag{8}$$

для любого разбиения T.

Теорема 1. (Дарбу) *Для любой неограниченно измельчающейся последовательности разбиений T_n*

$$\begin{aligned} &\lim_{\lambda_n\to 0}\ \underline{s}(f,T') = \underline{I}, \\ &\lim_{\lambda_n\to 0}\ \overline{s}(f,T') = \overline{I}. \end{aligned} \tag{9}$$

Доказательство. Рассмотрим например, случай верхних сумм. Возьмем произвольное число $\varepsilon > 0$ и покажем, что существует такое число $n_0 = n_0(\varepsilon)$, такое, что при всех $n \ge n_0$ выполняется неравенство

$$\overline{s}(f,T) \ge \overline{I} + \varepsilon. \tag{10}$$

Так как $\overline{I}$ — точная нижняя граница всех верхних сумм, то найдется сумма $\overline{s}(f,T_0)$, для которой выполнено неравенство

$$\overline{s}(f,T_0) < \overline{I} + \frac{\varepsilon}{2}. \tag{11}$$

Пусть $T_0 = \{x_0^0, x_1^0, \dots, x_j^0, x_{j+1}^0, \dots, x_p^0\}$. Выберем номер n_0, так, чтобы при $n \ge n_0$ выполнялось неравенство

$$\lambda_n = \lambda(T_n) < \frac{\varepsilon}{2\Omega p}, \tag{12}$$

где Ω — колебание функции $f(x)$ на отрезке $[a,b]$. Фиксируем произвольное $n \ge n_0$ и введем в рассмотрение новое разбиение $T^* = T_0 \cup T_n$. В соответствии с неравенствами (4) и (11) имеем:

$$\overline{s}(f,T^*) \le \overline{s}(f,T_0) < \overline{I} + \frac{\varepsilon}{2}. \tag{13}$$

С другой стороны,

$$0 \le \overline{s}(f,T_n) - \overline{s}(f,T^*) < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{14}$$

В самом деле, слагаемые сумм $\overline{s}(f,T_n)$ и $\overline{s}(f,T^*)$, соответствующие тем отрезкам разбиения T_n, на которых нет точек деления разбиения T_0, совпадают, значит, различие сумм $\overline{s}(f,T_n)$ и $\overline{s}(f,T^*)$ происходит лишь за счет тех отрезков разбиения T_n, которые с помощью точек деления разбиения T_0 заменены в разбиения T^* несколькими отрезками.

Предположим, что $[x_k^{(n)}, x_{k+1}^{(n)}]$ — частичный отрезок разбиения T_n, во внутренюю часть которого попали точки $x_{j\nu}^0$, $\nu = 0,1,\dots,l$, $x_{j0}^0 = x_k^{(n)}$, $x_{jl}^0 = x_{k+1}^{(n)}$ разбиения T_0 и, следовательно,

$$[x_k^{(n)}, x_{k+1}^{(n)}] = \bigcup_{\nu=0}^{l} [x_{j\nu}^0, x_{j\nu+1}^0].$$

Пусть

$$M_{j\nu}^{(0)} = \sup_{[x_{j\nu}^0, x_{j\nu+1}^{(0)}]} f(x), \qquad \Delta x_{j\nu}^0 = x_{j\nu+1}^0 - x_{j\nu}^0.$$

Ясно, что

$$M_{j\nu}^{(0)} \le M_k^{(n)} = \sup_{[x_k^{(n)}, x_{k+1}^{(n)}]} f(x), \qquad \nu = 0, 1, 2, \dots, l.$$

Поэтому

$$M_k^{(n)} - \sum_{\nu=0}^{l-1} M_{j\nu}^0 \Delta x_{j\nu}^0 = \sum_{\nu=0}^{l-1} M_k^{(n)} \Delta x_{j\nu}^0 - \sum_{\nu=0}^{l-1} M_{j\nu}^{(0)} \Delta x_{j\nu}^0 =$$

$$= \sum_{\nu=0}^{l-1} (M_k^{(n)} - M_{j\nu}^{(0)}) \Delta x_{j\nu}^0 \le \Omega \sum_{\nu=0}^{l-1} \Delta x_{j\nu}^0 = \Omega \Delta x_k^{(n)} \le \Omega \lambda_n < \frac{\varepsilon}{2p}.$$

Так как число отрезков $[x_k^{(n)}, x_{k+1}^{(n)}]$, подвергшихся разбиению при переходе от T_n к T^*, не больше, чем число $p-1$ точек деления разбиения T_0, то

$$\overline{s}(f, T_n) - \overline{s}(f, T^*) < \frac{\varepsilon}{2p} \cdot p = \frac{\varepsilon}{2},$$

и неравенство (14) доказано.

Теперь доказательство теоремы Дарбу для верхних сумм завершается без труда. В силу неравенств (13) и (14) для $n \ge n_0$ имеем:

$$\overline{s}(f, T_n) - \overline{I} = [\overline{s}(f, T_n) - \overline{s}(f, T^*)] + [\overline{s}(f, T^*) - \overline{I}] < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Так как, с другой стороны,

$$\overline{s}(f, T_n) - \overline{I} \ge 0,$$

для любых n, то

$$\lim_{n \to \infty} \overline{s}(f, T_n) = \overline{I}.$$

Теорема доказана.

Признак Дарбу существования интеграла. *Для того чтобы функция $f(x)$, ограниченная на отрезке $[a, b]$, была интегрируема на этом отрезке, необходимо и достаточно, чтобы $\overline{I} = \underline{I}$.*

Необходимость. Предположим, что функций $f(x)$ интегрируема на $[a, b]$. Тогда для любой неограниченно измельчающейся последовательности разбиений $\{T_n\}$ этого отрезка

$$s(f, T_n, \xi^{(n)}) \to I = \int_a^b f(x)\, dx$$

и для любого числа $\varepsilon > 0$ найдется номер $n_0 = n_0(\varepsilon)$, такой, что при $n \ge n_0$

$$I - \varepsilon < s(f, T_n, \xi^{(n)}) < I + \varepsilon.$$

Но тогда для таких номеров n имеем:

$$I - \varepsilon \le \sup_{\xi} s(f, T_n, \xi^{(n)}) << I + \varepsilon,$$

откуда, в силу свойства 1 сумм Дарбу,

$$I - \varepsilon \le \overline{s}(f, T_n) \le I + \varepsilon \quad \text{при} \quad n \ge n_0,$$

т.е.

$$\overline{s}(f, T_n) \to I \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

С другой стороны, по теореме Дарбу,

$$\overline{s}(f, T_n) \to \overline{I}.$$

Следовательно,

$$\overline{I} = I.$$

Аналогичным образом находим, что $\underline{I} = I$. Таким образом, необходимость доказана.

Достаточность. Пусть $\underline{I} = \overline{I} = I$ и $\{T_n\}$ — произвольная неограниченно измельчающаяся последовательность разбиений отрезка $[a, b]$. Так как по теореме Дарбу, $\lim\limits_n \underline{s}(f, T_n) = \underline{I} = I$ и $\lim\limits_n \overline{s}(f, T_n) = \overline{I} = I$, то для любого числа $\varepsilon > 0$ найдется число $n_0 = n_0(\varepsilon)$, такое, что при $n \ge n_0$

$$I - \varepsilon < \underline{s}(f, T_n) \le \overline{s}(f, T_n) < I + \varepsilon.$$

Но $\overline{s}(f, T_n) \le s(f, T_n, \xi^{(n)}) \le \overline{s}(f, T_n)$, и поэтому при $n \ge n_0$

$$I - \varepsilon < s(f, T_n, \xi^{(n)}) < I + \varepsilon,$$

т.е. $s(f, T_n, \xi^{(n)} \to I$ при $n \to \infty$. Это означает, что функция $f(x)$ интегрируема на $[a, b]$, что требовалось доказать.

Следствие 1. *Для того чтобы ограниченная на отрезке $[a, b]$ функция $f(x)$ была интегрируема на этой отрезке, необходимо и достаточно, чтобы для любого числа $\varepsilon > 0$ нашлось хотя бы одно разбиение $T = \{x_0 = a, x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n = b\}$ отрезка $[a, b]$, такое, что*

$$\sum_{i=0}^{n-1} \omega_i \Delta x_i < \varepsilon, \tag{15}$$

где ω_i — колебание $f(x)$ на $[x_i, x_{i+1}]$.

В самом деле, неравенство (15) тождественно с неравенством

$$\overline{s}(f, T) - \underline{s}(f, T) < \varepsilon, \tag{16}$$

а неравенство (16), как легко убедиться, эквивалентно условию $\underline{I} = \overline{I}$.

Следствие 2. *Для того чтобы ограниченная на отрезке $[a, b]$ функция $f(x)$ была интегрируема на этом отрезке, необходимо и достаточно, чтобы для любой неограниченно измельчающейся последовательности разбиений T_n отрезка $[a, b]$*

$$\lim_n \sum_{i=0}^{m_n - 1} \omega_i^{(n)} \Delta x_i^{(n)} = 0,$$

где $\omega_i^{(n)}$ *— колебание* $f(x)$ *на отрезке* $[x_i^{(n)}, x_{i+1}^{(n)}]$.

Доказательство этого утверждения предоставляем читателю.

Для доказательства интегрируемости тех или иных классов функций удобнее пользоваться следствиями типа 1, 2, чем признаком Дарбу. Проиллюстрируем это следующей теоремой.

Теорема 2. *Непрерывная на отрезке* $[a, b]$ *функция* $f(x)$ *интегрируема на этом отрезке.*

Доказательство. В саду теоремы Кантора, функция $f(x)$ равномерно непрерывна на $[a, b]$. Поэтому для любого числа $\varepsilon > 0$ найдется число $\delta > 0$, такое, что из $x', x'' \in [a, b]$, $|x' - x''| < \delta$ следует:

$$|f(x') - f(x'')| < \frac{\varepsilon}{b-a}.$$

Возьмем произвольное разбиение T отрезка $[a, b]$, такое, что $\lambda = \lambda(T) < \delta$. Если $[x_i, x_{i+1}]$ — какой-либо частичный отрезок разбиения T и

$$m_i = \min_{[x_i, x_{i+1}]} f(x), \qquad M_i = \max_{[x_i, x_{i+1}]} f(x), \qquad i = 0, 1, 2, \ldots, n-1,$$

то

$$m_i = f(x_i'), \qquad M_i = f(x_i''), \qquad x_i', x_i'' \in [x_i, x_{i+1}],$$

$$\omega_i = M_i - m_i = f(x_i'') - f(x_i') < \frac{\varepsilon}{b-a}, \qquad i = 0, 1, 2, \ldots, n-1$$

и, следовательно,

$$\sum_{i=0}^{n-1} \omega_i \Delta x_i < \frac{\varepsilon}{b-a} \sum_{i=0}^{n-1} \Delta x_i = \varepsilon.$$

Но тогда, по следствию 1, функция $f(x)$ интегрируема на $[a, b]$.

§ 4. Признак интегрируемости Лебега[24]

Для формулировки признака интегрируеыости Лебега понадобятся некоторые новые понятия.

Пусть $\mathfrak{N}$ — множество точек разрыва функции $f(x)$, заданной на отрезке $[a, b]$. Ясно, что $\mathfrak{N}$ состоит из тех и только тех точек $x \in [a, b]$, в которых колебания $\omega(f, x)$ функции $f(x)$ больше нуля. Легко видеть, что

$$\mathfrak{N} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathfrak{N}_{\frac{1}{n}},$$

где $\mathfrak{N}_{\frac{1}{n}} = \left\{ x \in [a, b] |\ \omega(f, x) \geq \frac{1}{n} \right\}$.

---

[24] А. Лебег (1875–1941) — французский математик.

Нетрудно показать, что множество $\mathfrak{N}_\alpha = \{x \in [a,b] |\ \omega(f,x) \geq \alpha\}$ замкнуто для любого числа $\alpha > 0$. В самом деле, пусть x_0 — предельная точка множества $\mathfrak{N}_\alpha$. Так как $[a,b] \supset \mathfrak{N}_\alpha$, то x_0 будет предельной точкой также для $[a,b]$, и в силу замкнутости отрезка $x_0 \in [a,b]$. Пусть, далее, $U_\delta(x_0)$ — произвольная δ-окрестность точки x_0. Тогда в $U_\delta(x_0)$ попадет хотя бы одна толка $\bar{x} \in \mathfrak{N}_\alpha$, и поэтому $\omega(f, U_\delta(x_0)) \geq \omega(f,\bar{x}) \geq \alpha$. Но тогда

$$\omega(f,x_0) = \lim_{\delta\to 0}\ \omega(f, U_\delta(x_0)) \geq \alpha,$$

т.е. $x_0 \in \mathfrak{N}_\alpha$. Замкнутость $\mathfrak{N}_\alpha$ доказала.

Лемма *Пусть $f:\ [a,b] \to \mathbb{R}$ и $\omega(f,x) < \alpha$ в каждой точке $x \in [a,b]$. Тогда найдется число $\lambda > 0$, такое, что для любых точек $x', x'' \in [a,b]$ и таких, что $|x' - x''| < \lambda$, будем иметь $|f(x') - f(x'')| < \alpha$.*

Доказательство. Предположим противное, т.е. что существует $\alpha_0 > 0$, такое, что для любого числа $\lambda > 0$ найдутся точки x'_λ и x''_λ, $x'_\lambda, x''_\lambda \in [a,b]$, такие, что $|f(x'_\lambda) - f(x''_\lambda)| \geq \alpha_0$, хотя $|x'_\lambda - x''_\lambda| < \lambda$. Положим $\lambda = 1, \dfrac{1}{2}, \ldots, \dfrac{1}{n}, \ldots$ и обозначим точки x'_λ и X''_λ, соответствующие этим значениям $\lambda = \dfrac{1}{n}$ через x'_n и x''_n. В силу компактности отрезка $[a,b]$ из последовательности $\{x'_n\}$ можно выделить подпоследовательность x'_{n_i}, сходящуюся к точке $x_0 \in [a,b]$. Тогда $\{x''_{n_i}\}$ также сходится к x_0.

Пусть $U_\delta(x_0)$ — произвольная окрестность точки x_0. Так как x'_{n_i} и $x''_{n_i} \in U_\delta(x_0)$ при достаточно больших номерах n_i, то $\omega(f, U_\delta(x_0)) \geq |f(x'_{n_i}) - f(x''_{n_i})| \geq \alpha_0$. Но тогда $\omega(f,x_0) = \lim\limits_{\delta\to 0}\ \omega(f, U_\delta(x_0)) \geq \alpha_0$, что противоречит условию. Лемма доказана.

Определим теперь понятие множества меры нуль и множества длины нуль.

Определение 1. Условимся говорить, что множество $\mathfrak{M}$ имеет (линейную) *меру нуль*, если для $\forall\ \varepsilon > 0$ существует такое покрытие $\mathfrak{M}$ не более чем счетным набором интервалов, что сумма длин, любого конечного набора интервалов этого покрытия меньше $< \varepsilon$.

Простейшим примером множества меры нуль является, очевидно, конечное множество, более сложным — счетное множество, в частности, множество рациональных точек отрезка. В самом деле, пусть $\mathfrak{M} = \{x_1, x_2, \ldots, x_k, \ldots\}$ — счетное множество. Окружим точку $x_k \in \mathfrak{M}$ интервалом $U(x_k, \delta_k)$ длины $2\delta_k < \dfrac{\varepsilon}{2^{k+1}}$. В результате получки систему интервалов $\{U(x_k,\delta_k)\}$, образующую покрытие $\mathfrak{M}$. Сумма длин интервалов любого конечного набора из этого покрытая, очевидно, меньше суммы достаточно большого числа N членов бесконечной прогрессии $\left\{\dfrac{\varepsilon}{2^{k+1}}\right\}$:

$$\sum_{k=1}^{n} 2\delta_k < \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{2^{k+1}} < \varepsilon.$$

Аналогичными рассуждениями можно проверить, что множество $\mathfrak{M}$, являющееся объединением конечного или счетного набора множеств меры нуль, имеет меру нуль. Очевидно также, что каждое подмножество множества меры нуль имеет меру нуль.

Определение 2. Условимся говорить, что множество $\mathfrak{M}$ имеет *длину нуль*, если для каждого числа $\varepsilon > 0$ найдется покрытие $\mathfrak{M}$ конечным набором интервалов с суммой длин, меньшей ε.

Ясно, что множество длины нуль имеет и меру нуль. Обратное в общем случае неверно.

Однако нетрудно установить, что замкнутое и ограниченное множество мери нуль имеет длину нуль. Действительно, если $\mathfrak{M}$ замкнуто и ограничено, то, по лемме Бореля, из любого покрытия $\mathfrak{M}$ системой интервалов можно выделить конечное покрытие, в частности, из счетного покрытия с суммой длин любого конечного набора, меньшей заданного ε, можно выделить конечное покрытие, сумма длин интервалов которого меньше ε.

Замечание. Никакой отрезок не может иметь меру, равную нулю. Действительно, если бы мера некоторого отрезка $[\alpha, \beta]$, была равна нулю, то и его длина была бы равна нулю. Но для любого покрытия отрезка $[\alpha, \beta]$ конечным набором интервалов сумма длин интервалов покрытая не может быть меньше длин отрезка $[\alpha, \beta]$. Для случая покрытия $[\alpha, \beta]$ одним интервалом последнее утверждение очевидно. Общий случай читатель без труда проверит, используя метод математической индукции.

Теперь можем доказать следующую важную теорему.

Теорема. (Лебег) *Для того чтобы ограниченная на $[a, b]$ функция $f(x)$ была интегрируемой, необходимо и достаточно, чтобы множество ее точек разрыва имело меру нуль.*

Необходимость. Пусть $f(x)$ — интегрируемая на $[a, b]$ функция. Покажем, что множество $\mathfrak{N} = \{x : \ \omega(f, x) > 0\}$ имеет меру нуль. Для этого достаточно показать, что при $\forall\ n \in \mathbb{N}$ множество $\mathfrak{N}_{\frac{1}{n}}$ имеет меру нуль, так как тогда, в силу сказанного выше, $\mathfrak{N} = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \mathfrak{N}\dfrac{1}{n}$ также будет множеством меры нуль.

Доказательство поведем от противного и допустим, что для некоторого числа n_0 множество $\mathfrak{N}_{\frac{1}{n_0}}$ не является множеством меры нуль. Так как $\mathfrak{N}_{\frac{1}{n_0}}$ ограничено и замкнуто, то сделанное предположение равносильно предположению, что $\mathfrak{N}_{\frac{1}{n_0}}$ не является множеством длины нуль. Это значит, что найдется число $\varepsilon_0 > 0$, такое, что любое покрытие $\mathfrak{N}\frac{1}{n_0}$ конечной системой интервалов имеет сумму длин интервалов не меньшую, чем ε_0.

Взяв произвольное разбиение T отрезка $[a, b]$ на части системой точек $\{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ и заменив каждый отрезок $[x_k, x_{k+1}]$ интервалом $(x_n - \delta, x_{k+1} + \delta)$, где $\delta > 0$ произвольно мало, получим конечное покрытие отрезка $[a, b]$, а значит, и множества $\mathfrak{N}_{\frac{1}{n_0}}$. Выделим из этого покрытия такие интервалы, которые содержат точки $\mathfrak{N}_{\frac{1}{n_0}}$. Сумма длин этих интервалов не меньше ε_0. В силу произвола в выборе δ отсюда вытекает, что сумма длин отрезков разбиения $[x_k, x_{k+1}]^*$, содержащих точки $\mathfrak{N}_{\frac{1}{n_0}}$, также не может быть меньше ε_0. Но тогда

$$\sum_{k=0}^{n-1} \omega_k \Delta x_k \geq \sum_{[x_k, x_{k+1}]^*} \omega_k \Delta x_k \geq \frac{1}{n_0} \cdot \varepsilon_0,$$

что, в силу следствия 1 признака Дарбу, противоречит предположению об интегрируемости $f(x)$ на $[a, b]$.

Достаточность. Предположим теперь, что множество $\mathfrak{N}$ имеет меру нуль. Тогда для любого числа $\alpha > 0$ множество $\mathfrak{N}_\alpha$ также имеет меру нуль, а так как $\mathfrak{N}_\alpha$ — ограниченное и замкнутое множество, то его длина тоже равна нулю. Возьмем произвольное число $\varepsilon > 0$. Тогда для чисел $\alpha_0 = \dfrac{\varepsilon}{2(b-a)}$ и $\varepsilon' = \dfrac{\varepsilon}{4\Omega}$, где Ω — колебание $f(x)$ на $[a, b]$, найдется покрытие $\mathfrak{N}_{\alpha_0}$ конечным набором интервалов $U_1, U_2, \ldots, U_\nu$, сумма длин которых меньше ε'.

Выберем λ так, чтобы $\lambda < \dfrac{\varepsilon'}{2\nu}$ и $\lambda < \min\limits_j \alpha(U_j)$, где $\alpha(U_j)$ — длина интервала U_j, и разобьем $[a, b]$ на частичные отрезки длины, не превосходящей λ. Далее, те частичные отрезки $[x_k, x_{k+1}]$, которые не имеют общих точек ни с одним интервалом U_j, $j = 1, 2, \ldots, \nu$, дополнительно разобьем, если это необходимо, на отрезки длины, меньшей, чем λ_0, где λ_0 — число, соответствующее α_0 в лемме 1. Тогда получим некоторое разбиение T отрезка $[a, b]$, причем, в силу леммы 1, колебание функции на частичных отрезках $[x_i, x_{i+1}]$, не имеющих общих точек с $\bigcup\limits_{j=1}^{\nu} U_j$, не будет превосходить α_0.

Оценим сумму $\sum\limits_i \omega_i \Delta x_i = \sum' \omega_i \Delta x_i + \sum'' \omega_i \Delta x_i$, где к сумме $\sum'$ отнесем слагаемые, которые соответствуют отрезкам $[x_k, x_{k+1}]$ разбиения T, имеющим непустое пересечение хотя бы с одним интервалом покрытия $U_1, \ldots, U_\nu$, а к сумме $\sum''$ — слагаемые, которые соответствуют отрезкам раэбиения, не имеющим точек, принадлежащих объединению $\bigcup\limits_{j=1}^{\nu} U_j$. Легко видеть, что сумма длин отрезков разбиения, имеющих непустое пересечение с $\bigcup\limits_{j=1}^{\nu} U_j$, меньше числа $\varepsilon' + 2\lambda\nu < 2\varepsilon'$. Но тогда

$$\sum{}' \omega_k \Delta x_k \leq \Omega \sum{}' \Delta x_k < \Omega\, 2\varepsilon' = \frac{\varepsilon}{2}.$$

С другой стороны,

$$\sum{}'' \omega_k \Delta x_k \leq \alpha_0 \sum{}'' \Delta x_k \leq \alpha_0 (b-a) = \frac{\varepsilon}{2}.$$

Из этих неравенств следует, что существует разбиение T отрезка $[a, b]$, такое, что $\sum\limits_T \omega_k \Delta x_k < \varepsilon$, а это, в соответствии со следствием 1 признака Дарбу, означает интегрируемость функции $f(x)$ на $[a, b]$, что требовалось доказать.

Из замечания к определению 2 и теоремы Лебега вытекает, в частности, что интегрируемая на $[a, b]$ функция $f(x)$ имеет точки непрерывности на каждом промежутке $[\alpha, \beta] \subset [a, b]$. Кроме того, из теоремы Лебега вытекают три следствия.

Следствие 1. *Если функция $f(x)$ непрерывна на $[a, b]$, то она интегрируема на этом отрезке.*

Действительно, в этом случае множество $\mathfrak{N}$ является пустым и имеет, очевидно, меру нуль.

Следствие 2. *Функция $f(x)$, ограниченная на $[a, b]$ и имеющая конечное число точек разрыва, интегрируема на $[a, b]$.*

Это очевидно, так как конечное множество имеет меру нуль.

Следствие 3. *Монотонная и ограниченная на $[a, b]$ функция интегрируема на $[a, b]$.*

Для доказательства достаточно сослаться на теорему, согласно которой множество точек разрыва монотонной на $[a, b]$ функции не более чей счетно.

Иногда теорему Лебега удобно применять в следующей эквивалентной форме.

Теорема (Римана). *Для того, чтобы ограниченная на $[a, b]$ функция $f(x)$ была интегрируемой, необходимо и достаточно, чтобы для любых положительных чисел α и β существовало такое положительное число $\delta = \delta(\alpha, \beta)$, что при каждом разбиении T отрезка $[a, b]$, для которого $\lambda(T) < \delta$ сумма длин тех отрезков разбиения, на которых колебание функции больше α, была меньше β.*

Рекомендуем читателю доказать эквивалентность формулировок Римана и Лебега.

§ 5. Основные свойства интегрируемых функций и определенных интегралов

Свойство 1. *При построении интегральных сума мы предполагали, что функция $f(x)$ определена на отрезке $[a, b]$ положительной длина $b - a$. Для вырожденного отрезка $[a, a]$ длиной, равной нулю, положим, по определению, что*

$$\int\limits_a^a f(x)\,dx = 0. \tag{1}$$

Свойство 2. *Если функция $f(x)$ интегрируема на $[a, b]$ и $c = \text{const}$, то функция $cf(x)$ также интегрируема на $[a, b]$ и*

$$\int\limits_a^b cf(x)\,dx = c\int\limits_a^b f(x)\,dx. \tag{2}$$

Интегрируемость функции $cf(x)$ вытекает из того, что функции $f(x)$ и $cf(x)$ имеют одни и те же точки разрыва. Для доказательства равенства (2) возьмем какую-нибудь неограниченно измельчающуюся последовательность разбиений $\{T_n\}$ промежутка $[a, b]$ и произвольный набор точек $\xi_0^{(n)}, \ldots, \xi_{m_n}^{(0)}$ на отрезках разбиения T_n. Тогда из равенства

$$s(cf, T_n, \xi^{(n)}) = \sum_{k=0}^{m_n-1} cf(\xi_k^{(n)})\Delta x_k^{(n)} = c \sum_{k=0}^{m_n-1} f(\xi_k^{(n)})\Delta x_k^{(n)} = cs(f, T_n, \xi^{(n)})$$

предельный переходом при $\lambda_n \to 0$ получаем равенство (2).

Свойство 3. *Если функции $f_1(x)$ и $f_2(x)$ интегрируемы на $[a, b]$, то сумма $f_1(x) + f_2(x)$ интегрируема на $[a, b]$ и выполняется равенство*

$$\int\limits_a^b [f_1(x) + f_2(x)]\, dx = \int\limits_a^b f_1(x)\, dx + \int\limits_a^b f_2(x)\, dx. \tag{3}$$

Интегрируемость суммы функций $f_1(x)$ и $f_2(x)$ вытекает из того, что множество точек разрыва $f_1(x) + f_2(x)$ содержится в объединении множеств $\mathfrak{N}_1$ и $\mathfrak{N}_2$ точек разрыва функций $f_1(x)$, $f_2(x)$, каждое из которых имеет меру нуль. Равенство (3) устанавливаемся таким же образом, как равенство (2), и поэтому может быть доказано читателем самостоятельно.

Свойства 2 и 3 иногда объединяются в *свойство линейности* определенного интеграла, состоящее в следующем.

Если функции $f_1(x)$ и $f_2(x)$ интегрируемы на $[a, b]$ и c_1, c_2 — произвольные константы, то линейная комбинация $c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x)$ интегрируема на $[a, b]$ и имеет место равенство

$$\int\limits_a^b [c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x)]\, dx = c_1 \int\limits_a^b f_1(x)\, dx + c_2 \int\limits_a^b f_2(x)\, dx. \tag{4}$$

Это свойство, очевидно, распространяется на любое конечное число функций.

Свойство 4. *Положим, по определению, что для функции $f(x)$, интегрируемой на $[a, b]$*

$$\int\limits_b^a f(x)\, dx = -\int\limits_a^b f(x)\, dx. \tag{5}$$

Свойство 5. *Если функция $f(x)$ интегрируема на каждом из промежутков $[a, c]$ и $[c, b]$, то она интегрируема и на промежутке $[a, b]$ и выполняется равенство*

$$\int\limits_a^b f(x)\, dx = \int\limits_a^c f(x)\, dx + \int\limits_c^b f(x)\, dx.$$

Интегрируемость функции $f(x)$ на $[a, c]$ и $[c, b]$ означает, что множество точек разрыва $f(x)$ на каждом из этих промежутков имеет меру нуль, откуда следует, что множество точек разрыва $f(x)$ на $[a,b]$ также имеет меру нуль, т.е. функция $f(x)$ интегрируема на $[a,b]$. Для доказательства равенства (5) рассмотрим случай, когда $a < c < b$. Пусть $\{T_n\}$ — произвольная неограниченно измельчающаяся последовательность разбиений отрезка $[a,b]$. Без ограничения общности можно принять, что точка c содержится среди точек деления любого разбиения T_n. Взяв произвольный набор точек $\xi_0^{(n)}, \xi_1^{(n)}, \ldots, \xi_{m_n}^{(n)}$ на частичных отрезках разбиения T_n, получим:

$$\sum_{[a,b]} f(\xi_k^{(n)})\Delta x_k^{(n)} = \sum_{[a,c]} f(\xi_k^{(n)})\Delta x_k^{(n)} + \sum_{[c,b]} f(\xi_k^{(n)})\Delta x_k^{(n)}, \tag{7}$$

где знак отрезка под знаком сумма указывает на промежуток, по частичным отрезкам которого производится суммирование. Предельный переход в равенстве (7) при λ_n приводит к равенству (6).

Допустим теперь, что точка c лежит вне отрезка $[a,b]$, например, $a < b < c$. Тогда, согласно только что рассмотренному случаю,

$$\int\limits_a^c f(x)\,dx = \int\limits_a^b f(x)\,dx + \int\limits_b^c f(x)\,dx,$$

откуда, в силу равенства (5), следует справедливость равенства (6). Остальные случаи возможного расположения точен a, b, c предлагаем рассмотреть читателю.

Заметим, что свойство 5 интеграла приводят к следующему утверждению. Пусть функция $f(x)$ интегрируема на $[a,b]$ и отрезок $[a,b]$ точками $c_1, c_2, \ldots, c_\nu$ разделен на части $[a,c_1], [c_1,c_2], \ldots, [c_\nu, b]$. Тогда функция $f(x)$ интегрируема на каждой из этих частей и имеет место равенство

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \int\limits_a^{c_1} f(x)\,dx + \int\limits_{c_1}^{c_2} f(x)\,dx + \ldots + \int\limits_{c_\nu}^b f(x)\,dx.$$

Доказательство этого почти очевидного факта опускаем.

Свойство 6. *Если функция $f(x)$ интегрируена на $[a,b]$, то функция $|f(x)|$ также интегрируема на $[a,b]$, и при $a < b$ выполняется неравенство*

$$\left|\int\limits_a^b f(x)\,dx\right| \le \int\limits_a^b |f(x)|\,dx. \tag{8}$$

Интегрируемость функций $|f(x)|$ на $[a,b]$ очевидна, так как эта функция непрерывна в точках непрерывности функции $f(x)$, и поэтому множество точек разрыва $|f(x)|$, будучи подмножеством множества меры куль, имеет меру нуль. Для доказательства неравенства (8) достаточно в неравенстве

$$\left|\sum_{T_n} f(\xi_k^{(n)})\Delta x_k^{(n)}\right| \le \sum_{T_n} |f(\xi_k^{(n)})|\Delta x_k^{(n)}$$

произвести предельный переход при $\lambda_n \to 0$.

Свойство 7. *Произведение функций $f_1(x)$ и $f_2(x)$, интегрируемых на отрезке $[a,b]$, также интегрируемо на нем.*

Это вытекает из того, что множество точек разрыва функции $f_1(x)f_2(x)$ на $[a,b]$ является подмножеством объединения множеств $\mathfrak{N}_1$ и $\mathfrak{N}_2$ точек разрыва на этом отрезке функций $f_1(x)$ и $f_2(x)$ соответственно, и поэтому имеет меру нуль.

Следующие свойства относится к интегрированию неравенств.

Свойство 8. *Если функция $f(x)$ интегрируема на $[a,b]$ и $f(x) \geq 0$, то при $a < b$ выполняется неравенство*

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx \geq 0; \tag{9}$$

в частности, если $f(x) > 0$ всюду на $[a,b]$, то

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx > 0. \tag{10}$$

Действительно, если $f(x) \geq 0$ и $a < b$, то каждая интегральная сумма $s(f, T^n, \xi^{(n)})$, очевидно, неотрицательна, откуда следует, что предел этой суммы при $\lambda_n \to 0$ также неотрицателен, т.е. справедливо неравенство (9). Пусть теперь $g(x) > 0$ для любого $x \in [a,b]$. Так как функция $f(x)$ интегрируема на $[a,b]$, то на любой части $[\alpha,\beta]$ этого отрезка найдутся точки непрерывности $f(x)$ (см. замечание к определению 2 на с. 25S). Пусть x_0 — точка непрерывности $f(x)$, лежащая строго внутри отрезка $[a,b]$. По условию $f(x_0) = c_0 > 0$ и в силу непрерывности $f(x)$, найдется число $\delta > 0$, такое, что $(x_0 - \delta_0, x_0 + \delta_0) \subset [a,b]$ и $f(x) > \dfrac{c_0}{2}$ всюду на $(x_0 - \delta_0, x_0 + \delta_0)$. Но тогда

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \int\limits_a^{x_0-\delta} f(x)\,dx + \int\limits_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} f(x)\,dx + \int\limits_{x_0+\delta}^{b} \,dx \geq \int\limits_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} f(x)\,dx \geq c_0\delta > 0,$$

что требовалось доказать.

Следствие. *Если функции $f(x)$ и $g(x)$ интегрируемы на $[a,b]$ и при всех $x \in [a,b]$ имеем $f(x) \leq g(x)$, то при $a < b$*

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx \leq \int\limits_a^b g(x)\,dx. \tag{11}$$

При этом в случае строгого неравенства между функциями строгое неравенство имеет место и между интегралами от этих функций.

Для доказательства неравенства (11) достаточно применить свойство 8 к неотрицательной на $[a,b]$ функции $g(x) - f(x)$.

Из доказанного неравенства, в частности, следует, что при $a < b$

$$m(b-a) \le \int\limits_a^b f(x)\,dx \le M(b-a),$$

где

$$m = \inf_{[a,b]} f(x) \quad \text{и} \quad M = \sup_{[a,b]} f(x).$$

Первая теорема о среднем значении. *Пусть функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ интегрируемы на $[a,b]$, функция $\varphi(x)$ не меняет знаки на этом отрезке и $m = \inf\limits_{[a,b]} f(x)$, $M = \sup\limits_{[a,b]} f(x)$. Тогда найдется число μ, $m \le \mu \le M$, такое, что*

$$\int\limits_a^b f(x)\varphi(x)\,dx = \mu \int\limits_a^b \varphi(x)\,dx. \tag{12}$$

Доказательство. Предположим для определенности, что $a < b$ и $\varphi(x) \le 0$ на $[a,b]$. Умножив неравенство $m \le f(x) \le M$ на $\varphi(x)$ и проинтегрировав полученное неравенство по отрезку $[a,b]$ получим:

$$m\int\limits_a^b \varphi(x)\,dx \ge \int\limits_a^b f(x)\varphi(x)\,dx \ge M\int\limits_a^b \varphi(x)\,dx. \tag{13}$$

Если $\int\limits_a^b \varphi(x)\,dx = 0$, то, в силу (13), $\int\limits_a^b f(x)\varphi(x)\,dx = 0$, и в равенстве (12) в качестве μ можно взять любое число. Если $\int\limits_a^b \varphi(x)\,dx \ne 0$, то разделив все части неравенства (13) на $\int\limits_a^b \varphi(x)\,dx$, получим:

$$m \le \frac{\int\limits_a^b f(x)\varphi(x)\,dx}{\int\limits_a^b \varphi(x)\,dx} \le M.$$

Взяв

$$\frac{\int\limits_a^b f(x)\varphi(x)\,dx}{\int\limits_a^b \varphi(x)\,dx} = \mu,$$

придем к равенству (12).

Следствие 1. *Если функция $f(x)$ непрерывна на $[a,b]$, то найдется точка $c \in [a,b]$ такая, что $\mu = f(c)$. В этом случае равенство (11) принимает вид:*

$$\int\limits_a^b f(x)\varphi(x)\,dx = f(c)\int\limits_a^b \varphi(x)\,dx, \qquad a \le c \le b. \tag{14}$$

Следствие 2. *Если $\varphi(x) \equiv 1$, то равенства* (12) *и* (13) *принимают следующий вид:*

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \mu(b-a),$$

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = f(x)(b-a).$$

§ 6. Определенный интеграл с переменным верхним пределом. Формула Ньютона–Лейбница

Из определения интеграла как предела интегральных сумм следует, что значение определенного интеграла зависит лишь от подынтегральной функции $f(x)$ и пределов интегрирования a и b, но не зависит от того, какой буквой обозначена переменная интегрирования, так что

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \int\limits_a^b f(u)\,du = \int\limits_a^b f(t)\,dt = \ldots\ .$$

Пусть $f(x)$ — интегрируемая на $[a,b]$, x — произвольная точка промежутка $[a,b]$. Тогда функция $f(t)$ интегрируема и на промежутке $[a,x]$, т.е. существует

$$\int\limits_a^x f(t)\,dt.$$

Значение этого интеграла, очевидно, зависит от выбора x, и поэтому при переменной x этот интеграл определяет некоторую функцию $F(x)$ на промежутке x:

$$F(x) = \int\limits_a^x f(t)\,dt. \tag{1}$$

Интеграл (1), или что то же, определяемая этим интегралом функция, называется *интегралом с переменный верхним пределом.* Таким же образом может быть определен интеграл о переменным нижним пределом

$$\Phi(x) = \int\limits_x^b f(t)\,dt.$$

Обратимся к установлению некоторых свойств интеграла с переменным верхним пределом, заметив, что соответствующие свойства интеграла с переменным нижним пределом устанавливаются аналогично.

Теорема 1. *Интеграл с переменный верхним пределом является функцией, непрерывной на промежутке* $[a, b]$.

Доказательство. Установив непрерывность $F(x)$ в произвольно взятой точке $x_0 \in [a, b]$. Используя свойства определенного интеграла и теорему о среднем значении, представим приращение $\Delta F(x_0)$ в виде

$$\Delta F(x_0) = F(x_0 + \Delta x) - F(x_0) = \int\limits_a^{x_0+\Delta x} f(t)\,dt - \int\limits_a^{x_0} f(t)\,dt = \mu_{\Delta x}\Delta x, \tag{2}$$

где $m_{\Delta x} \le \mu_{\Delta x} \le M_{\Delta x}$, а через $m_{\Delta x}$ и $M_{\Delta x}$ обозначены соответственно точные нижняя и верхняя границы функции $f(x)$ на промежутке между точками x_0 и $x_0 + \Delta x$.

Если m и M — нижняя и верхняя грани $f(x)$ на $[a, b]$, то, очевидно, $m \le m_{\Delta x} \le M_{\Delta x} \le M$, откуда ясно, что $\mu_{\Delta x}$ — ограниченная переменяя величина. Это означает, что при $\Delta x \to 0$ приращение функции $F(x)$ также стремится к нулю, т.е. что функция $F(x)$ непрерывна в точке x_0.

Замечание. Функция $f(x)$ предполагается только интегрируемой. В частности, точка x_0 могла оказаться точкой разрыва функции $f(x)$. Этот факт показывает, что переход от интегрируемых (вообще говоря, разрывных) функций на $[a, b]$ к интегралам с переменным верхним пределом от этих функций (интегрирование функций) является отображением класса интегрируемых на $[a, b]$ функций в множество $C[a, b]$ непрерывных на $[a, b]$ функций.

Следующее свойство интеграла с переменным верхним пределом представляет особый интерес.

Теорема 2. *Интеграл с переменным верхним пределом является функцией, доифференцируемой в каждой точке непрерывности подынтегральной функции. При этом если* x_0 *— точка непрерывности* $f(x)$, *то*

$$F'(x_0) = f(x_0). \tag{3}$$

Доказательство. Покажем, что для непрерывной в точке x_0 функции $f(x)$ величина $\mu_{\Delta x}$ в равенстве (2) имеет пределом $f(x_0)$ при $\Delta x \to 0$. Для этого возьмем произвольное число $\varepsilon > 0$ и найдем такое число $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, что при $|x - x_0| = |\Delta x| < \delta$ выполняется неравенство

$$|f(x) - f(x_0)| < \frac{\varepsilon}{2},$$

или (что то же) неравенство

$$f(x_0) - \frac{\varepsilon}{2} < f(x) < f(x_0) + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Обозначив через $m_{\Delta x}$ и $M_{\Delta x}$ соответственно нижнюю и верхнюю грани множества значений функции $f(x)$ на промежутке между точками x_0 и $x_0 + \Delta x$, запишем систему неравенств

$$f(x_0) - \frac{\varepsilon}{2} \leq m_{\Delta x} \leq \mu_{\Delta x} \leq M_{\Delta x} \leq f(x_0) + \frac{\varepsilon}{2},$$

из которой следует, что

$$|\mu_{\Delta x} - f(x_))| \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon,$$

т.е. что

$$\lim_{\Delta x \to 0} \mu_{\Delta x} = f(x_0).$$

Но тогда из (2) вытекает, что

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{F(x_0 + \Delta x) - F(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \mu_{\Delta x} = f(x_0),$$

т.е. справедливость равенства (3). Теорема доказана.

Если, в частности, функция $f(x)$ непрерывна на всем промежутке $[a, b]$, то функция $F(x)$ дифференцируема на $[a, b]$ и $F'(x) = f(x)$ при $\forall\ x \in [a, b]$, т.е. в этом случае интеграл с переменным верхним пределом является первообразной для подынтегральной функции. Тем самым доказан чрезвычайно важный факт.

Теорема 3. *Для каждой непрерывной на отрезка функции существует первообразная.*

Замечание 1. Эта теорема показывает, что определенный в § 1 гл. VII класс B функций, имеющих на отрезке $[a, b]$ первообразные, содержит все функции, непрерывные на этом отрезке (т.е. $C[a, b] \subset B$). Пример функции $F(x) = x^2 \sin \dfrac{1}{x}$, $x \neq 0$, $F(0) = 0$ показывает, что в классе B имеются и не непрерывная функция $f(x) = F'(x) = 2x \sin \dfrac{1}{x} - \cos \dfrac{1}{x}$ при $x \neq 0$, $f(0) = 0$, т.е. что класс B шире класса $C[a, b]$.

Замечание 2. Из теоремы 2 следует, что операция интегрирования, определенная на множестве $C[a, b]$, является отображением (очевидно, линейным) этого множества в множество $C'[a, b]$ дифференцируемых на $[a, b]$ функций.

Функция $F(x)$, определенная интегралом (1) от непрерывной на $[a, b]$ функции $f(x)$, является одной из первообразных для этой функции, именно такой первообразной, которая при $x = a$ обращается в нуль. Пусть теперь $F^*(x)$ — произвольная первообразная функции $f(x)$. Тогда существует такая константа C, что $F^*(x) = F(x) + C$, т.е.

$$F^*(x) = \int\limits_a^x f(t)\, dt + C. \tag{4}$$

Взяв в этом равенстве $x = a$, находим, что $C = F^*(a)$, откуда

$$F^*(x) = \int\limits_a^x f(t)\, dt + F^*(a)$$

или

$$\int\limits_a^x f(t)\,dt = F^*(x) - F^*(a), \tag{5}$$

где $F^*(x)$ — любая первообразная функции $f(x)$. Из равенства (5) следует связь интеграла, имеющего переменный верхний предел, с неопределенным интегралом, так как под $F^*(x)$ можно понимать, очевидно, первообразную $f(x)$, записанную в общем виде, т.е. неопределенный интеграл функции $f(x)$.

Положив в равенстве (5) $x = b$, получим *формулу Ньютона–Лейбница*, которая является основной формулой интегрального исчисления:

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a). \tag{6}$$

Здесь $F(x)$ — произвольная первообразная функции $f(x)$.

Формула (6) является основной для вычисления определенных интегралов от функций, первообразные которых могут быть найдены. Формулой (6) можно пользоваться и тогда, когда на $[a, b]$ выполняется всюду равенство $F'(x) = f(x)$, кроме конечного числа точек, в которых имеется разрыв $f(x)$ или не существует $F'(x)$. Заметим, что для разности $F(b) - F(a)$ принято обозначение $F(x)\Big|_a^b$, с учетом которого формулу (6) можно записать в следующем виде:

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big|_a^b. \tag{7}$$

§ 7. Вторая теорема о среднем значении

Свойство непрерывности интеграла с переменным верхним пределом позволяет установить следующее утверждение.

Вторая теорема о среднем значении или теорема Бонне[25]. *Пусть функция $f(x)$ интегрируема на $[a, b]$ и функция $\varphi(x)$ монотонна на этом отрезке. Тогда существует такое число $\xi \in [a, b]$, что*

$$\int\limits_a^b f(x)\varphi(x)\,dx = \varphi(a+0)\int\limits_a^\xi f(x)\,dx + \varphi(b-0)\int\limits_\xi^b f(x)\,dx. \tag{1}$$

Для доказательства теоремы Бонне нам понадобится следующая лемма.

---

[25] О. Бонне (18190–1892) — французский математик.

Лемма Абеля[26]**.** *Если* $\alpha_1 \geq \alpha_2 \geq \ldots \geq \alpha_n \geq 0$*;* $a_1, a_2, \ldots, a_n$ *— произвольные числа и* A*,* B *таковы, что для всех сумм*

$$s_k = a_1 + a_2 + \ldots + a_k, \qquad k = 1, 2, \ldots, n,$$

выполнено неравенство

$$A \leq s_k \leq B, \tag{2}$$

то

$$A\alpha_1 \leq \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \ldots + \alpha_n a_n \leq B\alpha_1.$$

Доказательство леммы Абеля. Так как $a_1 = s_1$, $a_k = s_k - s_{k-1}$ при $k > 1$, то сумму $\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \ldots + \alpha_n a_n$ можно преобразовать следующим образом:

$$\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \ldots + \alpha_n a_n = \alpha_1 s_1 + \alpha_2(s_2 - a_1) + \ldots + \alpha_n(s_n - s_{n-1}) =$$

$$s_1(\alpha_1 - \alpha_2) + s_2(\alpha\alpha_2 - \alpha_3) + \ldots + s_{n-1}(\alpha_{n-1} - \alpha_n) + s_n\alpha_n.$$

Поскольку $\alpha_k - \alpha_{k-1} \geq 0$, $k = 1, 2, \ldots, n-1$, $\alpha_n \geq 0$, заменив в правой части этого равенства каждую сумму s_k сначала на A, а затем на B, получим, в силу (2):

$$A[(\alpha_1 - \alpha_2) + (\alpha_2 - \alpha_3) + \ldots + (\alpha_{n-1} - \alpha_n) + \alpha_n] \leq \sum_{k=1}^{n} \alpha_k a_k \leq$$

$$\leq B[(\alpha_1 - \alpha_2) + (\alpha\alpha_2 - \alpha_3) + \ldots + (\alpha_{n-1} - \alpha_n) + \alpha_n]$$

или

$$A\alpha_1 \leq \sum_{k=1}^{n} \alpha_k a_k \leq B\alpha_1,$$

что требовалось доказать.

Доказательство теоремы Бонне. Рассмотрим случай, когда $\varphi(x)$ не возрастет и $\varphi(x) \geq 0$. Для любого T_n из неограниченно измельчающейся последовательности разбиений $\{T_n\}$ на отрезке $[a, b]$ представим $I = \int\limits_a^b f(x)\varphi(x)\,dx$ в следующем виде:

$$I = \sum_{k=0}^{m_n-1} \int\limits_{x_k^{(n)}}^{x_{k+1}^{(n)}} f(x)\varphi(x)\,dx = \sum_{k=0}^{m_n-1} \varphi(\xi_k^{(n)}) \int\limits_{x_k^{(n)}}^{x_{k+1}^{(n)}} f(x)\,dx +$$

$$+ \sum_{k=0}^{m_n-1} \int\limits_{x_k^{(n)}}^{x_{k+1}^{(n)}} [\varphi(x) - \varphi(\xi_k^{(n)})] f(x)\,dx = I_0^{(n)} + I_1^{(n)},$$

где точка $\xi_k^{(n)} \in [x_k^{(n)}, x_{k+1}^{(n)}]$ и выбрана произвольно. Легко показать, что $\lim\limits_{\lambda_n \to 0} I_1^{(n)} = 0$. В самом деле, пусть $K = \sup\limits_{[a,b]} |f(x)|$ и $\omega_k^{(n)}(\varphi)$ — колебание функции $\varphi(x)$ на

---

[26] Н. Абель (1802–1829) — норвежский математик.

отрезке $[x_k^{(n)}, x_{k+1}^{(n)}]$. Тогда

$$0 \le |I_1^{(n)}| \le \sum_{k=0}^{m_n-1} \int x_k^{(n)^{x_{k+1}^{(n)}}} |\varphi(x) - \varphi(\xi_k^{(n)})|\, |f(x)|\, dx \le$$

$$\le K \sum_{k=0}^{m_n-1} \omega_k^{(n)}(\varphi)\, \Delta x_k^{(n)}. \tag{3}$$

Из интегрируемости функции $\varphi(x)$ на $[a, b]$ вытекает, что сумма, стоящая в правой части неравенства (3), а следовательно и вся правая часть этого неравенства стремится к нулю при $\lambda_n \to 0$, т.е. $\lim\limits_{\lambda_n \to 0} I_1^{(n)} = 0$. Но тогда

$$I = \lim_{\lambda_n \to 0} I_0^{(n)}.$$

Для отыскания этого предела введен в рассмотрение функцию $F(x) = \int\limits_a^x f(x)\, dx$.

Так как

$$\int\limits_{x_k^{(n)}}^{x_{k+1}^{(n)}} = F(x_{k+1}^{(n)}) - F(x_k^{(n)}) \quad \text{и} \quad F(x_0^{(n)}) = F(a) = 0,$$

то

$$I_0^{(n)} = \varphi(\xi_0^{(n)})F(x_1^{(n)}) + \varphi(\xi_1^{(n)})[F(x_2^{(n)}) - F(x_1^{(n)})] + \ldots + \varphi(\xi_{m_n-1})[F(x_{m_n}^{(n)}) - F(x_{m_n-1}^{(n)})].$$

Положив в лемме Абеля $\alpha_k = \varphi(\xi_k^{(n)})$, $a_k = F(x_k^{(n)}) - F(x_{k+1}^{(n)})$ и выбрав в качестве A и B соответственно нижнюю и верхнюю грани m и M функции $F(x)$ на $[a, b]$, будем иметь согласно (2):

$$m\varphi(\xi_0^{(n)}) \le I_0^{(n)} \le M\varphi(\xi_0^{(n)}).$$

Это неравенство верно при любом выборе точки $\xi_0^{(n)}$ на отрезке $[a, x_1^{(n)}]$. Но тогда при $\lambda_n \to 0$ и, следовательно, $x_1^{(n)} \to a$ также

$$\xi_0^{(n)} \to a,$$

и потому

$$\varphi(\xi_0^{(n)}) \to \varphi(a+0). \tag{4}$$

Перейдя в неравенстве (4) к пределу при $\lambda_n \to 0$, получим:

$$m\varphi(a+0) \le I \le M\varphi(a+0). \tag{4$'$}$$

Предположим, что $\varphi(a+0) \ne 0$. Тогда из неравенства (4$'$) следует, что

$$m \le \frac{I}{\varphi(a+0)} \le M.$$

Поскольку непрерывная функция $F(x)$ принимает все промежуточные значения, то найдется точка $\xi \in [a, b]$, такая, что

$$\frac{I}{\varphi(a+0)} = \frac{1}{\varphi(a+0)} \int\limits_a^b f(x)\varphi(x)\,dx = F(\xi) = \int\limits_a^\xi f(x)\,dx$$

или

$$\int\limits_a^b f(x)\varphi(x)\,dx = \varphi(a+0) \int\limits_a^\xi f(x)\,dx. \tag{5}$$

Если $\varphi(a+0) = 0$, то, в силу $(4')$, $I = 0$ и равенство (5) верно при любой выборе $\xi \in [a, b]$.

Пусть теперь $\varphi(x)$ — произвольная невозрастающая на $[a, b]$ функция. Положим $\psi(x) = \varphi(x) - \varphi(b-0)$. Очевидно, что $\psi(x)$ не возрастает и $\psi(x) \geq 0$. Поэтому к $f(x)$ и $\psi(x)$ применима формула (5), с учетом которой

$$\int\limits_a^b f(x)[\psi(x) - \varphi(b-0)]\,dx = [\varphi(a+0) - \varphi(b-0)] \int\limits_a^\xi f(x)\,dx.$$

Отсюда

$$\int\limits_a^b f(x)\varphi(x)\,dx = \varphi(b-0) \int\limits_a^b f(x)\,dx + \varphi(a+0) \int\limits_a^\xi f(x)\,dx - \varphi(b-0) \int\limits_a^\xi f(x)\,dx$$

или

$$\int\limits_a^b f(x)\varphi(x)\,dx = \varphi(a+0) \int\limits_a^\xi f(x)\,dx + \varphi(b-0) \int\limits_\xi^b f(x)\,dx, \tag{6}$$

и теорема Бонне для невозрастающей функции $\varphi(x)$ доказана.

Наконец, если $\varphi(x)$ — неубывающая функция, то для доказательства теоремы Бонне достаточно применить равенство (3) к функции $f(x)$ и взять $\chi(x) = -\varphi(x)$.

Замечание. Мы определили интеграл от ограниченной функция по отрезку. Если ограниченная функция $f(x)$ задана на конечном интервале (a, b), то под интегралом от $f(x)$ по этому интервалу понимается интеграл по $[a, b]$ от функции $f(x)$, доопределенной в концах интервала какими-либо значениями. Так как величина интеграла по отрезку не зависит от значений функции в конечном числе точек, то безразлично, какими значениями мы наделяем $f(x)$ в точках a и b. Аналогично понимается интеграл от ограниченной функции по конечному полуинтервалу.

§ 8. Основные методы вычисления определенных интегралов

Установленная в § 6 связь между неопределенным и определенным интегралами позволяет распространить на определению интегралы основные методы вычисления неопределенных интегралов.

1. Метод интегрирования по частям. Пусть $u(x)$ и $v(x)$ — дифференцируемые на $[a, b]$ функции. Тогда, взяв

$$\varphi(x) = \int\limits_a^x v\,du,$$

найдем, что выражение $u(x)v(x) - \varphi(x)$ является первообразной функции uv'. Поэтому

$$\int\limits_a^b u\,dv = [u(x)v9x) - \varphi(x)]\Big|_a^b = u(x)v(x)\Big|_a^b - \varphi(x)\Big|_a^b.$$

Но, в силу определения $\varphi(x)$, очевидно,

$$\varphi(x)\Big|_a^b = \int\limits_a^b v\,du,$$

откуда следует формула интегрирования по частям:

$$\int\limits_a^b u\,dv = u \cdot v\Big|_a^b - \int\limits_a^b v\,du. \tag{1}$$

2. Метод замены переменной в определенном интеграле основан на следующей утверждении.

Теорема. *Пусть функция $f(x)$ интегрируема на $[a, b]$ и $x = \varphi(t)$, где $\varphi(t)$ — монотонная и непрерывная на $[\alpha, \beta]$ функция с интегрируемой производной $\varphi'(t)$, отображающая отрезок $[\alpha, \beta]$ на отрезок $[a, b]$. Допустим, кроме того, что $|\varphi'(t)| \geq \mu > 0$ всюду на $[\alpha, \beta]$. Тогда*

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \int\limits_\alpha^\beta f[\varphi(t)]|\varphi'(t)|\,dt.$$

Доказательство. Покажем, прежде всего, что функция $f[\varphi(t)]$ интегрируема на $[\alpha, \beta]$. Если в точке $x_0 \in [a, b]$ функция $f(x)$ непрерывна и $t_0 = \varphi^{-1}(x_0)$ (согласно теореме 3 из § 3 гл. III), функция $\varphi^{-1}(x)$ существует и непрерывна), то функция $f[\varphi(t)]$ также непрерывна в точке t_0 как суперпозиция непрерывных функций. Поэтому, если $\mathfrak{N}_x$ — множество точек разрыва функции $f(x)$, $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_k, \ldots$ — некоторая система интервалов, покрывающая $\mathfrak{N}_x$ и $\delta_i = \varphi^{-1}(\Delta_i)$, то система интервалов $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_k, \ldots$ покрывает $\mathfrak{N}_t$ — множество точек разрыва функции $f[\varphi(t)]$. Пусть $\Delta_i = (a_i, b_i)$ и $\delta_i = (\alpha_i, \beta_i)$. По теореме Лагранжа,

$$b_i - a_i = |\varphi(\beta_i) - \varphi(\alpha_i)| = (\beta_i - \alpha_i)|\varphi'(t_i)| \geq \mu(\beta_i - \alpha_i). \tag{2}$$

Поэтому для любого k

$$\sum_{i=1}^{k} \text{дл}\,(\delta_i) \leq \frac{1}{\mu} \sum_{i=1}^{k} \text{дл}\,(\Delta_i).$$

Так как функция $f(x)$, по условию, интегрируема и, следовательно, $\mathfrak{N}_x$ есть множество меры нуль, то для любого числа $\varepsilon > 0$ найдется некоторая система интервалов $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_k, \ldots$, такая, что $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} \Delta_i \supset \mathfrak{N}_x$ и для любых $i_1 < i_2 < \ldots < i_k$ $\sum\limits_{j=1}^{n} \text{дл}\,(\Delta_{i_j}) < \mu\varepsilon$. Но тогда $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} \delta_i \supset \mathfrak{N}_t$ и, в силу неравенства (2) для любых $i_1 < i_2 < \ldots < i_k$, $\sum\limits_{j=1}^{n} \text{дл}\,(\delta_{i_j}) < \mu$. Поэтому $\mathfrak{N}_t$ — множество мера нуль, функция $f[\varphi(t)]$ интегрируема на $[\alpha, \beta]$ и, следовательно, функция $f[\varphi(t)]\varphi'(t)$ тоже интегрируема на $[\alpha, \beta]$.

Пусть $\{\Phi_n\}$ — произвольная последовательность разбиений отрезка $[\alpha, \beta]$ и

$$t_0^{(n)} = \alpha < t_1^{(n)} < \ldots < t_{k_n-1}^{(n)} < t_{k_n} = \beta$$

— точки деления разбиения Φ_n. Положим для определенности, что $\varphi(t)$ — убывающая функция, так что $\varphi'(t) < 0$. Если $x_i^{(n)} = \varphi(t_i^{(n)}$, то

$$x_{k_n}^{(n)} = a < s_{k_n-1}^{(n)} < \ldots < x_1^{(n)} < x_0^{(n)} = b$$

есть разбиение T_n отрезка $[a, b]$, причем, в силу равенства (2), если $\lambda(\Phi_n) \to 0$, то и $\lambda(T_n) \to 0$. Пусть $\xi_i^{(n)} \in [x_{i+1}^{(n)}, x_i^{(n)}]$. Имеем

$$\sum_{i=0}^{k_n-1} f(\xi_{k_n-i}^{(n)})(x_{k_n-(i+1)}^{(n)} - x_{k_n-i}^{(n)}) =$$

$$= \sum_{i=0}^{k_n-1} f(\xi_{k_n-i}^{(n)})[\varphi(t_{k_n-(i+1)}^{(n)} - \varphi(t_{k_n-i}^{(n)}] =$$

$$= \sum_{i=0}^{k_n-1} f(\xi_{k_n-i}^{(n)})\varphi'(\theta_{k_n-i}^{(n)}(t_{k_n-(n+1)}^{(n)} - t_{k_n-i}^{(n)}) =$$

$$= -\sum_{j=1}^{k_n} f(\xi_j^{(n)})\varphi'(\theta_j^{(n)})(t_j^{(n)} - t_{j-1}^{(n)}),$$

где $t_j^{(n)} < \theta_j^{(n)} < t_j^{(n)}$. Так как точки $\xi_j^{(n)}$ можно выбирать на отрезке $[x_{j+1}^{(n)}, x_j^{(n)}]$ произвольно, то положим $\xi_j^{(n)} = \varphi(\theta_j^{(n)})$. Тогда предыдущее равенство можно записать так:

$$\sum_{i=0}^{k_n-1} f(\xi_{k_n-i}^{(n)})(x_{k_n-(i+1)}^{(n)} - x_{k_n-i}^{(n)} = -\sum_{k=0}^{m-1} f(\xi_j^{(n)})\varphi'(\theta_j^{(n)})(t_j^{(n)} - t_{j-1}^{(n)}).$$

Пусть $\lambda(\Phi_n) \to 0$ и, следовательно, $\lambda(T_n) \to 0$. Так как в последней равенстве оправа и слева стоят интегральные суммы для интегрируемых функций $f(x)$ и $f[\varphi(t)]\varphi'(t)$, то в пределе оно принимает следующий вид:

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = -\int\limits_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)\,dt$$

или

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \int\limits_\alpha^\beta f[\varphi(t)]|\varphi'(t)|\,dt.$$

что требовалось доказать.

Замечание. Если функции $f(x)$ и $\varphi'(t)$ непрерывны на $[a,b]$ и соответственно на $[\alpha,\beta]$, то формула замены переменной верна и без предположения о монотонности функции $\varphi'(t)$.

В конкретных примерах для замены переменной, как и при вычислении неопределенного интеграла, часто используется формула

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \int\limits_a^b \Phi[\psi(x)]\,d\psi(x) = \int\limits_a^b \Phi(t)\,dt.$$

В этой формуле интеграл справа получается заменой переменкой $\psi(x) = t$ или $x = \psi^{-1}(t)$.

Примеры.

1. (Интегральная форма остаточного члена формулы Тейлора).

Пусть $f(x)$ — функция, $(n+1)$ раз дифференцируемая в окрестности $U_\delta(x_0)$ точки x_0, $x \in U_\delta(x_0)$. Тогда если

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + R_n(x),$$

?

то функция $R_n(x)$ также $(n+1)$ раз дифференцируемая в окрестности $U_\delta(x_0)$. Поэтому

$$f'(x) = f'(x_0) + \frac{f''(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f'''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{(n-1)!}(x-x_0)^{n-1} + R'_n,(x)$$

$$f''(x) = f''(x_0) + \frac{f'''(x_0)}{1!}(x-x_0) + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{(n-2)!}(x-x_0)^{n-2} + R''_n,(x)$$

$$\ldots$$

$$f^{(n)}(x) = f^{(n)}(x_0) + R_n^{(n)}(x). \tag{3}$$

Положив в этих равенствах $x = x_0$, получим;

$$R_n(x_0) = R_n'(x_0) = R_n''(x_0) = \ldots = R_n^{(n)}(x_0) = 0. \tag{4}$$

По формуле Ньютона–Лейбница,

$$R_n(x) = R_n(x) - R_n(x_0) = \int\limits_{x_0}^{x} R_n'(t)\,dt.$$

Приманив к полученному выражению правила замены переменное и интегрирования по частям, найдем с учетом равенства (4):

$$R_n(x) = \int\limits_{x_0}^{x} R_n'(t)\,dt = \int\limits_{x_0}^{x} R_n'(t)\,d(t-x) =$$

$$= R_n'(t)(t-x)\Big|_{x_0}^{x} - \int\limits_{x_0}^{x} (t-x)R_n''(t)\,dt = -\int\limits_{x_0}^{x} (t-x)R_n''(t)\,d(t-x)x =$$

$$= -\frac{(t-x)^2}{2}R_n''(t)\Big|_{x_0}^{x} + \frac{(-1)^2}{2!}\int\limits_{x_0}^{x} (t-x)^2 R_n'''(t)\,dt =$$

$$= \frac{(-1)^2}{2!}\int\limits_{x_0}^{x} (t-x)^2 R_n'''(t)\,d(t-x) = \ldots =$$

$$= \frac{(-1)^n}{n!}\int\limits_{x_0}^{x} (t-x)^n R_n^{(n+1)}(t)\,dt.$$

Но из равенств (3) следует, что $R_n^{(n+1)}(x) = f^{(n+1)}(x)$, тогда

$$R_n(x) = \frac{(-1)^n}{n!}\int\limits_{x_0}^{x} (t-x)^n f^{(n+1)}(t)\,dt.$$

что требовалось доказать.

Вычисляя определенный интеграл с помощью того или иного метода, мы, как правило, на заключительном этапе используем формулу Ньютона–Лейбница, т.е. приходим к задаче нахождения неопределенного интеграла. Если получившийся неопределенный интеграл не выражается в элементарных функциях, то мы не можем вычислить и определенный интеграл. Однако в некоторых случаях путем искусственных приемов эту трудность можно обойти.

Примеры.

2. В интеграле $\int\limits_{0}^{1} \frac{\ln(1+x)}{1+x^2}\,dx$ сделаем замену переменной $x = \operatorname{tg}\varphi$, $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{4}$. Тогда

$$dx = \frac{d\varphi}{\cos^2\varphi} = (1 + \operatorname{tg}^2\varphi)\,d\varphi = (1 + x^2)\,d\varphi,$$

так что $\frac{dx}{1+x^2} = d\varphi$. Следовательно,

$$\int\limits_0^1 \frac{\ln(1+x)}{1+x^2}\,dx = \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(1+\operatorname{tg}\varphi)\,d\varphi = \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\frac{\cos\varphi+\sin\varphi}{\cos\varphi}\,d\varphi =$$

$$= \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(\cos\varphi+\sin\varphi)\,d\varphi - \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\cos\varphi\,d\varphi.$$

Но $\cos\varphi + \sin\varphi = \sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{4} - \varphi\right)$. Поэтому

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(\cos\varphi+\sin\varphi)\,d\varphi = \frac{\pi}{4}\ln\sqrt{2} + \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\cos\left(\frac{\text{ß}}{4} - \varphi\right)d\varphi.$$

В полученном выражении сделаем замену: $\frac{\pi}{4} - \varphi = \theta$, $-d\varphi = d\theta$, $\theta = \frac{\pi}{4}$ при $\varphi = 0$, $\theta = 0$ при $\varphi = \frac{\pi}{4}$. Тогда

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\cos\left(\frac{\pi}{4} - \varphi\right)d\varphi = \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\cos\theta\,d\theta,$$

откуда

$$\int\limits_0^1 \frac{\ln(1+x)}{1+x^2}\,dx = \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\cos\theta\,d\theta + \frac{\pi}{2}\ln 2 - \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\cos\varphi\,d\varphi = \frac{\pi}{8}\ln 2.$$

§ 9. Приближенное вычисление определенных интегралов

Как уже известно, первообразные многих элементарных функций представляют собой трансцендентные функции. Поэтому даже в тех случаях, когда первообразные могут быть найдены, точное значение определенного интеграла иногда вычислить трудно. Далее, значение определенного интеграла от функции, полученной по результатам обработки наблюдений (которая может быть задана в виде таблицы), содержит ошибки измерения и является приближенным. Наконец, вычисление определенных интегралов с помощью счетно-вычислительных машин требует использования алторитмов, создание которых возможно, как правило, лишь на основе приближенных методов интегрирования, все это приводит к необходимости разработки методов приближенного вычисления определенных интегралов.

Один из методов приближенного вычисления определенного интеграла состоит в замене интегрируемой функции другой, более простой для вычислений, таким образом, чтобы эта замена сопровождалась малой погрешностью в значении интеграла. Классом простых функций является класс многочленов. Однако использование многочленов высоких степеней нецелесообразно, так как связано с громоздкими вычислениями, поэтому обычно для нахождения определенного интеграла применяются, многочлены низких степеней. Чтобы при этом обеспечить достаточную точность приближенных формул, используем следующий прием. Промежуток $[a, b]$ задания функции $f(x)$ разделим конечным числом точек на достаточно большое числе элементарных частей, на каждой из которых функцию $f(x)$ заменим соответствующим многочленом нулевой степени (константой), линейной функцией или квадратным трехчленом, аппроксимирующими данную функцию. Так, если в качестве константы на элементарной части $[x_k, x_{k+1}]$ разбиения T взять значение функции в произвольной точке ξ_k этой части, то интеграл от полученной «ступенчатой» функции обратится, очевидно, в сумму

$$\sum_T f(\xi_k)\Delta x_k,$$

являющуюся интегральной суммой для функции $f(x)$ и, согласно определению интеграла, при достаточно малых значениях $\lambda = \max\limits_k \ \Delta x_k$ мало отличающуюся от $\int\limits_a^b f(x)\,dx$. Для упрощения выражения этой суммы промежуток $[a, b]$ разделим на равные части так, что $\Delta x_k = \dfrac{b-a}{n}$, а в качестве точек ξ_k возьмем или правые, или левые концы отрезков разбиения, в результате получим следующие формулы:

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \frac{b-a}{n}(y_0 + y_1 + \ldots + y_{n-1}) + R_n \tag{1}$$

или

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \frac{b-a}{n}(y_1 + y_2 + \ldots + y_n) + R_n, \tag{2}$$

где $y_k = f(x_k)$.

Формулы (1) и (2) называются *формулами прямоугольников*, так как произведение $f(\xi_k)\Delta x_k$ при $f(x) \geq 0$ можно рассматривать как площадь прямоугольника с основанием Δx_k и высотой $f(\xi_k)$. Можно показать, что погрешность R_n формул (1) и (2) не превосходит $\dfrac{A}{n^2}$ $\left(\text{т.е. } |R_n| \leq \dfrac{A}{n^2}\right)$, где константа A зависит только от заданной функции и длины промежутка $[a, b]$.

Сложением обеих частей равенств (1) и (2) и делением результатов сложения на 2 получим формулу

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{2n}[(y_0 + y_n) + 2(y_1 + y_2 + \ldots + y_{n-1})], \tag{3}$$

называемую *формулой трапеций.* Ее можно вывести интегрированием функции, графиком которой является ломаная, полученная последовательный соединением точек (x_k, y_k) графика $f(x)$. В результате криволинейная трапеция оказывается замененной фигурой, составленной из элементарных прямолинейных трапеций, ограниченных отрезками $[x_k, x_{k+1}]$ оси Ox, прямыми $x = x_k$, x_{k+1} и хордами, соединяющими точки (x_k, y_k), (x_{k+1}, y_{k+1}).

Оценим погрешность формулы трапеции, т.е. разность между правой и левой частями формулы (3). Для этого, предположив, что функция $f''(x)$ непрерывна на отрезке $[\alpha, \beta]$, преобразуем интеграл $\int\limits_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx$ следующим образом

$$\begin{aligned}
\int\limits_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx &= \int\limits_{\alpha}^{\beta} f(x)\,d(x-\alpha) = (x-\alpha)f(x)\Big|_{\alpha}^{\beta} - \int\limits_{\alpha}^{\beta}(x-\alpha)f'(x)\,dx = \\
&= f(\beta)(\beta-\alpha) - \int\limits_{\alpha}^{\beta}(x-\alpha)f'(x)\,d(x-\beta) = \\
&= f(\beta)(\beta-\alpha) - (x-\alpha)(x-\beta)f'(x)\Big|_{\alpha}^{\beta} + \int\limits_{\alpha}^{\beta}(x-\beta)\,d[f'(x)(x-\alpha)] = \\
&= f(\beta)(\beta-\alpha) + \int\limits_{\alpha}^{\beta}(x-\beta)f''(x)(x-\alpha)\,dx + \int\limits_{\alpha}^{\beta}(x-\beta)f'(x)\,dx = \\
&= f(\beta)(\beta-\alpha) + (x-\beta)f(x)\Big|_{\alpha}^{\beta} - \int\limits_{a}^{b} f(x)\,dx + \int\limits_{\alpha}^{\beta}(x-\alpha)(x-\beta)f''(x)\,dx = \\
&= [f(\alpha)+f(\beta)](\beta-\alpha) + \int\limits_{\alpha}^{\beta}(x-\alpha)(x-\beta)f''(x)\,dx - \int\limits_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx.
\end{aligned} \tag{4}$$

Перенеся интеграл $\int\limits_{a}^{b} f(x)\,dx$ в левую часть равенства (4) и разделив полученное равенство на 2, найдем:

$$\int\limits_{a}^{b} f(x)\,dx = \frac{f(\alpha)+f(\beta)}{2}(\beta-\alpha) + \frac{1}{2}\int\limits_{\alpha}^{\beta}(x-\alpha)(x-\beta)f''(x)\,dx.$$

К интегралу $\int\limits_{a}^{b}(x-\alpha)(x-\beta)f''(x)\,dx$ применим первую теорему о среднем. Это можно сделать, так как функция $f''(x)$, по условию, непрерывна и $(x-\alpha)(x-\beta) \leq 0$ всюду на $[\alpha, \beta]$. Таким образом,

$$\int\limits_{\alpha}^{\beta}(x-\alpha)(x-\beta)f''(x)\,dx = f''(\theta)\int\limits_{\alpha}^{\beta}(x-\alpha)(x-\beta)\,dx =$$

$$= f''(\theta) \int\limits_{\alpha}^{\beta} [(x-\alpha)^2 + (x-\alpha)(\alpha-\beta)]\, dx =$$

$$= f''(\theta) \left[\frac{(x-\alpha)^3}{3} + (\alpha-\beta)\frac{(x-\alpha)^2}{2} \right] \Bigg|_{\alpha}^{\beta} = -\frac{1}{6} f''(\theta)(\beta-\alpha)^3, \qquad \alpha \le \theta \le \beta.$$

Следовательно,

$$\int\limits_{\alpha}^{\beta} f(x)\, dx = \frac{f(\alpha)+f(\beta)}{2}(\beta-\alpha) - \frac{1}{12} f''(\theta)(\beta-\alpha)^3.$$

Положим теперь $\alpha = x_k$, $\beta = x_{k+1}$, $f(\alpha) = y_k$, $f(\beta) = y_{k+1}$, $\beta - \alpha = \dfrac{b-a}{n}$. Тогда

$$\int\limits_{x_k}^{x_{k+1}} f(x)\, dx = \frac{y_k + y_{k+1}}{2} \cdot \frac{b-a}{n} - \frac{1}{12} f''(\theta_k)\frac{(b-a)^3}{n^3}, \qquad x_k \le \theta_k \le x_{k+1}.$$

Записав эти равенства для $k = 0, 1, \ldots, n-1$ и сложив их, найдем

$$\int\limits_{a}^{b} f(x)\, dx = \frac{b-a}{2n}[(y_0+y_n) + 2(y_1+y_2+\ldots+y_{n-1})] -$$

$$\frac{(b-a)^3}{12n^3}[f''(\theta_0) + f''(\theta_1) + \ldots + f''(\theta_{n-1})],$$

где $x_k \le \theta_k \le x_{k+1}$. Тем самым для погрешности R_n из формулы (3) получим следующее выражение:

$$R_n = -\frac{1}{12}\frac{(b-a)^3}{n^3}[f''(\theta_0) + f''(\theta_1) + \ldots + f''(\theta_{n-1})] =$$

$$= -\frac{1}{12}\frac{(b-a)^3}{n^2}\frac{f''(\theta_0) + f''(\theta_1) + \ldots + f''(\theta_{n-1}}{n}.$$

Так как функция $f''(x)$ непрерывна на $[a, b]$, найдется константа C, такая, что $|f''(x)| \le C$ всюду на $[a, b]$. Но тогда

$$\left| \frac{f''(\theta_0) + f''(\theta_1) + \ldots + f''(\theta_{n-1}}{n} \right| \le C,$$

и, следовательно,

$$|R_n| \le \frac{(b-a)^3}{12n^2}\, C = \frac{A}{n^2} \qquad \left(A = \frac{(b-a)^3}{12}\, C \right).$$

Выведем еще одну формулу для приближенного вычисления определенных интегралов — так называемую *квадратурную формулу*. Для этого на отрезке $[x_k, x_{k+1}]$ возьмем среднюю точку $\dfrac{1}{2}(x_k + x_{k+1})$, которую обозначим через $x_{k+\frac{1}{2}}$, положим $y_{k+\frac{1}{2}} = f(x_{k+\frac{1}{2}})$ и через три точки (x_k, y_k), $(x_{k+\frac{1}{2}}, y_{k+\frac{1}{2}})$, (x_{k+1}, y_{k+1}) проведем параболу с осью, параллельной оси Oy. Заменив подынтегральную функцию Функцией, графиком которой на каждом отрезке $[x_k, x_{k+1}]$ будут таким образом построенные параболы. Выполнив соответствующие вычисления, получим приближенное равенство

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \frac{b-a}{6n}[(y_0 + y_n) + 2(y_1 + y_2 + \ldots + y_{n-1}) + 4(y_{\frac{1}{2}} + y_{\frac{3}{2}} + \ldots + y_{n-\frac{1}{2}})], \quad (5)$$

которое называется *формулой парабол*, или *формулой Симпсона.*

Формулы для приближенного вычисления определенных интеегралов типа (1)–(3) и (5), называются *квадратурными формулами.*

Выведем формулу Симпсона другим путем.

Легко видеть, что формулы прямоугольников и трапеций точны для любых мнгочленов соответственно нулевой и первой степени. Далее, правые части обеих формул имеют одну и ту же структуру: они являются суммами вида $\sum\limits_{k=0}^{n-1} c_k y_k$. Поэтому, если в сумме $\sum\limits_{k=0}^{n-1} c_k y_k$ коэффициенты c_k подобрать таким образом, чтобы равенство

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \sum_{k=0}^{n-1} c_k y_k$$

было точным для всех многочленов m-й степени, получим при $m = 2, 3, \ldots$ новые квадратурные формулы, которые при фиксированном числе n будут тем более точными, чем больше m.

Покажем, что при $m = 2$ получается формула Симпсона. Для этого положим

$$\int\limits_\alpha^\beta f(x)\,dx = Af(\alpha) + Bf\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) + Cf(\beta) \quad (6)$$

и определим коэффициенты A, B, C, исходя из условия, что формула (6) точна для $f(x) \equiv 1$, $f(x) = x$, $f(x) = x^2$. В результате получим систему уравнений

$$\beta - \alpha = A + B + C,$$
$$\frac{(\beta-\alpha)^2}{2} = \alpha A + \frac{\alpha+\beta}{2}B + \beta C,$$
$$\frac{\beta^3-\alpha^3}{3} = \alpha^2 A + \frac{(\alpha+\beta)^2}{4}B + \beta^2 C,$$

решив которую, найдем:

$$A = C = \frac{\beta-\alpha}{6}, \qquad B = 4\frac{\beta-\alpha}{6}.$$

Таким образом, формула (6) принимает следующий вид:

$$\int\limits_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx = \frac{\beta-\alpha}{6}\left[f(\alpha) + 4f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) + f(\beta)\right].$$

Положив $\alpha = x_k$, $\beta = x_{k+1}$, $\dfrac{\alpha+\beta}{2} = x_{k+\frac{1}{2}}$ и заметив, что $x_{k+1} - x_k = \dfrac{b-a}{n}$, найдем для $k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$ следующее выражение

$$\int\limits_{x_k}^{x_{k+1}} f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{6n}(y_k + 4y_{k+\frac{1}{2}} + y_{k+1}). \qquad (7)$$

Суммируя равенства (7) по k от 0 до $n-1$, получим:

$$\int\limits_{a}^{b} f(x)\,dx = \frac{b-a}{6n}[(y_0 + y_n) + 2(y_1 + y_2 + \ldots + y_{n-1}) + 4(y_{\frac{1}{2}} + y_{\frac{3}{2}} + \ldots + y_{n-\frac{1}{2}})] + R_n.$$

Погрешность R_n формулы Симпсона имеет оценку

$$|R_n| \le C \cdot \frac{1}{n^4},$$

вывод которой опускаем.

Можно показать, что формула Симпсона является точной и для любого многочлена третьей степени.

§ 10. Несобственные интегралы

При построении интегральных сумм для функции $f(x)$, определенной на промежутке $[a, b]$, мы использовали конечность промежутка $[a, b]$ и ограниченность $f(x)$ на нем. Таким образом, определенный интеграл, являющийся пределом интегральных сумм, вводился для конечного промежутка и ограниченной на этом промежутке функции.

Если промежуток интегрирования бесконечный или функция $f(x)$ неограниченная, то с помощью еще одной операции предельного перехода можно расширить понятие определенного интеграла. Такие более общие интегралы называются *несобственными.*

Обратимся к определению несобственного интеграла по неограниченному промежутку. Пусть функция $f(x)$ определена при $x \ge a$ и на каждом промежутке $[a, \xi]$, $\xi > a$, является интегрируемой, т.е. при каждом $\xi > a$ существует интеграл $\int\limits_{a}^{\xi} f(x)\,dx$. Положим

$$F(\xi) = \int\limits_{a}^{\xi} f(x)\,dx.$$

Функция $F(\xi)$ может иметь конечный предел при $\xi \to \infty$, т.е. существует

$$I = \lim_{\xi\to\infty} F(\xi).$$

Число I называется *несобственным интегралом* от функции $f(x)$ по промежутку $[a,\infty)$ и обозначается $\int\limits_a^\infty f(x)\,dx$. Таким образом,

$$\int\limits_a^\infty f(x)\,dx = \lim_{\xi\to\infty} F(\xi) = \lim_{\xi\to\infty} \int\limits_a^\xi f(x)\,dx.$$

Интеграл $\int\limits_a^\infty f(x)\,dx$ в этом случае называют *сходящимся*.

Если функция $F(\xi)$ при $\xi \to \infty$ имеет бесконечный предел или не имеет предела, то говорят, что интеграл $\int\limits_a^\infty f(x)\,dx$ *расходится*.

Возьмем, например, на промежутке $[1,\infty]$ функции $f(x) = \dfrac{1}{x^\lambda}$, где $\lambda > 1$. Функция

$$F(\xi) = \int\limits_1^\xi \frac{dx}{x^\lambda} = \frac{1}{\lambda-1}\left(1 - \frac{1}{\xi^{\lambda-1}}\right),$$

очевидно, имеет конечный предел при $\xi \to \infty$:

$$\lim_{\xi\to\infty} F(\xi) = \frac{1}{\lambda-1}.$$

В этом случае интеграл $\int\limits_1^\infty \dfrac{dx}{x^\lambda}$ сходится:

$$\int\limits_1^\infty \frac{dx}{x^\lambda} = \frac{1}{\lambda-1}.$$

Легко проверить, что при $\lambda \le 1$ интеграл $\int\limits_1^\infty \dfrac{dx}{x^\lambda}$ расходится.

Аналогичным образом можно определить сходимость и расходимость несобственных интегралов вида $\int\limits_{-\infty}^a f(x)\,dx$.

В случае функции, определенной на всей числовой оси, возьмем произвольно фиксированное число a и рассмотрим интегралы

$$\int\limits_{-\infty}^{a} f(x)\,dx \quad \text{и} \quad \int\limits_{a}^{\infty} f(x)\,dx. \tag{1}$$

Если каждый из этих интегралов сходится, то их сумму называют несобственным интегралом от $f(x)$ по $(-\infty, \infty)$ и записывают следующим образом:

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \int\limits_{-\infty}^{a} f(x)\,dx + \int\limits_{a}^{\infty} f(x)\,dx.$$

Например, для функции $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$ имеем:

$$\int\limits_{-\infty}^{0} \frac{dx}{1+x^2} = \int\limits_{0}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{2},$$

поэтому

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \pi.$$

Если какой-нибудь из интегралов (1) расходится, то несобственный интеграл $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$ также считается расходящимся.

Легко проверить, что сходимость или расходимость несобственного интеграла не зависит от выбора числа a.

Обратимся теперь к случаю неограниченной на промежутке $[a,b]$ функции. Пусть, например, при $x \to a+0$ функция $f(x) \to \infty$, но на каждом промежутке $[\xi, b]$, где $a < \xi < b$, она интегрируема. Если существует конечный предел

$$\lim_{\xi \to a+0} \int\limits_{\xi}^{b} f(x)\,dx = I$$

то говорят, что несобственный интеграл $\displaystyle\int\limits_{a}^{b} f(x)\,dx$ *сходится* и записывают это равенством

$$\int\limits_{a}^{b} f(x)\,dx = I = \lim_{\xi \to a+0} \int\limits_{\xi}^{b} f(x)\,dx.$$

Если указанного предела нет или он бесконечен, то несобственный интеграл $\displaystyle\int\limits_{a}^{b} f(x)\,dx$ от неограниченной на $[a,b]$ функции называется *расходящимся.* Например, для функции

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad x = 0, \\ \dfrac{1}{x^\lambda} & \text{при} \quad x = 0, \end{cases}$$

несобственный интеграл

$$\int\limits_0^1 \frac{dx}{x^\lambda}$$

сходится при $\lambda < 1$ и расходится при $\lambda \geq 1$, что без труда может быть проверено читателем. Далее, в гл. XII вопрос о несобственных интегралах будет рассмотрен более подробно.

§ 11. Интеграл Римана–Стильтьеса[27]

Непосредственным обобщением определенного интеграла Римана является интеграл Римана–Стильтьеса, определяемый следующим образом. Пусть на промежутке $[a, b]$ заданы две функции $f(x)$ и $g(x)$. Соответственно произвольному разбиению $T = \{a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b\}$ и набору точек $\{\xi_k\}$, $\xi_k \in [x_k, x_{k+1}]$ образуем интегральную сумму

$$\sum_T f(\xi_k)[g(x_{k+1}) - g(x_k)].$$

Если интегральные суммы для любой неограниченно измельчающейся последовательности разбиений $\{T_n\}$ имеют конечный предел, не зависящий от характера разбиений T_n и выбора точек $\xi_k^{(n)}$ на элементарных частях разбиений, то этот предел называется *интегралом Римана–Стильтьеса* от функции $f(x)$ по функции $g(x)$ на отрезке $[a, b]$ и обозначается следующим образом:

$$\int\limits_a^b f(x)\, dg(x). \tag{1}$$

Если, в частности, $g(x)$, то интеграл Римана–Стильтьеса превращается в определенный интеграл Римана. Легко показать, что необходимым условием существования интеграла (1), как и для интеграла Римана, является ограниченность функций $f(x)$ и $g(x)$ на $[a, b]$.

Для введения достаточных условий существования интеграла (1) рассмотрим частный случай, когда функция $g(x)$ является монотонно возрастающей на $[a, b]$ и определим суммы Дарбу–Стильтьеса равенствами

$$\underline{s}(f, g, T) = \sum_T m_k[g(x_{k+1}) - g(x_k)],$$

---

[27] Т. Стильтьес (1856–1894) — голландский математик.

$$\overline{s}(f,g,T) = \sum_T m_k[g(x_{k+1}) - g(x_k)],$$

в которое T — произвольное разбиение $[a, b]$, m_k и M_k — соответственно нижняя и верхняя грани множества значений $f(x)$ на промежутке $[x_k, x_{k+1}]$ разбиения T. Эти суммы обладают свойствами сумм Дарбу, приведенными в § 3 данной главы. С помощью рассуждений, аналогичных изложенным в § 4 данной главы, приходим к следующему утверждениюю

Для того чтобы ограниченная на $[a, b]$ функция $f(x)$ была интегрируемой по монотонно возрастающей на этом отрезке функции $g(x)$, необходимо и достаточно, чтобы для любого числа $\varepsilon > 0$ нашлось хотя бы одно разбиение T, для которого

$$\sum_T \omega_k[g(x_{k+1}) - g(x_k)] < \varepsilon,$$

где $\omega_k = M_k - m_k$.

Это условие без труда распространяется на случай, когда функция $g(x)$ может быть представлена в виде $g_1(x) - g_2(x)$, где $g_1(x)$ и $g_2(x)$ — монотонно возрастающие на $[a, b]$ функции. Функции, представимые таким образом, называются *функциями с ограниченный изменением*, так как для них верхняя грань множества всевозможных сумм

$$\sum_T |g(x_{k+1}) - g(x_k)|,$$

соответствующих всевозможным разбиениям T промежутка $[a, b]$ конечна.

Число

$$\bigvee_a^b(g) = \sup_T \sum_T |g(x_{k+1}) - g(x_k)|$$

называется *полным изменением* функции $g(x)$ на промежутке $[a, b]$.

Легко показать, что функция $g(x)$, обладающая ограниченной на $[a, b]$ производной $g'(x)$, имеет ограниченное изменение. Для такой функции выполняется равенство

$$\int_a^b f(x)\,dg(x) = \int_a^b f(x)g'(x)\,dx,$$

с помощью которого интеграл Римана–Стильтьеса сводится к интегралу Римана.

Кроме интеграла Римана–Стильтьеса в математике находят применение и другие обобщения интеграла Римана. Среди них следует особо ответить так называемый *интеграл Лебега*, теория и приложения которого подробно рассматриваются в курсе теории функций вещественной переменной или в курсе функционального анализа.

Глава IX

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ПРИЛОЖЕНИЯ ОПРЕДЕЛЕННОГО ИНТЕГРАЛА

Одно из важнейших приложений определенного интеграла — вычисление площади плоских фигур, т.е. задача, которая привела к созданию интегрального исчисления.

Глава начинается со строгого определения квадрируемости и площади плоской фигуры. Однако ряд свойств квадрируемых фигур и площади, которые представляются наглядно очевидными, приводятся без доказательства, так как строгое проведение таких доказательств требует скрупулезных геометрических и топологических рассуждений, что выходит за рамки краткого курса математического анализа.

§ 1. Площадь плоской ограниченной фигуры

Назовем плоской фигурой любое непустое множество точек плоскости. Простейшими примерами плоских фигур являются многоугольники, круг, части круга и т. д.

Пусть D — ограниченная[28] плоская фигура, xOy — некоторая прямоугольная декартова система координат на плоскости, содержащей D. (Систему координат можно выбирать произвольно, например, считать, что D лежит в первом квадранте.) Через целые точки на осях координат проведем прямые, параллельные этим осям. Тогда плоскость разобьется на счетное множество аамкнутых квадратов со стороной, равной единице масштаба. Эти квадраты назовем квадратами *нулевого ранга.* Пусть n_0 — число квадратов нулевого ранга, целиком входящих в множество D, и N_0 — число квадратов нулевого ранга, имеющих с D хотя бы одну общую точку. Очевидно, что $n_0 \le N_0$ (рис. 31). Через точки $x = \dfrac{p}{10}$ и $y = \dfrac{q}{10}$, где $p, q = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, снова проведем прямые, паралелльные осям координат. При атом каждый квадрат нулевого ранга разобьется на 100 квадратов, которые назовем квадратами *первого ранга.* Пусть n_1 — число квадратов первого ранга, содержащихся целиком в D и N_1 — число квадратов первого ранга, имеющих с

---

[28] Плоская фигура D называется *ограниченной*, если существует прямоугольник $Q = \{(x, y)|\ a \le x \le b,\ c \le y \le d\}$, содержащий D.

D хотя бы одну общую точку. Снова $n_1 \leq N_1$. Так как каждый из n_0 квадратов нулевого ранга, входящих целиком в D, содержит 100 квадратов первого ранга, тоже входящих целиком в D, и кроме того, в D могут войти целиком квадраты первого ранга, являющиеся частями квадратов нулевого ранга, не входящих целиком в D, то $n_1 \geq n_0 \cdot 100$. С помощью аналогичных рассуждений устанавливаем, что $N_1 \leq N_0 \cdot 100$.

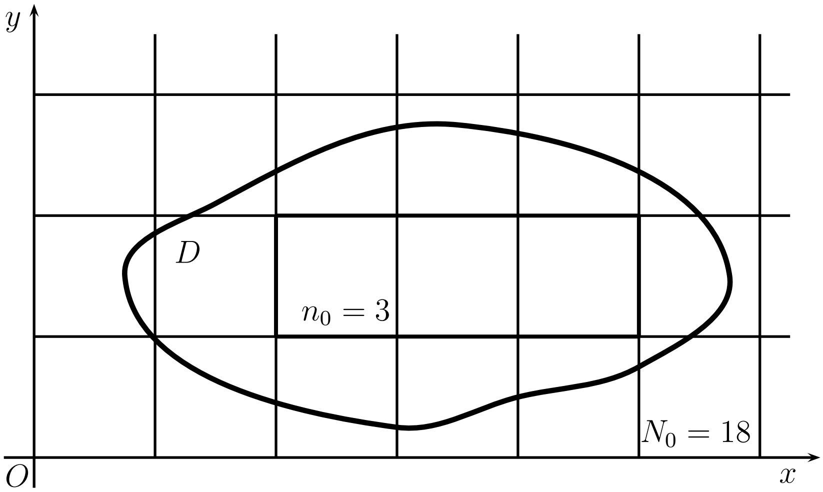

Рис. 31

Таким образом,

$$n_0 \leq \frac{n_1}{100} \leq \frac{N-1}{100} \leq N_0.$$

Затем прямыми, параллельными осям координат, каждый квадрат первого ранга разобьем на 100 равных квадратов *второго ранга*, и, как выше, найден числа n_2 и N_2. Снова получим:

$$n_2 \leq N_2, \qquad n_1 \leq \frac{n_2}{100} \leq \frac{N_2}{100} \leq N_1,$$

и, следовательно,

$$n_0 \leq \frac{n_1}{100} \leq \frac{n_2}{100^2} \leq \frac{N_2}{100^2} \leq \frac{N_1}{100} \leq N_0.$$

Продолжая этот процесс, мы получим две последовательности неотрицательных чисел $\left\{\frac{n_k}{100^k}\right\}$ и $\left\{\frac{N_k}{100^k}\right\}$, первая из которых монотонно возрастает и ограничена сверху числом N_0, а вторая монотонно убывает и ограничена снизу числом n_0. Следовательно, существуют неотрицательные пределы

$$\underline{S} = \lim_k \frac{n_k}{100^k} \leq \lim_k \frac{N_k}{100^k} = \overline{S}.$$

Если в $\underline{S} = \overline{S} = S$, то фигура D называется *квадрируемой*, а S — площадью фигуры D:

$$\text{пл}\,(D) = S = \lim_k \frac{n_k}{100^k} = \lim_k \frac{N_k}{100^k}.$$

Можно доказать, что: 1) свойство плоской фигуры быть квадрируемой не зависит от выбора на плоскости системы координат; 2) при изменении единицы масштаба в k раз величина площади фигуры изменяется в k^2 раз; 3) фигуры, которые при наложении совпадают, или обе квадрируемы, или обе не квадрируемы, и если квадрируемы, то имеют одинаковую площадь; 4) если фигуры D_1 и D_1 квадрируемы и $D_1 \subset D_2$, то $\text{пл}\,(D_1) \leq \text{пл}\,(D_2)$; 5) прямоугольник — квадрируемая фигура, и его площадь равна произведению длин сторон; 6) многоугольник — квадрируемая фигура.

Следующие две леммы являются критериями квадрируемости. Доказательство этих лемм опускаем.

Будем говорить, что фигура A *вписана в* фигуру D, если $A \subset D$, и что фигура B *описана около* фигуры D, если $B \supset D$. Очевидно, что для каждой непустой ограниченной фигуры D существуют как вписанные в нее многоугольники (например, фигура, состоящая из одной точки — квадрата со сторонами нулевой длины), так и описанные многоугольники (например, квадрат, содержащий D).

Лемма 1. *Для того чтобы ограниченная фигура D была квадрируемой, необходимо и достаточно, чтобы для любого числа ε можно было в эту фигуру вписать и около фигуры описать конечные системы многоугольников так, чтобы разность между суммой площадей S^* описанных многоугольников и суммой площадей S_* вписанных многоугольников была меньше ε, при этом*

$$S_* \leq \text{пл} \leq S^*.$$

Замечание 1. В формулировке леммы системы вписанных и описанных многоугольников можно заменить произвольными вписанной и описанной квадрируемыми фигурами. В самом деле, если D' и D'' — такие фигуры, то найдется система многоугольников $M' \subset D'$, для которой $\text{пл}\,(D') - \text{пл}\,(M') < \dfrac{\varepsilon}{2}$, и система многоугольников M'', для которой $M'' \supset D''$, для которой $\text{пл}\,(M'') - \text{пл}\,(D'') < \dfrac{\varepsilon}{2}$. Отсюда $\text{пл}\,(M'') - \text{пл}\,(M') > 2\varepsilon$,, так что выполняется условие леммы.

Замечание 2. Так как $0 \leq S_* \leq S^*$, то $\text{пл}\, D = 0$ тогда и только тогда, когда для любого числа $\varepsilon > 0$ существует конечная система многоугольников, покрывающая D, сумма площадей которых меньше ε.

Замечание 3. В дальнейшем будем рассматривать только ограниченные фигуры, не оговаривая этого каждый раз.

Назовем окрестностью точки (a, b) плоскости круг $(x - a)^2 + (y - b)^2 < r^2$ любого радиуса r.

Точку $P_0(x_0, y_0)$ плоскости будем называть *граничной точкой* плоской фигуры D, если в любой окрестности точки P_0 содержатся как точки фигуры D, так и точки, не принадлежащие D. Совокупность всех граничных точек фигуры D называется *границей* D и обозначается $\overset{\circ}{D}$ иди ∂D. Например, границей круга радиуса R с центром в точке $C(a, b)$ является окружность $(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$, границей многоугольника — ломаная, задающая этот многоугольник.

Лемма 2. *Для того, чтобы фигура D была квадрируемой, необходимо и достаточно, чтобы площадь ее границы равнялась нулю.*

Лемма 3 (свойство аддитивности площади плоской фигуры). *Пусть фигура D разбита на квадрируемые фигуры D_1 и D_2 так, что пл$\,(D_1 \cap D_2) = 0$. Тогда фигура D квадрируема и*

$$\text{пл}\,(D) = \text{пл}\,(D_1) + \text{пл}\,(D_2).$$

Доказательство. Возьмем произвольное число $\varepsilon > 0$ и выберем такие системы многоугольников A_i и B_i, $i = 1, 2$, что

$$A_i \subset D_i \subset B_i, \qquad \text{пл}\,(B_i) - \text{пл}\,(A_i) < \frac{\varepsilon}{2}, \qquad A_1 \cap A_2 = \emptyset.$$

Тогда для систем многоугольников $A = A_1 \cup A_2$ и $B = B_1 \cup_2$ будут выполняться соотношения $A \subset D \subset B$ и

$$\text{пл}\,(A) = \text{пл}\,(A_1) + \text{пл}\,(A_2) \le \text{пл}\,(B) \le \text{пл}\,(B_1) + \text{пл}\,(B_2),$$

откуда

$$\text{пл}\,(B) - \text{пл}\,(A) \le [\text{пл}\,(B_1) + \text{пл}\,(B_2)] - [\text{пл}\,(A_1) - \text{пл}\,(A_2)] < \varepsilon,$$

что означает квадрируемость D.

С другой стороны, очевидно, что

$$\text{пл}\,(A) = \text{пл}\,(A_1) + \text{пл}\,(A_2) \le \text{пл}\,(D_1) + \text{пл}\,(D_2) \le \text{пл}\,(B)$$

и

$$\text{пл}\,(A) \le \text{пл}\,(D) \le \text{пл}\,(B).$$

Следовательно, $|\text{пл}\,(D) - (\text{пл}\,(D_1) + \text{пл}\,(D_2)| < \varepsilon,$, откуда, в силу произвольности ε,

$$\text{пл}\,(D) = \text{пл}\,(D_1) + \text{пл}\,(D_2). \tag{1}$$

Нетрудно также проверить справедливость следующего утверждения. Если квадрируемая фигура D кривой нулевой площади разбита на две фигуры D_1 и D_2, то каждая из этих фигур квадрируема и выполняется равенство (1).

Следствие. *Если $D = \bigcup\limits_{i=1}^{m} D_i$, причем все D_i квадрируемы и пл$\,(D_i \cap D_j) = 0$ при $i \ne j$, то фигура D квадрируема и пл$\,(D) = \sum\limits_{i=1}^{m}$ пл$\,(D_i)$.*

Лемма 4. *Если функция $f(x)$ непрерывна на $[a, b]$, то график этой Функции* $\mathrm{Gr}\, f$ *имеет площадь, равную нулю.*

Доказательство. Для заданного числа $\varepsilon > 0$ возьмем такое разбиение T отрезка $[a, b]$, что $\sum\limits_{k=0}^{n} \omega_k \Delta x_k < \varepsilon$. Это возможно в силу интегрируемости непрерывной функции $f(x)$.

Рассмотрим систему прямоугольников с основаниями $[x_k, x_{k+1}]$, $k = 0, 1, 2, \dots, n-$ 1 и высотами $M_k - m_k$, где, как всегда, $m_k = \inf\limits_{[x_k, x_{k+1}]} f(x)$, $M_k = \sup\limits_{[x_k, x_{k+1}]} f(x)$. Если точки $A(x, f(x))$ принадлежат $\operatorname{Gr} f$, то $x \in [x_k, x_{k+1}]$ для некоторого k, поэтому $m_k \le f(x) \le M_k$ и, следовательно, точка $A(x, f(x))$ находится в прямоугольнике P_k с основанием $[x_k, x_{k+1}]$ и высотой $M_k - m_k$. Но тогда

$$\operatorname{Gr} f \subset \bigcup_{k=0}^{n-1} P_k,$$

и так как

$$\text{пл}\left(\bigcup_{k=0}^{n-1} P_k\right) \subset \sum_{k=0}^{n-1} \text{пл}\,(P_k) = \sum_{k=0}^{n-1} (M_k - m_k)\Delta x_k = \sum_{k=0}^{n-1} \omega_k \Delta x_k < \varepsilon,$$

то $\text{пл}\,(\operatorname{Gr} f) = 0$.

Следствие. *Пусть D — квадрируемая фигура и $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_m$ — кривые, которые являются графиками непрерывных функций $y = f_i(x)$, $a_i \le x \le b_i$ или непрерывных функций $x = g_i(y)$, $c_i \le y \le d_i$, и разбивают D на частичные фигуры $D_1, D_2, \ldots, D_n$. Тогда вое D_k — квадрируемые фигуры и*

$$\text{пл}\,(D) = \sum_{k=1}^{n} \text{пл}\,(D_k).$$

Это утверждение вытекает непосредственно из лемм 3 и 4.

Лемма 5. *Криволинейная трапеция D, ограниченная графиком непрерывной и неотрицательной на $[a, b]$ функции $f(x)$, отрезком $[a, b]$ оси Ox и прямыми $x = a$, $y = b$, квадрируема и*

$$\text{пл}\,(D) = \int_a^b f(x)\,dx.$$

Доказательство. Для произвольного числа $\varepsilon > 0$ возьмем разбиение T отрезка $[a, b]$, такое, что

$$\sum_T M_k \Delta x_k - \sum_T m_k \Delta x_k = \sum_T \omega_k \Delta x_k < \varepsilon. \tag{2}$$

Заметив, что $\sum\limits_T m_k \Delta x_k$ есть площадь многоугольника, вписанного в D, а $\sum\limits_T M_k \Delta x_k$ — площадь многоугольника, описанного около D, на основании леммы 1, заключаем, что фигура D квадрируема и

$$\sum_T m_k \Delta x_k \le \text{пл}\,(D) \le \sum_T M_k \Delta x_k. \tag{3}$$

Так как, с другой стороны,

$$\sum_T m_k \Delta x_k \le \int_a^b f(x), dx \le \sum_T M_k \Delta x_k, \tag{4}$$

то из неравенств (2), (3) и (4) следует, что

$$\left|\text{пл}\,(D) - \int\limits_a^b f(x)\,dx\right| < \varepsilon,$$

а это возможно лишь в том случае, если

$$\text{пл}\,(D) \int\limits_a^b f(x)\,dx.$$

Примеры.

1. Площадь, ограниченную эллипсом $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ (рис. 32) можно рассматривать как объединение двух криволинейных трапеций, ограниченных соответственно графиками функций

$$y = +\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$$

и

$$y = -\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$$

и отрезком $[-a,a]$ оси Ox (отрезки прямых $x=-a$ и $x=a$ вырождаются здесь в точки). Поэтому часть плоскости, ограниченная эллипсом, есть квадрируемая фигура. Найдем ее площадь $S_{\text{эл}}$. В силу симметричности эллипса достаточно найти площадь одной четверти фигуры, расположенной в первом квадранте. Имеем

$$\frac{1}{4}S_{\text{эл}} = \int\limits_0^a \frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}\,dx = \frac{ba^2}{a}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\varphi\,d\varphi = \frac{ab\pi}{4}.$$

Следовательно, $= \pi ab$. В частности, при $a=b=R$ получаем, что круг есть квадрируемая фигура и его площадь равна πR^2.

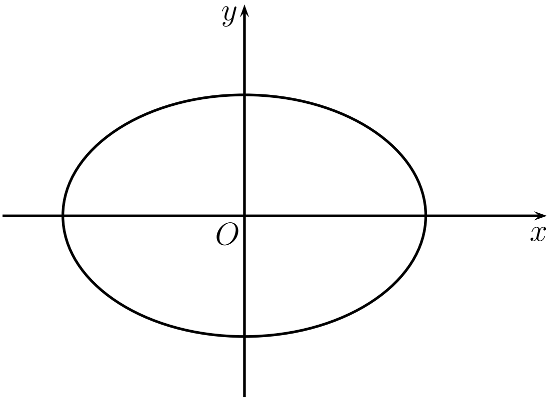

Рис. 32

2. Найдем площадь, заключенную между параболами $y=x^2$ и $y=\sqrt{x}$. Прежде всего определим координаты точки $A(x_1,y_1)$ пересечения кривых (рис. 33). Для этого решим систему уравнений $y=x^2$, $y=\sqrt{x}$, из которой следует, что $x_1 = y_1 = 1$. Искомая площадь равна разности площадей криволинейных трапеций, соответствующих функциям $y = \sqrt{x}$ и $y = x^2$. Поэтому

$$S = \int\limits_0^1 \sqrt{x}\, dx - \int\limits_0^1 x^2\, dx = \frac{2}{3} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3}.$$

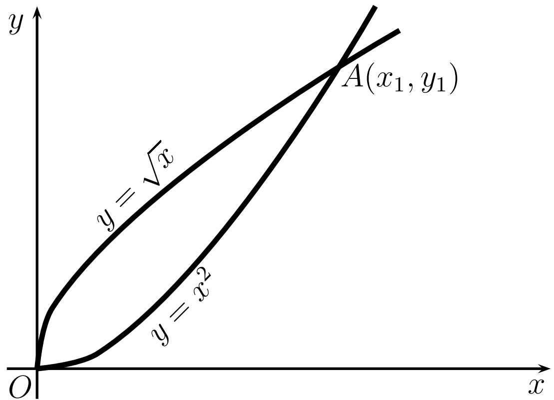

Рис. 33

3. Найдем площадь, ограниченную осью Ox и первой дугой циклоиды $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$, $0 \le t \le 2\pi$ (рис. 34). Имеем:

$$S = \int\limits_0^{2\pi} y\, dx = \int\limits_0^{2\pi} a^2(1 - \cos t)(1 - \cos t)\, dt = a^2 \int\limits_0^{2\pi} (1 - \cos t)^2\, dt = 3a^2\pi.$$

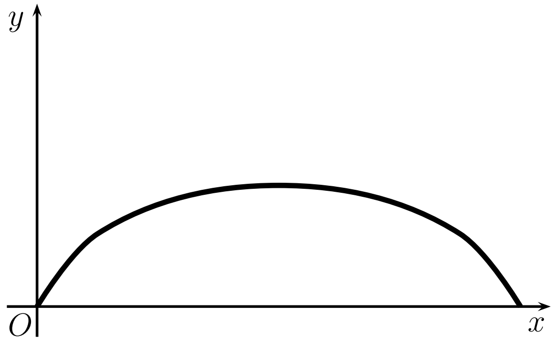

Рис. 34

Заметим, что в случае функции $f(x)$, принимающей на $[a, b]$ неположительные значения, площадь криволинейной трапеции $aABb$ (рис. 35) и симметричной ей относительно оси Ox совпадают. Поэтому площадь криволинейной трапеции, расположенной ниже оси $)x$, равна значению интеграла:

$$\int\limits_a^b [-f(x)]\, dx = \int\limits_a^b |f(x)|\, dx.$$

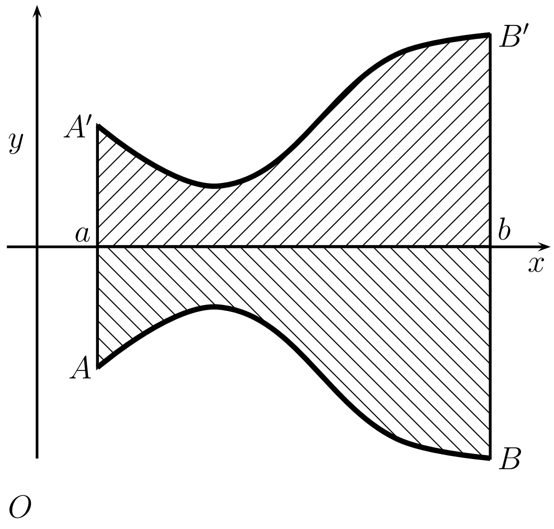

Рис. 35

Отсюда следует, что площадь криволинейной трапеции, соответствующей заданной на $[a, b]$ функции $f(x)$, независимо от того, сохраняет $f(x)$ или может его менять, равна значению интеграла $\int\limits_a^b |f(x)|\,dx$.

Рассмотрим площади, ограниченные кривыми, заданными уравнениями в полярных координатах.

Легко убедиться, что сектор круга радиуса R с центральным углом φ есть квадрируемая фигура, имеющая площадь, равную $\dfrac{1}{2}R^2\varphi$.

Пусть $r = f(\varphi)$, $\alpha \le \varphi \le \beta$ — непрерывная функция. Рассмотрим криволинейный сектор, ограниченный графиком AB этой функции и лучами $\varphi = \alpha$, $\varphi = \beta$ (рис. 36).

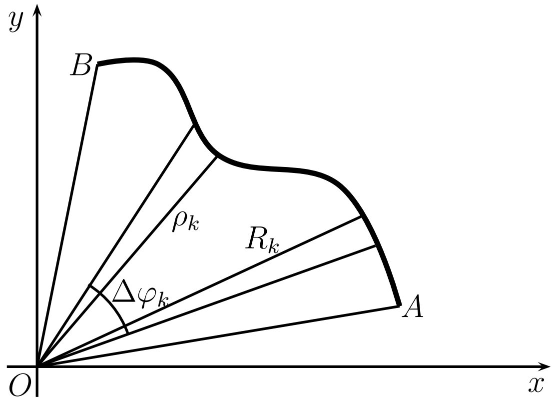

Рис. 36

Разобьем отрезок $[\alpha, \beta]$ на части $[\varphi_k, \varphi_{k+1}]$, $k = 0, 1, 2, \ldots, (n-1)$ так, что для заданного $\varepsilon > 0$

$$\sum_{k=0}^{n-1} (R_k^2 - \rho_k^2)\Delta\varphi_k < \varepsilon, \tag{5}$$

где

$$\rho_k = \inf_{[\varphi_k, \varphi_{k+1}]} f(\varphi), \qquad R_k = \sup_{[\varphi_k, \varphi_{k+1}]} f(\varphi).$$

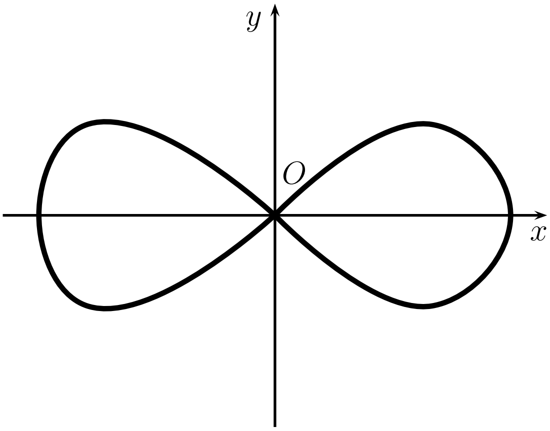

Рис. 37

Выберем в качестве фигуры, описанной вокруг криволинейного сектора, совокупность круговых секторов с радиусами R_k с центром в 0 и центральными углами $\Delta\varphi_k$, а в качестве вписанной фигуры совокупность аналогичных круговых секторов с радиусами ρ_k. Тогда будем иметь, что криволинейный сектор $0AB$ — квадрируемая фигура и

$$\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1}\rho_k^2\Delta\varphi_k \le \text{пл}\,(0AB) \le \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1}R_k^2\Delta\varphi_k. \tag{6}$$

С другой стороны,

$$\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1}\rho_k^2\Delta\varphi_k \le \frac{1}{2}\int\limits_{\alpha}^{\beta} f^2(\varphi)\,d\varphi \le \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1}R_k^2\Delta\varphi_k. \tag{7}$$

Из равенств (5), (6) и (7), как и в случае криволинейной трапеции, вытекает формула:

$$\text{пл}\,(0AB) = \frac{1}{2}\int\limits_{\alpha}^{\beta} f^2(\varphi)\,d\varphi.$$

Примеры.

4. Найти площадь, ограниченную кривой $r = \sqrt{a\cos 2\varphi}$. (Для значений φ, лежащих в промежутках $\frac{\pi}{4} < \varphi < \frac{3\pi}{4}$, $\frac{3\pi}{4} < \varphi < \frac{7\pi}{4}$ функция не определена, так как для этих значений подкоренное выражение отрицательно.) В силу симметричности фигуры достаточно рассмотреть ее часть, ограниченную графиком функции на участке $0 \le \varphi \le \frac{\pi}{4}$ и осью $0x$ (рис. 37). Имеем:

$$\frac{1}{4}S = \frac{1}{2}\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{4}} a\cos 2\varphi\,d\varphi = \frac{a}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{a}{4}.$$

Следовательно, $S = a$.

§ 2. Кубируемые фигуры и вычисление объемов некоторых тел

Кубируемость и объем пространственной фигуры, т.е. множества точек трехмерного пространства, вводятся аналогично квадрируемости и площади плоской Фигуры с той лишь разницей, что вместо замкнутых квадратов со стороной, равной $\dfrac{1}{10^p}$ единицы масштаба, берутся замкнутые кубы с ребром такой же величины. Основные свойства квадрируемых Фигур и площади переносятся на кубируемые фигуры и объемы, только вместо систем многоугольников рассматриваются системы многогранников. Мы не будем подробно останавливаться на этом.

Пусть Ц — прямой цилиндр с высотой h и основанием D, т.е. множество точек $M(x, y, z)$ пространства, таких, что $M_0(x, y, 0) \in D$ и $0 \le z \le h$. Покажем, что если основание D квадрируемо, то Ц — кубируемая фигура. Для этого в основание D впишем многоугольник A и рассмотрим вписанную в призму с основанием A и высотой h. Объем этой призмы равен $\text{пл}\,(A) \cdot h$. Аналогичным образом опишем около основания D многоугольник B и рассмотрим призму с основанием B и высотой h. Ее объем равен $\text{пл}\,(B) \cdot h$. Разность между объемами полученных многогранников равна $[\text{пл}\,(B) - \text{пл}\,(A)]h$ и может быть сделана сколь угодно малой, так как D — квадрируемая фигура. Отсюда следует, что цилиндр Ц — кубируемая фигура, а из неравенств

$$\text{пл}\,(A) \cdot h \le v(\text{Ц}) \le \text{пл}\,(B) \cdot h$$

вытекает, что

$$\text{пл}\,(A) \cdot h \le \text{пл}\,(D) \cdot h \le \text{пл}\,(B) \cdot h$$

$$v(\text{Ц}) = \text{пл}\,(D) \cdot h.$$

Заметим, что каждая ограниченная плоская фигура кубируема и имеет объем, равный нулю.

Рассмотрим пространственное тело, полученное от вращения вокруг отрезка $[a, b]$ оси $0x$ криволинейной трапецмм, ограниченной графиком непрерывной на $[a, b]$ функции $f(x)$, отрезком $[a, b]$ и прямыми $x = a$, $x = b$. Покажем, что объем этого тела выражается интегралом

$$v = \pi \int\limits_a^b f^2(x)\, dx. \tag{1}$$

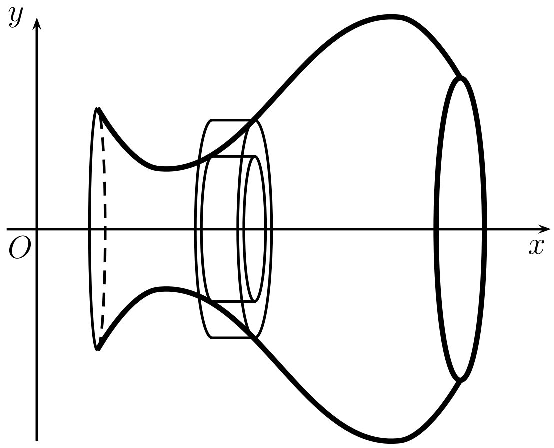

Рис. 38

Рассмотрим произвольное разбиение отрезка $[a,b]$:

$$T=\{x_0,\dots,x_k,x_{k+1},\dots,x_n\}.$$

Соответственно каждой элементарной части $[x_k,x_{k+1}]$ разбиения построим два цилиндрических тела высотой $h=x_{k+1}-x_k$ с круговыми основаниями, лежащими в плоскостях, проведенных через x_k и x_{k+1} перпендикулярно к оси Ox радиусов соответственно $r_k=\inf\limits_{[x_k,x_{k+1}]}f(x)$ и $R_k=\sup\limits_{[x_k,x_{k+1}]}f(x)$, так, чтобы ось Ox являлась осью обоих цилиндров (рис. 38). Ясно, что тело, составленное из цилиндров с радиусами r_k окажется вписанным в данное тело вращения, а тело, составленное из цилиндров с радиусами R_k, — списанным около тела вращения. Объемы этих тел выразятся соответственно суммами

$$\pi\sum_{k=0}^{n-1}r_k^2\Delta x_k \quad \text{и} \quad \pi\sum_{k=0}^{n-1}R_k^2\Delta x_k.$$

Эти величины являются соответственно верхней и нижними суммами Дарбу для функции $\pi f^2(x)$, отвечающими разбиению T промежутка $[a,b]$. Из сказанного, как и в случае площадей, следует, что тело, полученное, от вращения криволинейной трапеции, кубируемо и его объем выражается формулой (1).

Если мы рассмотрим тело, полученное вращением вокруг оси Oy криволинейной трапеции, ограниченной отрезком $[c,d]$ оси Oy, графиком непрерывной неотрицательной Функции $x=g(y)$, $c\le y\le d$, и прямыми $y=c$ и $y=d$, то аналогично предыдущему покажем, что это тело кубируемо и его объем выражается формулой

$$v=\pi\int\limits_c^d g^2(y)\,dy.$$

Примеры.

1. Вычислим объем тора, полученного вращением круга $x^2+(y-b)^2\le a^2$ $(b>a)$ вокруг оси Ox (рис. 39). Очевидно, что этот объем равен разности объемов тел, полученных от вращения криволинейных трапеций, соответствующих функциям

$$y = b + \sqrt{a^2 - x^2}$$

и

$$y = b - \sqrt{a^2 - x^2}.$$

Таким образом,

$$v = \pi \int\limits_{-a}^{a} (b + \sqrt{a^2 - x^2})^2 \, dx - \pi \int\limits_{-a}^{a} (b - \sqrt{a^2 - x^2})^2 \, dx =$$

$$4\pi b\pi \int\limits_{-a}^{a} \sqrt{a^2 - x^2} \, dx = 8\pi b\pi \int\limits_{-a}^{a} \sqrt{a^2 - x^2} \, dx.$$

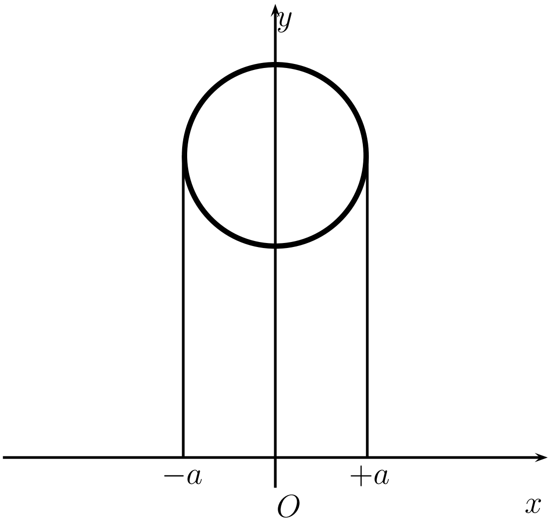

Рис. 39

Простым вычислением находим, что $\int\limits_{-a}^{a} \sqrt{a^2 - x^2} \, dx = \frac{\pi a^2}{4}$. Следовательно,

$$v = 2\pi^2 a^2 b.$$

Рассмотрим более общий случай, когда ограниченное тело Ш обладает тем свойством, что все сечения Ш$_x$ тела, перпендикулярные к некоторой оси, которую без ограничения общности можно принять за ось Ox, квадрируемы. Ясно, что площади этих сечений в общем случае зависят от x. Обозначив их через $S(x)$. Пусть a и b — соответственно нижняя и верхняя границы абсцисс точки тела Ш. Докажем, что если функция $S(x)$ непрерывна на $[a, b]$ и при $x_1 \neq x_2$ или Ш$_{x_1} \subseteq$ Ш$_{x_2}$ или Ш$_{x_1} \subseteq$ Ш$_{x_2}$, то тело Ш кубируемо и его v объем выражается формулой

$$v = \pi \int\limits_{a}^{b} S(x) \, dx. \tag{2}$$

Снова рассмотрим произвольное разбиение T отрезка $[a, b]$. Как и ранее, впишем в тело Ш систему цилиндров с площадями $\alpha_k = \inf\limits_{[x_k, x_{k+1}]} S(x)$ и высотами Δx_k и опишем около слоев тела Ш такие же цилиндры, но уже о площадями оснований $\beta_k = \sup\limits_{[x_k, x_{k+1}]} S(x)$. Так как разность $\sum\limits_T \beta_k \Delta x_k - \sum\limits_T \alpha_k \Delta x_k$ в силу непрерывности $S(x)$ может быть сколь угодно малой, то, аналогично предыдущему, заключаем, что тело Ш кубируемо и справедлива формула (2).

Примеры.

2. Рассмотрим трехосный эллипсоид $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1$. Его сечение плоскостью $x = \text{const}$ есть эллипс, уравнение которого $\dfrac{y^2}{b^2\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)} + \dfrac{y^2}{c^2\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)} = 1$. Его площадь $S(x) = \pi bc\left(1 - \dfrac{x^2}{a^2}\right)$. Поэтому

$$v = \pi \int\limits_{-a}^{a} S(x)\,dx = 2\pi bc \int\limits_{0}^{a} \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) dx = \frac{4}{3}\pi abc.$$

В частности, при $a = b = c = R$ получим формулу объема шара:

$$v = \frac{4}{3}\pi R^3.$$

§ 3. Длина кривой. Дифференциал дуги кривой

Пусть Г — кривая на плоскости, заданная параметрическими уравнениями

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t), \qquad (\alpha \le t \le \beta.$$

Кривая Г называется *непрерывной* (*дифференцируемой*, *гладкой*), если функции $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ непрерывны (дифференцируемы, обладают непрерывными производными).

Пусть T — некоторое разбиение промежутка $[\alpha, \beta]$:

$$T = \{\alpha = t_0 < t_1 < \ldots < t_k < t_{k+1} < \ldots < t_n = \beta\}.$$

Положим $x_k = \varphi(t_k)$, $y_k = \psi(t_k)$, $k = 0, 1, \ldots, n$, и рассмотрим на кривой Г систему точек $M_k(x_k, y_k)$. Последовательно соединив эти точки, получим ломаную $L(T)$ с вершинами M_k, лежащими на кривой Г (рис. 40). Такая ломаная называется *вписанной в кривую* Г. Рассмотрим совокупность всех ломаных $L = L(T)$, вписанных в кривую Г, отвечающих всевозможным разбиениям T промежутка $[a, b]$. Поставим в соответствие каждой ломаной L число $s(L)$, равное длине ломаной. Ясно, что

$$s(L) = \sum_T \sqrt{[\varphi(t_{k+1}) - \varphi(t_k)]^2 + [\psi(t_{k+1}) - \psi(t_k)]^2}.$$

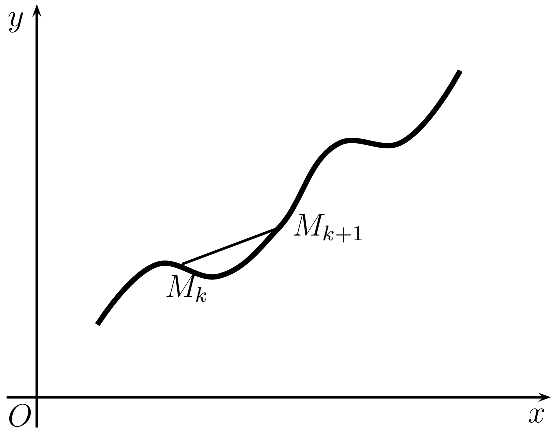

Рис. 40

Назовем кривую Γ *спрямляемой*, если множество чисел $\{s(L)\}$, соответствующее всевозможным разбиениям T промежутка $[\alpha, \beta]$, будет ограниченным. Верхнюю грань этого множества, т.е. число $s(\Gamma) = \sup\limits_{T} \{s(L)\}$ назовем *длиной кривой* Γ.

Пусть M_k и M_{k+1} — две последовательные точки кривой Γ, соответствующие концам промежутка $[t_k, t_{k+1}]$ разбиения T, t', t'' — любые две точки из этого промежутка. Обозначим через M' и M'' соответствующее точки на кривой, через $\rho(M', M'')$ — расстояние между ними:

$$\rho(M', M'') = \sqrt{[\varphi(t') - \varphi(t'')]^2 + [\psi(t') - \psi(t'')]^2}.$$

Величину $\sup\limits_{t',t''} \rho(M', M'')$ соответственно всевозможным парам значений t' и t'' из $[t_k, t_{k=1}]$ назовем *диаметром* элементарной части M_k кривой M_{k+1}. Наибольший из диаметров элементарных частей обозначим через $\Lambda(T)$.

Теорема 1. *Для того чтобы кривая* Γ *была спрямляемой, необходимо и достаточно, чтобы для любой последовательности разбиений* $\{T_\nu\}$*, для которой* $\Gamma(T_\nu) \to 0$*, последовательность длин* $\{s(L_\nu)\}$*, соответствующих этим разбиениям ломаных, имела конечный предел.*

Доказательство необходимости аналогично доказательству теоремы Дарбу, и мы его опускаем. Наметим доказательство достаточности.

Допустим, что для каждой последовательности разбиений $\{T_\nu\}$, для которой $\Lambda)T_\nu) \to 0$, соответствующая последовательность длин ломаных $\{s(L_\nu)\}$ имеет конечный предел. Тогда легко видеть, что пределы всех последовательностей $\{s(L_\nu)\}$, соответствующих всевозможным последовательностям разбиений $\{T_\nu\}$ с $\Lambda(T_\nu) \to 0$ совпадают.

Но среди этих последовательностей разбиений найдется и такая, для которой пределом $\{s(L_\nu)\}$ будет верхняя грань $s(\Gamma)$ множества всевозможных длин ломаных, вписанных в кривую Γ, а это значит, что $s(\Gamma)$ — общий предел для всех последовательностей $\{s(L_\nu)\}$.

Замечание. Из теоремы 1 следует, что для установления спрямляемости кривой и отыскания ее длины надо взять произвольную последовательность разбиений $\{T_\nu\}$ промежутка $[a, b]$ изменения параметра t такую, что $\Lambda(T_\nu) \to 0$ и проверить наличие предела у последовательности $\{s(L_\nu)\}$. Значение этого предела (если он конечен) и будет длиной кривой.

Напомним, что функция $f(x)$, определенная на промежутке $[\alpha, \beta]$, имеет ограниченные изменения на этом промежутке, если множество значения сумм

$$\sum_T |\varphi(t_{k+1}) - \varphi(t_k)|,$$

соответствующих всевозможным разбиениям T промежутка $[a, b]$ на конечное число частей, является ограниченным, т.е. если существует такое число N, что для любого разбиения T имеет место неравенство

$$\sum_T |\varphi(T_{k+1}) - \varphi(t_k)| \leq N.$$

Теорема 2. *Для того чтобы кривая Γ, заданная уравнениями*

$$x = \varphi(t) \quad \text{и} \quad y = \psi(t), \qquad \alpha \leq t \leq \beta, \tag{1}$$

была спрямляемой, необходимо и достаточно, чтобы функции $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ имели на отрезке $[a, b]$ ограниченное изменение.

Доказательство. Имеем для функции $\varphi(t)$ очевидные неравенства

$$|\varphi(t_{k+1}) - \varphi(t_k)| \leq \sqrt{[\varphi(t_{k+1}) - \varphi(t_k)]^2 + [\psi(T_{k+1}) - \psi(t_k)]^2} \leq$$

$$\leq |\varphi(T_{k+1}) - \varphi(t_k)| + |\psi(T_{k+1}) - \psi(t_k)|$$

и аналогичные для функции $\psi(t)$.

В результате суммирования по всем элементарным частям разбиения получим для $\varphi(t)$:

$$\sum_T |\varphi(t_{k+1}) - \varphi(t_k)| \leq \sum_T \sqrt{[\varphi(T_{k+1}) - \varphi(t_k)]^2 + [\psi(t_{k+1}) - \psi(t_k)]^2} \leq$$

$$\leq \sum_T |\varphi(t_{k+1}) - \varphi(t_k)| + \sum_T |\psi(t_{k+1}) - \psi(t_k)|$$

и аналогичное выражение — для $\psi(t)$. Из этих неравенств вытекает, что спрямляемость кривой (1) эквивалентна ограниченности изменения каждой из функций $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ на отрезке $[a, b]$.

Следствие. *Если функции $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ имеют на $[\alpha, \beta]$ ограниченные производные, то кривая Γ: $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, $\alpha \leq t \leq \beta$ спрямляема.*

В самой деле, если $|\varphi'(t)| \leq L$, то

$$|\varphi(t_{k+1}) - \varphi(t_k)| = |\varphi'(\tau_k)\Delta t_k| \leq L\Delta t_k,$$

откуда $\sum\limits_T |\varphi(T_{k+1}) - \varphi(t_k)| \leq L(\beta - \alpha)$. Аналогичное выражение получим для функции $\psi(t)$.

Теорема 3. *Если функции $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ имеют интегрируемые на $[\alpha, \beta]$ производные, то кривая Γ, заданная уравнениями*

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t), \qquad \alpha \leq t \leq \beta,$$

спрямляема и

$$s(\Gamma) = \int\limits_{\alpha}^{\beta} \sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2}\, dt.$$

Доказательство. Так как интегрируемая функция необходимо, ограничена, то, по следствию из теоремы 2, кривая Γ, удовлетворяющая условиям теоремы, спрямляема. Остается вывести формулу для длины кривой.

С этой целью рассмотрим произвольную последовательность разбиений $\{T_\nu\}$ отрезка $[\alpha, \beta]$, такую, что $\max\limits_k\ \Delta_k^{(\nu)} \to 0$. В силу непрерывности функций $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ также $\Gamma(T_\nu) \to 0$. Действительно, так как $\varphi(t)$ и $\psi(t)$, будучи непрерывными на отрезке $[\alpha, \beta]$, равномерно непрерывны на этом отрезке, по заданному числу $\varepsilon > 0$ найдется такое число $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, что при любом разбиении T промежутка $[\alpha, \beta]$ на элементарные части с длинами, меньшими δ, колебание каждой да функций $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ на промежутке $[t_k, t_{k+1}]$ будет меньше $\dfrac{\varepsilon}{\sqrt{2}}$. Но тогда

$$\Lambda(T) = \max_k \left\{ \sup_{t, t'' \in [t_k, t_{k+1}]} \sqrt{[\varphi(t') - \varphi(t'')]^2 + [\psi(t') - \psi(t'')]^2} \right\} < \varepsilon.$$

Поэтому при построении последовательности разбиений $\{T_\nu\}$ промежутка $[\alpha, \beta]$, такой, что $\Lambda(T_\nu) \to 0$, достаточно позаботиться лишь о том, чтобы $\lambda(T_\nu) = \max\limits_k\ \Delta_k^{(\nu)}$ $\to 0$.

Рассмотрим произвольную последовательность $\{T_\nu\}$ разбиений отрезка $[a, b]$, такую, что $\lambda(T_\nu) \to 0$. В этом случае для длины ломаной $L_\nu = L(T_\nu)$ получим выражение:

$$s(L_\nu) = \sum_{T_\nu} \sqrt{[\varphi(t_{k+1}^{(\nu)}) - \varphi(t_k^{(\nu)}]^2 + [\psi(t_{k+1}^{(\nu)} - \psi(t_k^{(\nu)}]^2}.$$

По формуле Лагранжа,

$$\varphi(t_{k+1}^{(\nu)}) - \varphi(t_k^{(\nu)}\varphi'(\tau_k^{(\nu)})\Delta t_k^{(\nu)}, \qquad \psi(t_{k+1}^{(\nu)}) - \psi(t_k^{(\nu)}\psi'(\theta_k^{(\nu)})\Delta t_k^{(\nu)},$$

где $\tau_k^{(\nu)}$ и $\theta + k^{(\nu)}$ — некоторые промежуточные точки отрезка $[t_k^{(\nu)}, t_{k+1}^{(\nu)}]$. Следовательно,

$$s(L_\nu) = \sum_{T_\nu} \sqrt{[\varphi'(\tau_k^{(\nu)}]^2 + [\psi'(\theta_k^{(\nu)}]^2}\Delta t_k^{(\nu)}. \tag{2}$$

Если бы $\tau_k^{(\nu)} = \theta_k^{(\nu)}$, то сумма (2) была бы интегральной суммой для функции $\sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2}$. Однако в общем случае $\tau_k^{(\nu)} \neq \theta_k^{(\nu)}$, и поэтому «почти интегральную» сумму (2) преобразуем следующим образом:

$$
\begin{aligned}
&\sum_{T_\nu}\sqrt{[\varphi'(\tau_k^{(\nu)}]^2+[\psi'(\theta_k^{(\nu)}]^2}\Delta t_k^{(\nu)} = \\
&= \sum_{T_\nu}\sqrt{[\varphi'(\tau_k^{(\nu)}]^2+[\psi'(\tau_k^{(\nu)}]^2}\Delta t_k^{(\nu)} + \\
&+ \sum_{T_\nu}\left\{\sqrt{[\varphi'(\tau_k^{(\nu)}]^2+[\psi'(\theta_k^{(\nu)}]^2}-\sqrt{[\varphi'(\tau_k^{(\nu)}]^2+[\psi'(\tau_k^{(\nu)}]^2}\right\}\Delta t_k^{(\nu)} = \\
&= \sum_{T_\nu}\sqrt{[\varphi'(\tau_k^{(\nu)}]^2+[\psi'(\tau_k^{(\nu)}]^2}\Delta t_k^{(\nu)} + \mu_\nu.
\end{aligned}
\tag{3}
$$

При этом преобразовании мы добавила к равенству (3) и вычли из него интегральную сумму

$$\sum_{T_\nu}\sqrt{[\varphi'(\tau_k^{(\nu)}]^2+[\psi'(\tau_k^{(\nu)}]^2}\Delta t_k^{(\nu)}.$$

При $\lambda(T_\nu) \to 0$ первое слагаемое правой части равенства (3) стремится к $\int\limits_\alpha^\beta \sqrt{[\varphi'(t)]^2+[\psi'(t)]^2}\,dt$. Поэтому остается лишь показать, что второе слагаемое μ_ν стремится к нулю.

Поскольку имеет место система неравенств

$$
\begin{aligned}
&\left|\sqrt{[\varphi'(\tau_k^{(\nu)})]^2+[\psi'(\theta_k^{(\nu)})]^2}-\sqrt{[\varphi'(\tau_k^{(\nu)}]^2+[\psi'(\tau_k^{(\nu)}]^2}\right| = \\
&= \frac{[\psi'(\theta_k^{(\nu)})+\psi'(\tau_k^{(\nu)})]\,|\psi'(\theta_k^{(\nu)})-\psi'(\tau_k^{(\nu)})|}{\sqrt{[\varphi'(\tau_k^{(\nu)}]^2+[\psi'(\theta_k^{(\nu)}]^2}+\sqrt{[\varphi'(\tau_k^{(\nu)}]^2+[\psi'(\tau_k^{(\nu)}]^2}} \le \\
&\le \psi'(\theta_k^{\nu)})-\psi'(\tau_k^{(\nu)})| \le \omega_k^{(\nu)}(\psi'),
\end{aligned}
$$

для μ_ν получим следующую оценку

$$\mu_\nu \le \sum_{T_\nu}\omega_k^{(\nu)}\Delta t_k^{(\nu)}.$$

В полученном неравенстве сумма справа имеет пределом число 0, так как функция $\psi'(t)$ по условию интегрируема. Таким образом,

$$s(\Gamma) = \lim_{\nu\to\infty} s(L_\nu) = \int\limits_\alpha^\beta \sqrt{[\varphi'(t)]^2+[\psi'(t)]^2}\,dt.$$

Замечание. Если кривая Γ является графиком непрерывно дифференцируемой функции $y = f(x)$, заданной на промежутке $[a, b]$, то, очевидно,

$$s(\Gamma) = \int\limits_a^b \sqrt{1+[f'(x)]^2}\,dx.$$

Если уравнение кривой Γ задано в полярных координатах $x = \rho(\varphi)\cos\varphi$, $y = \rho(\varphi)\sin\varphi$, где $\alpha \le \varphi \le \beta$ и $\rho(\varphi)$ непрерывно дифференцируемая на $[\alpha, \beta]$ функция, то ее длина выражается интегралом:

$$s(\Gamma) = \int\limits_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\rho^2 + (\rho')^2}\, d\varphi.$$

Примеры.

1. Длина дуги цепной линии. Цепной линией называется кривая, задаваемая уравнением

$$y = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}).$$

Форму этой кривой принимает тяжелая нить, закрепленная на концах (рис. 41). Длина дуги AB будет равна:

$$s_{AB} = \int\limits_{-a}^{a} \sqrt{1 + \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^2}\, dx =$$

$$= \int\limits_{-a}^{a} \sqrt{1 + \frac{e^{2x} - 2 + e^{-2x}}{4}}\, dx = \int\limits_{-a}^{a} \frac{e^x + e^{-x}}{2}\, dx = e^a - e^{-a}.$$

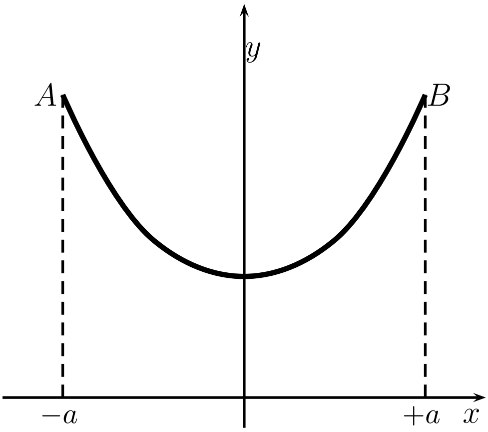

Рис. 41

2. Длина дуги параболы $y = x^2$ (рис. 42):

$$s_{OA} = \int\limits_{0}^{a} \sqrt{1 + 4x^2}\, dx = 2\int\limits_{0}^{a} \sqrt{x^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2}\, dx =$$

$$= 2\Bigg[\frac{1}{2} + \sqrt{x^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^2 \ln(x + \sqrt{x^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2}\, dx =$$

$$2 = \left[\frac{a}{2}\sqrt{a^2 + \frac{1}{4}} + \frac{1}{8}\ln\left(a + \sqrt{a^2 + \frac{1}{4}}\right)\right] + \frac{1}{2}\ln 2.$$

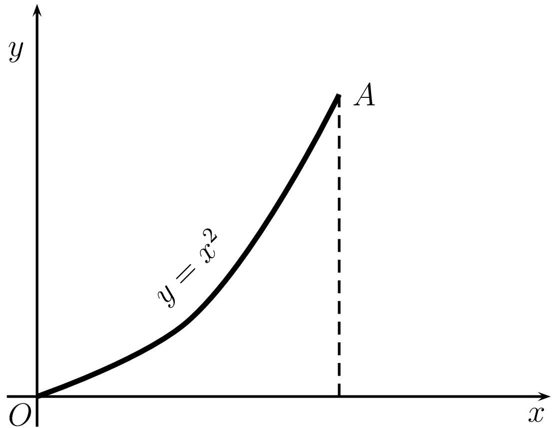

Рис. 42

Так как в формуле длины дуги кривой под знаком интеграла стоит иррациональное выражение, вычисление длины дуги даже такой простой кривой, как парабола, оказывается достаточно сложным.

3. Длина дуги эллипса: $x = a\cos\varphi$, $y = b\sin\varphi$, $0 \le \varphi \le 2\pi$ (рис. 43):

$$s_{\text{эл}} = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{a^2 + \sin^2\varphi + b^2\cos^2\varphi}\, d\varphi = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{a^2 - (a^2 - b^2)\cos^2\varphi}\, d\varphi =$$

$$= a\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - k^2\cos^2\varphi}\, d\varphi, \qquad k^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2},$$

где k — эксцентриситет эллипса. Подстановкой $z = \cos\varphi$ приводим последний интеграл к виду

$$\int\limits_0^1 \frac{1 - k^2z^2}{\sqrt{(1 - z^2)(1 - k^2x^2)}}\, dz,$$

который не может быть вычислен точно, так как неопределенный интеграл $\displaystyle\int \frac{1 - k^2z^2}{\sqrt{(1 - z^2)(1 - k^2x^2)}}\, dz$ не выражается в элементарных функциях. Интеграл вида

$$\int \frac{P(z)}{\sqrt{Q(z)}}\, dz,$$

где $P(z)$ — многочлен второй степени, $Q(z)$ — многочлен третьей или четвертой степени без кратных корней, называется *эллиптическим интегралом.*

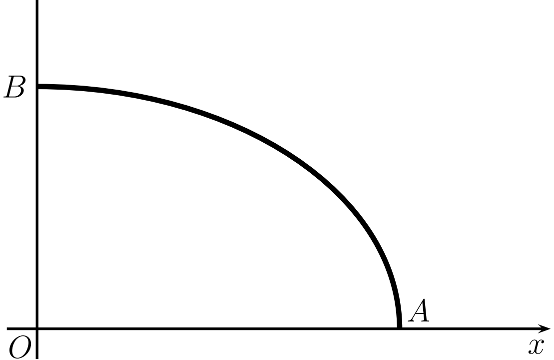

Рис. 43

Рассмотрим гладкую кривую Γ:

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t), \qquad \alpha \le t \le \beta, \tag{4}$$

и дополнительно предположим, что производные функции $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ не обращаются одновременно в нуль на отрезке $[\alpha, \beta]$, т.е. что $[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2 > 0$ при всех $t \in [\alpha, \beta]$. Рассмотрим часть кривой Γ, соответствующую промежутку $[\alpha, t]$ изменения параметра. Длина этой части кривой выразится интегралом

$$s(t) = \int\limits_{\alpha}^{t} \sqrt{[\varphi'(\tau)]^2 + [\psi'(\tau)]^2}\, d\tau,$$

откуда

$$s'(t) = \sqrt{[\varphi'(\tau)]^2 + [\psi'(\tau)]^2}$$

или

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}. \tag{5}$$

Равенство (5) показывает, что дифференциал дуги выражает длину отрезка касательной к кривой в точке $A(\varphi(t), \psi(t))$ (рис. 44), соответствующего приращениям dx и dy переменных x и y, возникающим в результате приращения dt параметра t. Равенство (5) часто записывает в следующем виде:

$$ds^2 = dx^2 + dy^2. \tag{6}$$

Из соотношения (6) вытекает, что

$$\frac{dx}{ds} = \cos\lambda, \qquad \frac{dy}{ds} = \sin\lambda,$$

где λ — угол, образованный касательной к кривой с направлением оси Ox.

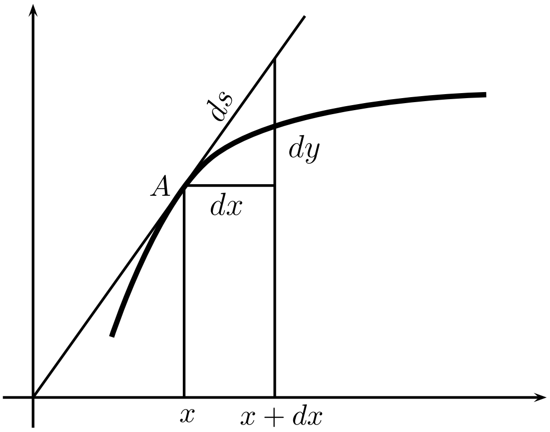

Рис. 44

При сделанном. предположении относительно функций $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ функция $s(t)$ является строго монотонной на промежутке $[\alpha, \beta]$, поэтому для нее существует непрерывно-дифференцируемая обратная функция $t = \chi(s)$, определенная на промежутке $[0, s(\beta)]$. Если в уравнениях (6) перейти к переменной s, т.е. рассмотреть

$$\begin{aligned} x &= \varphi[\chi(s)] = x(s), \\ y &= \psi[\chi(s)] = y(s), \end{aligned} \qquad 0 \le s \le s(\beta), \tag{7}$$

получим уравнение кривой Γ, в котором в роли параметра выступает переменная длина кривой. Во многих рассмотрениях задание кривой в форме (7) оказывается особенно удобным. Уравнение кривой в форме (7) носит название *натурального уравнения кривой.*

Теорема 4. *Пусть* Γ*:* $x = \varphi(t)$*,* $y = \psi(t)$*,* $\alpha \le t \le \beta$*, есть гладкая кривая,* $\overset{\smile}{AA'}$ *— дуга этой кривой,* $\overline{AA'}$ *— хорда, стягивающая дугу* $\overset{\smile}{AA'}$*. Тогда*

$$\lim_{s_{\overline{AA'}} \to 0} \frac{\overset{\smile}{AA'}}{\overline{AA'}} = 1.$$

Доказательство. Пусть координатами точек A и A' будут соответственно $(\varphi(t), \psi 9t))$ и $(\varphi(t + \Delta t), \psi(t + \Delta t))$. Тогда

$$s_{\overset{\smile}{AA'}} = \int\limits_{t}^{t+\Delta t} \sqrt{[\varphi'(\tau)]^2 + [\psi'(\tau)]^2}\, d\tau$$

$$s_{\overline{AA'}} = \sqrt{[\Delta\varphi(t)]^2 + [\Delta\psi(t)]^2} = \sqrt{[\varphi'(\theta_1)]^2 + [\psi'(\theta_2)]^2}\Delta t, \quad t < \theta_i < t + \Delta t, \quad i = 1, 2.$$

Таким образом,

$$\frac{s_{\overset{\smile}{AA'}}}{s_{\overline{AA'}}} = \frac{\int\limits_{t}^{t+\Delta t} \sqrt{[\varphi'(\tau)]^2 + [\psi'(\tau)]^2}\, d\tau}{\sqrt{[\varphi'(\theta_1)]^2 + [\psi'(\theta_2)]^2 \Delta t}}.$$

По теореме о среднем,

$$\int\limits_{t}^{t+\Delta t} \sqrt{[\varphi'(\tau)]^2 + [\psi'(\tau)]^2}\, d\tau = \sqrt{[\varphi'(\theta)]^2 + [\psi'(\theta)]^2}\Delta t,$$

где $t \le \theta \le t + \Delta t$. Поэтому

$$\frac{s_{\overset{\smile}{AA'}}}{s_{\overline{AA'}}} = \frac{\sqrt{[\varphi'(\theta)]^2 + [\psi'(\theta)]^2}}{\sqrt{[\varphi'(\theta_1)]^2 + [\psi'(\theta_2)]^2}}. \tag{8}$$

В силу непрерывности $\varphi'(t)$ и $\psi'(t)$ при $\Delta t \to 0$ имеем:

$$\varphi'(\theta) \to \varphi'(t), \qquad \psi'(\theta) \to \psi'(t),$$

$$\varphi'(\theta_1) \to \varphi'(t), \qquad \psi'(\theta_2) \to \psi'(t).$$

Следовательно, согласно (8), при $\Delta t \to 0$

$$\frac{s_{\overset{\smile}{AA'}}}{s_{\overline{AA'}}} \to 1,$$

что требовалось доказать.

Рассмотрения, проведенные для плоской кривой, могут быть полностью перенесены на случай пространственной кривой, задаваемой системой

$$x = \varphi(t),$$

$$y = \psi(t),$$

$$z = \chi(t),$$

где функции $\varphi(t)$, $\psi(t)$ $\chi(t)$ определены на некотором промежутке $[\alpha, \beta]$.

В частности, если кривая гладкая, то ее длина выражается интегралом:

$$s = \int\limits_{\alpha}^{\beta} \sqrt{[\varphi'(\tau)]^2 + [\psi'(\tau)]^2 + [\chi'(t)]^2}\, d\tau,$$

а величины

$$\frac{dx}{ds} = \cos\lambda, \qquad \frac{dy}{ds} = \cos\mu, \qquad \frac{dz}{ds} = \cos\nu$$

определяют косинуса углов, образованных касательной к кривой с направлениями координатных осей.

В качестве еще одного геометрического приложения определенных интегралов рассмотрим задачу о нахождении площадей поверхностей вращения. При этом воспользуемся наглядным определением площади, не вдаваясь в строгое определение этого понятия, которое будет приведено далее.

Найдем площадь поверхности, которая образуется при вращении кривой вокруг оси, лежащей в плоскости кривой, которую примем за ось Ox. Пусть кривая Γ задана уравнением $y = f(x)$, где функция $f(x)$ непрерывна вместе с производной $f'(x)$ на $[a, b]$ и неотрицательна на этом отрезке. При вращении участка кривой, соответствующего отрезку $[x, x + dx]$, описываемая им фигура при достаточно малом значении dx близка к усеченному конусу (рис. 45). Площадь dQ поверхности этой фигуры приближенно выражается равенством

$$dQ = 2\pi \frac{f(x) + f(x + dx)}{2}\, ds = 2\pi f(x)\, dx + o(dx).$$

Тогда площадь Q^{29} рассматриваемой поверхности будет следующей:

$$Q = 2\pi \int\limits_a^b y\,dx = 2\pi \int\limits_a^b f(x)\sqrt{1+[f'(x)]^2}\,dx.$$

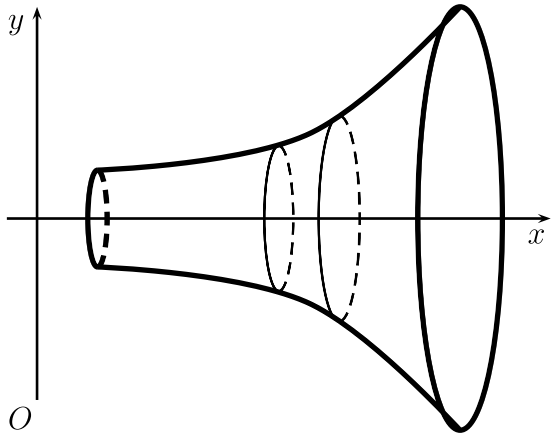

Рис. 45

Аналогичный образом получаем формулу площади поверхности вращения кривой Γ вокруг оси Oy, заданной уравнением $x = g(y)$, $y \in [c, d]$:

$$Q = 2\pi \int\limits_c^d x\,ds = 2\pi \int\limits_c^d \sqrt{1+[g'(y)]^2}\,dy.$$

Предлагаем читателю рассмотреть случай параметрического задания кривой.

Примеры.

Найдем площадь параболического зеркала с высотой равной единице (рис. 46). Имеем:

$$Q = 2\pi \int\limits_0^1 \sqrt{x}\sqrt{1+\frac{1}{4x}}\,dx = \pi \int\limits_0^1 \sqrt{4x+1}\,dx = \frac{\pi}{4}\cdot\frac{2}{3}(4x+1)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^1 = \frac{\pi}{6}(5\sqrt{5}-1).$$

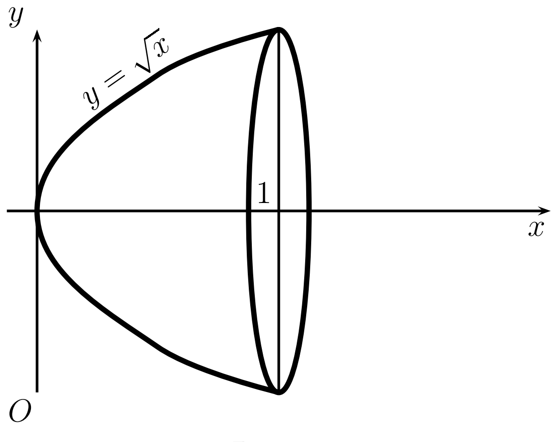

Рис. 46

---

[29] См. с. 313.!!!

В большинстве случаев вследствие наличия под знаком интеграла выражения $\sqrt{1+[f'(x)]^2}$ он не берется.

§ 4. Общая схема применения интеграла

В приложениях часто приходится встречаться с величинами, распределенными по некоторому промежутку $[a,b]$ таким образом, что каждому входящему в него промежутку $[\alpha,\beta]$ соответствует определенное значение этой величины. Например, при перемещении материальной точки под действием силы вдоль промежутка $[a,b]$ каждому участку пути $[\alpha,\beta]$ соответствует определенное значение совершаемой на этом участка работы по перемещению. В дальнейшем мы встретимся с другими призерами такого рода, а сейчас введем следующие понятия.

Будем говорить, что на отрезке $[a,b]$ определена *функция промежутка* $J([\alpha,\beta])$, если каждому промежутку $[\alpha,\beta]\subset[a,b]$ соответствует определенное число. Если функция $J([\alpha,\beta])$ обладает таи свойством, что для каждого разбиения $[\alpha,\beta]$ на две части $[\alpha,\xi]$, $[\xi,\beta]$ выполняется равенство

$$J([\alpha,\beta])=J([\alpha,\xi])+J([\xi,\beta]),$$

то она называется *аддитивной* на $[a,b]$.

Важным примером аддитивной на $[a,b]$ функции J является определенный интеграл от интегрируемой на $[a,b]$ функции $f(x)$. Для него

$$J([\alpha,\beta])=\int\limits_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx.$$

Для аддитивной на $[a,b]$ функции соответственно каждому разбиению $T=\{a=x_0<x_1<\ldots<x_{n-1}<x_n=b\}$ промежутка на конечное число элементарных частей выполняется равенство

$$J([a,b])=\sum_{T} J([x_k,x_{k+1}]). \tag{1}$$

Пусть $J([\alpha,\beta])$ — функция промежутка, определенная на $[a,b]$, и x_0 — некоторая фиксированная точка из $[a,b]$. Рассмотрим переменный промежуток $[\alpha,\beta]$, содержащий точку x_0. Если при стягивании промежутка $[\alpha,\beta]$ к точке x_0 (т.е. при $\beta,\alpha\to x_0$) значение $J([\alpha,\beta])$ стремится к нулю, то говорят, что функция $J([\alpha,\beta])$ *непрерывна в точке* x_0. Наконец, функция $J([\alpha,\beta])$ *дифференцируема в точке* x_0, если существует конечный предел

$$\lim_{\beta-\alpha\to0,\ \alpha\le x_0\le\beta}\frac{J([\alpha,\beta])}{\beta-\alpha}=J'(x_0),$$

называемый *производной функции* $J([\alpha,\beta])$ *в точке* x_0. В этом случае имеет место представление

$$J([\alpha,\beta])=J'(x_))(\beta-\alpha)+o(\beta-\alpha). \tag{2}$$

Если функция $J([\alpha,\beta])$ дифференцируема в каждой точке x промежутка $[a,b]$, то на $[a,b]$ определена производная $J'(x_0)$ этой функции, называемая также *Функцией плотности* распределения величины $J([\alpha,\beta])$.

Пусть, например, вдоль промежутка $[a,b]$ расположен материальный стержень, а значение $J([\alpha,\beta])$ выражает массу части стержня, соответствующей промежутку $[\alpha,\beta]$. Тогда число $J'(x_0)$ выражает плотность распределения массы в точке x_0. Обозначим плотность $J'(x)$ через $\rho(x)$, перепишем соотношение (2) для каждого промежутка $[x_k, x_{k+1}]$ разбиения T в виде

$$J([x_k, x_{k+1}]) = \rho(\xi)\Delta x_k + o(\Delta x_k),$$

а равенство (1) — в виде

$$J([a,b]) = \sum_T \rho(\xi_k)\Delta x_k + \sum_T o(\Delta x_k).$$

Первая из сумм в этом равенстве, очевидно, является интегральной для функции $\rho(x)$, и если плотность $\rho(x)$ интегрируема на $[a,b]$, то вторая сумма, как легко проверить, стремится к нулю при $\lambda(T) \to 0$.

Из сказанного вытекает, что, зная плотность $\rho(x)$, в случае ее интегрируемости можно выразить значение массы стержня $J([a,b])$ интегралом

$$J([a,b]) = \int\limits_a^b \rho(x)\,dx. \tag{3}$$

Для массы участка стержня на промежутке $[x, x+dx]$ в этом случае получаем представление

$$J([x, x+dx]) = \rho(x)\,dx + o(dx).$$

Приведем еще один пример. Пусть функция $f(x)$ есть величина силы, приложенной к материальной точке x и направленной вдоль отрезка $[a,b]$. На участке пути $[x, x+dx]$ эта сила выполняет работу

$$\Delta A = f(x)\,dx + o(dx).$$

Тогда вдоль всего пути $[a,b]$ работа A заданной силы выразится интегралов

$$A = \int\limits_a^b f(x)\,dx$$

(при этом предполагается, что функций $f(x)$ интегрируема).

Глава X

n-МЕРНОЕ ЕВКЛИДОВО ПРОСТРАНСТВО. МЕТРИЧЕСКИЕ ПРОСТРАНСТВА. НЕПРЕРЫВНЫЕ ФУНКЦИИ НА МНОЖЕСТВАХ МЕТРИЧЕСКИХ ПРОСТРАНСТВ

В гл. I мы установили взаимно однозначное соответствие между вещественными числами и точками прямой. Это соответствие позволило ввести координаты точек, лежащих на прямой, на плоскости или в пространстве, что дало возможность, с одной стороны, исследовать геометрические объекты аналитическими методами, например, вычислением, а не построением, находить точки пересечения данной прямой и данной окружности, с другой стороны, при изучении вещественных функций одной или двух вещественных переменных оказалось возможном использовать геометрические представления и терминологию, рассматривая, например, график линейной функции как прямую, график функции $y = ax^2 + bx + c$ как параболу и т.д. Геометрическое изображение функции трех и более переменных невозможно. Однако и здесь обобщения геометрических понятий полезны, так как при формулировке и доказательстве утверждений, относящихся к функциям многих независимых переменных, позволяет использовать удобные выражения и обозначения, наводящие соображения по аналогии.

§ 1. n-мерное евклидово пространство

Рассмотрим всевозможные упорядоченные совокупности $(x^1, x^2, \dots, x^n)$ из n вещественных чисел $x^1, x^2, \dots, x^n$. По аналогии с трехмерным евклидовым пространством, рассматриваемым как множество всех упорядоченных троек вещественных чисел, введем понятие n-мерного пространства для любою натурального числа n.

Определение 1. *n-мерным арифметическим пространством* $\mathbb{R}^n$, $n > 1$, называется множество всех упорядоченных совокупностей $(x^1, x^2, \dots, x^n)$ из n вещественных чисел. Каждая совокупность $(x^1, x^2, \dots, x^n)$ называется *точкой* пространства $\mathbb{R}^n$. Числа $x^1, x^2, \dots, x^n$ называются *координатами* точки $(x^1, x^2, \dots, x^n)$.

Пространство $\mathbb{R}^1$ есть вся числовая прямая $\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$.

Точки пространства $\mathbb{R}^n$ часто обозначаются строчными буквами $x = (x^1, x^2, \ldots, x^n)$, $y = (y^1, y^2, \ldots, y^n)$ или прописными буквами M, N латинского алфавита. Используется также запись $M(x^1, x^2, \ldots, x^n)$, которая означает, что дана точка M с координатами $x^1, x^2, \ldots, x^n$.

Две точки $x = (x^1, x^2, \ldots, x^n)$ и $y = (y^1, y^2, \ldots, y^n)$ пространства $\mathbb{R}^n$ считаются одинаковыми (тождественными, совпадающими), $x = y$, если равны одноименные координаты этих точек, т.е. $x^i = y^i$ для всех $i = 1, 2, \ldots, n$.

Определение 2. *Расстоянием между точками* $x = (x^1, x^2, \ldots, x^n)$ *и* $y = (y^1, y^2, \ldots, y^n)$ называется вещественное число

$$\rho(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x^i - y^i)^2}. \tag{1}$$

Ясно, что $\rho(x, y) \geq 0$ и что $\rho(x, y) = 0$ тогда и только тогда, когда $x = y$. Очевидно также, что

$$\rho(x, y) = \rho(y, x).$$

Кроме того, расстояние $\rho(x, y)$ удовлетворяет неравенству

$$\rho(x, z) \leq \rho(x, y) + \rho(y, z), \tag{2}$$

где x, y, z — произвольные точки $\mathbb{R}^n$, называемому *неравенством треугольника.* (Если x, y, z — точки $\mathbb{R}^2$, то неравенство (2) означает, что сумма длин двух сторон треугольника не меньше длины его третьей стороны.) Чтобы доказать это важное свойство расстояния, установив следующее числовое неравенство.

Пусть $a^1, a^2, \ldots, a^n$ и $b^1, b^2, \ldots, b^n$ — две система вещественных чисел. Тогда

$$\sqrt{\sum_{k=1}^{n} (a_k + b_k)^2} \leq \sqrt{\sum_{k=1}^{n} a_k^2} + \sqrt{\sum_{k=1}^{n} b_k^2}. \tag{3}$$

Неравенство (3) называется *неравенством Коши–Минковского.* Имеем

$$\sum_{k=1}^{n} (a_k + b_k 0^2 = \sum_{i=1}^{n} a_k^2 + 2 \sum_{k=1}^{n} a_k b_k + \sum_{k=1}^{n} b_k^2.$$

Но, по неравенству Буняковского–Шварца (пример 2 из § 2 гл. VI)

$$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k \leq \sum_{k=1}^{n} |a_k b_k| \leq \sqrt{\sum_{k=1}^{n} a_k^2} \cdot \sqrt{\sum_{k=1}^{n} b_k^2}$$

Поэтому

$$\sum_{k=1}^{n} (a_k + b_k)^2 \leq \sum_{k=1}^{n} a_k^2 + 2\sqrt{\sum_{k=1}^{n} a_k^2} \cdot \sqrt{\sum_{k=1}^{n} b_k^2} + \sum_{k=1}^{n} b_k^2 = \left(\sqrt{\sum_{k=1}^{n} a_k^2} + \sqrt{\sum_{k=1}^{n} b_k^2}\right)^2,$$

откуда

$$\sqrt{\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k)^2} \le \sqrt{\sum_{k=1}^{n} a_k^2} + \sqrt{\sum_{k=1}^{n} b_k^2}.$$

Пусть $x = (x^1, x^2, \ldots, x^n)$, $y = (y^1, y^2, \ldots, y^n)$, $z = (z^1, z^2, \ldots, z^n)$ — точки $\mathbb{R}^n$. Используя неравенство (3), найдем:

$$\rho(x,z) = \sqrt{\sum_{k=1}^{n}(z^k - z^k)^2} = \sqrt{\sum_{k=1}^{n}[((x^k - y^k) + (y^k - z^k)]^2} \le$$

$$\le \sqrt{\sum_{k=1}^{n}(x^k - y^k)^2} + \sqrt{\sum_{k=1}^{n}(y^k - z^k)^2} = \rho(x,y) + \rho(y,z),$$

что требовалось доказать.

Из неравенства треугольника легко вывести так называемое *обратное неравенство треугольника*:

$$|\rho(x,z) - \rho(y,z)| \le \rho(x,y). \tag{4}$$

В самом деле,

$$\rho(x,z) \le \rho(x,y) + \rho(y,z),$$

откуда

$$\rho(x,z) - \rho(y,z) \le \rho(x,y). \tag{5}$$

Аналогичным образом находим

$$\rho(y,z) - \rho(x,z) \le \rho(y,x)$$

или с учетом того, что $\rho(x,y) = \rho(y,x)$

$$-[\rho(x,z) - \rho(y,z)] \le \rho(x,y). \tag{6}$$

Из выражений (5) и (6) вытекает неравенство (4).

Определение 3. Расстояние между точками n-мерного арифметического пространства, определяемое равенством (1), называется *евклидовым расстоянием*, а пространство $\mathbb{R}^n$, наделенное евклидовым расстоянием, называется *евклидовым n-мерным пространством.*

Некоторые множества точек пространства $\mathbb{R}^n$ при $n > 3$ по аналогии с трехмерным случаем имеют определенные названия.

Множество точек $x = (x^1, x^2, \ldots, x^n) \in \mathbb{R}^n$, координаты которых удовлетворяют неравенствам $a^i \le x^i \le b^i$, $i = 1, 2, \ldots, n$, где $a^1, a^2, \ldots, a^n$ и $b^1, b^2, \ldots, b^n$ — фиксированные числа, такие, что $a^i < b^i$ для $i = 1, 2, \ldots, n$, называются *замкнутым n-мерным параллелепипедом.* Двумерный замкнутый параллелепипед есть прямоугольник, одномерный — отрезок. Если все разности $b^i - a^i$, $i = 1, 2, \ldots, n$, равны между собой, то параллелепипед называют *кубом.* Множество $M = \{x = (x^1, x^2, \ldots, x^n) |\ a^i < x^i < b^i,\ i = 1, \ldots, n\}$ называется *открытым параллелепипедом.* Если в неравенстве для координат точек замкнутого параллелепипеда хотя бы для одного i одно из нестрогих неравенств заменить на строгое, то такой параллелепипед будет называться *полуоткрытым.* Например, неравенства

$$0 \le x^1 \le 1, \quad 0 \le x^2 < 1, \quad 0 \le x^3 \le 1, \quad 0 < x^4 \le 1$$

полуоткрытый четырехмерный куб.

Пусть P — замкнутый n-мерный параллелепипед:

$$P = \{x = (x^1, x^2, \dots, x^n)|\ a^i \le x \le b^i,\ i = 1, 2, \dots, n\}$$

или сокращенно

$$P = \{x|\ a^i \le x^i \le b^i\}.$$

Множество точек этого параллелепипеда, удовлетворяющих условиям

$$x^j = a_j, \quad a^i \le x^i \le b^i, \qquad i = 1, 2, \dots, n,\ i \ne j,$$

называется $(n-1)$*-мерной гранью* параллелепипеда P. Заменив a^j на b^j или взяв вместо j другой номер, получим другую $(n-1)$-мерную грань параллелепипеда. Всего у n-мерного параллелепидеда имеется $2n$ различных $(n-1)$-мерных граней.

Множество точек из P, определяемых равенствами и неравенствами

$$x^{j_1} = a^{j_1}, \quad x^{j_2} = a^{j_2}, \ \dots\ , \ x^{j_k} = a^{j_k}, \qquad a^i \le x^i \le b^i,$$

$$i = 1, 2, \dots, n, \qquad i \ne j_1, j_2, \dots, j_k, \qquad k < n,$$

называется $(n-k)$-мерной гранью параллелепипеда P.

Заменив некоторые a^{j_l} на b^{j_l}, $l = 1, 2, \dots, k$, или взяв другие k индексов $j'_1, j'_2, \dots, j'_k$, можно получить другую $(n-k)$-мерную грань. Рекомендуем читателю подсчитать, сколько $(n-k)$-мерных граней имеет n-мерный параллелепипед.

Множество точек $x \in \mathbb{R}^n$, удовлетворяющих неравенству $\rho(x, a) \le r$, где $a = (a^1, a^2, \dots, a^n)$ — фиксированная точка пространства $\mathbb{R}^n$, а r — неотрицательное число, называется *замкнутым n-мерным шаром* с *центром* в точке a и *радиусом* r. Оно обозначается через $\overline{K}(a, r)$. Неравенство, определяющее замкнутый n-мерный шар, имеет вид

$$\sum_{i=1}^{n} (x^i - a^i)^2 \le r^2.$$

Если $r = 0$, то шар вырождаемся в точку. Двумерный замкнутый шар — это круг, одномерный — отрезок $|x^1 - a^1| \le r$. Множество $K(a, r)$ называется *открытым n-мерным шаром*, а $S(a, r) = \{x|\ \rho(x, a) = r\}$ — *n-мерной сферой.* Ясно, что

$$\overline{K}(a, r) = K(a, r) \cup S(a, r).$$

Открытый шар $K(a, r)$ называется *внутренней частью* или *внутренностью* замкнутого шара $\overline{K}(a, r)$, а сфера $S(a, r)$ — *границей* как открытого шара $K(a, r)$, так и эамкнутого шара $\overline{K}(a, r)$.

Отметим, что n-мерные параллелепипеды и шар при $n > 3$ — это не геометрические фигуры, а названия некоторых множеств, элементами которых являются упорядоченные совокупности из n вещественных чисел. Помимо удобных названий такие геометрические понятия часто позволяют по аналогии с трехмерным случаем предугадать, какими аналитическими выражениями и преобразованиями надо воспользоваться, чтобы получить в пространстве $\mathbb{R}^n$ при $n > 3$ тот или иной результат, геометрически очевидный в пространстве $\mathbb{R}^3$.

Мы знаем, что в трехмерный замкнутый шар можно вписать замкнутый куб таким образом, что диагональ куба будет равна диаметру шара. Если диагональю трехмерного параллелепипеда является верхняя грань расстояний между двумя его точками, то «диагональю» n-мерного параллелепипеда $P = \{x|\ a^i \le x^i \le b^i\}$ естественно назвать число $\alpha = \sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n}(b^i - a^i)^2}$. Пусть теперь дан n-мерный шар $\overline{K}(a, r) = \{x|\ \rho(x, c) \le r\}$. Рассмотрим куб $P = \left\{x|\ c^i - \frac{r}{\sqrt{n}} \le x^i \le c^i + \frac{r}{\sqrt{n}}\right\}$, где c^i, $i = 1, 2, \dots, n$, — координаты центра шара. Если $x \in P$, то

$$\rho(x, c) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x^i - c^i)^2} \le \sqrt{\sum_{i=1}^{n}\frac{r^2}{n}} = r$$

т.е. каждая точка куба принадлежит шару. Кроме того, диагональ куба

$$\alpha = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}\left[\left(c^i + \frac{r}{\sqrt{n}}\right) - \left(c^i - \frac{r}{\sqrt{n}}\right)\right]^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}\frac{4r^2}{n}} = 2r,$$

и мы «вписали» требуемым образом n-мерный куб в n-мерный шар.

Читателю рекомендуется доказать утверждение: n-мерный шар можно вписать в n-мерный куб таким образом, что диаметр шара будет равен длине $l = b^i - a_i$ «ребра» куба.

Наличие в пространстве $\mathbb{R}^n$ расстояния позволяет ввести понятие предела последовательности точек этого пространства, окрестности, предельной точки множества и т. д.

Определение 4. Последовательность $\{x_k\} \subset \mathbb{R}^n$ называется *сходящейся к точке* $x_0 \in \mathbb{R}^n$, если $\rho(x_k, x_0) \to 0$ при $k \to \infty$. В этом случае записывают: $x_k \to x_0$ или $\lim\ x_k = x_0$.

Пусть $x_k = (x_k^1, x_k^2, \dots, x_k^n)$ и $x_0 = (x_0^1, x_0^2, \dots, x_0^n)$. Так как

$$|x_k^j - x_0^j| \le \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_k^j - x_0^j)^2} = \rho(x_k, x_0),$$

то из $x_k \to x_0$ следует, что $x_k^j \to x_0^j$ для любого $j = 1, 2, \dots, n$. Обратно, если $x_k^j \to x_0^j$ при всех $j = 1, 2, \dots, n$, то также $\rho(x_k, x_0) = \sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_k^j - x_0^j)^2} \to 0$, т.е.

$x_k \to x_0$. Поэтому сходимость последовательности пространства $\mathbb{R}^n$ к пределу эквивалентна сходимости i-х координат точек последовательности к одноименным i-м координатам точки, являющейся пределом последовательности. Кратко этот факт выражают словами: *сходимость в $\mathbb{R}^n$ есть покоординатная сходимость.*

Легко убедиться, что последовательность $\{x_n\} \subset \mathbb{R}^n$ может сходиться только к одному пределу. В самой деле, если $x_k \to x_0$ и $x_k \to \widetilde{x}_0$, то для любого числа $\varepsilon > 0$ найдется номер k_0, такой, что $\rho(x_k, x_0) < \dfrac{\varepsilon}{2}$ и $\rho(x_k, \widetilde{x}_0) < \dfrac{\varepsilon}{2}$ при $k \geq k_0$. Но тогда, в силу неравенства треугольника при $k \geq k_0$

$$\rho(x_0, \widetilde{x}_0) \leq \rho(x_0, x_k) + \rho(x_k, \widetilde{x}_0) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

и так как число $\varepsilon > 0$ произвольно, то $\rho(x_0, \widetilde{x}_0) = 0$. Это возможно, если $x_0 = \widetilde{x}_0$.

Как и в случае числовых последовательностей, легко убеждаемся, что если последовательность $\{x_k\} \subset \mathbb{R}^n$ сходится к пределу $x_0 \in \mathbb{R}^n$, то и любая подпоследовательность $\{x_{k_i}\} \subset \{x_k\}$ сходится к тому же пределу.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5. Множество $M \subset \mathbb{R}^n$ называется *ограниченным*, если существуют точка $a \in \mathbb{R}^n$ и константа r, такие, что $\rho(x, a) \leq r$ для любой точки $x \in M$.

ЛЕММА 1. *Сходящаяся последовательность $\{x_n\} \subset \mathbb{R}^n$ ограничена.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $x_k \to x_0$. Тогда найдется номер k_0, такой, что $\rho(x_k, x_0)$ < 1 при $k \geq k_0$. Положим $r = \max\,\{1, \rho(x_1, x_0), \rho(x_2, x_0), \ldots, \rho(x_{k_0-1}, x_0)\}$. В этом случае, как легко видеть, для любого k

$$\rho(x_k, x_0) \leq r,$$

что означает ограниченность последовательности $\{x_k\}$.

Из того, что сходимость последовательности точек в пространстве $\mathbb{R}^n$ есть покоординатная сходимость, вытекает необходимое и достаточное условие существования предела такой последовательности.

КРИТЕРИЙ КОШИ. *Для того чтобы последовательность $\{x_k\} \subset \mathbb{R}^n$ сходилась к некоторому пределу $x_0 \in \mathbb{R}^n$, необходимо и достаточно, чтобы для любого $\varepsilon > 0$ нашелся номер k_0, такой, что $\rho(x_k, x_m) < \varepsilon$ при $k, m \geq k_0$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Необходимость критерия Коши доказывается так же, как для последовательности чисел; надо лишь модуль разности вещественных чисел заменить расстоянием между точками пространства $\mathbb{R}^n$. Если условие Коши выполнено, то, так как для любого индекса $i = 1, 2, \ldots, n$

$$|x_k^i - x_m^i| \leq \rho(x_k, x_m),$$

последовательность i-х координат точек x_k также удовлетворяет условию Коши. Следовательно, существуют числа x_0^i, такие, что $x_k^i \to x_0^i$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Но тогда, как сказано выше, $x_k \to x_0$, и достаточность критерия Коши доказана.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6. *δ-окрестностью точки* $a \in \mathbb{R}^n$ называется открытый шар $K(a, \delta)$ радиусом δ с центром в этой точке.

Определение 7. Точка $a \in \mathbb{R}^n$ называется *предельной точкой* множества $X \subset \mathbb{R}^n$, если

$$K(a, \delta) \cap \{X \setminus a\} \neq \emptyset$$

для любого числа $\delta > 0$.

Можно доказать, что если a — предельная точка множества X, то любая δ-окрестность точки a содержит бесконечно иного точек множества X, отличных от точки a. Однако проводить здесь это доказательство, а также вводить другие определения, связанные с понятней предела и окрестности, мы не будем, а сделаем это в следующей параграфе для более общего случая.

§ 2. Метрические пространства

При определении предела последовательности точек n-мерного евклидова пространства, ограниченного множества в этом пространстве и некоторых других понятий мы использовали лишь одно свойство пространства $\mathbb{R}^n$ — наличие в нем расстояния между двумя любыми точками. Это определение можно распространить и на множества других объектов, если ввести в них расстояние между двумя любыми объектами, и мы придем к понятию метрического пространства.

1. Определение 1. Множество $X = \{x, y, z, \ldots, u, v, \ldots\}$ элементов некоторой природы называется *метрическим пространством*, если каждой упорядоченной паре элементов $x, y \in X$ поставлено в соответствие неотрицательное число $\rho(x, y)$, называемое *расстоянием между элементами x и y* или *метрикой пространства X* и удовлетворяющее следующим трем условиям (аксиомам метрики):

1) $\rho(x, y) = 0$ тогда и только тогда, когда $x = y$ (аксиома тождества);

2) $\rho(x, y) = \rho(y, x)$ (аксиома симметрии);

3) $\rho(x, y) + \rho(y, z) \geq \rho(x, y)$ (аксиома треугольника).

Элементы метрического пространства называются также *точками* этого пространства.

Примеры.

1. X есть n-мерное евклидово пространство $\mathbb{R}^n$. Выполнение аксиом метрики для $\rho(x, y) = \sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n}}$ было проверено ранее (си. § 1 данной главы). Следовательно, $\mathbb{R}^n$ — метрическое пространство.

Арифметическое пространство $\mathbb{R}^n$ можно наделить и другими метриками, например,

$$\rho_1(x, y) = \sum_{i=1}^{n} |x^i - y^i| \quad \text{или} \quad \rho_2(x, y) = \max_{i=1,2,\ldots,n} |x^i - y^i|.$$

Выполнение аксиом метрики в обоих случаях проверяется без труда.

2. Пусть X — множество всех функций $x(t)$, определенных и непрерывных на отрезке $\alpha \leq t \leq \beta$. Положим

$$\rho(x, y) = \max_{t \in [\alpha, \beta]} |x(t) - y(t)|.$$

Аксиомы тождества и симметрии очевидны, аксиома треугольника проверяется следующим образом. Для любого $t \in [\alpha, \beta]$ имеем:

$$|x(t) - z(t)| \leq |x(t) - y(t)| + |y(t) - z(t)| \leq$$

$$\leq \max_t |x(t) - y(t)| + \max_t |y(t) - z(t)| = \rho(x, y) + \rho(y, z).$$

Но тогда и

$$\max_t |x(t) - z(t)| \leq \rho(x, y) + \rho(y, z)$$

т.е.

$$\rho(x, z) \leq \rho(x, y) + \rho(y, z),$$

что требовалось доказать.

Множество всех непрерывных на отрезке $[\alpha, \beta]$ функций с такой метрикой называется *пространством* $C[\alpha, \beta]$.

3. Пусть X — множество всех ограниченных последовательностей вещественных чисел

$$x = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots),$$

где $|\xi_i| \leq K_x$, $i = 1, 2, 3, \ldots$, и константа K_x, вообще говоря, зависит от элемента x. Для двух элементов $x = \{\xi_i\}$ и $y = \{\eta_i\}$ множества X положим

$$\rho(x, y) = \sup_i |\xi_i - \eta_i|.$$

Эта точная верхняя граница существует, так как

$$|\xi_i - \eta_i| \leq |\xi_i| + |\eta_i| \leq K_x + K_y,$$

и, следовательно, множество $\{|\xi_i - \eta_i|\}$ ограничено сверху.

Аксиомы тождества и симметрии очевидны, аксиома треугольника проверяется так же, как и в примере 2.

Полученное метрическое пространство называется *пространством ограниченных последовательностей.*

Пусть X — произвольное метрическое пространство. В соответствии с общим определением (см. § 1 гл. II) последовательностью $\{x_n\}$ точек метрического пространства X называется отображение $f : \mathbb{N} \to X$ множества натуральных чисел в это пространство. Будем говорить, что последовательность $\{x_n\} \subset X$ *сходится к точке* $x_0 \in X$ и записывать $x_n \to x$ или $\lim x_n = x_0$, если $\rho(x_n, x_0) \to 0$ при $n \to \infty$. Очевидно, что если последовательность $\{x_n\}$ сходится к x_0, то любая ее подпоследовательность $\{x_{n_i}\}$ сходится к тому же пределу. Точно так же, как в случае пространства $\mathbb{R}^n$, можно доказать, что одна и та же последовательность не может иметь двух различных пределов.

Выясним, что означает сходимость последовательности в пространствах $C[\alpha, \beta]$ и m.

Пусть дана функциональная последовательность $\{x_n(t)\} \subset C[\alpha, \beta]$. Для каждой точки $t_0 \in [\alpha, \beta]$ рассмотрим числовую последовательность $\{x_n(t_0)\}$. Если эта числовая последовательность сходится, то функциональная последовательность называется *сходящейся в точке* t_0. Множество точек сходимости функциональной последовательности называется *областью ее сходимости.* Область сходимости $\{x_n(t)\}$ может совпадать со всем отрезком $[\alpha, \beta]$, а может и не совпадать с ним.

Предположим, что последовательность $\{x_n(t)\}$ сходится на всем отрезке $[\alpha, \beta]$. Тогда для каждой фиксированной точки $t \in [\alpha, \beta]$ существует предел $\lim\ x_n(t)$, который в общем случае неодинаков для разных точек t, и получаем новую функцию $x_0(t)$, определенную на $[\alpha, \beta]$, которую называют *пределом функциональной последовательности* $\{x_n(t)\}$ и записывают в следующей форме:

$$\lim\ x_n(t) = x_0(t) \quad \text{или} \quad x_n(t) \to x_0(t).$$

Примеры.

4. Пусть $x_n(t) = t^n$, $0 \le t \le 1$. Ясно, что

$$\lim\ x_n(t) = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad 0 \le t < 1, \\ 0, \text{если} \quad t = 1, \end{cases}$$

5. Пусть

$$x_n(t) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \frac{t^{2k-1}}{(2k-1)!}.$$

Согласно примеру 2 из § 3 гл. V, при $t \in [0, 2\pi]$ имеем:

$$|x_n(t) - \sin t| = |\sin \theta t| \frac{t^{2n+2}}{(2n+2)!} \le \frac{(2\pi)^{2n+2}}{(2n+2)!},$$

и для любого заданного числа $\varepsilon > 0$ правая часть этого неравенства при достаточно больших n делается меньше ε.

Следовательно,

$$x_0(t) = \lim\ x_n(t) = \sin t \quad \text{для} \quad 0 \le t \le 2\pi.$$

Введенная сходимость называется *поточечной сходимостью* функциональной последовательности $\{x_n(t)\}$ к пределу $x_0(t)$ на $[\alpha, \beta]$. Она означает, что для любой точки $t \in [\alpha, \beta]$ и любого числа $\varepsilon > 0$ найдется номер $n_0 = n_0(\varepsilon, t)$, такой, что $|x_n(t) - x_0(t)| < \varepsilon$ при $n \ge n_0$. Номер n_0 зависит в общем случае не только от ε, но и от t. Если для любого $\varepsilon > 0$ можно выбрать $n = n_0(\varepsilon)$ так, что при $n \ge n_0$

$$|x(n(t) - x_0(t)| < \varepsilon$$

сразу для всех $t \in [\alpha, \beta]$, то говорят, что последовательность $\{x_n(t)\}$ *сходится к* $x_0(t)$ *равномерно на* $[\alpha, \beta]$. Можно показать, что в первом примере последовательность $\{x_n(t)\}$ сходится к своему пределу на $[0, 1]$ неравномерно, а во втором примере сходимость $\{x_n(t)\}$ к предельной функции $\sin t$ на отрезке $[\alpha, \beta]$ равномерна, что легко следует из приведенной выше оценки разности $|x_n(t) - \sin t|$.

Понятия сходимости и равномерной сходимости функциональной последовательности, играющие важную роль в математическом анализе, будут подробно рассмотрены в гл. XIV.

Предположим, что последовательность $\{x_n(t)\} \subset C[\alpha, \beta]$ сходится в метрике этого пространства к $x_0(t) \in C[\alpha, \beta]$, т.е. для любого числа $\varepsilon > 0$ существует номер n_0, такой, что

$$\rho(x_n, x_0) = \max_{C[\alpha,\beta]} |x_n(t) - x_0(t)| < \varepsilon \tag{1}$$

при $n \geq n_0$. Условие (1) эквивалентно условию

$$|x_n(t) - x_0(t)| < \varepsilon$$

при $n \geq n_0$ и сразу для всех $t \in [\alpha, \beta]$, что означает равномерную на $[\alpha, \beta]$ сходимость последовательности $\{x_n(t)\}$ к $x_0(t)$. Верно и обратное, т.е. если $x_n(t) \to x_0(t) \in C[\alpha, \beta]$ равномерно на $[\alpha, \beta]$, то $\rho(x_n, x_)) \to 0$.

Таким образом, *сходимость в пространстве $C[\alpha, \beta]$ есть равномерная сходимость функциональной последовательности.*

Пусть $X = m$ последовательность $\{x_n\}$, $x_n = \{\xi_i^{(n)}\}$, элементов этого пространства сходился к точке $x_0 = \{\xi_i^{(0)} \in m$, т.е. $\rho(x_n, x_0) = \sup\limits_i |\xi_i^{(n)} - \xi_i^{(0)}| \to 0$ при $n \to \infty$. Для любого числа $\varepsilon > 0$ найдется, следовательно, номер n_0, такой, что

$$|\xi_i^{(n)} - \xi_i^{(0)}| < \varepsilon$$

при $n \geq n_0$ сразу для всех $i = 1, 2, 3, \ldots$. Верно и обратное: если при $n \geq n_0$ и всех i выполняется неравенство (2), то $\sup\limits_i |\xi_i^{(n)} - \xi_i^{(0)}| \leq \varepsilon$ при $n \geq n_0$, а это означает, что $x_n \to x_0$.

Если рассматривать пространство m как множество точек x, определяемых счетным числом координат $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \ldots$, то можно сказать, что *сходимость в пространстве m есть покоординатная сходимость, равномерная относительно номеров координат.*

Заметим, что в одном и том же множестве можно по-разному вводить расстояния между его элементами. При этом будут получаться, вообще говоря, различные метрические пространства. Например, в множестве функций $x(t)$, непрерывных на отрезке $[\alpha, \beta]$ помимо указанной метрики можно ввести расстояние

$$\rho(x, y) = \int\limits_\alpha^\beta |x(t) - y(t)|\, dt.$$

Выполнение аксиом метрики проверяется без труда, и мы получаем новое метрическое пространство, отличное от $C[\alpha, \beta]$, хотя состоящее из тех же элементов, что и $C[\alpha, \beta]$. Поэтому часто метрическим пространством называют пару (X, ρ), состоящую из множества X и расстояния ρ между элементами этого множества (см. также пример 1 из данного параграфа).

Для произвольного метрического пространства X можно ввести многие из тех понятий, которые были введены нами ранее в $\mathbb{R}^n$.

Совокупность $K(a, r)$ точек x метрического пространства X, таких, что $\rho(a, x) < r$, где a — фиксированная точка из X, а r — фиксированное неотрицательное число, называется *открытым шаром. Замкнутый шар* есть множество $\overline{K}(a, r) = \{x \in X | \ \rho(x, a) \leq r\}$, *сфера* — множество $S(a, r) = \{x \in X | \ \rho(x, a) = r\}$.

Примеры.

6. Пусть $X = C[\alpha, \beta]$. Из определения метрики в пространстве $C[\alpha, \beta]$ легко следует, что шар $K(a, r) \subset C[\alpha, \beta]$ — это совокупность непрерывных функций $x(t)$, графики которых не выходят за пределы полосы ширины $2r$, образованной кривыми $a(t) - r$ и $a(t) + r$ (рис. 47).

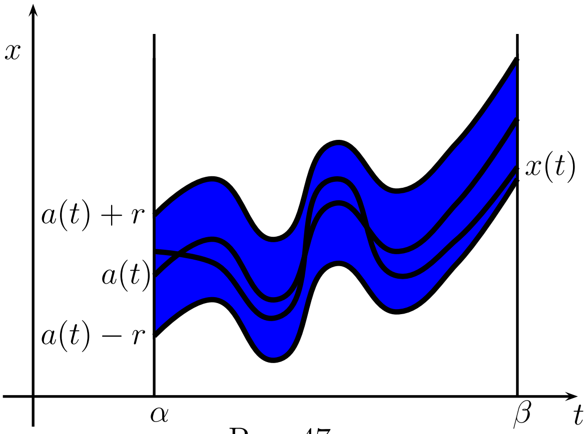

Рис. 47

Множество $M \subset X$ называется *ограниченным*, если его можно заключить внутри некоторого (открытого или замкнутого) шара. Как и в пространстве $\mathbb{R}^n$, *если последовательность $\{x_n\}$ точек метрического пространства X сходится к пределу, то она ограничена.* Доказательство точно такое же, как и для пространства $\mathbb{R}^n$.

Отметим, что в произвольном метрическом пространстве, как и в $\mathbb{R}^n$, существуют ограниченные последовательности, которые не сходятся. Рассмотрим, например, в пространстве m последовательность

$$\begin{aligned} e_1 &= (1, 0, 0, 0, \ldots), \\ e_2 &= (0, 1, 0, 0, \ldots), \\ e_3 &= (0, 0, 1, 0, \ldots), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

Ясно, что $\rho(e_i, e_j) = 2$ при $i \neq j$, и потому ни последовательность $\{e_i\}$, ни любая ее подпоследовательность не сходятся, хотя эта последовательность ограничена, так как $\{e_i\} \subset \overline{K}(0, 1)$.

Окрестностью точки a метрического пространства X назовем любой открытый шар с центром в этой точке. Часто расширяют понятие окрестности, понимая под окрестностью точки a любое множество $U \subset X$, содержащее шаровую окрестность этой точки.

Точка $a \in X$ называется *предельной точкой* множества $M \subset X$, если $U \cap (M \setminus \{a\}) \neq \emptyset$ для любой окрестности U точки a. Если a — предельная точка множества M, то найдется последовательность $\{x_n\} \subset M$, сходящаяся к точке a. Отсюда, в частности, следует, что любая окрестность предельной точки множества M содержит бесконечно много точек этого множества. И наоборот, если последовательность $\{x_n\} \subset M$, содержащая бесконечно много различных точек, сходится к точке $a \in X$, то a — предельная точка последовательности $\{x_n\}$. Доказательство этих утверждений такое же, как и для случая пространства $\mathbb{R}^n = (-infty, \infty)$ (см. § 3 гл. II).

Точка множества M, не являющаяся предельной этого множества, называется *изолированной точкой* множества M.

Как и в случае вещественных чисел, множество M метрического пространства X называется *замкнутым*, если содержит все свои предельные точки. Множество $M \subset M$ назывался *открытым*, если каждая точка множества M входит в это множество вместе с некоторой окрестностью, т.е. если для любого $x \in M$ существует шар $K(x, r)$, такой, что $K(x, r) \subset M$.

Например, $K(a, r)$ — открытое множество, $\overline{K}(a, r)$ и $S(a, r)$ — замкнутые множества. Докажем первое из этих утверждений; второе будет доказано несколько позже. Итак, пусть $x \in K(a, r)$, $\rho(x, a) = r_x < r$. Рассмотрим шар $K\left(x, \dfrac{r - r_x}{2}\right)$ (рис. 48). Если $y \in K\left(x, \dfrac{r - r_x}{2}\right)$, то

$$\rho(y, a) \leq \rho(y, x) + \rho(x, a) < \frac{r - r_x}{2} + r_x = \frac{r + r_x}{2} < r,$$

т.е. $y \in K(a, r)$. Так как y — произвольная точка шара $K\left(x, \dfrac{r - r_x}{2}\right)$, то включение $K\left(x, \dfrac{r - r_x}{2}\right) \subset K(a, r)$, а вместе с ним и наше утверждение доказано.

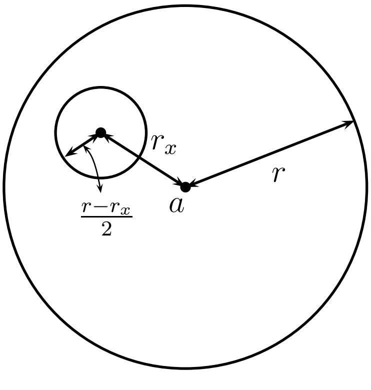

Рис. 48

Заменим, что радиус шара шара $K\left(x, \dfrac{r-r_x}{2}\right)$, входящего в шар $K(a, r)$, мы определили по аналогии с двумерным случаем.

Из определения открытых и замкнутых множеств следует, что все пространство X одновременно и открыто и замкнуто. Читатель легко докажет, что всякое множество, состоящее из конечного числа точек, не имеет предельных точек и, следовательно, замкнуто.

Теорема 1. *Пересечение любого числа и объединение конечного числа замкнутых множеств метрического пространства есть замкнутое множество.*

Доказательство. Пусть F_ξ — замкнутые множества, где ξ — некоторый индекс, с помощью которого множества отличаются одно от другого (не исключено, что некоторые множества с разными индексами будут равны) и $\Phi = \bigcap\limits_\xi F_\xi$. Если a — предельная точка множества Φ, то $K(a, r) \cap (\Phi \setminus \{a\}) \neq \emptyset$ для любого r. Но $\Phi \subset F_\xi$ для любого ξ, и поэтому тем более $K(a, r) \cap (F_\xi \setminus \{a\}) \neq \emptyset$, т.е. a — предельная точка множества F_ξ для любого ξ. Так как множества F_ξ замкнуты, то $a \in F_\xi$ для всех ξ, откуда $a \in \bigcup\limits_\xi F_\xi = \Phi$, и первое утверждение теоремы доказано.

Пусть $F - 1, F_2, \ldots, F_m$ — замкнутые множества, $F = \bigcup\limits_{k=1}^{m} F_k$, a — предельная точка множества F. Тогда существует последовательность $\{x_n\} \subset F$, $x_n \neq a$, сходящаяся к a. Каждая точка x_n принадлежит или множеству F_1, или множеству F_2, ... , или множеству F_m. Так как точек в последовательности бесконечно много, а множеств F_k конечное число, то найдется множество F_{k_0}, которому принадлежит целая подпоследовательность $\{x_{n_i}\}$ последовательности $\{x_n\}$. Так как $x_{n_i} \to a$, $\{x_{n_i}\} \subset F_{k_0}$ и множество F_{k_0} замкнуто, то $a \in F_{k_0}$. Следовательно, $a \in \bigcup\limits_{k=1}^{m} F_k$ и второе утверждение теоремы доказано.

Рекомендуем читателю придумать пример, показывающий, что объединение бесконечного числа замкнутых множеств может и не быть замкнутым.

Теорема 2. *Дополнение замкнутого множества до всего пространства есть открытое множество. Дополнение открытого множества до всего пространства замкнуто.*

Доказательство. Предположим, что множество F замкнуто, $G = cF$, x — произвольная точка из G. Рассмотрим всевозможные окрестности этой точки. По крайней мере, одна из окрестностей не содержит ни одной точки множества F, так как в противном случае $U \cap F \neq \emptyset$ для любой окрестности U точки x. Следовательно, x — предельная точка множества F, и так как оно замкнуто, то $x \in F$, что невозможно. Итак, существует окрестность U_0 точки x, такая, что $U_0 \cap F = \emptyset$, следовательно, $U_0 \subset cF = G$, что требовалось доказать.

Доказательство второй части теоремы предоставляем читателю.

Теорема 3. *Объединение любого числа и пересечение конечного числа открытых множеств есть открытое множество.*

Доказательство непосредственно следует из теорем 1, 2 и принципе двойственности (см. § 1 гл. I).

Так как все пространство X открыто и замкнуто, то в соответствии с теоремой 2 пустое множество также открыто и замкнуто.

В результате присоединения к множеству $M \subset X$ всех его предельных точек получается новое множество $\overline{M} \subset X$, называемое *замыканием* M. Замыканием называется также операция перехода от M к $\overline{M}$.

Точка $a \in M$ называется *граничной точкой* множества M, если любая окрестность $U(a)$ этой точки содержит как точки множества M, так и точки дополнения cM. Совокупность всех граничных точек множества M называется его *границей* ∂M, и можно показать, что $\overline{M} = M \cup \partial M$.

Предлагаем читателю доказать это утверждение, а также следующие свойства операции замыкания:

1) $\overline{\emptyset} = \emptyset$;
2) $M \subset N \ \Rightarrow \ \overline{M} \subset \overline{N}$;
3) $\overline{M \cup N} = \overline{M} \cup \overline{N}$;
4) $\overline{\overline{M}} = (\overline{\overline{M}}) = \overline{M}$.

Изучая в пространстве $\mathbb{R}^n$ сходимость последовательностей точек этого пространства, мы установили, критерий Коши. Возникает вопрос: справедлив ли этот критерий для любого метрического пространства, если модуль разности чисел заменить расстоянием между элементами? Ответ на этот вопрос в общем случае отрицательный. Пусть, например, $P[\alpha, \beta]$ — совокупность многочленов $A_n(t) = a_0 + a_1 t + \ldots + a_n(t)$, определенных на отрезке $[\alpha, \beta]$. Если для двух таких многочленов $A_n(t)$ и $B_n(t)$ положить

$$\rho(A_n, B_n) = \max_t |A_n(t) - B_n(t)|,$$

то легко проверить, что $\rho(A_n, B_n)$ удовлетворяет всем аксиомам метрики, так что $P[\alpha, \beta]$ является метрическим пространством, сходимость в котором есть равномерная на $[\alpha, \beta]$ сходимость последовательности полиномов. Рассмотрим последовательность $A_n(t) = \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{t^k}{k!}$, $k = 1, 2, 3, \ldots$. Если $n > m$, то

$$\rho(A_n, A_m) = \max_t \left| \sum_{k=m+1}^{n} fract^k k! \right| \leq \sum_{k=m+1}^{n} \frac{[\max\ (|\alpha|, |\beta|)]^k}{k!} \to 0$$

при $m, n \to \infty$, так что последовательность $\{A_n(t)\}$ удовлетворяет условию критерия Коши. Однако не существует полинома $B(t)$, к которому равномерно сходилась бы последовательность $\{A_n(t)\}$, так как (см. пример 1 из §3 гл. V) эта последовательность равномерно на $[\alpha, \beta]$ сходится к функции e^t, не являющейся полиномом.

Пусть X — произвольное метрическое пространство. Последовательность $\{x_n\} \subset X$ называется *последовательностью Коши* или *фундаментальной последовательностью*, если для любого числа $\varepsilon > 0$ найдется номер n_0, такой, что $\rho(x_n, x_m) < \varepsilon$ при $m, n \geq n_0$ (говорят также, что такая последовательность *сходится в себе*).

Определение 2. Метрическое пространство X называется *полным*, если всякая последовательность Коши $\{x_n\} \subset X$ сходится к некоторой точке x_0 этого пространства (т.е. если для X справедлив критерий Коши).

Пространство $\mathbb{R}^n$, как показано, является полным. Можно доказать, что $C[\alpha, \beta]$ также полное пространство. Рекомендуем читателю доказать полноту пространства m. Пространство $P[\alpha, \beta]$ многочленов, определенных $[\alpha, \beta]$, — неполное пространство, о чем только что говорилось.

Так как каждый многочлен — непрерывная функция, то пространство $P[\alpha, \beta]$ является подмножеством полного пространства $C[\alpha, \beta]$. Этот пример есть частный случай следующей общей ситуации.

Пусть X — метрическое пространство и X_0 — произвольное подмножество X. Так как любые точки $x, y \in X_0$ принадлежат в то же время X, то определен расстояние $\rho(x, y)$ между этими точками, удовлетворяющее всем аксиомам метрики. Таким образом, X_0 оказывается метрическим пространством, называемым *подпространством* пространства X, метрика которого, как говорят, *индуцирована* метрикой пространства X. Для пространства $X_)$ с метрикой, индуцированной метрикой пространства X, как и для всякого метрического пространства, можно ввести понятие окрестности, предельной точки, открытого и замкнутого множества. Можно доказать, что $G_0 \subset X_0$ $(F_0 \subset X_0)$ тогда и только тогда открыто (замкнуто) в индуцированной метрике, или, как говорят, открыто (замкнуто) в X_0, когда $G_0 = X_0 \cap G$ $(F_0 = X_0 \cap F)$, где G — открытое (F — замкнутое) множество пространства X. Наконец, заметим, что сходимость последовательности в пространствах X_0 и X одна и та же. (???)

Пусть X — полное пространство. Предположим, что X_0 — замкнутое подмножество пространства X. Если $\{x_n\}$ — последовательность Коши в X_0, то $\{x_n\}$ будет последовательностью Коши и в X; поскольку X — полное пространство, то существует $\lim\ x_n = x_0 \in X$. Так как, далее, множество X_0 замкнуто, то $x_0 \in X_0$, и следовательно, X_0 — полное метрическое пространство. Если же X_0 не замкнуто в X, то взяв его предельную точку y_0, не принадлежащую X_0 и последовательность $\{y_n\} \subset X_0$, сходящуюся к y_0 в X, получим последовательность Коши $\{y_n\}$ в пространстве X_0, не имеющую в нем предела.

Примеры.

7. В пространстве $\mathbb{R}^3$ двумерная плоскость $x^3 = 0$ будет полным подпространством, а открытый шар $K(0, 1)$ — неполным.

8. Пусть $X = m$ — пространство всех ограниченных последовательностей вещественных чисел, c_0 — подпространство этого пространства, состоящее из последовательностей, сходящихся к нулю. Можно доказать, что c_0 — полное пространство.

Если взять в m подпространство c_{00}, состоящее из последовательностей, в которых лишь конечное число членов отлично от нуля, то c_{00} будет неполным пространством. Последовательностью Коши, не имеющей в c_{00} предела, будет, например,

$$x_n = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}, 0, 0, \dots\right\}, \qquad n = 1, 2, 3, \dots\ .$$

Пусть X и $\widetilde{X}$ — метрические пространства. Говорят, что эта пространства изометричны, если между ними можно установить взаимно однозначное соответствие и притом так, что если $x \leftrightarrow \widetilde{x}$ и $y \leftrightarrow \widetilde{y}$, то $\rho(x,y) = \widetilde{\rho}(\widetilde{x},\widetilde{y})$, где ρ и $\widetilde{\rho}$ — метрики в пространствах X и $\widetilde{X}$.

Примеры.

9. Пусть $K = \mathbb{R}^2$ с евклидовой метрикой, $\widetilde{X} = \{\xi^1 \sin t + \xi^2 \cos t,\ \xi^1, \xi^2 \in \mathbb{R}, 0 \leq t \leq 2\pi\}$ с расстоянием между $\varphi(t) = \xi^1 \sin t + \xi^2 \cos t$ и $\psi(t) = \eta^1 \sin t + \eta^2 \cos t$, определяемым по формуле

$$\widetilde{\rho}(\varphi,\psi) = \max_t \ |(\xi^1 \sin t + \xi 62 \cos t) - (\eta 61 \sin t + \eta^2 \cos t)|.$$

Соответствие

$$x = (x^1, x^2) \ \leftrightarrow \ (x^1 \sin t + x^2 \cos t) = \widetilde{x}(t),$$

очевидно, взаимно однозначное и, следовательно, $X \sim \widetilde{X}$. Покажем, что $\rho(x,y) = \widetilde{\rho}(\widetilde{x},\widetilde{y})$. В самом деле,

$$\widetilde{\rho}(\widetilde{x},\widetilde{y}) = \max_t \ \Bigg|(x^1 - y^1)\sin t + (x^2 - y^2)\cos t| = \sqrt{(x^1-y^1)^2 + (x^2-y^2)^2} \times$$

$$\times \max_t \ \frac{x^1 - y^1}{\sqrt{(x^1-y^1)^2 + (x^2-y^2)^2}} \sin t + \frac{x^2 - y^2}{\sqrt{(x^1-y^1)^2 + (x^2-y^2)^2}} \cos t \Bigg|.$$

Введем угол θ, $0 \leq \theta \leq 2\pi$, положив

$$\frac{x^1 - y^1}{\sqrt{(x^1-y^1)^2 + (x^2-y^2)^2}} = \cos\theta, \qquad \frac{x^2 - y^2}{\sqrt{(x^1-y^1)^2 + (x^2-y^2)^2}} \sin\theta.$$

Тогда

$$\widetilde{\rho}(\widetilde{x},\widetilde{y}) = \sqrt{(x^1-y^1)^2 + (x^2-y^2)^2} \ \max_t \ |\sin(t+\theta)| = \rho(x,y).$$

Таким образом, пространства X и $\widetilde{X}$ изометричны.

Заметим, что рассмотренное нами пространство $\widetilde{X}$ есть подпространство пространства $C[0, 2\pi]$.

Будем говорить, что множество $M \subset X$ *всюду плотно* в метрическом пространстве X или *плотно вложено* в X, если $\overline{M} = X$.

Теорема 4 (о пополнении метрических пространств). *Для любого неполного метрического пространства X существует полное метрическое пространство $\widetilde{X}$, такое, что или X плотно вложено в $\widetilde{X}$, или в $\widetilde{X}$ есть плотное подмножество $\widetilde{X}_0$, изометричное пространству X.*

Доказательство этой теоремы спускаем.

Пространство $\widetilde{X}$ называется *пополнением* пространства X и с точностью до изометричности определяется однозначно. Например, пополнением пространства $P[\alpha, \beta]$ полиномов будет пространство $C[\alpha, \beta]$ непрерывных функций.

Заметим, что при рассмотрении вопросов, связанных со сходимостью последовательностей, открытыми и замкнутыми множествами и другими понятиями, определяемыми с помощью лишь метрики, изометрические множества можно считать неразличимыми.

Определение 3. Множество M метрического пространства называется *компактным*, если из любого бесконечного подмножества $M_0 \subset M$ можно выделить последовательность $\{x_n\}$, сходящуюся к точке $x_0 \in M$.

Теорема 5. (Больцано–Вейерштрасса). *Всякое ограниченное и замкнутое множество $M \subset \mathbb{R}^n$ компактно.*

Доказательство. Так как всякое бесконечное множество содержит последовательность, достаточно доказать, что из любой последовательности $m_0 \subset M$ можно выделить подпоследовательность, сходящуюся к точке множества M.

По условию, множество M, а следовательно, и M_0 ограничены, и потому найдутся число $r > 0$ и точка $(a^1, a^2, \ldots, a^n)$, такие, что

$$\rho(x, a) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x^i - a^i)^2} < r,$$

для любой точки $x = (x^1, x^2, \ldots, x^n) \in M_0$. Но тогда $|x^1 - a^1| < r$ для любой точки $x \in M_0$, т.е. множество A_0^1 значений первых координат точек из M_0 ограничено. По теореме Больцано–Вейерштрасса для $\mathbb{R}$ (см. § 3 гл. II) из A_0^1 можно выделить сходящуюся подпоследовательность A_1^1. Пусть M_1 — подпоследовательность последовательности M_0, состоящая из точек, первые координаты которых принадлежат A_1^1. Для точек $x \in M_1$ снова $\rho(x, a) < r$, откуда следует, что ограничена совокупность A_1^2 значений вторых координат точек множества M_1, и поэтому из A_1^2 можно выделить сходящуюся подпоследовательность A_2^2. Пусть M_2 — подпоследовательность точек M_1, вторые координаты которых принадлежат A_2^2, и т.д. После конечного числа шагов придем к последовательности $M_n = \{x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots\}$, обладающей тем свойством, что для любого $i = 1, 2, \ldots, n$ i-координаты точек $x_m \in M_n$ образуют сходящуюся последовательность. Пусть $x_0^i = \lim\limits_{m} x_m^i$. Так как сходимость в $\mathbb{R}^n$ покоординатная, то $x_m \to x_0 = (x_0^1, x_0^2, \ldots, x_0^n)$. В силу замкнутости множества M, $x_0 \in M$, и теорема доказана.

Согласно определению, компактное множество замкнуто. Нетрудно доказать, что оно ограничено. Для этого воспользуемся обратным неравенством треугольника, которое доказывается так же, как обратное неравенство треугольника для пространства $\mathbb{R}^n$.

Итак, предположим, что компактное множество M метрического пространства X неограничено. Тогда, каков бы ни был шар $K(a, r)$, найдется точка множества M, лежащая вне этого шара. Пусть x_1 — произвольная точка M. Существует точка $x_2 \in M$, такая, что $x_2 \notin K(x, r)$. Положим $r_2 = \rho(x_1, x_2)$. Найдется точка $x_3 \in M$, такая, что $x_3 \notin K(x_1, r_2 + 1)$. Пусть $r_3 = \max\,\{\rho(x_1, x_2), \rho(x_1, x_3)\}$. Существует точка $x_4 \in M$, не принадлежащая $K(x_3, r_3 + 1)$. Пусть найдены точки $x_1, x_2, \ldots, x_k$. Положим $r_k = \max\,\{\rho(x_1, x_2), \rho(x_1, x_3), \ldots, \rho(x_1, x_k)\}$. Существует точка $x_{k+1} \in M$, $x_{k+1} \notin K(x_1, r_k + 1)$ и т.д. Мы получили последовательность точек $\{x_k\} \subset M$, для которых при любых $m, p \geq 1$

$$\rho(x_{m+p}, x_m) \geq \rho(x_1, x_{m+p}) - \rho(x_1, x_m) \geq r_{m+p-1} + 1 - r_m \geq 1.$$

Но это означает, что ни последовательность $\{x_k\}$, ни любая ее подпоследовательность не сходятся, что противоречит предположению о компактности M.

Итак, всякое компактное множество в любом метрическом пространстве ограничено и замкнуто. В пространстве $\mathbb{R}^n$ верно и обратное утверждение. Однако в произвольном метрическом пространстве не всякое ограниченное и замкнутое множество компактно. Так, совокупность ортов $e_1, e_2, \ldots, e_m, \ldots$ в пространстве m (см. § 2 данной главы), будучи ограниченным и замкнутым (так как не имеет предельных точек) множеством, не является компактной.

Компактные множества метрического пространства обладают еще одним характерным свойством, которое часто принимают в качестве определения компактности. Для того, чтобы сформулировать и доказать это свойство, понадобятся следующие определение и лемма. .

Определение 4. Множество E метрического пространства X называется *ε-сетью* для множества $M \subset X$, если для любой точки $x \in M$ найдется точка $y \in E$, такая, что $\rho(x, y) < \varepsilon$.

Лемма 1. *Если M — компактное множество метрического пространства X, то для любого числа $\varepsilon > 0$ существует конечная ε-сеть для множестве M.*

Доказательство. Пусть задано число $\varepsilon > 0$. Возьмем произвольную точку $x_1 \in M$. Если $\rho(x, x_1) < \varepsilon$ для любого $x \in M$, то конечная ε-сеть, состоящая из одной точки x_1, уже построена. В противном случае найдется точка $x_2 \in M$, такая, что $\rho(x_1, x_2) \geq \varepsilon$. Если для любой точки $x \in M$ или $\rho(x, x_1) < \varepsilon$ или $\rho(x, x_2) < \varepsilon$, то конечная ε-сеть снова построена. В противном случае найдется точка $x_3 \in M$, такая, что $\rho(x_1, x_3) \geq \varepsilon$, $\rho(x_2, x_3) \geq \varepsilon$. Снова или точки x_1, x_2, x_3 образуют ε-сеть для M, или существует точка $x_4 \in M$, такая, что $\rho(x_1, x_4) \geq \varepsilon$, $\rho(x_2, x_4) \geq \varepsilon$, $\rho(x_3, x_4) \geq \varepsilon$ и т.д.

Процесс построения точек $x_1, x_2, x_3, \ldots$ после конечного числа шагов должен оборваться. В самом деле, если это не так, то из M мы выделили бы последовательность $\{x_k\}$, такую, что $\rho(x_i, x_j) \geq \varepsilon$ при $i \neq j$, но тогда ни эта последовательность, ни любая ее подпоследовательность не сходятся, что противоречит предположению о компактности M.

Заметим, что мы построили конечную ε-сеть $E = \{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$, состоящую из точек множества M.

Определение 5. Совокупность $\mathfrak{M} = \{G_\xi\}$, состоящая из открытых множеств G_ξ пространства X, называется *открытым покрытием* множества $M \subset X$, если любая точка $x \in M$ содержится хотя бы в одном из множеств G_ξ.

Теорема 6 (Гейне–Бореля). *Из любого открытого покрытия компактного множества M можно выделить конечное подпокрытие.*

Доказательство. Пусть $\mathfrak{M} = \{G_\xi\}$ — открытое покрытие множества M.

Установим сначала, что (A) *при достаточно малом числе $\varepsilon > 0$ и любом элементе $x \in M$ шар $K(x, \varepsilon)$ будет целиком входить в некоторое множество G_ξ.*

В самом деле, если это не так, то найдутся последовательность чисел $\varepsilon_n \to 0$

и точек $x_n \in M$, такие, что шары $K(x_n, \varepsilon_n)$, $n = 1, 2, 3, \ldots$, не войдут целиком ни в одно множество.

В силу компактности M из последовательности $\{x_n\}$ можно выделить подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$, сходящуюся к точке $x_0 \in M$. Так как $\mathfrak{M}$ — покрытие M, то найдется $G_{\xi_0} \ni x_0$. В силу открытости множества G_{ξ_0} оно содержит целый шар $K(x_0, \delta)$. Выберем теперь индекс n_k настолько большим, что $\varepsilon_{n_k} < \dfrac{\delta}{2}$ и $\rho(x_{n_k}, x_0) < \dfrac{\delta}{2}$. Тогда, легко поверить, что

$$K(x_{n_k}, \varepsilon_{n_k}) \subset K(x_0, \delta) \subset G_{\xi_0},$$

но, по построения, шар $K(x_{n_k}, \varepsilon_{n_k})$ не может входить целиком ни в одно множество G_ξ. Полученное противоречие доказывает утверждение (A).

Пусть теперь числа ε_0 выбрано так, что выполняется условие (A). Построим, согласно лемме, ε_0-сеть $E_0 = \{x_1, x_2, \ldots, x_p\}$ для M. Так как расстояние от любой точки $x \in M$ до одной из точек x_i меньше ε_0, то множество M разместится в объединении шаров $K(x_1, \varepsilon_0), K(x_2, \varepsilon_0), \ldots, K(x_p, \varepsilon_0)$. В свою очередь, шар $K(x_i, \varepsilon_0)$ входит в некоторое G_{ξ_i}. Но тогда

$$M \subset \bigcup_{i=1}^{p} G_{\xi_i},$$

что требовалось доказать.

Можно доказать и обратное: если из любого покрытия множества M можно выделить конечное подпокрытие, то множество M компактно.

Из теорем 5 и 6 вытекает следствие.

СЛЕДСТВИЕ. *Из всякого открытого покрытия $\{G_\xi\}$ ограниченного и замкнутого множества $M \subset \mathbb{R}^n$ можно выделить конечное подпокрытие $G_{\xi_1}, G_{\xi_2}, \ldots, G_{\xi_n}$.*

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6. Множество M метрического пространства X называется *связным*, если не существует двух открытых непересекающихся множеств $G_1, G_2 \subset X$ таких, что

$$G_1 \cap M \neq \emptyset, \qquad G_2 \cap M \neq \emptyset, \qquad M \subset G_1 \cup G_2.$$

Примером связного множества может служить отрезок $[a, b]$ числовой прямой. Связность отрезка вытекает из следующей леммы.

ЛЕММА 2. *Множество $M \subset \mathbb{R}$ связно тогда и только тогда, когда вместе с двумя точками оно содержит и весь отрезок, определяемый этими точками.*

НЕОБХОДИМОСТЬ. Пусть M связно, но нашлись точки x, y, z, такие, что $x, y \in M$, $x < z < y$ и $z \notin M$. Множества $G_1 = (-\infty, z)$ и $G_2 = (z, \infty)$ не пересекаются, $x \in G_1 \cap M$, $y \in G_2 \cap M$, т.е. $G_1 \cap M \neq \emptyset$, $G_2 \cap M \neq \emptyset$ и $M \subset G_1 \cup G_2$. Но тогда M не связно, что противоречит предположению, и необходимость доказана.

ДОСТАТОЧНОСТЬ. Пусть выполнено условие леммы. Предположим, что M не связно. Тогда существует непересекающиеся открытые множества G_1 и G_2, такие, что $G_1 \cap M \neq \emptyset$, $G_2 \cap M \neq \emptyset$ и $M \subset G_1 \cup G_2$. Пусть $x \in G_1 \cap M$, $y \in G_2 \cap M$ и, например, $x < y$. Положим $A = G_1 \cap [x, y]$. Множество A не пусто, ограничено сверху и, следовательно, существует $\sup A = z$. Так как $y \in G_2$ и G_2 открыто, то найдется число $\varepsilon_2 > 0$, такое, что $y' \in G_2$, если $y - \varepsilon_2 < y' < y + \varepsilon_2$. Аналогичным образом найдется число $\varepsilon_1 > 0$, такое, что $x' \in G_1$, если $x - \varepsilon_1 < x' < x + \varepsilon_1$. Тогда, с одной стороны, $z \leq y - \varepsilon_2 < y$, а с другой — $z \geq x + \varepsilon_1 > x$. Таким образом, $x < z < y$, и, в силу условия леммы, $z \in M$. В то же время $z \notin G_1 \cup G_2$. В самом деле, если предположить, что $z \in G_1$, то так как множество G_1 открыто, найдутся числа $z' \in G_1$, большие, чем z, но меньшие, чем y, и тогда $\sup A \geq z' > z$, что невозможно. Аналогично, если предположить, что $z \in G_2$, то $\sup A < z$, что также невозможно. Итак, $z \notin G_1 \cup G_2 \supset M$, мы пришли к противоречию, и это доказывает лемму.

Примером несвязного множества может служить объединение двух замкнутых непересекающихся множеств. Несвязность такого такого объединения вытекает из следующей теоремы.

Теорема 7 (теорема отделимости). *Пусть F_1 и F_2 — непустые замккутые непересекающиеся множества метрического пространства X. Тогда в этом пространстве существуют открытые непересекающиеся множества G_1 и G_2, такие, что $G_1 \supset F_1$ и $G_2 \supset F_2$.*

Доказательство. Пусть $x \in F_1$ и $\rho(x, F_2) = \inf\limits_{y \in F_2} \rho(x, y)$. Так как все числа $\rho(x, y) > 0$, то $\inf\limits_{y \in F_2} \rho(x, y)$ существует. Покажем, что $\rho(x, F_2) > 0$. Допустим противное. Тогда найдется последовательность $\{y_n\} \subset F_2$, такая, что $\rho(x, y_n) < \dfrac{1}{n}$. Но это означает, что $x = \lim\ y_n$, т.е. x есть предельная точка множества F_2, и так как F_2 замкнуто, то $x \in F_2$, что невозможно потому, что $F_1 \cap F_2 = \emptyset$. Итак, $\rho(x, F_2) = \rho_x^{(2)} > 0$. Аналогичныи образом $\rho(y, F_1) = \rho_y^{(1)} > 0$ для произвольной точки $y \in F_2$.

Рассмотрим множества

$$G_1 = \bigcup_{x \in F_1} K\left(x, \frac{\rho_x^{(2)}}{3}\right) \qquad \text{и} \quad G_2 = \bigcup_{y \in F_2} K\left(y, \frac{\rho_y^{(1)}}{3}\right).$$

Эти множества открыты, как объединение открытых шаров. Очевидно, что $F_1 \subset G_1$, $F_2 \subset G_2$, и остается доказать, что $G_1 \cap G_2 = \emptyset$. Предположим, что это не так, т.е. существует точка $z \in G_1 \cap G_2$. Так как $z \in G_1$, то $z \in K\left(x_0, \dfrac{\rho_{x_0}^{(2)}}{3}\right)$ для некоторой точки $x_0 \in F_1$, а так как $z \in G_2$, то $z \in K\left(y_0, \dfrac{\rho_{y_0}^{(1)}}{3}\right)$ для некоторой точки $y_0 \in F_2$. Пусть наибольшим из чисел $\rho_{x_0}^{(2)}$ и $\rho_{y_0}^{(1)}$ будет, например, $\rho_{y_0}^{(1)}$. Тогда

$$\rho_{y_0}^{(1)} = \inf_{x \in F_1} \rho(y_0, x) \leq \rho(y_0, x_0) \leq \rho(y_0, z) + \rho(z, x_0) \leq \frac{\rho_{y_0}^{(1)}}{3} + \frac{\rho_{x_0}^{(2)}}{3} \leq \frac{2}{3}\rho_{y_0}^{(1)} < \rho_{y_0}^{(1)}.$$

?

Мы пришли к абсурду, следовательно, $G_1 \cap G_2 = \emptyset$.

Доказанную теорему часто формулируют так: *два непустых замкнутых непересекающихся множества метрического пространства отделимы двумя непересекающимися открытыми множествами.*

§ 3. $\mathbb{R}^n$ как линейное пространство

Напомним определение линейного пространства и его простейшие свойства, излагаемые в курсах алгебры.

Множество $X = \{x, y, z, \ldots, u, v, \ldots\}$ элементов некоторой природы называется *линейным пространством*, если в X определены *сумма* $x + y$ элементов x и y и *произведение* λx элемента x на число λ, причем операции сложения элементов и умножения элемента на число, удовлетворяют следующим аксиомам:

а) $x + y = y + x$;

б) $(x + y) + z = x + (y + z)$;

в) в X существует *нулевой элемент* θ, такой, что $x + \theta = x$ для любого элемента $x \in X$;

г) для любого элемента $x \in X$ существует в X *противоположный элемент* $-x$, такой, что $x + (-x) = \theta$;

д) $\lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y$;

е) $(\lambda + \mu)x = \lambda x + \mu x$;

ж) $\mu(\lambda x)x = (\mu\lambda)x$;

з) $1 \cdot x = x, \;\; 0 \cdot x = \theta$.

Заметим, что эти аксиомы не являются независимыми.

В дальнейшем нулевой элемент θ пространства X будем обозначать символом 0, причем из текста будет ясно, когда идет речь о нулевом элементе пространства, а когда о числе нуль.

Из аксиом следует, что $(-1)x = -x$. Поэтому вместо $x + (-y)$ пишут $x - y$.

В зависимости от того, на какие числа — вещественные или комплексные — допускается умножение элементов, линейное пространство называется соответственно *вещественным* или *комплексным.* В дальнейшем, речь будет идти почти всегда о вещественном линейном пространстве.

Элементы линейного пространства X называются также *точками* или *векторами.*

Рассмотри n-мерное евклидово пространство $\mathbb{R}^n$. Для двух любых точек $x = (x^1, x^2, \ldots, x^n)$, $y = (y^1, y^2, \ldots, y^n)$ этого пространства определим сумму $x + y = (x^1 + y^1, x^2 + y^2, \ldots, x^n + y^n)$ и произведение точки x на вещественное число λ

$$\lambda x = (\lambda x^1, \lambda x^2, \ldots, \lambda x^n).$$

Ясно, что все аксиомы линейного пространства выполняются и $\mathbb{R}^n$ есть вещественное линейное пространство.

При рассмотрении $\mathbb{R}^n$ как линейного пространства удобно считать его элементы $x = (x^1, x^2, \ldots, x^n)$ свободными векторами, т.е. векторами без фиксирования точки приложения или векторами с началом в нуле $(0, 0, \ldots, 0)$ и концом в точке $(x^1, x^2, \ldots, x^n)$. Однако в некоторых случаях бывает необходимо рассматривать $\mathbb{R}^n$ как афинное пространство. Напомним, что множество $\mathfrak{X} = \{a, b, c, \ldots, u, v, \ldots\}$ называется *афинным пространством* над линейным пространством X, если каждая упорядоченная пара (a, b) элементов $a, b \in \mathfrak{X}$ определяет единственный вектор $x \in X$, $x = \overrightarrow{ab}$, и наоборот, каждая точка $a \in \mathfrak{x}$ и вектор $x \in X$ однозначно определяют точку $b \in \mathfrak{X}$ так, что $\overrightarrow{ab} = x$. При этом выполняется следующее условие: если $\overrightarrow{ab} = x$ и $\overrightarrow{bc} = y$, то $\overrightarrow{ac} = x + y$.

Пара «точка a и вектор x» называется *вектором, приложенным к точке* a. Точка a называется *началом* приложенного к ней вектора $x = \overrightarrow{ab}$, точка b — *концом* этого вектора. Если в афинном пространстве $\mathfrak{X}$ зафиксировать какую-либо точку 0 и сопоставить с каждой точкой $a \in \mathfrak{X}$ вектор $\overrightarrow{0a}$, то множество этих «радиусов-векторов» совпадает с исходным линейным пространством X. В евклидовых пространствах $\mathbb{R}^2$ и $\mathbb{R}^3$ эти понятия имеют простой наглядный смысл (рис. 49).

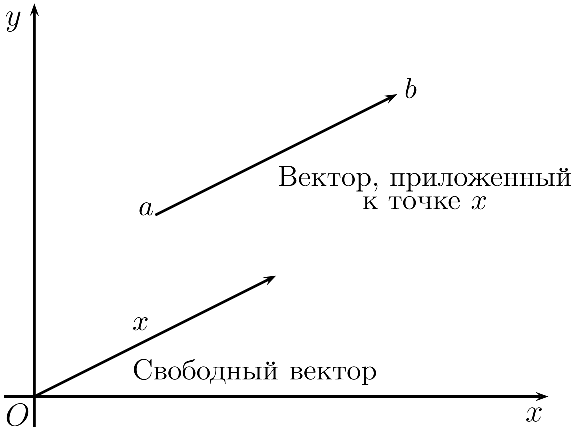

Рис. 49

Другим важным примером линейного пространства является множество всех отображений $f : A \to \mathbb{R}^m$, $A \subset \mathbb{R}^n$, если обычным путем определить сумму отображений и произведение отображения на число

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x),$$

$$(\lambda f)(x) = \lambda f(x),$$

где x — точка множества A.

Вернемся к основным понятиям теории линейных пространств.

Элементы $x_1, x_2, \ldots, x_k$ называются *линейно независимыми*, если из равенства

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots + \alpha_k x_k = 0$$

следует, что $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_k = 0$. Если существую такие числа $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$, не вое равные нулю, что

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots + \alpha_k x_k = 0,$$

то элементы $x_1, x_2, \ldots, x_k$ называются *линейно зависимыми*. В этом случае, если, например, $\alpha_1 \neq 0$, то

$$x_1 = -\frac{\alpha_2}{\alpha_1}x_2 - \frac{\alpha_3}{\alpha_1}x_3 - \ldots - \frac{\alpha_k}{\alpha_1}x_k,$$

и говорят, что элемент x_1 является *линейной комбинацией* элементов $x_2, x_3, \ldots, x_k$.

Если в пространстве X существует m линейно независимых элементов, но любые $(m+1)$ элементов линейно зависимы, то говорят, что это пространство m-мерно. Совокупность любых m линейно независимых элементов $a_1, a_2, \ldots, a_m$ m-мерного пространства X называется *базисом* этого пространства. Тогда для любого $x \in X$ имеет место равенство

$$x = \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \ldots + \alpha_m a_m,$$

называемое *разложением элемента x по элементам базиса.*

Пространство $\mathbb{R}^n$ n-мерное. Базисом в нем будет, например, система векторов

$$e_1 = (1, 0, 0, \ldots, 0), \quad e_2 = (0, 1, 0, \ldots, 0), \ \ldots\ , \ e_n = (0, 0, 0, \ldots, 1).$$

Этот базис называется *стандартным базисом* пространства $\mathbb{R}^n$. Если $x = (x^1, x^2, \ldots, x^n)$, то разложение элемента x по стандартному базису имеет следующий вид:

$$x = x^1 e_1 + x^2 e_2 + \ldots + x^n e_n = \sum_{i=1}^{n} x^i e_i.$$

Числа $x^1, x^2, \ldots, x^n$ называются *координатами вектора x* и совпадают с координатами точки $x = (x^1, x^2, \ldots, x^n)$ как элемента евклидова пространства.

Пусть $x = (x^1, x^2, \ldots, x^n)$ и $y = (y^1, y^2, \ldots, y^n)$. Вещественное число

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^{n} x^i y^i$$

называется *внутренним* или *скалярным произведением* векторов x и y. При этом

1) $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$;
2) $\langle x + y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle$;
3) $\langle \lambda x, y \rangle = \lambda \langle x, y \rangle$;
4) $\langle x, x \rangle \geq 0$ и $\langle x, x \rangle = 0$ тогда и только тогда, когда $x = 0$.

Неотрицательное число

$$|x| = \sqrt{\langle x, x \rangle} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x^i)^2}$$

называется *нормой* или *длиной вектора x*. Это не что иное, как расстояние точки x от нуля, т.е. $\rho(x, 0) = |x|$.

В свою очередь, расстояние между точками выражается через норму:

$$\rho(x, y) = |x - y|$$

и эта запись расстояния в $\mathbb{R}^n$ для $n > 1$ такая же, как и для $n = 1$.

Понятие скалярного произведения позволяет записать доказанное ранее (ом. § 1 данной главы) неравенство Буняковского–Шварца в следующем виде:

$$|\langle x, y\rangle| \le |x|\,|y|.$$

Два элемента x и y называются *ортогональными*, если $\langle x, y\rangle = 0$. Элемент x называется *нормированным*, если $|x| = 1$. Базис $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ пространства $\mathbb{R}^n$ называется *ортонормированным*, если

$$\langle e_i, e_j\rangle = \delta_{ij}, \qquad \delta_{ij} = \begin{cases} 0, & i \ne j, \\ 1, & i = j. \end{cases}$$

Стандартный базис в $\mathbb{R}^n$ является ортонормированным.

Пусть даны два базиса $\{a_i\}$ и $\{b_i\}$ пространства $\mathbb{R}^n$. Тогда каждый вектор b_j разлагается по элементам базиса $\{a_i\}$ и каждый вектор a_i разлагается по элементам базиса $\{b_j\}$:

$$b_j = \sum_{i=1}^{n} \beta_{ji} a_i,$$

$$a_i = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} b_j.$$

Мы получали две матрицы $A = (\alpha_{ij})$ и $B = (\beta_{ji})$. В курсах линейной алгебры доказывается, что матрицы A и B являются взаимно обратными и

$$\det A \ne 0, \qquad \det B \ne 0, \qquad \det A \cdot \det B = \det I,$$

где $I = (\delta_{ij})$ есть единичная матрица.

Напомним еще несколько понятий, которые нам понадобятся в дальнейшем.

Множество L линейного пространства X называется *линейным многообразием*, если вместе с элементами $x_1, x_2, \dots, x_n$ оно содержит любую линейную комбинацию этих элементов.

Всякое линейно многообразие конечномерного линейного пространства замкнуто. Оно называется также *подпространством* пространства X. Одномерное подпространство, т.е. множество элементов вида λx, где $x \in X$ фиксировано и $-\infty < \lambda < \infty$, называется *прямой, определяемой вектором x и проходящей через нуль*. Множество векторов вида $a + \lambda x$, где $a, x \in X$ фиксированы и $-\infty < \lambda < \infty$, называется *прямой, проходящей через точку a параллельно вектору x*. Наконец, множество точек пространства X вида $\lambda x + (1 - \lambda) y$, где $x, y \in X$ фиксированы и $0 \le \lambda \le 1$, называется *отрезком, соединявшим точки x и y* и обозначается через $[x, y]$.

Множество $C \subset X$ называется *выпуклым*, если из $x, y \in C$ следует $[x, y] \in C$. Можно доказать, что если C выпукло, $x_1, x_2, \dots, x_k \in C$, числа $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ неотрицательны и $\sum\limits_{i=1}^{k} \lambda_i = 1$, то $\sum\limits_{i=1}^{k} \lambda_i x_i \in C$. Наконец, наименьшее выпуклое множество, содержащее данное множество A, называется *выпуклой оболочкой* множества A.

Доказательство всех сделанных в этом параграфе утверждений содержится в курсах линейной алгебры.

§ 4. Непрерывные функции на множествах метрических пространств

Отображение $f: A \to \mathbb{R}$, где A — подмножество метрического пространства X, называется *функцией, определенной на A*. Если, кроме того, X — линейное пространство, то f называется *скалярной функцией векторного аргумента.*

Определение 1. Функция $f: A \to \mathbb{R}$ называется *непрерывной в точке* $x_0 \in A$, если для любого числа $\varepsilon > 0$ найдется число $\delta > 0$, такое, что $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ всякий раз, когда $x \in A$ и $\rho(x, x_0) < \delta$, т.е. когда $x \in A \cap K(x_0, \delta)$.

Функция, непрерывная во всех точках множества A, называется *непрерывной на этом множестве.*

Данное определение непрерывности функции $f: A \to \mathbb{R}$ в точке x_0 эквивалентно следующему определению.

Определение 2. Функция $f: A \to \mathbb{R}$ называется *непрерывной в точке* x_0, если для любой последовательности $\{x_n\} \subset A$, сходящейся к x_0 последовательность $f(x_n)$ сходится к $f(x_0)$.

Покажем эквивалентность этих определений.

Прежде всего, заметим, что в изолированной точке любая функция непрерывна. В самом деле, пусть x_0 — изолированная точка множества A. Это значит, что существует окрестность $K(x_0, \delta)$ этой точки, такая, что $K(x_0, \delta) \cap (A \setminus \{x_0\}) = \emptyset$. Поэтому если $x \in K(x_0, \delta) \cap A$, то $x = x_0$ и $|f(x) - f(x_0)| = |f(x_0) - f(x_0)| = 0 < \varepsilon$ при любом числе $\varepsilon > 0$. Это и означает непрерывность f в точке x_0 по определению 1.

Далее, если x_0 — изолированная точка, то единственной (???) последовательностью точек из множества A, сходящейся к x_0 будет стационарная последовательность $\{x_0, x_0, \ldots, x_0, \ldots\}$. Но тогда последовательность $\{f(x_0), f(x_0), \ldots, f(x_0), \ldots\}$ тоже стационарная и сходится к $f(x_0)$, т,е. функция $f(x)$ непрерывна в точке x_0 по определению 2.

Итак, пусть x_0 — предельная точка множества A и функция $f(x)$ непрерывна в точке, по определению 1, т.е. для $\forall\ \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0$, такое, что $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$, когда $x \in A \cap K(x_0, \delta)$. Возьмем любую последовательность $\{x_n\} \subset A$, сходящуюся к x_0. Для указанного выше числа $\delta > 0$ найдется номер n_0, такой, что при $n \geq n_0$, $\rho(x_n, x_0) < \delta$, т.е. $x_n \in A \cap K(x_0, \delta)$. Но тогда $|f(x_n) - f(x_0)| < \varepsilon$, т.е. $\lim\ f(x_n) = f(x_0)$, и функция $f(x)$ непрерывна по определению 2.

Пусть, напротив, функция $f(x)$ непрерывна по определению 2, и предположим, что она не является непрерывной по определению 1. Тогда найдется число $\varepsilon_0 > 0$, такое, что при любых числах $\delta > 0$ будут существовать $x_\delta \in A$, такие, что $|f(x_\delta) - f(x_0)| \geq \varepsilon_0$, хотя $\rho(x_\delta, x_0) < \delta$. Положим $\delta = \dfrac{1}{n}$ и обозначим соответствующее значение x_δ через x_n. Имеем $\rho(x_n, x_0) < \dfrac{1}{n}$, т.е. $x_n \to x_0$, в то время как $|f(x_n) - f(x_0)| \geq \varepsilon_0$, т.е. $f(x_n) \not\to f(x_0)$. Это противоречит условию, что функция $f(x)$ непрерывна в точке x_0 по определению 2. Следовательно, предположение, что функция $f(x)$ не является непрерывной по определению 1, неверно и, таким образом, эквивалентность двух определений непрерывности доказана.

Примеры.

1. Пусть $X = \mathbb{R}^n$, $f(x) = \rho(x, a)$, $a, x \in \mathbb{R}^n$. Функция $f(x)$ непрерывна всюду на X. В самом деле, в силу обратного неравенства треугольника для $x, x_0 \in X$, имеем:

$$|\rho(x, a) - \rho(x_0, a)| \leq \rho(x, x_0),$$

откуда очевидным образом следует непрерывность $\rho(x, a)$.

Ясно, что $\rho(x, a)$ — непрерывная функция и в произвольном метрическом пространстве X.

Теперь легко доказать замкнутость шара $\overline{K}(a, r)$. В самом деле, пусть x_0 — предельная точка для этого шара. Существует последовательность $\{x_n\} \subset \overline{K}(a, r)$, такая, что $x_n \to x_0$. Так как $\rho(x_n, a) \leq r$, то $\lim\ \rho(x_n, a) \leq r$ (???). Но в силу непрерывности расстояния $\lim\ \rho(x_n, a) = \rho(x_0, a)$. Следовательно, $\rho(x_0, a) \leq r$, т.е. $x_0 \in \overline{K}(a, r)$, и замкнутость шара $\overline{K}(a, r)$ доказана.

2. Пусть X — произвольное метрическое пространство, F_1, F_2 — два непересекающихся замкнутых подмножества X, одно из которых, например F_1, компактно. Положим

$$\varphi_{a,b}(x) = \begin{cases} a & \text{для} \quad x \in F_1, \\ b & \text{для} \quad x \in F_2, \end{cases}$$

где a и b — фиксированные вещественные числа. Функция $\varphi_{a,b}(x)$ непрерывна на $F_1 \cup F_2$.

Для доказательства этого установки, что существует число $d > 0$, такое, что $\rho(x, y) \geq d$ для любых точек $x \in F_1$ и $y \in F_2$. В самом деле, если это не так, то для любого натурального числа m найдутся точки $x_m \in F_1$ и $y_m \in F_2$, такие, что $\rho(x_m, y_m) < \dfrac{1}{m}$. Так как множество F_1 компактно, то из последовательности $\{x_m\}$ можно выделить подпоследовательность $\{x_{m_k}\}$, сходящуюся к $x_0 \in F_1$. Но тогда неравенство $\rho(x_{m_k}, y_{m_k}) < \dfrac{1}{m_k}$ показывает, что и $\{y_{m_k}\}$ сходится к x_0. В силу замкнутости F_2 инеем $x_0 \in F_2$, следовательно, $F_1 \cap F_2 \neq \emptyset$, что противоречит условию.

Теперь доказательство непрерывности $\varphi_{a,b}(x)$ не представляет труда. Пусть, например, точка $x_0 \in F_1$ Возьмем произвольное число $\varepsilon > 0$. Если $\delta < d$ и $x \in F_1 \cup F_2$, то неравенство $\rho(x, x_0) < \delta$ означает, что $x \in F_1$. Но тогда

$$|\varphi_{a,b}(x) - \varphi_{a,b}(x_0)| = |a - a| = 0 < \varepsilon,$$

и непрерывность функции $\varphi_{a,b}(x)$ доказана.

3. Пусть $X = \mathbb{R}^n$ и $g(x) = \sin(x^1 + x^2 + \ldots + x^n)$. Докажем, что Функция $g(x)$ непрерывна в любой точке $x_0 = (x_0^1, x_0^2, \ldots, x_0^n)$ пространство $\mathbb{R}^n$. Имеем:

$$|g(x) - g(x_0)| = |\sin(x^1 + x^2 + \ldots + x^n) - \sin(x_0^1 + x_0^2 + \ldots + x_0^n)| =$$

$$= 2\left|\sin\frac{(x^1 + x^2 + \ldots + x^n) - (x_0^1 + x_0^2 + \ldots + x_0^n)}{2}\right| \times$$

$$\times \left|\cos\frac{(x^1 + x^2 + \ldots + x^n) + (x_0^1 + x_0^2 + \ldots + x_0^n)}{2}\right|.$$

Так как $|(x^1 + x^2 + \ldots + x^n) - (x_0^1 + x_0^2 + \ldots + x_0^n)| \leq \sum\limits_{i=1}^{n} |x^i - x_0^i| \leq n\rho(x, x_0)$, то

$$|g(x) - g(x_0)| \leq 2\ \frac{|(x^1 + x^2 + \ldots + x^n) - (x_0^1 + x_0^2 + \ldots + x_0^n)|}{2} \leq n\rho(x, x_0)$$

откуда следует непрерывность функций $g(x)$ в точке x_0.

4. Пусть $\varphi(x) = \langle x, y\rangle$, где y — фиксированный элемент пространства $\mathbb{R}^n$. С помощью неравенства Буняковского–Шварца находим

$$|\varphi(x) - \varphi(x_0)| = |\langle x, y\rangle - \langle x_0, y\rangle| = |\langle x - x_0, y\rangle| \leq |x - x_0|\,|y|,$$

откуда следует, что скалярное произведение непрерывно по одному аргументу при фиксированном значении другого.

Теорема 1. *Для того чтобы отображение $f: A \to \mathbb{R}$ было непрерывным на A, необходимо и достаточно, чтобы прообраз всякого открытого множества $f^{-1}(G)$ был открытым подмножеством множества A, рассматриваемого как самостоятельное метрическое пространство, т.е. чтобы $f^{-1}(G) = A \cap H$, где H — открытое подмножество X.*

В гл. XII эта теорема будет доказана для более общего случая отображения $f: A \to \mathbb{R}^m$, $A \subset \mathbb{R}^n$, и потому здесь ее доказательство опускается.

Так же как для случая вещественных функций вещественного аргумента доказывается следующая теореме.

Теорема 2. *Если Функции f и g непрерывны в точке x_0 множества A метрического пространства X, то $f \pm g$, fg, а если $g(x_0) \neq 0$, то и функция $\dfrac{f}{g}$ непрерывны в точке x_0.*

Теорема 3. *Если функция $f: A \to \mathbb{R}$ непрерывна в точке $x_0 \in A$ и $f(x_0) > 0$, то существует такое число $r > 0$, что $f(x) > 0$ для всех $x \in A \cap K(x_0, r)$.*

Теорема 4. *Если функция $f(x) \geq 0$ для всех x, достаточно близких к $x_0 \in A$, и функция $f(x)$ непрерывна в точке x_0, то $f(x_0) \geq 0$.*

Важным примером непрерывных функций, заданных на $\mathbb{R}^n$, являются линейные функции, или, как их чаще называют, линейные функционалы. Это такие функций f, что

$$f(x + y) = f(x) + f(y), \qquad f(\lambda x) = \lambda f(x) \tag{1}$$

для любых точек $x, y \in \mathbb{R}^n$ и любого вещественного числа λ. Очевидно, что функция

$$\varphi(x) = \langle x, u\rangle \tag{2}$$

где u — фиксированный n-мерный вектор, удовлетворяет условиям (1) и, следовательно, является линейным функционалом. Нетрудно доказать, что всякий линейный функционал f, определенный на $\mathbb{R}^n$, имеет вид (2). В самом деле, пусть

$$f(e_i) = u_i, \qquad i = 1, 2, \ldots, n,$$

где $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ — стандартный базис в $\mathbb{R}^n$. Так как для любого элемента $x \in \mathbb{R}^n$ имеем $x = \sum\limits_{i=1}^{n} x^i e_i$, то

$$f(x) = f\left(\sum_{i=1}^{n} x^i e_i\right) = \sum_{i=1}^{n} x^i f(e_i) = \sum_{i=1}^{n} x^i e_i = \langle x, u\rangle,$$

где u —вектор с координатами $u_1, u_2, \ldots, u_n$, $u_i = f(e_i)$.

Для любого $x \in \mathbb{R}^n$, в силу неравенства Буняковского–Шварца

$$|f(x)| = |\langle x, u\rangle| \leq |x|\,|u|.$$

Длина вектора u, порождающего функционал f, называется *нормой* этого функционала и обозначается через $\|f\|$. Таким образом,

$$|f(x)| \leq \|f\|\,|x|. \tag{3}$$

Предлагаем читателю доказать, что $\|f\| = \sup\limits_{|x|\leq 1} |f(x)|$, и, пользуясь однородностъю функционала, вывести из этого неравенства, что $\|f\|$ есть наименьшее из чисел M, таких, что

$$|f(x)| \leq M|x|.$$

Если $x_1 \in \mathbb{R}^n$ и $x_2 \in \mathbb{R}^n$, то из аддитивности функционала f и неравенства (3) вытекает, что

$$|f(x_1) - f(x_2)| = |f(x_1 - x_2)| \leq \|f\|\,|x_1 - x_2|,$$

откуда следует, в частности, непрерывность линейного функционала f.

Теорема 5. *Если f_m, $m = 1, 2, 3, \ldots$ — линейные функционалы и $f_m(x) \to f_0(x)$ для любого элемента $x \in \mathbb{R}^n$, то f_0 также линейный функционал и $\|f_m - f_0\| \to 0$.*

Доказательство. Для любых $x, y \in \mathbb{R}^n$

$$f_0(x+y) = \lim\ f_m(x+y) = \lim\ [f_m(x) + f_m(y)] =$$

$$= \lim\ f_m(x) + \lim\ f_m(y) = f_0(x) + f_0(y)$$

и аддитивность функционала f_0 доказана. Однородность функционала f_0 доказывается аналогично.

Далее, $\|f_m\| = |u_m| = |)u_m^1, u_m^2, \ldots, u_m^n)|$, $m = 0, 1, 2, \ldots$, где $u_m^i = f_m(e_i)$. По условию, $f_m(e_i) \to f_0(e_i)$, т.е. $u_m^i \to u_0^i$, откуда

$$\|f_m - f_0\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (u_m^i - u_0^i)^2} = |u_m - u_0| \to 0,$$

что требовалось доказать.

Свойства функций $f: A \to \mathbb{R}$, непрерывных на множестве A метрического пространства X, которые будут описаны теоремами 6 и 7, играют особенно важную роль в математическом анализе и его приложениях.

Теорема 6. *Пусть функция $f: A \to \mathbb{R}$ непрерывна на A и A — компактное множество метрического пространства X. Тогда $f(A)$ также компактное, т.е. ограниченное и замкнутое, множество числовой прямой.*

Доказательство. Положим $f(A) = B \subset \mathbb{R}$ и пусть $\{y_m\}$ — произвольная числовая последовательность точек из B. Для каждого числа y_m возьмем один из его прообразов x_m, $f(x_m) = y_m$. Так как $\{x_m\} \subset A$ и A компактно, то из последовательности $\{x_m\}$ можно выделить подпоследовательность $\{x_{m_i}\}$, сходящуюся к точке $x_0 \in A$. В силу непрерывности f на A, в частности в точке x_0, имеем:

$$y_{m_i} = f(x_{m_i}) \to f(x_0) \in B.$$

Итак, из любой последовательности точек множества B выделяется подпоследовательность, сходящаяся к точке этого множества, что означает компактность множества B.

Теорема 7. *Если функция $f: A \to \mathbb{R}$ непрерывна на A и M — связное подмножество A, то $f(A)$ — связное множество.*

Доказательство. Допустим, что $f(M)$ не связно. Тогда существуют непересекающиеся открытые множества $G_1, G_2 \subset \mathbb{R}$, такие, что $G_1 \cap f(M) \neq \emptyset$, $G_2 \cap f(M) \neq \emptyset$ и $G_1 \cup G_2 \supset f(M)$.

Так как функция f непрерывна на A, то, по теореме 1, $f^{-1}(G_1)$ и $f^{-1}(G_2)$ будут открыты в A, т.е. $f^{-1}(G_1) = A \cap H_1$ и $f^{-1}(G_2) = A \cap H_2$, где H_1 и H_2 — открытые множества пространства X. Легко видать, что $f^{-1}(G_1)$ и $f^{-1}(G_2)$ не пересекаются, но множества H_1 и H_2 в общем случае могут иметь общие точки. Однако множества H_1 и H_2 можно заменить открытыми непересекающимися множествам $\widetilde{H}_1$ и $\widetilde{H}_2$, такими, что по-прежнему $f^{-1}(G_1) = A \cap \widetilde{H}_1$ и $f^{-1}(G_2) = A \cap \widetilde{H}_2$.

В самом деле, для $x \in f^{-1}(G_1)$ найдется число δ_x, такое, что $K(x, \delta_x) \subset H_1$, и если $x' \in A$ и $\rho(x', x) < \delta_x$, то $x' \in f^{-1}(G_1)$. Аналогичным образом точке $y \in f^{-1}(G_2)$ поставим в соответствие число δ_y, такое, что из $y' \in A$ и $\rho(y', y) < \delta_y$ будет следовать $y' \in f^{-1}(G_2)$. Легко убедиться, что $\delta_x < \rho(x, y)$, $\delta_y < \rho(x, y)$, откуда

$$\rho(x, y) > \frac{1}{2}(\delta_x + \delta_y). \tag{4}$$

Пусть $V_x = \left\{z \in X : \rho(z, x) < \frac{1}{2}\delta_x\right\}$, $V_y = \left\{z \in X : \rho(z, y) < \frac{1}{2}\delta_y\right\}$. Окрестности V_x и V_y точек x и y соответственно не пересекаются. Действительно, если предположить, что $z_0 \in V_x \cap V_y$, то мы имели бы

$$\rho(x,y) \le \rho(x,z_{)}) + \rho(z_0,y) < \frac{1}{2}\delta_x + \frac{1}{2}\delta_y = \frac{1}{2}(\delta_x + \delta_y),$$

что противоречит неравенству (4).

Положим $\widetilde{H}_1 = \bigcup\limits_{x \in f^{-1}(G_1)} V_x$ и $\widetilde{H}_2 = \bigcup\limits_{y \in f^{-1}(G_2)} V_y$, получим открытые множества с требуемыми свойствами.

Далее, пересечение $f^{-1}(G_1) \cap M$ не пусто, так как содержит точку $x = f^{-1}(y)$, где $y \in G_1 \cap f(M)$. Тем более $\widetilde{H}_1 \cap M \ne \emptyset$.

Аналогично $\widetilde{H}_2 \cap M \ne \emptyset$. Наконец, так как $f(M) \subset G_1 \cup G_2$, то $M \subset f^{-1}(G_1) \cup f^{-1}(G_2)$ и тем более $M \subset \widetilde{H}_1 \cup \widetilde{H}_2$. Но тогда M несвязно, что противоречит условию теоремы.

Следствие 1. *Если M — связное множество метрического пространства X, f — непрерывное отображение M в $\mathbb{R}$, $a, b \in M$, $f(a) = \alpha$, $f(b) = \beta$, $\alpha < \beta$, γ — любое число, удовлетворяющее неравенству $\alpha < \gamma < \beta$, то в M существует точка c, такая, что $f(c) = \gamma$.*

В самом деле, образ $f(M)$ множества M является, по теореме 7, связным множеством числовой прямой. Тогда, согласно лемме 1 из § 2 данной главы, множество $f(M)$ вместе с точками α и β содержит и весь отрезок $[\alpha, \beta]$ (или $[\beta, \alpha]$, если $\beta < \alpha$).

Определение 3. Отображение $f:\ A \to \mathbb{R}^n$ множества A метрического пространства X в числовую ось называется *равномерно непрерывным* на A, если для любого числа $\varepsilon > 0$ найдется число $\delta > 0$, зависящее лишь от ε, такое, что $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$ всякий раз, когда $x, y \in A$ и $\rho(x,y) < \delta$.

Ясно, что отображение, равномерно непрерывно на A, непрерывно в каждой точке этого множества.

Теорема 8. *Функция f, непрерывная на компактном множестве $M \subset X$, равномерно непрерывна на этом множестве.*

Доказательство. Предположим, что функция f не является равномерно непрерывной на M. Тогда найдется число $\varepsilon_0 > 0$ и для любого номера m найдутся точки x_m и y_m множества M, такие, что

$$|f(x_m) - f(y_m)| \ge \varepsilon_0, \tag{5}$$

хотя $\rho(x_m, y_m) < \frac{1}{m}$. Так как M компактно, то из последовательности $\{x_m\}$ можно выделить подпоследовательность $\{x_{m_i}\}$, сходящуюся к точке $x_0 \in M$. В силу неравенства $\rho(x_{m_i}, y_{m_i}) < \dfrac{1}{m_i}$, подпоследовательность $\{y_{m_i}\}$ также сходится к точке x_0. Но тогда для достаточно больших номеров m_i, в силу непрерывности функции f, $|f(x_{m_i}) - f(x_0)| < \frac{\varepsilon_0}{2}$, $\qquad |f(y_{m_i}) - f(x_0)| < \frac{\varepsilon_0}{2}$, т.е.

$$|f(x_{m_i}) - f(y_{m_i})| < \varepsilon_0,$$

что противоречит неравенству (5). Теорема доказана.

Функции, непрерывные на некомпактных множествах, могут не быть равномерно непрерывными. Такова, например, функция

$$f(x) = \frac{1}{x}, \qquad 0 < x < \infty.$$

Мы рассматривали до сих пор отображения f метрического пространства X в числовую прямую $\mathbb{R}$. Большинство предыдущих определений и теорем остаются справедливыми и для отображения f метрического пространства (X, ρ) в произвольное метрическое пространство $(Y, \widetilde{\rho})$. Так, например, отображение $f: A \to Y$, $A \subset X$, непрерывно в точке $x_0 \in A$, если для любого числа $\varepsilon > 0$ найдется число $\delta > 0$, такое, что из $x \in A$ и $\rho(x, x_0) < \delta$ следует $\widetilde{\rho}[f(x), f(y)] < \varepsilon$, иными словами, если прообраз шара $K(f * x_0), \varepsilon) \subset Y$ содержит пересечение $A \cap K(x_0, \delta) \subset X$.

Для отображений $f: A \to Y$ верны теорема 6 о компактности непрерывного образа компактного множества, теорема 8 о равномерной непрерывности непрерывного на компактном множестве отображения и теорема 7 о связности непрерывного образа связного множества.

Из теоремы 8 вытекает следствие.

Следствие 2. *Отрезок $tb + (1-t)a$, соединяющий точки a и b метрического пространства X, есть связное множество.*

В самом деле, отрезок $tb + (1-t)a$ есть непрерывный образ при отображении $t \to x_t = tb + (1-t)a$ отрезка $[0,1]$ числовой прямой.

Примеры.

5. Шар $K(a, r)$ метрического пространства $\mathbb{R}^n$ связное множество.

Предположим, что $K(a, r)$ не является связным множеством. Тогда существуют непересекающиеся открытые множества G_1 и G_2 пространства X, такие, что $G_1 \cap K(a, r) \neq \emptyset$, $G_2 \cap K(a, r) \neq \emptyset$ и $K(a, r) \subset G_1 \cup G_2$. Пусть $x_1 \in G_1 \cap K(a, r)$, $x_2 \in G_2 \cap K(a, r)$. Рассмотрим отрезок $[x_1, x_2] = \{x_t = tx_2 + (1-t)x_1,\ 0 \le t \le 1\}$. Тогда $[x_1, x_2] \cap G_1 \neq \emptyset$, $[x_1, x_2] \cap G_2 \neq \emptyset$ и $G_1 \cup G_2 \supset K(a, r) \supset [x_1, x_2]$. Но это невозможно, так как $[x_1, x_2]$ — связное множество. Таким образом, связность шара $K(a, r)$ доказана.

Для метрического пространства X кроме понятия связности можно ввести понятие линейной связности множества.

Определение 4. Множество $M \subset X$ называется *линейно связным*, если две любые точки этого множества можно соединить непрерывной кривой (т.е. непрерывным образом отрезка $[\alpha, \beta]$), лежащей целиком в M.

Легко убедиться, что линейно связное множество M связно, по определению (§ 2 данной главы). В самом деле, если это не так, то существуют открытые непересекающиеся множества $G_1, G_2 \subset X$, такие, что $G_1 \cap M \neq \emptyset$, $G_2 \cap M \neq \emptyset$ и $G_1 \cup G_2 \supset M$. Пусть $a \in G_1 \cap M$, $b \in G_2 \cap M$. Так как M линейно связно, то существует кривая Γ, расположенная целиком в M, соединяющая точки a и b. Но тогда $G_1 \cap \Gamma \neq \emptyset$, $G_2 \cap \Gamma \neq \emptyset$ и $\Gamma \subset G_1 \cup G_2$, т.е. множество Γ не связно, что невозможно, так как в силу теоремы 6 и связности $[\alpha, \beta]$, Γ — связное множество.

Если X — не только метрическое, но и линейное пространство, как например

$\mathbb{R}^n$, то в качестве кривой Γ при доказательстве связности множества $M \subset X$ часто берут ломаную линию с конечным числом звеньев.

Заметим, наконец, что не всякое связное множество линейно связно. Таково, например, множество на плоскости $\mathbb{R}^2$, состоящее из графика функции $y = \sin \dfrac{1}{x}$, $0 < x < \dfrac{1}{\pi}$ и отрезка $[-1, 1]$ оси Oy.

Глава XI

ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ СКАЛЯРНЫХ ФУНКЦИЙ ВЕКТОРНОГО АРГУМЕНТА

Исследование поведения вещественных функций, определенных на множествах n-мерного евклидова пространства или скалярных функций векторного аргумента, как и исследование вещественных функций вещественного аргумента, существенно облегчается, если в малых окрестностях точек, где ведется исследование, заменить приближенно эти функции линейными. Такая линейная аппроксимация осуществляется с помощью дифференциала функции.

§ 1. Дифференциал скалярной функции векторного аргумента

Рассмотрим функцию $f: \ G \to \mathbb{R}$, где $G \subset \mathbb{R}^n$ и открыто. По аналогии с определением дифференциала функции одной независимой переменной дадим следующее определение.

Определение 1. Если для $x \in G$ существует линейный функционал $\ell_x : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, такой, что для всех $h \in \mathbb{R}^n$, для которых $x + h \in G$, имеем

$$f(x+h) - f(x) = \ell_x(h)^{30} + \omega(f, x, h) \tag{1}$$

где $\dfrac{\omega(f,x,h)}{|h|} \to 0$ при $h \to 0$, то функция называется *дифференцируемой в точке* $x \in G$, а линейная по h часть $\ell_x(h)$ приращения $f(x+h)-f(x)$ функции называется *дифференциалом функции* f и обозначается $df(x,h)$. величина $\omega(f,x,h)$ называется *остатком приращения.*

Итак, если функция f дифференцируема в точке $x \in G$, то

$$f(x+h) - f(x) = df(x,h) + \omega(f,x,h).$$

Линейный функционал $\ell_x: \ \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ называется *производной функции* f в точке x и обозначаемся $f'(x)$. Следовательно, $df(x,h) = f'(x)h = \langle h, u\rangle$, где вектор u в общем случае зависит от x. Поэтому

$$f(x+h) - f(x) = f'(x)h + \omega(f,x,h). \tag{2}$$

---

[30] Значение линейного функционала ℓ на элементе h, будем обозначать также lh, опуская скобки.

Функция $f : G \to \mathbb{R}$, дифференцируемая в каждой точке множества G, называется *дифференцируемой* на G.

Примеры.

1. Пусть функция $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ задана формулой

$$f(x^1, x^2, x^3) = (x^1)^2 - x^2x^3.$$

Для любого вектора $h = (h^1, h^2, h^3) \in \mathbb{R}^3$ имеем:

$$f(x+h) - f(x) = (x^1 + h^1)^2(x^2 + h^2)(x^3 + h^3) - (x^1)^2 + x^2x^3 =$$

$$= 2x^1h^1 - x^3h^2 - x^2h^3 + (h^1)^2 - h^2h^3.$$

Выражение $2x^1h^1 - x^3h^2 - x^2h^3$ линейно зависит от h, а

$$\frac{|(h^1)^2 - h^2h^3|}{|h|} = \frac{|(h^1)^2 - h^2h^3|}{\sqrt{(h^1)^2 + (h^2)^2 + (h^3)^2}} \leq \frac{(h^1)^2}{|h^1|} + \frac{|h^2|\,|h^3|}{|h^2|} = |h^1| + |h^3| \to 0$$

при $h \to 0$. Поэтому функция $f(x) = (x^1)^2 - x^2x^3$ дифференцируема в любой точке пространства $\mathbb{R}^3$ и $df(x,h) = 2x^1h^1 - x^3h^2 - x^2h^3$. Производной будет линейный функционал, определяемый вектором $u = (2x^1, -x^3, -x^2)$, так что $df(x,h) = \langle h, u \rangle$.

3. Пусть $f(x) = |x|$. Для $x \neq 0$ имеем:

$$f(x+h) - f(x) = |x+h| - |x| = \frac{|x+h|^2 - |x|^2}{|x+h| + |x|} = \frac{2\langle x,h \rangle + |h|^2}{|x+h| + |x|} =$$

$$= \{2\langle x,h \rangle + |h|^2\} \left\{ \frac{1}{2|x|} + \left[\frac{1}{|x+h| + |x|} - \frac{1}{2|x|} \right] \right\} =$$

$$= \{2\langle x,h \rangle + |h|^2\} \left\{ \frac{1}{2|x|} + \frac{|x| - |x+h|}{2|x|(|x+h| + |x|)} \right\} =$$

$$= \frac{\langle x,h \rangle}{|x|} + \left\{ \frac{|h|^2}{2|x|} + \frac{\langle x,h \rangle(|x| - |x+h|}{|x|(|x+h| + |x|)} + \frac{|h|^2(|x| - |x+h|)}{2|x|(|x+h| + |x|)} \right\},$$

где слагаемое $\dfrac{\langle h,x \rangle}{|x|}$ линейно зависит от h.

Далее, заметив, что $|\langle h,x \rangle| \leq |h|\,|x|$, получим:

$$\frac{1}{|h|} \left| \frac{|h|^2}{2|x|} + \frac{\langle x,h \rangle(|x| - |x+h|}{|x|(|x+h| + |x|)} + \frac{|h|^2(|x| - |x+h|)}{2|x|(|x+h| + |x|)} \right| \leq$$

$$\leq \frac{|h|}{2|x|} + \frac{||x| - |x+h||}{(|x+h| + |x|)} + \frac{|h|(|x| - |x+h|)}{2|x|(|x+h| + |x|)} \to 0$$

при $h \to 0$. Таким образом, при $x \neq 0$

$$|x+h| - |x| = \frac{1}{|x|}\,\langle h,x \rangle + \omega(x,h)$$

где $\omega(x,h)$ — бесконечно малое по сравнению с $|h|$, т.е. при $x \neq 0$ функция $|x|$ дифференцируема.

Покажем, что при $x = 0$ функция $|x|$ не дифференцируема. Имеем $|0 + h| - |0| = |h|$. Предположим, что существует представление $|h|$ в виде суммы линейного по h функционала и остатка, бесконечно малого по сравнению с $|h|$, т.е.

$$|h| = \langle h, a\rangle + \omega(h)$$

где a — фиксированный вектор из $\mathbb{R}^n$, который, очевидно, не может быть равным нулю.

Пусть h_0 — произвольный ненулевой вектор из $\mathbb{R}^n$ и $h = th_0$. Тогда $|th_0| = \langle th_0, a\rangle + \omega(h)$, откуда

$$h_0| = \operatorname{sign}\langle h_0, a\rangle + \frac{\omega(th_0)}{|t|}. \tag{2}$$

Пусть теперь $t \to 0$, имея знак, обратный знаку $\langle h_0, a\rangle$. Так как $|h| = |t|\,|h_0|$, то

$$\frac{|\omega(th_0)|}{|t|} = \frac{|\omega(th_0)|}{th_0|}\,|h_0| \to 0,$$

и равенство (2) в предела дает $|h| = -|\langle h_0, a\rangle|$. Это невозможно. Таким образом, недифференцируемость $|x|$ в точке $x = 0$ доказана.

3. Пусть $f(x)$ — линейный функционал, определенный на $\mathbb{R}^n$. Тогда

$$f(x+h) - f(x) = f(x) + f(h) - f(x) = f(h)$$

для любых x и $h \in \mathbb{R}^n$. Поэтому $df(x,h) = f(h)$ и $\omega = 0$. Следовательно, $f'(x) = f$ для любого $x \in \mathbb{R}^n$, т.е. производная линейного функционала $f(x)$ есть постоянный функционал, равный $f(x)$ во всех точках $x \in \mathbb{R}^n$ (именно f, а не $f(x)$).

Легко видеть, что если функция f дифференцируема в точке $x \in G$, то она непрерывна в этой точке. В самом деле, так как $f'(x)h \to 0$ при $h \to 0$, в силу линейности функционала $f'(x)$ и $\omega(f,x,h) = o(|h|)$, то

$$f(x+h) - f(x) = f'(x)h + \omega(f,x,h) \to 0 \quad \text{при} \quad h \to 0,$$

что означает непрерывность функции f в точке x. В дальнейшем в этой главе будем предполагать, что множество G открыто, не оговаривая этого каждый раз.

Теорема 1. *Если функции $f_1 : G \to \mathbb{R}$, $f_2 : G \to \mathbb{R}$ дифференцируемы в точке $x \in G$, то $\varphi = f_1 + f_2$ и $\psi = f_1 f_2$ также дифференцируемы в этой точке, причем*

$$\varphi'(x) = f_1'(x) + f_2'(x) \tag{3}$$

и

$$\psi'(x) = f_2(x)f_1'(x) + f_1(x)f_2'(x). \tag{4}$$

Доказательство. Докажем второе утверждение (первое доказывается проще). Имеем:

$$\psi(x+h) - \psi(x) = f_1(x+h)f_2(x+h) - f_1(x)f_2(x) =$$

$$= f_2(x+h)[f_1(x+h) - f_1(x)] + f_1(x)[f_2(x+h) - f_2(x)] =$$
$$= [f_1(x) + \alpha]\,[f_1'(x)h + \omega_1] + f_1(x)[f_2'(x)h + \omega_2].$$

Здесь $\alpha = f_2(x+h) - f_2(x) \to 0$ при $h \to 0$ в силу диффереренцируемости, а значит, и непрерывности f_2. Таким образом,

$$\psi(x+h) - \psi(x) = f_2(x)f_1'(x) + f_1(x)f_2'(x) + \beta,$$

где
$$\beta = \alpha f_1'(x)h + f_2(x)\omega + f_1(x)\omega_2 + \alpha\omega_1.$$

Так как
$$\frac{|\beta|}{|\alpha|} \leq |\alpha|\,\frac{|f_1'(x)h|}{|h|} + |f_2(x)|\,\frac{\omega_1}{|h|} \leq |f_1(x)|\,\frac{|\omega_1|}{|h|} + |\alpha|\,\frac{\omega_1|}{|h|} \to 0$$
при $h \to 0$, то получим, что ψ — дифференцируемая функция и

$$\psi'(x) = f_2(x)f_1'(x) + f_1(x)f_2'(x).$$

Следствие. *Если функция $f: G \to \mathbb{R}$ — дифференцируема в точке $x \in G$ и λ — константа, то λf также дифференцируема в этой точке, причем $(\lambda f)'(x) = \lambda f'(x)$.*

Из доказанной теоремы и следствия вытекает, что множество функций $f: G \to \mathbb{R}$, дифференцируемых в G, образует пространство в линейном пространстве всех скалярных функций, определенных на G.

Теорема 2. *Если функции $f: G \to \mathbb{R}^n$ и $\varphi: G \to \mathbb{R}$ дифференцируемы в точке $x \in G$ и $\varphi(x) \neq 0$, то частное $\dfrac{f}{g}$ также дифференцируемо в этой точке и*

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{\varphi(x)f'(x) - f(x)\varphi'(x)}{[\varphi(x)]^2}. \tag{5}$$

Доказательство. Достаточно показать, что функция $\dfrac{1}{\varphi(x)}$ дифференцируема и что $\left(\dfrac{1}{\varphi(x)}\right)' = -\dfrac{\varphi'(x)}{[\varphi(x)]^2}$, так как формула (5) следует тогда из теоремы о дифференцировании произведения.

Итак

$$\frac{1}{\varphi(x+h)} - \frac{1}{\varphi(x)} = -\frac{\varphi(x+h) - \varphi(x)}{\varphi(x+h)\varphi(x)} = -\frac{\varphi'(x)h + \omega}{\varphi(x+h)\varphi(x)}.$$

Но
$$\frac{1}{\varphi(x+h)\varphi(x)} \to \frac{1}{[\varphi(x)]^2} \quad \text{при} \quad h \to 0$$

и, следовательно, $\dfrac{1}{\varphi(x+h)\varphi(x)} = \dfrac{1}{[\varphi(x)]^2} + \alpha$, где $\alpha \to 0$ при $h \to 0$. Поэтому

$$\frac{1}{\varphi(x+h)} - \frac{1}{\varphi(x)} = -[\varphi'(x)h + \omega]\left\{\frac{1}{[\varphi(x)]^2} + \alpha\right\} =$$

$$= -\left(\frac{\varphi'(x)}{[\varphi(x)]^2}\right)h - \left\{\alpha\varphi'(x)h + \frac{\omega}{[\varphi(x)]^2} + \alpha\omega\right\}. \tag{6}$$

Первое слагаемое в правой части равенства (6) есть линейный по h функционал. Легко видеть, что

$$\frac{1}{h}\left\{\alpha\varphi'(x)h + \frac{\omega}{[\varphi(x)]^2} + \alpha\omega\right\} \to 0$$

при $h \to 0$. Это означает, что функция $\dfrac{1}{\varphi(x)}$ дифференцируема и что

$$\left(\frac{1}{\varphi(x)}\right)' h = -\left(\frac{\varphi'(x)}{[\varphi(x)]^2}\right)h.$$

Мы ввели производную как линейный функционал. Но всякий линейный функционал однозначно определяется вектором. Поэтому говорят о «векторе производной» и даже называют производную вектором. Однако последнее высказывание надо понимать лишь как отражение существования изоморфизма между пространством $\mathbb{R}^n$ и пространством $(\mathbb{R}^n)^*$ всех линейных функционалов, определенных на $\mathbb{R}^n$.

§ 2. Дифференциал и производная по направлению (Гато[31])

Мы определили производную $f'(x)$ скалярной функции $f(x)$ векторного аргумента x через посредство дифференциала этой функции. Возникает вопрос: можно ли определить $f'(x)$ как предел отношения приращения функции к вызвавшему его приращение аргумента, когда последнее стремится к нулю, т.е. так, как определяется производная скалярной функции скалярного аргумента? Прямое перенесение такого определения невозможно потому, что делить на приращение векторного аргумента, также являющегося вектором, нельзя. Но, может быть, годится определение

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{|h|}. \tag{1}$$

Оказывается, что и оно неприемлемо, так как, во-первых, не согласуется с определением производной через посредство дифференциала, и, во-вторых, класс функций, имеющих такую производную, слишком беден.

В самом деле, если функция $f : G \to \mathbb{R}$ дифференцируема в точке $x \in G$ согласно определению 1 из § 1 данной главы, т.е. $f(x+h) - f(x) = f'(x)h + \omega(f, x, h)$, то $f'(x)$ — линейный функционал, определенный на $\mathbb{R}^n$, в то время как $f'(x)$ согласно определению (1), — число. Далее, если взять линейную функцию $\ell :\ \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, заданную равенством $l(x) = x^1 + x^2$ для $x = x^1e_1 + x^2e_2$, то получим

$$\frac{\ell(x+h) - \ell(x)}{|h|} = \frac{h^1 + h^2}{\sqrt{(h^1)^2 + (h^2)^2}}.$$

---

[31] Р. Гато (???–1914) — французский математик.

Положив $h^1 = t$, $h^2 = kt$, найдем

$$\lim_{h\to 0} \frac{\ell(x+h)-\ell(x)}{|h|} = \lim_{t\to 0} \frac{1+k}{\sqrt{1+k^2}} = \frac{1+k}{\sqrt{1+k^2}},$$

так что при разных значениях k получается различное значение предела. Следовательно, линейная функция не имеет производной по определений (1) ни в одной точке.

Все же определение(1) оказывается полезным, если потребовать, чтобы приращение h сохраняло одно и то же направление. Тогда мы придем к понятию производной во направлению.

Пусть $f : G \to \mathbb{R}$, $e = (e^1, e^2, \dots, e^n)$ — фиксированный единичный вектор, определяющий направление и $x \in G$. Тогда при достаточно малых t $x + te \in G$.

Определение 1. Предел $\lim\limits_{t\to 0} \dfrac{f(x+te)-f(x)}{t}$, если он существует, называется *производной по направлению* e или *производной Гато* функции f в точке x и обозначается $f'_e(x)$.

Итак,

$$f'_e(x) = \lim_{t\to 0} \frac{f(x+te)-f(x)}{t}. \tag{2}$$

Производная, определенная в § 1 данной главы, в отличие от только что введенной производной, называется производной Фреше[32]

Если ввести в рассмотрение вещественную функцию вещественной переменной :

$$\varphi(t) = f(x+te),$$

определенную в интервале $(-\delta, \delta)$, где число δ выбрано так, что $x + te \in G$ при $|t| < \delta$, то производная $f'_e(x)$ будет производной в нуле функции

$$f'_e(x) = \varphi'(0)$$

Мы определили производную по направлению, отправляясь от единичного вектора, задающего направление. Чаще производную по направлению определяют равенством

$$f'_h(x) = \lim_{t\to 0} \frac{f(x+th)-f(x)}{t},$$

где h — произвольный фиксированный вектор. В этом случае

$$f'_h(x) = \lim_{t\to 0} \frac{f(x+th)-f(x)}{t} = |h| \lim_{t\to 0} \frac{f(x+t|h|h_1)-f(x)}{t|h|} = |h| f'_{h_1}(x),$$

где h_1 — единичный вектор направления h.

Лемма 1. *Если функция $f(x)$ дифференцируема в точке x, то она дифференцируема в этой точке по любому направлению e и*

$$f'_e(x) = df(x,e) = f'(x)e.$$

---

[32] М. Фреше (1878–1973) — французский математик.

Доказательство. Имеем

$$\lim_{t\to 0}\frac{f(x+te)-f(x)}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{df(x,te)+\omega(f,x,te}{t}=$$

$$=df(x,e)+\lim_{t\to 0}\frac{\omega(f,x,te)}{|te|}\operatorname{sign}t=df(x,e),$$

что требовалось доказать.

Утверждение, обратное лемме 1, неверно, как показывает следующий пример. Рассмотрим в пространстве $\mathbb{R}^2$ функцию

$$f(x)=\begin{cases} x^1+x^2+\dfrac{(x^1)^3x^2}{(x^1)^4+(x^2)^2}, & \text{если} \quad x\neq 0,\\ 0, & \text{если} \quad x=0.\end{cases}$$

Пусть $e=(e^1,e^2)$ — произвольный единичный вектор из $\mathbb{R}^2$. Имеем:

$$\lim_{t\to 0}\frac{f(0+te)-f(0)}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{te^1+te^2+\dfrac{t^4(e^1)^3e^2}{t^2[t^2(e^1)^4+(e^2)^2]}}{t}=e^1+e^2.$$

Следовательно, $f'_e(0,0)$ существует по любому направлению e.

Легко убедиться, что рассматриваемая функция дифференцируема по Фреше во всех точках $x\neq 0$.

Если предположить, что функция f дифференцируема в нуле, то, согласно лемме 1, $d(0,h)=f'_h(0)$ и поэтому $df(0,h)=h^1+h^2$. Тогда величина

$$\omega(f,0,h)=f(h)-f(0)-df(0,h)=h^1+h^2+\frac{(h^1)^3h^2}{(h^1)^4+(h^2)^2}-h^1-h^2=\frac{(h^1)^3h^2}{(h^1)^4+(h^2)^2}$$

должна быть $o(|h|)$. Но если h изменяется таким образом, что все время $h^2=(h^1)^2$, то

$$\lim_{h\to 0}\frac{\omega(f,0,h)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{(h^1)^3h^2}{[(h^1)^4+(h^2)^2]\sqrt{(h^1)^2+(h^2)^2}}=\lim_{h\to 0}\frac{(h^1)^5}{2(h^1)^4\sqrt{(h^1)^2+(h^1)^4}}=\frac{1}{2},$$

и мы пришли к противоречию.

Таким образом, функция

$$f(x)=x^1+x^2+\frac{(x^1)^3x^2}{(x^1)^4+(x^2)^2}$$

в нулевой точке дифференцируема по Гато, но недифференцируема по Фреше. Однако имеет место следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть функция $f:\ G\to\mathbb{R}$ имеет в окрестности точки $x_0\in G$ производную по любому направлению $f'_e(x)$, непрерывную в этой точке. Тогда $df(x_0,h)$ существует и*

$$df(x_0,h)=|h|\,f_{h_1}(x_0)=f'_h(x_0). \tag{3}$$

Для доказательства этого утверждения воспользуемся следующей теоремой.

Теорема 2 (Лагранжа). *Пусть функция* $f: H \to \mathbb{R}$ *имеет в каждой точке* x *открытого множества* H *производную по любому направлению. Тогда для любого* $h \in \mathbb{R}^n$ *и* $\delta > 0$, *такого, что* $[x, x + \alpha h] \subset H$ *при* $|\alpha| < \delta$ *имеем:*

$$f(x + \alpha h) - f(x) = \alpha f'_h(x + \theta h), \tag{4}$$

где $0 < \theta < 1$.

Доказательство. Рассмотрим вещественную функцию

$$\varphi(t) = f(x + th), \qquad |t| < \delta.$$

Функция $\varphi(t)$ дифференцируема внутри $(-\delta, \delta)$ и $\varphi'(t) = f'_h(x + th)$. В самом деле,

$$\frac{\varphi(t + \Delta t) - \varphi(t)}{\Delta t} = \frac{f(x + th + \Delta th) - f(x + th)}{\Delta t} \to f'_h(x + th)$$

при $\Delta t \to 0$, и требуемое доказано. Следовательно, для любого числа α, такого, что $|\alpha| < \delta$, функция $\varphi(t)$ непрерывна и дифференцируема на $[-\alpha, \alpha]$, и к ней применима теорема Лагранжа для вещественной функции вещественного аргумента. Поэтому

$$f(x + \alpha h) - f(x) = \varphi(\alpha) - \varphi(0) = \alpha \varphi'(\theta\alpha) = \alpha f'_h(x + \theta h).$$

Доказательство теоремы 1. Положим

$$Df(x_0, h) = f'_h(x_0). \tag{5}$$

Следовательно,

$$Df(x_0, h) = \lim_{t \to 0} \frac{f(x_0 + th) - f(x_0)}{t} = \frac{1}{t}\left[f(x_0 + th) - f(x_0)\right] + \omega_1, \tag{6}$$

где $\omega_1 \to 0$ при $t \to 0$. Аналогичным образом для $k \in \mathbb{R}^n$

$$Df(x_0, k) = \frac{1}{t}\left[f(x_0 + tk) - f(x_0) + \omega_2\right. \tag{7}$$

и

$$Df(x_0, h + k) = \frac{1}{t}\left[f(x_0 + t(h + k)) - f(x_0)\right] + \omega_3, \tag{8}$$

где $\omega_2, \omega_3 \to 0$ при $t \to 0$. Из равенств (6), (7) и (8) получаем:

$$Df(x_0, h + k) - Df(x_0, h) - Df(x_0, k) =$$

$$= \frac{1}{t}\left\{\left[f(x_0 + th + tk) - f(x_0 + th)\right] - \left[f(x_0 + tk) - f(x_0)\right]\right\}.$$

Применив к разностям $f(x_0 + th + tk) - f(x_0 + th)$ и $f(x_0 + tk) - f(x_0)$ теорему Лагранжа, преобразуем предыдущее равенство к виду

$$\begin{gathered} Df(x_0, h + k) - Df(x_0, h) - Df(x_0, k) = \\ = \left\{f'_h(x_0 + tk + \theta_1 th) - f'_h(x_0 + \theta_2 th)\right\} + \omega_3 - \omega_1 - \omega_2, \end{gathered} \tag{9}$$

где $0 < \theta_1, \theta_2 < 1$. При $t \to 0$ $\theta_1 th$ и $\theta_2 th$ стремятся к нулю, и в силу непрерывности $f'_h(x)$ в точке x_0 выражение, стоящее в фигурных скобках в равенстве (9), тоже стремится к нулю. Таким образом, в пределе при $t \to 0$ из равенства (9) следует:

$$Df(x_0, h+k) - Df(x_0, h) - Df(x_0, k) = 0,$$

и аддитивность $Df(x_0, h)$ по h доказана.

Однородность $Df(x_0, h)$ по второму аргументу легко выводится из представления $Df(x_0, h)$ с помощью равенства (5). В самом деле, при $\alpha \neq 0$

$$Df(x_0, \alpha h) = \lim_{t \to 0} \frac{f(x_0 + t\alpha h) - f(x_0)}{t} = \alpha \lim_{t \to 0} \frac{f(x_0 + t\alpha h) - f(x_0)}{t\alpha} = \alpha Df(x_0, h).$$

При $\alpha = 0$ равенство $Df(x_0, \alpha h) = \alpha Df(x_0, h)$ тривиальна, так как обе части его равны нулю.

Таким образом, мы доказали, что $Df(x_0, h)$ есть линейный по h функционал

$$Df(x_0, h) = \ell_{x_0}(h) = \langle h, u(x_0) \rangle.$$

Остается доказать, что

$$f(x_0 + h) - f(x_0) - Df(x_0, h) = o(|h|). \tag{10}$$

Предположив, что $|h| < \delta$ и применив теорему Лагранжа, получим:

$$f(x_0 + h) - f(x_0) = f'_h(x_0 + \theta h) = \langle h, u(x_0 + \theta h) \rangle, \quad 0, \theta < 1.$$

Поэтому

$$\frac{1}{|h|} \left| f(x_0 + h) - f(x_0) - Df(x_0, h) \right| = \frac{1}{|h|} \left| \langle h, u(x_0 + \theta h) - u(x_0) \rangle \right| \leq |u(x_0 + \theta h) - u(x_0)| \to 0$$

при $h \to 0$ и равенство (10) доказано.

Таким образом, функция $f(x)$ дифференцируема в точке x_0 и

$$df(x_0, h) = Df(x_0, h).$$

Замечание 1. Дифференциал, введенный с помощью формулы (5), называется *дифференциалом по направлению* или *дифференциалам Гато*. Дифференциал $df(x_0, h)$ (см. § 1 данной главы) называется *дифференциалом Фреше.*

Замечание 2. Легко привести примеры функций, имеющих в данной сочке производные по одним направлениям и не имеющим по другим. Такова, например, функция

$$f(x^1, x^2) = \begin{cases} x^1 + x^2 \sin \dfrac{1}{x^2}, & x^2 \neq 0, \\ 0, & x^2 = 0, \end{cases}$$

которая в нуле имеет производную по направлению орта e_1, и не имеет производной по направлений орта e_2.

Замечание 3. Производные функции $f(x)$ в точке x_0 по направлению ортов $e_1, e_2, \dots, e_3$ называются *частными производными* этой функции и обозначаются $f'_{x^1}(x_0), f'_{x^2}(x_0), \dots, f'_{x^n}(x_0)$, или $\left.\dfrac{\partial f}{\partial x^1}\right|_{x_0}, \left.\dfrac{\partial f}{\partial x^2}\right|_{x_0}, \dots, \left.\dfrac{\partial f}{\partial x^n}\right|_{x_0}$, или $D_1f(x_0), D_2f(x_0), \dots, D_nf(x_0)$. Таким образом,

$$f'_{x^i}(x_0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(x_0+te_i)-f(x_0)}{t} =$$

$$= \lim_{\Delta x_i \to 0} \frac{f(x_0^1, \dots, x_0^{i-1}, x_0^i+\Delta x^i, x_0^{i+1}, \dots, x_0^n) - f(x_0^1, \dots, x_0^{i-1}, x_0^i, x_0^{i+1}, \dots, x_0^n)}{\Delta x_i}.$$

Лемма 2. *Если функция $f : G \to \mathbb{R}$ дифференцируема в точке $x_0 \in G$, то все частные производные функции f в этой точке существуют и*

$$df(x_0, h) = \sum_{i=1}^n f'_{x^i}(x_0)h^i. \tag{11}$$

Доказательство. Существование всех частных производных следует из леммы 1; остается доказать равенство (11).

Так как всякий линейный функционал, определенный на $\mathbb{R}^n$, имеет вид $\langle h, u\rangle = \sum\limits_{i=1}^n h^i, u_i$, то

$$f(x_0+h) - f(x_0) = df(x_0,h) + \omega = \sum_{i=1}^n h^i u_i + \omega,$$

где $\omega \to 0$ при $h \to 0$. Пусть $h = (0, \dots, h^{i_0}, \dots, 0)$. Тогда

$$f(x_0+h) - f(x_0) = f(x_0^1, \dots, x_0^{i_0} + h^{i_0}, \dots, x_0^n) - f(x_0^1, \dots, x_0^{i_0}, \dots, x_0^n) = h^{i_0}u_{i_0} + \omega_{i_0},$$

откуда $\frac{f(x_0^1,\dots,x_0^{i_0}+h^{i_0},\dots,x_0^n)-f(x_0^1,\dots,x_0^{i_0},\dots,x_0^n)}{h^{i_0}} = u_{i_0} + \frac{\omega_{i_0}}{h^{i_0}}$. При $h \to 0$, т.е. при $h^{i_0} \to 0$ правая часть этого равенства стремится к u_{i_0}. Это означает, что $f'_{x^{i_0}}(x_0)$ существует и $f'_{x^{i_0}}(x_0) = u_{i_0}$.

Следовательно,

$$f(x_0+h) - f(x_0) = \sum_{i=1}^n f'_{x_i}(x_0)h^i + \omega,$$

и лемма доказана.

Теорема 3. *Если все частные производные функции $f : G \to \mathbb{R}$ существуют в некоторой окрестности точки $x_0 \in G$ и непрерывны в точке x_0, то в этой точке существует производная по любому направлению e, причем*

$$f'_e(x_0) = \lambda^1 D_1 f(x_0) + \lambda^2 D_2 f(x_0) + \ldots + \lambda^n D_n f(x_0), \tag{12}$$

где $\lambda^1, \lambda^2, \dots, \lambda^n$ — координаты единичного вектора e, определяющего направление, т.е. $\lambda^i = \langle e, e_i\rangle$, $i = 1, 2, \dots, n$.

Доказательство. Имеем:

$$\frac{f(x_0+te)-f(x_0)}{t}=\frac{1}{t}\left\{\left[f\left(x_0+\sum_{i=1}^{n}t\lambda^i e_i\right)-f\left(x_0+\sum_{i=2}^{n}t\lambda^i e_i\right)\right]+\right.$$
$$\left.+\left[f\left(x_0+\sum_{i=2}^{n}t\lambda^i e_i\right)-f\left(x_0+\sum_{i=3}^{n}t\lambda^i e_i\right)\right]+\ldots+[f(x_0+t\lambda^n e_n)-f(x_0)]\right\}. \tag{13}$$

По теореме Лагранжа,

$$\frac{1}{t}\left[f\left(x_0+\sum_{i=k}^{n}t\lambda^i e_i\right)-f\left(x_0+\sum_{i=k+1}^{n}t\lambda^i e_i\right)\right]=\lambda^k f'_{x^k}\left(x_0+\sum_{i=k+1}^{n}t\lambda^i e_i+\tau t\lambda^k e_k\right), \tag{14}$$

где $0<\tau<1$. При $t\to 0$ в силу непрерывности частных производных правая часть равенства (14) стремится к $\lambda^k f'_{x^k}(x_0)$. Поэтому в равенстве (13) при $t\to 0$ правая часть стремится к $\sum_{i=1}^{n}\lambda^i f'_{x^i}(x_0)$. Но это означает, что $f'_e(x_0)$ существует и

$$f'_e(x_0)=\sum_{i=1}^{n}\lambda^i f'_{x^i}(x_0). \tag{15}$$

Если $n=3$, то λ^i представляет собой направляющие косинусы вектора e. По аналогии с трехмерным случаем числа λ^i также называются *направляющими косинусами* вектора e и обозначаются $\lambda^i=\cos(e,x^i)$ $i=1,2,\ldots,n$. В этих обозначениях формула (15) принимает следующий вид

$$f'_e(x_0)=\sum_{i=1}^{n}f'_{x^i}(x_0)\cos(e,x^i).$$

Из теорем 1 и 3 следует теорема 4.

Теорема 4. *Если функция $f:\ G\to\mathbb{R}$ имеет в окрестности точки $x_0\in G$ все частные производные, непрерывные в этой точке, то она дифференцируема в точке x_0.*

Пусть функция f дифференцируема в точке x_0 или выполнены условия теоремы 3. Тогда, как мы видели,

$$df(x_0,h)=\sum_{i=1}^{n}f'_{x^i}(x_0)h^i. \tag{16}$$

Часто вместо h пишут $dx=(dx^1,dx^2,\ldots,dx^n)$. G учетом этого формула (16) принимает вид

$$df(x_0,dx)=\sum_{i=1}^{n}f'_{x^i}(x_0)\,dx^i=\sum_{i=1}^{n}\left.\frac{\partial f}{\partial x^i}\right|_{x_0}dx^i. \tag{17}$$

Это наиболее часто встречающаяся запись дифференциала функции. Отдельные слагаемые, стоящие в сумме (17), называются *частными дифференциалами* функции f и обозначаются $d_i f(x_0)$.

Определение частной производной

$$f'_{x^i}(x_0) = \lim_{\Delta x^i \to 0} \frac{f(x_0^1, \ldots, x_0^i + \Delta x^i, \ldots, x_0^n) - f(x_0^1, \ldots, x_0^i, \ldots, x_0^n)}{\Delta x^i}$$

показывает, что для ее нахождения по направлению орта e^i, или, как обычно говорят, по переменной x^i, надо все координаты точки, кроме i-й, рассматривать как постоянные и брать производную f по переменной x^i как от функции одной скалярной переменной. Таким образом, нахождение частных производных производится по обычный правилам дифференцирования скалярных функций скалярного аргумента, а нахождение производных по любому направлению — с помощью формулы (12).

Частные производные $f'_{x^i}(x_0)$ отображения $f:\ G \to \mathbb{R}$ можно рассматривать как координаты некоторого n-мерного вектора. Этот вектор называется *градиентом отображения* и обозначается $\operatorname{grad} f$. Так как при изменении точки x на множестве G вектор $\operatorname{grad} f$ также изменяется, то градиент скалярной функции векторного аргумента, дифференцируемой в области G, есть векторная функция векторного аргумента:

$$\operatorname{grad} f :\ G \to \mathbb{R}^n.$$

Пользуясь понятием градиента, равенство (16), дающее выражение для дифференциала отображения f, можно записать в следующей форме

$$df(x, h) = \langle h, \operatorname{grad} f \rangle. \tag{18}$$

§ 3. Теоремы о дифференцировании сложных функций

Теоремы о дифференцировании сложных функций, или композиции отображений занимают центральное место в дифференциальном исчислении. Докажем одну из таких теорем.

Теорема 1. *Пусть отображение $f:\ G \to \mathbb{R}$, где $G \subset \mathbb{R}^n$ и открыто, дифференцируемо в точке $x_0 \in G$. Предположим, далее, что даны отображения $\varphi^i :$ $H \to \mathbb{R}$, $i = 1, 2, \ldots, n$, где $H \subset \mathbb{R}^m$ и открыто, такие, что $(\varphi^1(t), \varphi^2(t), \ldots, \varphi^n(t)) \in$ G для всех $t \in H$. Допускам, кроме того, что $\varphi^i(t_0) = x_0^i$, $i = 1, 2, \ldots, n$, $t_0 \in H$ и функции $\varphi^i(t)$ дифференцируемы в точке t_0. Тогда сложное отображение $g(t) =$ $f[\varphi^1(t), \varphi^2(t), \ldots, \varphi^n(t)]$ дифференцируемо в точке t_0 и*

$$dg(t_0, k) = \sum_{j=1}^{m} \left\{ \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x^i}\bigg|_{x_0} D_j \varphi^i(t_0) \right\} k^j. \tag{1}$$

Доказательство. Имеем:

$$g(t_0 + k) - g(t_0) = f[\varphi^1(t_0 + k), \ldots, \varphi^n(t_0 + k)] - f[\varphi^1(t_0), \ldots, \varphi^n(t_0)] =$$

$$= f(x_0^1 + h^1, \ldots, x_0^n + h^n) - f(x_0^1, \ldots, x_0^n),$$

где $h^i = \varphi^i(t_0+k) - \varphi^i(t_0)$. В силу дифференцируемости f в точке x_0

$$f(x_0^1+h^1,\dots,x_0^n+h^n) - f(x_0^1,\dots,x_0^n) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x^i}\bigg|_{x_0} h^i + \omega,$$

где $\dfrac{\omega}{|h|} \to 0$ при $h \to 0$. Далее, для всех $i = 1, 2, \dots, n$

$$h^i = \sum_{j=1}^{m} D_j\varphi^i(t_0)k^j + \eta^i,$$

где $\dfrac{\eta^i}{|k|} \to 0$ при $k \to 0$, так как функции $\varphi^i(t)$, $i = 1, 2, \dots, n$ дифференцируемы в точке t_0. Поэтому

$$g(t_0+k) - g(t_0) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x^i}\bigg|_{x_0} \left\{ \sum_{j=1}^{m} D_j\varphi^i(t_0) + \eta^i \right\} + \omega,$$

откуда

$$\left| g(t_0+k) - g(t_0) - \sum_{j=1}^{m} \left\{ \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x^i}\bigg|_{x_0} D_j\varphi^i(t_0) \right\} k^j \right| \leq \sum_{i=1}^{n} \left| \frac{\partial f}{\partial x^i}\bigg|_{x_0} \right| |\eta^i| + |\omega|.$$

Покажем, что

$$\sum_{i=1}^{n} \left| \frac{\partial f}{\partial x^i}\bigg|_{x_0} \right| \frac{|\eta^i|}{|k|} + \frac{|\omega|}{|k|} \to 0 \tag{2}$$

при $k \to 0$.

В силу дифференцируемости φ^i имеем $\dfrac{|\eta^i|}{|k|}$ при $k \to 0$, $i = 1, 2, \dots, n$, поэтому сумма, стоящая в левой части формулы (2), стремится к нулю. Остается доказать, что $\dfrac{|\omega|}{|k|} \to 0$.

При $h = 0$ также $\omega = 0$. Поэтому можем записать

$$\frac{|\omega|}{|k|} = \frac{|\omega|}{|h|}\frac{|h|}{|k|}.$$

В этом равенстве считаем обе части равными нулю при $h = 0$. Первый множитель в правой части при $k \to 0$ стремится к нулю, так как в силу непрерывности функций φ^i, $i = 1, 2, \dots, n$, при $k \to 0$ все h^i, а следовательно, и h стремятся к нулю. Поэтому достаточно доказать, что отношение $\dfrac{|h|}{|k|}$ ограничено при $k \to 0$.

Имеем:

$$\frac{|h|}{|k|} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \frac{(h^i)^2}{|k|^2}} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \left\{ \sum_{j=1}^{m} D_j\varphi^i \frac{k^i}{|k|} + \frac{\eta^i}{|k|} \right\}^2}.$$

Так как $\dfrac{|k^j|}{|k|} \leq 1$ и $\dfrac{\eta^i}{|k|} \to 0$ при $k \to 0$ и, следовательно, ограничено, то все отношение $\dfrac{|h|}{|k|}$ также ограничено, что требовалось доказать.

Следствие. *При выполнении условий теоремы* 1 *для частных производных функций* $g(t)$ *получаем формулы*

$$D_k g(t) = \sum_{i=1}^{n} f'_{x^i}[\varphi^1(t), \ldots, \varphi^n(t)] D_k \varphi^i(t), \qquad k = 1, 2, \ldots, n. \tag{3}$$

Теорема 1 является частным случаем более общей теоремы о дифференцируемости композиции отображений: $g: \ H \to \mathbb{R}^n$, $H \subset \mathbb{R}^m$ и открыто, и $f: \ G \to \mathbb{R}^p$, $G \subset \mathbb{R}^n$, и открыто, $H \cap f^{-1}(G) \neq \emptyset$. Такую теорему мы докажем в гл. XII, получим из нее как следствие теорему 1.

С формулой (3) связано свойство дифференциала, называемое *инвариантностью его формы.* Пользуясь формулой (2), запишем следующую цепочку равенств:

$$dg(t, dt) = \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial g}{\partial t^k} \, dt^k = \sum_{k=1}^{m} \left\{ \sum_{i=1}^{n} f'_{x^i} \frac{\partial \varphi^i}{\partial t^k} \right\} dt^k = \sum_{i=1}^{n} f'_{x^i} \left\{ \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial \varphi^i}{\partial t^k} \right\} = \sum_{i=1}^{n} f'_{x^i} \, dx^i,$$

ибо

$$\sum_{k=1}^{m} \frac{\partial \varphi^i}{\partial t^k} \, dt^k = d\varphi^i(t, dt) = dx^i.$$

С другой стороны, $g(t) = f(x)$, где

$$x = (x^1, \ldots, x^n) = (\varphi^1(t), \ldots, \varphi^n t)), \qquad dg(t, dt) = df(x, dx), \tag{4}$$

и тогда из равенства (4) следует:

$$df(x, dx) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x^i} \, dx^i. \tag{5}$$

Формула (5) показывает, что хотя x не является независимым переменным вектором и есть функция другого вектора, $df(x, dx)$ имеет такой же вид, как если бы вектор x был независимым. Это и есть инвариантность формы дифференциала скалярной функции $f(x)$ векторного аргумента.

§ 4. Производные и дифференциалы высших порядков. Формула Тейлора

Пусть функция $f: \ G \to \mathbb{R}$ дифференцируема на G. Дифференциал $df(x, h)$ этой функция является скалярной функцией двух независимых аргументов $x \in G$ и $h \in \mathbb{R}^n$. Предположим, что $df(x, h)$ как функция от x при любом фиксированном

h, в свою очередь, дифференцируема в точке $x_0 \in G$. Тогда $d[df(x, h), k]$, $k \in \mathbb{R}^n$, есть билинейная форма, определенная на $\mathbb{R}^{2n}$.[33]

Определение. Квадратичная форма $d[df(x, h)h]$, соответствующая билинейной форме $d[df(x, h)k]$, называется *вторым дифференциалом* или *дифференциалом второго порядка* функции f в точке x_0 и обозначается $d^2f(x_0, h)$, а билинейное отображение, значением которого в точке (h, h) является второй дифференциал, называется *второй производной* функции f в точке x_0 и обозначается $f''(x_0)$.

Таким образом, $d[df(x_0, h)k] = f''(x_0)(h, k)$, и, следовательно, $d^2f(x_0, h) = f''(x_0)(h, h)$. Обычно вместо $f''(x_0)(h, h)$ пишут $f''(x_0)h^2$, подчеркивая этим квадратичный характер зависимости второго дифференциала от h.

Следует помнить, что $f''(x_0)h^2$ есть условная запись квадратичной формы и никоим образом не значение некоторого оператора $f''(x_0)$ на «квадрате вектора» h, так как в данном случае «квадрат вектора» не имеет смысла.

Итак,

$$d^2f(x_0, h) = f''(x_0)h^2.$$

Предположим, что второй дифференциал $d^2f(x_0, h)$ существует во всех точках множества G. Если этот дифференциал как функция от x оказывается снова дифференцируемым в точке $x_0 \in G$, то дифференциал от второго дифференциала называется *третьим дифференциалом* или *дифференциалом третьего порядка* функции f и обозначается $d^3f(x_0, h)$. Следовательно, третий дифференциал $d^3f(x_0, h)$ есть однородная форма третьей степени, получающая из трилинейной формы $d\{d[f(x_0, h)k]m\}$, $h, k, m \in \mathbb{R}^n$ при $h = k = m$. Трилинейная форма называется *производной третьего порядка* функции f в точке x_0 и обозначается $f'''(x_0)$. Таким образом,

$$d^3f(x_0, h) = f'''(x_0)h^3,$$

причем $f'''(x_0)h^3$ надо рассматривать снова как условную запись, «куб вектора» не имеет смысла.

Продолжая так далее, мы можем по индукции определить дифференциалы и производные любого конечного порядка p скалярной функции векторного аргумента.

Вернемся к дифференциалу второго порядка. Этот дифференциал есть квадратичная форма от h и поэтому имеет вид

$$d^2f(x, h) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}h^ih^j. \tag{1}$$

Найдем выражение для $a_{ij}(x)$. В равенстве

$$df(x, h) = \sum_{i=1}^{n} f'_{x^i}(x)h^i$$

---

[33] Строгое доказательство линейности $d[df(x, h)k]$ по h будет дано для общего случая векторных функций векторного аргумента в гл. XII.

положим $h_0 = (0, \dots, 1, \dots, 0)$. Тогда

$$df(x_0, h) = f'_{x^k}(x).$$

Так как $df(x_0, h)$ как функция от x дифференцируема в точке x_0, то, по лемме 2, $f'_{x^k}(x)$ имеет в точке x_0 все частные производные $\dfrac{\partial}{\partial x^j}(f'_{x^k}(x))$. Частные производные от частных производных называются частными производными второго порядка и обозначаются $f''_{x^k x^j}(x)$ или $\dfrac{\partial f}{\partial x^k \partial x^j}$ (здесь производная от f берется сначала по x^k, а затем по x^j). Теперь, положив $df(x, h) = \varphi_h(x)$, найдем:

$$d^2 f(x_0, h) = d\varphi_h(x_0, h) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \varphi_h}{\partial x^j} h^j = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x^j} \left[\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x^k} h^k \right] h^j =$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x^j} \left(\frac{\partial f}{\partial x^k} \right) h^k h^j = \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x^k \partial x^j} h^k h^j,$$

т.е.

$$a_{ij}(x) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j}.$$

Таким образам,

$$d^2 f(x, h) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j} h^i h^j,$$

или, если обозначить h через dx,

$$d^2 f(x, dx) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j} dx^i dx^j. \tag{4}$$

Примеры.

1. Пусть

$$f(x^1, x^2) = \frac{x^1 x^2}{x^1 + x^2}, \qquad x^1 > 0,\ x^2 > 0.$$

Имеем

$$df(x, dx) = \frac{(x^2)^2\, dx^1 + (x_1)^2\, dx^2}{(x^1 + x^2)^2},$$

$$d^2 f(x, dx) = \frac{2}{(x^1 + x^2)^3}\ [(x^2)^2\, (dx^1)^2 + 2x^1 x^2\, dx^1 dx^2 + (x^1)^2\, (dx^2)^2].$$

Из этого примера видно, что вычисление дифференциалов функций не представляет труда.

Дифференциалы p-го порядка, как легко видеть, выражаются формулой

$$d^p f(x, h) = \sum_{i_1, i_2, \dots, i_p = 1}^{n} \frac{\partial^p f}{\partial x^{i_1} \partial x^{i_2} \dots \partial x^{i_p}} h^{i_1} h^{i_2} \dots h^{i_p}$$

или формулой

$$d^p f(x,dx) = \sum_{i_1,i_2,\ldots,i_p=1}^{n} \frac{\partial^p f}{\partial x^{i_1}\partial x^{i_2}\ldots\partial x^{i_p}} dx^{i_1}dx^{i_2}\ldots dx^{i_p}, \tag{5}$$

коэффициентами которой являются частные производные p-го порядка функции f, которые определяются по индукции как частные производные от частных производных $(p-1)$-го порядка.

Важнейшее свойство этих частных производных — их симметричность:

$$\frac{\partial^p f}{\partial x^{i_1}\partial x^{i_2}\ldots\partial x^{i_p}} = \frac{\partial^p f}{\partial x^{\sigma(i_1)}\partial x^{\sigma(i_2)}\ldots\partial x^{\sigma(i_p)}},$$

где $(\sigma(i_1),\sigma(i_2),\ldots,\sigma(i_p))$ — любая перестановка индексов $i_1,i_2,\ldots,i_p$. Это свойство выражают иначе так: *частные производный p-го порядка p раз дифференцируемой функции не зависят от порядка, в которой выполняется частное дифференцирование.* Симметричность коэффициентов полилинейной формы (5) будет доказано далее для дифференциалов векторных функций векторных аргументов, частным случаем которых являются скалярные функции векторного аргумента.

На дифференциалы высшего порядка легко распространяется теорема о дифференцируемости сложной функции.

Теорема. *Пусть отображение $f: G \to \mathbb{R}$, $G \subset \mathbb{R}^n$ и открыто, p раз дифференцируемо в G. Предположи, что даны отображения $\varphi^i: H \to \mathbb{R}$,$i = 1,2,\ldots,n$, где $H \subset \mathbb{R}^n$ и открыто, а также что:*

1) $(\varphi^1(t),\varphi^2(t),\ldots,\varphi^n(t)) \in G$, когда t пробегает H;

2) функции $\varphi^i(t)$, $i = 1,2,\ldots,n$, p раз дифферещируемы в области H.

Тогда сложное отображение

$$g(t) = f[\varphi^1(t),\varphi^2(t),\ldots,\varphi^n(t)]$$

p раз дифференцируемо в H.

Данная теорема являемся частным случаем более общей теоремы о дифференцируемости композиций отображений многомерных евклидовых пространств. Она будет доказана в гл. XII.

Покажем, что второй дифференциал, а значит и все последующие не обладают свойством инвариантности.

Пусть снова $y = f(x)$, $x \in G \subset \mathbb{R}^n$ и $x^i = \varphi^i(t)$, $t \in H \subset \mathbb{R}^m$ следовательно, $f(x) = f[\varphi^1(t),\varphi^2(t),\ldots,\varphi^n(t)]$, где все функции, по крайней мере дважды дифференцируемы в области их определения. Используя формулу (1) из § 3 данной главы, получим:

$$dg(t,h) = \sum_{r=1}^{m} \frac{\partial g}{\partial t^r} h^r = \sum_{r=1}^{m} \left\{ \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x^i}\frac{\partial \varphi^i}{\partial t^r} \right\} h^r.$$

Отсюда

$$d^2 g(t,h) = \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial}{\partial x^j} \left\{ \sum_{r=1}^{m} \left[\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x^i}\frac{\partial \varphi^i}{\partial t^r} \right] h^r \right\} h^j =$$

$$= \sum_{j=1}^{m}\sum_{r=1}^{m} h^r h^j \left\{ \sum_{i=1}^{n} \left[\sum_{s=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^s} \frac{\partial \varphi^i}{\partial t^r} \frac{\partial \varphi^s}{\partial t^j} + \frac{\partial f}{\partial x^i} \frac{\partial^2 \varphi^i}{\partial t^r \partial t^j} \right] \right\} =$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\sum_{s=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^s} \left(\sum_{r=1}^{m} \frac{\partial \varphi^i}{\partial t^r} h^r \right) \left(\sum_{j=1}^{m} \frac{\partial \varphi^s}{\partial t^j} h^j \right) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x^i} \sum_{r=1}^{m}\sum_{j=1}^{m} \frac{\partial^2 \varphi^i}{\partial t^r \partial t^j} h^r h^j.$$

Но

$$\sum_{i=1}^{m} \frac{\partial \varphi^i}{\partial t^r} = d\varphi^i(t,h) = dx^i,$$

$$\sum_{i=1}^{m} \frac{\partial \varphi^s}{\partial t^j} = d\varphi^s(t,h) = dx^s,$$

$$\sum_{r=1}^{m}\sum_{j=1}^{m} \frac{\partial^2 \varphi^i}{\partial t^r \partial t^j} = d^2\varphi^i(t,h) = d^2x^i,$$

поэтому

$$d^2 g(t,h) = d^2 f(x,dx) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{s=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^s} dx^i dx^s + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x^i} d^2 x^i. \qquad (6)$$

Это равенство отличается от равенства (3) слагаемым $\sum\limits_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x^i} d^2 x^i$, стоящим в правой части, т.е. форма второго дифференциала не сохраняется, если $x^1, x^2, \ldots, x^n$ не являются независимыми переменными. Заметим, однако, что равенства (3) и (6) совпадают, если x^i, $i = 1, 2, \ldots, n$ — линейные функции от $t^1, t^2, \ldots, t^m$, так как тогда $d^2 x^i = 0$ для $i = 1, 2, \ldots, n$.

Выведем теперь формулу Тейлора для вещественных функций векторного аргумента.

Пусть функция $f:\ G \to \mathbb{R}$ имеет в G дифференциалы до $(k+1)$-го порядка включительно. Тогда для $x \in G$ и достаточно малых h получим:

$$f(x+h) - f(x) = df(x,h) + \frac{1}{2!} d^2 f(x,h) + \ldots + \frac{1}{k!} d^k f(x,h) + \omega_k,$$

где

$$\omega_k = \frac{1}{(k+1)!} d^{k+1} f(x + \theta h, h), \qquad 0 < \theta < 1.$$

Для доказательства этого равенства рассмотрим скалярную функцию скалярного аргумента

$$\varphi(t) = f(x + th), \qquad 0 \le t \le 1.$$

Так как множество G открыто, то вместе с x в G входит шар $K(x,r)$, и если $|h| < r$, то все точки отрезка $[x, x+h]$ принадлежат G. Тогда функция $\varphi(t)$ дифференцируема в $[0,1]$ до $(k+1)$-го порядка, причем

$$\varphi^i(t) = d^i f(x + th, h).$$

Но для функции $\varphi(t)$ имеет место равенство

$$\varphi(1) - \varphi(0) = \varphi'(0) + \frac{1}{2!}\varphi''(0) + \ldots + \frac{1}{k!}\varphi^{(k)}(0) + R_k, \tag{7}$$

где

$$R_k = \frac{1}{(k+1)!}\varphi^{(k+1)}(\theta), \qquad 0 < \theta < 1.$$

Так как $\varphi(1) = f(x+h)$, $\varphi(0) = f(x)$ и $\varphi^{(i)}(0) = d^i f(x,h)$, то равенство (7) принимает вид

$$f(x+h) - f(x) = df(x,h) + \frac{1}{2!}d^2 f(x,h) + \ldots + \frac{1}{k!}d^k f(x,h) + \frac{1}{(k+1)!}d^{k+1} f(x+\theta h, h),$$

и формула Тейлора доказана.

§ 5. Экстремумы числовых функций векторного аргумента

Рассмотрим скалярную функцию $f(x)$, определенную на множестве M n-мерного евклидова пространства $\mathbb{R}^n$. Точка $a \in M$ называется *точкой локального максимума* функции f, если найдется окрестность $K(a.r)$ этой точки, такая, что $f(a) \geq f(x)$ для любой точки $x \in K(x,a) \cap M$.

Аналогичным образом определяется *точка локального минимума.*

Точки локального максимума и локального минимума функции f называются вместе *точками локального экстремума этой функции.*

Необходимое условие экстремума. *Если отображение $f : G \to \mathbb{R}$, дифференцируемое на G имеет в точке $a \in G$ локальный экстремум, то $df(a,h)$.*

Возьмем произвольно вектор $h \neq 0$. Тогда при любых достаточно малых числах $t \neq 0$ точка $a + th$ принадлежит $K(a,r) \subset G$ и так как функция f дифференцируема в G, то

$$f * a + th) - f(a) = tf'(a)h + \omega(f, a, th).$$

Разделим это равенство на t:

$$\frac{f(a+th) - f(a)}{t} = f'(a)h + \frac{\omega(f,a,th)}{t}. \tag{1}$$

Пусть, например, a — точка локального минимума функций f. Если $t > 0$, то левая часть равенства (1) неотрицательна, и, перейдя в ней к пределу при $t \to 0$, получим: $f'(a)h \geq 0$. Если взять $t < 0$, $t \to 0$, то путем аналогичных рассуждений найдем, что $f'(a)h \leq 0$. Следовательно, для любого элемента $h \in \mathbb{R}^n$

$$df(a,h) = f'(a)h = 0,$$

что требовалось доказать.

Так как $f'(a)h = \sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{\partial f}{\partial x^i} h^i$, то условие $f'(a)h = 0$ имеет вид

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x^i} h^i = 0.$$

При этом, в силу произвольности вектора h это равенство возможно лишь, если

$$\frac{\partial f}{\partial x^i} = 0, \qquad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Таким образом, мы получаем систему n уравнений, для определения n координат точки $a = (a^1, a^2, \ldots, a^n)$, в которой функция f имеет экстремум.

Точки, в которых дифференциал функции равен нулю, называются *стационарными точками* этой функции. Итак, *если дифференцируемая функция f имеет в некоторой внутренней точке a ее области определения локальный экстремум, то a — стационарная точка функции f.*

Обратное утверждение неверно, т.е. не всякая стационарная точка является точкой локального экстремума. Например, для функции $f(x^1, x^2) = (x^1)^2 - (x^2)^2$ точка $(0, 0)$ стационарная, но легко убедиться, что экстремума в этой точке нет. Графиком этой функции является гиперболический параболоид и $(0, 0)$ — *седловая точка* параболоида (рис. 50).

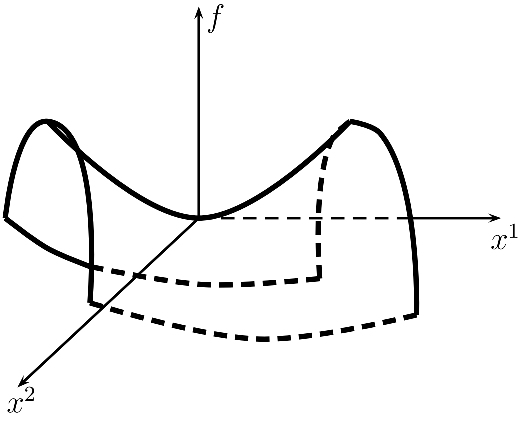

Рис. 50

В некоторых случаях вопрос о том, является ли стационарная точка точкой экстремума, позволяет решить следующая теорема.

ТЕОРЕМА 1 (ДОСТАТОЧНОЕ УСЛОВИЕ ЭКСТРЕМУМА). *Пусть для дважды непрерывно дифференцируемой в открытом множестве G функции $f(x)$ точка a есть стационарная точка.*

Если $d^2 f(a, h)$ — положительно определенная квадратичная форма, то a — точка локального минимума, если $d^2 f(a, h)$ — отрицательно определенная форма, то a — точка локального максимума. Если $d^2 f(a, h)$ — неопределенная невырожденная форма, то экстремума нет. В том случае, когда $d^2 f(a, h)$ — вырожденная форма, ничего определенного утверждать нельзя.

Доказательство. Так как функция $f(x)$ дважды непрерывно дифференцируема в G, то для точки $a \in G$ можно записать формулу Тейлора в следующем виде:

$$f(a+h) - f(a) = df(a,h) + \frac{1}{2}\, d^f(a+\theta h, h).$$

По предположению, a — стационарная точка отображения f, следовательно, $df(a,h) = 0$, и тогда

$$f(a+h) - f(a) = \frac{1}{2}\, d^2 f(a+\theta h, h) = \frac{1}{2}\, d^2 f(a,h) + \frac{1}{2}\{d^2 f(a+\theta h, h) - d^2 f(a,h)\}. \quad (2)$$

Дифференциал $d^2 f(a,h)$ есть квадратичная относительно h форма, и поэтому

$$d^2 f(a,h) = |h|^2 d^2 f\left(a, \frac{h}{|h|}\right).$$

Тогда равенство (2) примет вид

$$f(a+h) - f(a) = \frac{|h|^2|}{2}\left\{d^2 f(a, \frac{h}{|h|}\right) + \left[d^2 f\left(a + \theta\frac{h}{|h|}\right) - d^2 f\left(a, \frac{h}{|h|}\right)\right]\right\}.$$

Предположим, что $d^2 f(a,h)$ — положительна определенная форма и, следовательно, больше нуля при любой элементе $h \neq 0$. Точка $\xi = \dfrac{h}{|h|}$ при любом $h \neq 0$ лежит на единичной сфере $S(0,1)$, форма $d^2 f(a,\xi)$ непрерывна на сфере $S(0,1)$ и, следовательно, принимает на ней наименьшее значение. Поскольку форма $d^2 f(a,\xi)$ всюду на $S(0,1)$ положительна, $\alpha = \inf\limits_{S(0,1)} d^2 f(a,\xi) > 0$.

Далее, разность $d^2 f(a+\theta h, \xi) - d^2 f(a,\xi)$ непрерывна. Следовательно, она равномерно непрерывна по совокупности h и ξ на всяком ограниченном замкнутом подмножестве из области определения этой разности в пространстве $\mathbb{R}^{2n}$, в частности, на декартовом произведении $\overline{K}(a,r) \times S(0,1)$ при достаточно матом значении r. Поэтому найдется такое $\delta > 0$, что при $|h| < \delta$ неравенство

$$|d^2 f(a+\theta h, \xi) - d^2 f(a,\xi)| < \frac{\alpha}{2}$$

выполняется равномерно по ξ. Но тогда при любых h, таких, что $|h| < \delta$

$$f(a+h) - f(h) > \frac{|h|^2}{2} \cdot \frac{\alpha}{2} > 0,$$

т.е. $a \in G$ есть точка локального минимума функции f.

Если форма $d^2 f(a,h)$ — отрицательно определенная, то $\beta = \sup\limits_{S(0,1)} d^2 f(a,\xi) < 0$, и с помощью рассуждений, аналогичных предыдущим, получим, что для всех достаточно малых h

$$f(a+h) - f(a) < \frac{|h|^2}{2} \cdot \frac{\beta}{2} < 0,$$

т.е. в точке a функция имеет локальный минимум.

Пусть теперь форма неопределенная. Тогда на сфера $S(0,1)$ найдутся точки ξ_1 и ξ_2, такие, что $d^2f(a,\xi_1) = \gamma_1 < 0$ и $d^2f(a,\xi_2) = \gamma_2 > 0$. Если положить $h_1 = t\xi_1$, то будем иметь:

$$f(a + t\xi_1) - f(a) = \frac{t^2}{2}\{d^2f(\xi_1) + [d^2f(a + \theta t\xi_1, \xi_1) - d^2f(a,\xi_1)]\}.$$

И снова в силу непрерывности $d^2f(a,\xi_1)$ — найдется число $\delta_1 > 0$, такое, что

$$|d^2f(a + \theta t\xi_1, \xi_1) - d^2f(a,\xi_1)| < \frac{|\xi_1|}{2}$$

при $0 < t < \delta_1$. Следовательно,

$$f(a + t\xi_1) - f(a) < \frac{t^2}{2} \cdot \frac{\gamma_1}{2} < 0.$$

Аналогичным образом убеждаемся, что

$$f(a + t\xi_2) - f(a) < \frac{t^2}{2} \cdot \frac{\gamma_2}{2} > 0$$

при $0 < t < \delta_2$.

Таким образом, в любой окрестности точки a найдутся точки $x = a + h_1$, в которых $f(x) < f(a)$, и точки $x = a + h_2$, в которых $f(x) > f(a)$. Поэтому в точке a экстремума нет.

Предлагаем читателю придумать примеры, показывающие, что в случае вырождения формы $d^2f(a,h)$ в точке a возможно как существование, так и несуществование экстремума.

При исследований конкретных функций судить о характере квадратичной формы $d^2f(a,h)$ можно, например, с помощью правила Сильвестра. Пусть

$$a_{ij} = \left.\frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j}\right|_{x=a}.$$

Теорема 2 (Сильвестра). *Для того, чтобы квадратичная форма*

$$d^2f(a,h) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}h^ih^j$$

была положительно определенной, необходимо и достаточно, чтобы

$$a_{11} > 0, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} > 0, \quad \dots, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \hdotsfor{3} \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} > 0.$$

Форма $d^2f(a,h)$ — отрицательно определенная тогда и только тогда, когда

$$a_{11} < 0, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} > 0, \quad \dots, \quad \operatorname{sign} \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \hdotsfor{3} \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \operatorname{sign}(-1)^n.$$

Признаком вырождения формы является равенство нулю детерминанта

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \multicolumn{3}{c}{\dotfill} \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = 0.$$

Примеры. Ограничимся случаен функций двух переменных, которые в целях сокращения записей будем обозначать через x и y.

1. Пусть $f(x, y) = x^4 + y^4 + 2x^2y^2 - 8x + 8y$. Эта функция непрерывна и имеет непрерывные производные второго порядка на всем пространстве $\mathbb{R}^2$. Для нахождения стационарных точек решим систему уравнений

$$f'_x(x, y) = 4x^3 + 4xy^2 - 8 = 0,$$

$$f'_y(x, y) = 4y^3 + 4x^2y + 8 = 0.$$

Решение $x = 1$, $y = -1$ очевидно. Исследуем стационарную точку $x_0 = (1, -1)$ на экстремум. Имеем: $a_{11} = f''_{xx}(1, -1) = 10$, $a_{12} = a_{21} = f''_{xy}(1, -1) = 8$, $a_{22} = f''_{yy}(1, -1) = 16$. Так как

$$a_{11} > 0, \qquad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} > 0,$$

в точке x_0 рассматриваемая функция имеет локальный минимум.

2. Пусть $f(x, y) = y^4 - 6xy^2 + 8x^2$. Уравнения для определения стационарных точек имеют вид

$$-6y^2 + 16x = 0, \qquad 4y^3 - 12xy = 0.$$

Снова решение $x = y = 0$ очевидно. Имеем $a_{11}f''_{xx}(0, 0) = 16$, $a_{12} = a_{21} = 0$, $a_{22} = 0$. Следовательно, $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = 0$, так что квадратичная форма $d^2f(0, h)$ — вырожденная, и теорема 2 ответа на вопрос о существовании экстремума в точке $(0, 0)$ не дает. Можно показать, что экстремума в точке $(0, 0)$ нет. В самом деле, пусть $y^2 = \lambda x$, тогда $f(x, y) = x^2(\lambda^2 - 6\lambda + 8) = x^2(\lambda - 2)(\lambda - 4)$. Таким образом, $f(x, y) > 0$ при $\lambda < 2$ или $\lambda > 4$ и $f(x, y) < 0$ при $\lambda \in (2, 4)$. Поэтому вдоль параболы $y^2 = x$ рассматриваемая функция всюду больше нуля, а вдоль параболы $y^2 = 3x$ всюду меньше нуля, в то время как $f(0, 0) = 0$, т.е. в точке $x_0 = (0, 0)$ экстремума нет.

§ 6. Неявные функции

Предположим, что на некотором множестве A пространства $\mathbb{R}^{n+1}$ задана функция $F(x^1, x^2, \dots, x^n, y) = 0$. Пусть для некоторой точки $a = (a^1, a^2, \dots, a^n)$ n-мерного пространства $\mathbb{R}^n$ уравнение

$$F(a^1, a^2, \dots, a^n, y) = 0$$

имеет единственное решение: $y = b$. Будет ли уравнение

$$F(x^1, x^2, \dots, x^n, y) = 0 \tag{1}$$

иметь единственное решение для значений $x = (x^1, x^2, \ldots, x^n)$, близких к $a = (a^1, a^2, \ldots, a^n)$, т.е. существует ли в достаточно малой n-мерной окрестности точки a скалярная функция $y = f(x^1, x^2, \ldots, x^n)$, удовлетворяющая в этой окрестности тождеству

$$F(x^1, x^2, \ldots, x^n, f(x^1, x^2, \ldots, x^n)) = 0?$$

Если такая функция существует, она называется неявной функцией, определяемой данным уравнением.

Следующая теорема является одним из ответов на этот вопрос.

Теорема (о существовании неявкой функций или теорема Юнга). *Пусть в выпуклой открытой области G $(n+1)$-мерного пространства $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ задана числовая функция $F(x^1, x^2, \ldots, x^n, y)$, непрерывно дифференцируемая в этой области. Предположим, что:*

1) $F(a^1, a^2, \ldots, a^n, b) = 0$, $(a^1, a^2, \ldots, a^n, b) \in G$,

2) *Функция $F'_y(x^1, x^2, \ldots, x^n, y)$ не обращаемся в нуль в области G.*

Тогда в некоторой окрестности $H \subset \mathbb{R}^n$ точки $a = (a^1, a^2, \ldots, a^n)$ существует функция $y = f(x^1, x^2, \ldots, x^n)$, непрерывно дифференцируемая в H, которая принимает в точке a значение b и удовлетворяет равенству

$$F(x^1, x^2, \ldots, x^n, f(x^1, x^2, \ldots, x^n)) = 0 \tag{2}$$

тождественно в H.

Доказательство. Рассмотрим функцию

$$\varphi(y) = F(a^1, a^2, \ldots, a^n, y).$$

Легко видеть, что эта функция дифференцируема в некоторой окрестности $(b-\eta, b+\eta)$ точки b, такой, что $(a^1, a^2, \ldots, a^n, y) \in G$ для всех $y \in (b-\eta, b+\eta)$, и $\varphi'(y) = F'_y(a^1, a^2, \ldots, a^n, y)$. По предположению, функция $F'_y(x^1, x^2, \ldots, x^n, y)$ непрерывна в области G и не обращается в нуль в этой области. Поэтому $F'_y(x^1, x^2, \ldots, x^n, y)$ сохраняет знак в G. Например, положительна и, следовательно, $\varphi'(y) > 0$ в окрестности $(b-\eta, b+\eta)$ точки b.

По теореме 2 из § 1 гл. VI, функция $\varphi(y)$ возрастает в интервале $(b-\eta, b+\eta)$, и так как $\varphi(b) = 0$, то $\varphi(b-\eta) < 0$, т.е.

$$F(a^1, a^2, \ldots, a^n, b-\eta) < 0.$$

Кроме того,

$$F(a^1, a^2, \ldots, a^n, b-\eta) > 0.$$

В силу непрерывности функции F найдется открытая окрестность U_1 точки $(a^1, a^2, \ldots, a^n, b-\eta)$ и открытая окрестность U_2 точки $F(a^1, a^2, \ldots, a^n, b+\eta)$, такие, что $F(x, y) < 0$ в U_1 и $F(x, y) > 0$ в U_2. Пусть H — область, лежащая вместе с замыканием в пересечении проекций окрестностей U_1 и U_2 на пространство $\mathbb{R}^n$ координат $x^1, x^2, \ldots, x^n$ (рис. 51).

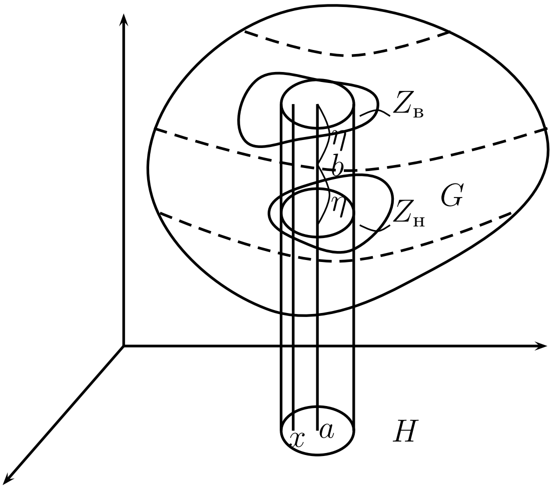

Рис. 51

Так как G — выпуклое множество, то «цилиндр» $Z = \overline{H} = [b-\eta, b+\eta]$ не выходит за пределы множества G, причем $F(x,y) < 0$ на «нижнем основании» Zн $= \{(x, b-\eta) : \ x \in \overline{H}\}$ и $F(x,y) > 0$ на «верхнем основании2 Zв $= \{(x, b+\eta) : x \in \overline{H}\}$ цилиндра.

Кроме того, $F'_y(x,y) > 0$ всюду в Z.

Пусть $x_0 = (x_0^1, x_0^2, \ldots, x_0^n) \in H$. Рассмотрим функцию $\varphi_0(y) = F(x_0^1, x_0^2, \ldots, x_0^n, y)$. Это непрерывно дифференцируемая функция с положительной на $[b-\eta, b+\eta]$ производной, причем $\varphi_0(b-\eta) < 0$, $\varphi_0(b+\eta) > 0$, и так как $\varphi_0'(y) > 0$, то функция $\varphi_0(y)$ возрастает, поэтому на интервале $(b-\eta, b+\eta)$ найдется точка y_0, такая, что $\varphi_0(y_0) = 0$, т.е.

$$F(x_0^1, x_0^2, \ldots, x_0^n, y_0) = 0.$$

Итак, любой точке $x_0 \in H$ мы поставили в соответствие единственное число y_0, т.е. построили на H функцию $y = f(x) = f(x^1, x^2, \ldots, x^n)$, причем из построения следует, что $F(x, f(x)) = 0$ в H и $f(a) = b$. остается доказать, что f — непрерывно дифференцируемая функция.

Покажем, что функция $f : \ H \to \mathbb{R}$ непрерывна на H. Пусть $x = a$. Если в предыдущем построении функции f число η заменить любым меньшим числом $\varepsilon > 0$ и взять соответствующее множество H_ε, то для $x \in H_\varepsilon$ получим $f(a) - \varepsilon < f(x) < f(a) + \varepsilon$, т.е.

$$|f(x) - f(a)| < \varepsilon,$$

что означает непрерывность f в точке a. Если x_0 — произвольная точка множества H, то, приняв ее вместо a за исходную точку и рассуждая как выше, убедимся в непрерывности функции f в этой точке.

Сложнее доказывается дифференцируемость $f(x)$. Пусть x — произвольная точка множества H. При достаточно малом значении $\Delta x = (\Delta x^1, \ldots, \Delta x^n)$ точка $x + \Delta x$ также принадлежит H, и если $y = f(x)$, $y + \Delta y = f(x + \Delta x)$, то

$$F(x,y) = 0, \qquad F(x + \Delta x, y + \Delta y) = 0.$$

Отсюда

$$\Delta F = F(x + \Delta x, y + \Delta y) - F(x,y) = 0$$

и в силу дифференцируемости F

$$\sum_{i=1}^{n} F'_{x^i}(x,y)\Delta x^i + F'_y(x,y)\Delta y + \omega = 0, \tag{3}$$

где ω — б. м. высшего порядка малости по сравнению с $\rho = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(\Delta x^i)^2 + \Delta y^2}$ и, следовательно, $= \alpha\rho$, где $\alpha \to 0$ при $\rho \to 0$. Из равенства (3) находим:

$$\Delta y = -\sum_{i=1}^{n} \frac{F'_{x^i}(x,y)}{F'_y(x,y)}\Delta x - \frac{\alpha}{F'_y(x,y)\,\rho.} \tag{4}$$

Так как производная $F'_y(x,y)$ всюду в Z больше нуля и непрерывна, то $\frac{1}{F'_y(x,y)}$ ограничена в Z, и поэтому $\frac{\alpha}{F'_y(x,y)} \to 0$ при $\rho \to 0$. Из (4) следует, что

$$|\Delta y| \leq \sum_{i=1}^{n}\left|\frac{F'_{x^i}(x,y)}{F'_y(x,y)}\right||\Delta x^i| + \left|\frac{\alpha}{F'_y(x,y)}\right|\rho,$$

и так как

$$\rho = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(\Delta x^i)^2 + (\Delta y)^2} \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(\Delta x^i)^2} + \sqrt{(\Delta y)^2} = |\Delta x| + |\Delta y|,$$

то

$$|\Delta y| \leq \sum_{i=1}^{n}\left|\frac{F'_{x^i}(x,y)}{F'_y(x,y)}\right||\Delta x^i| + \left|\frac{\alpha}{F'_y(x,y)}\right|(|\Delta x| + |\Delta y|).$$

При $\Delta x \to 0$ также $\Delta y \to 0$, т.е. $\rho \to 0$, и потому при достаточно малых значениях Δx имеем $\left|\frac{\alpha}{F'_y(x,y)}\right| <$
$frac12$. Но тогда

$$|\Delta y| \leq \sum_{i=1}^{n}\left|\frac{F'_{x^i}(x,y)}{F'_y(x,y)}\right||\Delta x^i| + \frac{1}{2}\,(|\Delta x| + |\Delta y|),$$

откуда

$$\frac{1}{2}\,|\Delta y| \leq \sum_{i=1}^{n}\left|\frac{F'_{x^i}(x,y)}{F'_y(x,y)}\right||\Delta x^i| + \frac{1}{2}\,|\Delta x|.$$

Следовательно,

$$\frac{|\Delta y|}{|\Delta x|} \leq 2\sum_{i=1}^{n}\left|\frac{F'_{x^i}(x,y)}{F'_y(x,y)}\right|\Bigg|\frac{|\Delta x^i}{|\Delta x|} + 1 \leq 2\sum_{i=1}^{n}\left|\frac{F'_{x^i}(x,y)}{F'_y(x,y)}\right| + 1 \leq K,$$

т.е. при достаточно малых значениях Δx отношение $\frac{|\Delta y|}{|\Delta x|}$ ограничено.

Положим $\Omega = -\dfrac{\alpha}{F'_y(x,y)}\rho$. Тогда

$$\frac{\Omega}{|\Delta x|} = -\frac{\alpha}{F'_y(x,y)}\,\frac{\rho}{\Delta x} = -\frac{\alpha}{F'_y(x,y)}\sqrt{1+\left(\frac{|\Delta y|}{|\Delta x|}\right)^2}.$$

Поскольку второй множитель в правой части равенства ограничен, а $\dfrac{\alpha}{F'_y(x,y)} \to 0$ при $\Delta x \to 0$, то $\dfrac{\Omega}{|\Delta x|} \to 0$ при $\Delta x \to 0$. Но тогда в равенстве (4) первое слагаемое линейно зависит от Δx, а второе есть б.м. высшего по сравнению с Δx порядка при $\Delta x \to 0$. Это означает, что функция $f(x)$ дифференцируема и

$$df(x,\Delta x) = -\sum_{i=1}^{n}\frac{F'_{x^i}(x,y)}{F'_y(x,y)}\,\Delta x^i. \tag{5}$$

Линейный функционал

$$f'(x) = \left\{-\frac{F'_{x^1}(x,f(x))}{F'_y(x,f(x))},\ldots,-\frac{F'_{x^n}(x,f(x))}{F'_y(x,f(x))}\right\}$$

имеет непрерывные в H компоненты, т.е. производная $f'(x)$ непрерывна в H. Теорема доказана.

Из равенства (5) получаются выражения для частных производных функции ?:

$$\frac{\partial f}{\partial x^i} = -\frac{F'_{x^i}(x,y)}{F'_y(x,y)}, \qquad i = 1,2,\ldots,n. \tag{6}$$

Если отображение F имеет частные производные до порядка $k > 1$, то продифференцировав равенства (6) по x^j, согласно правилу дифференцирования сложной функции (считая y функцией от $x^1, x^2, \ldots, x^n$), найдем:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j} = -\frac{\left[F''_{x^ix^j} + F''_{x^iy}\dfrac{\partial f}{\partial x^j}\right]F'_y - F'_{x^i}\left[F''_{yx^i} + F''_{yy}\dfrac{\partial f}{\partial x^j}\right]}{[F'_y]^3} =$$

$$= -\frac{\left[F''_{x^ix^j} + F''_{x^iy}\left(-\dfrac{\partial F'_{x^j}}{\partial F'_y}\right)\right]F'_y - F'_{x^i}\left[F''_{yx^i} + F''_{yy}\left(-\dfrac{\partial F'_{x^j}}{\partial F'_y}\right)\right]}{[F'_y]^3} =$$

$$= \frac{[F''_{x^iy}F'_{x^j} + F''_{x^jy}F'_{x^i}]F'_y - F''_{x^ix^j}(F'_y)^2 - F''_{yy}F'_{x^i}F'_{x_j}}{[F'_y]^3}.$$

Продолжая так далее, можно найти частные производные функции f до порядка n.

Если все частные производные k-го порядка функции f будут непрерывны, то эта функция будет k раз дифференцируема, и нетрудно написать формулу для ее k-го дифференциала.

В.И. СОБОЛЕВ, В.В. ПОКОРНЫЙ, В.И. АНОСОВ

КРАТКИЙ КУРС МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

Часть вторая

Допущено Министерством высшего
и среднего специального образования РСФСР
в качестве учебного пособия для студентов
математических специальностей университетов

ВОРОНЕЖ
ИЗДАТЕЛЬСТВО ВОРОНЕЖСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
1984

УДК 551.873

Краткий курс математического анализа. Соболев В.И., Покорный В.В., Аносов В.И. Учебное пособие. Воронеж: Изд-во ВГУ, 1983, ч. 2. 348 с.

Во второй части учебного пособия по математическому анализу для студентов математических специальностей университетов, написанного в соответствии с действующей учебной программой по этой дисциплине, содержатся теории числовых и функциональных рядов, включая ряды Фурье, несобственных интегралов и интегралов, зависящих от параметра. В нее включены также основы многомерного дифференциального и интегрального исчисления, в том числе интегрирование дифференциальных форм.

Ил. 29.

Печатается по постановлению Редакционно-издательского совета Воронежского университета

Рецензенты:

кафедра математического анализа Ярославского университета,
д-р физ.-мат. наук, проф. В.М. Тихомиров

ИБ №766

Владимир Иванович Соболев
Виталий Владимирович Покорный
Виктор Иванович Аносов

КРАТКИЙ КУРС МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

Часть вторая

Учебное пособие

Редактор Т.Н. Баскакова. Корректоры В.М. Невежина, М.Г. Щигрева

Подп. в печ. 25.07.84. ЛЕ ОГ569. Форм. бум. 60 x 84/16, Бумага типографская №2, Ротапринт. Усл. п. л. 20,2. Усл.кр.-отт. 20,4. Уч.-изд.л. 18. Тираж 1500. Заказ 1540 Цена 80 коп.

Издательство Воронежского университета. Воронеж. ул. Ф. Энгельса, 8

Типография издательства ВГУ. Воронеж, ул. Пушкинская. 3

С $\frac{170205000-057}{174(03)-84}$ 28-84

ОГЛАВЛЕНИЕ

Глава XII

ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ ВЕКТОРНЫХ ФУНКЦИЙ ВЕКТОРНОГО АРГУМЕНТА

При решении сложных математических задач возникает необходимость установления функциональных зависимостей между многими скалярными переменными или, короче, изучения векторных функций векторного аргумента. Так, например, при решении экономических задач приходится находить экстремальные значений многих выражений, каждое из которых зависит от большого числа переменных, при определении волнового сопротивления движущегося корабля вычисляют интегралы от функций более чем трех переменных. Поэтому дифференциальное и интегральное исчисление функций многих переменных имеет на только большой теоретический интерес, но и важное практическое значение.

§ 1. Функции из $\mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}^m$. Пределы таких функций, их непрерывность

Рассмотрим функции, определенные на множествах $A \subset \mathbb{R}^n$ со значениями в пространстве $\mathbb{R}^m$. Множество A может, быть как правильной частью пространства $\mathbb{R}^n$, так и совпадать с ним.

Отображения $f:\ A \to \mathbb{R}^m$, $A \subset \mathbb{R}^n$, будем называть *векторными функциями векторного аргумента.*

Пусть дано отображение $f:\ A \to \mathbb{R}^m$, $A \subset \mathbb{R}^n$. Так как $x = (x^1, x^2, \ldots, x^n)$ и $f(x) = y = (y^1, y^2, \ldots, y^m)$, то

$$f(x) = (f^1(x), f^2(x), \ldots, f^m(x)),$$

где функции $f^i(x) = y^i$, $i = 1, 2, \ldots, m$, из A в $\mathbb{R}$ называются *координатными функциями* отображения f. Если $e'_1 = (1, 0, 0, \ldots, 0), e'_2 = (0, 1, 0, \ldots, 0), \ldots, e'_m = (0, 0, 0, \ldots, 1)$ — стандартный базис в $\mathbb{R}^m$, то

$$f(x) = \sum_{i=1}^{m} f^i(x) e'_i,$$

где $f^i(x) = f^i(x^1, x^2, \ldots, x^n)$, $i = 1, 2, \ldots, m$. Таким образом, векторная функция векторного аргумента, действующая из $A \subset \mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}^m$ порождает систему m скалярных функций n скалярных аргументов. Верно и обратное, т.е. что m скалярных функций n скалярных аргументов, заданных на некотором множестве $A \subset \mathbb{R}^n$, можно заменить одной векторной функцией векторного аргумента, определенной на A со значениями в $\mathbb{R}^m$.

Примеры.

1. Пусть $f(x) = x \sin\langle a, x\rangle$, $x, a \in \mathbb{R}^3$, a — фиксировано. Тогда $f:\ \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, и координатными функциями будут:

$$f^1(x^1, x^2, x^3) = x^1 \sin(a^1x^1 + a^2x^2 + a^3x^3),$$

$$f^2(x^1, x^2, x^3) = x^2 \sin(a^1x^1 + a^2x^2 + a^3x^3),$$

$$f^3(x^1, x^2, x^3) = x^3 \sin(a^1x^1 + a^2x^2 + a^3x^3).$$

2. Пусть

$$f^1(x^1, x^2, \ldots, x^n) = \sum_{i=1}^{n} x^i,$$

$$f^2(x^1, x^2, \ldots, x^n) = \sum_{i_1, i_2 = 1}^{n} x^{i_1}x^{i_2},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$f^m(x^1, x^2, \ldots, x^n) = \sum_{i_1, i_2 \ldots, i_m = 1}^{n} x^{i_1}x^{i_2}\cdots x^{i_m},$$

где $m \leq n$ и точка $x = (x^1, x^2, \ldots, x^n) \in A \subset \mathbb{R}^n$. Рассматривая $f^1(x^1, x^2, \ldots, x^n)$, $\ldots, f^m(x^1, x^2, \ldots, x^n)$ как координатные функции, получим отображение $f:\ A \to \mathbb{R}^m$.

Тождественное отображение $f(x) = x$, $x \in \mathbb{R}^n$, будем обозначать в дальнейшем I. Координатные функции этого отображения обозначаются $\pi^i(x)$, $\pi^i(x) = x^i$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Это проекции вектора $x \in \mathbb{R}^n$ на координатные векторы $e_1, e_2, \ldots, e_n$.

Пусть даны отображения $f:\ A \to \mathbb{R}^m$, $A \subset \mathbb{R}^n$ и $g:\ B \to \mathbb{R}^p$, $B \subset \mathbb{R}^m$. На пересечении $A \cap f^{-1}(B)$, где $f^{-1}(B) = \{x \in A |\ f(x) \in B\}$, если оно не пусто, можно определить отображение h этого пересечения в $\mathbb{R}^p$ по формуле

$$h(x) = g[f(x)], \qquad x \in A \cap f^{-1}(B).$$

Это отображение, как и в случае скалярных функций скалярного аргумента, называется композицией отображений f и g и обозначается $g \circ f$.

По аналогии с пределами вещественных функций вещественного переменного введем понятие предела отображения $f:\ A \to \mathbb{R}^m$, $A \subset \mathbb{R}^n$. Пусть a — предельная точка множества A. Вектор $b \in \mathbb{R}^m$ называемся *пределом отображения* при $x \to a$ и обозначаемся $f(x) \to b$ или $\lim\limits_{x \to a} f(x)$, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta > 0$, такое, что $|f(x) - b| < \varepsilon$ при $x \in A \setminus a$, $|x - a| < \delta$.

Эквивалентное определение $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$, если для любой последовательности $\{x_n\} \subset A \setminus a$ и сходящейся к a последовательность $\{f(x_n)\}$ сходится к b.

Эквивалентность обоих определений доказывается так же, как и для скалярных функций скалярного аргумента.

Нетрудно видеть, что теорема о пределе суммы двух функций, доказанная ранее для скалярных функций одного или нескольких скалярных аргументов, верна и для векторных функций векторного аргумента.

Мы определили так называемый «предел по совокупности переменных». Возможно и другое определение предела, если переходить к пределу последовательно по каждой координате точки x или по группе координат. Пусть, например $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{n_1} \times \mathbb{R}^{n_2}$, $n_1 + n_2 = n$, так что $x_k = (x_k^1, \dots, x_k^{n_1}, x_k^{n_1+1}, \dots, x_k^n) = (\overline{x}_k, \overline{\overline{x}}_k)$, где $\overline{x}_k = (x_k^1, \dots, x_k^{n_1})$, $\overline{\overline{x}}_k = (x_k^{n_1+1}, \dots, x_k^n)$. Ясно, что $x_k \to a$ тогда и только тогда, когда

$$\overline{x}_k \to \overline{a} = (a^1, \dots, a^{k_1}), \qquad \overline{\overline{x}}_k \to \overline{\overline{a}} = (a^{k_1+1}, \dots, a^n), \qquad a = (\overline{a}, \overline{\overline{a}}).$$

Определение 1. Вектор $b \in \mathbb{R}^m$ называется *пределом отображения* $f : A \to \mathbb{R}^m$, $A \subset \mathbb{R}^n$, *при* $\overline{x} \to \overline{a}$ *и затем при* $\overline{\overline{x}} \to \overline{\overline{a}}$, где a — предельная точка A, если

$$\lim_{\overline{\overline{x}} \to \overline{\overline{a}}} \left\{ \lim_{\overline{x} \to \overline{a}} f(\overline{x}, \overline{\overline{x}}) \right\} = b.$$

Другая последовательность перехода к пределу может привести в общем случае к другому результату. Пусть, например,

$$f(\overline{x}, \overline{\overline{x}}) = \frac{\left\{ \sum\limits_{i=1}^{n_1} x^i - \sum\limits_{i=n_1+1}^{n} x^i \right\} e_1' + \left\{ \left(\sum\limits_{i=1}^{n_1} x^i \right)^2 + \left(\sum\limits_{i=n_1+1}^{n} x^i \right)^2 \right\}}{\sum\limits_{i=1}^{n} x^i}$$

— отображение множества $A = \{(x^1, x^2, \dots, x^n) |\ x^i > 0,\ i = 1, 2, \dots, n\}$ в пространство $\mathbb{R}^2$ со стандартным баэисом e_1' и e_2'. Тогда

$$\lim_{\overline{x} \to \overline{a}} \left\{ \lim_{\overline{\overline{x}} \to \overline{\overline{a}}} f(\overline{x}, \overline{\overline{x}}) \right\} = \lim_{\overline{x} \to \overline{a}} \left\{ e_1' + \left(\sum_{i=1}^{n_1} x^i \right) e_2' \right\} = e_1',$$

в то время как

$$\lim_{\overline{\overline{x}} \to \overline{\overline{a}}} \left\{ \lim_{\overline{x} \to \overline{a}} f(\overline{x}, \overline{\overline{x}}) \right\} = \lim_{\overline{\overline{x}} \to \overline{\overline{a}}} \left\{ -e_1' + \left(\sum_{i=n_1+1}^{n} x^i \right) e_2' \right\} = -e_1'.$$

Однако имеет место следующая теорема.

Теорема 1. *Если существует предел* $b = \lim\limits_{x \to a} f(x)$ *и существует для всех* $\overline{x}$, *достаточно близких к* $\overline{a}$, *предел* $\lim\limits_{\overline{\overline{x}} \to \overline{\overline{a}}} f(\overline{x}, \overline{\overline{x}})$, *то существует повторный предел*

$$\lim_{\overline{x} \to \overline{a}} \overline{b}(\overline{x}) = \lim_{\overline{x} \to \overline{a}} \left\{ \lim_{\overline{\overline{x}} \to \overline{\overline{a}}} f(\overline{x}, \overline{\overline{x}}) \right\}$$

и этот предел равен b.

Доказательство. По условию, предел b функции $f(\overline{x},\overline{\overline{x}})$ по совокупности переменных существует. Поэтому для любого числа $\varepsilon > 0$ найдется число $\delta > 0$, такое, что

$$|f(\overline{x},\overline{\overline{x}}) - b| < \varepsilon \quad \text{если} \quad |(\overline{x},\overline{\overline{x}}) - (\overline{a},\overline{\overline{a}})| < \delta. \tag{1}$$

Число δ можно считать настолько малым, что при $|(\overline{x},\overline{\overline{x}}) - (\overline{a},\overline{\overline{a}})| < \delta$ и, следовательно, при $|\overline{x} - \overline{a}| < \delta$ предел $\overline{b}(x)$ также существует. Но тогда, производя в неравенстве (1) переход к пределу при $\overline{\overline{x}} \to \overline{\overline{a}}$, получим;

$$|\overline{b}(\overline{x}) - b| \le \varepsilon, \quad \text{если} \quad |\overline{x} - \overline{a}| < \delta,$$

а это и означает, что $\lim\limits_{\overline{x}\to\overline{a}} \overline{b}(\overline{x})$ существует и равен b.

Из теоремы 1 следует, что если существуют не только оба повторных предела, но и предел по совокупности переменных, то все три предела равны.

Переходим к определению непрерывности векторной функции векторного аргумента.

Определение 2. Отображение $f:\ A \to \mathbb{R}^m$, $A \subset \mathbb{R}^n$, называется *непрерывным в точке* $x_0 \in A$, если для любого числа $\varepsilon > 0$ найдется число $\delta > 0$, такое, что $|f(x) - f(x_0)| < \delta$ всякий раз, когда $x \in A$ и $|x - x_0| < \delta$.

Это определение, как и определение непрерывности вещественной функции вещественного аргумента, является, частным случаем общего определения непрерывности отображения множеств метрических пространств.

Из сопоставления определений предела отображения при $x \to x_0$ и непрерывности отображений в точке x_0 (если, конечно, x_0 есть предельная точка множества A) следует, что непрерывность $f(x)$ в точке x_0 означает, что $f(x) \to f(x_0)$ при $x \to x_0$. Отсюда вытекает эквивалентность приведенного выше определения непрерывности следующему определению.

Определение 3. Отображение $f:\ A \to \mathbb{R}^m$, $A \subset \mathbb{R}^n$, *непрерывно в точке* x_0, если для любой последовательности $x_k \in A \setminus x_0$ и сходящейся к x_0 имеем $f(x_k) \to f(x_0)$.

Отображение, непрерывное в каждой точке $x \in A$, называется *непрерывным на множестве* A.

Легко убедиться, что отображение f непрерывно в точке x_0 тогда и только тогда, когда в этой точке непрерывны вое координатные функций этого отображения.

В самом деле, пусть функция f непрерывна в точке x_0. Так как

$$|f^i(x) - f^i(x_0)| \le |f(x) - f(x_0)|, \qquad i = 1, 2, \ldots,$$

непрерывность f^i в точке x_0 очевидна. Пусть, обратно, все функции f^i непрерывны в точке x_0. Так как

$$|f(x) - f(x_0)| = \left(\sum_{i=1}^{m} [f^i(x) - f^i(x_0)]^2\right)^{\frac{1}{2}},$$

то, выбрав для заданного $\varepsilon > 0$ число $\delta > 0$ так, чтобы $|f^i(x) - f^i(x_0)| < \dfrac{\varepsilon}{\sqrt{m}}$ при $|x - x_0| < \delta$ сразу для всех $i = 1, 2, \ldots, n$, подучим

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon \quad \text{при} \quad |x - x_0| < \delta,$$

что означает непрерывность f в точке x_0.

Отметим, в частности, что проекции $\pi^i(x)$, $i = 1, 2, \ldots, m$, непрерывны на всем пространстве $\mathbb{R}^n$.

Приведем теперь несколько теорем, доказательства которых не отличаются от доказательства соответствующих теорем для скалярных функций скалярного аргумента (см. § 4 гл. X).

1°. *Если отображение $f: A \to \mathbb{R}^m$, $A \subset \mathbb{R}^n$, непрерывно в точке $x_0 \in A$, то для любой окрестности $V_{f(x)}$ точки $f(x)$ найдется окрестность U_x точки x, такая, что*

$$f(U_x \cap A) \subset V_{f(x)}.$$

2°. *Если отображение $f: A \to \mathbb{R}^m$, $A \subset \mathbb{R}^n$, непрерывно в точке $x_0 \in A$, то f ограничено в некоторой окрестности точки x_0, т.е. найдется такая окрестность U_{x_0} этой точки, что $f(U_{x_0} \cap A)$ есть ограниченное множество пространства $\mathbb{R}^m$.*

3°. *Если $f: A \to \mathbb{R}^m$, $g: B \to \mathbb{R}^m$, $A, B \subset \mathbb{R}^n$, $A \cap B \neq \emptyset$ и функции f и g непрерывны в точке $x \in A \cap B$, то $f + g$ и λf, $\lambda \in \mathbb{R}$, также непрерывны в точки x.*

4°. *Если $f: A \to \mathbb{R}^m$, $A \subset \mathbb{R}^n$, непрерывно в точка $x \in A$ (на A), $f(A) \cap B \neq \emptyset$, $g: B \to \mathbb{R}^p$, $B \subset \mathbb{R}^m$, и функция g непрерывна в точке $y = f(x)$ (на B), то композиция $h = g \circ f$ этих отображений непрерывна в точке x (на $A \cap f^{-1}(B)$).*

5°. *Если функция $f: A \to \mathbb{R}^m$, $A \subset \mathbb{R}^n$, непрерывна на A и $C \subset A$ — компактное, т.е. замкнутое и ограниченное, множество, то $f(C)$ — компактное множество пространства $\mathbb{R}^m$.*

6°. *Если отображение $f(x)$ непрерывно на $A \subset \mathbb{R}^n$ и A — связное множество, то $f(A) \subset \mathbb{R}^m$ также связное множество.*

7°. *Функция $f(x)$, определенная и непрерывная на компактном множестве $A \subset \mathbb{R}^n$, равномерно непрерывна на этом множестве, т.е. для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta > 0$, такое, что $|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$ всякий раз, когда $|x' - x''| < \delta$ независимо от положения точек x' и x'' на множестве A.*

Читателю рекомендуется доказать эти утверждения.

Лемма 1. *Если функция $f: A \to \mathbb{R}^m$, $A \subset \mathbb{R}^n$, непрерывна на A, то для любого открытого множества $H \subset \mathbb{R}^m$, найдется открытое множество $G \subset \mathbb{R}^n$, такое, что $f^{-1}(H) = G \cap A$.*

Говорят в этой случае, что $f^{-1}(H)$ открыто в A (см. § 2 гл. X).

Доказательство. Если $f^{-1}(H) = \emptyset$, лемма тривиальна. Предположим поэтому, что множество $f^{-1}(H)$ не пусто, x — произвольная точка $f^{-1}(H)$ и $f(x) = y$.

Так как отображение f непрерывно в точке x, то для окрестности H точки y найдется окрестность U_x точки x, такая, что $f(U_x \cap A) \subset H$, т.е. $U_x \cap A \subset f^{-1}(H)$. Но тогда

$$\bigcup_{x \in f^{-1}(H)} (U_x \cap A) = A \cap \left[\bigcup_{x \in f^{-1}(H)} U_x \right] \subset f^{-1}(H). \tag{2}$$

С другой стороны, очевидно, что если $x \in f^{-1}(H)$, то $x \in A \cap U_x$, и, следовательно,

$$f^{-1}(H) = \bigcup_{x \in f^{-1}(H)} (A \cap U_x) = A \cap \left(\bigcup_{x \in f^{-1}(H)} U_x \right). \tag{3}$$

Положив $G = \bigcup\limits_{x \in f^{-1}(H)} U_x$ и заметив, что множество G открыто, из (2) и (8) получаем утверждение леммы.

Замечания. 1. Если множество $A \subset \mathbb{R}^n$ открыто, то $f^{-1}(H) = A \cap G$ также открытое множество пространства $\mathbb{R}^n$.

2. Верно и обратное утверждение: если прообраз любого открытого множества из $\mathbb{R}^m$ открыт в A, то отображение $f : A \to \mathbb{R}^m$ непрерывно на A. Мы не будем останавливаться на доказательстве этого утверждения.

До сих пор мы говорила о непрерывности отображений по совокупности координат. Если рассматривать $\mathbb{R}^n$ как декартово произведение двух или большего числа пространств меньшей размерности, например, положить $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{n_1} \times \mathbb{R}^{n_2}$, $n = n_1 + n_2$, $x = (\overline{x}, \overline{\overline{x}})$, $f(x) = f(\overline{x}, \overline{\overline{x}})$, то можно говорить о непрерывности отображения, зависящего от двух аргументов по каждому аргументу в отдельности. Так, отображение $f(\overline{x}, \overline{\overline{x}})$, $\overline{x} \in \mathbb{R}^{n_1}$, $\overline{\overline{x}} \in \mathbb{R}^{n_2}$, $(\overline{x}, \overline{\overline{x}}) \in A \subset \mathbb{R}^n$ непрерывно по $\overline{x}$ в точке $(\overline{x}_0, \overline{\overline{x}}_0) \in A$, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta > 0$, такое, что $(\overline{x}, \overline{\overline{x}}_0) \in A$, $|\overline{x} - \overline{x}_0| < \delta$ влечет в а собой

$$|f(\overline{x}, \overline{\overline{x}}_0) - f(\overline{x}_0, \overline{\overline{x}}_0)| < \varepsilon.$$

Ясно, что отображение, непрерывное по совокупности аргументов в некоторой точке, непрерывно по каждому аргументу в отдельности. Обратное утверждение в общем случае неверно, как показывает следующий пример скалярной функций двух скалярных переменных

$$\varphi(x^1, x^2) = \begin{cases} \dfrac{(x^1 + x^2)^2}{(x^1)^2 + (x^2)^2}, & (x^1)^2 + (x^2)^2 > 0, \\ 1, & x^1 = x^2 = 0, \end{cases}$$

непрерывной в нуле по каждой переменной в отдельности, но не непрерывной по совокупности аргументов.

Пусть $f : A \to \mathbb{R}^m$, $A \subset \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{n_1} \times \mathbb{R}^{n_2}$ — отображение, непрерывное по первой переменной в отдельности на множестве A. Это означает, что для любого числа $\varepsilon > 0$ и любой точки $(\overline{x}, \overline{\overline{x}}) \in A$ найдется число $\delta > 0$, такое, что $|f(\overline{x}', \overline{\overline{x}}) - f(\overline{x}, \overline{\overline{x}}) < \varepsilon$ всякий раз, когда $|\overline{x}' - \overline{x}| < \delta$, $(\overline{x}', \overline{\overline{x}}), (\overline{x}, \overline{\overline{x}}) \in A$. Если при этом δ можно выбрать не эависящим от $\overline{\overline{x}}$ (и, следовательно, зависящим лишь от

$\overline{x}$ и ε), то говорят, что функция $f(\overline{x}, \overline{\overline{x}})$ *непрерывна по* $\overline{x}$ *на множестве* A *равномерно относительно* $\overline{\overline{x}}$. Ясно, что если функция f равномерно непрерывна по совокупности переменных на множестве A, то она непрерывна на этом множестве по каждому аргументу равномерно относительно второго аргумента. Обратное утверждение неверно. Например, это следует из того, что $\dfrac{x^1x^2}{(x^1)^2+(x^2)^2} \to 0$ при $x^1 \neq 0$, $x^2 \to 0$, неравномерно относительно x^1.

Важным примером непрерывных отображений является линейное отображение (оператор) $L: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, т.е. такое, что

$$L(x_1+x^2) = Lx_1 + Lx_2, \quad L(\lambda x) = \lambda Lx, \qquad x, x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n, \ \lambda \in \mathbb{R}.$$

Линейное отображение $L: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ задается $m \times n$ матрицей (λ_i^j), $i = 1, 2, \dots, n$, $j = 1, 2, \dots, m$ так, что если $x = (x^1, x^2, \dots, x^m)$ и $Lx = y = (y^1, y^2, \dots, y^n)$, то

$$y^j = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^j x^i, \qquad j = 1, 2, \dots, m. \tag{4}$$

Линейное отображение непрерывно, так как если $x_k \to x_0$, то $x_k^i \to x_0^i$, $i = 1, 2, \dots, n$, откуда, в силу (4), следует, что и $y_k^j \to y_0^j$, $j = 1, 2, \dots, m$, т.е. что $y_k = Lx_k \to y_0 = Lx_0$. Будучи непрерывным, линейное отображение ограничено на любом замкнутом шаре пространства $\mathbb{R}^n$, и поэтому $\sup\limits_{|x| \le 1} |Lx| = \lambda < \infty$. Так, определенное число λ называется *нормой* линейного отображения (оператора), обозначается $\|L\|$ и

$$|Lx| \le \|L\|\,|x|.$$

Из теоремы 5° о непрерывных отображениях следует, что $\|L\| = |Lx_0|$ для подходящим образом выбранного элемента

$$x_0 \in S_1 = \{x \in \mathbb{R}^n |\ |x| \le 1\}.$$

Напомним, что линейное отображение $\mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}$ называется *линейным функционалом* $\ell(x)$ и однозначно определяется вектором $\ell^* = (\ell_1^*, \ell_2^*, \dots, \ell_n^*) \in \mathbb{R}^n$, так что

$$\ell(x) = \langle x, \ell^* \rangle = \sum_{i=1}^{n} x^i \ell_i^*,$$

где символом $\langle x, \ell^* \rangle$ обозначено скалярное (внутреннее) произведение векторов x и ℓ^* пространства $\mathbb{R}^n$ (Обозначение (x, ξ) мы используем для пары векторов $x \in \mathbb{R}^n$, $\xi \in \mathbb{R}^m$, так что

$$(x, \xi) = (x^1, x^2, \dots, x^n, \xi^1, \xi^2, \dots, \xi^m)).$$

§ 2. Дифференцирование отображений из $\mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}^m$

Определение дифференциала векторной функции векторного аргумента точно такое же как и дифференциала скалярной функций векторного или скалярного аргумента.

Определение. Пусть $f: A \to \mathbb{R}^m$, где $A \subset \mathbb{R}^n$ и открыто. Отображение f называется *дифференцируемым в точке* $x \in A$, если существует линейное отображение $L_x: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, такое, что для любого $\Delta x \in \mathbb{R}^n$, для которого $x + \Delta x \in A$, имеем:

$$f(x + \Delta x) - f(x) = L_x \Delta x + \omega(f, x, \Delta x), \tag{1}$$

где $\dfrac{\omega(f, x, \Delta x)}{\Delta x} \to 0$ при $\Delta x \to 0$.

Выражение $L_x \Delta x$ будем называть в этом случае *дифференциалом отображения* f в точке x и обозначим $df(x, \Delta x)$, а линейное отображение L_x — *производной отображения* f в точке x и обозначим $f'(x)$ или $Df(x)$, а $\omega(f, x, \Delta x)$ — *остатком.*

Покажем, что производная (дифференциал), если она существует, определяется однозначно. Пусть $M_x: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ — другое линейное отображение, такое, что при $\Delta x \to 0$

$$\frac{|f(x + \Delta x) - f(x) = M_x \Delta x|}{\Delta x} \to 0.$$

Тогда

$$\frac{1}{\Delta x} |L_x \Delta x - M_x \Delta x| \leq \frac{1}{\Delta x} |f(x + \Delta x) - f(x) - L_x \Delta x| +$$
$$+ \frac{1}{\Delta x} |f(x + \Delta x) - f(x) - M_x \Delta x| \to 0$$

при $\Delta x \to 0$. Но для любого $\xi \in \mathbb{R}^n$, $t\xi \to 0$ при $t \to 0$ и $x + t\xi \in A$ при достаточно малых $|t|$. Поэтому при $\xi \neq 0$

$$0 = \lim_{t \to 0} \frac{1}{t\xi} |L_x(t\xi) - M_x(t\xi)| = \frac{1}{|\xi|} |L_x \xi - M_x \xi|,$$

т.е. $L_x \xi = M_x \xi$. Так как, кроме того, $L_x 0 = M_x 0 = 0$, то при всех $\xi \in \mathbb{R}^n$ имеем $L_x \xi = M_x \xi$, а это означает, что $L_x = M_x$, и однозначность производной доказана.

Подчеркнет что производная $f'(x)$ отображения f существенно отлична от самого отображения $f(x)$ в том смысле, что $f(x)$ при фиксированном x есть элемент $\mathbb{R}^n$, в то время как $f'(x)$ есть линейный оператор из $\mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}^m$, т.е. элемент пространства $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ всех таких операторов. Итак, $f(x) \in \mathbb{R}^m$, а $f'(x) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$.

Легко убедится, что отображение f, дифференцируемое в точке x, непрерывно в этой точке.

В самом деле, тогда

$$|f(x + \Delta x) - f(x)| = |f'(x)\Delta x + \omega(f, x, \Delta x)| \leq |f'(x)\Delta x| + |\omega(f, x, \Delta x)|. \tag{2}$$

В силу непрерывности в нуле линейного отображения $f'(x)$ имеем: $f'(x)\Delta x \to 0$ при $\Delta x \to 0$. Далее, из определения дифференцируемости следует, что и $\omega(f, x, \Delta x) \to 0$ при $\Delta x \to 0$. Поэтому из (2) получим:

$$|f(x + \Delta x) - f(x)| \to 0$$

при $\Delta x \to 0$. Таким образом, непрерывность f в точке x доказана.

Следующие два утверждения читатель докажет без труда.

1°. Если $A \subset \mathbb{R}^n$ открыто и $f : A \to \mathbb{R}^m$ постоянная на A функция, то $f'(x) = 0$.

2°. Если f и g определены на открытом множестве $A \subset \mathbb{R}^n$, $f, g : A \to \mathbb{R}^m$ и дифференцируемы в точке $x \in A$, то $\alpha f + \beta g$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ также дифференцируемо в точке x и

$$D[\alpha f(x) + \beta g(x)] = \alpha Df(x) + \beta Dg(x).$$

Отображение, дифференцируемое в каждой точке множества A, называется *дифференцируемым на* A.

Пусть $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ — линейное отображение. Тогда для всех $x, x + \Delta x \in \mathbb{R}^n$

$$L(x + \Delta x) - Lx = Lx + L\Delta x - Lx = L\Delta x.$$

Поэтому $DLx = L$. Подчеркнем, что DLx есть именно L и не зависит от x, т.е. является фиксированным элементом пространства $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$, равным исходному линейному оператору L.

Теорема 1. *Пусть отображение $f : A \to \mathbb{R}^m$, $A \subset \mathbb{R}^n$, открыто и f дифференцируемо на A, $g : B \to \mathbb{R}^p$, $B \subset \mathbb{R}^m$ открыто и g дифференцируемо на B. Тогда $g \circ f$ дифференцируемо на $A \cap f^{-1}(B)$, если это множество не пусто, и*

$$D(g \circ f)(x) = Dg[f(x)] \circ Df(x). \tag{3}$$

Доказательство. Прежде всего заметим, что f, как дифференцируемое отображение, непрерывно на A, и потому $f^{-1}(B)$, а следовательно, и $A \cap f^{-1}(B)$ — открытые множества (см. замечание 1 на с. 12).

Пусть $h = g \circ f$. Рассмотрим $h(x + \Delta x) - h(x)$, где $x, x + \Delta x \in A \cap f^{-1}(B)$. Положим $f(x) = y$, $f(x + \Delta x) = y + \Delta y$. Тогда $y, y + \Delta y \in B$, и так как g дифференцируемо на B, то

$$g(y + \Delta y) - g(y) = g'(y)\Delta y + \omega_1(g, y, \Delta y). \tag{4}$$

В свою очередь,

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = f'(x)\Delta x + \omega_2(f, x, \Delta x). \tag{5}$$

Из (4) и (5) следует, что

$$\begin{gathered}(x + \Delta x) - h(x) = g[f(x + \Delta x)] - g[f(x)] = \\ = g(y + \Delta y) - g(y) = g'(y)\Delta y + \omega_1(g, y, \Delta y) = \\ = g'(y)[f'(x)\Delta x + \omega_2(f, x, \Delta x)] + \omega_1(g, y, \Delta y) = \\ = \{g'(f(x)) \circ [f'(x)]\}\Delta x + g'(y)[\omega_2(f, x, \Delta x)] + \omega_1(g, y, \Delta y).\end{gathered} \tag{6}$$

Выражение $g'[f(x)] \circ [f'(x)]$ есть линейный оператор из $\mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}^p$. Записав его в виде $g'[f(x)] \circ f'(x) = h'(x)$, получим из (6):

$$\frac{|h(x + \Delta x) - h(x) - h'(x)\Delta x|}{|\Delta x|} \leq \frac{|g'(y)[\omega_2(f, x, \Delta x)]|}{|\Delta x|} + \frac{|\omega_1(g, y, \Delta y)|}{|\Delta x|}. \tag{7}$$

Но

$$\frac{|g'(y)[\omega_2(f,x,\Delta x)]|}{|\Delta x|} = \left| g'(y)\frac{\omega_2(f,x,\Delta x)}{|\Delta x|} \right| \to 0$$

при $\Delta x \to 0$, так как $g'(y)$ — линейный, а следовательно, непрерывный в нуле оператор, и $\dfrac{1}{|\Delta x|}\omega_2(f,x,\Delta x) \to 0$ при $\Delta x \to 0$ в силу дифференцируемости f. Если мы докажем, что $\dfrac{1}{|\Delta x|}\,\omega_1(g,y,\Delta y)$ также стремится к нулю при $\Delta x \to 0$, то из (7) будет следовать, что отображение $h(x)$ дифференцируемо и что

$$h'(x) = g'[f(x)] \circ f'(x),$$

т.е. теорема будет доказана.

Так как g дифференцируемо на B, то $\dfrac{\omega_1(g,y,\Delta y)}{\Delta y} \to 0$ при $\Delta y \to 0$. Поэтому для любого числа $\varepsilon > 0$ найдется число $\eta > 0$, такое, что $|\omega_1(g,y,\Delta y)| < \varepsilon|\Delta y|$ при $|\Delta y| < \eta$. В свою очередь, в силу непрерывности f на A для данного числа $\eta > 0$ найдется число $\delta_1 > 0$, такое, что $|\Delta y| = |f(x+\Delta x) - f(x)| < \eta$ при $|\Delta x| < \delta_1$. Далее, так как f дифференцируемо на A, то найдется такое число $\delta_2 > 0$, что $\dfrac{1}{\Delta x}|\omega_2(f,x,\Delta x)| < 1$ при $|\Delta x| < \delta_2$.

Пусть $\delta = \min\,(\delta_1, \delta_2)$. При $|\Delta x| < \delta$ имеем:

$$|\omega_1(g,y,\Delta y)| < \varepsilon|\Delta y| = \varepsilon|f'(x)\Delta x + \omega_1(f,x,\Delta x)| \le$$

$$\le \varepsilon\{\|f'(x)\|\,|\Delta x| + |\Delta x|\} = \varepsilon\{\|f'(x)\| + 1\}|\Delta x|,$$

т.е.

$$\frac{|\omega_1(g,y,\Delta y)|}{|\Delta x|} \le \varepsilon\{\|f'(c)\| + 1\}$$

при $|\Delta x| < \delta$. Поскольку $\varepsilon > 0$ произвольно, это означает, $\dfrac{\omega_1(g,y,\Delta y)}{|\Delta x|} \to 0$ при $\Delta x \to 0$. Теорема доказана.

В дальнейшем, если речь пойдет о дифференцировании отображения $f:\ A \to \mathbb{R}^m$, всегда будем предполагать, что множество A открыто, не оговаривая этого особо.

Следствие 1. *Отображение $f:\ S \to \mathbb{R}^m$, $A \subset \mathbb{R}^n$ дифференцируемо на A тогда и только тогда, когда на этом множестве дифференцируемы все координатные функции f^i отображения f. При этом*

$$Df(x)\Delta x = (Df^1(c)\Delta x, Df^2(c)\Delta x, \ldots, Df^m(c)\Delta x) = \sum_{j=1}^{m}[Df^j(x)\Delta x]e'_j, \qquad (8)$$

где $\{e'_j\}$, $j = 1,2,\ldots,m$, — стандартный базис в $\mathbb{R}^m$. Это равенство запишем кратко в виде

$$Df(x) = (Df^1(x), Df^2(x), \ldots, D^m f(x)). \qquad (9)$$

Необходимость. Если отображение f дифференцируемо, то, заметив, что проекции π^j, $j = 1,2,\ldots,m$, как линейные операторы дифференцируемы в любой точке $y \in \mathbb{R}^m$, получим, в силу предыдущей теоремы, что функции $f^j = \pi^j \circ f$ также дифференцируемы.

Достаточность. Если все координатные функции f^j дифференцируемы, то

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{|\Delta x|}\left| f(x+\Delta x) - f(x) - \sum_{j=1}^{m} [Df^j(x)\Delta x]'_j \right| =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{|\Delta x|}\left| \sum_{j=1}^{m} \{f^j(x+\Delta x) - f^j(x) - Df^j(x)\Delta x\} e'_j \right| \leq$$

$$\leq \sum_{j=1}^{m} \left\{ \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{|\Delta x|}\left| f^j(x+\Delta x) - f^j(x) - Df^j(x)\Delta x \right| \right\} = 0,$$

что доказывает дифференцируемость f и равенство (8).

Вспомнив условие дифференцируемости скалярной функции векторного аргумента, можно сформулировать следующее утверждение.

Следствие 2. *Если отображение $f: A \to \mathbb{R}^m$, $A \subset \mathbb{R}^n$, дифференцируемо на A, то всюду на A существуют все частные производные $D_i f^j$ всех координатных функций. Если все частные производные всех координатных функций существуют и непрерывны в каждой точке $x \in A$, то f^j, а следовательно, и отображение f дифференцируемо на A.*

Теперь легко доказывается следующая теорема.

Теорема 2. *Если отображение $f: A \to \mathbb{R}^m$, $A \subset \mathbb{R}^n$, дифференцируемо в точке $x \in A$, то матрица производной $f'(x)$ есть $(m \times n)$-матрица, составленная из элементов $D_i f^j(x)$, $i = 1, 2, \ldots, n$, $j = 1, 2, \ldots, m$.*

Доказательство. В самом деле, как показано выше,

$$f'(x)\Delta x = \sum_{j=1}^{m} [Df^j(x)\Delta x] e'_j.$$

В свою очередь (см. формулу (11) из § 2 гл. XI), $Df^j(x)\Delta x = \sum\limits_{i=1}^{n} D_i f^j(x)\Delta x^i$.

Поэтому

$$f'(x)\Delta x = \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} [D_i f^j(x)\Delta x^i] e'_j. \tag{10}$$

Таким обрезом, вектор $\Delta x = (\Delta x^1, \Delta x^2, \ldots, \Delta x^n)$ с помощью оператора $f'(x)$ можно преобразовать в вектор $dy = df(x, \Delta x) = f'(x)\Delta x$ с координатами

$$\left(\sum_{i=1}^{n} D_i f^1(x)\Delta x^i, \sum_{i=1}^{n} D - i f^2(x)\Delta x^i, \ldots, \sum_{i=1}^{n} D_i f^m(x)\Delta x^m \right),$$

а это означает, что матрица линейного оператора $f'(x)$ имеет вид

$$(D_i f^j(x)) = \begin{pmatrix} D_1 f^1 f(x) & D_2 f^1(x) & \ldots & D_n f^1(x) \\ D_1 f^2 f(x) & D_2 f^2(x) & \ldots & D_n f^2(x) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ D_1 f^m f(x) & D_2 f^m(x) & \ldots & D_n f^m(x) \end{pmatrix}.$$

Эту матрицу называют *матрицей Якоби*, или *якобианом* отображения f и обозначают

$$\frac{D(f^1, f^2, \ldots, f^m)}{D(x^1, x^2, \ldots, x^n)}.$$

Следующая теорема, уже доказанная в § 8 гл. XI, является теперь простой модификацией полученных результатов.

Теорема 3. *Пусть функции* $g^i: A \to \mathbb{R}$, $A \subset \mathbb{R}^m$, $i = 1, 2, \ldots, n$, *дифференцируемы в точке* $a \in A$. *Пусть, далее, отображение* $f: B \to \mathbb{R}$, $B \subset \mathbb{R}^n$, $(g^1(a), g^2(a), \ldots, g^n(a)) \in B$, *дифференцируемо в точке* $g = (g^1(a), g^2(a), \ldots, g^n(a)$. *Тогда функция*

$$F(x) = f(g^1(x), g^2(x), \ldots, g^n(x))$$

дифференцируема в точке a *и*

$$D_j F(a) = \sum_{i=1}^{n} D_i f(g^1(a), g^2(a), \ldots, g^n(a)) D_j g^i(a). \tag{11}$$

Доказательство. Введем функцию $g(x) = (g^1(x), g^2(x), \ldots, g^n(x))$, определенную в окрестности точки $a \in \mathbb{R}^m$, и сложную функцию $F(x) = g[f(x)]$, действующую из окрестности точки a в числовую прямую $\mathbb{R}$.

Функция g дифференцируема, так как дифференцируемы все ее координатные функции. Но тогда из теоремы о дифференцируемости сложной функции следует дифференцруемость $F = f \circ g$. В силу той же теоремы

$$F'(a) = f'[g(a)] \circ g'(a) = (D_1 f[g^1(a)], \ldots, D_n f[g^1(a)]) =$$

$$= \begin{pmatrix} D_1 g^1(a) & \ldots & D_m g'(a) \\ \ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots \\ D_1 g^n(a) & \ldots & D_m g^n(a) \end{pmatrix}, \tag{12}$$

так как действие композиции $f'[g(a)] \circ g'(a)$ отображений на элемент из $\mathbb{R}^m$ означает последовательное применение к этому элементу сначала линейного оператора $g'(a)$, а затем линейного функционала $f'[g(a)]$, что и представляет собой указанное в формуле (11) произведение вектора слева на матрицу справа.

С другой стороны

$$F'(a) = (D_1 F(a), \ldots, D_m F(a)). \tag{13}$$

Приравнивая j-ые координаты векторов, порождающих функционал $F'(a)$ в правых частях равенств (18) и (13), мы приходим к формуле (11).

§ 3. Теоремы об обратном и неявном отображении

Пусть дано отображение $f: A \to \mathbb{R}^n$, $A \subset \mathbb{R}^n$. Мы знаем (с. 44, ч. 1), что если отображение $f: A \to f(A) \subset \mathbb{R}^n$ взаимно однозначно, т.е. если прообраз

$f^{-1}(a)$ каждого элемента $y \in f(A)$ есть одноэлементное множество, то существует обратное отображение f^{-1}, отображающее $f(A)$ на A. Рассмотрим вопрос о существовании обратной функции для векторных функций векторного аргумента. Теорема о существовании обратной для монотонной непрерывной функции скалярного аргумента не может быть непосредственно перенесена на векторные функции векторного аргумента, так как для таких функций нет понятия монотонности. Однако если функция дифференцируема, то условие необращения в нуль производной, с помощью которого для скалярных функций устанавливается дифференцируемость обратной функции, может помочь в изучении вопроса об обратимости векторных функций векторного аргумента. Ниже приводится одна из теорем о локальном обращении дифференцируемого отображения.

Для доказательства подобных теорем удобно пользоваться так называемым *принципом сжимающих отображений.* Этот принцип имеет многочисленные применения во многих разделах математики.

Пусть X — метрическое пространство и отображение $f: X \to X$ таково, что $\rho(f(x), f(y)) \le q\rho(x, y)$, $x, y \in X$, где $0 < q < 1$. В этом случае говорят, что f есть *отображение сжатия*, или *сжимающее* отображение пространства X в себя.

Принцип сжимающих отображений (Каччиопполи[34], Банаха[35]). *Пусть f — отображение сжатия полного метрического пространства X в себя. Тогда существует единственная точка $a \in X$, такая, что $f(a) = a$.*

Точка a называется *неподвижной точкой* отображения f и является единственным решением уравнения $f(x) = x$.

Пусть x_0 — произвольный элемент пространства X. Положим

$$x_1 = f(x_0),\ x_2 = f(x_1), \ldots,\ x_n = f(x_{n-1}),\ \ldots$$

Покажем, что $\{x_n\}$ есть последовательность Коши. Имеем:

$$\begin{aligned}
&\rho(x_1, x_2) = \rho(f(x_0), x_0) = r,\\
&\rho(x_3, x_2) = \rho(f(x_2), f(x_1)) \le q\rho(x_1, x_0) = qr,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\rho(x_{n+1}, x_n) \le q^n r,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

Поэтому

$$\rho(x_{n+p}, x_n) \le \sum_{k=1}^{p} \rho(x_{n+k}, x_{n+k-1}) \le \sum_{k=1}^{p} q^{n+k-1} r = \frac{q^n - q^{n+p}}{1-q} r < \frac{q^n}{1-q} r \to 0$$

при $n \to \infty$ и любом целом числе $p > 0$. В силу полноты пространства X существует точка $a \in X$, такая, что $x_n \to a$.

---

[34] Р. Каччиопполи (1904–1959) — итальянский математик.

[35] С. Банах (1892–1945) — польский математик.

Покажем, что $f(a) = a$. Имеем:

$$0 \leq \rho(f(a), a) \leq \rho(f(a), x_n) + \rho(x_n, a) \leq$$

$$\leq \rho(f(a), f(x_{n-1}) + \rho(x_n, a) \leq q\rho(x_{n-1}, a) + \rho(x_n, a).$$

При $n \to \infty$ оба слагаемые справа стремятся к нулю и в пределе предыдущее неравенстве дает $\rho(f(a), a) = 0$, т.е. $f(a) = a$.

Докажем единственность неподвижной точки. Допустим, что существует другая неподвижная точка $b \in X$, так что $\rho(a, b) > 0$. Но

$$\rho(a, b) = \rho(f(a), f(b)) \leq q\rho(a, b).$$

Сократив это неравенство на положительное число $\rho(a, b)$, получим $1 \leq q$, что противоречив условию. Теорема доказана.

Точки x_n построенные при доказательстве принципа сжимающих отображений, называются *последовательными приближениями* решения уравнения $f(x) = x$.

Можно дать оценку погрешности, получающейся при замене решения a его приближением x_n. Имеем

$$\rho(x_{n+p}, x_n) \leq \frac{q^n}{1-q} r = \frac{q^n}{1-q} \rho(f(x_0), x_0).$$

Переходя в нем к пределу, при $p \to \infty$ получим:

$$\rho(a, x_n) \leq \frac{q^n}{1-q} \rho(f(x_0), x_0), \tag{$*$}$$

что и дает требуемую оценку.

Заметим, что хотя $x_n \to a$ независимо от выбора начального приближения x_0, формула (*) показывает, что величина погрешности $\rho(x_n, a)$ зависит от выбора этого приближения и оценка будет тем лучше, чем меньше $\rho(f(x_0), x_0)$.

Доказательству теоремы об обращении отображения предпошлем теорему, используемую и при решении других вопросов.

Теорема о конечном приращении. *Если отображение $f: A \to \mathbb{R}^m$, $A \subset \mathbb{R}^n$, дифференцируемо во всех точках A и $[x, y]$ — отрезок, лежащий целиком в A, то*

$$|f(x) - f(y)| \leq \sup_{\xi \in [x,y]} \|f'(\xi)\| \, |x - y|. \tag{1}$$

Рассмотрим сначала функцию $\varphi: [0, 1] \to \mathbb{R}^m$, непрерывную на $[0, 1]$ и дифференцируемую во всех внутренних точках отрезка $[0, 1]$. Введем числовую функцию $\psi(t) = \langle \varphi(1) - \varphi(0), \varphi(t) \rangle$. Легко проверить, что $\psi(t)$ — непрерывная на $[0, 1]$ и дифференцируемая в $(0, 1)$ скалярная функция скалярного аргумента, и, следовательно, к ней применима теорема Лагранжа

$$\psi(1) - \psi(0) = \psi'(\tau) = \langle \varphi(1) - \varphi(0), \varphi'(\tau) \rangle,$$

где $0 < \tau < 1$. Но $\psi(1) - \psi(0) = |\varphi(1) - \varphi(0)|^2$,откуда

$$|\varphi(1) - \varphi(0)|^2 = \langle \varphi(1) - \varphi(0), \varphi'(\tau) \rangle.$$

Применив к правой части этого равенства неравенство Буняковского–Шварца, получим:

$$|\varphi(1) - \varphi(0)|^2 \leq |\varphi(1) - \varphi(0)| \, |\varphi'(\tau)|,$$

следовательно,

$$|\varphi(1) - \varphi(0)| \leq \sup_{0<\tau<1} |\varphi'(\tau))|. \tag{2}$$

Возьмем теперь в качестве $\varphi(t)$ функцию $F(t) = f[x + t(y - x)]$, где f — заданное отображение A в $\mathbb{R}^m$. В силу теоремы о дифференцировании сложной функции, функция $F(t)$ дифференцируема и

$$F'(t) = f'[x + t(y - x)] \circ [x + t(y - x)]' = f'[x + t(y - x)](y - x).$$

(Напомним, что если $\varphi(t)$ — векторная функция скалярного аргумента, то $\varphi'(t)$ есть также векторная функция скалярного аргумента, в частном случае — постоянный вектор, а композиция линейного оператора из $\mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}^m$ с вектором из $\mathbb{R}^n$ есть применение оператора к вектору.) с помощью неравенства (2), примененного к функции $F(t)$, получим:

$$|F(1) - F(0)| \leq \sup_{0<\tau<1} |F'(\tau)|,$$

т.е.

$$|f(y) - f(x)| \leq \sup_{0<\tau<1} |f'[x + \tau(y - x)](y - x)| \leq$$

$$\leq \sup_{0<\tau<1} \{\|f'[x + \tau(y - x)]\| \, |y - x|\} \leq \sup_{\xi \in [x,y]} \|f'(\xi)\| \, |y - x|.$$

Теорема доказана.

Теорема об обратном отображении. *Пусть отображение* $f: A \to \mathbb{R}^n$, $A \subset \mathbb{R}^n$, *имеет производную в некоторой окрестности точки* $a \in A$, *непрерывную в этой окрестности. Если* $\det f'(a) \neq 0$, *то существует открытая окрестность* U *точки* a, *и открытая окрестность* V *точки* $b = f(a)$, *такие, что отображение* $f: U \to V$ *взаимно однозначно, так что существует обратное отображение* $f^{-1}: V \to U$. *Это отображение также непрерывно дифференцируемо, причем*

$$(f^{-1})(y) = \{f'[f^{-1}(y)]\}^{-1}.$$

Доказательство. Заметим прежде всего следующее. Пусть f имеет непрерывную производную $f'(x)$ в некоторой окрестности точки a и L — обратимый линейный оператор из $\mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}^n$, так что $Lx = L?$ для любого $x \in \mathbb{R}^n$ и, аналогично, $[L^{-1}]'(x) = L^{-1}$. Тогда ив теоремы о дифференцировании сложной функции следует, что $f_1 = L \circ f$ имеет производную в окрестности точки a, непрерывную в этой окрестности, и обратно, из существования и непрерывности производной отображения f_1 в некоторой точке следует существование и непрерывность производной $f = L^{-1} \circ f_1$ в той же точке. Наконец, очевидно, что f тогда и только тогда, взаимно однозначно отображает некоторую область U на область V, когда ? взаимно однозначно отображает f_1 на $L(V)$, причем $f_1^{-1} = f^{-1} \circ L^{-1}$ непрерывно дифференцируемо на $L(V)$ тогда и только тогда, когда f^{-1} непрерывно дифференцируемо на V.

Выберем в качеств L отображение $[f'(a)]^{-1}$, которое существует, так как $\det f'(a) \neq 0$. Тогда

$$f_1'(a) = \{[f'(a)]^{-1} \circ f\}'(a) = [f'(a)]^{-1} \circ f'(a) = I.$$

Из сказанного следует, что если теорема верна для f, то она верна и для f_1, и обратно. Поэтому без ограничения общности можно считать, что $f'(a) = I$.

Далее, введя новую переменную $z = x - a$ и новую функцию $\varphi(z) = f(z + a) - f(a)$ и, следовательно, имея $x = z + a$, $f(x) = \varphi(x - a) + f(a)$, аналогично предыдущему убеждаемся, что если теорема верна для $f(x)$, то она верна для $\varphi(z)$, и наоборот. Но функция $\varphi(z)$ отображает окрестность нуля в окрестность нуля и $\varphi'(0) = f'(a) = I$. Поэтому будем с самого начала предполагать, что

$$a = f(a) = 0, \qquad f'(0) = I.$$

Положим $g(x) = x - f(x)$. Тогда $g'(0) = 0$, и в силу непрерывности производной $g'(x)$ в точке $x = 0$ найдется такое $r > 0$, что при $|x| \leq r$ имеем $\|g'(x)\| \leq \frac{1}{2}$. Тогда из теоремы об оценке конечного приращения следует, что

$$|g(x)| = |g(x) - g(0)| \leq \sup_{\xi \in [0,x]} \|g'(x)\| \, |x| \leq \frac{1}{2}|x|$$

для любого x из замкнутого шара $\overline{K}(0, r)$, т.е. g отображает этот шар в замкнутый шар $\overline{K}\left(0, \frac{r}{2}\right)$. Покажем, что для любого $y \in \overline{K}\left(0, \frac{r}{2}\right)$ найдется единственный элемент $x \in \overline{K}(0, r)$, такой, что $f(x) = y$, и, следовательно, в $\overline{K}\left(0, \frac{r}{2}\right)$ будет определено обратное отображение f^{-1}.

Введем отображение $h(x) = g(x) + y$. Если $|x| \leq r$ и $|y| \leq \frac{r}{2}$, то $|h(x)| \leq |g(x)| + |y| \leq \frac{r}{2} + \frac{r}{2} = r$, и поэтому h отображает шар $\overline{K}(0, r)$ в себя. Далее,

$$|h(x_1) - h(x_2)| \leq |g(x_1) - g(x_2)| \leq \frac{1}{2} \, |x_1 - x_2|$$

для любых $x_1, x_2 \in \overline{K}(0, r)$, так что h есть отображение сжатия полного метрического пространства $\overline{K}(0, r)$ в себя. Поэтому при любом фиксированном $y \in \overline{K}\left(0, \frac{r}{2}\right)$ существует единственная неподвижная точка $x \in \overline{K}(0, r)$ этого отображения, т.е. удовлетворяющая равенству $x = h(x)$, или, что все равно, $x = g(x) + y = x - f(x) + y$, т.е. равенству $f(x) = y$. Таким образом мы получили обратное отображение f^{-1}, определенное на шаре $\overline{K}\left(0, \frac{r}{2}\right)$ со значениями в шаре $\overline{K}(0, r)$. Это отображение непрерывно, так как

$$f^{-1}(y_1) - f^{-1}(y_2)| = |x_1 - x_2| = |h(x_1) - h(x_2 0| =$$

$$= |[g(x_1) + y_1] - [g(x_2) + y_2]| \leq |g(x_1) - g(x_1)| + |y_1 - y_2| \leq$$
$$\leq \frac{1}{2}\,|x_1 - x_2| + |y_1 - y_2| = \frac{1}{2}\,|f^{-1}(y_1) - f^{-1}(y_2)| + |y_1 - y_2|,$$

откуда

$$|f^{-1}(y_1) - f^{-1}(y_2)| \leq 2|y_1 - y_2| \tag{3}$$

для любых $y_1, y_2 \in \overline{K}\left(0, \dfrac{r}{2}\right)$.

Более того, отображение f^{-1} диФференцируемо в шаре $\overline{K}\left(0, \dfrac{r}{2}\right)$. В самом деле, пусть $y, y_0 \in \overline{K}\left(0, \dfrac{r}{2}\right)$ и $x = f^{-1}(y)$, $x_0 = f^{-1}(y_0)$. Тогда

$$f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0) - \{f'[f^{-1}(y_0)]\}^{-1}(y - y_0) = x - x_0 - \{f'(x_0)\}^{-1}(f(x) - f(x_0)) =$$
$$= [f'(x_0)]^{-1}\{f'(x_0)(x - x_0) - (f(x) - f(x_0))\}.$$

Поэтому

$$|f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0) - \{f'[f^{-1}(y_0)]\}^{-1}(y - y_0)| \leq$$
$$\leq \|[f'(x_0)]^{-1}\| \cdot |f'(x_0)(x - x_0) - (f(x) - f(x_0)|,$$

и для доказательства дифференцируемости f^{-1} в точке y_0 надо показать, что

$$\lim_{y \to y_0} \frac{|f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0)|}{|y - y_0|} = 0. \tag{4}$$

Из неравенства (3) следует, что $|x - x_0| \leq 2|y - y_0|$,, и мы имеем

$$\frac{|f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0)|}{|y - y_0|} \leq 2\frac{|f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0)|}{|x - x_0|}.$$

Пусть $y \to y_0$. Так как отображение $x = f^{-1}(y)$ непрерывно, то $x \to x_0$. Но тогда,в силу дифференцируемости f в точке x_0, выражение в правой части последнего неравенства, а тем более в левой его части, стремится к нулю, и равенство (4), а вместе с тем дифференцируемость f^{-1} в шаре $K\left(0, \dfrac{r}{2}\right)$ доказаны.

Попутно мы установили, что $[f^{-1}(y_0)]' = \{f'[f^{-1}(y_0)]\}^{-1}$, откуда следует непрерывность $[f^{-1}(y)]'$.

Итак, теорема полностью доказана для $U = f^{-1}K\left(0, \dfrac{r}{2}\right)$ и $V = K\left(0, \dfrac{r}{2}\right)$.

Переходим к вопросу о существовании неявной функции, Задача здесь ставится так же, как и в случае скалярной неявной функции скалярного аргумента.

Пусть дано отображение $f:\ G \to \mathbb{R}^m$, где $G \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ и открыто. Предположим, что существует точка $(a, b) \in G$, $a \in \mathbb{R}^n$, $b \in \mathbb{R}^m$, такая, что $f(a, b) = 0$. Спрашивается: если изменять $x \in \mathbb{R}^n$ в окрестности точки a, то найдутся ли такие значения $y \in \mathbb{R}^m$, что $f(x, y)$? Иными словами, при каких условиях из разрешимости уравнения $f(a, b) = 0$ относительно b будет вытекать разрешимость уравнения

$f(x, y) = 0$ относительно y при всех x, достаточно близких к a? Будет ли это решение однозначно, и в случае однозначности будет ли функция $y = g()$, являющаяся решением уравнения $f(x, y)$, непрерывной и дифференцируемой, если таковым является отображение f?

ТЕОРЕМА О СУЩЕСТВОВАНИИ НЕЯВНОГО ОТОБРАЖЕНИЯ. *Пусть отображение* $f : G \to \mathbb{R}^m$, *где* $G \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ *и открыто, непрерывно дифференцируемо на* G *и в точке* $(a, b) \in G$, $a \in \mathbb{R}^n$, $b \in \mathbb{R}^m$ *обращается в нуль:* $f(a, b) = 0$. *Пусть, кроме того, матрица*

$$M = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f^1}{\partial y^1} & \dfrac{\partial f^1}{\partial y^2} & \cdots & \dfrac{\partial f^1}{\partial y^m} \\ \dfrac{\partial f^2}{\partial y^1} & \dfrac{\partial f^2}{\partial y^2} & \cdots & \dfrac{\partial f^2}{\partial y^m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \dfrac{\partial f^m}{\partial y^1} & \dfrac{\partial f^m}{\partial y^2} & \cdots & \dfrac{\partial f^m}{\partial y^m} \end{pmatrix}$$

имеет в G *детерминант, не равный нулю. Тогда существует открытое множество* $A \subset \mathbb{R}^n$, *содержащее* a, *и открытое множество* $B \in \mathbb{R}^m$, *содержащее* b, *такие, что для всякого* $x \in A$ *существует единственное* $g(x) \in B$, *для которого* $f(x, g(x)) = 0$. *При атом* $g(a) = b$ *и отображение* g *непрерывно дифференцируемо на* A.

Доказательству теоремы предпошлем следующее замечание.

Пусть H — открытое множество пространства $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$, содержащее точку (a, b), $a \in \mathbb{R}^n$, $b \in \mathbb{R}^m$. Тогда множество H содержит открытое подмножество H_0, также содержащее точку (a, b) и имеющее вид $H_0 = U \times V$, где $U \subset \mathbb{R}^n$ и открыто, $V \subset \mathbb{R}^m$ и открыто, $a \in U$, $b \in V$.

В самом деле, так как H — открытое множество, точка (a, b) входит в него с некоторым открытым шаром K. Впишем в этот шар открытый параллелепипед $H_0 \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$, содержащий точку (a, b), что, очевидно, возможно. Далее, как легко видать, H_0 можно рассматривать как декартово произведение открытых параллелепипедов $P_a^n \subset \mathbb{R}^n$ и $P_b^m \subset \mathbb{R}^m$, содержащих соответственно точки a и b. Эти параллелепипеды мы и примем за множества U и V.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ. Введем функцию $F : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$, определяющуюся формулой

$$F(x, y) = (x, f(x, y)) =$$
$$= (x^1, \ldots, x^n, f^1(x^1, \ldots, x^n, y^1, \ldots, y^m), \ldots, f^m(x^1, \ldots, x^n, y^1, \ldots, y^m)).$$

Легко проверить, что функция $F(x, y)$ непрерывно дифференцируема на G и что матрица производной $F'(x,y)$ имеет следующий вид:

$$\left(\begin{array}{ccccc|cccc}
1 & 0 & 0 & \dots & 0 & & & & \\
0 & 1 & 0 & \dots & 0 & & & 0 & \\
\multicolumn{5}{c|}{\dotfill} & & & & \\
0 & 0 & 0 & \dots & 1 & & & & \\
\hline
\dfrac{\partial f^1}{\partial x^1} & \dfrac{\partial f^1}{\partial x^2} & \dfrac{\partial f^1}{\partial x^3} & \dots & \dfrac{\partial f^1}{\partial x^n} & \dfrac{\partial f^1}{\partial y^1} & \dfrac{\partial f^1}{\partial y^2} & \dots & \dfrac{\partial f^1}{\partial y^m} \\
\dfrac{\partial f^2}{\partial x^1} & \dfrac{\partial f^2}{\partial x^2} & \dfrac{\partial f^2}{\partial x^3} & \dots & \dfrac{\partial f^2}{\partial x^n} & \dfrac{\partial f^2}{\partial y^1} & \dfrac{\partial f^2}{\partial y^2} & \dots & \dfrac{\partial f^2}{\partial y^m} \\
\multicolumn{5}{c|}{\dotfill} & \multicolumn{4}{c}{\dotfill} \\
\dfrac{\partial f^m}{\partial x^1} & \dfrac{\partial f^m}{\partial x^2} & \dfrac{\partial f^m}{\partial x^3} & \dots & \dfrac{\partial f^m}{\partial x^n} & \dfrac{\partial f^m}{\partial y^1} & \dfrac{\partial f^m}{\partial y^2} & \dots & \dfrac{\partial f^m}{\partial y^m}
\end{array}\right) \tag{5}$$

откуда ясно, что $\det F'(x,y) = \det M \neq 0$ в G. В силу теоремы об обратном отображении, существует открытое множество $H \subset G$, содержащее точку (a,b), $H = A \times B$, $a \in A \subset \mathbb{R}^n$, $b \in B \subset \mathbb{R}^m$, A и B открыты, такое, что F отображает H взаимно однозначно на открытое множество $W \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$, содержащее точку $F(a,b) = (a, f(a,b)) = (a,0)$, и обратное отображение $F^{-1} : \ W \to H$ непрерывно дифференцируемо. Заметим, что так как F не заменяет координату x, то W имеет вид $W = A \times f(A \times B)$. Очевидно, что F^{-1} также не заменяет координаты x и следовательно,

$$F^{-1}(x,y) = (x, \psi(x,y))$$

где $x \in A$, $\psi(x,y) \in B$.

Для $(x,y) \in W$ имеем

$$(x,y) = (F \circ F^{-1})(x,y) = F(x, \psi(x,y)) = (x, f[x, \psi(x,y)]),$$

откуда для $(x,y) \in W$ следует

$$f[x, \psi(x,y)] = y. \tag{6}$$

Пусть π — проекция $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ на $\mathbb{R}^m$, так что $\pi(x,y) = y$. Отображение π линейно и, следовательно, непрерывно дифференцируемо. Так как $\psi(x,y) = (\pi \circ F^{-1})(x,y)$, то $\psi(x,y)$ также непрерывно дифференцируемо на W.

Если $x = a$, $y = b$, то $f(a,b) = 0$, и поэтому множество $W = A \times f(A \times B)$ при любом $x \in A$ содержит точку $(x,0)$. Положив в равенстве (6) $y = 0$, получим $f[x, \psi(x,0)] = 0$ для любого $x \in A$.

Далее, так как F^{-1} переводит точку $(a,0)$ в точку (a,b) и координатными функциями отображения F^{-1} являются x и $\psi(x,y)$, то $\psi(a,0) = b$. Наконец, для $x \in A$ имеем $\psi(x,0) \in B$. Поэтому, выбрав в качестве $g(x)$ функцию $\psi(x,0)$, получим утверждение теоремы.

Если выполнены условия теоремы, то нахождение частных производных, а следовательно, и производной неявной функции не представляет труда. В самом деле, если f^i, $i = 1, 2, \dots, n$, и g^k, $k = 1, 2, \dots, m$, — координатные функции отображения f и g, то для $x \in A$ из равенства

$$f(x, g(x)) = 0$$

следует

$$f^i(x^1,\dots,x^n,g^1(x^1,\dots,x^n),\dots,g^m(x^1,\dots,x^n))=0,\qquad i=1,2,\dots,m.$$

Продифференцировав последние равенства по переменной x^j по правилу дифференцирования сложной функции, получим:

$$\frac{\partial f^i}{\partial x^j}+\sum_{k=1}^{m}\frac{\partial f^i}{\partial y^k}\frac{\partial y^k}{\partial x^j}=0,\qquad i=1,2,\dots,m. \tag{7}$$

При каждом фиксированном $j=1,2,\dots,n$ определитель $\det M$ этой системы отличен от нуля, и, следовательно, однозначно определяются $\frac{\partial y^1}{\partial x^j},\frac{\partial y^2}{\partial x^j},\dots,\frac{\partial y^m}{\partial x^j}$, $j=1,2,\dots,n$, как функции от x и $y=g(x)$. Исключая y из выражения $\frac{\partial y^k}{\partial x^j}$ в общем случае представляется затруднительным.

Если выписать решения уравнений (7) в виде отношения двух определителей, то из непрерывной дифференцируемости отображения f и необращения в нуль $\det M$ будет вытекать непрерывность частных производных координатных функций неявного отображения и, следовательно, непрерывная дифференцируемость неявного отображения.

§ 4. Производные высших порядков и формула Тейлора

Пусть X, Y, Z — евклидовы пространства одинаковой или разной размерности — безразлично, и

$$B:\ X\times Y\to Z$$

— билинейное отображение. Если e_i, $i=1,2,\dots,n$; e'_j, $j=1,2,\dots,m$, — стандартные базисы в X и Y соответственно, то

$$B(x,y)=B\biggl(\sum_{i=1}^{n}x^ie)i,\sum_{j=1}^{m}j^je'_j\biggr)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}x^iy^jb_{ij}, \tag{1}$$

где $b_{ij}=B(e_i,e'_j)\in Z$.

Из формулы (1) видно, что билинейное отображение непрерывно по совокупности аргументов.

Пусть e''_k, $k=1,2,\dots,p$ — стандартный базис в Z. Тогда $b_{ij}=\sum\limits_{k=1}^{p}\beta_{ij}^ke''_k$ где $\beta_{ij}^k=\langle B(e_i,e'_j),e''_k\rangle$, и, следовательно,

$$B(x,y)=\sum_{k=1}^{p}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\beta_{ij}^kx^iy^je''_k. \tag{2}$$

Таким образом, каждое билинейное отображение в заданных базисах однозначно определяет систему $n\cdot m\cdot p$ чисел $\{\beta_{ij}^k\}$, $i=1,2,\dots,n$, $j=1,2,\dots,m$,

$k = 1, 2, \dots, p$, зависящую от трех индексов, и, наоборот, если задана такая система чисел, то в заданных базисах она определяет по формуле (2) билинейное отображение $B:\ X \times Y \to Z$.

Предположим, что в пространстве X выбран новый базис $\widetilde{e}_i$, $i = 1, 2, \dots, n$, связанный с исходным равенствами

$$\widetilde{e}_i = \sum_{r=1}^{n} \lambda_i^r e_r, \qquad i = 1, 2, \dots, n,$$

и пусть $\{\widetilde{\beta}_{ij}^k\}$ — система чисел, определяемая билинейным отображением (и определяющая его) в базисах $\{\widetilde{e}_i\}$, $\{e'_j\}$, $\{e''_k\}$. Тогда

$$\begin{gathered}\widetilde{\beta}_{ij}^k = \langle B(\widetilde{e}_i, e'_j), e''_k\rangle = \left\langle B\left(\sum_{r=1}^{n} \lambda_i^r e_r, e'_j\right), e''_k\right\rangle = \\ = \sum_{r=1}^{n} \lambda_i^r \langle B(e_r, e'_j), e''_k\rangle = \sum_{r=1}^{n} \lambda_i^r \beta_{rj}^k.\end{gathered} \tag{3}$$

Мы видим, что по отношению к первому нижнему индексу числа β_{ij}^k при переходе от одного базиса к другому преобразуются по тем же формулам, т.е. с помощью той же матрицы (λ_i^k), что и элементы базиса. То же самое будет, если заменить базис в пространстве Y.

Пусть теперь в пространстве Z введен новый базис, связанный с прежним равенством

$$\widetilde{e}''_k = \sum_{s=1}^{p} \mu_k^s e''_s, \qquad k = 1, 2, \dots, p.$$

В этом случае

$$\begin{gathered}\widetilde{\beta}_{ij}^k = \langle B(e_i, e'_j), \widetilde{e}''_k\rangle = \left\langle B(e_i, e'_j), \sum_{s=1}^{p} \mu_k^s e''_s\right\rangle = \\ = \sum_{s=1}^{p} \mu_k^s \langle B(e_i, e'_j), e''_s\rangle = \sum_{s=1}^{p} \mu_k^s \beta_{ij}^s = \sum_{s=1}^{p} (\mu_s^k)^* \beta_{ij}^s,\end{gathered} \tag{4}$$

т.е. переход от системы чисел $\{\beta_{ij}^k\}$ к системе чисел $\{\widetilde{\beta}_{ij}^k\}$ осуществляется с помощью матрицы $(\mu_s^k)^* = (\mu_k^s)$, транспонированной по отношению к матрице преобразования базиса.

Система чисел $\{\beta_{ij}^k\}$, $i = 1, 2, \dots, n$, $j = 1, 2, \dots, m$, $k = 1, 2, \dots, p$, заданная в фиксированных базисах и изменяющаяся при переходе к новым базисам по законам (3) и (4), называется *смешанным тензором третьего ранга*, *дважды ковариантным* (т.е. преобразующимся так же, как и базисы) *по нижним индексам* и *контравариантным по верхнему индексу.*

Таким образом, если фиксированы базисы в X, Y и Z, то между совокупностью всех билинейных отображений $B:\ X \times Y \to Z$ и совокупностью всех смешанных тензоров третьего ранга дважды ковариантных и один раз контравариантных, устанавливается взаимно однозначное соответствие.

Пусть, в частности, $Z = \mathbb{R}$ — пространство вещественных чисел. Тогда билинейное отображение $B: \ X \times Y$ называют *билинейной формой*, и она полностью определяется заданием системы чисел $b_{ij} = B(e_i, e'_j)$, $i = 1, 2, \ldots, n$, $j = 1, 2, \ldots, m$, которая представляет собой ковариантный тензор второго ранга. Поэтому, допуская некоторую вольность в выражениях, билинейные формы называют тензорами второго ранга.

Часто при рассмотрении билинейных отображений и форм пространства X и Y оказываются совпадающими. Если в этом случае $B: \ X \times X \to Z$ таково, что $B((x, y) = B(y, x)$, то билинейное отображение называется *симметрическим*, если же $B(x, y) = -B(y, x)$, то *антисимметрическим*. Всякое симметрическое билинейное отображение посредством равенства $K(x) = B(x, x)$ порождает *квадратичное отображение* $K(x)$.

Пусть даны два билинейных отображения B_1 и B_2 произведения $X \times Y$ в Z. Определим их сумму $B_1 + B_2$ равенством

$$(B_1 + B_2)(x, y) = B_1(x, y) + B_2(x, y),$$

а также произведение λB билинейного отображения на вещественное число λ формулой

$$(\lambda B)(x, y) = \lambda \cdot B(x, y).$$

Множество всех билинейных отображений $X \times Y$ в Z становится при этом линейным пространством, которое обозначается $\mathcal{L}(X, Y; Z)$. В частности, если $X = Y$, то это пространство обозначается $\mathcal{L}_2(X, Z)$. Простейшим примером элемента пространства $\mathcal{L}_2(X.\mathbb{R})$ является билинейная форма $\langle x, y \rangle$, $x, y \in X$. Отметим кстати, что эта форма симметрическая.

Для элементов пространства $\mathcal{L}(X, Y; Z)$, т.е. для билинейных отображений, можно ввести норму. Это — неотрицательное число, определяемое равенством

$$\|B\| = \sup_{|x| \leq 1, \ |y| \leq 1} |B(x, y)|.$$

Так как отображение $|B(x, y)|$ непрерывно на компактном множестве $\{(x, y) \in X \times Y | \ |x| \leq 1, \ |y| \leq 1\}$, то, в силу теоремы Вейерштрасса, $\|B\|$, конечное число, совпадает с модулем значения билинейного отображения, т.е. с длиной вектора $B(x_0, y_0)$ при подходящем выборе векторов $x_0 \in K(0, 1) \subset X$ и $y_0 \in K(0, 1) \subset Y$.

Другое определение нормы, эквивалентное приведенному выше: $\|B\|$ есть наименьшее из констант M, для которых верно неравенство

$$|B(x, y)| \leq M \, |x| \, |y|$$

при любых $x \in X$, $y \in Y$.

Из определения нормы билинейного отображения B следует, что $\|B\| \geq 0$. Если $B = 0$, т.е. $B(x, y) = 0$ для любых $x \in X$ и $y \in Y$, то ясно, что $\|B\| = 0$. Пусть, напротив, $\|B\| = 0$. Тогда из равенства

$$|B(x, y)| \leq \|B\| \, |x| \, |y|$$

вытекает, что $B(x,y)=0$ для любых векторов $x\in X$, $y\in Y$.

Далее,

$$\|B_1+B_2\|=\sup_{|x|\le 1,\ |y|\le 1}|(B_1+B_2)(x,y)|=\sup_{|x|\le 1,\ |y|\le 1}|B_1(x,y)+B_2(x,y)|\le$$
$$\le\sup_{|x|\le 1,\ |y|\le 1}|B_1(x,y)|+\sup_{|x|\le 1,\ |y|\le 1}|B_2(x,y)|=\|B_1\|+\|B_2\|.$$

Аналогично получаем, что

$$\|\lambda B\|=|\lambda|\,\|B\|.$$

Введем теперь понятие линейного нормированного пространства, возможно, уже известное читателю ив курса линейной алгебры.

Определение 1. Пусть $X=\{x,y,z,\ldots\}$ — линейное множество элементов какой-либо природы. Если дано отображение

$$\|\cdot\|:\ X\to\mathbb{R}^+,$$

(где $\mathbb{R}^+$ — множество неотрицательных вещественных чисел), такое, что:

1) $\|x\|=0\ \Leftrightarrow\ x=0$,

2) $\|x+y\|\le\|x\|+\|y\|$,

3) $\|\lambda x\|=|\lambda|\,\|x\|$,

то X (точнее, пара $(X,\|\cdot\|)$) называемся *линейным нормированным пространством*, а числовая функция $\|\cdot\|$ — *нормой* элементов пространства X.

Примеры.

1. $\mathbb{R}^n$ есть линейное нормированное пространство с нормой $\|x\|=|x|=\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n}(x^i)^2}$.

2. Пространство $C(a,b)$ — линейное нормированное пространство с нормой $\|x(t)\|=\max\limits_{a\le t\le b}|x(t)|$.

Читатель без труда убедится, что в обоих случаях аксиомы 1)–3) нормы выполняются.

3. Пространство всех билинейных отображений

$$B:\ X\times Y\to Z$$

рассмотренное выше, есть линейное нормированное пространство с нормой

$$\|B\|=\sup_{|x|\le 1,\ |y|\le 1}|B(x,y)|.$$

В одном и том же линейном пространстве можно по-разному вводить нормы элементов. Так, в линейном пространстве непрерывных на $[a,b]$ функций можно ввести норму

$$\|x(t)\|_1=\int\limits_a^b|x(t)|\,dt.$$

Проверка аксиом нормы осуществляется без труда. Порченное пространство обозначим $\mathcal{L}_0(a,b)$; оно обладает другими свойствами, чем пространство $C(a,b)$.

Линейное нормированное пространство становится метрическим пространством, если положить

$$\rho(x,y) = \|x - y\|.$$

Рассмотрим еще одно линейное пространство. Пусть даны евклидовы пространства X, Y и Z и линейное отображение пространства X в пространство $\mathcal{L}(Y,Z)$ всех линейных операторов, действующих из Y в Z. Иными словами, для каждого $x \in X$ задан линейный оператор $L(x) : \ Y \to Z$, линейно зависящий от элемента x как от параметра. Например, $\mathcal{L}[\mathbb{R}^n, \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)]$ есть совокупность всех (m,n)-матриц $(a_{ij}(x))$, элементы которых зависят от параметров $x^1, x^2, \dots, x^n$ линейно.

Отображения $L(x) : \ Y \to Z$ можно складывать и умножать на вещественные числа, полагая

$$(L_1(x) + L_2(x))y = L_1(x)y + L_2(x)y, \qquad (\alpha L(x))y = \alpha L(x)y,$$

так что они образуют линейное пространство. Это пространство обозначим $\mathcal{L}[X, \mathcal{L}(Y,Z)]$.

В пространстве $\mathcal{L}[X, \mathcal{L}(Y,Z)]$ можно ввести норму для $L \in \mathcal{L}[X, \mathcal{L}(Y,Z)]$ положив $\|L\| = \sup\limits_{|x|\le 1} \|L(x)\|$. Так как $L(x) \in \mathcal{L}(Y,Z)$, то, в свою очередь, $\|L(x)\| = \sup\limits_{|y|\le 1} |L(x,y)|$. Следовательно,

$$\|L\| = \sup_{|x|\le 1} \left\{ \sup_{|y|\le 1} |L(x)y| \right\}.$$

Выполнение аксиом 1)–3) нормы проверяется без труда.

Имеет место следующая важная теорема.

Теорема 1. *Пространства $\mathcal{L}(X,Y;Z)$ и $\mathcal{L}(X, \mathcal{L}(Y,Z))$ изометричны и изоморфны.*

Доказательство. Пусть дано произвольное билинейное отображение $B \in \mathcal{L}(X,Y;Z)$. Каждому фиксированному $x \in X$ сопоставим отображение

$$L_x : \ Y \to Z,$$

определяемое формулой $L_x = B(x,\cdot)$, т.е. такое, что для любого $y \in Y$

$$L_x y = B(x,y).$$

Отображение L_x, очевидно, линейно, поэтому $L_x \in \mathcal{L}(Y,Z)$. Отображение Λ, переводящее x в L_x

$$\Lambda x = L_x = B(x,\cdot)$$

линейно по x, и поэтому $\Lambda \in \mathcal{L}(X, \mathcal{L}(Y,Z))$. Отображение Λ определяется по B однозначно.

Обратно, пусть $M \in \mathcal{L}(X, \mathcal{L}(Y,Z))$, $M(x) = C_x \in \mathcal{L}(Y,Z)$. Положив $C(x,y) = C_x y$ и заметив, что $C_x = M(x)$ линейно по x, а $C_x y$ линейно по y, будем иметь, что $C(x,y)$ есть билинейное отображение $X \times Y$ в Z, т.е. что $C \in \mathcal{L}(X,Y;z)$. Снова C определяется по M однозначно, и переход от C к M будет такой же, как переход от B к Λ. Равным образом переход от Λ к B строятся по тому же правилу, что и переход от M к C. Но это означает, что мы имеем взаимно однозначное соответствие $B \overset{\varphi}{\leftrightarrow} \Lambda$ между пространствами $\mathcal{L}(X,Y;z)$ и $\mathcal{L}(X, \mathcal{L}(Y,Z))$. Легко проверить, что

$$\varphi(\tau B + \sigma C) = \tau\varphi(B) + \sigma\varphi(C), \qquad \tau, \sigma \in \diagdown,$$

т.е. φ является линейным изоморфизмом. Далее,

$$\|\Lambda\| = \sup_{|x|\le 1} \|Lx\| = \sup_{|x|\le 1} \left\{ \sup_{|y|\le 1} |L_x y| \right\} = \sup_{|x|\le 1,\ |y|\le 1} |B(x,y)| = \|B\|.$$

Следовательно, отображение φ изометрично. Теорема доказана.

Аналогично билинейным определяются полилинейные отображеиия. Эти отображения

$$U:\ X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_k \to Y,$$

где X_i, $i = 1, 2, \ldots, k$, и Y — евклидовы пространства одинаковых или разных размерностей; $U(x_1, x_2, \ldots, x_k)$ линейно по каждому аргументу, при фиксированных значениях других аргументов. Тогда полилинейным отображениям декартова произведения k пространств взаимно однозначно соответствуют тензоры $(k+1)$-го ранга $\{\gamma^j_{i_1, i_2, \ldots, i_k}\}$, ковариантные по нижним индексам и контравариантные по верхнему индексу.

Как и ранее, убеждаемся, что полилинейные отображения непрерывны по совокупности аргументов, и для них можно ввести норму

$$\|U\| = \sup_{\|x_i| \le 1,\ i=1,2,\ldots,k} |U(x_1, x_2, \ldots, x_k)|,$$

равную значению этого отображения в некоторой точке $(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_k^0)$ декартова произведения $X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_k$, такой, что

$$|x_1^0| = |x_2^0| = \ldots = |x_k^0| = 1.$$

Определяя сумму и произведение на скаляр для полилинейных отображений так же, как для билинейных, приходим к линейному пространству $\mathcal{L}(X_1, X_2, \ldots, X_k; Y)$ полилинейных отображений $X_1 \times \ldots \times X_k$ в Y.

Наконец, отправляясь от пространства $\mathcal{L}(X_{k-1}, \mathcal{L}(X_k, Y))$, которое запишем в виде $\mathcal{L}[X_{k-1} \to \mathcal{L}(X_k, Y)]$, определим пространство

$$\mathcal{L}\{X_{k-2} \to \mathcal{L}[X_{k-1} \to \mathcal{L}(X_k, Y)]\},$$

элементами которого являются линейные операторы, отображающие пространство X_{k-2} в пространство $\mathcal{L}[X_{k-1} \to \mathcal{L}(X_k, Y)]$. Продолжая так далее, определим по индукции пространство

$$\mathcal{L}\{X_1 \to \mathcal{L}[X_2 \to \ldots \to \mathcal{L}(X_k, Y)\ldots]\}.$$

Теорема 2. *Пространство* $\mathcal{L}\{X_1 \to \mathcal{L}[X_2 \to \ldots \to \mathcal{L}(X_k, Y)\ldots]\}$ *изометрично и изоморфно пространству* $\mathcal{L}(X_1, X_2, \ldots, X_k; Y)$.

Доказательство этой теоремы опускаем.

Введем понятие о дифференциалах и производных высшего порядка. Пусть множество $A \subset \mathbb{R}^n$ открыто и отображение $f : A \to \mathbb{R}^m$ дифференцируемо в некоторой окрестности $U(x_0)$ точки $x_0 \in A$. Предположим, что дифференциал этой функции $df(x, h)$ при любом фиксированном $h \in \mathbb{R}^n$, как функция от x, дифференцируем в точке x_0, т.е. существует линейный оператор $\Lambda_{x_0}(h) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, такой, что для всех $x \in \mathbb{R}^n$, для которых $x_0 + k \in U(x_0)$, имеет место равенство

$$df(x_0 + k, h) - df(x_0, h) = \Lambda_{x_0}(h)k + \Omega,$$

где $\dfrac{\Omega}{|k|} \to 0$ при $k \to 0$.

Определение 2. Значение оператора $\Lambda_{x_0}(h)$ в точка h, т.е. $\Lambda_{x_0}(h)h$ называется *дифференциалом второго порядка порядка* или, короче, *вторым дифференциалом* отображения f в точке x_0 и обозначается $d^2 f(x_0, h)$. Итак,

$$d^2 f(x_0, h) = \Lambda_{x_0}(h)h.$$

Таким образом,

$$df(x_0 + h, h) - df(x +_0, h) = d^2 f(x_0, h) + \Omega,$$

где $\dfrac{\Omega}{|h|} \to 0$ при $h \to 0$.

Выясним, что представляет собой второй дифференциал $d^2 f(x_0, h)$. Для этого рассмотрим сначала $\Lambda_{x_0}(h)k$.

Согласно определению, $\Lambda_{x_0}(h)k$ есть линейный по k оператор. Покажем, что $\Lambda_{x_0}(h)k$ линейно зависит и от h. Пусть $h = h_1 + h_2$. Равенство (5), записанное для h_1, h_2 и h, дает:

$$df(x_0 + k, h_1) - df(x_0, h_1) = \Lambda_{x_0}(h_1)k + \Omega_1,$$

$$df(x_0 + k, h_2) - df(x_0, h_2) = \Lambda_{x_0}(h_2)k + \Omega_2,$$

$$df(x_0 + k, h) - df(x_0, h_1) = \Lambda_{x_0}(h)k + \Omega_3,$$

где Ω_1, Ω_2, Ω_3 стремятся к нулю при $k \to 0$. Сложив два первых равенства и вычтя из из суммы третье, с учетом линейности $df(x, h)$ по h, найдем:

$$\Lambda_{x_0}(h_1)k + \Lambda_{x_0}(h_2)k - \Lambda_{x_0}(h)k + \Omega_1 + \Omega_2 - \Omega_3 = 0.$$

Последнее равенство верно для любых k. Полагая в нем $k = \varepsilon k_0$, где $k_0 \neq 0$, будем иметь:

$$\Lambda_{x_0}(h_1)k_0 + \Lambda_{x_0}(h_2)k_0 - \Lambda_{x_0}(h)k_0 + \frac{\Omega_1 + \Omega_2 - \Omega_3}{\varepsilon} = 0,$$

откуда при $\varepsilon \to 0$ получим:

$$\Lambda_{x_0}(h_1)k_0 + \Lambda_{x_0}(h_2)k_0 = \Lambda_{x_0}(h)k_0. \tag{6}$$

Если $k_0 = 0$, то $\Lambda_{x_0}(h)k_0 = \Lambda_{x_0}(h_i)k_0 = 0$, $i = 1, 2$ и равенство (6) снова имеет место. Таким образом, для любых $k_0 \in \mathbb{R}^n$

$$\Lambda_{x_0}(h_1)k_0 + \Lambda_{x_0}(h_2)k_0 = \Lambda_{x_0}(h)k_0.$$

Аналогичным образом можно доказать, что

$$\Lambda_{x_0}(\alpha h)k_0 = \alpha\Lambda_{x_0}(h)k_0.$$

Таким образом, $\Lambda_{x_0}(h)k$ есть значение билинейного отображения $B(x_0)$ на паре (h, k)

$$\Lambda_{x_0}(h)k = B(x_0)(h, k),$$

следовательно,

$$d^2f(x_0, h) = B(x_0)(h, h)$$

является значением квадратичного отображения $\mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}^n$.

Билинейное отображение $B(x_0)$ называется *второй производной отображения* f в точке x_0 и обозначается $f''(x_0)$. Значение этого билинейного отображения на паре (h, h) можно записать короче: $f''(x_0)h^2$. Таким образом,

$$d^2f(x_0, h) = f''(x_0)h^2.$$

Снова напомним читателю, что $f''(x_0)h^2$ есть лишь краткая запись значения квадратичного отображения на паре (h, h), а не значение отображения $f''(x_0)$ на «квадрате вектора» h, так как «квадрат вектора» h имеет смысла.

Билинейное отображение $B(x_0)$ можно рассматривать как элемент пространства $\mathcal{L}[\mathbb{R}^n, \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)]$. Покажем, что в случае, когда функция f дважды дифференцируема в точке x_0, производная f', как отображение $U(x_0)$ в $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$, дифференцируема в точке x_0 и

$$f'(x_0 + k) - f'(x_0) = f''(x_0)k + \eta,$$

где $\dfrac{\eta}{|k|} \to 0$ при $k \to 0$.

В самом деле,

$$\frac{|f'(x_0 + k)h - f'(x_0)h - B(x_0)(h, k)|}{|k|} \to 0$$

при любом фиксированном $h \in \mathbb{R}^n$ и $k \to 0$. Поэтому линейный оператор

$$A_k h = \frac{f'(x_0 + k) - f'(x_)) - B(x_0)k}{|k|}\, h,$$

зависящий от параметра k, таков, что $|A_k h| \to 0$ при $k \to 0$ для любого фиксированного $h \in \mathbb{R}^n$. Пусть e_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, — стандартный базис в $\mathbb{R}^n$. Так как $A_k e_i \to 0$, $i = 1, 2, \ldots, n$, то для любого числа $\varepsilon > 0$ найдется число $\delta > 0$, такое, что

$$|A_k e_i| < \frac{\varepsilon}{n}, \qquad i = 1, 2, \ldots, n,$$

при $|k| < \delta$. Возьмем произвольный вектор $h = \sum\limits_{i=1}^{n} h^i e_i$, такой, что $|h| \leq 1$. Тогда $|h^i| \leq 1$, $i = 1, 2, \ldots, n$, и

$$|A_k h| = \left| A_k \biggl(\sum_{i=1}^{n} h^i e_i \biggr) \right| = \left| \sum_{i=1}^{n} h^i A_k e_i \right| \leq \sum_{i=1}^{n} |h^i| \, |A_k e_i| < n \cdot \frac{\delta}{n} = \varepsilon$$

при $|k| < \delta$. Отсюда

$$\|A_k\| = \sup_{|h| \leq 1} \, |A_k h| \leq \varepsilon$$

при $|k| < \delta$, а это значит, что $\|A_k\| \to 0$ при $k \to 0$, т.е.

$$\frac{\|f'(x_0 + k) - f'(x_0) - B(x_0)k\|}{|k|} \to 0.$$

Это равенство означает, что отображение $f'(x)$ дифференцируемо в точке x_0 и

$$(f'(x_0))'_{x_0} k = B(x_0)k.$$

ПРИМЕРЫ.

4. Пусть отображение $f: \ \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ задается координатными функциями

$$f^1(x) = x^{1`} + x^2 + x^3, \qquad f^2(x) = (x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3 0^2.$$

Матрица производной этого отображения имеет вид $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2x^1 & 2x^2 & 2x^3 \end{pmatrix}$. Поэтому

$$df(x, h) = f'(x)h = \biggl(\sum_{i=1}^{3} h^i \biggr) e_1 + 2 \biggl(\sum_{i=1}^{3} x^i h^i \biggr) e_2,$$

где e_1 и e_2 — орты стандартного базиса. Следовательно,

$$df(x + k, h) - df(x, h) = 2 \biggl(\sum_{i=1}^{3} h^i k^i \biggr) e_2,$$

откуда

$$d^2 f(x, h) = 2 \biggl(\sum_{i=1}^{3} (h^i)^2 \biggr) e_2$$

и $\Omega = 0$.

Рекомендуем читателю показать, что верно и обратное, т.е. если отображение $f': \ U(x_0) \to \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ дифференцируемо в точке x_0, то f дважды дифференцируемо в этой точке и $d^2 f(x_0, h) = (f'(x_0)'_{x_0}(h, h)$. Важным свойством второй производной является ее симметричность.

ТЕОРЕМА 3. *Если отображение* $f: \ A \to \mathbb{R}^m$, $A \subset \mathbb{R}^n$, *дважды дифференцируемо в точке* $x \in A$, *то билинейное отображение* $f''(x)$ *симметрично, т.е.*

$$(f''(x)h)k = (f''(x)k)h.$$

Рассмотрим скалярную функцию скалярного аргумента

$$\varphi(t) = \langle f(x+th+k) - f(x+th), u\rangle, \qquad 0 \le t \le 1,$$

где u — произвольный фиксированный вектор из $\mathbb{R}^m$, а h и k выбраны так, что $x+th+k$, $x+th$ принадлежат окрестности точки x, в которой f' существует. Легко проверить, что $\varphi(t)$ непрерывна на $[0,1]$, дифференцируема в $(0,1)$ и

$$\varphi'(t) = \langle f'(x+thk)h - f'(x+th), u\rangle.$$

К функции $\varphi(t)$ применима теорема Лагранжа:

$$\varphi(1) - \varphi(0) = \varphi'(\theta), \qquad 0 < \theta < 1,$$

откуда, обозначив $f(x+h+k) - f(x+h) - f(x+k) + f(x)$ через $A(h,k)$, получим

$$\langle A(h,k), u\rangle = \langle f'(x+\theta h+k) - f'(x+\theta h)h, u\rangle. \tag{7}$$

Так как функция f дважды дифференцируема в точке x, то

$$\begin{gathered}
f'(x+\theta h+k)h - f'(x+\theta h)h = \\
= [f'(x+\theta h+k)h - f'(x)h] - [[f'(x+\theta h)h - f'(x)h] = \\
= f''(x)(h, \theta h+k) + \omega_1 h - f''(x)(h,\theta h) - \omega_2 h = f''(x)(h,k) + \omega_1 h - \omega_2 h,
\end{gathered} \tag{8}$$

где ω_1 и ω_2 — линейные операторы из $\mathbb{R}$ в $\mathbb{R}^m$, такие, что

$$\frac{\|\omega_1\|}{|\theta h+k|} \to 0, \quad \frac{\omega_2\|}{|\theta h|} \to 0 \qquad \text{при} \quad h,k \to 0$$

(см. с. 39). Из (7) и (8) следует:

$$\langle A(h,k), u\rangle = \langle f''(x)(h,k), u\rangle + \langle \omega_1 h, u\rangle - \langle \omega_2 h, u\rangle. \tag{9}$$

Поменяв ролями h и k, получим:

$$\langle A(k,h), u\rangle = \langle f''(x)(k,h), u\rangle + \langle \omega_3 h, u\rangle - \langle \omega_4, u\rangle, \tag{10}$$

где

$$\frac{\|\omega_3\|}{|\theta k+h|} \to 0, \quad \frac{\omega_2\|}{|\theta k|} \to 0 \qquad \text{при} \quad k,h \to 0.$$

Вычтя (10) из (9) и заметив, что $A(k,h) = A(h,k)$ найдем:

$$\langle f''(x)(h,k) - f''(x)(k,h), u\rangle = \langle \omega_1 h, u\rangle - \langle \omega_2 h, u\rangle - \langle \omega_3 k, u\rangle + \langle \omega_4 k, u\rangle,$$

откуда

$$|\langle f''(x)(h,k) - f''(x)(k,h), u\rangle| \le [(\|\omega_1\| + \|\omega_2\|)|h| + (\|\omega_3\| + \|\omega_4\|)|k|]|u|. \tag{11}$$

Так как $\|\omega_1\| = o(|\theta h+k|)$, то для достаточно малых h и k

$$\|\omega_1\| < \varepsilon|\theta h+k| < \varepsilon(|h|+|k|),$$

где $\varepsilon \to 0$ при $h, k \to 0$. Аналогично $\|\omega_i\| < \varepsilon(|h| + |k|)$, $i = 2, 3, 4$. Поэтому в силу (11) будем иметь

$$|\langle f''(x)(h, k) - f''(x)(k, h), u\rangle| \leq< 4\varepsilon(|h| + |k|)^2|u|, \tag{12}$$

где $\varepsilon \to 0$ при $h, k \to 0$.

Положим $h = th_0$, $k = tk_0$, где h_0, k_0 — произвольные фиксированные векторы из $\mathbb{R}^n$ и $t \to 0$. Подставив эти значения в (12), сократив обе части неравенства на t^2 и перейдя затем к пределу при $t \to 0$, получим

$$\langle f''(x)(h_0, k_0) - f''(x)(k_0, h_0), u\rangle = 0.$$

Так как u — произвольный вектор из $\mathbb{R}^m$, то

$$f''(x)(h_0, k_0) - f''(x)(k_0, h_0) = 0,$$

и теорема доказана.

Посмотрим, как выражается вторая производная отображения f через производные координатных функций f^i, $i = 1, 2, \ldots, m$, этого отображения. Прежде всего, согласно формуле (10) из § 2 данной главы, имеем для любого h, полагая для краткости $f'(x)h = \varphi_h(x)$:

$$\varphi_h(x) = f'(x)h = \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f^1}{\partial x^i} h^i, \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f^2}{\partial x^i} h^i, \ldots, \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f^m}{\partial x^i} h^i\right),$$

так что координатные функции отображения $\varphi_h(x)$ будут

$$\varphi_h^j(x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f^j}{\partial x^i} h^i, \qquad j = 1, 2, \ldots, m.$$

В частности, полагая $h = e_k$, находим:

$$\varphi_{e_k}(x) = \left(\frac{\partial f^1}{\partial x^k}, \frac{\partial f^2}{\partial x^k}, \ldots, \frac{\partial f^m}{\partial x^k}\right).$$

Если отображение f дважды дифференцируемо в некоторой точке x, то функции $\varphi_{e_k}(x)$ дифференцируема в этой точке, а это значит, что дифференцируемы все координатные функции отображения φ_{e_k}, следовательно, существуют все вторые частные производные $\dfrac{\partial^2 f^j}{\partial x^k \partial x^l}$, $j = 1, 2, \ldots, m$, $k, l = 1, 2, \ldots, n$. Поэтому на основании формулы (10) из § 2 этой главы

$$f''(x)(h, k) = \varphi_h'(x)k = \sum_{j=1}^{m} \left[\sum_{l=1}^{n} D_l \varphi_h^j(x) k^l\right] e_j' =$$

$$= \sum_{j=1}^{m} \left[\sum_{s=1}^{n} D_s \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f^j}{\partial x^i} h^i\right)\right] k^l e_j' = \sum_{j=1}^{m} \left(\sum_{s=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 f^j}{\partial x^i \partial x^k} h^i l^l\right) e_j',$$

откуда следует, что тензором третьего ранга, соответствующем отображению $f''(x)$ является

$$\frac{\partial^2 f^j}{\partial x^i \partial x^l} \qquad j = 1, 2, \ldots, m, \quad i, k = 1, 2, \ldots, n.$$

Обратно, если все координатные функции f^j, $j = 1, 2, \ldots, m$, отображения f дважды дифференцируемы в некоторой точке $x \in \mathbb{R}^n$, то само отображение также дважды дифференцируемо в точке. Действительно, в этом случае дифференцируемы все функции отображения:

$$\varphi_h(x) = \left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial f^1}{\partial x^i} h^i, \sum_{i=1}^n \frac{\partial f^2}{\partial x^i} h^i, \ldots, \sum_{i=1}^n \frac{\partial f^m}{\partial x^i} h^i \right).$$

Это означает, в силу следствия 1 теоремы 1| из § 2, дифференцируемость по x отображения $\varphi_h(x)$ и, следовательно, как показано выше, двукратную дифференцируемость отображения f.

Из симметричности второй производной $f''(x)$ легко вывести, что $\dfrac{\partial^2 f^j}{\partial x^i \partial x^l} = \dfrac{\partial^2 f^j}{\partial x^l \partial x^i}$. В самом деле,

$$(f''(x)h)k = \sum_{j=1}^m \left(\sum_{l=1}^n \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 f^j}{\partial x^i \partial x^l} h^i h^l \right) e'_j,$$

$$(f''(x)k)h = \sum_{j=1}^m \left(\sum_{i=1}^n \sum_{l=1}^n \frac{\partial^2 f^j}{\partial x^l \partial x^i} k^l h^i \right) e'_j.$$

Приравняв коэффициенты при одинаковых ортах в правых частях этих равенств, получим, что для любых: $\{h^i\}$ и $\{k^l\}$

$$\sum_{l=1}^n \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 f^j}{\partial x^i \partial x^l} h^i k^l = \sum_{i=1}^n \sum_{l=1}^n \frac{\partial^2 f^j}{\partial x^l \partial x^i} k^i h^l$$

при всех $j = 1, 2, \ldots, m$ и любых достаточно малых h и k, откуда, в свою очередь, следует, что

$$\frac{\partial^2 f^j}{\partial x^i \partial x^l} = \frac{\partial^2 f^j}{\partial x^l \partial x^i} \qquad j = 1, 2, \ldots, m, \quad i, l = 1, 2, \ldots, n,$$

— результат, который был уже отмечен ранее.

Определим теперь по индукции производные и дифференциалы высших порядков. Отображение $f : A \to \mathbb{R}^m$, где $A \subset \mathbb{R}^n$ и открыто, называется p раз дифференцируемым в A, если отображение

$$f^{(p-1)} : A \to \mathcal{L}_{p-1}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$$

дифференцируемо в A. Производная от $f^{(p-1)}(x)$ называется *p-й производной* отображения f и обозначается $f^{(p)}(x)$ или $D^p f(x)$. Эта производная для каждого $x \in A$ есть элемент пространства $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$. Выражение $f^{(p)}(x)h^p$ назовем *дифференциалом* p-го порядка и обозначим $d^p f(x, h)$.

Тем же путем, что и выше, убеждаемся, что производная по x от функции $\varphi(x) = f^{(p-1)}(x)(h_1, h_2, \ldots, h_{p-1})$, если она существует, равна $f^{(p)}(x)(h_1, h_2, \ldots, h_p)$, и что если f дифверенцируема p раз, то $\varphi(x)$ дифференцируема.

Методом математической индукции получаем следующие утверждения.

1. *Если функция f является p раз дифференцируемой на A, а $D^p f$ является q раз дифференцируемой на этом же множестве, то f будет $p+q$ раз дифференцируема на A.*

2. *Для того чтобы отображение $f = (f^1, f^2, \ldots, f^m)$ было p раз дифференцируемо, необходимо и достаточно, чтобы координатные функции f^j были p раз дифференцируемы. При этом*

$$D^p f = (D^p f^1, D^p f^2, \ldots, D^p f^m).$$

3. Теорема о дифференцируемости сложной функции. *Пусть $f: A \to \mathbb{R}^m$, $A \subset \mathbb{R}^n$, $g: B \to \mathbb{R}^k$, $B \subset \mathbb{R}^m$, $f^{-1}(B) \cap A \neq emptyset$. Тогда если f и g p раз дифференцируемы на A и B соответственно, то $h = g \circ f$ также p раз дифференцируемо на $f^{-1}(A) \cap B$.*

Утверждение теоремы нами было доказано для $p = 1$, в результате чего была получена формула

$$h'(x) = g'[f(x)] \circ f'(x). \tag{13}$$

Предположим, что утверждение верно для $(p-1)$ раз дифференцируемых функций. Если f и g являются p раз дифференцируемыми отображениями, то f' и g' будут $(p-1)$ раз дифференцируемыми, и тогда, в силу принципа индукции и формулы (13), отображение $h'(x)$ будет также $(p-1)$ раз дифференцируемо, т.е. h будет p раз дифференцируемо.

Выведем теперь формулу Тейлора для векторных функций векторного аргумента. Пусть на открытом множестве $A \subset \mathbb{R}^n$ задано отображение $f: A \to \mathbb{R}^m$, имеющее все производные до $(p+1)$-го порядка включительно. Пусть $x, x+h \in A$; предположим, кроме того, что отрезок $x + th$, $0 \leq t \leq 1$, принадлежит множеству A.

Введем функцию $\varphi(t) = f(x+th)$, отображающую $[0,1]$ в $\mathbb{R}^m$. По теореме о дифференцировании сложной функции, функция $\varphi(t)$ имеет на $[0,1]$ производные до $(p+1)$-го порядка включительно. Поэтому скалярная функция скалярного аргумента $\psi(t) = \langle \varphi(t), y \rangle$, где y — произвольный элемент пространства $\mathbb{R}^m$, также дифференцируемая $(p+1)$ раз и поэтому может быть разложена по формуле Тейлора:

$$\psi(1) = \psi(0) + \psi'(0) + \frac{1}{2!}\psi''(0) + \ldots + \frac{1}{p!}\psi^{(p)}(0) + \frac{1}{(p+1)!}\psi^{(p+1)}(\tau), \qquad 0 < \tau < 1. \tag{14}$$

Легко видеть, что $\psi^{(k)}(t) = \langle \varphi^{(k)}(t), y \rangle$. Следовательно, согласно формуле (14),

$$\langle f(x+h), y \rangle \langle f(x), y \rangle + \langle f'(x)h, y \rangle + \frac{1}{2!}\langle f''(x)h^2, y \rangle + \ldots + \frac{1}{p!}\langle f^{(p)}(x)h^p, y \rangle +$$
$$+ \frac{1}{(p+1)!}\langle f^{(p+1)}(x + \tau_y h)h^{p+1}, y \rangle,$$

где $0 < \tau_y < 1$ и в общем случае τ_y зависит от y.

Положим

$$f(x+h) - f(x) - f'(x)h - \frac{1}{2!}h^2 - \ldots - \frac{1}{p!}f^{(p)}(x)h^p = R_p(f,x,h).$$

Из предыдущего равенства следует, что для любого $y \in \mathbb{R}^m$

$$\langle R_p(f,x,h), y\rangle = \frac{1}{(p+1)!}\langle f^{(p+1)}(x+\tau_y h)h^{p+1}, y\rangle.$$

Пусть $(p+1)$-я производная отображения f ограничена на A и $M = \sup\limits_{z\in A} \|f^{(p+1)}(z)\|$. Тогда для любого $y \in \mathbb{R}^m$

$$|\langle R_p(f,x,h), y\rangle| \le \frac{1}{(p+1)!}|f^{(p+1)}(x+\tau_y h)h^{p+1}|\,|y| \le$$

$$\le \frac{1}{(p+1)!}\|f^{(p+1)}(x+\tau_y h)\|\,|h|^{p+1}|y| \le \frac{1}{(p+1)!}M|h|^{p+1}|y|.$$

Полагая $y = R_p(f,x,h)$, получим:

$$|R_p(f,x,h)|^2 \le \frac{M}{(p+1)!}|h|^{p+1}|R_p(f,x,h)|$$

или

$$|R_p(f,x,h)| \le \frac{M}{(p+1)!} + h|^{p+1}.$$

Итак, если отображение $f:\ A \to \mathbb{R}^m$ дифференцируемо $(p+1)$ раз на A и $(p+1)$-я производная f на A ограничена, то для всех достаточно малых h

?

$$f(x+h) = f(x) + f'(x)h + \frac{1}{2!}f''(x)h^2 + \ldots + \frac{1}{p!}f^{(p)}(x)h^p + R_p(f,x,h),$$

где

$$|R_p(f,x,h)| \le \frac{1}{(p+1)!}\sup_{z\in A}\|f^{(p+1)}(z)\|\,|h|^{p+1}.$$

Это и есть формула Тейлора для векторных функций векторного аргумента.

§ 5. Условный экстремум

Часто возникает необходимость нахождения экстремума функции $f:\ G \to \mathbb{R}$ при наличии некоторых дополнительных ограничений на переменные $x^1, x^2, \ldots, x^n$, т.е. экстремума сужения функции f на некоторое подмножество H области G. Остановимся на случае, когда дополнительные условия задаются системой равенств

$$g^i(x^1, x^2, \ldots, x^n) = 0, \qquad i = 1, 2, \ldots, m,\ m < n, \tag{1}$$

где g^i непрерывно дифференцируемы на G.

Систему равенств (1) можно записать в ладе

$$g(x) = 0$$

где $g:\ G \to \mathbb{R}^m$ — отображение, определяемое координатными функциями $g^1, g^2, \ldots, g^m$. Если

$$D = \det\left(\frac{\partial g^i}{\partial x^j}\right) \neq 0 \qquad i = 1, 2, \ldots, m,\ j = n - m + 1, n - m + 2, \ldots, n, \tag{2}$$

то, по теореме о неявных функциях, переменные $x^{n-m+1}, \ldots, x^n$ можно выразить как функции от $x^1, x^2, \ldots, x^{n-m}$. Подставив значения

$$\begin{aligned} x^{n-m+1} &= \varphi_1(x^1, x^2, \ldots, x^{n-m}), \\ x^{n-m+2} &= \varphi_2(x^1, x^2, \ldots, x^{n-m}), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x^n &= \varphi_m(x^1, x^2, \ldots, x^{n-m}) \end{aligned}$$

в функцию f, придем к задаче отыскания экстремума функции

$$f(x^1, x^2, \ldots, x^{n-m}, \varphi_1(x^1, x^2, \ldots, x^{n-m}), \ldots, \varphi_m(x^1, x^2, \ldots, x^{n-m}))$$

без дополнительных условий, т.е. к задаче на безусловный экстремум, рассмотренный в § 5 гл. XI. Однако при исследовании на условный экстремум конкретных функций метод прямого исключения зависимых переменных часто оказывается громоздким или даже неосуществимым. Поэтому укажем иной путь решений этих задач, известный под названием *метода множителей Лагранжа.*

Итак, требуется отыскать экстремум дифференцируемой функции $f:\ G \to \mathbb{R}$ на подмножестве $H \subset G$, определяемом уравнением

$$g(x) = 0, \qquad x \in G,$$

где g также дифференцируемо и выполняется условие (2).

Если в точке $x_0 = (x_0^1, x_0^2, \ldots, x_0^n) \in H$ функция f имеет экстремум, то $df(x_0, dx) = 0$, т.е.

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x^i}\, dx^i = 0. \tag{3}$$

При этом, в силу инвариантности формы первого дифференциала, безразлично, все ли переменные $x^1, x^2, \ldots, x^n$ независимы или некоторые из них являются функциями остальных. Однако в последнем случае не все дифференциалы можно считать произвольными и из (3) не следует, что все частные производные $\dfrac{\partial f}{\partial x^i}$ в точке x_0 равны нулю, как это было в задаче на безусловный экстремум.

Наличие уравнений связи (1) позволяет исключить из правой части равенства (3) дифференциалы зависимых переменных. Дифференцируя равенство $g(x) = 0$, получим:

$$dg(x_0, dx) = 0. \tag{4}$$

Но

$$dg(x_0, dx) = (dg^1(x_0, dx), dg^2(x_0, dx), \dots, dg^m(x_0, dx)) \qquad k = 1, 2, \dots, m$$

и из равенства (4) получается система уравнений

$$dg^k(x_0, dx) = 0, \qquad k = 1, 2, \dots, m$$

т.е. система

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial g^k}{\partial x^i} dx^i = 0, \qquad k = 1, 2, \dots, m. \tag{5}$$

Умножим k-е из равенств (5) на не определенный пока множитель λ_k и сложим полученные равенства с равенствами (3). Тогда

$$\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial x^i} + \sum_{k=1}^{m} \lambda_k \frac{\partial g^k}{\partial x^i} \right) dx^i = 0. \tag{6}$$

Выберем $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ так, чтобы коэффициенты $\left(\frac{\partial f}{\partial x^i} + \sum_{k=1}^{m} \lambda_k \frac{\partial g^k}{\partial x^i} \right)$ при дифференциалах dx^i, $i = n - m + 1, n - m + 2, \dots, n$ обращались в нуль, т.е. так, чтобы $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ удовлетворяли системе уравнений

$$\begin{array}{c}
\sum_{k=1}^{m} \lambda_k \frac{\partial g^k}{\partial x^{n-m+1}} = -\frac{\partial f}{\partial x^{n-m+1}}, \\
\sum_{k=1}^{m} \lambda_k \frac{\partial g^k}{\partial x^{n-m+2}} = -\frac{\partial f}{\partial x^{n-m+2}} \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
\sum_{k=1}^{m} \lambda_k \frac{\partial g^k}{\partial x^{n}} = -\frac{\partial f}{\partial x^{n}}.
\end{array} \tag{7}$$

Такие $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ и притом не все тождественно равные нулю существуют, так как детерминант системы

$$D = \det \left(\frac{\partial g^k}{\partial x^j} \right) \qquad k = 1, 2, \dots, m; \quad j = n - m + 1, \dots, n,$$

по условию, отличен от нуля и не все правые части в равенствах (7) равны нулю. (Если $\frac{\partial f}{\partial x^{n-m+1}} = \frac{\partial f}{\partial x^{n-m+2}} = \dots = \frac{\partial f}{\partial x^{n}} = 0$, то f не зависит от $x^{n-m+1}, x^{n-m+2}, \dots$, x^n, т.е. является функцией лишь от $x^1, x^2, \dots, x^{n-m}$, и наша задача превращается в задачу на безусловный экстремум.) Так как остальные дифференциалы $dx^1, dx^2, \dots, dx^{n-m}$ независимы, то, чтобы удовлетворялось равенство (6), коэффициенты при них также должны быть равными нулю, и тогда получаем систему уравнений

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial f}{\partial x^1}+\sum_{k=1}^{m}\lambda_k\frac{\partial g^k}{\partial x^1}=0,\\
&\frac{\partial f}{\partial x^2}+\sum_{k=1}^{m}\lambda_k\frac{\partial g^k}{\partial x^2}=0\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&\frac{\partial f}{\partial x^{n-m}}+\sum_{k=1}^{m}\lambda_k\frac{\partial g^k}{\partial x^{n-m}}=0.
\end{aligned}\tag{8}$$

Совокупность равенств (7) и (8) вместе с уравнениями связи (1) образует систему из $(n+m)$ уравнений для определения $(n+m)$ величин $x_0^1,\dots,x_0^n,\lambda_1,\dots,\lambda_m$. Можно доказать, что эта система разрешима.

Резюмируя изложенное, получаем следующее утверждение.

Теорема. *Пусть в точке* $x_0=(x_0^1,x_0^2,\dots,x_0^n)$ *функция* $f(x^1,x^2,\dots,x^n)$ *имеет локальный экстремум; предположим, что переменные* $x^1,x^2,\dots,x^n$ *удовлетворяют дополнительным условиям*

$$g(x)=(g^1(x),g^2(x),\dots,g^m(x))=0.$$

Пусть, кроме того, функции f *и* g^i *дифференцируемы в окрестности точки* x_0. *Тогда существуют такие множители* $\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_m$, *что точка* x_0 *является стационарной точкой функции*

$$F=f+\sum_{k=1}^{m}\lambda_k g^k$$

уже без всяких условий, т.е. обращает в нуль все частные производные этой функции.

Чтобы подучить достаточные условия условного экстремума, предположим дополнительно, что функции f и g^i, $i=1,2,\dots,m$, дважды непрерывно дифференцируемы в окрестности стационарной точки x_0.

В силу условий связи при переходе от точки x_0, удовлетворяющей условиям (1), к точке x_0+dx, удовлетворяющей тем же условиям, имеем:

$$\Delta f(x_0)=f(x_0+dx)-f(x_0)=F(x_0+dx)-F(x_0)=\Delta F(x_0),$$

т.е. точка x_0 есть точка экстремума функции f при наличии связи (1) тогда и только тогда, когда она является точкой безусловного экстремума функции F. Таким образом, мы приходим к задаче исследования знака d^2F в стационарной точке x_0. Так как не все аргументы функции F независимы, то

$$d^2F=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial^2F}{\partial x^i\partial x^j}dx^idx^j+\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial F}{\partial x^i}d^2x^i.$$

Но в стационарной точке функции F $\dfrac{\partial F}{\partial x^i} = 0$, $i = 1, 2, \dots, n$, и поэтому

$$d^2F = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 F}{\partial x^i \partial x^j} dx^i dx^j. \tag{9}$$

Так как знак этой квадратичной относительно dx^i формы нам надо знать при наличии условия (1), то в правой части (9) необходимо заменить $dx^{n-m+1}, \dots, dx^n$ их выражениями через $dx^1, dx^2, \dots, dx^{n-m}$, найденными из системы (5). Это можно сделать, так как по предположению, в точке x_0

$$D = \det\left(\frac{\partial g^k}{\partial x^i}\right) \neq 0, \qquad k = 1, 2, \dots, m, \quad i = n-m+1, \dots, n.$$

Примеры.

1. Найти экстремум функции $f(x) = ax^1 + bx^2 + cx^3$, $a, b, c > 0$, при условии $(x^1)^2 + (x^2 0^2 + (x^3)^2 = 1$.

По правилу Лагранжа, ищем безусловный экстремум функции

$$F(x) = ax^1 + bx^2 + cx^3 + \lambda[(x^1)^2 + (x^2 0^2 + (x^3)^2 - 1].$$

Приравняв к нулю частные производные функции F, получим:

$$a + 2\lambda x^1 = 0,$$
$$b + 2\lambda x^2 = 0,$$
$$c + 2\lambda x^3 = 0.$$

Отсюда

$$\frac{a}{x^1} = \frac{b}{x^2} = \frac{c}{x^3} = -2\lambda.$$

Поэтому

$$x^2 = \frac{b}{a}x^1, \quad x^3 = \frac{c}{a}x^1, \quad (x^1)^2[a^2 + b^2 + c^2] = a^2,$$

Следовательно,

$$x^1_{1,2} = \pm\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}},$$
$$x^2_{1,2} = \pm\frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}},$$
$$x^3_{1,2} = \pm\frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

Ясно, что при положительных значениях x^1, x^2, x^3 аргументов функция $f(x^1, x^2, x^3)$ принимает наибольшее, а при отрицательных значениях x^1, x^2, x^3 наименьшее значение.

Покажем, как с помощью метода множителей Лагранжа привести квадратичную форму к каноническому виду. Предварительно напомним, что если в $\mathbb{R}^n$ взять произвольное m-мерное, $m < n$, подпространство M, то $\mathbb{R}^n = M \cdot + L = \{x + y | \ x \in$

$M,\ y \in L\}$, где L есть $(n-m)$-мерное подпространство $\mathbb{R}^n$, ортогональное M (т.е. каждый вектор из L ортогонален каждому вектору из M). Доказательство этого факта содержитон в учебниках линейной алгебры.

Рассмотрим следующую задачу: найти экстремумы квадратичной формы $K(x) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x^i y^j$ при дополнительном условии $\sum_{i=s}^{m}(x^i)^2 = 1$ или, что все равно, при условии $|x| = 1$. Будем предполагать, что $K(x)$ не нулевая форма и потому или $\alpha = \inf\limits_{|x|=1} K(x)$, или $\beta = \sup\limits_{|x|=1} K(x)$ отличны от иуда. Положим $\lambda_1 = \max\ \{|\alpha|, |\beta|\}$, и пусть, например, $|\alpha| > |\beta|$ и $\alpha < 0$. Так как функция $K(x)$ непрерывна на $\mathbb{R}^n$, а множество $S = \{x|\ |x| = 1\}$ компактно, то на G существует вектор x_1,для которого $K(x_1) = \alpha$. Но тогда найдется множитель λ_1, такой, что

$$\frac{\partial}{\partial x^i}\left\{K(x) - \lambda_1 \sum_{i=1}^{n}(x^i)^2\right\} = 0$$

или

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_1^j - \lambda_1 x_1^j = 0, \qquad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{10}$$

Умножив i-е равенство на x_1^i, и просуммировав полученные равенства, найдем:

$$K(x_1) = \lambda_1 = \alpha,$$

т.е. λ_1 совпадает по абсолютной величине с $\max\ |K(x)|$.

Пусть $B(x,y) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x^i y^j$ — симметрическая билинейная форма, соответствующая квадратичной форме $K(x)$. Если обозначить через A линейный оператор, определенный для $x \in \mathbb{R}^n$ равенством

$$Ax = \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x^j\right)e_i,$$

где $e_1, e_2, \ldots, e_n$ — стандартный базис в $\mathbb{R}^n$, то $B(x,y) = \langle Ax, y\rangle = \langle x, Ay\rangle$ и $K(x) = \langle Ax, x\rangle$. Равенство (9) означает тогда, что $Ax_1 = \lambda_1 x_1$, т.е. x_1 есть собственный вектор оператора A, соответствующий собственному значению λ_1.

Пусть L_1 есть $(n-1)$-мерное подпространство $\mathbb{R}^n$, ортогональное прямой $M_1 = \{tx_1|\ -\infty < t < \infty\}$. Если $y \in L_1$, то $\langle Ay, x_1\rangle = \langle y, Ax_1\rangle = \lambda_1\langle x_1, y\rangle = 0$, т.е. $Ay \in L$. Поэтому к оператору, рассматриваемому на $(n-1)$-мерном евклидовом пространстве L_1, можно применить предыдущее построение.

Пусть $\alpha_1 = \inf\limits_{S\cap L_1} K(x)$, $\beta_1 = \sup\limits_{S\cap L_1} K(x)$ и $\lambda_2 = \max\ \{|\alpha_1|, |\beta_1|\}$, причем, например, $\lambda_2 = \beta_1 > 0$. Тогда, как и раньше, можно считать, что существует вектор $x_2 \in L_2$, $|x_2| = 1$, такой, что $Ax_2 = \lambda_2 x_2$, где $\lambda_2 = \beta_1$, т.е. мы нашли второй нормированный собственный вектор оператора A. Заметим, что x_2 ортогонален x_1 и

$$|\lambda_2| = \sup_{S\cap L_1}\ |K(x)| \le \sup_{S}\ |K(x)| \le |\lambda_1|.$$

Рассмотрим подпространство M_2, порожденное элементами x_1 и x_2, и его ортогональное дополнение L_2. Снова $A(L_2) \subset L_2$ и существует нормированный собственный вектор x_3 оператора A, ортогональный векторам x_1 и x_2. Для соответствующего собственного значения λ_3 имеем $|\lambda_3| < |\lambda_2|$ и т.д. Так как элементы $x_1, x_2, \ldots, x_k$ как попарно ортогональные, линейно независимы, то после конечного числа шагов $k \leq n$ процесс построения векторов $x_1, x_2, \ldots$ оборвется. При этом, если $k < n$, то на L_k форма $K(x)$ тождественно равна нулю, что возможно лишь, если $Ax \equiv 0$ на этом подпространстве, т.е. L_k есть подпространство нулей оператора A. Для любого $x \in \mathbb{R}^n$ имеется представление $x = \sum\limits_{i=1}^{k} \xi^i x_i + x_0$, $x_0 \in L_k$, откуда

$$Ax = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \xi_i x_i \quad \text{и} \quad K(x) = \langle Ax, x \rangle = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i (\xi^i)^2.$$

Если $x_{k+1}, \ldots, x_n$ — произвольный базис L_k, то $\{x_i\}_{i=1}^n$ будет базисом в $\mathbb{R}^n$, в котором квадратичная форма $K(x)$ принимает канонический вид:

$$K(x) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i (\xi^i)^2,$$

где λ_i или положительны, или отрицательны, или равны нулю.

Глава XIII

ЧИСЛОВЫЕ РЯДЫ

§ 1. Понятие ряда. Терминология

Мы уже имели возможность убедиться в важности понятия последовательности и ее сходимости. По существу, все основные понятия, введенный нами ранее, определялись через пределы некоторых последовательностей. Поэтому естественно подвергать более тщательному изучению вопрос о сходимости последовательностей. Одним из методов такого изучения является использование числовых рядов.

Заметим, прежде всего, что члены числовой последовательности

$$x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{n-1}, x_n, x_{n+1}, \ldots, \tag{1}$$

можно представить в виде

$$x_1 = x_1,\ x_2 = x_1 + (x_2 - x_1),\ x_3 = x_1 + (x_2 - x_1) + (x_3 - x_2),\ \ldots,$$

$$x_n = x_1 + (x_2 - x_1) + \ldots + (x_n - x_{n-1}),\ \ldots$$

Такое представление, хотя и является, на первый взгляд, более громоздким, обладает, однако, тем преимуществом, что в нем отражено изменение, связанное с переходом от данного члена к последующему. Если это представление продолжить неограничено, то всей последовательности естественно отнести выражение

$$x_1 + (x_2 - x_1) + \ldots + (x_n - x_{n-1}) + \ldots, \tag{2}$$

суммой первых n членов которого является n-й член данной последовательности. Введя обозначение

$$x_1 = a_1,\ x_2 - x_1 = a_2,\ \ldots,\ x_n - x_{n-1} = a_n,\ \ldots$$

перепишем выражение (2) в виде

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots\ . \tag{3}$$

Обратно, с каждым выражением вида (3) можно связать последовательность чисел $\{x_n\}$, определяемых равенствами

$$x_1 = a_1,\ x_2 = a_1 + a_2,\ \ldots,\ x_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n,\ \ldots\ .$$

Представление в виде (2) последовательности (1) часто оказывается более удобным для изучения вопроса о ее сходимости.

Введен следующие определения.

Выражение (3)

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots$$

в котором $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ — некоторые числа, назовем *числовым рядом.* Слагаемое a_n, отвечающие произвольному значению индекса n, назовем n-м, или общим, членом ряда. Для обозначения числового ряда будем также пользоваться символом $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$.

Суммы конечного числа первых членов ряда (3), т.е. суммы

$$s_1 = a_1,\ s_2 = a_1 + a_2,\ \ldots,\ s_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots,$$

называются *частичными суммами* ряда (3). Одновременно о рядом (3) будем рассматривать последовательность его частичных сумм.

Ряды, получаемые из (3) отбрасыванием первых членов, т.е.

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} a_k = a_{n+1} + a_{n+2} + \ldots + a_{n+p} + \ldots, \tag{4}$$

называются *остатками* ряда (3), а суммы последовательно конечного числа членов ряда (3), т.е. суммы вида

$$\sum_{k=n+1}^{n+p} a_k = a_{n+1} + a_{n+2} + \ldots + a_{n+p},$$

— его *отрезками.*

Пусть α — некоторое числа. Ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha a_n, \tag{5}$$

полученный из ряда (3) умножением всех его членов на α, называется *произведением* ряда (3) на число α.

Если даны два ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \tag{6}$$

и

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n, \tag{6$'$}$$

то ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$$

называется *суммой* рядов (6) и (6').

Определим понятие сходимости ряда. Пусть $\{s_n\}$ — последовательность частичных сумм ряда (3). Если существует предел (конечный или нет) этой последовательности, $s = \lim\ s_n$, то этот предел называют *суммой* ряда (3) и записывают в виде равенства

$$s = \sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

В случае, когда сумма s конечна, ряд (3) называют *сходящимся*, в противном случае (т.е. если s бесконечна или если у последовательности $\{s_n\}$ нет предела), рад (3) называется *расходящимся.*

ПРИМЕРЫ.

1. Рассмотрим ряд

$$1 + q + q^2 + \ldots + q^n + \ldots$$

составленный из членов геометрической прогрессии. Такой ряд называется *геометрическим.* Частичные суммы s_n этого ряда при $q \neq 1$ имеют вид

$$s_n = 1 + q + q^2 + \ldots + q^{n-1} = \frac{1 - q^n}{1 - q}.$$

Рассмотрим отдельно различные случаи, соответствующие различным значениям знаменателя q.

а) $|q| < 1$. Тогда $q^n \to 0$ при $n \to \infty$ и $a_n \to \dfrac{1}{1-q}$. Следовательно, при $|q| < 1$ геометрический ряд сходится, а его сумма равна $\dfrac{1}{1-q}$.

б) $|q| > 1$. При $n \to \infty$ также $|q|^n \to \infty$. Поэтому $s_n \to \infty$ при $q < -1$ делаясь то положительной, то отрицательной. Следовательно, в этом случае частичные суммы геометрического ряда не стремятся к конечному пределу, и ряд расходится.

в) $q = -1$. Тогда $s_{2k} = 0$, $s_{2k+1} = 1$ и геометрический ряд расходится.

г) $q = 1$. В этом случае в результате прямого подсчета получаем: $s_n = n$, т.е. $\lim\ s_n = \infty$. Геометрический ряд расходится.

2. Пусть $\{M_n\}$ — произвольная числовая последовательность, такая, что $M_n \to \infty$. Тогда ряд

$$M_1 + (M_2 - M_1) + \ldots + (M_n - M_{n-1}) + \ldots$$

расходится, а ряд

$$\frac{1}{M_1} + \left(\frac{1}{M_2} - \frac{1}{M_1}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{M_n} - \frac{1}{M_{n-1}}\right) + \ldots$$

сходится, и его сумма равна дулю. Беря различные такие последовательности $\{M_n\}$, мы можем построить сколько угодно как сходящихся, так и расходящихся рядов.

Легко видеть, что если ряд (3) сходится, то сходится и каждый его остаток (4). Действительно, обозначив через $R_p^{(n)}$ p-ю частичную сумму остатка (4), получим:

$$S_{n+p} = s_n + R_p^{(n)},$$

откуда

$$R_p^{(n)} = s_{n+p} - s_n.$$

Устремляя в этом равенстве p к ∞, мы видим, что правая его часть имеет конечный предел $s - s_n$ (n фиксировано), откуда следует, что остаток (4) сходящийся ряд, и его сумма $R^{(n)} = s - s_n$.

Верно и обратное утверждение: если сходится какой-нибудь остаток ряда (3), то сходится и сам ряд (3). В самом деле, из представления $s_{n+p} = s_n + R_p^{(n)}$ при некотором n следует, что существование конечного предела у последовательности $\{R_p^{(n)}\}$ имеет следствием наличие конечного предела у последовательности частичных сумм ряда (3). Следовательно, для выяснения вопроса о сходимости ряда (3) достаточно решить вопрос о сходимости какого-нибудь остатка этого ряда.

Этот факт формулируется следующим образом: *сходимость или расходимость ряда не изменится, если отбросить у ряда конечное число членов с начала или если приписать к началу ряда конечное число каких-либо членов.* В дальнейшем, если вопрос о сходимости ряда решается на основании того, что его члены, начиная с некоторого номера, обладают определенным свойством, мы можем без ограничения общности предполагать, что этим свойством обладают все члены ряда, начиная с первого.

Из равенства $R^{(n)} = s - s_n$ вытекает также, что последовательность сумм $\{R^{(n)}\}$ остатков сходящегося ряда имеет пределом нуль.

Отметим, что вместе с рядом (3) сходится и ряд (5), полученный умножением ряда (3) на произвольное число α, так как частичная сумма s'_n ряда (5) выражается через частичную сумму s_n ряда (3) равенством $s'_n = \alpha s_n$. Наконец, легко видеть, что в результате сложения сходящихся рядов получается сходящийся ряд с суммой, равной сумме складываемых рядов.

Из выражения n-го члена ряда через частичные суммы

$$a_n = s_n - s_{n-1}$$

вытекает, что для сходящегося ряда $a_n \to 0$ при $n \to \infty$, т.е. для сходимости числового ряда (3), необходимо, чтобы его общий член a_n стремился к нулю при неограниченном возрастании номера n (необходимое условие сходимости). Однако это условие не является достаточным.

В самом деле, рассмотрим ряд

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} + \ldots,$$

называемый *гармоническим рядом.* Возьмем подпоследовательность $\{s_{2^n}\}$ последовательности $\{s_n\}$ частичных сумм этого ряда. Имеем

$$s_2 = 1 + \frac{1}{2},\ s_4 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} > 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) = 1 + 2 \cdot \frac{1}{2},$$

$$s_8 = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8} > 1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}\right) = 1+3\cdot\frac{1}{2}$$

и т.д. Методом индукция убеждаемся, что $s_{2^n} > 1 + n \cdot \frac{1}{2}$, поэтому $s_{2^n} \to \infty$. Но тогда и вся последовательность $\{s_n\}$ не может иметь конечного предела, т.е. гармонический ряд расходится. Вместе с тем общий член этого ряда стремится к нулю.

Критерий Коши сходимости числовых последовательностей может быть переформулирован как общий признак сходимости числовых рядов:

Для сходимости числового ряда (3) *необходимо и достаточно, чтобы для каждого числа* $\varepsilon > 0$ *существовал такой номер* $N = N(\varepsilon)$*, что при всех* $n \geq N$ *и любом целом числе* $p > 0$ *выполнялось бы неравенство*

$$|a_{n+1} + a_{n+2} + \ldots + a_{n+p}| < \varepsilon.$$

В самом деле, согласно критерию Коши для числовых последовательностей, конечный предел последовательности $\{s_n\}$ частичных сумм ряда (3) существует тогда и только тогда, когда для любого числа $\varepsilon > 0$ найдется номер $N = N(\varepsilon)$, такой, что при всех $n, m \geq N$ выполняется неравенство $|s_n - s_m| < \varepsilon$.

Предположив для определенности $m > n$ и приняв $m = n + p$, получим:

$$|s_m - s_n| = |a_{n+1} + a_{n+2} + \ldots + a_{n+p}| < \varepsilon,$$

что доказывает справедливость критерия Коши для числовых рядов.

Как и для последовательностей, для рядов критерий Коши имеет больше теоретическое, чем практическое значение. Проверка сходимости конкретных рядов с помощью этого критерия, как правило, сопровождается громоздкими выкладками.

Отметим сочетательное свойство сходящихся рядов. Пусть ряд (3) сходится. Объединим последовательные слагаемые этого ряда в группы и построим новый ряд:

$$(a_1 + \ldots + a_{n_1}) + (a_{n_1+1} + \ldots + a_{n_2}) + \ldots + (a_{n_k+1} + \ldots + a_{n_{k+1}}) + \ldots, \qquad (7)$$

членами которого являются суммы членов, попавших в эти группы. Последовательность частичных сумм ряда (7) является, очевидно, подпоследовательностью $\{s_n\}$ частичных сумм ряда (3) и поэтому сходится к тому же пределу. Таким образом, в сходящемся ряде допускается объединение отдельных слагаемых в группы без изменения порядка следования членов, и это объединение не отражается на значении суммы ряда.

§ 2. Положительные ряды, признаки их сходимости

Назовем ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \qquad (1)$$

положительным, если начиная с некоторого номера n_0, т.е. при $n \geq n_0$, выполняемой неравенство $a_n \geq 0$. Поскольку нас интересует вопрос об условиях сходимости таких рядов, без ограничения общности будим предполагать, что неравенство $a_n \geq 0$ выполнено начиная с $n = 1$ (см. § 1 гл. XIII).

Последовательность частичных сумм положительного ряда, очевидно, является возрастающей и поэтому имеет конечный или бесконечный предел. Отсюда следует, что положительный ряд всегда имеет сумму.

Теорема 1. *Для сходимости положительного ряда* (1) *необходимо и достаточно, чтобы последовательность* $\{s_n\}$ *его частичных сумм была ограниченной.*

Действительно, если последовательность $\{s_n\}$ имеет конечный предел, то она является ограниченной, и обратно, если последовательность ограничена, то, будучи монотонной, она имеет конечный предел.

Примеры.

1. Рассмотрим положительный ряд

$$1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{n!} + \ldots .$$

В § 3 гл. II мы видели, что $1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{n!} < 3$. Таким образом, частичные суммы ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$ ограничены и, по теореме 1, этот ряд сходится.

Теорема 2 (интегральный признак Коши сходимости положительных рядов). *Пусть последовательность* $\{a_n\}$ *членов положительного ряда* (1) *является невозрастающей и* $a_n \to 0$, *и пусть* $f(x)$ *— непрерывная на промежутке* $[1, \infty)$ *невозрастающая функция, такая, что* $f(n) = a_n$. *Тогда для сходимости (расходимости) ряда* (1) *необходима и достаточна сходимость (расходимость) несобственного интеграла*

$$\int\limits_1^{\infty} f(x)\, dx. \tag{2}$$

Доказательство. В условиях теоремы интеграл с переменным пределом $F(x) = \int\limits_1^{\infty} f(x)\, dx$ являйся неубывающей функцией верхнего предела. Поэтому всегда существует предел этой функции при $x \to +\infty$. Для отыскания значения этого предела достаточно взять произвольную последовательность $x_n \to \infty$ и найти предел соответствующей последовательности $\{F(x_n)\}$. Положим $x_n = n$. Проинтегрировав очевидное неравенство $a_k \geq f(x) \geq a_{k+1}$ по промежутку $[k, k+1]$, получим неравенство

$$a_k \geq \int\limits_k^{k+1} f(x)\, dx \geq a_{k+1},$$

из которого непосредственно следует, что

$$\sum_{k=1}^{n} a_k \geq \int\limits_1^{n+1} f(x)\,dx \geq \sum_{k=2}^{n+1} a_k,$$

или

$$s_n \geq \int\limits_1^{n+1} f(x)\,dx \geq s_{n+1} - a_1, \tag{3}$$

где через s_n, как обычно, обозначена n-я частичная сумма ряда (1). На неравенства (3) вытекает, что если ряд (1) сходится, и значит, последовательность $\{s_n\}$ его частичных сумм ограничена, то ограниченной является и последовательность $\left\{F(n+1) = \int\limits_1^{n+1} f(x)\,dx\right\}$, а так как эта последовательность монотонна, то она сходится. Вместе с тем сходящимся оказывается и несобственный интеграл (2). Обратно, если сходится интеграл (2), то сходится и последовательность $\{F(n+1)\}$, а значит, эта последовательность является ограниченной, т.е. найдется такое число M, что при всех n $\int\limits_1^{n+1} f(x)\,dx \leq M$. Но тогда, в силу (3) $s_{n+1} \leq M + a_1$ при всех n, откуда вытекает ограниченность последовательности $\{s_n\}$ частичных сумм ряда (1), а следовательно, и сходимость этой последовательности к конечному пределу в силу ее монотонности.

Случай расходимости ряда (1) и несобственного интеграла (2) исчерпывается аналогичными рассуждениями, проведение которых представляется читателю в качестве упражнения.

Рассмотрим некоторые примеры.

Обобщенным гармоническим рядом называется ряд вида

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\lambda}. \tag{4}$$

Легко видеть, что этот ряд расходится при $\lambda \leq 0$. Для исследования сходимости ряда (4) при $\lambda > 0$ применим к нему интегральный признак Коши, полагая

$$f(x) = \frac{1}{x^\lambda}.$$

Ясно, что эта функция, как и ряд (4), при $\lambda > 0$ удовлетворят условиям теоремы 2. При $\lambda \leq 1$, как мы видели в § 10 гл. VIII, несобственный интеграл $\int\limits_1^{\infty} \frac{dx}{x^\lambda}$ расходится, а при $\lambda > 1$ он сходится. Отсюда вытекает, что ряд (4) сходится при $\lambda > 1$ и расходится при $\lambda \leq 1$. В частности, при $\lambda = 1$ получаем новое доказательство расходимости гармонического ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}. \tag{5}$$

Рассмотрим другой пример ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)\ln(n+1)} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}.$$

Взяв в качестве $f(x)$ функцию $f(x) = \dfrac{1}{x \ln x}$, найдем:

$$\int\limits_2^x \frac{dt}{t \ln t} = \ln(\ln t)\Big|_2^x = \ln lnx - \ln\ln 2.$$

Ясно, что $\displaystyle\int\limits_2^x \frac{dt}{t\ln t} \to \infty$ при $x \to \infty$. Отсюда следует, что ряд

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$$

расходится.

Приведем некоторые достаточные признаки сходимости (расходимости) положительных рядов, основанные на сравнении этих рядов с другими, относительно которых нам известна их сходимость (расходимость).

Теорема 3. *Пусть*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \tag{6}$$

и

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \tag{7}$$

— положительные ряды и при всех n *имеет место неравенство*

$$a_n \leq b_n \tag{8}$$

Тогда из сходимости ряда (7) *вытекает сходимость ряда* (6) *(и из расходимости ряда* (6) *следует расходимость ряда* (7)*).*

Доказательство. Обозначим через $s_n^{(a)}$ и $s_n^{(b)}$ частичные суммы рядов (6) и (7). В силу (8),

$$s_n^{(a)} \leq s_n^{(b)}. \tag{9}$$

Из этого неравенства в случае сходимости ряда (7) и, следовательно, ограниченности последовательности частичных сумм этого ряда, вытекает ограниченность последовательности частичных сумм ряда (6), т.е. сходимость ряда (6). (В случае расходимости ряда (1) из (9) вытекает расходимость ряда (7).)

Замечание 1. Так как умножение ряда на неравное нулю число не нарушает сходимости (расходимости) ряда, то в теореме 3 неравенство (8) можно заменить неравенством

$$a_n \leq \alpha b_n, \tag{10}$$

где α — некоторое положительное число. При этом достаточно предполагать, что это неравенство выполняется начиная с некоторого номера n_0.

Теорема 4. *Пусть существует конечный предел*

$$\lim \frac{a_n}{b_n} = L \neq 0.$$

Тогда оба ряда (6) *и* (7) *или сходятся, или расходятся.*

Доказательство. Возьмем $\varepsilon = \dfrac{L}{2}$. Найдется номер N, такой, что при $n \geq N$

$$\left|\frac{a_n}{b_n} - L\right| < \frac{L}{2},$$

т.е.

$$\frac{L}{2} < \frac{a_n}{b_n} < \frac{3L}{2}.$$

Отсюда

$$\frac{L}{2}\, b_n < a_n < \frac{3L}{2}\, b_n.$$

Если теперь предположить, что ряд (6) сходится, то в силу замечания 1 к теореме 3, ряд (7) также будет сходится, а если сходится ряд (7), то, в силу того же замечания, будет сходиться и ряд (6).

Замечание 2. Если число $L = 0$, то, как легко проверить, из сходимости ряда (7) вытекает сходимость ряда (6). Наконец, при $L = \infty$ расходимость ряда (6) влечет за собой расходимость ряда (7).

В качестве простого примера приложения этого признака возьмем в роли ряда (7) геометрическую прогрессию

$$\sum_{n=1}^{\infty} q^n \qquad (q > 0).$$

Как известно, этот ряд сходится при $q < 1$ и расходится при $q \geq 1$. Тогда, если начиная с некоторого номера

$$a_n \leq q^n \quad \text{или} \quad \sqrt[n]{a_n} \leq q,$$

то при $q < 1$ ряд (6) сходится. Если же существуют сколь угодно большие номера n_k, для которых выполняется неравенство

$$\sqrt[n_k]{a_{n_k}} \geq 1,$$

то ряд (6) оказывается расходящимся.

Итак, мы установили следующий признак.

Признак Коши. *Если начиная с некоторого номера имеет неравенство*

$$\sqrt[n]{a_n} \leq q,$$

где $q < 1$, *то ряд* (6) *сходится. Если же существуют сколь угодно большие номера* n_k, *для которых выполняется неравенство*

$$\sqrt[n_k]{a_{n_k}} \geq 1$$

то этот ряд расходится.

Часто признак Коши удобно применять в так называемой предельной форме: *если существует предел*

$$\lim \sqrt[n]{a_n} = q,$$

то ряд (1) *сходится при* $q < 1$ *и расходятся при* $q > 1$.

В случае $q = 1$ ничего определенного сказать нельзя. Действительно, в первом случае для любого q_1, такого, что $q < q_1 < 1$, найдется номер, начиная с которого $\sqrt[n]{a_n} \leq q_1$, а во втором случае начиная с некоторого номера будет выполняться неравенство $\sqrt[n]{a_n} \geq 1$, т.е. окажутся налицо условия только что доказанного признака Коши.

ПРИМЕРЫ.

2. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n^2}{2^n}$ сходится, так как для него

$$\lim \sqrt[n]{a_n} = \lim \sqrt[n]{\frac{n^2}{2^n}} = \frac{\lim \sqrt[n]{n^2}}{2} = \frac{1}{2}.$$

Часто бывает удобным следующий признак, выраженный в виде неравенства между отношениями последовательных членов сравниваемых рядов.

ТЕОРЕМА 5. *Если, начиная о некоторого номера выполняются неравенства*

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} \geq \frac{a_{n+1}}{a_n} \qquad \left(\text{или} \quad \frac{b_{n+1}}{b_n} - \frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 0 \right), \tag{11}$$

то из сходимости ряда (7) *вытекает сходимость ряда* (6), *а из расходимости ряда* (6) *следует расходимость ряда* (7).

Действительно, считая неравенства (11) выполненными начиная с номера $n = 1$ и перемножив первые $n - 1$ из них почленно, получим неравенство

$$b_n \geq \frac{b_1}{a_1} a_n = \alpha a_n \qquad \left(\alpha = \frac{b_1}{a_1} \right),$$

откуда следует, справедливость утверждения, поскольку выполняются условия замечания к теореме 3. В частности, если один из рядов является геометрической прогрессией со знаменателем q, то можно сформулировать следующий признак.

ПРИЗНАК ДАЛАМБЕРА. *Если для ряда* (6) *найдется такое число* $q < 1$, *что начиная с некоторого номера*

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq q,$$

то ряд (6) *сходится. Если же начиная с некоторого номера имеет место неравенство*

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1,$$

то ряд (6) *расходится.*

Как и признак Коши, признак Даламбера допускает формулировку в следующей предельной форме: *если существует предел*

$$\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = q,$$

то при $q < 1$ *ряд сходится, а при* $q > 1$ *расходится.*

В случае $q = 1$, как и для признака Коши, вопрос о сходимости ряда остается нерешенным, так как легко привести примеры как сходящихся, так и расходящихся рядов, для которых этот предел равен 1. Так, для обобщенных гармонических рядов с $a_n = \frac{1}{n^\lambda}$ отношение

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^\lambda = \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^\lambda} \to 1$$

независимо от значения λ, хотя при $\lambda > 1$ ряд сходится, а при $\lambda \leq 1$ расходится.

Замечание 3. Несмотря на то, что признаки Коши и Даламбера получены на основании сравнения интересующего нас ряда с геометрической прогрессией, признак Даламбера несколько слабее, чем признак Коши. Можно доказать, что каждый раз, когда применение признака Даламбера позволяет решать вопрос о сходимости (расходимости) ряда, признак Коши приводит к тому же результату. Однако можно привести примеры рядов, к которым признак Даламбера неприменим, тогда как по признаку Коши возможно выяснение их сходимости (расходимости). В самом деле, пусть α и β таковы, что

$$0 < \alpha < 1, \quad \beta > 1, \quad \text{и} \quad \alpha\beta = q < 1$$

(например, $\alpha = \frac{1}{3}$, $\beta = 2$).

Рассмотрим ряд

$$\alpha^2 + \alpha^2\beta^2 + \alpha^4\beta^2 + \alpha^4\beta^4 + \ldots + \alpha^{2k}\beta^{2k-2} + \alpha^{2k}\beta^{2k} + \alpha^{2k+2}\beta^{2k} + \ldots .$$

Легко видеть, что при любом n для членов a_n этого ряда выполнено неравенство

$$a_n \leq \alpha^n\beta^n = q^n, \quad \text{т.е.} \quad \sqrt[n]{a_n} \leq q,$$

откуда следует, что рассматриваемый ряд сходится в соответствии с признаком Коши. Однако отношение

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \begin{cases} \alpha^2 < 1 & \text{при} \quad n \quad \text{четном,} \\ \beta^2 > 1 & \text{при} \quad n \quad \text{нечетном,} \end{cases}$$

что означает неприменимость признака Даламбера.

Сравнение рассматриваемого ряда (3) с гармоническим рядом позволяет получить следующий признак.

Признак Раабе. *Если для ряда* (6) *начиная с некоторого номера выполнено неравенство*

$$n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) \geq \lambda, \tag{12}$$

где $\lambda < 1$, *то ряд* (6) *сходится. Если же начиная с некоторого номера имеют место неравенства*

$$n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) \leq 1, \tag{13}$$

то ряд (6) *расходится.*

Действительно, пусть выполняется неравенство (12). Возьмем произвольное число λ_1 таким образом, чтобы $1 < \lambda_1 < \lambda$, и покажем, что начиная с некоторого номера для ряда (6) и ряда (7) с членами $b_n = \dfrac{1}{n^{\lambda_1}}$ выполнено неравенство (11), переписанное в форме

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} \geq \frac{b_n}{b_{n+1}} = \frac{1}{n^{\lambda_1}} : \frac{1}{(n+1)^{\lambda_1}}. \tag{14}$$

Так как, по формуле Тейлора,

$$\frac{1}{n^{\lambda_1}} : \frac{1}{(n+1)^{\lambda_1}} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{\lambda_1} = 1 + \frac{\lambda_1}{n} o\left(\frac{1}{n}\right),$$

, то разность

$$\left(1 + \frac{\lambda}{n}\right) - \left(1 + \frac{\lambda_1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) = \frac{\lambda - \lambda_1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

начиная с некоторого номера n_0 становятся положительной, т.е. начиная с номера n_0 выполняется неравенство

$$1 + \frac{\lambda}{n} \geq 1 + \frac{\lambda_1}{n} + 0\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n^{\lambda_1}} : \frac{1}{(n+1)^{\lambda_1}}. \tag{15}$$

С другой стороны, из неравенства (12) следует, что

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} \geq 1 + \frac{\lambda}{n}.$$

Сопоставляя это неравенство с неравенством (15), получки неравенство (14):

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} \geq \frac{1}{n^{\lambda_1}} : \frac{1}{(n+1)^{\lambda_1}},$$

из которого, в силу сходимости ряда $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\lambda_1}}$, следует сходимость ряда (6).

При выполнении неравенства (13), которое можно переписать в форме

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} \leq \frac{n+1}{n} = \frac{1}{n} : \frac{1}{n+1},$$

получаем, что выполнены условия расходимости ряда (6) из теоремы 5, так как ряд с членами $b_n = \dfrac{1}{n}$ расходится.

Признак Раабе допускает следующую предельную форму.

Если для ряда (1) *существует предел*

$$\lim\ n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) = \gamma,$$

то при $\gamma > 1$ *ряд* (6) *сходится, а при* $\gamma < 1$ *расходится. Случай* $\gamma = 1$ *остается неопределенным.*

Доказательство предельной формы признака Раабе аналогично доказательству признака Даламбера и поэтому предоставляется читателю в качестве упражнения.

Замечание 4. Легко видеть, что если с помощью признака Даламбера, например, в предельной форме, решается вопрос о сходимости ряда, т.е. если $\lim\ \dfrac{a_{n+1}}{a_n} \neq 1$, то признак Раабе также применим для решения этого вопроса. Однако может случиться, что $\lim\ \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = 1$, в то время как $\lim\ n\left(\dfrac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) \neq 1$, и тогда по признаку Раабе можно узнать, сходится или нет ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, в то время как по признаку Даламбера этого нельзя сделать. В этом смысле признак Раабе сильнее признака Даламбера.

Примеры.

3. Для решения вопроса о сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \ldots \cdot 2n}$ признак Даламбера неприменим, поскольку $\lim\ \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \lim\ \dfrac{2n+1}{2n} = 1$, в время как, согласно признаку Раабе, ряд расходится, так как $\lim\ n\left(\dfrac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) = \dfrac{1}{2}$.

Следующая теорема может служить источником для получения различных признаков сходимости. Выбирая в этой теореме по-разному последовательность $\{c_n\}$, будем получать различные достаточные условия сходимости положительного ряда.

Теорема 6 (Куммера). *Пусть для ряда* (6) *существует такая последовательность* $\{c_n\}$ *положительных чисел, что ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{c_n}$ *расходится, и числа*

$$k_n = c_n\,\frac{a_n}{a_{n+1}} - c_{n+1}$$

имеют один и тот же знак. Если, кроме того, $k_n \geq \delta > 0$, *то ряд* (6) *сходится, если же* $k_n \leq 0$, *то ряд* (6) *расходится.*

Доказательство. Пусть $k_n \geq \delta > 0$ или

$$c_n a_n - c_{n+1} a_{n+1} \geq \delta a_{n+1}.$$

Положив в этом неравенстве $n = 1, 2, \ldots, m$, получим систему неравенств:

$$\begin{aligned}
&c_1 a_1 - c_2 a_2 \geq \delta a_2,\\
&c_2 a_2 - c_3 a_3 \geq \delta a_3,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&c_m a_m - c_{m+1} a_{m+1} \geq \delta a_2,
\end{aligned}$$

из которой вытекает неравенство

$$\delta(a_2 + \ldots + a_{m+1}) \leq c_1 a_1 - c_{m+1} a_{m+1} < c_1 a_1.$$

Отсюда

$$s_{m+1} = a_1 + \ldots + a_{m+1} \leq \frac{c_1}{\delta}\, a_1 + a_1.$$

Таким образом, последовательность частичных сумм ряда (6) оказывается ограниченной, значит, ряд (6) сходится.

Пусть теперь

$$k_n = c_n \frac{a_n}{a_{n+1}} - c_{n+1} \leq 0$$

или

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq \frac{1}{c_{n+1}} : \frac{1}{c_n}.$$

В этом случае, в силу предположенной расходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{c_n}$ и теоремы 5, ряд (6) расходится. Заметим, что при $c_n = n$ теорема Куммера переходит в признак Раабе.

В качестве примера использования теоремы Куммера докажем обладающий для практических приложений широкими возможностями следующий признак.

Признак Гаусса. *Если для членов ряди* (6) *начиная с некоторого номера имеет место представление*

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \rho + \frac{\lambda}{n} + \frac{\theta_n}{n^2}, \tag{16}$$

где θ_n *— ограниченная величина, то при* $\rho > 1$ *ряд* (6) *сходится, а при* $\rho < 1$ *расходится. Если же* $\rho = 1$*, то при* $\lambda > 1$ *ряд* (6) *сходятся, а при* $\lambda \leq 1$ *расходится.*

Действительно, в случае $\rho \neq 1$ имеют место условия признака Даламбера, а при $\rho = 1$, $\lambda \neq 1$ — условия признака Раабе. Если $\rho = \lambda = 1$ и $|\theta_n| \leq L$, то, полагая в признаке Куммера $c_n = n \ln n$ $\Bigg($как было установлено, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n \ln n}$ расходится$\Bigg)$, найдем, используя представление (16):

$$k_n = n \ln n \frac{a_n}{a_{n+1}} - (n+1)\ln(n+1) =$$

$$= n\ln n\left(1+\frac{1}{n}+\frac{\theta_n}{n^2}\right)-(n+1)\left[\ln n+\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right]=$$

$$=\frac{\theta_n\ln n}{n}-\ln\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}\right].$$

Так как θ_n ограничено, величина $\dfrac{\theta_n\ln n}{n}\to 0$ при $n\to\infty$, откуда следует, что $k_n\to -1$, т.е. $k_n\leq 0$ начиная с некоторого номера n_0. Таким образом, в рассматриваемом случае ряд (6) расходится.

Введем понятие сравнения скоростей сходимости числовых рядов.

Пусть

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \tag{17}$$

и

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \tag{18}$$

— два сходящихся положительных ряда. Обозначим через $R_n^{(a)}$ и $R_n^{(b)}$ соответственно суммы n-х остатков этих рядов. Как было отмечено (см. § 1 настоящей главы), каждая из последовательностей $\{R_n^{(a)}\}$ и $\{R_n^{(b)}\}$ сходится к нулю. Условимся говорить, что ряд (17) *сходится о большей скоростью*, чем ряд (18), если

$$\lim\ \frac{R_n^{(a)}}{R_n^{(b)}}=0,$$

а относительно ряда (18) будем говорить, что он *сходится с меньшей скоростью*, чем ряд (17). Можно показать, что признаки сходимости положительных рядов, основанные на сравнении их с более медленно сходящимися рядами, оказываются более сильными, чем признаки, получающиеся на основании сравнения тех же рядов с более быстро сходящимися рядами. В частности, можно проверить, что обобщенный гармонический ряд $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{1+\sigma}}$ $(\sigma>0)$ сходится медленнее геометрической прогрессии со знаменателем, меньшим 1, и поэтому признак Раабе оказался более сильным, чем признак Даламбера.

Следует иметь в виду, что для каждого сходящегося ряда можно построить более медленно сходящийся ряд. В самом деле, пусть ряд (17) сходится и $\{R_n^{(a)}\}$ — последовательность сумм остатков этого ряда. 0дновременно с $\left\{R_n^{(a)}\right\}$ сходится к нулю последовательность $\left\{\sqrt{R_n^{(a)}}\right\}$, при этом

$$\frac{R_n^{(a)}}{\sqrt{R_n^{(a)}}}=\sqrt{R_n^{(a)}}\to 0.$$

Ряд

$$\left(\sqrt{R_1^{(a)}}-\sqrt{R_2^{(a)}}\right)+\left(\sqrt{R_2^{(a)}}-\sqrt{R_3^{(a)}}\right)+\ldots+\left(\sqrt{R_n^{(a)}}-\sqrt{R_{n+1}^{(a)}}\right)+\ldots$$

имеет в качестве значений сумм остатков члены последовательности $\left\{\sqrt{R_n^{(a)}}\right\}$ и потому сходятся медленнее, чем ряд (17). Из этого факта вытекает, что для каждого признака сходимости положительных рядов, основанного на сравнении, всегда можно построить более сильный признак, т.е. что не существует универсального признака сходимости положительных рядов, полученного на основании сравнения их с другими рядами.

Все сказанное о положительных рядах относится и к отрицательным рядам, т.е. рядам, все члены которых начиная о некоторого номера отрицательны, так как для перехода от отрицательных рядов к положительным достаточно умножить отрицательный ряд на число (-1).

В дальнейшем, говоря о рядах с произвольными членами, будем предполагать, что в рассматриваемых рядах имеется бесконечно много как положи тельных, так и отрицательных членов.

§ 3. Знакочередующиеся ряды, признак Лейбница

Знакочередующимся называется ряд вида

$$c_1 - c_2 + c_3 - c_4 + \ldots + (-1)^{n-1} c_n + \ldots, \tag{1}$$

в котором все числа c_n одного знака, например $c_n > 0$. К знакочередующимся относятся также ряды, чередование знаков членов в которых начинается с некоторого номера. Для таких рядов имеет место следующий (достаточный) признак их сходимости.

Признак Лейбница. *Если последовательность* $\{c_n\}$*, не возрастая, сходится к нулю, то знакочередующийся ряд* (1) *сходится.*

Доказательство. Установим вначале сходимость последовательности $\{s_{2n}\}$ четных частичных сумм ряда (1). Имеем:

$$s_{2n} = c_1 - c_2 + c_3 - c_4 + \ldots c_{2n-1} - c_{2n}.$$

Переписав это выражение в форме

$$s_{2n} = (c_1 - c_2) + (c_3 - c_4) + \ldots + (c_{2n-1} - c_{2n}), \tag{2}$$

видим, что последовательность s_{2n} неубывающая, так как

$$s_{2(n+1)} = s_{2n} + (c_{2n+1} - c_{2n+2}) \geq s_{2n}.$$

С другой стороны, представление

$$s_{2n} = c_1 - (c_2 - c_3) - \ldots - (c_{2n-2} - c_{2n-1}) - c_{2n}$$

показывает, что

$$s_{2n} \leq c_1. \tag{3}$$

Таким образом, последовательность $\{s_{2n}\}$ является монотонно неубывающей и ограниченной сверху, а значит, сходящейся к конечному пределу. Положим $s = \lim\ s_{2n}$. Так как, далее, $s_{2n+1} = s_{2n} + c_{2n+1}$ и и, по условию, $c_n \to 0$, очевидно, что последовательность $\{s_{2n+1}\}$ нечетных сумм ряда (1) также имеет предел, равный s. Но тогда легко проверить, что число s — предел всей последовательности $\{s_n\}$.

Замечание. Из неравенства (3) вытекает, что $s \le c_1$. Так как каждый остаток знакочередующегося ряда, в свою очередь, является знакочередующимся рядом, то для его суммы R_n оказывается справедливой оценка

$$|R_n| \le |c_{n+1}|. \tag{4}$$

Примеры.

1. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{1}{n}$ удовлетворяет условиям теоремы Лейбница и, следовательно, сходится.

2. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{n}{n^2+10}$ является знакочередующимся, и его общий член $c_n = \dfrac{n}{n^2+10}$ стремится к нулю при $n \to \infty$. Покажем, что c_n начиная с некоторого номера монотонно убывает. Рассмотрим функцию $f(x) = \dfrac{x}{x^2+10}$. Эта функция дифференцируема на $[1, \infty)$ и $f'(x) = \dfrac{10-x^2}{(x^2+10)^2}$. Следовательно, $f(x)$ при $x > \sqrt{10}$ монотонно убываем, т.е. начиная с $n = 4$ $c_n = f(n) > f(n+1) = c_{n+1}$. Таким образом, для рассматриваемого ряда выполняются вое условия теоремы Лейбница, и ряд сходится

§ 4. Абсолютно сходящиеся ряды. Свойства абсолютно сходящихся рядов

Рассмотрим ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \tag{1}$$

в котором бесконечно много как положительных, так и отрицательных членов. Если положительный ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \tag{2}$$

сходится, то ряд (1) называется *абсолютно сходящимся.*

Теорема 1. *Абсолютно сходящийся ряд сходится.*

Допустим, что ряд (2) сходится, и покажем, что сходится ряд (1). Для произвольного числа $\varepsilon > 0$, в силу необходимости критерия Коши, найдется такой номер $N = N(\varepsilon)$, что при всех $n \geq N$, $p > 0$, будет выполняться неравенство

$$|a_{n+1}| + |a_{n+2}| + \ldots + |a_{n+p}| < \varepsilon.$$

Но тогда и для всех отрезков ряда (1) начиная о номера N будем иметь

$$|a_{n+1} + a_{n+2} + \ldots + a_{n+p}| < |a_{n+1}| + |a_{n+2}| + \ldots + |a_{n+p}| < \varepsilon,$$

что, в силу достаточности критерия Коши, означает сходимость ряда (1).

Сходящиеся ряды, для которых соответствующие ряды (2), составленные из абсолютных величин членов данного ряда, не сходятся, называются неабсолютно, или условно, сходящимися рядами. Примером такого ряда является

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}.$$

Этот ряд, как показано в § 3 данной главы, сходится, а ряд, составленный из модулей членов этого ряда, т.е. ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$$

как известно, расходится.

Поскольку проверка абооям:гной сходимости ряда сводится к проверке сходимости положительного ряда (2), ранее сформулированные признаки сходимости положительных рядов могут быть использованы в качестве признакоз абсолютной сходимости рядов. Например, соответственно признаку Коши имеется признак Коши абсолютной сходимости ряда. Он состоит в следующем.

Если начиная с некоторого номера имеет место неравенство $\sqrt[n]{|a_n|} \leq q$, *где* $q < 1$, *то ряд* (1) *сходится абсолютно.*

Аналогично, могут быть сформулированы другие признаки абсолютной сходимости числового ряда.

Установим переместительное свойство абсолютно сходящихся рядов. Будем говорить, что ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \alpha_k$ получен перестановкой членов из ряда $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$, если каждый член α_k первого ряда совпадает с одним и только одним членом a_{n_k} второго ряда и каждый член второго ряда a_n совпадает с одним и только одним членом α_{k_n} первого ряда.

Если ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \alpha_k$ получен перестановкой членов ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, то, в свою очередь, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ можно рассматривать как полученный перестановкой членов ряда $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k$.

Теорема 2. *Если ряд* (1)

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

абсолютно сходится, то абсолютно сходится и имеет ту же сумму каждый ряд, полученный ив ряда (1) *произвольной перестановкой членов.*

Для доказательства заметим вначале, что перестановка членов положительного ряда (2) не нарушает его сходимости и не отражается на значении его суммы. В самом деле, пусть все $a_n > 0$ и ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \tag{3}$$

получен из ряда (1) произвольной перестановкой членов. Положим

$$s_n^{(a)} = a_1 + a_2 + \ldots + a_n, \qquad s^{(a)} = \lim\ s_n^{(a)},$$

$$s_n^{(\alpha)} = \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n, \qquad s^{(\alpha)} = \lim\ s_n^{(\alpha)}.$$

Для каждой фиксированной частичной суммы $s_m^{(a)}$ начиная с некоторого номера $N(m)$ все частичные суммы $s_n^{(\alpha)}$ будут одержать члены $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$, вошедшие в $s_m^{(\alpha)}$. Поэтому при достаточно большом номере n, будет выполняться неравенство

$$s_m^{(\alpha)} \leq s_n^{(a)} \leq s^{(a)},$$

из которого следует, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \alpha_n$ сходится к $s^{(\alpha)} \leq s^{(a)}$. Поменяв роли $s_m^{(\alpha)}$ и $s_n^{(a)}$ в только что проверенных рассуждениях, можно записать: $s^{(a)} \leq s^{(\alpha)}$, откуда следует равенство

$$s^{(a)} = s^{(\alpha)}$$

Пусть теперь $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ — произвольный абсолютно сходящийся ряд и ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \tag{4}$$

получен из ряда (1) произвольной перестановкой членов. Этот ряд сходится абсолютно, так как ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} |b_n|$$

может считаться полученным из ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ некоторой перестановкой членов и поэтому, в соответствии с только что доказанным, сходится. Обозначим m-ю частичную сумму ряда (4) через $s_m^{(b)}$ и покажем, что

$$\lim\ s_m^{(b)} = \lim\ s_n^{(a)} = s.$$

Для этого установим, что для произвольного положительного числа $\varepsilon > 0$ найдется такой номер $N = N(\varepsilon)$, что при всех $n, m \geq N$ выполняется неравенство

$$|s_n^{(a)} - s_m^{(b)}| < \varepsilon.$$

В самом деле, по заданному числу $\varepsilon > 0$ найдем сначала номер N_1, такой, что при $n \geq N_1$ и для любого $p > 0$ выполняется неравенство

$$|a_{n+1}| + |a_{n+2}| + \ldots + |a_{n+p}| < \varepsilon.$$

Обозначим, далее, через N_2 номер, начиная с которого все члены $a_1, a_2, \ldots, a_N$ войдут в выражение $s_m^{(b)}$, и положим $N = \max\,(N_1, N_2)$. Тогда для всех $n, m \geq N$ в разности $s_n^{(a)} - s_m^{(b)}$ будут содержаться только члены ряда (1) о номерами, большими N_1, а это означает, что

$$|s_n^{(a)} - s_m^{(b)}| \leq |a_{n+1}| + |a_{n+2}| + \ldots + |a_{n+p}| < \varepsilon.$$

Теорема доказана.

Отметим, что в случае неабсолютно сходящихся рядов переместительное свойство не имеет места. Далее будет показано, что в результате перестановки членов неабсолютно сходящегося ряда может измениться его сумма и даже получиться расходящийся ряд.

Из членов ряда (1) можно построить различными способами бесконечно много новых рядов, беря каждый член ряда (1) не более одного раза. Пусть ряды

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{i_k} \qquad (i = 1, 2, \ldots) \tag{5}$$

построены таким образом. Тогда справедлива следующая лемма.

Лемма. *Если ряд* (1) *сходится абсолютно, то каждый из рядов* (5) *также является абсолютно сходящимся.*

В самом деле, каждая частичная сумма $\tau_i^{(p)}$ ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_{i_k}|$ не превосходит такой частичной суммы ряда (3), которая содержит все члены, вошедшие в выражение $\tau_i^{(p)}$. Поэтому для последовательности $\{\tau_i^{(p)}\}$ выполняется неравенство $\tau_i^{(p)} \leq s^{(|a|)}$, из которого вытекает сходимость ряда (5).

Допустим теперь, что члены абсолютно сходящегося ряда (1) распределены между рядами (5) таким образом, что каждый член ряда (1) входит только в один из рядов (5) (не более одного раза). Рассмотрим ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{1_k} + \sum_{k=1}^{\infty} a_{2_k} + \ldots + \sum_{k=1}^{\infty} a_{\nu_k} + \ldots, \tag{6}$$

в котором члены будем трактовать как ряды и одновременно — как суммы этих рядов.

Теорема 3. *Ряд* (6) *сходится абсолютно, и его сумма равна сумме ряда* (1).

Действительно, каждая частичная сумма ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_{1_k}| + \sum_{k=1}^{\infty} |a_{2_k}| + \ldots + \sum_{k=1}^{\infty} |a_{\nu_k}| + \ldots \tag{7}$$

является рядом, который можно считать полученным из ряда (2) выбрасыванием членов, не попавших в рассматриваемую частичную сумму, и перегруппировкой оставшихся. членов. Поэтому каждая такая сумма не превосходит суммы $s^{(|a|)}$ ряда (2). Таким образом, последовательность частичных сумм ряда (7) ограничена, а значит, этот ряд сходится, т.е. абсолютно сходится ряд (6).

С другой стороны, в силу абсолютной сходимости ряда (1), для произвольного числа $\varepsilon > 0$ найдется номер $N = N(\varepsilon)$, начиная с которого для всех остатков $R_n^{(|a|)}$ ряда (2)

$$R_n^{(|a|)} < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{8}$$

Если теперь $\{\sigma^{(p)}\}$ — последовательность частичных сумм ряда (6), то начиная с некоторого номера p_0 все члены $a_1, a_2, \ldots, a_N$ будут содержаться среди рядов — членов (6), входящих в выражение $\sigma^{(p)}$, а это означает, что разности $\sigma^{(p)} - s_n^{(a)}$ будут содержать только члены ряда (1) с номерами, большими N. Поэтому

$$|\sigma^{(p)} - s_n^{(a)}| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Переходя в этом неравенстве к пределу при $n \to \infty$, получим:

$$|\sigma^{(p)} - s^{(a)}| \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$

В силу произвола ε отсюда вытекает, что $\lim\ \sigma^{(p)} - s^{(a)}$. Теорема доказана.

Замечание. Нетрудно проверить, что в результате сложения конечного числа абсолютно сходящихся рядов получается абсолютно сходящийся ряд. В связи с этим обстоятельством и установленным переместительным и сочетательным свойствами абсолютно сходящихся рядов, можно считать, что эти ряды весьма близки к обычным конечным суммам. Рассматривая далее операция умножения рядов, убедимся в этом еще более.

§ 5. Неабсолютно сходящиеся ряды. Теорема Римана

Пусть ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \tag{1}$$

сходится неабсолютно.

Положим

$$\alpha_n = \frac{|a_n| + a_n}{2}, \qquad \beta_n = \frac{|a_n| - a_n}{2}.$$

Ясно, что $\alpha_n = a_n$, если $a_n > 0$ и $\alpha_n = 0$ при $a_n \leq 0$; аналогично $\beta_n = 0$, если $a_n \geq 0$ и $\beta_n = -a_n$, если $a_n < 0$. Введем в рассмотрение положительные ряды

$$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n, \tag{2}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \beta_n. \tag{3}$$

Лемма. *Для неабсолютно сходящегося ряда* (1) *ряды* (2) *и* (3) *расходятся.*

В самом деле, обозначив через $s_p^{(\alpha)}$ и $s_q^{(\beta)}$ частичные суммы рядов (2) и (3) и сгруппировав слагаемые в выражении частичной суммы $s_n^{(a)}$ ряда (1), можно написать:

$$s_n^{(a)} = s_p^{(\alpha)} - s_q^{(\beta)}, \tag{4}$$

и аналогично

$$s_n^{(|a|)} = s_p^{(\alpha)} + s_q^{(\beta)}, \qquad p + q = n.$$

В этих равенствах при $n \to \infty$ величина $s_n^{(a)}$ стремится к конечному пределу, а $s_n^{(|a|)} \to \infty$. Ясно, что при $n \to \infty$ имеем $p \to \infty$ и $q \to \infty$. Если бы какая-нибудь из частичных сумм $s_p^{(\alpha)}$ или $s_q^{(\beta)}$ при этом стремилась к конечному пределу, то, в силу равенства (4), другая частичная сумма также имела бы конечный предел, а следовательно, последовательность частичных сумм $s_n^{(|a|)} = s_p^{(\alpha)} + s_q^{(\beta)}$ была бы сходящейся, что невозможно.

Теорема 1 (Римана). *Если ряд* (1) *сходится неабсолютно, то, каково бы ни было число L (конечное или $\pm\infty$), существует такая перестановка членов этого ряда, в результате которой получается ряд, имеющий суммой L.*

Докажем это утверждение для конечного значения L, оставляя другие случай в качестве упражнения читателю. Так как ряд (2) расходится, то последовательность его частичных сумм неограниченно возрастает. Возьмем частичную сумму $s_p^{(\alpha)}$ этого ряда с наименьшим номером p_0, для которой выполнено неравенство $s_{p_0}^{(\alpha)} > L$ или $\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_{p_0} > L$. Согласно выбору p_0, при $p_0 > 1$ должно иметь место такое неравенство

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_{p_0 - 1} \le L.$$

Полученную сумму $s_{p_0}^{(\alpha)}$ возьмем в качестве первого члена вспомогательного ряда. Для построения второго члена этого ряда из первого члена будем последовательно вычитать члена ряда (3) до тех пор, пока не получим неравенство

$$(\alpha_1 + \ldots + \alpha_{p_0}) - (\beta_1 + \ldots + \beta_{q_0}) \le L, \tag{5}$$

где через q_0 обозначен такой номер, что одновременно с неравенством (5) выполняется неравенство

$$(\alpha_1 + \ldots + \alpha_{p_0}) - (\beta_1 + \ldots + \beta_{q_0 - 1}) > L.$$

Величину $-(\beta_1 + \beta_2 + \ldots + \beta_{q_0})$ примем за второй член конструируемого вспомогательного ряда. На следующем шаге будем последовательно прибавлять члены ряда (2) начиная с α_{p_0+1} до тех нор, пока не получил неравенство

$$(\alpha_1 + \ldots + \alpha_{p_0}) - (\beta_1 + \ldots + \beta_{q_0 - 1}) + (\alpha_{p_0+1} + \ldots + \alpha_{p_1}) > L.$$

Сумма добавляемых на этом шаге членов ряда (2) даст нам третий член вспомогательного ряда. После построения этого члена будем вычитать последовательно члены ряда (3) начиная с β_{q_0+1} до тех пор, пока не придем к неравенству

$$(\alpha_1 + \ldots + \alpha_{p_0}) - (\beta_1 + \ldots + \beta_{q_0-1}) + (\alpha_{p_0+1} + \ldots + \alpha_{p_1}) - (\beta_{q_0+1} + \ldots + \beta_{q_1}) \leq L,$$

и так далее.

В результате получим вспомогательный ряд вида

$$\begin{gathered}(\alpha_1 + \ldots + \alpha_{p_0}) - (\beta_1 + \ldots + \beta_{q_0-1}) + \ldots + \\ +(\alpha_{p_{k-1}+1} + \ldots + \alpha_{p_k}) - (\beta_{q_{k-1}+1} + \ldots + \beta_{q_k}) + \ldots,\end{gathered} \tag{6}$$

члены которого выражены через последовательные отрезки рядов (2) и (3).

По построению ряда (6), каждая его частичная сумма отличается от числа L не более чем на величину последнего слагаемого в выражении последнего члена этой частичной суммы, т.е. на α_p или β_q. А так как $\alpha_p, \beta_q \to 0$ (ряд (1) сходится по условию), то ясно, что последовательность частичных сумм ряда (6) сходится к числу L. Рассмотрим теперь ряд, полученный из (6) отбрасыванием скобок, т.е. ряд

$$\alpha_1 + \ldots + \alpha_{p_0} - \beta_1 - \ldots - \beta_{q_0-1} + \ldots + \alpha_{p_{k-1}+1} + \ldots + \alpha_{p_k} - \beta_{q_{k-1}+1} - \ldots - \beta_{q_k} + \ldots . \tag{7}$$

Каждая частичная сумма этого ряда, как легко видеть, содержится между некоторыми двумя последовательными частичными суммами ряда (6), и поэтому последовательность частичных сумм ряда (7) также сходится к числу L.

Теорема доказана.

В заключение параграфа приведем два признака сходимости рядов вида

$$\sum_{n=1}^{\infty} \beta_n a_n. \tag{8}$$

Признак Абеля. *Если ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *сходится и* $\{\beta_n\}$ *— монотонная ограниченная последовательность, то ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \beta_n a_n$ *также сходится.*

Доказательство. Пусть $\{\beta_n\}$ — монотонно убывающая неотрицательная последовательность. Так как ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, то, в силу необходимости критерия Коши, для заданного числа $\varepsilon > 0$ найдется номер N, такой, что при $n \geq N$ и $p > 0$ выполняется неравенство

$$\left| \sum_{k=n_1}^{n+p} a_k \right| < \frac{\varepsilon}{\beta_1}. \tag{9}$$

Положим $M_N = \sup\limits_{m>n\geq N} \left| \sum\limits_{k=n+1}^{m} a_k \right|$. Тогда из (9) следует, что $M_N \leq \dfrac{\varepsilon}{\beta_1}$.

По лемме Абеля (он. § 7 гл. VIII),

$$\beta_{n+1}\min_{1\le i\le p}\sum_{k=n+1}^{n+i}a_k \le \sum_{k=n+1}^{n+p}\beta_k a_k \le \beta_{n+1}\max_{1\le i\le p}\sum_{k=n+1}^{n+i}a_k.$$

При $n \ge N$ и $p > 0$

$$-\beta_1 M_N \le \sum_{k=n+1}^{n+p}\beta_k a_k \le \beta_1 M_N,$$

т.е. при $n \ge N$ и $p > 0$

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p}\beta_k a_k\right| \le \beta_1 M_N < \varepsilon.$$

Но тогда, в силу достаточности критерия Коши, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\beta_n a_n$ сходится.

Пусть теперь $\{\beta_n\}$ — произвольная монотонно возрастающая ограниченная последовательность и $\beta = \sup\limits_n \beta_n$. Тогда последовательность $\{\beta - \beta_n\}$ монотонна убывает и неотрицательна, и, по только что доказанному, ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}(\beta-\beta_n)a_n \tag{10}$$

сходится. Так как ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\beta a_n \tag{11}$$

также сходится, то сходится и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\beta_n a_n$, равный разности двух сходящихся рядов.

Наконец, если $\{\beta_n\}$ — произвольная монотонно убывающая ограниченная последовательность, то последовательность $\{-\beta_n\}$ монотонно возрастает и ограничена, следовательно, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-\beta_n)a_n$ сходится, а значит, сходится и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\beta_n a_n$.

Признак Дирихле. *Если частичные суммы ряда* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ *ограничены, а последовательность* $\{\beta_n\}$ *монотонно сходится к нулю, то ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\beta_n a_n$ *сходится.*

Доказательство. Предположим, что $\{\beta_n\}$ — монотонно убывающая последовательность. Если $\left|\sum\limits_{k=1}^{n}a_k\right| \le M$ и, следовательно, $\left|\sum\limits_{k=n+1}^{n+p}a_k\right| \le 2M$, то, снова используя лемму Абеля, получим:

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p}\beta_k a_k\right| \le \beta_{n+1}\,2M.$$

Так как $\beta_n \to 0$, то для любого числа $\varepsilon > 0$ найдется номер N, такой, что при $n \geq N$ будет $\beta_n < \dfrac{\varepsilon}{2M}$, откуда

$$\left| \sum_{k=n+1}^{n+p} \beta_k a_k \right| < \varepsilon.$$

Следовательно, согласно критерию Коши, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \beta_n a_n$ сходится.

Случай монотонно возрастающей последовательности $\{\beta_n\}$ сводится к уже рассмотренному переходом к последовательности $\{-\beta_n\}$.

Заметим, что признак Лейбница для ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-10^{n-1} c_n$, $c_n > 0$, является частным случаем признака Дирихле, если положить $\beta_n = c_n$ и $a_n = (-1)^{n-1}$.

Примеры.

1. Покажем, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sin n\alpha}{n}$, $0 \leq \alpha \leq \dfrac{\pi}{2}$, сходится. Случай $\alpha = 0$ тривиален. Допустим, что $0 < \alpha \leq \dfrac{\pi}{2}$. Если положить $a_n = \sin n\alpha$ и $\beta_n = \dfrac{1}{n}$, то достаточно доказать, что частичные суммы ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sin n\alpha$ ограничены, так как тогда сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sin n\alpha}{n}$ следует из признака Дирихле.

Итак, пусть $\sigma_n = \sin\alpha + \sin 2\alpha + \ldots + \sin n\alpha$. Умножив обе части этого равенства на $\sin\dfrac{\alpha}{2}$ и используя формулу $\sin u \cdot \sin v = \dfrac{1}{2}\,[\cos(u-v) - \cos(u+v0]$, найдем, что

$$\sigma_n \sin\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2}\left[\cos\frac{\alpha}{2} - \cos\frac{(2n+1)\alpha}{2}\right].$$

Отсюда

$$|\sigma_n| = \frac{1}{2}\,\frac{\left|\cos\dfrac{\alpha}{2} - \cos\dfrac{(2n+1)\alpha}{2}\right|}{\sin\dfrac{\alpha}{2}} \leq \frac{1}{\sin\dfrac{\alpha}{2}}.$$

Таким образом, частичные суммы ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sin n\alpha$ ограничены, следовательно, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sin n\alpha}{n}$ сходится.

§ 6. Умножение рядов

Пусть даны два ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k, \tag{1}$$

$$\sum_{l=1}^{\infty} b_l. \tag{2}$$

Рассмотрим всевозможные произведения $a_k b_l$ членов ряда (1) на члены ряда (2). Множество $\{a_k b_l\}$ таких произведений является счетным и поэтому может быть бесконечный числом способов записано в вида последовательности $\{a_{k_n} b_{l_n}\}$. Соответственно каждой такой последовательности введем в рассмотрение ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{k_n} b_{l_n}. \tag{3}$$

Каждый такой ряд называется *произведением рядов* (1) и (2). В общем случае, даже при сходимости обоих рядов (1) и (2), некоторые из этих произведений могут оказаться сходящимися рядами, а некоторые — расходящимися.

Теорема (Коши). *Если каждый из рядов* (1) *и* (2) *является абсолютно сходящимся, то все произведения этих рядов также сходятся абсолютно и имеют в качестве суммы произведение сумм рядов* (1) *и* (2).

Для доказательства заметим, что все произведения (3) рядов (1) и (2) различаются между собой только порядком расположения членов. Поэтому если мы докажем абсолютную сходимость одного из произведений, отвечающего некоторому специально подобранному порядку расположении членов, то тем самым будет доказана абсолютная сходимость всех произведений (3). Рассмотрим для этого произведение рядов, в котором члены располагаются в порядке возрастания суммы их индексов, а для группы членов, имеющих одинаковую сумму индексов, — в порядке возрастания индекса у членов ряда (1), т.е. ряд вида

$$a_1b_1 + a_1b_2 + a_2b_1 + a_1b_3 + a_2b_2 + a_3b_1 + \ldots + a_1b_n + a_2b_{n_1} + \ldots + a_nb_1 + \ldots . \tag{4}$$

Для доказательства абсолютной сходимости ряда (4) достаточно показать, что частичные суммы ряда

$$|a_1b_1| + |a_1b_2| + |a_2b_1| + \ldots + |a_1b_n| + |a_2b_{n-1}| + \ldots + |a_nb_1| + \ldots \tag{5}$$

ограничены. Пусть s_m — частичная сумма этого ряда:

$$s_m = |a_1b_1| + |a_1b_2| + |a_2b_1| + \ldots + |a_1b_n| + |a_2b_{n-1}| + \ldots + |a_pb_q|.$$

Если N — наибольший из номеров k и l членов рядов (1) и (2), входящих в сумму s_m, то ясно, что

$$s_m \leq (||a_1| + |a_2| + \ldots + |a_N|)(|b_1| + |b_2| + \ldots + |b_N|),$$

откуда

$$s_m \leq s^{(|a|)} s^{(|b|)}$$

при любом m, т.е. последовательность $\{s_m\}$ ограничена.

Для нахождения суммы ряда (3) заметим, что подпоследояательность частичных сумм ряда (3)

$$a_1 b_1 = s_1^{(a)} s_1^{(b)},$$

$$a_1 b_1 + (a_1 b_2 + a_2 b_1) + a_2 b_2 = s_2^{(a)} s_2^{(b)},$$

$$a_1 b_1 + (a_1 b_2 + a_2 b_1) + (a_1 b_3 + a_2 b_2 + a_3 b_1) + (a_2 b_3 + a_3 b_2) + a_3 b_3 = s_3^{(a)} s_3^{(b)},$$

$$a_1 b_1 + (a_1 b_2 + a_2 b_1) + \ldots + (a_{n-1} b_n + a_n b_{n-1}) + a_n b_n = s_n^{(a)} s_n^{(b)},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

имеет пределом $s^{(a)} s^{(b)}$. Но тогда и $s_m \to s^{(a)} s^{(b)}$, и теорема доказана,

Замечание. В связи с рассмотренными в § 4 свойствами абсолютно сходящихся рядов и свойством, связанным с их умножением, ясно, что абсолютно сходящийся ряды в арифметических действиях ведут себя так же, как конечные суммы.

Произведете рядов — частный случай так называемых двойных рядов, т.е. рядов вида

$$\sum_{k,l=1}^{\infty} a_{kl} \tag{6}$$

с членами, зависящими от двух индексов, по которым ведется суммирование. На такие ряды распространяется понятие их абсолютной сходимости.

Из ранее установленных фактов (см. § 4) вытекает, что в абсолютно сходящемся двойном ряде допускается произвольная группировка членов и, в частности, представление

$$\sum_{k,l=1}^{\infty} a_{kl} = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\sum_{l=1}^{\infty} a_{kl} \right).$$

§ 7. Понятие о бесконечных произведениях

Пусть дана последовательность $\{c_n\}$. Выражение вида

$$c_1 c_2 \cdots c_n \cdots = \prod_{n=1}^{\infty} c_n \tag{1}$$

называется *бесконечным произведением* членов c_n данной последовательности. Произведение

$$p_n = c_1 c_2 \cdots c_n$$

первых n членов произведения (1) называется *частичным произведением* этого бесконечного произведения. Если последовательность $\{p_n\}$ сходится к конечному, отличному от нуля пределу p, то бесконечное произведение (1) называемся *сходящимся*, а число p — *значением* произведения. Этот факт обозначается равенством

$$p = \lim\ p_n = \prod_{n=1}^{\infty} c_n.$$

Из выражения $c_n = \dfrac{p_n}{p_{n-1}}$ вытекает, что в случае сходящегося произведения $c_n \to 0$. Полагая $c_n = 1 + \alpha_n$, перепишем бесконечное произведение в виде

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1 + \alpha_n). \tag{2}$$

В соответствии с только что сказанным, для сходимости произведения (2) необходимо, чтобы $\lim\ \alpha_n = 0$.

Бесконечное произведение

$$\prod_{k=n+1}^{\infty} c_k \tag{3}$$

называется *остаточным произведением.* Легко видеть, что в случае, когда все $c_k \neq 0$, бесконечное произведете (1) и каждое остаточное произведение (8) сходятся одновременно. Далее, в сходящемся произведении последовательность $\pi_k = \prod\limits_{n=k+1}^{\infty} c_n$ значений остаточных произведений сходился к единице, так как

$$p = p_n \pi_n.$$

В связи с этим в дальнейшем будем предполагать, что все члены в представлении (2) положительны. Тогда бесконечному произведению (2) можно соотнести ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ln(1 + \alpha_n). \tag{4}$$

Нетрудно проверить, что бесконечное произведение (2) и ряд (4) сходятся одновременно. Действительно, полагая

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} \ln(1 + \alpha_k),$$

находим, что $s_n = \ln p_n$ или $p_n = e^{s_n}$, откуда, в силу непрерывности логарифмической и показательной функций, вытекает, что сумма s ряда (4) и значение p бесконечного произведения (2) связаны равенством

$$s = \ln p \qquad (p = e^s).$$

Бесконечное произведение (1) называется *абсолютно сходящимся*, если абсолютно сходится ряд (4).

Теорема. *Для того, чтобы бесконечное произведение* (1) *абсолютно сходилось, необходимо И достаточно, чтобы сходился ряд*

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_n|. \tag{5}$$

Действительно, так как $\dfrac{\ln(1+\alpha_n)}{\alpha_n} \to 1$ при $\alpha_n \to 0$, ряд $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} |\ln(1+\alpha_n)|$ сходятся (и расходится) одновременно с рядом (5).

Глава XIV

ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ И РЯДЫ

§ 1. Функциональные последовательности на числовом отрезке. Поточечная и равномерная сходимости последовательностей

Пусть $\mathfrak{M}[a,b]$ — совокупность всех вещественнозначных функций, определенных на промежутке $[a,b]$, и $\mathbb{N}$ — множество натуральных чисел. Каждое отображение $f:\ \mathbb{N}\to\mathfrak{M}[a,b]$ назовем *функциональной последовательностью*, заданной на $[a,b]$. Образы $f(n)$ этого отображения обозначим через f_n, а всю последовательность — через $\{f_n\}$. Каждый элемент f_n этой последовательности является отображением $f_n:\ \ [a,b]\to\mathbb{R}$ или вещественнозначной функцией $f_n(x)$, определенной на $[a,b]$.

Последовательность $\{f_n\}$ каждой точке $x_0\in[a,b]$ относит числовую последовательность $\{f_n(x_0)\}$. Если эта последовательность $\{f_n(x_0)\}$ сходятся, точку x_0 называют *точкой сходимости* последовательности $\{f_n(x)\}$, а о самой последовательности говорят, что она сходится в точке x_0. Совокупность всех точек сходимости последовательности называемся *областью ее сходимости*. В дальнейшем нас будут интересовать только такие последовательности, областью сходимости которых является весь промежуток $[a,b]$. О сходящейся на промежутке $[a,b]$ (т.е. сходящейся в каждой точке этого промежутка) последовательности будем говорить, что она *поточечно сходится* на промежутке $[a,b]$.

Пусть последовательность $\{f_n(x)\}$ поточечно сходится на промежутке $[a,b]$. Тогда каждой точке $x\in[a,b]$ можно отнести число y, являющееся пределом числовой последовательности $\{f_n(x)\}$, т.е. $y=\lim\limits_n\ f_n(x)$, и тем самым определить на $[a,b]$ функцию $y=f(x)$, называемую *предельной функцией* данной последовательности. Тот факт, что последовательность $\{f_n(x)\}$ поточечно сходится на $[a,b]$ к $f(x)$ или имеет $f(x)$ предельной функцией в смысле поточечной сходимости, обозначим записью: $f_n(x)\to f(x)$ или $f(x)=\lim\ f_n(x)$.

Таким образом, функция $f(x)$ является предельной функцией для последовательности $\{f_n(x)\}$, если для любого $\varepsilon>0$ и каждого $x\in[a,b]$ найдется такой номер $n_0=n_0(\varepsilon,x)$, что для всех $n\ge n_0$ имеет место неравенство

$$|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon.$$

Очевидно, что признак Коши сходимости для числовых последовательностей последовательностей является в то же время признаком поточечной сходимости функциональной последовательности: *для того чтобы последовательность функций* $\{f_n(x)\}$ *поточечно сходилась на отрезке* $[a, b]$ *к некоторой предельной функции, необходимо и достаточно, чтобы для любого* $\varepsilon > 0$ *и каждой точки* $x \in [a, b]$ *нашелся такой номер* $n_0(\varepsilon, x)$*, что при всех* $n, m \geq n_0(\varepsilon, x)$

$$|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon.$$

Примеры.

1. Последовательность $f_n(x) = \dfrac{\sin nx}{\sqrt{x}} + \dfrac{nx}{n+1}$ такова, что $f_n(x) \to x$ для любого $x \in [-1, 1]$. Следовательно,

$$\lim_n f_n(x) = x, \qquad -1 \leq x \leq 1.$$

2. Пусть $f_n(x) = x^n$, $0 \leq x \leq 1$. Очевидно, что

$$\lim_n f_n(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x < 1, \\ 1, & x = 1. \end{cases}$$

3. Если $f_n(x) = nx(1-x^2)^n$, $0 \leq x \leq 1$, то для $x = 0, 1$ $f_n(x) = 0$ при всех n, а значит, и $\lim f_n(x) = 0$. Если $x \neq 0$, то, полагая $1 - x^2 = \dfrac{1}{q}$, $x \neq 1$, $q > 1$, имеем, что $f_n() = x\,\dfrac{n}{q^n}$, и так как показательная функция $\varphi(n) = q^n$ растет быстрее степенной $\psi(n) = n$, то снова $f_n(x) \to 0$.

Итак, для всех $x \in [0, 1]$

$$\lim_n nx(1-x^2)^n = 0.$$

В дальнейшем мае будет интересовать вопрос о том, в какой мере по свойствам, общим для всех функций $f_n(x)$ последовательности, можно судить о свойствах предельной функции $f(x)$ или, иными словами, насколько свойства функций $f_n(x)$ «наследуются» предельной функцией $f(x)$. Речь будет идти о таких важных свойствах, как интегрируемость, непрерывность, дифференцируемость, связь между производной предельной функции (если она дифференцируема)и производными функций последовательности (в предположении их лифференцируемости), интегралом от предельной функции (при условия ее интегрируемости) и интегралами от функций последовательности (если эти функции интегрируемы).

Следующие примеры показывают, что при поточечной сходимости последовательности такой связи, вообще говоря, нет.

1°. Имеем $f_n(x) = \dfrac{\sin nx}{\sqrt{n}} \to 0$, $-\infty < x < \infty$.

Однако $f_n'(x) = \sqrt{n} \cos nx$ не имеет предела, но

$$\int\limits_{-1}^{1} f_n(x)\, dx = \frac{1}{\sqrt{n}} \int\limits_{-1}^{1} \sin nx\, dx \to 0.$$

2°. Функции $f_n(x)$ непрерывны на $[0,1]$. Предельная функция разрывна в точка $x = 1$ и непрерывна в остальных точках отрезка $[0,1]$. При этом

$$f'_n(x) = nx^{n-1} \ \to \ f_0(x) = \begin{cases} 0, & 0 \le x < 1, \\ \infty, & x = 1, \end{cases}$$

$$\int\limits_0^1 f_n(x)\,dx = \frac{1}{n+1} \to 0.$$

3°. Имеем

$$f_n(x) = nx(1-x^2)^n \to 0, \qquad 0 \le x \le 1,$$

$$f'_n(x) = n(1-x^2 0^n - 2n^2x^2(1-x^2)^{n-1} \to 0, \qquad 0 \le x \le 1,$$

$$\int\limits_0^1 f_n(x)\,dx = \frac{n}{2(n+1)} \to \frac{1}{2}.$$

Далее мы увидим, что если ввести понятие сходимости функциональной последовательности, более сильное, чем понятие сходимости поточечной, то многие свойства функций последовательности сохраняются у предельной функции и операции дифференцирования и интегрирования будут перестановочны с операцией предельного перехода.

Определение. Последовательность $\{f_n(x)\}$ определенных на отрезке $[a,b]$ функций называется *равномерно сходящейся* к $f(x)$ на этом отрезке, если для каждого числа $\varepsilon > 0$ найдемся такой номер $n_0 = n_0(\varepsilon)$, что при всех $n \ge n_0$ и сразу для всех точек $x \in [a,b]$ выполняется неравенство

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

Напомним, что понятие равномерной сходимости функциональной последовательности мы уже вводили в § 2 гл. X. Это понятие является одним из важнейших понятий математического анализа.

Равномерная сходимость последовательности является более сильной сходимостью по сравнению с поточечной, так как очевидно, что всякая равномерно сходящаяся последовательность сходится поточечно, в то время как обратное утверждение неверно. Слово «равномерность» объясняется тем, что номер n_0, входящий в определение сходимости, в равной мере пригоден для всех точек промежутка $[a,b]$. Тот факт, что последовательность $\{f_n(x)\}$ сходится равномерно к функции $f(x)$, будем обозначать записью $f_n(x) \rightrightarrows f(x)$.

Примеры.

4. Последовательность $f_n(x) = \dfrac{\sin nx}{\sqrt{n}} + \dfrac{nx}{n+1}$ сходится равномерно на отрезке $[a,b]$ к предельной функции $f_0(x) = x$, так как $|f_n(x) - x| \le \dfrac{1}{\sqrt{n}} + \dfrac{1}{n+1} < \dfrac{2}{\sqrt{n}}$ при $n \ge n_0(\varepsilon) = E\left(\dfrac{4}{\varepsilon^2}\right) + 1$ сразу для всех $x \in [0,1]$.

5. Последовательность $f_n(x) = x^n$ сходится к предельной функций на $[0,1]$ неравномерно. В самом деде, допустим, что $x^n \rightrightarrows \begin{cases} 0, & 0 \le x < 1, \\ 1, & x = 1. \end{cases}$ Тогда для $\varepsilon = \dfrac{1}{3}$ должен существовать номер n_0, такой, что при $n \ge n_0$

$$|x^n - 0| = x^n < \frac{1}{3}$$

сразу для всех $x \in [0,1)$. Однако, взяв $x = \dfrac{1}{\sqrt[n]{2}} \in [0,1)$, найдем $x^n = \dfrac{1}{2} > \dfrac{1}{3}$. Полученное противоречие доказывает неравномерную сходимость последовательности $\{x^n\}$.

6. Легко видеть, что $\dfrac{x}{nx+1} \rightrightarrows 0$ на $[0,1]$. В самом деле, если $x = 0$, то $f_n(x) = 0$ для всех n и, следовательно, $|f_n(0) - 0| < \varepsilon$ при всех n. Если же $x \ne 0$, то

$$\left|\frac{x}{nx+1} - 0\right| = \frac{x}{nx+1} < \frac{1}{n} < \varepsilon$$

сразу для всех $x \in [0,1]$ при $n \ge E\left(\dfrac{1}{\varepsilon}\right) + 1$.

7. Последовательность $\left\{\dfrac{nx}{n^2x^2+1}\right\}$ снова сходится к нулю на $[0,1]$. Однако ее сходимость неравномерная. Решив для $0 < \varepsilon < \dfrac{1}{2}$ неравенство

$$\left|\frac{nx}{n^2x^2+1} - 0\right| = \frac{nx}{n^2x^2+1} < \varepsilon, \tag{1}$$

найдем, что

$$nx > \frac{1}{2\varepsilon} - \sqrt{\frac{1}{4\varepsilon^2} - 1}$$

или

$$n > \frac{1}{x}\left(\frac{1}{2\varepsilon} + \sqrt{\frac{1}{4\varepsilon^2} - 1}\right).$$

Следовательно, чем ближе x к нулю, тем больше, согласно последнему неравенству, приходится брать значения n. Поэтому не зависящего от x номера n_0, такого, что при $n \ge n_0$ выполняется неравенство (1), не существует.

Неравномерность сходимости последовательности $\left\{\dfrac{nx}{n^2x^2+1}\right\}$ к нулю вызвана тем, что у каждой функции $f_n(x)$ рассматриваемой последовательности есть на отрезке $[0,1]$ единственная точка максимума $x_n = \dfrac{1}{n}$, значение функции $f_n(x)$ в которой равно $\dfrac{1}{2}$. При возрастании n эта точна максимума приближается к нулю, и значения функций $f_n(x)$ вне все уменьшающейся окрестности нуля быстро убывают. Поэтому при любом числе $\varepsilon > 0$ и любом фиксированном x значения функций $f_n(x)$ при достаточно большом n делаются меньше ε, хотя при $\varepsilon < \dfrac{1}{2}$

в полосу ширины ε между прямыми $y = 0$ и $y = \varepsilon$ график ни одной функции целиком войти не может (рис. 52).

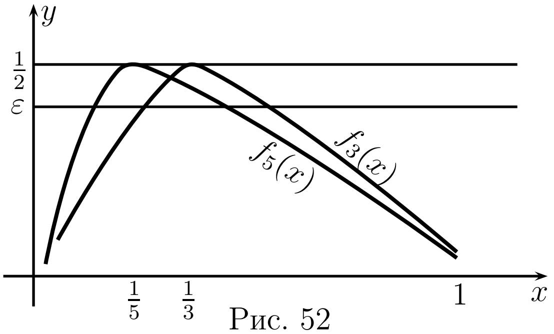

Рис. 52

Критерий Коши для точечной сходимости функциональной последовательности переходит в критерий равномерной сходимости, если в его формулировке освободиться от зависимости номера $n_0(x, \varepsilon)$ от значений x.

Критерий Коши равномерной сходимости последовательности. *Для того чтобы последовательность определенных на промежутке $[a, b]$ функции $f_n(x)$ равномерно сходилась на этом промежутке к некоторой функции $f(x)$, необходимо и достаточно, чтобы для каждого числа $\varepsilon > 0$ нашелся такой номер $n_0 = n_0(\varepsilon)$, что при любых $n, m \geq n_0$ и во всех точках $x \in [a, b]$*

$$|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon. \tag{2}$$

Необходимость. Пусть $f_n(x) \rightrightarrows f(x)$ на $[a, b]$ и $\varepsilon > 0$ — произвольно. Тогда найдется такой номер $n_0 = n_0(\varepsilon)$, что при всех $n \geq n_0$ и всех $x \in [a, b]$

$$|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{2$'$}$$

Взяв любое натуральное число $m \geq n_0$, мы можем также написать, что при всех $x \in [a, b]$

$$|f_m(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{2$''$}$$

Из неравенств (2') и (2") вытекает неравенство (2) при произвольных $n, m \geq n_0$ во всех точках $x \in [a, b]$. Необходимость доказана.

Достаточность. Предположим, что выполнено условие, выраженное неравенством (1). Тогда для каждой фиксированной точки $x' \in [a, b]$ числовая последовательность $\{f_n(x')\}$ удовлетворяет условию признака Коши и поэтому является сходящейся, т.е. существует

$$\lim_n f_n(x') = y'.$$

Отнеся каждой точке x по этому правилу соответствующее ей число y, получим предельную для данной последовательности функцию

$$f(x) = \lim_n f_n(x).$$

Убедимся в том, что $f_n(x) \rightrightarrows f(x)$. Для этого возьмем произвольное число $\varepsilon > 0$ и найдем такой номер $n_0 = n_0(\varepsilon)$, что при всех $x \in [a, b]$ и во всех точках $x \in [a, b]$ выполняется неравенство

$$|f_n(x) - f_m(x)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Фиксируя в этом неравенстве индекс n, и устремляя m к ∞, получим в пределе неравенство

$$|f_n(x) - f(x)| \le \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon,$$

справедливое при $n \ge n_0$ во всех точках $x \in [[a, b]$, из которого и вытекает равномерная сходимость последовательности $\{f_n(x)\}$ к функции $f(x)$ на $[a, b]$.

В заключение отметим, что последовательность, сходящаяся неравномерно на веем отрезке $[a, b]$, может сходиться равномерно на его части $[a_1, b_1]$. Так, на отрезке $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ последовательность $\{x^n\}$ сходится равномерно. Вместе с тем существуют примеры последовательностей, не сходящихся равномерно ни на каком частичном отрезке промежутка их сходимости.

§ 2. Основные теоремы о функциональных последовательностях

В этом параграфе выясняется, при каких условиях основные операции анализа перестановочны с предельным переходом по последовательности.

Теорема 1 (о перестановке двух предельных переходов). *Если* $f_n(x) \rightrightarrows f(x)$ *на промежутке* $[a, b]$ *и каждая функция* $f_n(x)$ *имеет конечный предел в точке* $x_0 \in [a, b]$, *т.е.* $\lim\limits_{x \to x_0} f_n(x) = c_n$, *то последовательность* $\{c_n\}$ *сходится и число* $c = \lim\ c_n$ *является пределом* $f(x)$ *в точке* x_0, *т.е.*

$$\lim_{x \to x_0} \left[\lim_n f_n(x) \right] = \lim_n \left[\lim_{x \to x_0} f_n(x) \right].$$

Доказательство. В силу равномерной сходимости последовательности $\{f_n(x)\}$ для произвольного числа $\varepsilon > 0$ найдется такой номер $n_0 = n_0(\varepsilon)$, что при всех $n, m \ge n_0$ и при всех $x \in [a, b]$ выполняется неравенство

$$|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon.$$

Устремляя в этом неравенстве x к x_0, получим неравенство

$$|c_n - c_m| \le \varepsilon,$$

из которого следует сходимость последовательности $\{c_n\}$. Пусть $c = \lim\ c_n$. Оценим разность $|f(x) - c|$, представив ее в виде

$$[f(x) - c] = [f(x) - f_n(x)] + [f_n(x) - c_n] + [c_n - c].$$

Отсюда

$$|f(x) - c| \le |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - c_n| + |c_n - c|.$$

Так как $f_n(x) \rightrightarrows f(x)$, найдется такой номер $n_0' = n_0'(\varepsilon)$, начиная с которого, т.е. при $n \ge n_0'$, выполняется при всех $x \in [a, b]$ неравенство

$$|f(x) - f_n(x)| < \frac{\varepsilon}{3}. \qquad (1)$$

Поскольку $c_n \to c$, то существует номер $n_0'' = n_0''(\varepsilon)$, такой, что при $n \geq n_0''$ имеет место неравенство

$$|c_n - c| < \frac{\varepsilon}{3}. \tag{2}$$

Выбрав $n_0 = \max\ (n_0', n_0'')$ и положив $n \geq n_0$ фиксированным, удовлетворим каждому из неравенств (1) и (2). Наконец, так как при $x \to x_0$, $f_n(x) \to c_n$ наймется такое число $\delta = \delta(\varepsilon)$, что при всех $x \in [a, b]$, для которых $0 < |x - x_0| < \delta$,

$$|f_n(x) - c_n| < \frac{\varepsilon}{3}. \tag{3}$$

Сопоставив (1), (2) к (3), заключаем, что при $0 < |x - x_0| < \delta$ и $x \in [a, b]$ имеет место неравенство

$$|f(x) - c| < \varepsilon,$$

из которого и вытекает утверждение.

Следствие. *Если все функции последовательности $\{f_n(x)\}$ непрерывны в точке $x_0 \in [a, b]$ и $f_n(x) \rightrightarrows f(x)$ на $[a, b]$, то предельная функция также непрерывна в точке x_0.*

В самом деле, в этом случае $c_n = f_n(x_0)$, $f(x_0) = \lim\ f_n(x_0) = \lim\ c_n = c$ и $c = \lim\limits_{x \to x_0}\ f(x)$, так что $\lim\limits_{x \to x_0}\ f(x) = f(x_0)$.

Неравномерный предел последовательности непрерывных функций может быть как непрерывной функцией (см. пример 3 ив § 1), так и иметь разрыв (см. пример 2 из § 1).

Из следствия теоремы 1 вытекает следующее утверждение.

Теорема 2. *Если все функции последовательности $\{f_n(x)\}$ непрерывны на $[a, b]$ и $f_n(x) \rightrightarrows f(x)$ на этом промежутке, то предельная функция $f(x)$ непрерывна на $[a, b]$.*

Справедливо утверждение, в некотором смысле обратное теореме 2 и выражаемое следующей теоремой.

Теорема 3 (Дини). *Если все функции $f_n(x)$, $n = 1, 2, \ldots$, непрерывны на отрезке $[a, b]$ и последовательность $\{f_n(x)\}$ монотонно по n поточечно сходится к непрерывной на $[a, b]$ функции $f(x)$, то сходимость этой последовательности является равномерной на $[a, b]$.*

Доказательство. Для определенности допустим, например, что последовательность $\{f_n(x)\}$, монотонно возрастая, сходится к функции $f(x)$, т.е. $f_n(x) \leq f_{n'}(x)$ при $n < n'$. Рассмотрим функции

$$\varphi_n(x) = f(x) - f_n(x), \qquad n = 1, 2, \ldots\ .$$

Вое функции $\varphi_n(x)$ непрерывны на $[a, b]$, и в каждой точке $x \in [a, b]$ последовательность $\{\varphi_n(x)\}$, убывая, сходится к нулю. Тогда при заданном положительном числе ε для каждой точка x найдется такой номер n_x, что

$$\varphi_{n_x} < \varepsilon. \tag{4}$$

В силу непрерывности функции $\varphi_{n_x}(x)$, это неравенство будет выполняться и в некоторой окрестности U_x точки x. Так как далее последовательность $\{\varphi_n(x)\}$ монотонно убывает, неравенство (4) выполняется и для всех $n \geq n_x$. Отнесем теперь каждой точке $x \in [a,b]$ таким образом построенную окрестность U_x. В результате получим покрытие отрезка $[a,b]$ системой интервалов $\{U_x\}$, из которого, в силу свойства компактности отрезка (лемма Гейне–Бореля), можно выделить конечное покрытие $U_{x_1}, U_{x_2}, \ldots, U_{x_p}$. Выберем из соответствующих чисел $n_{x_1}, n_{x_2}, \ldots, n_{x_p}$ наибольшее, положив $n_0 = \max\,\{n_{x_1}, \ldots, n_{x_p}\}$. Тогда, очевидно, неравенство

$$0 \leq \varphi_n(x) < \varepsilon$$

будет выполняться для всех функций $\varphi_n(x)$ последовательности, для которых $n > n_0$, и во всех точках $x \in [a,b]$, т.е.

$$f(x) - f_n(x) = |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

при $n \geq n_0$ и для любого $x \in [a,b]$. Тем самым теорема Дини в рассматриваемом случае доказана. Случай монотонного (по n) убывания последовательности $\{f_n(x)\}$ аналогичен рассмотренному.

Обратимся к вопросу об интегрируемости предельной функции,

Теорема 4. *Если все функции последовательности $\{f_n(x)\}$ интегрируемы на $[a,b]$ и $f_n(x) \rightrightarrows f(x)$ на этом отрезке, то предельная функция $f(x)$ интегрируема на $[a,b]$ и*

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \int\limits_a^b \left[\lim_n\ f_n(x)\right] dx = \lim_n\ \int\limits_a^b f_n(x)\,dx. \tag{5}$$

Для доказательства установим вначале ограниченность предельной функции $f(x)$ на $[a,b]$. Для этого по произвольному числу $\varepsilon > 0$ найдем номер $n_0 = n_0(\varepsilon)$, такой, чтобы при $n \geq n_0$ и любом $x \in [a,b]$ выполнялось неравенство

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

или

$$f_n(x) - \varepsilon < f(x) < f_n(x) + \varepsilon.$$

Фиксируя такое n и полагай

$$m^{(n)} = \inf_{[a,b]}\ f_n(x), \qquad M^{(n)} = \sup_{[a,b]}\ f_n(x),$$

приходим к неравенству

$$m^{(n)} - \varepsilon < f(x) < M^{(n)} + \varepsilon,$$

означающему ограниченность функции $f(x)$. Теперь покажем, что множество $\mathfrak{A}$ точек разрыва функции $f(x)$ имеет меру 0. В соответствии со следствием, точками разрыва функции $f(x)$ могут быть лишь такие точки промежутка $[a,b]$, в которых разрывны функции последовательности $\{f_n(x)\}$. Обозначим через $\mathfrak{A}_n$ множество точек разрыва функции $f_n(x)$ на $[a,b]$. Это множество имеет меру 0, так как, по условию, функция $f_n(x)$ интегрируема на $[a,b]$. Ясно, что $\mathfrak{A} \subset \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \mathfrak{A}_n$, откуда вытекает, что мера множества $\mathfrak{a}$ также равна нулю, т.е. функция $f(x)$ интегрируема на $[a,b]$. Установим, наконец, справедливость равенства (5). Пусть число $\varepsilon > 0$ произвольно. Подберем номер $n_0 = n_0(\varepsilon)$ таким образом, чтобы при $n \geq n_0$ и при всех $x \in [a,b]$ выполнялось неравенство

$$|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{b-a}.$$

Тогда

$$\left| \int\limits_a^b f_n(x)\,dx - \int\limits_a^b f(x)\,dx \right| \leq \int\limits_a^b |f_n(x) - f(x)|\,dx < \varepsilon$$

для всех $n \geq n_0$, что и означает справедливость (5).

Замечание. В случае справедливости соотношения (5) говорят о допустимости предельного перехода под знаком интеграла $\int\limits_a^b f_n(x)\,dx$. Таким образом, при равномерно сходящейся на $[a,b]$ последовательности интегрируемых функций допустим предельный переход под знаком интеграла.

При неравеномерной сходимости равенство $\int\limits_a^b \left[\lim\limits_n f_n(x)\right] dx = \lim\limits_n \int\limits_a^b f_n(x)\,dx$ может как выполняться (см. пример 2° из § 1), так и не выполняться (см. пример 3° из § 1).

Докажем еще одно важное утверждение.

Теорема 5. *Если все функции последовательности $\{f_n(x)\}$ непрерывны на $[a,b]$ и имеют на этом отрезке непрерывные производные $f'_n(x)$, последовательность $\{f_n(x)\}$ сходится к $f(x)$ на $[a,b]$ поточечно, а последовательность производных $\{f'_n(x)\}$ сходится на $[a,b]$ равномерно, то предельная функция $f(x)$ дифференцируема на $[a,b]$ и*

$$f'(x) = \left[\lim_n f_n(x)\right]' = \lim_n f'_n(x).$$

Доказательство. Положим, что $\varphi(x) = \lim f'_n(x)$, функция $\varphi(x)$ непрерывна на $[a,b]$ как предел равномерно сходящейся последовательности непрерывных функций (теорема 2). Пусть x — произвольная фиксированная точка $[a,b]$. Рассмотрим последовательность

$$\left\{ \int\limits_a^x f'_n(x)\,dx \right\} = \{f_n(x) - f_n(a)\}.$$

В соответствии с теоремой 4, для этой последовательности допустим предельный переход под знаком интеграла, т.е. имеет место равенство

$$\lim_n \int_a^x f_n'(x)\,dx = \int_a^x \left[\lim_n\ f_n'(t)\right] dt = \int_a^x \varphi(t)\,dt = \lim_n\ [f_n(x) - f_n(a)]$$

или

$$f(x) - f(a) = \int_a^x \varphi(t)\,dt.$$

Отсюда

$$f(x) = f(a) + \int_a^x \varphi(t)\,dt. \tag{6}$$

По свойству интеграла с переменным верхним пределом от непрерывной функции, правая часть равенства (6) является дифференцируемой функцией и

$$f'(x) = \varphi(x),$$

т.е.

$$\lim_n\ [f_n'(x)] = \left[\lim_n\ f_n(x)\right]' = f'(x).$$

Рекомендуем читателю найти примеры, показывающие, что при неравномерной сходимости последовательности производных равенство (5) может как выполняться, так и не выполняться.

§ 3. Компактность множества непрерывных функций, теорема Арцела

Определенные нами понятия поточечной и равномерной сходимостей могут быть распространены на случай последовательности $\{f_n(x)\}$ вещественнозначных функций, определенных на произвольном множестве K метрического пространства X. Так, например, будем говорить, что последовательность $\{f_n(x)\}$ *сходится к* $f(x)$ *равномерно на* K, если для каждого числа $\varepsilon > 0$ найдется такой номер $n_0 = n_0(\varepsilon)$, что для всех $n \geq n_0$ и любого $x \in K$ имеет место неравенство

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

Переход от функций, определенных на промежутке $[a, b]$, к функциям, заданным на произвольном множестве $K \subset X$, не внесет никаких изменений в доказательства приведенных ранее (см. § 2) теорем 1, 2, 3, если, кроме того, в условиях теоремы 3 (Дини) предположить, что множество K является компактным. Поэтому указанные теоремы 1, 2, 3 верны и в этом случае (теорема 3 — в предположении компактности K). Имея это з виду, приведем несколько фактов, относящихся ко множествам непрерывных функций на компактном множестве K метрического пространства X.

Определение 1. Множество $\mathfrak{M}$ функций, определенных на K, назовем *равномерно ограниченным* на K, если существует такая константа M, что для всех $f \in \mathfrak{M}$ и при любом $x \in K$ выполняется неравенство $|f(x)| \le M$.

Определение 2. Множество $\mathfrak{M}$ функций, определенных на K, называется *равностепенно непрерывным* на K, если для каждого числа $\varepsilon > 0$ найдется такое число $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, что при любых $x', x'' \in K$, таких, что $\rho(x', x'') < \delta$, и для всех $f \in \mathfrak{M}$ выполняется неравенство

$$|f(x') - f(x'')| < \varepsilon.$$

Ясно, что функции равностепенно непрерывного на K множества $\mathfrak{M}$ являются непрерывными на K.

Теорема 1. *Равномерно сходящаяся на компактном множестве последовательность $\{f_n(x)\}$ непрерывных функций является равномерно ограниченной и равностепенно непрерывной.*

Доказательство. Проверим вначале равномерную ограниченность последовательности $\{f_n(x)\}$. Возьмем для этого произвольно число $\varepsilon > 0$ и найдем такой номер $n_0 = n_0(\varepsilon)$, что при всех $n \ge n_0$ в каждой точке $x \in K$ выполняется неравенство

$$|f_n(x) - f_{n_0}(x)| < \varepsilon,$$

откуда

$$|f_n(x)| < |f_{n_0}(x)| + \varepsilon.$$

Так как непрерывные на компактном множестве функции ограничены на этой множестве, то, полагая $M^{(j)} = \sup\limits_K |f_j(x)|$, $j = 1, 2, \ldots, n_0$, будем иметь, что $M^{(j)} < \infty$, $j = 1, 2, \ldots, n_0$. Взяв $M = \max\,\{M^{(1)}, \ldots, M^{(n_0)}\}$, получим неравенство

$$|f_n(x)| \le M + \varepsilon,$$

справедливое при всех n и в каждой точке $x \in K$. Тем самым равномерная ограниченность последовательности $\{f_n(x)\}$ на K установлена.

Для доказательства равностепенной непрерывности последовательности $\{f_n(x)\}$ возьмем произвольное число $\varepsilon > 0$ и найдем такое натуральное число $n_0 = n_0(\varepsilon)$, чтобы при всех $n \ge n_0$ на K имело место неравенство

$$|f_n(x) - f_{n_0}(x)| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Так как функция $f_{n_0}(x)$ непрерывна на K, а следовательно, и равномерно непрерывна (K компактно), найдется такое число $\delta_{n_0} = \delta_{n_0}(\varepsilon)$, что для любых $x', x'' \in K$, таких, что $\rho(x', x'') < \delta_{n_0}$ будет выполняться неравенство

$$|f_{n_0}(x') - f_{n_0}(x'')| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Но тогда для каждого $n \ge n_0$ и любых $x', x'' \in K$, для которых $\rho(x', x'') < \delta_{n_0}$

$$|f_n(x') - f_n(x'')| \le |f_n(x') - f_{n_0}(x')| + |f_{n_0}(x') - f_{n_0}(x'')| + |f_{n_0}(x'') - f_n(x'')| <$$

$$< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

Обозначив теперь через δ_j, $j = 1, 2, \ldots, n_0$, такие положительные числа, что для любых $x', x'' \in K$, для которых $\rho(x', x'') < \delta_j$, выполняется неравенство

$$|f_j(x') - f_j(x'')| < \frac{\varepsilon}{3},$$

(такие δ_j существуют, так как все функции $f_j(x)$ равномерно непрерывны на K), и положив

$$\delta = \min\,\{\delta_1, \ldots, \delta_{n_0}\},$$

видим, что неравенство

$$|fn(x') - f_n(x'')| < \varepsilon$$

выполняется для всех значений n и любых $x', x'' \in K$, таких, что $\rho(x', x'') < \delta$. Теорема доказана.

Далее имеет место следующее утверждение.

Теорема 2. *Если последовательность $\{f_n(x)\}$ равностепенно непрерывна на компактном множестве K и поточечно сходится на K к $f(x)$, то она сходится на K к этой функции равномерно.*

Доказательство. Возьмем произвольное число $\varepsilon > 0$ и найдем такое число $\delta = \delta(\varepsilon)$, чтобы при $\rho(x', x'') < \delta$ выполнялось неравенство

$$|f_n(x') - f_n(x'')| < \frac{\varepsilon}{3}$$

для всех функций $f_n(x)$ последовательности. Каждую точку x окружим δ-окрестностью $U(x, \delta)$ и отнесем точке x номер n_x, начиная с которого выполняется неравенство

$$|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3},$$

где $n \geq n_x$. В результате получим покрытие $\{U(x, \delta)\}$ компактного множества K. Выберем из этого покрытия конечное подпокрытие $U(x_1, \delta), \ldots, U(x_\nu, \delta)$ и соответственно — конечный набор целых чисел $n_{x_1}, \ldots, n_{x_\nu}$, таких, что при $n \geq n_{x_j}$ выполняется неравенство

$$|f_n(x_j) - f(x_j)| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Положим $n_0 = \max\,\{n_{x_1}, \ldots, n_{x_\nu}\}$ и возьмем произвольно $x \in K$. Тогда x будет принадлежать некоторому $U(x_j, \delta)$ и при $n \geq n_0$

$$|f_n(x) - f(x)| \leq |f_n(x) - f_n(x_j)| + |f_n(x_j) - f(x_j)| + |f(x_j) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon,$$

что требовалось доказать.

При переходе к последним неравенствам мы воспользовались тем очевидным фактом, что предельная функция для равностепенно непрерывно и сходящейся последовательности является непрерывной и для нее по заданному числу $\varepsilon > 0$ можно использовать то же самое число $\delta = \delta(\varepsilon)$, которое входит в определение равностепенной непрерывности последовательности.

Напомним, что множество $\mathfrak{M}$ метрического пространства называется компактным, если из любой последовательности $\{x_n\} \subset \mathfrak{M}$ можно выделить подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$, сходящуюся к точке $x_0 \in \mathfrak{M}$. Будем, называть множество $\mathfrak{M}$ *предкомпактным*, если его замыкание компактно. Если множество $\mathfrak{M}$ предкомпактно, то из любого его подмножества можно выделить сходящуюся последовательность, но предел этой последовательности может и не принадлежать $\mathfrak{M}$. Ясно, что замкнутое предкомпактное множество компактно. Так как сходимость в метрическом пространстве $C[a, b]$ есть равномерная на $[a, b]$ сходимость функциональной последовательности (см. § 2 гл. X), то предкомпактность множества $\mathfrak{M} \subset C[a, b]$ означает, что из любой последовательности $\{f_n(x)\} \subset \mathfrak{M}$ можно выделить подпоследовательность $\{f_{n_k}(x)\}$, равномерно на $[a, b]$ сходящуюся к некоторой функции $f_0(x) \in C[a, b]$.

Докажем теперь критерий компактности множеств в метрическом пространстве $C(K)$.

Теорема (Арцела[36]). *Для того чтобы множество $\mathfrak{M} \subset C(K)$ было предкомпактным, необходимо и достаточно, чтобы $\mathfrak{M}$ было равномерно ограничено и равностепенно непрерывно.*

Необходимость. Пусть $\mathfrak{M}$ — предкомпактное множество. Предположим, что $\mathfrak{M}$ не является равномерно ограниченным. Тогда для каждого натурального числа n найдется такая функция $f_n(x) \in \mathfrak{M}$, что

$$\|f_n\| = \sup_K |f_n(x)| = M_n > n.$$

. Таким образом, мы построили последовательность $\{f_n(x)\}$ функций множества $\mathfrak{M}$, такую, что

$$\|f_n\| \to \infty \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

В силу предкомпактности $\mathfrak{M}$, из этой последовательности можно выделить равномерно сходящуюся на K подпоследовательность $\{f_{n_k}\}$. Для этой подпоследовательности, по построению, $\|f_{n_k}\| \to \infty$. С другой стороны, в силу теоремы 1, найдется такое число M, что $\|f_{n_k}\| \leq M$. Полученное противоречие доказывает равномерную ограниченность множества $\mathfrak{M}$.

Обратимся теперь к установлению равностепенной непрерывности $\mathfrak{M}$. Для этого допустим, что $\mathfrak{M}$ не равностепенно непрерывное множество. Тогда для некоторого $\varepsilon_0 > 0$ при любом $\delta > 0$ найдутся такая функция $f_\delta(x) \in \mathfrak{M}$ и такие точки $x'_\delta, x''_\delta \in K$, что хотя $\rho(x'_\delta, x''_\delta) < \delta$, но

$$|f_\delta(x'_\delta) - f_\delta(x''_\delta)| \geq \varepsilon_0.$$

Взяв последовательность $\delta_n \to 0$, определим последовательность функций $f_n(x) = f_{\delta_n}(x) \in \mathfrak{M}$ и последовательность пар (x'_n, x''_n) точек K, таких, что $\rho(x'_n, x''_n) < \delta_n$ и $|f_n(x'_n) - f_n(x''_n)| \geq \varepsilon_0$.

В силу предположенной предкомпактности множества $\mathfrak{M}$, из последовательности $\{f_n(x)\}$ можно выделить подпоследовательность $\{f_{n_k}(x)\}$, равномерно сходящуюся к K. Но тогда эта подпоследовательность должна быть и равностепенно

---

[36] Ч. Арцела (1847–1912 гг.) — итальянский математик.

непрерывной на K (теорема 1), что противоречит неравенству

$$|f_{n_k}(x'_{n_k}) - f_{n_k}(x''_{n_k})| \geq \varepsilon_0,$$

так как

$$\rho(x'_{n_k}, x''_{n_k}) \leq \delta_{n_k} \to 0.$$

Достаточность. Пусть $\mathfrak{M} \subset C(K)$ — равномерно ограниченное и равностепенно непрерывное множество, возьмем произвольную последовательность $\{f_n(x)\}$, $f_n \in \mathfrak{M}$, и некоторое счетное множество $\{x_m\}$ точек K, плотное в K. В силу леммы 1 из § 2 гл. X, такое множество существует.

Выберем из последовательности $\{f_n(x)\}$ подпоследовательность $\{f_{k,1}\}$, $k = 1, 2, \ldots$, сходящуюся в точке x_1. Это можно сделать, так как, по условию, последовательность $\{f_n(x_1)\}$ является ограниченной. Далее, из последовательности $\{f_{k,1}(x)\}$ выделим подпоследовательность $\{f_{k,2}(x)\}$, сходящуюся в точке x_2 и т.д. , на m-м шаге выберем подпоследовательность $\{f_{k,m}(x)\}$ последовательности $\{f_{k,m-1}\}$, сходящуюся в точке x_m (а вместе с тем и в точках $x_1, x_2, \ldots, x_{m-1}$) и т.д. В результате получим последовательность подпоследовательностей

$$\begin{gathered} f_{1,1}(x), \ldots, f_{n,1}(x), \ldots \\ f_{1,2}(x), \ldots, f_{n,2}(x), \ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ f_{1,m}(x), \ldots, f_{n,m}(x), \ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{gathered}$$

Диагональная последовательность $\{f_{1,1}(x), f_{2,2}(x), \ldots, f_{n,n}(x), \ldots$ является, очевидно, сходящейся в каждой точке x_k данной последовательности. Покажем, что эта последовательность поточечно сходится на множестве K. Пусть $x_0 \in K$, x_0 — произвольная фиксированная точка K. Возьмем произвольное число $\varepsilon > 0$ и подберем такое $\delta = \delta(\varepsilon)$, что для всех $x \in K$, для которых $\rho(x, x_0) < \delta$,

$$|f(x) - f(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3}$$

при любом $f \in \mathfrak{M}$. Пусть, далее, точка x_m, такова, что $\rho(x_m, x_0) < \delta$. Так как последовательность $\{f_{n,n}\}$ сходится в точке x_m, найдется такой номер n_0, что при $n, n' \geq n_0$ будет $|f_{n,n}(x_m) - f_{n',n'}(x_m)| < \dfrac{\varepsilon}{3}$. Но тогда

$$|f_{n,n}(x_0) - f_{n',n'}(x_))| \leq |f_{n,n}(x_0) - f_{n,n}(x_m)| + |f_{n,n}(x_m) - f_{n',n'}(x_m)| +$$

$$+|f_{n',n'}((x_m) - f_{n',n'}(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon,$$

и сходимость «диагональной» последовательности в произвольно взятой точке x_0 установлена. Таким образом, последовательность $\{f_{n,n}(x)\}$ поточечно сходится на K. Тем самым на K определена функция

$$f(x) = \lim_n f_{n,n}(x).$$

В силу теоремы 2 из § 3, последовательность $\{f_{n,n}(x)\}$ сходится равномерно к функции $f(x)$. Ясно, что $f(x)$, как предел равномерно сходящейся на K последовательности непрерывных функций, является непрерывной на K функцией, т.е. $f \in C(K)$. Таким образом, теорема Арцела доказана.

§ 4. Сходимость функциональных последовательностей в среднем

В математическом анализе и многих его приложениях находит применение следующее понятие.

Определение. Последовательность $\{f_n(x)\}$ интегрируемых на $[a, b]$ функций называется *сходящейся в среднем* к интегрируемой на $[a, b]$ функции $f(x)$, если

$$\lim \int_a^b [f_n(x) - f(x)]^2 \, dx = 0.$$

Для обозначения такой сходимости будем пользоваться записью $f_n(x) \overset{\text{сред.}}{\to} f(x)$. Легко проверить, что каждая равномерно на $[a, b]$ сходящаяся последовательность интегрируемых функция сходится и в среднем на этом промежутке. Действительно, пусть $f_n(x) \rightrightarrows f(x)$ и функции $f_n(x)$ интегрируемы на $[a, b]$; тогда $f(x)$ интегрируема на $[a, b]$ и для заданного $\varepsilon > 0$ найдется такой номер $n_0 = n_0(\varepsilon)$, что при $n \geq n_0$ и любом $x \in [a, b]$ будет иметь место неравенство

$$|f_n(x) - f(x)| < \sqrt{\frac{\varepsilon}{b-a}}.$$

Но тогда при $n \geq n_0$

$$\int_a^b [f_n(x) - f(x)]^2 \, dx = \int_a^b |f_n(x) - f(x)|^2 \, dx < \varepsilon,$$

что и означает $f_n(x) \overset{\text{сред.}}{\to} f(x)$ на $[a, b]$.

Как показывают приводимые далее примеры, понятия поточечной сходимости последовательности $\{f_n(x)\}$ и сходимости в среднем этой последовательности, вообще говоря, не связаны между собой.

Рассмотрим последовательность

$$f_n(x) = \sqrt{2nx}\, e^{-\frac{1}{2}nx^2}.$$

Эта последовательность, очевидно, поточечно сходится к функции $f(x) \equiv 0$ на отрезке $[0, 1]$, однако в среднем она не сходится к этой функции, так как

$$\int_0^1 [f_n(x) - f(x)]^2 \, dx = \int_0^1 2nxe^{-nx^2} \, dx = 1 - e^{-n} \to 1$$

при $n \to \infty$.

Приведем пример последовательности интегрируемых на $[0,1]$ функций, которая в среднем сходится на $[0,1]$ к функции $f(x) \equiv 0$, но не сходится ни в одной точке этого промежутка. Положим

$$f_1(x) = \begin{cases} 1 & \text{при} \quad 0 \le x \le \dfrac{1}{2}, \\ 0 & \text{при} \quad \dfrac{1}{2} < x \le 1. \end{cases}$$

Эта функция, очевидно, интегрируема на $[0,1]$ и $\int\limits_0^1 f_1(x)\,dx = \dfrac{1}{2}$. Определим теперь функцию $f_2(x)$ равенством

$$f_2(x) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad 0 \le x \le \dfrac{1}{2}, \\ 1 & \text{при} \quad \dfrac{1}{2} < x \le 1. \end{cases}$$

Эта функция также интегрируема, и интеграл от нее по промежутку $[0,1]$ равен $\dfrac{1}{2}$.

Для построения функций $f_3(x)$, $f_4(x)$, $f_5(x)$, $f6(x)$ разобьем промежуток $[0,1]$ на 4 равные части: $\left[0, \dfrac{1}{4}\right]$, $\left[\dfrac{1}{4}, \dfrac{1}{2}\right]$, $\left[\dfrac{1}{2}, \dfrac{3}{4}\right]$, $\left[\dfrac{3}{4}, 1\right]$, и положим:

$$f_3(x) = \begin{cases} 1 & \text{при} \quad x \in \left[0, \dfrac{1}{4}\right], \\ 0 & \text{при} \quad x \in [0,1] \setminus \left[0, \dfrac{1}{4}\right], \end{cases}$$

$$f_4(x) = \begin{cases} 1 & \text{при} \quad x \in \left[\dfrac{1}{4}, \dfrac{1}{2}\right], \\ 0 & \text{при} \quad x \in [0,1] \setminus \left[\dfrac{1}{4}, \dfrac{1}{2}\right], \end{cases}$$

$$f_5(x) = \begin{cases} 1 & \text{при} \quad x \in \left[\dfrac{1}{2}, \dfrac{3}{4}\right], \\ 0 & \text{при} \quad x \in [0,1] \setminus \left[\dfrac{1}{2}, \dfrac{3}{4}\right], \end{cases}$$

$$f_6(x) = \begin{cases} 1 & \text{при} \quad x \in \left[\dfrac{3}{4}, 1\right], \\ 0 & \text{при} \quad x \in [0,1] \setminus \left[\dfrac{3}{4}, 1\right]. \end{cases}$$

Все эти функции интегрируемы на промежутке $[0,1]$, и интеграл от каждой из них равен $\dfrac{1}{4}$.

Далее разобьем промежуток $[0,1]$ на 2^s равных частей и соответственно каждой части разбиения построим функцию, равную единице на этой части и нулю вне ее и т.д.

Очевидно, что построенная таким образом функциональная последовательность в среднем сходится на $[0,1]$ к нулю и не сходится ни в одной точке этого промежутка, так как какую бы точку x_0 из $[0,1]$ мы ни взяли, среди функций последовательности имеется бесконечно много как таких, которые в точке x_0 принимают значение 1, так и таких, которые в этой точке обращаются в нуль.

§ 5. Функциональные ряды

Пусть $\{u_n(x)\}$ — последовательность вещественнозначных функций, заданных на $[a,b]$. Выражение

$$u_1(x) + u_2(x) + \ldots + u_n(x) + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \tag{1}$$

называют *функциональным рядом*, определенным на $[a,b]$, а входящие в него функции $u_n(x)$ — членами этого ряда.

Отнесем ряду (1) последовательность $\{s_n(x)\}$ конечных сумм

$$s_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + \ldots + u_n(x), \qquad n = 1, 2, \ldots, \tag{2}$$

называемых *частичными суммами* ряда (1). Функциональный[37] ряд (1) называется *сходящимся в точке* $x_0 \in [a,b]$, если в этой точке сходится последовательность (2). Ряд, сходящийся в каждой точке некоторого множества, называется *сходящимся* (поточечно) на этом множестве. Ряд (1) *сходится равномерно* (*в среднем*) на промежутке $[a,b]$, если на этом промежутке равномерно (в среднем) сходится последовательность (2) его частичных сумм. Предельная функция последовательности (2) называется *суммой ряда* (1):

$$s(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x).$$

Как и для случая числовых рядов в случае функциональных рядов ряды вида

$$u_{n+1}(x) + u_{n+2}(x) + \ldots \tag{3}$$

называются *n-ми остатками* ряда (1), а конечные суммы

$$u_{n+1}(x) + \ldots + u_{n+p}(x)$$

— его *отрезками.*

---

[37] В дальнейшем прилагательное «функциональный» будем, как правило, опускать.

Легко проверить, что сходимость ряда (1) и любого его остатка (3) имеют место одновременно. Если через $R_n(x)$ обозначить сумму n-го остатка ряда (1), то

$$s(x) = s_n(x) + R_n(x).$$

Из этого равенства вытекает следующее без труда проверяемое утверждение.

Для того чтобы ряд (1) *сходился равномерно на промежутка* $[a, b]$, *необходимо и достаточно, чтобы последовательность его остатков равномерно сходилась на* $[a, b]$ *к функции, тождественно равной нулю.*

Признак Коши равномерной сходимости функциональной последовательности, приведенный в § 1 данной главы применительно к ряду (1), может 0ытъ сформулирован следующим образом.

Для того чтобы функциональный ряд (1) *сходился равномерно на* $[a, b]$, *необходимо и достаточно, чтобы для каждого числа* $\varepsilon > 0$ *существовал такой номер* $n_0 = n_0(\varepsilon)$, *что при всех* $n \geq n_0$ *и любом целом числе* $p > 0$ *во всех точках* $x \in [a, b]$ *выполняется неравенство*

$$|u_{n+1}(x) + \ldots + u_{n+p}(x)| < \varepsilon. \tag{4}$$

Действительно, если $s_n(x)$ и $s_m(x)$ — частичные суммы ряда (1) и $m > n$, то, полагая $m = n + p$, получим:

$$s_m(x) - s_n(x) = u_{n+1}(x) + \ldots + u_{n+p}(x),$$

откуда в силу признака Коши для функциональной последовательности $\{s_n(x)\}$ следует справедливость (4).

Легко проверить, что если ряд (1) сходится равномерно на $[a, b]$ и $\varphi(x)$ — ограниченная на $[a, b]$ функция, то ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \varphi(x) u_n(x)$$

также равномерно сходится на $[a, b]$. В дальнейшем мы часто будем пользоваться этим замечанием.

Ряд (1) называется *абсолютно сходящимся* на промежутке $[a, b]$ (множестве X), если на этом промежутке (множестве X) сходится ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} |u_n(x)|.$$

Подобно случаю числовых рядов, каждый абсолютно сходящийся на $[a, b]$ ряд сходится на этом промежутке. Обратный факт, вообще говоря, не имеет места.

Рассмотрим ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}. \tag{5}$$

Легко видеть, что он сходится равномерно на промежутке $[0,1]$. Действительно, в силу оценки остатка в знакочередующемся ряде имеем:

$$|r_n(x)| = \left|\frac{x^{n+1}}{n+1} - \frac{x^{n+2}}{n+2} + \ldots\right| \le \frac{|x|^{n+1}}{n+1} \le \frac{1}{n+1}.$$

Однако этот ряд не является абсолютно сходящимся на $[0,1]$, так как ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} ? \frac{x^n}{n}$$

расходится в точке $x = 1$.

Таким образом, ряд (5), будучи равномерно сходящимся на $[0,1]$, не сходится абсолютно на этом промежутке. Наоборот, ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} x^n(1-x) \tag{6}$$

сходится абсолютно на $[0,1]$, так как это знакоположительный ряд и его n-я частичная сумма $s_n(x) = (1-x) + (x-x^2) + \ldots + (x^{n-1} - x^n) = 1 - x^n$ имеет предел при каждом $x \in [0,1]$.

Но этот ряд не сходится равномерно, так как сумма ряда

$$s(x) = \begin{cases} 1 & \text{при} \quad 0 \le x < 1, \\ 0 & \text{при} \quad x = 1 \end{cases}$$

— разрывная на $[0,1]$ функция.

Вместе с тем мы показали на приведенных примерах, что понятия абсолютной и равномерной сходимости функциональных рядов, вообще говоря, не связаны между собой. Однако имеет место следующий достаточный признак, обеспечивающий одновременно абсолютную и равномерную сходимость функциональных рядов.

Признак сравнения (Вейерштрасса). *Если последовательность чисел* $\{c_n\}$ *такова, что неравенства*

$$|u_n(x)| \le c_n \tag{7}$$

выполнены для всех n *и при всех* $x \in [a,b]$, *и если положительный ряд*

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n \tag{8}$$

сходится, то функциональный ряд (1) *сходится абсолютно и равномерно на* $[a,b]$.

Доказательство. В самом деле, так как ряд (8) сходится, то для заданного $\varepsilon > 0$ найдется такой номер $n_0 = n_0(\varepsilon)$, что при всех $n \ge n_0$ будет выполняться неравенство

$$c_{n+1} + \ldots + c_{n+p} < \varepsilon$$

для всех $p > 0$. В силу (7), для всех отрезков ряда (1), для которых $n \geq n_0$, $p > 0$, и при всех $x \in [a, b]$ получим:

$$|u_{n+1}(x) + \ldots + u_{n+p}(x)| \leq |u_{n+1}(x)| + \ldots + |u_{n+p}(x)| \leq c_{n+1} + \ldots + c_{n+p} < \varepsilon,$$

что доказывает равномерную и абсолютную сходимость ряда (1).

В соответствии с признаками Абеля и Дирихле сходимости числовых рядов, для функциональных рядов вида

$$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n(x)\beta_n(x) \tag{9}$$

имеют место следующие признаки равномерной сходимости.

Признак Абеля. *Если ряд*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n(x) \tag{10}$$

равномерно сходится на промежутке $[a, b]$, *а последовательность функций* $\beta_n(x)$ *является монотонной (по* n*)*[38] *и равномерно ограниченной на* $[a, b]$, *то ряд* (9) *сходится на* $[a, b]$ *равномерно.*

Признак Дирихле. *Если последовательность частичных сумм ряда* (9) *равномерно ограничена на* $[a, b]$, *а последовательность* $\{\beta_n(x)\}$, *будучи монотонной по* n, *равномерно на* $[a, b]$ *сходится к нулю, то ряд* (9) *сходится равномерно на* $[a, b]$.

Доказательства этих утверждений весьма близки к приведенным для числовых рядов и предлагаются в качестве упражнения читателю.

Обращаясь к свойствам равномерно сходящихся рядов и их сумм, приведем вначале предложение, устанавливающее допустимость почленного перехода к пределу в равномерно сходящемся ряде.

Теорема 1. *Если функциональный ряд*

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$$

равномерно сходится на множестве X *и каждая из функций* $u_n(x)$ *имеет конечный предел* c_n *в точке* x_0, *т.е.*

$$\lim_{n\to\infty} u_n(x) = c_n,$$

то числовой ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n$$

---

[38] Напомним, что монотонность последовательности $\{\beta_n(x)\}$ по n означает монотонность числовой последовательности $\{\beta_n(x)\}$ при каждом фиксированном значении x.

сходится и его сумма c равна пределу суммы исходного функционального ряда в точке x_0, т.е.

$$\lim_{x\to x_0} s(x) = \lim_{x\to x_0} \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \lim_{x\to x_0} u_n(x) = c.$$

Доказательство непосредственно вытекает из теоремы 1 § 2 данной главы для функциональных последовательностей.

Условимся, что функциональный ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \tag{I}$$

составленный из интегрируемых на $[a, b]$ функций $u_n(x)$, можно *почленно интегрировать*, если его сумма $s(x)$ является интегрируемой на $[a, b]$, функцией и имеет место равенство

$$\int_a^b s(x)\,dx = \int_a^b \left[\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)\right] dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b u_n(x)\,dx. \tag{11}$$

Теорема 2. *Если функции $u_n(x)$ интегрируемы на $[a, b]$ и ряд* (I) *сходится равномерно на этом промежутке, то этот ряд допускает почленное интегрирование.*

Действительно, в условиях теоремы все частичные суммы $s_n(x)$ ряда (I) являются интегрируемыми на $[a, b]$ функциями, а значит, интегрируема и предельная для последовательности $\{s_n(x)\}$ функция $s(x)$. Таким образом, сумма $s(x)$ ряда интегрируема на $[a, b]$. Но тогда, согласно теореме 4 из § 2, данной главы,

$$\int_a^b s(x)\,dx = \lim \int_a^b s_n(x)\,dx = \lim \int_a^b \left[\sum_{k=1}^{n} u_k(x)\right] dx =$$

$$= \lim \left[\sum_{k=1}^{n} \int_a^b u_k(x)\,dx\right] = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b u_k(x)\,dx,$$

т.е. выполняется равенство (11).

Применение теоремы 2 из § 2 приводит к следующей теореме для функциональных рядов.

Теорема 3. *Если все члены $u_n(x)$ ряда* (I) *непрерывны на $[a, b]$ и ряд сходится равномерно на этом отрезке, то сумма ряда $s(x)$ непрерывна на нем.*

Действительно, в условиях этой теоремы все частичные суммы $s_n(x)$ непрерывны на $[a, b]$, и выполняются условия теоремы 2 из § 2.

Теореме 3 из § 2 для функциональных последовательностей соответствует следующая теорема.

Теорема (Дини). *Если все члены* $u_n(x)$ *функционального ряда* (I) *непрерывны и неотрицательны на* $[a,b]$ *и сумма ряда непрерывна на* $[a,b]$, *то ряд* (I) *сходится равномерно.*

Действительно, в этом случае последовательность $\{s_n(x)\}$ частичных сумм ряда (I) удовлетворяет всем условиям теоремы Дини для функциональных последовательностей.

Если сумма ряда (I) и все его члены дифференцируемы на $[a,b]$ функции и выполняется равенство

$$s'(x) = \left[\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)\right]' = \sum_{n=1}^{\infty} u'_n(x), \tag{12}$$

то говорят, что ряд (1) *допускает почленное дифференцирование.*

Теорема 5. *Если все функции* $u_n(x)$ *непрерывны на* $[a,b]$ *вместе с производными* $u'_n(x)$ *и ряд* (I) *сходится, а ряд*

$$\sum_{n=1}^{\infty} u'_n(x) \tag{13}$$

сходится равномерно на $[a,b]$, *то ряд* (I) *допускает почленное дифференцирование.*

Доказательство вытекает из того, что для последовательности частичных сумм $\{s_n(x)\}$ ряда (I) применима теорема 5 из § 2.

Заметим, что сходящиеся функциональные ряды можно почленно (поточечно) складывать, а абсолютно сходящиеся на промежутке $[a,b]$ ряда можно перемножать по правилу умножения многочленов. Кроме того, в абсолютно сходящихся функциональных рядах допускается любая перестановка и группировка членов.

Наконец, укажем, что все изложенное для функций одной переменной непосредственно распространяется на случай функциональных рядов, членами которых являются вещественнозначные функции нескольких переменных.

§ 6. Степенные ряды

Частным случаем функционального ряда является ряд

$$c_0 + c_1x + + \ldots + c_nx^n + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} c_nx^n, \tag{1}$$

называемый *степенным рядом* с членами c_nx^n и *коэффициентами* c_n. Ясно, что члены степенного ряда определены, непрерывны и дифференцируемы сколько угодно раз при всевозможных значениях $x \in \mathbb{R}$, поэтому степенной ряд определен на всей числовой прямой. Степенной ряд, очевидно, сходится в точке $x = 0$. Для выяснения вида области сходимости ряда (1) установим следующее утверждение.

Лемма 1 (Абеля). *Если степенной ряд сходится в точке $x_0 \neq 0$, то сходится, и притом абсолютно, в каждой точке x', для которой $|x'| < |x_0|$.*

Доказательство. Так как последовательность членов сходящегося (по условию) числового ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ сходится к нулю, существует такое число M, что при всех значениях n выполняется неравенство

$$|c_n x_0^n| \leq M. \tag{2}$$

Пусть теперь x' — любая точка, для которой $|x'| < |x_0|$, т.е.$\dfrac{|x'|}{|x_0|} = q < 1$. Для доказательства сходимости ряда

$$\sum_{n=0}^{\infty} |c_n x'^n| \tag{3}$$

преобразуем несколько выражение общего члена этого ряда, и, используя неравенство (2), найдем для него оценку

$$|c_n x'^n| = |c_n x_0^n| \left(\frac{|x'|}{|x_0|}\right)^n \leq M q^n.$$

Таким образом, члены ряда (3) не превосходят соответствующих членов геометрического ряда

$$\sum_{n=0}^{\infty} M q^n$$

со знаменателем $q < 1$, откуда, в силу признака сравнения для положительных рядов, следует сходимость ряда (3), т.е. абсолютная сходимость ряда (1) в точке x'.

Следствие. *Если степенной ряд расходится в некоторой точке x^0, то он расходится и в каждой точке x^+, для которой $|x^+| > |x^0|$.*

Действительно, предположение о сходимости в некоторой точке x^+, для которой выполнено неравенство $|x^+| > |x^0|$ в соответствии с леммой Абеля, влечет за собой абсолютную сходимость ряда в точке x^0 и тем самым приводит к противоречию с предположением о расходимости ряда в этой точке.

Пусть $\mathfrak{N}$ — совокупность всех точек x сходимости ряда (1) и $R = \sup\ \mathfrak{N}$.

Поскольку точка $x = 0 \in \mathfrak{N}$, ясно, что $R \geq 0$.

Так определенное число R называется *радиусом сходимости степенного ряда* (1). Если $R > 0$, то интервал $(-R, R)$ называют *интервалом сходимости степенного ряда* (1).

Лемма 2. *На каждом отрезке $[\alpha, \beta]$, содержащемся в интервале сходимости степенного ряда* (1)*, этот ряд сходится равномерно.*

Доказательство. В условиях леммы $R > 0$ и $\rho = \max\{|\alpha|, |\beta|\} < R$. В соответствии с определением числа R найдется точка $x_0 \in \mathfrak{N}$, для которой $\rho < x_0 < R$, а в силу леммы Абеля это означает, что в точке $x = \rho$ степенной ряд сходится абсолютно, т.е. сходится ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} |c_n|\rho^n. \tag{4}$$

С другой стороны, для всех точек $x \in [\alpha, \beta]$ выполнено неравенство $x \in [\alpha, \beta]$ выполнено неравенство $|x| \leq \rho$, т.е. для всех $x \in [\alpha, \beta]$

$$|c_n x^n| \leq |c_n|\rho^n.$$

Таким образом, для ряда (1) на $[\alpha, \beta]$ и положительного ряда (4) выполнены условия признака сравнения (Вейерштрасса), согласно которому ряд (1) сходится равномерно на отрезке $[\alpha, \beta]$.

Замечание 1. Так как для произвольного замкнутого множества F, содержащегося в интервале $(-R, R)$, найдется такой отрезок $[\alpha, \beta] \subset (-R, R)$, что $F \subset [\alpha, \beta]$ (достаточно положить $\alpha = \inf\ F$, $\beta = \sup\ F$), то лемма 2 устанавливает тем самым равномерную сходимость ряда (1) на каждом замкнутом множестве, содержащейся в интервале сходимости $(-R, R)$ этого ряда.

Условимся говорить, что некоторое свойство степенного ряда (1) имеет место внутри интервала сходимости, если оно выполняется на каждом замкнутом множестве, принадлежащем этому интервалу. Имея в виду это соглашение и леммы 1 и 2, можно сформулировать следующее утверждение.

Теорема 1 (Абеля). *Для каждого степенного ряда существует такое число* $R \geq 0$, *что при* $R > 0$ *степенной ряд сходится абсолютно в интервале* $(-R, R)$, *равномерно внутри этого интервала и при* $R < \infty$ *расходится в каждой точке, внешней к этому интервалу.*

Доказательство содержится в ранее приведенных леммах. Остается только заметить, что ни в какой точке x^0, такой, что $|x^0| > R$, ряд (1) не может сходиться, так как в предположении противного $x_0 \in \mathfrak{N}$ и $R \geq |x^0|$.

В концевых точках интервала сходимости ряд может быть как сходящимся, так и расходящимся. Например, легко проверить, что ряд

$$1 - \frac{x}{1} + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + \dots$$

сходится при $x = 1$ и расходится при $x = -1$, откуда вытекает, что промежуток $(-1, 1)$ является интервалом сходимости этого ряда.

Следующее утверждение указывает на возможность выражения радиуса сходимости степенного ряда через его коэффициенты.

Теорема 2 (Коши–Адамара). *Радиус сходимости* R *степенного ряда* (1) *определяется равенством*

$$R = \frac{1}{L}, \tag{5}$$

где $L = \overline{\lim}\ \sqrt[n]{|c_n|}$. *При этом мы полагаем* $R = \infty$, *если* $L = 0$ *и* $R = 0$, *если* $L = \infty$.

Доказательство. Рассмотрим следующие возможные случая:

1) $L = 0$,
2) $L = \infty$,
3) $0 < L < \infty$,

и проведем доказательство для каждого из этих случаев.

Покажем, что в первом случае степенной ряд сходится абсолютно на всей числовой прямой, т.е. $R = \infty$.

Пусть x_0 — произвольная точка числовой прямой, $x_0 \neq 0$. Так как все члены последовательности $\{\sqrt[n]{|c_n|}\}$ неотрицательны и $\overline{\lim}\ \sqrt[n]{|c_n|}$, эта последовательность сходится к нулю, а вместе с ней и

$$|x_0|\,\{\sqrt[n]{|c_n|}\} \to 0.$$

Возьмем число ρ так, чтобы $0 < \rho < 1$. Тогда найдется такой номер n_0, что при $n \geq n_0$

$$|x_0|\,\{\sqrt[n]{|c_n|}\} < \rho$$

или

$$|c_n|\,|x_0|^n < \rho^n.$$

Таким образом, члены ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} |c_n x_0^n|$ начинал с номера n_0 не превосходят соответствующих членов геометрического ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \rho^n$ со знаменателем $\rho < 1$, откуда следует абсолютная сходимость ряда (1) в точке x_0, т.е. равенство $R = \infty$.

В случае $L = \infty$ покажем, что ряд (1) расходится в каждой точке $x^0 \neq 0$. Так как $\overline{\lim}\ \sqrt[n]{|c_n|} = \infty$, найдется такая подпоследовательность $\{\sqrt[n_k]{|c_{n_k}|}\}$, для которой

$$\sqrt[n_k]{|c_{n_k}|} \to \infty.$$

Но тогда и $|x_0|\,\sqrt[n_k]{|c_{n_k}|} \to \infty$, а значит, для всех достаточно больших номеров n_k будет иметь место неравенство

$$|x^0|\,\sqrt[n_k]{|c_{n_k}|} > 1 \quad \text{или} \quad |c_{n_k} x^{0^{n_k}}| > 1$$

т.е. среди членов ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ со сколь угодно большими номерами найдутся такие, модуль которых больше единицы. Значит, последовательность членов этого ряда не может сходиться к нулю, что означает расходимость ряда (1) в точке x^0.

Наконец, обратимся к случаю, когда $0 < L < \infty$, и покажем, что ряд (1) сходится абсолютно в каждой точке x_0, для которой $|x_0| < \dfrac{1}{L}$, и расходится в каждой точке x^0, для которой $|x^0| > \dfrac{1}{L}$. Пусть x_0 таково, что $|x_0| < \dfrac{1}{L}$ или $|x_0|L =$

$\rho < 1$. Возьмем число q так, чтобы $\rho < q < 1$; тогда $|x_0|L < q$ или $L < \dfrac{1}{|x_0|}$. Согласно определению числа L, найдется такой номер n_0, что при всех $n \geq n_0$ будет выполняться неравенство

$$\sqrt[n]{|c_n|} < \frac{q}{|x_0|} \quad \text{или} \quad |c_n x^n| < q^n.$$

Таким образом, члены ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} |c_n x^n|$, начиная с номера n_0 не превосходят соответствующих членов геометрического ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} q^n$ со знаменателем $q < 1$, откуда следует, что ряд (1) сходится абсолютно в точка x_0.

Пусть теперь точка x^0 такова, что $|x^0| > \dfrac{1}{L}$ или $|x^0|L = \rho_1 > 1$. Возьмем число q_1 таким образом, чтобы $1 < q_1 < \rho_1$. Тогда для некоторой подпоследовательности $\{ \sqrt[n_k]{|c_{n_k}|}\}$, сходящейся к числу L, начиная с некоторого номера n_0 будет выполняться неравенство

$$\sqrt[n_k]{|c_{n_k}|} > \frac{q_1}{|x^0|}$$

или

$$|c_{n_k} x^{0^{n_k}}| > q_1^{n_k} > 1.$$

Таким образом, для членов ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n x^{0^n}$ не выполнено необходимое условие сходимости, т.е. ряд (1) расходится в точке x^0. Тем самым теорема Коши–Адамара полностью доказана. Равенство (5) называют также *формулой Коши–Адамара.*

Приведем примеры применения формулы Коши–Адамара. Ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x^n$ имеет $R = 1$ и расходится в точках $x = \pm 1$. Ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{x^n}{n}$ имеет $R = 1$, сходится в конце $x = -1$ и расходится при $x = 1$. Ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{x^n}{n^n}$ имеет для L значение 0, откуда следует, что $R = \infty$, и интервалом сходимости этого ряда является вся числовая прямая $(-\infty, \infty)$. Наконец, для ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} n^n x^n$ $L = \infty$ и $R = 0$, т.е. этот ряд сходится только в одной точке $x = 0$.

Замечание 2. Вывод формулы Коши–Адамара основан на свойстве абсолютной сходимости степенного ряда внутри интервала сходимости и использовании признака Коши сходимости знакоположительных рядов. Ясно, что для отыскания радиуса сходимости степенного ряда могут быть применены и другие признаки сходимости положительных рядов. Так, например, применив признак Даламбера к ряду

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

найдем:

$$\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} : \frac{|x|}{n!} = \frac{|x|}{n+1} \to 0$$

при любом фиксированном x. Отсюда следует, что ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ сходится абсолютно при каждом x, т.е. что $R = \infty$.

Обратимся к выяснению свойств суммы степенного ряда. Пусть ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \tag{6}$$

сходится в интервале $(-R, R)$, где $R > 0$.

Теорема 3. *Сумма $f(x)$ степенного ряда является непрерывной функцией внутри интервала сходимости.*

Действительно, так как члены ряда (6) — непрерывные (всюду на числовой прямой) функции и на каждом отрезке $[\alpha, \beta]$, принадлежащем интервалу сходимости, ряд сходится равномерно (см. лемму 2), его сумма $f(x)$ непрерывна на таких отрезках (см. теорему 3 из § 5), а значит, и во всех точках интервала $(-R, R)$.

Теорема 4. *Внутри интервала сходимости степенного ряда допускается почленное дифференцирование этого ряда сколько угодно раз. Получающиеся в результате такого дифференцирования степенные ряды имеют тот же интервал сходимости, что и исходный ряд.*

В самом деле, члены ряда (1) непрерывны в интервале сходимости вместе с производными. Ряд, составленный из производных, т.е. ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} nc_n x^{n-1}$, имеет тот же радиус сходимости, так как он сходится, очевидно, одновременно с рядом $\sum\limits_{n=0}^{\infty} nc_n x^n$, а для этого ряда

$$\overline{\lim}\ \sqrt[n]{|nc_n|} = (\lim\ \sqrt[n]{n})(\overline{\lim}\ \sqrt[n]{|c_n|}) = \overline{\lim}\ \sqrt[n]{|c_n|} = L.$$

Применив теорему 4 из § 5, условия которой выполнены, можно записать:

$$f'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} nc_n x^{n-1}. \tag{7}$$

Для ряда (7) выполнены те же условия, что и для ряда (6), поэтому функция $f'(x)$ дифференцируема внутри интервала сходимости ряда (6) и

$$f''(x) = \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)c_n x^{n-2}$$

к т.д., тем самым возможность почленного дифференцирования ряда (6) и равномерная сходимость полученных после дифференцирования рядов доказана.

Очевидно, что для любого отрезка $[\alpha, \beta] \subset (-R, R)$ выполнены также условия теоремы 1 из § 4, и поэтому

$$\int\limits_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{n+1}(\beta^{n+1} - \alpha^{n+1}).$$

В частности, при $\alpha = 0$ и $\beta = x$

$$\int\limits_{0}^{x} d(t)\,dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{n+1} x^{n+1}. \tag{8}$$

При этом легко проверить, что интервал сходимости степенного ряда (8) совпадает о интервалом сходимости исходного ряда (1).

В дальнейшем нам потребуются выражения коэффициентов ряда (1) через значение суммы $f(x)$ и ее производных в точке $x = 0$.

Последовательно дифференцируя ряд

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n, \tag{9}$$

получим ряды для производных:

$$f'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} n c_n x^{n-1},$$
$$f''(x) = \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1) c_n x^{n-2},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$f^{(k)}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)\cdots(n-k+1) x^{n-k},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Положив в этих равенствах $x = 0$, найдем:

$$f(0) = c_0,\ f'(0) = 1!c_1,\ f''(0) = 2!c_2,\ \ldots,\ f^{(k)}(0) = k!c_k,\ \ldots\ .$$

Отсюда

$$c_0 = f(0),\ c_1 = \frac{f'(0)}{1!},\ c_2 = \frac{f''(0)}{2!},\ \ldots,\ c_k = \frac{f^{(k)}}{k!},\ \ldots\ .$$

Вместе с тем ряд (1) с суммой $f(x)$ можно представить в форме

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n, \tag{10}$$

называемой *рядом Маклорена* функции $f(x)$. В этих обозначениях принимаем $f^{0)}(0) = f(0)$.

§ 7. Ряды Тейлора

Пусть функция $u(x)$ определена на промежутке $[a,b]$ и в точке $x_0 \in [a,b]$ имеет все производные $u^{(n)}(x_0)$, $n = 1, 2, \ldots$. Отнесем функции $u(x)$ формально составленный ряд

$$u(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} \frac{u^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n, \tag{1}$$

называемый *рядом Тейлора*, соответствующим функции $u(x)$. Этот ряд может оказаться сходящимся только в точке x_0 или на некотором интервале. Нас будет интересовать вопрос об условиях разложимости функции в ряд Тейлора, т.е. об условиях, при которых в некоторой окрестности x_0

$$u(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{u^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n, \tag{2}$$

поскольку, как будет показано далее, даже в случае сходимости ряда (1) на некотором интервале его сумма может оказаться отличной от $u(x)$.

Положив $x - x_0 = x'$, т.е. совершив на числовой оси перенос начала координат в точку x_0, приведем ряд (1) к виду обычного степенного ряда относительно переменной x':

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x'^n, \qquad c_n = \frac{u^{(n)}(x_0)}{n!}.$$

Указанная связь между рядами Тейлора и степенными рядами позволяет распространять на ряды Тейлора все ранее сказанное о степенных рядах. Таким образом, для каждого ряда Тейлора (1) существует такое неотрицательное число R, называемое радиусом сходимости этого ряда и определяемое по формуле Коши–Адамара

$$R = \frac{1}{L}$$

(где $L = \overline{\lim}\ \sqrt[n]{|c_n|}$ при условии, что $0 < L < \infty$, и $R = 0$, если $L = \infty$, $R = \infty$ при $L = 0$), что ряд Тейлора сходится абсолютно в интервале $(x_0 - R, x_0 + R)$, называемом *интервалом сходимости*, и расходится вне этого интервала. При этом если $R > 0$, ряд Тейлора внутри интервала сходимости сходится равномерно, и почленное дифференцирование ряда может производиться сколько угодно раз. Все ряды, получаемые в результате почленного дифференцирования ряда (1), имеют тот же интервал сходимости, что и ряд (1). Наконец, допустимо почленное интегрирование по любому отрезку, принадлежащему интервалу сходимости ряда Тейлора.

Приведем одно достаточное условие разложимости функции в ряд Тейлора.

Теорема. *Если функций $u(x)$ бесконечно дифференцируема в некоторой окрестности точки x_0 и существует такое конечное число M, что $|u^{(n)}(x_0)| \leq M$, $n = 1, 2, \ldots$, во всех точках этой окрестности, то $u(x)$ разлагается в ряд Тейлора в точке x_0.*

В самом деле, разность между функцией $u(x)$ и n-й частичной суммой ряда (1), по формуле Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа, представима в виде

$$u(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{u^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k = \frac{u^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1},$$

где ξ лежит между x_0 и x. Если точка x лежит в той окрестности x_0, где $u^{(n)}(x)| \leq M$, то и точка ξ принадлежит этой окрестности, и тогда

$$\left| u(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{u^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k \right| \leq M\,\frac{|x-x_0|^{n+1}}{(n+1)|}.$$

Но для любого фиксированного x величина $\dfrac{|x-x_0|^{n+1}}{(n+1)|} \to 0$ при $n \to \infty$; откуда следует, что в точке x ряд Тейлора, соответствующий функции $u(x)$, имеет $u(x)$ своей суммой. В силу произвольности фиксированного x из отмеченной окрестности точки x_0 это справедливо для всей окрестности. Тем самым доказана разложимость $u(x)$ в ряд Тейлора в точке x_0.

Пусть теперь на промежутке $[a, b]$ определена функция $\varphi(x)$ и $x_0 \in [a, b]$. Если существует ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$, сходящийся в некоторой окрестности $(x_0-\delta, x_0+\delta)$ точки x_0, который в точках $(x_0-\delta, x_0+\delta) \cap [a, b]$ имеет своей суммой функцию $\varphi(x)$, т.е.

$$\varphi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n \tag{3}$$

для $x \in (x_0-\delta, x_0+\delta) \cap [a, b]$, то говорят, что функция $\varphi(x)$ в точке x_0 (или в некоторой окрестности точки x_0) *разлагается в ряд Тейлора* или что она является *аналитической в точке* x_0. В этом случае функция $\varphi(x)$ бесконечно дифференцируема в точках $(x_0-\delta, x_0+\delta) \cap [a, b]$, и коэффициенты ряда (3) имеют вид

$$a_n = \frac{\varphi^{(n)}(x_0)}{n!}, \tag{4}$$

т.е. ряд (3) является рядом Тейлора для $\varphi(x)$. (В случае концевой точки x_0 имеются в виду односторонние производные $\varphi^{(n)}(x_0+0)$ или $\varphi^{(n)}(x_0-0)$).

Из выражения коэффициентов (4), в частности вытекает, что не может быть двух различных степенных рядов, суммой которых является одна и та же функция $\varphi(x)$.

Функция $\varphi(x)$ называется *аналитической на промежутке* $[a, b]$, если в каждой точке этого промежутка она разлагается в ряд Тейлора, т.е. если она аналитична в каждой точке $[a, b]$. Ясно, что аналитическая на промежутке функция является бесконечно дифференцируемой на этом промежутке. Однако бесконечная дифференцируемость функции, будучи необходимым условием аналитичности, недостаточна для аналитичности функций. Для того чтобы это показать, рассмотрим функцию

$$\chi(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{при} \quad x \neq 0, \\ \\ 0 & \text{при} \quad x = 0. \end{cases}$$

Очевидно, эта функция непрерывна при всех значениях x. Она дифференцируема при всех $x \neq 0$. Непосредственным подсчетом легко убедиться в том, что функция $\chi(x)$ имеет все производные в точке $x = 0$ и $\chi^{(n)}(0) = 0$ при $n = 0, 1, 2, \ldots$.

Если бы существовал такой ряд Тейлора в окрестности точки $x = 0$, суммой которого является функция $\chi(x)$, то, в силу формулы (4), все коэффициенты этого ряда должны быть равны нулю, т.е. в той окрестности точки $x = 0$, в которой $\chi(x)$ является суммой ряда Тейлора, эта функция должна быть тождественно равной нулю, что противоречит определению $\chi(x)$.

Этот пример показывает, что свойство функции быть аналитической более глубокое, чем бесконечная дифференцируемость.

Ряд Тейлора функции $f(x)$ в точке $x = 0$ называется *рядом Маклорена* этой функции.

Рассмотрим разложение в ряд Маклорена некоторых элементарных функций.

Функция $y = e^x$ является бесконечно дифференцируемой на всей числовой прямой. В точке $x_0 = 0$ все производные этой функции равны единице. Поэтому соответствующий e^x ряд Тейлора в точке $x_0 = 0$ имеет вид

$$e^x \sim 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots$$

На любом конечном интервале $(-M, M)$ $|y^{(n)}| = |e^x| \leq e^M$. Поэтому на этом интервале e^x разлагается в ряд

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}. \tag{5}$$

Так как промежуток $(-M, M)$ произволен, это разложение имеет место на всей числовой прямой.

Обратимся теперь к функции $y = \sin x$, которая также бесконечно дифференцируема на всей числовой прямой и

$$y^{(n)} = (\sin x)^{(n)} = \sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right), \qquad y^{(n)}(0) = \sin\frac{n\pi}{2}.$$

Очевидно, что для всех производных этой функции выполняется оценка $|y^{(n)}| \leq 1$ при всех x. Отсюда вытекает, что $\sin x$ в точке $x_0 = 0$ разлагается в ряд

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}. \tag{6}$$

Аналогичным образом для функций $y = \cos x$ получаем, разложение

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \, \frac{x^{2n}}{(2n)!}, \tag{7}$$

имеющее место при всех $x \in \mathbb{R}$.

Приведем метод разложения функции в ряд Тейлора, основанный на интегрировании рядов известных разложений.

При всех t, для которых $|t| < 1$ имеет место равенство

$$\frac{1}{1+t} = 1 - t + t^2 - t^3 + \ldots + (-1)^{n-1} t^n + \ldots$$

Стоящий справа степенной ряд сходится на интервале $(-1, 1)$. Проинтегрировав это равенство по промежутку $[0, x] \subset (-1, 1)$, получим равенство

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \, \frac{x^n}{n}, \tag{8}$$

которое представляет собой разложение функции $\ln(1+x)$ в ряд Маклорена. Аналогично, проинтегрировав по промежутку $[0, x] \subset (-1, 1)$ равенство

$$\frac{1}{1+t^2} = 1 - t^2 + t^4 - \ldots + (-1)^{n-1} t^{2n} + \ldots, \tag{9}$$

получим разложение на промежутке $(-1, 1)$ в ряд Маклорена функции

$$\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \ldots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \ldots \tag{10}$$

Приведем еще один прием разложения функции в ряд в окрестности точки $x_0 = 0$.

Построим ряд, соответствующий функции $f(x) = (1+x)^\alpha$, где α — произвольное число. Легко видеть, что $f^{(k)}(x) = \alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)(1+x)^{\alpha-k}$, откуда $f^{(k)}(0) = \alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)$. Положив

$$C_\alpha^k = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)}{k!},$$

запишем:

$$f(x) = (1+x)^\alpha \sim \sum_{n=0}^{\infty} C_\alpha^n x^n. \tag{11}$$

Отношение

$$\frac{|C_\alpha^n}{|C_{\alpha^{n-1}}|} = \frac{|\alpha - n + 1|}{n} \, |x| \to |x| \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

Отсюда следует, что ряд (11) сходится при $|x| < 1$. Тем самым в интервале $(-1, 1)$ определена сумма $\varphi(x)$ ряда (11):

$$\varphi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} C_\alpha^n x^n. \tag{12}$$

Продифференцировав это равенство по x, получим:

$$\varphi'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} nC_{\alpha}^{n} x^{n-1}. \tag{13}$$

Умножив равенство (12) на x к сложив результат умножения с равенством (12), найдем:

$$\varphi'(x)(1+x) = \sum_{n=0}^{\infty} [nC_{\alpha}^{n} + (n+1)C_{\alpha}^{n+1}]x^n = \alpha \sum_{n=0}^{\infty} C_{\alpha}^{n} x^n = \alpha\varphi(x).$$

При этом мы воспользовались легко проверяемым равенством

$$nC_{\alpha}^{n} + (n+1)C_{\alpha}^{n+1} = \alpha C_{\alpha}^{n}.$$

Таким образом,

$$\varphi'(x)(1+x) = \alpha\varphi(x)$$

или

$$\frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)} = \frac{\alpha}{1+x}.$$

Проинтегрировав это равенство по промежутку $[0, x]$, найдем: $\ln\varphi(x)\Big|_0^x = \alpha\ln(1+x)$ или, приняв, согласно (12), $\varphi(0) = 1$, получим:

$$\varphi(x) = (1 + x0^{\alpha}.$$

В результате получаем разложение в ряд Маклорена бинома:

$$(1+x)^{\alpha} = \sum_{n=0}^{\infty} C_{\alpha}^{n} x^n.$$

§ 8. Ряды с комплексными членами. Формулы Эйлера

Основные понятия сходимости последовательностей (числовых и функциональных) распространяются на последовательности с комплексными членами. Так, последовательность комплексных чисел $a_n = \alpha_n + i\beta_n$ называется *сходящейся к комплексному числу* $a = \alpha + i\beta$, если для произвольного числа $\varepsilon > 0$ найдется такой номер $n_0 = n_0(\varepsilon)$, что при всех $n \geq n_0$ выполняется неравенство

$$|a_n - a| < \varepsilon.$$

Из неравенства $|\alpha_n - \alpha|, |\beta_n - \beta| \leq |a_n - a| \leq |\alpha_n - \alpha| + |\beta_n - \beta|$ немедленно следует, что сходимость $a_n \to a$ имеет место тогда и только тогда, когда одновременно $\alpha_n \to \alpha$ и $\beta_n \to \beta$.

Ряд с комплексными членами

$$\sum_{n=1}^{\infty} z_n = z_1 + z_2 + \ldots + z_n \qquad (z_n = x_n + iy_n) \tag{1}$$

называется *сходящимся*, если последовательность его частичных сумм

$$a_n = z_1 + z_2 + \ldots + z_n$$

сходится, т.е. если $a_n \to a$. В этом случае a называется *суммой ряда* (1):

$$a = \sum_{n=1}^{\infty} z_n.$$

Ясно, что сходимость ряда (1) равносильна одновременной сходимости рядов с вещественными членами:

$$\left.\begin{array}{l} \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} x_n \\ \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} y_n \end{array}\right\} \qquad z_n = x_n + iy_n, \tag{2}$$

составленных соответственно из вещественных и мнимых частей членов ряда (1).

Ряд (1) называется *абсолютно сходящимся*, если сходится ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |z_n|$. Абсолютная сходимость ряда (1) равносильна абсолютной сходимости каждого ряда (2). В связи с этим абсолютно сходящиеся ряды о комплексными членами обладают теми же свойствами, что и абсолютно сходящиеся ряды с вещественным членами. Проверка абсолютной сходимости ряда с комплексными членами сводится к проверке сходимости положительного ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |z_n|$.

Если на некотором множестве $\mathcal{D}$ комплексной плоскости задана последовательность комплекснозначных функций

$$f_n(z) = u_n(z) + iv - n(z) = u_n(x,y) + iv_n(x,y), \qquad z = x + iy,$$

то функциональный ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z) \tag{3}$$

называется *сходящимся* (*абсолютно сходящимся*) в точке $z_0 \in \mathcal{D}$, если сходится (абсолютно сходится) числовой ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(z_0)$.

Ряд (3) *сходится* на множестве $\mathcal{D}$, если он сходится в каждой точке $z \in \mathcal{D}$. В этом случае на $\mathcal{D}$ определена комплекснозначная функция $f(z)$ — *сумма ряда* (3):

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(z).$$

Сходимость (в точке, на множестве) ряда (3) равносильна сходимости (в точке, на множестве) функциональных рядов из вещественнозначных функций

$$\left.\begin{aligned}&\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x,y)\\&\sum_{n=1}^{\infty} v_n(x,y)\end{aligned}\right\}. \tag{4}$$

Обычным образом определяется понятие абсолютной (равномерной) сходимости функционального ряда. Ясно, что абсолютная (равномерная) сходимость ряда (3) равносильна одновременной абсолютной (равномерной) сходимости рядов (4). В связи с этим признаки абсолютной (равномерной) сходимости, установленные для функциональных рядов с вещественными функциями, распространяются на функциональные ряды с комплексными членами.

Признак сравнения (Вейерштрасса). *Если для членов ряда* (3) *выполнено неравенство*

$$|f_n(z)| \le c_n$$

при всех $z \in \mathcal{D}$ *и ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n$ *сходится, то ряд* (3) *сходится в* $\mathcal{D}$ *абсолютно и равномерно.*

Заданная на множестве $\mathcal{D}$ комплекснозначная функция $f(z)$, по определению, *непрерывна в точке* $z_0 \in \mathcal{D}$, если для каждого числа $\varepsilon > 0$ найдется такое число $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, что при всех $z \in \mathcal{D}$, для которых $|z - z_0| < \delta$, выполняется неравенство $|f(z) - f(z_0)| < \varepsilon$. Непрерывная в каждой точке множества $\mathcal{D}$ функция $f(z)$ называется *непрерывной на* $\mathcal{D}$. Непрерывность функции $f(z)$ равнозначна совместной непрерывности вещественной части $u(x,y)$ функции $f(z)$ и ее мнимой части $v(x,y)$. Отсюда вытекает, например, что равномерно сходящийся в области $\mathcal{D}$ ряд, составленный из непрерывных в $\mathcal{D}$ функций $f_n(z)$, имеет непрерывную в $\mathcal{D}$ сумму $f(z)$.

Ряд о комплексными членами вида

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n z^n \tag{5}$$

называется *степенным.* Для степенных рядов имеет место лемма (Абеля), доказательство которой аналогично ранее приведенному для рядов с вещественными членами. Она состоит в следующем.

Если ряд (5) сходится в некоторой точке $z_0 \ne 0$, то он сходится абсолютно в каждой точке z, для которой $|z| < |z_0|$. Множество точек в плоскости комплексного переменного $z = x + iy$, для которых при некотором $R > 0$ выполнено неравенство $|z| < R$, является крутом с центром в точке $z = 0$ и радиусом R. Поэтому для степенных рядов в комплексной области вводится понятие круга сходимости, радиус которого определяется по формуле Коши–Адамара: $R = \dfrac{1}{l}$, где $L = \overline{\lim}\ \sqrt[n]{|c_n|}$.

Рассмотрим ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}. \tag{6}$$

Этот ряд сходится абсолютно во всей комплексной плоскости z. Сумму этого ряда обозначают через $\exp z$ или e^z, так как при вещественных значениях $z = x$, $\exp z = e^x$. Ясно, что

$$e^{iy} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(iy)^n}{n!}. \tag{7}$$

Заменив в этом выражении i^{2k} на $(-1)^k$, можно переписать равенство (7) в виде

$$e^{iy} = 1 + iy - \frac{y^2}{2!} + i\frac{y^3}{3!} + \frac{y^4}{4!} + i\frac{y^5}{5!} - \frac{y^6}{6!} + \dots$$

или, совершив перегруппировку членов этого ряда, допустимую в силу его абсолютной сходимости, в виде

$$e^{iy} = \left(1 - \frac{y^2}{2!} + \frac{y^4}{4!} - \frac{y^6}{6!} + \dots\right) + i\left(y - \frac{y^3}{3!} + \frac{y^5}{5!} - \dots\right).$$

В результате получим равенство

$$e^{iy} = \cos y + i\sin y. \tag{8}$$

Аналогичным образом, положив в ряде (6) $z = -iy$, получим:

$$e^{-iy} = cosy - i\sin y. \tag{9}$$

Формулы (8) и (9) называются *формулами Эйлера*. Иногда они используются в следующем виде:

$$\cos y = \frac{e^{iy} + e^{-y}}{2}, \qquad \sin y = \frac{e^{iy} - e^{-iy}}{2}. \tag{10}$$

§ 9. Равномерное приближение непрерывных функций многочленами

Пусть на множестве $X \subset \mathbb{R}$ определена функция $y = f(x)$. Условимся говорить, что функция $f(x)$ допускает на множестве X *равномерное приближение многочленами*, если для любого числа $\varepsilon > 0$ найдется многочлен $P_\varepsilon(x)$, такой, что

$$|f(x) - P_\varepsilon(x)| < \varepsilon$$

сразу для всех $x \in X$.

Если $f(x)$ допускает на X равномерное приближение многочленами, то, очевидно, существует такая последовательность многочленов $\{P_n(x)\}$, которая на множестве X равномерно сходится к функции $f(x)$.

Если функция $f(x)$ является аналитической на промежутке $[a,b]$, то у каждой точки $x_0 \in [a,b]$ есть окрестность, в которой $f(x)$ разлагается в ряд Тейлора:

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n.$$

Последовательность частичных сумм этого ряда внутри указанной окрестности равномерно сходится к $f(x)$. Таким образом, аналитическая на промежутке функция локально допускает равномерное приближение многочленами специального вида — частичными суммами своего ряда Тейлора. Оказывается, что имеет место более общий факт, к изложению которого мы и обратимся.

Докажем предварительно вспомогательные утверждения.

Лемма 1. *Существует последовательность многочленов* $\{P_n(t)\}$, *равномерно на отрезке* $[0,1]$ *сходящаяся к функции* $\sqrt{t}$, $0 \le t \le 1$.

Построим эту последовательность, полагая $P_0(t) \equiv 0$ и

$$P_{n+1}(t)=P_n(t)+\frac{1}{2}\,[t-P_n^2(t)], \qquad n=0,1,2,\dots\ . \tag{1}$$

Покажем, что для всех многочленов $P_n(t)$ этой последовательности на $[0,1]$ выполнено неравенство $0 \le P_n(t) \le 1$. Для многочленов $P_0(t)$ и $P_1(t)$ это очевидно.

Допустим, что этому неравенству удовлетворяет полином $P_n(t)$, и покажем, что оно выполнено для $P_{n+1}(t)$. В самом деле,

$$1-P_{n+1}(t)=1-P_n(t)-\frac{1}{2}\,[t-P_n^2(t)]=\frac{1}{2}\,(1-t)+\frac{1}{2},[1-2P_n(t)+P_n^2(t)]=$$

$$=\frac{1}{2}\,(1-t)+\frac{1}{2}\,[1-P_n(t)]^2 \ge 0,$$

откуда следует, что $P_{n+1}(t) \le 1$.

С другой стороны, из представления $P_{n+1}(t)$ вытекает:

$$P_{n+1}(t)=\frac{1}{2}\,P_n(t)[1-P_n(t)]+\frac{1}{2}\,[P_n(t)+t] \ge 0.$$

Установим теперь монотонное возрастание последовательности $\{P_n(t)\}$ на $[0,1]$. Очевидно, что $P_1(t)=\dfrac{1}{2}\,t \ge P_0(t) \equiv 0$.

Предположим, что $P_n(t) \ge P_{n-1}(t)$, и покажем, что $P_{n+1}(t) \ge P_n(t)$ при всех $t \in [0,1]$. В нашем предположении

$$P_{n+1}(t)-P_n(t)=\left\{P_n(t)+\frac{1}{2}\,[t-P_n^2(t)]\right\}-\left\{P_{n-1}(t)+\frac{1}{2}\,[t-P_{n-1}^2(t)]\right\}=$$

$$=[P_n(t)-P_{n-1}(t)]-\frac{1}{2}\,[P_n(t)-P_{n-1}(t)]\,[P_n(t)+P_{n-1}(t)]=$$

$$=[P_n(t)-P_{n-1}(t)]\left[1-\frac{P_n(t)+P_{n-1}(t)}{2}\right] \ge 0,$$

так как, в соответствии с доказанным ранее, $P_n(t) + P_{n-1}(t) \leq 2$.

В силу монотонности и ограниченности последовательности $\{P_n(t)\}$ эта последовательность поточечно сходятся к некоторой функций $\varphi(t)$. Предельный переход в равенстве (1) приводит к равенству $\varphi(t) = \varphi(t) + \dfrac{1}{2}\,[t - \varphi^2(t)]$, из которого вытекает: $\varphi^2(t) = t$ или, так как $\varphi(t) \geq 0$,

$$\varphi(t) = \sqrt{t}.$$

.

Так как предельная функция $\varphi(t) = \sqrt{t}$ является непрерывной, то последовательность многочленов, согласно теореме Дини, равномерно сходится к этой функции.

Следствие 1. *Для каждого $l > 0$ существует последовательность многочленов $\{Q_n(t)\}$, равномерно сходящаяся на отрезке $[-l, l]$ к функции $f_0(t) = |t|$.*

Действительно, последовательность полиномов $\widetilde{P}_n(t) = P_n(t^2)$, где $P_n(t)$ — полиномы, построенные в лемме, равномерно на отрезке $[-1, 1]$ сходится к функции $\sqrt{t^2} = |t|$. Если теперь положить $Q_n(t) = l\widetilde{P}_n\left(\dfrac{t}{l}\right)$, получим требуемую последовательность полиномов для отрезка $[-l, l]$.

Следствие 2. *Если $f(x)$ — непрерывная вещественнозначная функция, определенная на компактном множестве K, то существует такая последовательность многочленов $\{Q_n(t)\}$, что последовательность $\{Q_n[f(x)]\}$ равномерно на K сходится к функции $|f(x)|$.*

В самом деле, функция $f(x)$, будучи непрерывной на компактном множестве K, ограничена на этом множестве, т.е. найдется такое $l > 0$, что

$$-l \leq f(x) \leq l.$$

Но тогда для определенной в следствии 1 последовательности полиномов $Q_n(t)$ будем иметь:

$$Q_n[f(x)] \rightrightarrows |f(x)|.$$

Совокупность $\mathcal{A}$ вещественнозначных функций, определенных на множестве K, назовем *алгеброй*, если для любой функции $f \in \mathcal{A}$ и любой вещественной константы c также $cf \in \mathcal{A}$ и вместе с каждой парой Функций $f_1, f_2 \in \mathcal{A}$ сумма этих функций $f_1 + f_2$ и их произведение $f_1 \cdot f_2$ также содержатся в $\mathcal{A}$.

Определенная на множестве K алгебра $\mathcal{A}$ называется *равномерно замкнутой*, если вместе с каждой равномерно на K сходящейся последовательностью $\{f_n\}$ элементов из $\mathcal{A}$ предельная для этой последовательности функция также принадлежит алгебре $\mathcal{A}$. Наименьшая среди всех равномерно замкнутых алгебр, содержащих алгебру $\mathcal{A}$, называется *равномерным замыканием* $\overline{\mathcal{A}}$ алгебры $\mathcal{A}$. Равномерное замыкание $\overline{\mathcal{A}}$ алгебры $\mathcal{A}$ является пересечением всех равномерно замкнутых алгебр, содержащих $\mathcal{A}$.

Примеры.

1. Совокупность всех интегрируемых на отрезке $[a, b]$ функций (в собственном смысле), очевидно, образует равномерно замкнутую алгебру.

2. Совокупность непрерывных на $[a, b]$ и обращающихся в нуль в концах отрезка $[a, b]$ функций есть также равномерно замкнутая алгебра.

3. Совокупность всех четных на промежутке $[-1, 1]$ функций — равномерно замкнутая алгебра.

4. Совокупность всех многочленов на отрезке $[a, b]$, как легко видеть, образует алгебру, но не равномерно замкнутую, так как существует равномерно на этом отрезке сходящаяся к функции e^x, не являющейся многочленом, последовательность многочленов — частичных сумм ряда Маклорена для функции e^x.

Условимся говорить, что алгебра $\mathcal{A}$, определенная на K, разделяет точки K, если для любых двух различных точек x_1 и x_2 из K в A найдется такая функция $f(x)$, для которой $f(x_1) \neq f(x_2)$.

Лемма 2. *Если алгебра $\mathcal{A}$, определенная на множестве K, разделяет точки этого множества и содержит функцию $f_0(x) \equiv 1$, то для любых различных точек x_1 и x_2 и любых чисел α, β найдется такой элемент φ алгебры $\mathcal{A}$, для которого*

$$\varphi(x_1) = \alpha, \qquad \varphi(x_2) = \beta.$$

Действительно, вместе с единицей алгебра $\mathcal{A}$ содержит все константы. Пусть, далее функция $f(x) \in \mathcal{A}$ такова, что $f(x_1) \neq f(x_2)$. Тогда функция

$$\varphi(x) = \alpha + \frac{f(x) - f(x_1)}{f(x_2) - f(x_1)}\,(\beta - \alpha),$$

очевидно, принадлежит алгебре $\mathcal{A}$ и обладаем отмеченными в лемме свойствами.

Лемма 3. *Если множество K компактно, то равномерное замыкание $\overline{\mathcal{A}}$ алгебры непрерывных на K функций вместе с каждой функцией $f \in \mathcal{A}$ содержит также и функцию $|f|$.*

В самом деле, в этом случае выполнены условия следствия 2, так как вместе с каждой функцией $f \in \mathcal{A}$ в алгебру $\mathcal{A}$ входит и любой многочлен $\sum\limits_{k=0}^{n} c_k f^k$ относительно f, значит, существует последовательность элементов $\mathcal{A}$, равномерно сходящаяся к $|f|$.

Следствие 3. *Если K компактно, и $\mathcal{A}$ — алгебра непрерывных на K функций, то равномерное замыкание $\overline{\mathcal{A}}$ вместе с каждой парой элементов f_1 и f_2 содержит*

$$\inf\,(f_1, f_2) = \frac{1}{2}\,(f_1 + f_2) - \frac{1}{2}\,|f_1 - f_2|,$$

$$\sup\,(f_1, f_2) = \frac{1}{2}\,|f_1 - f_2| + \frac{1}{2}\,(f_1 + f_2).$$

Легко видеть, что это свойство распространяется на любой конечный набор элементов из $\overline{\mathcal{A}}$, т.е. если $f_1, f_2, \ldots, f_n \in \overline{\mathcal{A}}$, то $\inf\,(f_1, f_2, \ldots, f_n) \in \overline{\mathcal{A}}$ и $\sup\,(f_1, f_2, \ldots, f_n) \in \overline{\mathcal{A}}$.

ТЕОРЕМА 1 (СТОНА–ВЕЙЕРШТРАССА[39]). *Если алгебра $\mathcal{A}$ непрерывных на компактном множестве K функций содержит единицу и разделяет точки этого множества, то равномерное замыкание $\overline{\mathcal{A}}$ алгебры $\mathcal{A}$ состоит из всех непрерывных на K функций.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Ясно, что все $f \in \overline{\mathcal{A}}$ непрерывны на K. Покажем, что каждая непрерывная на K функция $f \in \overline{\mathcal{A}}$. Пусть $f(x)$ непрерывна на K и ξ, η — произвольные точки K. Б силу леммы 2, в $\overline{\mathcal{A}}$ найдется $\varphi_{\xi,\eta}$, для которой

$$\varphi_{\xi,\eta}(\xi) = f(\xi) \quad \text{и} \quad \varphi_{\xi,\eta}(\eta) = f(\eta).$$

Возьмем произвольное число $\varepsilon > 0$ и, предполагая временно точку ξ фиксированной, отнесем каждой точке η окрестность U_η, во всех точках которой для соответствующей функции $\varphi_{\xi,\eta}$ выполняется неравенство

$$\varphi_{\xi,\eta}(x) < f(x) + \varepsilon.$$

Такая окрестность U_η существует, так как функции $\varphi_{\xi,\eta}(x)$ и $f(x)$ непрерывны на K и принимают в точке η одинаковые значения. Из полученного покрытия компактного множества K системой открытых множеств $\{U_\eta\}$ можно выделить конечное покрытие $U_{\eta_1}, U_{\eta_2}, \ldots, U_{\eta_p}$. Для соответствующей системы функций $\varphi_{\xi,\eta_1}, \varphi_{\xi,\eta_2}, \ldots, \varphi_{\xi,\eta_p}$ определим функцию $\varphi_\xi(x)$, полагая

$$\varphi_\xi(x) = \inf\ \{\varphi_{\xi,\eta_1}(x), \ldots, \varphi_{\xi,\eta_p}(x)\}.$$

Функция $\varphi_\xi(x)$, в соответствии со следствием из леммы 3, принадлежит равномерному замыканию $\overline{\mathcal{A}}$ алгебры $\mathcal{A}$, и для нее, очевидно, $\varphi_\xi(\xi) = f(\xi)$. Кроме того, при всех $x \in K$

$$\varphi_\xi(x) < f(x) + \varepsilon.$$

Теперь каждой точке $\xi \in K$ отнесем окрестность V_ξ, в которой для соответствующей функции $\varphi_\xi(x)$ выполнено неравенство

$$\varphi_\xi(x) > f(x) - \varepsilon.$$

Из покрытия $\{V_\xi\}$ компактного множества K возможно выделение конечного покрытия $V_{\xi_1}, \ldots, V_{\xi_q}$. Для соответствующей системы функций $\varphi_{\xi_1}(x), \ldots, \varphi_{\xi_q}(x)$ определим функцию $\varphi(x)$, полагая

$$\varphi(x) = \sup\ \{\varphi_{\xi_1}(x), \ldots, \varphi_{\xi_q}(x)\}.$$

Функция $\varphi(x)$, очевидно, содержится в $\overline{\mathcal{A}}$, и для нее выполнено неравенство

$$\varphi(x) > f(x) - \varepsilon$$

во всех точках $x \in K$. Так как, кроме того, для всех функций $\varphi_{\xi_1}(x), \ldots, \varphi_{\xi_q}(x)$ в каждой точке $x \in K$ имеет место неравенство

$$\varphi_{\xi_i}(x) < f(x) + \varepsilon, \qquad i = 1, 2, \ldots, q,$$

---

[39] М. Стон (род. 1903 г.) — современный американский математик.

то это неравенство, очевидно, сохраняется на K и для supremum'а функций $\varphi_{\xi_i}(x)$, которых конечное число, т.е.

$$\varphi)x) < f(x) + \varepsilon.$$

Но это означает, что всюду на K

$$|f(x) - \varphi(x)| < \varepsilon. \tag{2}$$

Таким образом, для каждого числа $\varepsilon > 0$ мы нашли элемент $\varphi \in \overline{\mathcal{A}}$, для которого при всех $x \in K$ выполнено неравенство (2). А это означает, что $f \in \overline{\mathcal{A}}$.

Теорема Стона–Вейерштрасса доказана полностью, в частности, если в качестве компактного множества K взят отрезок $[a, b]$ числовой оси, а $\mathcal{A}$ — алгебра всех (вещественнозначных) многочленов, получаем следующее утверждение:

ТЕОРЕМА 4 (ВЕЙЕРШТРАССА). *Непрерывная на отрезке* $[a, b]$ *функция допускает равномерное приближение многочленами.*

Так как среди непрерывных функций многочлены являются наиболее простыми, теорема о возможности замены произвольной непрерывной функции многочленом, одинаково близким к ней во всех точках рассматриваемого промежутка, имеет большое теоретическое и прикладное значение.

Глава XV

НЕСОБСТВЕННЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

§ 1. Несобственные интегралы по неограниченному промежутку

В § 10 гл. VIII было введено понятие несобственного интеграла по неограниченному промежутку. Теперь обратимся к более детальному рассмотрению этого понятия.

Пусть $f:\ [a,\infty)\to\mathbb{R}$ и $f(x)$ интегрируема на каждом промежутке $[a,\xi]$, $a<\xi<\infty$. Введем функцию $F(\xi)$, полагая

$$F(\xi)=\int\limits_a^{\xi} f(x)\,dx.$$

Как уже говорилось ранее (см. гл. VIII), *несобственным интегралом* по промежутку $[a,\infty)$ называется выражение вида

$$\int\limits_a^{\infty} f(x)\,dx, \tag{1}$$

которое в случае существования предела

$$\lim_{\xi\to\infty} F(\xi)=F(+\infty)$$

(конечного или нет) равно $F(+\infty)$. Если предела $F(+\infty)$ не существует, то символу (1) не приписывается никакого значения, в этом случае, так же как и в случае, когда $F(+\infty)=\infty$, говорят, что несобственный интеграл (1) *расходится.* При конечном пределе $F(+\infty)$ несобственный интеграл (1) называется *сходящимся.* Тот факт, что число $F(+\infty)$ является значением интеграла (1), записывают равенством

$$\int\limits_a^{\infty} f(x)\,dx=F(+\infty)=\lim_{\xi\to\infty}\int\limits_a^{\xi} f(x)\,dx,$$

а функцию $f(x)$ называют *интегрируемой* на $[a,\infty)$.

Например, $\int\limits_0^\infty \sin x\,dx$ расходится, так как функция

$$F(\xi) = \int\limits_0^\xi \sin x\,dx = 1 - \cos\xi$$

не имеет предела при $\xi \to \infty$. Интеграл

$$\int\limits_0^\infty \frac{dx}{1+x^2}$$

сходится и имеет значение $\dfrac{\pi}{2}$, так как:

$$F(\xi) = \int\limits_0^\xi \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg}\xi \to \frac{\pi}{2}$$

при $\xi \to \infty$. Наконец, интеграл $\displaystyle\int\limits_0^\infty \frac{x\,dx}{1+x^2}$ расходится и имеет значение $+\infty$, так как

$$F(\xi) = \int\limits_0^\xi \frac{x\,dx}{1+x^2} = \frac{1}{2}\,\ln(1+\xi^2) \to +\infty$$

при $\xi \to \infty$.

Сходимость интеграла (1), т.е. существование конечного предела $\lim\limits_{\xi\to\infty} F(\xi)$, равносильна существованию конечного предела у последовательности $\{F(\xi_n)\}$, соответствующей произвольной последовательности $\{\xi_n\}$, $\xi_n \to +\infty$, а значит, сходимости ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int\limits_{\xi_n}^{\xi_{n+1}} f(x)\,dx,$$

частичными суммами которого являются члены последовательности $\{F(\xi_n)\}$. Естественно ожидать поэтому, что теория несобственных интегралов по неограниченному промежутку имеет много общего с теорией числовых рядов. Далее мы убедимся в наличии общности, позволяющей несобственный интеграл (1) считать континуальным аналогом числового ряда, в котором роль общего члена выполняет выражение $f(x)\,dx$, а суммирование заменено интегрированием.

Назовем каждый интеграл вида

$$\int\limits_{\xi_1}^{\xi_2} f(x)\,dx, \qquad a < \xi_1 < \xi_2,$$

отрезком интеграла (1), а интегралы $\int\limits_{\xi}^{\infty} f(x)\,dx$ — его *остатками*. Очевидно, что сходимость интеграла (1) и каждого его остатка имеют место одновременно.

Критерий Коши существования конечного предела у функции $F(\xi)$ при $\xi \to +\infty$ приводит к следующему утверждению.

Для того чтобы несобственный интеграл (1) *сходился, необходимо и достаточно, чтобы для каждого числа* $\varepsilon > 0$ *существовало такое число* ξ_0*, что при всех* $\xi_1, \xi_2 > \xi_0$

$$\left|\int\limits_{\xi_1}^{\xi_2} f(x)\,dx\right| < \varepsilon.$$

Действительно, выражение, стоящее в левой части этого неравенства, можно представить в виде $|F(\xi_2) - F(\xi_1 0|$, и тогда предыдущее неравенство будет условием Коши для функции $F(\xi)|$.

Обратимся вначале к случаю, когда $f(x) \geq 0$ в промежутке $[a, \infty)$. В этом случае при $\xi_1 < \xi_2$

$$F(\xi_1) = \int\limits_{a}^{\xi_1} f(x)\,dx \leq \int\limits_{a}^{\xi_1} f(x)\,dx + \int\limits_{\xi_1}^{\xi_2} f(x)\,dx = \int\limits_{a}^{\xi_2} f(x)\,dx = F(\xi_2),$$

т.е. функция $F(\xi)$ является возрастающей (неубывающей) и поэтому имеет предел при $\xi \to +\infty$. Это означает, что несобственный интеграл (1) от неотрицательной функции всегда имеет значение. Так как это значение является пределом последовательности $\{F(\xi_n)\}$, соответствующей любой последовательности $\{\xi_n\}$, $\xi_n \to +\infty$, то для отыскания его достаточно рассмотреть какую-нибудь одну последовательность, например, положив $\xi_n = a + n$. Так как для существования конечного предела последовательности $\left\{\int\limits_{a}^{a+n} f(x)\,dx\right\}$ достаточно ее ограниченности, справедливо следующее утверждение: *для сходимости несобственного интеграла* (1) *от неотрицательной функции* $f(x)$ *необходимо и достаточно существование такого числа* M*, что при всех* $\xi > a$ *выполняется неравенство*

$$\int\limits_{a}^{\xi} f(x)\,dx \leq M.$$

(В дальнейшем мы будем рассматривать, не оговаривая этого особо, только функции, интегрируемые на каждом промежутке $[a, \xi]$, где $0 < \xi < \infty$. Далее укажем на следующий признак сравнения.

Если функции $f(x)$ и $g(x)$ таковы, что при всех $x > b$, где b — некоторое число, большее или равное a, выполняется неравенство

$$0 \leq f(x) \leq g(x),$$

из сходимости интеграла $\int\limits_a^\infty g(x)\,dx$ вытекает сходимость интеграла $\int\limits_a^\infty f(x)\,dx$, а из расходимости последнего интеграла следует расходимость первого.

Заметим, что если $f(x) \geq 0$ и интеграл (1) сходится, то для каждой ограниченной на $[a, \infty)$ функции $\varphi(x) \geq 0$ сходится интеграл

$$\int\limits_a^\infty f(x)\varphi(x)\,dx. \tag{2}$$

Действительно, если $0 \leq \varphi(x) \leq A$, то

$$\int\limits_a^\xi f(x)\varphi(x)\,dx \leq A \int\limits_a^\xi f(x)\,dx \leq AM,$$

где $M = \sup\limits_\xi \int\limits_a^\xi f(x)\,dx = \int\limits_a^\infty f(x)\,dx$. Подобным же образом легко проверить, что при расходимости интеграла (1) и условии $0 < c \leq \varphi(x)$ расходится и интеграл (2).

Взяв в качестве одной из функций $g(x)$ или $f(x)$ конкретную функцию, можно сформулировать признаки сходимости (расходимости) в терминах требований к другой функции. Например, сформулируем следующий признак сходимости несобственного интеграла (2) от неотрицательной функции $f(x)$.

Если функция $f(x)$ на промежутке $[a, \infty)$ допускает представление в виде

$$f(x) = \frac{\varphi(x)}{x^\lambda},$$

где $\varphi(x)$ — ограниченная на $[a, \infty)$ функция и $\varphi(x) \geq 0$, то при $\lambda > 1$ и $a > 0$ интеграл (1) сходится. Если же $\lambda \leq 1$ и $0 < c \leq \varphi(x)$, то интеграл (1) расходится (см. § 10 гл. VIII).

Примеры.

1. Так как для всех $x \geq 1$ имеем $\dfrac{x\sin^2 x}{x^4+1} < \dfrac{1}{x^3}$ и $\int\limits_1^\infty \dfrac{dx}{x^3}$ сходится, то $\int\limits_1^b \dfrac{x\sin^2 x}{x^4+1}$ также сходится.

Введем понятие абсолютной и неабсолютной сходимости несобственных интегралов.

Пусть теперь функция $f(x)$ принимает на $[a, \infty)$ значения любого знака. Условимся говорить, что интеграл (1) *сходится абсолютно*, если сходился интеграл

$$\int\limits_a^\infty |f(x)|\,dx. \tag{3}$$

Покажем, что абсолютно сходящийся интеграл сходится. Для произвольного числа $\varepsilon > 0$ в силу сходимости интеграла (3) найдется такое число $\xi_0 > a$, что при любых ξ_1, ξ_2, $\xi_0 < \xi_1 < \xi_2$, выполняется неравенство

$$\int\limits_{\xi_1}^{\xi_2} |f(x)|\, dx < \varepsilon.$$

Но

$$\left| \int\limits_{\xi_1}^{\xi_2} f(x)\, dx \right| \le \int\limits_{\xi_1}^{\xi_2} |f(x)|\, dx,$$

и интеграл (1) оказывается сходящимся.

Так как проверка абсолютной сходимости интеграла (1) сводятся к проверке сходимости интеграла от неотрицательной функции $|f(x0|$, ранее сформулированные для этого случая признаки распространяются на этот случай. Например, если существует такая функция $g(x)$, что

$$|f(x)| \le g(x)$$

я интеграл $\int\limits_a^\infty g(x)\, dx$ сходится, то абсолютно сходится интеграл (1).

Примеры.

2. Из оценки $\left|\frac{x \sin x}{x^3+x+1}\right| < \dfrac{1}{x^2+1}$ при $x \ge 0$ и сходимости интеграла $\int\limits_0^\infty \dfrac{dx}{x^2+1}$ следует абсолютная сходимость интеграла $\int\limits_0^\infty \dfrac{x \sin x}{x^3+x+1}\, dx$.

Сходящийся интеграл (1) называется *неабсолютно сходящимся*, если расходятся интеграл (3).

Признак Абеля. *Если функция $f(x)$ интегрируема на промежутке $[a, \infty)$, а функция $g(x)$ монотонна и ограничена на нем, то интеграл*

$$\int\limits_a^\infty f(x) g(x)\, dx \tag{4}$$

сходится.

Доказательство. Для произвольных $\xi_1, \xi_2 \ge a$, согласно второй теореме о среднем (§ 7 гл. VIII), имеем:

$$\int\limits_{\xi_1}^{\xi_2} f(x) g(x)\, dx = g(\xi_1) \int\limits_{\xi_1}^{\xi^*} f(x)\, dx + g(\xi_2) \int\limits_{\xi^*}^{\xi_2} f(x)\, dx, \qquad \xi_1 < \xi^* < \xi_2. \tag{5}$$

Если теперь K таково, что $|g(x)| \leq K$, а число ξ_0 выбрано так, чтобы при $\xi_1, \xi_2 > \xi_0$ выполнялось неравенство

$$\left| \int_{\xi_1}^{\xi_2} f(x)\,dx \right| < \frac{\varepsilon}{2K}, \qquad \varepsilon > 0 \quad \text{произвольно},$$

(такое ξ_0 существует, так как по условию $\int\limits_a^\infty f(x)\,dx$ сходится), то

$$\left| \int_{\xi_1}^{\xi_2} f(x)g(x)\,dx \right| \leq |g(\xi_1)| \left| \int_{\xi_1}^{\xi^*} f(x)\,dx \right| + |g(\xi_2)| \left| \int_{\xi^*}^{\xi_2} f(x)\,dx \right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

что, в соответствии с признаком Коши, означает сходимость интеграла (4).

Справедливо также следующее утверждение.

Признак Дирихле. *Если существует такое M, что при всех $\xi > a$ выполняется неравенство* $\left| \int\limits_a^\xi f(x)\,dx \right| \leq M$, *а функция $g(x)$ монотонно стремится к нулю при $x \to +\infty$, то интеграл* (3) *сходится.*

Доказательство. В самом деле, в этом случае по заданному числу $\varepsilon > 0$ найдется такое число ξ_0, что при всех $x > \xi_0$ $|g(x)| < \dfrac{\varepsilon}{4M}$. Взяв $\xi_1, \xi_2 > \xi_0$ и использовав равенство (5), получим:

$$\left| \int_{\xi_1}^{\xi_2} f(x)g(x)\,dx \right| \leq |g(\xi_1)| \left| \int_{\xi_1}^{\xi^*} f(x)\,dx \right| + |g(\xi_2)| \left| \int_{\xi^*}^{\xi_2} f(x)\,dx \right| < \frac{\varepsilon}{4M}\,(2M + 2M) = \varepsilon,$$

откуда, в силу признака Коши, вытекает сходимость интеграла (4). При проведении последних оценок мы воспользовались неравенствами

$$\left| \int_{\xi_i}^{\xi^*} f(x)\,dx \right| = \left| \int_a^{\xi^*} f(x)\,dx - \int_a^{\xi_i} f(x)\,dx \right| \leq \left| \int_a^{\xi^*} f(x)\,dx \right| + \left| \int_a^{\xi_i} f(x)\,dx \right| \leq 2M, \quad i = 1, 2.$$

Примеры.

3. Интегралы $\int\limits_1^\infty \dfrac{\sin x}{x}\,dx$ и $\int\limits_1^\infty \dfrac{\cos x}{x}\,dx$ сходятся, так как, например, $\left| \int\limits_1^\xi \sin x\,dx \right| \leq 2$ и функция $\dfrac{1}{x}$ монотонно стремится к нулю при $x \to +\infty$. Легко проверить, что эти интегралы сходятся не абсолютно. Действительно, допустим, что сходится интеграл $\int\limits_1^\infty \dfrac{|\sin x|}{x}\,dx$. Тогда, в силу неравенства $\sin^2 x \leq |\sin x|$, сходящимся должен быть и интеграл $\int\limits_1^\infty \frac{\sin^2 x}{x}\,dx$, а значит, и интеграл

$$\frac{1}{2}\int\limits_1^\infty \frac{dx}{x} = \int\limits_1^\infty \frac{\sin^2 x}{x}\,dx + \frac{1}{2}\int\limits_1^\infty \frac{\cos 2x}{2x}\,d(2x),$$

что противоречит расходимости интеграла $\int\limits_1^\infty \frac{dx}{x}$.

Проведенные выше рассмотрения могут быть распространены на случай, когда функция $f(x)$ определена на промежутке $(-\infty, b]$ и является интегрируемой на каждом конечном промежутке $[\eta, a]$, где $\eta < a$. Введя в рассмотрение функцию

$$\Phi(\eta) = \int\limits_\eta^a f(x)\,dx$$

назовем интеграл $\int\limits_{-\infty}^a f(x)\,dx$ *сходящимся*, если существует конечный предел

$$\lim_{\eta\to-\infty} \Phi(\eta) = \Phi(-\infty),$$

и *расходящимся*, если этот предел бесконечен или не существует. Ясно, что все ранее сказанное об интегралах по промежутку $[a, \infty)$ может быть повторено для рассматриваемого случая.

Наконец, пусть функция $f(x)$ определена при всех $x \in \mathbb{R}$ и является интегрируемой на каждом конечном промежутке $[\eta, \xi]$.

Если при некотором a сходятся интегралы

$$\int\limits_{-\infty}^a f(x)\,dx \quad \text{и} \quad \int\limits_a^\infty f(x)\,dx, \tag{6}$$

то, по определению, полагаем

$$\int\limits_{-\infty}^\infty f(x)\,dx = \int\limits_{-\infty}^a f(x)\,dx + \int\limits_a^\infty f(x)\,dx. \tag{7}$$

Легко проверить, что значение интеграла $\int\limits_{-\infty}^\infty f(x)\,dx$ не зависит от выбора a.

Если какой-нибудь из интегралов (6) расходится, то интеграл (7) является, по определению, расходящимся.

Понятие сходимости (расходимости) интеграла (7) можно с самого начала связать с наличием конечного предела (и соответственно с отсутствием его) у функции

$$\Psi(\eta, \xi) = \int\limits_{\eta}^{\xi} f(x)\,dx$$

при $\eta \to -\infty$, $\xi \to \infty$.

Если, в частности, существует конечный предел

$$\lim_{\xi \to +\infty} \int\limits_{-\xi}^{\xi} f(x)\,dx = J,$$

то число J называют *главным значением в смысле Коши* интеграла $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$ и обозначают

$$J = \text{V.p.} \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx.$$

Ясно, что если $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$ сходится, то V.p. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$ существует и

$$\text{V.p.} \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx.$$

Однако главное значение в смысле Коши может существовать и в случае расходимости интеграла. Так, например, $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \sin x\,dx$ расходится, но

$$\text{V.p.} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \sin x\,dx = \lim_{\xi \to +\infty} \int\limits_{-\xi}^{\xi} \sin x\,dx = \lim_{\xi \to +\infty} \left(-\cos x \Big|_{-\infty}^{\infty} \right) = 0.$$

Предположим, что функция $f(x)$ имеет первообразную $F_1(x)$. В этом случае

$$\int\limits_{a}^{\xi} f(x)\,dx = F_1(\xi) - F_1(a)$$

и при сходимости интеграла (1) существует конечный предел

$$\lim_{\xi \to +\infty} F_1(\xi) = F_1(+\infty).$$

Это обозначение позволяет распространить формулу Ньютона–Лейбница на случай несобственного интеграла и записать:

$$\int_a^\infty f(x)\,dx = F_1(x)\Big|_a^{+\infty} = F_1(+\infty) - F_1(a). \tag{8}$$

Можно показать, что, как и в случае интегралов по конечному промежутку, соотношение (8) выполняется также тогда, когда $f(x)$ допускает разрывы в конечном числе точек.

Пусть теперь функции $u(x)$ и $v(x)$ являются дифференцируемыми на промежутке $[a, \infty)$ и сходятся интегралы

$$\int_a^\infty u(x)v'(x)\,dx \quad \text{и} \quad \int_a^\infty v(x)u'(x)\,dx. \tag{9}$$

Тогда существует конечный предел

$$\lim_{x\to+\infty} [u(x)v(x)] = u(+\infty)v(+\infty)$$

и имеет место равенство

$$\int_a^\infty u(x)v'(x)\,dx = u(x)v(x)\Big|_a^\infty - \int_a^\infty v(x)u'(x)\,dx, \tag{10}$$

т.е. на несобственные интегралы вида (1) распространяется правило интегрирования по частям.

Действительно, для промежутка $[a, \xi]$ возможно применение правила интегрирования по частям, т.е.

$$\int_a^\xi u\,dv = u(x)v(x)\Big|_a^\xi - \int_a^\xi v\,du.$$

Из предположения о сходимости интегралов (9) следует возможность перехода к пределу в этом равенстве, а значит, и справедливость равенства (10).

Пусть, наконец, функция $f(x)$ непрерывна на $[a, \infty)$ и функция $\varphi(t)$, определенная на промежутке $[\alpha, \infty)$, обладает свойствами: 1) $\varphi(t)$ строго монотонна, 2) $\varphi(t)$ непрерывна вместе с производной $\varphi'(t)$, 3) $\varphi(\alpha) = a$, $\varphi(+\infty) = +\infty$.

Тогда из сходимости одного из интегралов

$$\int_a^\infty f(x)\,dx, \qquad \int_\alpha^\infty f[\varphi(t)]\varphi'(t)\,dt$$

вытекает сходимость другого и равенство между ними, т.е.

$$\int_a^\infty f(x)\,dx = \int_\alpha^\infty f[\varphi(t)]\varphi'(t)\,dt. \tag{11}$$

Такие образом, в высказанных условиях справедливо правило замены переменной под знаком интеграла.

Для доказательства достаточно рассмотреть промежуток $[\alpha, \tau]$ и его образ $[a, \varphi(\tau)]$ и воспользоваться формулой замены переменной под знаком определенного интеграла

$$\int\limits_a^{\varphi(\tau)} f(x)\,dx = \int\limits_\alpha^\tau f[\varphi(\tau)]\varphi'(\tau)\,d\tau,$$

условия применимости которой выполнены, а затем совершить предельный переход, устремляя τ к $+\infty$. В результате получим равенство (11).

Аналогично может быть рассмотрен случай: $\varphi:\ (-\infty, d] \to [a, \infty)$, $\varphi(t)$ монотонно убывает на $(-\infty, a]$ и $\varphi(\alpha) = a$.

Примеры.

4. Пусть $J = \int\limits_0^\infty \frac{dx}{1+x^4}$. В результате замены $x = \frac{1}{t}$ получим $J = \int\limits_0^\infty \frac{t^2}{1+t^4}\,dt$. Следовательно,

$$J = \frac{1}{2}\left(\int\limits_0^\infty \frac{dx}{1+x^4} + \int\limits_0^\infty \frac{x^2\,dx}{1+x^4}\right) = \frac{1}{2}\int\limits_0^\infty \frac{(1+x^2)\,dx}{1+x^4} = \frac{1}{2}\int\limits_0^\infty \frac{1+\frac{1}{x^2}}{x^2+\frac{1}{x^2}}\,dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_0^\infty \frac{d\left(x-\frac{1}{x}\right)}{\left(x-\frac{1}{x}\right)^2+2} = \frac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^\infty \frac{dz}{z^2+2} = \frac{1}{2\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{z}{\sqrt{2}}\bigg|_{-\infty}^\infty = \frac{\pi}{\sqrt{2}}.$$

§ 2. Несобственные интегралы от неограниченных функций

Пусть $f:\ [a, b] \to \mathbb{R}$. Точка $x_0 \in [a, b]$ называется *точкой интегрируемости* функции $f(x)$, если найдется такая окрестность $U(x_0)$ этой точки, что $f(x)$ интегрируема по промежутку $U(x_0) \cap [a, b]$. Точки, в которых функция $f(x)$ неинтегрируема, называются *особыми точками* $f(x)$. Покажем, что интегрируемая в каждой точке отрезка $[a, b]$ функция является интегрируемой по всему отрезку $[a, b]$. Отнесем для этого каждой точке $x \in [a, b]$ окрестность $U(x)$, по которой $f(x)$ интегрируема, и из покрытия $\{U(x)\}$ отрезка $[a, b]$ выделим конечное подпокрытие $U(x_1), U(x_2), \ldots, U(x_p)$. По каждому из промежутков $U(x_k) \cap [a, b]$, $k = 1, 2, \ldots, p$, функция $f(x)$ интегрируема, а значит, она интегрируема и по всему отрезку $[a, b]$.

Из этого факта вытекает, что неинтегрируемая на $[a, b]$ функция $f(x)$ имеет на этом отрезке особые точки. Можно доказать, что множество особых точек является замкнутым. Ограничимся рассмотрением случая, когда имеется лишь конечное число особых точек функции $f(x)$.

Рассмотрим сначала случай одной особой точки, являющейся концом $[a, b]$, например, допустим, что $f(x)$ интегрируема в каждой точке $x \in [a, b]$, отличной от a. Покажем, что в этом случае $f(x)$ является неограниченной в любой окрестности точки a[40].

Действительно, в противном случае $f(x)$ является ограниченной в некоторой окрестности точки a, в тем самым и на всем промежутке $[a, b]$, т.е. найдется такое число M, что $|f(x)| \le M$ при всех $x \in [a, b]$. Пусть ε — произвольное положительное число. Возьмем число $\delta_1 > 0$, $\delta_1 < \min\left\{\dfrac{\varepsilon}{8M}, b-a\right\}$, и рассмотрим функцию $f(x)$ на промежутке $[a+\delta_1, b]$. Так как на этом промежутке $f(x)$ интегрируема, то по заданному числу $\varepsilon > 0$ найдется такое число $\delta_2 = \delta_2(\varepsilon)$, что при любом разбиении T отрезка $[a+\delta_1, b]$ на элементарные части с $\lambda(T) < \delta_2$ будет выполнено неравенство $\sum\limits_T \omega_k \Delta x_k < \dfrac{1}{2}\,\varepsilon$.

Положим $\delta = \min\,(\delta_1, \delta_2)$ и рассмотрим любое разбиение T' отрезка $[a, b]$ на части, для которого $\lambda(T') < \delta$. Для оценки величины суммы

$$\sum_{T'} \omega_k \Delta x_k$$

соответствующей разбиению T', разобьем эту сумму на две части, отнеся в одну из частей $\sum'$ все слагаемые, соответствующие отрезкам разбиения T', расположенным целиком на промежутке $[a+\delta_1, b]$, и в другую часть $\sum''$ — остальные слагаемые. Ясно, что $\sum\limits_{T'}{}' \omega_k \Delta x_k < \dfrac{1}{2}\,\varepsilon$. Ясно также, что сумма длин промежутков, соответствующих слагаемым, попавшим в сумму $\sum''$, не превосходит $\delta_1 + \delta \le 2\delta_1 < \dfrac{\varepsilon}{4M}$. Так как, далее, колебание $f(x)$ на каждом из этих промежутков не превосходит числа $2M$, то

$$\sum_{T'}{}'' \omega_k \Delta x_k < 2M\,\frac{\varepsilon}{4M} = \frac{1}{2}\,\varepsilon.$$

В результате получаем неравенство

$$\sum_{T'} \omega_k \Delta x_k = \sum_{T'}{}' \omega_k \Delta x_k + \sum_{T'}{}'' \omega_k \Delta x_k < \frac{1}{2}\,\varepsilon + \frac{1}{2}\,\varepsilon = \varepsilon,$$

из которого вытекает интегрируемость функции $f(x)$ на $[a, b]$.

Определим теперь понятие несобственного интеграла по конечному промежутку от функции, неограниченной в одной из концевых точек этого промежутка.

---

[40] Часто функцию, неограниченную в любой окрестности точки a, называют *неограниченной в этой точке*, хотя в самой точке функция имеет конечное значение.

Пусть функция $f(x)$ интегрируема на каждом промежутке $[\xi, b]$, где $a < \xi < b$, и при $x \to a$ $|f(x)|$ неограниченно возрастает, введем в рассмотрение функцию

$$F(\xi) = \int\limits_{\xi}^{b} f(x)\,dx.$$

Если существует конечный предел $F(a+0)$ этой функция, то говорят, что несобственный интеграл

$$\int\limits_{a}^{b} f(x)\,dx \tag{12}$$

от неограниченной на $[a, b]$ функции $f(x)$ *сходится*, а число $F(a+0)$ называют значением этого интеграла. В случае, когда предел $F(a+0)$ бесконечен или не существует, несобственный интеграл (12) называется *расходящимся*. Совершенно аналогично вводится понятие несобственного интеграла (12), когда единственной особой точкой функции $f(x)$ на $[a, b]$ является правый конец b этого отрезка. В этом случае рассматривается функция

$$F(\xi) = \int\limits_{a}^{\xi} f(x)\,dx,$$

где $a < \xi < b$, и конечный предел $F(b-0)$ этой функции (если он существует) называется значением сходящегося несобственного интеграла (12). Если такого предела нет или $F(b-0) = \infty$, несобственный интеграл (12) называется *расходящимся*.

Если одновременно оба конца промежутка $[a, b]$ являются особыми точками функции $f(x)$, то для произвольной точки c, $a < c < b$, вводятся интегралы рассмотренного вида:

$$\int\limits_{a}^{c} f(x)\,dx \quad \text{и} \quad \int\limits_{c}^{b} f(x)\,dx.$$

При сходимости этих интегралов сумму их значений принимают за значение несобственного интеграла (12) и, по определению, полагают, что

$$\int\limits_{a}^{b} f(x)\,dx = \int\limits_{a}^{c} f(x)\,dx + \int\limits_{c}^{b} f(x)\,dx.$$

Наконец, если на промежутке $[a, b]$ имеется конечное число особых точек $c_1, c_2, \ldots,$ c_p, $a \le c_1 < c_2 < \ldots < c_p \le b$, то интеграл по этому промежутку называется *сходящимся*, когда сходится каждый из интегралов

$$\int\limits_{a}^{c_1} f(x)\,dx, \; \int\limits_{c_1}^{c_2} f(x)\,dx, \; \ldots, \; \int\limits_{c_p}^{b} f(x)\,dx. \tag{13}$$

При этом полагают

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \int\limits_a^{c_1} f(x)\,dx + \int\limits_{c_1}^{c_2} f(x)\,dx + \ldots + \int\limits_{c_p}^{b} f(x)\,dx.$$

Если какой-нибудь из интегралов (13) расходится, то интеграл $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ называется *расходящимся.*

В случае, когда единственная особая точка c является внутренней к промежутку $[a, b]$, вводят в рассмотрение функцию

$$\Phi(\varepsilon) = \int\limits_a^{c-\varepsilon} f(x)\,dx + \int\limits_{c+\varepsilon}^{b} f(x)\,dx.$$

Если у этой функции при $\varepsilon \to 0$ существует предел, он называется *главным значением* (*в смысле Коши*) несобственного интеграла (12) и обозначается через

$$\text{V.p.} \int\limits_a^b f(x)\,dx.$$

Например,

$$\text{V.p.} \int\limits_{-1}^{1} \frac{dx}{x} = \lim_{\varepsilon\to 0} \left[\int\limits_{-1}^{-\varepsilon} \frac{dx}{x} + \int\limits_{\varepsilon}^{1} \frac{dx}{x}\right] = \lim_{\varepsilon\to 0} \left[\ln\varepsilon - \ln\varepsilon\right] = 0.$$

Изучая интегралы от неограниченных на $[a, b]$ функций, снова можно рассмотреть случай неотрицательных функций и сформулировать для него признаки сравнения, аналогичные установленным в § 1. Например, если функция $f(x)$ представима в виде

$$f(x) = \frac{\varphi(x)}{(x-a)^\lambda}$$

и $0 \le \varphi(x) \le C$, то при $\lambda < 1$ интеграл (12) сходится, если $\varphi(x) \ge c > 0$, то при $\lambda \ge 1$ этот интеграл расходится.

Подобным образом можно ввести понятие абсолютной сходимости интеграла (12) и для неабсолютно сходящихся интегралов привести признаки Абеля и Дирихле, формулировка которых предлагается читателю в качестве упражнения.

Наконец, незначительно видоизменив рассуждения предыдущего параграфа, легко распространить на случай интегралов от неограниченных функций правила интегрирования по частям и замены переменной под знаком интеграла. Мы не будем останавливаться на этом рассмотрении.

В заключение укажем на связь между интегралами (1) и (12) в условиях допустимости замены переменной.

Пусть в интеграле (1) $a > 0$. Положим $t = \dfrac{1}{x}$. В результате интеграл (1) преобразуется к виду

$$-\int\limits_{\frac{1}{a}}^{0} f\left(\frac{1}{t}\right) \frac{dt}{t^2} = \int\limits_{0}^{\frac{1}{a}} f\left(\frac{1}{t}\right) \frac{dt}{t^2},$$

т.е. к интегралу вида (12). Аналогично, полагая в интеграле (12) $t = \dfrac{1}{x-a}$, преобразуем его к виду

$$-\int\limits_{\infty}^{\frac{1}{b-a}} f\left(a + \frac{1}{t}\right) \frac{dt}{t^2} = \int\limits_{\frac{1}{b-a}}^{\infty} f\left(a + \frac{1}{t}\right) \frac{dt}{t^2},$$

т.е. к виду (1).

Иногда приходится рассматривать интегралы от функций $f(x)$, определенных на бесконечном промежутке и имеющих на этом промежутке особые точки. В этом случае промежуток определения функций делится на части таким образом, чтобы особые точки $f(x)$ оказались концевыми, и для каждой из полученных частей определяется соответствующий несобственный интеграл. Если все такие интегралы сходятся и ряд, составленный из их значений, также оказывается сходящимся, сумму этого ряда называют значение и несобственного интеграла по всему бесконечному промежутку, в случае конечного числа особых точек речь идет о конечной сумме.

Так, например, для интеграла в $\displaystyle\int\limits_{0}^{\infty} \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}}\, dx$ рассмотрим

$$\int\limits_{0}^{1} \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}}\, dx \quad \text{и} \quad \int\limits_{1}^{\infty} \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}}\, dx.$$

Оба эти интеграла, очевидно, сходятся. Таким образом, можно написать:

$$\int\limits_{0}^{\infty} \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}}\, dx = \int\limits_{0}^{1} \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}}\, dx + \int\limits_{1}^{\infty} \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}}\, dx.$$

Глава XVI

ИНТЕГРАЛЫ, ЗАВИСЯЩИЕ ОТ ПАРАМЕТРА

§ 1. Равномерное стремление к пределу функции двух переменных

Пусть X и Y — некоторые множества из $\mathbb{R}$ и y_0 — предельная точка множества Y. Пусть, далее, $f: \ X \times Y \to \mathbb{R}$. Если при каждом $x \in X$ существует конечный предел

$$\lim_{y \to y_0} f(x, y) = \varphi(x),$$

то говорят, что функция $f(x, y)$ при $y \to y_0$ *стремится поточечно* к функции $\varphi(x)$, и записывают это в виде

$$f(x, y) \to \varphi(x) \quad \text{при} \quad y \to y_0.$$

Поточечное стремление $f(x, y) \to \varphi(x)$ при $y \to y_0$ обобщает понятие поточечной сходимости последовательности функций, так как в частном случае, когда множество Y является последовательностью $\{y_n\}$, $y_n \to y_0$, функцию $f(x, y)$ можно рассматривать как функциональную последовательность $f_n(x) = f(x, y_n)$, определенную на множестве X. Продолжая это обобщение, определим понятие равномерного стремления функции двух переменных к предельной функции, аналогичное понятию равномерной сходимости функциональной последовательности, причем для определенности ограничимся случаем конечного y_0.

Определение. Функция $f(x, y)$ *стремится равномерно* (*относительно* x) к функции $\varphi(x)$ при $y \to y_0$, если для каждого числа $\varepsilon > 0$ найдется такое число $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, что при всех $y \in Y \setminus y_0$, для которых $|y - y_0| < \delta$ выполняется неравенство

$$|f(x, y) - \varphi(x)| < \varepsilon$$

сразу для всех точек $x \in X$. Равномерное стремление будем обозначать в дальнейшем записью

$$f(x, y) \rightrightarrows \varphi(x) \quad \text{при} \quad y \to y_0.$$

Иногда функцию $\varphi(x)$ будем называть также *равномерным пределом* функции $f(x, y)$ точке y_0.

Следующее утверждение устанавливает непосредственную связь между равномерным стремлением $f(x, y) \rightrightarrows \varphi(x)$ при $y \to y_0$ и равномерной сходимостью последовательностей $f_n(x) = f(x, y_n)$, соответствующих последовательностям $\{y_n\} \subset Y \setminus y_0$, $y_n \to y_0$.

Теорема 1. *Для того чтобы $f(x,y) \rightrightarrows \varphi(x)$ при $y \to y_0$, необходимо и достаточно, чтобы для каждой последовательности $\{y_n\} \subset Y \setminus y_0$, $y_n \to y_0$, соответствующая функциональная последовательность $f_n(x) = f(x, y_n)$ равномерно сходилась к $\varphi(x)$.*

Необходимость. Предположим, что $f(x,y) \rightrightarrows \varphi(x)$ при $y \to y_0$ и возьмем произвольную последовательность $\{y_n\}$, $y_n \in Y$, $y_n \neq y_0$, $y_n \to y_0$. Покажем, что для функциональной последовательности $\{f_n(x)\}$, где $f_n(x) = f(x, y_n)$, имеет место $f_n(x) \rightrightarrows \varphi(x)$. Для этого, взяв произвольное число $\varepsilon > 0$, найдем такое число $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, что при $\forall\ y \in Y$, $0 < |y - y_0| < \delta$, выполняется неравенство $|f(x,y) - \varphi(x)| < \varepsilon$ при $\forall\ x \in X$. Так как $y_n \to y_0$, то $\exists\ N = N(\delta)$ такое, что при $\forall n \geq N$ выполняется неравенство $|y_n - y_0| < \delta$, из которого вытекает неравенство

$$|f(x, y_n) - \varphi(x)| < \varepsilon$$

при $\forall\ x \in X$ и $\forall n \geq N$, т.е. $f_n(x) \rightrightarrows \varphi(x)$.

Достаточность. Предположим теперь, что для любой последовательности $\{y_n\} \subset Y \setminus y_0$, такой, что $|y_n - y_0| \to 0$, соответствующая последовательность $f_n(x) = f(x, y_n) \rightrightarrows \varphi(x)$. Покажем, что $f(x,y) \rightrightarrows \varphi(x)$ при $y \to y_0$. Если бы это было не так, то для некоторого числа $\varepsilon_0 > 0$ при $\forall \delta > 0$ нашлось бы $y_\delta \neq y_0$, $|y_\delta - y_0| < \delta$ и точка $x_\delta \in X$ такие, что $|f(x_\delta, y_\delta) = \varphi(x_\delta)| \geq \varepsilon_0$. Возьмем последовательность $\{\delta_n\}$, $\delta_n > 0$, $\delta_n \to 0$, тогда для соответствующих последовательностей $y_n = y_{\delta_n}$, $x = x_{\delta_n}$ будем иметь: $0 < |y_n - y_0| \to 0$ и в то же время $|f(x_n, y_n) - \varphi(x_n)| \geq \varepsilon_0$, т.е. последовательность функций $f(x, y_n) = f_n(x)$ не стремится равномерно к $\varphi(x)$, вопреки предположению. Теорема доказана.

Теорема 1 позволит нам в дальнейшем использовать известные факты, связанные со свойствами предельной функции равномерно сходящейся функциональной последовательности, для распространения их на равномерный предел функции двух переменных.

Имеет место следующий критерий Коши равномерного стремления к предельной функции. *Для того чтобы функция $f(x,y)$ стремилась равномерно к некоторой функции $\varphi(x)$ при $y \to y_0$, необходимо и достаточно, чтобы для каждого числа $\varepsilon > 0$ нашлось такое число $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, что при всех $y', y'' \in Y \setminus y_0$, для которых $|y' - y_0| < \delta$, $|y'' - y_0| < \delta$, и при каждом $x \in X$ выполнялось неравенство*

$$|f(x, y') - f(x, y'')| < \varepsilon.$$

Для доказательства, на основании теоремы 1, достаточно перейти к произвольной последовательности $\{f(x, y_n)\}$, соответствующей последовательности $\{y_n\}$, $y_n \in Y$, $0 < |y_n - y_0| \to 0$, и воспользоваться ранее доказанным признаком Коши равномерной сходимости функциональной последовательности (см. § 1 гл. XIV).

В качестве примера приложения понятия равномерного стремления к предельной функции определим понятие равномерной дифференцируемости функции одного переменного. Пусть $f:\ X \to \mathbb{R}$. Введем в рассмотрение функцию

$$F(x, h) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h},$$

где $h \neq 0$ и таково, что при каждом фиксированном $x \in X$ точка $x + h \in X$. Если при $h \to 0$ функция $F(x, h) \rightrightarrows f'(x)$, то говорят, что функция $f(x)$ *равномерно дифференцируема на множестве* X. Например, для функции $\ln x$, рассматриваемой на промежутке $(0, 1)$, ее производная $\dfrac{1}{x}$ не является равномерный пределом функции $\dfrac{\ln(x + h) - \ln x}{h}$ при $h \to 0$, так как можно показать, что разность

$$\frac{\ln(x + h) - \ln x}{h} - \frac{1}{x}$$

стремится к нулю не равномерно относительно $x \in (0, 1)$. Вместе с тем, на промежутке $[1, 2]$ функция $\dfrac{1}{x}$ является разномерным пределом функции $\dfrac{\ln(x + h) - \ln x}{h}$ при $h \to 0$.

Пусть $X = [a, b]$, y_0 — предельная точка множества Y и $F: \ X \times \mathbb{R}$. Приведем ряд теорем, характеризующих свойства равномерного предела $f(x, y)$ при $y \to y_0$ и доказываемых переходом к произвольной последовательности $\{y_n\}$, $y_n \in Y \setminus y_0$, $|y_n - y_0| \to 0$.

Теорема 2. *Если функция $f(x, y)$ интегрируема на $[a, b]$ при каждом фиксированном $y \in Y$ и $f(x, y) \rightrightarrows \varphi(x)$ при $y \to y_0$, то функция $\varphi(x)$ интегрируема на $[a, b]$ и имеет место равенство*

$$\lim_{y \to y_0} \int\limits_a^b f(x, y)\, dx = \int\limits_a^b \varphi(x)\, dx = \int\limits_a^b \left[\lim_{y \to y_0} f(x, y) \right] dx.$$

Теорема 3. *Если функция $f(x, y)$ непрерывна по x на $[a, b]$ при каждом фиксированном $y \in Y$ и $f(x, y) \rightrightarrows \varphi(x)$ при $y \to y_0$, то $\varphi(x)$ — непрерывная на $[a, b]$ функция.*

Теорема 4. *Если функция $f(x, y)$ непрерывна по x на $[a, b]$ при каждом фиксированном y и при стремлении y, возрастая к y_0, эта функция, возрастая (убывая), стремится поточечно к непрерывной предельной функции $\varphi(x)$, то это стремление является равномерным.*

Эта теорема является аналогом ранее доказанной для функциональных последовательностей теоремы Дини, поэтому при переходе к последовательности $\{y_n\}$ необходимо позаботиться о том, чтобы эта последовательность была возрастающей и, конечно, $y_n \to y_0$.

Теорема 5. *Пусть при каждой фиксированном значении $y \in Y$ функции $f(x, y)$ и $f'_x(x, y)$ (рассматриваемые как функции переменной x) непрерывны на $[a, b]$ и при $y \to y_0$ функция $f(x, y) \to \varphi(x)$, а $f'_x(x, y) \rightrightarrows \psi(x)$. Тогда функция $\varphi(x)$ дифференцируема на $[a, b]$ и*

$$\varphi'(x) = \psi(x)$$

или

$$\left[\lim_{y \to y_0} f(x, y) \right]' = \lim_{y \to y_0} f'_x(x, y).$$

В заключение отметим следующее утверждение.

Теорема 6. *Если функция* $f:\ [a,b]\times[c,d]\to\mathbb{R}$ *непрерывна в прямоугольнике* $[a,b]\times[c,d]$, *то для любого* $y_0\in[c,d]$ *при* $y\to y_0$ *имеем:* $f(x,y)\rightrightarrows f(x,y_0)$.

Действительно, так как функция $f(x,y)$ равномерно непрерывна в прямоугольнике $[a,b]\times[c,d]$, то для произвольного числа $\varepsilon>0$ найдется такое число $\delta=\delta(\varepsilon)>0$, что для любых точек $(x',y'),(x'',y'')$, для которых $|x'-x''|<\delta$, $|y'-y''|<\delta$, выполняется неравенство

$$|f(x',y')-f(x'',y'')|<\varepsilon.$$

Полагая $x'=x''=x$, $y'=y$, $y''=y_0$ найдем, что для любых $y\in[c,d]$, таких, что $|y-y_0|<\delta$, выполняется неравенство

$$|f(x,y)-f(x,y_0)|<\varepsilon$$

при всех $x\in[a,b]$, а этом и означает равномерное стремление $f(x,y)$ к $f(x,y_0)$ при $y\to y_0$.

§ 2. Интегралы (собственные), зависящие от параметра

Пусть $f:\ [a,b]\times Y\to\mathbb{R}$ и при каждом фиксированном $y\in Y$ функция $f(x,y)$ интегрируема по промежутку $[a,b]$. Тогда на множестве Y определена функция

$$J(y)=\int\limits_a^b f(x,y)\,dx, \tag{1}$$

называемая *интегралом, зависящим от параметра* y.

Согласно теореме 2 из § 1, если $f(x,y)\rightrightarrows\varphi(x)$ при $y\to y_0$, то в интеграле (1) допустим предельный переход под знаком интеграла. Если, в частности, $y_0\in Y$? и $\varphi(x)=f(x,y_0)$, то функция $J(y)$ непрерывна в точке y_0, так как

$$\lim_{y\to y_0} J(y)=\int\limits_a^b f(x,y_0)\,dx=J(y_0).$$

Следовательно, в случае непрерывной на прямоугольнике $[a,b]\times[c,d]$ функции $f(x,y)$ интеграл (1) является функцией, непрерывной на $[c,d]$.

Из теоремы 5 § 1 вытекает следующее утверждение.

Теорема 1. *Если функция* $f:\ [a,b]\times[c,d]\to\mathbb{R}$ *непрерывна на прямоугольнике* $[a,b]\times[c,d]$ *и имеет непрерывную на этом прямоугольнике производную* $f'_y(x,y)$, *то функция определяемая интегралом* (1), *дифференцируема на* $[c,d]$ *и*

$$J'(y)=\int\limits_a^b f'_y(x,y)\,dy,$$

т.е. дифференцирование по параметру можно выполнять под знаком интеграла.

В самом деле, в этом случае $f'_y(x, y)$ является равномерным пределом функции

$$F(x, y, h) = \frac{f(x, y+h) - f(x, y)}{h} \quad \text{при} \quad h \to 0,$$

так как $f(x, y+h) - f(x, y) = f'_y(x, y+\theta h)h$, $0 < \theta < 1$, и

$$f'_y(x, y+\theta h) \rightrightarrows f'_y(x, y) \quad \text{при} \quad h \to 0,$$

т.е. в интеграле,выражающем отношение

$$\frac{J(y+h) - J(y)}{h} = \int\limits_a^b f'_y(x, y+\theta h)\, dx$$

допустим предельный переход под знаком интеграла.

Обобщением интеграла (1) является интеграл вида

$$J(y) = \int\limits_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f(x, y)\, dx, \tag{2}$$

где функция $f(x, y)$ определена на прямоугольнике $[a, b] \times [c, d]$, а заданные на $[c, d]$ функции $\alpha(y)$ и $\beta(y)$ отображают $[c, d]$ в промежуток $[a, b]$.

Теорема 2. *Если функция $f(x, y)$ непрерывна на $[a, b] \times [c, d]$ вместе с производной $f'_y(x, y)$, а функции $\alpha(y)$ и $\beta(y)$ дифференцируемы на $[c, d]$, то интеграл $J(y)$ дифференцируем на $[c, d]$ и выполняется равенство*

$$J'(y) = \int\limits_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f'_y(x, y)\, dx + f[\beta(y), y]\beta'(y) - f[\alpha(y), y]\alpha'(y). \tag{3}$$

Установим справедливость этой формулы в произвольной точке $y_0 \in [c, d]$. Для этого в выражении

$$\frac{J(y_0+h) - J(y_0)}{h} = \frac{1}{h}\left[\int\limits_{\alpha(y_0+h)}^{\beta(y_0+h)} f(x, y_0+h)\, dx - \int\limits_{\alpha(y_0)}^{\beta(y_0)} f(x, y_0)\, dx\right] \tag{4}$$

проведем преобразование:

$$\int\limits_{\alpha(y_0+h)}^{\beta(y_0+h)} f(x, y_0+h)\, dx = \int\limits_{\alpha(y_0+h)}^{\alpha(y_0)} f(x, y_0+h)\, dx + \int\limits_{\alpha(y_0)}^{\beta(y_0)} f(x, y_0+h)\, dx + \int\limits_{\beta(y_0)}^{\beta(y_0+h)} f(x, y_0+h)\, dx,$$

и представим отношение (4) в следующем виде:

$$\frac{J(y_0+h) - J(y_0)}{h} = \int\limits_{\alpha(y_0)}^{\beta(y_0)} \frac{f(x, y_0+h) - f(x, y_0)}{h}\, dx +$$

$$+\frac{1}{h}\int\limits_{\alpha(y_0+h)}^{\alpha(y_0)} f(x,y_0+h)\,dx+\frac{1}{h}\int\limits_{\beta(y_0)}^{\beta(y_0+h)} f(x,y_0+h)\,dx.$$

В первом слагаемом правой части этого равенства, согласно теореме 2, допустим предельный переход под знаком интеграла, воспользовавшись теоремой о среднем значении, представим второе и третье слагаемые правой части этого равенства в следующей форме:

$$\frac{1}{h}\int\limits_{\alpha(y_0+h)}^{\alpha(y_0)} f(x,y_0+h)\,dx=f(\xi,y-0+h)\,\frac{\alpha(y_0)-\alpha(y_0+h)}{h},$$

где $\xi\in[\alpha(y_0),\alpha(y_0+h)]$,

$$\frac{1}{h}\int\limits_{\beta(y_0)}^{\beta(y_0+h)} f(x,y_0+h)\,dx=f(\xi',y_0+h)\,\frac{\beta(y_0+h)-\beta(y_0)}{h},$$

где $\xi'\in[\beta(y_0),\beta(y_0h)]$. Из этих равенств, очевидно, следует:

$$\frac{1}{h}\int\limits_{\alpha(y_0+h)}^{\alpha(y_0)} f(x,y_0+h)\,dx\to -f[\alpha(y_0),y_0]\alpha'(y_0)\quad\text{при}\quad h\to 0,$$

$$\frac{1}{h}\int\limits_{\beta(y_0)}^{\beta(y_0+h)} f(x,y_0+h)\,dx\to f[\beta(y_0),y_0]\quad\text{при}\quad h\to 0.$$

Тем самым установлена допустимость предельного перехода при $h\to 0$ в равенстве (4) и справедливость равенства (3).

Докажем теперь теорему об интегрировании по параметру под знаком интеграла (1).

Теорема 3. *Пусть функция* $f:\ [a,b]\times[c,d]\to\mathbb{R}$ *и является непрерывной в этом прямоугольнике. Тогда функция* $J(y)$, *определяемая интегралом* (1), *интегрируема по промежутку* $[c,d]$ *и справедливо равенство*

$$\int\limits_c^d J(y)\,dy=\int\limits_c^d\Big\{\int\limits_a^b f(x,y)\,dx\Big\}dy=\int\limits_a^b\Big\{\int\limits_c^d f(x,y)\,dy\Big\}dx,$$

т.е. интегрирование по параметру y *возможно выполнять под знаком интеграла, определяющего функцию* $J(y)$.

Для доказательства введем в рассмотрение вспомогательные функции:

$$\Phi(\eta)=\int\limits_c^\eta\Big\{\int\limits_a^b f(x,y)\,dx\Big\}dy$$

и

$$\Psi(\eta) = \int_a^b \left\{ \int_c^\eta f(x,y)\,dy \right\} dx,$$

и покажем, что они совпадают при всех $\eta \in [c,d]$. Легко видеть, что каждая из этих функций дифференцируема на $[c,d]$. В самом деле, функция $\Phi(\eta)$ дифференцируема как интеграл с переменным верхним пределом от непрерывной функций $\int_a^b f(x,y)\,dx$, а для функций $\Psi(\eta)$ очевидно, выполнены условия теоремы 1. Продифференцировав эти функции, найдем:

$$\Phi'(\eta) = \int_a^b f(x,\eta)\,dx,$$

$$\Psi'(\eta) = \int_a^b f(x,\eta)\,dx,$$

т.е. при всех $\eta \in [c,d]$ имеет место равенство $\Phi'(\eta) = \Psi'(\eta)$. Так как при $\eta = c$, очевидно, $\Phi(c) = \Psi(c) = 0$, то $\Phi(\eta) \equiv \Psi(\eta)$ на $[c,d]$. В частности, при $\eta = d$ получаем равенство (5).

§ 3. Несобственные интегралы, зависящие от параметра

В этом параграфе нас будет интересовать равномерное стремление функции $F(\xi,y)$ к предельной функции $\Phi(y)$ при $\xi \to +\infty$.

Напомним основное определение. Пусть $F:\ Z \times Y \to \mathbb{R}$ и $+\infty$ является предельной точкой множества Z. Будем говорить, что $F(\xi,y) \rightrightarrows \Phi(y)$ при $\xi \to \infty$, если для каждого $\varepsilon > 0$ найдется такое число ξ_0, что при $\forall\ \xi > \xi_0$, $\xi \in Z$ и при $\forall\ y \in Y$ выполняется неравенство

$$|F(\xi,y) - \Phi(y)| < \varepsilon.$$

Пусть теперь функция $f(x,y)$ определена при $x \geq a$ и $y \in Y$ а при каждом фиксированном $y \in Y$ интегрируема по промежутку $[a,\infty)$, т.е. сходится несобственный интеграл

$$J(y) = \int_a^\infty f(x,y)\,dx. \tag{1}$$

Условимся называть интеграл (1) *равномерно сходящимся*, если функция

$$F(\xi,y) = \int_a^\xi f(x,y)\,dx \tag{2}$$

при $\xi \to +\infty$ равномерно стремится к предельной функции $J(y)$, т.е. $F(\xi, y) \rightrightarrows J(y)$ при $\xi \to +\infty$.

Несобственный интеграл (1) можно рассматривать как континуальный аналог функционального ряда, а равномерно сходящийся интеграл (1) — как континуальный аналог равномерно сходящегося функционального ряда. Поэтому основные свойства равномерно сходящихся несобственных интегралов аналогичны соответствующим свойствам равномерно сходящихся функциональных рядов. Так, из признака Коши равномерного стремления $F(\xi, y)$ к предельной функции $J(y)$ при $\xi \to +\infty$ вытекает следующий признак.

ТЕОРЕМА 1. *Для того чтобы несобственный интеграл* (1) *равномерно сходился, необходимо и достаточно, чтобы для каждого числа $\varepsilon > 0$ нашлось такое число $\xi_0 \geq a$, что при всех $\xi', \xi'' > \xi_0$ и при всех $y \in Y$ выполнялось бы неравенство*

$$\left| \int\limits_{\xi'}^{\xi''} f(x, y)\, dx \right| < \varepsilon.$$

Для доказательства достаточно применить критерий Коши равномерного стремления к предельной функции, приведенный в § 1, к функции $F(\xi, y)$ и заменить эту функцию выражающим ее интегралом (2).

Из этого признана, в частности, вытекает следующий признак сравнения.

СЛЕДСТВИЕ 1. *Если при всех $y \in Y$ и всех $x \in [a_1, \infty)$, где a_1 — некоторое число, большее a, для функции $f(x, y)$ выполнено неравенство*

$$|f(x, y)| \leq g(x), \tag{3}$$

где $g(x)$ — интегрируемая по промежутку $[a, \infty)$ функция, то интеграл (1) сходится равномерно.

Действительно, из предположенной сходимости интеграла

$$\int\limits_{a}^{\infty} g(x)\, dx$$

вытекает, что для произвольного числа $\varepsilon > 0$ найдется такое число $\xi_0 > a$, что при любых ξ', ξ'', каких, что $\xi_0 \leq \xi' < \xi''$, выполняется неравенство

$$\int\limits_{\xi'}^{\xi''} g(x)\, dx < \varepsilon.$$

Но тогда, в силу (3),

$$\left| \int\limits_{\xi'}^{\xi''} f(x, y)\, dx \right| \leq \int\limits_{\xi'}^{\xi''} |f(x, y)|\, dx \leq \int\limits_{\xi'}^{\xi''} g(x)\, dx < \varepsilon,$$

и утверждение, содержащееся в следствии, доказано.

Замечание 1. Из теоремы 1 непосредственно вытекает, что равномерная сходимость несобственного интеграла (1) и каждого «остатка», т.е. интеграла вида

$$\int_{a'}^{\infty} f(x,y)\,dx,$$

где $a' > a$ имеет место одновременно.

Приведем еще некоторые признаки равномерной сходимости интегралов вида

$$\int_{a}^{\infty} f(x,y)g(x)\,dx \quad \text{и} \quad \int_{a}^{\infty} f(x)g(x,y)\,dx,$$

где функции $g(x)$ и $g(x,y)$ монотонны по x и ограничены.

Признак Дирихле. *Если интегралы*

$$F(\xi,y) = \int_{a}^{\xi} f(x,y)\,dx$$

равномерно ограничены, т.е. при всех $\xi > a$ *и* $y \in Y$

$$|F(\xi,y)| \le M,$$

и $g(x) \to 0$ *при* $x \to +\infty$, *то интеграл*

$$\int_{a}^{\infty} f(x,y)g(x)\,dx$$

сходится равномерно.

Признак Абеля. *Если интеграл*

$$\int_{a}^{\infty} f(x)\,dx$$

сходится, а функция $g(x,y)$ *равномерно ограничена при всех* $x \ge a$ *и всех* $y \in Y$, *то интеграл*

$$\int_{a}^{\infty} f(x)g(x,y)\,dx$$

сходится равномерно.

Доказательства этих признаков весьма близки к доказательствам аналогичных признаков для несобственных интегралов, и поэтому мы их опускаем, предоставляя заняться ими читателю в качестве упражнения.

Обратимся теперь к свойствам несобственных интегралов (1), зависящих от параметра.

Теорема 2. *Если $f(x,y) \rightrightarrows \varphi(x)$ на $[a,\infty)$ при $y \to y_0$ и интеграл (1) равномерно сходится, то*

$$\lim_{y \to y_0} J(y) = \lim_{y \to y_0} \int\limits_a^\infty f(x,y)\,dx = \int\limits_a^\infty \varphi(x)\,dx.$$

Установим вначале интегрируемость $\varphi(x)$ на промежутке $[a,\infty)$. Для этого по заданному числу $\varepsilon > 0$ найдем такое число $\xi_0 = \xi_0(\varepsilon) > a$, что при любых ξ', ξ'', $\xi_0 < \xi' < \xi''$, выполняется неравенство,

$$\left| \int\limits_{\xi'}^{\xi''} f(x,y)\,dx \right| < \varepsilon$$

при всех $y \in Y$. Предположив теперь ξ' и ξ'' фиксированными, совершим предельный переход в этой неравенстве при $y \to y_0$. В результате получим неравенство

$$\left| \int\limits_{\xi'}^{\xi''} \varphi(x)\,dx \right| \le \varepsilon,$$

из которого вытекает сходимость интеграла $\int\limits_a^\infty \varphi(x)\,dx$.

Рассмотрим теперь произвольную последовательность $\{\xi_n\}$, $\xi_n \to +\infty$, и соответствующую ей последовательность

$$J_n(y) = \int\limits_a^{\xi_n} f(x,y)\,dx,$$

которая равномерно сходится к $J(y)$. Для каждой из функций $J_n(y)$ при $y \to y_0$ существует конечный предел (см. теорему 2 из § 1) и

$$\lim_{y \to y_0} J_n(y) = \lim_{y \to y_0} \int\limits_a^{\xi_n} f(x,y)\,dx = \int\limits_a^{\xi_n} \left[\lim_{y \to y_0} f(x,y) \right] dx = \int\limits_a^{\xi_n} \phi(x)\,dx.$$

Но тогда, согласно утверждению из § 2, существует предел

$$\lim_{y \to y_0} J(y) = \lim_{\xi_n \to \infty} \int\limits_a^{\xi_n} \varphi(x)\,dx = \int\limits_a^{\infty} \varphi(x)\,dx,$$

что и доказывает теорему. Если, в частности, $y_0 \in Y$ и функция $f(x,y)$ непрерывна в точке y_0, т.е. $f(x,y) \rightrightarrows f(x,y_0)$ при $y \to y_0$, то $\lim\limits_{y \to y_0} J(y) = J(y_0)$, т.е. имеет место следующее утверждение.

Следствие 2. *Если функция* $f(x,y)$ *непрерывна при* $x \geq a$ *и* $y \in [c,d]$ *и интеграл* (1) *сходился равномерно, то функция* $J(y)$, *определенная интегралом* (1), *непрерывна на* $[c,d]$.

Действительно, в этом случае на каждом конечном прямоугольнике $[a,\xi] \times [c,d]$ имеем $f(x,y) \rightrightarrows f(x,y_0) = \varphi(x)$ при $y \to y_0$, поэтому для интегралов $J_n(y)$ выполняются условия возможности предельного перехода под знаком интеграла.

Замечание 2. Если функция $f(x,y)$ непрерывна в $[a,\infty) \times [c,d]$ и неотрицательна, то из непрерывности $J(y)$ на $[c,d]$ вытекает равномерная сходимость интеграла (1). Действительно, в этом случае при $\xi_n \to \infty$, возрастая, последовательность непрерывных функций $J_n(y)$ монотонно возрастая, сходится к непрерывной функции $J(y)$, и к этому случаю можно применить теорему Дини.

Замечание 3. Если функция $f(x,y)$ непрерывна на $[a,\infty) \times [c,d]$, неотрицательна и при $y \to y_0$, возрастая, сходится к непрерывной Функции $\varphi(x)$ (монотонно возрастая по y), тогда из сходимости интеграла $\int\limits_a^\infty \varphi(x)\,dx$ вытекает допустимость предельного перехода под знаком интеграла (1). В самом деле, в этом случае интеграл (1) оказывается равномерно сходящимся, в силу неравенства $f(x,y) \leq \varphi(x)$ и признака сравнения равномерной сходимости для интегралов.

Рассмотрим вопрос об интегрировании несобственного интеграла по параметру.

Пусть функция $f(x,y)$ непрерывна в $[a,\infty) \times [c,d]$ и интеграл (1) равномерно сходился, в этом случае, согласно следствию 1, функция $J(y)$ непрерывна на $[c,d]$, а следовательно, и интегрируема на $[a,b]$. При этих условиях справедливо следующее утверждение.

Теорема 3. *Имеет место формула*

$$\int\limits_c^d J(y)\,dy = \int\limits_c^d dy \int\limits_a^\infty f(x,y)\,dx = \int\limits_a^\infty dx \int\limits_c^d f(x,y)\,dy. \tag{4}$$

В самом деле, рассмотрим последовательность функций

$$J_n(y) = \int\limits_a^{\xi_n} f(x,y)\,dx,$$

соответствующую произвольной последовательности $\{\xi_n\}$, $\xi_n \to \infty$. Для каждой из функций $J_n(y)$, в силу теоремы 3 из § 2, имеем

$$\int\limits_c^d J_n(y)\,dy = \int\limits_a^{\xi_n} dx \int\limits_c^d f(x,y)\,dy. \tag{5}$$

Так как на $[c,d]$ последовательность $J_n(y) \rightrightarrows J(y)$ в интеграле, стоящем слева в равенстве (5), допустим предельный переход при $n \to \infty$ под знаком интеграла

$\int\limits_c^d J_n(y)\,dy$, а, значит, существует предел последовательности интегралов, стоящих в правой части равенства (5), т.е.

$$\lim_n \int\limits_c^d J_n(y)\,dy = \int\limits_c^d J(y)\,dy = \lim_n \int\limits_a^{\xi_n} dx \int\limits_c^d f(x,y)\,dy = \int\limits_a^{\infty} dx \int\limits_c^d f(x,y)\,dy,$$

тем самым справедливость (4) установлена.

Отметим, что с помощью приведенных выше замечаний 2 и 3 можно установить справедливость равенства (4) при несколько иных условиях, при которых применима теорема Дини.

Рассмотрим теперь вопрос об интегрировании несобственного интеграла (1) по бесконечному промежутку изменения параметра y.

Теорема 4. *Пусть функция $f(x,y)$ непрерывна и неотрицательна в области $[a,\infty)\times[c,\infty)$ и каждый из интегралов*

$$J(y) = \int\limits_a^{\infty} f(x,y)\,dx, \qquad K(x) = \int\limits_c^{\infty} f(x,y)\,dy$$

является непрерывной функцией — первый от y на $[c,\infty)$, второй — от x на $[a,\infty)$. Если при этом сходится один из интегралов

$$\int\limits_c a^{\infty} J(y)\,dy \quad \text{или} \quad \int\limits_a^{\infty} K(x)\,dx$$

то сходится и другой интеграл и имеет место равенство

$$\int\limits_c^{\infty} J(y)\,dy = \int\limits_a^{\infty} K(x)\,dx$$

или

$$\int\limits_c^{\infty} dy \int\limits_a^{\infty} f(x,y)\,dx = \int\limits_a^{\infty} dx \int\limits_c^{\infty} f(x,y)\,dy, \tag{6}$$

т.е. допустимо интегрирование по параметру по бесконечному промежутку под знаком несобственного интеграла.

Доказательство. Заметим вначале, что, по условиям теоремы, интегралы $J(y)$ и $K(x)$ сходятся равномерно. Допустим, для определенности, что сходится интеграл

$$\int\limits_a^{\infty} K(x)\,dx,$$

и рассмотрим возрастающую последовательность $\{\eta_n\}$, $\eta_n \to \infty$. В этом случае

$$\int\limits_c^{\eta_n} J(y)\,dy = \int\limits_c^{\eta_n} dy \int\limits_a^{\infty} f(x,y)\,dx = \int\limits_a^{\infty} dx \int\limits_c^{\eta_n} f(x,y)\,dy.$$

Последовательность функций

$$K(x,\eta_n) = \int\limits_c^{\eta_n} f(x,y)\,dy$$

равномерно сходится к $K(x)$, при этом $K(x,\eta_n) \leq K(x)$. Отсюда вытекает (см. замечание 3), что интеграл $\int\limits_a^{\infty} K(x,\eta)\,dx$ сходится равномерно. Но тогда в этом интеграле, согласно теореме 2, допустим предельный переход под знаком интеграла, т.е. имеет место равенство

$$\int\limits_c^{\infty} J(y)\,dy = \lim_{\eta_n\to\infty} \int\limits_c^{\eta_n} J(y)\,dy = \lim_{\eta_n\to\infty} \int\limits_a^{\infty} K(x,\eta_n)\,dx = \int\limits_a^{\infty} K(x)\,dx,$$

что требовалось доказать.

Рассмотрим дифференцирование по параметру несобственного интеграла.

Теорема 5. *Если функция $f(x,y)$ непрерывна в области $[a,\infty)\times[c,d]$ вместе с производной $f'_y(x,y)$, интеграл*

$$J(y) = \int\limits_a^{\infty} f(x,y)\,dx$$

сходится, а интеграл

$$\int\limits_a^{\infty} f'_y(x,y)\,dx$$

сходится равномерно, то при любом $y \in [c,d]$

$$J'(y) = \int\limits_a^{\infty} f'_y(x,y)\,dx.$$

Для доказательства возьмем произвольную последовательность $\xi_n \to \infty$ и рассмотрим последовательность

$$J_n(y) = \int\limits_a^{\xi_n} f(x,y)\,dx.$$

Ясно, что последовательность непрерывных функций $J_n(y)$ сходится к функции $J(y)$, а последовательность производных $J'_n(y)$ сходится равномерно, в соответствии с теоремой 5 из § 1,

$$J'(y) = \lim_{n} \ J'_n(y).$$

Но $J'_n(y) = \int\limits_a^{\xi_n} f'_y(x, y)\, dx$. Таким образом,

$$J'(y) = \int\limits_a^{\infty} f'_y(x, y)\, dx.$$

Заметим, что понятие равномерной сходимости и основные свойства интегралов, установление нами, можно распространить на интегралы, зависящие от нескольких параметров, т.е. интегралы вида

$$J(y, z, \dots, u, v) = \int\limits_a^{\infty} f(x, y, z, \dots, u, v)\, dx,$$

где функция $f(x, y, z, \dots, u, v)$ по переменной x определена на множестве $x \geq a$ и по остальным переменным — в некоторой области совместных значений этих переменных.

Например, интеграл $\int\limits_2^{\infty} \frac{(x-1)^{y-1}}{x^{y+z}}\, dx$ сходился в области $y > 0$, $z > 0$, так как при $x \geq 2$

$$0 \leq \frac{(x-1)^{y-1}}{x^{y+z}} = \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{x}\right)^{1-y} x^{1+z}} \leq \frac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)^{1+y}} \frac{1}{x^{1+z}},$$

а интеграл $\int\limits_2^{\infty} \frac{dx}{\left(\frac{1}{2}\right)^{1-y} x^{1+z}}$ сходится при любых фиксированных $y > 0$ и $z > 0$.

Несколько слов о несобственных интегралах от неограниченных функций.

Пусть функция $f(x, y)$ определена на множестве $[a, b] \times Y$ и при каждом фиксированном $y \in Y$, $f(x, y)$ является неограниченной при $x \to a$, но такой, что сходится интеграл

$$J(y) = \int\limits_a^{b} f(x, y)\, dx. \tag{7}$$

Если для $a < \xi < b$ функция

$$F(\xi, y) = \int\limits_{\xi}^{b} f(x, y)\, dx$$

при $\xi \to a + 0$ стремится равномерно к функции $J(y)$, то несобственный интеграл (7), зависящий от параметра y, называется *равномерно* (*относительно y на Y*) *сходящимся* несобственным интегралом. С помощью преобразования, приведенного в § 2 гл. XV (см. с. 147), этот интеграл можно привести к виду (1) несобственного интеграла по неограниченному промежутку. Поэтому на интеграл (7) могут быть распространены основные теоремы о предельном переходе под знаком несобственного интеграла, об условиях его непрерывности по параметру, об интегрировании и дифференцировании по параметру под знаком интеграла.

Наконец, заметим, что интеграл вида

$$\int\limits_a^\infty f(x, y)\,dx = \int\limits_a^b f(x, y)\,dx + \int\limits_b^\infty f(x, y)\,dx, \tag{8}$$

где первое слагаемое — интеграл от неограниченной функции, а второе — интеграл по неограниченному промежутку, равномерно сходится (по определению), если равномерно сходятся оба интеграла, стоящие в правой части равенства (8).

Примеры.

1. Интеграл

$$\int\limits_0^1 x^{\alpha-1}e^{-x}\,dx \tag{9}$$

сходится при каждое $\alpha > 0$, так как в этом случае $0 \le x^{\alpha-1}e^{-x} < x^{\alpha-1}$, а интеграл $\int\limits_0^1 x^{\alpha-1}\,dx$ сходится при $\alpha > 0$. В области $\alpha \ge \alpha_0$, где α_0 — произвольное положительное число, интеграл (9) сходится равномерно, так как $0 \le x^{\alpha-1}e^{-x} < x^{\alpha_0-1}$, и мы можем применить признак сравнения (си. следствие 1 теоремы 1). Вместе с тем сходящийся при всех числах $\alpha > 0$ является и интеграл

$$\int\limits_0^\infty x^{\alpha-1}e^{-x}\,dx = \int\limits_0^1 x^{\alpha-1}e^{-x}\,dx + \int\limits_1^\infty x^{\alpha-1}e^{-x}\,dx, \tag{10}$$

так как второе слагаемое правой части этого равенства есть, очевидно, интеграл, сходящийся при любом $\alpha > 0$. Легко видеть, что этот интеграл сходится равномерно в области $0 < \alpha_0 \le \alpha \le A_0$, где число A_0 произвольно. В самом деле, при $x \ge 1$, $x^{\alpha-1}e^{-x} \le x^{A_0}e^{-x}$, выполняются условия следствия 1. Таким образом, в области $0 < \alpha_0 \le \alpha \le A_0$ интеграл (10) сходится равномерно.

2. Интеграл $\int\limits_0^{\frac{1}{2}} x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}\,dx$ является на собственным при $\alpha < 1$, так как $x^{\alpha-1} \to \infty$ при $x \to 0$. Этот интеграл сходится при $\alpha > 0$ и любом β, так как при $0 < x \le \dfrac{1}{2}$ выполняется неравенство $0 \le x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1} \le cx^{\alpha-1}$ при некотором $c > 0$. Этот интеграл сходится равномерно относительно α и β в области

$\alpha \geq \alpha_0 > 0$, $\beta \geq 0$, так как в этом случае $0 \leq x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1} \leq cx^{\alpha_0-1}$ при всех $\alpha \geq \alpha_0$ и $\beta \geq 0$. Аналогичным образом проверяется сходимость интеграла

$$\int\limits_{\frac{1}{2}}^{1} x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}\,dx$$

при любом $\alpha \geq 0$ и $\beta > 0$, а также равномерная сходимость этого интеграла в области $\alpha \geq 0$, $\beta \geq \beta_0 > 0$, где число β_0 произвольно.

Таким образом, установлена сходимость интеграла

$$\int\limits_{0}^{1} x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}\,dx$$

при всех $\alpha > 0$ и $\beta > 0$ и равномерная сходимость этого интеграла на множестве $\alpha \geq \alpha_0 > 0$, $\beta \geq \beta_0 > 0$, где α_0 и β_0 — произвольные положительные числа.

§ 4. Приложение к вычислению некоторых несобственных интегралов

Рассмотренные в предыдущем параграфе методы позволяют найти численное значение некоторых несобственных интегралов. В качестве примера рассмотрим интеграл

$$J = \int\limits_{0}^{\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx, \qquad (1)$$

сходимость которого была установлена в § 1 гл. XV. Введем в рассмотрение вспомогательную функцию

$$f(x,\alpha) = \begin{cases} e^{-\alpha x}\dfrac{\sin x}{x} & \text{при} \quad x \neq 0, \\ 1 & \text{при} \quad x = 0. \end{cases}$$

Ясно, что функция $f(x,\alpha)$ и ее частная производная $f'_\alpha(x,\alpha) = -e^{\alpha x}\sin x$ непрерывны в области $x \geq 0$ $\alpha \geq 0$ и $f(x,0) = \dfrac{\sin x}{x}$.

Положим

$$J(\alpha) = \int\limits_{0}^{\infty} e^{-\alpha x}\,\frac{\sin x}{x}\,dx. \qquad (2)$$

Покажем, что этот интеграл является равномерно сходящийся в области $\alpha \geq 0$. Для этого достаточно убедиться в равномерной сходимости интеграла

$$\int\limits_{1}^{\infty} (e^{\alpha x}\sin x)\cdot\frac{1}{x}\,dx,$$

к которому применим приведенный выше признак Абеля. В самом деле, интеграл

$$\int\limits_1^\xi e^{-\alpha x}\sin x\,dx = \left.\frac{-e^{-\alpha x}(\alpha\sin x+\cos x)}{1+\alpha^2}\right|_1^\xi$$

ограничен, так как

$$\left|\int\limits_1^\xi e^{-\alpha x}\sin x\,dx\right| \le \left|\frac{-e^{-\alpha\xi}(\alpha\sin\xi+\cos\xi)}{1+\alpha^2}\right| + \left|\frac{-e^{-1}(\alpha\sin 1+\cos 1)}{1+\alpha^2}\right| \le \frac{2(1+\alpha)}{1+\alpha^2} \le 3,$$

а функция $\dfrac{1}{x}$ при $x\to\infty$ монотонно стремится к нулю. Из равномерной сходимости интеграла и непрерывности подынтегральной функции в области $x\ge 0$, $\alpha\ge 0$ вытекает непрерывность функции на промежутке $[0,\infty)$, т.е. справедливость равенства

$$\lim_{\alpha\to\infty} J(\alpha) = J(0) = J.$$

Для отыскания значения $J(\alpha)$ рассмотрим интеграл

$$-\int\limits_0^\infty e^{-x}\sin x\,dx.$$

В силу признака Абеля, условия которого, очевидно, выполнены, этот интеграл равномерно сходится в области $\alpha\ge\alpha_0$, где α_0 — любое положительное число. Отсюда, согласно теореме 5 из § 3 следует возможность дифференцирования интеграла (2) по параметру в каждой точке α, $\alpha>0$, т.е. справедливость равенства

$$J'(\alpha) = -\int\limits_0^\infty e^{-\alpha x}\sin x\,dx = \left.\frac{e^{-\alpha x}(\alpha\sin x+\cos x)}{1+\alpha^2}\right|_0^\infty = -\frac{1}{1+\alpha^2},$$

из которого интегрированием по промежутку $[\alpha,\infty)$ находим

$$J(+\infty)-J(\alpha) = -\operatorname{arctg}\alpha\Big|_\alpha^\infty = -\frac{\pi}{2}+\operatorname{arctg}\alpha. \tag{3}$$

Из выражения (2) для $J(\alpha)$ и и неравенства $\left|\dfrac{\sin x}{x}\right|\le 1$ следует, что при $\alpha\ge\alpha_0$

$$|J(\alpha)| \le \int\limits_0^\infty e^{-\alpha_0 x}\,dx = -\frac{1}{\alpha_0}e^{-\alpha_0 x}\Big|_0^\infty = \frac{1}{\alpha_0}\to 0 \quad \text{при} \quad \alpha_0\to\infty.$$

Отсюда $J(+\infty)=0$, и равенство (3) принимает вид:

$$J(\alpha) = \frac{\pi}{2}-\operatorname{arctg}\alpha.$$

Переходя в этом равенстве к пределу при $\alpha \to +0$, подучим:

$$J(0) = J = \int\limits_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx = \frac{\pi}{2}. \tag{4}$$

Замечание. Рассмотрим интеграл

$$J(u) = \int\limits_0^\infty \frac{\sin ut}{t}\,dt.$$

При $u > 0$

$$J(u) = \int\limits_0^\infty \frac{\sin ut}{t}\,dt = \int\limits_0^\infty \frac{\sin ut}{ut}\,d(ut) = \int\limits_0^\infty \frac{\sin z}{z}\,dz = \frac{\pi}{2}.$$

При $u < 0$

$$J(u) = \int\limits_0^\infty \frac{\sin ut}{t}\,dt = -\int\limits_0^\infty \frac{\sin ut}{ut}\,d(ut) = \int\limits_0^{-\infty} \frac{\sin z}{z}\,dz = -\frac{\pi}{2}.$$

Наконец, ясно, что $J(0) = 0$.

Таким образом, мы подучили интегральное представление разрывной функции:

$$\operatorname{sign} u = \left\{\begin{matrix} 1 & \text{при} & u > 0, \\ -1 & \text{при} & u < 0, \\ 0 & \text{при} & u = 0, \end{matrix}\right\} = \frac{2}{\pi}\,J(u) = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^\infty \frac{\sin ut}{t}\,dt. \tag{6}$$

В различных приложениях, особенно в математическая статистике, часто встречается интеграл

$$K = \int\limits_0^\infty e^{-x^2}\,dx. \tag{7}$$

Для его вычисления положим $x = ut$, где $u > 0$, и рассмотрим интеграл

$$K(u) = \int\limits_0^\infty e^{-u^2t^2} u\,dt.$$

Умножим обе части этого равенства на e^{-u^2} и проинтегрируем полученное равенство по промежутку $[0, \infty)$. В результате получим:

$$K\int\limits_0^\infty e^{-u^2}\,du = \int\limits_0^\infty e^{-u2}u\left\{\int\limits_0^\infty e^{-u^2t^2}\,dt\right\}du. \tag{8}$$

Рассмотрим теперь функцию

$$f(u,t) = ue^{-(1+t^2)u^2}.$$

В области $u > 0$, $t \geq 0$ эта Функция, очевидно, ограничена, непрерывна и неотрицательна. Кроме того, каждый из интегралов

$$\int\limits_0^\infty f(u,t)\,dt = ue^{-u^2}\int\limits_0^\infty e^{-u^2t^2}\,dt = e^{-u^2}\,K$$

и

$$\int\limits_0^\infty f(u,t)\,du = \int\limits_0^\infty ue^{-(1+t^2)u^2}\,du = -\frac{1}{2(1+t^2}\,e^{-(1+t^2)u^2}\Big|_0^u = \frac{1}{2}\,\frac{1}{1+t^2}$$

является непрерывной функцией в области изменения параметра, а интеграл

$$\int\limits_0^\infty dt\int\limits_0^\infty f(u,t)\,du = \frac{1}{2}\int\limits_0^\infty \frac{dt}{1+t^2} = \frac{\pi}{4}.$$

Таким образом, выполняются условия теоремы 4 из § 3 настоящей главы и на основе этой теоремы из равенства (8) получаем равенство $K^2 = \dfrac{\pi}{4}$. Отсюда

$$K = \int\limits_0^\infty e^{-x^2}\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}. \tag{9}$$

§ 5. Интегралы Эйлера

Функции, определяемые интегралами, зависящими от параметров, находят широкое применение как в математике, так и в ее приложениях. Остановимся на некоторых свойствах введенных Эйлером Γ и B функций, определяемых интегралами

$$\Gamma(\alpha) = \int\limits_0^\infty x^{\alpha-1}e^{-x}\,dx, \tag{1}$$

$$\mathrm{B}(\alpha,\beta) = \int\limits_0^1 x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}\,dx. \tag{2}$$

Γ-ФУНКЦИЯ. Как было установлено в § 8, интеграл (1) сходится при всех $\alpha > 0$ и равномерно сходится на каждом промежутке $[\alpha_0, \mathrm{A}_0]$, где $0 < \alpha_0 < \mathrm{A}_0 < \infty$. Отсюда вытекает непрерывность функции $\Gamma(\alpha)$ в области $\alpha > 0$. Проверим дифференцируемость этой функций при $\alpha > 0$. Для этого заметим, что производная $f'_\alpha(x,\alpha) = (\ln x)\,x^{\alpha-1}e^{-x}$ непрерывна при $\alpha > 0$ и $x > 0$ и покажем, что интеграл

$$\int\limits_0^\infty f'_\alpha(x,\alpha)\,dx = \int\limits_0^\infty (\ln x)x^{\alpha-1}e^{-x}\,dx$$

сходится равномерно на каждом промежутке $[\alpha_0, \mathrm{A}_0]$, где $0 < \alpha_0 < \mathrm{A}_0 < \infty$. Пусть число ξ_0 таково, что $0 < \xi_0 < \alpha_0$. Функция $x^{\xi_0} \ln x \to 0$ при $x \to 0$. Поэтому найдется такое число δ, $0 < \delta < 1$, что $|x^{\xi_0} \ln x| \leq 1$ на промежутке $(0, \delta]$. Но тогда на промежутке $(0, \delta]$ выполняется неравенство

$$|(\ln x) x^{\alpha-1} e^{-x}| \leq x^{\alpha_0 - \xi_0 - 1},$$

и так как интеграл $\int\limits_0^\delta \frac{dx}{x^{1-(\alpha_0-\xi_0)}}$ сходится, то интеграл $\int\limits_0^\delta (\ln x) x^{\alpha-1} e^{-x}\, dx$ сходится равномерно относительно α на $[\alpha_0, \infty)$. Аналогично, для $\alpha \leq \mathrm{A}_0$ найдется какое число $\Delta > 1$, что для всех $x \geq \Delta$ выполняется неравенство $\left|\frac{\ln x}{x} \cdot \frac{x^{\Delta+1}}{x^x}\right| \leq 1$. При таких значениях x и всех $\alpha \leq \mathrm{A}_0$ имеем $|(\ln x) x^{\alpha-1} e^{-x}| \leq \frac{1}{x^2}$, откуда, в силу признака сравнения, следует, что интеграл

$$\int\limits_0^\infty (\ln x) x^{\alpha-1} e^{-x}\, dx$$

сходится равномерно относительно α на промежутке $[\alpha_0, \mathrm{A}_0]$. Наконец, собственный интеграл

$$\int\limits_\delta^\Delta (\ln x) x^{\alpha-1} e^{-x}\, dx,$$

в котором подынтегральная функция непрерывна на прямоугольнике $[\delta, \Delta] \times [\alpha_0, \mathrm{A}_0]$, очевидно, является равномерно сходящимся относительно α. Из оказанного вытекает равномерная сходимость интеграла

$$\int\limits_0^\infty (\ln x) x^{\alpha-1} e^{-x}\, dx$$

на промежутке $[\alpha_0, \mathrm{A}_0]$, а следовательно, дифференцируемость функции $\Gamma(\alpha)$ при любом $\alpha > 0$ и равенство

$$\Gamma'(\alpha) = \int\limits_0^\infty (\ln x) x^{\alpha-1} e^{-x}\, dx. \tag{3}$$

Относительно интеграла (3) можно повторить только что проведенные рассуждения и доказать тем самым равенство

$$\Gamma''(\alpha) = \int\limits_0^\infty (\ln x)^2 x^{\alpha-1} e^{-x}\, dx.$$

Методом индукции можно показать, что функция $\Gamma(\alpha)$ является бесконечно дифференцируемой в области $\alpha > 0$ и для n-й производной можно получить равенство

$$\Gamma^{(n)}(\alpha) = \int\limits_0^\infty (\ln x)^n x^{\alpha-1} e^{-x}\, dx.$$

Установим теперь соотношение для Г-функции, называемое *формулой приведения.* Для этого в выражении $\Gamma(\alpha+1)$ произведем интегрирование по частям:

$$\Gamma(\alpha+1) = \int\limits_0^\infty x^\alpha e^{-x}\,dx = -x^\alpha e^{-x}\Big|_0^\infty \alpha \int\limits_0^\infty x^{\alpha-1} e^{-x}\,dx,$$

откуда

$$\Gamma(\alpha+1) = \alpha\Gamma(\alpha). \tag{4}$$

Это соотношение называется формулой приведения для Г-функции. Если $\alpha > 1$, то, применив соотношение (4) к функции $\Gamma(\alpha)$, подучим:

$$\Gamma(\alpha+1) = \alpha(\alpha-1)\Gamma(\alpha-1)$$

и т.д. Для случая, когда α заключено в промежутке $(n-1, n)$, в результате последовательного применения формулы (4) найдем соотношение

$$\Gamma(\alpha+1) = \alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)\Gamma(\alpha-n+1). \tag{5}$$

Равенство (5) показывает, что достаточно знать функцию $\Gamma(\alpha)$ на промежутке $(0, 1]$, чтобы вычислить ее значение при любом $\alpha > 0$. В частности, если $\alpha = n$, из формулы (5) получаем:

$$\Gamma(n+1) = n(n-1)\cdots 2\cdot 1\cdot \Gamma(1)$$

или так как

$$\Gamma(1) = \int\limits_0^\infty e^{-x}\,dx = 1,$$

то

$$\Gamma(n+1) = n!. \tag{6}$$

Таким образом, последовательность чисел $\{n!\}$ является последовательностью значений Г-функции в точках с целыми положительными координатами. На основании формулы (6) получаем равенство $\Gamma(0+1) = \Gamma(1) = 1 = 0!$, в соответствии с которым принято считать $0! = 1$.

Сделаем несколько замечаний относительно поведения функции $\Gamma(\alpha)$. Из выражения для второй производной Г-функции видно, что $\Gamma''(\alpha) > 0$ при всех $\alpha > 0$. Отсюда следует, что функция $\Gamma'(\alpha)$ является возрастающей. Далее,так как $\Gamma(2) = 1\cdot\Gamma(1) = \Gamma(1)$, то производная имеет единственный нуль в точке α^*, расположенной в промежутке $[1, 2]$, следовательно, $\Gamma'(\alpha) < 0$ при $\alpha < \alpha_*$ и $\Gamma'(\alpha) > 0$ при $\alpha > \alpha^*$, т.е. функция $\Gamma(\alpha)$ монотонно изменяется на каждом из промежутков $(0, \alpha^*)$ и (α^*, ∞), убывая на первом и возрастая на втором. Из выражения

$$\Gamma(\alpha) = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\alpha} \tag{7}$$

следует, что $\Gamma(\alpha) \to +\infty$ при $\alpha \to +0$. Наконец, из формулы (5) видно, что при $\alpha > 2$ $\Gamma(\alpha) = \alpha\Gamma(\alpha-1) > \alpha\Gamma(1) = \alpha$, т.е. функция $\Gamma(\alpha)$ неограниченно возрастает при $\alpha \to +\infty$ (рис. 53).

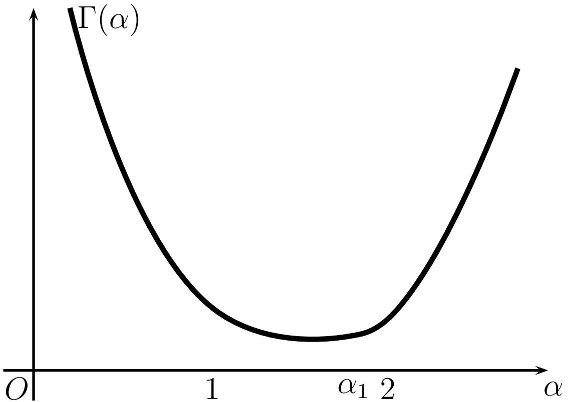

Рис. 53

Равенство (7), выполняющееся для Γ-функции при $\alpha > 0$, можно положить в основу распространения значений Γ-функции на отрицательные значения аргумента α. Положим для $-1 < \alpha < 0$ $\Gamma(\alpha) = \dfrac{\Gamma(\alpha+1)}{\alpha}$. Ясно, что правая часть этого равенства определена для α в интервале $(-1, 0)$. Из этого равенства следует, что таким образом продолженная функция $\Gamma(\alpha)$ принимает на $(-1, 0)$ отрицательные значения и при $\alpha \to -1 + 0$ и $\alpha \to 0$, $\Gamma(\alpha) \to -\infty$. Определи таким образом продолжение $\Gamma(\alpha)$ на промежуток $(-1, 0)$, по формуле (7) продолжить эту функцию на промежуток $(-2, -1)$. На этом промежутке продолжением $\Gamma(\alpha)$ окажется функция, принимающая положительные значения и такая, что $\Gamma(\alpha) \to +\infty$ при $\alpha \to -1 - 0$ и при $\alpha \to -2 + 0$. Продолжая этот процесс, определим функцию $\Gamma(\alpha)$ при всех отрицательных значениях α, являющуюся разрывной (разрывы 2 рода) в точках $\alpha = -k$, $k = 0, 1, 2, \ldots$ (рис. 54).

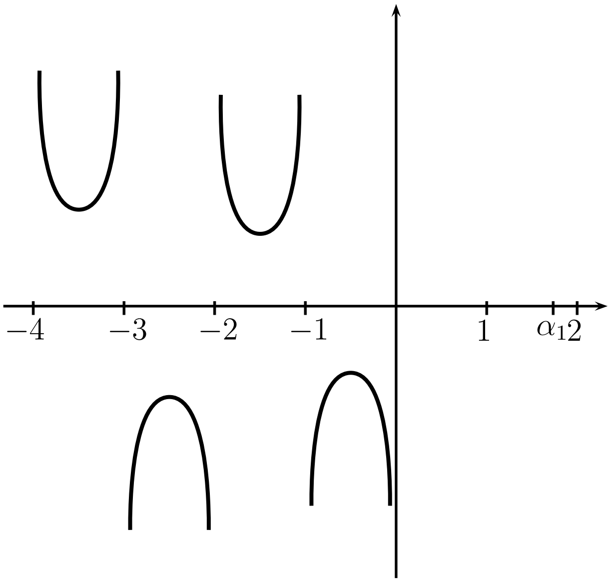

Рис. 54

Отметим еще раз, что интеграл (1) определяет функцию $\Gamma(\alpha)$ только при $\alpha > 0$. Распространение $\Gamma(\alpha)$ на отрицательные значения параметра α произведено формально на основании формулы приведения (7).

B-функция. Как было показано в § 3, интеграл (2) сходится при всех $\alpha > 0$, $\beta > 0$ и сходится равномерно в области $0 < \alpha_0 \le \alpha$, $0 < \beta_0 \le \beta$ изменения параметров. Рассмотрениями, подобными приведенным для Г-функции, можно показать, что B-функция является бесконечно дифференцируемой в области $(\alpha, \beta) \in (0, \infty) \times (0, \infty)$. Несколько позже этот факт будет следовать из выражения B-функции через Г-функции, поэтому мы не приводим соответствующих доказательств. Обратимся к установлению некоторых свойств B-функции. Прежде всего заметим, что B-функция симметрична относительно своих аргументов, т.е. при всех $\alpha > 0$ и $\beta > 0$

$$\mathrm{B}(\alpha, \beta) = \mathrm{B}(\beta, \alpha). \tag{8}$$

Для доказательства этого равенства произведем в интеграле (2), определяющей $\mathrm{B}(\alpha, \beta)$, замену переменной, положив $x' = 1 - x$. В результате получим:

$$\mathrm{B}(\alpha, \beta) = \int\limits_0^1 x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}\,dx = -\int\limits_0^1 (1-x')^{\alpha-1}x'^{\beta-1}\,dx' =$$

$$= \int\limits_0^1 x'^{\beta-1}(1-x)^{\alpha-1}\,dx' = \mathrm{B}(\beta, \alpha),$$

т.е., равенство (8). В силу свойства симметрии достаточно рассмотреть свойства B-функции по отношению к одному из аргументов. Для B-функции имеет место следующая формуй приведения:

$$\mathrm{B}(\alpha+1, \beta) = \frac{\alpha}{\alpha+\beta}\,\mathrm{B}(\alpha, \beta). \tag{9}$$

В самом деле,

$$\mathrm{B}(\alpha+1, \beta) = \int\limits_0^1 x^{\alpha}(1-x)^{\beta-1}\,dx = -\frac{1}{\beta}\,x^{\alpha}(1-x)^{\beta}\Big|_0^1 + \frac{\alpha}{\beta}\int\limits_0^1 x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta}\,dx =$$

$$= \frac{\alpha}{\beta}\int\limits_0^1 x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}\,dx = \frac{\alpha}{\beta}\Big[\int\limits_0^1 x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}\,dx - \int\limits_0^1 x^{\alpha}(1-x)^{\beta-1}\,dx\Big] =$$

$$= \frac{\alpha}{\beta}\mathrm{B}(\alpha, \beta) = \frac{\alpha}{\beta}\mathrm{B}(\alpha+1, \beta).$$

Сравнив начало и конец в этой системе равенств, найдем:

$$\mathrm{B}(\alpha+1, \beta) = \frac{\alpha}{\beta}\mathrm{B}(\alpha, \beta) - \frac{\alpha}{\beta}\mathrm{B}(\alpha+1, \beta).$$

Решив это уравнение относительно $\mathrm{B}(\alpha+1, \beta)$, придем к равенству (9). Свойство симметрии функции $\mathrm{B}(\alpha, \beta)$ позволяет записать также равенство

$$\mathrm{B}(\alpha, \beta+1) = \frac{\beta}{\alpha+\beta}\,\mathrm{B}(\alpha, \beta). \tag{10}$$

Последовательное применение формул (9) и (10) дает возможность выразить значение $\mathrm{B}(\alpha, \beta)$ через значение этой функции в прямоугольнике $[0,1] \times [0,1]$.

Соотношение между Г- и В-функциями. Для установления связи между Г- и В-функциями преобразуем их выражения, полагая в интеграле (1) $x = tx'$ и в интеграле (2) $x = \dfrac{x'}{1+x'}$. В результата получим:

$$\Gamma(\alpha) = t^{\alpha} \int\limits_0^{\infty} x^{\alpha-1} e^{-tx}\, dt, \tag{11}$$

$$\mathrm{B}(\alpha, \beta) = \int\limits_0^{\infty} \frac{x^{\alpha-1}}{(1+x)^{\alpha+\beta}}\, dx, \tag{12}$$

где x' снова обозначен через x.

Заменив в равенстве (11) t через $1+\tau$ и α через $\alpha+\beta$, найдем

$$\frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{(1+\tau)^{\alpha+\beta}} = \int\limits_0^{\infty} x^{\alpha+\beta-1} e^{-(1+\tau)x}\, dx.$$

Умножим обе части последнего равенства на $\tau^{\alpha-1}$. Тогда

$$\Gamma(\alpha+\beta) \frac{\tau^{\alpha-1}}{(1+\tau 0^{\alpha+\beta}} = \int\limits_0^{\infty} x^{\alpha+\beta-1} e^{-(1+\tau)x} \tau^{\alpha-1}\, dx. \tag{13}$$

Предположим теперь, что $\alpha > 1$, $\beta > 1$. В этом случае для функции

$$f(x, \tau) = x^{\alpha+\beta-1} \tau^{\alpha-1} e^{-(1+\tau)x}$$

в области $x \geq 0$, $\tau \geq 0$ применимы условия теорем 4 из § 3.

В самом деле, очевидно, $f(x, \tau) \geq 0$. Далее, в силу (13), интеграл

$$\int\limits_0^{\infty} f(x, \tau)\, dx = \Gamma(\alpha+\beta) \frac{\tau^{\alpha-1}}{(1+\tau)^{\alpha+\beta}}$$

является функцией, непрерывной относительно τ при $\tau > 0$. Интеграл

$$\int\limits_0^{\infty} f(x, \tau)\, dx = x^{\alpha+\beta-1} e^{-x} \int\limits_0^{\infty} e^{-\tau x} \tau^{\alpha-1}\, d\tau = \Gamma(\alpha) x^{\beta-1} e^{-x}$$

также, очевидно, непрерывен в области $x > 0$. Наконец, существует интеграл

$$\int\limits_0^{\infty} dx \int\limits_0^{\infty} f(x, \tau)\, dx = \int\limits_0^{\infty} \Gamma(\alpha)\, x^{\alpha-1} e^{-x}\, dx = \Gamma(\alpha)\Gamma(\beta).$$

Отсюда следует равенство

$$\int\limits_0^\infty \Gamma(\alpha+\beta)\,\frac{\tau^{\alpha-1}}{(1+\tau)^{\alpha+\beta}}\,d\tau = \Gamma(\alpha+\beta)\mathrm{B}(\alpha,\beta) = \Gamma(\alpha)\Gamma(\beta).$$

Тем самым для случая $\alpha > 1$ и $\beta > 1$ установлена формула

$$\mathrm{B}(\alpha,\beta) = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}. \tag{14}$$

Распространим формулу (14) на случай $\alpha > 0$, $\beta > 0$. Для этого запишем ее для чисел $\alpha+1 > 1$ и $\beta+1 > 1$:

$$\mathrm{B}(\alpha+1,\beta+1) = \frac{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+2)}. \tag{15}$$

Преобразуя члены выражения (15) по формулам приведения (4), (5), (9) и (10), получим:

$$\mathrm{B}(\alpha+1,\beta+1) = \frac{\alpha}{\alpha+\beta+1}\mathrm{B}(\alpha,\beta+1) = \frac{\alpha}{\alpha+\beta+1}\cdot\frac{\beta}{\alpha+\beta}\mathrm{B}(\alpha,\beta),$$

$$\Gamma(\alpha+1) = \alpha\Gamma(\alpha), \qquad \Gamma(\beta+1) = \beta\Gamma(\beta),$$

$$\Gamma(\alpha+\beta+2) = (\alpha+\beta+1)(\alpha+\beta)\Gamma(\alpha+\beta).$$

Подставив эти выражения в (15), получим равенство (14) для $\alpha > 0$ и $\beta > 0$.

§ 6. Формула Стирлинга

Выразив величину $n!$ в виде интеграла

$$n! = \Gamma(n+1) = \int\limits_0^\infty x^n e^{-x}\,dx, \tag{1}$$

найдем относительно простое и удобное как в теоретических исследованиях, так и в различных приложениях представление этой величины при больших значениях n (так называемое *асимптотическое представление*). Для этого заметим, прежде всего, что подынтегральная функция в интеграле (1) возрастает на промежутке $[0,n]$ от 0 до $\left(\dfrac{n}{e}\right)^n$ и убывает на промежутке $[n,+\infty)$ от $\left(\dfrac{n}{e}\right)^n$ до 0. Представив эту функцию в виде

$$x^n e^{-x} = \left(\frac{n}{e}\right)^n \left(\frac{x}{n}\right)^n e^{n-x},$$

перепишем равенство (1) следующим образом:

$$n! = \left(\frac{n}{e}\right)^n \int\limits_0^\infty \left(\frac{x}{n}\right)^n e^{n-x}\,dx.$$

Функция $\left(\frac{x}{n}\right)^n e^{n-x}$ на промежутке $[0, n]$ возрастает от 0 до 1 и на промежутке $[n, +\infty)$ убывает от 1 до 0. Поэтому можно положить

$$\left(\frac{x}{n}\right)^n e^{n-x} = e^{-t^1}. \tag{2}$$

При этом промежутку $[0, n]$ изменения будет соответствовать промежуток $(-\infty, 0]$ изменения x, а промежутку $[n, \infty)$ изменения x — промежуток $[0, \infty)$ изменения t. Чтобы произвести в интеграле (1) замену переменной, соответствующую равенству (2), найдем при $x \neq n$ из этого равенства:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{2tx}{x-n}, \tag{3}$$

и, прологарифмировав (2), также

$$t^2 = x - n - n\ln\left(1 + \frac{x-n}{n}\right). \tag{4}$$

Представив $\ln\left(1 + \frac{x-n}{n}\right)$ по формуле Тейлора, в форме

$$\ln\left(1 + \frac{x-n}{n}\right) = \frac{x-n}{n} - \frac{\left(\frac{x-n}{n}\right)^2}{2\left[1 + \theta\,\frac{x-n}{n}\right]^2},$$

где $0 < \theta < 1$, и подставив это выражение в (4), получим

$$t^2 = x - n - n\left[\frac{x-n}{n} - \frac{\left(\frac{x-n}{n}\right)^2}{2\left[1 + \theta\frac{x-n}{n}\right]}\right] = \frac{n}{2}\,\frac{(x-n)^2}{n + \theta(x-n)]^2}.$$

Тогда

$$t = \sqrt{\frac{n}{2}}\,\frac{x-n}{n + \theta(x-n)} = \sqrt{\frac{n}{2}}\,\frac{1}{\theta + \frac{n}{x-n}}.$$

Из этого равенства находим:

$$\frac{n}{x-n} = \frac{1}{t}\sqrt{\frac{n}{2}} - \theta.$$

Отсюда и из равенства (8) следует:

$$\frac{dx}{dt} = 2t\,\frac{x}{x-n} = 2t\left[\frac{1}{t}\sqrt{\frac{n}{2}} + 1 - \theta\right] = 2\cdot\sqrt{\frac{n}{2}} + 2t(1-\theta).$$

Теперь произведем в интеграле (1) замену переменной (2). В результате подучим:

$$n! = \left(\frac{n}{e}\right)^n \int\limits_a^b \left(\frac{x}{n}\right)^n e^{n-x}\,dx = \left(\frac{n}{e}\right)^n \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2}\left[2\sqrt{\frac{n}{2}} + 2t(1-\theta)\right] dt =$$

$$= \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2n}\left[\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2}\,dt + \frac{2}{\sqrt{2n}}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} t(1-\theta)\,dt\right]. \qquad (5)$$

Как известно,

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2}\,dt = \sqrt{\pi}.$$

Оценим интеграл $\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} t(1-\theta)\,dt$. Очевидно, выполняется неравенство

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} t(1-\theta)\,dt \le 2\int\limits_0^{\infty} te^{-t^2}\,dt = -e^{-t^2}\Big|_0^{\infty} = 1.$$

Из формулы (5) на основании этих оценок получаем равенство

$$n! = \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}\left(1 + \frac{\omega}{\sqrt{2n}}\right),$$

где величина ω заключена между -1 и 1. Это так называемая *формула Стирлинга.*

Глава XVII

ДВОЙНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

В настоящей главе мы начинаем изучение интегралов от скалярных функций векторных аргументов. При этом для облегчения понимания рассмотрим сначала интегралы от функций двумерных векторов, т.е. от функций двух независимых переменных. Такие интегралы называются двойными. Интегралами от функций двух переменных будут и криволинейные интегралы, которые мы рассмотрим в главе XIX.

§ 1. Определение двойного интеграла и условия его существования

Пусть D — ограниченная и квадрируемая область на плоскости xOy. Гладкими кривыми Γ_j, $j = 1, 2, \ldots, p$ разобьем область D на частичные области $D_1, D_2, \ldots, D_r$; области D_i, $i = 1, 2, \ldots, r$ также квадрируемы. Будем предполагать, что пл. $D_i > 0$, $j = 1, 2, \ldots, p$. Разбиение области $i = 1, 2, \ldots, r$ на части обозначим через $T(D)$.

Будем говорить, что разбиение $T'(D)$ есть *измельчение* разбиения $T(D)$, и писать $T(D) \subset T'(D)$, если совокупность кривых $\{\Gamma'_e\}$, осуществляющих разбиение $T'(D)$, содержит все кривые Γ_j, ?, разбиения $T(D)$. Введем числа

$$d(D_i) = \sup_{(x',y'),(x'',y'')\in D_i} \rho[(x', y'), (x'', y'')]$$

— диаметры областей D_i и $\lambda(T) = \max\limits_i \; d(D_i)$.

Предположим, далее, что в области D задана вещественная функция $f(x, y)$. Выбрав в каждой частичной области D_i точку $P_i(\xi_i, \eta_i)$, составим сумму:

$$S(f, T, P) = \sum_{i=1}^{r} f(\xi_i, \eta_i)\, \alpha_i, \tag{1}$$

где α_i — площадь области D_i. Сумма (1), как и в одномерном случае, называется *интегральной суммой* функции f по области D.

Определение 1. Если для любой последовательности разбиений $\{T_n(D)\}$, такой, что $\lambda(T_n) \to 0$, последовательность интегральных сумм $\{S(f, T_n, P^{(n)}\}$ стремится к конечному пределу, не зависящему ни от характера разбиения области D

на части, ни от выбора в частичной области $D_i^{(n)}$ точки $P_i^{(n)}(\xi^{(n)}, \eta_i^{(n)})$, то этот предел называется *двойным интегралом* от функции f по области D и обозначается $\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy$. Функция f в этом случае называется *интегрируемой* в области D.

Итак, по определению,

$$\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy = \lim_n \sum_{i=1}^{r^{(n)}} f(\xi_i^{(n)}, \eta_i^{(n)})\,\alpha_i^{(n)} = \lim_n\, S(f, T_n, P^{(n)}),$$

где $\alpha_i^{(n)}$ — площадь частичной обдасти $D_i^{(n)}$ разбиения $T_n(D)$.

Как и в случае функций одной вещественной переменной, необходимым условием интегрируемости функций в области D является ее ограниченность в этой области. В самом деле, пусть, например, $f(x,y) \to +\infty$ при $(x,y) \to (a,b) \in \overline{D}$, $\{T_n(D)\}$ — произвольная последовательность разбиений области D и $(a,b) \in \overline{D}_{k_n}^{(n)}$. Сумму $S(f, T_n, P^{(n)}$ разобьем на две части:

$$S'(f, T_n, P^{(n)}) = \sum_{i \neq k_n} f(\xi_i^{(n)}, \eta_i^{(n)})\,\alpha_i^{(n)} \quad \text{и} \quad S''(f, T_n, P^{(n)}) = f(\xi_{k_n}^{(n)}, \eta_{k_n}^{(n)})\,\alpha_{k_n}^{(n)}.$$

Выберем произвольно точки $P_1^{(n)}, P_2^{(n)}, \ldots, P_{k_n-1}^{(n)}, P_{k_n+1}^{(n)}, \ldots, P_{r_n}^{(n)}$ и зафиксируем их. Тем самым, сумма $S'(f, T_n, P^{(n)})$ примет определенное числовое значение например, β. После этого выберем точку $P_{k_n}^{(n)}$ так, чтобы

$$f(\xi_{k_n}^{(n)}, \eta_{k_n}^{(n)})\,\alpha_{k_n}^{(n)} > |\beta| + n.$$

Это возможно сделать в силу неограниченности функции f в области $D_{k_n}^{(n)}$. Но тогда $S(T_n, P^{(n)}) > n$ и, следовательно, конечного предела $\lim\limits_n\, S(T_n, P^{(n)})$ не существует.

Примеры показывают, что ограниченность функций не является достаточным условием интегрируемости. Для получения достаточных условий существования двойного интеграла воспользуемся, как и раньше, суммами Дарбу. Итак, предположив функцию f ограниченной в области D, введем обозначения:

$$M = \sup_D\, f(x,y), \quad m = \inf_D\, f(x,y), \quad \alpha = \text{пл.}\,D$$

для разбиения $T(D)$

$$M_i = \sup_{D_i}\, f(x,y), \qquad m_i = \inf_{D_i}\, f(x,y).$$

Образуем суммы

$$\underline{S}(f,T) = \sum_{i=1}^{r} m_i\,\alpha_i, \qquad \overline{S}(f,T) = \sum_{i=1}^{r} m_i\,\alpha_i.$$

Эти суммы называются *суммами Дарбу* функции f, соответствующими разбиению $T(D)$, и обладают следующими свойствами.

1°. Для данного разбиения

$$\underline{S}(f,T) \leq S(f,T,P) \leq \overline{S}(f,T).$$

2°. При измельчении разбиения нижние суммы могут только возрастать, а верхние только убывать.

3°. Каждая нижняя сумма $\underline{S}(f,T)$ не превосходит любой верхней $\overline{S}(f,T)$.

Первое свойство очевидно. Докажем свойство 2°, например, для нижних сумм; для верхних сумм рассуждения аналогичны.

Прежде всего, заметим, что от разбиения $T(D)$ к его измельчению $T'(D)$ можно перейти, добавляя последовательно лишь по одной линии деления, разбивающей область D_{i_0} на две части: D'_{i_0} и D''_{i_0} (рис. 55) (возможно, что несколько таких линий образуют вместе одну гладкую кривую). Поэтому свойство 2° достаточно доказать лишь для такого измельчения данного разбиения.

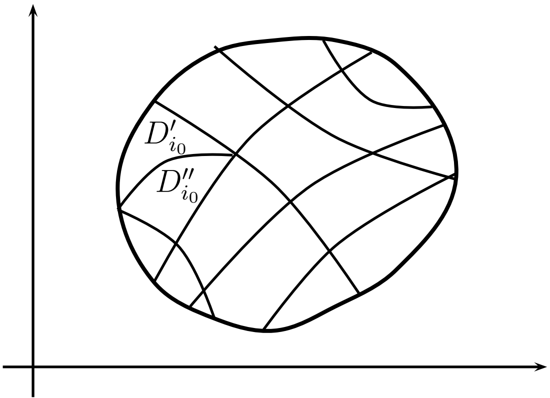

Рис. 55

В этом случае суммы $\underline{S}(f,T)$ и $\underline{S}(f,T')$ имеют одинаковые слагаемые, за исключением слагаемого $m_{i_0}\,\alpha_{i_0}$ суммы $\underline{S}(f,T)$, которое в сумме $\underline{S}(f,T')$ надо заменить двумя слагаемыми $m'_{i_0}\,\alpha'_{i_0}$ и $m''_{i_0}\,\alpha''_{i_0}$, где

$$m'_{i_0} = \inf_{D'_{i_0}} f(x,y), \quad m''_{i_0} = \inf_{D''_{i_0}} f(x,y), \quad \alpha'_{i_0} = \text{пл.}\, D'_{i_0}, \quad \alpha''_{i_0} = \text{пл.}\, D''_{i_0}$$

Поэтому

$$\underline{S}(f,T') - \underline{S}(f,T) = (m''_{i_0}\,\alpha''_{i_0} + m'_{i_0}\,\alpha'_{i_0}) - m_{i_0}\,\alpha_{i_0}.$$

Но $m''_{i_0} \geq m_{i_0}$ и $m'_{i_0} \geq m_{i_0}$, так как при уменьшении области, в которой рассматривается функция, сужается множество значений функции и нижняя граница этих значений может лишь возрастать. Далее, $\alpha'_{i_0} + \alpha''_{i_0} = \alpha_{i_0}$. Следовательно,

$$\underline{S}(f,T') - \underline{S}(f,T) \geq (m_{i_0}\,\alpha''_{i_0} + m_{i_0}\,\alpha'_{i_0}) - m_{i_0}\,\alpha_{i_0} = 0,$$

и требуемое доказано.

Если записать разность $\overline{S}(f,T)-\underline{S}(f,T)$ в виде $\sum\limits_{i=1}^{r}\omega_i(f)\,\alpha_i$, где $\omega_i(f)$ — колебание функции f в области D_i, то из свойства 2° следует, что при переходе от разбиения $T(D)$ к его измельчению сумма $\sum\limits_{i=1}^{r}\omega_i(f)\,\alpha_i$ может только убывать.

Теперь легко доказать свойство 3°. Пусть даны два разбиения: $T(D)$ и $T^*(D)$ области D. Составим третье разбиение $T'(D)$ этой области, которое является измельчением как первого, так и второго. Для этого в качестве совокупности линий деления третьего разбиения надо взять объединение совокупностей линий деления двух данных разбиений. По свойству 2°,

$$\underline{S}(f,T)\le\underline{S}(f,T'),\qquad \overline{S}(f,T')\le\overline{S}(f,T^*),\tag{1}$$

в по свойству 2°,

$$\underline{S}(f,T')\le\overline{S}(f,T').\tag{2}$$

Из (1) и (2) следует:

$$\underline{S}(f,T)\le\overline{S}(f,T^*),$$

и третье свойство сумм Дарбу доказано.

Фиксируем некоторое разбиение $T_0(D)$ области D. Для любого разбиения $T(D)$ имеем:

$$\underline{S}(f,T)\le\overline{S}(f,T_0),$$

т.е. множество $\{\underline{S}(f,T)\}$ всех нижних сумм Дарбу, соответствующих всем возможным разбиениям области D, ограничено сверху. Следовательно, существует

$$\underline{I}=\sup_{T(D)}\ \underline{S}(f,T)<+\infty.$$

Аналогично $\underline{S}(f,T)\ge\overline{S}(f,T_0)$, и потому существует

$$\overline{I}=\inf_{T(D)}\ \overline{S}(f,T)>-\infty.$$

Числа $\underline{I}$ и $\overline{I}$ называются *нижним* и *верхним интегралами Дарбу* от функции f по области D. Ясно, что $\underline{I}\le\overline{I}$.

Лемма 1. *Пусть $\{T_n(D)\}$ — произвольная последовательность разбиений области D, такая, что $\lambda(T_n)\to 0$. Тогда для любой ограниченной в D функции f*

$$\underline{S}(f,T_n)\to\underline{I},\qquad \overline{S}(f,T)\to\overline{I}.$$

Доказательство. Без ограничения общности можно считать, что $f(x,y)\ge 0$ всюду в D, ибо иначе, заменяя функцию $f(x,y)$ на $\varphi(x,y)=f(x,y)+c$, будем при достаточно большом c иметь, что $\varphi(x,y)\ge 0$, а суммы и интегралы Дарбу функций f и φ отличаются лишь на постоянное слагаемое $c\alpha$.

Пусть число $\varepsilon>0$ произвольно и $T(D)$ — такое разбиение области D, что

$$\overline{S}(f,T)<\overline{I}+\frac{\varepsilon}{2}.$$

Из определения точной нижней границы следует, что такое разбиение существует. Обозначил через γ_i границу частичной области D_i, $i = 1, 2, \ldots, r$ этого разбиении. Внутри D_i проведем гладкие замкнутые кривые γ_i', не имеющие общих точек с γ_i и такие, что для ограничиваемых ими областей D_i' имеем:

$$\text{пл.}\,(D_i \setminus D_i') < \frac{\varepsilon}{2rM}.$$

Если $G = \bigcup\limits_{i=1}^{r}(D_i \setminus D_i')$, то пл. $G < \dfrac{\varepsilon}{2M}$. Положим

$$\delta = \min_i\ \rho(\gamma_i, \gamma_i') = \min_i\ \left\{ \inf_{Q_i \in \gamma_i, Q_i' \in \gamma_i'}\ \rho(Q_i, Q_i') \right\}.$$

Из непрерывности $\rho(Q_i, Q_i')$ по совокупности аргументов и теорема Вейерштрасса следует, что $\delta = \inf\limits_{Q_i \in \gamma_i, Q_i' \in \gamma - i'}\ \rho(Q_i, Q_i') > 0$.. Выберем n_0 так, чтобы $\lambda(T_n) < \delta$ при $n \geq n_0$. Пусть $\overline{S}'(f, T_n)$, $n \geq n_0$, есть часть суммы $\overline{S}(f, T_n)$, состоящая из слагаемых, соответствующих частичным областям $D_j^{(n)}$ разбиения $T_n(D)$, не имеющим общих точек с кривыми γ_i. Так как границы D_i и $D_j^{(n)}$ для таких областей $D_j^{(n)}$ не пересекаются, то в частичной области D_i лежит целиком одна или несколько областей $D_{j_1}^{(n)}, D_{j_2}^{(n)}, \ldots, D_{j_{k_i}}^{(n)}$. Далее, очевидно, что

$$0 \leq M_{j_k} \leq M_i, \qquad k = 1, 2, \ldots, k_i, \qquad \alpha_{j_1} + \alpha_{j_2} + \ldots + \alpha_{j_k} < \alpha_i.$$

Поэтому

$$\overline{S}'(f, T_n) < \overline{S}(f, T).$$

С другой стороны, если $\overline{S}''(f, T_n) = \overline{S}(f, T_n) - \overline{S}'(f, T_n)$, то области, соответствующие слагаемым $\overline{S}''(f, T_n)$, лежат целиком внутри G, поэтому $\overline{S}''(f, T_n) < M\,\text{пл.}\,G < \dfrac{\varepsilon}{2}$. Следовательно,

$$\overline{S}(f, T_n) = \overline{S}(f, T_n) + \overline{S}''(f, T_n) < \overline{S}(f, T) + \frac{\varepsilon}{2} < \overline{I} + \varepsilon.$$

Так как всегда $\overline{S}(f, T) \geq \overline{I}$, то $\lim\limits_{n}\ \overline{S}(f, T_n) = \overline{I}$.

Доказательство леммы для случая нижних сумм и интегралов аналогичное.

Читатель легко заметит, что и лемма 1, и следующая теорема являются перенесением на двумерный случай соответствующих утверждений для линейных (однократных) интегралов.

Теорема 1. *Для того чтобы ограниченная функция f была интегрируема в области D, необходимо и достаточно, чтобы $\overline{I} = \underline{I}$.*

Предварительно докажем лемму.

Лемма 2. *Для любого разбиения $T(D)$*

$$\underline{S}(f, T) = \inf\ S(f, T, P), \qquad \overline{S}(f, T) = \sup(f, T, P),$$

где infimum *и* supremum *берутся по всевозможным выборам точек $P_i(\xi_i, \eta_i)$, $i = 1, 2, \ldots, r$, в частичных областях $D_1, D_2, \ldots, D_r$.*

Доказательство. Докажем первое равенство, второе доказывается аналогично.

Пусть задано число $\varepsilon > 0$. Для каждого $i = 1, 2, \ldots, r$ выберем точки $P_i(\xi_i, \eta_i) \in D_i$ так, чтобы $m_i \le f(\xi_i, \eta_i) < m_i + \dfrac{\varepsilon}{\alpha}$, где $\alpha =$ пл. D. Тогда

$$\underline{S}(f,T) \le S(f,T,P) = \sum_{i=1}^{r} f(\xi_i,\eta_i)\,\alpha_i < \sum_{i=1}^{r} \left(m_i + \frac{\varepsilon}{\alpha}\right)\alpha_i =$$

$$= \sum_{i=1}^{r} m_i\,\alpha_i + \frac{\varepsilon}{\alpha}\sum_{i=1}^{r}\alpha_i = \underline{S}(f,T) + \varepsilon.$$

Так как число ε произвольно, то равенство $\underline{S}(f,T) = \inf\ S(f,T,P)$ доказано.

Доказательство теоремы 1. Пусть функция f интегрируема на D. Рассмотрим какую-нибудь последовательность разбиений $\{T_n(D)\}$ области D, такую, что $\lambda(T_n) \to 0$. Для заданного числа $\varepsilon > 0$ и каждого n в частичных областях $D_i^{(n)}$ выберем точки $P_i^{(n)}$ так, чтобы

$$\overline{S}(f,T_n) - S(f,T_n,P^{(n)}) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Это возможно в силу леммы 2. Получим последовательность интегральных сумм $\{S(f,T_n,P^{(n)})\}$, которая на основании предположенной интегрируемости функции f сходятся к $I = \displaystyle\iint_D f(x,y)\,dxdy$. Поэтому найдется число n_0, такое, что при $n \ge n_0$

$$|S(f,T_n,P^{(n)}) - I| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Но тогда для таких чисел n

$$|\overline{S}(f,T_n) - I| < \varepsilon,$$

т.е. последовательность $\{\overline{S}(f,T_n)\}$ верхних сумм Дарбу сходится к I. С другой стороны, по лемме 1, $\overline{S}(f,T_n) \to \overline{I}$. Следовательно, $\overline{I} = I$.

Аналогично доказываем, что $\underline{I} = I$.

Таким образом, $\overline{I} = \underline{I}$ и необходимость доказана.

Предположим теперь, что $\overline{I} = \underline{I}$. Рассмотрим произвольную последовательность $\{T_n(D)\}$ разбиений области D и соответствующие последовательности интегральных сумм $\{S(f,T_n,P^{(n)}$ и сумм Дарбу $\{\underline{S}(f,T_n)\}$ и $\{\overline{S}(f,T_n)\}$.

По лемме 1,

$$\lim\ \overline{S}(f,T_n) = \lim\ \underline{S}(f,T_n) = I$$

Но

$$\underline{S}(f,T_n) \le S(f,T_n,P^{(n)}) \le \overline{S}(f,T_n).$$

Следовательно, существует $\lim\ S(f,T_n,P^{(n)}) = I$, и достаточность доказана.

Следствие. *Для того чтобы ограниченная функция f была интегрируема в области D, достаточно, чтобы для любого числа $\varepsilon > 0$ существовало хотя бы одно разбиение $T(D)$, такое, что*

$$\overline{S}(f, T_n) - \underline{S}(f, T_n) - \varepsilon.$$

В самом деле, так как

$$\underline{S}(f, T) \leq \underline{I} \leq \overline{I} \leq \overline{S}(f, T),$$

то

$$0 \leq \overline{I} - \underline{I} < \varepsilon,$$

откуда в силу произвольности ε

$$\underline{I} = \overline{I},$$

следовательно, по теореме 1, функция f интегрируема.

Как и в случае одномерных интегралов, из теоремы 1 и следствия можно вывести удобные критерии интегрируемости функций, но для этого необходимо ввести понятие плоского множества меры нуль.

Определение 2. Множество N на плоскости xOy называется *множеством площади нуль*, если для любого числа $\varepsilon > 0$ существует содержащая N конечная система многоугольников, сумма площадей которых меньше ε.

Определение 3. Плоское множество N называется *множеством меры нуль*, веди для любого числа $\varepsilon > 0$ существует конечная или счетная совокупность открытых прямоугольников, покрывающая N, сумма площадей которых меньше ε.

Ясно, что множество площади нуль имеет меру нуль. Предлагаем читателю доказать, что компактное множество меры нуль имеет площадь, равную нулю.

Как и в случае линейных точечных множеств, легко убедиться, что счетное множество точек на плоскости имеет меру нуль и что объединение конечного или счетного числа множеств меры нуль есть множество меры нуль.

Теорема 2 (Лебега). *Для того чтобы ограниченная в квадрируемой области D функция f была интегрируема в этой области, необходимо а достаточно, чтобы множество точек разрыва функции f имело меру, равную нулю.*

Доказательство теоремы Лебега опускаем (оно будет проведено в гл. XVIII для n-мерного, $n \geq 2$, случая).

Теперь легко указать классы интегрируемых функций.

1°. Если функция $f(x, y)$ непрерывна в замкнутой области D, то она интегрируема в этой области.

2°. Если функция $f(x, y)$ ограничена в замкнутой области D и непрерывна всюду в D, за исключением, может быть конечного числа точек и кривых A_iB_i с уравнениями $y = \varphi_i(x)$ или $x = \psi_i(y)$, где функции $\varphi_i(x)$ и $\psi_i(y)$ непрерывны, то f интегрируема в D.

В самом деле, в случае 1° функция ограничена в D и множество ее точек разрыва пусто, а в случае 2° множество точек разрыва функций f имеет площадь, равную нулю (см. лемму 4 из 1 гл. IX). Область D в обоих случаях предполагается квадрируемой.

Из следствия теоремы 1 легко следует, что если функция f интегрируема в D, то она интегрируема в любой квадрируемой подобласти $D_0 \subset D$. В самом деле, если разность $\overline{S}(f, T) - \underline{S}(f, T)$ записать в виде

$$\sum_{i=1}^{r} \omega_i(f)\, \alpha_i, \tag{3}$$

то становится ясно, что если для какого-то разбиения всей области выражение (3) будет меньше наперед заданного числа $\varepsilon > 0$, тогда и для подобласти D_0 существует такое разбиение.

Если через $J(D)$ обозначим совокупность интегрируемых в квадрируемой области D функций, то, как и в случае однократных интегралов, из теоремы Лебега легко следует, что $J(D)$ — линейное пространство.

Так же, как это делается в одномерном случае, можно доказать, что если $f_1, f_2 \in J(D)$, то $f_1 \cdot f_2 \in J(D)$ и если $f \in J(D)$, то $|f|, f_+, f_- \in J(D)$.

§ 2. Свойства двойных интегралов и их вычисление[41]

Установим несколько простейших свойств двойных интегралов.

1°. Если функции $f_1(x, y)$ и $f_2(x, y)$ интегрируемы в области D, c_1 и c_2 — постоянные, то

$$\iint\limits_D [c_1 f_1(x,y) + c_2 f_2(x,y)]\, dxdy = c_1 \iint\limits_D f_1(x,y)\, dxdy + c_2 \iint\limits_D f_2(x,y)\, dxdy.$$

Доказательство получаем, как и в случае однократных интегралов, предельным переходом из очевидного равенства для интегральных сумм:

$$\sum_{i=1}^{r_n} [c_1 f_1(\xi_i^{(n)}, \eta_i^{(n)}) + c_2 f_2(\xi_i^{(n)}, \eta_i^{(n)})]\, \alpha_i^{(n)} =$$

$$= c_1 \sum_{i=1}^{r_n} f_1(\xi_i^{(n)}, \eta_i^{(n)})\, \alpha_i^{(n)} + c_2 \sum_{i=1}^{r_n} f_2(\xi_i^{(n)}, \eta_i^{(n)})\, \alpha_i^{(n)}.$$

Доказанное равенство называется *свойством линейности двойного интеграла.*

---

[41] Всюду в дальнейшем все области, по которым ведется интегрирование, предполагаются квадрируемыми.

2°. Если функция $f(x,y)$ интегрируема на D_1 и D_2, то она интегрируема на $D = D_1 \cup D_2$ и если пл. $(D_1 \cap D_2) = 0$, то

$$\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy = \iint\limits_{D_1} f(x,y)\,dxdy + \iint\limits_{D_2} f(x,y)\,dxdy.$$

Доказательство по аналогии о доказательством соответствующего утверждения для однократных интегралов, предлагаем провести читателю.

3°.

$$m \cdot \text{пл.}\, D \le \iint\limits_D f(x,y)\,dxdy \le M \cdot \text{пл.}\, D. \tag{1}$$

Это выражение получается в результате применения предельного перехода из очевидного неравенства

$$m \cdot \text{пл.}\, D \le \sum_{i=1}^{r_n} f(\xi_i^{(n)}, \eta_i^{(n)})\, \alpha_i^{(n)} \le M \cdot \text{пл.}\, D.$$

Следствие 1. *Если* $f(x,y) \ge 0$ *всюду в* D*, то* $\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy \ge 0.$

Следствие 2. *Существуют число* μ*,* $m \le \mu \le M$*, такое, что*

$$\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy = \mu \cdot \text{пл.}\, D.$$

В самом деде, если пл. $D = 0$, то и $\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy = 0$, и в качестве μ можно взять любое число отрезка $[m, M]$. Если же пл. $D \ne 0$, то, разделив неравенство (1) на пл. D, найдем:

$$m \le \frac{\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy}{\text{пл.}\, D} \le M.$$

Обозначив отношение $\dfrac{\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy}{\text{пл.}\, D}$ через μ, получим требуемое равенство.

Следствие 3. *Если* $f(x,y) \le g(x,y)$ *всюду на* D*, то*

$$\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy \le \iint\limits_D g(x,y)\,dxdy.$$

Это следует из следствия 1 и линейности интеграла.

Следствие 4.

$$\left| \iint\limits_D f(x,y)\,dxdy \right| \le \iint\limits_D |f(x,y)|\,dxdy.$$

Доказательство предоставляется читателю.

Вычисление двойного интеграла сводится к двум последовательным вычислениям однократных интегралов.

Пусть D — прямоугольник

$$R = \{(x, y) : \ a \leq x \leq b, \ c \leq y \leq d\}$$

и $f(x, y)$ — интегрируемая на R функция, причем такая, что для любого $x \in [a, b]$ интегралы $I(x) = \int\limits_c^d f(x, y)\, dy$ существуют. Прямыми

$$x = x_i^{(n)}, \qquad i = 0, 1, 2, \ldots, m_n, \quad x_0^{(n)} = a, \quad x_{m_n}^{(n)} = b,$$

$$y = y_j^{(n)}, \qquad j = 0, 1, 2, \ldots, p_n, \quad y_0^{(n)} = c, \quad y_{p_n}^{(n)} = d$$

разобьем прямоугольник R на частичные прямоугольники: $R_{ij}^{(n)} = \{(x, y) |\ x_i^{(n)} \leq x \leq x_{i+1}^{(n)},\ y_j^{(n)} \leq y \leq y_{j+1}^{(n)}\}$, и пусть $\mu_{ij}^{(n)} = \inf\limits_{R_{ij}} f(x, y)$, $M_{ij} = \sup\limits_{R_{ij}} f(x, y)$. Тогда для любых значений x и y, таких, что $x_i^{(n)} \leq x \leq x_{i+1}^{(n)}$, $y_j^{(n)} \leq y \leq y_{j+1}^{(n)}$, имеем

$$\mu_{ij}^{(n)} \leq f(x, y) \leq M_{ij}^{(n)}.$$

Проинтегрируем это неравенство по y в пределах от $y_j^{(n)}$ до $y_{i+1}^{(n)}$, считая x постоянным. Тогда

$$\mu_{ij}^{(n)}\, \Delta y_j^{(n)} \leq \int\limits_{y_j^{(n)}}^{y_{j+1}^{(n)}} f(x, y)\, dy \leq M_{ij}^{(n)}\, \Delta y_j^{(n)},$$

где $\Delta y_j^{(n)} = y_{j+1}^{(n)} - y_j^{(n)}$. Оставив x неизменным, просуммируем эти неравенства по j от $j = 0$ до $j = p_n - 1$. Получим:

$$\sum_{j=0}^{p_n - 1} \mu_{ij}^{(n)}\, \Delta y_i^{(n)} \leq \int\limits_c^d f(x, y)\, dy \leq \sum_{j=0}^{p_n - 1} M_{ij}^{(n)}\, \Delta y_j^{(n)}$$

или

$$\sum_{j=0}^{p_n - 1} \mu_{ij}^{(n)}\, \Delta y_j^{(n)} \leq I(x) \leq \sum_{j=0}^{p_n - 1} M_{ij}^{(n)}\, \Delta y_j^{(n)}.$$

Это неравенство верно для любого x, лежащего между $x_i^{(n)}$ и $x_{i+1}^{(n)}$.

Умножим неравенство на $\Delta x_i^{(n)} = x_{i+1}^{(n)} - x_i^{(n)}$ и просуммируем получившиеся неравенства по i в пределах от $i = 0$ до $i = m_n - 1$. В результате будем иметь:

$$\sum_{i=0}^{m_n - 1} \sum_{j=0}^{p_n - 1} \mu_i^{(n)}\, \Delta x_i^{(n)} \Delta y_i^{(n)} \leq \sum_{i=0}^{m_n - 1} I(\xi_i^{(n)})\, \Delta x_i^{(n)} \leq \sum_{i=0}^{m_n - 1} \sum_{j=0}^{p_n - 1} M_{ij}^{(n)}\, \Delta x_i^{(n)} \Delta y_j^{(n)}. \qquad (2)$$

Суммы, стоящие в крайних частях неравенства (2), являются нижней и верхней суммами Дарбу для функции $f(x,y)$ по прямоугольнику R при разбиении этого прямоугольника на части $R_{ij}^{(n)}$. Средняя часть неравенства (2) есть интегральная сумма для функции $I(x)$ по промежутку $[a,b]$. Рассмотрим последовательность $R_{ij}^{(n)}$. Если для этой последовательности $\max\ \Delta x_i^{(n)} \to 0$ и $\max\ \Delta y_j^{(n)} \to 0$, то суммы в крайних частях неравенства (2) будут стремиться к $\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy$. Но тогда и сумма в средний части этого неравенства будет стремиться к тому же пределу, т.е. $\int\limits_a^b I(x)\,dx$ будет существовать, и в пределе из (2) получим равенство

$$\iint\limits_R f(x,y)\,dxdy = \int\limits_a^b I(x)\,dx = \int\limits_a^b \left\{ \int\limits_c^d f(x,y) \right\} dx.$$

Это равенство представляет собой формулу для вычисления двойного интеграла в рассматриваемом случае.

С помощью рассуждений, аналогичных предыдущим, при соответствующих предположениях относительно функции $f(x,y)$ получим формулу

$$\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy = \int\limits_c^d \left\{ \int\limits_a^b f(x,y)\,dx \right\} dy.$$

Пусть теперь D — область специального вида, ограниченная прямыми $x = a$ и ? и кривыми PQ и TS, являющимися графиками непрерывных на $[a,b]$ функций $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$. Предположим і кроме того, что:

1°) функции $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$ непрерывны на $[a,b]$;

2°) $\varphi_1(x) < \varphi_2(x)$ в интервале (a,b); в точках $x = a$ и $x = b$ функции $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$ могут принимать одинаковые значения (рис. 56).

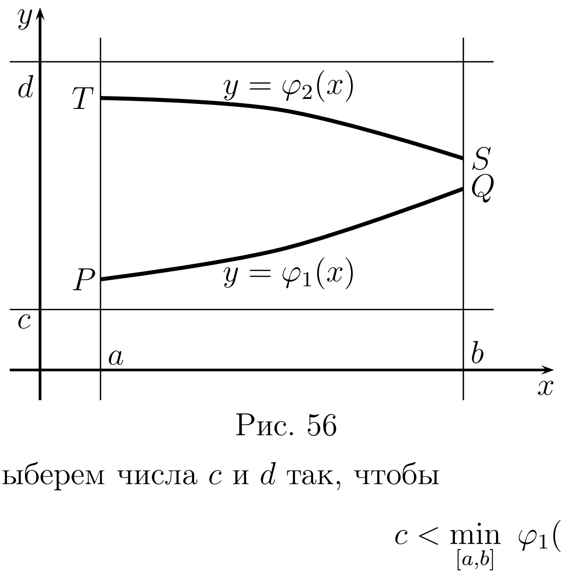

Рис. 56

Выберем числа c и d так, чтобы

$$c < \min_{[a,b]} \ \varphi_1(x),$$

$$d > \max_{[a,b]} \varphi_2(x).$$

Тогда прямоугольник

$$R = \{(x, y) |\ a \le x \le b,\ c \le y \le d\}$$

целиком содержит область D. Введем новую функцию $f_1(x, y)$, полагая, что

$$f_1(x,y) = \begin{cases} f(x,y), & (x,y) \in D, \\ \\ 0, & (x,y) \in \mathbb{R} \setminus D. \end{cases}$$

Если функция $f(x, y)$ была интегрируема в области D, то $f_1(x, y)$ будет интегрируема в прямоугольника R, так как по сравнению с $f(x, y)$ функция $f_1(x, y)$ может иметь дополнительные точки разрыва лишь на границе области D, а в силу непрерывности функций $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$ площадь этой границы и, следовательно, мера множества дополнительных точек разрыва, равна нулю (см. лемму 4 из § 1 гл. IX). Кроме того, если $\int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y)\, dy$ существует для любого $x \in [a, b]$, то ясно, что

$$\int\limits_c^d f_1(x,y)\,dy = \int\limits_c^{\varphi_1(x)} f_1(x,y)\,dy + \int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f_1(x,y)\,dy + \int\limits_{\varphi_2(x)}^{b} f_1(x,y)\,dy = \int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\,dy$$

также существует.

По доказанному,

$$\iint\limits_R f_1(x,y)\,dxdy = \int\limits_a^b \left\{ \int\limits_c^d f_1(x,y)\,dy \right\} dx.$$

Но

$$\iint\limits_R f_1(x,y)\,dxdy = \iint\limits_D f_1(x,y)\,dxdy + \iint\limits_{R\setminus D} f_1(x,y)\,dxdy = \iint\limits_D f(x,y)\,dxdy,$$

так как $f_1(x, y) = f(x, y)$ в D и $f_1(x, y) = 0$ в $R \setminus D$. С другой стороны, для данного фиксированного $x \in [a, b]$, как уже указано,

$$\int\limits_c^d f_1(x,y)\,dy = \int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\,dy.$$

Таким образом,

$$\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy = \int\limits_a^b \left\{ \int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\,dy \right\} dx, \tag{3}$$

если область D имеет указанный специальный вид и функция $f(x, y)$ обладает тем свойством, что для каждого $x \in [a, b]$ интеграл $\int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y)\, dy$ существует.

Если область D второго специального вида, ограниченная прямыми $y = c$, $y = d$ и кривыми $PQ: \ x = \psi_1(y)$, $TS: \ x = \psi_2(y)$, где $\psi_1(y)$ и $\psi_2(y)$ непрерывны на $[c, d]$ и, кроме того, $\psi_1(y) < \psi_2(y)$ всюду в $[c, d]$, а функция $f(x, y)$ такова, что для любого $y \in [c, d]$ существуют интегралы $\int\limits_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x, y)\, dx$, то аналогично предыдущему получаем

$$\iint\limits_D f(x, y)\, dxdy = \int\limits_c^d \left\{ \int\limits_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x, y)\, dx \right\} dy. \tag{4}$$

Наконец, если область D можно разбить на конечное число областей первого или второго специального вида, то вычисляем интеграл для каждой частичной облаем по формулам (3) или (4) и результаты складываем. Если такое разбиение области D невозможно, то удобных формул для вычисления двойного интеграла нет. В таком случае интеграл надо вычислять, согласно его определению, как предел интегральных сумм.

При вычислении однократных интегралов широко пользуются заменой переменной под знаком интеграла, в случае двойных интегралов замена переменных такие часто облегчает их вычисление.

Пусть даны два экземпляра плоскости, один с системой координат x, y, другой с координатами ξ и η. Предположим, далее, что даны формулы

$$x = g(\xi, \eta), \qquad y = h(\xi, \eta), \tag{5}$$

связывающие переменные ξ, η и x, y, где функции g и h определены в некотором открытом множестве W, причем равенство (5) устанавливает взаимно однозначное соответствие между некоторыми областями: G на плоскости xOy и $H \subset W$ на плоскости $\xi O\eta$. Это означает, что x и y определяются как однозначные Функции от ξ и η в области H, при этом, когда точка (ξ, η) пробегает H, то точка с координатами $x = g(\xi, \eta)$ $y = h(\xi, \eta)$ пробегает G; и обратно, ξ и η являются однозначными функциями x и y:

$$\xi = u(x, y), \qquad \eta = v(x, y), \tag{6}$$

причем если точка (x, y) пробегает G, то точка (ξ, η) с координатами, определяемыми формулами (10), пробегает H.

Допустим далее, что границы областей G и H составлены из конечного числа кривых $y = \varphi_i(x)$ или $x = \psi_j(y)$, соответственно $\eta = \alpha_r(\xi)$ или $\xi = \beta_s(\eta)$. При этом функции φ_i, ψ_j, α_r и β_s непрерывны на отрезках их определения так, что области G и H квадрируемы, и при соответствии, определяемом формулами (5), внутренние точки H переходят во внутренние точки G и граничные точки — в граничные.

Предположим, наконец, что функции g, h имеют непрерывные частные производные в области H и что определитель

$$J = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial g}{\partial \xi} & \dfrac{\partial g}{\partial \eta} \\ \dfrac{\partial h}{\partial \xi} & \dfrac{\partial h}{\partial \eta} \end{vmatrix} = \frac{D(g,h)}{D(\xi,\eta)}$$

не обращается в нуль в этой области.

При выполнении всех указанных условий имеет место формула

$$\iint\limits_G f(x,y)\,dxddy = \iint\limits_H f[g(\xi,\eta), h(\xi,\eta)]\,|J|\,d\xi d\eta. \tag{7}$$

Доказательство этой формулы здесь не приводится, соответствующая формула будет доказана для случая n-кратных интегралов, частным случаем которой является формула (7). Заметим здесь лишь, во-первых, что не все предположения, которые мы сделали, независимы, некоторое из них являются следствием других, и, во-вторых, что формула верна и при несколько более общих предположениях. В частности, она остается справедливой, если при сохранении остальных предположений определитель $J = \dfrac{D(g,h)}{D(\xi,\eta)}$ обращается в нуль в конечном числе точек и гладких кривых.

§ 3. Геометрические приложения двойного интеграла

Подобно тому, как линейный интеграл дает возможность вычислять площади плоских фигур, так двойной интеграл позволяет находить объемы тел и площади криволинейных поверхностей.

Определение кубируемости пространственной фигуры и объема такой фигуры аналогично определению квадрируемости плоской фигуры и ее площади, и мы лишь бегло остановимся на этом.

Пусть в трехмерном пространстве $\mathbb{R}^3$ выбрана прямоугольная система координат $xyzO$, задана единица масштаба и A — некоторое множество в $\mathbb{R}^3$. Плоскостями, параллельными координатным плоскостям, разобьем все пространство на кубики с длиной ребра, равной единице, и назовем их *кубиками нулевого ранга.* Пусть N_0 — число кубиков нулевого ранга, имеющих с множеством A хотя бы одну общую точку, и n_0 — число кубиков нулевого ранга, целиком входящих в множество A. Очевидно, что $n_0 \geq N_0$.

Разделив ребра каждого кубика на 10 частей и проведя через точки деления плоскости, параллельные координатным плоскостям, разобьем каждый кубик нулевого ранга на 1000 кубиков первого ранга. Пусть N_1 — число кубиков первого ранга, имеющих с A хотя бы одну общую точку, и n_1 — число кубиков первого ранга, целиком входящих в A. Легко видеть, что

$$N_1 \leq 1000 N_0 \quad \text{и} \quad n_1 \geq 1000 n_0.$$

В самом деле, когда кубик нулевого ранга, имеющий общие точки с A, разбиваем на 1000 кубиков первого ранга, то может случиться, что не каждый из этих меньших кубиков будет иметь общие точки с A. В то же время если какой—то кубик нулевого ранга целиком входит в A, то все кубики первого ранга, на которые он разбит, тоже целиком войдут в A.

Каждый кубик первого ранга разбиваем на 1000 кубиков второго ранга, как к выше, определяем числа N_2 и n_2 и снова имеем, что $N_2 \leq 1000N_1$ и $n_2 \geq 1000n_1$. Таким образом,

$$N_0 \geq \frac{N_1}{1000} \geq \frac{N_2}{(1000)^2} \geq \frac{n_2}{(10000)^2} \geq \frac{n_1}{1000} \geq n_0.$$

Аналогичным путем получим неравенства

$$N_0 \geq \frac{N_1}{1000} \geq \frac{N_2}{(1000)^2} \geq \frac{N_3}{(1000)^3} \geq \frac{n_3}{(1000)^3} \geq \frac{n_2}{(10000)^2} \geq \frac{n_1}{1000} \geq n_0$$

и т.д.

Итак, мы подучили две последовательности: $\left\{\dfrac{N_k}{(1000)^k}\right\}$ и $\left\{\dfrac{n_k}{(1000)^k}\right\}$, первая из которых монотонно убывает и ограничена снизу, а вторая монотонно возрастает и ограничена сверху. Следовательно, существуют

$$\overline{V} = \lim_{k\to\infty} \frac{N_k}{(1000)^k} \quad \text{и} \quad \underline{V} = \lim_{k\to\infty} \frac{n_k}{(1000)^k}$$

причем $\overline{V} \geq \underline{V}$. Если $\overline{V} = \underline{V}$, то множество A называется *кубируемым* и число $V = \overline{V} = \underline{V}$ называется *объемом* множества A.

Можно доказать, так же как это делается в школьном курсе геометрии, что параллелепипед с гранями, параллельными плоскостям координат, кубируем и что его объем равен произведению трех его измерений, что любой многогранник кубируем, что кубируемость множества не зависит от выбора системы координат, что объем кубируемого множества не зависит от выбора осей и при изменении единицы масштаба в p раз ($e_i' = pe_i$, $i = 1, 2, 3$) объем изменяется в p^3 раз ($V' = p^3V$).

Доказательство этих утверждений опускаем, равно как и доказательство следующих лемм.

Лемма 1. *Для того чтобы множество A было кубируемо, необходимо и достаточно, чтобы граница этого множества имела объем, равный нулю.*

Лемма 2. *Объем есть аддитивная и монотонная функция множества, т.е.:*

1) *если A_1 и A_2 кубируемы и $A_1 \cap A_2 = A_0$ есть множество объема нуль, то и $A_1 \cup A_2$ также кубируемо и*

$$V(A_1 \cup A_2) = V(A_1) + V(A_2);$$

2) *если A_1 и A_2 кубируемы и $A_1 \subset A_2$, то*

$$V(A_1) \leq V(A_2).$$

Лемма 3. *Для того чтобы множество* A *было кубируемо, необходимо и достаточно, чтобы для любого числа* $\varepsilon > 0$ *нашлись два кубируемых множества* B *и* C*, такие, что* $B \subset A \subset C$ *и* $V(C) - V(B) < \varepsilon$*. При этом* $V(B) \le V(A) \le V(C)$*.*

Лемма 4. *График функции* $z = f(x, y)$*, определенной и непрерывной в квадрируемой области* D *плоскости* xOy*, имеет объем, равный нулю.*

Теорема 1. *Цилиндрическое тело* T*, нижним основанием которого является квадрируемая область* D*, верхним — график функций* $z = f(x, y)$*, заданной и непрерывной в* $\overline{D}$*, и боковая поверхность образована отрезками прямых, параллельными оси* Oz *и проходящими через границу области* D*, кубируемо и имеет* V_T*, равный* $\displaystyle\iint\limits_D f(x, y)\,dxdy$*.*

Доказательство. Рассмотрим на плоскости xOy последовательность $\{C_n\}$ сеток из квадратов со сторонами, параллельными осям координат и длиной сторон, равной $\dfrac{1}{10^n}$. Пусть D_n — многоугольная фигура, состоящая из квадратов $Q_i^{(n)}$ сетки C_n, целиком входящих в D, и D_n — многоугольная фигура, состоящая из квадратов $Q_i^{(n)}$ сетки, имеющих с D хотя бы одну общую точку. Рассмотрим суммы

$$\sum_{\overline{D}_n} m_i^{(n)} \frac{1}{(100)^n} \quad \text{и} \quad \sum_{\widetilde{D}_n} M_i^{(n)} \frac{1}{100^n},$$

где $m_i^{(n)}$ и $M_i^{(n)}$ — соответственно нижняя и верхняя границы $f(x, y)$ в полном или неполном квадрате $Q_i^{(n)} \cap D$ и суммы распространены на квадраты фигуры D_n, соответственно $\widetilde{D}_n$. Ясно, что первая сумма есть объем V_n многогранной фигуры, входящей целиком в T, а вторая — объем $\widetilde{V}_n$ фигуры, содержащей T. Оценим разность между объемами этих многогранных фигур. Имеем:

$$\sum_{\widetilde{D_n}} M_i^{(n)} \frac{1}{(100)^n} - \sum_{D_n} m_i^{(n)} \frac{1}{(100)^n} =$$

$$= \sum_{D_n} (M_i^{(n)} - m_i^{(n)}) \frac{1}{(100)^n} + \sum_{\widetilde{D}_n \setminus D_n} M_i^{(n)} \frac{1}{(100)^n} \le$$

$$\le \sum_{D_n} (M_i^{(n)} - m_i^{(n)})\, \alpha_i^{(n)} + \sum_{\widetilde{D}_n \setminus D_n} M \frac{1}{(100)^n},$$

где $\alpha_i^{(n)}$, $i = 1, 2, \ldots, k_n$, — площадь полного или неполного квадрата, на которые разбивается D и $M = \sup\limits_D f(x, y)$.

Так как

$$\sum_{i=1}^{k_n} (M_i^{(n)} - m_i^{(n)})\, \alpha_i^{(n)} = \sum_{i=1}^{k_n} \omega_i^{(n)} \alpha_i^{(n)}$$

и

$$\sum_{\widetilde{D}_n \setminus D_n} M \frac{1}{(100)^n} = M(\text{пл.}\, \widetilde{D}_n - \text{пл.}\, D_n),$$

то

$$\widetilde{V}_n - V_n \le \sum_{i=1}^{k_n} \omega_i^{(n)}\, \alpha_i^{(n)} + M(\text{пл.}\, \widetilde{D}_n - \text{пл.}\, D_n).$$

При $n \to \infty$ в силу непрерывности $f(x,y)$ $\displaystyle\sum_{i=1}^{k_n} \omega_i^{(n)}\, \alpha_i^{(n)} \to 0$, а в силу квадрируемости D также пл. $\widetilde{D}_n$ − пл. $D_n \to 0$. Поэтому для заданного числа $\varepsilon > 0$ найдется число n_0, такое, что при $\widetilde{V}_n - V_n < \varepsilon$ и, по лемме 3, цилиндрическое тело T кубируемо, причем

$$V_n \le V_T \le \widetilde{V}_n. \tag{$*$}$$

С другой стороны,

$$V_n \le \underline{S}_n \le \overline{S}_n \le \widetilde{V}_n,$$

и, следовательно,

$$V_n \le \iint\limits_D f(x,y)\, dxdy \le \widetilde{V}_n. \tag{$**$}$$

Теорема доказана.

Из неравенств (*) и (**) следует, что

$$V_T = \iint\limits_D f(x,y)\, dxdy.$$

Примеры.

1. Объем шара. В силу симметрии достаточно посчитать объем $\dfrac{1}{8}$ части шара (рис. 57). Согласно теореме 1, шар кубируем и его объем вычисляется по формуле

$$\frac{1}{2}\, V = \iint\limits_D \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}\, dxdy.$$

Здесь D — четверть круга, лежащая в первом квадранте, R — радиус шара. Переходя к полярным координатам, находим:

$$\frac{1}{2}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \left\{ \int\limits_0^R \sqrt{R^2 - r^2}\, r\, dr \right\} d\varphi =$$

$$= \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \left\{ -\frac{1}{2} \int\limits_0^R \sqrt{R^2 - r^2}\, d(R^2 - r^2) \right\}, d\varphi = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3} \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} R^3\, d\varphi = \frac{\pi}{6}\, R^3.$$

Отсюда

$$V_{\text{шара}} = \frac{4}{3}\, \pi R^3.$$

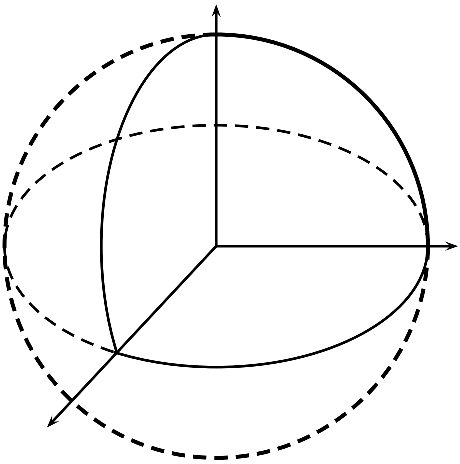

Рис. 57

2. Найдем объем тела, получающегося из шара, если из него вырезать два прямых круговых цилиндра с диаметрами основания, равными радиусу шара и касающимися вдоль образующей, проходящей через центр шара (рис. 58). Снова в силу симметрии фигуры достаточно рассмотреть $\dfrac{1}{8}$ ее часть (рис. 59).

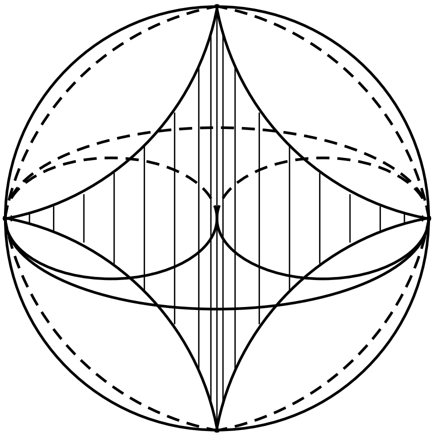

Рис. 58

Определим объем V_0 тела, вырезаемого из $\dfrac{1}{8}$ части шара одним из цилиндров. Этот объем равен:

$$\iint\limits_G \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}\,dxdy,$$

где G — полукруг в плоскости xOy (рис. 60). Переходя к полярным координатам, находим: $0 \le \varphi \le \dfrac{\pi}{2}$, $0 \le r \le R$. Поэтому

$$V_0 = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int\limits_0^{R\cos\varphi} \sqrt{R^2 - r^2}\, r\,dr = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \left\{ -\frac{1}{3}(R^2 - r^2)^{\frac{3}{2}} \right\}\Bigg|_0^{R\cos\varphi} d\varphi =$$

$$= \frac{R^3}{3} \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \sin^3 \varphi)\, d\varphi = \frac{R^3}{3} \left(\frac{\pi}{2} - \frac{2}{3} \right).$$

Следовательно, объем интересующего нас тела равен:

$$V = \frac{4}{3} \cdot \pi R^3 - 8 \cdot \frac{r^3}{3} \left(\frac{\pi}{2} - \frac{2}{3} \right) = \frac{16}{9}\, R^3.$$

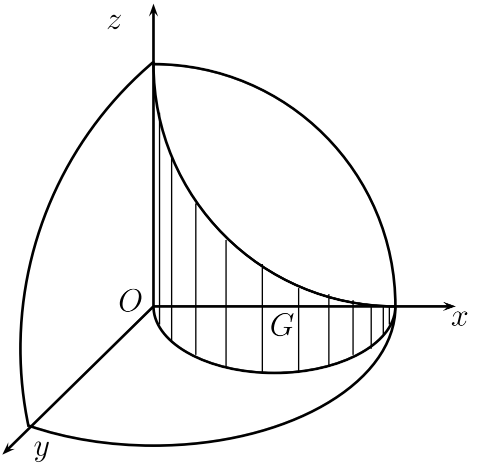

Рис. 59

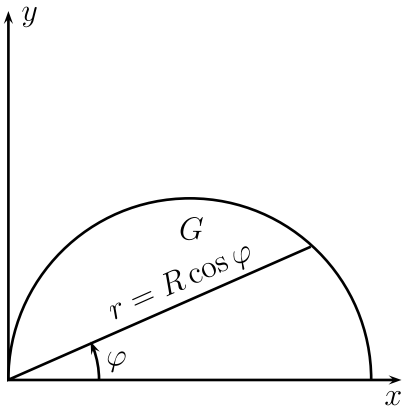

Рис. 60

Шар с вырезанными в нем двумя цилиндрическими дырками называется *телом Вивиани*, во имени итальянского математика, впервые рассмотревшего такое тело. Это был первый пример тела, полученного путем простой, комбинации шаров, цилиндров и других круглых тел, объем которого рационально выражается через радиус.

Рассмотрим поверхность $S: \ z = f(x, y)$, являющуюся графиком функции f, непрерывной в замкнутой ограниченной области G. Эту поверхность будем называть it гладкой, если f принадаежит классу C^1, т.е. имеет непрерывною производную Фреше всюду в открытой области $G_0 \supset G$. Область определения функции $f(x, y)$ есть в то же время проекция на плоскость xOy поверхности S. Пусть G квадрируема.

Гладкими кривыми разобьем область G на части $G_1, G_2, \ldots, G_n$ и в каждой частичной области G_i выберем точку $A_i(\xi_i, \eta_i)$. Обозначим через S_i график сужения функции f на область G_i и в точке M_i поверхности S_i, имеющей координаты $(\xi_i, \eta_i, f(\xi_i, \eta_i))$, проведем касательную плоскость к поверхности. Обозначим через $\cos \lambda_i$, $\cos \mu_i$, $\cos \nu_i$ направяющие косинусы этой касательной плоскости так, что

$$\cos \lambda_i = \frac{-f'_x(\xi_i, \eta_i)}{+\sqrt{1 + [f'_x(\xi_i, \eta_i)]^2 + [f'_y(\xi_i, \eta_i)]^2}}, \qquad (1)$$

$$\cos \mu_i = \frac{-f'_y(\xi_i, \eta_i)}{+\sqrt{1 + [f'_x(\xi_i, \eta_i)]^2 + [f'_y(\xi_i, \eta_i)]^2}}, \qquad (2)$$

$$\cos\nu_i = \frac{1}{+\sqrt{1 + [f'_x(\xi_i, \eta_i)]^2 + [f'_y(\xi_i, \eta_i)]^2}}. \tag{3}$$

Знак корня квадратного выбран так, что направление нормали к поверхности в точке M_i образует с положительным направлением оси Oz острый угол.

Пусть T_i — часть касательной плоскости, вырезаемая цилиндром с образующей параллельной оси Oz и направляющей, являющейся границей области G_i. Легко видеть, что T_i квадрируема. Составим сумму

$$\sigma_n = \sum_{i=0}^{n} \text{пл.}\, T_i.$$

Определение. Если при $n \to \infty$ и $\max\ d(G_i) \to 0$ сумма σ_n стремится к конечному пределу, не зависящему ни от характера разбиения области G на части, ни от выбора в частичной области G_i точки (ξ_i, η_i), то поверхность S называется *квадрируемой*, а число $\sigma = \lim\ \sigma_n$ — *площадью* поверхности S.

Теорема 2. *Гладкая поверхность S, заданная явным уравнением $z = f(x, y)$, квадрируема и ее площадь σ определяется по формуле*

$$\sigma = \iint\limits_G \sqrt{1 + [f'_x(\xi_i, \eta_i)]^2 + [f'_y(\xi_i, \eta_i)]^2}\, dxdy. \tag{4}$$

Доказательство. Так как площадка T_i касательной плоскости проектируется на область G_i плоскости xOy и угол между касательной плоскостью и плоскостью xOy есть ν_i, то

$$\text{пл.}\, G_i = \text{пл.}\, T_i \cos\nu_i,$$

или, если ввести прежние обозначения $\alpha_i = \text{пл.}\, G_i$, $i = 1, 2, \ldots, r$, то

$$\text{пл.}\, T_i = \frac{\alpha_i}{\cos\nu_i} = \sqrt{1 + [f'_x]^2 + [f'_y]^2}\, \alpha_i.$$

Поэтому

$$\sigma_n = \sum_{i=0}^{n} \sqrt{1 + [f'_x(\xi_i, \eta_i)]^2 + [f'_y(\xi_i, \eta_i)]^2}\, \alpha_i,$$

и так как справа в (5) стоит интегральная сумма для двойного интеграла от непрерывной функции $\sqrt{1 + [f'_x(x, y)]^2 + [f'_y(x, y)]^2}$ по области G, то при $n \to \infty$ и $\max\ d(G_i) \to 0$ правая часть равенства (5) стремится к конечному пределу, равному $\iint\limits_D \sqrt{1 + [f'_x(x, y)]^2 + [f'_y(x, y)]^2}\, dxdy$. Но это значит, что поверхность S квадрируема и

$$\text{пл.}\, S = \iint\limits_D \sqrt{1 + [f'_x(x, y)]^2 + [f'_y(x, y)]^2}\, dxdy.$$

что требовалось доказать.

Замечания.

1. Вместо гладкой поверхности S, заданной явным уравнением $z = f(x, y)$, можно рассматривать поверхности, заданные явными уравнениями $y = g(x, z)$ или $x = h(y, z)$. Изменения, которые надо в этих случаях сделать в формулировке теоремы 2, очевидны.

2. Если поверхность S можно разбить конечным числом гладких кривых на гладкие части $S_1, S_2, \ldots, S_p$, каждая из которых задана явным уравнением, то легко показать, что поверхность S квадрируема и

$$\text{пл.}\, S = \sum_{i=0}^{p} \text{пл.}\, S_i.$$

Примеры.

3. Найдем площадь поверхности тела Вивиани.

Как и ранее, достаточно рассмотреть $\frac{1}{8}$ часть поверхности Вивиани (рис. 61).

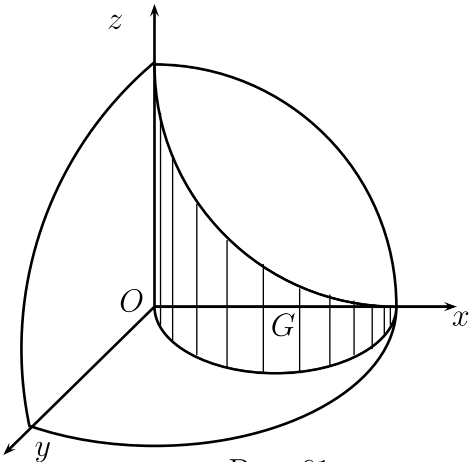

Рис. 61

По формуле (4) находят площадь σ_0 поверхности, вырезанной цилиндром из $\frac{1}{8}$ сферы:

$$\sigma_0 = \iint\limits_G \sqrt{1 + \frac{x^2 + y^2}{R^2 - x^2 - y^2}}\, dxdy = - \iint\limits_G \frac{R\, dxdy}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}} =$$

$$= R \int\limits_0^{\pi} 2d\varphi \int\limits_0^{R\cos\varphi} \frac{r\, dr}{\sqrt{R^2 - r^2}} = R \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \left(-\sqrt{R^2 - r^2}\right)\Big|_0^{R\cos\varphi} d\varphi =$$

$$= R^2 \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \sin\varphi)\, d\varphi = R^2 \left(\frac{\pi}{2} - 1\right).$$

Следовательно, площадь поверхности тела Вивиани

$$\sigma = \sigma_{\text{шара}} = -8\sigma_0 = 4\pi R^2 - 8R^2\left(\frac{\pi}{2} - 1\right) = 8R^2.$$

Площадь этой поверхности, полученной комбинацией цилиндра и сферы, как и объем тела Вивиани, выражается рационально через радиус.

§ 4. Понятие о несобственных двойных интегралах

Основные определения и утверждения, изложенные в § 1 и 2 гл. XV, могут быть распространены на случай двойных интегралов.

Пусть D — неограниченная область плоскости и $f:\ D \to \mathbb{R}$ такова, что для каждой замкнутой несамопересекающейся кривой Γ, ограничивающей квадрируемую часть плоскости G_Γ, существует интеграл

$$\iint\limits_{D_\Gamma} f(x,y)\,dxdy,$$

где $D_\Gamma = D \cap G_\Gamma$..

Рассмотрим такую «расширяющуюся» последовательность кривых $\{\Gamma_n\}$, что $G_{\Gamma_n} \subset G_{\Gamma_{n+1}}$ и $d_n = \rho(\Gamma_n,)) \to +\infty$, где через d_n обозначено расстояние от кривой Γ_n до начала координат. Соответственно этой последовательности построим последовательность интегралов

$$\iint\limits_{D_{\Gamma_n}} f(x,y)\,dxdy. \tag{1}$$

Если для каждой последовательности кривых $\{\Gamma_n\}$ указанного типа существует конечный предел соответствующей последовательности (1), не зависящий от выбора последовательности $\{\Gamma_n\}$, то этот предел называется *значением* несобственного интеграла

$$\iint\limits_{D} f(x,y)\,dxdy \tag{2}$$

по неограниченной области D, а несобственный интеграл (2) называется *сходящимся.* Если предел последовательности (1) бесконечен или отсутствует, интеграл (2) называется *расходящимся.*

Заметим, что в случае, когда $f(x,y) \geq 0$ в D, последовательность (1) является, очевидно, монотонно возрастающей и поэтому имеющей предел. Этот предел конечен, если последовательность (1) ограничена (интеграл (2) сходится), и равен $+\infty$, если последовательность (1) не ограничена (интеграл (2) расходится).

Пусть теперь D — ограниченная область и $f:\ D \to \mathbb{R}$. Условимся говорить, что $f(x,y)$ *интегрируема в точке* $M_0 \in D$, если существует такая окрестность

$U(M_0)$ точки M_0, что $f(x, y)$ интегрируема по множеству $D \cap U(M_0)$. Точки, в которых функция f не интегрируема, назовем *особыми точками* функции f. Рассуждениями, аналогичными проведенным в § 2 гл. XV, можно показать, что в случае компактного множества D интегрируемая в каждой точке D функция является интегрируемой по всему множеству D. Таким образом, неинтегрируемость функции по квадрируемому ограниченному множеству может объясняться лишь наличием у функции особых точек на этом множестве. Можно показать, как и в § 2 гл. XV, что неинтегрируемость функции в изолированных точках может происходить лишь по причини неограниченности функции в этих точках.

Обозначим через Z множество особых точек функции $f \in D$. Это множество, очевидно, замкнуто, т.е. компактно. Ограничимся рассмотрением случая, когда мера (плоская) множества Z равна нулю. Окружим каждую точку $M \in Z$ δ-окрестностью $U(M, \delta)$, из покрытия $\{U(M, \delta)\}$ множества Z выберем конечное покрытие. Объединение множеств этого покрытия обозначим через G_δ. Ясно, что функция f интегрируема по множеству $D_\delta = D \setminus G_\delta$, т.е. существует

$$\iint\limits_{D_\delta} f(x, y)\, dxdy. \tag{3}$$

Если у этого интеграла при $\delta \to 0$ существует конечный предел, то несобственный интеграл

$$\iint\limits_{D} f(x, y)\, dxdy \tag{4}$$

называется *сходящимся*, а указанный предел — *значением интеграла* (4). Если этот предел равен ∞ или не существует, то интеграл (4) называется *расходящимся*. Отметим, что для неотрицательной в D функции $f(x, y)$ расходимость интеграла (4) указывает на бесконечное его значение.

В общем случае, когда область D неограничена и в ней имеются особые точки функции f, определение сходимости интеграла вводится комбинированием конструкций, приведенных выше. Заметим, что на несобственные двойные интегралы путем рассуждений, аналогичных приведенным для однократных несобственных интегралов, может быть распространено правило замены переменных.

Назовем несобственный интеграл (2) или (4) *абсолютно сходящимся*, если сходится интеграл

$$\iint\limits_{D} |f(x, y)|\, dxdy. \tag{5}$$

Особенностью двумерного случая является совпадение абсолютной сходимости несобственных интегралов и их сходимости. Сходимость абсолютно сходящегося интеграла проверяется без труда, и мы на этом не будем останавливаться. Установим справедливость следующего утверждения.

Теорема 1. *Если несобственный интеграл* (2) *(или* (4)*) сходится, то он сходится и абсолютно.*

Докажем эту теорему для интеграла по неограниченной области. Доказательство будем вести от обратного, т.е. допустим, что интеграл (2) сходится, а интеграл (5) расходится (его значением являемся $+\infty$). Построим такую последовательность кривых $\{\Gamma_n\}$, для которой последовательность интегралов (1) имеет бесконечный предел, что будет означать расходимость интеграла (2) в противоречии с предположением. Рассмотрим для этого последовательность окружностей C_n с центрами в начале координат и радиусами r_n, $r_n < r_{n+1}$, $r_n \to \infty$, и пусть D_r — часть D, попавшая в C_n. Тогда $D_{c_n} \subset D_{C_{n+1}}$. Для этой последовательности

$$\iint\limits_{D_{C_n}} |f(x,y)|\,dxdy \to +\infty.$$

Без ограничения общности можно предположить, что выполнено неравенство

$$\iint\limits_{D_{C_{n+1}}} |f(x,y)|\,dxdy > 3 \iint\limits_{D_{C_n}} |f(x,y)|\,dxdy + 2n, \tag{6}$$

так как в противном случае можно перейти к подходящей подпоследовательности взятой последовательности.

Обозначив через K_n множество $D_{C_{n+1}} \setminus D_{C_n}$, из (6) получим:

$$\iint\limits_{K_n} |f(x,y)|\,dxdy > 2 \iint\limits_{D_{C_n}} |f(x,y)|\,dxdy + 2n. \tag{7}$$

Введем теперь вспомогательные функции $f^+(x,y)$ и $f^-(x,y)$, полагая

$$f^+(x,y) = \begin{cases} f(x,y), & \text{если} \quad f(x,y) \geq 0, \\ 0, & \text{при} \quad fx,y) \leq 0, \end{cases}$$

$$f^-(x,y) = \begin{cases} -f(x,y), & \text{если} \quad f(x,y) \leq 0, \\ 0, & \text{при} \quad fx,y) \geq 0. \end{cases}$$

Очевидно,

$$|f(x,y)| = f^+(x,y) + f^-(x,y),$$

поэтому

$$\iint\limits_{K_n} |f(x,y)|\,dxdy = \iint\limits_{K_n} f^+(x,y)\,dxdy + \iint\limits_{K_n} f^-(x,y)\,dxdy.$$

Сопоставив это равенство с неравенством (7), установим справедливость по крайней мере одного из следующих неравенств

$$\iint\limits_{K_n} f^+(x,y)\,dxdy > \iint\limits_{D_{C_n}} |f(x,y)|\,dxdy + n,$$

$$\iint\limits_{K_n} f^-(x,y)\,dxdy > \iint\limits_{D_{C_n}} |f(x,y)|\,dxdy + n.$$

Хотя бы одно из этих неравенств выполняется для бесконечного числа различных значений n, поэтому, перейдя к подпоследовательности, можно считать, что при всех n, например, для функции $f^+(x,y)$ выполнено неравенство

$$\iint\limits_{K_n} f^+(x,y)\,dxdy > \iint\limits_{D_{C_n}} |f(x,y)|\,dxdy + n.$$

Но тогда при достаточно мелком разбиении области K_n на элементарные части для нижней суммы $\sum\limits_{K_n} m_k^+\,\Delta S_k$ функции $f^+(x,y)$ в K_n будет выполняться неравенство

$$\sum_{K_n} m_k^+\,\Delta S_k > \iint\limits_{D_{C_n}} |f(x,y)|\,dxdy + n.$$

Объединим все элементарные части разбиения K_n, на которых $m_k^+ = \inf\ f^+(x,y)$ принимает положительные значения, и каждую связную часть получившегося множества соединим с областью D_{C_n} настолько узкой полоской, чтобы сумма $\sum_{K_n} m_k^+\,\Delta S_k$, распространенная на элементарные части, имеющие общие точки с получившейся областью (обозначим эту область через Q_n), удовлетворяла неравенству

$$\sum_{Q_n} m_k^+\,\Delta S_k > \iint\limits_{D_{C_n}} |f(x,y)|\,dxdy + n.$$

(Здесь m_k^+ — нижняя грань $f^+(x,y)$ в k-й элементарной части разбиения Q_n). Ясно, что для интеграла от $f(x,y)$ выполнено неравенство

$$\iint\limits_{Q_n} f(x,y)\,dxdy > \iint\limits_{D_{C_n}} |f(x,y)|\,dxdy + n.$$

С другой стороны, очевидно, что

$$\iint\limits_{D_{C_n}} f(x,y)\,dxdy \geq -\iint\limits_{D_{C_n}} |f(x,y)|\,dxdy.$$

Из этих неравенств получаем:

$$\iint\limits_{D_{C_n}\cup Q_n} f(x,y)\,dxdy > n. \tag{8}$$

Пусть $\widetilde{D}_n$ — связная область, лежащая в D и содержащая $D_{C_n} \cup Q_n$. Обозначив через Γ_n границу области $\widetilde{D}_n$, получим «расширяюшуюся» последовательность кривых $\{\Gamma_n\}$, для которой, в силу неравенства (8), последовательность интегралов (1) стремится к $+\infty$, что и доказывает нашу теорему.

В соответствии с только что доказанной теоремой особый интерес представляет случай неотрицательной в области D функции $f(x,y)$. В приложениях приходится встречаться с функциями, представимыми в некоторой окрестности $U(M_0,\varepsilon)$ изолированной особой точки M_0 в виде

$$f(x,y) = \frac{\varphi(x,y)}{[\rho(x,y)]^\alpha},$$

где

$$\rho(x, y) = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2},$$

$\varphi(x, y)$ — ограниченная функция, $|\varphi(x, y)| \leq M$, $\alpha > 0$. Установим условие интегрируемости f в точке M_0. Дня этого окружим точку M_0 окрестностью $U(M_0, \varepsilon)$ (рис. 62) и рассмотрим интеграл по кольцу $\bigcup(M_0, \varepsilon) \backslash U(M_0, \delta) = K_\delta$, где $0 < \delta < \varepsilon$:

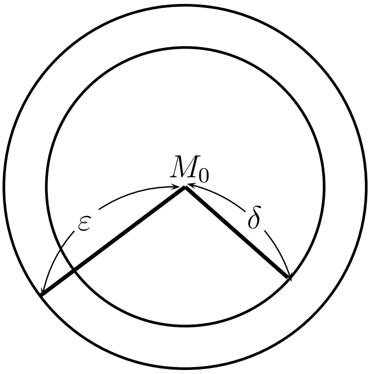

Рис. 62

$$\left| \iint\limits_{K_\delta} f(x, y)\, dxdy \right| \leq \iint\limits_{K_\delta} \frac{M}{[\rho(x, y)]^\delta}\, dxdy,$$

или, перейдя к полярным координатам, найдем:

$$\iint\limits_{K_\delta} \frac{dxdy}{[\rho(x, y)]^\alpha} = \int\limits_{\delta}^{\varepsilon} \rho^{1-\alpha}\, d\rho \int\limits_{0}^{2\pi} d\varphi = \frac{2\pi}{2 - \alpha}\, (\varepsilon^{2-\alpha} - \delta^{2-\alpha}).$$

Ясно, что при $\alpha < 2$ интеграл окажется сходящимся в точке M_0, а при $\alpha > 2$, вообще говоря, расходящимся.

Глава XVIII

ИНТЕГРИРОВАНИЕ СКАЛЯРНЫХ ФУНКЦИЙ ВЕКТОРНОГО АРГУМЕНТА

Интегралы от функции $f: A \to \mathbb{R}$, где $A \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 3$, строятся по той же схеме, что и интегралы от функции $f: A \to \mathbb{R}^n$, $A \subset \mathbb{R}^2$. Для того, чтобы осуществить такое построение, надо прежде всего определить объем n-мерного параллелепипеда — простейшей фигуры n-мерного евклидова пространства.

В главе X был определен n-мерный параллепипепед $P \subset \mathbb{R}^n$ как множество точен $x = (x^1, x^2, \ldots, x^n) \in \mathbb{R}^n$, координаты которого удовлетворяют неравенствам $a^i \leq x^i \leq b^i$, $i = 1, 2, \ldots, n$. В трехмерном случае это определение приводит к прямоугольному параллелепипеду. Введем теперь в $\mathbb{R}^n$ множество, являющееся в трехмерном случае косоугольным параллелепипедом. При этом будем рассматривать $\mathbb{R}^n$ как афинное пространство.

Пусть $x_1, x_2, \ldots, x_n$ — n-мерные векторы, выходящие из начала координат.

Определение. Множеств точек вида $\sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i x_i$, где $0 \leq \alpha_i \leq 1$, $i = 1, 2, \ldots, n$, называется *n-мерным параллелепипедом*, построенным на векторах $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Обозначим этот параллелепипед $P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

Если векторы $x_1, x_2, \ldots, x_n$ приложена к точке $a \in \mathbb{R}^n$, то, используя для таких векторов обозначение $(x_1)_a, (x_2)_a, \ldots, (x_n)_a$, распространим на них определение, т.е. по-прежнему будем называть параллелепипедом $P[(x_1)_a, (x_2)_a, \ldots, (x_n)_a]$ множество точек $x \in \mathbb{R}^n$ вида $\sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i [x_i)_a$, $0 \leq \alpha_i \leq 1$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Иными словами, параллелепипед $P[(x_1)_a, (x_2)_a, \ldots, (x_n)_a]$ есть множество точек вида $a + \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i x_i$, $0 \leq \alpha_i \leq 1$, $i = 1, 2, \ldots, n$.

Легко видеть, что в случае, когда векторы $x_1, x_2, \ldots, x_n$ направлены по ортам, координаты точек x параллелепипеда $P[(x_1)_a, (x_2)_a, \ldots, (x_n)_a]$ удовлетворяют неравенствам $a^i \leq x^i \leq b^i$, где $b = a + \sum\limits_{i=1}^{n} x_i$, и мы получаем прежнее определение прямоугольного параллелепипеда.

Читателю, который захочет подробнее ознакомиться с афинным пространством, рекомендуем обратиться к книге Н.В. Ефимова и Э.Р. Розендорна «Линейная алгебра и многомерная геометрия» (М., 1970).

§ 1. Объем n-мерного параллелепипеда

Пусть дан параллелепипед $P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, построенный на векторах $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{R}^n$, выходящих из начала координат. По аналогии с плоским или трехмерным случаем при определении объема такого параллелепипеда будем отправляться от некоторых характеристических свойств объема. Именно, каждому параллелепипеду $P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ отнесем число $V(p) = V(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, удовлетворяющее условиям:

1) $V(x_1, x_2, \ldots, x_n) \geq 0$ и $x_1, x_2, \ldots, x_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0$ тогда и только тогда, когда векторы $x_1, x_2, \ldots, x_n$ линейно зависимы;

2) $V(x_1, x_2, \ldots, \lambda x_i, \ldots, x_n) = |\lambda| V(x_1, x_2, \ldots, x_i, \ldots, x_n)$;

3) $V(x_1, x_2, \ldots, x_i + x_k, \ldots, x_n) = V(x_1, x_2, \ldots, x_i, \ldots, x_n$, где $i, k = 1, 2, \ldots, n$, $i \neq k$. Это свойство $V(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ в пространствах $\mathbb{R}^2$ и $\mathbb{R}^3$ выражает тот факт, что параллелепипеды с равными основаниями и равными высотами имеют одинаковый объем (рис. 68);

4) $V(e_1, e_2, \ldots, e_n) = 1$.

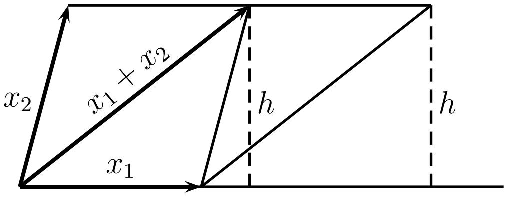

Рис. 63

Покажем, что такое число существует и определяется однозначно.

Будем говорить, что полилинейная форма $\omega(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *антисимметрична*, если перестановка двух любых аргументов формы приводит к изменению ее знака, т.е. если. при $i \neq j$

$$\omega(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_j, \ldots, x_n) = -\omega(x_1, \ldots, x_j, \ldots, x_i, \ldots, x_n).$$

Лемма. *Для того чтобы скалярная функция ω от n векторных аргументов $x_i \in \mathbb{R}^n$, $i = 1, 2, \ldots, n$, была полилинейной, антисимметрической формой, необходимо и достаточно, чтобы:*

а) $\omega(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_i, \ldots, x_k, \ldots, x_n) = \omega(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_i + x_k, \ldots, x_k, \ldots, x_n)$, $i, k = 1, 2, \ldots, n$; $i \neq k$;

б) $\omega(x_1, x_2, \ldots, \lambda x_i, \ldots, x_n) = \lambda \omega(x_1, x_2, \ldots, x_i, \ldots, x_n)$.

Необходимость условия б) очевидна, а необходимость условия а) сразу следует из линейности ω по каждому аргументу и того факта, что антисимметрическая форма, у которой два аргумента одинаковы, равна нулю. Докажем поэтому достаточность условий а) и б).

Из условий а) и б) прежде всего вытекает, что при $\lambda \neq 0$, $i \neq k$,

$$\omega(x_1, x_2, \ldots, x_i, \ldots, x_k, \ldots, x_n) = \frac{1}{\lambda}\,\omega(x_1, x_2, \ldots, \lambda x_i, \ldots, x_k, \ldots, x_n) =$$

$$= \frac{1}{\lambda}\,\omega(x_1, \ldots, x_i + \lambda x_k, \ldots, \lambda x_k, \ldots, xn) = \omega(x_1, \ldots, x_i + \lambda x_k, \ldots, x_k, \ldots, x_n).$$

Отсюда непосредственно следует

$$\omega(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_n) = \omega\Bigg(x_1, \ldots, x_i - \sum_{k=1,\, k\neq i}^{n} \lambda_k x_k, \ldots, x_n\Bigg). \qquad (1)$$

Так как $\omega(x_1, \ldots, 0, \ldots, x_n) = 0 \cdot \omega(x_1, \ldots, e_i, \ldots, x_n) = 0$, то из (1) следует что если в $\omega(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_n)$ аргументы линейно зависимы, то $\omega(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_n) = 0$.

Теперь легко проверить, что

$$\omega(x_1, \ldots, x_i' + x_i'', \ldots, x_n) = \omega(x_1, \ldots, x_i', \ldots, x_n) + \omega(x_1, \ldots, x_i'', \ldots, x_n). \qquad (2)$$

Если $x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n$ линейно зависимы, то будут линейно зависимы н системы $x_1, \ldots, x_i', \ldots, x_n$; $x_1, \ldots, x_i'', \ldots, x_n$; $x_1, \ldots, x_i' + x_i'', \ldots, x_n$, и тогда все члены равенства (2) равны нулю. Если векторы $x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n$ линейно независимы, то, дополнив их вектором x_i до базиса в $\mathbb{R}^n$, получим:

$$x_i' = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k' x_k, \qquad x_i'' = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k'' x_k, \qquad x_i' + x_i'' = \sum_{k=1}^{n} (\lambda_k' + \lambda_k'') x_k.$$

Тогда, по уже доказанному, выражение $\omega(x_1, \ldots, x_i', \ldots, x_n)$ не изменится, если заменить x_i' на $x_i' - \sum\limits_{k=1,\ k\neq i}^{n} \lambda_k' x_k$, т.е. на $\lambda_i' x_i$, и мы получим:

$$\omega(x_1, \ldots, x_i', \ldots, x_n) = \lambda_i' \omega(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_n).$$

Аналогично

$$\omega(x_1, \ldots, x_i'', \ldots, x_n) = \lambda_i'' \omega(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_n),$$
$$\omega(x_1, \ldots, x_i' + x_i'', \ldots, x_n) = (\lambda_i' + \lambda_i'')\omega(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_n).$$

Сложив почленно первые два равенства и вычтя из их суммы третье, найдем:

$$\omega(x_1, \ldots, x_i', \ldots, x_n) + \omega(x_1, \ldots, x_i'', \ldots, x_n) - \omega(x_1, \ldots, x_i' + x_i'', \ldots, x_n) =$$

$$= \lambda_i' \omega(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_n) + \lambda_i'' \omega(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_n) - (\lambda_i' + \lambda_i'')\omega(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_n) = 0,$$

и равенство (2) доказано.

Из (2) и а) следует полилинейность формы ω. Докажем ее антисимметричность. Прежде всего, из аддитивности ω и свойства а) следует, что

$$\omega(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_k, \ldots, x_n) = \omega(x_1, \ldots, x_i + x_k, \ldots, x_k, \ldots, x_n) =$$

$$= \omega(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_k, \ldots, x_n) + \omega(x_1, \ldots, x_k, \ldots, x_k, \ldots, x_n),$$

откуда $\omega(x_1, \dots, x_k, \dots, x_k, \dots, x_n) = 0$, т.е. если под знаком ω два аргумента совпадают, то $\omega = 0$. Но тогда

$$\omega(x_1, \dots, x_i, \dots, x_k, \dots, x_n) + \omega(x_1, \dots, x_k, \dots, x_i, \dots, x_n) =$$

$$= \omega(x_1, \dots, x_i + x_k, \dots, x_i + x_k, \dots, x_n) = 0$$

и, следовательно,

$$\omega(x_1, \dots, x_i, \dots, x_k, \dots, x_n) = -\omega(x_1, \dots, x_k, \dots, x_i, \dots, x_n).$$

Лемма доказана.

Следующая теорема доказывается в курсах линейной алгебры, однако для полноты изложения приведем здесь ее доказательство.

Теорема. *В пространстве $\mathbb{R}^n$ существует лишь одна (с точностью до постоянного множителя) n-линейная антисимметрическая форма, и эта форма есть детерминант*

$$D(x_1, x_2, \dots, x_n) = \begin{vmatrix} x_1^1 & x_1^2 & \dots & x_2^n \\ x_2^1 & x_2^2 & \dots & x_2^n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_n^1 & x_n^2 & \dots & x_n^n \end{vmatrix},$$

где x_k^i есть i-я координата k-го вектора.

Доказательство. Пусть $\omega(x_1, x_2, \dots, x_n)$ — произвольная антисимметрическая форма от n аргументов $x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}^n$. Положим $\omega(e_{i_1}, e_{i_2}, \dots, e_{i_n}) = a_{i_1 i_2 \dots i_n}$. Если теперь $x_k = \sum\limits_{i_k=1}^{n} x_k^{i_k} e_{i_k}$, то легко видеть, что

$$\omega(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{i_1, i_2, \dots, i_n = 1}^{n} a_{i_1 i_2 \dots i_n} x_1^{i_1} x_2^{i_2} \cdots x_n^{i_n}.$$

Из антисимметричности формы следует, что $a_{i_1 i_2 \dots i_n} = \delta_{i_1 i_2 \dots i_n} a_{12 \dots n}$, где $\delta_{i_1 i_2 \dots i_n} = 1$ или -1 в зависимости от того, будет перестановка $(i_1, i_2, \dots, i_n)$ четной или нечетной. Таким образом,

$$\omega(x_1, x_2, \dots, x_n) = a_{12 \dots n} \sum_{i_1, i_2, \dots, i_n = 1}^{n} \delta_{i_1 i_2 \dots i_n} x_1^{i_1} x_2^{i_2} \cdots x_n^{i_n} = a_{12 \dots n} \begin{vmatrix} x_1^1 & x_1^2 & \dots & x_2^n \\ x_2^1 & x_2^2 & \dots & x_2^n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_n^1 & x_n^2 & \dots & x_n^n \end{vmatrix},$$

и теорема доказана.

Теперь нетрудно установить, что

$$V(x_1, x_2, \dots, x_n) = |D(x_1, x_2, \dots, x_n)|$$

есть единственная функция, удовлетворяющая 1–4.

Ясно, что $|D(x_1, x_2, \ldots, x_n)|$ удовлетворяет этим условиям. Пусть $W(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ — другая такая функция.

Рассмотрим

$$W(x_1, x_2, \ldots, x_n) \operatorname{sign} D(x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

Имеем:

$$\begin{gathered} W(x_1, \ldots, \lambda x_i, \ldots, x_n) \operatorname{sign} D(x_1, \ldots, \lambda x_i, \ldots, x_n) = \\ = |\lambda| W(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_n) \operatorname{sign} [\lambda D(x_1, \ldots, \lambda x_i, \ldots, x_n)] = \\ = |\lambda| \operatorname{sign} \lambda \cdot W(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_n) \operatorname{sign} D(x_1, \ldots, \ldots, \ldots, x_n) = \\ = \lambda \big\{ W(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_n) \operatorname{sign} D(x_1, \ldots, \ldots, \ldots, x_n) \big\}, \end{gathered}$$

и при $i \neq k$

$$W(x_1, \ldots, \lambda x_i + x_k, \ldots, x_n) \operatorname{sign} D(x_1, \ldots, \lambda x_i + x_k, \ldots, x_n) =$$

$$= W(x_1, \ldots, \lambda x_i, \ldots, x_n) \operatorname{sign} D(x_1, \ldots, \lambda x_i, \ldots, x_n),$$

т.е. произведение $W(x_1, \ldots, x_n) \operatorname{sign} D(x_1, \ldots, x_n)$ удовлетворяет условиям а) и б). Но тогда, по теореме

$$W(x_1, \ldots, x_n) \operatorname{sign} D(x_1, \ldots, x_n) = \alpha D(x_1, \ldots, x_n).$$

Положив $x_1 = e_1, \ldots, x_n = e_n$, получим, что $\alpha = 1$, следовательно,

$$W(x_1, \ldots, x_n) \operatorname{sign} D(x_1, \ldots, x_n) = D(x_1, \ldots, x_n)$$

или

$$W(x_1, \ldots, x_n) = |D(x_1, \ldots, x_n)|.$$

Теорема доказана.

Число $|D(x_1, \ldots, x_n)|$ назовем *объемом параллелепипеда* $P(x_1, \ldots, x_n)$, построенного на векторах $x_1, \ldots, x_n$ и будем обозначать этот объем $V(P)$ или $V(x_1, \ldots, x_n)$.

Если векторы приложены к точна $a \in \mathbb{R}^n$, то, используя для таких векторов обозначения $(x_1)a, \ldots, (x_n)_a$, примем, по определению,

$$V[(x_1)a, \ldots, (x_n)_a] = V(x_1, \ldots, x_n) = |D(x_1, \ldots, x_n)|$$

за объем параллелепипеда, построенного на векторах $(x_1)_a, \ldots, (x_n)_a$.

Такое определение означает требование инвариантности объема при параллельном перенесении параллелепипеда. Наконец, если систему векторов $x_1, \ldots, x_n$ повернуть вокруг начала (систему $(x_1)_a, \ldots, (x_n)_a$ вокруг точки a) или, что все равно, перейти к новому ортогональному базису, то так как преобразование ортогональных базисов осуществляется ортогональной матрицей с детерминантом, равным ±1, объем параллелепипеда $P(x_1, \ldots, x_n)$ при таком преобразовании не изменится. Этот факт есть частный случай следующего более общего факта: *если с помощью линейного преобразования* L *от параллелепипеда* $P(x_1, \ldots, x_n)$ *перейти к параллелепипеду* $P(Lx_1, \ldots, Lx_n)$, *то*

$$D(Lx_1, \ldots, Lx_n) = \det L \cdot D(x_1, \ldots, x_n),$$

и поэтому

$$V(Lx_1, \dots, Lx_n) = |\det L|\, V(x_1, \dots, x_n).$$

В этом легко убедиться простым подсчетом.

Будем такие считать, что замкнутые, открытые и полуоткрытые параллелепипеды, построенные на одних и тех же векторах, имеют одинаковый объем.

Если векторы $x_1, \dots, x_n$ приложены к началу и попарно ортогональны, то, в силу сказанного выше, при определении $V(x_1, \dots, x_n)$ можно считать $x_i = x^i e_i$, $i = 1, 2, \dots, n$, и тогда

$$V(x_1, \dots, x_n) = \left| \prod_{i=1}^{n} x^i \right|,$$

что соответствует в трехмерном случае определению объема прямого параллелепипеда как произведения трех его измерений. Если попарно ортогональные векторы приложены в точке a, то

$$V[(x_1)a, \dots, (x_n)_a] = \left| \prod_{i=1}^{n} (b^i - a^i) \right|,$$

где b^i есть i-я координата вектора $b = a + \sum\limits_{i=1}^{n} x_i$.

Отметим, наконец, что если $P_1 \subset \mathbb{R}^n$ и $P_2 \subset \mathbb{R}^m$ — прямоугольные параллелепипеды и $P = P_1 \times P_2 \subset \mathbb{R}^{n+m}$, то

$$V(P) = V(P_1) \cdot V(P_2).$$

§ 2. Интегралы от ограниченных функций по ограниченным множествам

Пусть P — замкнутый прямоугольный параллелепипед в $\mathbb{R}^n$, построенный на векторах $x_1, x_2, \dots, x_n$, приложенных к точке $a \in \mathbb{R}^n$ и направленных по ортам стандартного баэиса. Тогда $P = \{x,\ a^i \leq x^i \leq b^i$, где a^i и b^i являются i-ми координатами точек a и $b = a + \sum\limits_{i=1}^{n} x_i$. Обратно, множество точек $x = \{x^1, x^2, \dots, x^n\} \in \mathbb{R}^n$, $c^i \leq x^i \leq d^i$, есть параллелепипед указанного вида.

Пусть, далее, $f:\ P \to \mathbb{R}$ — ограниченная функция. Разбивая, каждый отрезок $[a^i, b^i]$ на части точками деления $t_0^i = a^i < t_1^i < \dots < t_{k_i-1}^i < t_k^i = b^i$, мы разобьем P на частичные прямоугольные параллелепипеды

$$P_{j_1 j_1 \dots j_n} = \prod_{i=1}^{n} [t^i_{j)i}, t^i_{j_i+1}], \dots 0 \leq j_i \leq k_i - 1.$$

всего таких параллелепипедов будет $k_1 \cdot k_2 \cdots k_n N$. Положим

$$m_{j_1 j_1 \dots j_n} = \inf_{P_{j_1 j_1 \cdots j_n}} f(x), \quad M_{j_1 j_1 \dots j_n} = \sup_{P_{j_1 j_1 \cdots j_n}} f(x)$$

и составим две суммы:

$$\underline{s}_N = \sum_{P_{j_1,\dots,j_n}} m_{j_1 j_1 \dots j_n} V(P_{j_1 j_1 \dots j_n}), \qquad \overline{s}_N = \sum_{P_{j_1,\dots,j_n}} M_{j_1 j_1 \dots j_n} V(P_{j_1 j_1 \dots j_n}),$$

где суммы распространяются на все частичные параллелепипеды $P_{j_1 j_1 \dots j_n}$ данного разбиения T основного параллелепипеда P. Эти суммы будем обозначать также символами $\underline{s}_N(f,T)$ и $\overline{s}_N(f,T)$ и называть *нижней* и *верхней суммами.*

Точно также, как и в теории двойных интегралов, доказывается что:

1) $\underline{s}_N(f,T) \le \overline{s}_N(f,T)$;

2) при измельчении разбиения параллелепипеда P нижние суммы могут только возрастать, а верхние только убывать;

3) для двух любых разбиений T и T'

$$\underline{s}_N(f,T) \le \overline{s}_N(f,T).$$

Отсюда вытекает, что существуют $\sup\limits_T \ \underline{s}_N(f,T)$ и $\inf\limits_T \ \overline{s}_N(f,T)$, где точные нижняя и верхняя границы берутся по всем разбиениям T параллелепипеда P. Величины $\sup\limits_T \ \underline{s}_N(f,T)$ и $\inf\limits_T \ \overline{s}_N(f,T)$ называются соответственно *нижним* и *верхним интегралами* от функции f по папаллелепипеду P и обозначаются $\underline{\int}_P f(x)\,dx$ и $\overline{\int}_P f(x)\,dx$ или, короче, $\underline{\int}_P f$ и $\overline{\int}_P f$. Итак, согласно определению

$$\underline{\int}_P f = \sup_T \ \underline{s}_N(f,T) = \sup_T \sum_{P_{j_1,\dots,j_n}} m_{j_1 j_1 \dots j_n} V(P_{j_1 j_1 \dots j_n}),$$

$$\overline{\int}_P f = \inf_T \ \overline{s}_N(f,T) = \inf_T \sum_{P_{j_1,\dots,j_n}} M_{j_1 j_1 \dots j_n} V(P_{j_1 j_1 \dots j_n}).$$

Если $\underline{\int}_P f = \overline{\int}_P f$, функция f называется *интегрируемой* на P, общее значение ее нижнего и верхнего интегралов называемся *интегралом* (иногда *n-кратным интегралом*) и обозначается $\int_P f(x)\,dx$ или $\int_P f$.

Имеет место следующий почти очевидный критерий интегрируемости ограниченной функции.

Лемма 1. *Для того чтобы ограниченная функция $f : P \to \mathbb{R}$ была интегрируема на параллелепипеде $P \subset \mathbb{R}^n$, необходимо и достаточно, чтобы для любого числа $\varepsilon > 0$ нашлось такое разбиение T параллелепипеда P, что*

$$\overline{s}_N(f,T) - \underline{s}_N(f,T) < \varepsilon.$$

Из этой леммы следует, что функция, непрерывная на замкнутом параллелепипеде интегрируема на нем.

Для решения вопроса о том, какие из разрывных функций интегрируемы, нам понадобится новое понятие.

Будем говорить, что множество $A \subset \mathbb{R}^n$ *имеет меру, равную нулю* ($\mu(A) = 0$), если для любого числа $\varepsilon > 0$ его можно заключить в конечную ила счетную систему открытых прямоугольных параллелепипедов с общим объемом, меньшим, чем ε. Без ограничения общности можно в этом определении считать, что векторы, на которых построены параллелепипеды, направлены по ортам стандартного базиса.

Очевидно, что:

1) если A имеет меру куль и $B \subset A$, то B также имеет меру нуль;

2) Если $A_1, A_2, \ldots, A_m$ имеют меры, равные нулю, то $\bigcup\limits_{j=1}^{m} A_j$ также имеют меру, равную нулю.

Наконец, с помощью леммы Гейне–Бореля нетрудно убедиться в справедливости следующей леммы.

Лемма 2. *Если компактное множество ?$\mathbb{R}^n$ имеет меру, равную нулю, то A можно покрыть конечной системой параллелепипедов, сумма объемов которых сколь угодно мала.*

Теорема 1 (Лебега). *Для того чтобы ограниченная функция $f : P \to \mathbb{R}$, где P — замкнутый параллелепипед в $\mathbb{R}^n$, была интегрируема на P, необходимо и достаточно, чтобы множество $\mathfrak{M}$ ее точек разрыва имело меру, равную нулю.*

Прежде всего, как и в случае $n = 1$, убеждаемся, что:

1) $\mathfrak{M} = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} \mathfrak{M}_{\frac{1}{k}}$, где $\mathfrak{M}_{\frac{1}{k}}$ — множество точек P, в которых колебание функций f не меньше, чем $\dfrac{1}{k}$;

2) $\mathfrak{M}_{\frac{1}{k}}$ — замкнутое множество;

3) если в каждой точке x замкнутого параллелепипеда P' имеем $\omega(f, x) < \alpha$, то найдется число $\delta > 0$, такое, что $\omega(f, P'') < \alpha$ для любого замкнутого параллелепипеда $P'' \subset P'$ с диаметром, меньшим, чем δ.

Перейдем теперь к доказательству теоремы Лебега.

Необходимость. Предположим, что функция f интегрируема на P. Покажем, что $\mu(\mathfrak{M}_{\frac{1}{k}}) = 0$ для любого $k = 1, 2, 3, \ldots$. Возьмем произвольное число $\varepsilon > 0$, и пусть T — такое разбиение P на частичные параллелепипеды P_i, что

$$\overline{s}(f, T) - \underline{s}(f, T) = \sum_{i=1}^{n} \omega(f, P_i)\, V(P_i) < \frac{\varepsilon}{k}.$$

Тем более,

$$\sum_i{}' \omega(f, P_i)\, V(P_i) < \frac{\varepsilon}{k},$$

где $\sum'$ распространяется на те параллелепипеды P_i, которые имеют с $\mathfrak{M}_{\frac{1}{k}}$ общие точки и для которых поэтому $\omega(f, P_i) \geq \dfrac{1}{k}$. Но тогда

$$\sum_i{}' V(P_i) \leq \sum_i{}' k\omega(f, P_i)\, V(P_i) < \varepsilon,$$

следовательно, $\mu(\mathfrak{M}_{\frac{1}{k}}) < \varepsilon$, и необходимость доказана.

Достаточность. Пусть $\mu(\mathfrak{M}) = 0$. Выберем произвольно и фиксируем натуральное число k. Так как $\mu(\mathfrak{M}_{\frac{1}{k}}) = 0$, то для любого числа $\varepsilon > 0$ найдется конечная система $Q_1, Q_2, \ldots, Q_r$ параллелепипедов, такая, что $\mathfrak{M}_{\frac{1}{k}} \subset \bigcup\limits_{j=1}^{r} Q_j$ и $\mu\left(\bigcup\limits_{j=1}^{r} Q_j\right) < \varepsilon'$. Пусть T — такое разбиение P, что каждый параллелепипед P_i этого разбиения или лежит целиком внутри некоторого Q_j, или не имеет ни с одним Q_j общих точек. Такое разбиение, очевидно, существует. Для этого разбиения имеем:

$$\overline{s}(f, T) - \underline{s}(f, T) = \sum{}_I \omega(f, P_i)\, V(P_i) + \sum{}_{II} \omega(f, P_i)\, V(P_i) \leq$$

$$2M \sum{}_I V(P_i) + \sum{}_{II} \omega(f, P_i)\, V(P_i) < 2M\varepsilon' + \sum{}_{II} \omega(f, P_i)\, V(P_i),$$

где $M = \sup\limits_P |f(x)|$ и $\sum_{II}$ распространяется на слагаемые, соответствующие параллелепипедам, не имеющим с Q_j, $j = 1, 2, \ldots, r$, общих точек. Измельчив, если необходимо, разбиение T, можно считать, что диаметры частичных параллелепипедов суммы $\sum_{II}$ будут меньше, чем δ, где $\delta > 0$ — число, соответствующее $\dfrac{1}{k}$ в ?. Но тогда

$$\sum{}_{II} \omega(f, P_i)\, V(P_i) < \frac{1}{k} V(P),$$

и, следовательно,

$$\overline{s}(f, T) - \underline{s}(f, T) < 2M\varepsilon' + \frac{1}{k} V(P).$$

Так как ε' и k выбраны произвольно, то, согласно лемме 1, функция f интегрируема на P.

Мы не вводили до сих пор понятия интегральной суммы, которым широко пользовались в теории однократных и двойных интегралов. Сделаем это.

Пусть T — разбиение параллелепипеда P на частичные параллелепипеды $P_{j_1 \ldots j_k}$. В каждом частичном параллелепипеде выберем произвольную точку $\xi_{j_1 \ldots j_k}$. Составим сумму

$$\sum_{j_1 \ldots j_k} f(\xi_{j_1 \ldots j_k})\, V(P_{j_1 \ldots j_k}) = s_N(f, T, \xi),$$

которую назовем *интегральной*.

Теорема 2. *Пусть $\{T_k\}$ — последовательность неограниченно измельчающихся разбиений параллелепипеда P, т.е. такая, что* 1) *каждый параллелепипед разбиения T_{k+1} есть часть некоторого параллелепипеда разбиения T_k,* 2) *максимальный диаметр параллелепипедов разбиения T_k стремится к нулю при $k \to \infty$. функция f тогда и только тогда интегрируема на P, когда для любой последовательности разбиений $s_{N_k}(f, T_k, \xi^{(k)})$ стремится к одному и тому же конечному пределу, притом независимо от выбора точек $\xi^{(k)}_{j_1 \cdots j_k}$ в параллелепипедах $P^{(k)}_{j_1 \cdots j_k}$ разбиения T_k.*

Доказательство этой теоремы предоставляем читателю. Оно аналогично доказательству критерия существования двойного интеграла.

Мы рассматривали до сих пор функции, заданные на замкнутом параллелепипеде. Если ограниченная функция f задана на произвольном ограниченном множестве $A \subset \mathbb{R}^n$, введем функцию

$$\widetilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{при} \quad x \in A, \\ 0 & \text{при} \quad x \in P \setminus A, \end{cases} \tag{1}$$

где P — замкнутый параллелепипед, содержащий A. Положим, по определению,

$$\int\limits_A f(x)\,dx = \int\limits_P \widetilde{f}(x)\,dx, \tag{2}$$

если интеграл в правой части равенства (2) существует.

Заметим, что $\displaystyle\int\limits_A f\,dx$ существует, если множество точек разрыва функции f и граница множества A имеют меры, равные нулю. Отметим также, что величина интеграла от ограниченной функции по ограниченному множеству не изменится, если изменим значения функции на множестве точек с мерой, равной нулю.

Положим в равенстве (1) $f(x) \equiv 1$ на A. Получим:

$$\int\limits_A 1\,dx = \int\limits_P \chi_A\,dx,$$

где χ_A — характеристическая функция множества A,

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1, & x \in A, \\ 0, & x \in P \setminus A. \end{cases}$$

Эту величину естественно принять за объем множества A. Ясно, что для параллелепипеда новое определение объема совпадает с первоначальным.

Следующая теорема указывает путь для вычисления интегралов.

Теорема 3 (Фубини). *Пусть $A \subset \mathbb{R}^n$, $B \subset \mathbb{R}^m$ замкнутые прямоугольные параллелепипеды и $f: \ A \times B \to \mathbb{R}$ — интегрируемая функция. Пусть, далее,* *функции* $g_x: \ B \to \mathbb{R}$ *определены для каждого* $x \in A$ *равенством* $g_x(y) = f(x,y)$ *и*

$$\varphi(x) = \int\limits_{-B} g_x\,dy = \int\limits_{-B} f(x,y)\,dy,$$

$$\Phi(x) = \overset{-}{\int\limits_{B}} g_x\,dy = \overset{-}{\int\limits_{B}} f(x,y)\,dy.$$

Тогда $\varphi(x)$ *и* $\Phi(x)$ *интегрируемы на* A *и*

$$\int\limits_{A\times B} f\,dx = \int\limits_{A} \varphi(x)\,dx = \int\limits_{A} \Phi(x)\,dx =$$

$$= \int\limits_{A} \Big\{ \int\limits_{-B} f(x,y)\,dy \Big\}\,dx = \int\limits_{A} \Big\{ \int\limits_{B} f(x,y)\,dy \Big\}\,dx.$$

Доказательство. Пусть T_A и T_B — разбиения параллелепипедов A и B соответственно. Вместе они дают разбиение параллелепипеда $A\times B$, при котором каждый частичный параллелепипед $P_{A\times B} \in T$ имеет вид $P_A \times P_B$, $P_A \in T_A$, $P_B \in T_B$. Поэтому

$$\underline{s}(f,T) = \sum_{P_{A\times B}} m_{P_{A\times B}}(f)\,V(P_{A\times B}) = \sum_{P_A\in T_A} \Big[\sum_{P_B\in T_B} m_{P_{A\times B}}(f)\,V(P_B) \Big] V(P_A), \qquad (3)$$

Так как для $x \in P_A$, очевидно $m_{P_{A\times B}}(f) \ \le m_{P_B}(g_x)$, то

$$\sum_{P_B\in T_B} m_{P_{A\times B}}(f)\ V(P_B) \le \sum_{P_B\in T_B} m_{P_B}(f)\,V(P_B).$$

Но

$$\sum_{P_B\in T_B} m_{P_B}(f)\,V(P_B) \le \int\limits_{-B} g_x(y)\,dy = \varphi(x),$$

поэтому

$$\sum_{P_B\in T_B} m_{P_B}(f)\,V(P_B) \le \varphi(x).$$

Поскольку последнее неравенство верно для любой точки $x \in P_A$, то можно в его правой части перейти к точной нижней границе по $x \in P_A$. Тогда получим

$$\sum_{P_B\in T_B} m_{P_B}(f)\,V(P_B) \le \inf_{x\in P_A}\ \varphi(x),$$

откуда

$$\sum_{P_A\in T_A} \Big[\sum_{P_B\in T_B} m_{P_{A\times B}}(f)\,V(P_B) \Big] V(P_A) \le \sum_{P_A\in T_A} \inf_{x\in P_A}\ \varphi(x)\,V(P_A) = \underline{s}(\varphi, T_A). \qquad (4)$$

Из (3) и (4) вытекает, что

$$\underline{s}_N(f,T) \le \underline{s}_{N_A}(\varphi, T_A).$$

Аналогично получаем:

$$\overline{s}_N(f,T) \geq \overline{s}_{N_A}(\Phi, T_A).$$

Следовательно,

$$\underline{s}_N(f,T) \leq \underline{s}_{N_A}(\varphi, T_A) \leq \overline{s}_{N_A}(\varphi, T_A) \leq \overline{s}_{N_A}(\Phi, T_A) \leq \overline{s}_N(f,T).$$

Так как функция f интегрируема на $A \times B$, то $\sup\ \underline{s}_N(f,T) = \inf\ \overline{s}_N(f,T) = \int\limits_{A\times B} f\,dxdy$, откуда, в силу предыдущего неравенства

$$\sup\ \underline{s}_N(f,T) = \inf\ \overline{s}_N(f,T) = \int\limits_{A\times B} f\,dxdy.$$

Это означает, что функция φ интегрируема на A и что $\int\limits_A \varphi\,dx = \int\limits_{A\times B} f\,dxdy$. Так же доказывается, что функция Φ интегрируема на A и что

$$\int\limits_A \Phi\,dx = \int\limits_{A\times B} f\,dxdy.$$

Следовательно,

$$\int\limits_{A\times B} f\,dxdy = \int\limits_A \varphi\,dx = \int\limits_A \Phi\,dx,$$

и теорема Фубини доказана.

Замечания. **1.** Аналогично предыдущему доказывается формула

$$\int\limits_{A\times B} f\,dxdy = \int\limits_B \left\{ \int\limits_{-A} f(x,y)\,dx \right\} dy = \int\limits_B \left\{ \overset{-}{\int\limits_A} f(x,y)\,dx \right\} dy.$$

2. Если функция g_x интегрируема для всех $x \in A$, например, если f непрерывна, то получаем обычную формулу:

$$\int\limits_{A\times B} f\,dxdy = \int\limits_A \left\{ \int\limits_B f(x,y)\,dy \right\} dx.$$

Для непрерывных функций $f(x,y)$ верна и другая формула:

$$\int\limits_{A\times B} f\,dxdy = \int\limits_B \left\{ \int\limits_A f(x,y)\,dx \right\} dy.$$

3. Если функция f достаточно хорошая, например непрерывная, то, повторив необходимое число раз операцию сведения интеграла по параллелепипеду к последовательным интегралам по параллелепипедам меньшей размерности, получим:

$$\int\limits_P f(x)\,dx = \int\limits_{a^n}^{b^n}\left\{\int\limits_{a^{n-1}}^{b^{n-1}} \ldots \left(\int\limits_{a^1}^{b^1} f(x^1, x^2, \ldots, x^{n-1}, x^n)\,dx^1\right)\ldots\,dx^{n-1}\right\}dx^n.$$

Наконец, вычисление $\int\limits_A f\,dx$ по произвольному ограниченному множеству A сводим с помощью функции $\widetilde{f}$ (см. (1)) к вычислению интеграла по параллелепипеду.

В заключение отметим, что все основные свойства двойных интегралов, выраженные равенствами и неравенствами, остаются верными и для n-кратных интегралов.

§ 3. Разбиение единицы и распространение понятия интеграла на случай неограниченных функций и множеств

В ряде случаев при изучении тех или иных свойств множеств или функций в n-мерных евклидовых и, более обще, в метрических пространствах, можно получить сначала лишь локальные результаты в окрестности произвольной точки данного множества, возникает задача «склеивания» этих локальных результатов для получения соответствующего глобального утверждения. Одним из средств для осуществления такого «склеивания» является разбиение единицы.

Лемма 1. *Пусть* $\{U_i\}$, $i = 1, 2, \ldots, m$, *— отрытое покрытие компактного множества* $C \subset \mathbb{R}^n$. *Тогда существуют компактные множества* $D_1, D_2, \ldots, D_m$, *такие, что* $D_i \subset U_i$, $i = 1, 2, \ldots, m$, *и* $\bigcup\limits_{i=1}^{m} \overset{\circ}{D}_i$, *где* $\overset{\circ}{D}_i$ *— множество внутренних точек множества* D_i, *покрывают* C.

Доказательство. Пусть $C_1 = C \setminus \bigcup\limits_{i=2}^{m} U_i$. Множество C_1 компактно, как замкнутое подмножество компактного множества C, и $C_1 \subset U_1$. Для любой точки $x \in C_1$ найдется открытый шар K_x? с центром в этой точке, такой, что $\overline{K}_x \subset U_1$. В силу компактности C_1, из покрытия $\{K_x\}_{x\in C_1}$ можно выделить конечное покрытие $K_1, \ldots, K_p$ множества C_1. Положим $D_1 = \bigcup\limits_{j=1}^{p} \overline{K}_j$. Тогда D_1 компактно, $D_1 \subset U_1$ и $C_1 \subset \overset{\circ}{D}_1$. Ясно, что $C \subset \overset{\circ}{D}_1 \cup \left(\bigcup\limits_{i=2}^{m} U_i\right)$, так как если $x \in C_1$, то $x \in \overset{\circ}{D}_1$, а если $x \in C \setminus C_1$, то $x \in \bigcup\limits_{i=2}^{m} U_i$.

Пусть построены компактные множества $D_1, D_2, \ldots, D_{k-1}$, такие, что $D_i \subset U_i$, $i = 1, 2, \ldots, k-1$, и $\{\overset{\circ}{D}_1, \overset{\circ}{D}_2, \ldots, \overset{\circ}{D}_{k-1}, U_k, \ldots, U_m\}$ покрывает C. Положим, что

$$C_k = C \setminus (\overset{\circ}{D}_1 \cup \ldots \cup \overset{\circ}{D}_{k-1} \cup U_k \cup U_{k+1} \cup \ldots \cup U_m).$$

Снова C_k компактно, $C_k \subset U_k$ и, как и прежде, найдется компактное множество $D_k \subset U_k$, такое, что $C_k \subset \overset{\circ}{D}_k$. Как и ранее, убеждаемся, что $\{\overset{\circ}{D}_1, \ldots, \overset{\circ}{D}_k, U_{k+1}, \ldots, U_m\}$ образуют покрытие C.

Продолжая так далее, построим в конце концов систему множеств $\{D_i\}$, $i = 1, 2, \ldots, m$, с требуемыми свойствами. Лемма доказана.

Лемма 2. *Всякое открытое множество* $G \subset \mathbb{R}^n$ *может быть представлено в виде* $G = \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i$, *где все* A_i *компактны и* $A_i \subset \overset{\circ}{A}_{i+1}$.

Доказательство. Пусть $A_m = \left\{x \in G,\ |x| \le m,\ \rho(x, \Gamma) \ge \dfrac{1}{m}\right\}$, где Γ — граница множества D (если $\Gamma = \emptyset$, то второе условие опускается). Так как $A_m = \overline{K(0,m)} \cap \left[\overline{G} \setminus \bigcup\limits_{b \in \Gamma} K\left(b \dfrac{1}{m}\right)\right]$, то A_m — замкнутое, ограниченное, а следовательно, компактное множество. Ясно, что для любого элемента $x \in G$ найдется число m, такое, что $x \in A_m$. Остается показать, что $A_m \subset \overset{\circ}{A}_{m+1}$.

Итак, пусть $x \in A_m$ и число $\varepsilon > 0$ выбрано так, что:

$$1) \quad \varepsilon < \frac{1}{m} - \frac{1}{m+1} \le \frac{1}{2}; \qquad 2) \quad K(x, \varepsilon) \subset G.$$

Тогда $K(x, \varepsilon) \subset A_{m+1}$. В самом деле, если $y \in K(x, \varepsilon)$, то $|y| \le |x| + |x - y| \le m + \varepsilon < m + 1$, т.е. $y \in K(0, m+1)$.

С другой стороны, если предположить, что $\rho(y, \Gamma) < \dfrac{1}{m+1}$, то существует $z \in \Gamma$, такое, что $\rho(y, z) < \dfrac{1}{m+1}$. Но тогда

$$\rho(x, \Gamma) \le \rho(x, z) \le \rho(x, y) + \rho(y, z) < \varepsilon + \frac{1}{m+1} < \left(\frac{1}{m} - \frac{1}{m+1}\right) + \frac{1}{m+1} = \frac{1}{m},$$

т.е. $x \notin A_m$, что противоречит предположению.

Следовательно, $\rho(y, \Gamma) \ge \dfrac{1}{m+1}$. Таким образом, y удовлетворяет условиям, определяющим точку A_{m+1}, т.е. $K(x, \varepsilon) \subset A_{m+1}$, и лемма доказана.

Определение 1. Будем говорить, что отображение $f:\ A \to \mathbb{R}$, $A \subset \mathbb{R}^n$, *принадлежит классу* C^r на A, если оно определено, непрерывно и имеет непрерывные производные до r-го порядка включительно на некотором открытом множестве $\widetilde{A} \supset A$. Если функция f имеет на $\widetilde{A}$ непрерывные производные всех порядков, то будем говорить, что f *принадлежит классу* C^∞ на A. Ясно, что для того, чтобы функция f принадлежала, например, классу C^∞ на A необходимо и достаточно, чтобы она имела на $\widetilde{A}$ непрерывные частные производные всех порядков.

Если $A = \mathbb{R}^n$, то вместо того, чтобы говорить, что функция $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ принадлежит классу C^r (или C^∞) на $\mathbb{R}^n$, будем просто говорить, что функция f принадлежит классу C^r (соответственно C^∞).

Определение 2. *Носителем* $\operatorname{supp} f$ функции $f : A \to \mathbb{R}$, $A \subset \mathbb{R}^n$, называется замыкание множества $\{x \in A |\ f(x) \neq 0\}$.

Лемма 3. *Для любого компактного множества $A \subset \mathbb{R}^n$ и любого открытого множества $G \subset \mathbb{R}^n$, содержащего A, существует функция $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ класса C^∞ с компактным носителем, содержащимся в G, причем, $0 \leq f(x) \leq 1$ и $f(x) = 1$ для $x \in A$.*

Доказательство. Рассмотрим на $(-\infty, \infty)$ функцию $f_0(t)$, определенную равенством

$$f_0(t) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{t^2}}, & t > 0, \\ 0, & t \leq 0. \end{cases}$$

Легко проверить, что $f_0(t)$ — функция класса C^∞. Положим

$$g(t) = \frac{\int\limits_{-\infty}^{t} f_0(\tau) f_0(1-\tau)\, d\tau}{\int\limits_{-\infty}^{\infty} f_0(\tau) f_0(1-\tau)\, d\tau}$$

(входящие в это равенство интегралы лишь формально несобственные). Ясно, что $g(t) \in C^\infty$, $0 \leq g(t) \leq 1$, $g(t) = 0$ при $t \leq 0$, $g(t) = 1$ при $t \geq 1$.

Пусть $h(t) = g(t+1) - g(r)$. Функция $h(t)$ также класса C^∞ неотрицательна, равна нулю вне интервала $(-1, 1)$ и не превосходит единицы.

Кроме того, имеем:

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} h(t-k) = \lim_{N\to\infty} \sum_{k=-N}^{N} h(t-k) = \lim_{N\to\infty} [g(t+N+1) - g(t+N)] = 1 \qquad (1)$$

для любого фиксированного $t \in (-\infty, \infty)$. Так как все члены ряда (1) неотрицательны, то этот ряд абсолютно сходится.

Положив в (1) t равным последовательно $\frac{x^1}{\varepsilon}, \frac{x^2}{\varepsilon}, \ldots, \frac{x^n}{\varepsilon}$, где ε — некоторое положительное число, и перемножив полученные равенства, найдем:

$$\sum_{k^1, k^2, \ldots, k^n} h\left(\frac{x^1}{\varepsilon} - k^1\right) h\left(\frac{x^2}{\varepsilon} - k^2\right) \cdots h\left(\frac{x^n}{\varepsilon} - k^n\right) = 1. \qquad (2)$$

Суммирование распространяется здесь на всевозможные системы целях чисел $(k^1, k^2, \ldots, k^n)$. Перенумеруем эти системы целыми положительными числами $k = k(k^1, k^2, \ldots, k^n)$ и запишем (2) в виде

$$\sum_{k=1}^{n} \varphi_k(t) = 1, \qquad (3)$$

где

$$\varphi_k(t) = h\left(\frac{x^1}{\varepsilon} - k^1\right) h\left(\frac{x^2}{\varepsilon} - k^2\right) \cdots h\left(\frac{x^n}{\varepsilon} - k^n\right).$$

Функции $\varphi_k(x)$ действуют из $\mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}$, принадлежат классу C^∞, неотрицательны и такие, что $\varphi_k(x) = 0$, если $\left|\frac{x^i}{\varepsilon} - k^i\right| \geq 1$ хотя бы для одного i, т.е. вне открытого куба $|x^i - 2k^i| < \varepsilon$, $i = 1, 2, \ldots, n$, с центром в точке $(\varepsilon k^1, \varepsilon k^2, \ldots, \varepsilon k^n)$. Эти кубы (обозначим их Q_k) покрывают пространство $\mathbb{R}^n$ с конечным перекрытием в том смысле, что каждая точка $x \in \mathbb{R}^n$ принадлежит лишь конечному числу кубов. Например, в двумерном случае каждая точка покрывается не более чем девяти квадратами — один квадрат с центром в точке x, четыре квадрата, имеющие точку x вершиной, и четыре квадрата, у которых точка x лежит на середине стороны (рис. 64). Отсюда следует, что в данной точке $x \in \mathbb{R}^n$ лишь конечное число функций $\varphi_k(x)$ отлично от нуля.

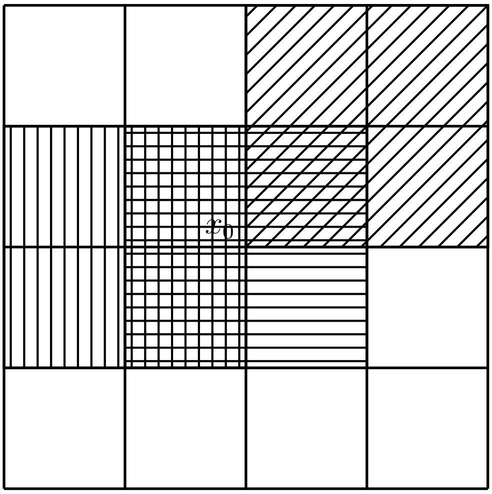

Рис. 64

Выберем число ε так, чтобы диагональ куба с ребром 2ε была меньше расстояния d от A до границы Γ множества G (если $\Gamma = \emptyset$, то ε можно брать произвольно). Если такой куб пересекается с A, то он целиком заключен в G.

Рассмотрим функции $\varphi_k(x)$, носители которых имеют общие точки с A. Так как A компактно и потому покрывается конечным числом кубов Q_k, а носитель функции φ_k содержится в замыкании куба Q_k, то функций φ_k, носители которых имеют общие точки с A, будет конечное число. Поэтому сумма таких функций $f(x) = \sum_k^* \varphi_k(x)$ будет функцией класса C^∞ с компактным носителем, содержащемся в G. Ясно, что функция $f(x)$ неотрицательна, в силу равенства (3) не превосходят единицы, и если $x \in A$, то

$$f(x) = \sum_k^* \varphi_k(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k(x) = 1,$$

так как функции $\varphi_k(x)$, не входящие в сумму $\sum^*$, имеют носители, не пересекающиеся с A и их значения в точке $x \in A$ равны нулю. Лемма доказана.

Определение 3. Пусть $\{U_\alpha\}$, $\alpha \in \mathfrak{A}$, — открытое покрытие множества $M \subset \mathbb{R}^n$. Семейство скалярных функций $\{\varphi_\beta\}$, $\beta \in \mathfrak{A}$, определенных на некотором открытом множестве G, содержащем M, называется *разбиением единицы*, подчиненным покрытию $\{U_\alpha\}$ множества M, если:

1) $0 \le \varphi_\beta(x) \le 1$ для любого $\beta \in \mathfrak{A}$ и любого $x \in G$;

2) для каждого $\beta \in \mathfrak{A}$ найдется $\alpha \in \mathfrak{A}$, такое, что

$$\operatorname{supp} \varphi_\beta \subset U_\alpha;$$

3) каждая точка $x \in M$ имеет окрестность, пересекающуюся лишь с конечным числом множеств $\operatorname{supp} \varphi_\beta$;

4) для любой точки $x \in M$ имеет место равенство

$$\sum_\beta \varphi_\beta(x) = 1.$$

Из условия 3) следует, что в каждой точке $x \in M$ лишь конечное число функций $\varphi_\beta(x)$ отлично от нуля, и потому сумма в условии 4) конечна для любой точки $x \in M$.

При рассмотрении открытых покрытий $\{U_\alpha\}$ множества $M \subset \mathbb{R}^n$ всегда можно ограничиться случаем не более чем счетного покрытия.

В самом деле, пусть $K_1, K_2, \ldots$ — открытые шары с центрами в рационально точках и рациональными радиусами. Таких шаров счетное множество, и они покрывают все $\mathbb{R}^n$, в частности, множество M. Если $x \in M$ и $x \in U_\alpha$, то существует шар K_p, такой, что $x \in K_p \subset U_\alpha$. Пусть $\{K_{p_i}\}$ — все шары, обладающие таким свойством. Их не более чем счетное множество. Для каждого K_{p_i} обозначим через U_{α_i} одно из содержащих его множество U_α. Ясно, что $M \subset \bigcup\limits_i U_{\alpha_i}$, и, таким образом, из покрытия $\{U_\alpha\}$ множества M мы выделили не более чем счетное подпокрытие $\{U_{\alpha_i}\}$.

Будем говорить, что разбиение единицы $\{\varphi_\beta\}$, $\beta \in \mathfrak{A}$, принадлежит классу C^r (или C^∞), если этому классу принадлежат все функции φ_β.

Теорема 1. *Для любого открытого покрытия* $\{U_i\}$, $i = 1, 2, \ldots$, *множества* $M \subset \mathbb{R}^n$ *существует разбиение единицы* $\{\varphi_j\}$, $j = 1, 2, \ldots$, *класса* C^∞, *подчиненное этому покрытию.*

Доказательство. Предположим, что M — открытое множество. По лемме 2, $M = \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i$, где A_i — компактны и $A_i \subset \overset{\circ}{A}_{i+1}$. Введем в рассмотрение множества

$$G_m = \overset{\circ}{A}_{m+1} \setminus A_{m-2} \quad \text{и} \quad B_m = A_m \setminus \overset{\circ}{A}_{m-1}\ .$$

Множества G_m — открытые, множества B_m — компактные и $B_m \subset G_m$. Кроме того, легко видеть, что $M = \bigcup\limits_{m=1}^{\infty} B_m$. В самом деле, пусть $x \in M$ и m_0 — наименьший номер, такой, что $x \in A_{m_0}$. Тогда $x \notin A_{m_0-1}$ и тем более $x \notin \overset{\circ}{A}_{m_0-1}$, т.е. $x \in B_{m_0}$, следовательно, $M \subset \bigcup\limits_{m=1}^{\infty} B_m$. Обратное включение очевидно.

Пусть $V_i^{(m)} = U_i \cap G_m$. Множества $V_i^{(m)}$ открыты и покрывают B_m. Так как множество B_m компактно, то можно выделить конечную совокупность $\{V_1^{(m)}, V_2^{(m)}, \ldots, V_{k_m}^{(m)}\}$, покрывающую B_m. По лемме 1, найдется конечная система компактных множеств $\{D_1^{(m)}, D_2^{(m)}, \ldots, D_{k_m}^{(m)}\}$, такая, что $D_i^{(m)} \subset V_i^{(m)}$ для $i = 1, 2, \ldots, k_m$ и $B_m \subset \bigcup \overset{\circ}{D}{}_i^{(m)}$. Теперь, по лемме 3, построим для каждых $m, i = 1, 2, \ldots, k_m$ функции $\psi_i^{(m)} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ класса C^∞ с компактными носителями, содержащимися в $V_i^{(m)}$, причем $0 \le \psi_i^{(m)}(x) \le 1$ и $\psi_i^{(m)}(x) = 1$ для $x \in D_i^{(m)}$.

Так как $G_m \cap G_p = \emptyset$ для $p > m + 2$, что ясно из построения множеств G_p, и так как $\operatorname{supp} \psi_i^{(p)} \subset V_i^{(p)} \subset G_p$, то если для точки $x \in B_m$ взять окрестность U_x, лежащую в G_m, эта окрестность может пересекаться лишь с конечным числом множеств $\operatorname{supp} \psi_i^{(p)}$, $p = 1, 2, \ldots, m + 2$, $i = 1, 2, \ldots, k_p$. Поэтому в подходящей окрестности каждой точки $x \in M = \sum\limits_{m=1}^{\infty} B_m$ сумма

$$\sum_{p=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{k_p} \psi_i^{(p)}(x)$$

содержит лишь конечное число слагаемых и, следовательно, является функцией класса C^∞.

Пусть $W_m = \sum\limits_{i=1}^{k_m} \overset{\circ}{B}{}_i^{(m)}$. Множество W_m открыто и содержит B_m. Из построения функций $\psi_i^{(m)}$ видно, что $\sum\limits_{i=1}^{k_m} \psi_i^{(m)}(x) \ge 1$ на W_m, и если через G обозначить объединение $\bigcup\limits_{m=1}^{\infty} W_m$, то $\sum\limits_{m=1}^{\infty} \sum\limits_{i=1}^{k_m} \psi_i^{(m)}(x) \ge 1$ для любого x из открытого множества $G \supset M$. Так как все функции $\psi_i^{(m)}$ принадлежат классу C^∞, то на G функции

$$\varphi_i^{(m)}(x) = \frac{\psi_i^{(m)}(x) f(x)}{\sum\limits_{i,m} \psi_i^{(m)}(x)}$$

$\Bigg($где f — функция, построенная в лемме 3 для $A = M$ и $G = \Bigg\{ x \,\Bigg|\, \sum\limits_{i,m} \psi_i^{(m)}(x) > 0 \Bigg\}\Bigg)$ также будут функциями класса C^∞. Более того:

1) $0 \le \varphi_i^{(m)}(x) \le 1$ для всех $x \in G$;
2) $\sum\limits_{i,m} \varphi_i^{(m)}(x) = 1$ для точек $x \in M$;
3) $\operatorname{supp} \varphi_i^{(m)} = \operatorname{supp} \psi_i^{(m)} \subset V_i^{(m)} \subset U_i$.

Занумеровав совокупность функций $\{\varphi_i^{(m)}(x)\}$ в последовательность $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x), \ldots, \varphi_j(x), \ldots$, получим требуемое разбиение единицы для случая открытого множества M.

Пусть теперь M — произвольное множество пространства $\mathbb{R}^n$ и $\{U_i\}$ — открытое покрытие M. Рассмотрим множество $H = \bigcup\limits_i U_i$. Это множество открыто, $\{U_i\}$ является открытым покрытием H и, по доказанному, существует разбиение единицы $\{\varphi_j\}$ класса C^∞, подчиненное покрытию $\{U_i\}$ множества H. Но легко видеть, что это же семейство функций будет разбиением единицы, подчиненным открытому покрытию $\{U_i\}$ множества M. Теорема доказана.

Замечания.

1. Из построения функции φ_j видно, что одному и тому же множеству U_i могут принадлежать носители многих функций φ_j.

2. Все $\operatorname{supp}\varphi_j$ — компактные множества.

Перейдем к распространению понятия интеграла. Будем говорить, что ограниченное множество $A \subset \mathbb{R}^n$ *кубируемо*, если оно имеет определенный объем, т.е. если $\int 1$ существует (см. § 2). Предположим, что множество A неограничено. Введем ограниченные множества

$$A_m = \{x \in A,\ |x| \leq m\} = A \cap \overline{K(0,m)}.$$

Если все множества A_m кубируемы и объемы $V(A_m)$ множеств A_m стремятся к конечному пределу $V(A)$, то множество A будем также называть *кубируемым* и число $V(A)$ принимать за объем множества A.

Пусть $A \subset \mathbb{R}^n$ — произвольное множество, $\{U_i\}$ — произвольное покрытие A, состоящее из ограниченных открытых кубируеыых множеств, например, открытых параллелепипедов, и $\Phi = \{\varphi_j\}$ — разбиение единицы, подчиненное этому покрытию.

Пусть, далее, $f: A \to \mathbb{R}$ — функция, такая, что произведение $f\varphi_j$ интегрируемо для любого j в смысле определения интеграла, данному в § 2.

Если ряд

$$\sum_{\varphi_j\in\Phi} \int\limits_{U_i\supset\operatorname{supp}\varphi_j} f\varphi_j \tag{4}$$

абсолютно сводится независимо от выбора покрытия $\{U_i\}$ и подчиненного ему разбиения единицы Φ и имеет всегда одну и ту же сумму, то будем говорить, что функция f интегрируема на A, и сумму ряда (4) примем за величину интеграла от f по A.

Итак,

$$\int\limits_A f = \sum_{\varphi_j\in\Phi} \int\limits_{U_i\supset\operatorname{supp} f\varphi_j} = \sum_{\varphi_j\in\Phi} \int\limits_A f\varphi_j. \tag{5}$$

Заметим, что ограниченность A и f или, если A и f ограничены, интегрируемость f на всем A не предполагается.

Лемма 4. *Если A — ограниченное кубируемое множество и $f: A \to \mathbb{R}$ — ограниченная интегрируемая на A функция, то новое определение интеграла совпадает с первоначальным.*

Доказательство. Пусть $\{U_i\}$ — открытое покрытие A, составленное из ограниченных курируемых множеств, и $\Phi = \{\varphi_j\}$ — подчиненное этому покрытию разбиение единицы. Так как φ_j непрерывны на A и произведение интегрируемых функций интегрируемо, то все интегралы $\int\limits_A f\varphi_j$ существуют в смысле первоначального определении. Далее, так как A — ограниченное кубируемое множество, то найдется такое кубируемое компактное множество $C \subset A$, что $V(A \setminus C) = \int\limits_{A\setminus C} 1 < \varepsilon$. В качестве C можно ваять, например, замыкание разности A и конечной системы параллелепипедов с достаточно малым объемом, покрывающих границу A.

Для всякой точки $x \in C$ найдется открытая окрестность этой точки, пересекающаяся лишь с конечным числом множеств $\operatorname{supp}\varphi_j$. Так как C компактно, конечное число таких G_x покрывают C. Следовательно, в совокупности Φ найдется лишь конечное число функций, не обращающихся тождественно в нуль на C. Для любого содержащего их конечного подсемейства $\Phi^* \subset \Phi$ рассмотрим разность

$$\int\limits_A f - \sum_{\varphi_j\in\Phi^*} \int\limits_{U_i\supset\operatorname{supp}\varphi_j} f\varphi_j,$$

где интеграл $\int\limits_A f$ понимается в смысле прежнего определения.

Имеем, полагая $M = \sup\ |f(x)|$:

$$\left|\int\limits_A f - \sum_{\varphi_j\in\Phi^*} \int\limits_{U_i\supset\operatorname{supp}\varphi_j} f\varphi_j\right| = \left|\int\limits_A \Bigl(1 - \sum_{\varphi_j\in\Phi^*} \varphi_j\Bigr) f\right| \le$$

$$\le \int\limits_A |f|\Bigl(1 - \sum_{\varphi_j\in\Phi^*} \varphi_j\Bigr) \le M \int\limits_A \sum_{\varphi_j\in\Phi\setminus\Phi^*} \varphi_j \le M \int\limits_{A\setminus C} 1 < M\varepsilon.$$

Так как число $\varepsilon > 0$ произвольно, то

$$\int\limits_A f = \sum_{\varphi_j\in\Phi} \int\limits_{U_i\supset\operatorname{supp}\varphi_j} f\varphi_j.$$

Лемма доказана.

Теорема 2. *Если A — открытое кубируемое множество и f — ограниченная на A функция, такая, что множество ее точек разрыва имеет меру, равную нулю, то интеграл $\int\limits_A f$ существует.*

Доказательство. Прежде всего заметим, что в силу непрерывности φ_j на A множество точек разрыва $f\varphi_j$ имеет меру, равную нулю, и все интегралы

$\int\limits_{U_i\supset\operatorname{supp}\varphi_j} f\varphi_j = \int\limits_A f\varphi_j$ существуют. Пусть, далее, $|f(x)| \le M$ для $x \in A$. Тогда $\int\limits_{U_i\supset\operatorname{supp}\varphi_j} |f\varphi_j| \le M\int\limits_{U_i}\varphi_j$ и для всякого конечного набора $\Phi^* \subset \Phi$

$$\sum_{\varphi_j\in\Phi^*}\left|\int\limits_{U_i\supset\operatorname{supp}\varphi_j} f\varphi_j\right| \le \sum_{\varphi_j\in\Phi^*} M\int\limits_A \varphi_j = M\int\limits_A\Bigg(\sum_{\varphi_j\in\Phi^*}\varphi_j\Bigg).$$

Из условия ограниченности множеств U_i и включения $\operatorname{supp}\varphi_j \subset U_i$ следует, что носитель каждой функции $\varphi_j \in \Phi$ есть компактное множество. Так как набор Φ^* содержит конечное число функций φ_j, то найдется натуральное число m, такое, что

$$\bigcup_{\varphi_j\in\Phi^*}\operatorname{supp}\varphi_j \subset K(0,m).$$

Но тогда

$$\sum_{\varphi_j\subset\Phi^*}\int\limits_A |f\varphi_j| \le M\int\limits_A\Bigg(\sum_{\varphi_j\in\Phi^*}\varphi_j\Bigg) \le M\int\limits_{A\cap K(0,m)} f = MV(A_m) \le MV(A).$$

Следовательно, частичные суммы ряда $\sum\limits_{\varphi_j\in\Phi}\left|\int\limits_A f\varphi_j\right|$ ограничены в совокупности, т.е. ряд (4) абсолютно сходится, причем независимо от выбора покрытий $\{U_i\}$ и подчиненного ему разбиения единицы $\Phi = \{\varphi_j\}$, обладающих необходимыми свойствами.

Действительно, пусть $\{U_i\}$ и $\{V_m\}$ — два таких покрытия, а $\Phi = \{\varphi_j\}$ и $\Psi = \{\psi_m\}$ — подчиненные им разбиения единицы. Легко проверить, что совокупность $\{\varphi_j \cdot \psi_m\}$ всевозможных попарных произведений, где $\varphi_j \in \Phi$, $\psi_m \in \Psi$, образует разбиение единицы, подчиненное покрытию $\{U_j \cap V_m\}$ множества A. Ясно также, что покрытие $\{U_j \cap V_m\}$ и разбиение единицы $\{\varphi_j \cdot \psi_m\}$ обладают свойствами, необходимыми для определения интеграла от f по множеству A или по его кубируемым подмножествам.

В частности, в силу леммы 4,

$$\int\limits_{U_i\supset\operatorname{supp}\varphi_j} f\varphi_j = \sum_{\psi_m\in\Psi}\int\limits_{I_i\cap V_m} f\varphi_j\psi_m,$$

поэтому

$$\sum_{\varphi_j\in\Phi}\int\limits_{U_i} f\varphi_j = \sum_{\varphi_j\in\Phi}\sum_{\psi_m\in\Psi}\int\limits_{U_j\cap\psi_m} f\varphi_j\psi_m. \tag{6}$$

Аналогично

$$\sum_{\psi_m\in\Psi}\int\limits_{V_m\supset\operatorname{supp}\psi_m} f\psi_m = \sum_{\psi_m\in\Psi}\sum_{\varphi_j\in\Phi}\int\limits_{U_j\cap\psi_m} f\varphi_j\psi_m. \tag{7}$$

В силу доказанной выше абсолютной сходимости ряда $\sum\limits_{\psi_m \in \Psi} \sum\limits_{\varphi_j \in \Phi} \int\limits_{U_j \cap U_m} f\varphi_j\psi_m$, правые части формул (6) и (7) равны, откуда следует независимость величины интеграла от выбора покрытия и подчиненного ему разбиения единицы. Теорема доказана.

Мы определим интеграл для случая неограниченного множества конечного объема и ограниченной функции. Если $S \subset \mathbb{R}^n$ — курируемое множество с бесконечным объемом, т.е. такое, что все A_m кубируемы, но $V(A_m) \to \infty$ при $m \to \infty$, то, предположив, что $f: \ A \to \mathbb{R}$ достаточно быстро стремится к нулю при $|x| \to \infty$, мы сможем доказать существование интеграла $\int\limits_A f$.

Интеграл $\int\limits_A f$ можно построить и для некоторых неограниченных функций, получив таким образом теоремы существования несобственных кратных интегралов, приводимые обычно в классических курсах математического анализа. Доказательство этих теорем будет хорошим упражнением для читателя.

Введение понятия о несобственных n-кратных интегралах с помощью разбиения единицы не является единственно возможным. Например, интегралы по неограниченным множествам пространства $\mathbb{R}^n$ можно ввести с помощью последовательности расширяющееся областей, как это было сделано в случае двойных, интегралов. Определенные таким образом n-кратные интегралы по неограниченным множествам оказываются абсолютно сходящимися, что согласуется с их определением с помощью ряда (5). Можно доказать, что оба определения несобственных интегралов, эквивалентны. Однако в целом ряде построений удобнее вводить несобственные интегралы с помощью разбиения единицы.

§ 4. Замена переменной под знаком интеграла

В главе VIII было установлено правило замены переменной под знаком однократного интеграла: если $f: \ [a,b] \to \mathbb{R}$ — непрерывная функция и g — монотонная непрерывно дифференцируемая функция, взаимно однозначно отображающая отрезок $[\alpha, \beta'$ на $[a,b]$, то

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \pm \int\limits_\alpha^\beta f[g(x)]g'(x)\,dx,$$

или в обозначениях, которые будут применяться в дальнейшем,

$$\int\limits_{[a,b]} f = \int\limits_{[\alpha,\beta]} (f \circ g)g'.$$

Знак «+» или «−» выбирается в зависимости от того, будет отображение $[\alpha, \beta]$ на $[a, b]$ сохранять или изменять ориентацию интервала, т.е. в зависимости от возрастания или убывания функции g. Но тогда, если учесть знак g', формулу замены переменной можно записать в виде

$$\int\limits_{g[\alpha,\beta]} f = \int\limits_{[\alpha,\beta]} (f \circ g)|g'|.$$

Именно в этой форме распространим эту формулу на многомерный случай.

Теорема 1. *Пусть $A \subset \mathbb{R}^n$ — открытое множество и $g: A \to \mathbb{R}^n$ — такое взаимно однозначное и взаимно непрерывно дифференцируемое отображение A на $g(A)$, что $\det g'(x) \neq 0$ для всех $x \in A$. Тогда для любой интегрируемой функции $f: g(A) \to \mathbb{R}$*

$$\int\limits_{g(A)} f = \int\limits_{A} (f \circ g) \cdot |\det g'| \qquad (1)$$

или

$$\int\limits_{B} f = \int\limits_{g^{-1}(B)} (f \circ g) \cdot |\det g'|,$$

где через B обозначено множество $g(A)$.

Доказательство теоремы проведен в несколько этапов.

1. Теорема верна, если A — открытый параллелепипед, g — линейное преобразование $f \equiv 1$, так как в этом случае $f'(x) \equiv g$ и равенство

$$\int\limits_{g(A)} 1 = \int\limits_{A} |\det g|$$

сводится к равенству $V(g(A)) = |\det g| \cdot V(A)$ между объемами исходного и линейно преобразованного параллелепипедов (см. § 1, с. 213).

2. Если теорема верна для отображений $g: A \to \mathbb{R}^n$ и $h: B \to \mathbb{R}^n$, причем $g(A) \subset B$, то она верна и для $(h \circ g): A \to \mathbb{R}^n$. В самом деле,

$$\int\limits_{(h \circ g)(A)} f = \int\limits_{h[g(A)]} f = \int\limits_{g(A)} (f \circ h)\,|\det h'| =$$

$$= \int\limits_{A} [(f \circ h) \circ g']\,[|deth'| \circ g]\,|\det g'| = \int\limits_{A} f \circ (h \circ g)\big\{|[\det h'] \circ g|\,|\det g'|\big\}.$$

В силу правила дифференцирования сложной функции, для любого $x \in A$ имеем:

$$(h \circ g)'(x) = h'[g(x)] \circ g'(x),$$

и так как определитель композиции двух линейных преобразований равен произведению определителей этих преобразований, то

$$\det(h \circ g)'(x) = \det h'[g(x)]\,\det g'(x),$$

или, более коротко,

$$\det(h \circ g)' = [\det h'] \circ g \cdot \det g'.$$

Поэтому предыдущее равенство может быть переписано в виде

$$\int\limits_{(h\circ g)(A)} f = \int\limits_{A} f \circ (h \circ g) \cdot |\det(h \circ g)'|,$$

и требуемое доказано.

3. Предположим, что существует такое открытое покрытие $\mathfrak{U} = \{U_i\}$ множества A, что

$$\int\limits_{g(U_i)} f = \int\limits_{U_i} (f \circ g)\,|\det g'|$$

для любого $u_i \in \mathfrak{U}$ и любой интегрируемой функции f. Тогда теорема верна для всего множества A.

Так как отображение $g: \ A \to g(A)$ взаимно непрерывно, то все $g(U_i)$ — открытые множества (см. § 1 гл. XII), и семейство $\{g(U_i)\}$ образует открытое покрытие множества $g(A)$. Пусть $\Psi = \{\psi_i\}$ — подчиненное этому покрытию разбиение единицы класса C^1. Если $N_{ij} = \{x \in U_i|\ (\psi_j \circ g)(x) \neq 0\}$, то, как легко видеть, $g(N_{ij}) = \{y \in g(U_i)|\ \psi_j(y) \neq 0\}$, т.е. $\operatorname{supp}(\psi_j \circ g) = \overline{N}_{ij}$ и $\operatorname{supp}\psi_j = \overline{g(N_{ij})}$. Но в силу непрерывности отображения g имеем $g(\overline{N}_{ij}) \subset \overline{g(N_{ij})}$ (проверьте!) и так как $\operatorname{supp}\psi_j \subset g(U_i)$, то $g(\overline{N}_{ij}) \subset g(U_i)$, откуда $\operatorname{supp} 9\psi_j \circ g) = \overline{N}_{ij} \subset U_i$. Следовательно, $\{\psi_j \circ g\}$ есть разбиение единицы класса C^1, подчиненное покрытию $\{U_i\}$. Поэтому, пользуясь определение интеграла из § 3, получим:

$$\int\limits_{g(A)} f = \sum_{\psi_j \in \Psi} \int\limits_{g(U_i)} f\psi_j = \sum_{\psi_j \in \Psi} \int\limits_{U_i} [(\psi_j f) \circ g] \cdot |\det g'| =$$

$$= \sum_{\psi_j \in \Psi} \int\limits_{U_i} (\psi_j \circ g)\bigl\{(f \circ g)\,|\det g'|\bigr\} = \int\limits_{A} (f \circ g)\,|\det g'|,$$

что требовалось доказать.

4. Установим теперь формулу

$$\int\limits_{g(A)} 1 = \int\limits_{A} |\det g'|, \tag{2}$$

являющуюся многомерным аналогом формулы, выражающей площадь плоской фигуры с помощью криволинейных координат. Это наиболее сложный этап в доказательстве теоремы.

Будем устанавливать равенство (2) индукцией по числу n измерений пространства. Для $n = 1$ формула верна. Допустим, что она верна для размерности $(n-1)$. В силу 3, достаточно доказать, что для каждой точки $a \in A \subset \mathbb{R}^n$ найдется содержащий эту точку открытый параллелепипед U, для которого формула

(2) верна (так как A может быть покрыто счетной системой таких параллелепипедов). Далее, можно считать, что $g'(A) = I$, потому что если формула верна для отображения $[g'(a)]^{-1} \circ g$ и, согласно 1, верна для линейного отображения $[g'(a)]$, то, в силу 2, она верна и для отображения g. В то же время

$$\{[g'(a)]^{-1} \circ g\}'(a) = I.$$

Введем отображение $h: A \to \mathbb{R}^n$, полагая $h(x) = (g^1(x), g^2(x), \ldots, g^{n-1}(x), x^n)$. Так как $g'(a) = I$, то ясно, что и $h'a) = I$. Следовательно, по теорема об обратном отображении, найдется открытое множество V', $a \in V' \subset A$, такое, что для всех $x \in V'$ $\det h'(x) \neq 0$ и h взаимно однозначно отображает V' на $h(V')$. Обратное отображение h^{-1} будет так же как и h, непрерывно дифференцируемо.

Определим, далее, отображение $k: \ h(V') \to \mathbb{R}^n$, полагая $k(y) = (y^1, y^2, \ldots, y^{n-1}, g^n[h^{-1}(y)])$. Для $x \in V'$ имеем $k[h(x)] = g(x)$, и по правилу дифференцирования сложной функции,

$$g'(x) = k'[h(x)] \circ h'(x).$$

Отсюда при $x = a$ следует, что $k'[h(a)] = I$. Поэтому на некотором множестве W, таком, что $h(a) \in W \subset h(V')$, отображение k взаимно однозначно и $\det k'(y) \neq 0$. Положим $V = h^{-1}(W)$. Так как $g = k \circ h$, где $h: \ V \to \mathbb{R}^n$, $k: \ W \to \mathbb{R}^n$, причем $h(V) \subset W$, то как показано в 2, достаточно доказать формулу (2) для h и k в отдельности.

Пусть $U \subset V$ — параллелепипед вида $P \times (a^n, b^n)$, где P — открытый параллелепипед в $\mathbb{R}^{n-1}$. Так как функция h не изменяет последней координаты, то $h(U) = h(P) \times (a^n, b^n)$. По теореме Фубини,

$$\int\limits_{h(U)} 1 = \int\limits_{(a^n,b^n)} \Bigg(\int\limits_{h_{x^n}(P)} 1 \Bigg),$$

где $h_{x^n}(P): \ P \to \mathbb{R}^{n-1}$ — функция, определенная для каждого фиксированного значения $x^n \in (a^n, b^n)$ равенством

$$h_{x^n}(x^1, x^2, \ldots, x^{n-1}) =$$

$$= (g^1(x^1, \ldots, x^{n-1}, x^n), g^2(x^1, \ldots, x^{n-1}, x^n), \ldots, g^{n-1}(x^1, \ldots, x^{n-1}, x^n)).$$

Отображение h_{x^n} для каждого $x^n \in (a^n, b^n)$ взаимно однозначно и $\det h'_{x^n}(x^1, \ldots, x^{n-1}) = \det h'(x^1, \ldots, x^n)$, так как определитель в левой части этого равенства есть верхний левый угловой минор $(n-1)$-го порядка определителя, стоящего справа, дополнительный к элементу, равному единице. Поэтому можно применить формулу замены переменной для интегралов $\int\limits_{h_{x^n}(P)} 1$ кратности $n-1$, в результате чего получим:

$$\int\limits_{h_{x^n}(P)} 1 = \int\limits_{P} |\det h'_{x^n}(x^1, \ldots, x^{n-1})| = \int\limits_{P} |\det h'(x^1, \ldots, x^n)|.$$

Но тогда

$$\int\limits_{h(U)} 1 = \int\limits_{a^n,b^n)} \Bigg(\int\limits_{h_{x^n}(P)} 1 \Bigg) = \int\limits_{(a^n,b^n)} \Bigg(\int\limits_{P} |\det h'(x)| \Bigg) = \int\limits_{U} |\det h'|,$$

и формула (2) для функций h доказана.

Обратимся к функции k. Пусть снова U — параллелепипед вида $P \times (a^n, b^n) \subset h(V)$. Введем отображение $k_P: \ (a^n, b^n) \to \mathbb{R}$ по формуле

$$k_P(x^n) = g^n(h^{-1}(x))$$

при фиксированных $x^1, x^2, \ldots, x^{n-1}$. Снова имеем:

$$k'_P(x^n) = [g^n(h^{-1}(x))]' = \det k'(x) \neq 0,$$

и отображение k_P взаимно однозначно. Поэтому

$$\int\limits_{k_P(a^n,b^n)} 1 \int\limits_{(a^n,b^n)} |k'_P(x^n)| = \int\limits_{(a^n,b^n)} |\det k'(x)|.$$

По теореме Фубини,

$$\int\limits_{k(U)} 1 = \int\limits_{P} \Bigg(\int\limits_{k_P(a^n,b^n)} 1 \Bigg) = \int\limits_{P} \Bigg(\int\limits_{(a^n,b^n)} |\det k'(x)| \Bigg) = \int\limits_{U} |\det k'|,$$

и формула (2) для отображения k также доказана.

5. Теперь нетрудно завершить доказательство теоремы, при этом, в силу 3, достаточно рассмотреть интеграл $\int\limits_{Q} f$, где Q — открытый параллелепипед в $\mathbb{R}^n$.

Перепишем формулу (1) в виде

$$\int\limits_{Q} f = \int\limits_{g^{-1}(Q)} (f \circ g)|\det g'|. \tag{3}$$

Пусть T — разбиение параллелепипеда Q на частичные параллелепипеды $Q_1, Q_2, \ldots, Q_r$. Положим $m_i = \inf\limits_{Q_i} f$, $M_i = \sup\limits_{Q_i} f$. Тогда, поскольку формула (3) верна для $f = \text{const}$,

$$\sum_{i=1}^{r} m_i V(Q_i) = \sum_{i=1}^{r} \int\limits_{Q_i} m_i = \sum_{i=1}^{r} \int\limits_{g^{-1}(Q_i)} m_i |\det g'| =$$

$$= \sum_{i=1}^{r} \int\limits_{g^{-1}(Q_i)} (m_i \circ g)|\det g'| \leq \sum_{i=1}^{r} \int\limits_{g^{-1}(Q_i)} (f \circ g)|\det g'| = \int\limits_{g^{-1}(Q_i)} (f \circ g)|\det g'|,$$

откуда

$$\int\limits_{Q} f = \underline{\int\limits_{Q}} f = \sup \sum_{i=1}^{r} m_i\, V(Q_i) \le \int\limits_{g^{-1}(Q)} (f \circ g) |\det g'|.$$

Аналогично

$$\int\limits_{g^{-1}(Q)} (f \circ g) |\det g'| \le \inf\ \sum_{i=1}^{r} M_i\, V(Q_i) \le \overline{\int\limits_{Q}} f = \int\limits_{Q} f.$$

Следовательно,

$$\sum_{i=1}^{r} m_i\, V(Q_i) \le \int\limits_{g^{-1}(Q)} (f \circ g) |\det g'| \le \sum_{i=1}^{r} M_i\, V(Q_i). \tag{4}$$

При неограниченном измельчении разбиения T обе крайние суммы и неравенство (4) в силу интегрируемости f стремятся к $\int\limits_{Q} f$. Поэтому из (4) в пределе получим:

$$\int\limits_{Q} f = \int\limits_{g^{-1}(Q)} (f \circ g) |\det g'|,$$

и теорема доказана.

Доказательство этой теоремы представляет собой пример того, как с помощью разбиения единицы осуществляется переход от локального результата — замены переменной под знаком интеграла по окрестности точки, к глобальному результату — замене переменной под знаком интеграла по всему множеству.

Глава XIX

КРИВОЛИНЕЙНЫЕ И ПОВЕРХНОСТНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

§ 1. Понятие поверхности

В § 3 гл. IX и § 3 гл. XVII мы определяли площади некоторых специальных видов поверхностей, либо возникающих при вращении плоской кривой вокруг оси, лежащей в той же плоскости, либо являющихся графиками скалярных функций $z = f(x, y)$, непрерывных на квадрируемых множествах $G \subset \mathbb{R}^2$. Однако эти классы поверхностей слишком узки, так как, например, поверхность трехосного эллипсоида $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ не попадает ни в один из них. Введем поэтому более общее понятие поверхности, охватывающее многие важные для анализа случаи.

Дадим два предварительных определения.

Определение 1. Связное открытое множество $G \subset \mathbb{R}^n$ называется *областью* в этом пространстве.

Определение 2. Пусть даны два множества $A \subset \mathbb{R}^n$ и $B \subset \mathbb{R}^m$. Эти множества называются *гомеоморфными*, если существует взаимно однозначное и взаимно непрерывное, отображение f множества A на множество B. Отображение f называется при этом *гомеоморфизмом.* Если дополнительно отображения f и f^{-1} имеют непрерывные производные до порядка k включительно в некоторых открытых множествах C и H, содержащих соответственно A и B, то отображение f называется *диффеоморфизмов* класса C^k.

В дальнейшем, говоря о непрерывной дифференцируемости до некоторого порядка функций f на множестве $A \subset \mathbb{R}^n$, будем понимать под этим непрерывную дифференцируемость до такого порядка функции f в некотором открытом множестве W, содержащим A.

Определение поверхности. Пусть G — область на плоскости u^1Ou^2, ограниченная гладкой, замкнутой, самонепересекающейся кривой Γ. Непрерывно дифференцируете отображение

$$f:\ \overline{G} \to \mathbb{R}^3,$$

такое, что

$$\left(\frac{D(f^1, f^2)}{D(u^1, u^1)}\right)^2 + \left(\frac{D(f^2, f^3)}{D(u^1, u^1)}\right)^2 + \left(\frac{D(f^3, f^1)}{D(u^1, u^1)}\right)^2 > 0 \qquad (1)$$

всюду в $\overline{G}$, называется *гладкой поверхностью* S в пространстве $\mathbb{R}^3$.

Равенства

$$x^1 = f^1(u^1, u^2), \quad x^2 = f^2(u^1, u^2), \quad x^3 = f^3(u^1, u^2)$$

называют при этом *параметрическими уравнениями*, или *параметрическим заданием* поверхности, а переменные u^1, u^2 — *параметрами.*

Пуста G^* — область на плоскости v^1Ov^2 и S^* — гладкая поверхность, определенная непрерывно дифференцируемым отображением

$$h : \ G^* \to \mathbb{R}^3.$$

Будем считать поверхности S и S^* тождественными, если существует непрерывно дифференцируемый гомеоморфизм φ множества G^* на множество $\overline{G}$, такой, что $f \circ \varphi = h$, т.е.

$$f^i[\varphi^1(v^1, v^2), \varphi^2(v^1, v^2)] = h^i(v^1, v^2), \qquad i = 1, 2, 3,$$

и для любой точки $(v^1, v^2) \in G^*$ $\dfrac{D(u^1, u^2)}{D(v^1, v^2)} \neq 0$. Отображения $f : \ \overline{G} \to \mathbb{R}^3$ и $h : \ \overline{G}^* \mathbb{R}^3$ называются *различными параметризациями* одной и той же поверхности S.

Если отображение f k раз непрерывно дифференцируемо в $\overline{G}$, то говорят, что поверхность, определяемая этим отображением, принадлежит классу C^k. В этом случае переход от одной параметризации поверхности к другой должен осуществляться с помощью диффеоморфизма класса C^k.

ЗАМЕЧАНИЯ.

1. Мы не предполагаем, что отображение $f : \ \overline{G} \to \mathbb{R}^3$, определяющее поверхность S, является взаимно однозначном, так что могут существовать различные точки замыкания области G, отображающиеся в одну и ту же точку $x \in \mathbb{R}^3$. Такая точка поверхности S называется *кратной.* Однако, как мы увидим далее, локально, т.е. в окрестности каждой точки, поверхность можно задать с помощью однозначного отображения.

2. Подчеркнем, что поверхность S мы рассматриваем не просто как множество точек пространства $\mathbb{R}^3$, а как отображение или как пары точек $(u, f(u)) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^3$, где для каждого образа $x = f(u)$ указан его прообраз u, потому что представление о поверхности только как о множестве точек пространства $\mathbb{R}^3$ дает о ней недостаточную информацию. Так, не принимая во внимание отображения f, порождающего поверхность S, нельзя установить, является точка $x \in S$ кратной или простой. Более того, точки $(u_1, f(u_1))$ и $(u_2, f(u_2))$ поверхности при $u_1 \neq u_2$ и $f(u_1) = f(u_2)$ считаются различными.

ПРИМЕРЫ.

1. Отображение f квадрата $0 \leq u^1 \leq 2\pi$, $0 \leq u^2 \leq 2\pi$, определяемое координатными функциями

$$\begin{aligned} x^1 &= f^1(u^1, u^2) = a\cos u^1 \sin u^2, \\ x^2 &= f^2(u^1, u^2) = b\sin u^1 \sin u^2, \\ x^3 &= f^3(u^1, u^2) = c\cos u^2, \end{aligned}$$

есть часть поверхности эллипсоида с полуосями a, b, c и центром в начале координат, лежащая в первом октанте.

Точка $M_0(u_0^1, u_0^2)$ поверхности S называется *внутренней*, если существует окрестность $U(M_0, \varepsilon)$ этой точки, такая, что множество $U(M_0, \varepsilon) \setminus S$ несвязно. Точка, не являющаяся внутренней, называется *граничной* точкой. Несколько ниже мы увидим, что все граничные точки поверхности $S : \overline{G} \to \mathbb{R}^3$ принадлежат пространственной кривой $f : \Gamma \to \mathbb{R}^3$, где Γ — плоская кривая, ограничивающая G.

На границе Γ области G, или на всякой кривой, можно выбрать ту или иную ориентацию (см. § 5 гл. III). Принято считать *положительным* такое направление движения вдоль Γ, при котором ближайшие к Γ точки области остаются слева от Γ. Эту ориентацию Γ называют ориентацией, *индуцированной* областью G. На чертеже (рис. 65) стрелками указана положительная ориентация границы Γ области G.

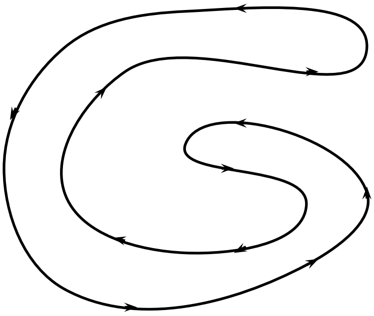

Рис. 65

Если отображение $f : G \to \mathbb{R}^3$ определяет поверхность S, то, как легко видеть, $f(\Gamma)$ будет кривой в пространстве, а именно, если Γ задана параметрический уравнениями

$$u^1 = \varphi^1(t), \quad u^2 = \varphi^2(t), \qquad \alpha \le t \le \beta,$$

то $f(\Gamma)$ задается отображением

$$x^1 = f^1[\varphi^1(t), \varphi^2(t)], \quad x^2 = f^2[\varphi^1(t), \varphi^2(t)], \quad x^3 = f^3[\varphi^1(t), \varphi^2(t)], \qquad \alpha \le t \le \beta.$$

Отсюда следует, что выбор ориентации на Γ определяет ориентацию на $f(\Gamma)$, которая называется *индуцированной* ориентацией кривой Γ.

Если кривая $f(\Gamma)$ состоит сплошь из граничных точек поверхности S, то для некоторых классов поверхностей на $f(\Gamma)$ можно определить ориентацию, индуцированную поверхностью S, которая может не совпадать с ориентацией, индуцированной кривой Γ. О таком способе ориентации границы поверхности мы скажем несколько ниже.

Пусть S — поверхность, заданная отображением $f : \overline{G} \to \mathbb{R}^3$. Если границу Γ области G можно разбить на две части Γ_1 и Γ_2 так, что $f(\Gamma_1)$ и $f(\Gamma_2)$, как множества в $\mathbb{R}^3$, совпадают и ориентации кривых $f(\Gamma_1)$ и $f(\Gamma_2)$, индуцированные ориентацией Γ, противоположны, то поверхность называется *замкнутой*. В противном случае поверхность называется *незамкнутой*, а кривая $f(\Gamma)$ — *краем* поверхности S.

Так, в пространстве $Oxyz$ сфера

$$\begin{aligned} x &= R\cos\theta\cos\varphi, \\ y &= R\cos\theta\sin\theta, \\ z &= R\sin\theta, \end{aligned}$$

$$G = \left\{(\varphi, \theta)|\ 0 \le \varphi \le 2\pi,\ -\frac{\pi}{2} \le \theta \le \frac{\pi}{2}\right\}$$

— замкнутая поверхность, и соответствующее разбиение границы Γ имеет вид:

$$\Gamma_1 = \left\{(\varphi, \theta)|\ \varphi = 0, -\frac{\pi}{2} \le \theta \le \frac{\pi}{2}\right\} \cup \left\{(\varphi, \theta)|\ 0 \le \varphi \le 2\pi,\ \theta = -\frac{\pi}{2}\right\},$$

$$\Gamma_2 = \left\{(\varphi, \theta)|\ \varphi = 2\pi, -\frac{\pi}{2} \le \theta \le \frac{\pi}{2}\right\} \cup \left\{(\varphi, \theta)|\ 0 \le \varphi \le 2\pi,\ \theta = \frac{\pi}{2}\right\}.$$

Пусть $N_0 = (u_0^1, u_0^2)$ — внутренняя точка области G. Согласно условию (1), по крайней мере один из входящих в это условие определителей, например $\dfrac{D(f^1, f^2)}{D(u^1, u^2)}$, отличен от нуля в этой точке. В силу непрерывности частных производных координатных функций, определитель $\dfrac{D(f^1, f^2)}{D(u^1, u^2)}$ будет отличен от нуля и в некоторой окрестности $U(N_0, \delta)$ точки N_0. Но тогда, по теореме об обратном отображении, существует открытое множество $A \subset G$, содержащее точку $N_0 = (u_0^1, u_0^2)$, и открытое множество B на плоскости x^1Ox^2, содержащее точку $P(x_0^1, x_0^2)$, $x_0^1 = f^1(u_0^1, u_0^2)$, $x_0^2 = f^2(u_0, u_0^2)$, такие, что отображение

$$\left.\begin{aligned} x^1 &= f^1(u^1, u^2), \\ x^2 &= f^2(u^1, u^2) \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

A на B взаимно однозначно, тая что существует обратное отображение

$$\left.\begin{aligned} u^1 &= g^1(x^1, x^2), \\ u^2 &= g^2(x^1, x^2) \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

B на A, непрерывно дифференцируемое в B. Подставив выражения для u^1 и u^2 из (3) в равенство $x^3 = f^3(u^1, u^2)$, получим, что в окрестности точки (x_0^1, x_0^2, x_0^3), $x_0^3 = f^3(u_0^1, u_0^2)$, т.е. связная часть гладкой поверхности S (в окрестности точки (x_0^1, x_0^2, x_0^3)) задается явным выражением одной из координат как непрерывно дифференцируемой функции двух других координат.

Например, в окрестности точки $\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, \frac{c}{2}\right)$ трехосный эллипсоид задается равенством

$$z = c\sqrt{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2 - \left(\frac{y}{b}\right)^2}.$$

Если (u_0^1, u_0^2) — внутренняя точка области G, то, согласно предыдущим рассмотрениям, $M_0(x_0^1, x_0^2, x_0^3)$ есть внутренняя точка гладкой поверхности S. В самом деле, в этом случае в окрестности точки M_0 поверхность S задается явным уравнением, например,

$$x^3 = F(x^1, x^2),$$

с непрерывно дифференцируемой функцией F (рис. 66). Это означает, что достаточно малый шар с центром в M_0 рассекается поверхностью S на две несвязанные между собой части, лежащие по отношению к положительному направлению оси Ox^3 над поверхностью S и под этой поверхностью.

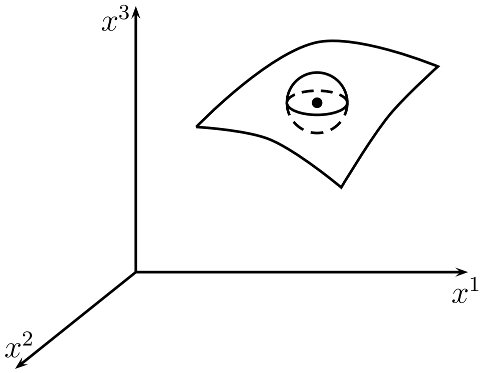

Рис. 66

Введем теперь понятие о стороне поверхности. Если S гладкая поверхность, то можно доказать (ом. М.М. Постников, «Линейная алгебра и дифференциальная геометрия», М. , 1979; Г.М. Фихтенгольц, «Курс дифференциального и интегрального исчисления», М.: 1970), что касательные ко всем гладким кривым, лежащим на S и проходящим через внутреннюю точку поверхности, расположены в одной плоскости, которая называется *касательной плоскостью* к поверхности в данной точке. Прямая, проходящая через точку касания перпендикулярно к касательной плоскости, называется *нормалью* к поверхности. Если

$$x^3 = F(x^1, x^2)$$

— явное уравнение поверхности в окрестности внутренней точки, то уравнение нормали в точке $M_0(x_0^1, x_0^2, x_0^3)$ этой окрестности имеет вид:

$$\frac{x^1 - x_0^1}{F'_{x^1}(x_0^1, x_0^2)} = \frac{x^2 - x_0^2}{F'_{x^1}(x_0^2, x_0^2)} = \pm(x^3 - x_0^3), \tag{4}$$

где знак в правой части выбирается в зависимости от того, острый или тупой угол с положительным направлением оси Ox^3 составляет единичный вектор нормали. Из уравнения (4) видно, что в окрестности внутренней точки гладкой поверхности направление нормали изменяется непрерывно.

Пусть в некоторой внутренней точке M_0 гладкой поверхности S выбрано одно из двух противоположных направлений нормали. Если при обходе вдоль любого замкнутого гладкого контура C, лежащего на S и не имеющего общих точек с границей этой поверхности, нормаль, непрерывно изменяясь вдоль C, по возвращении в точку M_0 вернется к первоначальному направлению, то поверхность S называется *ориентируемой*, или *двусторонней*, и выбор одного из двух направлений нормали в какой-либо внутренней точке поверхности определяет сторону поверхности. Так, полусфера $x^3 = \sqrt{1-(x^1)^2-(x^2)^2}$ есть двусторонняя поверхность, имеющая нижнюю и верхнюю (по отношению к положительному направлению оси Ox^3) стороны. Если существует замкнутый путь, состоящий из одних внутренних точек поверхности, при обходе которого направление нормали, непрерывно изменяясь, переходит в противоположное, то поверхность S называется *односторонней* или *неориентируемой*.

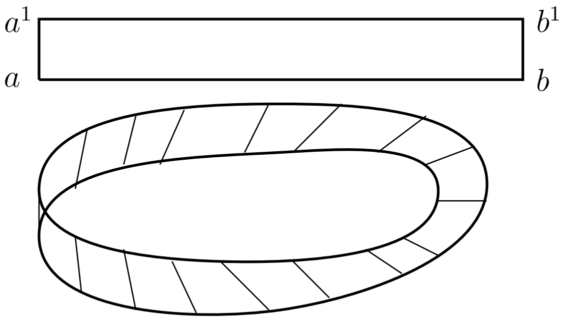

Рис. 67

Примером односторонней поверхности может служить *лист Мёбиуса*, который получается, если у вытянутого прямоугольника (ленты) склеить два противоположных коротких края, повернув предварительно один из них на 180°, склеиваются (отождествляются) края aa^1 и bb^1 (рис. 67) так, чтобы направления стрелок совпали. Лист Мёбиуса — незамкнутая поверхность с краем, являющимся замкнутой кривой, гомеоморфной окружности. Если взять полусферу, краем которой будет тоже окружность, и отождествив края обеих поверхностей (т.е. склеить их по границам), то получим замкнутую неориентированную поверхность, называемую *бутылкой Клейна*. Эта поверхность в трехмерной пространстве самопересекается, однако доказывается, что в пространство высшей размерности ее можно, предварительно непрерывно деформировав, вложить без самопересечения, т.е. гомеоморфно отобразить на замкнутую двумерную самонепересекающуюся поверхность в таком просранстве.

§ 2. Задачи, приводящие к криволинейным и поверхностным интегралам

Рассмотрим тяжелую нить, т.е. кривую $\smile{AB}$, обладающую некоторой массой. Допустим, что кривая $\overset{\smile}{AB}$ спрямляема, имеет длину l и нам известна масса любого участка $\overset{\smile}{MM'}$ этой нити, так что масса дуга $\overset{\smile}{AM}$ есть функция $m(s)$ натуральной координаты точки M (см. § 8 гл. IX). Если нить однородна, т.е. массы всех ее участков, имеющих одинаковую длину, равны, то отношение массы нити к ее длине, т.е. масса участка единичной длины, называется *плотностью* нити. Если нить неоднородна, назовем средней плотностью $\rho_{\text{ср}}(\overset{\smile}{MM'})$ участка $\overset{\smile}{MM'}$ отношение $\dfrac{\Delta m}{\Delta s}$, где Δm — масса, Δs — длина $\overset{\smile}{MM'}$. Пусть существует

$$\lim_{M'\to M} \frac{\Delta m}{\Delta s}.$$

Этот предел называют *плотностью* $\rho(s)$ нити в точке $M(s)$ с натуральной координатой s.

Допустим теперь, что нам известна плотность $\rho(s)$ нити и надо определить ее массу m. Для этого разобьем нить на части

$$\overset{\smile}{M_iM_{i+1}}, \qquad i = 0, 1, \ldots, (n-1), \qquad M_0 = A, \quad M_n = B,$$

и примем приближенно плотность ρ участка $\overset{\smile}{M_iM_{i+1}}$ постоянной и равной $\rho(s_i)$. Тогда масса дуги $\overset{\smile}{M_iM_{i+1}}$ будет приближенно равна $\rho(s_i)$ дл. $(\overset{\smile}{M_iM_{i+1}})$. Здесь s_i — координата точки M_i; $\Delta s_i =$ дл. $(\overset{\smile}{M_iM_{i+1}})$. Масса нити будет приближенно равна $\sum\limits_{i=0}^{n-1} \rho(s_i)\,\Delta s_i$, и так как ошибка, очевидно, тем меньше, чем меньше $\lambda_n = \max\limits_i \Delta s_i$, то масса нити

$$m = \lim_{\lambda_n\to 0} \sum_{i=0}^{n-1} \rho(s_i)\,\Delta s_i. \tag{1}$$

Таким, образом, предыдущие рассмотрения (разумеется, нестрогие) приводят к пределам сумм вида (1). Отметим, что в этих рассмотрениях несущественно, какая, из точек A и B принята за начало, а какая за конец кривой $\overset{\smile}{AB}$.

Рекомендуем читателю сравнить изложенное с концом § 4 гл. IX.

Возьмем снова ту же кривую $\overset{\smile}{AB}$, только теперь будем рассматривать ее как траекторию материальной точки $M(x, y)$, движущейся вдоль $\overset{\smile}{AB}$ под действием переменной силы $F = F(x, y)$. Подсчитаем работу, совершаемую силой при перемещении точки M вдоль кривой $\overset{\smile}{AB}$ из положения A в положение B.

Снова разобьем $\overset{\smile}{AB}$ на части $\overset{\smile}{M_iM_{i+1}}$, $i = 0, 1, \ldots, (n-1)$, и будем считать, что сила F вдоль $\overset{\smile}{M_iM_{i+1}}$ постоянна и равна F_i — значению силы в точке M_i. Кроме того, заменим дугу хордой $\overline{M_iM_{i+1}}$. Тогда работа силы вдоль участка $\overset{\smile}{M_iM_{i+1}}$ будет приближенно равна $|F_i|$ дл. $(\overline{M_iM_{i+1}}\ \cos\varphi_i$, где φ_i — угол между направлением силы и направлением отрезка $\overline{M_iM_{i+1}}$, а вся работа силы будет приближенно равна $\sum\limits_{i=0}^{n-1} |F_i|$ дл.$(\overline{M_iM_{i+1}})\ \cos\varphi$. Точное значение работы силы можно считать равным

$$\lim_{\lambda_n\to 0} \sum_{i=0}^{n-1} |F_i|\,\text{дл.}\,(\overline{M_iM_{i+1}})\ \cos\varphi_i.$$

Преобразуем это выражение. Мы имеем, что $\cos\varphi_i = \cos\alpha_i\cos\alpha'_i + \cos\beta_i\cos\beta'_i$, где α_i и β_i — углы, образованные положительными направлениями осей координат с вектором силы F_i и отрезком $\overline{M_iM_{i+1}}$). Но тогда $|F_i|\,\cos\alpha_i = P(x_i, y_i)$, $|F_i|\,\cos\beta_i = Q(x_i, y_i)$, где $P(x, y)$, $Q(x, y)$ — проекции силы F на оси координат, и дл. $(\overline{M_iM_{i+1}})\cos\beta'_i = \Delta y_i$, дл. $(\overline{M_iM_{i+1}})\,\cos\alpha'_i = \Delta x^i$, где Δx_i, Δy_i — приращения координат при переходе от точки M_i к точке M_{i+1}. Итак, для работы W силы мы получаем выражение

$$W = \lim_{\lambda_n\to 0}\sum_{i=0}^{n-1}\bigl\{P(x_i, y_i)\,\Delta x_i + Q(x_i, y_i)\,\Delta y_i\bigr\} \tag{2}$$

в предположении, что предел справа существует.

Заметим, что в предыдущих рассмотрениях существенно, что выбрано за начало траектории $\smile{AB}$, а что за ее конец, и ясно, что при изменении направления движения вдоль кривой величина W изменяет знак.

Будем называть *тонкой искривленной пластиной* поверхность S, снабженную массой. Если нам известна масса любого участка поверхности, то, предполагая S квадрируемой, определим среднюю плотность $\rho_{\text{ср}}$ квадрируемого участка ΔS, полагая $\rho_{\text{ср}} = \dfrac{\Delta m}{\Delta\sigma}$, где $\Delta\sigma$ — площадь участка Δs. Пусть $M_0(x_0, y_0) \in \Delta_n$ и $d(\Delta_n S) \to 0$. Если существует предел $\lim\limits_{\Delta_n S\to 0}\dfrac{\Delta_n m}{\Delta_n\sigma}$, независимый от выбора последовательности $\{\Gamma_n S\}$, стягивающейся к точке $M_0(x_0, y_0)$, то этот предел обозначим $\rho(x_0, y_0)$ и назовем *плотностью* пластины в точке M_0. Таким образом,

$$\rho(x_0, y_0) = \lim_{\Delta_n\sigma\to 0}\frac{\Delta_n m}{\Delta_n\sigma}.$$

Предположим теперь, что нам известна плотность тонкой искривленной пластины в каждой ее точке и надо определить ее массу. Тогда с помощью рассуждений, сходных с теми, которые были проведены ранее, получим:

$$m = \lim_{\max\ d_i\to 0}\sum_{i=0}^{n-1}\rho(\xi_i, \eta_i)\,\Delta\sigma_i,$$

где d_i — диаметр частичной поверхности ΔS_i; $\Delta\sigma_i$ — ее площадь; $\rho(\xi_i, \eta_i)$ — плотность в произвольно выбранной точке $M_i(\xi_i, \eta_i)$ участка ΔS_i поверхности.

Рассмотрим поток жидкости, текущей со скоростью, различной в разных точках пространства, но постоянной во времени. Подсчитаем количество жидкости Q, протекающей в единицу времени через двустороннюю гладкую поверхность S (рис. 68). Если $V(x, y, z)$ — скорость потока жидкости, то через элементарную квадрируемую площадку ΔS поверхности протекает количество жидкости, приблизительно равное $\Delta Q = V_{\mathbf{n}}(\xi, \eta, \zeta)\,\Delta\sigma$, где $V_{\mathbf{n}}$ — проекция скорости жидкости в произвольно выбранной точке $M(\xi, \eta, \zeta)$ площадки ΔS на нормаль в этой точке к поверхности; $\Delta\sigma$ — площадь участка ΔS. При этом ясно, что величина ΔQ, зависят от того, к какой стороне поверхности будем брать нормаль $\mathbf{n}$, т.е. от выбора стороны поверхности. Ясно также, что для некоторых участков ΔQ может быть положительной, для других — отрицательной.

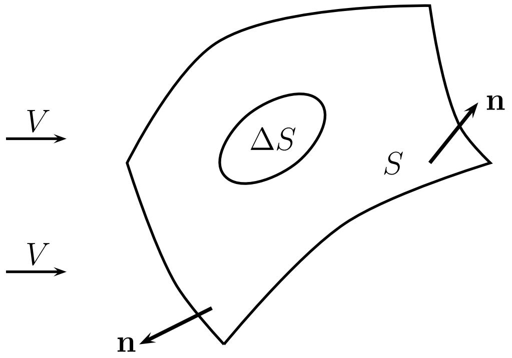

Рис. 68

Если теперь разбить всю поверхность S на квадрируемые части ΔS_i, $i = 0, 1, \ldots, (n-1)$, то количество Q жидкости, протекшее через S, будет приближенно равно:

$$Q \approx \sum_{i=0}^{n-1} V_{\mathbf{n}}(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\, \Delta\sigma_i.$$

Но

$$V_{\mathbf{n}}(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) = V_x(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \cos\lambda_i + V_y(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \cos\mu_i + V_z(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \cos\nu_i,$$

где V_x, V_y, V_z — составляющие скорости по осям координат, а λ_i, μ_i, ν_i — углы нормали к поверхности в точке $M_i(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)$ с осями координат. Следовательно,

$$Q \approx \sum_{i=0}^{n-1} \left\{ V_x(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \cos\lambda_i + V_y(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \cos\mu_i + V_z(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \cos\nu_i \right\} \Delta\sigma_i.$$

Так как, далее,

$$\cos\lambda_i\, \Delta\sigma_i = (\Delta\sigma_i)_{yz}, \quad \cos\mu_i\, \Delta\sigma_i = (\Delta\sigma_i)_{xz}, \quad \cos\nu_i\, \Delta\sigma_i = (\Delta\sigma_i)_{xy},$$

где $(\Delta\sigma_i)_{yz}$, $(\Delta\sigma_i)_{zx}$, $(\Delta\sigma_i)_{xy}$ — площади проекций ΓS_i на плоскости yOz, zOx, xOy, то

$$Q \approx \sum_{i=0}^{n-1} \left\{ V_x(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)(\Delta\sigma_i)_{yz} + V_y(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)(\Delta\sigma_i)_{zx} + V_z(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)(\Delta\sigma_i)_{xy} \right\},$$

откуда

$$Q = \lim_{\max\ d(\Delta S_i) \to 0} \sum_{i=0}^{n-1} \left\{ V_x(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)(\Delta\sigma_i)_{yz} + V_y(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)(\Delta\sigma_i)_{zx} + V_z(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)(\Delta\sigma_i)_{xy} \right\}.$$

§ 3. Криволинейные интегралы

Пусть $\overset{\smile}{AB}$ — гладкая кривая, заданная параметрическими уравнениями

$$x = x(t), \quad y = y(t), \qquad \alpha \le t \le \beta,$$

$f(x, y)$ — ограниченная функция, область определения D которой содержит дугу $\overset{\smile}{AB}$ или совпадает с ней. Рассмотрим последовательность $\{T_n\}$ разбиений $\alpha = t_0^{(n)} < t_1^{(n)} < \ldots < t_{m_n-1}^{(n)} < t_{m_n}^{(n)} = \beta$ отрезка $[\alpha, \beta]$ и соответствующую последовательность $\{\widetilde{T}_n\}$ разбиений $A_0^{(n)} = A, A_1^{(n)}, \ldots, A_{m_n}^{(n)} = B$, $A_i^{(n)} = A[x(t_i^{(n)}), y(t_i^{(n)})]$, дуги $\overset{\smile}{AB}$. Выберем произвольно на каждой частичной дуге точку $M_i^{(n)}[x(\tau_i^{(n)}), y(\tau_i^{(n)})]$, $t_i^{(n)} \le \tau_i^{(n)} \le t_{i+1}^{(n)}$, и составил сумму

$$\sum_{i=0}^{m_n-1} f(\xi_i^{(n)}, \eta_i^{(n)})\, \Delta s_i^{(n)}, \tag{1}$$

где $\xi_i^{(n)} = x(\tau_i^{(n)})$, $\eta_i^{(n)} = y(\tau_i^{(n)})$, $\Delta s_i^{(n)} =$ дл. $(A_i^{(n)}, A_{i+1}^{(n)})$. Если сумма (1) при $n \to \infty$ и $\max\limits_i \ \Delta t_i^{(n)} \to 0$ имеет конечный предел, не зависящий ни от характера разбиения отрезка $[\alpha, \beta]$ на части, ни от выбора на каждом частичном отрезке $[t_i^{(n)}, t_{i+1}^{(n)}]$ точки $\tau_i^{(n)}$, то этот предел называют *криволинейным интегралом первого рода* от функций $f(x, y)$ вдоль дуги $\overset{\smile}{AB}$ и обозначают $\displaystyle\int\limits_{\overset{\smile}{AB}} f(x, y)\, ds$. Итак,

$$\int\limits_{\overset{\smile}{AB}} f(x, y)\, ds = \lim_{n\to\infty,\ \max\ \Delta t_i \to 0} \ \sum_{i=0}^{m_n-1} f(\xi_i^{(n)}, \eta_i^{(n)})\, \Delta s_i^{(n)}.$$

Функция $f(x, y)$ называется *интегрируемой вдоль дуги* $\overset{\smile}{AB}$.

Пусть существует $\displaystyle\int\limits_{\overset{\smile}{AB}} f(x, y)\, dx$. Покажем, что тогда существует также интеграл

$$\int\limits_{\alpha}^{\beta} f[x(t), y(t)]\, \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2}\, dt, \tag{2}$$

и оба интеграла равны.

Возьмем произвольную последовательность разбиений

$$t_0^{(n)} = \alpha < t_1^{(n)} < \ldots < t_{m_n-1}^{(n)} < t_{m_n}^{(n)} = \beta$$

отрезка $[\alpha, \beta]$, такую, что $\lambda_n = \max\limits_i \ \Delta t_i^{(n)} \to 0$, и составим интегральную сумму s_n для интеграла (2):

$$s_n = \sum_{i=0}^{m_n-1} f[x(\tau_i^{(n)}, y(\tau_i^{(n)}0]\, \sqrt{[x'(\tau_i^{(n)})]^2 + [y'(\tau_i^{(n)}]^2}\, \Delta t_i^{(n)}.$$

Рассмотрим разность $s_n - \sigma_n$, где σ_n — сумма (1). Имеем:

$$|s_n - \sigma_n| \leq \sum_{i=0}^{m_n - 1} |f(\xi_i^{(n)}, \eta_i^{(n)})| \sqrt{[x'(\tau_i^{(n)})]^2 + [y'(\tau_i^{(n)})]^2}\, \Delta t_i^{(n)} - \Delta s_i^{(n)}|.$$

Так как $\Delta s_i^{(n)} = \int\limits_{t_i^{(n)}}^{t_{i+1}^{(n)}} \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2}\, dt$, то по теореме о среднем,

$$\Delta s_i^{(n)} = \sqrt{[x'(\theta_i^{(n)})]^2 + [y'(\theta_i^{(n)})]^2}\, \Delta t_i^{(n)}.$$

Пусть, далее, $M = \sup |f(x,y)|$. Тогда

$$|s_n - \sigma_n| \leq M \sum_{i=0}^{m_n - 1} \left| \sqrt{[x'(\tau_i^{(n)})]^2 + [y'(\tau_i^{(n)})]^2} - \sqrt{[x'(\theta_i^{(n)})]^2 + [y'(\theta_i^{(n)})]^2} \right| \Delta t_i^{(n)},$$

где $\tau_i^{(n)}$ и $\theta_i^{(n)}$ лежат на одном и том же частичном отрезке $[t_i^{(n)}, t_{i+1}^{(n)}]$. Так как дуга $\smile{AB}$ гладкая, то функция $\sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2}$ непрерывна, а следовательно, равномерно непрерывна на отрезке $[\alpha, \beta]$. Поэтому если

$$\omega_n = \max_t \ \omega\Big(\sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2}, \Delta t_i^{(n)}\Big),$$

где $\omega\Big(\sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2}, \Delta t_i^{(n)}\Big)$ — колебание функции $\sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2}$ на отрезке $[t_i^{(n)}, t_{i+1}^{(n)}]$, то $\omega_n \to 0$ при $\lambda_n \to 0$. Но при $\lambda_n \to 0$ сумма σ_n стремится к пределу, равному $\int\limits_{\smile{AB}} f(x,y)\, ds$. Следовательно, и сумма s_n при $\lambda_n \to 0$ стремится к тому же пределу, т.е. интеграл (2) существует и имеет место равенство

$$\int\limits_{\smile{AB}} f(x,y)\, ds = \int\limits_{\alpha}^{\beta} f[x(t), y(t)] \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2}\, dt. \tag{3}$$

Равенство (3) часто принимают за определение криволинейного интеграла первого рода вдоль гладкой кривой. Вместе с тем, оно является формулой для вычисления $\int\limits_{\smile{AB}} f(x,y)\, ds$.

Из определения интеграла $\int\limits_{\smile{AB}} f(x,y)\, ds$ (как предела суммы и с помощью равенства (3)) с очевидностью следует, что криволинейный интеграл первого рода вдоль гладкой кривой $\smile{AB}$ от непрерывной функция $f(x,y)$ всегда существует.

Примеры.

1. Найти $\displaystyle\int\limits_{\smile{AB}} xy\,ds$, где $\overset{\smile}{AB}$ — дуга эллипса $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$, расположенная в 1-м квадранте.

Так как уравнения дуги $\overset{\smile}{AB}$ имеют вид

$$x=a\cos t,\quad y=b\sin t,\qquad 0\le t\le\frac{\pi}{2},$$

то

$$\int\limits_{\overset{\smile}{AB}} xy\,ds=ab\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sin t\cos t\sqrt{a^2\sin^2 t+b^2\cos^2 t}\,dt=\frac{ab}{3}\,\frac{a^2+ab+b^2}{a+b}.$$

Если $\overset{\smile}{AB}$ — кусочно-гладкая дуга, т.е. может быть разбита на конечное число гладких дуг

$$\overset{\smile}{A_1B_1},\ \overset{\smile}{A_2B_2},\ \ldots,\ \overset{\smile}{A_kB_k},\quad A_{j+1}=B_j,\qquad j=1,2,\ldots,k-1,$$

то, по определению, полагаем, что

$$\int\limits_{\overset{\smile}{AB}} f(x,y)\,ds=\sum_{j=1}^{k}\int\limits_{\overset{\smile}{A_jB_j}} f(x,y)\,ds. \tag{4}$$

Из определения $\displaystyle\int\limits_{\overset{\smile}{AB}} f(x,y)\,ds$ легко вытекают следующие его свойства:

1°)

$$\int\limits_{\overset{\smile}{AB}}(k_1f_1+k_2f_2)\,ds=k_1\int\limits_{\overset{\smile}{AB}} f_1\,ds+k_2\int\limits_{\overset{\smile}{AB}} f_2\,ds;$$

2°) если $\overset{\smile}{AB}$ разбита на две части $\overset{\smile}{AC}$ и $\overset{\smile}{CB}$, то

$$\int\limits_{\overset{\smile}{AB}} f\,ds=\int\limits_{\overset{\smile}{AC}} f\,ds+\int\limits_{\overset{\smile}{CB}} f\,ds;$$

3°)

$$\left|\int f\,ds\right|\le\max_{M\in\overset{\smile}{AB}}|f(M)|\cdot l,$$

где l — длина дуги $\overset{\smile}{AB}$.

Обращаясь к поставленной в § 2 задаче определения массы материальной нити $\overset{\smile}{AB}$, мы видим теперь, что

$$m=\int\limits_{\overset{\smile}{AB}}\rho(x,y)\,ds.$$

Пусть $x = \varphi(\tau)$ и $y = \psi(\tau)$, $\gamma \le \tau \le \delta$, — другая эквивалентная параметризация дуги $\breve{AB}$. Так как

$$x'(t) = x'(\tau)\tau'(t) = \frac{x'(\tau)}{t'(\tau)}, \qquad y'(t) = \frac{y'(\tau)}{t'(\tau)}$$

и $dt = t'(\tau)\,d\tau$, то после замены переменной в интеграле правой часта равенства (3) получим:

$$\int\limits_{\breve{AB}} f(x,y)\,ds = \int\limits_{\gamma}^{\delta} f[x(\tau), y(\tau)]\,\sqrt{[x'(\tau)]^2 + [y'(\tau)]^2}\,d\tau,$$

т.е. величина интеграла $\int\limits_{\breve{AB}} f(x,y)\,ds$ не зависим от выбора эквивалентной параметризации кривой.

Возьмем теперь параметризацию кривой $\breve{AB}$:

$$x = x(\xi), \quad y = y(\xi), \qquad \alpha \le \xi \le \beta,$$

где $\beta = -t + (\alpha + \beta)$, порождающую на $\breve{AB}$ противоположную ориентацию. Так как

$$x'(t) = -x'(\xi), \quad y'(t) = -y'(\xi), \qquad dt = -d\xi,$$

то после замены в интеграле правой части равенства (3) найдем:

$$\int\limits_{\alpha}^{\beta} f[x(t), y(t)]\,\sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2}\,dt = \int\limits_{\alpha}^{\beta} f[x(\xi), y(\xi)]\,\sqrt{[x'(\xi)]^2 + [y'(\xi)]^2}\,d\xi,$$

т.е. *криволинейный интеграл первого рода не зависит от выбора ориентации дуги* $\breve{AB}$.

Пусть снова дана гладкая кривая $\breve{AB}$:

$$x = x(t), \quad y = y(t), \qquad \alpha \le t \le \beta,$$

и две функции $P(x,y)$ и $Q(x,y)$, определенные по крайней мере во всех точки дуги $\breve{AB}$.

Криволинейным интегралом второго рода от дифференциального выражения $P\,dx + Q\,dy$ вдоль дуги $\breve{AB}$ называется число

$$\int\limits_{\breve{AB}} P\,dx + Q\,dy = \int\limits_{\alpha}^{\beta} \big\{P[x(t), y(t)]x'(t) + Q[x(t), y(t)]y'(t)\,dt, \tag{5}$$

если интеграл в правой части равенства (5) существует, например, если $P(x,y)$ и $Q(x,y)$ непрерывны вдоль дуги $\breve{AB}$.

Как и для случая интеграла первого рода, убеждаемся, что величина интеграла $\int\limits_{\smile{AB}}$ не зависит от замены параметризации кривой $\overset{\smile}{AB}$ на эквивалентную. Если же мы перейдем к параметризации $\xi = -t + (\alpha + \beta)$, $\alpha \leq \xi \leq \beta$, заменяющей ориентацию кривой на противоположную, то в результата подсчета, аналогичного приведенному, получим:

$$\int\limits_{\overset{\smile}{AB}} P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = -\int\limits_{\overset{\smile}{AB}_-} P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy, \tag{6}$$

или, если $\overset{\smile}{AB}_-$ заменить на $\overset{\smile}{BA}$, то

$$\int P\,dx + Q\,dy = -\int\limits_{\overset{\smile}{BA}} P\,dx + Q\,dy.$$

Это свойство криволинейных интегралов второго рода обычно выражают словами: *при изменении направления интегрирования вдоль кривой криволинейный интеграл второго рода изменяет знак на обратный.*

Если $\overset{\smile}{AB}$ — кусочно—гладкая кривая, состоящая из гладких дуг $\overset{\smile}{A_iA_{i+1}}$, $i = 0, 1, \ldots, (n-1)$, $A_0 = A$, $A_n = B$, то, как и в случае криволинейных интегралов первого рода, полагаем, по определению, что

$$\int\limits_{\overset{\smile}{AB}} P\,dx + Q\,dy = \sum_{i=0}^{n-1} \int\limits_{\overset{\smile}{A_iA_{i+1}}} P\,dx + Q\,dy.$$

Криволинейный интеграл второго рода легко преобразовать в криволинейный интеграл первого рода.

В самом дела, пусть $\cos\alpha$ и $\cos\beta$ — направляющие косинусы касательной к кривой, причем направление касательной выбрано соответствующим ориентации кривой, т.е. в направлении возрастания параметра. Тогда $dx = \cos\alpha\,ds$, $dy = \cos\beta\,dy$ и, следовательно,

$$\int\limits_{\overset{\smile}{AB}} P\,dx + Q\,dy = \int\limits_{\overset{\smile}{AB}} \{P\cos\alpha + Q\cos\beta\}\,ds. \tag{7}$$

При изменении ориентации кривой направление касательной изменяется на противоположное, углы между касательной и положительными направлениями осей Ox и Oy изменяются на 180°, следовательно, знаки у косинусов меняются на обратные, так что одновременно с левой и правая часть равенства (7) изменяет знак.

Обратно, выразив ds через $\dfrac{dx}{\cos\alpha}$ $\left(\text{или через } \dfrac{dy}{\cos\beta}\right)$, получки:

$$\int\limits_{\overset{\smile}{AB}} f(x,y)\,ds = \int\limits_{\overset{\smile}{AB}} \frac{f(x,y)}{\cos\alpha}\,dx \quad \left(= \int\limits_{\overset{\smile}{AB}} \frac{f(x,y)}{\cos\beta}\,dy \right),$$

если, конечно, $\cos\alpha \neq 0$ ($\cos\beta \neq 0$).

Пусть в области G задано дифференциальное выражение $P\,dx + Q\,dy$, где $P(x,y)$ и $Q(x,y)$ непрерывны в G. Если Γ — кусочно-гладкая кривая, расположенная целиком в области G, то $J = \int\limits_{\Gamma} P\,dx + Q\,dy$ при изменении Γ будет в общем случае меняться и представлять собой функция от кривой Γ.

Однако в некоторых случаях $J(\Gamma) = \text{const}$ для определенного класса кусочно-гладких кривых, расположенных в G.

Теорема 1. *Для того чтобы интеграл* $J(\Gamma) = \int\limits_{\Gamma} P\,dx + Q\,dy$ *не зависел от кусочно-гладкого пути* Γ, *соединяющего две любые точки* A *и* $B \in C$, *и являлся функцией только от концов пути, необходимо и достаточно, чтобы выражение* $P\,dx + Q\,dy$ *было дифференциалом некоторой функции* $F(x,y)$, *непрерывно дифференцируемой* G, *т.е. чтобы*

$$P(x,y) = F'_x(x,y), \qquad Q(x,y) = F'_y(x,y).$$

Необходимость. Фиксируем некоторую точку $A(a,b)$, и пусть $\smile{AB}$ — путь, соединяющий эту точку с произвольной точкой $B(x_0,y_0)$ области G. Тогда

$$\int\limits_{\smile{AB}} P\,dx + Q\,dy = F(x_0,y_0).$$

Пусть $B'(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)$ — точка, близкая к точке B и лежащая в G. Если Δx и Δy достаточно малы, то ломаная с вершинами в точках $B(x_0,y_0)$, $C(x_0+\Delta x, y_0)$ и $B'(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)$ целиком лежит в G (рис. 69). Тогда с учетом независимости интеграла от пути интегрирования можем записать

$$F(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) - F(x_0,y_0) =$$

$$= \int\limits_{\smile{ABCB'}} P\,dx + Q\,dy - \int\limits_{\smile{AB}} P\,dx + Q\,dy = \int\limits_{\smile{BC}} P\,dx + Q\,dy + \int\limits_{\smile{CB'}} P\,dx + Q\,dy.$$

Но вдоль $\smile{BC}$ $y = \text{const}$ и $dy = 0$, следовательно,

$$\int\limits_{\smile{BC}} P\,dx + Q\,dy = \int\limits_{\smile{BC}} P\,dx.$$

Аналогично $\int\limits_{\smile{CB'}} P\,dx + Q\,dy = \int\limits_{\smile{CB'}} Q\,dy$, и тогда

$$F(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) - F(x_0,y_0) = \int\limits_{\smile{BC}} P\,dx + \int\limits_{\smile{CB'}} Q\,dy.$$

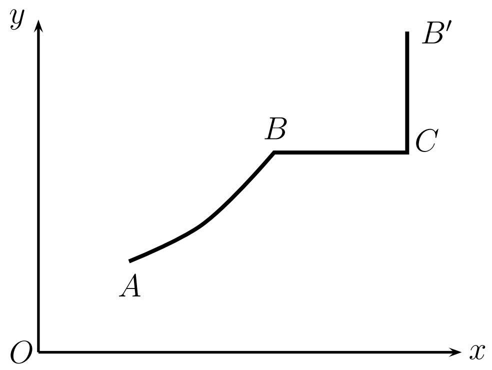

Рис. 69

Параметрические уравнения отрезка $\overset{\smile}{BC}$ имеет вид $y = y_0$, $x = t$, $x_0 \leq t \leq x_0 + \Delta x$. Поэтому

$$\int\limits_{\overset{\smile}{BC}} P\,dx = \int\limits_{x_0}^{x_0+\Delta x} P(t, y_0)\,dt = P(x_0 + \theta\Delta x, y_0)\,\Delta x = P(x_0, y_0)\,\Delta x + \eta_1 \Delta x,$$

где $\eta_1 \to 0$ при $\Delta x \to 0$ в силу непрерывности $P(x, y)$. Аналогично,

$$\int\limits_{\overset{\smile}{CB'}} Q\,dy = Q(x_0, y_0)\,\Delta y + \eta_2 \Delta y,$$

где $\eta_2 \to 0$ при $\Delta y \to 0$. Следовательно,

$$F(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - F(x_0, y_0) = P(x_0, y_0)\,\Delta x + Q(x_0, y_0)\,\Delta y + \omega,$$

где $\dfrac{\omega}{\rho} \to 0$, когда $\rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} \to 0$. Но это означает, что функция $F(x, y)$ дифференцируема в точке $B(x_0, y_0)$ и $dF(x_0, y_0) = P(x_0, y_0)\,dx + Q(x_0, y_0)\,dy$.

Достаточность. Пусть

$$P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy = F'_x(x, y)\,dx + F'_y(x, y)\,dy$$

и Γ — кусочно-гладкий путь в G, соединяющий точки $A(x_0, y_0)$ и $B(x_1, y_1)$. Очевидно, достаточно рассмотреть случай, когда Γ состоит из двух гладких дуг $\overset{\smile}{AC}$ и $\overset{\smile}{CB}$.

Пусть

$$x = f(t), \quad y = g(t), \qquad \alpha \leq t \leq \beta,$$

и

$$x = \varphi(\tau), \quad y = \psi(\tau), \qquad \gamma le \tau \leq \delta,$$

$$f(\alpha) = x_0, \quad g(\alpha) = y_0, \quad f(\beta) = \varphi(\gamma), \quad g(\beta) = \psi(\gamma), \quad \varphi(\delta) = x_1, \quad \psi(\beta) = y_1,$$

— параметризации $\breve{AC}$ и $\breve{CB}$ соответственно. Имеем:

$$\int\limits_{\breve{AC}} P\,dx + Q\,dy =$$

$$= \int\limits_{\alpha}^{\beta} \left\{F'_x[f(t), g(t)]x'(t) + F_y[f(t), g(t)]y'(t)\right\} dt =$$

$$= \int\limits_{\alpha}^{\beta} \frac{d}{dt}\left\{F[f(t), g(t)]\right\} dt = F[f(\beta), g(\beta)] - F[f(\alpha), g(\alpha)].$$

Аналогично получаем:

$$\int\limits_{\breve{CB}} P\,dx + Q\,dy = F[\varphi(\delta), \psi(\delta)] - F[\varphi(\gamma), \psi(\gamma)].$$

Так как

$$F[f(\beta), g(\beta)] = F[\varphi(\gamma), \psi(\gamma)]$$

то

$$\int\limits_{\Gamma} P\,dx + Q\,dy = F[\varphi(\delta), \psi(\delta)] - F[f(\alpha), g(\alpha)] = F(x_1, y_1) - F(x_0, y_0),$$

и мы нашли, что $\int\limits_{\Gamma} P\,dx + Q\,dy$ зависит лишь от точек, являющихся началом и концом пути Γ. Теорема доказана.

Независимость интеграла $\int\limits_{\Gamma} P\,dx + Q\,dy$ от пути, соединяющего точки A и B области G эквивалентна обращению в нуль интеграла по любому замкнутому пути Γ, лежащему целиком в области. В самом деле, если величина $\int\limits_{\breve{AB}} P\,dx + Q\,dy$ зависит лишь от начальной и конечной точек пути, то, взяв на замкнутой кривой Γ произвольно две точки A и B, получим:

$$\int\limits_{\Gamma} P\,dx + Q\,dy = \int\limits_{\breve{ACB}} P\,dx + Q\,dy + \int\limits_{\breve{BC'A}} P\,dx + Q\,dy,$$

где $\breve{ACB}$ и $\breve{BC'A}$ — две дуги, на которые разбивается точками A и B замкнутый контур (рис. 70). Но

$$\int\limits_{\breve{ACB}} P\,dx + Q\,dy = \int\limits_{\breve{AC'B}} P\,dx + Q\,dy = -\int\limits_{\breve{BC'A}} P\,dx + Q\,dy.$$

Следовательно, $\int\limits_{\Gamma} P\,dx + Q\,dy = 0.$

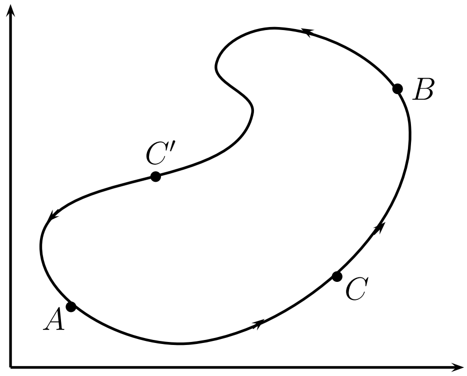

Рис. 70

Пусть, обратно, $\int\limits_{\Gamma} P\,dx + Q\,dy = 0$, где Г — любой замкнутый контур, лежащий целиком в области G. Если $A\breve{C}B$ и $A\breve{C'}B$ — два пути, соединяющие в G точки A и B, то $A\breve{C}B \cup B\breve{C'}A$ образует замкнутый контур и, следовательно,

$$0 = \int\limits_{ACB\breve{\cup}BC'A} P\,dx + Q\,dy = \int\limits_{A\breve{C}B} P\,dx + Q\,dy + \int\limits_{B\breve{C'}A} P\,dx + Q\,dy =$$

$$= \int\limits_{A\breve{C}B} P\,dx + Q\,dy - \int\limits_{A\breve{C'}B} P\,dx + Q\,dy,$$

т.е.

$$\int\limits_{A\breve{C}B} P\,dx + Q\,dy = \int\limits_{A\breve{C'}B} P\,dx + Q\,dy.$$

Таким образом, предыдущая теорема эквивалентна следующей.

Теорема 2. *Для того чтобы интеграл* $\int\limits_{\Gamma} P\,dx + Q\,dy$ *был равен нулю по любому замкнутому кусочно-гладкому контуру, лежащему целиком в области* G*, необходимо и достаточно, чтобы* $P\,dx+Q\,dy$ *было дифференциалом некоторой функции* $F(x,y)$*, непрерывно дифференцируемой в* G.

Докажем теперь теорему Грина. Это простейший частный случай одной общей теоремы анализа, имеющей многочисленные применения.

Пусть D — область на плоскости, ограниченная кривой Г. Будем говорить, что *ориентация кривой* Г *индуцирована областью* G, если при движении вдоль Г в направлении, определяемом этой ориентацией, ближайшие к Г точки области G остаются слева. При этом граница Г области D может состоять из нескольких замкнутых, не пересекающихся кривых (рис. 71).

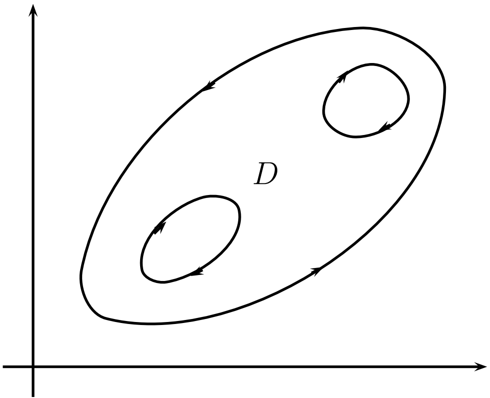

Рис. 71

Теорема 3 (Грина). *Пусть в области G плоскости xOy задано дифференциальное выражение $P\,dx + Q\,dy$ с непрерывными в G функциями $P(x,y)$ и $Q(x,y)$, имеющими в G непрерывные частные производные $\dfrac{\partial P}{\partial y}$ и $\dfrac{\partial Q}{\partial x}$. Если G область, которую можно разбить как на конечное число криволинейных трапеций, ограниченных непрерывными кривыми*

$$y = f_1(x), \quad y = f_2(x), \qquad a \le x \le b, \qquad f_1(x) < f_2(x)$$

при $x \in (a,b)$ и прямыми $x = a$, $x = b$, так и на конечное число криволинейных трапеций, ограниченных непрерывными кривыми

$$x = g_1(y), \quad x = g_2(y), \qquad c \le y \le d, \qquad g_1(y) < g_2(y)$$

при $y \in (c,d)$ и прямыми $y = c$, $y = d$, то имеет место равенство

$$\int\limits_{\Gamma} P\,dx + Q\,dy = \iint\limits_{D} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy,$$

где Γ — граница области области D с ориентацией, индуцированной этой областью.

Доказательство. Рассмотрим криволинейную трапецию T с границей $y = f_1(x)$, $yf_2(x)$, $f_1(x) < f2(x)$, $a < x < b$, $x = a$, $x = b$. Заметим, что в точках $x = a$ и $x = b$ значения функций $f_1(x)$ и $f_2(x)$ могут совпадать (рис. 72). Имеем:

$$\iint\limits_{T} \frac{\partial P}{\partial y}\,dxdy = \int\limits_a^b \left\{ \int\limits_{f_1(x)}^{f_2(x)} \frac{\partial P}{\partial y}\,dy \right\} dx =$$

$$= \int\limits_a^b \big\{P[x, f_2(x)] - P[x, f_1(x)]\big\}\,dx = \int\limits_a^b P[x, f_2(x)]\,dx - \int\limits_a^b P[x, f_1(x)]\,dx.$$

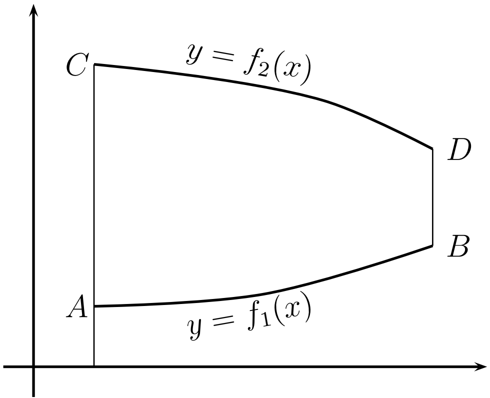

Рис. 72

Параметрические уравнения кривой $\breve{AB}$, порождающие ориентацию, совпадающую с ориентацией, индуцированной на $\breve{AB}$ трапецией T, имеют вид:

$$x = t, \quad y = f_1(t), \qquad a \le t \le b.$$

Поэтому

$$\int\limits_a^b P[x, f_1(x)]\,dx = \int\limits_{\breve{AB}} P(x,y)\,dx.$$

Точно так же параметрические уравнения кривой $\breve{CD}$, дающие ориентацию, противоположную индуцированной на $\breve{CD}$ трапецией T, будут следующими:

$$x = t, \quad y = f_2(t), \qquad a \le t \le b.$$

Следовательно,

$$\int\limits_a^b P[x, f_2(x)]\,dx = \int\limits_{\breve{CD}} P(x,y)\,dx = -\int\limits_{\breve{DC}} P(x,y)\,dx.$$

Кроме того, очевидно, имеем: $\int\limits_{\breve{CA}} P(x,y)\,dx = 0$, $\int\limits_{\breve{BD}} P(x,y)\,dx = 0$. Поэтому

$$\iint\limits_T \frac{\partial P}{\partial y}\,dxdy = -\int\limits_{\breve{AB}} P\,dx - \int\limits_{\breve{BD}} P\,dx - \int\limits_{\breve{DC}} P\,dx - \int\limits_{\breve{CA}} P\,dx = -\int\limits_{\Gamma} P\,dx. \qquad (8)$$

Если теперь область D разбить на конечное число трапеций $T_1, T_2, \ldots, T_k$ (рис. 73) указанного вида, то для каждой из них будет справедливо равенство (8). Таким образом, получаем:

$$\iint\limits_{T_i} \frac{\partial P}{\partial y}\,dxdy = -\int\limits_{\Gamma_i} P\,dx, \qquad i = 1, 2, \ldots, k, \qquad (9)$$

где Γ_i — границы трапеций T_i.

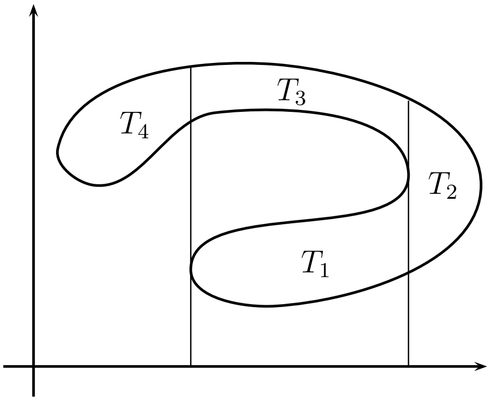

Рис. 73

Сложив равенства (9) и заметив, что криволинейные интегралы от $P\,dx$ по всем прямолинейным отрезкам равны нулю, а ориентация на каждой частичной дуге $\overset{\smile}{A_jB_j}$, индуцированная трапецией T_i, совпадает с ориентацией, индуцированной на $\overset{\smile}{A_jB_j}$ всей областью D, будем иметь:

$$\iint\limits_D \frac{\partial P}{\partial y}\,dxdy = -\int\limits_\Gamma P\,dx. \tag{10}$$

Совершенно так же, только разбив D на криволинейные трапеции второго вида, получим равенство

$$\iint\limits_D \frac{\partial Q}{\partial x}\,dxdy = \int\limits_\Gamma Q(x,y)\,dy. \tag{11}$$

Сложив (10) и (11), найдем:

$$\int\limits_\Gamma P\,dx + Q\,dy = \iint\limits_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x}\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy,$$

и теорема Грина доказана.

Следствие *При $P(x,y) = -y$, $Q(x,y) = x$ из формулы Грина вытекает:*

$$\int\limits_\Gamma x\,dy - y\,dx = 2\iint\limits_D dxdy,$$

и так как $\iint\limits_D dxdy = \text{пл.}\,(D)$, получаем формулу

$$\text{пл.}\,(D) = \frac{1}{2}\int\limits_\Gamma x\,dy - y\,dx$$

для вычисления площади фигуры, удовлетворяющей условиям теоремы Грина, с помощью криволинейных интегралов.

Замечание. Из формулы Грина следует, что если D — односвязная область[42] и $P\,dx + Q\,dy$ есть дифференциал некоторой функции $F(x, y)$, непрерывно дифференцируемой в G, то $\displaystyle\int\limits_{\Gamma} P\,dx + Q\,dy = 0$ для любого кусочно-гладкого контура Γ, лежащего целиком в G. Однако при использовании для доказательства этого факта теоремы Грина приходится требовать существования и непрерывности $\dfrac{\partial P}{\partial y}$ и $\dfrac{\partial Q}{\partial x}$, что не предполагается в доказанной теореме об условиях независимости криволинейного интеграла от пути интегрирования.

Мы рассмотрели определение и простейшие свойства криволинейных интегралов по плоским кривым. На случай пространственных кривых определение криволинейных интегралов переносится непосредственно, а именно: если Γ — гладкая пространственная кривая, заданная параметрическими уравнениями

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t), \quad z = \chi(t), \qquad \alpha \le t \le \beta,$$

то выражение

$$\int\limits_{\Gamma} f(x, y, z)\,ds = \int\limits_{\alpha}^{\beta} f[\varphi(t), \psi(t), \chi(t)]\,\sqrt{x_t'^2 + y_t'^2 + z_t'^2}\,dt$$

называется *криволинейным интегралом первого рода*, а выражение

$$\int\limits_{\Gamma} P(x, y, z)\,dx + Q(x, y, z)\,dy + R(x, y, z)\,dz =$$

$$= \int\limits_{\alpha}^{\beta} \big\{P[\varphi(t), \psi(t), \chi(t)]\varphi'(t) + Q[\varphi(t), \psi(t), \chi(t)]\psi'(t) + R[\varphi(t), \psi(t), \chi(t)]\chi'(t)\big\}\,dt$$

— *криволинейным интегралом второго рода.*

Читатель легко покажет, что все свойства криволинейных интегралов (кроме теоремы Грина), установленные для плоских кривых, верны и для интегралов по пространственным кривим.

§ 4. Интегралы по поверхности

В § 1 мы расширили понятие поверхности. Введен теперь понятие площади таких более общих поверхностей.

Пусть G — квадрируемая область плоскости xOy, S — поверхность, заданная явным уравнением

$$z = f(x, y), \qquad (x, y) \in \overline{G}, \tag{1}$$

---

[42] Плоская область G называется *односвязной*, если часть плоскости, ограниченная любым гладким контуром, лежащим целиком в области G, принадлежи этой области.

где $f(x,y)$ — функция, непрерывно дифференцируемая в $\overline{G}$.

Предположим, что существуют параметры u^1 и u^2, такие, что

$$x = \varphi^1(u^1, u^2), \qquad y = \varphi^2(u^1, u^2), \tag{2}$$

и, следовательно,

$$z = f[\varphi^1(u^1, u^2), \varphi^2(u^1, u^2)] = \varphi^3(u^1, u^2),$$

причем когда точка (u^1, u^2) пробегает область H на плоскости u^1Ou^2, точка (x, y), определяемая равенствами (2), описывает всю область G. Допустим еще, что

$$\frac{D(\varphi^1, \varphi^2)}{D(u^1, u^2)} \neq 0 \tag{3}$$

всюду в H, что соответствие между точками множеств G и H взаимно однозначно, и что когда точка (u^1, u^2) описывает границу области H соответствующая точка (x, y) описывает границу области G. Тогда уравнения

$$x = \varphi^1(u^1, u^2), \qquad y = \varphi^2(u^1, u^2), \qquad z = \varphi^3(u^1, u^2), \tag{4}$$

являются параметрическими уравнениями поверхности S. В силу сделанных предположений, поверхность S квадрируема и

$$\text{пл.}\,(S) = \iint\limits_G \sqrt{1 + {z'_x}^2 + {z'_y}^2}\, dxdy. \tag{5}$$

Сделаем замену переменных под знаком интеграла, перейдя от переменных x и y к переменным u^1 и u^2. Уравнения (2) при выполнении условия (3) определяют u^1 и u^2 как неявные функции от x и y. Продифференцировав равенства (2) по x и y по правилу дифференцирования сложных функций, получим уравнения

$$\frac{\partial\varphi^1}{\partial u^1}\frac{\partial u^1}{\partial x} + \frac{\partial\varphi^1}{\partial u^2}\frac{\partial u^2}{\partial x} = 1,$$

$$\frac{\partial\varphi^2}{\partial u^1}\frac{\partial u^1}{\partial x}\frac{\partial\varphi^2}{\partial u^2}\frac{\partial u^2}{\partial x} = 0$$

и

$$\frac{\partial\varphi^1}{\partial u^1}\frac{\partial u^1}{\partial y} + \frac{\partial\varphi^1}{\partial u^2}\frac{\partial u^2}{\partial y} = 0,$$

$$\frac{\partial\varphi^2}{\partial u^1}\frac{\partial u^1}{\partial y} + \frac{\partial\varphi^2}{\partial u^2}\frac{\partial u^2}{\partial y} = 1,$$

из которых найдем:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u^1}{\partial x} &= \frac{1}{C}\left(\frac{\partial\varphi^2}{\partial u^2}\right), \qquad \frac{\partial u^2}{\partial x} = \frac{1}{C}\left(-\frac{\partial\varphi^2}{\partial u^1}\right), \\ \frac{\partial u^1}{\partial y} &= \frac{1}{C}\left(-\frac{\partial\varphi^1}{\partial u^2}\right), \qquad \frac{\partial u^2}{\partial y} = \frac{1}{C}\left(\frac{\partial\varphi^1}{\partial u^1}\right), \end{aligned} \tag{6}$$

где через C обозначен определитель $\dfrac{D(\varphi^1, \varphi^2)}{D(u^1, u^2)}$.

Продифференцировав затем третье из уравнений (4) по x по правилу дифференцирования сложной функции и заменив $\dfrac{\partial \varphi^1}{\partial x}$ и $\dfrac{\partial u^2}{\partial x}$ их выражениями из (6), получим:

$$z'_x = -\frac{1}{C} \cdot \frac{D(\varphi^2, \varphi^3)}{D(u^1, u^2)}$$

и аналогично

$$z'_y = -\frac{1}{C} \cdot \frac{D(\varphi^3, \varphi^1)}{D(u^1, u^2)}.$$

Наконец, $dxdy = Cdu^1du^2$.

Подставив выражения x'_x, x'_y и $dxdy$ в (5), найдем:

$$\text{пл.}\,(S) = \iint_H \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}\, du^1du^2,$$

где

$$A = \frac{D(\varphi^2, \varphi^3)}{D(u^1, u^2)}, \qquad B = \frac{D(\varphi^3, \varphi^1)}{D(u^1, u^2)}, \qquad C = \frac{D(\varphi^1, \varphi^2)}{D(u^1, u^2)}.$$

Пусть теперь S — гладкая поверхность и

$$x = x(u^1, u^2), \quad y = y(u^1, u^2), \quad z = z(u^1, u^2); \qquad (u^1, u^2) \in \overline{G},$$

$$\left(\frac{D(x, y)}{D(u^1, u^2)}\right)^2 + \left(\frac{D(y, z)}{D(u^1, u^2)}\right)^2 + \left(\frac{D(z, x)}{D(u^1, u^2)}\right)^2 > 0,$$

— ее параметризация, причем G — квадрируемое множество.

Определение 1. Число

$$\iint_G \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}\, du^1du^2, \tag{7}$$

где

$$A = \frac{D(y, z)}{D(u^1, u^2)}, \qquad B = \frac{D(z, x)}{D(u^1, u^2)}, \qquad C = \frac{D(x, y)}{D(u^1, u^2)}$$

называется *площадью* гладкой поверхности S.

Из предыдущего следует, что если параметризация поверхности имеет вид

$$x = u^1, \qquad y = u^2, \qquad z = f(u^1, u^2),$$

т.е. если поверхность задана явным уравнением, то мы получаем прежнее определение площади поверхности.

Предлагаем читателю доказать, что переход к эквивалентной параметризации не изменяет площади гладкой поверхности.

Пусть S — гладкая поверхность и

$$x = x(u^1, u^2), \quad y = y(u^1, u^2), \quad z = z(u^1, u^2); \qquad (u^1, u^2) \in \overline{G},$$

— ее параметрические уравнения.

Определение 2. *Поверхностным интегралом первого рода* по поверхности S от функции $F(x, y, z)$, определенной и непрерывной по крайней мере во всех точка $(x, y, z) \in S$, называется выражение

$$\iint\limits_{S} F(x, y, z)\, ds \overset{\text{def}}{=}$$

$$\iint\limits_{G} F[x(u^1, u^2), y(u^1, u^2), z(u^1, u^2)]\, \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}\, du^1 du^2. \tag{8}$$

В силу предположенной непрерывности $F(x, y, z)$ и гладкости поверхности S, интеграл в правой части равенства (8) существует.

Определение 3. Пусть S — двусторонняя поверхность и

$$P(x, y, z)\, dydz + Q(x, y, z)\, dzdx + R(x, y, z)\, dxdy$$

— дифференциальное выражение, причем области определения функций P, Q и R содержат поверхность S или совпадают с ней. *Поверхностным. интегралом второго рода* по поверхности S от $P\, dydz + Q\, dzdx + R\, dxdy$ называется выражение

$$\begin{gathered}\iint\limits_{S} P\, dydz + Q\, dzdx + R\, dxdy = \\ = \iint\limits_{G} \big\{P[x(u^1, u^2), y(u^1, u^2), z(u^1, u^2)]\, A + \\ + Q[x(u^1, u^2), y(u^1, u^2), z(u^1, u^2)]\, B + \\ + R[x(u^1, u^2), y(u^1, u^2), z(u^1, u^2)]\, C\big\}\, du^1 du^2.\end{gathered} \tag{9}$$

Если функции $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$ и $R(x, y, z)$ непрерывны во всех точках поверхности S, то интеграл в правой части равенства (9) существует.

Нетрудно установить связь между поверхностными интегралами первого и второго рода. В самом деле, можно доказать (см. Г.М. Фихтенгольц, «Курс дифференциального и интегрального исчисления», М., 1970), что если λ, μ, ν — углы, образованные нормалью к поверхности с положительными направлениями осей координат, то

$$\cos\lambda = \frac{A}{\pm\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}, \quad \cos\mu = \frac{B}{\pm\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}, \quad \cos\nu = \frac{C}{\pm\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

Во всех трех равенствах перед корнем берется один и тот же знак и выбор знака определяет выбор стороны поверхности. Таким образом,

$$A = \cos\lambda\, \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}, \quad B = \cos\mu\, \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}, \quad C = \cos\nu\, \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}.$$

Подставив значения A, B и C в правую часть равенства (9), получим:

$$\iint\limits_{S} P\, dydz + Q\, dzdx + R\, dxdy =$$

$$= \iint\limits_S \{P\cos\lambda + Q\cos\mu + R\cos\nu\} \sqrt{A^2+B^2+C^2}\, du^1 du^2 = \iint\limits_S F(x,y,z)\, ds,$$

где

$$F(x,y,z) = P(x,y,z)\cos\lambda + Q(x,y,z)\cos\mu + R(x,y,z)\cos\nu.$$

Рекомендуем читателю рассмотреть обратную операцию — сведение поверхностного интеграла первого рода к поверхностному интегралу второго рода.

Покажем, что значение поверхностного интеграла первого рода не зависит выбора параметрических уравнений поверхности. Предположим, что

$$u^1 = \varphi(v^1, v^2), \quad u^2 = \psi(v^1, v^2), \qquad (v^1, v^2) \in \overline{H},$$

$$D = \frac{D(u^1, u^2)}{D(v^1, v^2)} > 0, \tag{10}$$

и формулы (10) осуществляют взаимно однозначное соответствие $\overline{G}$ и $\overline{H}$, причем граница G переходит в границу H и обратно.

Из правила дифференцирования сложной функции и свойства определителей легко следует, что для любых дифференцируемых функций f и g

$$\frac{D(f,g)}{D(u^1,u^2)} = \frac{D(f,g)}{D(v^1,v^2)} \cdot \frac{D(v^1,v^2)}{D(u^1,u^2)}$$

и

$$\frac{D(v^1,v^2)}{D(u^1,u^2)} = \frac{1}{\dfrac{D(u^1,u^2)}{D(v^1,v^2)}}.$$

Но тогда

$$A = \frac{A'}{D}, \qquad B = \frac{B'}{D}, \qquad C = \frac{C'}{D},$$

где A', B' и C' те же определители, что A, B и C, но только в переменных v^1 и v^2. Так как, кроме того, $du^1du^2 = D\, dv^1dv^2$, то

$$\iint\limits_G F[x(u^1,u^2), y(u^1,u^2), z(u^1,u^2)] \sqrt{A^2+B^2+C^2}\, du^1du^2 =$$

$$= \iint\limits_H F[x(v^1,v^2), y(v^1,v^2), z(v^1,v^2)] \sqrt{A'^2+B'^2+C'^2}\, dv^1dv^2,$$

а это и означает независимость поверхностного интеграла первого рода от выбора эквивалентной параметризации.

Подобные рассмотрения показывают, что при переходе к параметризации, изменяющей ориентацию поверхности (т.е.. направление нормали на противоположную), которая характеризуется тем, что $\dfrac{D(u^1,u^2)}{D(v^1,v^2)} < 0$, поверхностный интеграл второго рода изменяет знак на обратный. В самом деле, в этом случае $du^1du^2 = -Ddv^1dv^2$, и мы приходим к равенству

$$\iint\limits_G \{PA + QB + RC\}\, du^1du^2 = -\iint\limits_H \{PA' + QB' + RC'\}\, dv^1dv^2.$$

Пусть S — гладкая двусторонняя поверхность, Γ — граница этой поверхности и

$$x = x(u, v), \quad y = y(u, v), \quad z = z(u, v), \qquad (u, v) \in \overline{G}$$

— параметризация поверхности S. На границе L области G введем параметризацию

$$u = u(t), \quad v = v(t), \qquad \alpha \leq t \leq \beta,$$

порождающую на L ту же ориентацию, которая индуцируется на этой кривой областью G. Параметризация L посредством равенств

$$x = x[u(t), v(t)] = x(t), \;\; y = y[u(t), v(t)] = y(t), \;\; z = z[u(t), v(t)] = z(t), \quad \alpha \leq t \leq \beta,$$

приводят к параметризации кривой Γ, порождающей на ней некоторую ориентацию. Будем говорить, что эта ориентация Γ *согласована* с той ориентацией S, которая определяется выбором знака плюс перед корнем в выражениях для направляющих косинусов нормали к поверхности.

Геометрически согласованность ориентации поверхности S и ее границы Γ означает следующее: если стать на поверхность так, чтобы нормаль к выбранной стороне поверхности была направлена от ног к голове и, двигаясь по границе, смотреть вниз, то ближайшие к границе участки поверхности будут находиться слева.

Если поверхность замкнута, то равличают *внутреннюю* и *внешнюю стороны* поверхности, и знаку плюс перед корнем соответствует внешняя нормаль к поверхности. На доказательстве этих утверждений мы не останавливаемся.

Следующая теорема устанавливает связь между интегралом по поверхности и криволинейным интегралом по границе этой поверхности.

Элементарная теорема Стокса. *Пусть G — область на плоскости uOv, допускающая применение теоремы Грина, и S — поверхность, заданная уравнениями*

$$x = x(u, v), \quad y = y(u, v), \quad z = z(u, v), \qquad (u, v) \in \overline{G},$$

где функции $x(u, v)$, $y(u, v)$, $z(u, v)$ дважды непрерывно дифференцируемы.

Тогда S — двусторонняя гладкая поверхность, определенная в этой области. Если функции $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$, $R(x, y, z)$ непрерывно дифференцируемы в некоторой области пространства $\mathbb{R}^3$, содержащей S, то

$$\iint\limits_S \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy + \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right) dydz + \left(\frac{\partial P}{\partial x} - \frac{\partial R}{\partial x}\right) dzdx = \\ = \int\limits_\Gamma P\,dx + Q\,dy + R\,dz, \tag{11}$$

где Γ — пространственная кривая, являющаяся границей поверхности S, и ориентации S и Γ согласованы.

Доказательство. Пусть L — граница области G и $u = u(t)$, $v = v(t)$, $\alpha \leq t \leq \beta$, — параметризация кривой L, порождающая на ней ориентацию, совпадающую с ориентацией, индуцированной областью G. Тогда

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t), \qquad \alpha \leq t \leq \beta,$$

— параметризация кривой Γ, и поэтому

$$\int\limits_{\Gamma} P\,dx = \int\limits_{\alpha}^{\beta} P[x(t), y(t), z(t)]x'(t)\,dt.$$

Но $x'(t) = \dfrac{\partial x}{\partial u}u'(t) + \dfrac{\partial x}{\partial v}v'(t)$. Следовательно,

$$\int\limits_{\Gamma} P\,dx = \int\limits_{\alpha}^{\beta} \left\{ P\,\frac{\partial x}{\partial u}u' + P\,\frac{\partial x}{\partial v}v' \right\} dt = \int\limits_{L} P\,\frac{\partial x}{\partial u}\,du + P\,\frac{\partial x}{\partial v}\,dv.$$

Последний интеграл преобразуем по формуле Грина. Получим:

$$\int\limits_{\Gamma} P\,dx = \iint\limits_{G} \left\{ \frac{\partial}{\partial u}\left(P\,\frac{\partial x}{\partial v} - \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)\right) \right\} dudv =$$

$$= \iint\limits_{G} \left\{ \left(\frac{\partial P}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial P}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\partial P}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial u} \right)\frac{\partial x}{\partial v} - \right.$$

$$\left. -\left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial P}{\partial y}\frac{\partial}{\partial v} + \frac{\partial P}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial v} \right)\frac{\partial x}{\partial u} + P\,\frac{\partial^2 x}{\partial v \partial u} - P\,\frac{\partial^2 v}{\partial u \partial v} \right\} dudv =$$

$$= \iint\limits_{G} \left\{ \frac{\partial P}{\partial z}\frac{D(z,x)}{D(u,v)} - \frac{\partial P}{\partial y}\frac{D(x,y)}{D(u,v)} \right\} dudv = \iint\limits_{G} \left\{ \frac{\partial P}{\partial z}\,B - \frac{\partial P}{\partial y}\,C \right\} dudv.$$

Но, согласно определению поверхностного интеграла,

$$\iint\limits_{G} \left\{ -\frac{\partial P}{\partial z}\,B - \frac{\partial P}{\partial y}\,C \right\} dudv = \iint\limits_{S} \frac{\partial P}{\partial z}\,dzdx - \frac{\partial P}{\partial y}\,dxdy.$$

Аналогично получаем:

$$\int\limits_{\Gamma} Q\,dy = \iint\limits_{S} \frac{\partial Q}{\partial x}\,dxdy - \frac{\partial Q}{\partial z}\,dydz,$$

$$\int\limits_{\Gamma} R\,dz = \iint\limits_{S} \frac{\partial R}{\partial y}\,dydz - \frac{\partial R}{\partial x}\,dzdx.$$

Сложив эти три равенства, найдем:

$$\int\limits_{\Gamma} P\,dx + Q\,dy + R\,dz =$$

$$= \iint\limits_{S} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy + \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) dydz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) dzdx.$$

Теорема доказана.

Равенство (11) называется *элементарной формулой Стокса.*

Если перейти к поверхностным интегралам первого рода, то формула Стокса принимает вид

$$\int\limits_{\Gamma} P\,dx + Q\,dy + R\,dz =$$

$$= \iint\limits_{S} \left\{ \left((\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) C + \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) A + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) B \right\} \frac{d\sigma}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

Нетрудно заметить, что теорема Стокса представляет собой распространение на случай криволинейной поверхности теоремы Грина. Поэтому, положив в формуле Стокса $S = G$, а следовательно $\Gamma \equiv L$, P и Q не зависящими от z и $R \equiv 0$, получим из нее формулу Грина. Другим распространением формулы Грина является формула Гаусса–Остроградского, связывавшая тройной интеграл по области с поверхностным интегралом по границе этой области. Будем говорить, что множество $T \subset \mathbb{R}^3$ есть тело типа 1 относительно данной системы координат, если оно ограничено гладкими поверхностями $S_1^{(1)}$ и $S_2^{(1)}$, задаваемыми соответственно уравнениями

$$x^1 = \varphi_1^{(1)}(x^2, x^3), \qquad (x^2, x^3) \in \overline{G}_{23},$$

и

$$x^1 = \varphi_2^{(1)}(x^2, x^3), \qquad (x^2, x^3) \in \overline{G}_{23},$$

причем

$$\varphi_1^{(1)}(x^2, x^3) < \varphi_2^{(1)}(x^2, x^3), \qquad (x^2, x^3) \in G_{23},$$

где G_{23} — квадрируемая область на плоскости x^2Ox^3, и цилиндрической поверхностью $S_3^{(1)}$ с образующей параллельной оси Ox^1 и направляющей Γ — границей области G_{23}. Аналогичным образом с заменой x^1 на x^2 (на x^3) определяются тела типа 2 (типа 3). Очевидно, тела всех трех типов кубируемы. Наконец, будем говорить, что тело T *допустимо*, если в некоторой фиксированной системе координат его можно разбить системой кусочно—гладких поверхностей и на конечное число тел типа 1, и на конечное число типа 2, и на конечное число тел типа 3.

Формула Гаусса–Остроградского. *Пусть T — допустимое тело в пространстве $Oxyz$ и*

$$P(x, y, z), \qquad Q(x, y, z), \qquad R(x, y, z)$$

непрерывны вместе с частными производными $\dfrac{\partial P}{\partial x}, \dfrac{\partial Q}{\partial y}, \dfrac{\partial R}{\partial z}$ *внутри и на границе тела T.*

Тогда

$$\iiint\limits_{T} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dxdydz = \iint\limits_{\partial T} P\,dydz + Q\,dzdx + R\,dxdy,$$

где ∂T — граница тела T и интеграл берется по внешней стороне поверхности.

Доказательство. Предполагая, что T — тело первого специального вида, рассмотрим

$$\iiint\limits_T \frac{\partial R}{\partial z}\,dxdydz.$$

По теореме Фубини,

$$\iiint\limits_D \frac{\partial R}{\partial z}\,dxdydz = \iint\limits_G \left\{ \int\limits_{\varphi_1(x,y)}^{\varphi_2(x,y)} \frac{\partial R}{\partial z}\,dz \right\} dxdy$$

$$= \iint\limits_G \bigl\{ R[x,y,\varphi_2(x,y)] - R[x,y,\varphi_1(x,y)] \bigr\}\,dxdy.$$

Здесь G — проекция тела T, а следовательно, и поверхностей $S_1^{(2)}$ и $S_2^{(2)}$ на плоскость xOy. Так как параметризация поверхности $S_2(2)$ имеет вид $x = u$, $y = v$, $z = f_2(u,v)$, и следовательно,

$$\cos\nu = \frac{1}{\pm\sqrt{1 + {z'_x}^2 + {z'_y}^2}},$$

то выбор знака плюса перед корнем и, следовательно, внешней стороны участка $S_2^{(2)}$ границы тела T соответствует нормали к поверхности, образующей острый угол с осью Oz. Поэтому

$$\iint\limits_G R[x,y,\varphi_2(x,y)]\,dxdy = \iint\limits_{S_2^{(2)}} R(x,y,z)\,dxdy.$$

Точно так же

$$\iint\limits_G R[x,y,\varphi_1(x,y)]\,dxdy = \iint\limits_{S_1^{(2)}} R(x,y,z)\,dxdy,$$

где снова интеграл берется по той стороне поверхности $S_1^{(2)}$, нормаль к которой образует о осью Oz острый угол и, следовательно,

$$\iint\limits_G R[x,y,\varphi_1(x,y)]\,dxdy = -\iint\limits_{S_1^{(2)}} R[x,y,z)\,dxdy,$$

если поверхностный интеграл берется по внешней стороне участка $S_1^{(2)}$ границы тела T. Так как интеграл $\iint\limits_{S_1^{(2)}} R(x,y,z)\,dxdy$ по цилиндрической части поверхности равен нулю, то

$$\iiint\limits_T \frac{\partial R}{\partial z}\,dxdydz = \iint\limits_{S_2^{(2)}} R\,dxdy + \iint\limits_{S_3^{(2)}} R\,dxdy + \iint\limits_{S_1^{(2)}} R\,dxdy = \iint\limits_{\partial T} R\,dxdy. \qquad (12)$$

Если T — произвольное допустимое тело, то, разбив его на конечное число тел первого специального вида $T_1, T_2, \ldots, T_k$ и просуммировав равенства

$$\iiint\limits_{T_i} \frac{\partial R}{\partial z}\, dxdydz = \int\limits_{\partial T} R\, dxdy, \qquad i = 1, 2, \ldots, k,$$

справедливость которых уже доказана, получим равенство (12) для всего тела T.

Аналогичным образом находим, что

$$\iiint\limits_{T} \frac{\partial Q}{\partial y}\, dxdydz = \iint\limits_{\partial T} Q\, dzdx, \tag{13}$$

$$\iiint\limits_{T} \frac{\partial P}{\partial x}\, dxdydz = \iint\limits_{\partial T} P\, dydz. \tag{14}$$

Сложив (12), (13) и (14), получаем формулу Гаусса–Остроградского.

Формулу Гаусса–Остроградского можно записать в иной, более компактной форме. Прежде всего, перейдя к поверхностным интегралам первого рода, будем иметь:

$$\iiint\limits_{T} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) dxdydz = \iint\limits_{\partial T} (P\cos\lambda + Q\cos\mu + R\cos\nu)\, d\sigma,$$

где λ, μ и ν — углы внешней нормали к границе ∂T тела T с положительными направлениями осей координат. Предположим теперь, что $P(x,y,z)$, $Q(x,y,z)$, $R(x,y,z)$ — проекции на оси Ox, Oy и Oz соответственно векторной функции $F(x,y,z)$, так что

$$P = |F|\,\cos\alpha, \qquad Q = |F|\,\cos\beta, \qquad R = |F|\,\cos\gamma,$$

где α, β, γ — углы вектора $F(x,y,z)$ о осями координат. Тогда

$$P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma = |F|\,(\cos\lambda\cos\alpha + \cos\mu\cos\beta + \cos\nu\cos\gamma) = |F|\,\cos\varphi,$$

где φ — угол между направлением внешней нормали и направлением вектора F. Поэтому

$$\iiint\limits_{T} \left(\frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z}\right) dxdydz = \iint\limits_{\partial T} |F|\,\cos\varphi\, d\sigma.$$

Здесь F_x, F_y, F_z — проекции вектора F на координатные оси. Выражение $\dfrac{\partial F_x}{\partial x} + \dfrac{\partial F_y}{\partial y} + \dfrac{\partial F_z}{\partial z}$ называют *дивергенцией* вектора F и обозначают $\operatorname{div} F$. Следовательно,

$$\iiint\limits_{T} \operatorname{div} F\, dxdydz = \int\limits_{\partial} |F|\,\cos\varphi\, d\sigma. \tag{15}$$

Интеграл $\int\limits_{\partial} |F| \cos\varphi \, d\sigma$ называется *потоком* вектора F через поверхность S, по аналогии с потоком жидкости, имеющим скорость F (см. задачу 4 в § 1 данной главы), величина $\operatorname{div} F$, согласно формуле (15), характеризует количество жидкости, которое или втекает через источник в пространство, ограниченное замкнутой поверхностью S, или вытекает из него через стоки. Такое физическое истолкование допускает формула Гаусса–Остроградского.

Глава XX

ИНТЕГРИРОВАНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ФОРМ

§ 1. Тензоры и операции над ними

Пусть X — евклидово пространство или, более обще, векторное пространство конечной размерности над полем $\mathbb{R}$ вещественных чисел. Декартово произведение $X \times X \times \ldots \times X$ (k раз) будем обозначать X^k.

Рассмотрим множество $\mathcal{T}_k(X)$ всех полилинейных форм $T: \ X^k \to \mathbb{R}$ или, что с точностью до изоморфизма одно и то же, множество всех ковариантных тензоров k-го ранга, короче, k-тензоров, определенных на X (ом. § 4 гл. XII). Как уже было отмечено ранее, $\mathcal{T}_k(X)$ является линейным пространством над $\mathbb{R}$, если положить, что

$$(T_1 + T_2)(x_1, \ldots, x_k) = T_1(x_1, \ldots, x_k) + T_2(x_1, \ldots, x_k),$$

$$(\lambda T)(x_1, \ldots, x_k) = \lambda T(x_1, \ldots, x_k)$$

для $x_1, \ldots, x_k \in X$.

Пусть $\mathcal{T}_k(X)$ и $\mathcal{T}_l(X)$ — два таких пространства. Двум любым тензорам $T \in \mathcal{T}_k(X)$ и $S \in \mathcal{T}_l(X)$ поставим в соответствие третий тензор P, принадлежащий пространству $\mathcal{T}_{k+l}(X)$ и определяемый равенством

$$P(x_1, \ldots, x_k, x_{k+1}, \ldots, x_{k+l}) = T(x_1, \ldots, x_k)\, S(x_{k+1}, \ldots, x_{k+l})).$$

Этот новый тензор обозначим $T \otimes S$ и назовем *тензорным произведением* тензоров T и S.

Отметим сразу, что тензорное произведение не обладает свойством коммутативности, т.е. в общем случае $T \otimes S$ не равно $S \otimes T$. Например, если $T \in \mathcal{T}_3(X)$ и $S \in \mathcal{T}4(X)$, то

$$T \otimes S(x_1, \ldots, x_7) = T(x_1, x_2, x_3)\, S(x_4, x_5, x_6, x_7),$$

в то время как

$$S \otimes T(x_1, \ldots, x_7) = S(x_1, x_2, x_3, x_4)\, T(x_5, x_6, x_7).$$

Без труда проверяется следующие свойства тензорного произведения:

1) $(T_1 + T_2) \otimes S = T_1 \otimes S + T_2 \otimes S$;

2) $T \otimes (S_1 + S_2) = T \otimes S_1 + T \otimes S_2$;

3) $(T \otimes S) \otimes P = T \otimes (S \otimes P)$;

4) $(\lambda T) \otimes S = T \otimes (\lambda S) = \lambda(T \otimes S)$;

5) $(S \otimes T)(x_1, x_2, x_m) = (T \otimes S)(x_{\sigma_0(1)}, x_{\sigma_0(2)}, \dots, x_{\sigma_0(m)})$, где $T \in \mathcal{T}_k(X)$, $S \in \mathcal{T}_l(X)$, $k + l = m$, и σ_0 — перестановка чисел $1, 2, \dots, m$, определяемая равенствами

$$\sigma_0(i) = \begin{cases} l + i & \text{для} \quad 0 \leq i \leq k, \\ i - k & \text{для} \quad n + 1 \leq i \leq m. \end{cases}$$

Так как тензорное произведение обладает свойством ассоциативности, то $(T \otimes S) \otimes P$ обозначается просто $T \otimes S \otimes P$. По индукции, это определение распространяется на любое конечное число сомножителей.

Так, например, если $l_1, l_2, \dots, l_k$ — линейные функционалы, определенные на X, или, в новой терминологии, тензоры первого ранга, принадлежащие пространству $\mathcal{T}_1(X) = X^*$, сопряженному с пространством X, то полилинейная форма

$$T(x_1, x_2, \dots, x_k) = l_1(x_1)\, l_2(x_2) \cdot \ldots \cdot l_k(x_k)$$

есть тензорное произведение функционалов $l_1, l_2, \dots, l_k$, т.е.

$$T = l_1 \otimes l_2 \otimes \cdots \otimes l_k. \tag{1}$$

Покажем, что любой тензор k-го ранга может быть представлен как линейная комбинация тензоров вида (1).

Будем говорить, что элементы $x_1, x_2, \dots, x_m \in X$ и функционалы $f_1, f_2, \dots, f_m \in X^*$ образуют *биортогональную систему*, если $f_i(x_j) = \delta_{ij}$, где $\delta_{ii} = 1$ и $\delta_{ij} = 0$ при $i \neq j$. Легко проверять, что и элементы, и функционалы биортогональной системы линейно независимы. В частности, если $x_1, x_2, \dots, x_n$ образуют базис пространства X, то биортогональная система функционалов является базисом пространства X^*. В курсах линейной алгебры доказывается, что в случае конечномерности линейного пространства X, биортогональные базисы в X и X^* всегда существуют.

Теорема 1. *Пусть $a_1, a_2, \dots, a_n$ — базис пространства X и $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ — биортогональный (дуальный) базис сопряженного пространства X^*, так что $\varphi_i(a_j) = \delta_{ij}$. Тогда множество всех тензорных произведений вида $\varphi_{i_1} \otimes \varphi_{i_2} \otimes \varphi_{i_k}$, где $i_1, i_2, \dots, i_k$ принимают независимо друг от друга значения $1, 2, \dots, n$, есть базис пространства $\mathcal{T}_k(X)$.*

Доказательство. Возьмем произвольный тензор $T \in \mathcal{T}_k(X)$ и k любых векторов $x_1, x_2, \dots, x_k \in X$. Имеем:

$$x_i = \sum_{j_i=1}^{n} \xi_i^{j_i} a_{j_i}, \qquad i = 1, 2, \dots, k.$$

Поэтому

$$T(x_1, x_2, \ldots, x_k) = T\left(\sum_{j_1=1}^{n} \xi_1^{j_1} a_{j_1}, \sum_{j_2=1}^{n} \xi_2^{j_2} a_{j2}, \ldots, \sum_{j_k=1}^{n} \xi_k^{j_k} a_{j_k}\right) =$$

$$= \sum_{j_1=1}^{n}\sum_{j_2=1}^{n}\sum_{j_k=1}^{n} \xi_1^{j_1}\xi_2^{j_2}\cdots\xi_k^{j_k} T(a_{j_1}, a_{j_2}, \ldots, a_{j_k}).$$

Теперь заметим, что в силу биортогональности систем $\{a_i\}$ и $\{\varphi_j\}$

$$\xi_1^{j_1}\xi_2^{j_2}\cdots\xi_k^{j_k} = \varphi_{j_1}(x_1)\varphi_{j_2}(x_2)\cdots\varphi_{j_k}(x_k) =$$

$$= \varphi_{j_1} \otimes \varphi_{j_2} \otimes \ldots \otimes \varphi_{j_k}(x_1, x_2, \ldots, x_k).$$

Следовательно,

$$T(x_1, x_2, \ldots, x_k) =$$

$$= \sum_{j_1=1}^{n}\sum_{j_2=1}^{n}\sum_{j_k=1}^{n} T(a_{j_1}, a_{j_2}, \ldots, a_{j_k})\, \varphi_{j_1} \otimes \varphi_{j_2} \otimes \ldots \otimes \varphi_{j_k}(x_1, x_2, \ldots, x_k).$$

Итак, каждый тензор $T \in \mathcal{T}_k(X)$ представим в виде линейной комбинации агрегатов $\varphi_{j_1} \otimes \varphi_{j_2} \otimes \ldots \otimes \varphi_{j_k}$, и остается доказать однозначность такого представления.

Пусть существуют два представления:

$$T = \sum_{j_1=1}^{n}\sum_{j_2=1}^{n}\sum_{j_k=1}^{n} \tau_{j_1 j_2 \ldots j_k}\, \varphi_{j_1} \otimes \varphi_{j_2} \otimes \ldots \otimes \varphi_{j_k} =$$

$$= \sum_{j_1=1}^{n}\sum_{j_2=1}^{n}\sum_{j_k=1}^{n} \tau'_{j_1, j_2, \ldots j_k}\, \varphi_{j_1} \otimes \varphi_{j_2} \otimes \ldots \otimes \varphi_{j_k},$$

т.е.

$$\sum_{j_1=1}^{n}\sum_{j_2=1}^{n}\sum_{j_k=1}^{n} \theta_{j_1 j_2 \ldots j_k}\, \varphi_{j_1} \otimes \varphi_{j_2} \otimes \ldots \otimes \varphi_{j_k} = 0,$$

где $\theta_{j_1 j_2 \ldots j_k} = \tau_{j_1 j_2 \ldots j_k} - \tau'_{j_1 j_2 \ldots j_k}$. Это значит, что

$$\sum_{j_1=1}^{n}\sum_{j_2=1}^{n}\sum_{j_k=1}^{n} \theta_{j_1 j_2 \ldots j_k}\, \varphi_{j_1} \otimes \varphi_{j_2} \otimes \ldots \otimes \varphi_{j_k}(x_1, x_2, \ldots, x_k) = 0 \qquad (2)$$

для любого набора векторов $x_1, x_2, \ldots, x_k \in X$. Полагая $x_1 = a_{r_1}, \ldots, x_k = a_{r_k}$, получим из (2):

$$\sum_{j-1=1}^{n}\sum_{j_2=1}^{n}\sum_{j_k=1}^{n} \theta_{j_1 j_2 \ldots j_k} \varphi_{j_1}(a_{r_1})\varphi_{j_2}(a_{r_2})\cdots\varphi_{j_k}(a_{r_k}) = 0. \qquad (3)$$

С учетом биортогональности систем $\{a_i\}$ и $\{\varphi_j\}$, находим из (3), что $\theta_{r_1 \ldots r_k} = 0$, т.е. $\tau_{r_1 \ldots r_k} = \tau'_{r_1 \ldots r_k}$. Так как набор чисел $r_1, \ldots, r_k$ произволен, теорема доказана.

Из доказанной теоремы, в частности, следует, что если размерность пространства X есть n, то размерность пространства $\mathcal{T}_k(X)$ есть n^k.

Подобно тому как линейный оператор A, действующий из векторного пространства X в векторное пространство Y, порождает сопряженный оператор, действующий из Y^* в X^* и определяемый равенством

$$(A^*\ell)(x) = \ell(Ax), \qquad \ell \in Y^*,$$

точно так же такой оператор A порождает оператор A^*, действующей из $\mathcal{T}_k(Y)$ в $\mathcal{T}_k(X)$ и определяемый аналогичной формулой.

Именно, пусть $T \in \mathcal{T}_k(Y)$. Тогда $T(Ax_1, \ldots, Ax_k)$, где $x_1, \ldots, x_k \in X$, есть k-тензор на X, который обозначим T^*:

$$T^*(x_1, \ldots, x_k) = T(Ax_1, \ldots, Ax_k).$$

Соответствие $T \to T^*$, как легко проверить, линейно, и оператор A^*, определяемый равенством $A^*T = T^*$, есть линейный оператор из $\mathcal{T}_k(Y)$ в $\mathcal{T}_k(X)$. Итак,

$$(A^*T)(x_1, \ldots, x_k) = T(Ax_1, \ldots, Ax_k).$$

Покажем, что $A^*(T \otimes S) = A^T \otimes A^*S$, где $T \in \mathcal{T}_k(Y)$, $S \in \mathcal{T}_l(Y)$. Имеем, по определению:

$$A^*(T \otimes S)(x_1, \ldots, x_k, x_{k+1}, \ldots, x_{k+l}) = (T \otimes S)(Ax_1, \ldots, Ax_k, Ax_{k+1}, \ldots, Ax_{k+l}) =$$

$$= T(Ax_1, \ldots, Ax_k) \cdot S(Ax_{k+1}, \ldots, Ax_{k+l}) =$$

$$= (A^*T)(x_1, \ldots, x_k) \cdot (A^*S)(x_{k+1}, \ldots, x_{k+l}) = (A^*T \otimes A^*S)(x_1, \ldots, x_k, x_{k+1}, \ldots, x_{k+l}),$$

и требуемое равенство доказано.

Рассмотрим несколько подробнее антисимметриские k-тензоры, т.е. такие, что

$$T(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_j, \ldots, x_k) = -T(x_1, \ldots, x_j, \ldots, x_i, \ldots, x_k).$$

Множество $\Lambda_k(X)$ всех антисимметрических тензоров k-го ранга есть, очевидно, линейное подпространство пространства $\mathcal{T}_k(X)$.

Мы уже отмечали (см. § 1 гл. XVIII), что если значения двух аргументов антисимметрического k-тензора T совпадают или если один из аргументов является линейной комбинацией остальных, то значение T при таких значениях аргументов равно нулю. Поэтому, если размерность пространства X есть n, то при $k > n$ все антисимметрические k-тензоры тождественно равны нулю.

Пусть дан произвольный тензор $T \in \mathcal{T}_k(X)$. Построим новый тензор $\operatorname{Alt} T \in \mathcal{T}_k(X)$, определяемый равенством

$$\operatorname{Alt}(x_1, x_2, \ldots, x_k) = \frac{1}{k!} \sum_{\sigma} \operatorname{sign} \sigma \, T(_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(k)}),$$

где $(\sigma(1), \ldots, \sigma(k))$ — некоторая перестановка чисел $1, 2, \ldots, k$, сумма распространяется на все такие перестановки, и $\operatorname{sign} \sigma = \pm 1$ в зависимости от четности или нечетности перестановка σ.

Переход от тензора T к тензору $\operatorname{Alt} T$ называется операцией *альтернирования* тензора T.

Покажем, что $\operatorname{Alt} T \in \Lambda_k(X)$. В самом деле, пусть индексы i и j меняются местами, и положим, что $\sigma' = \sigma \circ (i, j)$, т.е. что σ' есть композиция перестановки σ и перестановки (i, j), меняющей местами индексы i и j. Легко проверить, что $\operatorname{sign} \sigma' = -\operatorname{sign} \sigma$ и поэтому

$$(\operatorname{Alt} T)(x_1, \dots, x_j, \dots, x_i, \dots, x_k) =$$

$$= \frac{1}{k!} \sum_{\sigma} \operatorname{sign} \sigma \cdot T(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(j)}, \dots, x_{\sigma(i)}, \dots, x_{\sigma(k)}) =$$

$$= \frac{1}{k!} \sum_{\sigma} \operatorname{sign} \sigma \cdot T(x_{\sigma'(1)}, \dots, x_{\sigma'(i)}, \dots, x_{\sigma'(j)}, \dots, x_{\sigma'(k)}) =$$

$$= \frac{1}{k!} \sum_{\sigma'} (-\operatorname{sign} \sigma') \cdot T(x_{\sigma'(1)}, \dots, x_{\sigma'(i)}, \dots, x_{\sigma'(j)}, \dots, x_{\sigma'(k)}) =$$

$$= -(\operatorname{Alt} T)(x_1, \dots, x_i, \dots, x_j, \dots, x_k),$$

так как когда σ пробегает множество S_k всех перестановок чисел $1, 2, \dots, k$, то σ' также пробегает это множество.

Докажем, что если $T \in \Lambda_k(X)$, то $\operatorname{Alt} T = T$. Прежде всего, заметим, что если σ — транспозиция, т.е. перестановка, изменяющая лишь два индекса i, j (и, следовательно, $\operatorname{sign} \sigma = -1$), то, по определений антисимметичности тензора,

$$T(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(k)}) = \operatorname{sign} \sigma \cdot T(x_1, \dots, x_k).$$

Умножив это равенство на $\operatorname{sign} \sigma$, получим:

$$\operatorname{sign} \sigma \cdot T(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(k)}) = T(x_1, \dots, x_k). \tag{4}$$

Если σ — произвольная перестановка, то она моими быть представлена как произведение транспозиций $\sigma_1 \circ \sigma_1 \circ \ldots \circ \sigma_m$, и так как знак произведения перестановок равен произведению знаков этих перестановок, из равенства (4) следует:

$$\operatorname{sign} \sigma \cdot T(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(k)}) =$$

$$= \operatorname{sign} \sigma_1 \ \cdots \operatorname{sign} \sigma_m \cdot T(x_{\sigma_1 \circ \ldots \circ \sigma_m(1)}, \dots, x_{\sigma_1 \circ \ldots \circ \sigma_m(k)}) =$$

$$= \operatorname{sign} \sigma_2 \cdots \operatorname{sign} \sigma_m \cdots T(x_{\sigma_2 \circ \ldots \circ \sigma_m(1)}, \dots, x_{\sigma_2 \circ \ldots \circ \sigma_m(k)}) = \ldots =$$

$$T(x_1, \dots, x_k).$$

Но тогда

$$(\operatorname{Alt} T)(x_1, \dots, x_k) = \frac{1}{k!} \sum_{\sigma} \operatorname{sign} \sigma \cdot T(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(k)}) =$$

$$= \frac{1}{k!} \sum_{\sigma} T(x_1, \dots, x_k) = T(x_1, \dots, x_k).$$

Теорема доказана.

Отметим еще следующие равенства:

1) $\operatorname{Alt}(\operatorname{Alt} T) = \operatorname{Alt} T$, что легко следует из предыдущего;

2) $\operatorname{Alt}(\lambda_1 T_1 + \lambda_2 T_2) = \lambda_1 T_1 + \lambda_2 \operatorname{Alt} T_2$, что очевидно.

Лемма. *Если* $T \in \mathcal{T}_k(X)$ *и* $S \in \mathcal{T}_l(X)$, *причем* $\operatorname{Alt} T = 0$, *то* $\operatorname{Alt}(T \otimes S) = 0$.

Доказательство. Пусть S_{k+l} — группа всех перестановок чисел $1, 2, \dots, k, k+1, \dots, k+l$. В силу определения операции альтернирования, будим иметь для любых $x_1, x_2, \dots, x_k, x_{k+1}, \dots, x_{k+l} \in X$:

$$(k+l)! \operatorname{Alt}(T \otimes S)(x_1, \dots, x_k, x_{k+1}, x_{k+l}) =$$

$$= \sum_{\sigma \in S_{k+l}} \operatorname{sign} \sigma \cdot T(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(k)}) \cdot S(x_{\sigma(k+1)}, \dots, x_{\sigma(k+l)}). \tag{5}$$

Пусть $S^{(1)}$ — подгруппа группы S_{k+l}, состоящая из перестановок, оставляющих на месте числа $k+1, k+2, \dots, k+?$. Тогда S_{k+l} разбивается на непересекающиеся смежные классы $\widetilde{\sigma} = \{\sigma_1 \circ \sigma\}$, где σ — любой представитель класса $\widetilde{\sigma}$ и σ_1 пробегает $S^{(1)}$. Поэтому

$$\sum_{\sigma \in S_{k+l}} \operatorname{sign} \sigma \cdot T(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(k)})\, S(x_{\sigma(k+1)}, \dots, \sigma_{(k+l)}) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \sum_{\sigma_1 \in S^{(1)}} \operatorname{sign} \sigma_1 \cdots \operatorname{sign} \sigma \cdot T(x_{\sigma_1 \circ \sigma(1)}, \dots, x_{\sigma_1 \circ \sigma(k)})\, S(x_{\sigma_1 \circ \sigma(k+1)}, \dots, x_{\sigma_1 \circ \sigma(k+l)}), \tag{6}$$

где под знаком внутренней суммы σ есть некоторый фиксированный представитель класса $\widetilde{\sigma}$. Полагая $x_{\sigma(i)} = y_i$, так что $x_{\sigma_1 \circ \sigma(i)} = y_{\sigma_1(i)}$, будем иметь:

$$\begin{gathered}
\sum_{\sigma_1 \in S^{(1)}} \operatorname{sign} \sigma_1 \cdot \operatorname{sign} \sigma \cdot T(x_{\sigma_1 \circ \sigma(1)}, \dots, x_{\sigma_1 \circ \sigma(k)})\, S(x_{\sigma_1 \circ \sigma(k+1)}, \dots, x_{\sigma_1 \circ \sigma(k+l)}) = \\
= \operatorname{sign} \sigma \cdot \textstyle\sum_{\sigma_1 \in S^{(1)}} \operatorname{sign} \sigma_1 \cdot T(y_{\sigma_1)}, \dots, y_{\sigma_1(k)})\, S(y_{\sigma_1(k+1)}, \dots, y_{\sigma_1(k+l)}) = \\
= \operatorname{sign} \sigma \cdot \sum_{\sigma_1 \in S^{(1)}} \operatorname{sign} \sigma_1 \cdot T(y_{\sigma(1)}, \dots, y_{\sigma(k)}) \cdot S(y_{k+1}, \dots, y_{k+l}) = \\
= \operatorname{sign} \sigma \cdot S(y_{k+1}, \dots, y_{k+l}) \sum_{\sigma_1 \in S^{(1)}} \operatorname{sign} \sigma_1 \cdot T(y_{\sigma_1(1)}, \dots, y_{\sigma_1(k)}).
\end{gathered} \tag{7}$$

Пусть $\sigma_1' \in S_k$ производит ту же перестановку чисел $1, 2, \dots, k$, что и σ_1. Тогда $\operatorname{sign} \sigma_1' = \operatorname{sign} \sigma_1$, и, следовательно,

$$\sum_{\sigma_1 \in S^{(1)}} \operatorname{sign} \sigma_1 \cdot T(y_{\sigma_1(1)}, \dots, y_{\sigma_1(k)}) =$$

$$= \sum_{\sigma_1' \in S_k} \operatorname{sign} \sigma_1' \cdot T(y_{\sigma_1'(1)}, \dots, y_{\sigma_1'(k)}) = k! \operatorname{Alt} T(y_1, \dots, y_k) = 0.$$

Но тогда, в силу равенства (7),

$$\sum_{\sigma_1 \in S^{(1)}} \operatorname{sign} \sigma_1 \cdot \operatorname{sign} \sigma \cdot T(x_{\sigma_1 \circ \sigma(1)}, \dots, x_{\sigma_1 \circ \sigma(k)}) \cdot S(x_{\sigma_1 \circ \sigma(k+1)}, \dots, x_{\sigma_1 \circ \sigma(k+l)}) = 0,$$

а следовательно, согласно (5) и (6),

$$\operatorname{Alt}(T \otimes S)(x_{,} \ldots, x_k, x_{k+1}, \ldots, x_{k+l}) = 0,$$

что требовалось доказать.

Пусть $T \in \Lambda_k(X)$ и $S \in \Lambda_l(X)$. Тенэорное произведение $T \otimes S$ в общем случае не будет антисимметрическим тензором. Так, если $T = T(x_1, x_2) \in \Lambda_2(X)$, $S = S(x_1, x_2, x_3) \in \Lambda_3(X)$, то хотя

$$(T \otimes S)(x_2, x_1, x_3, x_5) = -(T \otimes S)(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5),$$

но вообще

$$(T \otimes S)(x_3, x_2, x_1, x_4, x_5) \neq -(T \otimes S)(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5).$$

Поэтому в случае антисимметрических тензоров вместо тензорного произведения двух или более тензоров вводят новую операцию, в реэультате которой получается снова антисимметрический тензор. Именно, если $\in \Lambda_k(X)$, $S \in \Lambda_l(X)$, построим новый тензор $T \wedge S$, полагая

$$T \wedge S = \frac{(k+l)!}{k!l!} \operatorname{Alt}(T \otimes S),$$

и назовем его *внешним произведением* тензоров T и S. Согласно предыдущему, $T \wedge S$ — антисимметрический тензор.

В дальнейшем антисимметрические тензоры будем обозначать малыми буквами греческого алфавита: $\alpha, \beta, \gamma, \ldots, \xi, \eta, \ldots, \omega$.

Без труда можно проверить, что

$$(\omega_1 + \omega_2) \wedge \eta = \omega_1 \wedge \eta + \omega_2 \wedge \eta,$$

$$\omega \wedge (\eta_1 + \eta_2) = \omega \wedge \eta_1 + \omega \wedge \eta_2.$$

Докажем, что

1) $\eta \wedge \omega = (-10^{k+l} \omega \wedge \eta$, если $\omega \in \Lambda_k(X)$, $\eta \in \Lambda_l(X)$;

2) $A^*(\omega \wedge \eta) = A^*\omega \wedge A^*\eta$, если $A:\ X \to Y$ линейный оператор и $\omega \in \Lambda_k(Y)$, $\eta \in \Lambda_l(Y)$.

Имеем:

$$\eta \wedge \omega(x_1, \ldots, x_l, x_{l+1}, \ldots, x_{k+l}) =$$

$$= \frac{(k+k)!}{k!l!} \operatorname{Alt}(\eta \otimes \omega)(x_1, \ldots, x_l, x_{l+1}, \ldots, x_{k+l}) =$$

$$= \frac{(k+l)!}{k!l!} \operatorname{Alt}(\omega \otimes \eta)(x_{\sigma_0(1)}, \ldots, x_{\sigma_0(k)}, x_{\sigma_0(k+1)}, \ldots, x_{\sigma_0(k+l)}) =$$

$$= \frac{(k+l)!}{k!l!} \sum_{\sigma \in S_{k+l}} \operatorname{sign} \sigma \cdot (\omega \wedge \eta)(\sigma).$$

Здесь мы воспользовались свойством (5) тензорного произведения. Далее, умножив обе части полученного равенства на $(\operatorname{sign} \sigma_0)^2 = 1$ и заметив, что когда σ

пробегает всю группу S_{k+l} перестановок $k+l$ чисел, то $\sigma' = \sigma \circ \sigma_0$ пробегает ту же группу, получим:

$$(\eta \wedge \omega)(x_1, \dots, x_k, x_{k+1}, \dots, x_{k+l}) = \operatorname{sign} \sigma_0 \, \frac{(k+l)!}{k!l!} \cdot \frac{1}{(k+l)!} \times$$

$$\times \sum_{\sigma \in S_{k+l}} \operatorname{sign} \sigma \cdot \operatorname{sign} \sigma_0 \cdot (\omega \wedge \eta)(x_{\sigma \circ \sigma_0(1)}, \dots, x_{\sigma \circ \sigma_0(k)}, x_{\sigma \circ \sigma_0(k+1)}, \dots, x_{\sigma \circ \sigma_0(k+l)}) =$$

$$= \operatorname{sign} \sigma_0 \cdot \frac{(k+l)!}{k!l!} \cdot \frac{1}{(k+l)!} \cdot \sum_{\sigma' \in S_{k+l}} \operatorname{sign} \sigma' (\omega \wedge \eta)(x_{\sigma'(1)}, \dots, x_{\sigma'(k)}, x_{\sigma'(k+1)}, \dots, x_{\sigma'(k+l)}) =$$

$$= \operatorname{sign} \sigma_0 \cdot (\omega \wedge \eta)(x_1, \dots, x_k, x_{k+1}, \dots, x_{k+l}).$$

Подсчитаем $\operatorname{sign} \sigma_0$. В этой перестановке число инверсий равно числу пар (i, j), для которых $\sigma_0(i) > \sigma_0(j)$ при $i < j$. Но это будет лишь в том случае, когда $1 \leq i \leq k$ и $k+1 \leq j \leq k+l$, так как только при этом

$$\sigma_0(j) - \sigma_0(i) = (j-?) + (l+i) = l - (l+i) < 0.$$

Поэтому инверсии будут получаться при комбинации каждого i из $[1, k]$ с каждым j из $[k+1, l+k]$, т.е. их число будет равно kl. Следовательно, $\operatorname{sign} \sigma_0 = (-1)^{kl}$, и тогда

$$(\eta \wedge \omega) = (-1)^{kl} (\omega \wedge \eta),$$

что требовалось доказать.

Из доказанного равенства следует, в частности, что

$$\varphi_i \wedge \varphi_j = -\varphi_j \wedge \varphi_i \quad \text{при} \quad i \neq j \quad \text{и} \quad \varphi_i \wedge \varphi_i = 0,$$

где $\{\varphi_i\}$ — базис в X^*, дуальный базису $\{a_i\}$ в пространстве X.

Переходим к доказательству второго утверждения. Имеем:

$$A^*(\omega \wedge \eta)(x_1, \dots, x_k, x_{k+1}, \dots, x_{k+l}) =$$

$$= (\omega \wedge \eta)(Ax_1, \dots, Ax_k, Ax_{k+1}, \dots, Ax_{k+l}) =$$

$$= \frac{(k+l)!}{k!l!} \cdot \frac{1}{(k+l)!} \sum_{\sigma \in S_{k+l}} \operatorname{sign} \sigma \cdot \omega(Ax_{\sigma(1)}, \dots, Ax_{\sigma(k)}) \eta(Ax_{\sigma(k+1)}, \dots, Ax_{\sigma(k+l)}) =$$

$$= \frac{(k+l)!}{k!l!} \cdot \frac{1}{(k+l)!} \sum_{\sigma \in S_{k+l}} \operatorname{sign} \sigma \cdot (A^*\omega)(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(k)})(A^*\eta)(x_{\sigma(k+1)}, \dots, x_{\sigma(k+l)}) =$$

$$= (A^*\omega \wedge A^*\eta)(x_1, \dots, x_k, x_{k+1}, \dots, x_{k+l}),$$

что требовалось доказать.

Покажем, что внешнее произведение обладает свойством ассоциативности, т.е. если $\omega \in \Lambda_k(X)$, $\eta \in \Lambda_l(X)$ и $\theta \in \Lambda_m(X)$, то

$$(\omega \wedge \eta) \wedge \theta = \omega \wedge (\eta \wedge \theta). \tag{8}$$

Так как

$$(\omega \wedge \eta) \wedge \theta = \frac{(k+l+m)!}{(k+l)!m!} \mathrm{Alt}\,[(\omega \wedge \eta) \otimes \theta],$$

$$\omega \wedge (\eta \wedge \theta) = \frac{(k+l+m)!}{k!(l+m)!} \mathrm{Alt}\,[\omega \otimes (\eta \wedge \theta),$$

то равенство (8) будет доказано, если мы установим, что

$$\frac{(k+l+m)!}{(k+l)!m!} \mathrm{Alt}\,(\omega\wedge\eta)\wedge\theta] = \frac{(k+l+m)!}{k!l!m!} \mathrm{Alt}\,[\omega\otimes\eta\otimes\theta] = \frac{(k+l+m)!}{k!(l+m)!} \mathrm{Alt}\,[\omega\otimes(\eta\wedge\theta)]. \tag{9}$$

Далее,

$$\mathrm{Alt}\,[(\omega \wedge \eta) \wedge \theta] = \frac{(k+l)!}{k!l!} \mathrm{Alt}\,[\mathrm{Alt}\,(\omega \otimes \eta) \wedge \theta],$$

и надо, следовательно, показать, что

$$\mathrm{Alt}\,[\mathrm{Alt}\,(\omega \otimes \eta) \otimes \theta] = \mathrm{Alt}\,[\omega \otimes \eta \otimes \theta], \tag{10}$$

или

$$\mathrm{Alt}\,\{[\mathrm{Alt}\,(\omega \otimes \eta) - \omega \otimes \eta] \otimes \theta\} = 0.$$

Но

$$\mathrm{Alt}\,[\mathrm{Alt}\,(\omega \otimes \eta) - \omega \otimes \eta] = \mathrm{Alt}\,[\mathrm{Alt}\,(\omega \otimes \eta)] - \mathrm{Alt}\,(\omega \otimes \eta) = 0,$$

откуда следует, в силу леммы 1, если положить в ней $T = \mathrm{Alt}\,(\omega\otimes\eta) - \omega\otimes\eta$, $S = \theta$, справедливость равенства (11).

Аналогично доказывается второе равенство (9).

Произведение $(\omega\wedge\eta)\wedge\theta = \omega\wedge(\eta\wedge\theta)$ обозначим просто $\omega\wedge\eta\wedge\theta$. По индукции определяется $\omega_1 \wedge \omega_2 \wedge \ldots \wedge \omega_r$, и легко доказывается, что

$$\omega_1 \wedge \omega_2 \wedge \ldots \wedge \omega_r = \frac{(k_1 + k_2 + \ldots + k_r)!}{k_1!k_2! \cdots k_r!} \mathrm{Alt}\,(\omega_1 \otimes \omega_2 \otimes \cdots \otimes \omega_r),$$

если $\omega_i \in \Lambda_{k_i}(X)$, $i = 1, 2, \ldots, r$.

Рассмотрим произведение вида $\varphi_{i_1} \wedge \varphi_{i_2} \wedge \cdots \wedge \varphi_{i_r}$. Если хотя бы два индекса i_m и i_l совпадают, то это произведение равно нулю. Так как перестановка сомножителей в произведении $\varphi_{i_1} \wedge \varphi_{i_2} \wedge \cdots \wedge \varphi_{i_r}$ может изменись лишь его знак, то с точностью до знака такое произведение можно записать в виде $\varphi_{i_1} \wedge \varphi_{i_2} \wedge \cdots \wedge \varphi_{i_r}$, где $i_1 < i_2 < \ldots < i_r$.

Теорема 2. *Если $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ — базис в X^*, дуальный базису $a_1, a_2, \ldots, a_n$ пространства X, то множество произведений вида $\varphi_{i_1} \wedge \varphi_{i_2} \wedge \cdots \wedge \varphi_{i_k}$, $1 \le i_1 < i_2 < \ldots < i_k \le n$, образуют базис пространства $\Lambda_k(X)$.*

Доказательство. Пусть $\omega \in \Lambda_k(X) \subset \mathcal{T}_k(X)$. Согласно теореме 1,

$$\omega = \sum_{i_1,\ldots,i_k} \alpha_{i_1\ldots i_k}\, \varphi_{i_1} \otimes \ldots \otimes \varphi_{i_k}.$$

Поэтому

$$\omega = \mathrm{Alt}\,\omega = \sum_{i_1,\ldots,i_k} \alpha_{i_1\ldots i_k}\, \mathrm{Alt}\,(\varphi_{i_1} \otimes \ldots \otimes \varphi_{i_k}),$$

и так как $\mathrm{Alt}\,(\varphi_{i_1} \otimes \ldots \otimes \varphi_{i_k})$ отличается от $\varphi_{i_1} \wedge \ldots \wedge \varphi_{i_k}$ лишь постоянным множителем, то

$$\omega = \sum_{i_1 < i_2 < \ldots < i_k} \beta_{i_1 i_2 \ldots i_k}\, \varphi_{i_1} \wedge \varphi_{i_2} \wedge \ldots \wedge \varphi_{i_k}.$$

Остается доказать однозначность такого представления. Для этого покажем, что $(\varphi_{i_1} \wedge \ldots \varphi_{i_k})(a_{i_1}, \ldots, a_{i_k}) = 1$ и $(\varphi_{i_1} \wedge \ldots \varphi_{i_k})(a_{j_1}, \ldots, a_{j_k}) = 0$, если хотя бы один индекс i_s не совпадает с соответствующим индексом j_s. В самом деле,

$$(\varphi_{i_1} \wedge \ldots \wedge \varphi_{i_k})(a_{i_1}, \ldots, a_{i_k}) = k!\,\mathrm{Alt}\,(\varphi_{i_1} \otimes \ldots \otimes \varphi_{i_k})(a_{i_1}, \ldots, a_{i_k}) =$$

$$= \sum_{\sigma \in S_k} \operatorname{sign} \sigma\, (\varphi_{i_1} \otimes \ldots \otimes \varphi_{i_k})(a_{i_1}, \ldots, a_{i_k}) = 1$$

в силу биортогональности систем $\{\varphi_i\}$ и $\{a_j\}$. Аналогично проверяется второе утверждение. Но тогда однозначность представления (12) доказывается как и выше (для пространства $\mathcal{T}_k(X)$).

Следствия.

1. *Пусть $\omega \in \Lambda_k(X)$. Поскольку функционалами, биортогональными стандартному базису $e_1, e_2, \ldots, e_n$, являются $\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_n$*[43]*, то за общий вид антисимметрического k-тензора в $\mathbb{R}^n$ можно принять выражение*

$$\sum_{i_1 < i_2 < \ldots < i_k} \omega_{i_1 i_2 \ldots i_k}\, \pi_{i_1} \wedge \pi_{i_2} \wedge \ldots \wedge \pi_{i_k}.$$

2. *Размерность пространства $\Lambda_k(X)$ есть $C_n^k = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$, где n — размерность пространства X. В частности, размерность $\Lambda_n(\mathbb{R}^n)$ равна единице, и мы снова приходим к теореме о том, что в пространстве $\mathbb{R}^n$ все антисимметрические тензоры n-го ранга кратны определителю.*

3. *Пусть $a_1, a_2, \ldots, a_n$ — базис пространства X и $\omega \in \Lambda_n(X)$. Для любых векторов $x_i = \sum\limits_{j=1}^{n} \xi_i^j a_j$, $i = 1, 2, \ldots, n$, имеем:*

$$\omega(x_1, \ldots, x_n) = \det(\xi_i^j)\, \omega(a_1, \ldots, a_n).$$

В самом деле, по теореме 1 из § 1 гл. XVIII, $\omega(x_1, \ldots, x_n) = \lambda\, det(\xi_i^j)$. Взяв, в частности, $x_i = a_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$, получим: $\det(\xi_i^j) = 1$, следовательно, $\lambda = \omega(x_1, \ldots, x_n)$.

§ 2. Касательные пространства и дифференциальные формы

Пусть D — некоторое множество пространства $\mathbb{R}^n$ и $a \in D$ — предельная точка этого множества. По аналогии с касательным вектором к кривой в данной точке определим касательный вектор к множеству D в точке a.

---

[43] π_i — проекция на e_i.

Возьмем последовательность $\{a_n\} \subset D$, сходящуюся к a и рассмотрим единичные векторы $b_n = \dfrac{a_n - a}{|a_n - a|}$. Если последовательность векторов $\{b_n\}$ имеет конечный предел b_0, то пару (a, x), где $x = tb_0$, $0 \leq t < +\infty$, назовем *вектором, касательным к множеству* D в точке a.

Если считать $\mathbb{R}^n$ афинным пространством, то касательный вектор (a, x) можно рассматривать как вектор x, приложенный к точке a.

Беря различные последовательности $\{a_n\} \subset D$, сходящиеся к a, будем получать в общем различные касательные векторы к множеству D в точке a.

Согласно нашему определению, среди касательных векторов имеется «нулевой» вектор $(a, 0)$, если касательные векторы к данному множеству в данной точке существуют. Несколько расширяя определение касательного вектора, условимся считать, что нулевой вектор является касательный к D в любой точке $a \in D$ любого множества D.

Касательные векторы (a, x) будем также обозначать x_a. Совокупность всех векторов, касательных к множеству D в точке a, обозначим TD_a.

Если $x_a, y_a \in TD_a$, то сумма $x_a + y_a$ векторов x_a, y_a, приложенных к точке a, может и не быть касательным вектором. Пусть, например, D есть совокупность двух гладких кривых на плоскости, пересекающихся в точке a, под углом, отличным от нуля. Тогда TD_a будет содержать два касательных вектора x_a и y_a (рис. 74), но их сумма не будет вектором, касательным к D в точке a. Однако во многих случаях TD_a можно наделить структурой линейного пространства, полагая

$$(a, x) + (a, y) = (a, x + y), \qquad \lambda(x, a) = (a, \lambda x),$$

, или, в других обозначениях,

$$x_a + y_a = (x + y)_a, \qquad \lambda x_a = (\lambda x)_a,$$

т.е. складывая касательные вектора и умножая их на вещественные числа как векторы, приложенные к точке a афинного пространства $\mathbb{R}^n$.

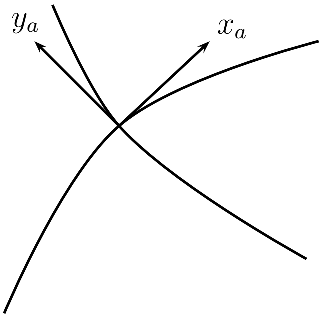

Рис. 74

В дальнейшем, не оговаривая этого особо, будем предполагать, что TD_a для всех точек $a \in D$ есть линейное пространство некоторой размерности p, $0 < p < n$. Назовем это пространство *касательным* к D в точке a. В частности, если D — открытое множество, то TD_a, очевидно, n-мерное и обозначается $\mathbb{R}^n_a$.

В пространстве TD_a можно ввести внутреннее произведение векторов x_a и y_a, полагая

$$\langle x_a, y_a\rangle = \langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^{p} x^i y^i$$

или, в других обозначениях,

$$\langle (a, x), (a, y)\rangle = \langle x, y\rangle,$$

а также орты $(b_1)_a, (b_2)_a, \ldots, (b_p)_a$, $\langle (b_i)_a, (b_j)_a\rangle = \delta_{ij}$. Таким образом, TD_a становится p-мерным эвклидовым пространством. Если D — открытое множество в $\mathbb{R}^n$, то в качестве базиса в $\mathbb{R}^n_a$ можно взять

$$(e_1)_a,\ (e_2)_a,\ \ldots,\ (e_n)_a,$$

где $e_1, e_2, \ldots, e_n$ — стандартный базис пространства $\mathbb{R}^n$ (рис. 75).

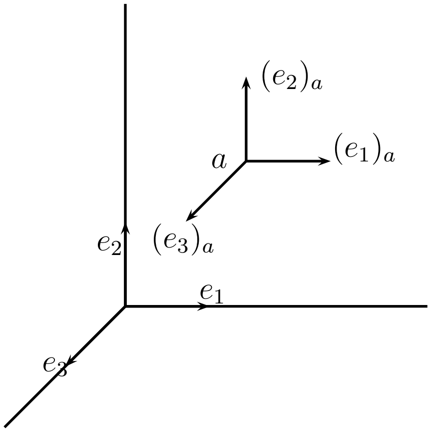

Рис. 75

В пространстве TD_a можно рассматривать линейные функционалы. Пусть $\ell_a(x_a)$ — такой функционал. Тогда он имеет вид (см. § 4 гл. X)

$$\ell_a(x_a) = \langle x_a, u_a\rangle.$$

Но так как

$$\langle x_a, u_a\rangle = \langle x, u\rangle, \qquad u \in \mathbb{R}^n,$$

то

$$\ell_a(x_a) = \langle x, u\rangle = \ell(x), \tag{1}$$

где ℓ — линейный функционал в пространстве $\mathbb{R}^n$, определяемый вектором u. Таким образом, каждый линейный функционал на TD_a порождается некоторым линейным функционалом из $(\mathbb{R}^n)^*$. Заметим, что хотя $\ell(x)$ определен на всем $\mathbb{R}^n$, равенство (1) имеет смысл лишь для таких векторов $x \in \mathbb{R}^n$, которые, будучи приложены к точке a, попадают в касательное пространство TD_a.

В случае, когда $D \subset \mathbb{R}^n$ открыто и, следовательно, для любых x, u определены $x_a, u_a \in \mathbb{R}^n_a$, то и обратно, каждый линейный функционал $\ell \in (\mathbb{R}^n)^*$ порождает, по формуле (1) линейный функционал $\ell_a \in (\mathbb{R}^n_a)^*$.

Далее в настоящем параграфе будем всюду предполагать, что D — открытое множество пространства $\mathbb{R}^n$, в частности все $\mathbb{R}^n$.

Часто при рассмотрении касательных пространств используются и другие обозначения, например, точки множества D обозначают буквами $x, y, z, \ldots$, а векторы касательного пространства TD_a — символами $dx, dy, dz, \ldots$.

В пространстве $\mathbb{R}_n^a$, $a \in D$, как и в любом n-мерном векторном пространстве, можно определить k-тензоры, в результате чего получим пространства $\mathcal{T}_k(\mathbb{R}_a^n)$ и $\Lambda_k(\mathbb{R}_a^n)$. Если $T \in \mathcal{T}_k(\mathbb{R}_a^n)$, то естественно считать, что компоненты $t_{i_1\ldots t_k}$ тензора T зависит от a, и при изменении $a \in D$ получается переменный тензор

$$T(a)\big[(x_1)_a, \ldots, (x_k)_a\big] = \sum_{i_1,\ldots,i_k=1}^{n} t_{i_1\ldots t_k}(a)\,\big[(x_1)_a, \ldots, (x_k)_a\big],$$

или, как часто говорят, тензорное поле, определенное на D.

Тензоры $\omega(a) \in \Lambda_k(\mathbb{R}_a^n)$ называются *k-формами.* Если $\varphi_1(a), \ldots, \varphi_n(a)$ — базис, дуальный стандартному баэису $(e-1)_a, \ldots, (e_n)_a$, то

$$\omega(a)\big[(x_1)_a, \ldots, (x_k)_a\big] = \sum_{i_1<\ldots<i_k} \omega_{i_1\ldots i_k}(a)\,\big[\varphi_{i_1}(a) \wedge \ldots \wedge \varphi_{i_k}(a)\big]\,\big[(x_1)_a, \ldots, (x_k)_a\big],$$

или, короче (опустив аргументы тензоров),

$$\omega(a) = \sum_{i_1<\ldots<i_k} \omega_{i_1\ldots i_k}(a)\,\varphi_{i_1} \wedge \ldots \wedge \varphi_{i_k},$$

где $\omega_{i_1\ldots i_k}(a)$ — скалярные функции векторного аргумента.

Форма $\omega(a)$ (тензорное поле) называется *непрерывной* на D, если все коэффициенты $\omega_{i_1\ldots i_k}(a)$ непрерывны на этом множестве; дифференцируемой, если таковы все $\omega_{i_1\ldots i_k}(a)$, и т.д. Будем предполагать, что $\omega_{i_1\ldots i_k}(a) \in C^\infty(D)$, т.е. являются любое число раз непрерывно дифференцируемыми функциями.

Условимся скалярную функцию $f(a)$, $a \in D$, рассматривать как форму нулевого ранга, и тогда вместо $f(a)\cdot\omega(a)$ иногда будем писать $f(a) \wedge \omega(a)$. Форму нулевого ранга, а также всякую форму первого ранга будем, кроме того, считать принадлежащими пространству $\Lambda_k(\mathbb{R}_a^n)$.

Пусть функция $f:\ D \to \mathbb{R}$ дифференцируема во всех точках $a \in D$. Тогда $f'(a)$ есть линейный функционал, или, в соответствии с нашим соглашением, антисимметрический тензор первого ранга на $\mathbb{R}^n$. Этот 1-тензор порождает 1-форму $df(a)$ на $\mathbb{R}^n$, определяемую равенством

$$df(a)(x)_a = f'(a)\,x. \tag{2}$$

Если ℓ — линейная функция (линейный Функционал) из $\mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}$ и, следовательно, $\ell'(a) = \ell$ — тождественно на $\mathbb{R}^n$, то также $d\ell(a) \equiv \ell$, т.е. $d\ell(x_a) = \ell(x)$ независимо от выбора точки a в пространстве $\mathbb{R}^n$.

Рассмотрим, в частности, проекции π_i на орты e_i стандартного базиса пространства $\mathbb{R}^n$:

$$\pi^i:\ \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \qquad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Эти проекции порождают 1-формы $d\pi^i(a)$, которые в силу их независимости от точки $a \in \mathbb{R}^n$ обозначим $d\pi^i$. Согласно равенству (2),

$$d\pi^i(x_a) = \pi^i(x) = x^i,$$

т.е. форма $d\pi^i$ ставит в соответствие вектору $x_a \in \mathbb{R}^n_a$ его i-ю координату в базисе $\{(e_i)_a\}$. Но это означает, что $d\pi^i$, $i = 1, 2, \ldots, n$, образует в $(\mathbb{R}^n_a)^*$ базис, дуальный стандартному базису $\{(e_i)_a\}$. Поэтому, согласно теореме 2 из § 1 данной главы, любую k-форму $\omega(a) \in \Delta_k(\mathbb{R}^n_a)$ можно записать в виде

$$\omega(a) = \sum_{i_1<\ldots<i_k}^{n} \omega_{i_1\ldots i_k}\, d\pi^{i_1} \wedge \ldots \wedge d\pi^{i_k}.$$

Формы $d\pi^i$ часто обозначают dx^i, и тогда два предыдущих равенства принимают вид:

$$dx^i(x_a)\ x^i, \tag{3}$$

$$\omega(a) = \sum_{i_1<\ldots<i_k} \omega_{i_1\ldots i_k}\, dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_k}. \tag{4}$$

Подчеркнем еще раз, что 1-формы $dx^i \in \Lambda_1(\mathbb{R}^n_a)$, $i = 1, 2, \ldots, n$, не зависят от a, т.е. являются одинаковыми для всех точек a пространства $\mathbb{R}^n$ и образуют базис в $\Lambda_1(\mathbb{R}^n_a)$.

В силу представления (4), k-формы из $\Lambda_k(\mathbb{R}^n_a)$ называются *дифференциальными формами.* В сокращенном виде их записывают следующий образом:

$$\omega = \sum_{i_1<\ldots<i_k} \omega_{i_1\ldots i_k}\, dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_k},$$

опуская переменную точку a под знаком тензора ω и скалярных функций $\omega_{i_1\ldots i_k}$.

Примеры.

1. Мы ввели 1-форму $df(a)(x_a)$. Выразим ее через базисные дифференциальные формы. Имеем:

$$df(a)(x_a) = f'(a)\, x = \sum_{i=1}^{n} D_i f(a)\, x^i = \sum_{i=1}^{n} D_i(a)\, dx^i(x_a).$$

Так как вектор x_a произволен, то, используя краткую запись, получим:

$$df(a) = \sum_{i=1}^{n} D_i f(a)\, dx^i,$$

т.е. $df(a)$ есть дифференциал функции f (что, впрочем, и следовало ожидать), рассматриваемый, однако, как тензор первого ранга.

2. Нетрудно подсчитать, как выражается через dx^i, $i = 1, 2, \ldots, n$, форма $df_1 \wedge \ldots \wedge df_n$, где f_j, $j = 1, 2, \ldots, k$, — скалярные функции, определенные и дифференцируемые на D. Чтобы избежать громоздких преобразований, проведем вычисления, например, для 2-формы $df_1 \wedge df_2$ в пространстве $\mathbb{R}^3_a$. Имеем:

$$df_1 = D_1 f_1\, dx^1 + D_2 f_1\, dx^2 + D_3 f_1\, dx^3,$$

$$df_1 = D_1 f_2\, dx^1 + D_2 f_2\, dx^2 + D_3 f_2\, dx^3.$$

Отсюда, пользуясь дистрибутивностью и антикоммутативностью внешнего произведения, находим:

$$df_1 \wedge df_2 = (D_1 f_1\, dx^1 + D_2 f_1\, dx^2 + D_3 f_1\, dx^3) \wedge (D_1 f_2\, dx^1 + D_2 f_2\, dx^2 + D_3 f_2\, dx^3) =$$

$$= (D_1 f_1 \cdot D_2 f_2 - D_2 f_1 \cdot D_1 f_2)\, dx^1 \wedge dx^2 + (D_1 f_1 \cdot D_3 f_2 - D_3 f_1 \cdot D_1 f_2)\, dx^1 \wedge dx^3 +$$

$$+ (D_3 f_1 \cdot D_3 f_2 - D_3 f_1 \cdot D_2 f_2)\, dx^2 \wedge dx^3 =$$

$$= \sum_{i_1 < i_2}^{n} \frac{D(f_1, f_2)}{D(x^{i_1}, x^{i_2})}\, dx^{i_1} \wedge dx^{i_2}.$$

3. В пространстве $\mathbb{R}^3_a$ 2-форма имеет вид

$$\omega(a) = \omega_{12}(a)\, dx^1 \wedge dx^2 + \omega_{13}\, dx^1 \wedge dx^3 + \omega_{23}\, dx^2 \wedge dx^3.$$

Ее значении на векторах $x = (x^1, x^2, x^3)$ и $y = (y^1, y^2, y^3)$ вычисляется следующим образом:

$$\omega(a)(x, y) = \omega_{12}(a)\, dx^1 \wedge dx^2(x, y) + \omega_{13}(a)\, dx^1 \wedge dxx^3(x, y) + \omega_{23}(a)\, dx^2 \wedge dx^3(x, y) =$$

$$= \omega_{12}(a)[dx^1 \wedge dx^2(x, y) - dx^1 \wedge dx^2(y, x)] + \omega_{13}(a)[dx^1 \wedge dx^3(x, y) - dx^1 \wedge dx^3(y, x)] +$$

$$+ \omega_{23}(a)[dx^2 \wedge dx^3(x, y) - dx^2 \wedge dx^3(y, x)] =$$

$$= \omega_{12}(a)[dx^1(x)dx^2(y) - dx^1(y)dx^2(x)] + \omega_{13}(a)[dx^1(x)dx^3(y) - dx^1(y)dx^3(x)] +$$

$$+ \omega_{23}(a)[dx^2(x)dx^3(y) - dx^2(y)dx^3(x)] =$$

$$= \omega_{12}(a)[x^1 y^2 - y^1 x^2] + \omega_{13}(a)[x^1 y^3 - y^1 x^3] + \omega_{23}(a)[x^2 y^3 - y^2 x^3] =$$

$$= \omega_{12}(a) \begin{vmatrix} x^1 & x^2 \\ y^1 & y^2 \end{vmatrix} + \omega_{13}(a) \begin{vmatrix} x^1 & x^3 \\ y^1 & y^3 \end{vmatrix} + \omega_{23}(a) \begin{vmatrix} x^2 & x^3 \\ y^2 & y^3 \end{vmatrix}.$$

4. В пространстве $\mathbb{R}^3_a$ 3-форма, согласно следствию 2 теоремы 2 из § 1, пропорциональна детерминанту и ее значение на векторах x, y, z определяется формулой

$$\omega(x, y, z) = \lambda(a) \begin{vmatrix} x^1 & y^1 & z^1 \\ x^2 & y^2 & z^2 \\ x^3 & y^3 & z^3 \end{vmatrix},$$

где $\lambda(a) = \omega(a)[(e_1)_a, (e_2)_a, (e_3)_a]$.

Пусть $f_1, f_2, \ldots, f_n$ — скалярные функции, определенные на D и дифференцируемые на этом множестве. Они порождают n-форму $df_1 \wedge df_2 \wedge \ldots \wedge df_n$.

Теорема 1.

$$df_1 \wedge \ldots \wedge df_n = \frac{D(f_1, \ldots, f_n)}{D(x^1, \ldots, x^n)}\, dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^n.$$

Доказательство. Мы видим, что

$$df_i = \sum_{j_i = 1}^{n} D_{j_i} f_i(a)\, dx^{j_i}.$$

Поэтому, используя свойства внешнего произведения, найдем:

$$df_1 \wedge \ldots \wedge df_n =$$

$$= \left(\sum_{j_1=1}^{n} D_{j_1} f_i(a)\, dx^{j_1}\right) \wedge \left(\sum_{j_2=1}^{n} D_{j_2} f_i(a)\, dx^{j_2}\right) \wedge \ldots \wedge \left(\sum_{j_n=1}^{n} D_{j_n} f_i(a)\, dx^{j_n}\right) =$$

$$= \sum_{j_1=1}^{n} \sum_{j_2=1}^{n} \ldots \sum_{j_n=1}^{n} D_{j_1} f_1(a) D_{j_2} f_2(a) \ldots D_{j_n} f_n(a)\, dx^{j_1} \wedge dx^{j_2} \wedge \ldots \wedge dx^{j_n}.$$

В силу антикоммутативности внешнего произведения, в последней сумме отличны от нуля лишь те слагаемые, у которых все индексы $j_1, j_2, \ldots, j_n$ различны. Так как, кроме того,

$$dx^{j_1} \wedge dx^{j_2} \wedge \ldots \wedge dx^{j_n} = \delta_{j_1 j_2 \ldots j_n}\, dx^1 \wedge dx^2 \wedge \ldots \wedge dx^n,$$

где $\delta_{j_1 j_2 \ldots j_n}$ равно $+1$ или -1, в зависимости от четности или нечетности перестановки $(j_1, j_2, \ldots, j_n)$, то

$$df_1 \wedge \ldots \wedge df_n =$$

$$= \sum_{j_1=1}^{n} \sum_{j_2=1}^{n} \ldots \sum_{j_k=1}^{n} \delta_{j_1 j_2 \ldots j_n} D_{j_1} f_1(a) D_{j_2} f_2(a) \ldots D_{j_n} f_n(a)\, dx^1 \wedge dx^2 \wedge \ldots \wedge dx^n =$$

$$= \frac{D(f_1, \ldots, f_n)}{D(x^1, \ldots, x^n)}\, dx^1 \wedge dx^2 \wedge \ldots \wedge dx^n.$$

Замечание 1. В общем случае для k-форм в $\mathbb{R}^n_a$ при $k < n$ имеет место равенство

$$df_1 \wedge \ldots \wedge df_k = \sum_{i_1 < \ldots < i_k} \frac{D(f_1, \ldots, f_n)}{D(x^{i_1}, \ldots, x^{i_k})}\, dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_k},$$

которое доказывается аналогично предыдущему.

Замечание 2. Из формулы (4) вытекает выражение k-формы $\omega(a)$ через базисные линейные функционалы $dx^1, \ldots, dx^n$. Если функционалы $df_1, \ldots, df_n$ линейно независимы и, следовательно, их совокупность образует базис пространства $(\mathbb{R}^n_a)^*$, то k-форма $\omega(a) = \sum\limits_{i_1 < \ldots < i_k} \omega_{i_1 \ldots i_k}\, dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_k}$ может быть выражена также через функционалы $df_1, \ldots, df_n$ и записана в виде

$$\omega(a) = \sum_{i_1 < \ldots < i_k}^{n} \omega_{i_1 \ldots i_k}\, df_{i_1} \wedge \ldots \wedge df_{i_k}$$

В § 1 был определен оператор L^*, сопряженный с оператором $L \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$, действующий из $\mathcal{T}_k(\mathbb{R}^m)$ в $\mathcal{T}_k(\mathbb{R}^n)$, в частности из $\Lambda_k(\mathbb{R}^m)$ в $\Lambda_k(\mathbb{R}^n)$. Для k-форм естественно ввести оператор, сопряженный с оператором $L \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n_a, \mathbb{R}^m_a)$ и определяемый равенством

$$(L^*\omega)(a)[(x_1)_a, (x_2)_a, \ldots, (x_k)_a] = \omega(f(a))[L(x_1)_a, L(x_2)_a, \ldots, L(x_k)_a].$$

Рассмотрим специальный вид такого оператора.

Пусть дано дифференцируемое отображение $f: A \to \mathbb{R}^m$, где $A \subset \mathbb{R}^n$ — открытое множество; предположим, что $B = f(A)$ также открыто. Если $\omega(b)$ — форма нулевого ранга, т.е. скалярная функция, определенная на B, то с помощью отображения f можно определить на A другую форму целевого ранга $\omega^*(a)$, полагая

$$\omega^*(a) = \omega(f(a)) = (\omega \circ f)(a).$$

Можно сказать, что форма ω^* получена из ω с помощью замены переменных, осуществленной посредством отображения f?. Пусть теперь $\omega(b)[(y_1)_b, (y_2)_b, \dots, (y_k)_b]$, $b = f(a)$ — форма ранга k, определенная на $\mathbb{R}^m_{f(a)}$. Обобщив предыдущую конструкцию, определим форму $\omega^*(a)[(x_1)_a, (x_2)_a, \dots, (x_n)_a]$ с помощью равенства

$$\omega^*(a)[(x_1)_a, (x_2)_a, \dots, (x_n)_a] =$$

$$= \omega[f(a)]\,[L_f(x_1)_a, L_f(x_2)_a, \dots, L_f(x_k)]_a = (L_f^*\omega)(a)[(x_1)_a, (x_2)_a, \dots, (x_k)_a],$$

где L_f — линейный оператор из $\mathbb{R}^n_a$ в $\mathbb{R}^m_{f(a)}$, порожденный производной функции f и задаваемый равенством

$$L_f(x)_a = [f'(a)x]_{f(xa)}.$$

В этом случае говорят, что k-форма $\omega^*(a)$ получена на формы $\omega(b)$ заменой переменной и иногда называют форму $\omega^*(a)$ прообразом формы $\omega(b)$ при отображении f.

Форму $\omega^*(a)$ будем также обозначать $(f^*\omega)(a)$, так что f^* будет являться оператором, действующим из пространства $\Lambda_k(\mathbb{R}^m_{f(a)})$ в пространство $\Lambda_k(\mathbb{R}^n_a)$ переводящим форму $\omega(b) \in \Lambda_k(\mathbb{R}^m_{f(a)})$ в форму

$$(f^*\omega)(a)[(x_1)_a, (x_2)_a, \dots, (x_k)_a] = \omega(f()a))[L_f(x_1)_a, L_f(x_2)_a, \dots, L_f(x_k)_a].$$

Очевидно, что если $\omega, \omega_1, \omega_2 \in \Lambda_k(\mathbb{R}^m_{f(a)})$, то

$$f^*(\lambda\omega) = \lambda f^*(\omega), \qquad \lambda \in \mathbb{R},$$

и

$$f^*(\omega_1 + \omega_2) = f^*(\omega_1) + f^*(\omega_2),$$

т.е. f^* — линейный оператор.

Подсчитаем для примера f^*dy^i, где через dy^i, $i = 1, 2, \dots, m$, обозначены 1-формы на $\mathbb{R}^m_{f(a)}$, порожденные базисом в $(\mathbb{R}^m_{f(a)})^*$, дуальным стандартному базису пространства $\mathbb{R}^m_{f(a)}$. Согласно определению,

$$(f^*dy^i)(x)_a = dy^i[L_f(x)_a] = dy^i[f'(a)x]_{f(a)} =$$

$$= dy^i\left[\sum_{j=1}^n D_j f^1(a)x, \dots, \sum_{j=1}^n D_j f^m(a)x^j\right]_{f(a)} =$$

$$= \sum_{j=1}^n D_j f^i(a)x^j = \sum_{j=1}^n D_j f^i(a)dx^j[(x)_a].$$

Здесь мы воспользовались формулой 10 из § 2 гл. XII и определением формы dx^i. Таким образом,

$$f^*dy^i = \sum_{j=1}^{n} D_j f^i dx^j, \qquad i = 1, 2, \dots, m. \tag{5}$$

Лемма 1. *Если* $\omega \in \Lambda_k(\mathbb{R}^m_{f(a)})$ *и* $\eta \in \Lambda_l(\mathbb{R}^m_{f(a)})$, *то*

$$f^*_{(k+l)}(\omega \wedge \eta) = f^*_{(k)}\omega \wedge f^*_{(l)}(\eta),$$

где через $f^*_{(r)}$ *обозначен оператор, действующий из* $\Lambda_r(\mathbb{R}^m_{f(a)})$ *в* $\Lambda_r(\mathbb{R}^n_a)$.

Доказательство. В силу свойства 2) внешнего произведения (см. § 1), имеем для каждой фиксированной точки $a \in D$:

$$f^*_{(k+l)}(\omega \wedge \eta)(a) L^*_f(\omega \wedge \eta)(a) = L^*_f[\omega(a)] \wedge L^*_f[\eta(a)] = f^*_{(k)}\omega(a) \wedge f^*_{(l)}\eta(a),$$

и требуемое доказано.

В частности, если $g \in \Lambda_0(\mathbb{R}^m_{f(a)}))$ — скалярная функция и, следовательно, $f^*g = g \circ f$, то

$$f^*(g\omega) = f^*(g \wedge \omega)\ f^*g \wedge f^*\omega = (g \circ f) f^*\omega. \tag{6}$$

Лемма 2. *Пусть функция* $g:\ D \to \mathbb{R}$ *дифференцируема на* D, *Тогда*

$$f^*(dg) = d(f^*g(= d(g \circ f).$$

Доказательство. В самом деле, для любой точки $a \in D$

$$(f^*dg)(a)(x_a) = (L^*fdg)(a)(x_a) = dg(f(a))[L_f(x_a)] = dg(f(a))(f'(a)x)_{f(a)} = dg(b)(y_b),$$

где $b = f(a)$ и $y = f'(a)x$. Но, по определению 1-формы,

$$dg(b)(y_b) = g'(b)y = g'(f(a))(f'(a)x) = (g \circ f)'(a)x = d(g \circ f)(a)(x_a).$$

Следовательно,

$$(f^*dg)(a)(x_a) = d(g \circ f)(a)(x_a),$$

и лемма доказана.

Теорема 2. *Пусть* $y = f(x)$ *— дифференцируемое отображение множества* $D \subset \mathbb{R}^n$ *в пространство* $\mathbb{R}^n$, $y^i = f^i(x^1, \dots, x^n)$, $i = 1, 2, \dots, n$, *— координатные функции этого отображения и* h *— скалярная функция, определенная на* $\mathbb{R}^n$. *Тогда*

$$f^*(h\, dy^1 \wedge \dots \wedge dy^n) = (h \circ f)\ \det f'\, dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n.$$

Доказательство. Так как, по лемме 1 (см. формулу (6)),

$$f^*(h\, dy^1 \wedge \dots \wedge dy^n) = (h \circ f) f^*(dy^1 \wedge \dots \wedge dy^n),$$

надо доказать, что

$$f^*(dy^1 \wedge \dots \wedge dy^n) = \det f'\, dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n.$$

По свойству оператора f^*, имеем:

$$f^*(dy^1 \wedge \ldots \wedge dy^n) = (f^*dy^1) \wedge \ldots \wedge (f^*dy^n).$$

Так как

$$f^*dy^i = \sum_{j=1}^{n} D_j f^i dx^i,$$

то (см. доказательство теоремы 1)

$$(f^*dy^1) \wedge \ldots \wedge (f^*dy^n) =$$

$$= \left(\sum_{j_1=1}^{n} \sum_{j_2=1}^{n} \sum_{j_k=1}^{n} \delta_{j_1 j_2 \ldots j_n} D_{j_1} f^1 D_{j_2} f^2 \cdots D_{j_n} f^n \right) dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^n =$$

$$= \frac{D(f^1, f^2, \ldots, f^n)}{D(x^1, x^2, \ldots, x^n)} dx^1 \wedge dx^2 \wedge \ldots \wedge dx^n = \det f' \, dx^1 \wedge dx^2 \wedge \ldots \wedge dx^n.$$

Предположим, что $\det f'(x)$ не обращается в нуль на D. Тогда отображение

$$y^i = f^i(x^1, \ldots, x^n), \qquad i = 1, 2, \ldots, n,$$

можно рассматривать как преобразование координат в пространстве $\mathbb{R}^n$, и это является дополнительным основанием для того, чтобы говорить, что форма $f^*\omega$ получена из форма ω путем замены переменных. Так, если в области D пространства $\mathbb{R}^3$, не содержащей начала, перейти к сферическим координатам

$$\begin{aligned} x^1 &= r \cos\varphi \sin\theta, \\ x^2 &= r \sin\varphi \sin\theta, \\ x^3 &= r \cos\theta, \end{aligned}$$

то

$$dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 = r^2 \sin\theta dr \wedge d\varphi \wedge d\theta.$$

Введем в пространстве k-форм оператор внешнего дифференцирования d, определяя его для

$$\omega = \sum_{i_1 < \ldots < i_k} \omega_{i_1 \ldots i_k} \, dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_k}$$

равенством

$$d\omega = \sum_{i_1 < \ldots < i_k} d\omega_{i_1 \ldots i_k} \wedge dx^{i_1} \wedge dx^{i_2} \wedge \ldots \wedge dx^{i_k} =$$

$$= \sum_{i_1 < \ldots < i_k} \sum_{\alpha=1}^{n} D_\alpha(\omega_{i_1 \ldots i_k} \, dx^\alpha \wedge dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_k}.$$

Если все $\omega_{i_1 \ldots i_k}$ — константы, то $d\omega = 0$. В частности, $d(dx^i) = 0, i = 1, 2, \ldots, i_k$.

Напомним, что рассматриваемые нами формы предполагаются принадлежащими классу C^∞, так что предыдущее определение имеет смысл. Ясно, что

$$d(\omega_1 + \omega_2) = d\omega_1 + d\omega_2,$$

$$d(\lambda\omega) = \lambda d\omega, \qquad \lambda \in \mathbb{R},$$

т.е. d есть линейный оператор.

Лемма 3. *Пусть* $\omega \in \Lambda_k(\mathbb{R}^n_a)$ *и* $\eta \in \Lambda_l(\mathbb{R}^n_a)$. *Тогда*

$$d(\omega \wedge \eta) = d\omega \wedge \eta + (-1)^k \omega \wedge d\eta. \tag{7}$$

Если $\omega_0 = dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_k}$, $\eta_0 = dx^{j_1} \wedge \ldots \wedge dx^{j_l}$, то формула (7), очевидно, верна, так как и $d\omega_0$ и $d\eta_0$, и $d(\omega_0 \wedge \eta_0)$ равны нулю. Пусть ω есть 0-форма, т.е. скалярная функция, и $\eta \in \Lambda_l(\mathbb{R}^n_a)$ — любое. Тогда $(-1)^0 = 1$, и формула (7) сводится к равенству

$$d(\omega \wedge \eta) d\omega \wedge \eta + \omega \wedge d\eta, \tag{8}$$

которое проверяемся без труда.

Пусть теперь ω и η — «одночлены»,

$$\omega = \alpha(a)\, dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_k} = \alpha(a)\, \omega_0,$$

$$\eta = \beta(a)\, dx^{j_1} \wedge \ldots \wedge dx^{j_l} = \beta(a)\, \eta_0,$$

где $\alpha(a)$ и $\beta(a)$ — скалярные функции. Используя (8), получим:

$$d(\omega \wedge \eta) = d[\alpha(a)\, \omega_0 \wedge \beta(a)\eta_0] = d[\alpha(a)\beta(a) \wedge (\omega_0 \wedge \eta_0)] =$$

$$= d(\alpha(a)\beta(a)) \wedge (\omega_0 \wedge \eta_0) + \alpha(a)\beta(a) d(\omega_0 \wedge \eta_0) =$$

$$= d\alpha(a)\beta(a) \wedge (\omega_0 \wedge \eta_)) + \alpha(a) d\beta(a) \wedge (\omega_0 \wedge \eta_0) =$$

$$= (d\alpha(a) \wedge \omega_0) \wedge \beta(a)\eta_0 + (-1)^k [(\alpha(a)\omega_0) \wedge (d\beta(a) \wedge \eta_0)] = d\omega \wedge \eta + (-1)^k \omega \wedge d\eta.$$

Здесь мы воспользовались тем, что $d(\omega_0 \wedge \eta_0) = 0$ и $d\beta(a) \wedge \omega_0 = (-1)^k \omega_0 \wedge d\beta(a)$.

Если, наконец, ω и η — произвольные k-формы, то требуемый результат следует из линейности оператора d и дистрибутивности внешнего произведения.

Лемма 4. $d(d\omega) = 0$.

В самом деле,

$$d\omega = \sum_{i_1 < \ldots < i_k}^{n} \sum_{\alpha=1}^{n} D_\alpha(\omega_{i_1 \ldots i_k}\, dx^\alpha \wedge dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_k},$$

следовательно,

$$d(d\omega) = \sum_{i_1 < \ldots < i_k} \sum_{\alpha=1}^{n} \sum_{\beta=1}^{n} D_{\alpha\beta}(\omega_{i_1 \ldots i_k} dx^\alpha \wedge dx^\beta \wedge dx^{i_1} \wedge \ldots dx^{i_k}.$$

Но в этой сумме члены

$$D_{ij}(\omega_{i_1 \ldots i_k})\, dx^i \wedge dx^j \wedge dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_k},$$

$$D_{ji}(\omega_{i_1 \ldots i_k})\, dx^j \wedge dx^i \wedge dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_k}$$

попарно уничтожается, в результате чего получаем равенство $d(d\omega) = 0$.

Теорема 3. *Если* $\omega \in \Lambda_k(\mathbb{R}^m_{f(a)})$ *и функция* $f : \ \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ *дифференцируема, то*

$$f^*(d\omega) = d(f^*\omega).$$

Докажем это равенство по индукции. Пусть ω есть 0-форма. Тогда, согласно (6),

$$f^*(d\omega) = f^*\Bigg(\sum_{\alpha=1}^{m} D_\alpha\omega\,dx^i\Bigg) = \sum_{\alpha=1}^{m} f^*(D_\alpha\omega\,dx^\alpha\Bigg) = \sum_{\alpha=1}^{m} D_\alpha(\omega\circ f)f^*(dx^\alpha).$$

Так как

$$f^*(dx^\alpha) - \sum_{\beta=1}^{n} D_\beta f^\alpha\,dx^\beta, \qquad \alpha = 1, 2, \ldots, m,$$

то

$$f^*(d\omega) = \sum_{\alpha=1}^{m}\sum_{\beta=1}^{n} D_\alpha(\omega\circ f)D_\beta f^\alpha\,dx^\beta = \sum_{\beta=1}^{n}\left[\sum_{\alpha=1}^{m} D_\alpha(\omega\circ f)D_\beta f^\alpha\right]dx^\beta.$$

Но в силу формулы для производной сложной функции (си. формулу (2) из § 3 гл. XI),

$$\sum_{\alpha=1}^{m} D_\alpha(\omega\circ f)D_\beta f^\alpha = D_\beta(\omega\circ f),$$

и мы получаем:

$$f^*(d\omega) = \sum_{\beta=1}^{n} D_\beta(\omega\circ f)\,dx^\beta = d(\omega\circ f) = d(f^*\omega).$$

Предположим, что теорема верна для k-форм, и пусть ω есть $(k+1)$-форма. Так как любая $(k+1)$-форма является суммой форм вида $\omega_0 \wedge dx^i$, где ω_0 — k-форма, и оператор d аддитивен, то достаточно показать, что

$$f^*[d(\omega_0\wedge dx^i)] = d[f^*(\omega_0\wedge dx^i)]. \tag{9}$$

Имеем:

$$\begin{gathered} f^*[d(\omega_0\wedge dx^i)] = f^*[d\omega_0\wedge dx^i + (-1)^k\omega_0\wedge d(dx^i)] = \\ = f^*[d\omega_0\wedge dx^i] = f^*(d\omega_0)\wedge f^*(dx^i) = d(f^*\omega_0)\wedge f^*(dx^i), \end{gathered} \tag{10}$$

так как $d(dx^i) = 0$ и, по предположению, $f^*(d\omega_0) = d(f^*\omega_0)$. С другой стороны,

$$d[f^*(\omega_0\wedge dx^i)] = d[f^*\omega_0\wedge f^*dx^i] = d(f^*\omega_0)\wedge f^*(dx^i) + (-1)^k f^*\omega_0\wedge d(f^*\,dx^i).$$

Но

$$df^*(dx^i) = d\left[\sum_{j=1}^{n} D_j f^i\,dx^j\right] = \sum_{j=1}^{n}\sum_{\beta=1}^{n} D_{j\beta}f^i\,dx^\beta\wedge dx^i = 0,$$

потому что члены $D_{j\beta}f^i\,dx^\beta\wedge dx^j$ и $D_{\beta j}f^i\,dx^j\wedge dx^\beta$ попарно уничтожаются, и, следовательно,

$$d[f^*(\omega_0\wedge dx^i)] = d(f^*\omega_0)\wedge f^*(dx^i). \tag{11}$$

Из сравнения (10) и (11) следует (9), и теорема доказана.

Приведем пример внешнего дифференцирования формы. Пусть $\omega \in \Lambda_1(\mathbb{R}^3_a)$. Тогда $\omega(a)P\,dx + Q\,dy + R\,dz$ (здесь через x, y, z вместо x^1, x^2, x^3 мы обозначаем координаты точек $\mathbb{R}^3$). Согласно свойствам внешнего произведения и внешнего дифференцирования,

$$d\omega = \left(\frac{\partial P}{\partial x}\,dx + \frac{\partial P}{\partial y}\,dy + \frac{\partial P}{\partial z}\right) \wedge dx +$$

$$+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}\,dx + \frac{\partial Q}{\partial y}\,dy + \frac{\partial Q}{\partial z}\right) \wedge dy + \left(\frac{\partial R}{\partial x}\,dx + \frac{\partial R}{\partial y}\,dy + \frac{\partial R}{\partial z}\right) \wedge dz =$$

$$= \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)dx \wedge dy + \left(\frac{\partial R}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial z}\right)dx \wedge dz + \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)dy \wedge dz.$$

Если $\dfrac{\partial Q}{\partial x} = \dfrac{\partial P}{\partial y}$, $\dfrac{\partial R}{\partial x} = \dfrac{\partial P}{\partial z}$ и $\dfrac{\partial R}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial z}$, то $d\omega = 0$.

Форма ω называется *замкнутой*, если $d\omega = 0$. Равенство $d(d\eta) = 0$ показывает, что если $\omega = d\eta$, то ω — замкнутая форма. Форма ω называется *точной*, если существует другая форма η, такая, что $\omega = d\eta$. Мы видим, что точная форма замкнута. Имеет место в известном смысле обратное утверждение, называемое леммой Пуанкаре. Множество $M \subset \mathbb{R}^n$ называется *звездным* относительно точки $a \in M$, если для любой другой точки $x \in M$ весь отрезок, соединяющий эти точки, принадлежит M.

Лемма Пуанкаре. *Форма ω, замкнутая на открытой множестве D, звездном относительно нуля, является точной.*

Доказательство леммы Пуанкаре см.. например у А. Картана или М. Спивака[44].

§ 3. Цепи и интегрирование по цепям

Для последующего нам понадобится понятие ориентации n-мерного линейного пространства.

Известно, что в плоскости можно ввести две различные декартовы прямоугольные системы координат — правую e_1, e_2 и левую e_1', e_2', отличающиеся различным в этих системах расположением по отношению друг к другу базисных векторов (рис. 76).

---

[44] Картан А. «Дифференциальное исчисление. Дифференциальные формы». М., 1971; Спивак М. «Математический анализ на многообразиях». М., 1968.

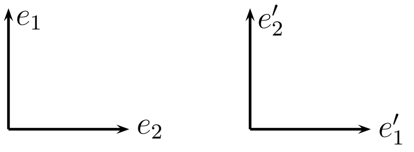

Рис. 76

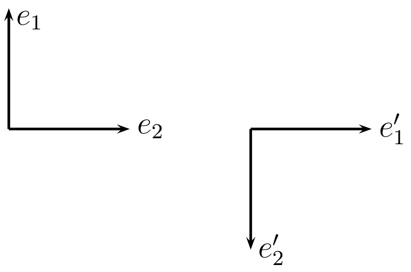

Рис. 77

Рассмотрим преобразование базиса e_1, e_2 в базис e'_1, e'_2, определяемое формулами

$$e'_1 = e_2, \qquad e'_2 = e_1.$$

Матрица A этого преобразования имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

и $\det A = -1$.

Если же возьмем две правые или левый системы координат (см. рис. 77), то в этом случае $\det A = 1$ будет равен единице. Так как матрица преобразования одного ортогонального базиса в другой всегда имеет детерминант, равный по модулю единице, то все ортонормальные базисы в $\mathbb{R}^2$ можно разбить на две группы, объединив в одну группу базисы, которые преобразуются друг в друга с помощью матрицы, с детерминантом, равным $+1$. В связи с этим говорят, что пространство $\mathbb{R}^2$ допускает две *взаимно противоположные ориентации*, определяющиеся выбором базиса, причем базисы одной группы порождают одну и ту же, например положительную, а базисы другой группы — противоположную, т.е. отрицательную, ориентацию.

Более обще, пусть a_1, a_2 и a'_1, a'_2 — произвольные, не обязательно ортогональные базисы и A — матрица перехода от a_1, a_2 к a'_1, a'_2. Так как $\det A \neq 0$, то снова все базисы разбиваются на две группы так, что для двух базисов из одной группы $\det A > 0$, а для двух базисов из разных групп $\det A < 0$. Снова выбор базиса в одной группе порождает одну, а в другой группе — противоположную ориентацию пространства $\mathbb{R}^2$.

Совершенно так же вводится понятие ориентации произвольного n-мерного линейного пространства. Разбиваем все базисы пространства на две группы, объединяя в одну группу базисы, преобразующиеся друг в друга с помощью матрицы, имеющей положительный детерминант. Выбирая базис в той и иной группе, мы тем самым выбираем одну из двух возможных ориентации пространства.

Так как в пространстве $\mathbb{R}^n$ любой антисимметрический n-тензор пропорционален детерминанту, то при определении ориантации пространства $\mathbb{R}^n$ можно исходить из любого ненулевого n-тензора $\omega \in \Lambda_n(\mathbb{R}^n)$.

Ориентацию, порождаемую базисом $a_1, a_2, \ldots, a_n$, обозначим $[a_1, a_2, \ldots, a_n]$. Ориентации $[e_1, e_2, \ldots, e_n]$, где $e_1, e_2, \ldots, e_n$ — стандартный базис, называется *стандартной ориентацией.*

Замкнутому n-мерному кубу $Q \subset \mathbb{R}^n$ также можно приписать две взаимно противоположные ориентации. Если $Q = \left\{ x = \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i a_i | \ 0 \leq \alpha_i \leq 1 \right\}$, то этот куб считается ориентированным положительно, когда $[a_1, a_2, \dots, a_n]$ совпадает с выбранной ориентацией $\mathbb{R}^n$.

Пусть $A \subset \mathbb{R}^m$ и открыто. *Сингулярным n-мерным, $n \leq m$, кубом* в A называется гладкое отображений $K: \ Q \to A$, где Q — замкнутый ориентированный n-мерный куб в $\mathbb{R}^n$. Например, одномерный сингулярный куб — это кривая Γ, $x^i = K^i(t)$, где $0 \leq t \leq 1$, $i = 1, 2, \dots, m$, и все K^i — гладкие функции.

Говоря о гладкости отображения $K: \ Q \to A$, мы предполагаем, что K непрерывно вместе с производными до нужного порядка в некотором открытой множества G, содержащем Q. Если специально не оговорен порядок гладкости, будем считать, что $K \in C^\infty(G)$.

ЗАМЕЧАНИЯ.

1. При определении n-мерного сингулярного куба K мы отправлялись от замкнутого n-мерного куба Q. Можно было бы вместо куба Q взять параллелепипед $P = \left\{ x = \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i a_i | \ \alpha_i^0 \leq \alpha_i \leq \alpha_i^1 \right\}$. Однако это не привело бы к более широкому понятию, что станет особенно ясным из данного ниже определения тождественности двух сингулярных кубов одинаковой размерности.

2. Рассматривая гладкую кривую на плоскости, мы отождествляли ее с совокупностью двух скалярных функций (или с одной векторной функцией) скалярного аргумента. Точно также сингулярный n-мерный куб надо определять именно как отображение, а не рассматривать его просто как множество в $\mathbb{R}^n$, задаваемое некоторой совокупностью равенств и неравенств.

Пусть Q и Q_1 — два n-мерных ориентированных куба. Сингулярные кубы $K: \ Q \to A$ и $K_1: \ Q_1 \to A$ будем считать *тождественными*, если:

1) существует гладкое взаимно однозначное отображение T куба Q на куб Q_1, такое, что T^{-1} тоже гладкое[45] и $K = K_1 \circ T$ (или $K_1 = K \circ T^{-1}$);

2) $\det T' > 0$.

В этом случае $K = K_1$. Если при выполнении условия 1) имеем (2*) $\det T' < 0$, то сингулярные кубы K и K_1 *противоположно ориентированы*: $K_1 = -K$ или $K = -K_1$.

Нетрудно заметить, что определение ориентированного сингулярного куба обобщает понятие ориентированной дуги.

Если $K = K_1$ и $K = -K_1$, т.е. $K = -K$, то сингулярный куб считается *нулевым*: $K = 0$. Так, например, если K отображает Q в точку пространства $\mathbb{R}^n$. Другой пример. Пусть $Q = [-1]$ и K — сингулярный куб, заданный отображением $K(t) = t^2$, $t \in [-1, 1]$. Рассмотрим другой сингулярный куб $K_1(t_1) = 4t_1^2$, $t_1 \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right]$. С одной стороны, $K = K_1 \circ T$, где $T(t) = \frac{1}{2} t$,и так как $T'(t) = \frac{1}{2} > 0$,

---

[45] Такие отображения называются *диффеоморфизмами*.

то $K = K_1$. С другой стороны, $K = K_1 \circ T_1$, где $T_1(t) = -\dfrac{1}{2}\,t$, $T'(t) < 0$ и, следовательно, $K = -K_1$. Таким образом, $K = -K$, т.е. рассматриваемый сингулярный куб нулевой. Этот пример снова подтверждает целесообразность понимания сингулярного куба как отображения, а не как множества.

Заметим, что мы будем иногда рассматривать обычный n-мерный куб $Q \subset \mathbb{R}^n$ как сингулярный, полагая $Q = I^n Q$, где I^n — тождественное отображение Q в $\mathbb{R}^n$ или сужение на Q тождественного отображения $I^n : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, т.е. $I^n x = x$ для любого $x \in \mathbb{R}^n$.

3. Введем в рассмотрение формальные суммы n-мерных сингулярных кубов $K_1, K_2, \ldots, K_p$, принадлежащих A, с целочисленными коэффициентами $q_1, q_2, \ldots, q_p$, т.е. выражения вида

$$q_1 K_1 + q_2 K_2 + \ldots + q_p K_p.$$

Эти выражения будем складывать, складывая коэффициенты при одинаковых кубах, и умножать на целые числа, умножая на это число все коэффициенты:

$$(q_1 K_1 + q_2 K_2 + \ldots + q_p K_p) + (q_1' K_1 + q_2' K_2 + \ldots + q_p' K_p) =$$

$$= (q_1 + q_1')K_1 + (q_2 + q_2')K_2 + \ldots + (q_p + q_p')K_p;$$

$$q(q_1 K_1 + q_2 K_2 + \ldots + q_p K_p) = qq_1 K_1 + qq_2 K_2 + \ldots + qq_p K_p;$$

$$0 \cdot K = 0.$$

Формальную сумму n-мерных сингулярных кубов назовем *n-мерной сингулярной цепью.* Очевидно, что n-мерные сингулярные цепи образуют модуль над кольцом целых чисел. Частным случаем сингулярной цепи будет сингулярный куб $K = 1 \cdot K$. Противоположно ориентированный сингулярный куб $-K$ будем рассматривать как частный случай сингулярной цепи и записывать в виде $-K = (-1)K$.

Примером одномерной сингулярной цени может служить кривая, составленная из гладких ориентированных дуг (рис. 78).

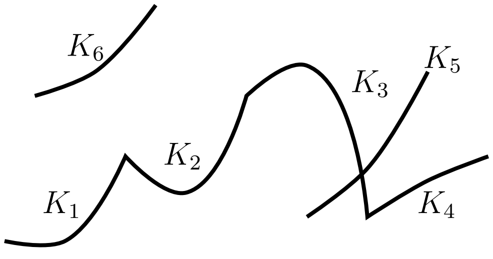

Рис. 78

Другой пример. Пусть $f_1, f_2, \ldots, f_p$ — гладкие скалярные функции, определенные в окрестности единичного квадрата $[0, 1; 0, 1]$ пространства $\mathbb{R}^2$ с левой системой координат. Тогда цепь

$$q_1 K_1 + q_2 K_2 + \ldots + q_p K_p,$$

где K_i — отображения $K_i(x,y) = (x, y, f_i(x,y))$ представляет собой совокупность ориентированных поверхностей S_i, $z = f_i(x,y)$, в трехмерном пространстве, причем поверхность S_i снабжается коэффициентом q_i.

Введем понятие границы сингулярной цепи. Для этого определим границу n-мерного куба, который без ограничения общности можно считать единичным. С этой целью для каждого индекса i, $1 \le i \le n$, определим два $(n-1)$-мерных сингулярных куба $I^n_{(i,0)}$ и $I^n_{(i,1)}$, полагая, для каждого $x(x^1, x^2, \dots, x^{n-1}) \in I^{n-1}$

$$I^n_{(i,0)}(x) = (x^1, \dots, x^{i-1}, 0, x^{i+1}, \dots, x^{n-1}) \in I^n;$$

$$I^n_{(i,1)}(x) = (x^1, \dots, x^{i-1}, 1, x^{i+1}, \dots, x^{n-1}) \in I^n.$$

Кубы $I^n_{(i,0)}$ и $I^n_{(i,1)}$ будем предполагать ориентированными так же, как пространство $\mathbb{R}^{n-1}$ с базисными векторами $e_1, e_2, \dots, e_{i-1}, e_{i+1}, \dots, e_n$, и называть их $(i,0)$-*гранью* и $(i,1)$-*гранью куба* I^n. На рис. 79,а показаны четыре грани квадрата $[0,1]^2$ пространства $\mathbb{R}^2$.

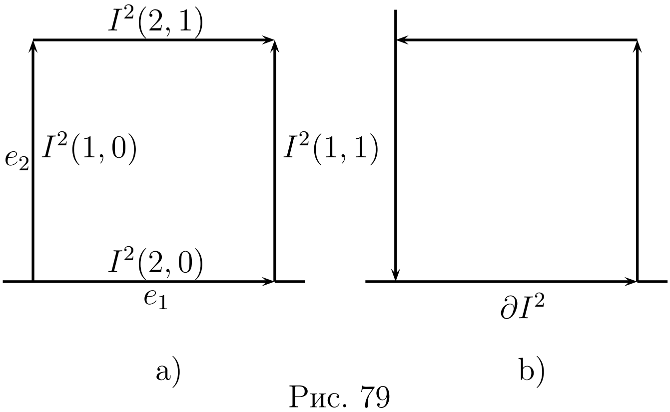

Рис. 79

Теперь определим границу ∂I^n куба I^n как сингулярную $(n-1)$-мерную цепь (см. рис. 79,б):

$$\partial I^n = \sum_{i=1}^{n} \left\{ \sum_{\alpha=0,1} (-1)^{i+1} I^n_{(i,\alpha)} \right\}. \tag{1}$$

Для сингулярного n-мерного куба K положим

$$\partial K = \sum_{i=1}^{n} \left\{ \sum_{\alpha=0,1} (-1)^{i+\alpha} K \circ I^n_{(i,\alpha)} \right\}, \tag{2}$$

для цепи $\sum\limits_{k=1}^{p} q_k K_q$

$$\partial \left(\sum_{k=1}^{p} q_k K_k \right) = \sum_{k=1}^{p} q_k \partial K_k. \tag{3}$$

Очевидно, если S и S_1 — цепи, то $\partial(S + S_1) = \partial S + \partial S_1$, и если q — целое число, то $\partial(qS) = q\partial(S)$.

Теорема 1. *Если* $\sum\limits_{k=1}^{n} q_k K_k$ *— сингулярная цепь, то*

$$\partial^2\Big(\sum_{k=1}^{n} q_k K_k\Big) = \partial\Big[\partial\Big(\sum_{k=1}^{n} q_k K_k\Big)\Big] = 0.$$

Так как этой теоремой мы пользоваться не будем, доказательство ее опускаем.

Пусть ω — дифференциальная форма n-го ранга на n-мерном кубе Q. Тогда

$$\omega = \varphi(x^1, x^2, \ldots, x^n)\, dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^n,$$

где φ — гладкая скалярная функция. Определим интеграл $\int\limits_Q \omega$ от n-формы ω по кубу Q с помощью равенства

$$\int\limits_Q \omega = \int\limits_{[0,1]^n} \varphi \tag{4}$$

или подробнее, с помощью выражения

$$\int\limits_Q \varphi(x^1, \ldots, x^n)\, dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^n = \int\limits_{[0,1]} \varphi(x^1, \ldots, x^n)\, dx^1 \ldots dx^n, \tag{4$'$}$$

где справа стоит обычный n-кратный интеграл.

Пусть теперь K — сингулярный n-мерный куб:

$$K:\ Q \to A \subset \mathbb{R}^n,$$

и ω — дифференциальная n-форма на A. Полагаем, по определению,

$$\int\limits_K \omega = \int\limits_Q K^*\omega \tag{5}$$

или, подробнее (см. § 2),

$$\int\limits_K \omega = \int\limits_Q (\varphi \circ K) K^*(dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_n}). \tag{5$'$}$$

(То, что мы ограничиваемся рассмотрением «одночленной» дифференциальной формы ω, не уменьшает общности рассуждений.)

Если обозначить через $t^1, t^2, \ldots, t^n$ координаты точек куба q, $(x^1, x^2, \ldots, x^n)$ будут теперь координатами точек пространства $\mathbb{R}^m$, куда действует отображение K), можно записать:

$$\int\limits_K \omega = \int\limits_{[0,1]^n} (\varphi \circ K) \frac{D(K^{i_1}, \ldots, K^{i_n})}{D(t^1, \ldots, t^n)}\, dt^1 \ldots dt^n, \tag{5$''$}$$

где $K^1, \dots, K^{i_n}, \dots, K^m$ — координатные функции отображения K.

В самом деле,

$$K^*(dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_n}) = K^*(dx^{i_1}) \wedge \ldots \wedge K^*(dx^{i_n}).$$

Как показано в § 2,

$$K^*(dx^l) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial K^l}{\partial t^j}\, dt^j.$$

Поэтому

$$K^*(dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_n}) = \left(\sum_{j_1=1}^{n} \frac{\partial K^{i_1}}{\partial t^{j_1}} \right) \wedge \ldots \wedge \left(\sum_{j_n=1}^{n} \frac{\partial K^{i_n}}{\partial t^{j_n}} dt^{j_n} \right) =$$

$$= \left\{ \sum_{j_1, \ldots, j_n} \pm \left(\frac{\partial K^{i_1}}{\partial t^{j_1}} \cdots \frac{\partial K^{i_n}}{\partial t^{j_n}} \right) \right\} dt^1 \ldots dt^n,$$

где сумма распространяется на все перестановки $(j_1, j_2, \dots, j_n)$ чисел $1, 2, \dots, n$ и знак плюса или минуса берется в зависимости от четности или нечетности перестановки $(j_1, j_2, \dots, j_n)$. Но тогда выражение в фигурных скобках есть определитель $\dfrac{D(K^{i_1}, \dots, K^{i_n})}{D(t^1, \dots, t^n)}$, и мы приходим к равенству $(5'')$.

Заметим, что если K есть тождественное преобразование I^n, то, учитывая, что K^* также тождественное преобразование, получаем из (5) снова (4), так что определения, даваемые с помощью равенств (4) и (5), не противоречат друг другу.

Сделаем некоторые пояснения. Если равенство (4) не приводит, по существу, к расширению понятия кратного интеграла, то равенство (5) определяет интеграл по «кривому» множеству, расположенному в $\mathbb{R}^m$, каким является n-мерный сингулярный куб. Поэтому $\int\limits_K \omega$ будет таким же расширением n-кратного интеграла, каким является интеграл по поверхности по отношению к двойному интегралу.

Если ω есть нуль-форма, то для нуль—мерного сингулярного куба $K: \{0\} \to A$, по определению, полагаем

$$\int\limits_K \omega = \omega[K(0)]. \tag{6}$$

Наконец, для n-цепи $\sum\limits_i q_i K_i$

$$\int\limits_{\sum_i q_i K_i} \omega = \sum_i q_i \int\limits_{K_i} \omega. \tag{7}$$

Например, если $\sum\limits_i K_i$ есть 1-цепь, представляющая собой кривую Δ на плоскости, составленную из ориентированных гладких дуг Γ_i: $x = \varphi_i(t)$, $y = \psi_i(t)$,

$0 \le t \le 1$, и ω есть 1-форма $P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy$, то

$$\int\limits_{\sum_i K_i} \omega = \sum_i \int\limits_{K_i} \omega = \sum_i \int\limits_{[0,1]} \{P[\varphi_i(t), \psi_i(t)]\varphi_i'(t) + Q[\varphi_i(t), \psi_i(t)]\psi_i'\}\,dt =$$

$$= \sum_i \int\limits_{\Gamma_i} P(x,y)\,dx + q(x,y)\,dy = \int\limits_{\Gamma} P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy,$$

т.е. $\int\limits_{\sum_i K_i} \omega$ есть рассмотренный ранее криволинейный интеграл второго рода.

Очевидно, что если S и S_1 — две n-цепи, q — целое число, ω и ω_1 — две n-формы и $\alpha \in \setminus$, то

$$\int\limits_{S+S_1} \omega = \int\limits_{S} \omega + \int\limits_{S_1} \omega, \qquad \int\limits_{qS} \omega = q \int\limits_{S} \omega,$$

$$\int\limits_{S} (\omega + \omega_1) = \int\limits_{S} \omega + \int\limits_{S} \omega_1, \qquad \int\limits_{S} \alpha\omega = \alpha \int\limits_{S} \omega.$$

Покажем, что если $K = K_1$, то $\int\limits_{K} \omega = \int\limits_{K_1} \omega$. При этом достаточно провести доказательство для $\omega = \varphi(x^1, \dots, x^n)\,dx^1 \dots dx^n$. Имеем, согласно формуле (5),

$$\int\limits_{K} \omega = \int\limits_{Q} K^*\omega = \int\limits_{[0,1]^n} (\varphi \circ K) \frac{D(K^1, \dots, K^n)}{D(t^1, \dots, t^n)}\,dt^1 \dots dt^n,$$

и аналогично

$$\int\limits_{K_1} \omega = \int\limits_{Q} K_1^*\omega = \int\limits_{[0,1]^n} (\varphi \circ K_1) \frac{D(K_1^1, \dots, K_1^n)}{D(\tau^1, \dots, \tau^n)}\,d\tau^1 \dots d\tau^n.$$

Пусть $\widetilde{K}$ и $\widetilde{K}_1$ — отображения $[0,1]^n$ в подпространство $\mathbb{R}^n \subset \mathbb{R}^m$, определяемые первыми n-координатными функциями отображения K и соответственно K_i:

$$\widetilde{K}(t) = (K^1(t), \dots, K^n(t)), \qquad \widetilde{K}_1(t) = (K_1^1(t), \dots, K_1^n(t)).$$

Тогда

$$\frac{D(K^1, \dots, K^n)}{D(t^1, \dots, t^n)} = \det \widetilde{K}', \qquad \frac{D(K_1^1, \dots, K_1^n)}{D(\tau^1, \dots, \tau^n)} = \det \widetilde{K}_1'.$$

Так как $K = K_1$, то куб $[0,1]^n$ пространства координат $\tau^1, \dots, \tau^n$ получается из куба $[0,1]^n$ пространства координат $t^1, \dots, t^n$ с помощью гладкого отображеиия T, $\tau = T(t)$, $\det T' > 0$, причем $\widetilde{K}_1 \circ T = \widetilde{K}$. Но тогда, по формуле замены переменных под знаком интеграла, получим:

$$\int\limits_{[0,1]^n} \frac{D(K_1^1, \dots, K_1^n)}{D(\tau^1, \dots, \tau^n)}\,d\tau^1 \dots d\tau^n =$$

$$= \int\limits_{[0,1]^n} [(\varphi \circ K_1) \circ T] \left[\frac{D(K_1^1, \ldots, K_1^n)}{D(\tau^1, \ldots, \tau^n)} \circ T \right] |\det T'| \, dt^1 \ldots dt^n =$$

$$= \int\limits_{[0,1]^n} [\varphi \circ (K_1 \circ T)] \, [\det \widetilde{K}_1' \circ T] \, \det T' \, dt^1 \ldots dt^n.$$

Заметив, что

$$[\det \widetilde{K}_1' \circ T] = \det[\widetilde{K}_1 \circ T]' = \det \widetilde{K}',$$

найдем:

$$\int\limits_{[0,1]^n} (\varphi \circ K_1) \det K_1' \, d\tau^1 \ldots d\tau^n = \int\limits_{[0,1]^n} (\varphi \circ K) \det K' \, dt^1 \ldots dt^n,$$

т.е. $\int\limits_{K_1} \omega = \int\limits_{K} \omega$, что требовалось доказать.

Аналогично можно доказать, что если $K_1 = -K$, то

$$\int\limits_{K_1} \omega = -\int\limits_{K} \omega.$$

Сделаем, наконец, еще одно допущение. Пусть в A даны две сингулярные n-цепи $\sum\limits_i q_i K_i$ и $\sum\limits_j q_j' K_j'$. Если для любой n-формы ω на A

$$\int\limits_{\sum_i q_i K_i} \omega = \int\limits_{\sum_j q_j' K_j'} \omega$$

то цени $\sum\limits_i q_i K_i$ и $\sum\limits_j q_j' K_j'$ — отождествляются, т.е. считаются одинаковыми.

Следующее утверждение называют абстрактной теорией Стокса.

Теорема 2. *Если ω — дифференциальная форма $(n-1)$ ранга на A и S — сингулярная n—цепь в A, то*

$$\int\limits_{S} d\omega = \int\limits_{\partial S} \omega. \tag{8}$$

Пусть $S = I^n$ и ω — одночленная $(n-1)$-форма на $[0,1]^n$. Тогда

$$\omega = \varphi_i(x^1, \ldots, x^n) \, dx^1 \wedge \ldots \wedge \overset{\vee}{dx^i} \wedge \ldots \wedge dx^n,$$

где знак $\vee$ над dx^i означает, что этот множитель опускается. Имеем:

$$\int\limits_{I^n} d\omega = \int\limits_{I^n} \left(\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \varphi_i}{\partial x^j} \, dx^j \right) \wedge dx^1 \wedge \ldots \wedge \overset{\vee}{dx^i} \wedge \ldots \wedge dx^n =$$

$$\sum_{j=1}^{n}\int\limits_{I^n}\frac{\partial\varphi_i}{\partial x^j}\,dx^j\wedge dx^1\wedge\ldots\wedge\overset{\vee}{dx^i}\wedge\ldots\wedge dx^n=$$

$$=\int\limits_{I^n}\frac{\partial\varphi_i}{\partial x_i}\,dx^i\wedge dx^1\wedge\ldots\wedge\overset{\vee}{dx^i}\wedge\ldots\wedge dx^n$$

так как все остальные слагаемые содержат два одинаковых множителя $dx^j\wedge dx^j$ и потому равны нулю. Таким образом,

$$\int\limits_{I^n}\omega=\int\limits_{I^n}\frac{\partial\varphi_i}{\partial x^i}\,dx^i\wedge dx^1\wedge\ldots\wedge\overset{\vee}{dx^i}\wedge\ldots\wedge dx^n=$$

$$=(-1)^{i-1}\int\limits_{I^n}\frac{\partial\varphi_i}{\partial x^i}\,dx^1\wedge\ldots\wedge dx^i\wedge\ldots\wedge dx^n=$$

$$=(-1)^{i-1}\int\limits_{[0,1]^n}\frac{\partial\varphi_i}{\partial x^i}\,dx^1\ldots dx^i\ldots dx^n.$$

По теореме Фубини,

$$\int\limits_{[0,1]^n}\frac{\partial\varphi_i}{\partial x^i}\,dx^1\ldots dx^i\ldots dx^n=\int\limits_0^1\ldots(n-1)\ldots\int\limits_0^1\left[\int\limits_0^1\frac{\partial\varphi_i}{\partial x^i}\,dx^i\right]dx^1\ldots\overset{\vee}{dx^i}\ldots dx^n=$$

$$=\int\limits_{[0,1]^{n-1}}\varphi_i(x^1,\ldots,1,\ldots,x^n)dx^1\ldots\overset{\vee}{dx^i}\ldots dx^n-$$

$$-\int\limits_{[0,1]^{n-1}}\varphi_i(x^1,\ldots,0,\ldots,x^n)\,dx^1\ldots\overset{\vee}{dx^i}\ldots dx^n.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned}\int\limits_{I^n}\omega=(-1)^{i-1}&\int\limits_{[0,1]^{n-1}}\varphi_i(x^1,\ldots,1,\ldots,x^n)dx^1\ldots\overset{\vee}{dx^i}\ldots dx^n+\\+(-1)^{i}&\int\limits_{[0,1]^{n-1}}\varphi_i(x^1,\ldots,0,\ldots,x^n)\,dx^1\ldots\overset{\vee}{dx^i}\ldots dx^n.\end{aligned}\tag{9}$$

С другой стороны, на основании определения границы куба, запишем:

$$\int\limits_{\partial I^n}\omega=\int\limits_{\sum_{j=1}^n\left[\sum\limits_{\alpha=0,1}(-1)^{j+\alpha}I^n_{(j,\alpha)}\right]}\omega=$$

$$\sum_{j=1}^{n}\left[\sum_{\alpha=0,1}(-1)^{j+\alpha}\int\limits_{I^n_{(j,\alpha)}}\omega\right]=\sum_{j=1}^{n}\left[\sum_{\alpha=0,1}(-1)^{j+\alpha}\int\limits_{I^{n-1}}(I^n_{(j,\alpha)})^*\omega\right]=\tag{10}$$

$$=\sum_{j=1}^{n}\left[\sum_{\alpha=0,1}(-1)^{j+\alpha}\int\limits_{I^{n-1}}(\varphi_i\circ I^n_{(j,\alpha)})(I^n_{(j,\alpha)})^*\,dx^1\wedge\ldots\wedge\overset{\vee}{dx^i}\wedge\ldots\wedge dx^n\right].$$

Здесь мы воспользовались также формулой (6) из § 2. Согласно определению отображения $I^n_{(j,\alpha)}$ для $x = (x^1, \ldots, x^{n-1}) \subset [0,1]^{n-1}$, имеем

$$(\varphi_i \circ I^n_{(j,\alpha)})(x) = \varphi_i(x^1, \ldots, x^{j-1}, \alpha, x^j, \ldots, x^{n-1}). \tag{11}$$

Надо подсчитать

$$(I^n_{(j,\alpha)})^*(dx^1 \wedge \ldots \wedge \overset{\vee}{dx^i} \wedge \ldots \wedge dx^n). \tag{12}$$

В силу леммы 1 из § 2, это выражение равно:

$$(I^n_{(j,\alpha)})^* dx^1 \wedge \ldots \wedge (I^n_{(j,\alpha)})^* \overset{\vee}{dx^i} \wedge \ldots \wedge (I^n_{(j,\alpha)})^* dx^n. \tag{13}$$

По формуле (5) из § 2,

$$(I^n_{(j,\alpha)})^* dx^l = \sum_{m=1}^{n-1} \frac{\partial[(I^n_{(j,\alpha)})^l]}{\partial x^m}\, dx^m,$$

где $(I^n_{(j,\alpha)})^l$, $l = 1, 2, \ldots, n$, — координатные функции отображения $I^n_{(j,\alpha)}$, переводящего точку $x = (x^1, \ldots, x^{j-1}, x^j, \ldots, x^{n-1}) \in [0,1]^{n-1}$ в точку $y = (x^1, \ldots, x^{j-1}, \alpha, x^j, \ldots, x^{n-1}) \in [0,1]^n$. Легко видеть, что

$$(I^n_{(j,\alpha)})^l x = \begin{cases} x^l, & \text{если} \quad 1 \le l \le j-1, \\ \alpha, & \text{если} \quad l = j, \\ x^{l-1} & \text{если} \quad j+1 \le l \le n. \end{cases}$$

Следовательно,

$$(I^n_{(j,\alpha)})^*\, dx^l = \begin{cases} dx^l, & \text{если} \quad 1 \le l \le j-1, \\ 0, & \text{если} \quad l = j, \\ dx^{l-1} & \text{если} \quad j+1 \le l \le n. \end{cases} \tag{14}$$

Пусть $j \ne i$. Тогда в произведении (13) есть множитель $(I^n_{(j,\alpha)})^*\, dx^j$, равный, согласно формуле (14), нулю, следовательно, все произведение равно нулю. Если $j = i$, то такого множителя нет, и в силу формулы (14) получаем, что

$$I^n_{(j,\alpha)})^* dx^1 \wedge \ldots \wedge (I^n_{(j,\alpha)})^* \overset{\vee}{dx^i} \wedge \ldots \wedge (I^n_{(j,\alpha)})^* dx^n = dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^{i-1} \wedge dx^i \wedge \ldots \wedge dx^{n-1}.$$

Таким образом,

$$\begin{gathered} (I^n_{(j,\alpha)})^*(dx^1 \wedge \ldots \wedge \overset{\vee}{dx^i} \wedge \ldots \wedge dx^n) = \\ = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad j \ne i, \\ dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^{i-1} \wedge dx^i \wedge \ldots \wedge dx^{n-1}, & \text{если} \quad j = i. \end{cases} \end{gathered} \tag{15}$$

Из (10), (11), (15) находим:

$$\int\limits_{\partial I^n} \omega = (-1)^i \int\limits_{I^{n-1}} \varphi_i(x^1, \ldots, x^{i-1}, 0, x^i, \ldots, x^{n-1})\, dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^i \wedge \ldots \wedge dx^{n-1} +$$

$$+(-1)^{i+1} \int\limits_{I^{n-1}} \varphi_i(x^1, \ldots, x^{i-1}, 1, x^i, \ldots, x^{n-1})\, dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^i \wedge \ldots \wedge dx^{n-1}.$$

Если переобозначить переменные x^l при $l \geq i$, увеличив их индекс на единицу, то с учетом равенства ($4'$) получим:

$$\int\limits_{\partial I^n} \omega = (-1)^i \int\limits_{[0,1]^{n-1}} \varphi_i(x^1, \ldots, x^{i-1}, 0, x^i, \ldots, x^{n-1})\, dx^1 \wedge \ldots \wedge \overset{\vee}{dx^i} \wedge \ldots \wedge dx^n +$$
$$+(-1)^{i+1} \int\limits_{[0,1]^{n-1}} \varphi_i(x^1, \ldots, x^{i-1}, 0, x^i, \ldots, x^{n-1})\, dx^1 \wedge \ldots \wedge \overset{\vee}{dx^i} \wedge \ldots \wedge dx^n. \tag{16}$$

Из формул (9) и (16) следует:

$$\int\limits_{I^n} d\omega = \int\limits_{\partial I^n} \omega,$$

и для случая куба I^n теорема Стокса доказана.

Если K — произвольный сингулярный n-мерный куб, то, согласно предыдущим определениям и только что доказанному,

$$\int\limits_K d\omega = \int\limits_{I^n} K^*(d\omega) = \int\limits_{I^n} d(K^*\omega) = \int\limits_{\partial I^n} K^*\omega = \int\limits_{\partial K} \omega.$$

Для сингулярной n-цепи

$$\int\limits_{\sum_i q_i K_i} d\omega = \sum_i q_i \int\limits_{K_i} d\omega = \sum_i q_i \int\limits_{\partial K_i} \omega = \int\limits_{\sum_i q_i \partial K_i} \omega = \int\limits_{\partial\left(\sum_i q_i K_i\right)} \omega.$$

Наконец, для произвольной n-формы

$$\omega = \sum_{i=1}^{n} \varphi_i(x^1, \ldots, x^n)\, dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^i \wedge \ldots \wedge dx^n$$

равенство (8) следует из уже доказанного и аддитивноoти интеграла.

Рекомендуем читателю в качестве упражнения из абстрактной теоремы Стокса вывести формулу Стокса для полусферы и теорему Гаусса–Остроградского для шара.

Глава XXI

РЯДЫ ФУРЬЕ

§ 1. Линейные пространства со скалярным произведением

Напомним некоторые сведения из курса алгебры. Пусть X — вещественное линейное множество, т.е. множество, над элементами которого определены операции сложения и умножения на вещественные числа, обладающие обычными свойствами этих операций. Элементы множества X назовем *векторами* или *точками*. Важный пример множества X — совокупность всех непрерывных на промежутке $[a, b]$ функций.

Как известно, векторы $x_1, \ldots, x_n \in X$ называются *линейно зависимыми*, если существует линейная комбинация $\sum\limits_{k=1}^{n} \lambda_k x_k$ этих векторов, являющаяся нулевым элементом θ пространства X, для которой не все коэффициенты $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ равны нулю. В противном случае векторы $x_1, \ldots, x_n$ называются *линейно независимыми*. Бесконечная совокупность $\{x_k\}$ называется *линейно независимой*, если линейно независима каждая конечная совокупность $x_{\nu_1}, \ldots, x_{\nu_p}$ элементов из $\{x_k\}$. Линейное множество X называется *конечномерным пространством*, если оно не содержит бесконечных наборов линейно независимых векторов. В этом случае найдется такой конечный набор $x_1, \ldots, x_n$ линейно независимых элементов, что любой элемент $x \in X$ единственным образом представим в виде $x = \sum\limits_{k=1}^{n} \lambda_k x_k$. Наибольшее число n линейно независимых векторов конечномерного пространства X называется *размерностью* этого пространства, а каждый набор n линейно независимых векторов X — *базисом* X.

Условимся говорить, что в вещественном линейном множестве[46] определено скалярное произведение, если каждой паре элементов $x, y \in X$ отнесено вещественное число $\langle x, y\rangle$ так, что при этом выполнены следующие условия:

1) $\langle x, y\rangle = \langle y, x\rangle$;

2) $\langle \lambda x, y\rangle = \lambda\langle x, y\rangle$ при $\forall\, \lambda \in \mathbb{R}$ и $\forall\, x, y \in X$;

3) $\langle x + y, z\rangle = \langle x, z\rangle + \langle y, z\rangle$ при $\forall\, x, y, z \in X$;

---

[46] В дальнейшем рассматриваются только вещественные линейные пространства, поэтому слова «вещественный» и «линейный» мы опускаем.

4) $\langle x, x\rangle \geq 0$, причем $\langle x, x\rangle \geq 0$ эквивалентно $x = 0$.

В дальнейшем множество X со скалярным произведением будем называть *линейным пространством со скалярным произведением.* В случае пространства $\mathbb{R}^n$ скалярное произведение элементов $x = (x^1, \ldots, x^n)$ и $y = (y^1, \ldots, y^n)$ может быть определено равенством $\langle x, y\rangle = \sum\limits_{k=1}^{n} x^k y^k$. Легко проверить, что в пространстве непрерывных на отрезке $[a, b]$ функций скалярное произведение может быть определено равенством

$$\langle x, y\rangle = \int\limits_a^b x(t)y(t)\, dt. \tag{1}$$

Пространство непрерывных на $[a, b]$ функций со скалярным произведением, определенным равенством (1), обозначается $L_2[a, b]$.

В пространстве со скалярным произведением каждому $x \in X$ можно отнести неотрицательное число $\|x\|$ — так называемую *норму* этого элемента, полагая $\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$. Так определенная норма обладает следующими свойствами:

1) $\|x\| \geq 0$, при этом $\{\|x\| = 0\| \Leftrightarrow \{x = 0\}$;

2) $\|\lambda x\| = |\lambda|\, \|x\|$ при $\forall\, \lambda \in \mathbb{R}$ и $\forall\, x \in X$;

3) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ при $\forall\, x, y \in X$.

Первые два свойства нормы очевидны. Для доказательства третьего свойства установим вначале так называемое неравенство Коши–Буняковского $|\langle x, y\rangle| \leq \|x\|\, \|y\|$, имеющее место для $\forall\, x, y \in X$. С этой целью задами, что квадратный трехчлен относительно λ: $\langle x + \lambda y, x + \lambda y\rangle = \|x\|^2 + 2\lambda\langle x, y\rangle + \lambda^2\|y\|^2$ при всевозможных вещественных значениях λ принимает, согласно свойству 4 скалярного произведения, неотрицательные значения. Поэтому дискриминант этого трехчлена на положителен, т.е. $\langle x, y\rangle^2 - \|x\|^2\, \|y\|^2 \leq 0$, а это и есть доказываемое неравенство, Теперь, используя неравенство Коши–Буняковского, найдем:.

$$\|x + y\|^2 = \langle x + y, x + y\rangle = \|x\|^2 + 2\langle x, y\rangle + \|y\|^2 \leq \|x\|^2 + 2\,\|x\|\,\|y\| + \|y\|^2,$$

откуда следует справедливость свойства 3 нормы.

Наличие в X нормы позволяет ввести в пространстве X метрику. Примем за расстояние $\rho(x, y)$ между элементами $x, y \in X$ величину $\rho(x, y) = \|x - y\|$. Из свойств нормы вытекают следующие свойства расстояния:

1) $\rho(x, y) \geq 0$, при этом $\{\rho(x, y) = 0\} \Leftrightarrow \{x = y\}$;

2) $\rho(x, y) = \rho(y, x)$ (свойство симметрии);

3) $\rho(x, z) \leq \rho(x, y) + \rho(y, z)$ для $\forall\, x, y, z \in X$.

Последнее свойство метрики называется *свойством треугольника.* Ясно, что $\rho(x, \theta) = \|x\|$.

Линейные пространства со скалярным произведением являются метрическими пространствами. Введенное нами пространство $L_2^1[a, b]$ со скалярным произведением, определяемым равенством (1), называется бесконечномерным евклидовым пространством. Сходимость последовательности элементов этого пространства является так называемой *сходимостью в среднем.*

Как известно, в трехмерном евклидовом пространстве скалярное произведение векторов x и y выражается равенством $\langle x, y\rangle = \|x\|\,\|y\|\cos\varphi$, где φ — угол между векторами x и y. Распространим на общий случай векторного пространства со скалярным произведением понятие косинуса угла между векторами x и y ($\|x\| > 0$, $\|y\| > 0$), полагая (по определению) $\cos\varphi = \dfrac{\langle x, y\rangle}{\|x\|\,\|y\|}$. В силу неравенства Коши–Буняковского, $|\cos\varphi| \leq 1$. Назовем векторы x и y *ортогональными*, если косинус угла между ними равен нулю, т.е. если $\langle x, y\rangle = 0$. Систему векторов $\{x_k\}$ назовем *ортогональной системой*, если каждые два различные вектора x_k и x_l ($k \neq l$) этой системы ортогональны. Легко проверяется линейная независимость векторов ортогональной системы.

В пространстве L_2^1 система функций

$$1,\ \sin x,\ \cos x,\ \sin 2x,\ \cos 2x,\ \ldots,\ \sin kx,\ \cos kx,\ \ldots \tag{2}$$

является, как нетрудно проверить, ортогональной системой.

Если норма каждого элемента ортогональной системы $\{x_k\}$ равна единица, то эту систему называют *ортонормированной системой*. От каждой ортогональной системы $\{x_k\}$ можно перейти к соответствующей ортонормированной системе $\{x'_k\}$, полагая $x'_k = \dfrac{x_k}{\|x_k\|}$. Так, например, по этому правилу системе (2) в L'_2 соответствует ортонормированная система

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}},\ \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin x,\ \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos x,\ \ldots,\ \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin kx,\ \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos kx,\ \ldots \tag{2'}$$

Пусть X — линейное пространство со скалярным произведением. Подмножество $X_0 \subset X$ называется *подпространством* пространства X, если X_0 — линейная система и если для каждой последовательности $\{x_p\| \subset X_0$, такой, что в метрике, порожденной скалярным произведением $x^p \to x_0 \in X$, имеет место $x_0 \in X_0$ (т.е. если X_0 замкнуто в X). Нетрудно проверить[47], что для произвольного конечного набора $x_1, x_2, \ldots, x_n$ элементов X_0 совокупность всевозможных линейных комбинаций $\sum\limits_{k=1}^{n} \lambda_k x_k$ (соответственно всевозможным значениям коэффициентов λ_k) является подпространством пространства X.

---

[47] Ограничимся рассмотрением важного для нас случая, когда система $x_1, \ldots, x_n$ является ортонормированной. Пусть $x^p \to x_0 \in X$, где $x^p \in X_0$. Согласно критерию Коши, это означает, что для $\forall\,\varepsilon > 0$, $\exists\, N = N(\varepsilon)$ при $\forall\, p, q > N$ будет $\rho(x^p, x^q) < \varepsilon$. Положим $x^p = \sum\limits_{k=1}^{n} \lambda_k^p x_k$. Тогда, в силу ортонормированности системы $x_1, \ldots, x_n$

$$\rho^2(x^p, x^q) = \|x^p - x^q\|^2 = \sum_{k=1}^{n} (\lambda_k^p - \lambda_k^q)^2,$$

откуда следует, что для каждого $k = 1, 2, \ldots, n$, $|\lambda_k^p - \lambda_k^q| < \varepsilon$. Таким образом, последовательности $\{\lambda_k^p\}$ ($k = 1, 2, \ldots, n$) являются сходящимися. Пусть $\lambda_k^p \to \lambda_k^0$; положим $x_0 = \sum\limits_{k=1}^{n} \lambda_k^0 x_k$ и покажем, что $x^p \to x_0 \in X_0$. В самом деле, $\|x^p - x_0\|^2 = \sum\limits_{k=1}^{n} (\lambda_k^p - \lambda_k^0)^2 \to 0$ при $p \to \infty$, откуда и следует доказываемое.

В общем случае произвольной (не обязательно ортонормированной) системы $x_1, \ldots, x_n$ достаточно предварительно воспользоваться методом ортогонализации этой системы и перейти к соответствующей ортонормированной системе.

В ближайших рассмотрениях пространство X предполагается бесконечномерным и последовательность $\{x_k\}$ ортонормированной. Обозначим через X_n подпространство пространства X, образованное всевозможными линейными комбинациями первых n элементов системы $\{x_k\}$. Легко видеть, что последовательность подпространств $\{X_k\}$ является монотонной по включению, т.е.

$$X_1 \subset X_2 \subset \ldots \subset X_n \subset \ldots .$$

Пусть X_n — произвольное фиксированное подпространство последовательности $\{X_n\}$, y — любой фиксированный элемент пространства X. Рассмотрим множество чисел $\rho(x, y)$, соответствующих всевозможным $x \in X_n$. Величину $\rho(y, X_n) = \inf\limits_{x \in X_n} \{\rho(x, y)\}$ назовем *расстоянием* элемента y до подпространства X_n, а элемент $x_0 \in X_n$, для которого $\rho(y, X_n) = \rho(y, x_0)$, если такой элемент существует, назовем *проекцией* y на подпространство X_n.

Теорема. *Для каждого элемента $y \in X$ и любого подпространства X_n существует проекция y на X_n.*

Действительно, для $\forall\, x \in X_n$, $x = \sum\limits_{k=1}^{n} \lambda_k x_k$, имеем:

$$\rho^2(y, x) = \left\| y - \sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k \right\|^2 = \left\langle y - \sum_{k=1}^{n} \lambda_k, x_k, y \sum_{j=1}^{n} \lambda_j x_j \right\rangle =$$

$$= \|y\|^2 - 2\sum_{k=1}^{n} \lambda_k \langle y, x_k\rangle + \sum_{k=1}^{n} \lambda_k^2 \|x_k\|^2 = \|y\|^2 + \sum_{k=1}^{n} (\lambda_k - \langle y, x_k\rangle)^2 - \sum_{k=1}^{n} \langle y, x_k\rangle^2.$$

Из этого равенства, очевидно, следует, что

$$\rho(y, x) \geq \|y\|^2 - \sum_{ki=1}^{n} \langle y, x_k\rangle^2, \tag{3}$$

где знак равенства имеет место лишь в случае, когда $\lambda_k = \langle y, x_k\rangle$, $k = 1, 2, \ldots, n$. Таким образом, проекцией элемента y на подпространство X_n является элемент

$$x_0^{(n)} = \sum_{k=1}^{n} \langle y, x_k\rangle x_k. \tag{4}$$

Из этого представления вытекает единственность проекций y на X_n. Теорема доказана.

§ 2. Ряд Фурье

Суммы

$$\sum_{k=1}^{n} \langle y, x_k\rangle x_k,$$

составленные для фиксированного элемента $y \in X$ соответственно по всевозможным n, являются частичными суммами ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty} \langle y, x_k \rangle x_k. \tag{1}$$

Ряд (1) называете *рядом Фурье*, соответствующим элементу y и построенным по ортонормированной системе $\{x_k\}$, а коэффициенты $\langle y, x_k \rangle$ этого ряда называются *коэффициентами Фурье* элемента y по данной системе $\{x_k\}$. Тот факт, что ряд (1) соответствует элементу y, будем в дальнейшем отмечать записью

$$y \sim \sum_{k=1}^{\infty} \langle y, x_k \rangle x_k.$$

Нетрудно проверить, что для пространства $L_2^1[-\pi, \pi]$ ряд Фурье элемента $y \in L_2^1[-\pi, \pi]$ по систеые $(2')$ из § 1 тригонометрических функций имеет вид

$$y \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx + b_k \sin kx, \tag{2}$$

где

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} y(t)\, dt, \quad a_k = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} y(t) \cos kt\, dt, \quad b_k = \frac{1}{2}\pi \int\limits_{-\pi}^{\pi} y(t) \sin kt\, dt, \qquad k = 1, 2, \dots\ .$$

Свойство ряда Фурье, выраженное теоремой из § 1 и состоящее в том, что его частичные суммы являются элементами пространства X_n, наиболее близкими к элементу y в метрике, определенной скалярным произведением, называется *минимальным свойством* частичных сумм ряда Фурье.

Из неравенства (3) (см. § 1) следует, что ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \langle y, x_k \rangle^2$ сходится, так как для всех частичных сумм этого ряда выполняется неравенство $\sum\limits_{k=1}^{n} \langle y, x^k \rangle^2 \le \|y\|^2$. Вместе с тем имеет место неравенство

$$\sum_{k=1}^{\infty} \langle y, x_k \rangle^2 \le \|y\|^2, \tag{3}$$

которое называется *неравенством Бесселя.*

Применительно к системе $(2')$ (ом. § 1) в пространстве $L_2^1[-\pi, \pi]$ неравенство Бесселя имеет вид:

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k^2 + b_k^2) \le \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} y^2(t)\, dt. \tag{4}$$

Пусть $\{x_k\}$ — некоторая ортонормированная система элементов пространства X. Соответственно ранее определенной последовательности подпространств $\{X_n\}$

введем в рассмотрение множество $X^\nu = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} X_n$. Ясно, что $X^\nu \subset X$, поэтому в X^ν определены линейные операции и скалярное произведение, индуцированные соответствующими операциями в пространстве X. Обозначим, далее, через $\overline{X}^\nu$ замыкание X^ν в метрике, порожденной скалярным произведением, т.е. совокупность всех таких элементов, каждый из которых является пределом некоторой последовательности $\{y_j\}$ элементов X^ν[48] назовем замкнутой в X, если $X \subset \overline{X}^\nu$.

Теорема 1. *Для того чтобы ортонормированная система* $\{x_k\} \subset X$ *была замкнутой в* X, *необходимо и достаточно, чтобы для каждого элемента* $y \in X$ *выполнялось равенство*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \langle y, x_k \rangle^2 = \|y\|^2. \tag{5}$$

(Это равенство называют *уравнением замкнутости*).

Доказательство. Пусть $\{x_k\}$ — замкнутая система в X и y — произвольный элемент пространства X. Тогда существует последовательность $\{y_j\} \subset X^\nu$, для которой $\|y - y_j\| \to 0$ при $j \to \infty$. Каждый элемент y_j содержится в некотором подпространстве X_{n_j}. Обозначим через $x_0^{n_j}$ проекцию элемента y_j на подпространство X_{n_j}, т.е. положим $x_0^{n_j} = \sum\limits_{k=1}^{n_j} \langle y, x_k \rangle x_k$. Тогда $\|y - y_j\|^2 \geq \|y - x_0^{n_j}\|^2 = \|y\|^2 - \sum\limits_{k=1}^{n_j} \langle y, x_k \rangle^2$, откуда следует, что для элемента y выполнено равенство (5).

Предположим теперь, что для каждого элемента $y \in X$ выполнено равенство (5). Покажем, что система $\{x_k\}$ является замкнутой системой в X. Для этого достаточно рассмотреть последовательность частичных сумм ряда Фурье для элемента y по заданной системе и убедиться, что эта последовательность, в силу (3) (из § 1), (3) и (5), сходится к элементу y. Теорема доказана.

Ортонормированная система $\{x_k\}$ называется *полной*, если не существует такого элемента $x^* \in X$, отличного от нулевого элемента θ пространства, который ортогонален каждому элементу x_k системы $\{x_k\}$.

Теорема 2. *Замкнутая система* $\{x_k\}$ *в* X *является полной, а в случае, когда* X *— полное метрическое пространство, то и обратно, — каждая полная в* X, *система* $\{x_k\}$ *является замкнутой.*

В самом деле, если $\{x_k\}$ — замкнутая система элементов X и x_0 — элемент X, ортогональный каждому $x_k \in \{x_k\}$, т.е. $\langle x_0, x_k \rangle = 0$ $(k = 1, 2, \ldots)$, то, в силу уравнения замкнутости, $\|x_0\|^2 = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \langle x_0, x_k \rangle^2 = 0$, откуда следует, что $x_0 = 0$.

Обратно, если система $\{x_k\}$ полна в X и y — произвольный элемент пространства X, то последовательность частичных сумм ряда Фурье, соответствующего y по данной системе, в силу неравенства Бесселя, является фундаментальной, а зна-

---

[48] С каждой фундаментальной последовательностью $\{y_j\} \subset X^\nu$ мы связываем некоторый элемент y_0, замыкания $\overline{X}^\nu$, полагая $y_0 = \lim\ y_j$.

чит, сходящейся к некоторому элементу $y^* \in X$ (по предположению, X — полное пространство). Легко видеть, что элемент $z = y - y^*$ ортогонален каждому элементу системы $\{x_k\}$, откуда следует, что $z = 0$ (система $\{x_k\}$, по условию, полна в X), т.е.

$$y^* = y = \sum_{k=1}^{\infty} \langle y, x_k \rangle x_k \quad \text{или} \quad \left\| y - \sum_{k=1}^{n} \langle y, x_k \rangle x_k \right\| \to 0$$

при $n \to \infty$. Но

$$\left\| y - \sum_{k=1}^{n} \langle y, x_k \rangle x_k \right\|^2 = \|y\|^2 - \sum_{k=1}^{n} \langle y, x_k \rangle^2.$$

Таким образом, $\|y\|^2 = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \langle y, x_k \rangle^2$, и для элемента y выполнено уравнение замкнутости[49].

Применительно к часто встречающемуся в приложениях пространству $L_2^1[-\pi, \pi]$ и ортонормированной системе $(2')$ тригонометрических функций докажем следующее важное утверждение.

Теорема 3 (Дирихле–Ляпунова). *Система* (2') *(см. § 1) тригонометрических функций замкнута в пространстве* $L_2^1[-\pi, \pi]$ *непрерывных на* $[-\pi, \pi]$ *функций.*

Для доказательства рассмотрим совокупность так называемых тригонометрических многочленов

$$T_n(x) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \cos kx + \beta_k \sin kx$$

соответственно всевозможным $n \in \mathbb{N}$, $\alpha_k, \beta_k \in \mathbb{R}$. Легко видеть, что эта совокупность является алгеброй на $[-\pi, \pi]$, содержащей единицу и разделяющей точки промежутка $[-\pi, \pi]$. Отсюда, в силу теоремы Стона–Вейерштрасса, следует, что каждая непрерывная на $[-\pi, \pi]$ функция $f(x)$, принимающая в концах этого промежутка одинаковые значения, допускает равномерное приближение тригонометрическими многочленами, т.е. для $f(x)$ найдется такая последовательность $\{T_n(x)\}$ тригонометрических многочленов, что $T_n(x) \rightrightarrows f(x)$ на $[-\pi, \pi]$. Но тогда, очевидно, $\|f - T_n\| = \left\{ \int\limits_{-\pi}^{\pi} [f(t) - T_n(t)]^2 \, dt \right\}^{\frac{1}{2}} \to 0$ при $n \to \infty$. Пусть, далее,

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx + b_k \sin kx,$$

где

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos kt \, dt, \quad b_k = \frac{1}{\pi} + \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin kt \, dt, \qquad k = 0, 1, 2, \dots \ .$$

---

[49] В последних рассмотрениях мы воспользовались легко проверяемым свойством непрерывности скалярного произведения.

В силу минимального свойства частичных сумм ряда Фурье, для $s_{2N=!}(x) = \dfrac{a_0}{2} + \sum\limits_{k=1}^{n} a_k \cos kx + b_k \sin kx$ будет $\|f - s_{2n+1}\| \leq \|f - T_n\|$, откуда следует, что $\|f - s_{2n+1}\| \to 0$ при $n \to \infty$. Последнее как раз и означает, в соответствии с теоремой 1, что для f выполнено уравнение замкнутости.

Если теперь функция $f(x)$ непрерывна на $[-\pi, \pi]$, но $f(-\pi) \neq f(\pi)$, то для произвольного числа $\varepsilon > 0$ можно построить непрерывную на $[-\pi, \pi]$ функцию $f_1(x)$, для которой $f_1(-\pi) = f(\pi)$ и $\|f - f_1\| < \dfrac{\varepsilon}{2}$. Такую функцию можно выбрать, например, среди функций вида

$$f_1(x) = \begin{cases} f(x) & \text{при} \quad -\pi \leq x \leq \pi - \delta, \\ f(\pi - \delta) + \dfrac{f(-\pi) - f(\pi - \delta)}{\delta}\,(x - \pi + \delta) & \text{при} \quad \pi - \delta \leq x \leq \pi, \end{cases}$$

подобрав δ достаточно малым (рис. 80).

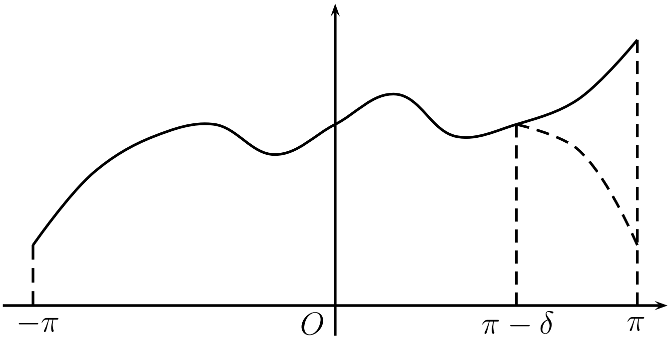

Рис. 80

Пусть T_1 — тригонометрический многочлен, для которого $\|f_1 - T_1\| < \dfrac{\varepsilon}{2}$. Такой многочлен существует для $f_1(x)$ в силу только что проведенных рассмотрений. Тогда $\|f - T_1\| \leq \|f - f_1\| + \|f_1 - T_1\| < \varepsilon$, а значит, для соответствующей частичной суммы $s_{2n+1}(x)$ ряда Фурье функции $f(x)$ тем более будет выполняться неравенство $\|f - s_{2n+1}\| < \varepsilon$, т.е. последовательность $\{s_{2n+1}(x)\}$ в среднем сходятся к $f(x)$ на $[-\pi, \pi]$. Теорема доказана.

Следствие 1. *Для каждой непрерывной на* $[-\pi, \pi]$ *функции* $f(x)$ *выполняется уравнение замкнутости:*

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\,dx = \pi\left(\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k^2 + b_k^2)\right).$$

В линейном пространстве функций, интегрируемых на $[a, b]$ вместе со своими квадратами, можно определить «скалярное произведение», полагая $\langle f, \varphi\rangle = \int\limits_a^b f(t)\varphi(t)\,dt$. Так определенное скалярное произведение, как легко проверять, обладает всеми свойствами скалярного произведения, за исключением того, что из

$\langle x, x\rangle = 0$ не следует, вообще говоря, равенство $x = \theta$, так как в этом пространстве существуют элементы, не равные нулю, норма которых равна нулю. Ясно, что рассмотрения, проведенные ранее, кроме тех, которые связаны с понятиями полноты и замкнутости ортонормированной системы $\{x_k\} \subset L_2^1[a,b]$, распространяются и на это пространство. В частности, для каждой интегрируемой на $[a,b]$ функции $f(x)$ имеет место неравенство Бесселя (3), из которого вытекает следующее утверждение.

Следствие 2. *Если функция $f(x)$ интегрируема на $[-\pi,\pi]$, то при $n\to\infty$ коэффициенты a_k и b_k стремятся к нулю.*

Этот факт непосредственно вытекает из сходимости ряда, стоящего в левой части неравенства (3).

Замечание. Если расширить понятие интеграла, введя в рассмотрение так называемый интеграл Лебега, то можно показать, что пространство $L_2[a,b]$ функций, интегрируемых, с квадратом на $[a,b]$ в смысле Лебега, является полным пространством, в котором каждая замкнутая ортонормированная система $\{x_k\}$ полна, и наоборот, каждая полная система $\{x_k\}$ замкнута в $L_2[a,b]$, т.е. свойства системы $\{x_k\}$ быть замкнутой или полной совпадают. Мы не имеем возможности останавливаться на этих рассмотрениях, подробно излагаемых в курсах теории функций и функционального анализа.

§ 3. Точечная сходимость рядов Фурье

Рассмотрим подробнее ряды Фурье по системе тригонометрических функций (2′) (см. § 1), т.е. ряды вида

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx + b_k \sin kx, \tag{1}$$

где $f(x)$ — интегрируемая на $[-\pi,\pi]$ функция,

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(t)\,\cos kt\,dt, \quad b_k = \frac{1}{\pi} + \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(t)\,\sin kt\,dt, \qquad k = 0, 1, 2, \dots\ .$$

Докажем вначале следующее вспомогательное утверждение.

Лемма 1 (Римана). *Если функция $\varphi(x)$ интегрируема на $[a,b]$, то каждый из интегралов*

$$\int\limits_a^b \varphi(t)\,\cos\alpha t\,dt, \qquad \int\limits_a^b \varphi(t)\,\sin\alpha t\,dt$$

стремится к нулю при $\alpha\to\infty$.

Доказательство проведем для одного из этих интегралов, например для $\int\limits_a^b \varphi(t)\,\cos\alpha t\,dt$. Пусть $T = \{t_0, t_1, \dots, t_n\}$ — некоторое разбиение промежутка $[a,b]$.

Полагая $m_k = \inf\limits_{[t_k, t_{k+1}} \varphi(t)$, представим указанный интеграл в виде

$$\int\limits_a^b \varphi(t)\,\cos\alpha t\,dt = \sum_{k=1}^{n-1} \int\limits_{t_k}^{t_{k+1}} [\varphi(t) - m_k]\,\cos\alpha t\,dt + \sum_{k=1}^{n-1} m_k \int\limits_{t_k}^{t_{k+1}} \cos\alpha t\,dt. \qquad (2)$$

Найдем оценку каждой из сумм в этом представлений:

$$\left|\sum_{k=1}^{n-1} \int\limits_{t_k}^{t_{k+1}} [\varphi(t) - m_k]\,\cos\alpha t\,dt\right| \leq \sum_{k=1}^{n-1} \int\limits_{t_k}^{t_{k+1}} |\varphi(t) - m_k|\,dt + \sum_{k=1}^{n-1} \omega_k(\varphi)\,\Delta t_k,$$

где, как обычно, через $\omega_k(\varphi)$ обозначено колебание функции $\varphi(t)$ на промежутке $[t_k, t_{k+1}]$ разбиения T. Так как Функция $\varphi(t)$ интегрируема на $[a, b]$, то для произвольного числа $\varepsilon > 0$ найдется такое разбиение T_ε промежутка $[a, b]$, для которого при всех α будет выполняться неравенство

$$\left|\sum_{k=1}^{n-1} \int\limits_{t_k}^{t_{k+1}} [\varphi(t) - m_k]\cos kt\,dt\right| < \frac{\varepsilon}{2}. \qquad (3)$$

Фиксируя так взятое разбиение, оценим вторую сумму в представлении (2). Так как $\left|\int\limits_{t_k}^{t_{k+1}} \cos\alpha t\,dt\right| = \left|\dfrac{\sin\alpha t_{k+1} - \sin\alpha t_k}{2}\right| \leq \dfrac{2}{|\alpha|}$, то

$$\left|\sum_{k=1}^{n-1} m_k \int\limits_{t_k}^{t_{k+1}} \cos\alpha t\,dt\right| \leq \frac{2}{|\alpha|} \sum_{k=0}^{n-1} |m_k|.$$

Ясно, что при $|\alpha| > \dfrac{4}{\varepsilon} \sum\limits_{k=0}^{n-1} |m_k|$ будет выполняться неравенство

$$\left|\sum_{k=1}^{n-1} m_k \int\limits_{t_k}^{t_{k+1}} \cos\alpha t\,dt\right| < \frac{\varepsilon}{2}. \qquad (4)$$

Из представления (2) и неравенств (3) и (4) следует:

$$\left|\int\limits_a^b \varphi(t)\,\cos\alpha t\,dt\right| < \varepsilon.$$

Найдем теперь интегральное представление для частичных сумм

$$s_{2n+1}(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} a_k\,\cos kx + b_k\,\sin kx \qquad (5)$$

ряда Фурье, соответствующего интегрируемой на $[-\pi,\pi]$ функции $f(x)$, которую, без ограничения общности, можно считать периодической с периодом 2π. Для этого подставим в (5) интегральное представление коэффициентов a_k и b_k. В результате подучим:

$$s_{2n+1}(x)=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(t)\left[\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{n}\cos k(t-c)\right]dt.$$

Положим $A(\alpha)=\dfrac{1}{2}+\sum\limits_{k=1}^{n}\cos k\alpha$. Умножив обе части этого равенства на $\sin\dfrac{\alpha}{2}$, а затем, воспользовавшись равенством $\cos k\alpha\cdot\sin\dfrac{\alpha}{2}=\dfrac{1}{2}\left(\sin\dfrac{2+1}{2}\alpha-\sin\dfrac{2k-1}{2}\alpha\right)$, найдем, что при $\alpha\neq 0$

$$A(\alpha)=\frac{\sin(2n+1)\dfrac{\alpha}{2}}{2\sin\dfrac{\alpha}{2}}.$$

Следовательно,

$$s_{2n+1}(x)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(t)\,\frac{\sin\dfrac{(2n+1)(t-x)}{2}}{\sin\dfrac{t-x}{2}}\,dt.$$

Введя новую переменную интегрирования $\tau=t-x$, получим:

$$s_{2n+1}(x)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi-x}^{\pi-x} f(x+\tau)\,\frac{\sin\left(n+\dfrac{1}{2}\right)\tau}{\sin\dfrac{1}{2}\tau}\,d\tau.$$

Легко проверить, что значение интеграла от периодической функции по промежутку длины, равной периоду, не зависит от положения левого конца этого промежутка. Поэтому можно записать, что

$$s_{2n+1}(x)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x+\tau)\,\frac{\sin\left(n+\dfrac{1}{2}\right)\tau}{\sin\dfrac{1}{2}\tau}\,d\tau.$$

Представим этот интеграл в виде суммы двух интегралов, взятых по промежуткам $[-\pi,0]$ и $[0,\pi]$, и произведем в первом из них замену переменной, положив $\tau'=-\tau$. В результате получим:

$$s_{2n+1}(x)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{0}^{\pi}[f(x+\tau)+f(x-\tau)]\,\frac{\sin\left(n+\dfrac{1}{2}\right)\tau}{\sin\dfrac{1}{2}\tau}\,d\tau. \qquad (6)$$

Интеграл в правой части равенства (6) называется *интегралом Дирихле.* В частности, для функции $f(x) \equiv 1$

$$1 = \frac{1}{\pi} \int\limits_0^{\pi} \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)\tau}{\sin \frac{1}{2}\tau}\, d\tau. \tag{7}$$

Используя представление частичной суммы ряда Фурье функции $f(x)$ интегралом Дирихле и лемму Римана, установим следующий интересный факт.

Теорема 1 (принцип локализации Римана). *Сходимость или расходимость в точке $x \in [-\pi, \pi]$ ряда Фурье, соответствующего интегрируемой на $[-\pi, \pi]$ функции $f(x)$, а также значение суммы ряда в этой точке в случае его сходимости, определяются значениями функции $f(x)$ («поведением» функции $f(x)$) в сколь угодно малой окрестности этой точки.*

Для доказательства представим интеграл (6) в виде суммы

$$\begin{aligned} s_{2n+1}(x) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{\delta} [f(x+\tau) + f(x-\tau)] \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)\tau}{\sin \frac{1}{2}\tau}\, d\tau + \\ + \frac{1}{2\pi} \int\limits_{\delta}^{\pi} [f(x+\tau) + f(x-\tau)] \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)\tau}{\sin \frac{1}{2}\tau}\, d\tau, \end{aligned} \tag{8}$$

где $0 < \delta \leq \pi$. Так как функция $[f(x+\tau) + f(x-\tau)] \dfrac{1}{\sin \frac{1}{2}\tau}$ интегрируема на промежутке $[\delta, \pi]$, то второе слагаемое в этом представлении, на основании леммы Римана, стремится к нулю при $n \to \infty$. Таким образом, вопрос о наличии или. отсутствии предела у частичной суммы $s_{2n+1}(x)$ при $n \to \infty$, а также значении этого предела, если он существует, решается в зависимости от поведения первого слагаемого в представлении (8), т.е. в зависимости от значений функций $f(x)$ на сколь угодно малом промежутке $[x - \delta, x + \delta]$.

Следующее утверждение дает достаточное условие точечной сходимости ряда Фурье.

Теорема 2. *Если интегрируемая на $[-\pi, \pi]$ функция $f(x)$ имеет в точке $x_0 \in (-\pi, \pi)$ конечные односторонние производные $f'_+(x_0)$ и $f'_-(x_0)$, то соответствующий $f(x)$ ряд Фурье сходится в точке x_0 и имеет сумму, равную $\frac{1}{2}[f(x_0+0) + f(x_0-0)]$.*

Доказательство. Воспользовавшись равенством (7), запишем:

$$\frac{1}{2}[f(x_0+0) + f(x_0-0)] = \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{\pi} [f(x_0+0) + f(x_0-0)] \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)\tau}{\sin \frac{1}{2}\tau}\, d\tau.$$

Вместе с тем

$$s_{2n+1}(x) - \frac{1}{2}\left[f(x_0+0) + f(x_0-0)\right] =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\pi} \left\{ \left[\frac{f(x_0+\tau) - f(x_0+0)}{\tau} - \frac{f(x_0-\tau) - f(x_0-0)}{(-\tau)} \right] \frac{\dfrac{\tau}{2}}{\sin\dfrac{\tau}{2}} \right\} \cdot \sin\left(n + \frac{1}{2}\right)\tau \, d\tau. \tag{9}$$

Функция, стоящая в фигурных скобках под знаком интеграла, в силу принятого предположения относительно $f(x)$, является интегрируемой[50]. Поэтому, в соответствии с леммой Римана, интеграл (9) стремится к нулю при $n \to \infty$. Отсюда следует, что

$$\lim_{n\to\infty} s_{2n+1}(x) = \frac{1}{2}\left[f(x_0+0) + f(x_0-0)\right].$$

Теорема доказана.

Замечание. Если функция $f(x)$ непрерывна в точке x_0, т.е. $f(x_0+0) = f(x_0-0) = f(x_0)$, то ряд Фурье функции $f(x)$ сходится в этой точке и имеет сумму, равную $f(x)$.

Следствие. *Если функция* $f(x)$ *дифференцируема на* $[-\pi, \pi]$ *и периодична с периодом* 2π *(или, что равнозначно* $f(-\pi) = f(\pi)$*), то ряд Фурье, соответствующий* $f(x)$*, сходится в каждой точке промежутка* $[-\pi, \pi]$ *и имеет сумму, равную* $f(x)$*.*

В таком случае говорят, что $f(x)$ *разлагается в свой ряд Фурье.*

При наложении на функцию $f(x)$ более ограничительных условий можно обеспечить не только разложимость ее в ряд Фурье, но и равномерную сходимость этого ряда.

Теорема 3. *Если функция* $f(x)$ *имеет на* $[\pi, \pi]$ *интегрируемую производную и* $f(-\pi) = f(\pi)$*, то:* 1) $f(x)$ *разлагается в свой ряд Фурье,* 2) *этот ряд равномерно сходится на* $[-\pi, \pi]$*.*

Доказательство. Разложимость $f(x)$ в свой ряд Фурье в условиях теоремы имеет место в силу теоремы 2. Для доказательства равномерной сходимости этого ряда построим ряд Фурье, соответствующий производной $f'(x)$ функции $f(x)$:

$$f'(x) \sim \frac{a_0'}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k' \cos kx + b_k' \sin kx.$$

Здесь

$$a_k' = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f'(t)\,\cos kt\,dt = kb_k, \qquad b_k' = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f'(t)\,\sin kt\,dt = -ka_k,$$

---

[50] Предположение о конечности $f'_+(x_0)$ и $f'_-(x_0)$ означает ограниченность и интегрируемость функций $\dfrac{f(x_0+\tau) - f(x_0+0)}{\tau}$ и $\dfrac{f(x_0-\tau) - f(x_0-0)}{\tau}$ на промежутке $[0, \pi]$.

и, как обычно, a_k и b_k — коэффициенты Фурье функции $f(x)$. Из полученных соотношений, связывающих a'_k и b_k, а также b'_k и a_k, находим:

$$|a_k| = \frac{1}{k}|b'_k| \le \frac{1}{2}\left(\frac{1}{k^2} + {b'_k}^2\right), \qquad |b_k| \le \frac{1}{2}\left(\frac{1}{k^2} + {a'_k}^2\right),$$

откуда

$$|a_k| + |b_k| \le \frac{1}{k^2} + \frac{1}{2}\,({a'_k}^2 + {b'_k}^2).$$

Известно что ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{1}{k^2}$ сходится, в силу неравенства Бесселя, для интегрируемой функции $f'(x)$ сходящимся является и ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty}({a'_k}^2 + {b'_k}^2)$, откуда вытекает сходимость числового ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty}(|a_k| + |b_k|)$. Но тогда, на основании признака сравнения Вейерштрасса, равномерно сходится ряд Фурье, соответствующий функции $f(x)$, так как

$$|a_k\,\cos kx + b_k\,\sin kx| \le |a_k| + |b_k|.$$

Теорема доказана.

Установим точечную сходимость рядов Фурье для весьма важного класса кусочно-монотонных функций. Приведем вначале два вспомогательных утверждения.

Лемма 2. *Если функция $\varphi(x)$ монотонна и ограничена на промежутке $[0,\pi]$, то*

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_0^{\pi} \varphi(t)\,\frac{\sin\alpha t}{t}\,dt = \frac{\pi}{2}\,\varphi(+0).$$

Доказательство. Для произвольного числа δ, $0 < \delta < \pi$, представим интеграл в виде

$$\begin{aligned}\int\limits_0^{\pi} \varphi(t)\,\frac{\sin\alpha t}{t}\,dt &= \int\limits_0^{\delta} \varphi(t)\,\frac{\sin\alpha t}{t}\,dt + \int\limits_{\delta}^{\pi} \varphi(t)\,\frac{\sin\alpha t}{t}\,dt = \\ = \varphi(+0)\int\limits_0^{\delta} \frac{\sin\alpha t}{t}\,dt &+ \int\limits_0^{\delta} [\varphi(t) - \varphi(+0)]\,\frac{\sin\alpha t}{t}\,dt + \int\limits_{\delta}^{\pi} \varphi(t)\,\frac{\sin\alpha t}{t}\,dt.\end{aligned} \tag{10}$$

Заметим, что из равенства $\dfrac{\pi}{2} = \displaystyle\int\limits_0^{\infty} \frac{\sin t}{t}\,dt = \int\limits_0^{\infty} \frac{\sin\alpha t}{t}\,dt$, имеющего место при любом $\alpha > 0$, следует существование такой константы A, что при всех значениях $\xi', \xi'' > 0$ выполняется неравенство $\left|\displaystyle\int\limits_{\xi'}^{\xi''} \frac{\sin\alpha t}{t}\,dt\right| \le A$. Пусть теперь число $\varepsilon > 0$ произвольно. Так как вместе с функцией $\varphi(x)$ монотонной является также функция $\varphi(x) - \varphi(+0)$ и $\varphi(x) - \varphi(+0) \to 0$ при $x \to +0$, то по числу $\varepsilon > 0$ найдется такое число $\delta > 0$, что $|\varphi(\delta) - \varphi(+0)| < \dfrac{\varepsilon}{3A}$. При таком выборе δ применение на промежутке $[0, \delta]$ второй теоремы о среднем значении ко второму слагаемому в представлении (10) приводит к оценке

$$\left| \int\limits_0^\delta [\varphi(t) - \varphi(+0)] \frac{\sin \alpha t}{t} \, dt \right| \leq |\varphi(\delta) - \varphi(+0)| \cdot \left| \int\limits_\xi^\delta \frac{\sin \alpha t}{t} \, dt \right| < \frac{\varepsilon}{3}. \tag{11}$$

Так как, далее, интеграл $\displaystyle\int\limits_\delta^\pi \frac{\varphi(t)}{t} \sin \alpha t \, dt$, в силу леммы Римана, стремится к нулю при $\alpha \to \infty$, найдется такое число $\alpha_0 > 0$, что при $\alpha > \alpha_0$ будет выполняться неравенство

$$\left| \int\limits_\delta^\pi \varphi(t) \frac{\sin \alpha t}{t} \, dt \right| < \frac{\varepsilon}{3}. \tag{12}$$

Наконец, интеграл $\displaystyle\int\limits_0^\delta \frac{\sin \alpha t}{t} \, dt = \int\limits_0^{\alpha\delta} \frac{\sin t}{t} \, dt$ стремится к $\dfrac{\pi}{2}$ при $\alpha \to +\infty$, поэтому найдется такое число α_1, что при $\alpha > \alpha_1$ будет выполняться неравенство

$$\left| \int\limits_0^\delta \varphi(+0) \frac{\sin \alpha t}{t} \, dt - \varphi(+0) \frac{\pi}{2} \right| < \frac{\varepsilon}{3}. \tag{13}$$

Из представления (10) и неравенств (11), (12) и (13) следует, что при $\alpha > \max(\alpha_0, \alpha_1)$

$$\left| \int\limits_0^\pi \varphi(t) \frac{\sin \alpha t}{t} \, dt - \frac{\pi}{2} \varphi(+0) \right| < \varepsilon,$$

что завершает доказательство леммы 2.

Лемма 3. *Если функция $\varphi(t)$ монотонна и ограничена на $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$, то*

$$\lim_{\alpha \to \infty} \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \varphi(t) \frac{\sin \alpha t}{\sin t} \, dt = \frac{\pi}{2} \varphi(+0).$$

Для доказательства представим интеграл по $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ в виде суммы двух интегралов:

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \varphi(t) \frac{\sin \alpha t}{\sin t} \, dt = \int\limits_0^\delta \varphi(t) \frac{\sin \alpha t}{\sin t} \, dt + \int\limits_\delta^{\frac{\pi}{2}} \varphi(t) \frac{\sin \alpha t}{\sin t} \, dt,$$

где $0 < \delta < \dfrac{\pi}{2}$, и заметим, что, в силу леммы Римана, второе слагаемое в правой части этого равенства стремится к нулю при $\alpha \to +\infty$. Покажем теперь, что

$\lim\limits_{\alpha\to\infty}\int\limits_0^\delta \varphi(t)\,\dfrac{\sin\alpha t}{\sin t}\,dt = \dfrac{\pi}{2}\,\varphi(+0)$. Рассмотрим вначале частный случай, когда $\varphi(x)$ не убывает на $[0,\delta]$ и $\varphi(x)\geq 0$. В этом случае функция $\varphi_1(x)=\varphi(x)\,\dfrac{x}{\sin x}$ также не убывает и неотрицательна на $[0,\delta]$, так как функция $\dfrac{x}{\sin x}$, очевидно[51], возрастает и положительна на $[0,\delta]$. Таким образов, для интеграла $\int\limits_0^\delta \varphi_1(t)\,\dfrac{\sin\alpha t}{t}\,dt = \int\limits_0^\delta \left[\varphi(t)\,\dfrac{t}{\sin t}\right]\dfrac{\sin\alpha t}{t}\,dt$ выполняются условия леммы 2, и так как $\varphi_1(+0) = \lim\limits_{x\to+0}\varphi_1(x) = \left[\lim\limits_{x\to+0}\varphi(x)\right]\cdot\left[\lim\limits_{x\to+0}\dfrac{x}{\sin x}\right] = \varphi(+0)$, то для рассматриваемого случая наше утверждение доказано.

Если функция $\varphi(x)$ не убывает на $[0,\delta]$, но может принимать как положительные, так и отрицательные значения, введем в рассмотрение функцию $\psi(x) = \varphi(x)+C$, где константа C подобрана таким образом, чтобы $\psi(x)\geq 0$. Для функции $\psi(x)$ выполняются рассмотренные условия, и поэтому $\lim\limits_{\alpha\to\infty}\int\limits_0^\delta \psi(t)\,\dfrac{\sin\alpha t}{\sin t}\,dt = \dfrac{\pi}{2}\,\psi(+0) = \dfrac{\pi}{2}\,[\varphi(+0)+C]$. С другой стороны,

$$\int\limits_0^\delta \psi(t)\,\frac{\sin\alpha t}{\sin t}\,dt = \int\limits_0^\delta \varphi(t)\,\frac{\sin\alpha t}{\sin t}\,dt + C\int\limits_0^\delta \frac{\sin\alpha t}{\sin t}\,dt,$$

и так как

$$\lim_{\alpha\to+\infty}\int\limits_0^\delta \frac{\sin\alpha t}{\sin t}\,dt = \lim_{\alpha\to+\infty}\int\limits_0^\delta \frac{t}{\sin t}\,\frac{\sin\alpha t}{t}\,dt = \frac{\pi}{2}.$$

получаем доказываемое равенство и в этом случае.

Наконец, допустим, что функция $\varphi(x)$ не возрастает на $[0,\delta]$. Тогда функция $[-\varphi(x)]$ не убывает на этом промежутке, и

$$\lim_{\alpha\to+\infty}\int\limits_0^\delta \varphi(t)\,\frac{\sin\alpha t}{\sin t}\,dt = -\lim_{\alpha\to+\infty}\int\limits_0^\delta [-\varphi(t)]\,\frac{\sin\alpha t}{\sin t}\,dt = -[-\varphi(+0)]\,\frac{\pi}{2} = \varphi(+0)\,\frac{\pi}{2}.$$

Лемма доказана.

Теорема (Дирихле). *Если функция $f(x)$ ограничена и кусочно монотонна на $[-\pi,\pi]$, то ряд Фурье для $f(x)$ сходится в каждой точке $x\in[-\pi,\pi]$ и имеет сумму, равную $\frac{1}{2}\,[f(x+0)+f(x-0)]$ во внутренних точках x и $\frac{1}{2}\,[f(-\pi+0)+f(\pi-0)]$ в концевых точках промежутка $[-\pi,\pi]$.*

---

[51] В самом деле, производная функции $\dfrac{x}{\sin x}$, равная $\dfrac{\cos x(\operatorname{tg} x - x)}{\sin^2 x}$, неотрицательна на $[0,\delta]$.

Доказательство. Положив в представлений (6) частичной суммы ряда Фурье $\tau = 2t$, перепишем эту сумму в виде

$$\begin{aligned} s_{2n+1}(x) &= \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} [f(x+2t)+f(x-2t)]\,\frac{\sin(2n+1)t}{\sin t}\,dt = \\ &= \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} f(x+2t)\,\frac{\sin(2n+1)t}{\sin t}\,dt + \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} f(x-2t)\,\frac{\sin(2n+1)t}{\sin t}\,dt. \end{aligned} \tag{14}$$

Пусть x — внутренняя точка промежутка $[-\pi,\pi]$. Выберем число $\delta > 0$ настолько малым, чтобы функция $f(t)$ была монотонной на каждом из промежутков $(x, x+\delta)$ и $(x-\delta, x)$. Разложив каждый из интегралов равенства (14) на сумму двух интегралов соответственно промежуткам $[0,\delta]$ и $\left[\delta, \dfrac{\pi}{2}\right]$ и заметив, что интегралы по промежутку $\left[\delta, \dfrac{\pi}{2}\right]$, в силу леммы Римана, стремятся к нулю, а для интегралов по промежутку $[0,\delta]$ выполняются условия леммы 3, получим:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} f(x+2t)\,\frac{\sin(2n+1)t}{\sin t}\,dt = \frac{1}{\pi}\cdot\frac{\pi}{2}\,f(x+0) = \frac{1}{2}\,f(x+0),$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} f(x-2t)\,\frac{\sin(2n+1)t}{\sin t}\,dt = \frac{1}{2}\,f(x-0),$$

откуда

$$\lim_{n\to\infty} s_{2n+1}(x) = \frac{1}{2}\,[f(x+0)+f(x-0)].$$

Если теперь $x = \pi$, то, предполагая функцию $f(x)$ периодической с периодом 2π, найдем:

$$\lim_{t\to+0} f(\pi+2t) = \lim_{t\to+0} f(-\pi+2t) = f(-\pi+0).$$

Аналогично $\lim\limits_{t\to+0} f(\pi-2t) = f(\pi-0)$. Отсюда следует, что

$$\lim_{n\to\infty} s_{2n+1}(\pi) = \lim_{n\to\infty} s_{2n+1}(-\pi) = \frac{1}{2}\,[f(-\pi+0)+f(\pi-0)].$$

Теорема доказана.

Замечание. Так как в точках непрерывности $f(x) = f(x-0) = f(x+0)$, то в этих точках суммой ряда Фурье является значение $f(x)$. Вместе с тем, если функция $f(x)$ кусочно монотонна и непрерывна на $[-\pi,\pi]$ и, кроме того, $f(-\pi) = f(\pi)$, то ряд Фурье для ? имеет своей суммой значение $f(x)$ в каждой точке $x \in [-\pi,\pi]$, т.е. $f(x)$ разлагается в свой ряд Фурье. Можно показать, что ряд Фурье для $f(x)$, удовлетворяющей условиям теоремы Дирихле, сходится равномерно на каждом промежутке $[\alpha,\beta] \subset [-\pi,\pi]$, на котором функция $f(x)$ непрерывна. Мы не будем приводить доказательства этого факта.

§ 4. Почленное дифференцирование и интегрирование рядов Фурье

Из рассмотрений, приведенных в § 3, вытекает возможность почленного дифференцирования ряда Фурье для определенной на $[-\pi, \pi]$ функции $f(x)$ при условии, что $f(x)$ имеет интегрируемую на $[-\pi, \pi]$ вторую производную $f''(x)$ и выполняются равенства $f(-\pi) = f(\pi)$, $f'(-\pi) = f'(\pi)$. При этом ряд Фурье, соответствующий производной $f'(x)$ функции $f(x)$, оказывается равномерно сходящимся. Легко видеть, что в случае, когда $f(x)$ имеет на $[-\pi, \pi]$ интегрируемую производную порядка $n + 1$ и для всех производных порядка $s \le n$ и выполнено условие $f^{(s)}(-\pi) = f^{(s)}(\pi)$, $s = 0, 1, 2, \dots, n$, то функция $f(x)$ и все ее производные до порядка n включительно разлагаются в свои ряды Фурье, которые равномерно сходятся на $[-\pi, \pi]$. Выражение коэффициентов Фурье a'_k, b'_k для функции $f'(x)$ (см. § 3) показывает, что ряд Фурье для функции $f'(x)$ получается из ряда Фурье (1) из § 3 для функции $f(x)$ почленным дифференцированием. Подобным образом можно проверить, что ряд Фурье для функций $f^{(s)}(x)$ может быть получен s-кратным почленный дифференцированием ряда Фурье для функции $f(x)$.

Рассмотрим вопрос об оценке скорости стремления к нулю коэффициентов Фурье рядов для производных функции $f(x)$. Обозначим через $a_k^{(s)}$, $b_k^{(s)}$ коэффициенты Фурье производной $f^{(s)}(x)$. Тогда, согласно установленному в § 3, $|a_k^{(1)}| + |b_k^{(1)}| = k(a_k^{(0)}| + |b_k^{(0)}|)$, аналогично $|a_k^{(2)}| + |b_k^{(2)}| = k(|a_k^{(1)}| + |b_k^{(1)}|)$, откуда $(|a_k^{(2)}| + |b_k^{(2)}|) = k^2(|a_k^{(0)}| + |b_k^{(0)}|)$ и т.д. Для любого целого s, $0 < s \le n$, будет $|a_k^{(s)}| + |b_k^{(s)}| = k^s(|a_k^{(0)}| + |b_k^{(0)}|)$, и, наконец, $|a_k^{(n+1)}| + |b_k^{(n+1)}| = k^{n+1}(|a_k^{(0)}| + |b_k^{(0)}|)$ или

$$k^n(|a_k^{(0)}| + |b_k^{(0)}|) = \frac{1}{k}\,(|a_k^{(n+1)}| + |b_k^{(n+1)}|).$$

Так как числовой ряд с общим членом $\frac{1}{k}\,(|a_k^{(n+1)}| + |b_k^{(n+1)}|)$ сходится (см. § 3), то сходится и ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} k^n(|a_k^{(0)}| + |b_k^{(0)}|)$, а вместе с ним и все ряды

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^s(|a_k^{(0)}| + |b_k^{(0)}|), \qquad (s = 0, 1, \dots, n.$$

Сходимость этих рядов (в принятых нами предположениях относительно $f(x)$) дает представление о скорости стремления к нулю коэффициентов Фурье функции $f(x)$ и ее производных. Отметил, что в результата s-кратного дифференцирования ряда (1) (см. § 3), ряд для производной порядка s получает вид:

$$f^{(s)}(x) \sim \sum_{k=1}^{\infty} k^s \left[a_k \cos\left(kx + s\frac{\pi}{2}\right) + b_k \sin\left(kx + s\frac{\pi}{2}\right)\right];$$

для членов этого ряда, очевидно, выполнено неравенство

$$\left| k^s \left[a_k \cos\left(kx + s\frac{\pi}{2}\right) + b_k \sin\left(kx + s\frac{\pi}{2}\right)\right]\right| \le k^s(|a_k| + |b_k|).$$

Обратимся теперь к вопросу о почленном интегрировании рядов Фурье, ограничившись частным случаем непрерывной на $[-\pi, \pi]$ функции $f(x)$. Введем для этого вспомогательную функцию $F(x)$, полагая $F(x) = \int\limits_0^x \left[f(t) - \frac{a_0}{2}\right] dt$. Функция $F(x)$ дифференцируема на $[-\pi, \pi]$ и удовлетворяет условию $F(-\pi) = F(\pi)$. Поэтому $F(x)$ на $[-\pi, \pi]$ разлагается в свой ряд Фурье, т.е.

$$F(x) = \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos kx + B_k \sin kx, \tag{1}$$

где

$$A_0 = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} F(t)\, dt,$$

$$A_k = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} F(t) \cos kt\, dt = \frac{1}{\pi} F(t) \left. \frac{\sin kt}{k} \right|_{-\pi}^{\pi} = -\frac{1}{k\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin kt\, dt = -\frac{b_k}{k};$$

аналогично, $B_k = \dfrac{a_k}{k}$. Подставив полученные значения коэффициентов A_k и B_k в ряд (22) и сравнив полученный ряд

$$F(t) = \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} -\frac{b_k}{k} \cos kx + \frac{a_k}{k} \sin kx \tag{2}$$

с рядом (1) из § 3, соответствующем функции $f(x)$, найдем, что ряд для функций $F(x)$ получен из ряда (1) из § 3 почленный интегрированием.

§ 5. Частные виды рядов Фурье, некоторые обобщения и преобразования

Из представления интеграла по промежутку $[-a, a]$

$$\int\limits_{-a}^{a} F(t)\, dt = \int\limits_{-a}^{0} F(t)\, dt + \int\limits_{0}^{a} F(t)\, dt = \int\limits_{0}^{a} [F(-t) + F(t)]\, dt$$

следует, что для нечетной функции $F(x)$ $\int\limits_{-a}^{a} F(t)\, dt = 0$, а для четной Функции $F(x)$ $\int\limits_{-a}^{a} F(t)\, dt = 2 \int\limits_{0}^{a} F(t)\, dt$. Если теперь $f(x)$ — четная интегрируемая на $[-\pi, \pi]$ функция, то четными будут и все функции $f(x) \cos kx$ $(k = 0, 1, 2, \ldots)$, следовательно, для коэффициентов Фурье a_k можно пользоваться формулами

$$a_k = \frac{2}{\pi} \int\limits_{0}^{\pi} f(t)\ \cos kt\, dt.$$

Функции $f(x)\sin kx$ $(k = 1, 2, \ldots)$ в этой случае нечетные, и поэтому все коэффициенты Фурье b_k функции $f(x)$ равны нулю. Ряд Фурье, соответствующий четной на $[-\pi, \pi]$ функции $f(x)$ имеет вид

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx, \tag{1}$$

т.е. является рядом только по косинусам.

Аналогично, если функция $f(x)$ нечетная на $[-\pi, \pi]$, то все коэффициенты a_k для этой функции равны нулю, а коэффициенты b_k выражаются интегралами $\frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\pi} f(t)\sin kt\,dt$.

Ряд Фурье для нечетной на $[-\pi, \pi]$ функции $f(x)$ является рядом только по синусам:

$$f(x) \sim \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin kx. \tag{2}$$

Для произвольной функции $f(x)$ соответствующий ей ряд Фурье можно рассматривать как сумму рядов (1) и (2), первый из которых соответствует «четной части» функции $f(x)$ в представлении

$$f(x) = \frac{1}{2}\,[f(x) + f(-x)] + \frac{1}{2}\,[f(x) - f(-x)],$$

т.е. функций $f_1(x) = \frac{1}{2}\,[f(x) + f(-x)]$, второй — «нечетной части» функции $f(x)$, т.е. функции $f_2(x) = \frac{1}{2}\,[f(x) - f(-x)]$.

Если функция $f(x)$ определена на промежутке $[0, \pi]$ и является, например, кусочно монотонной и непрерывной, то для ее разложения в ряд Фурье на этом промежутке вводят в рассмотрение продолжение $F(x)$ на промежуток $[-\pi, \pi]$, доопределяя $f(x)$ на $[-\pi, \pi]$ с большой степенью произвола. Поведение полученного для $F(x)$ ряда Фурье во внутренних точках $[0, \pi]$, в силу принципа локализации Римана, не зависит от способа продолжения $f(x)$ на промежуток $[-\pi, 0]$. С целью получения более простых рядов Фурье для $f(x)$ на $[0, \pi]$ используют обычно или «четное» или «нечетное» продолжение $f(x)$, т.е. выбирают в качестве $F(x)$ функцию, которая на $[0, \pi]$ совпадает с $f(x)$, а на $[-\pi, 0]$ принимает значения $f(-x)$ при «четном» продолжении и значения $-f(-x)$ — при «нечетном» продолжении.

Если функция $f(x)$ интегрируема на $[-l, l]$, то для построения соответствующего ей на этом промежутке ряда Фурье необходимо произвести вначале замену переменной, положив $x' = \frac{\pi}{l}\,x$ или $x = \frac{l}{x}\,x'$. В результате получим функцию $f_1(x')f\left(\frac{l}{\pi}\,x'\right)$, определенную на $[-\pi, \pi]$, которой соответствует ряд Фурье

$$f_1(x') \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx' + b_k \sin kx',$$

где

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f_1(t')\,\cos kt\,dt, \quad b_k = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f_1(t)\,\sin kt\,dt, \qquad k = 0, 1, 2, \dots\ .$$

Возвратившись к исходной переменной x, найдем ряд Фурье, соответствующий функции $f(x)>$ на $[-l, l]$:

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k\,\cos\frac{k\pi}{l}\,x + b_k\,\sin\frac{k\pi}{l}\,x, \tag{3}$$

где

$$a_k = \frac{1}{l}\int\limits_{-l}^{l} f(t)\,\cos\frac{k\pi}{l}\,t\,dt, \quad b_k = \frac{1}{l}\int\limits_{-l}^{l} f(t)\,\sin\frac{k\pi}{l}\,t\,dt, \qquad k = 0, 1, 2, \dots.$$

Случай промежутка $[0, l]$ аналогичен рассмотренному случаю промежутка $[0, \pi]$ и может быть предложен в качестве упражнения.

В приложениях часто используется так называемая комплексная форма ряда Фурье, получаемая из формы (3), если представить в ней $\cos\frac{k\pi}{l}\,x$ и $\sin\frac{k\pi}{l}\,x$ по формулам Эйлера. В результате получим:

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k\,\frac{e^{i\frac{k\pi}{l}} + e^{-i\frac{k\pi}{l}}\,x}{2} + b_k\ = \frac{e^{i\frac{k\pi}{l}} - e^{-i\frac{k\pi}{l}}\,x}{2} =$$

$$= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2}\,(a_k + ib_k)\,e^{i\frac{k\pi}{l}\,x} + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2}(a_k - ib_k)\,e^{-i\frac{k\pi}{l}\,x}.$$

Положив

$$c_k = \begin{cases} \frac{1}{2}\,(a_k - ib_k) & \text{при} \quad k = 1, 2, \dots \\ \frac{a_0}{2} & \text{при} \quad k = 0, \\ (a_k + ib_k) & \text{при} \quad k = -1, -2, \dots, \end{cases}$$

сможем записать:

$$f(x) \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k\,e^{-i\,\frac{k\pi}{l}\,x}.$$

Подставив в равенства, определяющие значения c_k, интегральные представления коэффициентов a_k и b_k, найдем:

$$c_k = \frac{1}{l}\int\limits_{-l}^{l} f(t)\,\left[\cos\frac{k\pi}{l}\,t + i\sin\frac{k\pi}{l}\,t\right]dt = \frac{1}{2l}\int\limits_{-l}^{l} f(t)\,e^{i\,\frac{k\pi}{l}\,t}\,dt.$$

Комплексная форма особенно удобна для представления рядами функций нескольких переменных. Для простоты ограничимся случаем функции двух переменных. Пусть функция $f(x_1, x_2)$ определена в прямоугольнике $-l_1 \le x_1 \le l_1$,

$-l_2 \le x \le l_2$ и обладает в нем интегрируемыми частными производными $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}$ и $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}$. Фиксируя переменную x_1, можно представить $f(x_1, x_2)$ в виде

$$f(x_1, x_2) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k(x_1)\, e^{-i\,\frac{k\pi}{l_2}\,x_2}, \tag{4}$$

где

$$c_k(x_1) = \frac{1}{2l_2} \int\limits_{-l_2}^{l_2} f(x_1, x_2)\, e^{i\,\frac{k\pi}{l_2}\,x_2}\, dx_2. \tag{5}$$

Разложив теперь в ряд Фурье функции $c_k(x_1)$ (в наших предположениях это возможно), найдем:

$$c_k(x_1) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} c_{kj}\, e^{-i\,\frac{j\pi}{l_1}\,x_1}\, dx_1,$$

где

$$c_{kj} = \frac{1}{2l_1} \int\limits_{-l_1}^{l_1} c_k(x_1)\, e^{i\,\frac{j\pi}{l_1}\,x_1}\, dx_1,$$

или, подставив под знак интеграла выражение для $c_k(x_1)$, получим:

$$c_{kj} = \frac{1}{4l_1 l_2} \int\limits_{-l_1}^{l_1} dx_1 \int\limits_{-l_2}^{l_2} f(x_1, x_2)\, e^{i\pi\left(\frac{jx_1}{l_1} + \frac{kx_2}{l_2}\right)}\, dx_2 =$$

$$= \frac{1}{4l_1 l_2} \int\limits_{-l_1}^{l_1} \int\limits_{-l_2}^{l_2} f(x_1, x_2)\, e^{i\pi\left(\frac{jx_1}{l_1} + \frac{kx_2}{l_2}\right)}\, dx_1 dx_2.$$

Вместе с тем для $f(x_1, x_2)$ имеет место представление

$$f(x_1, x_2) = \sum_{k,j=-\infty}^{\infty} c_{kj}\, e^{-i\pi\left(\frac{jx_1}{l_1} + \frac{kx_2}{l_2}\right)}.$$

§ 6. Понятие об интеграле Фурье и преобразовании Фурье

Если функция $f(x)$ определена на всей числовой прямой и на каждом конечном промежутке $[-l, l]$ разложима в ряд Фурье, то в некоторых случаях она может быть представлена интегралом Фурье. Для отыскания этого представления проведем предварительно нестрогие выкладки, предполагая $f(x)$ абсолютно интегрируемой на $(-\infty, \infty)$, т.е. считая конечным интеграл $\int\limits_{-\infty}^{\infty} |f(t)|\, dt$.

Рассмотрим разложение $f(x)$ на промежутке $[-l, l]$:

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k\, e^{-i\,\frac{k\pi}{l}\,x},$$

в котором

$$c_k = \frac{1}{2l}\int\limits_{-l}^{l} f(t)\, e^{i\,\frac{k\pi}{l}\,t}\, dt, \qquad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots\ .$$

Подставив выражения c_k в ряд для $f(x)$, подучим:

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{2l}\int\limits_{-l}^{l} f(t)\, e^{i\,\frac{k\pi}{l}\,t}\, dt\right] e^{-i\,\frac{k\pi}{l}\,x} = \frac{1}{2\pi}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\left[\int\limits_{-l}^{l} f(t)\, e^{i\,\frac{k\pi}{l}\,(t-x)}\right]\frac{\pi}{l}.$$

Введем переменную ξ, изменяющуюся на промежутке $(-\infty, \infty)]$, положим $\xi_k = \dfrac{k\pi}{l}$; тогда $\Delta\xi_k = \xi_{k+1} - \xi_k = \dfrac{\pi}{l}$. Получим:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\sum_{k=-N}^{N}\left[\int\limits_{-l}^{l} f(t)\, e^{i\xi_k(t-x)}\, dt\right]\Delta\xi_k +$$

$$+\frac{1}{2\pi}\sum_{k=-\infty}^{-N-1}\left[\int\limits_{-l}^{l} f(t)\, e^{i\xi_k(t-x)}\, dt\right]\Delta\xi_k + \frac{1}{2\pi}\sum_{k=N+1}^{\infty}\left[\int\limits_{-l}^{l} f(t)\, e^{i\xi_k(t-x)}\, dt\right]\Delta\xi_k.$$

Из предположения о сходимости ряда Фурье вытекает стремление к нулю последних двух слагаемых в этом представления, поэтому

$$f(x) = \lim_{N\to\infty}\ \frac{1}{2\pi}\sum_{k=-N}^{N}\left[\int\limits_{-l}^{l} f(t)\, e^{i\xi_k(t-x)}\, dt\right]\Delta\xi_k.$$

При произвольном фиксированном N сумма $\displaystyle\sum_{k=-N}^{N}\left[\int\limits_{-l}^{l} f(t)\, e^{i\xi_k(t-x)}\, dt\right]\Delta\xi_k$ может рассматриваться как интегральная сумма для функции $\varphi(\xi, x) = \displaystyle\int\limits_{-l}^{l} f(t)\, e^{i\xi(t-x)}\, dt$, соответствуюшая разбиению промежутка $\left[-\dfrac{N\pi}{l}, \dfrac{N\pi}{l}\right]$ точками ξ_k. Поэтому естественно ожидать, что в точке $x \in [-l, l]$ выполняется равенство

$$f(x) = \lim_{N\to\infty}\int\limits_{-\frac{N\pi}{l}}^{\frac{N\pi}{l}} \frac{1}{2\pi}\left[\int\limits_{-l}^{l} f(t)\, e^{i\xi(t-x)}\, dt\right] d\xi = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} d\xi \int\limits_{-l}^{l} f(t)\, e^{i\xi(t-x)}\, dt,$$

и вместе о тем для всех $x \in (-\infty, \infty)$, т.е. при $l \to \infty$, равенство

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} d\xi \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{i\xi(t-x)}\, dt. \tag{1}$$

Интеграл, стоящий в правой части этого равенства, называется *интегралом Фурье*, построенным для функции $f(x)$. Функция

$$F(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{i\xi t}\, dt \tag{2}$$

называется *преобразованием Фурье* функции $f(x)$. Из (1) и (2) следует:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} F(\xi)\, e^{-i\xi x}\, d\xi.$$

Установим некоторое свойства преобразования Фурье $F(\xi)$ функции $f(x)$. Пусть функция $f(x)$ абсолютно интегрируема на $(-\infty, \infty)$. Тогда из равенства $|f(t)\, e^{i\xi t}| = |f(t)|$ и сходимости интеграла $\int\limits_{-\infty}^{\infty} |f(t)|\, dt$ следует равномерная относительно ξ сходимость интеграла (2). Так как, далее, функция $ft)\, e^{i\xi t}$ непрерывна по ξ, то $F(\xi)$ является непрерывной функцией ξ. Покажем, что $F(\xi) \to 0$ при $\xi \to \infty$. Возьмем произвольное число $\varepsilon > 0$. Тогда найдется такое число $\tau_0 > 0$, что

$$\left| \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{-\tau_0} f(t)\, e^{i\xi t}\, dt \right| < \frac{\varepsilon}{3} \quad \text{и} \quad \left| \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{\tau_0}^{\infty} f(t)\, e^{i\xi t}\, dt \right| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Пусть теперь $T\{-\tau_0 < t_1 < \ldots < t_{k-1} < \tau_0\}$ — такое разбиение промежутка $[-\tau_0, \tau_0]$, что для верхней суммы $\overline{s}(f, T) = \sum\limits_{T} M_k\, \Delta t_k \left(M_k = \sup\limits_{[t_k, t_{k+1}]} f(t) \right)$, соответствующей этому разбиению, выполнено неравенство

$$0 \le \overline{s}(f, T) - \int\limits_{-\tau_0}^{\tau_0} f(t)\, dt < \frac{\varepsilon\sqrt{2\pi}}{6}. \tag{3}$$

Введем в рассмотрение вспомогательную функцию $f_1(t)$, полагая

$$f_1(t) = \begin{cases} M_k & \text{при} \quad t_k < t < t_{k+1}, \\ 0 & \text{при} \quad t = t_k \ (k = 0, 1, \ldots, n-1). \end{cases}$$

Тогда

$$\left| \int\limits_{-\tau_0}^{\tau_0} f(t)\, e^{i\xi t}\, dt \right| \le \left| \int\limits_{-\tau_0}^{\tau_0} [f(t) - f_1(t)]\, e^{i\xi t}\, dt \right| + \left| \int\limits_{-\tau_0}^{\tau_0} f_1(t)\, e^{i\xi t}\, dt \right|.$$

Ясно, что

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left|\int\limits_{-\tau_0}^{\tau_0}[f(t)-f_1(t)]\,e^{i\xi t}\,dt\right| \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left[\overline{s}(f,T)-\int\limits_{-\tau_0}^{\tau_0} f(t)\,dt\right] < \frac{\varepsilon}{6}. \tag{4}$$

С другой стороны,

$$\left|\int\limits_{-\tau_0}^{\tau_0} f_1(t)\,e^{i\xi t}\,dt\right| = \left|\sum_T M_k\,\frac{e^{i\xi t}}{i\xi}\Big|_{t_k}^{t_{k+1}}\right| \leq \left(\sum_T |M_k|\right)\frac{2}{|\xi|} \to 0$$

при $\xi \to \infty$. Тогда найдется такое число ξ_0, что при $|\xi| > \xi_0$ будет выполняться неравенство

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\sum_T |M_k|\right)\frac{2}{|\xi|} < \frac{\varepsilon}{6}. \tag{5}$$

В итоге из представления $F(\xi)$ в виде суммы

$$F(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\tau_0} f(t)\,e^{i\xi t}\,dt + \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\tau_0}^{\tau_0} f(t)\,e^{i\xi t}\,dt + \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{\tau_0}^{\infty} f(t)\,e^{i\xi t}\,dt,$$

выбора τ_0 и неравенств (3), (4) и (5) следует, что при $|\xi| > \xi_0$ будет $|F(\xi)| < \varepsilon$.

Следствие. *Если функция $f(x)$ абсолютно интегрируема на $(-\infty,\infty)$, то*

$$\lim_{\sigma\to\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t)\,\cos\sigma t\,dt = 0, \qquad \lim_{\sigma\to\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t)\,\sin\sigma t\,dt = 0.$$

Это следствие можно рассматривать как некоторый аналог леммы Римана для промежутка $(-\infty,\infty)$ для установления справедливости этого следствия достаточно заметить, что из стремления к нулю при $\xi \to \infty$ функции $F(\xi)$ следует стремление к нулю как вещественной, так и мнимой частей этой функции.

Установим теперь следующее утверждение.

Теорема. *Если абсолютно интегрируемая на $(-\infty,\infty)$ функция $f(x)$ имеет в точке x конечные односторонние производные $f'_+(x)$ и $f'_-(x)$, то интеграл Фурье в этой точке равен:*

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} d\xi \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t)\,e^{i\xi(t-x)}\,dt = \frac{1}{2}\,[f(x+0)+f(x-0)].$$

Доказательство. Покажем, что

$$\lim_{\sigma\to\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\sigma}^{\sigma} F(\xi)\,e^{-i\xi x}\,d\xi = \frac{1}{2}\,[f(x+0)+f(x-0)].$$

Выполнив в $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\sigma}^{\sigma} F(\xi)\, e^{-i\xi x}\, d\xi$ интегрирование под знаком интеграла и проведя элементарные преобразования, получим:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\sigma}^{\sigma} F(\xi)\, e^{-i\xi x}\, d\xi = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\sigma}^{\sigma} d\xi \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{i\xi t}\, e^{-i\xi x}\, dt =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t)\, dt \int\limits_{-\sigma}^{\sigma} e^{i\xi(t-x)}\, d\xi = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t)\, \frac{e^{i\xi(t-x)}}{i(t-x)}\Bigg|_{-\sigma}^{\sigma} dt =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t)\, \frac{e^{i\xi(t-x)} - e^{-i\xi(t-x)}}{2i} \cdot \frac{1}{t-x}\, dt = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t)\, \frac{\sin\sigma(t-x)}{t-x}\, dt =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(\tau+x)\, \frac{\sin\sigma\tau}{\tau}\, d\tau = \frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{\infty} [f(x+\tau) + f(x-\tau)]\, \frac{\sin\sigma\tau}{\tau}\, d\tau.$$

G другой стороны, очевидно, что

$$\frac{1}{2}\,[f(x+0) + f(x-0)] = \frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{\infty} [f(x+0) + f(x-0]\, \frac{\sin\sigma\tau}{\tau}\, d\tau.$$

Поэтому

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\sigma}^{\sigma} F(\xi)\, e^{-i\xi x}\, d\xi - \frac{1}{2}\,[f(x+0) + f(x-0)] =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{\infty} \left[\frac{f(x+\tau) - f(x+0)}{\tau} + \frac{f(x-\tau) - f(x-0)}{\tau}\right] \frac{\sin\sigma\tau}{\tau}\, d\tau =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{\delta} \frac{f(x+\tau) - f(x+0)}{\tau}\, \sin\sigma\tau\, d\tau + \frac{1}{\pi}\int\limits_{\delta}^{\infty} \frac{f(x+\tau) - f(x+0)}{\tau}\, \sin\sigma\tau\, d\tau +$$

$$+ \frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{\delta} \frac{f(x-\tau) - f(x-0)}{\tau}\, \sin\sigma\tau\, d\tau + \frac{1}{\pi}\int\limits_{\delta}^{\infty} \frac{f(x-\tau) - f(x-0)}{\tau}\, \sin\sigma\tau\, d\tau,$$

где число $\delta > 0$ произвольно. Первый и третий интегралы в последнем выражении стремятся к нулю при $\sigma \to \infty$ в силу Римана, а второй и четвертый интегралы стремятся к нулю при $\sigma \to \infty$ согласно следствию. Теорема доказана.